TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Diplomarbeit

On Fast Arbitrage-free Approximation of Forward Contracts

Ausgeführt am

Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dr. Thorsten Rheinländer und

Univ.Ass. Dr. Paul Eisenberg

durch

Daniel Krizanovic, BSc.

Achengasse 4, B/90, 1210 Wien

Wien, am 5. September 2017

Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei allen Leuten bedanken, die mich bei der Anfertigung dieser Diplomarbeit unterstützt haben. Ganz besonders möchte ich Herrn Univ.Ass. Dr. Paul Krühner und Herrn Univ.Prof. Dr. Thorsten Rheinländer für die fachliche und persönliche Unterstützung danken.
Darüber hinaus, möchte ich mich bei meinen Eltern Ljiljana Kovacek und Muhamed Kajdic, sowie meiner Schwester Brigitte Kovacek für die finanzielle und moralische Unterstützung während meines Studiums bedanken.
Abschließend möchte ich auch meiner Partnerin und meinen Freunden für den seelischen Halt, den sie mir für die Dauer meines Studiums gegeben haben, meinen Dank aussprechen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In der folgenden Diplomarbeit soll dem Leser zunächst der Handel von Rohstoffen wie Gas, Öl und Strom näher erläutert werden. Zudem soll der Leser einen Einblick in die Entwicklung und Struktur des Rohstoffmarktes, sowie dessen Besonderheiten erhalten. Besonders hervorgehoben sei hier die Problematik, dass Strom nicht lagerfähig ist und somit nur wenige Stunden, in manchen Fällen einen Tag vor seiner Herstellung, bereits am Energiemarkt verkauft werden muss.
Anschließend soll dem Leser die Theorie der Lévy Prozesse, sowie stochastischer partieller Differentialgleichungen vermittelt werden, welche unter Anderem in den darauffolgenden Kapiteln benötigt wird um das Grundmodell zur Modellierung der Terminkurve beschreiben zu können. Diese Theorie wird allgemeine Hilbertraum - wertige Lévy Prozesse umfassen und dem Leser das stochastische Integral bezüglich solcher Prozesse erklären. Die Theorie der stochastischen partiellen Differentialgleichungen wird ausgehend von C_0-Semigruppen aufgebaut. An dieser Stelle sei erwähnt, dass auch ein direkter Zugang zu stochastischen partiellen Differentialgleichungen möglich ist, welcher unabhängig von den zugrundeliegenden Hilberträumen ist.
Das grundlegende Modell der Terminkontrakte ist ein sogenanntes Heath Jarrow Morton Musiela Modell, welches bereits aus der Zinsstrukturmodellierung bekannt ist. Hervorgehoben sei an dieser Stelle, dass es sich bei diesem Modell um die Erweiterung des Heath Jarrow Morton Modells handelt, welche durch das Hinzufügen einer zusätzlichen additiven Zufallsstörgröße generiert wird. Diesen Vorgang bezeichnet man als Musiela Parametrisierung.
Aufgrund seiner hervorragenden Eigenschaften, eignet sich dieses Modell nicht nur für die Zinsstrukturmodellierung, sondern auch für andere Finanzinstrumente, so z.B. für die Modellierung von Terminkontrakten an Rohstoffmärkten.
Nach Vorstellung des Modells sollen, bereits bekannte Ergebnisse bezüglich der Approximation, sowie der Konvergenzgeschwindigkeit dargelegt werden.
Abschließend wird unter zusätzlichen Strukturvoraussetzungen eine Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit und damit eine effektivere Methode zur numerischen Berechnung der Terminkurve beschrieben.

2 Der Handel von Rohstoffen an Energiemärkten[1]

In folgendem Kapitel soll ein Überblick über Rohstoffmärkte, dem Handel und der Modellierung von Rohstoffen, mit Fokus auf elektrischen Strom gegeben werden. Da Elektrizität aus fossilen und erneuerbaren Energiequellen gewonnen wird und somit der Verkaufspreis abhängig vom Preis der zugrundeliegenden Ressource ist, mit der sie hergestellt wird, ist diese Form der Energie besonders komplex zu analysieren. Obwohl ein Teil des Stromes aus erneuerbaren Energiequellen und Kernkraft gewonnen wird, erfolgt die Herstellung hauptsächlich mit Hilfe fossiler Brennstoffe.
Im Zusammenhang mit der Herstellung und des Verkaufes von Elektrizität ergibt sich das Problem, dass eben diese nicht lagerfähig ist und somit oftmals bereits einige Stunden vor ihrer Herstellung verkauft werden muss. Zudem muss elektrischer Strom zum Zeitpunkt seiner Produktion konsumiert werden, weshalb der Strompreis sehr stark mit den Produktionskosten korreliert ist.

2.1 Rohstoffmärkte

Wie zuvor erwähnt ist es wichtig die Struktur der Rohstoffmärkte, sowie die Produktionskosten der zugrundeliegenden Energieträger zu analysieren, um so die Preisentwicklung von Elektrizität genauer verstehen zu können. Im Folgenden wollen wir uns besonders auf fossile Brennstoffe, wie Rohöl, Gas und Kohle beschränken. An dieser Stelle sei angemerkt, dass es sich bei diesen Energieträgern um eine kleine Repräsentationsklasse der handelbaren Rohstoffe handelt.

2.1.1 Handeln von Rohstoffen

Rohstoffe bilden eine eigene Klasse von Finanzgütern und aufgrund ihrer physischen Natur ergeben sich ihre Preise als das Gleichgewicht von Angebot und Nachfrage. Hinzu kommt die enorme Komplexität auf der Angebotsseite, da hier unter Anderem Lagerungskosten und Transportkosten berücksichtigt werden müssen. Diese korrekt zu berücksichtigen ist nicht immer einfach, insbesondere nicht, wenn man versucht den Rohstoffpreis mit Hilfe klassischer finanzmathematischer Methoden zu approximieren.
Zu Beginn des Rohstoffhandels handelte es sich bei Rohstoffmärkten um physische Märkte. Hieraus ergeben sich zwei besonders erwähnenswerte Märkte. Einerseits der sogenannte Spot Markt, bei dem die Lieferung umgehend erfolgt und andererseits der Forward Markt, bei dem die Lieferung zu einem vorher vereinbartem Termin in der Zukunft stattfindet.
Mit der Einführung von Finanzverträgen hat das Handelsvolumen an Rohstoffmärkten um ein Vielfaches zugenommen. Während Forwardverträge üblicherweise auf dem OTC(Over the counter) Markt gehandelt werden und somit das Risiko des Ausfalles einer der Vertragspartner getragen werden muss, handelt es sich bei den meisten Finanzverträgen um börsengehandelte Derivate, welche das Risiko des Ausfalls eines der Vertragspartner eliminieren und für genügend Liquidität auf dem Markt sorgen.
Der Handel auf dem physischen Markt und dem Finanzmarkt waren zu Beginn die einzigen

[1]Siehe [1], Kapitel 2

Möglichkeiten, um in den Rohstoffmarkt zu investieren. Mit der Aufnahme in Indizes wurde eine neue Möglichkeit geschaffen, in den Rohstoffmarkt zu investieren. Anfangs wurden Rohstoffe als optimales Mittel der Diversifikation eines Portfolios verkauft, da man ihnen eine strikt negative Korrelation mit dem Aktienmarkt zugesprochen hatte. Jedoch hat sich mit der Aufnahme von Rohstoffen in Indizes gezeigt, dass diese Korrelation nicht stets negativ sein muss. Nun wollen wir einige Möglichkeiten besprechen, in den Rohstoffmarkt zu investieren.

- Die erste und älteste Methode ist der Erwerb des entsprechenden Rohstoffes durch den direkten Kauf. Hierbei ergibt sich jedoch die Problematik der Lieferung, der Lagerung und der Verderblichkeit.
- Eine weitere Möglichkeit ist die Investition in ein Unternehmen, welches auf den entsprechenden Rohstoff spezialisiert ist, respektive hauptsächlich mit diesem Geschäfte betreibt. So könnte man Anteile von Exxon Mobile oder des österreichischen Mineralölverbandes (OMV) erwerben, um in Rohöl oder Gas zu investieren. Dabei handelt es sich jedoch um eine sehr indirekte Möglichkeit der Investition.
- Eine direktere Methode der Investition in Rohstoffe, ist der Kauf von Rohstofffutures und -Optionen. Durch diese Investitionsart wird die Transparenz und Rechtschaffenheit verbessert und es ist möglich, bereits mit vergleichsweise kleinen Investmentsummen hohe Gewinne zu erzielen.
- Die letzte Möglichkeit der Investition in Rohstoffe besteht darin, in entsprechende Rohstoffindizes zu investieren. Dabei ist ein Rohstoffindex ein Börsenindex auf einem Rohstoffmarkt und somit eine Kennzahl für die Entwicklung des Rohstoffes auf dem weltweiten Markt. Zur Zeit ist diese Form der Investition die Beliebteste, da der Investor nicht gezwungen ist, sich mit tiefer gehenden Details und den Rohstoff entsprechenden Besonderheiten zu beschäftigen. Somit ist es ihm möglich, für eine optimale Risikostreuung in seinem Portfolio zu sorgen.

Das Handelsvolumen von Rohstoffindizes stieg zwischen 2006 und 2007 von 90 Mrd. USD auf 200 Mrd. USD an, zeitgleich stiegen die Rohstoffpreise um 71% . In den Jahren 2008 und 2009 jedoch fielen die Preise dramatisch und man gab den Rohstoffinvestoren die Schuld, durch enorme Investitionen in Indexfonds, welche die Preise von Rohstofffutures weit über den üblichen Marktwert trieben, eine Finanzblase oder sogenannte Bubble generiert zu haben.

Finanzmathematisch sagen wir, dass ein Markt eine Finanzblase enthält, wenn der Preisprozess S unter der risikoneutralen Betrachtung ein strikt lokales Martingal ist. Da aber der Preisprozess stets positiv ist, folgt im Falle einer Finanzblase, dass er ein striktes Supermartingal ist und somit im Mittel strikt fallend ist. Bezeichnen wir mit $\mathbb{Q}$ das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß, so wäre die Existenz einer Finanzblase auf dem Markt äquivalent zur Bedingung, dass der Forwardpreis strikt unter dem aktuellen Preis liegt, also[2]

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T|\mathcal{F}_t] < S_t, \quad \text{für } 0 \le t < T.$$

[2]Siehe [2]

Der Theorie einer Finanzblase auf dem Rohstoffmarkt stellten sich einige Ökonomen entgegen und argumentierten mit der Tatsache, dass Rohstoffpreise aus dem Gleichgewicht von Angebot und Nachfrage entstehen und das riesige Wachstum der Preise, der steigenden Nachfrage nach Rohstoffen durch Schwellenländer, so zum Beispiel China zuzurechnen sind.

2.1.2 Neue Rohstoffmärkte

In folgendem Unterkapitel wollen wir zwei Märkte besprechen, welche von großer Relevanz für Elektrizität, aber auch die für dessen Gewinnung notwendigen Rohstoffe wie Öl, Gas und Kohle sind.

2.1.2.1 Wettermärkte Es hat sich gezeigt, dass die weltweite Wirtschaft besonders abhängig von vorherrschenden Wettersituationen ist. Besonders abhängig von der Wetterentwicklung sind der Energiesektor, der Tourismussektor, der Lebensmittelproduktionssektor und andere. Wir wollen uns jedoch nur auf den Energiesektor beschränken und die Auswirkungen des Wetters besprechen. Es stellt sich heraus, dass an besonders heißen und besonders kalten Tagen die Nachfrage nach Energie seitens der Bevölkerung anwächst. So muss an besonders heißen Tagen eine große Menge an elektrischem Strom in das Versorgungsnetz gespeist werden, aufgrund der Vielzahl von Klima- und Kühlgeräten. Die für Wettermärkte bedeutungsvollste Größe ist die Lufttemperatur. Aber auch Luftfeuchtigkeit und Luftdruck sind mit der Nachfrage und der Produktion von Elektrizität korreliert. Zudem hängt auch die Produktion von elektrischem Strom von diesen Größen ab, da an heißen Tagen die Kühlung der Turbinen und Generatoren in den Kraftwerken abnimmt und so weniger Strom produziert werden kann.
Im Falle erneuerbarer Energiequellen sind weitere Faktoren, wie Regenfall, eine dichte Wolkendecke und Wind relevant. Dabei denke man an Wasserkraftwerke, Solaranlagen und Windparks.

2.1.2.2 Emissionshandel[3] Ein für die Stromerzeugung sehr wichtiger Markt ist das sogenannte European Union Emissions Trading System (EU ETS), welches seitens des Europäischen Parlaments und des Rates der EU 2003 beschlossen wurde und am 1. Januar 2005 in Kraft trat. Ziel des EU ETS ist es Treibhausgasemissionen, in erster Linie Kohlenstoffdioxid, im Bereich der Stromerzeugung durch fossile Brennstoffe erheblich zu reduzieren. So ist es Unternehmen möglich, jährlich eine begrenzte Anzahl an handelbaren und unbegrenzt gültigen Zertifikaten zu erwerben. Jedes erworbene Zertifikat entspricht einer Tonne emittiertes CO_2 in der Produktion. Die Anzahl der jährlich beschränkt erwerbbaren Zertifikate wird jährlich bis 2020 um 1.74% gesenkt, danach um 2.2%.
Diese Zertifikate sind nicht in schriftlicher Form, also als Dokument erhältlich, sondern in rein elektronischer Form und werden auch nur in ebensolcher an Börsen, via Makler oder Over the Counter gehandelt. Möchte man solche Zertifikate erwerben, so ist es notwendig ein elektronisches Konto zu eröffnen, über welches sämtliche Transaktionen laufen.

[3] Siehe [3]

Einige Beispiele für Marktplätze mit Emissionsberechtigungen in der Europäischen Union sind

- ECX - European Climate Exchange, in London
- EEX - European Energy Exchange, in Leipzig
- EXAA - Energy Exchange Austria, in Wien

2.2 Besonderheiten der Elektrizität

Wie bereits zu Beginn dieser Arbeit erwähnt, ist eine Besonderheit von elektrischem Strom, dass dieser nicht lagerfähig ist. Es gibt jedoch weitere Besonderheiten, beispielsweise, dass der Handel stets Termingeschäfte umfasst. Spricht man in diesem Zusammenhang von Spotpreisen, so sind hier die "day-ahead" Preise, also jene Preise, welche einen Tag zuvor festgelegt wurden, gemeint. Ein weiterer Aspekt betreffend elektrischen Stromes ist, dass die Lieferung über eine gewisse Zeitspanne hinweg erfolgt.
Ebenfalls typisch für Strompreise sind sehr hohe Volatilitäten von 50% bis hin zu 200%, welche aufgrund plötzlicher und kurzfristiger Preissprünge entstehen. Anhand dieser Tatsache ist bereits zu erkennen, dass die Modellierung von Strompreisen eine weitaus höhere Komplexität birgt, als sonstige Finanzgüter.

3 Lévy Prozesse

Folgendes Kapitel soll dem Leser die Grundzüge der Theorie der Lévy Prozesse vermitteln, da das in Kapitel 6 vorgestellte Modell auf stochastischen partiellen Differentialgleichungen beruht, welche von einem Lévy Prozess generiert werden. Bevor wir uns mit der Theorie der Lévy Prozesse auseinandersetzen wollen, sollen in den zwei nachstehenden Kapitel einige Begriffe und Erkenntnisse der Funktionalanalysis, sowie der Theorie banachraumwertiger Zufallsvariablen angegeben werden.

3.1 Wichtige Begriffe der Funktionalanalysis[4]

3.1.1 Definition Es sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik auf X, wenn die folgenden Bedingungen $\forall x, y, z \in X$ erfüllt sind

1. $d(x,y) \geq 0 \wedge d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

3.1.2 Definition Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus X. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : \; d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

3.1.3 Bemerkung Ein metrischer Raum heißt vollständig genau dann, wenn jede Cauchyfolge in ihm konvergiert.

3.1.4 Definition[5] Eine Abbildung $x \mapsto \|x\|$ eines linearen Raumes X (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) nach $\mathbb{R}_0^+$ heißt Norm, falls für alle $x, y \in X$, sowie $\lambda \in \mathbb{C}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

1. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

Im Falle, dass nur Bedingung 2. und 3. gelten, heißt die Abbildung Seminorm, oder Halbnorm.

Ist nun auf X eine Norm definiert, so sprechen wir von einem normierten Raum. Jede Norm induziert vermöge $d(x,y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf X. Ist nun X als metrischer Raum vollständig(bezüglich dieser durch die Norm induzierte Metrik), so heißt er Banachraum.

3.1.5 Definition Es sei H ein Vektorraum. Eine Abbildung $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ heißt inneres Produkt oder Skalarprodukt, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\forall x \in H \backslash \{0\} : \; \langle x, x \rangle > 0$

[4] Siehe [5]
[5] Siehe [6]

2. $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

3. $\forall x, y, z \in H, \lambda \in \mathbb{C} : \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \wedge \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

Ein inneres Produkt ist somit eine positiv definite, schiefsymmetrische Sesquilinearform. Definiert man nun die Abbildung $\|.\| : H \to [0, \infty)$ durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für alle $x \in H$, so bildet diese Abbildung eine Norm auf H.

3.1.6 Definition Es sei H ein Vektorraum mit einem inneren Produkt. Ist H vollständig, also bezüglich der vom inneren Produkt induzierten Norm ein Banachraum, so heißt H Hilbertraum.

Betrachten wir nun eine Teilmenge $M \subseteq H$ eines Hilbertraums H für die gilt

$$\langle u, v \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } u = v \\ 0 & \text{für } u \neq v \end{cases},$$

so heißt M Orthonormalsystem. Ein Orthonormalsystem M heißt Orthonormalbasis von H, falls es kein echt größeres Orthonormalsystem gibt. Nun seien zwei Basen $\{x_n\}_{n \in I}$ und $\{y_n\}_{n \in I}$ des Hilbertraums H gegeben, wobei I eine beliebige Indexmenge sei. Wir sagen dann, dass die Basen zueinander äquivalent sind, wenn es einen Isomorphismus $\phi : H \to H$ gibt, sodass $\phi x_n = y_n$ für alle $n \in I$ gilt.

3.1.7 Definition Es sei I eine beliebige Indexmenge, eine Basis $\{x_n\}_{n \in I}$ eines Hilbertraums H heißt Rieszbasis von H, falls sie zu allen Orthonormalbasen von H äquivalent ist.

Ein für die folgenden Kapitel sehr wichtiger Begriff, ist der eines separablen Raumes. Diese wesentliche Eigenschaft gibt uns die Erkenntnis, dass der zugrundeliegende Hilbertraum eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt.

3.1.8 Definition Ein topologischer Raum heißt separabel, falls es eine höchstens abzählbare Teilmenge gibt, welche dicht in dem Raum liegt.

Abschließend wollen wir den dualen, bzw. adjungierten Operator eines Operators T definieren.

3.1.9 Definition Es seien H_1 und H_2 zwei Hilberträume und $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ ein bschränkter, linearer Operator. Dann existiert ein eindeutiger Operator $T^* : H_2 \to H_1$ für den gilt

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \quad \text{für alle} \quad x \in H_1.$$

Der Operator T^* heißt der adjungierte Operator von T.

3.1.10 Definition Es sei H ein Hilbertraum und T ein beschränkter, linearer Operator von H in sich selbst. Wir sagen der Operator T heißt

1. normal, wenn $TT^* = T^*T$
2. selbstadjungiert, wenn $T = T^*$
3. unitär, wenn $TT^* = T^*T = I$, d.h. T ist bijektiv mit $T^* = T^{-1}$.

3.2 Wahrscheinlichkeitstheorie auf Banachräumen[6]

In diesem Kapitel wollen wir zunächst Zufallsvariablen mit Werten in einem Banachraum betrachten. Anschließend wollen wir uns mit der Integrierbarkeit solcher Funktionen auseinandersetzen.

3.2.1 Definition Es sei X eine beliebige Menge und Σ eine $\sigma-$Algebra auf X. Ein Maß oder Maßfunktion ist eine Abbildung $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}^+$ so, dass

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$ für $(E_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ für alle $i \neq j$

Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, Σ enthalte die Borel'sche $\sigma-$Algebra $\mathcal{B}(X)$ und μ sei eine Maßfunktion auf (X, Σ). Die Funktion μ heißt dann

- lokal endlich, falls es für alle $x \in X$ eine offene Umgebung U von x gibt und $\mu(U) < \infty$;
- regulär von unten, falls

$$\mu(A) = \sup_{K\subset A, \text{K ist kompakt}} \mu(K) \quad \text{für alle } A \in \Sigma;$$

- regulär von oben, falls

$$\mu(A) = \inf_{E\supset A, \text{E ist offen}} \mu(E) \quad \text{für alle } A \in \Sigma;$$

Die folgende Definition erklärt den Begriff des Radonmaßes.

3.2.2 Definition Eine Maßfunktion auf der Borelschen $\sigma-$Algebra eines Hausdorffraums X, welche lokal endlich, regulär von oben und regulär von unten ist, heißt Radonmaß.

Nun können wir die Definition Banachraum - wertiger Zufallsvariablen angeben.

3.2.3 Definition Es sei $(X, \mathcal{B}(X))$ ein Banachraum versehen mit der Borel'schen $\sigma-$Algebra und $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung $\xi : \Omega \to X$ heißt dann eine Zufallsvariable mit Werten in einem Banachraum, falls

$$\mathbb{P}_\xi := \mathbb{P} \circ \xi^{-1}$$

[6]Siehe [7]

ein Radonmaß ist.

3.2.4 Bemerkung Es seien $(X, \mathcal{B}(X))$ und ξ wie in Definition 3.2.3. Dann existiert $\xi^* : \Omega \to X$ mit $\mathbb{P}[\xi = \xi^*] = 1$, $\xi^*(\Omega)$ ist separierbar und ξ^* ist eine Banachraumwertige Zufallsvariable.

Die Integrierbarkeit von Zufallsvariablen mit Werten in einem Banachraum wird in der folgenden Definition abgehandelt.

3.2.5 Definition Es sei $p \geq 1$. Wir definieren den Raum $\mathcal{L}^p(\Omega, X)$ als die Menge der X−wertigen Zufallsvariablen ξ mit $\mathbb{E}[\|\xi\|^p] < \infty$.

3.2.1 Gaußmaße auf Hilberträumen[7]

Ein Maß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ heißt Gaußmaß genau dann, wenn sein charakteristisches Funktional durch

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \eta, \xi \rangle_U} \, \mu(d\xi) = \exp\left(i\langle \eta, m\rangle_U - \frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}\eta, \eta\rangle_U \right), \quad \eta \in \mathbb{R}^d$$

gegeben ist. Hier ist U ein Hilbertraum, $m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{Q} = [q_{i,j}]$ eine symmetrische, nicht negativ definite $d \times d-$ Matrix. Ist $m = 0$, so heißt μ zentriert.

3.2.1.1 Definition Eine Zufallsvariable X mit Werten in einem Hilbertraum U ist Gauß'sch (zentriert Gauß'sch), falls die reellwertigen Zufallsvariablen $\langle X, x\rangle_U$ für alle $x \in U$ eine Gauß'sche (zentriert Gauß'sche) Verteilung besitzen. Ein Prozess X mit Werten in U heißt Gauß'sch, falls für alle $t_1, \ldots, t_n$ der Vektor $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ ein Gauß'sches Zufallselement in U^n ist.

Diese Definition kann anhand der folgenden Proposition leicht auf unendlich-dimensionale Räume erweitert werden.

3.2.1.2 Proposition Es sei X eine Gauß'sche Zufallsvariable mit Werten in einem Hilbertraum U. Dann ist $\mathbb{E}\|X\|_U^2 < \infty$ und

$$\mathbb{E}e^{s\|X\|_U^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - 2s\mathbb{E}\|X\|_U^2}}, \quad \text{für alle } s < \frac{1}{2\mathbb{E}\|X\|_U^2}.$$

Beweis Für den Beweis siehe [4], Theorem 3.31. □

Aus der vorherigen Proposition folgt, dass für jede zentrierte Gauß'sche Zufallsvariable X ein nicht negativer Spurklasse Operator $\mathcal{Q} : U \to U$ existiert, genannt der Kovarianzoperator von X, sodass

$$\mathbb{E}[\langle X, x\rangle_U \langle X, y\rangle_U] = \langle \mathcal{Q}x, y\rangle_U.$$

[7] Siehe [4], Kapitel 3

Es ist leicht ersichtlich, dass Tr $\mathcal{Q} = \mathbb{E}\|X\|_U^2$.

3.3 Lévy Prozesse - Definition und grundlegende Eigenschaften[8]

Das Hauptresultat, sowie das grundlegende Modell dieser Arbeit beruhen auf stochastischen partiellen Differentialgleichungen, welche von Lévy Prozessen mit Erwartungswert Null und endlicher Varianz generiert werden. Aus diesem Grund wollen wir in diesem Abschnitt die Theorie der Lévy Prozesse behandeln.

3.3.1 Grundlegende Eigenschaften

Im Folgenden wollen wir stets stochastische Prozesse mit Werten in einem linearen Raum E verstehen und mit $\mathcal{E}$ jene $\sigma-$Algebra auf E bezeichnen, sodass die Addition und Subtraktion messbare Abbildungen sind.
Zunächst wollen wir Lévy Prozesse mit Werten in einem Banachraum definieren.

3.3.1.1 Definition Ein stochastischer Prozess $X = (X_t, t \in I)$ mit Werten in einem separierbaren Banachraum E heißt stochastisch stetig, falls

$$\lim_{s \to t, s \in I} \mathbb{P}[\|X_t - X_s\|_E > \varepsilon] = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \ \forall t \in I.$$

3.3.1.2 Definition Es sei E ein separierbarer Banachraum, dann heißt ein stochastischer Prozess $L = (L(t), t \geq 0)$, mit Werten in E, Lévy Prozess, falls folgende Eigenschaften gelten:

- $L(0) = 0$,
- L hat stationäre Inkremente, d.h. für $0 \leq s \leq t$ gilt: $\mathcal{L}(L_t - L_s) = \mathcal{L}(L_{t-s})$,
- L hat unabhängige Inkremente, d.h. $\forall\ 0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ sind die Inkremente $L(t_1) - L(t_0), \ldots, L(t_n) - L(t_{n-1})$ unabhängig voneinander und
- L ist stochastisch stetig.

Die folgende Proposition erklärt den Begriff des Lévymaßes.

3.3.1.6 Proposition[9] Es sei X ein Lévy Prozess. Definiere eine Funktion auf den Borelmengen, welche nicht die Null enthalten durch

$$\nu(\Gamma) := \mathbb{E}[\sum_{0<t\leq 1} \mathbb{1}_\Gamma(\Delta X_t)],$$

$$\nu(0) := 0$$

Dann ist ν ein positives Maß, das sogenannte Lévymaß mit

(i) $\nu(\Gamma) < \infty$, falls Γ eine Borel'sche Menge ist, welche von der Null weg beschränkt ist.

[8] Siehe [4]
[9] Siehe [2]

(ii) $\int_{|x|\leq 1} x^2 \nu(dx) < \infty$.

$\nu(\Gamma)$ ist die erwartete Anzahl von Sprüngen im Einheits-Zeitintervall, die in die Menge Γ fallen.

Wir bezeichnen von nun an mit ϕ_t die Verteilung der Zufallsvariable $L(t)$ und mit $\phi * \nu$ die Faltung der Maße ϕ und ν. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) $\phi_0 = \delta_0$ und $\phi_{t+s} = \phi_t * \phi_s$ für alle $s, t \geq 0$.

(ii) $\phi_t(\{x : \|x\|_E < r\}) \to 1$ für $t \downarrow 0$ für alle $r > 0$.

Dann heißt die Familie (ϕ_t) Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen.

3.3.1.7 Definition Eine Funktion, welche auf den reellen Zahlen, oder einer Teilmenge der reellen Zahlen definiert ist, heißt càdlàg, falls sie rechtsstetig ist und die linken Limiten existieren. Sprechen wir von stochastischen Prozessen, so ist stets gemeint, dass deren Pfade càdlàg Funktionen sind.

3.3.1.8 Proposition Jeder Lévy Prozess besitzt eine càdlàg Modifikation.

Beweis Für den Beweis sei an [4], Theorem 4.3 verwiesen. □

3.3.2 Wiener Prozesse auf Hilberträumen

3.3.3.1 Definition Ein Lévy Prozess mit Erwartungswert Null und stetigen Trajektorien in einem Hilbertraum U, heißt Wiener Prozess.

Die folgende Proposition liefert grundlegende Eigenschaften von Wiener Prozessen mit Werten in einem Hilbertraum.

3.3.3.2 Proposition Es sei W ein Wiener Prozess mit Werten in einem Hilbertraum U. Dann ist W Gauß'sch und quadratisch integrierbar. Des Weiteren ist für alle $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ und $x_1, \ldots, x_n \in U$ der Zufallsvektor $(\langle W(t_1), x_1\rangle_U, \ldots, \langle W(t_n), x_n\rangle_U)$ normalverteilt, $\mathcal{N}(0, [q_{i,j}]_{i,j\in\{1,\ldots,n\}})$, mit

$$q_{i,j} = (t_i \wedge t_j)\langle \mathcal{Q}x_i, x_j\rangle_U, \quad \text{für } i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

und $\mathcal{Q}$ der Kovarianzoperator von W. Es sei nun weiter $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von U, bestehend aus Eigenvektoren von $\mathcal{Q}$ und bezeichne mit $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die entsprechenden Eigenwerte. Dann gilt

$$W(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} W_n(t)e_n, \quad t \geq 0,$$

wobei die reellwertigen Wiener Prozesse

$$W_n(t) = \langle W(t), e_n\rangle_U, \quad n \in \mathbb{N}$$

unabhängig voneinander sind und die Kovarianzen durch

$$\mathbb{E}[W_n(t)W_n(s)] = (t \wedge s)\gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

gegeben sind. Die oben angegebene Reihe konvergiert zudem $\mathbb{P} - f.s.$ und in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; U)$.

Beweis Für den Beweis siehe [4], Theorem 4.20. □

3.3.3 Lévy-Khinchin Zerlegung

In folgendem Abschnitt sei L ein càdlàg Lévy Prozess mit Werten in einem Hilbertraum U. Wie zuvor in Proposition 3.3.1.6 erwähnt, betrachten wir das Lévymaß einer Borelmenge A, welche nicht die Null enthält und die Anzahl der Sprünge bis zur Zeit $t \geq 0$ misst

$$\pi_A(t) := \sum_{s \leq t} \mathbb{1}_A(\Delta L(s)), \quad t \geq 0.$$

Nach Proposition 4.9 (iv) in [4] ist π_A ein Poissonprozess und es gilt $\mathbb{E}[\pi_A(t)] = t\,\mathbb{E}[\pi_A(1)] = t\,\nu(A)$. Hier ist ν ein endliches Maß auf jenen Mengen, welche nicht die Null enthalten.
Die folgende Proposition veranschaulicht dem Leser wie ein Lévy Prozess in unabhängige Prozesse zerlegt werden kann.

3.3.3.1 Proposition (Lévy-Khinchin Zerlegung)[10]

(i) Ist ν das zu einem Lévy Prozess gehörige Lévy Sprungmaß, so gilt

$$\int_U (\|y\|_U^2 \wedge 1)\, \nu(dy) < \infty$$

(ii) Jeder Lévy Prozess kann wie folgt dargestellt werden:

$$L(t) = at + W(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (L_{A_k}(t) - t \int_{A_k} y\, \nu(dy)) + L_{A_0}(t),$$

mit $A_0 := \{x : \|x\|_U \geq r_0\}$, $A_k := \{x : r_k \leq \|x\| < r_{k-1}\}$, (r_k) ist eine gegen 0 fallende Folge, W ein Wiener Prozess, alle Bestandteile der Zerlegung sind unabhängige Prozesse und die Reihe konvergiert $\mathbb{P} - f.s.$ gleichmäßig auf jedem beschränkten Teilintervall von $[0, \infty)$.

Beweis Für den Beweis sei an [4], Seite 55 verwiesen. □

3.3.4 Lévy-Khinchin Formel[11]

Ein direktes Resultat der Lévy-Khinchin Zerlegung von Lévy Prozessen ist die Lévy-Khinchin Formel.

[10] Siehe [4]
[11] Siehe [4]

3.3.4.1 Definition Es seien U und H zwei Hilberträume. Ein linearer Operator $R \in L(U,H)$ heißt nuklear, oder Spurklassenoperator, falls er wie folgt dargestellt werden kann:

$$Ru = \sum_k b_k \langle u, a_k \rangle_U, \quad u \in U.$$

Hier sind $\{a_k\} \subset U$ und $\{b_k\} \subset H$ so, dass $\sum_k \|a_k\|_U \|b_k\|_H < \infty$.
Wir bezeichnen mit $L_1^+(U)$ den Raum der nuklear symmetrischen, positiv definiten Operator.

Die nachstehende Proposition gibt Aufschluss über die charakteristische Funktion eines Lévy Prozesses, welche seine Verteilung eindeutig festlegt.

3.3.4.2 Proposition (Lévy-Khinchin Formel)[12]

(i) Es sei U ein Hilbertraum, $a \in U$, $\mathcal{Q} \in L_1^+(U)$ und ein nicht negatives Maß ν, welches auf $U \backslash \{0\}$ konzentriert ist und Bedingung (i) aus Proposition 3.3.3.1 erfüllt. Dann existiert eine Faltungshalbgruppe von Maßen (ϕ_t), sodass

$$\int_U e^{i\langle x,y\rangle_U} \phi_t(dy) = e^{-t\psi(x)}, \tag{1}$$

mit

$$\psi(x) = -i\langle a,x\rangle_U + \frac{1}{2}\langle \mathcal{Q}x,x\rangle_U + \int_U \Big(1 - e^{i\langle x,y\rangle_U} + \mathbb{1}_{\{\|y\|_U<1\}}(y) i\langle x,y\rangle_U\Big)\nu(dy). \tag{2}$$

(ii) Umgekehrt existieren für jede Faltungshalbgruppe von Maßen (ϕ_t), $a \in U$, $\mathcal{Q} \in L_1^+(U)$ und ein nicht negatives Maß ν, welches auf $U\backslash\{0\}$ konzentriert ist und Bedingung (i) aus Proposition 3.3.3.1 erfüllt, sodass (1) gilt und ψ wie in (2) gegeben ist.

Wir nennen das Maß ν in (2) Lévymaß oder Sprungmaß von L. Das Triplet $(a,\mathcal{Q},\nu)$ heißt dann das charakteristische Triplet von L.
Die Lévy-Khinchin Formel liefert uns die charakteristische Funktion eines Lévy Prozesses.

3.3.5 Quadratintegrierbare Lévy Prozesse[13]

In folgendem Abschnitt sei L ein Lévy Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ mit Werten in einem Hilbertraum U, von dem wir annehmen wollen, dass für $0 \le s < t$ die Inkremente $L_t - L_s$ unabhängig sind von $\mathcal{F}_s$.
Wir wollen nun zusätzlich annehmen, dass L quadratintegrierbar ist, dann gilt folgende Proposition, welche den Erwartungswert, die Kovarianz, sowie die Varianz eines Lévy Prozesses beschreibt.

3.3.5.1 Proposition[14] Es existieren ein $m \in U$ und ein linearer Operator $\mathcal{Q} \in L_1^+(U)$, sodass

[12] Siehe [4], Theorem 4.27
[13] Siehe [4]
[14] Siehe [4]

für alle $s, t \geq 0$ und $x, y \in U$

$$\mathbb{E}\langle L(t), x\rangle_U = \langle m, x\rangle_U t,$$
$$\mathbb{E}\langle L(t) - mt, x\rangle_U \langle L(s) - ms, y\rangle_U = t \wedge s\langle \mathcal{Q}x, y\rangle_U,$$
$$\mathbb{E}\|L(t) - mt\|_U^2 = t \operatorname{Tr} \mathcal{Q}.$$

Beweis Für den Beweis siehe [4], Theorem 4.44. □

Der Vektor m in Proposition 3.3.5.1 heißt Erwartungswert und der Operator $\mathcal{Q}$ heißt Kovarianz Operator des Prozesses L. An dieser Stelle sei festgehalten, dass der Kovarianz Operator von L gleich dem Kovarianz Operator von $L(1)$ ist.
Die nachstehende Proposition gibt an, unter welchen Voraussetzungen ein Lévy Prozess quadratisch integrierbar ist.

3.3.5.2 Proposition

(i) Ein Lévy Prozess L auf einem Hilbertraum U ist quadratintegrierbar genau dann, wenn das dazugehörige Lévymaß ν folgende Bedingung erfüllt

$$\int_U \|y\|_U^2 \, \nu(dy) < \infty.$$

(ii) Angenommen Bedingung (i) ist erfüllt und der Prozess L kann als $L(t) = at + W(t) + \sum_{n=1}^{\infty} L_n(t) + L_0(t)$ für $t \geq 0$ dargestellt werden. Hier sind die Prozesse W, L_n und L_0 unabhängig, W ist ein Wiener Prozess, L_0 ein zusammengesetzter Poisson Prozess mit Sprungintensität $\mathbb{1}_{\{\|y\|_U \geq r_0\}}(y)\nu(dy)$ und jedes L_n ein kompensierter, zusammengesetzter Poisson Prozess mit Sprungintensität $\mathbb{1}_{\{r_{n+1} \leq \|y\|_U < r_n\}}(y)\nu(dy)$.[15]
Des Weiteren sei $\mathcal{Q}_0$ der Kovarianz Operator des Wiener Prozesses und $\mathcal{Q}_1$ jener des Sprunganteils von L. Dann gilt

$$\langle \mathcal{Q}_1 x, z\rangle_U = \int_U \langle x, y\rangle_U \langle z, y\rangle_U \, \nu(dy), \quad x, z \in U$$

$$\mathbb{E}L(t) = \left(a + \int_{\{\|y\|_U \geq r_0\}} y \, \nu(dy)\right),$$

und der Kovarianz Operator $\mathcal{Q}$ von L ist gleich $\mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}_1$.

Beweis Für den Beweis siehe [4], Theorem 4.47. □

3.3.6 Martingaleigenschaft

In folgendem Abschnitt wollen wir angeben, wann ein Lévy Prozess zu einem Martingal wird. Hierfür sei $x \otimes y(z) := \langle x, z\rangle_U y$ für $x, y, z \in U$ und $L_1(U)$ sei der Raum der nuklearen Operatoren auf U.

3.3.6.1 Proposition

[15] Vgl. Proposition 3.3.3.1

(i) Ist L ein integrierbarer Lévy Prozess mit Erwartungswert Null, so ist L ein Martingal.

(ii) Ist L quadratintegrierbar mit Erwartungswert Null und Kovarianz Operator $\mathcal{Q}$, so sind die Prozesse $\|L(t)\|_U^2 - t\,\mathrm{Tr}\,\mathcal{Q}$ und $L(t) \otimes L(t) - t\,\mathcal{Q}$, $t \in [0,\infty)$ Martingale mit Werten in U und $L_1(U)$. Des Weiteren sind $\langle L, x\rangle_U$ und $\langle L, y\rangle_U$ quadratisch integrierbare Martingale für alle $x, y \in U$ und der Prozess

$$\langle L, x\rangle_U \langle L, y\rangle_U - t\,\langle \mathcal{Q}x, y\rangle_U, \quad t \geq 0$$

ist ein Martingal.

Beweis Für den Beweis siehe [4], Theorem 4.49. □

Die folgende Proposition erklärt den Begriff des Operator Spitzklammerprozesses.

3.3.6.2 Proposition Es sei M ein quadratintegrierbares càdlàg Martingal. Dann existiert ein eindeutiger, rechtsstetiger, $L_1^+(U)$-wertiger, wachsender und vorhersehbarer Prozess $(\langle\!\langle M, M\rangle\!\rangle_t, t \geq 0)$, genannt der Operator Spitzklammerprozess, sodass $\langle\!\langle M, M\rangle\!\rangle_0 = 0$ und der Prozess $(M(t) \otimes M(t) - \langle\!\langle M, M\rangle\!\rangle_t, t \geq 0)$ ist ein $L_1(U)$-wertiges Martingal. Zudem existiert ein $L_1^+(U)$-wertiger Prozess $(\mathcal{Q}_t, t \geq 0)$, sodass

$$\langle\!\langle M, M\rangle\!\rangle_t = \int_0^t \mathcal{Q}_s d\langle M, M\rangle_s, \quad \forall t \geq 0.$$

Beweis Für den Beweis siehe [4], Theorem 8.2. □

Proposition 3.3.6.1 sagt aus, dass $\langle L, L\rangle_t = t\,\mathrm{Tr}\,\mathcal{Q}$ und $\langle\!\langle L, L\rangle\!\rangle_t = t\,\mathcal{Q}$, für $t \geq 0$. Wir nennen den $L_1^+(U)$-wertigen Prozess $\mathcal{Q}$ aus Proposition 3.3.6.2 die Martingal Kovarianz von M.

4 Stochastische Integration Hilbertraumwertiger Martingale[16]

In diesem Kapitel wollen wir das stochastische Integral bezüglich eines Martingals mit Werten in einem Hilbertraum erklären und die Isometrie solcher Integrale einführen. Für das gesamte Kapitel sei $(U, \langle .,. \rangle_U)$ ein Hilbertraum und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkleitsraum. Des Weiteren bezeichne $\mathcal{M}^2(U)$ den Raum der quadratintgerierbaren càdlàg Martingale mit Werten in U.

4.1 Konstruktion des stochastischen Integrals

Hinsichtlich der folgenden Kapitel ist es nötig den Begriff des stochastischen Integrals $I_t^M(\Psi) := \int_0^t \Psi(s)dM(s)$, mit $M \in \mathcal{M}^2(U)$ und $\Psi(s,\omega)$ sind Operatoren von U in einen weiteren Hilbertraum H, zu definieren. Analog zu reellwertigen Martingalen definieren wir das stochastische Integral zunächst für einfache Funktionen. Mit $\mathcal{Q}$ bezeichnen wir, wie zuvor erwähnt die Martingal Kovarianz von M.

4.1.1 Definition Es bezeichne $L(U,H)$ den Banachraum der beschränkten, linearen Operatoren von U in H. Ein stochastischer Prozess Ψ mit Werten in $L(U,H)$ heißt dann einfach, falls eine Folge nicht negativer Zahlen $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, eine Folge von Operatoren $\Psi_j \in L(U,H)$, $j \in \{1, \dots, m\}$ und eine Folge von Ereignissen $A_j \in \mathcal{F}_j$, $j \in \{1, \dots, m\}$ existieren, sodass

$$\Psi(s) = \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{1}_{A_j} \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(s) \Psi_j, \quad s \geq 0.$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{S} := \mathcal{S}(U,H)$ den Raum aller einfachen Prozesse mit Werten in $L(U,H)$. Für einen einfachen Prozess Ψ, definieren wir das Integral durch

$$I_t^M(\Psi) := \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{1}_{A_j} \Psi_j (M(t_{j+1} \wedge t) - M(t_j \wedge t)), \quad t \geq 0$$

Für die weitere Theorie benötigen wir den Begriff des Hilbert-Schmidt Operators, welchen wir nun einführen wollen.

4.1.2 Definition Ein linearer Operator $R \in L(U,H)$ heißt Hilbert-Schmidt Operator, wenn

$$\sum_k \|Re_k\|_H^2 < \infty$$

für jede Orthonormalbasis $\{e_k\}$. Es sei $L_{(HS)}(U,H)$ der Raum aller Hilbert-Schmidt Operatoren von U in H. Dieser ist ein separierbarer Hilbertraum mit innerem Produkt

$$\langle S, R \rangle_{L_{(HS)}(U,H)} := \sum_k \langle Se_k, Re_k \rangle_H.$$

[16] Siehe [4], Kapitel 8

Die folgende Proposition gibt die Ito Isometrie für einfache Prozesse mit Werten in $L(U,H)$ an.

4.1.3 Proposition Für jeden einfachen Prozess Ψ gilt

$$\mathbb{E}\|I_t^M(\Psi)\|_H^2 = \mathbb{E}\int_0^t \|\Psi(s)\mathcal{Q}_s^{1/2}\|_{L_{(HS)}(U,H)} d\langle M,M\rangle_s, \quad t \geq 0.$$

Hier bezeichnet $\|.\|_{L_{(HS)}(U,H)}$ die Hilbert-Schmidt Norm auf $L_{(HS)}(U,H)$.

Beweis Für den Beweis siehe [4], Proposition 8.6. □

Es sei $T < \infty$. Wir versehen den Raum aller einfachen Prozesse $\mathcal{S}$ mit der Seminorm

$$\|\Psi\|_{M,T}^2 := \mathbb{E}\int_0^T \|\Psi(s)\mathcal{Q}_s^{1/2}\|_{L_{(HS)}(U,H)}^2 d\langle M,M\rangle_s.$$

Es bezeichne $\mathcal{L}_{M,T}^2(H)$ die Vervollständigung von $(\mathcal{S},\|.\|_{M,T})$. Für die explizite Konstruktion des Raumes $\mathcal{L}_{M,T}^2(H)$ sei der Leser an [4], Kapitel 8.3 verwiesen. Die Norm auf $\mathcal{L}_{M,T}^2(H)$ wird mit $\|.\|_{M,T}$ bezeichnet. Des Weiteren sei der Raum $\mathcal{L}_{M,T,U}^2(H)$ die Klasse der $L(U,H)$-wertigen Prozesse aus $\mathcal{L}_{M,T}^2(H)$.
Die nachstehende Proposition formuliert die Ito Isometrie für Prozesse des Raumes $\mathcal{L}_{M,T}^2(H)$, sowie unter welchen Bedingungen das stochastische Integral ein quadratisch integrierbares Martingal ist.

4.1.4 Proposition

(i) Für jedes $t \in [0,T]$ existiert eine eindeutige Erweiterung von I_t^M zu einem stetigen, linearen Operator, welcher auch mit $I_t^M : (\mathcal{L}_{M,T}^2(H),\|.\|_{M,T}) \to L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};H)$ bezeichnet wird. Zudem gilt für alle $\Psi \in \mathcal{L}_{M,T}^2(H)$, $\mathbb{E}\|I_T^M(\Psi)\|_H^2 = \|\Psi\|_{M,T}^2$.

(ii) Für alle $\Psi \in \mathcal{L}_{M,T}^2(H)$ und $0 \leq s \leq t \leq T$ gilt $\mathbb{1}_{(s,t]}\Psi \in \mathcal{L}_{M,T}^2(H)$ und

$$\mathbb{E}\|I_t^M(\Psi) - I_s^M(\Psi)\|_H^2 = \|\mathbb{1}_{(s,t]}\Psi\|_{M,T}^2 \leq \|\Psi\|_{M,T}^2.$$

(iii) Für jedes $\Phi \in \mathcal{L}_{M,T}^2(H)$, ist $(I_t^M(\Phi), t \in [0,T])$ ein H-wertiges Martingal. Dieses ist quadratintegrierbar, quadratisch im Erwartungswert stetig und $I_0^M(\Psi) = 0$.

(iv) Für alle $\Phi,\Psi \in \mathcal{L}_{M,T,U}^2(H)$ und für alle $t \in [0,T]$ ist

$$\langle I^M(\Psi), I^M(\Phi)\rangle_t = \int_0^t \langle \Psi(s)\mathcal{Q}_s^{1/2}, \Phi(s)\mathcal{Q}_s^{1/2}\rangle_{L_{(HS)}(U,H)}\, d\langle M,M\rangle_s$$

und

$$\langle\langle I^M(\Psi), I^M(\Psi)\rangle\rangle_t = \int_0^t \Psi(s)\mathcal{Q}_s\Psi^*(s)\, d\langle M,M\rangle_s.$$

(v) Es sei A ein beschränkter, linearer Operator von H in einen weiteren Hilbertraum V. Dann gilt für jedes $\Phi \in \mathcal{L}^2_{M,T}(H)$, dass $A\Phi \in \mathcal{L}^2_{M,T}(V)$ und $AI^M(\Phi) = I^M(A\Phi)$.

Beweis Für den Beweis siehe [4], Theorem 8.7. □

4.2 Stochastisches Integral bezüglich eines Lévy Prozesses

In diesem Abschnitt wollen wir das stochastische Integral bezüglich quadratintegrierbaren Lévy Martingalen einführen. Hierfür ist es notwendig, eine neue Klasse von Martingalen zu definieren. Von nun an betrachten wir Martingale, welche die folgende Bedingung erfüllen.

$$\exists \mathcal{Q} \in L_1^+(U) : \forall 0 \le s \le t, \quad \langle\!\langle M, M \rangle\!\rangle_t - \langle\!\langle M, M \rangle\!\rangle_s \le (t-s)\mathcal{Q}. \tag{3}$$

Es sei $\mathcal{Q}^{-1/2}$ der pseudoinverse Operator, welcher in [4], (7.1) definiert wurde und sei $\mathcal{H} := \mathcal{Q}^{1/2}$, versehen mit dem inneren Produkt $\langle \psi, \phi \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \left(\mathcal{Q}^{-1/2}\right) \psi, \left(\mathcal{Q}^{-1/2}\right) \phi \right\rangle$. Des Weiteren sei

$$\mathbf{L}^2_{\mathcal{H},T} := L^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{P}_{[0,T]}, \mathbb{P}dt; L_{(HS)}(\mathcal{H}, H)).$$

4.2.1 Proposition[17] Angenommen Bedingung (3) ist erfüllt, dann ist $\mathcal{L}^2_{M,T} \subseteq \mathbf{L}^2_{\mathcal{H},T}$ und für jedes $X \in \mathbf{L}^2_{\mathcal{H},T}$ gilt

$$\mathbb{E}\| \int_0^t X(s)\, dM(s) \|_H^2 \le \mathbb{E} \int_0^t \|X(s)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H},H)}\, ds.$$

4.2.2 Korollar Falls $\mathcal{Q}$ konstant ist, so ist

$$\mathcal{L}^2_{M,T} = \mathbf{L}^2_{\mathcal{H},T} = L^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{P}_{[0,T]}, \mathbb{P}dt; L^2_{(HS)}(\mathcal{H}, H)),$$

und für $\Psi \in \mathcal{L}^2_{M,T}$ ist das stochastische Integral ein quadratisch integrierbares Martingal mit

$$\mathbb{E}\|I_T^M(\Psi)\|_H^2 = \mathbb{E} \int_0^T \|\Psi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H},H)}\, ds,$$

$$\langle\!\langle I^M(\Psi), I^M(\Psi) \rangle\!\rangle_t = \int_0^t \Psi(s)\Psi^*(s)\, ds, \quad t \in [0,T],$$

$$\langle I^M(\Psi), I^M(\Psi) \rangle_t = \int_0^t \|\Psi(s)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H},H)}\, ds, \quad t \in [0,T].$$

Vergegenwärtigen wir uns, dass gemäß Proposition 3.3.3.1 jeder Lévy Prozess L mit Werten in einem Hilbertraum U eine Zerlegung der Form

$$L(t) = mt + M(t) + P(t), \quad t \ge 0$$

besitzt. Hier ist $m \in U$, M ein quadratisch integrierbares Martingal in U und P ein zusammengesetzter Poisson Prozess mit Lévymaß μ_P. Wir wollen annehmen, dass M und P auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ definiert sind, M ein Martingal bezüglich dieser Filtration und P adaptiert bezüglich eben dieser ist. Für $h \ge 0$ seien zusätzlich die

[17] Vgl. [4], Proposition 8.16

Inkremente $P(t+h) - P(t)$ unabhängig von $\mathcal{F}_t$. Abschließend wollen wir annehmen, dass $\mu_M(d\omega, dt) = d\langle M, M\rangle_t(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ absolut stetig ist bezüglich $dt\mathbb{P}(d\omega)$. Unser Ziel ist es, das stochastische Integral

$$I(t) := \int_0^t \Phi(s)\, ds + \int_0^t \Psi_1(s)\, dM(s) + \int_0^t \Psi_2(s)\, dP(s), \quad \text{für } t \in [0,T] \tag{4}$$

mit endlichem Zeithorizont T zu definieren, wobei Φ, Ψ_1, Ψ_2 operatorwertige Prozesse sind. Es sei dem Leser in Erinnerung gerufen, dass der zusammengesetzte Poisson Prozess $P(t)$ dargestellt werden kann als $P(t) = \sum_{j=1}^{\Pi(t)} Z_j$ mit unabhängigen Zufallsvariablen Z_j in V mit Verteilung

$$\mathbb{P}(Z_j \in A) = \frac{\mu_P(A)}{\mu_P(V)}, \quad j \in \mathbb{N}$$

und Π ist ein Poisson Prozess mit Intensität $\mu_P(V)$.
Angenommen (V_m) ist eine wachsende Folge von beschränkten und messbaren Teilmengen von V, so können wir für jedes $m > 0$ eine Stoppzeitenfolge wie folgt definieren

$$\tau_m := \inf_{t \geq 0}\{P(t) - P(t^-) \notin V_m\} = \inf_{j \in \mathbb{N}}\{Z_j \notin V_m\}.$$

Gilt $V = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m$, so ist (τ_m) eine gegen ∞ wachsende Folge. Für den Beweis, sowie weitere Konstruktionen sei an dieser Stelle auf [4], Seite 124 ff verwiesen. Wir wollen lediglich das Endresultat vorstellen, in welchem das stochastische Integral für operatorwertige Prozesse definiert wird.

4.2.3 Proposition Sind für die Integranden Φ, Ψ_1, Ψ_2 die Bedingungen

1. $\Phi : \Omega \times [0,T] \to H$ ist messbar und $\mathbb{P}(\int_0^T \mathbb{1}_{[0,\tau_m]}(t)\|\Phi\|_H\, dt < \infty) = 1$, für alle $m \in \mathbb{N}$.
2. Für jedes $m \in \mathbb{N}$, ist $\Psi_1 \mathbb{1}_{[0,\tau_m]} \in \mathcal{L}^2_{M,T}(H)$.
3. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathbb{1}_{[0,\tau_m]}\Psi_2 \in L^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{P}_T, \mathbb{P}\, dt; L_{(HS)}(\mathcal{H}_m, H)),$$

$$(\omega, t) \mapsto \mathbb{1}_{[0,\tau_m]}(t)\Psi_2(t)u_m$$

ist messbar und

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T \mathbb{1}_{[0,\tau_m]}(t)\|\Psi_2(t)\|_H\, dt < \infty\right) = 1.$$

erfüllt, so ist für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$I_m(t) := \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_m]}(s)(\Phi(s) + \Psi_2(s)u_m)ds + \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_m]}(s)\Psi_1(s)dM(s) + \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_m]}(s)\Psi_2(s)dM_m(s)$$

für alle $t \in [0, T]$ wohldefiniert und besitzt eine càdlàg Modifikation. Das stochastische Integral (4) ist ein càdlàg Prozess mit $I(\omega, t) = I_m(\omega, t)$ für $\omega \in \Omega$ und $t \in [0, \tau_m(\omega) \wedge T]$. Mit Lemma 8.19, Peszat und Zabczyk [4] folgt, dass das Integral I wohldefiniert ist.

5 Stochastische partielle Differentialgleichungen[18]

Dieses Kapitel soll die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen linearer stochastischer partieller Differentialgleichungen, welche von einem lokal quadratisch integrierbaren Martingal generiert werden behandeln. Es wird zudem das Konzept schwacher und milder Lösungen vorgestellt und deren Äquivalenz gezeigt. Auf die Thematik semilinearer stochastischer partieller Differentialgleichungen wird in dieser Diplomarbeit nicht eingegangen. Hierfür sei der Leser an Peszat und Zabczyk [4] verwiesen. Zunächst wollen wir den Fall deterministischer linearer Gleichungen betrachten.

5.1 Deterministische lineare Gleichungen

Gehen wir zunächst von einem linearen Operator A_0 aus, welcher auf einem dichten Teilraum $D_0 := D(A_0)$ eines Banachraumes B definiert wird. Hier bezeichnet $D(A_0)$ den Definitionsbereich des Operators A_0. Betrachte nun die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} = A_0 y, \quad y(0) = y_0 \in D_0 \tag{5}$$

und bezeichne mit $y(t)$, $t \geq 0$ die Lösung der Gleichung. Da die Gleichung linear ist, hängt die Lösung auch linear vom Startwert y_0 ab, d.h. $y(t) = \mathcal{U}_t y_0$, $t \geq 0$, wobei $\mathcal{U}_t$ eine lineare Transformation von D_0 in B ist. Das Cauchy Problem (5) ist gerade dann wohl formuliert auf B, wenn die Operatoren $\mathcal{U}_t$ für $t \geq 0$ eine stetige Fortsetzung besitzen und für alle $z \in B$ die Abbildung $t \mapsto \mathcal{U}_t z$ stetig ist. Diese Abbildung wird auch verallgemeinerte Lösung genannt. Offensichtlich erfüllen die Operatoren $\mathcal{U}_t$, $t \geq 0$ die folgenden zwei Bedingungen:

(C_0-1) $\mathcal{U}_0 = I$ und $\mathcal{U}_t\mathcal{U}_s = \mathcal{U}_{t+s}$ für alle $s, t \geq 0$.

(C_0-2) $[0,\infty) \ni t \mapsto \mathcal{U}_t z \in B$ ist stetig für alle $z \in B$, oder äquivalent dazu $\|\mathcal{U}_t z - z\|_B \to_{t\downarrow 0} 0$ für alle $z \in B$.

Diese Eigenschaften bringen uns zu dem Konzept von C_0-Semigruppen, welche wie folgt definiert sind.

5.1.1 Definition Eine Familie beschränkter, linearer Operatoren $(\mathcal{U}_t, t \geq 0)$ auf einem Banachraum $(B, \|.\|_B)$ heißt C_0-Semigruppe, wenn die Bedingungen (C_0-1) und (C_0-2) erfüllt sind.

Grundlegende Eigenschaften von Semigruppen sind in nachstehender Proposition angegeben.

5.1.2 Proposition

(i) Ist $\mathcal{U}$ eine C_0-Semigruppe auf B, so existieren ω und $M > 0$, sodass

$$\|\mathcal{U}_t z\|_B \leq e^{\omega t} M \|z\|_B, \quad \text{für alle } z \in B,\ t \geq 0.$$

[18] Siehe [4], Kapitel 9

(ii) Generiert ein Operator A, welcher zunächst nur auf einem dichten Teilraum definiert ist eine C_0−Semigruppe $\mathcal{U}$, so ist A geschlossen und für alle $z \in D(A)$ und $t > 0$ gilt

$$\mathcal{U}_t z \in D(A) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\mathcal{U}_t z = A\mathcal{U}_t z = \mathcal{U}_t A z.$$

Der zweite Teil der Proposition zeigt, dass für $y_0 \in D(A)$ die Abbildung $t \mapsto \mathcal{U}_t y_0$ eine Lösung der Gleichung $\frac{dy}{dt}(t) = Ay(t)$, $y(0) = y_0$ ist.
Betrachten wir nun die entsprechende Gleichung mit einer H-wertigen Störfunktion ψ:

$$\frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + \psi(t), \quad y(0) = y_0 \in H, \tag{6}$$

so besitzt diese Gleichung eine eindeutige Lösung, falls $y_0 \in D(A)$ und ψ stetig differenzierbar ist. Die Lösung wird mit der aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannten Variation der Konstanten berechnet,

$$y(t) = \mathcal{U}_t y_0 + \int_0^t \mathcal{U}_{s-t}\psi(s)ds, \quad t \geq 0. \tag{7}$$

Dieser Ausdruck ist auch für Funktionen ψ mit weniger Glattheit sinnvoll. So z.B. für $\psi \in L^1_{loc}([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)), {}_1; H)$. In diesem Fall ist y durch (7) gegeben und heißt milde oder verallgemeinerte Lösung von (6).
Eine stetige Funktion y heißt Lösung von (6), falls

$$\langle y(t), h\rangle_H = \langle y_0, h\rangle + \int_0^t \langle y(s), A^* h\rangle_H ds + \int_0^t \langle \psi(s), h\rangle_H ds$$

für alle $t \geq 0$ und $h \in D(A^*)$ erfüllt ist.

5.2 Milde Lösungen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Gleichung

$$dX = (AX + F(X))dt + G(X)dM, \quad X(t_0) = X_0, \tag{8}$$

wobei A der Generator einer C_0−Semigruppe $\mathcal{U}$ auf einem Hilbertraum H ist und M ein quadratisch integrierbares Martingal mit Werten in einem Hilbertraum U. Das Martingal M sei auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ definiert und soll zudem Bedingung (3) aus Kapitel 4.2 erfüllen. Ist M ein Lévy Prozess auf H, so kann $\mathcal{H}$[19] als Hilbertraum mit reproduzierendem Kern (RKHS) von M gewählt werden. In diesem Fall ist $\mathcal{L}^2_{T,M}(H) = L^2_{\mathcal{H},T}(H)$. Die Forderung, dass M quadratisch integrierbar ist, berücksichtigt SPDE's, welche von einem lokalen Martingal generiert werden nicht und somit liefert die nachfolgende Theorie in diesem Fall keine Erkenntnisse über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Den wichtigeren Fall, also jener in dem M ein Lévy Prozess ist, wollen wir später behandeln.
Wir wollen annehmen, dass X_0 eine $\mathcal{F}_{t_0}$−messbare Zufallsvariable auf H ist. Die nicht linearen

[19] Vgl. Kapitel 4.2

Anteile in (8) sind im Allgemeinen nicht stetig auf H. Des Weiteren sollen $F : D(F) \to H$ und $G : D(G) \to L(\mathcal{H}, H)$ die folgenden Bedingungen, ähnlich der Lipschitzbedingungen, erfüllen.

(F) An F seien die nachstehenden Bedingungen gerichtet:
$D(F)$ sei dicht in H und es existiere eine Funktion $a : (0,\infty) \to (0,\infty)$, sodass $\int_0^T a(t)\,dt < \infty$ für alle $T < \infty$, sodass für alle $t > 0$ und $x, y \in D(F)$ gilt

$$\|\mathcal{U}_t F(x)\|_H \le a(t)(1 + \|x\|_H),$$

$$\|\mathcal{U}_t (F(x) - F(y))\|_H \le a(t)\|x - y\|_H.$$

(G) An G seien die folgenden Bedingungen gerichtet:
$D(G)$ sei dicht in H und es existiere eine Funktion $b : (0,\infty) \to (0,\infty)$, sodass $\int_0^T b^2(t)\,dt < \infty$ für alle $T < \infty$, sodass für alle $t > 0$ und $x, y \in D(G)$ gilt

$$\|\mathcal{U}_t G(x)\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H},H)} \le b(t)(1 + \|x\|_H),$$

$$\|\mathcal{U}_t (G(x) - G(y))\|_{L_{(HS)}(\mathcal{H},H)} \le b(t)\|x - y\|_H.$$

Gilt Bedingung (G), falls $\mathcal{U}_t = I$ für $t \ge 0$, so bezeichnen wir dies mit (G').

Da $D(F)$ und $D(G)$ dicht in H liegen, folgt unter den Bedingungen (F) und (G), dass $\mathcal{U}_t F$ und $\mathcal{U}_t G$ jeweils eine eindeutige, stetige Fortsetzung von H in H, bzw. von H in $L(\mathcal{H}, H)$ besitzen. Wir wollen ihre Fortsetzungen der Einfachheit wegen auch mit $\mathcal{U}_t F$ und $\mathcal{U}_t G$ bezeichnen. Die Bedingungen (F) und (G) sind ebenfalls für die Fortsetzungen gültig.

Nun ist es möglich einen Lösungsbegriff für Gleichung (8) anzugeben. In folgender Definition wollen wir den Begriff der milden Lösung einführen.

5.2.1 Definition Es sei X_0 eine quadratisch integrierbare $\mathcal{F}_{t_0}$ messbare Zufallsvariable auf H. Ein vorhersehbarer Prozess $X : [t_0, \infty) \times \Omega \to H$, welcher zur Zeit t_0 in X_0 startet, heißt milde Lösung von Gleichung (8), falls

$$\sup_{t \in [t_0, T]} \mathbb{E}\|X_t\|_H^2 < \infty, \quad \forall T \in (t_0, \infty) \qquad (*)$$

und

$$X(t) = \mathcal{U}_{t-t_0} X_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{U}_{t-s} F(X(s))\,ds + \int_{t_0}^t \mathcal{U}_{t-s} G(X(s))\,dM(s), \quad \mathbb{P} - f.s., \quad \forall t \ge t_0$$

Die Wohldefiniertheit, Vorhersehbarkeit und Messbarkeit der in Definition 5.2.1 auftretenden Integrale wird in [4], Seite 143 exakt erläutert. Des Weiteren wird in Peszat und Zabczyk [4], Seite 143ff eine Lösung der vereinfachten SPDE $dX = AXdt + dM$, $X(0) = X_0$ angegeben.

5.3 Das Konzept der Lösungen[20]

Hier und im Folgenden bezeichne $M(n \times m)$ den Raum aller Matrizen der Dimension $n \times m$. Angenommen $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $G : \mathbb{R}^d \to M(d \times n)$ und M sei ein quadratisch integrierbares Martingal mit Werten in $\mathbb{R}^d$. In der klassischen Theorie der stochastischen Gleichungen ist man stets bemüht, càdlàg Lösungen zu finden. Wie in [4], Kapitel 9.4.4 anhand eines Gegenbeispiels gezeigt, müssen milde Lösungen im Allgemeinen nicht càdlàg sein. Aus diesem Grund wollen wir von den Lösungen nur fordern, dass sie vorhersehbar sind und nicht, dass die linken Limiten existieren. Wir wollen nun den Unterschied zwischen Gleichungen mit und ohne linken Limiten in $\mathbb{R}^d$ beschreiben. Hierfür betrachten wir die Gleichungen

$$y(t) = a + \int_{(0,t]} G(y(s-))\, \nu(ds) \quad t \in [0,T] \tag{9}$$

und

$$y(t) = a + \int_{(0,t]} G(y(s))\, \nu(ds) \quad t \in [0,T], \tag{10}$$

wobei ν ein endliches, eventuell zufälliges Maß auf $[0,T]$ ist und die Dimension $d = 1$ gewählt wird.

Die folgende Proposition erklärt die Unterschiede zwischen den Lösungen von Gleichung (9) und (10).

5.3.1 Proposition Es sei G Lipschitz-stetig, dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Sind die Lösungen von (9) und (10) beschränkt, so sind sie ebenfalls càdlàg.
2. Gleichung (9) besitzt immer eine eindeutige Lösung, wohingegen Gleichung (10) keine, eine oder mehrere Lösungen besitzen kann.
3. Auch wenn die Lösung von (10) eindeutig ist, so ist diese verschieden von der Lösung von (9).

Beweis Für den Beweis siehe [4], Proposition 9.8. □

Die folgende Proposition beschreibt die stochastische Äquivalenz stochastischer Integrale bezüglich quadratisch integrierbarer Martingle.

5.3.2 Proposition Es sei M ein quadratisch integrierbares Martingal, welches Bedingung (3) erfüllt. Weiter seien ψ und $\tilde{\psi}$ zwei vorhersehbare, stochastisch äquivalente Prozesse, sodass

$$\mathbb{E} \int_0^t \left(\|\psi(s)\|^2_{L_{(H_s)}(\mathcal{H},H)} + \|\tilde{\psi}(s)\|^2_{L_{(H_s)}(\mathcal{H},H)} \right) ds < \infty.$$

[20] Siehe [4], Kapitel 9.2.1

Dann sind die stochastischen Integrale

$$\int_0^t \psi(s)\, dM(s), \qquad \int_0^t \tilde{\psi}(s)\, dM(s)$$

ebenfalls stochastisch äquivalent, d.h. sie sind gleich bis auf Modifikation.

Beweis Für den Beweis siehe [4], Proposition 9.9. □

Die folgende Proposition gibt an, unter welchen Voraussetzungen $y(t-)$ Lösung der Gleichung $dy(t) = G(y(t))\, dM(t),\ y(0) = a$ ist.

5.3.3 Proposition Angenommen die Abbildung $G : H \to L_{(HS)}(\mathcal{H}, H)$ sei Lipschitz-stetig und sei Bedingung (3) erfüllt. Es sei y eine càdlàg Lösung der Gleichung

$$dy(t) = G(y(t-))\, dM(t), \quad y(0) = a$$

Dann ist $\tilde{y}(t) := y(t-)$, $t \geq 0$, äquivalent zu y und eine vorhersehbare Lösung von

$$dy(t) = G(y(t))\, dM(t), \quad y(0) = a.$$

Beweis Für den Beweis siehe [4], Proposition 9.10. □

5.4 Äquivalenz milder und schwacher Lösungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem Konzept der schwachen Lösung, wobei wir hier von schwachen Lösungen im Sinne partieller Differentialgleichungen und nicht im Sinne von stochastischen Differentialgleichungen sprechen. Zudem bezeichne $D(A^*)$ den Definitionsbereich des adjungierten Operators A^*.

Die nachstehende Definition formuliert den Begriff der schwachen Lösung.

5.4.1 Definition Angenommen die Bedingungen (F) und (G) sind erfüllt. Es sei $t_0 \geq 0$ und X_0 eine quadratisch integrierbare, $\mathcal{F}_t$ messbare Zufallsvariable in H. Ein vorhersehbarer H-wertiger Prozess $(X(t),\ t \geq t_0)$ heißt schwache Lösung von Gleichung (8), falls er Bedingung $(*)$ erfüllt und für alle $a \in D(A^*)$ und $t \geq t_0$ gilt

$$\langle a, X(t)\rangle_H = \langle a, X_0\rangle_H + \int_{t_0}^t \langle A^* a, X(s)\rangle_H ds + \int_{t_0}^t \langle a, F(X(s))\rangle_H ds + \int_{t_0}^t \langle G^*(X(s))a, dM(s)\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Oftmals ist $D(A^*)$ nicht explizit gegeben, aus diesem Grund ist es wichtig, die Gleichung aus Definition 5.4.1 für Elemente a aus dem sogenannten Kern von A^* zu verifizieren. Eine Menge $D \subset D(A^*)$ heißt Kern von A^*, falls sie eine linear dichte Teilmenge von $D(A^*)$ ist. Der Raum $D(A^*)$ ist dabei mit der Graph Norm

$$\|a\|_{D(A^*)} := (\|a\|_H^2 + \|A^* a\|_H^2)^{1/2}, \quad a \in D(A^*)$$

versehen. Ein hinreichendes Kriterium dafür, dass eine Menge D ein Kern von $D(A^*)$ ist, dass D dicht in H liegt. Für den Fall nicht linearer Abbildungen, welche zwangsläufig nicht auf ganz H definiert sein müssen, ist folgendes Lemma hilfreich.

5.4.2 Lemma Angenommen die Bedingungen (F) und (G) sind erfüllt, so existiert für jedes $a \in D(A^*)$ eine Konstante $c(a) < \infty$, sodass die Abschätzungen

$$|\langle a, F(x)\rangle_H\| \leq c(a)(1 + \|x\|_H),$$

$$|\langle a, F(x) - F(y)\rangle_H| \leq c(a)\|x - y\|_H,$$

für alle $x, y \in D(F)$ und

$$\|G^*(x)a\|_{\mathcal{H}} \leq c(a)(1 + \|x\|_H),$$

$$\|(G^*(x) - G^*(y))a\|_{\mathcal{H}} \leq c(a)\|x - y\|_H,$$

für alle $x, y \in D(G)$ gelten.

Beweis Für den Beweis siehe [4], Lemma 9.13. □

5.4.3 Korollar Es seien erneut die Bedingungen (F) und (G) erfüllt, dann haben für alle $a \in D(A^*)$ die Abbildungen

$$D(F) \ni x \mapsto \langle a, F(x)\rangle_H \in \mathbb{R}, \quad D(G) \ni x \mapsto G^*(x)a \in \mathcal{H}$$

eindeutige, stetige Fortsetzungen $\langle a, F(.)\rangle_H$ und $G^*(.)a$, welche die Abschätzungen in Lemma 5.4.2 erfüllen.

Der folgende Satz gibt Auskunft über die Äquivalenz schwacher und milder Lösungen.

5.4.4 Proposition Es seien die Bedingungen (F) und (G) erfüllt. Dann ist X eine milde Lösung genau dann, wenn X eine schwache Lösung ist.

Beweis Für den Beweis siehe [4], Theorem 9.15. □

5.5 Existenz schwacher Lösungen

In diesem Abschnitt wollen wir lediglich ein Resultat aus Peszat und Zabczyk [4] hinsichtlich der Existenz schwacher Lösungen unter den uns bereits bekannten Voraussetzungen angeben. Bevor wir jedoch dieses Resultat angeben, wollen wir den Begriff der Kontraktion einführen.

5.5.1 Definition Es sei E ein Hilbertraum. Eine Familie von Abbildung $F_t : E \to E$ heißt Kontraktion, falls

$$|F_t(x) - F_t(y)| \leq |x - y|$$

für alle $t \geq 0$ und $x, y \in E$.

5.5.2 Proposition Es seien die Bedingungen (F) und (G) erfüllt, dann gelten die folgenden drei Aussagen:

(i) Für alle $t_0 \geq 0$ und eine $\mathcal{F}_{t_0}$ messbare Zufallsvariable X_0 in H, existiert eine, bis auf Modifikation eindeutige Lösung $X(.,t_0,X_0)$ von Gleichung (8).

(ii) Für alle $0 \leq t_0 \leq T < \infty$ existiert ein $L < \infty$, sodass für alle $x, y \in H$

$$\sup_{t\in[t_0,T]} \mathbb{E}\|X(t,t_0,x) - X(t,t_0,y)\|_H^2 \leq L\|x-y\|_H^2.$$

(iii) Für alle $0 \leq t_0 \leq t$ und $x \in H$ ist die Verteilung von $X(t,t_0,x)$ unabhängig von der Wahl des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraumes.

Im Falle, dass Bedingung (F) und (G') erfüllt sind und S eine Kontraktion ist, besitzt die Lösung eine càdlàg Modifikation.

Beweis Für den Beweis siehe [4], Theorem 9.29. □

5.6 SPDE's mit allgemeinen Lévy Prozessen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Existenz von Lösungen von Gleichungen der Form

$$dX = (AX + F(X))dt + G(X)dM + R(X)dP, \quad X(t_0) = X_0, \tag{11}$$

wobei $(A, D(A))$, M, F und G wie in (8) definiert sind. Des Weiteren sei P ein zusammengesetzter Poisson Prozess auf einem Hilbertraum V mit endlichem Lévy Maß μ und $R(x)$, $x \in H$ seien lineare Operatoren von V in H. Zudem seien dem Leser die in Abschnitt 4.2 vorgestellten Folgen $(\tau_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in Erinnerung gerufen. Für gegebenes $m \in \mathbb{N}$ definiere

$$P_m(t) := P(t\wedge\tau_m) = \sum_{s\leq t} \mathbb{1}_{V_m}(P(s) - P(s-))(P(s) - P(s-)),$$

dann ist P_m ebenfalls ein zusammengesetzter Poisson Prozess mit Lévy Maß $\mu_m := \mu|_{V_m}$. Es sei weiter $u_m := \int_V z\mu_m(dz) = \int_{V_m} z\mu(dz)$, dann ist der Prozess $(M_m(t) := P_m(t) - u_m t,\ t \geq 0)$ ein quadratisch integrierbares Martingal mit Erwartungswert Null. Die Kovarianz von X_m ist gegeben durch $\mathcal{Q}_m = \int_{V_m} z \otimes z\mu(dz)$ mit

$$\langle \mathcal{Q}_m u, v\rangle_V = \int_{V_m} \langle z,u\rangle_V \langle z,u\rangle_V \mu(dz), \quad u, v \in V.$$

Es sei $\mathcal{H}_m = \mathcal{Q}_m^{1/2}(V_m)$. Des Weiteren wollen wir erneut annehmen, dass die nicht linearen Operatoren R die folgenden zwei Bedingungen erfüllen.

(R1) Es sei $D(R)$ dicht in H und für alle m sei $b_m : (0,\infty) \to (0,\infty)$ eine Funktion, welche $\int_0^T b_m(t)^2\, dt < \infty$ für $T < \infty$ erfüllt, sodass für alle $t > 0$ und $x, y \in D(R)$

$$\|\mathcal{U}_t R(x)\|_{L_{HS}(\mathcal{H}_m,H)} \leq b_m(t)(1 + \|x\|_H) \quad \text{und}$$

$$\|\mathcal{U}_t(R(x) - R(y))\|_{L_{HS}(\mathcal{H}_m, H)} \leq b_m(t)\|x - y\|_H.$$

erfüllt sind.

(R2) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiere eine Funktion $a_m : (0, \infty) \to (0, \infty)$, welche $\int_0^T a_m(t)\, dt < \infty$ für alle $T < \infty$ erfüllt, sodass für alle $t > 0$ und $x, y \in D(R)$ die Bedingungen

$$\|\mathcal{U}_t(R(x)u_m)\|_H \leq a_m(t)(1 + \|x\|_H) \quad \text{und}$$

$$\|\mathcal{U}_t((R(x) - R(y))u_m)\|_H \leq a_m(t)\|x - y\|_H.$$

erfüllt sind.

Für gegebenes m betrachten wir nun das Problem

$$dX_m = (AX_m + F(X_m))\, dt + G(X_m)\, dM + R(X_m)\, dP_m, \quad X_m(t_0) = X_0. \tag{12}$$

Dann erfüllen die Koeffizienten die Bedingungen (F) und (G) und somit existiert für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Lösung X_m, welche

$$\sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E}\|X_m(t)\|_H^2 < \infty, \quad T < \infty \tag{13}$$

erfüllt.
Die folgende Proposition sagt aus, unter welchen Voraussetzungen eine schwache Lösung von Gleichung (11) bezüglich der Folge von Stoppzeiten (τ_m) existiert.

5.6.1 Proposition Für jedes $t \in [0, T]$ und alle $m \leq n$ ist $X_m(t) = X_n(t)$ $\mathbb{P} - f.s.$ auf dem Ereignis $\{t \leq \tau_m\}$. Des Weiteren ist der Prozess X durch $X(t) = X_m(t)$ für $t \leq \tau_m$ gegeben und eine schwache Lösung von Gleichung (11).

Beweis Für den Beweis siehe [4], Theorem 9.34. □

6 Das Modell und bisherige Erkenntnisse

Die folgenden zwei Kapitel, sowie das Hauptthema dieser Diplomarbeit basieren auf der Arbeit von Benth und Krühner [8]. Das folgende Kapitel soll dem Leser das Grundmodell vorstellen und die bisherigen Konvergenzraten von Forward Kontrakten unter bestimmten Voraussetzungen in Diesem angeben.

6.1 Einführung

In Benth und Krühner [8] werden arbitragefreie Modelle für die Approximation von Forward Kontrakten auf Energiemärkten entwickelt. Der zugrundeliegende Zustandsraum der Approximationen ist endlich-dimensional und erlaubt somit computergestützte numerische Berechnungen. In Filipovic [9] wird ausgehend von der Modellierung von Zinsstrukturkurven mit Hilfe von Heath–Jarrow–Morton Modellen, ein Modell, unter Zunahme der sogenannten Musiela Parametrisierung entwickelt. Die in diesem Modell, auch als Heath–Jarrow–Morton–Musiela (HJMM) Modell bekannt, verwendeten stochastischen partiellen Differentialgleichungen haben sich durch ihre hervorragenden Eigenschaften auch als effektives Werkzeug zur Approximation anderer Finanzinstrumente etabliert.

Im Zuge weiterer wissenschaftlicher Arbeiten kam die Frage der endlich-dimensionalen Darstellung der Lösungen dieser SPDE's auf. Ausgehend von stochastischen partiellen Differentialgleichungen, welche von einem d–dimensionalen Wiener Prozess generiert werden, wurde untersucht, unter welchen Voraussetzungen an die Volatilität und den Drift Term, Lösungen mit Werten in einem endlich-dimensionalen Raum realisierbar sind, d.h. unter welchen Voraussetzungen kann die Forward Kurve in endlich viele Einzelteile zerlegt werden.

An Energiemärkten, so zum Beispiel bei Strom und Gas hat sich, basierend auf empirischen und ökonomischen Beobachtungen gezeigt, dass das sogenannte Hintergrundrauschen in der Modellierung leptokurtische[21] Merkmale aufweist und so dessen Modellierung durch unendlich-dimensionale Lèvy Prozesse in HJMM Modellen sinnvoll ist. Die Preisberechnung und die Absicherung von Derivaten an Energiemärkten in diesen Modellen wird in Benth und Krühner [10] detailiert behandelt.

Das Hauptresultat in Benth und Krühner [8], Theorem 4.1, erlaubt es den arbitragefreien Forward Curve Prozess $f(t,x)$, wobei $x \geq 0$ die verbleibende Zeit bis zur Fälligkeit ist und $t \geq 0$ der derzeitige Zeitpunkt ist, durch Prozesse der Form

$$f_k(t,x) = S_k(t) + \sum_{n=-k}^{k} U_n(t) g_n(t),$$

darzustellen. Hier bezeichnet S_k den Spotpreis in der Approximation, $g_{-k}, \ldots, g_k$ sind deterministische Funktionen und $U_{-k}, \ldots, U_k$ sind Ornstein Uhlenbeck Prozesse. Die Näherung f_k ist selbst eine Lösung einer HJMM Gleichung und somit ein arbitragefreies Modell für die Forward Kurve. Es wird gezeigt, dass die Konvergenz, punktweise in der Zeit und gleichmäßig im Raum, unter der Voraussetzung, dass f zweimal stetig differenzierbar ist, die Konvergenzrate k^{-1} be-

[21] leptokurtisch: Die Beobachtungen einer Verteilung mit positiver Kurtosis konzentrieren sich mehr an den Ausläufern und weniger im Zentrum.

sitzt.
Der Ausgangspunkt dieser Arbeit ist die Konstruktion einer Rieszbasis eines Unterraumes des sogenannten Filipovic Raumes, Filipovic [9], welcher ein separierbarer Hilbertraum absolut stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}_0^+$ mit, im Unendlichen verschwindenden (schwachen) Ableitungen ist. Die Basis dieses Unterraumes besteht aus den Vektoren g_n. Der Unterraum selbst sei durch die Betrachtung der Funktionen des Filipovic Raumes bis zu einem endlichen Zeithorizont T definiert.

6.2 Das grundlegende Modell

Für den Rest dieser Arbeit sei

$$H_\alpha := \{f \in AC(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) : \int_0^\infty |f'(x)|^2 e^{\alpha x}\, dx < \infty\}$$

der vorhin erwähnte Hilbertraum, wobei wir mit AC den Raum aller absolut stetigen Funktionen bezeichnen. Der Raum H_α sei mit dem inneren Produkt $\langle f, g\rangle_\alpha := f(0)\bar{g}(0) + \int_0^\infty f'(x)\bar{g}'(x)e^{\alpha x}dx$ versehen. Die wie in Kapitel drei beschriebene induzierte Norm sei mit $\|.\|_\alpha$ bezeichnet. In Filipovic [9] wird gezeigt, dass $(H_\alpha, \|.\|_\alpha)$ tatsächlich ein Hilbertraum ist. Des Weiteren bezeichne $f(t,x)$ den Preis eines Forward Kontrakts in einem Rohstoffmarkt zur Zeit t und $x \geq 0$ die Zeit bis zur Lieferung des Rohstoffes. Die Funktion f wird als stochastischer Prozess mit Werten im Hilbertraum H_α behandelt und der Prozess $(f(t), t \geq 0)$ folge dem HJMM Modell, welches im Folgenden angegeben wird.
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, welcher die üblichen Bedingungen erfüllt. Wir betrachten den Lévy Prozess $(L(t), t \geq 0)$ mit Werten in H_α, für dessen Konstruktion an Proposition 3.3.4.2 verwiesen sei. Es ist zusätzlich vorausgesetzt, dass der Prozess L endliche Varianz und Erwartungswert Null besitzt. Den Kovarianz Operator von L wollen wir mit $\mathcal{Q}$ bezeichnen. Es seien zudem $f_0 \in H_\alpha$ und f die Lösung der stochastischen partiellen Differentialgleichung

$$df(t) = \partial_x f(t)dt + \beta(t)dt + \Psi(t)dL(t), \quad t \geq 0,\ f(0) = f_0 \tag{14}$$

mit $\beta \in L^1((\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}, \mathbb{P} \otimes \lambda), H_\alpha)$, wobei $\mathcal{P}$ die vorhersehbare $\sigma-$Algebra bezeichnet, $\Psi \in \mathcal{L}_L^2 := \bigcup_{T>0} \mathcal{L}_{L,T}^2(H_\alpha)$ und $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$ die Raumableitung bezeichnet. Für die Konstruktion des Raumes $\mathcal{L}_{L,T}^2(H_\alpha)$ sei der Leser auf Seite 19 dieser Diplomarbeit verwiesen. Für $t \geq 0$ bezeichne $(\mathcal{U}_t)_{t\geq 0}$ die Translationssemigruppe, von welcher in Filipovic [9] gezeigt wird, dass sie eine C_0-Semigruppe auf H_α ist mit Generator ∂_x. Gemäß Proposition 5.1.2 ist jede C_0-Semigruppe durch $\|\mathcal{U}_t\|_{op} \leq Me^{\omega t}$, für $\omega, M > 0$ und alle $t \geq 0$, wobei $\|.\|_{op}$ die Operatornorm bezeichnet, beschränkt. In Filipovic [9] und Benth und Krühner [10] wird gezeigt, dass $\|\mathcal{U}_t\|_{op} \leq C_{\mathcal{U}}$ für alle $t \geq 0$ und eine Konstante $C_{\mathcal{U}} := \sqrt{2(1 \wedge \alpha^{-1})}$. Damit ist die Abbildung $s \mapsto \mathcal{U}_{t-s}\beta(s)$ Bochner integrierbar und die Abbildung $s \mapsto \mathcal{U}_{t-s}\Psi(s)$ integrierbar bezüglich L. Nun ist die milde Lösung von Gleichung (14) gegeben durch

$$f(t) = \mathcal{U}_t f_0 + \int_0^t \mathcal{U}_{t-s}\beta(s)\, ds + \int_0^t \mathcal{U}_{t-s}\Psi(s)\, dL(s). \tag{15}$$

Bei der Modellierung von Forward Kontrakten ist stets darauf zu achten, dass diese risikoneutral erfolgt, d.h. also, dass der Driftterm $\beta(t)$ gleich Null ist und $t \mapsto f(t, \tau - t)$ somit ein lokales Martingal ist, wobei $\tau \geq t$ der Lieferzeitpunkt des Rohstoffes ist. Dies wäre der Fall, wenn wir das Modell unter dem äquivalenten lokalen Martingalmaß betrachten würden. Betrachtet man das Modell jedoch mit Driftterm, so bedeutet dies, dass das Modell unter dem statistischen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ betrachtet wird und $\beta(t)$ damit Bestandteil der Risikoprämie ist.

6.3 Konstruktion der Riesz Basis

In diesem Abschnitt wollen wir eine Riesz Basis für einen Unterraum von H_α angeben und uns mit einigen Eigenschaften beschäftigen. In Young [11] wird außerdem gezeigt, dass eine Riesz Basis $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dargestellt werden kann als $g_n = \mathcal{T} e_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis und $\mathcal{T}$ ein beschränkter, linearer und invertierbarer Operator ist.
Das Ziel ist es die Spektralmethode auf Approximationen der SPDE (14) und den Differential Operator auf H_α anzuwenden. Hierfür wird eine Basis des Differential Operators, bestehend aus Eigenvektoren, benötigt. Aufgrund der Komplexität wird jedoch eine Riesz Basis konstruiert, welche annähernd eine Basis aus Eigenvektoren von ∂_x bildet.
Es seien $\lambda > 0$ und $T > 0$ beliebig, aber fest gewählt und die Abbildungen cut und $\mathcal{A}$ wie folgt definiert:

$$\text{cut} : \mathbb{R}_+ \to [0, T), \quad x \mapsto x - \max\{Tz : z \in \mathbb{Z},\, Tz \leq x\},$$

$$\mathcal{A} : L^2([0,T), \mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}), \quad f \mapsto \left(x \mapsto e^{-\lambda x} f(\text{cut(x)})\right).$$

Des Weiteren seien die Funktionen

$$g_*(x) := 1, \tag{16}$$

$$g_n(x) := \frac{1}{\lambda_n \sqrt{T}}(e^{\lambda_n x} - 1), \quad \text{mit} \tag{17}$$

$$\lambda_n := \frac{2\pi i}{T} n - \lambda - \frac{\alpha}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $x \geq 0$ definiert. Es gilt offenkundig, dass $g_n, g_* \in H_\alpha$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Es wird sich herausstellen, dass $(g_*, (g_n)_{n\in\mathbb{Z}})$ eine Riesz Basis bildet, jedoch wollen wir zunächst einige Eigenschaften des Operators $\mathcal{A}$ angeben, für deren Beweis an Benth und Krühner [8] verwiesen ist.

6.3.1 Lemma Der Operator $\mathcal{A}$ ist ein beschränkter, linearer Operator, dessen Bild in $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ abgeschlossen ist. Zudem gilt:

$$\frac{e^{-2T\lambda}}{1 - e^{-2T\lambda}} \|f\|_2^2 \leq \|\mathcal{A} f\|_2^2 \leq \frac{1}{1 - e^{-2T\lambda}} \|f\|_2^2$$

für alle $f \in L^2([0,T), \mathbb{C})$. Hier bezeichnet $\|.\|_2$ die vom inneren Produkt $(.,.)_2$ induzierte Norm auf $L^2(A, \mathbb{C})$, wobei A eine Borelmenge ist.

Beweis Für den Beweis siehe Benth und Krühner [8], Lemma 3.1. □

In Proposition 6.3.3 wollen wir eine Riesz Basis und das Biorthogonalsystem des Raumes $\operatorname{ran}(A)$ angeben. Für die Berechnung des Biorthogonalsystems, welches das Bild von $(\mathcal{A}^{-1})^*$ ist, benötigen wir jedoch folgendes Lemma.

6.3.2 Lemma Der duale Operator des inversen Operators von $\mathcal{A} : L^2([0,T),\mathbb{C}) \to \operatorname{ran}(A)$ ist gegeben durch

$$(\mathcal{A}^{-1})^* : L^2([0,T),\mathbb{C}) \to \operatorname{ran}(A),$$

$$(\mathcal{A}^{-1})^* f(x) = (1-e^{-2T\lambda})e^{-\lambda x}\left(e^{2\lambda \text{cut}(x)} f(\text{cut}(x))\right) = (1-e^{-2T\lambda})e^{2\lambda\text{cut}(x)}\mathcal{A}f(x),\ x \geq 0.$$

Beweis Für den Beweis siehe Benth und Krühner [8], Lemma 3.2. □

6.3.3 Proposition Definiere die Abbildung

$$e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(\left(\frac{2\pi i n}{T} - \lambda\right)x\right), \quad x \geq 0,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Dann ist $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Riesz Basis des abgeschlossenen Unterraumes $\operatorname{ran}(A)$ und

$$F := \{f \in L^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}) : f(x) = 0,\ x \in [0,T)\}$$

ist der komplementäre Vektorraum von $\operatorname{ran}(A)$. Die stetige, lineare Projektion $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ mit Bild $\operatorname{ran}(A)$ und Kern F hat Operatornorm $\sqrt{\frac{1}{1-e^{-2T\lambda}}}$ und es gilt

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}} f(x) = f(x), \quad x \in [0,T],\ f \in L^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}).$$

Das Biorthogonalsystem $(e_n)^*_{n\in\mathbb{Z}}$ der Riesz Basis $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist gegeben durch

$$e_n^*(x) = (1-e^{-2T\lambda})e^{2\lambda\text{cut}(x)}e_n(x).$$

Beweis Für den Beweis siehe Benth und Krühner [8], Proposition 3.3. □

Da die vorherigen Aussagen lediglich für den Raum $L^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ gültig sind, wir jedoch an H_α interessiert sind, wollen wir eine Isometrie von H_α in $\mathbb{C} \times L^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ angeben. Definiere die Abbildung

$$\Theta : H_\alpha \to \mathbb{C} \times L^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}), \quad f \mapsto (f(0), \omega_\alpha f''),$$

wobei $\omega_\alpha(x) := e^{x\frac{\alpha}{2}}$ für $x \geq 0$. Diese Abbildung Θ ist dann die von uns angesprochene Isometrie und ihre Inverse ist gegeben durch

$$\Theta^{-1} : \mathbb{C} \times L^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}) \to H_\alpha, \quad (z,f) \mapsto z + \int_0^{(\cdot)} \omega_\alpha^{-1}(y) f(y)\, dy.$$

Das folgende Korollar überträgt die bisherigen Aussagen über den Raum $L^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ auf den Raum H_α.

6.3.4 Korollar Die Basis $(g_*, (g_n)_{n\in\mathbb{Z}})$, definiert in (16) und (17), bildet eine Riesz Basis des Unterraumes H_α^T von H_α. Tatsächlich ist H_α^T jener Raum, welcher von $(g_*, (g_n)_{n\in\mathbb{Z}})$ erzeugt wird. Zudem existiert eine stetige, lineare Projektion Π, dessen Bild H_α^T ist und dessen Operator Norm durch $\sqrt{\frac{1}{1-e^{-2\lambda T}}}$ gegeben ist, sodass

$$\Pi h(x) = h(x), \quad \text{für } h \in H_\alpha,\ x \in [0,T].$$

Damit gilt $\Pi \mathcal{U}_t h(x) = \mathcal{U}_t \Pi h(x) = h(x+t)$ für alle $t \in [0,T]$ und $x \in [0, T-t]$. Das Biorthogonalsystem $(g_*^*, (g_n^*)_{n\in\mathbb{Z}})$ ist gegeben durch

$$g_*^*(x) = 1,$$

$$g_n^*(x) = \int_0^x e^{-y\frac{\alpha}{2}} e_n^*(y)\, dy$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $x \geq 0$.

Beweis Für den Beweis siehe Benth und Krühner [8], Corollary 3.4. □

In der folgenden Proposition wird ein endlich-dimensionaler Unterraum von H_α^T definiert und essenzielle Aussagen über die Konvergenz, welche wir für die Untersuchung von Approximationen der SPDE (14) benötigen, angegeben.

6.3.5 Proposition Es seien $k \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, H_α^T jener Unterraum von H_α, welcher von der Riesz Basis $(g_*, (g_n)_{n\in\mathbb{Z}})$ erzeugt wird. Das zugehörige Biorthogonalsystem $(g_*^*, (g_n^*)_{n\in\mathbb{Z}})$ sei wie in Korollar 6.3.4 gegeben. Definiere die Projektion

$$\Pi_k : H_\alpha^T \to \{g_*, g_{-k}, \ldots, g_k\}, \quad h \mapsto h(0) g_* + \sum_{n=-k}^{k} g_n \langle h, g_n^* \rangle_\alpha,$$

$c_{k,t} := \sum_{|n|>k} g_n(t) g_n^*$ und den Operator

$$\mathcal{C}_{k,t} : H_\alpha^T \to \mathrm{Span}(g_*), \quad h \mapsto \langle h, c_{k,t} \rangle_\alpha g_*.$$

Dann ist $\|\Pi_k\|_{\mathrm{op}}$ gleichmäßig beschränkt in k, $\Pi_k h$ konvergiert gegen h und $\sup_{s\in[0,t]} \|\mathcal{C}_{k,s} h\|_\alpha$ konvergiert gegen Null für $k \to \infty$ und alle $h \in H_\alpha^T$ und $[\Pi_k, \mathcal{U}_t] = \mathcal{C}_{k,t}$. Hier bezeichnet $[\Pi_k, \mathcal{U}_t]$ den Lie Kommutator von Π_k und $\mathcal{U}_t$, welcher gegeben ist durch $[\Pi_k, \mathcal{U}_t] = \Pi_k \mathcal{U}_t - \mathcal{U}_t \Pi_k$. Es sei weiter X ein stochastischer Prozess mit Werten in H_α^T, sodass $X(t) = Y(t) + M(t)$, wobei Y ein quadratisch integrierbarer Prozess ist, mit endlicher Variation und M ein quadratisch integrierbares Martingal. Dann gilt

$$L^2(\Omega, H_\alpha) - \lim_{k\to\infty} \int_0^t C_{k,t-s} dX(s) = 0.$$

$L^2(\Omega, H_\alpha)$ bezeichnet den Raum der H_α- wertigen Zufallsvariablen Z mit $\mathbb{E}[\|Z\|_\alpha^2] < \infty$.[22]

Beweis Für den Beweis siehe Benth und Krühner [8], Proposition 3.6. □

Der Operator Π_k spielt eine wichtige Rolle bei der arbitragefreien Approximation von Forward Kontrakten. Wir definieren den Raum

$$H_\alpha^{T,k} := \text{Span}\{g_*, g_{-k}, \dots, g_k\},$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Nun wollen wir die Konvergenzgeschwindigkeit von Elementen aus $H_\alpha^{T,k}$ gegen Elemente $f \in H_\alpha^T$ betrachten. Zunächst wollen wir einige technische Ergebnisse angeben.

6.3.6 Korollar Es sei $f \in H_\alpha^T$, dann gilt:

$$\frac{e^{-2\lambda T}}{1 - e^{-2\lambda T}} \left(|f(0)|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_n^* \rangle_\alpha|^2 \right) \leq \|f\|_\alpha^2 \leq \frac{1}{1 - e^{-2\lambda T}} \left(|f(0)|^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, g_n^* \rangle_\alpha|^2 \right).$$

Beweis Für den Beweis siehe Benth und Krühner [8], Corollary 3.7. □

6.3.7 Korollar Es sei $f \in H_\alpha^T$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$\langle f, g_n^* \rangle_\alpha = (1 - e^{-2\lambda T})^{-1} T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T f'(x) \exp\left((-\frac{2\pi i n}{T} - \lambda + \frac{\alpha}{2}) x \right) dx.$$

Beweis Für den Beweis siehe Benth und Krühner [8], Corollary 3.8. □

Da nun die folgenden Theoreme von großer Wichtigkeit für diese Diplomarbeit sind, wollen wir an diesem Punkt nicht auf deren Beweise verzichten. Die folgenden Aussagen sind Kern dieser Diplomarbeit und im folgenden Kapitel soll die Untersuchung der Konvergenzgeschwindigkeit bezüglich der Supremums Norm angegeben werden.
Bevor wir mit der Berechnung der Konvergenzraten beginnen, wollen wir noch ein technisches Lemma angeben.

6.3.8 Lemma Es seien $\xi_n := -\frac{2\pi i n}{T} - \lambda + \frac{\alpha}{2}$, $\lambda_n := \frac{2\pi i n}{T} - \lambda - \frac{\alpha}{2}$ und $\zeta_n := \frac{2\pi i n}{T} - \lambda + \frac{\alpha}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten die folgenden Abschätzungen für alle $k \geq 1$:

(i) $\sum_{n>k} \frac{1}{|\xi_n|^2} \leq \frac{T^2}{4\pi^2 k}$

(ii) $\sum_{n>k} \frac{1}{|\lambda_n|^2} \leq \frac{T^2}{4\pi^2 k}$

(iii) $\sum_{n>k} \frac{1}{|\xi_n||\lambda_n|} \leq \frac{T^2}{4\pi^2 k}$

(iv) $\sum_{n>k} \frac{1}{|\zeta_n|^2} \leq \frac{T^2}{4\pi^2 k}$

[22] Vgl. Definition 3.2.5

Beweis Wir wollen lediglich (i) zeigen, da die restlichen Behauptungen analog folgen. Es gilt

$$|\xi_n|^2 = |\frac{\alpha}{2} - \lambda|^2 + |\frac{2\pi n}{T}|^2 \geq |\frac{2\pi n}{T}|^2 = \frac{4\pi^2 n^2}{T^2}$$

und somit

$$|\xi_n| \geq \frac{2\pi n}{T}.$$

Damit folgt nun:

$$\sum_{n>k} \frac{1}{|\xi_n|^2} \leq \sum_{n>k} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{n^2} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \sum_{n>k} \frac{1}{n^2} \leq \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \int_k^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{k}.$$

□

Die folgende bekannte Proposition beschreibt die Konvergenzgeschwindigkeit der Approximation von Elementen des Raumes H_α^T durch Elemente des endlich-dimensionalen Unterraumes $H_\alpha^{T,k}$ und soll unten in Proposition 7.1 verbessert werden.

6.3.9 Proposition Es sei $f \in H_\alpha^T$ und zudem sei $f|_{[0,T]}$ zwei mal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\|f - \Pi_k f\|_\alpha \leq \frac{\sqrt{C_1}}{\sqrt{k}},$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei

$$C_1 = \frac{T|f'(T)e^{T(-\lambda+\alpha/2)} - f'(0)|^2 + (\int_0^T |f''(x)|e^{x(-\lambda+\alpha/2)}dx)^2}{\pi^2(1-e^{-2\lambda T})^3}.$$

Beweis Mit Korollar 6.3.6 folgt

$$\|f - \Pi_k f\|_\alpha^2 = \|\sum_{|n|>k} g_n \langle f, g_n^* \rangle_\alpha\|_\alpha^2 \leq C \sum_{|n|>k} |\langle f, g_n^* \rangle_\alpha|^2,$$

wobei die Konstante $C := (1 - e^{-2\lambda T})^{-1}$. Definiere nun die Funktionen $h_n(x) := \exp(\xi_n x)$, $x \geq 0$, mit $\xi_n = -\frac{2\pi i n}{T} - \lambda + \frac{\alpha}{2}$. Dann folgt mit Korollar 6.3.7 und mit Hilfe von partieller Integration

$$\begin{aligned}
|\langle f, g_n^* \rangle_\alpha|^2 &= C^2 T^{-1} |\int_0^T f'(x) h_n(x) dx|^2 \\
&= C^2 T^{-1} \frac{1}{|\xi_n|^2} |f'(T)h_n(T) - f'(0)h_n(0) - \int_0^T f''(x) h_n(x) dx|^2 \\
&\leq \frac{2C^2}{T} \frac{1}{\xi_n} \mathcal{A}_f,
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Hier ist die Konstante $\mathcal{A}_f$ gegeben durch

$$\mathcal{A}_f := |f'(T)e^{T(-\lambda+\alpha/2)} - f'(0)|^2 + (\int_0^T |f''(x)|e^{x(\lambda-\alpha/2)}\,dx)^2.$$

Mit Hilfe von Lemma 6.3.8 gilt

$$\sum_{|n|>k} \frac{1}{|\xi_n|^2} = 2\sum_{n>k} \frac{1}{|\xi_n|^2} \le \frac{T^2}{2\pi^2 k}.$$

Setzen wir nun die Abschätzungen zusammen, so folgt

$$\|f - \Pi_k f\|_\alpha^2 \le \mathcal{A}_f \frac{C^3 T}{\pi^2 k},$$

woraus die Behauptung folgt. □

Eine ähnliche Konvergenzrate kann auch für $c_{k,t}$ angegeben werden, wie in folgendem Lemma bewiesen wird. Diese Abschätzung soll ebenfalls unten in Proposition 7.3 verbessert werden.

6.3.10 Lemma Es sei $c_{k,t}$ wie in Proposition 6.3.5 gegeben, dann gilt

$$\|c_{k,t}\|_\alpha \le \frac{\sqrt{C_2}}{\sqrt{k}},$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei $C_2 := \frac{T}{\pi^2(1-\exp(-2\lambda T))}$.

Beweis Mit Lemma 6.3.8, Korollar 6.3.7 und $(g_n^*)_{n\in\mathbb{Z}}$ die Riesz Basis mit Biorthogonalsystem $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ gilt

$$\begin{aligned}
\|c_{k,t}\|_\alpha^2 &= \|\sum_{|n|>k} g_n(t)g_n^*\|_\alpha^2 \\
&\le C \sum_{|n|>k} |g_n(t)|^2 \\
&= \frac{C}{T}\sum_{|n|>k} \frac{1}{|\lambda|^2}|e^{\lambda_n t} - 1|^2 \\
&\le \frac{2C}{T}(1 + e^{-(2\lambda+\alpha)t}) \sum_{|n|>k} \frac{1}{|\lambda_n|^2} \\
&\le \frac{CT}{\pi^2 k},
\end{aligned}$$

wobei $C = (1 - \exp(-2\lambda T))^{-1}$ und die Behauptung folgt. □

6.4 Arbitragefreie Approximation von Forward Terminstruktur Modellen

In folgendem Abschnitt wollen wir eine arbitragefreie Approximation in unserem HJMM Modell angeben, welche in einem endlich-dimensionalen Raum erfolgt und anschließend die Konvergenzgeschwindigkeit bestimmen. Wir betrachten erneut die SPDE (14) mit der milden Lösung (15). Wir definieren nun den stetigen, linearen Operator $\Lambda_k : H_\alpha \to H_\alpha^{T,k}$ durch

$$\Lambda_k := \Pi_k \Pi$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.
Bevor wir nun das Hauptresultat von Benth und Krühner [8], Theorem 4.1, mit Beweis angeben, wollen wir eine Abschätzung der Supremumsnorm durch die H_α–Norm formulieren.[23]
An dieser Stelle sei dem Leser die Definition des Raumes H_α in Erinnerung gerufen

$$H_\alpha = \{f \in AC(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) : \int_0^\infty |f'(x)|^2 e^{\alpha x}\, dx < \infty\}.$$

Es bezeichne hier und im Folgenden $\delta_x : H_\alpha \to \mathbb{R}$, mit $\delta_x(g) := g(x)$ das Punktauswertungsfunktional, welches ein stetiges, lineares Funktional auf H_α ist.
In folgendem Lemma wollen wir den dualen Operator, sowie die Abschätzung der Operatornorm des Punktauswertungsfunktionals anführen.

6.4.1 Lemma Für $x \in \mathbb{R}$ definiere die Abbildung

$$h_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto 1 + \int_0^{x \wedge y} \frac{1}{e^{\alpha s}}\, ds.$$

Dann ist der duale Operator von δ_x gegeben durch

$$\delta_x^* : \mathbb{R} \to H_\alpha, \quad c \mapsto c h_x$$

und die Operatornorm von δ_x ist gegeben durch

$$\|\delta_x\|_{\text{op}}^2 = h_x(x).$$

Beweis Der erste Punkt ist ein Spezialfall von Filipovic [9], Lemma 5.3.1. Da die Operatornorm mit der Norm von h_x übereinstimmt, folgt

$$\|\delta_x\|_{\text{op}}^2 = h_x(0)h_x(0) + \int_0^\infty e^{\alpha y} h_x'(y)^2\, dy = 1 + \int_0^x \frac{1}{e^{\alpha y}} dy = h_x(x).$$

Daraus folgt bereits die Behauptung. □

Das folgende Lemma behandelt nun die Abschätzung der Supremumsnorm durch die H_α–Norm.

[23] Siehe Benth und Krühner [12], Lemma 3.1 und Lemma 3.2

6.4.2 Lemma Es sei $\int_0^\infty \frac{1}{e^{\alpha x}} dx < \infty$. Dann gilt

$$\|g\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |g(x)| \leq c \, \|g\|_\alpha,$$

wobei die Konstante c gegeben ist durch $\sqrt{1 + \int_0^\infty \frac{1}{e^{\alpha x}} dx}$. Des Weiteren ist $h_\infty : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + \int_0^x \frac{1}{e^{\alpha x}} ds$ in H_α und es gilt

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \langle h_\infty, g \rangle_\alpha,$$

für alle $g \in H_\alpha$ und h_∞.

Beweis Es gilt

$$\|h_\infty\|_\alpha^2 = 1 + \int_0^\infty \frac{1}{e^{\alpha x}} dx = c^2$$

und somit $h_\infty \in H_\alpha$. Zudem gilt mit h_x aus Lemma 6.4.1, dass

$$\|h_\infty - h_x\|_\alpha^2 = \int_x^\infty \frac{1}{e^{\alpha x}} dy \to 0, \quad \text{für } x \to \infty.$$

Es folgt also, dass $h_x \to h_\infty$ in H_α für $x \to \infty$ und mit Lemma 6.4.1 folgt

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \langle h_x, g \rangle_\alpha = \langle h_\infty, g \rangle_\alpha.$$

Die Abbildung g ist beschränkt und mit Lemma 6.4.1 folgt

$$|g(x)|^2 \leq \|h_x\|_\alpha^2 \|g\|_\alpha^2 = h_x^2(x) \|g\|_\alpha^2 \leq c^2 \|g\|_\alpha^2$$

und damit auch die Behauptung $\|g\|_\infty \leq c \, \|g\|_\alpha$. □

Die Konstante c, welche in Lemma 6.4.2 gegeben ist, berechnet sich nun zu

$$c = \sqrt{1 + \int_0^\infty \frac{1}{e^{\alpha x}} dx} = \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha}}. \tag{18}$$

Nun wollen wir das Hauptresultat aus Benth und Krühner [8] angeben, in welchem die Konvergenz von Elementen des Raumes $H_\alpha^{T,k}$ gegen Elemente des Raumes H_α gezeigt wird.

6.4.3 Proposition Für $k \in \mathbb{N}$ sei f_k die milde Lösung der SPDE

$$df_k(t) = \partial_x f_k(t) dt + \Lambda_k \beta(t) dt + \Lambda_k \Psi(t) dL(t), \quad t \geq 0, \ f_k(0) = \Lambda_k f_0. \tag{19}$$

Dann gilt

(i) $\mathbb{E}[\sup_{x \in [0, T-t]} |f_k(t,x) - f(t,x)|^2] \to 0$ für $k \to \infty$ und alle $t \in [0,T]$,

(ii) f_k nimmt Werte im endlich-dimensionalen Raum $H_\alpha^{T,k}$ an und ist somit eine starke Lösung der SPDE (19), d.h. $f_k \in \mathrm{dom}(\partial_x)$, die Abbildung $t \mapsto \partial_x f_k(t)$ ist $\mathbb{P}-f.s.$ Bochner integrierbar und

$$f_k(t) = f_k(0) + \int_0^t (\partial_x f_k(s) + \Lambda_k \beta(s))\, ds + \int_0^t \Lambda_k \Psi(s)\, dL(s),$$

(iii) und

$$f_k(t) = S_k(t) + \sum_{n=-k}^{k} \left(e^{\lambda_n t} \langle f_k(0), g_n^* \rangle_\alpha + \int_0^t e^{\lambda_n (t-s)}\, dX_n(s) \right) g_n,$$

wobei $S_k(t) = \delta_0(f_k(t))$ und $X_n(t) := \int_0^t \langle \Pi\beta(s)ds + \Pi\Psi(s)dL(s), g_n^* \rangle_\alpha$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $t \geq 0$.

Beweis (1) Definiere die Abbildung

$$f_\Pi(t) := \mathcal{U}_t \Pi f_0 + \int_0^t \mathcal{U}_{t-s}(\Pi\beta(s)ds + \Pi\Psi(s)dL(s)), \quad t \geq 0.$$

Da f_k eine milde Lösung ist, kann man durch umformen folgende Gleichheit erzielen

$$f_k(t) = \Pi_k(f_\Pi(t)) - \mathcal{C}_{k,t}\Pi f_0 - \int_0^t \mathcal{C}_{k,t-s}(\Pi\beta(s)ds + \Pi\Psi dL(s))$$

für alle $t \geq 0$. Gemäß Lemma 6.4.2 ist die Supremumsnorm durch die H_α–Norm beschränkt, womit eine Konstante $c > 0$ existiert, sodass

$$\mathbb{E}\left[\sup_{x \in [0,T-t]} |\Pi_k(f_\Pi(t,x)) - f_\Pi(t,x)|^2 \right] \leq c\, \mathbb{E}[\|(\Pi_k - \mathcal{I}) f_\Pi(t)\|_\alpha^2]$$

für alle $t \geq 0$. Hier bezeichnet $\mathcal{I}$ den Identitätsoperator auf H_α. Aufgrund der dominierten Konvergenz konvergiert die rechte Seite gegen Null für $k \to \infty$. Klarerweise gilt

$$\sup_{x \in [0,T-t]} |\mathcal{C}_{k,t} f_\Pi(0,x)| \leq c\, \|\mathcal{C}_{k,t} f_\Pi(0)\|_\alpha \underset{k \to \infty}{\to} 0.$$

Mit Proposition 6.3.5 folgt

$$\mathbb{E}\| \int_0^t \mathcal{C}_{k,t-s}(\Pi\beta(s)ds + \Pi\Psi(s)dL(s))\|_\alpha^2 \to 0,$$

für $k \to 0$. Damit gilt nun

$$\mathbb{E}\left[\sup_{x \in [0,T-t]} |f_k(t,x) - f_\Pi(t,x)|^2 \right] \to 0,$$

für $k \to \infty$ und alle $t \in [0,T]$. Da aber $f_\Pi(t,x) = f(t,x)$ für alle $t \in [0,T]$ und $x \in [0, T-t]$, folgt die erste Behauptung.

(2) Es sei zunächst festgehalten, dass $\partial_x g_n(x) = \exp(\lambda_n x)/\sqrt{T} = \lambda_n g_n(x) + g_*(x)/\sqrt{T}$ und

damit ist $\partial_x g_n \in H_\alpha^{T,k}$ für $|n| \le k$. Somit ist $H_\alpha^{T,k}$ invariant bezüglich dem Generator ∂_x und dessen Restriktion auf $H_\alpha^{T,k}$ ist ein stetiger und beschränkter Operator. f_k nimmt nur Werte in $H_\alpha^{T,k}$ an, da

$$\begin{aligned} f_k(t) =& \Pi_k \left(\mathcal{U}_t \Pi f_0 + \int_0^t \mathcal{U}_{t-s}(\Pi\beta(s)ds + \Pi\Psi(s)dL(s)) \right) \\ & - \mathcal{C}_{k,t}\Pi f_0 - \int_0^t \mathcal{C}_{k,t-s}(\Pi\beta(s)ds + \Pi\Psi(s)dL(s)) \end{aligned}$$

und offensichtlich alle Summanden in $H_\alpha^{T,k}$ sind.

(3) Für den Beweis sei an dieser Stelle an Benth und Krühner [8], Seite 16 verwiesen. □

In folgender Proposition wollen wir die Konvergenzgeschwindigkeit von Punkt (1) aus Proposition 6.4.3 identifizieren und ebenfalls unten in Satz 7.13, welcher das Hauptresultat dieser Diplomarbeit ist, unter zusätzlichen Strukturvoraussetzungen modifizieren.

6.4.4 Proposition Es sei $x \mapsto f(t,x)$ zwei mal stetig differenzierbar und f_k die milde Lösung der SPDE

$$df_k(t) = \partial_x f_k(t)dt + \Lambda_k\beta(t)dt + \Lambda_k\Psi(t)dL(t), \quad t \ge 0,\ f_k(0) = \Lambda_k f_0.$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}\left[\sup_{x\in[0,T-t]} |f_k(t,x) - f(t,x)|^2\right] \le \frac{A(t)}{k}$$

für alle $k > 1$, wobei

$$\begin{aligned} A(t) :=& \frac{3T(1+\alpha^{-1})}{(1-e^{-2\lambda T})} \left\{ \|\Pi f_0\|_\alpha^2 + \int_0^T \mathbb{E}[\mathrm{Tr}(\Psi(s)\mathcal{Q}\Psi^*(s))]ds + \Big(\int_0^T \mathbb{E}[\|\beta(s)\|_\alpha]ds\Big)^2 \right\} \\ & + \frac{3(1+\alpha-1)}{\pi^2(1-e^{-2\lambda T})^3} \Big\{ T\mathbb{E}[|\partial_x f_\Pi(t,T)e^{T(-\lambda+\alpha/2)} - \partial_x f_\Pi(t,0)|^2] \\ & + \left(\int_0^T \mathbb{E}[|\partial_x^2 f_\Pi(t,x)|]e^{x(-\lambda+\alpha/2)}dx \right)^2 \Big\}. \end{aligned}$$

Beweis Laut Beweis von Proposition 6.4.3 gilt

$$f_k(t) = \Pi_k(f_\Pi(t)) - \mathcal{C}_{k,t}\Pi f_0 - \int_0^t \mathcal{C}_{k,t-s}(\Pi\beta(s)ds + \Pi\Psi(s)dL(s)),$$

mit $f_\Pi := \mathcal{U}_t\Pi f_0 + \int_0^t \mathcal{U}_{t-s}(\Pi\beta(s)ds + \Pi\Psi(s)dL(s))$ für alle $t \ge 0$. Mit Proposition 6.3.9 gilt

$$\|f_\Pi(t) - \Pi_k(f_\Pi(t))\|_\alpha^2 \le \frac{C_1(t)}{k},$$

wobei die Konstante $C_1(t)$ gegeben ist durch

$$C_1(t) = \frac{T|\partial_x f_\Pi(t,T)e^{T(-\lambda+\alpha/2)} - \partial_x f_\Pi(t,0)|^2 + (\int_0^T |\partial_x^2 f_\Pi(t,x)|e^{x(-\lambda+\alpha/2)}dx)^2}{\pi^2(1-e^{-2\lambda T})^3}.$$

Des Weiteren sei dem Leser in Erinnerung gerufen, dass für alle $h \in H_\alpha$

$$\|\mathcal{C}_{k,t}h\|_\alpha^2 = \|\langle h, c_{k,t}\rangle_\alpha g_*\|_\alpha^2 = |\langle h, c_{k,t}\rangle_\alpha|^2 \leq \|h\|_\alpha^2 \|c_{k,t}\|_\alpha^2$$

gilt und mit Lemma 6.3.10

$$\|\mathcal{C}_{k,t}h\|_\alpha^2 \leq \|h\|_\alpha^2 \frac{C_2}{k},$$

mit der Konstante $C_2 = \frac{T}{\pi^2(1-e^{-2\lambda T})}$. Damit gilt nun

$$\begin{aligned}
\|f_k(t) - f_\Pi(t)\|_\alpha^2 \leq & 3\|\Pi_k(f_\Pi(t) - f_\Pi(t)\|_\alpha^2 + 3\|\mathcal{C}_{k,t}\Pi f_0\|_\alpha^2 \\
& + 3\| \int_0^t \mathcal{C}_{k,t-s}(\Pi\beta(s)ds + \Pi\Psi(s)dL(s))\|_\alpha^2 \\
& \leq \frac{3C_1(t)}{k} + \frac{3C_2}{k}\|\Pi f_0\|_\alpha^2 \\
& + 3\| \int_0^t \mathcal{C}_{k,t-s}(\Pi\beta(s)ds + \Pi\Psi(s)dL(s))\|_\alpha^2.
\end{aligned}$$

Gemäß Lemma 6.4.2 ist die Supremumsnorm durch die $H_\alpha-$ Norm mit der Konstante c, siehe (18) beschränkt. Durch bilden der Erwartungswerte folgt nun

$$\mathbb{E}\left[\sup_{x\in[0,T-t]} |f_k(t,x) - f(t,x)|^2\right] \leq c^2\mathbb{E}[\|f_k(t) - f_\Pi(t)\|_\alpha^2]$$

$$\leq \frac{3c^2}{k}(\mathbb{E}[C_1(t)] + C_2\|\Pi f(t)\|_\alpha^2) + \frac{3c^2}{k}C_2\left(\int_0^T \mathbb{E}[\mathrm{Tr}(\Psi(s)\mathcal{Q}\Psi^*(s))]ds + \left(\int_0^T \mathbb{E}[\|\beta(s)\|_\alpha]ds\right)^2\right).$$

Damit folgt die Behauptung. □

Wie zu Beginn dieser Arbeit erwähnt, werden bei Forward Kontrakten an Gas und Strommärkten die Rohstoffe Strom und Gas über einen gewissen Zeitraum geliefert. Es soll eine gleichmäßige Lieferung über einen Zeitraum $[T_1, T_2]$ garantiert werden. In Benth [13] wird hierfür folgendes Modell vorgestellt

$$F(t, T_1, T_2) := \frac{1}{T_2 - T_1}\int_{T_1}^{T_2} f(t, s-t)ds,$$

wobei f durch die SPDE (14) gegeben ist. Das folgende Korollar soll das Hauptresultat, Proposition 6.4.3, unter Zunahme von Lieferperioden darstellen.

6.4.5 Korollar Angenommen, es gelten die Voraussetzungen aus Proposition 6.4.3. Definiere die Funktion

$$F_k(t, T_1, T_2) := \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} f_k(t, s-t) ds$$

für alle $0 \leq t \leq T_1 \leq T_2 \leq T$. Dann gilt

$$F_k(t, T_1, T_2) \to F(t, T_1, T_2)$$

für $k \to \infty$ in $L^2(\Omega)$ und F sei gegeben wie oben. Des Weiteren gilt

$$F_k(t, T_1, T_2) = S_k(t) + \sum_{n=-k}^{k} G_n(t, T_1, T_2) \left(e^{\lambda_n t} \langle g_n^*, f_k(0) \rangle_\alpha + \int_0^t e^{\lambda_n (t-s)} dX_n(s) \right),$$

für alle $t \leq T_1 \leq T_2 \leq T$, wobei $S_k(t) := \delta_0(f_k(t))$,

$$G_n(t, T_1, T_2) = \frac{\exp(\lambda_n(T_2 - t)) - \exp(\lambda_n(T_1 - t)) - \lambda_n(T_2 - T_1)}{\lambda_n^2 \sqrt{T}(T_2 - T_1)}$$

und den Prozess $X_n(t) := \int_0^t \langle \Pi\beta(s)ds + \Pi\Psi(s)dL(s), g_n^* \rangle_\alpha$.

Beweis Für den Beweis siehe Benth und Krühner [8], Corollary 4.4. □

Es sei weiter angemerkt, dass auch die zu Beginn dieser Arbeit angesprochenen Wetterderivate ebenfalls Forward Kontrakte über einen gewissen Zeitraum sind. Beispielsweise die durchschnittliche Temperatur einer Stadt, welche über einen gewissen Zeitraum gemessen wird.

7 Bessere Konvergenzgeschwindigkeit bezüglich der Supremumsnorm

In folgendem Kapitel wollen wir nun die Approximationen aus den Kapiteln 6.3 und 6.4 bezüglich der Supremumsnorm betrachten und so eine bessere Konvergenzrate angeben.
Das Hauptresultat dieses Kapitels und auch dieser Diplomarbeit, Satz 7.13, zeigt eine Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit der Approximation der Lösung der SPDE (14) durch Elemente des Raumes $H_\alpha^{T,k}$, verglichen mit Proposition 6.4.4. Dabei wird die ursprüngliche Konvergenzrate von $\frac{1}{\sqrt{k}}$, bezüglich der H_α–Norm, zu $\frac{1}{k}$, bezüglich der Supremumsnorm unter zusätzlichen Strukturbedingungen, verbessert.

Wir beginnen zunächst mit der Approximation von Elementen $f \in H_\alpha^T$ durch Elemente $\Pi_k f$ aus dem endlich-dimensionalen Raum $H_\alpha^{T,k}$ bezüglich der Supremumsnorm und wollen dadurch Proposition 6.3.9 modifizieren.

7.1 Proposition Es sei $f \in H_\alpha^T$, wobei die Restriktion von f auf $[0,T]$ zwei mal stetig differenzierbar sei. Des Weiteren sei der Operator $\Pi_k : H_\alpha^T \to H_\alpha^{T,k}$ wie in Proposition 6.3.5 gegeben. Dann gilt

$$\|f - \Pi_k f\|_\infty \leq \frac{CT}{\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\mathcal{A}_f}\,\frac{1}{k},$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei die Konstante C durch $C = \frac{1}{1-e^{-2\lambda T}}$ gegeben ist und

$$\mathcal{A}_f := |f'(T)e^{T(-\lambda+\alpha/2)} - f'(0)|^2 + \Big(\int_0^T |f''(x)|e^{x(\lambda-\alpha/2)}\,dx\Big)^2.$$

Beweis Es gilt zunächst, analog zu dem Beweis von Proposition 6.3.9

$$\|f - \Pi_k f\|_\infty \leq \Big\|\sum_{|n|>k} g_n\langle f, g_n^*\rangle_\alpha\Big\|_\infty \leq \sum_{|n|>k}\|g_n\|_\infty|\langle f, g_n^*\rangle_\alpha|.$$

Es seien dem Leser die Funktionen $h_n(x) = e^{\xi_n x}$ für $x \geq 0$, wobei $\xi_n = -\frac{2\pi i n}{T} - \lambda + \frac{\alpha}{2}$, für $n \in \mathbb{N}$ aus dem Beweis von Proposition 6.3.9 in Erinnerung gerufen. Dann gilt wegen Korollar 6.3.7 und unter Zunahme partieller Integration

$$\begin{aligned}
|\langle f, g_n^*\rangle_\alpha| &= \frac{C}{\sqrt{T}}\Big|\int_0^T f'(x)h_n(x)\,dx\Big| \\
&= \frac{C}{\sqrt{T}}\left|\Big(\frac{1}{\xi_n}h_n(x)f'(x)\Big)_0^T - \int_0^T \frac{1}{\xi_n}h_n(x)f''(x)\,dx\right| \\
&= \frac{C}{\sqrt{T}|\xi_n|}\left|h_n(T)f'(T) - f'(0) - \int_0^T h_n(x)f''(x)\,dx\right| \\
&\leq \frac{\sqrt{2}C}{\sqrt{T}|\xi_n|}\sqrt{\mathcal{A}_f}.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Faktor $\|g_n\|_\infty$, so gilt mit $\lambda_n = \frac{2\pi in}{T} - \lambda + \frac{\alpha}{2}$ wegen

$$|g_n(x)| = \left|\frac{1}{\lambda_n\sqrt{T}}(e^{\lambda_n x} - 1)\right| = \frac{1}{|\lambda_n|\sqrt{T}}|e^{\lambda_n x} - 1| \le \frac{1}{|\lambda_n|\sqrt{T}}\left(|e^{\lambda_n x}| - 1\right)$$

$$\le \frac{1}{|\lambda_n|\sqrt{T}}\left(e^{-x(\lambda+\frac{\alpha}{2})} + 1\right) \le \frac{1}{|\lambda_n|\sqrt{T}}(1+1) = \frac{2}{|\lambda_n|\sqrt{T}},$$

dass

$$\|g_n\|_\infty = \sup_{x\ge 0}|g_n(x)| \le \frac{2}{|\lambda_n|\sqrt{T}}.$$

Mit Hilfe der beiden Abschätzungen und mit Lemma 6.3.8 erhält man nun abschließend

$$\|f - \Pi_k f\|_\infty \le \sum_{|n|>k} \frac{2}{|\lambda_n|\sqrt{T}} \frac{2C}{\sqrt{T}|\xi_n|}\sqrt{\mathcal{A}_f} = \frac{2\sqrt{2}C\sqrt{\mathcal{A}_f}}{T}\sum_{|n|>k}\frac{1}{|\lambda_n||\xi_n|}$$

$$\le \frac{2\sqrt{2}C}{T}\mathcal{A}_f\frac{T^2}{4\pi^2 k} = \frac{CT}{\sqrt{2}\pi^2}\mathcal{A}_f\frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

□

Bevor wir die Supremumsnorm der Funktionale $c_{k,t}$ untersuchen, benötigen wir ein technisches Resultat betreffend das Biorthogonalsystem $(g_*^*, (g_n^*)_{n\in\mathbb{Z}})$, welches in folgendem Lemma formuliert wird.

7.2 Lemma Es sei $(g_*^*, (g_n^*)_{n\in\mathbb{Z}})$ das Biorthogonalsystem der Riesz Basis $(g_*, (g_n)_{n\in\mathbb{Z}})$ des Raumes H_α^T, wie in Korollar 6.3.4 gegeben. Dann gilt

$$\|g_n^*\|_\infty \le \begin{cases} \frac{C_1}{|\xi_n|}(1 + \max\{1;\ |e^{-\xi_n T}|\}) & \text{für } x \le T \\ \frac{2C_1}{|\xi_n|}\left(1 + e^{(\lambda-\frac{\alpha}{2})T}\right) & \text{für } x > T, \end{cases}$$

wobei die Konstante C_1 durch $C_1 = \frac{1-e^{-2\lambda T}}{\sqrt{T}}$ gegeben ist.

Beweis Für den Beweis wollen wir eine Fallunterscheidung durchführen.
Fall (1): Es sei $x \le T$, dann gilt

$$g_n^*(x) = \int_0^x e^{-y\frac{\alpha}{2}}\left(1 - e^{-2\lambda T}\right)e^{2\lambda y}\frac{1}{\sqrt{T}}\exp\left(\left(\frac{2\pi in}{T} - \lambda\right)y\right)\,dy$$

$$= \frac{1-e^{-2\lambda T}}{\sqrt{T}}\int_0^x \exp\left(\left(\frac{2\pi in}{T} - \lambda + 2\lambda - \frac{\alpha}{2}\right)y\right)\,dy$$

$$= \frac{1-e^{-2\lambda T}}{\sqrt{T}}\int_0^x e^{-\xi_n y}\,dy = \frac{1-e^{-2\lambda T}}{\sqrt{T}}\left(-\frac{1}{\xi_n}e^{-\xi_n y}\right)_{y=0}^{y=x}$$

$$= \frac{1-e^{-2\lambda T}}{\sqrt{T}} \left(\frac{1}{\xi_n} - \frac{1}{\xi_n} e^{-\xi_n x} \right) \underset{C_1 := \frac{1-e^{-2\lambda T}}{\sqrt{T}}}{=} \frac{C_1}{\xi_n} \left(1 - e^{-\xi_n x}\right)$$

Daraus folgt bereits

$$|g_n^*(x)| \leq \frac{C_1}{|\xi_n|} \left(1 + \max\{1, |e^{-\xi_n T}|\}\right).$$

<u>Fall (2):</u> Es sei $kT \leq x \leq (k+1)T$, für $k \geq 1$, dann gilt zunächst

$$\begin{aligned}
g_n^*(x) &= g_n^*(kT) + \int_{kT}^{x} e^{-y\frac{\alpha}{2}} \left(1 - e^{-2\lambda T}\right) e^{2\lambda(y-kT)} \frac{1}{\sqrt{T}} e^{(\frac{2\pi i n}{T} - \lambda) y}\, dy \\
&= g_n^*(kT) + C_1 e^{-2\lambda kT} \int_{kT}^{x} e^{-\xi_n y}\, dy \\
&= g_n^*(kT) + C_1 e^{-2\lambda kT} \left(-\frac{1}{\xi_n} e^{-\xi_n y} \right)_{y=kT}^{y=x} \\
&= g_n^*(kT) + C_1 e^{-2\lambda kT} \left(\frac{1}{\xi_n} e^{-\xi_n kT} - \frac{1}{\xi_n} e^{-\xi_n x} \right).
\end{aligned} \tag{20}$$

- Betrachten wir nun den Summanden $g_n^*(kT)$ aus (20), so gilt

$$\begin{aligned}
g_n^*(kT) &= \int_0^{kT} e^{-y\frac{\alpha}{2}} \left(1 - e^{-2\lambda T}\right) e^{2\lambda \mathrm{cut}(y)} \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(\left(\frac{2\pi i n}{T} - \lambda \right) y \right) dy \\
&= \sum_{l=1}^{k} \int_{(l-1)T}^{lT} e^{-y\frac{\alpha}{2}} \left(1 - e^{-2\lambda T}\right) e^{2\lambda(y-(l-1)T)} \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(\left(\frac{2\pi i n}{T} - \lambda \right) y \right) dy \\
&= C_1 \sum_{l=1}^{k} e^{-2\lambda(l-1)T} \int_{(l-1)T}^{lT} e^{-\xi_n y} dy = C_1 \sum_{l=1}^{k} e^{-2\lambda(l-1)T} \left(-\frac{1}{\xi_n} e^{-\xi_n y} \right)_{(l-1)T}^{lT} \\
&= \frac{C_1}{\xi_n} e^{2\lambda T} \sum_{l=1}^{k} e^{-2\lambda l T} \left(e^{-\xi_n (l-1)T} - e^{-\xi_n l T} \right) \\
&= \frac{C_1}{\xi_n} e^{2\lambda T} \left(e^{\xi_n T} - 1 \right) \sum_{l=1}^{k} e^{-2\lambda l T - \xi_n l T}.
\end{aligned}$$

  Betrachten wir nun die Struktur der endlichen Reihe in der letzten Zeile, so sieht man durch umformen:

$$\sum_{l=1}^{k} e^{-2\lambda l T - \xi_n l T} = \sum_{l=1}^{k} \exp(-2\lambda T - \xi_n T)^l \tag{21}$$

  und abschätzen der Summanden:

$$\left| \exp\left(-2\lambda T + \frac{2\pi i n T}{T} + \lambda T - \frac{\alpha}{2} T \right) \right| \leq \exp\left(-\lambda T - \frac{\alpha}{2} T \right) = \exp\left(-T \left(\lambda + \frac{\alpha}{2} \right) \right) \leq 1,$$

  dass es sich um eine geometrische Reihe handelt, deren Wert wir explizit bestimmen können. Jedoch beginnt die Summe bei $l = 1$, weswegen wir die uns bekannte Formel ändern müssen. Es gilt

$$\sum_{l=1}^{k} q^k = \sum_{l=0}^{k} q^k - q^0 = \frac{1-q^k}{1-q} - 1 = \frac{1-q^k-1+q}{1-q} = \frac{q-q^k}{1-q} = q\frac{1-q^k}{1-q}$$

und damit für die geometrische Reihe (21)

$$\sum_{l=1}^{k} e^{-2\lambda lT-\xi_n lT} = \exp(-2\lambda T-\xi_n T)\frac{1-\exp(-2\lambda Tk-\xi_n Tk)}{1-\exp(-2\lambda T-\xi_n T)}.$$

Mit den vorangegangenen Berechnungen gilt nun

$$\begin{aligned} |g_n^*(kT)| &= \frac{C_1 e^{2\lambda T}}{|\xi_n|}\left|\left(e^{\xi_n T}-1\right)(\exp(-2\lambda T-\xi_n T))\right|\left|\frac{1-\exp(-2\lambda Tk-\xi_n Tk)}{1-\exp(-2\lambda T-\xi_n T)}\right| \\ &= \frac{C_1 e^{2\lambda T}}{|\xi_n|}\left|e^{-2\lambda T}\left(1-e^{-\xi_n T}\right)\right|\left|\frac{1-\exp(-2\lambda Tk-\xi_n Tk)}{1-\exp(-2\lambda T-\xi_n T)}\right| \\ &= \frac{C_1}{|\xi_n|}\left|1-e^{-\xi_n T}\right|\left|\frac{1-\exp(-2\lambda Tk-\xi_n Tk)}{1-\exp(-2\lambda T-\xi_n T)}\right|. \end{aligned}$$

Untersuchen der einzelnen Faktoren ergibt

(1.) $\left|1-e^{-\xi_n T}\right| \le 1+|e^{-\xi_n T}| \le 1+e^{\lambda-\frac{\alpha}{2}T}$

(2.)

$$\begin{aligned} |1-\exp(-2\lambda Tk-\xi_n Tk)| &\le 1+\left|\exp\left(kT\left(\frac{2\pi in}{T}-\lambda-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right| \\ &\le 1+\exp\left(-kT\left(\lambda+\frac{\alpha}{2}\right)\right) \le 2 \end{aligned}$$

(3.) Analog zu Punkt (2.) ist $|1-\exp(-2\lambda T-\xi_n T)| \le 2$

Es gilt also abschließend, dass

$$|g_n^*(kT)| \le \frac{C_1}{|\xi_n|}\left(1+e^{(\lambda-\frac{\alpha}{2})T}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.

- Abschließend betrachten wir den zweiten Summanden aus Gleichung (20) und es folgt

$$C_1 e^{-2\lambda kT}\left(\frac{1}{\xi_n}e^{-\xi_n kT}-\frac{1}{\xi_n}e^{-\xi_n x}\right) = \frac{C_1}{\xi_n}\left(e^{-\xi_n kT-s\lambda kT}-e^{-\xi_n x-2\lambda kT}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{C_1}{\xi_n}\left(\exp\left(\frac{2\pi in}{T}kT+\lambda kT-2\lambda kT-\frac{\alpha}{2}kT\right)-\exp\left(\frac{2\pi inx}{T}+\lambda x-2\lambda kT-\frac{\alpha}{2}x\right)\right) \\ &= \frac{C_1}{\xi_n}\left(\exp\left(2\pi ink-\lambda kT-\frac{\alpha}{2}kT\right)-\exp\left(\frac{2\pi inx}{T}+\lambda(x-2kT)-\frac{\alpha}{2}x\right)\right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Umformung gilt nun

$$\left|C_1 e^{-2\lambda kT}\left(\frac{1}{\xi_n}e^{-\xi_n kT} - \frac{1}{\xi_n}e^{-\xi_n x}\right)\right|$$

$$\le \frac{C_1}{|\xi_n|}\left(\left|\exp\left(2\pi i n k - \lambda kT - \frac{\alpha}{2}kT\right)\right| - \left|\exp\left(\frac{2\pi i n x}{T} + \lambda(x-2kT) - \frac{\alpha}{2}x\right)\right|\right)$$

$$\le \frac{C_1}{|\xi_n|}\left(\exp\left(-kT\left(\lambda + \frac{\alpha}{2}\right)\right) - \exp\left(\lambda(x-2kT) - \frac{\alpha}{2}x\right)\right).$$

Definiere nun die Abbildung $\iota(x) := (\lambda - \alpha/2)x - 2\lambda kT$, für $x \in [kT, (k+1)T]$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist ι eine lineare Funktion und es gelten die folgenden drei Eigenschaften:

(i) $\iota(kT) = (\lambda - \alpha/2)x - 2\lambda kT = -kT\lambda - \frac{\alpha}{2}kT = -kT(\lambda + \frac{\alpha}{2}) < 0$,

(ii) $\iota((k+1)T) = (\lambda - \frac{\alpha}{2})(k+1)T - 2\lambda kT = -\lambda kT + \lambda T - \frac{\alpha}{2}kT - \frac{\alpha}{2}T = T(\lambda(1-k) - \frac{\alpha}{2}(1+k)) < 0$, für $k \geq 0$ und

(iii) $\iota(kT) < \iota((k+1)T) \Leftrightarrow (\lambda - \frac{\alpha}{2})kT - 2\lambda kT < (\lambda - \frac{\alpha}{2})(k+1)T - 2\lambda kT \Leftrightarrow kT < (k+1)T$.

Aufgrund dieser drei Eigenschaften von ι, gilt nun, für $x \in [kT, (k+1)T]$

$$e^{\iota(x)} \le e^{\iota((k+1)T)} = \exp((\lambda - \frac{\alpha}{2})(k+1)T - 2\lambda kT) = \exp(T(-\lambda k - \frac{\alpha}{2}k + \lambda - \frac{\alpha}{2}))$$

$$= \exp(T(-k(\lambda + \frac{\alpha}{2} + \lambda - \frac{\alpha}{2})) = \exp(-Tk(\lambda + \frac{\alpha}{2}))\exp(T(\lambda - \frac{\alpha}{2})) \le \exp(T(\lambda - \frac{\alpha}{2}))$$

und somit abschließend für den zweiten Summanden in Gleichung (20)

$$\left|C_1 e^{-2\lambda kT}\left(\frac{1}{\xi_n}e^{-\xi_n kT} - \frac{1}{\xi_n}e^{-\xi_n x}\right)\right| \le \frac{C_1}{|\xi_n|}\left(1 + \exp(T(\lambda - \frac{\alpha}{2}))\right),$$

da $\exp(-Tk(\lambda + \frac{\alpha}{2})) \le 1$.

Durch zusammenführen der beiden Fälle folgt die Behauptung. □

Nun ist es uns möglich eine Abschätzung für $c_{k,t}$ bezüglich der Supremumsnorm anzugeben und so Lemma 6.3.10 zu modifizieren und eine schnellere Konvergenzrate zu erhalten.

7.3 Proposition Es sei $c_{k,t}$ wie in Proposition 6.3.5 gegeben, dann gilt

$$\|c_{k,t}\|_\infty \le \frac{C_2}{k}\left(1 + e^{-t(\lambda + \frac{\alpha}{2})}\right), \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

wobei

$$C_2 := \frac{C_1\sqrt{T^3}}{2\pi^2}\left(\mathbb{1}_{[0,T]}(x)(1 + \max\{1; |e^{-\xi_n T}|\}) + 2\,\mathbb{1}_{(T,\infty]}(x)(1 + \exp(T(\lambda - \alpha/2)))\right).$$

Beweis Mit Proposition 6.3.5 und (17) folgt

$$\|c_{k,t}\|_\infty = \| \sum_{|n|>k} g_n(t) g_n^* \|_\infty \le \sum_{|n|>k} |g_n(t)| \|g_n^*\|_\infty = 2 \sum_{n>k} |g_n(t)| \|g_n^*\|_\infty .$$

Wegen Lemma 7.2, den Abschätzungen von $|g_n(t)|$ im Beweis von Proposition 7.1 und Lemma 6.3.8 gilt

$$\begin{aligned} \|c_{k,t}\|_\infty &\le 2\frac{C_1}{\sqrt{T}}(1 + e^{-t(\lambda+\alpha/2)}) \Big(\mathbb{1}_{[0,T]}(x)(1 + \max\{1; |e^{-\xi_n T}|\}) + 2\, \mathbb{1}_{(T,\infty]}(x)(1 + e^{T(\lambda-\alpha/2)}) \Big) \sum_{n>k} \frac{1}{|\xi_n|\,|\lambda_n|} \\ &\le \frac{2C_1T^2}{4\pi^2\sqrt{T}}(1 + e^{-t(\lambda+\alpha/2)}) \Big(\mathbb{1}_{[0,T]}(x)(1 + \max\{1; |e^{-\xi_n T}|\}) + 2\, \mathbb{1}_{(T,\infty]}(x)(1 + e^{T(\lambda-\alpha/2)}) \Big) \frac{1}{k} \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt bereits die Behauptung. □

Mit Hilfe von Proposition 7.3 ist es uns zudem möglich zu zeigen, dass $\|c_{k,t}\|_\infty$ sogar gleichmäßig in t beschränkt ist, denn

$$\sup_{t\in[0,T]} \|c_{k,t}\|_\infty \le \sup_{t\in[0,T]} \frac{C_2}{k} \Big(1 + e^{-t(\lambda+\alpha/2)}\Big) = \frac{C_2}{k} \sup_{t\in[0,T]} \Big(1 + e^{-t(\lambda+\alpha/2)}\Big).$$

Dieses Supremum ist in der Tat ein Maximum, wegen der Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto 1 + e^{-t(\lambda+\alpha/2)}$ und wegen der Kompaktheit des Intervalls $[0,T]$. Das Maximum wird dabei am linken Rand von $[0,T]$ angenommen und somit gilt

$$\sup_{t\in[0,T]} \|c_{k,t}\|_\infty \le \frac{2C_2}{k}. \tag{22}$$

In folgender Proposition wollen wir eine Abschätzung für $\mathcal{C}_{k,t}\Pi f$ bezüglich der Supremumsnorm angeben, welche wir dann für den Beweis des Hauptresultats dieser Diplomarbeit benötigen.

7.4 Proposition Es sei $\mathcal{C}_{k,t}$ wie in Proposition 6.3.5 gegeben und $f \in H_\alpha$ sei zwei mal stetig differenzierbar auf dem Intervall $[0,T]$. Dann ist

$$\|\mathcal{C}_{k,t}\Pi f\|_\infty \le \frac{T}{2\pi^2(1 - e^{-2\lambda T})} \mathcal{A}_{\Pi f} \frac{1}{k},$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei

$$\mathcal{A}_{\Pi f} := |e^{T(-\lambda+\alpha/2)}(\Pi f)'(T) - (\Pi f)'(0)| + \int_0^T |(\Pi f)''(y)| e^{(\lambda-\frac{\alpha}{2})y}\, dy.$$

Beweis Mit Korollar 6.3.7 gilt

$$\|\mathcal{C}_{k,t}\Pi f\|_\infty = |\langle \Pi f, c_{k,t}\rangle_\alpha| = |\sum_{|n|>k} \langle \Pi f, g_n(t) g_n^*\rangle_\alpha| = |\sum_{|n|>k} \overline{g_n(t)} \langle \Pi f, g_n^*\rangle_\alpha|$$

$$= \left| \sum_{|n|>k} \overline{g_n(t)} (1-e^{-2\lambda T})^{-1} T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T (\Pi f)'(y) e^{\xi_n y}\, dy \right|$$

$$\le \frac{1}{(1-e^{-2\lambda T})\sqrt{T}} \sum_{|n|>k} \underbrace{|\overline{g_n(t)}|}_{=|g_n(t)|} \left| \int_0^T (\Pi f)'(y) e^{\xi_n y}\, dy \right|$$

Betrachten wir nun $\left|\int_0^T (\Pi f)'(y) e^{\xi_n y}\, dy\right|$ näher, so folgt mit partieller Integration

$$\left| \int_0^T (\Pi f)'(y) e^{\xi_n y}\, dy \right| = \left| \left(\frac{1}{\xi_n} e^{\xi_n y} (\Pi f)'(y) \right)_{y=0}^{y=T} - \int_0^T \frac{1}{\xi_n} e^{\xi_n y} (\Pi f)''(y)\, dy \right|$$

$$= \frac{1}{|\xi_n|} \left| e^{\xi_n T} (\Pi f)'(T) - (\Pi f)'(0) - \int_0^T e^{\xi_n y} (\Pi f)''(y)\, dy \right| \le \frac{1}{|\xi_n|} \mathcal{A}_{\Pi f}, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Zusammen mit der Abschätzung von $|g_n(t)|$ im Beweis von Proposition 7.1 und Lemma 6.3.8 folgt nun

$$\|\mathcal{C}_{k,t}\Pi f\|_\infty \le \frac{2\,\mathcal{A}_{\Pi f}}{(1-e^{-2\lambda T})T} \sum_{|n|>k} \frac{1}{|\lambda_n|\,|\xi_n|} \le \frac{2T^2}{(1-e^{-2\lambda T})T 4\Pi^2} \mathcal{A}_{\Pi f} \frac{1}{k} = \frac{T}{2\pi^2(1-e^{-2\lambda T})} \mathcal{A}_{\Pi f} \frac{1}{k}$$

□

Wir wollen nun einige wichtige Aspekte der Funktionentheorie wiederholen und uns die Theorie anhand eines Beispiels veranschaulichen, da Proposition 7.10 diese Erkenntnisse benötigt.

7.5 Definition[24] Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Eine Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f, wenn F holomorph ist und $F' = f$ gilt.

7.6 Definition[25] Ein Integrationsweg in $U \subset \mathbb{C}$ ist ein stückweise stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [a,b] \to U$. γ heißt Integrationsweg von z_0 nach z_1, wenn $\gamma(a) = z_0$ und $\gamma(b) = z_1$ gilt.

7.7 Definition[26] Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $f : \mathrm{Sp}(\gamma) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Man setzt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt,$$

wobei $\mathrm{Sp}(\gamma) := \gamma([a,b])$. Der Integrand des rechten Integrals ist eine stückweise stetige Funkti-

[24] Definition 2.1, Seite 53
[25] Siehe [14], Definition 1.1, Seite 46
[26] Siehe [14], Definition 1.2, Seite 48

on auf $[a,b]$, da γ stückweise stetig differenzierbar ist. Das rechte Integral ist also wohldefiniert.

7.8 Proposition [27] Es sei U offen in $\mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die eine Stammfunktion F besitzt. Des Weiteren sei γ ein Integrationsweg in U von z_0 nach z_1. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Das Kurvenintegral über f hängt also nur von Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges ab und nicht vom Verlauf.

Beweis Für den Beweis siehe [14], Seite 53 ff. □

7.9 Beispiel Es sei die Funktion $\gamma : [0,T] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto t$ gegeben. Da $\gamma \in C^\infty$, ist γ ein Integrationsweg. Des Weiteren sei ζ_n für $n \in \mathbb{Z}$, wie in Lemma 6.3.8, sowie $\lambda > \frac{\alpha}{2}$. Definiere die Funktion $F(x) := \frac{e^{\zeta_n x}}{\zeta_n}$, für $x \in \mathbb{C}$, dann ist $F'(x) = e^{\zeta_n x}$ und es gilt

$$\int_0^T F'(\gamma(x))\gamma'(x)dx = \int_\gamma F'(x)\, dx = F(T) - F(0) = \frac{e^{\zeta_n T} - 1}{\zeta_n}, \quad \text{für } T > 0.$$

Wir wollen nun ein technisches Resultat angeben, welches später für uns von großer Wichtigkeit sein wird, da es uns in weiterer Folge ermöglicht, die Voraussetzung der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit durch eine schwächere Bedingung zu ersetzen.

7.10 Proposition Es seien $\lambda > \frac{\alpha}{2}$ und der Operator $\mathcal{J}$ gegeben durch

$$\mathcal{J} : H_\alpha^T \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \begin{cases} \int_0^\infty f'(y)e^{\alpha y}\, dy & \text{falls } \int_0^\infty |f'(y)|e^{\alpha y}\, dy < \infty, \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt $\mathcal{J}f \neq \infty$ für alle $f \in H_\alpha^T$ und $\|\mathcal{J}\|_{\text{op}} < \infty$. Insbesondere gilt

$$|\mathcal{J}f| \leq \|\mathcal{J}\|_{\text{op}}\, \|f\|_\alpha.$$

Beweis Es ist

$$f = g_*\langle f, g_*\rangle_\alpha + \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n \langle f, g_n^*\rangle_\alpha, \quad f \in H_\alpha^T. \tag{23}$$

Zudem gelten die folgenden zwei Abschätzungen:

(i) Nach Korollar 6.3.6 gilt für $f \in H_\alpha^T$

$$\frac{e^{-2\lambda T}}{1 - e^{-2\lambda T}} \left(|f(0)|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, g_n^*\rangle_\alpha|^2 \right) \leq \|f\|_\alpha^2.$$

[27] Siehe [14], Satz 2.1, Seite 53

Dann folgt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, g_n^*\rangle_\alpha|^2 \le \underbrace{\frac{1-e^{-2\lambda T}}{e^{-2\lambda T}}}_{=:K} \|f\|_\alpha^2 - |f(0)|^2 = K\|f\|_\alpha^2 - |f(0)|^2 \le K\|f\|_\alpha^2.$$

(ii) Für den Operator $\mathcal{J}$, sowie die Riesz Basis $(g_*, (g_n)_{n\in\mathbb{Z}})$ gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathcal{J} g_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_0^\infty g_n'(y) e^{\alpha y}\, dy \right|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_0^\infty \frac{e^{\lambda_n y}}{\sqrt{T}} e^{\alpha y}\, dy \right|^2$$
$$= \frac{1}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_0^\infty e^{\zeta_n y}\, dy \right|^2,$$

wobei $\zeta_n = \frac{2\pi i n}{T} - \lambda + \frac{\alpha}{2}$ wie in Lemma 6.3.8 gegeben ist. Gemäß Beispiel 7.9 ist

$$\int_0^\infty e^{\zeta_n y}\, dy = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{\zeta_n y}\, dy = \lim_{T\to\infty} \frac{e^{\zeta_n T} - 1}{\zeta_n} = -\frac{1}{\zeta_n},$$

da $\lambda > \frac{\alpha}{2}$. Somit gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathcal{J} g_n|^2 \le \frac{1}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\zeta_n|^2}.$$

Mit (i), (ii), Gleichung (23), der Cauchy–Schwarz Ungleichung, Lemma 6.3.8 (iv) und da $\mathcal{J} g_* = 0$ folgt nun

$$|\mathcal{J} f| = \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{J} g_n \langle f, g_n^*\rangle_\alpha \right| \le \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathcal{J} g_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, g_n^*\rangle_\alpha|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le \frac{\sqrt{K}\|f\|_\alpha}{\sqrt{T}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\zeta_n|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\sqrt{K}\|f\|_\alpha}{\sqrt{T}} \left(\frac{T^2}{2\pi^2} + \frac{1}{|\zeta_{-1}|^2} + \frac{1}{|\zeta_0|^2} + \frac{1}{|\zeta_1|^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Für die Operatornorm von $\mathcal{J}$ gilt nun

$$\|\mathcal{J}\|_{\text{op}} = \sup_{f\in H_\alpha^T, \|f\|_\alpha = 1} \mathcal{J} f \le \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{T}} \left(\frac{T^2}{2\pi^2} + \frac{1}{|\zeta_{-1}|^2} + \frac{1}{|\zeta_0|^2} + \frac{1}{|\zeta_1|^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

□

Als nächstes wollen wir ein technisches Lemma angeben, welches für den Beweis der darauffolgenden Proposition benötigt wird.

7.11 Lemma Es seien $f \in H_\alpha^T$ mit $\partial_x f \in H_\alpha^T$ und $\lambda > \frac{\alpha}{2}$. Dann gilt

$$f'(y) e^{\alpha y} \xrightarrow[y\to 0]{} 0.$$

Beweis Definiere zunächst die Menge I durch

$$I := \{f \in H_\alpha^T | f' \in H_\alpha^T \ \wedge \ \forall x \geq 0: \ f'(x+T) = e^{-(\lambda+\frac{\alpha}{2})T} f'(x)\}.$$

Dann gilt klarerweise, dass $g_* \in I$ und wegen

$$\begin{aligned} g_n'(x+T) &= \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\lambda_n(x+T)} = e^{\lambda_n T} g_n'(x) \\ &= e^{\frac{2\pi i n T}{T} - T(\lambda+\frac{\alpha}{2})} g_n'(x) = e^{-(\lambda+\frac{\alpha}{2})T} g_n'(x), \end{aligned}$$

dass auch $g_n \in I$, wobei λ_n wie in Lemma 6.3.8 gegeben ist und $(g_*, (g_n)_{n\in\mathbb{Z}})$ die Riesz Basis von H_α^T bezeichnet. Zudem gilt $g_n' \in H_\alpha^T$, da

$$g_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\lambda_n x} = \lambda_n g_n(x) + \frac{1}{\sqrt{T}} g_*(x),$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Deshalb gilt für I, dass

$$I = \{f \in H_\alpha^T : \ f' \in H_\alpha^T\}.$$

Es gilt nun

$$f'(y)e^{\alpha y} = f'(y - \max\{Tn : \ n \in \mathbb{N}, \ Tn \leq y\} + \max\{Tn : \ n \in \mathbb{N}, \ Tn \leq y\})e^{\alpha y}.$$

Es sei nun $n \in \mathbb{N}$ stets maximal gewählt, sodass $Tn \leq y$, dann ist wegen $f \in I$

$$f'(y)e^{\alpha y} = f'(\text{cut}(y) + nT)e^{\alpha y} = e^{-(\lambda+\frac{\alpha}{2})nT + \alpha y} f'(\text{cut}(y)).$$

Da nun $f' \in H_\alpha^T$ und somit eine absolut stetige Funktion ist, die Funktion cut stets nur Werte in $[0, T)$ annimmt, ist $f'(\text{cut}(y))$ beschränkt. Es bezeichne $\mathcal{D}$ diese Schranke, dann gilt mit $y \leq (n+1)T$, dass

$$f'(y)e^{\alpha y} \leq \mathcal{D} e^{-(\lambda+\frac{\alpha}{2})nT + \alpha(n+1)T} = \mathcal{D} e^{\alpha T} e^{-(\lambda+\frac{\alpha}{2})nT + \alpha nT} = \mathcal{D} e^{\alpha T} e^{(\frac{\alpha}{2}-\lambda)nT}.$$

Da nun laut Voraussetzung $\lambda > \frac{\alpha}{2}$ und damit $\frac{\alpha}{2} - \lambda < 0$ ist, gilt nun wenn $y \to \infty$, dass n in der obigen Ungleichung immer größer wird und daher ebenfalls gegen ∞ konvergiert. Aufgrund dessen folgt die Behauptung. □

Bevor wir nun das Hauptresultat dieser Arbeit vorstellen wollen, geben wir ein Resultat, analog zu Proposition 7.4 an, welches jedoch nicht die Voraussetzung der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit benötigt, wie zuvor erwähnt.

7.12 Proposition Es seien $f \in H_\alpha^T$ mit $\partial_x f \in H_\alpha^T$, $\lambda > \frac{\alpha}{2}$ und $\mathcal{J}$ wie in Proposition 7.10. Dann gilt

$$\|\mathcal{C}_{k,t} f\|_\infty \leq C_2(t) \|\mathcal{J}\|_{\text{op}} (\|\partial_x f\|_\alpha + \alpha \|f\|_\alpha) \frac{1}{k},$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei

$$C_2(t) := \frac{C\tilde{C}_1\sqrt{T^3}}{4\pi^2}\left(1 + e^{-t(\lambda + \frac{\alpha}{2})}\right)$$

und

$$\tilde{C}_1 := \mathbb{1}_{[0,T]}(x)\left(1 + \max\{1; |e^{-\xi_n T}|\}\right) + 2\,\mathbb{1}_{(T,\infty]}(x)\left(1 + e^{(\lambda - \frac{\alpha}{2})T}\right).$$

Beweis Es gilt zunächst

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{C}_{k,t}f\|_\infty &= |\langle f, c_{k,t}\rangle_\alpha| = |\sum_{|n|>k}\langle f, g_n(t)g_n^*\rangle_\alpha| \\
&= \left|\sum_{|n|>k}\overline{g_n(t)}\int_0^\infty f'(y)e^{\alpha y}\overline{(g_n^*)'(y)}\,dy\right| \\
&\le \sum_{|n|>k}\underbrace{|\overline{g_n(t)}|}_{|g_n(t)|}\underbrace{\left|\int_0^\infty f'(y)e^{\alpha y}\overline{(g_n^*)'(y)}\,dy\right|}_{(*)}.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun $(*)$ genauer, so folgt mit partieller Integration

$$\left|\int_0^\infty f'(y)e^{\alpha y}\overline{(g_n^*)'(y)}\,dy\right| = \left|\underbrace{\left[f'(y)e^{\alpha y}\overline{g_n^*(y)}\right]_{y=0}^{\to\infty}}_{(*_1)} - \int_0^\infty (f''(y)e^{\alpha y} + \alpha f'(y)e^{\alpha y})\overline{g_n^*(y)}\,dy\right|$$

Da $\overline{g_n^*(0)} = 0$ gilt und wegen

$$\begin{aligned}
g_n^*(x) &= \frac{1 - e^{-2\lambda T}}{\sqrt{T}}\int_0^x e^{\lambda_n y}e^{2\lambda \mathrm{cut}(y)}dy \le \frac{\left(1 - e^{-2\lambda T}\right)e^{2\lambda T}}{\sqrt{T}}\int_0^x e^{\lambda_n y}dy \\
&= \frac{e^{2\lambda T} - 1}{\sqrt{T}}\frac{e^{\lambda_n x} - 1}{\lambda_n} \to \frac{1 - e^{2\lambda T}}{\lambda_n\sqrt{T}}, \quad \text{für } x \to \infty,
\end{aligned}$$

ist $\overline{g_n^*(y)}$ beschränkt und konvergiert gegen einen endlichen Wert für $y \to \infty$. Aus diesem Grund und wegen Lemma 7.11 ist $(*_1) = 0$. Daher gilt für $(*)$, wegen Lemma 7.2 und Proposition 7.10

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty f'(y)e^{\alpha y}\overline{(g_n^*)'(y)}\,dy\right| &= \left|-\int_0^\infty (f''(y)e^{\alpha y} + \alpha f'(y)e^{\alpha y})\overline{g_n^*(y)}\,dy\right| \\
&\le \|\overline{g_n^*}\|_\infty\left(|\mathcal{J}\partial_x f| + \alpha\,|\mathcal{J}f|\right) \\
&\le \|\overline{g_n^*}\|_\infty\|\mathcal{J}\|_{\mathrm{op}}(\|\partial_x f\|_\alpha + \alpha\,\|f\|_\alpha) \\
&\le \frac{C\tilde{C}_1}{|\xi_n|}\|\mathcal{J}\|_{\mathrm{op}}(\|\partial_x f\|_\alpha + \alpha\,\|f\|_\alpha).
\end{aligned}$$

Abschließend folgt nun mit der Abschätzung von $|g_n(t)|$ im Beweis von Proposition 7.1 und

Lemma 6.3.8

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{C}_{k,t}f\|_\infty &\le \frac{C\tilde{C}_1 \, \|\mathcal{J}\|_{\mathrm{op}}(\|\partial_x f\|_\alpha + \alpha \, \|f\|_\alpha)}{\sqrt{T}} \left(1 + e^{-t(\lambda+\frac{\alpha}{2})}\right) \sum_{|n|>k} \frac{1}{|\lambda_n| \, |\xi_n|} \\
&\le \frac{C\tilde{C}_1 \, \|\mathcal{J}\|_{\mathrm{op}}(\|\partial_x f\|_\alpha + \alpha \, \|f\|_\alpha)}{\sqrt{T}} \left(1 + e^{-t(\lambda+\frac{\alpha}{2})}\right) \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{k} \\
&= C_2(t)\|\mathcal{J}\|_{\mathrm{op}}(\|\partial_x f\|_\alpha + \alpha \, \|f\|_\alpha) \, \frac{1}{k},
\end{aligned}
$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

□

Nun können wir das Hauptresultat dieser Diplomarbeit, welches eine Modifikation von Proposition 6.4.4 ist, angeben und beweisen. In diesem erhalten wir die bessere Konvergenzgeschwindigkeit von $\frac{1}{k}$, anstelle von $\frac{1}{\sqrt{k}}$ in Proposition 6.4.4.

7.13 Satz Es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) die Abbildung $x \mapsto f(t,x)$ sei zwei mal stetig differenzierbar, für alle $t \ge 0$,

(ii) $\lambda > \frac{\alpha}{2}$,

(iii) $\partial_x \Pi f_0 \in H_\alpha$,

(iv) $t \mapsto \partial_x \Pi \beta_t \in L^1((\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}, \mathbb{P} \otimes \lambda), H_\alpha^T)$ und

(v) $t \mapsto \partial_x \Pi \Psi_t \in \mathcal{L}_L^2$.

Des Weiteren sei f_k die milde Lösung der SPDE

$$
df_k(t) = \partial_x f_k(t)dt + \Lambda_k \beta(t)dt + \Lambda_k \Psi(t)dL(t), \quad \text{für } t \ge 0,\ f_k(0) = \Lambda_k f_0.
$$

Dann ist

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{x \in [0,T]} |f_k(t,x) - f(t,x)|\right] \le \frac{B(t)}{k}
$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei

$$
\begin{aligned}
B(t) &:= \frac{\sqrt{2}CT}{2\pi^2}\sqrt{\mathcal{A}_f} + \frac{T}{2\pi^2(1-e^{-2\lambda T})}\mathcal{A}_{\Pi f_0} + \|\mathcal{J}\|_{\mathrm{op}} \, \mathbb{E}\left[\int_0^t C_2(t-s)(\|\partial_x \Pi \beta\|_\alpha + \alpha \, \|\Pi\beta(s)\|_\alpha) \, ds\right] \\
&\quad + (1+1/\alpha)^{\frac{1}{2}} \, \frac{C\tilde{C}_1 \, \|\mathcal{J}\|_{\mathrm{op}}}{4\pi^2} \, \mathbb{E}[\|L_1\|_\alpha^2]^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \mathbb{E}[\|\partial_x \Pi \Psi(s)\|_{\mathrm{op}} + \alpha \, \|\Pi\Psi(s)\|_{\mathrm{op}}^2](1 + e^{-(t-s)(\lambda+\frac{\alpha}{2})}) \, ds\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Hier sind die Konstanten C und $\mathcal{A}_f$ wie in Proposition 7.1, $\mathcal{A}_{\Pi f_0}$ wie in Proposition 7.4, der Operator $\mathcal{J}$ wie in Proposition 7.10 und die Konstanten $\tilde{C}_1$ und $C_2(t)$ wie in Proposition 7.12.

Beweis Mit Proposition 7.1 und der Dreiecksungleichung folgt zunächst

$$\|f_k(t)-f(t)\|_\infty \leq \|f_k(t)-\Pi_k f(t)\|_\infty + \|\Pi_k f(t)-f(t)\|_\infty \leq \|f_k(t)-\Pi_k f(t)\|_\infty + \frac{\sqrt{2}CT}{2\pi^2}\sqrt{\mathcal{A}_f}\frac{1}{k},$$

für $k \in \mathbb{N}$ und damit folgt bereits der erste Summand von $B(t)$.
Laut Beweis von Proposition 6.4.4 gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|f_k(t) - \Pi_k f(t)\|_\infty] &= \mathbb{E}\left[\|\mathcal{C}_{k,t}\Pi f_0 + \int_0^t \mathcal{C}_{k,t-s}(\Pi\beta(s)ds + \Pi\Psi(s)dL(s))\|_\infty\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\|\mathcal{C}_{k,t}\Pi f_0\|_\infty\right] + \mathbb{E}\left[\|\int_0^t \mathcal{C}_{k,t-s}(\Pi\beta(s)ds + \Pi\Psi(s)dL(s))\|_\infty\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Wegen Proposition 7.4 gilt

$$\mathbb{E}\left[\|\mathcal{C}_{k,t}\Pi f_0\|_\infty\right] \leq \frac{T}{2\pi^2(1-e^{-2\lambda T})}\mathcal{A}_{\Pi f_0}\,\frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Bevor wir uns der Abschätzung des zweiten Summanden von (24) widmen wollen, betrachten wir nun die zwei folgenden Abschätzungen:

(1) Wegen Proposition 7.12 gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|\int_0^t \mathcal{C}_{k,t-s}\Pi\beta(s)ds\|_\infty\right] &\leq \mathbb{E}[\int_0^t C_2(t-s)\|\mathcal{J}\|_{\text{op}}(\|\partial_x\Pi\beta(s)\|_\alpha + \alpha\,\|\Pi\beta(s)\|_\alpha)\,\frac{1}{k}\,ds] \\ &= \frac{\|\mathcal{J}\|_{\text{op}}}{k}\mathbb{E}[\int_0^t C_2(t-s)(\|\partial_x\Pi\beta(s)\|_\alpha + \alpha\,\|\Pi\beta(s)\|_\alpha)\,ds],\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

(2) Zunächst gilt wegen Proposition 3.3.5.1 und Proposition 3.3.6.1, dass der Spitzklammerprozess des Lèvy Martingals L durch

$$\langle L, L\rangle_t = t\,\text{Tr}\mathcal{Q} = \mathbb{E}[\|L(t)-mt\|_\alpha^2] = t\,\mathbb{E}[\|L_1\|_\alpha^2], \quad t \geq 0,$$

gegeben ist, wobei m den Erwartungswertvektor bezeichnet und somit

$$d\langle L, L\rangle_s = \mathbb{E}[\|L_1\|_\alpha^2]\,ds, \quad s \geq 0.$$

Damit, sowie der Ito Isometrie und dem Beweis von Proposition 3.6 in Benth und Krühner [8] folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|\int_0^t \Pi\Psi(s)dL(s)\|_\alpha^2\right] &= \int_0^t \mathbb{E}[\text{Tr}\,(\Pi\Psi(s)\,\frac{\mathcal{Q}}{\text{Tr}\mathcal{Q}}\,(\Pi\Psi)^*(s))]\,d\langle L, L\rangle_s \\ &= \int_0^t \mathbb{E}[\text{Tr}\,(\Pi\Psi(s)\,\frac{\mathcal{Q}}{\text{Tr}\mathcal{Q}}\,(\Pi\Psi)^*(s))]\,\mathbb{E}[\|L_1\|_\alpha^2]\,ds \\ &\leq \int_0^t \mathbb{E}[\|\Pi\Psi(s)\|_{\text{op}}^2]\,\mathbb{E}[\|L_1\|_\alpha^2]\,ds.\end{aligned}$$

Da nun für ein Element $h \in H_\alpha^T$ gilt

$$\mathcal{C}_{k,t-s}h = \langle c_{k,t-s}, h\rangle_\alpha g_*,$$

ist

$$\|\mathcal{C}_{k,t-s}h\|_\alpha = |\langle c_{k,t-s}, h\rangle_\alpha| = \|\mathcal{C}_{k,t-s}h\|_\infty.$$

Nun können wir $\|\mathcal{C}_{k,t-s}\Pi\Psi(s)\|_{\text{op}}$ mit Hilfe von Proposition 7.12 wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{C}_{k,t-s}\Pi\Psi(s)\|_{\text{op}} &= \sup\{\|\mathcal{C}_{k,t-s}\Pi\Psi(s)\, f\|_\alpha \mid f \in H_\alpha^T,\ \|f\|_\alpha = 1\} \\
&= \sup\{\|\mathcal{C}_{k,t-s}\Pi\Psi(s)\, f\|_\infty \mid f \in H_\alpha^T,\ \|f\|_\alpha = 1\} \\
&\leq C_2(t-s)\|\mathcal{J}\|_{\text{op}} \left(\sup_{f\in H_\alpha^T, \|f\|_\alpha=1} \{\|\partial_x\Pi\Psi(s)f\|_\alpha + \alpha\|\Pi\Psi(s)f\|_\alpha\}\right) \frac{1}{k} \\
&= C_2(t-s)\|\mathcal{J}\|_{\text{op}} \left(\|\partial_x\Pi\Psi(s)f\|_{\text{op}} + \alpha\|\Pi\Psi(s)f\|_{\text{op}}\right) \frac{1}{k},
\end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Damit folgt nun

$$\mathbb{E}\left[\|\int_0^t \mathcal{C}_{k,t-s}\Pi\Psi(s)dL(s)\|_\alpha^2\right] \leq \int_0^t \mathbb{E}[\|\mathcal{C}_{k,t-s}\Pi\Psi(s)\|_{\text{op}}^2]\,\mathbb{E}[\|L_1\|_\alpha^2]\,ds$$

$$\leq \frac{C^2\tilde{C}_1^2\,\|\mathcal{J}\|_{\text{op}}^2\,\mathbb{E}[\|L_1\|_\alpha^2]}{(4\pi^2)^2} \int_0^t \mathbb{E}[(\|\partial_x\Pi\Psi(s)\|_{\text{op}}+\alpha\|\Pi\Psi(s)\|_{\text{op}})^2](1+e^{-(t-s)(\lambda+\alpha/2)})ds\frac{1}{k^2},$$

für $k \in \mathbb{N}$.

Da die Supremumsnorm gemäß Lemma 6.4.2 und (18) durch die H_α−Norm beschränkt ist, folgt mit (1), (2) und der Jensen Ungleichung für den zweiten Summanden in (24):

$$\mathbb{E}\left[\|\int_0^t \mathcal{C}_{k,t-s}(\Pi\beta(s)ds + \Pi\Psi(s)dL(s))\|_\infty\right]$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\|\int_0^t \mathcal{C}_{k,t-s}\Pi\beta(s)ds\|_\infty\right] + \mathbb{E}\left[\|\int_0^t \mathcal{C}_{k,t-s}\Pi\Psi(s)dL(s)\|_\infty\right].$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\|\mathcal{J}\|_{\text{op}}}{k}\mathbb{E}[\int_0^t C_2(t-s)(\|\partial_x\Pi\beta(s)\|_\alpha + \alpha\,\|\Pi\beta(s)\|_\alpha)\,ds] + (1+\alpha^{-1})^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}[\|\int_0^t \mathcal{C}_{k,t-s}\Pi\Psi(s)dL(s)\|_\alpha^2]\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\|\mathcal{J}\|_{\text{op}}}{k}\mathbb{E}[\int_0^t C_2(t-s)(\|\partial_x\Pi\beta(s)\|_\alpha + \alpha\,\|\Pi\beta(s)\|_\alpha)\,ds] \\
&+ (1+\alpha^{-1})^{\frac{1}{2}}\frac{C\tilde{C}_1\,\|\mathcal{J}\|_{\text{op}}}{4\pi^2}\,\mathbb{E}[\|L_1\|_\alpha^2]^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \mathbb{E}[(\|\partial_x\Pi\Psi(s)\|_{\text{op}} + \alpha\,\|\Pi\Psi(s)\|_{\text{op}})^2](1+e^{-(t-s)(\lambda+\alpha/2)})\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{k},
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Durch Zusammensetzen aller Abschätzungen folgt die Behauptung. □

8 Zusammenfassung

In dieser Diplomarbeit wurde, ausgehend von Modellen für die Berechnung von Zinsstrukturkurven, die arbitragefreie Approximation von Terminkontrakten an Rohstoffmärkten behandelt. Wegen der hervorragenden Eigenschaften des Heath–Jarrow–Morton–Musiela Modells, konnte sich eben dieses auch für die Bewertung anderer Finanzinstrumente etablieren, so zum Beispiel für die Bewertung von Strom-, Gas- und Ölpreisen.
Der erste Teil dieser Arbeit ist eine ökonomische Einführung, um so dem Leser die Grundlagen der Rohstoffmärkte für fossile Brennstoffe näher zu erläutern. Der darauffolgende Teil beschäftigt sich mit der Erarbeitung von wichtigen Grundlagen, für den Leser, hinsichtlich Hilbertraumwertiger stochastischer Prozesse, dem stochastischen Integral bezüglich eben solcher Prozesse, sowie der Theorie der stochastischen partiellen Differentialgleichungen.
Die in Benth und Krühner [8] durchgeführten Berechnungen hinsichtlich der arbitragefreien Approximation von Terminkontrakten und damit einhergehend die Berechnung der Konvergenzrate der endlich-dimensionalen Lösung der dem Modell zugrundeliegenden stochastischen partiellen Differentialgleichung gegen die unendlich-dimensionale Lösung, waren Hauptbestandteil dieser Arbeit.
Mit Hilfe der Supremumsnorm, sowie zusätzlichen Strukturvoraussetzungen an die Parameter der stochastischen partiellen Differentialgleichung, konnte eine Verbesserung der Konvergenzrate von $\frac{1}{\sqrt{k}}$ zu $\frac{1}{k}$ erreicht werden, wobei die Dimension des endlich-dimensionalen Hilbertraums gerade $2k + 2$ für $k \in \mathbb{N}$ beträgt.
Die erhöhte Konvergenzrate erlaubt es nun computergestützte, nummerische Berechnungen in kürzerer Zeit durchzuführen und somit rascher Entscheidungen treffen zu können, hinsichtlich des Handels mit fossilen Brennstoffen und elektrischem Strom.

9 Literaturverzeichnis

Literatur

[1] FRED ESPEN BENTH, VALERY A. KHOLODNYI, PETER LAURENCE: Quantitative Energy Finance, Springer Verlag, 2014

[2] UNIV.PROF. DIPL.-MATH. DR.RER.NAT. THORSTEN RHEINLÄNDER: Vorlesung Finanzamathematik 2: zeitstetige Modelle, SS2015 an der TU Wien

[3] WIKIPEDIA: Link: https://de.wikipedia.org/wiki/EU-Emissionshandel

[4] S. PESZAT AND J. ZABCZYK: Stochastic Partial Differential Equations with Lévy Noise, Cambridge University Press, 2007

[5] H. WORACEK, M. KALTENBÄCK, M. BLÜMLINGER: Funktionalanalysis Skriptum, TU Wien, 8. Auflage, Februar 2012

[6] MARTIN BLÜMLINGER: Analysis 3 Skriptum, TU Wien, WS 2013/14

[7] KARL GRILL: Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie Vorlesung, TU Wien, WS 2013/14

[8] FRED ESPEN BENTH AND PAUL KRÜHNER: Approximation of Forward Curve Models in Commodity Markets with arbitragefree finite dimensional Models

[9] D. FILIPOVIC: Consistency Problems for Heath-Jarrow-Morton Interest Rate Models, Springer Verlag, 2001

[10] FRED ESPEN BENTH AND PAUL KRÜHNER: Derivatives pricing in energy markets: an infinite dimensional approach, SIAM Journal of Financial Mathematics, 6(1), 2015

[11] R. YOUNG: An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press Inc., 1980

[12] FRED ESPEN BENTH AND PAUL KRÜHNER: Representation of infinite dimensional forward price models in commodity markets, Communication in Mathematics and Statistics, 2014

[13] FRED ESPEN BENTH, J.SALTYTE BENTH AND S. KOEKEBAKKER: Stochastic Modelling of Electricity and related Marktes, World Scientific, 2008

[14] WOLFGANG FISCHER UND INGO LIEB: Funktionentheorie: Komplexe Analysis in einer Veränderlichen, Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft m.b.H., 2003