



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

DIPLOMARBEIT

Rückversicherung von Lebensrisiken

ausgeführt am Institut für

Stochastik und Wirtschaftsmathematik

der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer

durch

Marlene Koch BSc

Smolekstraße 91, 2401 Fischamend

Datum

Unterschrift

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen von mir selbstständig verfasst worden ist. Alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, sind in dieser Arbeit genannt und aufgelistet. Die aus den Quellen wörtlich entnommenen Stellen sind als solche kenntlich gemacht.

Das Thema dieser Arbeit ist von mir bisher weder im In- noch im Ausland einer Beurteilerin / einem Beurteiler in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt worden.

Ort, Datum und Unterschrift

Abstract

The reinsurance of life risks plays a minor role compared to the one of non-life risks, because the life portfolio of an insurance company is basically homogenous and there is a wide spread of risks. Nevertheless the calculation of the reinsurance premium for different types of life insurance contracts is pretty interesting. [Car83] shows a first possibility to calculate the reinsurance risk premium of life risks (especially in case of endowment and life insurance policies), if only the mortality risk is transferred to the reinsurer. The risk premium is defined as a proportional share of the sum at risk, which calculation is based on the equivalence principle. The methodology of calculating the premium which is paid by the insured person to the insurer can be extended for example by using the mean principle and the standard deviation principle. Afterwards it is possible to investigate the influence of a change in the premium calculation to the reinsurance risk premium. Pure endowment policies can be reinsured with non proportional methods (e.g. Stop-Loss-Contracts) as well.

Zusammenfassung

In der Praxis spielt die Rückversicherung von Lebensrisiken verglichen mit jener von Sachrisiken eine untergeordnete Rolle, da der Lebensversicherungsbestand der Erstversicherer grundsätzlich homogen ist und der Risikoausgleich im Kollektiv gut funktioniert. Dennoch ist insbesondere die Bestimmung der Risikorückversicherungsprämie für verschiedenst ausgestaltete Versicherungsverträge sehr interessant. In [Car83] wird eine Möglichkeit zur Kalkulation der Rückversicherungsprämie von Lebensrisiken (insbesondere von Ablebens- und Gemischten Versicherungen), wenn das Mortalitätsrisiko an den Rückversicherer abgegeben wird, angeführt. Die Rückversicherungsprämie ist hier als proportionaler Anteil der Risikosumme definiert, wobei die Risikosumme mittels des Äquivalenzprinzips bestimmt wird. In dieser Arbeit wird dieses Modell jedoch lediglich als Basismodell betrachtet. Die Erstprämie kann auch mittels anderer Prämienkalkulationsprinzipien - wie zum Beispiel mittels des Erwartungswert-, Standardabweichungs- oder exponentiellen Nullnutzenprinzips berechnet werden. Anschließend ist es möglich, die Änderungen in der Kalkulation der Risikosumme auf die Rückversicherungsprämie zu untersuchen. Erlebensversicherungen können auch mit nicht-proportionalen Methoden (zum Beispiel Stop-Loss-Verträgen) rückversichert werden.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	I
Abbildungsverzeichnis	III
Tabellenverzeichnis	V
1 Einleitung	1
2 Grundlegendes zur Rückversicherung	3
2.1 Einführung der Begriffe und Abgrenzung der Rückversicherung	3
2.1.1 Definitionen und Grundprinzipien	3
2.1.2 Die Rolle der Rückversicherung in der Lebensversicherung	5
2.2 Formen der Rückversicherung	7
2.2.1 XL-Vertrag	8
2.2.2 Stop-Loss-Vertrag	9
2.2.3 Quotenvertrag	9
2.2.4 Summenexzedentenvertrag	9
3 Prämienkalkulationsprinzipien der nicht-proportionalen Rückversicherung	11
3.1 Bestimmung der Risikoprämie	12
3.1.1 Burning-Cost-Methode	12
3.1.2 Weitere Quotierungsverfahren	13
4 Prämienkalkulation für die Jährlich-Erneuernde-Rückversicherung	15
4.1 Deckungskapital	15
4.2 Rückversicherungsrisikoprämie	16
5 Erstprämienkalkulationsprinzipien	19
5.1 Der Äquivalenzprinzipansatz	19
5.2 Das Erwartungswertprinzip	22
5.3 Das Varianzprinzip	22
5.4 Das Standardabweichungsprinzip	24
6 Beispiel zur Ablebens- und Gemischten Versicherung	25
6.1 Auswirkungen der Veränderung der Zinsen und der Sterblichkeit	26
6.1.1 Variation des Alters des Versicherten	26
6.1.2 Variation der Zinshöhe	30
6.1.3 Sicherheitsaufschläge der Rückversicherung bei der Sterbewahrscheinlichkeit	32
6.2 Auswirkungen der verschiedenen Erstprämienkalkulationsprinzipien auf die Rück-	
versicherungsprämie	35

6.2.1	Ablebensversicherung	36
6.2.2	Gemischte Versicherung	39
7	Rückversicherung von Erlebensversicherungen	43
7.1	Stop-Loss-Vertrag	43
7.2	Beispiel - Kalkulation der Risikorückversicherungsprämie	44
7.2.1	Grundbeispiel	45
7.2.2	Variation des Stop-Loss-Points	45
7.2.3	Veränderung des Durchschnittsalters	45
8	Fazit	47
	Literaturverzeichnis	49
A	Numerische Implementierung	53
A.1	Exakte Vorgehensweise	53
A.2	Kommutationszahlen	54

Abbildungsverzeichnis

2.1	Einteilungsmöglichkeit der Rückversicherung nach der technischen Form	8
6.1	Entwicklung der Sterbewahrscheinlichkeiten q_x für Männer	25
6.2	Risikosumme Abl.vers. für eine 30-, 45- und 60-jährige versicherte Person	27
6.3	Nettorisikoprämienrate für eine 30-, 45- und 60-jährige versicherte Person	28
6.4	Risikorückversicherungsprämie Ablebensversicherung für eine 30-, 45- und 60-jährige versicherte Person	29
6.5	Risikorückversicherungsprämie Gemischte Versicherung für eine 30-, 45- und 60-jährige versicherte Person	29
6.6	Risikosumme Ablebensversicherung für wechselnde Zinssätze i	30
6.7	Risikosumme Gemischte Versicherung für wechselnde Zinssätze i	31
6.8	Nettorisikoprämienrate für wechselnde Zinssätze i	31
6.9	Risikorückversicherungsprämie Ablebensversicherung für wechselnde Zinssätze i	32
6.10	Risikorückversicherungsprämie Gemischte Versicherung für wechselnde Zinssätze i	32
6.11	Risikosumme Ablebensversicherung	33
6.12	Risikosumme Gemischte Versicherung	34
6.13	Entwicklung der Nettorisikoprämienrate für verschiedene Zuschläge auf die q_x	34
6.14	Entwicklung der Risikorückversicherungsprämie der Ablebensversicherung für verschiedene Zuschläge auf die q_x	35
6.15	Entwicklung der Risikorückversicherungsprämie der Gemischten Versicherung für verschiedene Zuschläge auf die q_x	35
6.16	Nettorisikoprämienrate für eine 30-jährige versicherte Person bei 20-jähriger Laufzeit und $i=1\%$	36

Tabellenverzeichnis

3.1	Zahlenbeispiel Burning-Cost-Quotierung	12
6.1	Risikosumme Gem. Vers. für eine 30-, 45- und 60-jährige versicherte Person	27
6.2	Basis der Sicherheitszuschläge für eine Ablebensversicherung einer 30-jährigen versicherten Person bei 20-jähriger Laufzeit und $i=1\%$	37
6.3	Entwicklung der Risikorückersicherungsprämien der Ablebensversicherung bei verschiedenen Prämienkalkulationsprinzipien bei 1%-igem Sicherheitszuschlag	38
6.4	Entwicklung der Risikorückersicherungsprämien der Ablebensversicherung bei verschiedenen Prämienkalkulationsprinzipien bei 5%-igem Sicherheitszuschlag	38
6.5	Entwicklung der Risikorückersicherungsprämien der Ablebensversicherung bei verschiedenen Prämienkalkulationsprinzipien bei 10%-igem Sicherheitszuschlag	39
6.6	Basis der Sicherheitszuschläge für eine Gemischten Versicherung einer 30-jährigen versicherten Person bei 20-jähriger Laufzeit und $i=1\%$	40
6.7	Entwicklung der Risikorückersicherungsprämien der gemischten Versicherung bei verschiedenen Prämienkalkulationsprinzipien bei 1%-igem Sicherheitszuschlag	40
6.8	Entwicklung der Risikorückersicherungsprämien der gemischten Versicherung bei verschiedenen Prämienkalkulationsprinzipien bei 5%-igem Sicherheitszuschlag	41
6.9	Entwicklung der Risikorückersicherungsprämien bei verschiedenen Prämienkalkulationsprinzipien bei 10%-igem Sicherheitszuschlag	41
7.1	Entscheidende Größen eines rückversicherten Erlebensfallversicherungsvertrags	45
7.2	Veränderungen der entscheidenden Größen bei Variation des Stop-Loss-Points	45
7.3	Änderung des Durchschnittalters des Bestands	46

1 | Einleitung

Die vorliegende Arbeit handelt von der *Rückversicherung von Lebensrisiken*. Nach dieser kurzen Einleitung werden im zweiten Kapitel der Arbeit die fundamentalen Begriffe eingeführt. Es wird das Rückversicherungsgeschäft charakterisiert und vom Erstversicherungsgeschäft abgegrenzt, des Weiteren wird ein Überblick über die verschiedenen Arten der Rückversicherung und ihre Einteilungsmöglichkeiten gegeben.

Das folgende - das dritte - Kapitel behandelt die Berechnung der Prämie bei nicht-proportionalen Rückversicherungsverträgen, welche seltener zur Absicherung von Lebensversicherungsverträgen verwendet werden. Es werden sowohl die Burning-Cost-Methode, als auch das Exposure- und das Pay-Back-Verfahren vorgestellt und miteinander verglichen.

Eine Möglichkeit zur Kalkulation der Rückversicherungsprämie bei einem proportionalen ein Lebensrisiko betreffenden Rückversicherungsvertrag - genauer gesagt bei einem Jährlich-Erneuernden-Rückversicherungsvertrag - wird im vierten Kapitel vorgestellt. Es handelt sich hierbei um die Risikoprämienmethode.

Um die Prämie explizit mit der im vierten Kapitel vorgestellten Methode berechnen zu können, muss zuerst die Risikosumme für den Erstversicherungsvertrag berechnet werden. Für die Berechnung dieser werden im fünften Kapitel verschiedene Erstprämienkalkulationsprinzipien für verschiedene Arten von Versicherungsverträgen - Er-, Ablebens- und gemischte Versicherung - eingeführt.

Auf das fünfte Kapitel folgen zwei Kapiteln mit Beispielen. Im sechsten Kapitel werden die Auswirkungen einer Erhöhung der Sterbewahrscheinlichkeit beziehungsweise der Zinsen auf die Rückversicherungsprämie untersucht. Des Weiteren werden die verschiedenen Rückversicherungsprämien, die man erhält, wenn man unterschiedliche Erstprämienkalkulationsprinzipien zu Grunde legt, verglichen. Im siebten Kapitel wird mittels eines Beispiels erläutert, wie man die Erlebensversicherung mit Methoden der Sachversicherung rückversichern kann.

Das Fazit stellt das letzte - das achte - Kapitel dieser Arbeit dar. In diesem werden die Forschungsergebnisse dieser Arbeit kurz zusammengefasst, es werden letzte Schlüsse gezogen und es wird ein Ausblick auf weiterführende Fragestellungen gegeben.

Im Anhang wird erklärt, wie das Beispiel exakt in Microsoft Excel implementiert worden ist. Es werden die Parameter angeführt und die einzelnen Rechenschritte detailliert beschrieben, um die Ergebnisse nachvollziehen zu können.

2 | Grundlegendes zur Rückversicherung

Zu Beginn dieser Arbeit ist der zentrale Begriff *Rückversicherung* zu definieren und von anderen Versicherungsbegriffen abzugrenzen. Anschließend wird die Rolle der Rückversicherung in der Lebensversicherung näher behandelt und es wird auf die verschiedenen Arten von Rückversicherungsverträgen eingegangen. Diese primäre Literatur dieses Abschnitts ist [Car83] und [Dum17].

2.1 Einführung der Begriffe und Abgrenzung der Rückversicherung

Es werden nun die im weiteren Verlauf dieser Arbeit häufig verwendeten Begriffe eingeführt und es wird die Rückversicherung von anderen Arten von Versicherungen abgegrenzt.

2.1.1 Definitionen und Grundprinzipien

Unter einem *Versicherungsvertrag* versteht man einen Vertrag, bei dem sich eine Partei - der Versicherer - verpflichtet, im Falle des Eintretens eines ungewissen, aber genau spezifizierten Ereignisses, die andere Partei - den Versicherten - für eintretende finanzielle Verluste zu entschädigen. Der Versicherte hat im Gegenzug dafür einen nach mathematischen Grundlagen berechneten Betrag - die Prämie - grundsätzlich im Voraus an den Versicherer zu entrichten. Man nennt diese Form der Versicherung auch *Erstversicherung*.

Die *Rückversicherung* - auch *Zession* genannt - unterscheidet sich von anderen Arten von Versicherungen primär durch 3 Merkmale:

1. Ein Rückversicherungsvertrag ist - anders als ein Erstversicherungsvertrag - ein Vertrag zwischen zwei Versicherern. Erstversicherungsverträge sind grundsätzlich Verträge zwischen einem Versicherer (Versicherungsunternehmen) und einem Mitglied der Öffentlichkeit (zum Beispiel einer privaten oder juristischen Person). Im Falle der Rückversicherung tritt der eine Versicherer als Rückversicherer - auch *Zessionär* genannt - auf, der andere Versicherer als der Rückversicherte (*Zedent*). Es können sich aber auch Rückversicherer rückversichern. Man spricht dann von *Retrozession*. Der das Risiko abgebende Versicherer ist der *Retrozedent*, der das Risiko Versichernde der *Retrozessionär*.
2. Der versicherte Gegenstand - das *Originalrisiko* - ist bei einem Erstversicherungsvertrag Eigentum, eine Person oder eine zu erwartende Leistung, die verloren oder geschädigt werden kann. Der Erstversicherer ist somit direkt betroffen, wenn es zu einem solchen Schaden, welcher auch *Primärschaden* genannt wird, kommt. Der Rückversicherer wiederum hat nur dann eine Schadenszahlung zu leisten, wenn der Erstversicherer einen Teil des Primärschadens in Rückversicherung gegeben hat. Dennoch stellt weltweit das Originalrisiko, welches

um weitere Gefahrenerelemente (zum Beispiel Währungsrisiken) erweitert werden kann, den wesentlichen Gegenstand des Rückversicherungsvertrages dar und nicht nur die aus dem Vertrag resultierenden Verpflichtungen.¹

3. Ein Grundsatz von Versicherungen im Allgemeinen ist, dass der Versicherte nicht vom Eintreten des Schadensfalls profitieren darf, er soll lediglich den daraus resultierenden finanziellen Schaden möglichst genau ersetzt bekommen. Dieses Prinzip wird *Schadenersatz*- oder auch *Indemnitätsprinzip* genannt. Doch nicht alle Arten von Erstversicherungen erfüllen dieses Prinzip. Lebensversicherer bezahlen bei Eintritt des Versicherungsfalles (also des Todes, einer Behinderung oder im Falle einer Erlebensversicherung sogar bei Überleben einer vorher definierten Zeitspanne) eine im vorhinein vertraglich festgelegte Summe. Rückversicherer jedoch befolgen das Indemnitätsgesetz stets. In der Praxis leisten Rückversicherer sogar nur eine teilweise Entschädigung. Einen bestimmten Teil der Schadenzahlung hat der Erstversicherer grundsätzlich immer alleine zu tragen.

Kompakt lässt sich der Begriff *Rückversicherungsvertrag* wie folgt definieren:

Definition 2.1 (Rückversicherungsvertrag). „*Ein Rückversicherungsvertrag ist ein Vertrag, nach dem der Rückversicherer den Zedenten für bezahlte Schäden entschädigt.*“²

Der Grundgedanke der Rückversicherung ist, einzelne Personen (die Erstversicherer) zu entlasten, indem mehrere voneinander unabhängige Versicherer einem Risiko ausgesetzt werden und das Risiko somit besser gestreut wird (und sich für den Einzelnen minimiert). Wichtig anzumerken ist, dass die Rückversicherung nur das versicherungstechnische Risiko abdeckt und Erstversicherer das nicht-versicherungstechnische Risiko, wie zum Beispiel das Veranlagungsrisiko, alleine zu tragen haben.

Die Rückversicherung ist rechtlich weit weniger rigoros geregelt als die Erstversicherung. Entweder ist festgelegt, dass das Versicherungsvertragsgesetz (kurz: VVG) nicht auf die Rückversicherung angewandt werden kann oder es wird das VVG ohne weitere Präzisierungen für zulässig erklärt.

Im deutschsprachigen Raum gibt es folgende Regelungen:

- *Deutschland*: Im deutschen Versicherungsvertragsgesetz ist explizit festgelegt, dass das für die Erstversicherung geltende Versicherungsvertragsgesetz nicht auf die Rückversicherung angewandt werden kann.³
- *Schweiz*: Bezüglich des Umgangs mit Rückversicherungsverträgen gleichen sich das deutsche und das schweizerische Versicherungsvertragsgesetz. Auch in der Schweiz ist gesetzlich geregelt, dass keine Anwendung auf die Rückversicherung möglich ist.⁴
- *Österreich*: In Österreich ist weder das Versicherungsvertrags- noch das Versicherungsaufsichtsrecht auf die Rückversicherung anzuwenden.^{5 6}

¹vgl. [Pfe99], Seite 11

²s. [Pfe99], Seite 10f.

³s. [vvga], §209

⁴s. [vvgb], Art. 101

⁵s. [vvgc], §186

⁶s. [vaga], §4

Da es nur schwammige gesetzliche Regelungen gibt und dass die Rückversicherungsverträge an sich norm- und formfrei sind, sind die *Grundprinzipien und Grundsätze der Rückversicherung* von größter Bedeutung. Sie werden oftmals als die ungeschriebenen Rückversicherungsgesetze gesehen.

1. *Prinzip von Treu und Glauben*: Rückversicherer und Erstversicherer vertrauen einander, es kommt zu quasi keiner gegenseitigen Kontrolle.
2. *1-jährige Laufzeit* der Verträge: Rückversicherungsverträge werden grundsätzlich für ein Jahr abgeschlossen. Nach diesem Jahr werden die Vertragskonditionen neu verhandelt und es wird erneut versucht, das Optimum für beide zu finden.
3. *Langfristigkeit und Kontinuität*: Obwohl die Verträge jedes Jahr neu verhandelt werden, ist es nicht üblich, dass sich Erst- und Rückversicherer trennen. Es wird davon ausgegangen, dass sich die Prämien und Schadenszahlungen über einen langen Zeitraum ausgleichen.
4. *Schicksalsteilung und Folgepflicht*: Im Falle von Unstimmigkeiten kommt es zu keinem Gerichtsverfahren, da beide Parteien davon ausgehen, dass Gutachter und Experten, die dann als Schiedsrichter fungieren, besser mit der Materie betraut sind.
5. *Keine Verjährung* der Verträge: Die Haftbarkeit des Rückversicherers entspricht der des Erstversicherers. Dies bedeutet, dass der Rückversicherer auch bei Spätschäden seinen im Vorhinein vertraglich vereinbarten Anteil zu leisten hat.

2.1.2 Die Rolle der Rückversicherung in der Lebensversicherung

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der Rückversicherung von Lebensrisiken. Um die folgenden Konzepte zu verstehen, ist es wichtig, zu wissen, inwiefern sich die Lebensversicherung von der Nicht-Lebensversicherung unterscheidet.

Die grundlegenden Unterschiede sind:

1. Lebensversicherungsverträge haben grundsätzlich eine deutlich längere Laufzeit als Nicht-Lebensversicherungsverträge.
2. Lebensversicherungsverträge können vom Versicherer schwerer gekündigt werden.
3. Die jährlich zu entrichteten Prämien werden anders verwendet.
 - (a) Das Sterblichkeitsrisiko und die Abschlusskosten werden gleichmäßig über die Laufzeit verteilt. Letztgenannte Kosten werden grundsätzlich über 5 Jahre verteilt.
 - (b) Aus Punkt 3a folgt, dass Reserven über die ganze Laufzeit aufgebaut werden müssen.
4. Es gibt nahezu beliebig viele Ausgestaltungen von Lebensversicherungen. Beispiele sind die Erlebensversicherung, die Ablebensversicherung und Versicherungen, die eine Leibrente garantieren. In der Rückversicherung ist der jeweilige Vertragstyp - seine Laufzeit sowie die Auszahlungsprofile - zu berücksichtigen.

In der Lebensversicherung dient die Rückversicherung primär der Absicherung des Sterberisikos. Ein großer Vorteil der Lebensversicherer gegenüber Nicht-Lebensversicherern ist, dass sie durch die Sterbetafeln relativ genau vorhersagen können, wie viel Prozent ihres Bestandes in einer Zeitperiode sterben werden. Dennoch können die tatsächlich eingetretenen Tode pro konkret betrachteter Zeiteinheit beträchtlich variieren und dies kann zu Liquiditätsproblemen beim Erstversicherer führen.

Ein weiterer Grund auch das Lebensversicherungsgeschäft rückzuversichern ist folgender: Die Mortalität hat nicht nur wegen der tatsächlich eingetretenen Todesfälle Einfluss auf das Risiko von Lebensversicherungen, sondern auch weil eine schwankende Mortalität Unterschiede zwischen der tatsächlich eingetretenen und erwarteten *Ablebensbelastung*, welche auch als *Death Strain* DS bezeichnet wird, hervorruft.

Die Ablebensbelastung ist definiert als

$$DS = S - {}_{t+1}V,$$

wobei S für die tatsächlich vom Versicherer zu bezahlenden Leistungen und ${}_{t+1}V$ für das vorhandene Deckungskapital zum Zeitpunkt $t + 1$ steht. In Worten ausgedrückt handelt es sich bei der Ablebensbelastung um die Summe, die der Erstversicherer extra am Ende der Zeitperiode - also zu $t + 1$ zu bezahlen hat, wenn der Versicherte tatsächlich in der Zeitperiode $[t, t + 1]$ stirbt.

Die für den Erstversicherer kritischen Unterschiede zwischen eingetretener und erwarteter Ablebensbelastung resultieren aus folgenden Punkten:

1. *Änderungen in der Mortalität*: In den letzten Jahrzehnten ist die Sterbewahrscheinlichkeit am Sinken. Hiervon profitieren die Erstversicherer bei Ablebensversicherungen, sie sind allerdings mit höheren Zahlungen im Falle von Erlebensversicherungen oder Leibrenten konfrontiert. Sollte es nun zu einer Trendumkehr kommen und plötzlich mehr Menschen als erwartet versterben, würden die Erstversicherer aber vermutlich mit einer Erhöhung der Prämien der Ablebensversicherung und nicht mit einer Abgabe eines Teils des Lebensgeschäfts in die Rückversicherung reagieren.
2. Auch das *Auftreten von Epidemien, Naturkatastrophen und Krieg* kann zu einer temporären Erhöhung der Sterbewahrscheinlichkeit führen. Es gibt verschiedene Theorien, wie Versicherer mit diesen Fluktuationen in der Sterbewahrscheinlichkeit umgehen können.
 - (a) Erstversicherer müssen sich gar nicht speziell absichern, da sie einen sehr breit gestreuten Bestand haben und zusätzlich eine große Reserve für nationale Katastrophen zu bilden haben.
 - (b) Die Erstversicherer könnten sich mittels eines Stop-Loss-Rückversicherungsvertrages (siehe Abschnitt 2.2.2) absichern. Es gibt allerdings Zweifel, ob diese Rückversicherungsmethode allgemein für die Lebensversicherung angemessen ist.
3. Für manche Zweige der Lebensversicherung ist der Bestand sehr klein, deshalb sind die Erstversicherer Fluktuationen ausgesetzt. Der Risikoausgleich im Kollektiv funktioniert nur begrenzt.

Laut [Car83] ist Punkt 3 der obigen Aufzählung der Hauptgrund für die Rückversicherung von Lebensrisiken, da insbesondere kleine Versicherer beziehungsweise neu am Markt vertretene Versicherer noch über keinen großen Bestand verfügen.

Der Ausdruck *großer Bestand* lässt sich nicht mit absoluten Zahlen ausdrücken. Ab wann man von einem großen Bestand spricht, variiert von Land zu Land.

Die daraus resultierende Problematik ist aber klar: In den ersten Jahren eines Lebensversicherungsvertrages reichen die Prämien nicht aus, um das Sterblichkeitsrisiko und die noch zu amortisierenden Anfangskosten zu decken. Dies bedeutet, dass das Deckungskapital ${}_tV_x$ für kleine t negativ ist. Der Erstversicherer sollte nun über ausreichend freie Reserven verfügen, um das negative Deckungskapital ausgleichen zu können. Um diesen Ausgleich sicherzustellen, wird oftmals ein Teil des Geschäfts in Rückversicherung gegeben.

2.2 Formen der Rückversicherung

Folgender Abschnitt beruht primär auf [GZ08], [Pfe99] und [Dum17]. Die Rückversicherung kann anhand verschiedener Gesichtspunkte eingeteilt werden. Untenstehende Aufzählung stellt nur eine Möglichkeit von vielen dar.

- Nach Art der Geschäftsrichtung
 - *Aktive Rückversicherung*: Hierunter versteht man, dass ein Erst- oder Rückversicherer einem anderen Versicherer Versicherungsschutz anbietet. Diese Form der Rückversicherung ist auch unter dem Begriff *indirektes Geschäft* bekannt.
 - *Passive Rückversicherung*: Hierbei wird der Versicherungsschutz nicht angeboten, sondern von einem Erst- oder Rückversicherer nachgefragt.
- Nach der technischen Form
 - *Proportionale Rückversicherung*: Eine solche Form der Rückversicherung liegt vor, wenn der Rückversicherer einen vorher vereinbarten prozentuellen Anteil eines Schadens übernimmt. Die Höhe der zu leistenden Zahlungen an den Erstversicherer richtet sich also nach einem vorab vereinbarten Teilungsverhältnis. Es ist wichtig anzumerken, dass nicht nur die Schäden entsprechend des vereinbarten Prozentsatzes aufgeteilt werden, sondern auch die Haftung und die Prämien.
 - *Nicht-proportionale oder Exzess-Rückversicherung*: Der Rückversicherer übernimmt nur einen Teil des Schadens, falls eine gewisse Schadenssumme - die sogenannte *Priorität* - überstiegen wird. Es kommt also zu keiner proportionalen Aufteilung. Es können auch mehrere nicht-proportionale Rückversicherungsverträge für dasselbe Risiko abgeschlossen werden, man spricht dann von *Layern*. Jeder Layer greift nur dann, wenn das Limit des niedrigeren Layers überschritten worden ist. Den untersten Layer bezeichnet man auch als *working layer*, da er jener mit dem höchsten Geldfluss ist und am öftesten zum Einsatz kommt, den obersten als *sleep-easy-cover*. Diese Rückversicherungsart erlaubt den Rückversicherern genau vorherzusagen, wie hoch die maximal zu zahlende Schadenssumme sein wird.
- Nach der juristischen Form
 - *Fakultative Rückversicherung*: Fakultativ bedeutet in diesem Fall, dass das Rückversicherungsunternehmen von Fall zu Fall entscheidet und sich ein genaues Bild über das Risiko macht, bevor es entscheidet, ob es dieses in Rückversicherung nimmt oder nicht. Sie dient meist der Abdeckung von sogenannten Spitzenrisiken, also Risiken, die den Erstversicherer besonders schwer treffen würden. Bei der fakultativen Rückversicherung sucht stets der Zedent nach geeigneten Versicherern.
 - *Obligatorische Rückversicherung*: Bei dieser Form der Rückversicherung werden nicht einzelne Spitzenrisiken versichert, sondern ein bestimmter Umfang von Risiken. Der Erstversicherer ist verpflichtet, das gesamte den Umfang der Risiken betreffende Geschäft abzugeben und der Rückversicherer ist verpflichtet dieses in Rückversicherung zu nehmen - er hat kein Ablehnungsrecht. Hierbei ist das Prinzip von Treu und Glauben, welches schon in Punkt 1 auf Seite 5 beschrieben worden ist, besonders wichtig, da der Rückversicherer nicht über die Einzelrisiken Bescheid weiß.

Folgende Grafik versucht die in Abschnitt 2.2 beschriebenen Einteilungskriterien nach der technischen Form übersichtlich darzustellen und die gängigsten Vertragsformen anzuführen.

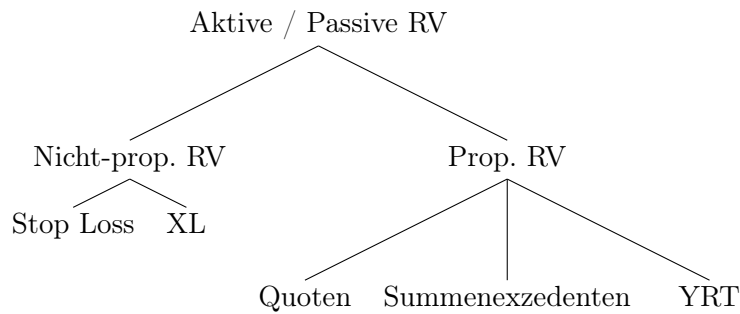


Abbildung 2.1: Einteilungsmöglichkeit der Rückversicherung nach der technischen Form

Die verbreitetsten Vertragsformen der nicht-proportionalen Rückversicherung sind der XL und der Stop-Loss-Vertrag. Für weitere Informationen diese Vertragsformen betreffend sei auf die Abschnitte 2.2.1 und 2.2.2 verwiesen.

In der Lebensversicherung überwiegt die proportionale Rückversicherung. In der Praxis am relevantesten sind der Quoten- beziehungsweise der Summenexzedentenvertrag. Diese beiden Vertragsformen werden in den Abschnitten 2.2.3 und 2.2.4 eingeführt.

Im weiteren Verlauf fokussiert sich die Arbeit auf die mit *YRT* abgekürzte Vertragsform. *YRT* steht für *Yearly Renewable Term Reinsurance*, im Deutschen wird diese Art der Rückversicherung auch als *Jährlich-Erneuernde-Rückversicherung* bezeichnet, das zugrundeliegende Prämienkalkulationprinzip als *Risikoprämienmethode*. Für weitere Informationen sei auf Kapitel 4 verwiesen.

Nicht-proportionale Rückversicherungsverträge werden in der Lebensversicherung primär bei Erlebensversicherungen angewandt. Eine mögliche Vorgehensweise wird in Kapitel 7 vorgestellt.

2.2.1 XL-Vertrag

Der *Excess of Loss (XL)-Vertrag* (auch *Schadenexzedentenvertrag* genannt) ist ein nicht-proportionaler Rückversicherungsvertrag. Ausgehend von einem Einzelschaden übernimmt der Erstversicherer einen Anteil bis zu einer gewissen Priorität, der Rückversicherer übernimmt den Rest. Mathematisch lassen sich die zu bezahlenden Beträge des Erst- beziehungsweise Rückversicherers wie folgt definieren:

$$X_E = \begin{cases} X & \text{falls } X \leq P \\ P & \text{falls } X > P, \end{cases}$$

wobei X_E die zu leistende Schadenzahlung des Erstversicherers bei einem Einzelschaden, X die eingetretene Schadenhöhe und P die Priorität bezeichnet.

Das Zahlungsprofil des Rückversicherers X_R hat folgende Gestalt:

$$X_R = \begin{cases} 0 & \text{falls } X \leq P \\ X - P & \text{falls } X > P. \end{cases}$$

Die gängige Notation für einen solchen Vertrag lautet: *Haftung xs Priorität*.

2.2.2 Stop-Loss-Vertrag

Der *Stop-Loss (SL) - Vertrag* ist das Analogon zum XL-Vertrag (siehe Abschnitt 2.2.1) für den Gesamtschaden. Der Erstversicherer trägt die Schadenhöhe bis zu einem vorher vertraglich festgelegten *Stop-Loss-Point* p , der der Priorität P beim XL-Vertrag entspricht. S steht für die Gesamtschadenhöhe, S_E für den Teil des Gesamtschadens den der Erstversicherer selbst zu tragen hat und S_R für den Teil des Gesamtschadens, den der Rückversicherer trägt.

$$S_E = \begin{cases} S & \text{falls } S \leq p \\ p & \text{falls } S > p \end{cases}$$

und

$$S_R = \begin{cases} 0 & \text{falls } S \leq p \\ S - p & \text{falls } S > p. \end{cases}$$

2.2.3 Quotenvertrag

Beim *Quotenvertrag* handelt es sich um einen proportionalen Rückversicherungsvertrag. Der Rückversicherer verpflichtet sich, einen vorher vertraglich festgelegten Anteil aller eingetretenen Schäden eines Segments zu übernehmen.

Mathematisch lassen sich die Anteile des Erst- beziehungsweise Rückversicherers am Gesamtschaden wie folgt ausdrücken:

$$S_E = \alpha S,$$

wobei α mit $0 \leq \alpha \leq 1$ den *Selbstbehalt* des Erstversicherers bezeichnet.

Für den Rückversicherer gilt:

$$S_R = (1 - \alpha)S,$$

wobei $1 - \alpha$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ die *Quote* des Rückversicherers bezeichnet.

2.2.4 Summenexzedentenvertrag

Folgender Abschnitt beruht auf [sum]. Der *Summenexzedentenvertrag* (auch *surplus treaty* genannt) ist eine Form eines proportionalen Rückversicherungsvertrags. Der Erstversicherer legt einen Selbstbehalt - ein *Maximum* - fest. Der Rückversicherer verpflichtet sich, ein Vielfaches des Selbstbehaltes zu übernehmen; diese Haftstrecke wird auch als *Exzedent* bezeichnet. Tritt nun ein Schadensfall auf, der das Maximum übersteigt, so wird er in dem Verhältnis, in dem er das Maximum übersteigt, an die Rückversicherung abgegeben.

Es ist noch anzumerken, dass bei mehreren Rückversicherern der jeweilige Anteil an der Haftstrecke prozentuell festgelegt ist und dass sowohl Haftung, Prämie als auch Schäden entsprechend dieser Prozentsätze aufgeteilt werden.

Vorteil dieser Art von Versicherung ist, dass der Erstversicherer auch bei sehr schwankenden Versicherungssummen einen relativ homogenen Bestand erreichen kann, da er die Schäden nur bis zu einem Maximum zu tragen hat und alle darüber hinausgehenden Schäden der Rückversicherer übernimmt.

3 | Prämienkalkulationsprinzipien der nicht-proportionalen Rückversicherung

In diesem Kapitel, welches primär auf [Dum17], [Car83] und [Pfe99] beruht, soll die Frage beantwortet werden, wie die Prämie für einen nicht-proportionalen Rückversicherungsvertrag berechnet werden kann. Das Bestimmen der Prämie wird auch *Quotierung* genannt.

Im Fall der nicht-proportionalen Rückversicherung ist die Prämie, die der Erstversicherer an den Rückversicherer zu entrichten hat, grundsätzlich nicht direkt von der Prämie, die der Versicherte an den Erstversicherer bezahlt, abhängig. Dies liegt daran, dass das Risiko, dem der Rückversicherer ausgesetzt ist, in keinem Proportionalitätsverhältnis zu jenem steht, dem der Erstversicherer ausgesetzt ist. Die Schwierigkeit bei der Bestimmung der Rückversicherungsprämie liegt nun darin, sie - trotz oftmals schlechter Information - an das tatsächliche Risiko des Rückversicherers anzupassen.

Die Rückversicherungsprämie π setzt sich aus mehreren Faktoren zusammen.

$$\pi = \pi_R + L,$$

wobei π_R die reine Risikoprämie bezeichnet und L den Zuschlag - im Englischen das *Loading* - bezeichnet, welches wie folgt definiert ist:

$$L = S + K_E + K_{RM},$$

wobei

- S den Sicherheitszuschlag, der insbesondere in der nicht-proportionalen Rückversicherung wegen der starken Schwankungen von extremer Wichtigkeit ist,
- K_E die externen Kosten, wie zum Beispiel Steuern und Gebühren und
- K_{RM} die Risikomanagement-Kosten des Rückversicherers

bezeichnet.

Zu den Risikomanagement-Kosten zählen zum Beispiel auch die Kosten, die entstehen, wenn der Rückversicherer einen Teil seines Geschäfts in Rückversicherung gibt (*Retrozessionskosten*).

3.1 Bestimmung der Risikoprämie

Der wichtigste Schritt bei der Prämienkalkulation ist nun das Bestimmen der Risikoprämie π_R . Es gibt verschiedene Optionen, die Gängigsten werden im Folgenden kurz vorgestellt.

3.1.1 Burning-Cost-Methode

Basis dieser Möglichkeit zur Bestimmung der Risikoprämie sind die Schadenerfahrungen der Vergangenheit. Die *Burning-Cost* (auch *Risikorate* genannt) ist das Verhältnis von der Schadenerwartung zur Basisprämie und wird pro Layer berechnet. Die Basisprämie sind die verdienten Beiträge abzüglich der vorausgehenden Rückversicherungsprämien, wenn zum Beispiel proportionale Rückversicherungsverträge existieren.

$$BC = \frac{\text{Schadenerwartung}}{\text{Basisprämie}} \quad (3.1)$$

Es ist anzumerken, dass sich diese Methode am besten für die Quotierung sogenannter Working-Layers (vergleiche Abschnitt 2.2) eignet, da die Burning Cost gleich Null ist, wenn in einem Jahr kein Schaden die Priorität überschritten hat und die Rückversicherung somit keine Schadenszahlung zu leisten gehabt hat.

Wie die Burning-Cost-Quotierung genau erfolgt, soll in untenstehendem Beispiel kurz veranschaulicht werden. Das Grundgerüst des Beispiels wurde in [Dum17] vorgestellt, für die Einschränkungen die Prämienberechnungsmethode betreffend sei auf [Pfe99] verwiesen.

Beispiel Im folgenden Beispiel bedeutet das Minus in der Spalte Jahr, dass sich der jeweilige Schaden vor dieser Anzahl von Jahren ereignet hat. Der Begriff Basisprämie bezeichnet alle Prämieinnahmen des Zedenten abzüglich der vorausgehenden Rückversicherungsprämien. In der Spalte Schäden werden alle Schäden angeführt, welche der Zedent zu bezahlen hatte. Es ist wichtig, jeden Schaden einzeln anzuführen, da es sich bei der Burning-Cost-Methode um eine Methode für nicht-proportionale Versicherungsverträge handelt und es deshalb nicht zulässig ist, mehrere Schäden zusammenzufassen.

Für dieses Beispiel wird angenommen, dass die Priorität des Zessionärs €100.000 beträgt.

Jahr	Basisprämie in Millionen €	Bezahlte Schäden in Tausend €	Schadenanteil RV pro Schaden in Tausend €	BC in Prozent
-5	11	132 110	32 10	0,38
-4	13,2	89 135	0 35	0,27
-3	14,3	190	90	0,63
-2	16,5	200 150	100 50	0,91
-1	18,7	250	150	0,80
TOTAL	73,7	1256	467	0,63

Tabelle 3.1: Zahlenbeispiel Burning-Cost-Quotierung

Die durchschnittliche Burning-Cost der letzten fünf Jahre berechnet sich nun mittels Formel 3.1 als

$$\frac{467000}{73700000} = 0,63\%.$$

Das bedeutet, dass im Jahr 0 - dem aktuellen Jahr - 0,63% der Basisprämie an den Zessionär bezahlt werden.

Anmerkungen zur Burning-Cost-Methode Um die Rückversicherungsprämie mittels der Burning-Cost-Methode berechnen zu können, müssen einige Punkte berücksichtigt werden ¹

- Da die Rückversicherungsprämie bei der Burning-Cost-Methode ausschließlich auf Daten der Vergangenheit beruht, haben die Rückversicherer, bevor sie diese Methode anwenden, zu prüfen, ob der damalige Bestand repräsentativ für den heutigen ist. Die Zusammensetzung des Bestands des Rückversicherers könnte sich zum Beispiel durch Deckungserweiterungen verändert haben.
- Probleme bereiten bei dieser Methode auch die Spätschäden. Man unterscheidet zwischen *IBNER-* (incurred but not enough reported) und *IBNR-Schäden* (incurred but not reported). Unter IBNER-Schäden versteht man Schäden, welche zwar gemeldet worden sind, bei welchen allerdings noch nicht klar gewesen ist, wie hoch die tatsächlich zu zahlende Schadenssumme sein wird. Unter IBNR-Schäden versteht man Schäden, welche bereits entstanden sind, dem Versicherer aber noch gar nicht gemeldet worden sind. Um dieses Risiko abzufedern, haben die Rückversicherer eine sogenannte *Spätschadenreserve* zu bilden.
- Aufgrund der Inflation steigen sowohl die Kosten für die Schäden als auch die Prämien. Man kann somit nicht einfach die Daten aus der Vergangenheit übernehmen, sondern hat eine Wertberichtigung vorzunehmen.
- Das Risiko für Kumulschäden darf nicht außer Acht gelassen werden. Die Rückversicherer müssen über genaue Bestandsinformationen verfügen, um dieses Risiko in der Quotierung angemessen berücksichtigen zu können.

3.1.2 Weitere Quotierungsverfahren

Exposure-Verfahren Hierbei handelt es sich um ein Verfahren zur Prämienbestimmung, welches vor allem bei höheren Layern angewandt wird. Bei diesem Verfahren versuchen die Rückversicherer anhand vom Erstversicherer zur Verfügung gestellten Daten einen Schätzer für die Schadenerwartung zu ermitteln. Im Gegensatz zur Burning-Cost-Methode beruht dieses Verfahren also auf der Zusammensetzung des Portfolios.

Pay-Back-Verfahren (Pauschalprämienmethode) Das Pay-Back-Verfahren wird hauptsächlich angewandt, wenn es noch keine Schadenerfahrung im Layer gibt. Basis der Prämienkalkulation ist nicht der erwartete Totalschaden, sondern die Schadenfrequenz. Es wird also versucht eine Prämie zu finden, sodass ein vom Rückversicherer übernommener Totalschaden durch die Rückversicherungsprämie ausgeglichen wird, bevor dieser Totalschaden erneut eintritt. Als *Pay-Back-Periode* wird jene Periode bezeichnet, in der die ganze Haftstrecke bezahlt wird, ohne dass ein Schaden eintritt.

¹vgl. [Pfe99], Seite 63

4 | Prämienkalkulation für die Jährlich-Erneuernde-Rückversicherung

Bei proportionalen Rückversicherungsverträgen werden Prämien und Haftung in demselben Verhältnis geteilt. In diesem Kapitel wird ein konkreter proportionaler Rückversicherungsvertrag, der insbesondere bei der Rückversicherung von Lebensversicherungen häufig Anwendung findet, näher vorgestellt, nämlich der Jährlich-Erneuernde-Rückversicherungsvertrag. Des Weiteren wird ein Verfahren zur Bestimmung der Risikorückversicherungsprämie eingeführt.

Zu Beginn ist die Jährlich-Erneuernde-Rückversicherung zu definieren.

Definition 4.1 (Jährlich-Erneuernde-Rückversicherung¹). *Im Fall einer Jährlich-Erneuernden-Rückversicherung gibt der Erstversicherer lediglich das Mortalitätsrisiko an den Rückversicherer ab. Der Betrag, der rückversichert wird, ist als proportionaler Anteil der Risikosumme (s. Definition 4.5) definiert. Tritt der Versicherungsfall ein, so übernimmt der Rückversicherer die gesamte Risikosumme.*

Es sind zwei Anmerkungen zu Definition 4.1 zu machen:

- Es ist weiterhin der Erstversicherer für die Bildung der Reserven verantwortlich.
- Diese Form der Rückversicherung eignet sich besonders für Ablebens- und Gemischte Versicherungen. Dies liegt daran, dass in diesen beiden Fällen die Erstversicherer eine Schadenzahlung zu leisten haben, wenn die versicherte Person verstirbt. Das Risiko für den Erstversicherer ist also das Mortalitätsrisiko.

In den vorangegangenen Abschnitten ist häufig der Begriff *Risiko* vorgekommen. Dieser soll nun formal definiert werden.

Definition 4.2 (Risiko). *Unter dem Begriff Risiko versteht man in der Mathematik eine nicht-negative Zufallsvariable, welche von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf die positiven reellen Zahlen \mathbb{R}_+ abbildet. Die Menge aller Risiken wird mit \mathcal{X} bezeichnet.*

4.1 Deckungskapital

Um die Risikorückversicherungsprämie explizit berechnen zu können, müssen einige Ergebnisse der fundamentalen Lebensversicherungsmathematik wiederholt werden. Dieser Abschnitt beruht primär auf [KSS09] und [Ger97].

¹vgl. [yrt]

Zu Beginn hat das Deckungskapital eines jeden Versicherungsvertrags bestimmt werden. Um dieses definieren zu können, ist der Begriff *Verlust* einzuführen.

Definition 4.3 (Verlust). *Jene Zufallsvariable, die den Verlust ${}_tL_x$ des Versicherers zum Zeitpunkt t unter der Voraussetzung, dass der Versicherte x Jahre alt ist, modelliert, ist definiert als die Differenz zwischen dem Barwert der Versicherungsleistungen und dem Barwert der Prämienzahlungen.*

Definition 4.4 (Deckungskapital). *Das Deckungskapital eines x -jährigen Versicherten zum Zeitpunkt t ist definiert als der Erwartungswert des Verlusts unter der Bedingung, dass der Versicherte zum Zeitpunkt t noch am Leben ist.*

Die Notation hierfür lautet:

$${}_tV_x := \mathbb{E}[{}_tL_x | T_x > t],$$

wobei ${}_tL_x$ den in Definition 4.3 definierten Verlust und T_x die Zufallsvariable, die die Restlebenszeit einer x -jährigen Person modelliert, bezeichnet.

Definition 4.5 (Risikosumme). *Unter der Risikosumme ${}_xR_t$ zum Zeitpunkt t für einen x -jährigen Versicherten versteht man die Differenz zwischen der Versicherungsleistung S und des schon angesparten Deckungskapitals ${}_tV_x$.*

In mathematischer Notation lässt sich die Risikosumme wie folgt schreiben:

$${}_xR_t = S - {}_tV_x.$$

Die Berechnung des Deckungskapitals ist auch aus juristischer Sicht relevant. Unter dem Deckungskapital versteht man die dem Deckungsstock, welcher auf der Aktivseite der Bilanz zu finden ist, gewidmeten Vermögenswerte. Korrespondierend hierzu gibt es auf der Passivseite der Bilanz die *Deckungsrückstellung*, welche gemessen an der Höhe die versicherungstechnisch bedeutendste Rückstellung ist. Die Deckungsrückstellung hat nach anerkannten mathematischen Methoden grundsätzlich für jeden Vertrag einzeln berechnet zu werden.²

Woraus sich die Deckungsrückstellung genau zusammensetzt, ist ebenfalls im Versicherungsaufsichtsgesetz geregelt.

„Die Deckungsrückstellung umfasst in der Lebensversicherung [...] den versicherungsmathematisch errechneten Wert der Verpflichtungen des Versicherungsunternehmens einschließlich der bereits zugeteilten und der zugesagten Gewinnanteile und einer Verwaltungskostenrückstellung abzüglich der Summe der Barwerte der künftig eingehenden Prämien.“³

4.2 Rückversicherungsrisikoprämie

Es lässt sich nun die tatsächliche Rückversicherungsrisikoprämie berechnen. Diese ist als ein jährlich schwankender Anteil, welcher Nettorisikoprämienrate genannt wird, der Risikosumme definiert. Abgesichert wird vom Rückversicherer nur das Mortalitätsrisiko (vgl. Definition 4.1), insbesondere die nicht versicherungstechnischen Rückstellungen hat der Erstversicherer selbst zu tragen. Grundlegende Literatur in diesem Abschnitt ist [Car83].

²vgl. [vagb]

³siehe [vagb], §152, Absatz 2

Definition 4.6 (Nettorisikoprämienrate). *Die Nettorisikoprämienrate für eine x -jährige Person ist definiert als*

$$RP_{x,t} = v^{\frac{1}{2}} q_x, \quad (4.1)$$

wobei

- v den Diskontierungsfaktor $v = \frac{1}{1+i}$ und
- q_x die 1-jährige Sterbewahrscheinlichkeit einer x -jährigen Person

bezeichnet.

Der Exponent $\frac{1}{2}$ des Diskontierungsfaktors resultiert aus der Annahme, dass der Versicherungsfall in der Mitte des Jahres eintritt. Es ist weiters anzumerken, dass die Nettorisikoprämienrate für jedes Vertragsjahr neu berechnet werden muss, da die Sterbewahrscheinlichkeit nicht konstant ist.

Die tatsächlich zu bezahlende Rückversicherungsrisikoprämie berechnet sich wie folgt:

Definition 4.7 (Rückversicherungsrisikoprämie). *Die Rückversicherungsrisikoprämie für einen x -jährigen Versicherten im Jahr t ist das Produkt aus der Nettorisikoprämienrate für einen x -Jährigen und der Risikosumme im Jahr t :*

$$\pi_{x,t}^{RV} = RP_{x,t} \cdot xR_t. \quad (4.2)$$

5 | Erstprämienkalkulationsprinzipien

In diesem Kapitel werden verschiedene Prämienkalkulationsprinzipien für die Erstprämie, als für die Prämie, die die versicherte Person an den Versicherer entrichtet, vorgestellt. Dies wird gemacht, da das Deckungskapital, von welchem die Risikorückversicherungsprämie abhängt, von der Erstversicherungsprämie abhängt. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit sollen auch die Auswirkungen einer geänderten Erstprämienkalkulation auf die Risikorückversicherungsprämie untersucht werden.

Primäre Literatur in diesem Kapitel ist [KSS09], [Son17], [GZ08] und [Rhe17].

Zu Beginn ist der Begriff *Prämienkalkulationsprinzip* mathematisch korrekt zu definieren.

Definition 5.1 (Prämienkalkulationsprinzip). *Ein Prämienkalkulationsprinzip ist eine Abbildung $P : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.*

Ist die Prämie P , welche einem Risiko zugeordnet wird, gleich $+\infty$, dann heißt das Risiko *unversicherbar*.

5.1 Der Äquivalenzprinzipansatz

In diesem ersten Schritt wird die Prämie mithilfe des Äquivalenzprinzips berechnet. Die davor benötigten lebensversicherungsmathematischen Voraussetzungen sind im Folgenden kompakt zusammengefasst.

Definition 5.2 (Nettoeinmalprämie). *Die Nettoeinmalprämie ist der Erwartungswert des Barwerts der Versicherungsleistungen.*

Definition 5.3 (Leibrente). *Unter einer Leibrente versteht man periodische Zahlungen, die nur dann geleistet werden, wenn folgende zwei Punkte erfüllt sind:*

1. *Der Versicherte ist am Leben.*
2. *Die Laufzeit des Vertrags ist noch nicht überschritten. Der Vertrag kann aber auch auf Lebenszeit abgeschlossen sein.*

Leibrenten sind von solcher Relevanz für die Versicherungsmathematik, da einerseits die Prämienzahlung vom Versicherten an den Versicherer in der Regel in Form einer Leibrente erfolgt und da andererseits viele Formen der Rentenvorsorge mathematisch gesehen Leibrenten darstellen. Für die Modellierung von Prämienzahlungen ist die höchstens n -jährige, *vorschüssige Leibrente* für einen x -jährigen Versicherten von Relevanz. Sie ist definiert als

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_k p_x, \quad (5.1)$$

wobei ${}_k p_x$ die k -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit einer x -jährigen Person bezeichnet. In dieser Arbeit entspricht die Prämienzahlungsdauer k der Laufzeit des Versicherungsvertrags n .

Definition 5.4 (Laufende Prämie). *Die laufende - jährlich zu Jahresbeginn zu entrichtende - Prämie P , die der Versicherte an den Erstversicherer zu entrichten hat, ist abhängig von der Nettoeinmalprämie und berechnet sich wie folgt:*

$$P = \frac{NEP}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Aufgrund der Additivität des Erwartungswerts kann man das Deckungskapital als Differenz von der Nettoeinmalprämie und der als Leibrente erfolgenden Prämienzahlungen darstellen.

Es werden nun die expliziten Formeln für das Deckungskapital für die n -jährige Ablebensversicherung, die n -jährige Erlebensversicherung sowie die n -jährige Gemischte Versicherung angeführt.

Ablebensversicherung Bei einer n -Ablebensversicherung, welche auch n -jährige Risikoversicherung genannt wird, erhält der Versicherte eine zu Vertragsbeginn vereinbarte Leistung - die *Versicherungssumme* - ausbezahlt, wenn er innerhalb von n Jahren ab Vertragsabschluss - also innerhalb der Versicherungsperiode - stirbt. Die Versicherungssumme wird dann am Ende des Todesjahres ausbezahlt. Überlebt der Versicherte die gesamte Versicherungsperiode, so wird keine Leistung ausbezahlt.

Das Risiko der Ablebensversicherung - der Barwert Z^{ABL} der zukünftigen Versicherungsleistungen - berechnet sich bei einer normierten Versicherung - also einer Versicherung mit Versicherungssumme 1 - wie folgt:

$$Z^{\text{ABL}} = \begin{cases} v^{K_x+1} & \text{falls } K_x = 0, \dots, n-1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (5.2)$$

wobei $K_x = \lfloor T_x \rfloor$ die auf ganze Jahre abgerundete Restlebenszeit bezeichnet.

Die Nettoeinmalprämie wird mithilfe folgender Formel berechnet:

$$\mathbb{E}[Z^{\text{ABL}}] = {}_n A_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \quad (5.3)$$

Obenstehende Formel lässt sich leicht interpretieren: Die Versicherungssumme wird nur dann ausbezahlt, wenn der Versicherte innerhalb der n -jährigen Versicherungsperiode verstirbt. ${}_k p_x$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass ein x -jähriger Versicherter k Jahre überlebt, q_{x+k} die Wahrscheinlichkeit, dass ein $x+k$ -Jähriger innerhalb eines Jahres verstirbt. Beide Größen lassen sich mithilfe einer Sterbetafel berechnen.

Unter Berücksichtigung der Formel für die laufende Prämie (siehe 5.4) erhält man nun für das Deckungskapital zum Zeitpunkt t einer n -jährigen Ablebensversicherung eines x -jährigen Versicherten:

$${}_t V_x^{\text{ABL}} = {}_{|n-t} A_{x+t} - P \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}. \quad (5.4)$$

Erlebensversicherung Bei einer *n-jährigen Erlebensversicherung* wird nur dann die Versicherungssumme ausbezahlt, wenn der Versicherte die gesamte Versicherungsperiode überlebt. Stirbt der Versicherte innerhalb der *n-jährigen* Versicherungsperiode, so wird keine Leistung ausbezahlt.

Für den Barwert Z^{ERL} einer normierten Erlebensversicherung gilt:

$$Z^{\text{ERL}} = \begin{cases} v^n & \text{falls } K_x \geq n \\ 0 & \text{falls } K_x < n. \end{cases} \quad (5.5)$$

Die Nettoeinmalprämie ist definiert als

$$\mathbb{E}[Z^{\text{ERL}}] = {}_n E_x = v^n {}_n p_x. \quad (5.6)$$

Die Formel ist leicht einzusehen, da man, um den Barwert zu erhalten, über *n* Jahre - also die gesamte Laufzeit des Versicherungsvertrags - diskontieren muss und gelten muss, dass der Versicherte die gesamte Versicherungsperiode überlebt.

Das Deckungskapital einer *n-jährigen* Erlebensversicherung wird mit folgender Formel berechnet:

$${}_t V_x^{\text{ERL}} = {}_{n-t} E_{x+t} - P \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}. \quad (5.7)$$

Gemischte Versicherung Eine *n-jährige gemischte Versicherung* ist die Kombination aus einer *n-jährigen* Erlebens- und *n-jährigen* Ablebensversicherung. Bei dieser Art von Versicherung wird die Versicherungssumme definitiv ausbezahlt, nur der genaue Zeitpunkt der Auszahlung ist nicht bei Vertragsabschluss bekannt.

Man unterscheidet zwei Fälle:

1. Stirbt der Versicherte innerhalb der Versicherungsperiode, so erfolgt die Auszahlung der Versicherungssumme am Ende des Todesjahres (vgl. Ablebensversicherung).
2. Überlebt der Versicherte die gesamte Laufzeit, so wird die Versicherungssumme nach Ablauf der *n* Jahre ausbezahlt (vgl. Erlebensversicherung).

Einer der beiden oben angeführten Fälle tritt definitiv ein. Daher gilt für den Barwert Z^{GEM} der gemischten Versicherung:

$$Z^{\text{GEM}} = \begin{cases} v^{K_x+1} & \text{falls } K_x < n \\ v^n & \text{falls } K_x \geq n. \end{cases} \quad (5.8)$$

Die Nettoeinmalprämie ist die Summe der Nettoeinmalprämien der Erlebens- und Ablebensversicherung.

$$A_{x:\overline{n}|} = {}_n E_x + {}_n A_x = v^n {}_n p_x + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \quad (5.9)$$

Das Deckungskapital berechnet sich analog zur Erlebens- und zur Ablebensversicherung:

$${}_t V_x^{\text{GEM}} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}. \quad (5.10)$$

5.2 Das Erwartungswertprinzip

Das Äquivalenzprinzip ist nur eine Möglichkeit, um die Erstprämie zu berechnen. Die folgenden Unterkapitel geben einen Überblick über weiterführende Prämienkalkulationsprinzipien, deren Grundgedanke ist, die Prämie mit einem Risikozuschlag zu versehen.

Beim Erwartungswertprinzip wird auf die Nettoeinmalprämie ein Risikozuschlag - auch *safety loading* genannt - λ , welcher von der Nettoeinmalprämie abhängig ist, aufgeschlagen.

Definition 5.5 (Erwartungswertprinzip). Sei $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Dann berechnet sich die jährlich vorschüssig zu entrichtende Prämie als

$$P^{ERW} = \frac{\mathbb{E}[Z](1 + \lambda)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \quad (5.11)$$

Die Formeln zur Kalkulation von $\mathbb{E}[Z]$ - also der Nettoeinmalprämie - sind schon im Abschnitt 5.1 eingeführt worden.

5.3 Das Varianzprinzip

Bei diesem Prämienkalkulationsprinzip ist der Risikozuschlag ein Vielfaches λ der Varianz des Risikos Z .

Definition 5.6 (Varianzprinzip). Sei der Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Dann berechnet sie die Prämie, die der Versicherte zu entrichten hat, wie folgt:

$$P^{VAR} = \frac{\mathbb{E}[Z] + \lambda \mathbb{V}(Z)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \quad (5.12)$$

Die Varianz $\mathbb{V}(Z)$ lässt sich mithilfe des Steinerschen Verschiebungssatzes berechnen:

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2. \quad (5.13)$$

Die Bestimmung von $(\mathbb{E}[Z])^2$ ist leicht möglich, da hierfür lediglich die Nettoeinmalprämie quadriert werden muss. Deshalb liegt im Folgenden der Fokus auf der Berechnung von $\mathbb{E}[Z^2]$.

Erlebensversicherung Die entscheidende Idee für die Kalkulation der Varianz der Zufallsvariable Z , welche in Formel 5.5 definiert ist, ist Z als $v^n X$ aufzufassen, wobei X eine mit Parameter ${}_n p_x$ bernoulliverteilte Zufallsvariable ist. Dieser Ansatz ist gerechtfertigt, da sich der Versicherte nur in zwei Zuständen befinden kann. Mit Wahrscheinlichkeit ${}_n p_x$ überlebt er die gesamte Laufzeit und es erfolgt am Ende der Laufzeit eine Zahlung an ihn, mit Wahrscheinlichkeit $1 - {}_n p_x = {}_n q_x$ verstirbt der Versicherungsnehmer.

Für die Varianz einer bernoulliverteilten Zufallsvariable X gilt:

$$\mathbb{V}(X) = p(1 - p). \quad (5.14)$$

Somit gilt für die Varianz des Barwert $Z = v^n X$ gilt unter Berücksichtigung der Formeln 5.13 und 5.14:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z) &= \mathbb{E}[(v^n X)^2] - (\mathbb{E}[v^n X])^2 && \text{[deterministisches } v^{2n} \text{ aus Erwartungswert ziehen]} \\
&= v^{2n} \mathbb{E}[X^2] - v^{2n} (\mathbb{E}[X])^2 && \text{[} v^{2n} \text{ herausheben]} \\
&= v^{2n} (\mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2) && \text{[Steinerscher Verschiebungssatz (Formel 5.13)]} \\
&= v^{2n} \mathbb{V}(X) && \text{[Varianz der Bernoulliverteilung (Formel 5.14)]} \\
&= v^{2n} {}_n p_x {}_n q_x. && (5.15)
\end{aligned}$$

Ablebensversicherung Die Varianz einer n -jährigen Ablebensversicherung wird ebenfalls mit Formel 5.13 berechnet. Für $\mathbb{E}[Z^2]$ gilt:

$$\mathbb{E}[Z^2] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)} {}_k p_x q_{x+k}. \quad (5.16)$$

Es ist anzumerken, dass es sich bei $\mathbb{E}[Z^2]$ um eine Ablebensversicherung mit doppelter Zinsintensität handelt.

Es gilt nun für die Varianz:

$$\mathbb{V}(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)} {}_k p_x q_{x+k} - ({}_n A_x)^2. \quad (5.17)$$

Eine genaue Herleitung der Formel ist in [KSS09] zu finden.

Gemischte Versicherung Für die Berechnung des Barwerts der gemischten Versicherung Z ist zu beachten, dass die gemischte Versicherung die Summe aus einer Erlebensversicherung mit Zufallsvariable Z_1 und einer Ablebensversicherung mit Zufallsvariable Z_2 ist.

Für die Varianz gilt somit:

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(Z_1 + Z_2) = \mathbb{V}(Z_1) + \mathbb{V}(Z_2) + 2\text{COV}(Z_1 Z_2) \quad (5.18)$$

Die Berechnung von $\mathbb{V}(Z_1)$ und $\mathbb{V}(Z_2)$ ist schon in den vorangehenden Abschnitten durchgeführt worden (vergleiche Formel 5.15 und 5.17). Nun ist noch die Kovarianz der beiden Zufallsvariablen zu berechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\text{COV}(Z_1, Z_2) &= \mathbb{E}[Z_1 Z_2] - \mathbb{E}[Z_1] \mathbb{E}[Z_2] \\
&= -\mathbb{E}[Z_1] \mathbb{E}[Z_2] \\
&= -{}_n E_x {}_n A_x,
\end{aligned} \quad (5.19)$$

da $\mathbb{E}[Z_1 Z_2] = 0$ ist (vergleiche [KSS09]).

5.4 Das Standardabweichungsprinzip

Der Risikozuschlag ist bei diesem Prämienkalkulationsprinzip als ein Vielfaches λ der Standardabweichung definiert.

Definition 5.7 (Standardabweichungsprinzip). *Sei der Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Dann berechnet sie die Prämie, die der Versicherte zu entrichten hat, wie folgt:*

$$P^{STA} = \frac{\mathbb{E}[Z] + \lambda\sigma(Z)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \quad (5.20)$$

Die Standardabweichung $\sigma(Z)$ berechnet sich als die Wurzel aus der Varianz. Es gilt also:

$$\sigma(Z) = \sqrt{\mathbb{V}(Z)},$$

wobei sich die Varianz $\mathbb{V}(Z)$ wie in Abschnitt 5.3 beschrieben berechnen lässt.

6 | Beispiel zur Ablebens- und Gemischten Versicherung

Inhalt dieses Kapitels ist ein großes Beispiel, welches die in den vorangegangenen Kapiteln hergeleitete Theorie illustrieren soll.

Die Modellparameter variieren je nach durchgeführter Analyse und sind deshalb in jedem Abschnitt extra angeführt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist bei der Implementierung auf die Berücksichtigung etwaiger Kosten und der Versicherungssteuer verzichtet worden.

Für genaue Informationen die Implementierung betreffend sei auf Anhang A verwiesen.

In Anbetracht dessen, dass die Jährlich-Erneuernde-Rückversicherung lediglich das Mortalitätsrisiko rückversichert, ist für die folgenden Analysen die Entwicklung der Sterbewahrscheinlichkeiten in der zugrunde gelegten Sterbetafel von enormer Relevanz.

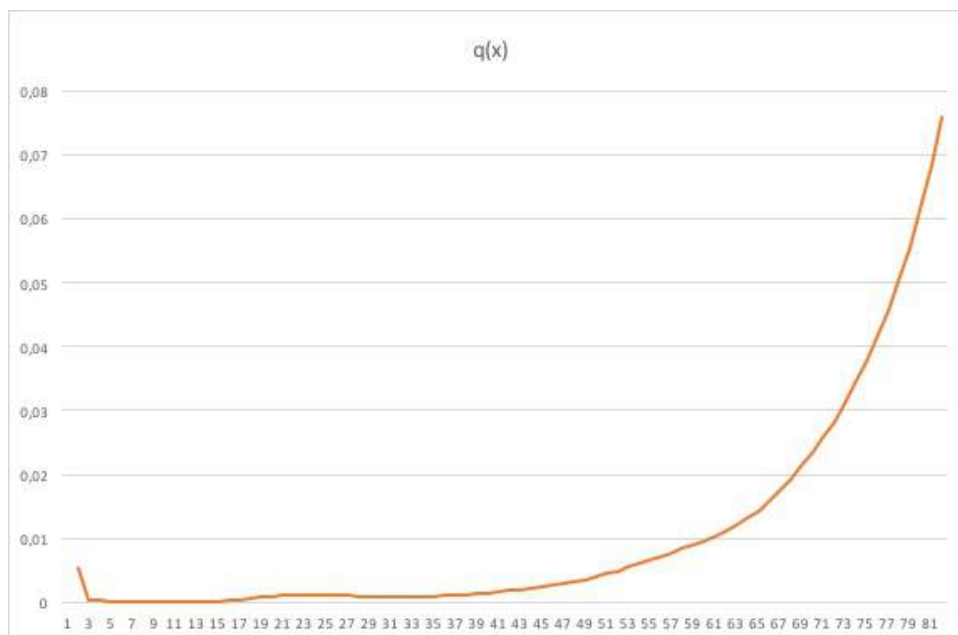


Abbildung 6.1: Entwicklung der Sterbewahrscheinlichkeiten q_x für Männer

Man sieht in Abbildung 6.1, dass die Sterbewahrscheinlichkeit für Männer ab dem 30. Lebensjahr monoton wachsend ist. Dies bedeutet, dass

$$q_{x+1} > q_x \text{ für } x > 30 \quad (6.1)$$

gilt, wenn x das Alter der betrachteten Person bezeichnet.

6.1 Auswirkungen der Veränderung der Zinsen und der Sterblichkeit

Für die folgende Sensitivitätsanalyse wird das Basismodell, bei welchem die Erstversicherungsprämie einfach nach dem Äquivalenzprinzip berechnet wird (vgl. Abschnitt 5.1), herangezogen.

Die Zahlenwerte der Ablebensversicherung werden in Diagrammen dargestellt, jene der Gemischten Versicherung teilweise in Tabellen. Es werden Tabellen statt Diagrammen gewählt, wenn die Unterschiede in den Werten sehr gering sind und eine gute Übersichtlichkeit nicht mehr gewährleistet werden könnte.

Folgende Parameter sind fix gewählt worden:

- *Laufzeit des Versicherungsvertrags*: 20 Jahre
- *Prämienzahlungsweise*: jährlich vorschüssig
- *Versicherungssumme*: € 100.000
- *Geschlecht des Versicherten*: männlich

6.1.1 Variation des Alters des Versicherten

In einem ersten Beispiel ist das Alter der versicherten Person bei einer Ablebensversicherung und bei einer Gemischten Versicherung variiert worden. Die Zinsen sind bei $i = 1\%$ fixiert worden.

Es werden nun 3 Fälle betrachtet:

1. Der Versicherte ist 30 Jahre alt.
2. Der Versicherte ist 45 Jahre alt.
3. Der Versicherte ist 60 Jahre alt.

Zu Beginn wird die Risikosumme betrachtet, da die Risikorückversicherungsprämie als proportionaler Anteil der Risikosumme definiert ist (siehe Definition 4.2). Es lässt sich erkennen, dass die Risikosumme bei der Ablebensversicherung für jüngere versicherte Personen höher und somit das Deckungskapital für eben diese niedriger ist. Diese Beobachtung ist leicht einzusehen: Ist eine versicherte Person älter, so ist ihre Sterbewahrscheinlichkeit größer. Der Versicherer rechnet also damit, dass diese Person eher sterben wird und bildet eine größere Reserve.

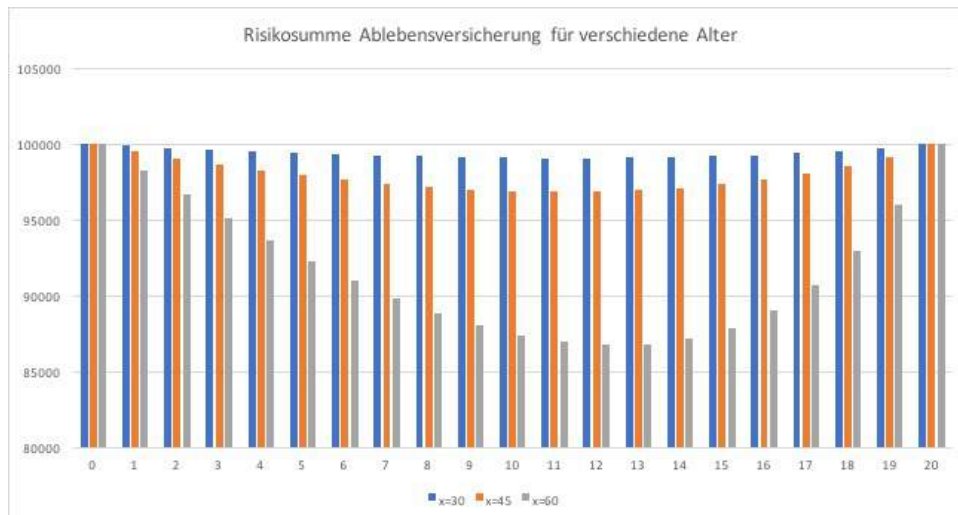


Abbildung 6.2: Risikosumme Abl.vers. für eine 30-, 45- und 60-jährige versicherte Person

In der untenstehenden Tabelle ist die Risikosumme einer Gemischten Versicherung abgebildet. Man sieht, dass diese monoton fallend ist. Daraus folgt, dass das Deckungskapital monoton wachsend sein muss. Dies ist logisch, da bei der Gemischten Versicherung spätestens am Ende der Laufzeit eine Zahlung in Höhe der Versicherungssumme fällig wird.

Entwicklung der Risikosumme GEM			
Laufzeit	x=30	x=45	x=60
0	100000	100000	100000
1	95470,9285	95447,6188	95407,1424
2	90893,5595	90863,9223	90800,3507
3	86270,0782	86248,7749	86184,5873
4	81600,6506	81602,2716	81565,0063
5	76884,5822	76924,505	76944,6691
6	72120,9248	72214,8502	72322,8638
7	67309,7049	67471,1477	67695,7156
8	62451,9634	62689,3188	63057,0279
9	57548,0366	57863,9661	58398,5989
10	52597,1464	52988,9377	53709,8161
11	47597,6786	48057,809	48977,3696
12	42547,3308	43064,2865	44185,1457
13	37443,5763	38001,998	39313,7361
14	32284,0307	32864,3173	34339,7744
15	27066,4686	27644,4199	29234,4041
16	21788,3966	22335,1457	23961,2147
17	16446,8041	16928,1901	18473,2436
18	11037,9511	11413,0761	12709,0554
19	5557,4446	5776,21809	6587,46197
20	0	0	0

Tabelle 6.1: Risikosumme Gem. Vers. für eine 30-, 45- und 60-jährige versicherte Person

Im nächsten Schritt wird die Nettorisikoprämienrate, welche in Definition 4.6 eingeführt wird, für verschiedene Alter berechnet.

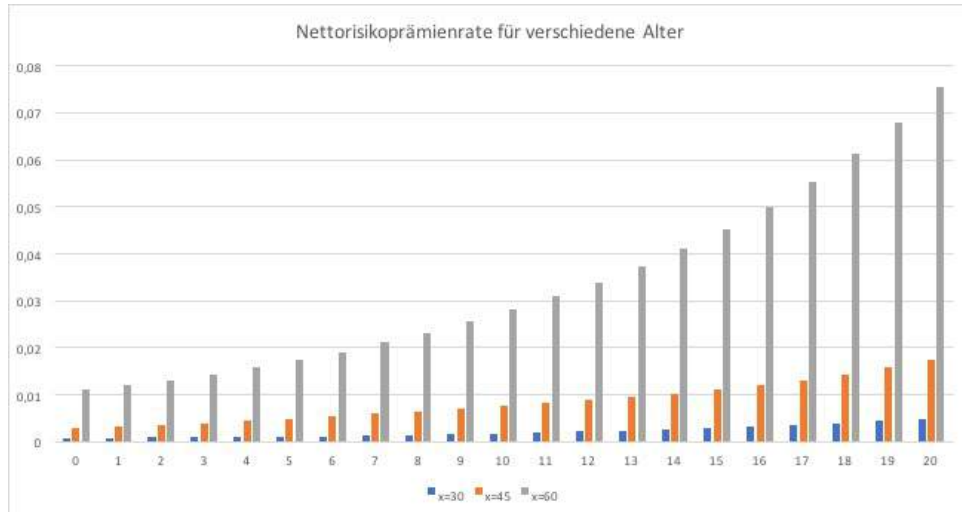


Abbildung 6.3: Nettorisikoprämienrate für eine 30-, 45- und 60-jährige versicherte Person

Die Nettorisikoprämienrate ist für jeden Versicherungsvertragstyp gleich, da sie nur aus zwei Komponenten besteht, dem Diskontierungsfaktor v und der 1-jährigen Sterbewahrscheinlichkeit q_x . Fixiert man nun den Diskontierungsfaktor, so sind die Änderungen lediglich von der Sterbewahrscheinlichkeit abhängig. Da bereits in Formel 6.1 analysiert worden ist, dass die Sterbewahrscheinlichkeit ab dem 30. Lebensjahr monoton wachsend ist, ist es nicht verwunderlich, dass die Nettorisikoprämienrate für steigende Alter der versicherten Personen steigt.

Dies lässt sich auch mathematisch leicht einsehen:

Ausgangspunkt der Berechnung bildet die 1-jährige Sterbewahrscheinlichkeit q_x . Es gilt $q_x < q_y$, wenn $30 \leq x < y$ ist .

Es wird von $q_x < q_y$ ausgegangen:

$$q_x < q_y.$$

Nun können beide Seiten der Ungleichung mit $\left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{2}}$ multipliziert werden, da $i > 0$ konstant gewählt worden ist. Man erhält:

$$\left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{2}} q_x < \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\frac{1}{2}} q_y.$$

Einsetzen der Definition des Diskontierungsfaktors v führt zur Darstellung der Nettorisikoprämienrate:

$$v^{\frac{1}{2}} q_x < v^{\frac{1}{2}} q_y.$$

Für die tatsächlich von der Erstversicherung die Rückversicherung zu bezahlende Risikorückversicherungsprämie ergeben sich folgende Werte:

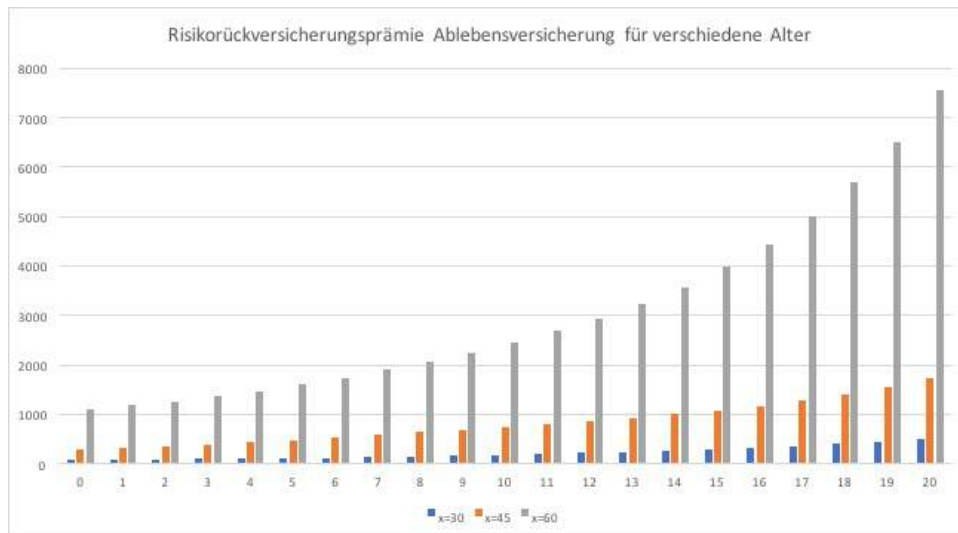


Abbildung 6.4: Risikorückversicherungsprämie Ablebensversicherung für eine 30-, 45- und 60-jährige versicherte Person

Man sieht, dass der Verlauf der Risikorückversicherungsprämie für alle 3 betrachtete Altersniveaus wachsend ist. Der extreme Anstieg der Risikoprämie gegen Ende der Laufzeit kann mit einem erneuten Ansteigen der Risikoprämie und einer dazu erhöhten Alterssterblichkeit begründet werden. Steigen beide Faktoren, so steigt auch das Produkt. Obwohl die Risikosumme zum Zeitpunkt 0 gleich hoch ist wie zum Zeitpunkt n , wenn n die Vertragslaufzeit bezeichnet, ist die Rückversicherungsrisikoprämie zum Zeitpunkt n höher. Dies lässt sich wieder mittels der Monotonie der Sterbewahrscheinlichkeiten q_x für $x > 30$ begründen.

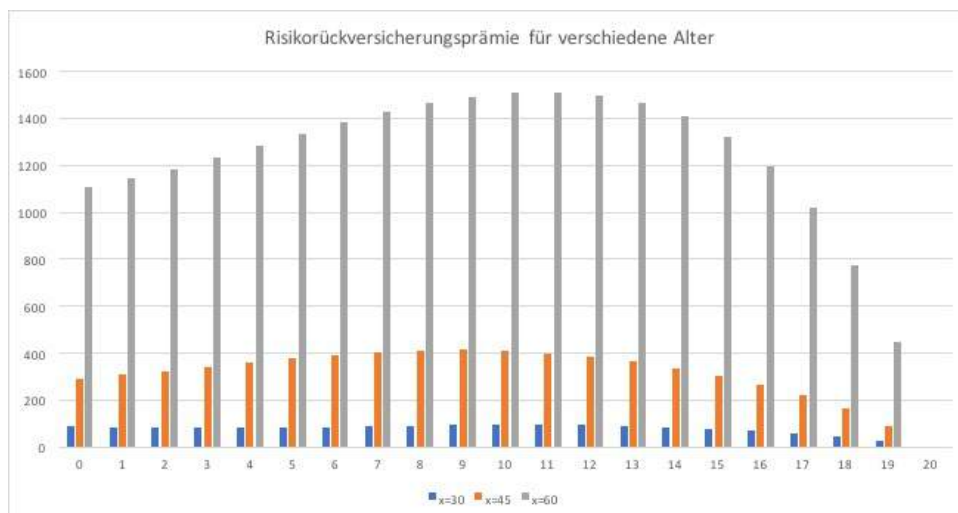


Abbildung 6.5: Risikorückversicherungsprämie Gemischte Versicherung für eine 30-, 45- und 60-jährige versicherte Person

Die Rückversicherungsprämie für das letzte Jahr der Laufzeit - in diesem konkreten Beispiel also für das Jahr 20 - ist gleich 0, da bei der Gemischten Versicherung am Ende der Laufzeit das Deckungskapital der Versicherungssumme entsprechen muss, da es definitiv zu einer Auszahlung kommt. Aus diesem Grund ist die Risikosumme gleich 0 und ein Produkt - in unserem Fall die Rückversicherungsrisikoprämie - ist ja bekanntlich 0, wenn ein Faktor gleich 0 ist.

Es lassen sich für diesen Abschnitte die folgenden Schlüsse ziehen:

- Die Nettorisikoprämienrate steigt für ältere versicherte Personen, ist also monoton.
- Die tatsächlich vom Erstversicherer zu bezahlende Risikorückversicherungsprämie muss nicht dasselbe Monotonieverhalten wie die Nettorisikoprämienrate an den Tag legen, da die Risikosumme einen definitiv nicht zu vernachlässigenden Faktor in der Berechnung darstellt.

6.1.2 Variation der Zinshöhe

In diesem Abschnitt wird das Alter x des Versicherten auf 30 Jahre festgelegt. Der Zinssatz i wird variiert, dadurch ändert sich auch der Diskontierungsfaktor v . Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird untersucht, welche Auswirkungen steigende Zinsen auf die Risikosumme, die Nettorisikoprämie und die Risikorückversicherungsprämie haben. Um eine gute Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten, ist der Zinssatz über die Laufzeit unveränderlich.

Folgende Zinshöhen werden betrachtet:

1. Zinssatz $i = 0,001\%$
2. Zinssatz $i = 0,5\%$ ¹
3. Zinssatz $i = 5\%$
4. Zinssatz $i = 10\%$

Zu Beginn werden wieder die Verläufe der Risikosumme für die Ablebens- sowie für die Gemischte Versicherung für die vier verschiedenen Zinssätze i simuliert.

Bei der Ablebensversicherung fällt die Risikosumme zunächst für einen höheren Zinssatz langsamer ab, steigt aber auch anschließend langsamer wieder an.

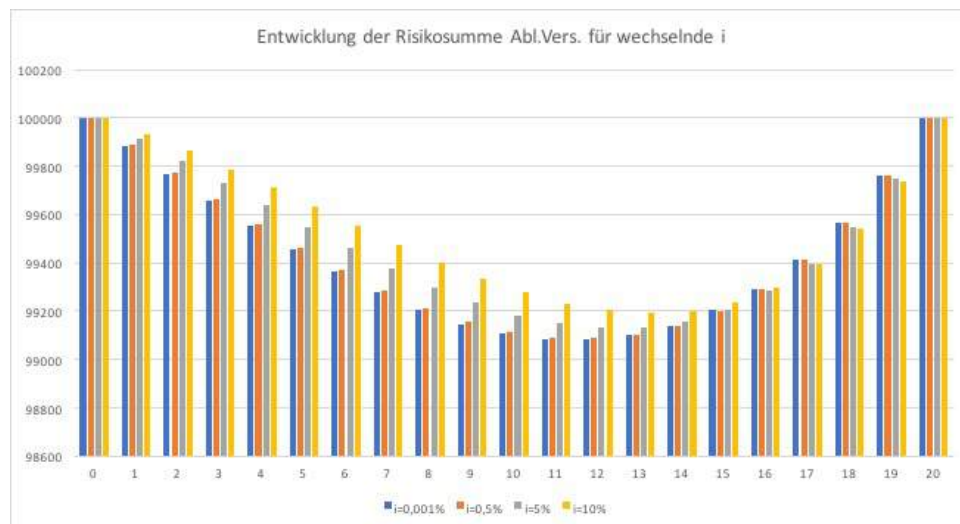


Abbildung 6.6: Risikosumme Ablebensversicherung für wechselnde Zinssätze i

Bei der Gemischten Versicherung ist die Risikosumme umso niedriger, je niedriger der Zinssatz i ist. Ein möglicher Erklärungsansatz hierfür ist der folgende: Ist die Risikosumme höher, so ist

¹Laut [hrz] liegt der Höchstrechnungszins in der Lebensversicherung derzeit bei 0,5%.

das Deckungskapital geringer. Das Deckungskapital muss aber am Ende der Laufzeit genau der Versicherungssumme entsprechen und wird mittels Zinseszinsen angespart. Sind die Zinsen nun höher, so sind auch die zu realisierenden Zinsgewinne deutlich höher und die Risikosumme kann vor dem Ende der Vertragslaufzeit höher sein.

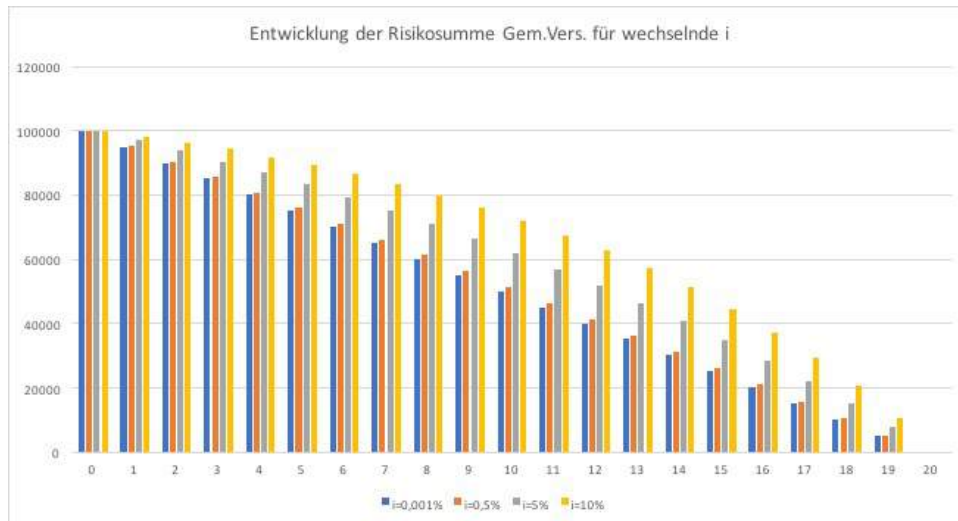


Abbildung 6.7: Risikosumme Gemischte Versicherung für wechselnde Zinssätze i

Folgende Grafik spiegelt den Verlauf der Nettorisikoprämienrate wider. Diese ist für höhere Zinssätze niedriger, da mit steigender Zinsrate i der Diskontierungsfaktor v sinkt. Somit ist das Produkt aus $v^{\frac{1}{2}}$ und q_x , wenn dieses für alle betrachteten Fälle fixiert ist, kleiner.

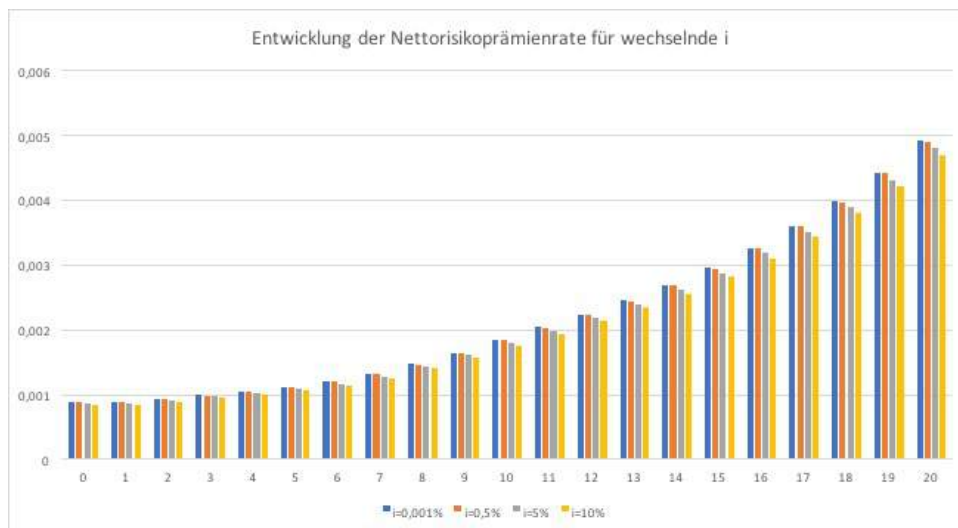


Abbildung 6.8: Nettorisikoprämienrate für wechselnde Zinssätze i

Für die Risikorückversicherungsprämie ergibt sich, dass diese im Falle einer Ablebensversicherung für höhere Zinssätze i niedriger ist. Dies bedeutet, dass das Mortalitätsrisiko zu einem geringeren Preis rückversichert werden kann, wenn der Zinssatz höher ist.

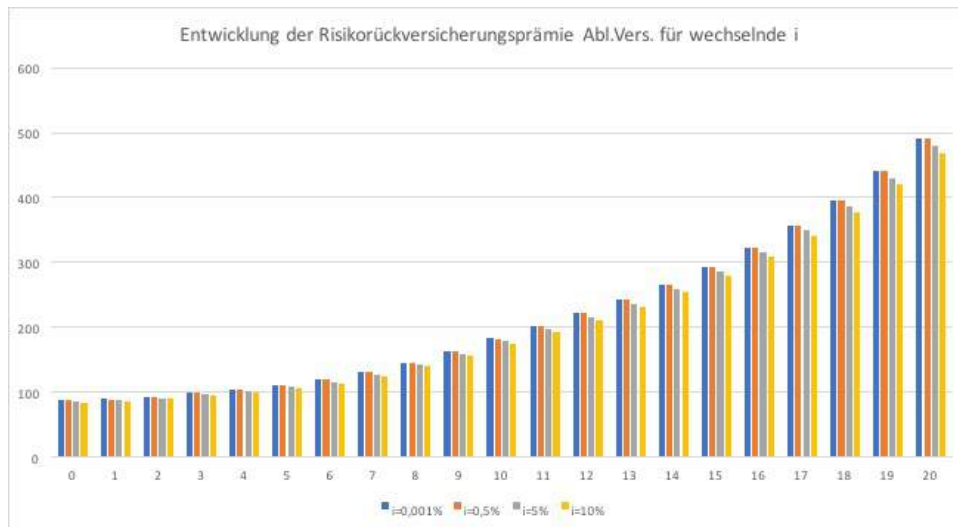


Abbildung 6.9: Risikorückversicherungsprämie Ablebensversicherung für wechselnde Zinssätze i

Bei der Gemischten Versicherung ist besonders auffällig, dass die Rückversicherung des Mortalitätsrisikos besonders gegen Ende der Laufzeit deutlich teurer ist. Dies korrespondiert mit der Beobachtung, dass die Risikosumme gegen Ende der Laufzeit bei höheren Zinsen deutlich höher ist. Diesen Effekt kann auch die Nettorisikoprämienrate nicht ausgleichen.

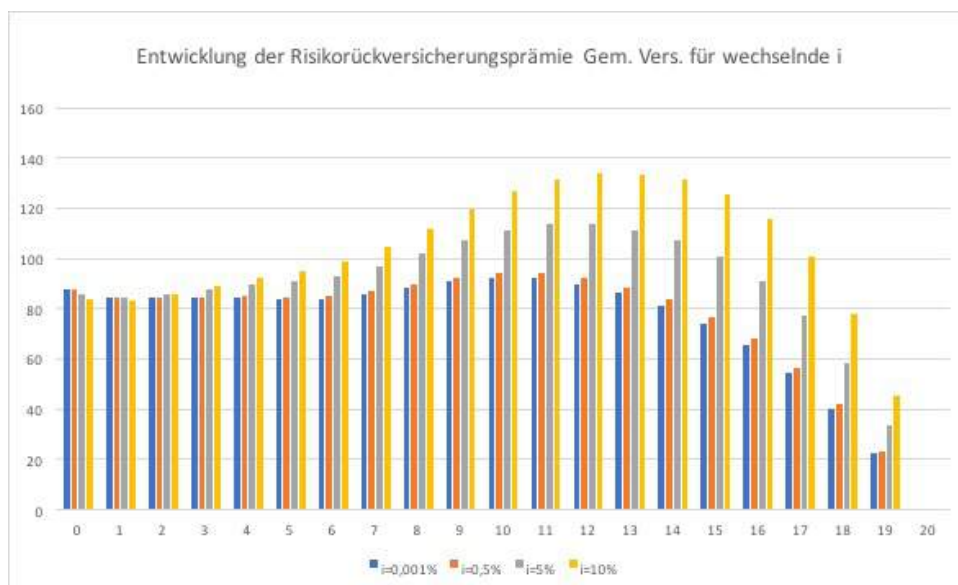


Abbildung 6.10: Risikorückversicherungsprämie Gemischte Versicherung für wechselnde Zinssätze i

6.1.3 Sicherheitsaufschläge der Rückversicherung bei der Sterbewahrscheinlichkeit

In diesem Abschnitt wird untersucht, welche Auswirkungen es auf die Risikorückversicherungsprämie hat, wenn das Rückversicherungsunternehmen die Nettorisikoprämienrate nicht mit derselben Sterbetafel berechnet, wie der Erstversicherer die Risikosumme. Genau genommen wird die Sterbewahrscheinlichkeit, welche eine entscheidende Rolle in der Berechnung der Risikorück-

versicherungsprämie spielt, um einen variablen Prozentsatz p erhöht.

Das bedeutet, dass sich die Risikorückversicherungsprämie für eine versicherte Person die im Vertragsjahr t Alter x hat, wie folgt berechnet:

$$RP_{x,t} = v^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) q_x.$$

In diesem Beispiel werden die folgenden Fälle betrachtet:

1. $p = 0\%$: Die Rückversicherer rechnet also mit denselben Sterbewahrscheinlichkeiten wie der Erstversicherer. Dies ist der Fall, der in den obigen Szenarien stillschweigend angenommen worden ist.
2. $p = 10\%$: Die Sterbewahrscheinlichkeit wird um $12,5\%$ erhöht.
3. $p = 25\%$: Die Sterbewahrscheinlichkeit wird um 25% erhöht.
4. $p = 100\%$: Der Rückversicherer nimmt eine doppelt so hohe Sterbewahrscheinlichkeit wie der Erstversicherer bei seinen Berechnungen an.

Die restlichen Parameter werden wie folgt gewählt:

- Die versicherte Person ist 30 Jahre alt.
- Die Zinsen sind konstant $i = 1\%$.

Aufgrund der Tatsache, dass lediglich der Rückversicherer einen Aufschlag auf die Sterbewahrscheinlichkeiten q_x vornimmt, ist die Risikosumme für alle in diesem Abschnitt betrachteten Fälle gleich. Der Verlauf ist wie von einem klassischen Lebensversicherungsvertrag zu erwarten. Bei der Ablebensversicherung sinkt das Deckungskapital gegen Ende der Laufzeit wieder, was zu einer steigenden Risikosumme führt, und bei der Gemischten Versicherung steigt das Deckungskapital bis zur Versicherungssumme an, was zu einer Risikosumme, die am Ende der Laufzeit gleich 0 ist, resultiert.

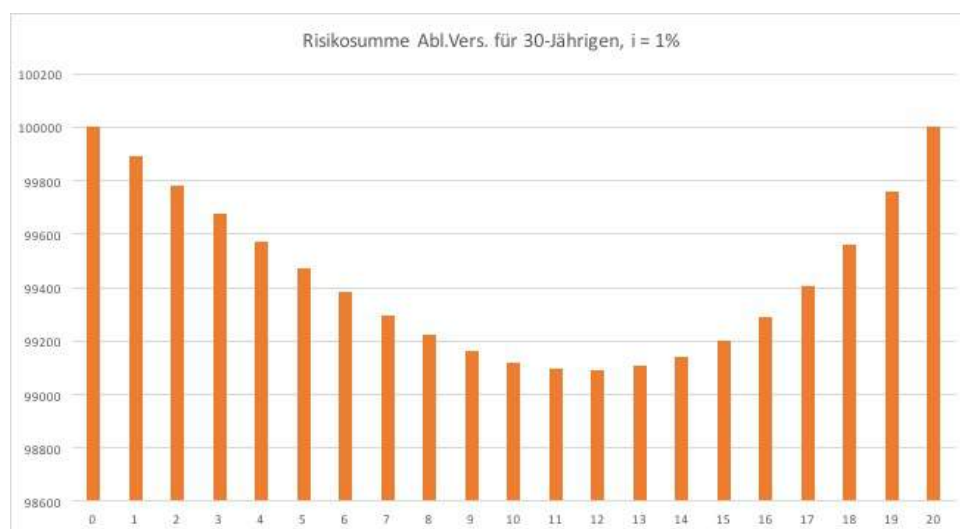


Abbildung 6.11: Risikosumme Ablebensversicherung

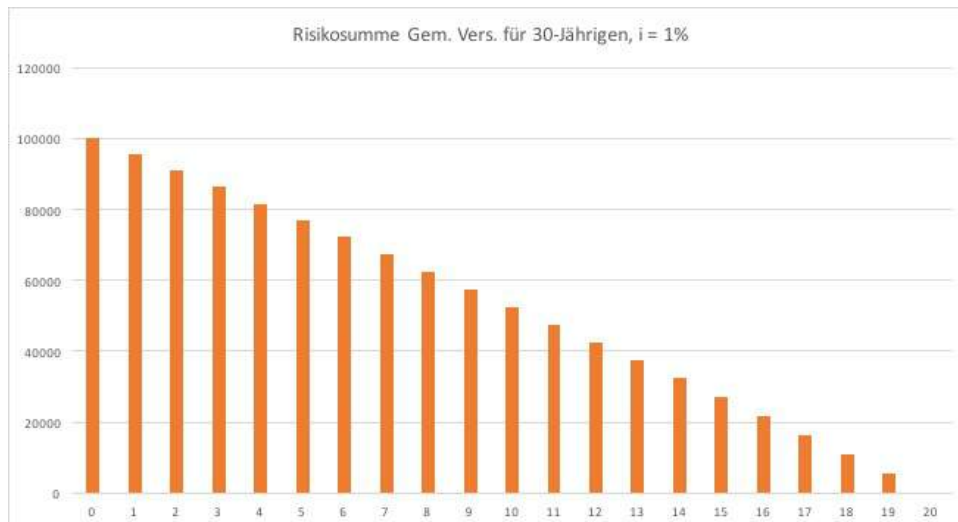


Abbildung 6.12: Risikosumme Gemischte Versicherung

Interessant ist bei dieser Untersuchung der Verlauf der Nettorisikoprämienrate. Diese steigt bei gleichbleibender Zinsrate i und steigender Sterbewahrscheinlichkeit natürlich an. Würde der Rückversicherer eine doppelt so hohe Sterbewahrscheinlichkeit annehmen, so würde sich auch die Nettorisikoprämienrate verdoppeln.

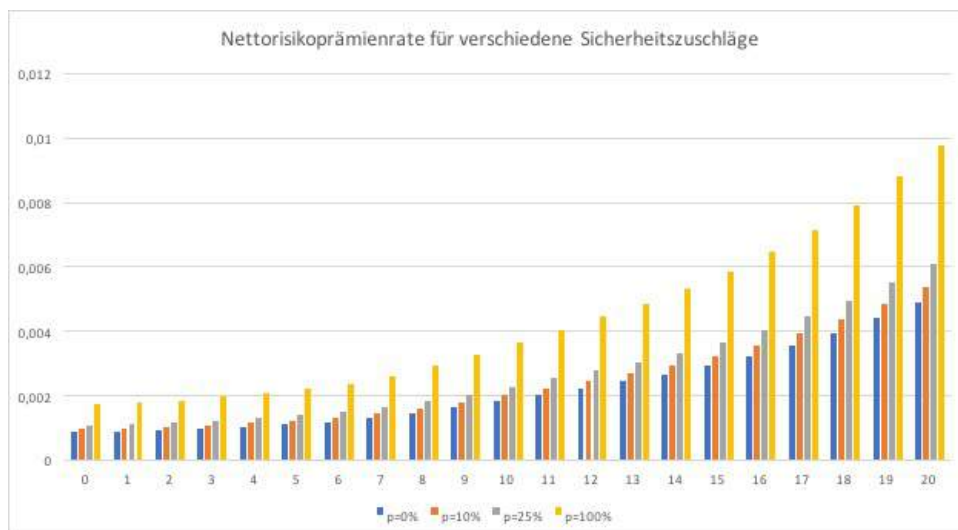


Abbildung 6.13: Entwicklung der Nettorisikoprämienrate für verschiedene Zuschläge auf die q_x

In Anbetracht dessen, dass die Risikosumme unabhängig von Sicherheitszuschlägen des Rückversicherers ist, führt die Annahme der verdoppelten Sterbewahrscheinlichkeit nicht zu einer Verdopplung der Risikorückversicherungsprämie. Der Verlauf der Risikorückversicherungsprämie ist für alle betrachteten Fälle gleich, jedoch ist die Risikorückversicherungsprämie höher, wenn eine höhere Mortalität angenommen wird. Dies folgt aus dem Grundprinzip der Jährlich-Erneuernden-Rückversicherung, bei welcher lediglich das Mortalitätsrisiko rückversichert wird. Ist dieses erhöht, so ist selbstverständlich auch die Prämie, die für die Deckung desselben Risikos zu bezahlen ist, höher.

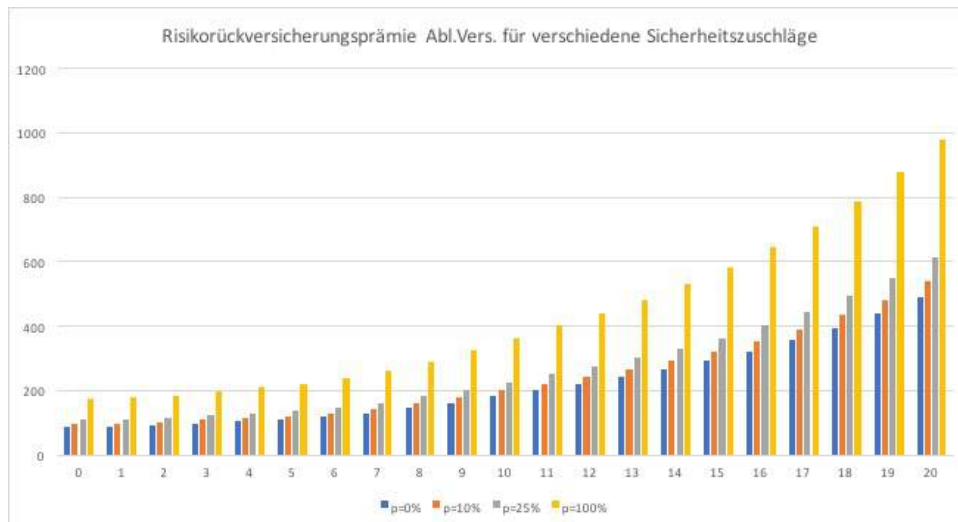


Abbildung 6.14: Entwicklung der Risikorückversicherungsprämie der Ablebensversicherung für verschiedene Zuschläge auf die q_x

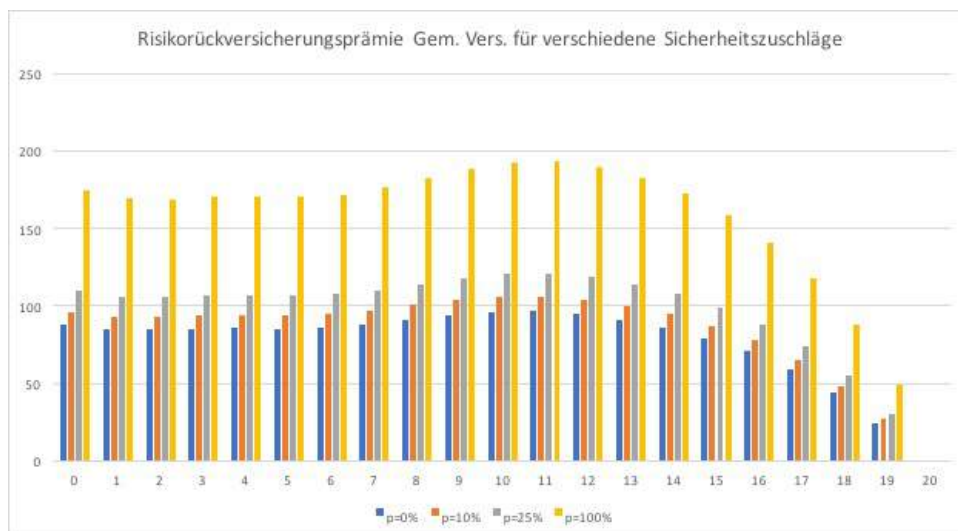


Abbildung 6.15: Entwicklung der Risikorückversicherungsprämie der Gemischten Versicherung für verschiedene Zuschläge auf die q_x

Es werden die gemachten Beobachtungen nun kurz zusammengefasst:

- Wird eine erhöhte Sterbewahrscheinlichkeit q_x angenommen, so steigt die Nettorisikoprämienrate im selben Verhältnis.

6.2 Auswirkungen der verschiedenen Erstprämienkalkulationsprinzipien auf die Rückversicherungsprämie

In diesem Abschnitt werden verschiedene Erstprämienkalkulationsprinzipien betrachtet und es werden die Auswirkungen einer Änderung in eben dieser Kalkulation auf die Risikorückversicherungsprämie untersucht.

Es ist wichtig, anzumerken, dass eine Änderung in der Kalkulation der Erstprämie die Nettorisikoprämienrate nicht beeinflusst. Somit resultieren Änderungen in der Risikorückversicherungsprämie in diesen Analysen lediglich aus der Änderung der Erstversicherungsprämie.

Folgende Parameter sind fixiert worden:

- Die Laufzeit des Versicherungsvertrags ist auf 20 Jahre festgesetzt.
- Die Versicherungssumme beträgt 100000 €.
- Das Geschlecht der versicherten Person ist männlich.
- Das Alter der versicherten Person bei Abschluss des Versicherungsvertrages ist 30 Jahre.
- Der Zinssatz ist mit $i = 1\%$ festgesetzt.

Somit ist der variable Parameter, dessen Einfluss in diesem Abschnitt analysiert wird, der folgende:

- Der Sicherheitszuschlag λ .

Die Nettorisikoprämienrate hat für alle folgenden Betrachtungen den in untenstehender Abbildung dargestellten Verlauf. Warum der Verlauf der Nettorisikoprämienrate diese Gestalt hat, ist bereits in der obigen Sensitivitätsanalyse erläutert worden.

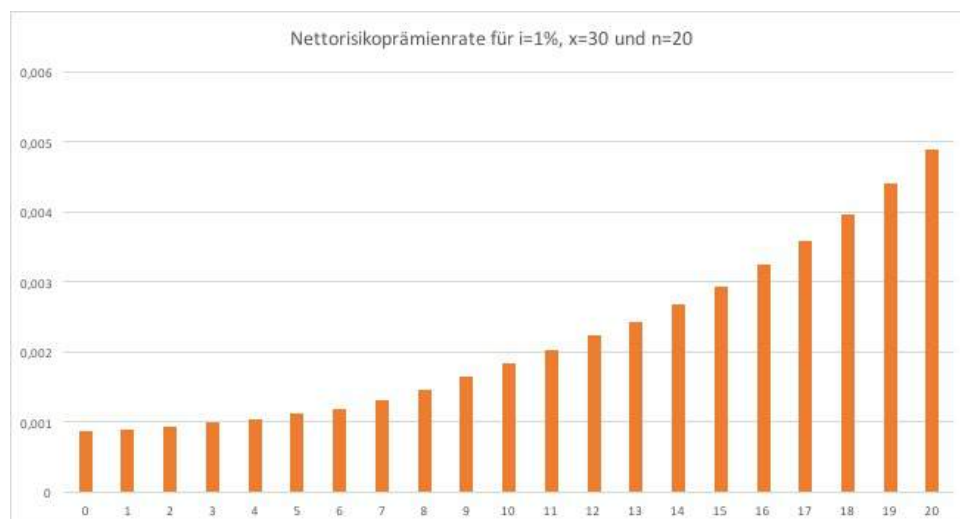


Abbildung 6.16: Nettorisikoprämienrate für eine 30-jährige versicherte Person bei 20-jähriger Laufzeit und $i=1\%$

6.2.1 Ablebensversicherung

In diesem Abschnitt der Arbeit wird die Entwicklung der Risikorückversicherungsprämie untersucht, wenn einerseits der Risikozuschlag und andererseits der Faktor, als dessen Vielfaches der Risikozuschlag definiert ist, variiert wird.

Folgende Fälle werden genau betrachtet:

1. Der Sicherheitszuschlag $\lambda = 1\%$.
2. Der Sicherheitszuschlag $\lambda = 5\%$.

3. Der Sicherheitszuschlag $\lambda = 10\%$.
4. Der Sicherheitszuschlag ist ein Vielfaches der Nettoeinmalprämie.
5. Der Sicherheitszuschlag ist ein Vielfaches der Varianz.
6. Der Sicherheitszuschlag ist ein Vielfaches der Standardabweichung.

Um die Prämienkalkulationsprinzipien analysieren zu können, muss untersucht werden, als Produkt welcher Faktoren der Sicherheitszuschlag berechnet wird.

Beim Erwartungswertprinzip ist dies die Nettoeinmalprämie, beim Varianzprinzip die Varianz des Barwerts und beim Standardabweichungsprinzip die Standardabweichung des Barwerts.

NEP	0,03522
VAR	0,02973
STD	0,17243

Tabelle 6.2: Basis der Sicherheitszuschläge für eine Ablebensversicherung einer 30-jährigen versicherten Person bei 20-jähriger Laufzeit und $i=1\%$

Man sieht, dass die Basis des Sicherheitszuschlags beim Standardabweichungsprinzips größer als beim Varianzprinzip ist. Dies ist logisch, da die Standardabweichung als die Wurzel aus der Varianz definiert ist und die Wurzel einer Zahl x , welche zwischen 0 und 1 liegt, größer ist. Die Nettoeinmalprämie liegt bezüglich ihrer Größe zwischen der Varianz und der Standardabweichung.

Es werden nun die aufgrund der eingeführten Theorie erwarteten Ergebnisse angeführt und anschließend mittels der Grafiken gezeigt, dass die Erwartungen erfüllt worden sind.

- Wählt man den Sicherheitszuschlagsparameter λ in allen Fällen gleich hoch, so ist zu erwarten, dass die Risikosumme für das Varianzprinzip am größten und für das Standardabweichungsprinzip am kleinsten ist.
- Aus obiger Überlegung folgt, dass die Rückversicherungsprämie, welche das Produkt aus Nettorisikoprämienrate und Risikosumme ist, ebenfalls für das Varianzprinzip am größten und für das Standardabweichungsprinzip am kleinsten sein muss.
- Des Weiteren sollte die Risikosumme für eine Erhöhung des Sicherheitszuschlags bei gleichbleibendem Prämienkalkulationsprinzip sinken und die Risikorückversicherungsprämie sollte sich analog verhalten.

Auf die Abbildungen der Risikosummen wird verzichtet, da auf deren Verlauf bei gleicher Nettorisikoprämienrate für alle betrachteten Fälle aus der Risikorückversicherungsprämie geschlossen werden kann.

Es ist anzumerken, dass die y -Achse logarithmisch skaliert worden ist und erst bei dem Wert 80 beginnt, um die minimalen Unterschiede überhaupt ersichtlich zu machen.

Entwicklung der Risikorückversicherungsprämie, $l=1\%$			
Laufzeit	EW-Pr.	VAR-Pr.	STD-Pr.
0	87,4936201	87,4936201	87,4936201
1	88,5097364	88,5095167	88,5037901
2	92,7599285	92,7594548	92,7473741
3	98,312675	98,3118697	98,2925441
4	104,30377	104,302531	104,275026
5	110,495668	110,493878	110,457236
6	118,392028	118,389517	118,342121
7	130,007092	130,003572	129,942491
8	145,082668	145,077709	144,999357
9	162,536624	162,529655	162,430353
10	181,459915	181,450219	181,326372
11	200,897652	200,884391	200,73278
12	220,625549	220,607749	220,425195
13	241,405848	241,382312	241,164852
14	264,645829	264,614978	264,357016
15	291,200138	291,159901	290,854371
16	321,609421	321,557111	321,195577
17	355,726114	355,65839	355,231709
18	394,53308	394,445591	393,942517
19	438,969166	438,856254	438,263212
20	489,259786	489,114316	488,416148

Tabelle 6.3: Entwicklung der Risikorückversicherungsprämien der Ablebensversicherung bei verschiedenen Prämienkalkulationsprinzipien bei 1%-igem Sicherheitszuschlag

Entwicklung der Risikorückversicherungsprämie, $l=5\%$			
Laufzeit	EW-Pr.	VAR-Pr.	STD-Pr.
0	87,4936201	87,4936201	87,4936201
1	88,5058424	88,5047439	88,4761105
2	92,7517544	92,7493863	92,6889824
3	98,2997894	98,2957631	98,199135
4	104,2858	104,279608	104,142084
5	110,472291	110,463339	110,280128
6	118,362572	118,350015	118,113036
7	129,970266	129,952665	129,647263
8	145,037202	145,012408	144,620651
9	162,481741	162,446893	161,950384
10	181,395482	181,347001	180,72777
11	200,82434	200,758033	199,99998
12	220,544604	220,455602	219,542831
13	241,318752	241,201073	240,113774
14	264,554237	264,399983	263,110173
15	291,106448	290,905261	289,377612
16	321,517344	321,255795	319,448126
17	355,641401	355,302778	353,169373
18	394,463756	394,02631	391,510942
19	438,926549	438,361991	435,396778
20	489,259786	488,532437	485,041594

Tabelle 6.4: Entwicklung der Risikorückversicherungsprämien der Ablebensversicherung bei verschiedenen Prämienkalkulationsprinzipien bei 5%-igem Sicherheitszuschlag

Entwicklung der Risikorückversicherungsprämie, $l=10\%$			
Laufzeit	EW-Pr.	VAR-Pr.	STD-Pr.
0	87,4936201	87,4936201	87,4936201
1	88,5009748	88,4987779	88,441511
2	92,7415367	92,7368005	92,6159927
3	98,2836824	98,2756297	98,0823736
4	104,263337	104,250953	103,975905
5	110,443069	110,425165	110,058743
6	118,325751	118,300638	117,826679
7	129,924234	129,889032	129,278228
8	144,980371	144,930782	144,147268
9	162,413137	162,343441	161,350423
10	181,314941	181,217978	179,979517
11	200,7327	200,600085	199,083979
12	220,443422	220,265417	218,439876
13	241,209883	240,974524	238,799926
14	264,439747	264,131239	261,551619
15	290,989335	290,586961	287,531663
16	321,402248	320,87915	317,263812
17	355,535509	354,858263	350,591454
18	394,377101	393,50221	388,471474
19	438,873278	437,744161	431,813736
20	489,259786	487,805087	480,823401

Tabelle 6.5: Entwicklung der Risikorückversicherungsprämien der Ablebensversicherung bei verschiedenen Prämienkalkulationsprinzipien bei 10%-igem Sicherheitszuschlag

Die obigen Grafiken bestätigen die mathematisch fundierten Vermutung. Es lässt sich also zusammenfassend sagen, dass eine Erhöhung der Erstversicherungsprämie zu einer Reduktion der Risikoprämie führt. Bezahlt die versicherte Person also mehr für den Versicherungsschutz, so ist es für den Versicherer nicht so teuer, das Mortalitätsrisiko rückzuversichern. Da das Mortalitätsrisiko für eine 30-jährige versicherte Person aber ohnehin sehr gering ist, sind auch die Änderungen in der Risikorückversicherungsprämie nicht eklatant.

6.2.2 Gemischte Versicherung

Die Vorgehensweise bei der Analyse der Gemischten Versicherung ist analog zu der bei der Ablebensversicherung.

Folgende Fälle werden genau betrachtet:

1. Der Sicherheitszuschlag $\lambda = 1\%$.
2. Der Sicherheitszuschlag $\lambda = 5\%$.
3. Der Sicherheitszuschlag $\lambda = 10\%$.
4. Der Sicherheitszuschlag ist ein Vielfaches der Nettoeinmalprämie.
5. Der Sicherheitszuschlag ist ein Vielfaches der Varianz.
6. Der Sicherheitszuschlag ist ein Vielfaches der Standardabweichung.

Zu Beginn wird analog zur Ablebensversicherung die Basis der Sicherheitszuschläge betrachtet. Da bei der Gemischten Versicherung der Versicherungsfall definitiv eintritt - es ist also nur die Eintrittszeit ungewiss - ist die Nettoeinmalprämie sehr hoch. Die Varianz und Standardabweichung sind geringer als bei der Ablebensversicherung. Warum dies so ist, ist schon in Kapitel 5 erläutert worden.

NEP	0,82184
VAR	0,00022
STD	0,01478

Tabelle 6.6: Basis der Sicherheitszuschläge für eine Gemischten Versicherung einer 30-jährigen versicherten Person bei 20-jähriger Laufzeit und $i=1\%$

Es ist nun folgendes Ergebnis zu erwarten:

- Die Risikorückversicherungsprämie sollte für das Erwartungswertprinzip am höchsten und für das Varianzprinzip am niedrigsten sein. Dies resultiert aus der Höhe der Basis des Sicherheitszuschlags, da dieser beim Erwartungswertprinzip mit Abstand am höchsten ist.
- Die Risikorückversicherungsprämien sollten für einen steigenden Sicherheitsparameter sinken.
- Am Ender der Laufzeit - in unserem Fall also im 20. Jahr - sollte die Risikorückversicherungsprämie für alle betrachteten Fälle gleich 0 sein, da das Deckungskapital dann der Versicherungssumme zu entsprechen hat, da spätestens zu diesem Zeitpunkt die Zahlung zu erfolgen hat.
- Die Unterschiede zwischen den einzelnen Prämienkalkulationsprinzipien sollten sich mit steigendem Sicherheitszuschlag verstärken.

Es wird wieder auf die Abbildung der Risikosumme verzichtet, da auf diese aus den Risikorückversicherungsprämien geschlossen werden kann und da deren Verlauf schon ausführlich im obigen Abschnitt analysiert worden ist.

Da die Unterschiede in den Ergebnissen sehr gering sind, werden diese in Tabellenform dargestellt.

Entwicklung der Risikorückversicherungsprämie, $i=1\%$			
Laufzeit	EW-Pr.	VAR-Pr.	STD-Pr.
0	87,4936201	87,4936201	87,4936201
1	85,2901767	84,5951242	84,6074435
2	85,1948621	84,5005863	84,5128918
3	85,7944594	85,0952973	85,1076894
4	86,1853485	85,4830009	85,4954495
5	86,1098892	85,4081566	85,4205943
6	86,6279851	85,9220304	85,9345429
7	88,8575874	88,133463	88,1462976
8	92,0744607	91,3241212	91,3374204
9	95,1094164	94,3343442	94,3480818
10	97,0898768	96,2986653	96,312689
11	97,2968204	96,5039225	96,517976
12	95,5185087	94,7401027	94,7538993
13	91,964065	91,2146251	91,2279084
14	86,8932782	86,1851615	86,1977123
15	80,1109202	79,4580748	79,469646
16	71,1601599	70,5802566	70,590535
17	59,3410911	58,8575046	58,8660758
18	44,101067	43,7416756	43,7480455
19	24,6562547	24,4553243	24,4588856
20	0	0	0

Tabelle 6.7: Entwicklung der Risikorückversicherungsprämien der gemischten Versicherung bei verschiedenen Prämienkalkulationsprinzipien bei 1%-igem Sicherheitszuschlag

Entwicklung der Risikorückversicherungsprämie, $i=5\%$			
Laufzeit	EW-Pr.	VAR-Pr.	STD-Pr.
0	87,4936201	87,4936201	87,4936201
1	88,0711263	84,5958635	84,6574599
2	87,9727038	84,5013247	84,5628523
3	88,5918514	85,0960409	85,1580015
4	88,9954857	85,483748	85,5459909
5	88,9175661	85,408903	85,4710914
6	89,4525549	85,9227813	85,9853439
7	91,754855	88,1342333	88,1984061
8	95,0766169	91,3249193	91,3914154
9	98,2105295	94,3351686	94,4038565
10	100,255564	96,2995069	96,3696251
11	100,469255	96,5047659	96,5750335
12	98,6329605	94,7409306	94,809914
13	94,9626216	91,2154222	91,2818385
14	89,726498	86,1859147	86,2486689
15	82,7229962	79,4587692	79,5166252
16	73,4803897	70,5808735	70,6322652
17	61,2759514	58,858019	58,900875
18	45,5390151	43,7420579	43,7739076
19	25,4601902	24,455538	24,4733447
20	0	0	0

Tabelle 6.8: Entwicklung der Risikorückversicherungsprämien der gemischten Versicherung bei verschiedenen Prämienkalkulationsprinzipien bei 5%-igem Sicherheitszuschlag

Entwicklung der Risikorückversicherungsprämie, $i=10\%$			
Laufzeit	EW-Pr.	VAR-Pr.	STD-Pr.
0	87,4936201	87,4936201	87,4936201
1	91,5473132	84,5967876	84,7199805
2	91,4450059	84,5022478	84,625303
3	92,0885914	85,0969705	85,2208918
4	92,5081573	85,4846818	85,6091676
5	92,4271621	85,409836	85,5342128
6	92,9832671	85,9237199	86,0488451
7	95,3764395	88,135196	88,2635416
8	98,829312	91,325917	91,458909
9	102,086921	94,3361991	94,4735749
10	104,212674	96,3005589	96,4407952
11	104,434799	96,5058201	96,6463553
12	102,526025	94,7419656	94,8799322
13	98,7108173	91,2164187	91,3492513
14	93,2680228	86,1868562	86,3123645
15	85,9880913	79,4596372	79,5753492
16	76,380677	70,5816445	70,684428
17	63,6945269	58,858662	58,944374
18	47,3364501	43,7425357	43,8062352
19	26,4651095	24,4558051	24,4914185
20	0	0	0

Tabelle 6.9: Entwicklung der Risikorückversicherungsprämien bei verschiedenen Prämienkalkulationsprinzipien bei 10%-igem Sicherheitszuschlag

Die obigen Abbildungen stimmen mit den erwarteten Ergebnissen überein. Es lässt sich also sagen, dass die Rückversicherung des Mortalitätsrisikos bei einer Gemischten Versicherung gegen Ende der Laufzeit günstiger wird, da das Deckungskapital schon größer ist, da der Versicherungsfall in näherer Zukunft eintreten wird. Des Weiteren ist wie bei der Ablebensversicherung die Rückversicherung des Mortalitätsrisikos günstiger, wenn der Erstversicherer für den Versicherungsschutz höhere Prämien verlangt.

7 | Rückversicherung von Erlebensversicherungen

Die Erlebensfallversicherung kann nicht mit denselben Methoden wie die Ablebens- oder die Gemischte Versicherung rückversichert werden, da die Erstversicherer nicht dem Mortalitäts-, sondern dem Überlebensrisiko der versicherten Personen ausgesetzt sind.

Es ist jedoch möglich, die Erlebensversicherung mit Methoden der Sachversicherung rückzuversichern. In diesem Kapitel soll eine solche Möglichkeit vorgestellt werden. Des Weiteren wird die Risikorückversicherungsprämie für einen solchen Vertrag berechnet.

7.1 Stop-Loss-Vertrag

Erstversicherer werden ihre Erlebensversicherungsverträge nur dann rückversichern, wenn sie viele von diesen abgeschlossen haben. Es ist nicht sinnvoll, einzelne Verträge rückzuversichern, da das Deckungskapital am Ende der Laufzeit des Versicherungsvertrags der Versicherungssumme zu entsprechen hat. Haben Erstversicherer aber zahlreiche Erlebensversicherungsverträge im Bestand, könnten sie einen Teil dieser in Rückversicherung geben, um einerseits das Deckungskapital zu reduzieren und um andererseits, sollte es zu einer Phase mit erhöhten Überlebenswahrscheinlichkeiten kommen, nicht gleichzeitig mit zu vielen Schadenzahlungen konfrontiert zu sein.

Um nun einen Rückversicherungsvertrag für den Gesamtschaden modellieren zu können, muss auf einen fundamentalen Unterschied zwischen Lebens- und Sachversicherungen hingewiesen werden: Die maximal eintretende Schadenhöhe für alle Verträge ist in der Lebensversicherung deterministisch. Es ist zwar nicht sicher, ob der Schaden eintreten wird, doch wenn es zu diesem Fall kommt, dann hat der Versicherer die vorab vertraglich festgelegte Versicherungssumme an den Versicherten zu entrichten.

Aufgrund der obenstehenden Argumente ist es nun zulässig, Erlebensversicherungsverträge mittels eines Stop-Loss-Vertrags (siehe Abschnitt 2.2.2) rückzuversichern. Der Stop-Loss-Point p kann hierbei als ein Prozentsatz \mathfrak{p} des höchstmöglichen Gesamtschadens definiert werden.

Analog zu Abschnitt 2.2.2 ergeben sich folgende Ausdrücke für den Teil des Gesamtschadens S , den der Erstversicherer selbst zu tragen - mit S_E bezeichnet - und jenen Teil S_R , den der Rückversicherer trägt.

$$S_E = \begin{cases} S & \text{falls } S \leq \mathfrak{p}S \\ \mathfrak{p}S & \text{falls } S > \mathfrak{p}S \end{cases}$$

und

$$S_R = \begin{cases} 0 & \text{falls } S \leq \mathfrak{p}S \\ S - \mathfrak{p}S & \text{falls } S > \mathfrak{p}S. \end{cases}$$

In Worten ausgedrückt, übernimmt der Rückversicherer also einen Teil der Schadenzahlungen, wenn ein vertraglich vereinbarter Prozentsatz der maximalen Schadenhöhe überschritten wird.

7.2 Beispiel - Kalkulation der Risikorückversicherungsprämie

Nachdem eine Möglichkeit, Erlebensfallversicherungsverträge rückzuversichern, vorgestellt worden ist, ist nun die Bestimmung der Risikorückversicherungsprämie von Interesse. Die Berechnung der Prämie wird exemplarisch an einem Beispiel, welches dem des vorigen Kapitels sehr ähnlich ist, vorgeführt.

Folgende Annahmen sind für das Beispiel getroffen worden:

- Es werden nur Versicherungsverträge betrachtet, deren Fälligkeit im selben Jahr liegt. Es ist legitim, nur Verträge eines Jahres als den Gesamtschaden des Stop-Loss-Vertrages zu definieren, da man bei Erlebensfallversicherungen definitiv keine Zahlungen zu leisten hat, wenn der Versicherungsvertrag nicht in diesem Jahr terminiert.
- Außerdem werden jeweils nur einzelne Jahre betrachtet. Diese Annahme hat ihren Ursprung in den Grundprinzipien der Rückversicherung - es werden stets nur Verträge mit der Laufzeit von einem Jahr abgeschlossen.
- Die Rückversicherungsprämie wird mittels der Risikoprämienmethode berechnet - das Risiko ist allerdings nicht die Mortalität, welche mit der Sterbewahrscheinlichkeit q_x modelliert wird, sondern die Überlebenswahrscheinlichkeit p_x .
- Die Zinsen werden für das gesamte Beispiel bei $i = 1\%$ fixiert. Aufgrund der Einjährigkeit der Verträge ist eine Variation der Zinsen von untergeordneter Bedeutung und wird hier nicht durchgeführt.
- Es werden nur männliche Versicherungsnehmer betrachtet.
- Der Bestand umfasst 85 Personen.

Die Nettorisikoprämienrate für einen Bestand mit Durchschnittsalter x hat bei Erlebensfallversicherungen also folgende Gestalt:

$$RP_x = v^{\frac{1}{2}} p_x.$$

Folgende Abkürzungen werden verwendet:

- Max. GS \rightarrow Maximaler Gesamtschaden
- RV \rightarrow Rückversicherer
- NRPR \rightarrow Nettorisikoprämienrate
- RV-Pr. \rightarrow Risikorückversicherungsprämie

7.2.1 Grundbeispiel

In diesem Abschnitt wird eine erste Kalkulation der Risikoprämie durchgeführt. Es wird davon ausgegangen, dass

- das Versicherungsunternehmen maximal 10.000.000 € an Schadenszahlungen zu leisten hat. Dies wäre der Fall, wenn alle Versicherungsnehmer das Jahr überleben,
- der Stop-Loss-Point p bei 85% des maximal möglichen Gesamtschadens liegt und
- Das Durchschnittsalter des Bestands beträgt 30 Jahre. Dieser Bestand ist sehr jung. Es werden jedoch noch unterschiedliche Durchschnittsalter analysiert.

Die Verwendung eines Durchschnittsalters wird durch die Homogenität des Bestands von Lebensversicherern begründet.

Max. GS in €	p	Max. GS RV in €	NRPR	RV-Pr. in €
10.000.000	0,85	1.500.000	0,923	1.385.022

Tabelle 7.1: Entscheidende Größen eines rückversicherten Erlebensfallversicherungsvertrags

In den weiteren Abschnitten werden nun Änderungen an den Parametern vorgenommen und es werden die Änderungen untersucht.

7.2.2 Variation des Stop-Loss-Points

Nun wird der Stop-Loss-Point p verändert.

Folgende Auswirkungen sind - vorausgesetzt alle anderen Parameter bleiben unverändert - zu erwarten:

- Die Nettorisikoprämienrate bleibt unverändert, da sie nicht von p abhängig ist.
- Je größer der Stop-Loss-Point gewählt wird, desto kleiner ist der maximale Gesamtschaden für den Rückversicherer.
- Eine Konsequenz aus dem obigen Punkt ist, dass natürlich auch die Risikorückversicherungsprämie für größer werdende Stop-Loss-Points kleiner wird.

Untenstehende Tabelle bestätigt die Vermutung.

Max. GS in €	p	Max. GS RV in €	NRPR	RV-Pr. in €
10.000.000	0,5	5.000.000	0,923	4.616.742
10.000.000	0,65	3.500.000	0,923	3.231.719
10.000.000	0,75	2.500.000	0,923	2.308.371
10.000.000	0,85	1.500.000	0,923	1.385.022
10.000.000	0,9	1.000.000	0,923	923.348

Tabelle 7.2: Veränderungen der entscheidenden Größen bei Variation des Stop-Loss-Points

7.2.3 Veränderung des Durchschnittsalters

Zuletzt wird in dieser Arbeit analysiert, welche Auswirkungen eine Veränderung des Durchschnittsalters des Bestands auf die entscheidenden Größen des Stop-Loss-Rückversicherungsvertrags eines Erlebensversicherungsbestands hat.

Es werden folgende Parameter gewählt:

- Der Stop-Loss-Point wird für diese Analyse bei $p = 0,85$ fixiert.
- Der maximale Gesamtschaden sei 10.000.000 € - daraus folgt, dass der maximale Gesamtschaden für die Rückversicherung 1.500.000 € beträgt.

Es werden nun Änderungen bei diesen Werten erwartet:

- Nettorisikoprämienrate
- Risikorückversicherungsprämie

Durchschnittsalter	NRPR	RV-Pr. in €
40	0,8509	1.276.275
55	0,5131	769.709
60	0,3848	577.180
75	0,019	28.761

Tabelle 7.3: Änderung des Durchschnittsalters des Bestands

Die Nettorisikoprämienrate sinkt und in weiterer Folge auch die Risikorückversicherungsprämie, wenn das Durchschnittsalter im Bestand ansteigt. Dieser Effekt ist leicht einzusehen, da statistisch gesehen gilt: Je älter die Menschen sind, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie noch ein gesamtes Jahr überleben. Diese Aussage ist noch ein wenig zu präzisieren - diese Behauptung gilt erst ab dem 30. Lebensjahr, davor ist die Sterbewahrscheinlichkeit nicht streng monoton wachsend. Dieser Effekt ist allerdings schon in Kapitel 6 behandelt worden.

8 | Fazit

Zu Beginn dieser Arbeit sind mehrere Einteilungskriterien für die Rückversicherung vorgestellt worden. Die für diese Arbeit wichtigste Klassifikation ist jene in proportionale und nicht-proportionale Rückversicherungsverträge.

Bei proportionalen Rückversicherungsverträgen werden sowohl die Prämien als auch die Schäden in einem proportionalen Verhältnis geteilt. Bei den nicht-proportionalen Rückversicherungsverträgen steht die Rückversicherungsprämie in keinem direkt ersichtlichen Zusammenhang zur Erstprämie. Es gibt für diese Form der Rückversicherung verschiedene Formen der Risikorückversicherungsprämienbestimmung. Welches Verfahren angewandt wird, hängt von den vorhandenen Daten aus der Vergangenheit ab.

Bei der Rückversicherung von Lebensrisiken werden in der Praxis häufiger proportionale Rückversicherungsverträge angewandt, besonders relevant ist die sogenannte Jährlich-Erneuernde-Rückversicherung, bei welcher das Mortalitätsrisiko an den Rückversicherer abgegeben wird. Die Risikoprämie hat jedes Jahr neu berechnet zu werden, da einerseits Rückversicherungsverträge grundsätzlich bloß auf ein Jahr abgeschlossen werden und da andererseits die Sterbewahrscheinlichkeit q_x , welche den zweiten Faktor neben dem Diskontierungsfaktor v bei der Berechnung der Risikorückversicherungsprämie bildet, jedes Jahr schwankt. Diese Form von Verträgen kommt häufig bei Ablebens- und Gemischten Versicherung zum Einsatz.

Es ist aber auch möglich, Lebensversicherungsverträge mit den nicht-proportionalen Methoden der Sachversicherung rückzuversichern. Großer Vorteil der Lebens- gegenüber der Sachversicherung ist in diesem Zusammenhang, dass die Schadenhöhen deterministisch sind. Es wird im Voraus im Versicherungsvertrag vereinbart, wie hoch die Versicherungssumme, welche der Schadenzahlung vom Versicherer an die versicherte Person bei Eintritt des Versicherungsfalls entspricht, sein wird. Diese Form von Rückversicherungsverträgen wird häufig zusätzlich zu proportionalen abgeschlossen, um sich gegen extreme Schadenereignisse abzusichern. Unter extremen Schadenereignissen versteht man zum Beispiel eine Naturkatastrophe, bei welcher zahlreiche Menschen mit Ablebensversicherungen ihr Leben lassen. Doch auch Erlebensversicherungsverträge können mit nicht-proportionalen Methoden rückversichert werden, schließlich ist es auch möglich, dass es aufgrund neuer Medikamente oder Ähnlichem zu einem plötzlichen Sinken der Sterbewahrscheinlichkeit kommt.

Das in dieser Arbeit implementierte Beispiel hat aber auch gezeigt, dass die Erstversicherer nicht unbedingt einen Teil ihres Geschäfts in Rückversicherung geben muss. Es kann auch einen Sicherheitszuschlag auf die Erstprämien geben. Dies macht die Verträge zwar für die versicherten Personen teurer, führt aber auch dazu, dass der Erstversicherer sich selbst besser absichert.

Auf Optimalitätskriterien wird in dieser Arbeit nicht eingegangen. Es wäre ein möglicher For-

schungsschwerpunkt für die Zukunft zu untersuchen, ab wann es sich für Erstversicherer rechnet, einen Teil ihres Geschäfts in Rückversicherung zu geben und wann es einfach besser ist, die Prämien mit einem gewissen Sicherheitszuschlag zu berechnen.

Literaturverzeichnis

- [AT06] ALBRECHER, Hansjörg ; TICHY, R: Finanz-und Versicherungsmathematik 1. In: *Skriptum, TU Graz* (2006)
- [Aus02] AUSTRIA, Statistik: *Sterbetafel für Österreich 2000/02*. 2002
- [Car83] CARTER, R. L.: *Reinsurance*. 2nd Edition. Springer, 1983
- [Dum17] DUM, Karl: *Rückversicherung*. Vorlesungsmitschrift TU Wien, Sommersemester 2017
- [Ger97] GERBER, Hans U.: *Life Insurance Mathematics*. 3rd Edition. Springer, 1997
- [GZ08] GRANDITS, Peter ; ZWIRCHMAYER, Alexander: *Sachversicherungsmathematik*. Skriptum zur Vorlesung, 2008
- [hrz] <https://derstandard.at/2000045000362/Lebensversicherung-Garantiezins-sinkt-auf-0-5-Prozent>
- [KSS09] KUSOLITSCH, Norbert ; SCHACHERMAYER, Walter ; SCHMOCK, Uwe: *Lebensversicherungsmathematik*. TU Wien : Skriptum zur Vorlesung, 2009
- [Pfe99] PFEIFFER, Christoph: *Einführung in die Rückversicherung*. 5. Auflage. Gabler, 1999
- [Rhe17] RHEINLÄNDER, Thorsten: *Höhere Lebensversicherungsmathematik*. Vorlesungsmitschrift TU Wien, Sommersemester 2017
- [Son17] SONNLEITNER, Mario: *Prämienkalkulationsprinzipien*, TU Wien, Diplomarbeit, 2017
- [sum] <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/summenexzedentenrueckversicherung.html>
- [vaga] <https://www.jusline.at/gesetz/vag/paragraf/4>
- [vagb] <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20009095>
- [vvg] <https://dejure.org/gesetze/VVG>
- [vvgb] <https://www.admin.ch/opc/de/classified-compilation/19080008/index.html>
- [vvgc] <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10001979>
- [yrt] <http://www.canadalifere.com/004/Resources/ReinsuranceGlossary/index.htm>

ANHANG

A | Numerische Implementierung

In Kapitel 6 und 7 wurde mittels verschiedener Simulationen untersucht, welche Auswirkungen eine Änderung in der Kalkulation der Erstprämie auf die Rückversicherungsprämie hat. Um diese Analysen durchführen zu können, ist die Berechnung der Rückversicherungsprämie für die verschiedenen Versicherungsarten zu implementieren gewesen.

A.1 Exakte Vorgehensweise

In diesem Abschnitt wird beschrieben, in welchen Schritten genau vorgegangen worden ist, welches Programm verwendet worden ist und welche Sterbetafel allen Modellen zugrunde gelegt worden ist.

Es ist die Microsoft Office 2017, genau das Programm *Excel* verwendet worden, Basis für die Berechnungen hat die Sterbetafel [Aus02] gebildet.

Die Implementierung ist in folgenden Schritten erfolgt:

1. Importieren der Sterbetafel [Aus02] in Excel.
2. Berechnen der benötigten Kommutationszahlen aus der Sterbetafel (vgl. Abschnitt A.2).
3. Erstellung einer Maske, in der alle variablen Parameter eingestellt werden können. In dem in dieser Arbeit betrachteten Modell sind dies die Folgenden:
 - Alter x der versicherten Person
 - Geschlecht der versicherten Person
 - Laufzeit n des Versicherungsvertrags
 - Versicherungssumme - also jene Leistung, die die versicherte Person von dem Versicherer im Falle des Eintretens des Versicherungsfalles bekommt
 - Verzinsung in Prozent
 - Sicherheitszuschlag λ
4. Berechnung des Prämienbarwerts mithilfe der Kommutationszahlen (vergleiche Formel A.9).
5. Nachdem diese allgemein relevanten Berechnungen durchgeführt worden sind, wurden die vertragsspezifische Größen für jeden Vertrag getrennt berechnet. Diese sind:
 - Die Erstversicherungsprämie mithilfe verschiedenster Ansätze für einen x -jährigen Versicherten und Laufzeit n .
 - Der Prämienbarwert und die Nettoeinmalprämie für alle Jahre $k = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

- Das Deckungskapitals wie in Abschnitt 4.1 und in Abschnitt 5.1 beschrieben.
- Die Risikosumme nach Formel 4.5.
- Die Nettorisikoprämienrate gemäß Formel 4.1.
- Die Risikorückversicherungsprämie, welche mittels Formel 4.2 eingeführt worden ist.

A.2 Kommutationszahlen

Folgender Abschnitt soll einen kurzen Überblick über die wichtigsten Kommutationszahlen, welche auch für die Implementierung verwendet worden sind, geben und beruht auf [AT06].

Kommutationszahlen sind versicherungsmathematische Hilfsgrößen. Manche von ihnen sind in der Sterbetafel tabelliert, andere lassen sich leicht aus denjenigen, die in der Sterbetafel angeführt sind, berechnen.

Folgende Hilfsgrößen sind in der Sterbetafel tabelliert:

- Die *Anzahl aller Lebenden des Alters x* wird mit l_x bezeichnet.
- Die Anzahl derjenigen, die das Alter x erleben, das Alter $x + 1$ aber nicht, wird mit d_x bezeichnet und ist definiert als $d_x = l_x - l_{x+1}$.

Aus diesen beiden Kommutationszahlen erhält man sowohl die t -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x -Jährigen - also ${}_t p_x$ - als auch die 1-jährige Sterbewahrscheinlichkeit eines $x + k$ -Jährigen - also q_{x+k} .

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}, \quad (\text{A.1})$$

$$q_{x+k} = \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}}. \quad (\text{A.2})$$

Es werden nun zwei weitere Kommutationszahlen eingeführt werden, welche bei Kenntnis des Diskontierungsfaktors v direkt aus den Formeln A.1 und A.2 berechnet werden können.

- Die *diskontierte Zahl der Lebenden des Alters x* wird mit D_x bezeichnet und berechnet sich als

$$D_x = v^x l_x. \quad (\text{A.3})$$

- Die *diskontierte Zahl der Toten des Alters x* wird mit C_x bezeichnet und berechnet sich als

$$C_x = v^{x+1} d_x. \quad (\text{A.4})$$

Nun ist es möglich, die in Formel A.3 beziehungsweise A.4 definierten Kommutationszahlen, bis zum angenommenen Höchstalter ω zu summieren.

- Die *aufsummierte diskontierte Zahl der Lebenden des Alter x* ist wie folgt definiert:

$$N_x := \sum_{i=x}^{\omega} D_i. \quad (\text{A.5})$$

- Die *aufsummierte diskontierte Zahl der Toten des Alters x* ist wie folgt definiert:

$$M_x := \sum_{i=x}^{\omega} C_i. \quad (\text{A.6})$$

Mithilfe der nun eingeführten Kommutationszahlen lassen sich die Nettoeinmalprämien und der Prämienbarwert kompakt darstellen und auch leicht in Excel implementieren.

Erlebensversicherung Die Nettoeinmalprämie der Erlebensversicherung ist in Formel 5.6 definiert. Wendet man nun Formel A.1 und Formel A.3 an, so erhält man durch elementares Umformen:

$$\begin{aligned} {}_nE_x &= v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} && \text{[Erweitern mit } v^x\text{]} \\ &= \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x} && \text{[Formel A.3 anwenden]} \\ &= \frac{D_{x+n}}{D_x}. && (\text{A.7}) \end{aligned}$$

Ablebensversicherung Auch die in Formel 5.3 definierte Nettoeinmalprämie der Ablebensversicherung lässt sich mittels Kommutationszahlen ausdrücken. Zu Beginn werden die Formeln A.1 und A.2 angewandt.

$$\begin{aligned} |{}_nA_x &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \frac{l_{x+k}}{l_x} \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} && \text{[} l_{x+k} \text{ kürzen und mit } v^x \text{ erweitern]} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v^{x+k+1} d_{x+k}}{v^x l_x} && \text{[Formel A.3 und A.4 anwenden]} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{x+k}}{D_x} && \text{[von } k \text{ unabhängige Glieder aus der Summe ziehen]} \\ &= \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{n-1} C_{x+k} && \text{[Formel A.6 anwenden]} \\ &= \frac{1}{D_x} (M_x - M_{x+n}). && (\text{A.8}) \end{aligned}$$

Gemischte Versicherung Die Gemischte Versicherung ist die Summe aus einer Er- und einer Ablebensversicherung. Analog zu Formel 5.9 lässt sich die Nettoeinmalprämie auch als Summe aus Formel A.7 und Formel A.8 darstellen.

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Prämienbarwert Die Summenformel, welche den Diskontierungsfaktor und die Überlebenswahrscheinlichkeit beinhaltet, ist bereits in Formel 5.1 eingeführt worden. Wendet man nun Beziehung A.1 an, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} && \text{[mit } v^x \text{ erweitern]} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v^{x+k} l_{x+k}}{v^x l_x} && \text{[Formel A.3 anwenden]} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{x+k}}{D_x} && \text{[von } k \text{ unabhängige Glieder aus der Summe ziehen]} \\
&= \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{n-1} D_{x+k} && \text{[Formel A.5 anwenden]} \\
&= \frac{1}{D_x} (N_x - N_{x+n}). && \text{(A.9)}
\end{aligned}$$