



**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN**

Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Valuation Portfolio für fondsgebundene Erlebensversicherungen

ausgeführt am
Institut für Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von
Univ.-Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer

durch
Lisa Wagner, BSc
Rieggers 7
3931 Schweiggers

August 2014

Eidstaatliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel erstellt zu haben.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Wien, August 2014

Lisa Wagner

Gender Erklärung

Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gendergerechte Formulierung verzichtet. Die Ausdrücke sind dennoch geschlechtsneutral zu verstehen.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe	3
1.1	Lebensversicherung	3
1.1.1	Prämienzahlung	3
1.1.2	Leistungszahlung	3
1.1.3	Versicherungstechnische Rückstellungen	4
1.1.4	Kategorisierung der Lebensversicherung	4
1.2	Fondsgebundene Lebensversicherung	4
1.2.1	Vorteile der fondsgebundenen Lebensversicherung	5
1.3	Solvabilität	6
1.3.1	Buchhalterische Bedingung	6
1.3.2	Versicherungsvertragsbedingung	7
1.4	Finanzielle Grundbegriffe	7
1.4.1	Bewertung versicherungstechnischer Rückstellungen	7
1.4.2	Basisinstrument und Basisfinanzinstrument	7
2	Grundbegriffe für die Modellierung	8
2.1	Notation	8
2.1.1	Versicherungszahlungen	8
2.1.2	Bewertung und Hedging	8
2.1.3	Wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffe	8
2.2	Bewertungsmethoden	9
2.2.1	Bewertungsansatz	9
2.2.2	State Price Deflator	10
2.3	Bewertung des Zahlungsstromes \mathbf{X} zum Zeitpunkt 0	11
2.4	Bewertung des Zahlungsstromes \mathbf{X} zum Zeitpunkt t	11
3	Finanzielle und Aktuarielle Modellierung	12
3.1	Nullkuponanleihe	12
3.2	Vasicek-Modell	13
3.3	Finanzmarkt und finanzielle Modellierung	15
3.3.1	Hedging Portfolio und Eigenschaften	15
3.4	Das Versicherungsportfolio und die aktuarielle Modellierung	17
3.5	Kombination der finanziellen und aktuariellen Modellierung	19
4	Versicherungstechnischer Zahlungsstrom	20
4.1	Der versicherungstechnische Teil	21
4.1.1	Die Risikomarge	23
4.2	Finanzieller Deflator für den Aktienpreisprozess	23

5	Föllmer-Sondermann-Ansatz	27
5.1	Satz von der orthogonalen Projektion	27
5.2	Föllmer-Sondermann-Ansatz	28
5.3	Anwendung in der fondsgebundenen Lebensversicherung	31
5.3.1	Erlebensversicherung - Allgemeiner Fall	31
6	Valuation Portfolio	38
6.1	Allgemeines	38
6.2	Föllmer-Sondermann-Ansatz	39
6.3	Modellannahmen	41
6.4	Schritte zur Konstruktion des VaPos	42
7	Numerisches Beispiel für das Valuation Portfolio	45
7.1	Bemerkung	45
7.2	Allgemeines	45
7.3	Sterbewahrscheinlichkeit und Sterbeintensität	46
7.4	Zählprozess des Todes	46
7.5	Modellierung der Zinskurve auf eine NKP	47
7.5.1	Historische Daten: Euribor	47
7.5.2	Aktuelle Marktdaten	48
7.5.3	Parameterwahl durch historische Daten	48
7.5.4	Parameterwahl durch Kalibrierung an aktuellen Marktdaten	51
7.6	Aktienpreisprozess	52
7.7	Bankkonto und diskontierter Aktienpreisprozess	53
7.8	Berechnung des monetären Wertes des VaPos	54
7.8.1	Berechnung des monetären Wertes des hegbaren Teil	54
7.8.2	Berechnung des monetären Wertes des nicht-hedgebaren Teils	56
7.8.3	Berechnung des intrinsischen Risikoprozesses	56
7.8.4	Berechnung des monetären Wertes und der best-estimate Reserve	58
8	Protected Valuation Portfolio	60
8.1	Allgemeines	60
8.2	Wahrscheinlichkeitsdistortion mittels Esscher-Prämie	60
8.2.1	Risikofaktoren und Eigenschaften	60
8.2.2	Wahrscheinlichkeitsdistortion mittels Esscher-Prämie	62
8.2.3	Die Fortuin-Kasteleyn-Ginibre (FKG) Ungleichung	64
8.2.4	Berechnung des wahrscheinlichkeitsdistortierten versicherungs- technischen Prozesses	65
8.3	Föllmer-Sondermann-Ansatz	66
8.4	Modellannahmen	67

8.5 Schritte zur Konstruktion des Protected VaPos	67
---	----

Abbildungsverzeichnis

1	Zählprozess des Todes N_t	18
2	Gegenüberstellung der Aktiva und Passiva (VaPo); Nachahmung von Fig. 7.1. aus [21, S.170]	38
3	Sterbewahrscheinlichkeiten und Sterbeintensitäten basierend auf der Sterbetafel 2012 unisex aus [2]	47
4	Euribor mit einer Maturität von 1 Monat	48
5	Zins auf eine Nullkuponanleihe mit verschiedenen Maturitäten basierend auf Marktdaten	49
6	Zins auf eine Nullkuponanleihe mit verschiedenen Maturitäten basierend auf Modell- und Marktdaten	52
7	Euribor mit einer Maturität von 1 Monat und prognostizierter Zins	53
8	Verlauf des Aktienpreisprozesses und des diskontierten Aktienpreisprozesses	54
9	Verlauf des monetären Wertes des hedgebaren Teils	55
10	Verlauf des monetären Wertes des nicht-hedgebaren Teils	57
11	Verlauf des intrinsischen Risikoprozesses	58
12	Verlauf des monetären Wertes und der best-estimate Reserve	59
13	Gegenüberstellung der Aktiva und Passiva (VaPo ^{prot}); Nachahmung von Fig. 8.1. aus [21, S.208]	61

Tabellenverzeichnis

1	Grobe Übersicht über die Aktiv- und Passivseite der Bilanz eines Versicherungsunternehmens nach [3]	6
---	---	---

Einführung

Die Motivation für die Diplomarbeit „Valuation Portfolio für fondsgebundene Erlebensversicherungen“ bildet die Solvenzbewertung eines Versicherungsunternehmens. Nach der von der EU stammenden „RICHTLINIE 2009/138/EG DES EUROPÄISCHEN PARLAMENTS UND DES RATES vom 25. November 2009 betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität II)“, auch Solvency II genannt, soll solch eine Bewertung der Solvenz eines Unternehmens marktkonsistent durchgeführt werden. Das Problem hierbei ist jedoch, dass für die versicherungstechnischen Verbindlichkeiten keine Marktwerte zur Verfügung stehen, sodass der versicherungstechnische Zahlungsstrom mithilfe eines Modells nachgeahmt werden muss. Das dazu verwendete Modell zur Ermittlung dieser modellbasierten Marktwerte wird Valuation Portfolio genannt. Da in dieser Arbeit das Portfolio aus fondsgebundenen Erlebensversicherungen (ohne Garantie) besteht, ist dieses Modell einem finanziellen Risiko (Schwankungen der Aktienkurse, wenn Fonds in Aktien veranlagt werden) als auch einem Langlebkeitsrisiko (Überlebenswahrscheinlichkeiten der Versicherungsnehmer im Portfolio) ausgesetzt und daher unvollständig. Folgernd können die versicherungstechnischen Zahlungsströme durch Basisfinanzinstrumente nicht risikolos repliziert werden. Es entsteht ein Restrisiko, das mit dem Ansatz von Föllmer und Sondermann minimiert werden kann.

Die Arbeit ist vor allem eine Zusammenspiel der vorhandenen Resultate aus [21] und [14]. In [21] gibt es zwar schon Beispiele zur Konstruktion des Valuation Portfolios, jedoch nicht für ein unvollständiges Modell. Ein großer Unterschied im Bezug auf [21] ist außerdem, dass der State Price Deflator in stetiger Zeit konstruiert wird, da die Preisprozesse der Basisfinanzinstrumente in stetiger Zeit betrachtet werden.

Die Einteilung der Arbeit erfolgt in acht Abschnitten. Im ersten Abschnitt werden Grundbegriffe wie „fondsgebundene Lebensversicherung“, „Solvabilität“ und „Bewertung von versicherungstechnischen Rückstellungen“ aus der ökonomischen und rechtlichen Sichtweise definiert und beschrieben. Der zweite Abschnitt führt mathematische Begriffe basierend auf [21] für die spätere Modellierung ein.

Nach der Einführung der Begriffe, wird das finanzielle und das aktuarielle Modell konstruiert. Dies erfolgt in Anlehnung an [17], [6], [16], [15], [21] und [18]. Weitere wichtige Begriffe für die Bildung des Valuation Portfolios wie „best-estimate Reserven“ und „Risikomarge“ werden in dem Abschnitt „Versicherungstechnischer Zahlungsstrom“ basierend auf [21] eingeführt.

Der fünften Abschnitt widmet sich dem Ansatz von Föllmer und Sondermann nach [14], da dieser für die Minimierung des Restrisikos, das aus der Replikation des versicherungstechnischen Zahlungsstromes durch Basisfinanzinstrumente entsteht,

von Bedeutung ist. Im folgenden Abschnitt wird das Valuation Portfolio für die fondsgebundene Erlebensversicherung basierend auf [21] und den aus den vorigen Abschnitten gewonnenen Resultaten eingeführt. Valuation Portfolio bedeutet jedoch, dass für die Wahrscheinlichkeitsdistortion eine vereinfachte Annahme getroffen wird. Nach dem theoretischen Teil wird im siebten Abschnitt ein numerisches Beispiel für die Berechnung eines Valuation Portfolios durchgeführt. Der letzte Abschnitt „Protected Valuation Portfolio“ widmet sich der Konstruktion der Wahrscheinlichkeitsdistortion mittels der Esscher-Prämie nach [21] und damit des Protected Valuation Portfolios nach [21].

1 Grundbegriffe

1.1 Lebensversicherung

In der Lebensversicherung, eine Sparte der Personenversicherung, ist „das Leben des Versicherungsnehmers Gegenstand der Versicherung“ [19, S.82]. Bei Vertragsabschluss dieser speziellen Form von Versicherung gilt das allgemeine Prinzip: Der Versicherungsnehmer zahlt an das Versicherungsunternehmen die im Versicherungsvertrag vereinbarte Prämie und erhält bei Eintritt des Versicherungsfalles vom Versicherungsunternehmen die vereinbarte Leistung.

1.1.1 Prämienzahlung

Die Prämie kann zwischen der Einmalprämie, eine einmalige Zahlung nach Versicherungsvertragsabschluss, und der laufenden Prämie, mehrmalige äquidistante Zahlungen für einen begrenzten Zeitraum, unterschieden werden.

Im weiteren Verlauf wird angenommen, dass es sich bei einer Prämienzahlung um eine Einmalprämie handelt.

1.1.2 Leistungszahlung

Beim Gebrauch des Begriffes „Lebensversicherung“ wird meistens von einer gemischten Lebensversicherung ausgegangen. Diese setzt sich aus Erlebens- und Ablebensversicherung zusammen. Bei der Erlebensversicherung ist der Eintrittszeitpunkt des Versicherungsfalles das Erreichen des im Vertrag vereinbarten Alters der versicherten Person und bei der Ablebensversicherung der Todesfall dieser Person. Der Eintrittszeitpunkt des Versicherungsfalles bei einer gemischten Versicherung ist das Minimum aus den Eintrittszeitpunkten der Erlebens- und Ablebensversicherung.

Betreffend Leistungsauszahlung wird die Lebensversicherung auch Summenversicherung genannt. „Hierbei erbringt der Versicherer die vereinbarte Versicherungssumme, ohne dass es auf einen konkreten Schaden oder konkreten Bedarf des Versicherten ankommt.“ [19, S.13]

Für die Bildung des (Protected) Valuation Portfolios wird angenommen, dass es sich bei der betrachteten fondsgebundenen Lebensversicherung um eine Erlebensversicherung handelt.

1.1.3 Versicherungstechnische Rückstellungen

Die Deckungsrückstellung ist ein Teil der versicherungstechnischen Rückstellungen, die eine Position auf der Passivseite der Bilanz eines Versicherungsunternehmens einnimmt. Sie ist die „Versicherungstechnische Rückstellung zur Sicherung künftiger Leistungsansprüche in Versicherungszweigen, soweit diese nach Art der Lebensversicherung betrieben werden.“ [11] Die versicherungstechnischen Rückstellungen „sind insoweit zu bilden, wie dies nach Vernünftiger kaufmännischer Beurteilung notwendig ist, um die dauernde Erfüllbarkeit der Verpflichtungen aus den Versicherungsverträgen zu gewährleisten.“ [12, S.422, §81i Abs.1 VAG]

Im weiteren Verlauf wird anstatt „versicherungstechnische Rückstellungen“ auch der Begriff „versicherungstechnische Verbindlichkeiten“ verwendet.

1.1.4 Kategorisierung der Lebensversicherung

Die vom Versicherungsnehmer erhaltene Prämie kann vom Versicherungsunternehmen abhängig vom Versicherungsvertrag auf verschiedene Arten veranlagt werden. Aufgrund dieser Veranlagung kann die Lebensversicherung in verschiedene Kategorien unterteilt werden:

- Klassische Lebensversicherung
- Fondsgebundene Lebensversicherung
- ...

Auf andere Arten oder auch Spezialfälle der Lebensversicherung wird hier nicht näher eingegangen, da diese in dieser Arbeit nicht von Bedeutung sind.

1.2 Fondsgebundene Lebensversicherung

Schließt der Versicherungsnehmer eine fondsgebundene Lebensversicherung ab, so wird die erhaltene Prämie in Investmentfondsanteile investiert. Nach dem österreichischen Versicherungsrecht ist für das Versicherungsunternehmen schließlich folgende Deckungsrückstellung für zukünftige Leistungsauszahlungen zu bilden.

„Deckungsrückstellung: sind die Ihrer fondsgebundenen Lebensversicherung zu Grunde liegenden Investmentfondsanteile. Wir ermitteln deren Geldwert, indem wir die Anzahl der Fondsanteile je Investmentfonds mit dem am Stichtag uns zur Verfügung gestellten Kurswert des jeweiligen Investmentfonds multiplizieren.“ [12, S.207]

Weiters ist im österreichischen Versicherungsrecht die jeweilige Leistungszahlung, sowohl im Erlebensfall als auch im Ablebensfall, definiert.

„Im Erlebensfall leisten wir den Geldwert der Deckungsrückstellung.“ [12, S.208, §1 Abs.1.2.]

„Bei Ableben des Versicherten leisten wir mindestens die in der „Versicherungsurkunde“¹ angegebene Todesfallsumme. In der „Versicherungsurkunde“ ist angegeben wie sich die Leistung im Ablebensfall erhöht, wenn die Deckungsrückstellung größer als die Todesfallsumme ist.“ [12, S.208, §1 Abs.1.1.]

In dieser Arbeit wird die Annahme getroffen, dass nur in einen Investmentfonds investiert wird und dass das darin enthaltene Geld in eine Aktie veranlagt wird.

Für die Bildung des (Protected) Valuation Portfolios wird angenommen, dass es sich bei der betrachteten fondsgebundenen Lebensversicherung um eine Erlebensversicherung ohne garantierter Auszahlung handelt.

1.2.1 Vorteile der fondsgebundenen Lebensversicherung

Warum sollte eine fondsgebundene Lebensversicherung anstatt einer klassischen Veranlagung in Aktienfonds oder einer klassischen Lebensversicherung gewählt werden? Die Grundlage für die Beantwortung bieten die Ideen aus [18].

Vorteile für Versicherungsnehmer:

- Investitionen in Aktienmärkte können bessere Langzeitrendite als festverzinsliche Anleihen aufweisen.
- Es besteht ein geringeres Risiko gegenüber einer reinen Investition in Aktienfonds, da häufig eine Mindestauszahlung garantiert wird.
- Fondsgebundene Lebensversicherungen sind oftmals steuerlich begünstigt im Vergleich zu reinen Aktienfonds.

Vorteile für Versicherungsunternehmen:

- Investmentrisiko wird vom Versicherungsnehmer getragen, wobei zu berücksichtigen ist, dass im Ablebensfall bei Kursen unter der garantierten Mindestauszahlung, ein Risiko für das Versicherungsunternehmen entsteht. Das Versicherungsunternehmen hat sich gegen dieses Risiko abzusichern.
- Erweiterung des Kundensegments durch die steuerlich attraktive Anlage und das größere Angebot an Produkten.

¹auch: Versicherungsvertrag

1.3 Solvabilität

Für ein Unternehmen² ist die Betrachtung der Solvenz eines der wichtigsten Kernthemen, da diese Aussagen über das (weitere) Bestehen dieser Institution liefert. Doch wie erkennen wir, ob ein Unternehmen solvent oder insolvent ist? Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die Bilanz eines Unternehmens, die sich in Aktiva und Passiva unterteilen lässt.

Die folgende Tabelle zeigt in groben Zügen die einzelnen Positionen der Bilanz eines Versicherungsunternehmens nach [3].

Aktiva	Passiva
A. Immaterielle Vermögensgegenstände	A. Eigenkapital
B. Kapitalanlagen	B. Unversteuerte Rücklagen
C. Kapitalanlagen der fondsgeb. LV	C. Nachrangige Verbindlichkeiten
D. Forderungen	D. Versicherungstechn. Rückstellungen im Eigenbehalt
E. Anteilige Zinsen und Mieten	E. Versicherungstechn. Rückstellungen der fondsgeb. LV
F. Sonstige Vermögensgegenstände	F. Nichtversicherungstechn. Rückstellungen
G. Verrechnungsposten der Zentrale	G. Depotverbindlichkeiten aus dem abgegebenen RV-geschäft
H. Rechnungsabgrenzungsposten	H. Sonstige Verbindlichkeiten
I. Verrechnungsposten zwischen den Abteilungen	I. Verrechnungsposten mit der Zentrale
	J. Rechnungsabgrenzungsposten

Tabelle 1: Grobe Übersicht über die Aktiv- und Passivseite der Bilanz eines Versicherungsunternehmens nach [3]

In den nächsten zwei Unterunterabschnitten werden die zwei notwendigen Bedingungen aus [21] für die Solvenz einer Institution beschrieben. Sind beide erfüllt, so ist das Unternehmen solvent. Für eine genauere Beschreibung der Solvabilität wird auf [21, S.4/5] verwiesen.

1.3.1 Buchhalterische Bedingung

Um die gegenwärtige Solvenz eines Versicherungsunternehmens zu überprüfen, müssen nach [21, S.4] die Aktiva die Passiva decken, das heißt die Aktiva müssen einen höheren Wert als die Passiva aufweisen. Wenn das gilt, dann ist die sogenannte „Buchhalterische Bedingung“ erfüllt.

Den Wert der einzelnen Position erhalten wir bei gehandelten Instrumenten durch ihre Marktwerte und bei nicht-gehandelten durch Marktwerte, die aus einem Modell hervorgehen.

Wichtig hierbei ist, dass die Positionen der Aktiva und der Passiva gleichzeitig und unter dem gleichen Maß bewertet werden. Dies wird in [21, S.3/4] auch „Ansatz der ganzheitlichen Bilanzbetrachtung“ genannt.

²hier: Versicherungsunternehmen

1.3.2 Versicherungsvertragsbedingung

Die „Versicherungsvertragsbedingung“ ist nach [21, S.4] dann gegeben, wenn die Solvabilität für alle Zeitpunkte in der Zukunft erfüllt ist. Das heißt, die Passiva dürfen gegenüber den Aktiva zu keinem zukünftigen Zeitpunkt einen höheren Wert aufweisen.

Da die zukünftigen Werte aber zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht bekannt sind, müssen diese stochastisch modelliert werden. Hierbei gilt nach [21] wieder, dass diese Modellierung für alle Bilanzpositionen gleichzeitig und konsistent durchgeführt werden muss.

Die Versicherungsvertragsbedingung ist nach [21] dann erfüllt, wenn bei dieser stochastischen zukünftigen Betrachtung die Passiva die Aktiva nie übersteigen.

1.4 Finanzielle Grundbegriffe

1.4.1 Bewertung versicherungstechnischer Rückstellungen

Die „RICHTLINIE 2009/138/EG DES EUROPÄISCHEN PARLAMENTS UND DES RATES vom 25. November 2009 betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität II)“ bildet die Grundlage für die Bewertung von versicherungstechnischen Rückstellungen. Der Begriff „Marktkonsistenz“ ist ein wichtiger Bestandteil für diese Bewertung und ist im Artikel 76(3) der Richtlinie [13] definiert durch: „Die Berechnung versicherungstechnischer Rückstellungen erfolgt unter Berücksichtigung der von den Finanzmärkten bereitgestellten Informationen sowie allgemein verfügbarer Daten über versicherungstechnische Risiken und hat mit diesen konsistent zu sein (Marktkonsistenz).“

Wichtige Begriffe für die Bildung des Valuation Portfolios wie zum Beispiel „best-estimate“ oder „Risikomarge“ sind ebenfalls in der erwähnten Richtlinie enthalten.

1.4.2 Basisinstrument und Basisfinanzinstrument

Ein Basisinstrument ist „der Gegenstand, auf den sich ein Optionsgeschäft bezieht. Das kann zum Beispiel ein Wertpapier wie eine Aktie sein oder eine bestimmte Menge an Rohstoffen, Energie oder Devisen“ [7]. Ein handelbares Basisinstrument heißt Basisfinanzinstrument.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, werden nach [21] die versicherungstechnischen Verbindlichkeiten durch Basisfinanzinstrumente repliziert. Die Absicherung des versicherungstechnischen Risikos mithilfe von Finanzinstrumenten wird auch „Hedging“ genannt.

2 Grundbegriffe für die Modellierung

Um das Valuation Portfolio (VaPo) für eine fondsgebundene Lebensversicherung konstruieren zu können, müssen im Vorhinein die zugehörigen Begriffe definiert und erklärt werden. Die allgemeine Konstruktion des Valuation Portfolios basiert auf „Financial Modeling, Actuarial Valuation and Solvency in Insurance“ von Wüthrich und Merz [21]. Daher werden die folgenden Notationen, Definitionen, Begriffserklärungen und Aussagen mit denen aus dem Buch stammenden beinahe übereinstimmen. Ein Unterschied ist jedoch, dass die Bewertung in stetiger Zeit erfolgt und daher die Begriffe dementsprechend adaptiert werden.

Um eine bessere Übersicht zu gelangen, werden die Begriffe mit den zugehörigen Seiten aus dem Buch [21] versehen.

2.1 Notation

2.1.1 Versicherungszahlungen³

Die Laufzeit der Versicherung ist $T \in \mathbb{N}$, wobei die Zahlungen zu den diskreten Zeitpunkten $k \in \mathcal{J} = \{0, 1, \dots, T\}$ erfolgen können. Der Zahlungsstrom ist zu jedem Zeitpunkt $k \in \mathcal{J}$ durch $\mathbf{X} = (X_0, \dots, X_T)$ definiert, wobei X_k für $k \in \mathcal{J}$ die Zahlung zum Zeitpunkt k darstellt.

Schließlich ist noch zu klären, welche Zeitabstände die einzelnen Betrachtungszeitpunkte haben. Es handelt sich hierbei um eine jährliche Betrachtungsweise, das heißt die Auszahlungen können nur einmal im Jahr erfolgen. Es gilt:

$$t_k = k\delta \text{ für } k \in \mathcal{J} \text{ mit } \delta = 1$$

Für den Zahlungsstrom $\mathbf{X} = (X_0, \dots, X_T)$ wird $\mathbf{X} \in L_{T+1}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ angenommen.

2.1.2 Bewertung und Hedging

Die Bewertung der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten wird in stetiger Zeit durchgeführt. Das heißt, die Preisprozesse der Basisfinanzinstrumente, welche den versicherungstechnischen Zahlungsstrom replizieren sollen, sind stetig.

2.1.3 Wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffe⁴

Gegeben ist ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} und der Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ auf dem messbaren Raum (Ω, \mathcal{F}) .

³[21, S.19]

⁴[21, S.19/20]

$(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ ist eine Filtration, das heißt (\mathcal{F}_t) ist eine wachsende Folge von σ -Algebren auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, welche $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ für alle $s, t \in [0, T]$ mit $s < t$ erfüllt. Diese wachsende Folge symbolisiert ein Anwachsen an Information, das heißt, je später der Zeitpunkt, umso mehr Wissen ist gegeben. Zum Zeitpunkt 0 gilt daher $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und zum Zeitpunkt T , dass die vollständige Information in \mathcal{F}_T enthalten ist.

Die folgende Definition ist nach [21, Definition 2.9] gegeben durch:

Definition 2.1. Der Vektor $\mathbf{X} = (X_0, \dots, X_T)$ ist:

- $\mathbf{X} \geq 0$ (*nicht-negativ*) genau dann, wenn $X_k \geq 0$, \mathbb{P} -f.s. für alle $k \in \mathcal{J}$.
- $\mathbf{X} > 0$ (*positiv*) genau dann, wenn $\mathbf{X} \geq 0$ und ein $k \in \mathcal{J}$ existiert, sodass $\mathbb{P}(X_k > 0) > 0$.
- $\mathbf{X} \gg 0$ (*strikt positiv*) genau dann, wenn $X_k > 0$, \mathbb{P} -f.s. für alle $k \in \mathcal{J}$.

2.2 Bewertungsmethoden

Die Bewertungsmethoden basieren auf [21], das wiederum auf [9], [8] und [20] verweist.

Der Raum $L_{T+1}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ der quadratisch integrierbaren und \mathbb{F} -adaptierten Funktionen ist ein Hilbertraum⁵. Für den Zahlungsstrom $\mathbf{X} = (X_0, \dots, X_T)$ gilt $\mathbf{X} \in L_{T+1}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$.

2.2.1 Bewertungsansatz⁶

Um den Zahlungsstrom bewerten zu können, wird das Bewertungsfunktional nach [21] folgendermaßen definiert:

Definition 2.2. Angenommen \mathcal{Q} ist ein positives, stetiges und lineares Bewertungsfunktional mit Normalisierung $\mathcal{Q}[\mathbf{Z}^{(0)}] = 1^7$ auf $L_{T+1}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$. Nach der Anwendung des Riesz'schen Repräsentationstheorems, existiert ein \mathbb{P} -f.s. eindeutiger, \mathbb{F} -adaptierter und strikt positiver Zufallsvektor $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_0, \dots, \varphi_T) \in L_{T+1}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ mit $\varphi_0 \equiv 1$, sodass

$$\mathcal{Q}[\mathbf{X}] = \mathbb{E} \left[\sum_{k \in \mathcal{J}} \varphi_k X_k \right] \quad \forall \mathbf{X} \in L_{T+1}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$$

⁵Definition des Hilbertraumes: siehe S.27

⁶[21, S.20]

⁷ $\mathbf{Z}^{(0)}$ ist der Zahlungsstrom einer Nullkuponanleihe mit Laufzeit 0, näheres dazu: siehe S.12/13

gilt.

Aus der Definition ist erkennbar, dass es einen bijektiven Zusammenhang zwischen dem Bewertungsfunktional \mathcal{Q} und dem Zufallsvektor φ gibt. Das heißt, zu jedem Zahlungsstrom gibt es einen \mathbb{P} -f.s. eindeutigen Zufallsvektor φ , was bedeutet, dass nur unter diesem φ dieser Zahlungsstrom bewertet werden kann.

Des Öfteren ist die quadratische Integrierbarkeit eine zu strikte Voraussetzung für die Bewertung des Zahlungsstromes \mathbf{X} . Das führt uns zu dem State Price Deflator, welcher nur $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_n) \in L^1_{T+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$, strikt positiv und $\varphi_0 \equiv 1$ voraussetzt. Es ist anzumerken, dass wegen der L^p -Schachtelung die Inklusion $L^2_{T+1} \subseteq L^1_{T+1}$ gilt, das heißt L^1_{T+1} umfasst eine größere Menge von möglichen φ für die Bewertung des Zahlungsstromes \mathbf{X} .

2.2.2 State Price Deflator⁸

Der State Price Deflator ist nach [21, Definition 2.10] und in stetiger Zeit definiert durch:

Definition 2.3. *Angenommen $\varphi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ ist ein strikt positiver Zufallsvektor mit Normalisierung $\varphi_0 \equiv 1$. Dann wird φ und dessen Komponenten φ_t , $t \in [0, T]$, in der aktuariellen Mathematik **State Price Deflator** genannt.*

Dieser kann analog in diskreter Zeit $\varphi \in L^1_{T+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ definiert werden. Aus der Definition sind die Eigenschaften eines State Price Deflators φ ersichtlich.

Angenommen der State Price Deflator $\varphi \in L^1_{T+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ ist fixiert. Es ist noch zu klären, welche Zahlungsströme unter einem bestimmten φ bewertet werden können. Dazu definieren wir die Menge \mathcal{L}_φ nach [21] gegeben durch:

$$\mathcal{L}_\varphi := \left\{ \mathbf{X} \in L^1_{T+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F}); \mathbb{E} \left[\sum_{k \in \mathcal{J}} \varphi_k |X_k| \middle| \mathcal{F}_0 \right] < \infty \right\}$$

Das heißt, \mathcal{L}_φ ist die Menge aller Zahlungsströme \mathbf{X} , welche nach diesem fixierten φ bewertet werden können. Es ist für den weiteren Verlauf anzumerken, dass für zwei Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathcal{L}_\varphi$ und $\mathbf{Y} \in \mathcal{L}_\varphi$ die Folgerung $\mathbf{X} + \mathbf{Y} \in \mathcal{L}_\varphi$ gilt.

Wegen der Konstruktion von φ ist erkennbar, dass φ_k für $k \in \mathcal{J}$ den Zahlungsstrom X_k zu einem Wert zum Zeitpunkt 0 „transferiert“. Der State Price Deflator nimmt daher nach [21] die Funktion eines stochastischen Diskontierungsfaktors ein.

⁸[21, S.20/21]

2.3 Bewertung des Zahlungsstromes \mathbf{X} zum Zeitpunkt 0

Angenommen der State Price Deflator $\varphi \in L^1_{T+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ ist fixiert. Nach der Einführung des Bewertungsfunktional \mathcal{Q} und des State Price Deflators φ kann nun der Wert für den Zahlungsstrom \mathbf{X} zum Zeitpunkt 0 definiert werden. In [21, S.22] ist dieser gegeben durch:

$$\mathcal{Q}_0[\mathbf{X}] := \mathbb{E} \left[\sum_{k \in \mathcal{J}} \varphi_k X_k \middle| \mathcal{F}_0 \right]$$

2.4 Bewertung des Zahlungsstromes \mathbf{X} zum Zeitpunkt t

Angenommen der State Price Deflator $\varphi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ ist fixiert. Der Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathcal{L}_\varphi$ einer Versicherung kann nicht nur zum Zeitpunkt 0, sondern auch für jeden beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, T]$ bewertet werden. (Es ist hier darauf zu achten, dass die Bewertung in stetiger Zeit durchgeführt wird, wobei $t \leq k$ für $t \in [0, T]$ und $k \in \{0, \dots, T\}$ gilt.) Werden die Bewertungen zu jedem der Zeitpunkte $t \in [0, T]$ als ein Preisprozess des Zahlungsstromes aufgefasst, so kann dieser als $(\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}])_{t \in [0, T]}$ angeschrieben werden.

Die folgende Definition wird nach [21, Definition 2.14] wiedergegeben. Die Aussage der Definition 2.4. ist eine wichtige Bedingung, die ein State Price Deflator φ zu erfüllen hat. Dieser ist daher so zu wählen, dass er diese Bedingung erfüllt.

Definition 2.4. *Wähle einen State Price Deflator $\varphi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$. Wenn der deflatierte Preisprozess $(\varphi_t \mathcal{Q}_t)_{t \in [0, T]}$ ein (\mathbb{P}, \mathbb{F}) -Martingal ist, dann wird $(\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}])_{t \in [0, T]}$ konsistent bezüglich φ (φ -konsistent) genannt.*

Der Preisprozess $(\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}])_{t \in [0, T]}$ kann nun definiert werden. In [21, S.23] ist dieser zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gegeben durch:

$$\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}] := \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E} \left[\sum_{k \in \mathcal{J}} \varphi_k X_k \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (2.1)$$

Wegen den Eigenschaften des State Price Deflators φ_t für alle Zeitpunkte $t \in [0, T]$, ist das Bewertungsfunktional \mathcal{Q}_t zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ wohldefiniert. Das Bewertungsfunktional \mathcal{Q}_t ist zugleich der Wert des Zahlungsstromes \mathbf{X} zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$.

Die folgende Proposition+Beweis werden nach [21, Proposition 2.13+Beweis] wiedergegeben.

Proposition 2.1. *Angenommen es ist ein fixierter State Price Deflator $\varphi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ gegeben und die Preisprozesse $(Q_t[\mathbf{X}])_{t \in [0, T]}$ von $\mathbf{X} \in \mathcal{L}_\varphi$ sind definiert durch (2.1). Dann sind die deflatierten Preisprozesse $(\varphi_t Q_t)_{t \in [0, T]}$ (\mathbb{P}, \mathbb{F}) -Martingale.*

Beweis. Integrierbarkeit folgt aus $\varphi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ und $\mathbf{X} \in \mathcal{L}_\varphi$. Um nun die Martingaleigenschaft zu zeigen, wird für die erste Gleichheit die Turmeigenschaft der bedingten Erwartung angewandt:

$$\mathbb{E}[\varphi_u Q_u[\mathbf{X}] | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{k \in \mathcal{J}} \varphi_k X_k \middle| \mathcal{F}_u\right] \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k \in \mathcal{J}} \varphi_k X_k \middle| \mathcal{F}_t\right] = \varphi_t Q_t[\mathbf{X}]$$

Die zweite Gleichheit gilt, da die Filtration für $t, u \in [0, T]$ mit $t \leq u$ die Eigenschaft $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_u$ erfüllt. Die dritte Gleichheit ist die Definition des Bewertungsfunktionals zum Zeitpunkt t (2.1). \square

Die \mathbb{P} -Martingaleigenschaft des deflatierten Preisprozesses $(\varphi_t Q_t)_{t \in [0, T]}$ und die \mathbb{P}^* -Martingaleigenschaft (siehe: Proposition 3.1) des diskontierten Preisprozesses $(B_t^{-1} Q_t)_{t \in [0, T]}$ sind die essentiellen Eigenschaften für ein konsistentes Bewertungssystem. Aufgrund dieser folgt nämlich die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes, was nach dem „Fundamental Theorem of Asset Pricing“ Arbitragefreiheit bedeutet. Der soeben genannte Satz kann zum Beispiel in [10, Unterabschnitt 1.6] nachgeschlagen werden.

3 Finanzielle und Aktuarielle Modellierung

Die Begriffe „Nullkuponanleihe“, „Vasicek-Modell“ und „Finanzmarkt“ werden nun eingeführt, da diese im weiteren Verlauf für die finanzielle Modellierung benötigt werden.

3.1 Nullkuponanleihe

Die Nullkuponanleihe ist ein gebräuchlicher Begriff in der finanziellen Modellierung und in der Literatur in verschiedenen Notationen zu finden. Die stetige Version von [21, Definition 2.1] ist gegeben durch:

Definition 3.1. *Eine Nullkuponanleihe (NKP) mit Maturität $T \geq 0$ ist ein Vertrag, der zum Zeitpunkt T den Wert 1 ausbezahlt. Der Preis der NKP ist zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gegeben durch $P(t, T)$.*

In [21, Example 2.8] wird angenommen, dass es sich um eine ausfallsfreie Nullkuponanleihe handelt. Ausfallsfrei bedeutet, dass der Versicherer während der Laufzeit zahlungsfähig ist und daher jederzeit diesen Vertrag erfüllen kann. Wahrscheinlichkeitstheoretisch bedeutet nach [21] ausfallsfrei, dass der Zahlungsstrom X_T zum Zeitpunkt T mit Wahrscheinlichkeit 1 (\mathbb{P} -f.s.) bezahlt wird.

Der Preis $P(t, T)$ der NKP ergibt sich durch Diskontierung des Wertes 1 auf den Zeitpunkt $t \in [0, T]$ mit einem gegebenen Zinssatz $r \geq 0$. Daraus folgt:

- Je höher der Zins r , desto kleiner der Preis $P(t, T)$.
- Der Preis $P(t, T)$ ist zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ positiv.

Der Zahlungsstrom einer ausfallsfreien NKP mit Maturität T ist in [21, Example 2.8] gegeben durch

$$\mathbf{Z}^{(T)} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{T+1}$$

wobei die 1 an der $T+1$ -ten Stelle plaziert ist. Es ist außerdem $\mathbf{Z}^{(T)} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ erfüllt.

3.2 Vasicek-Modell

Es ist anzumerken, dass für diesen Unterabschnitt die Definitionen und Resultate dem Buch [6, S.6,8,58-62] entnommen sind.

Der Ausgangspunkt der Betrachtungen ist der Preis einer Nullkuponanleihe mit Maturität T zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$, das heißt $P(t, T)$. Dann können wir folgende Zinsausdrücke von diesem ableiten.

Definition 3.2. Die *stetig-verzinsten Spot-Rate* $R(t, T)$ ist definiert durch:

$$R(t, T) := -\frac{\log P(t, T)}{T - t}$$

Die stetig-verzinsten Spot-Rate ist auch der Zins für eine Nullkuponanleihe mit Maturität T .

Definition 3.3. Die *augenblickliche Short-Rate* r_t ist definiert durch:

$$r_t := \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T)$$

Für die weiteren theoretischen Betrachtungen wird die augenblickliche Short-Rate r_t verwendet. Für die spätere Kalibrierung an Marktdaten, um die optimalen Parameter für den im Vasicek-Modell konstruierten Zins zu ermitteln, wird die stetig-verzinsten Spot-Rate $R(t, T)$ herangezogen.

Von der Short-Rate gehen viele Zinsstrukturmodelle aus. Ein berühmtes Short-Rate-Modell ist zum Beispiel das Vasicek-Modell, bei dem die Dynamik des stochastischen Zinses r_t für $t \in [0, T]$ unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{P}^* gegeben ist durch

$$dr_t = (\kappa\gamma - \kappa r_t) dt + \sigma dW_t^*$$

wobei $b := \kappa\gamma$ gilt. Weiters sind κ , γ und σ konstant, insbesondere ist κ positiv. Für den Anfangswert gilt $r_0 \geq 0$. Der Zins folgt einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess.

Unter dem physischen Maß \mathbb{P} ist die stochastische Differentialgleichung gegeben durch:

$$dr_t = (b - (\kappa + \lambda\sigma)r_t) dt + \sigma dW_t$$

Für den Anfangswert gilt $r_0 \geq 0$. Die neue Variable λ ist der „Marktpreis des Risikos“, der durch den Maßwechsel vom risikoneutralen zum physischen Maß entsteht. Die Ausführung des Maßwechsels kann in [6, S.60] nachgeschlagen werden. Dazu ist der Satz von Girsanov nötig, der zum Beispiel in [6, S.911/912] wiedergegeben ist.

Setzen wir $a := \kappa + \lambda\sigma$, so gilt unter dem physischen Maß \mathbb{P} :

$$dr_t = (b - ar_t) dt + \sigma dW_t \tag{3.1}$$

Die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung (3.1) ist gegeben durch:

$$r_t = e^{-at}r_0 + \frac{b}{a}(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{au} dW_u \tag{3.2}$$

Da $e^{-at}r_0 + \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$ deterministisch ist und $W_u \sim \mathcal{N}(0, u)$ für alle $u \in [0, t]$ gilt, resultieren folgende Ergebnisse:

$$\mathbb{E}[r_t] = e^{-at}r_0 + \frac{b}{a}(1 - e^{-at}) \tag{3.3}$$

$$\mathbb{V}[r_t] = \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2at}}{2a} \right) \tag{3.4}$$

Es werden für die Berechnung folgende wesentliche Eigenschaften verwendet:

- $\mathbb{E} \left[\int_0^t e^{au} dW_u \right] = 0$
- Ito-Isometrie: $\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t e^{au} dW_u \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t e^{2au} du \right]$

3.3 Finanzmarkt und finanzielle Modellierung

Gegeben ist der filtrierte Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ und ein fixierter State Price Deflator $\varphi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$.

Der Finanzmarkt \mathcal{I} beinhaltet handelbare Basisinstrumente (Basisfinanzinstrumente) gegeben durch:

- Aktie \mathcal{S}
- Nullkuponanleihen $\mathcal{Z}^{(d)}$ mit Fälligkeiten $d \in [0, T]$

Der Preisprozess der Aktie wird mit $\mathbf{S} = (S_t)_{t \in [0, T]}$ bezeichnet und die Preisprozesse der Nullkuponanleihen mit den Laufzeiten $d \in [0, T]$ mit $\mathbf{P}^{(d)} = (P(t, d))_{t \in [0, T]}$. Sei $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \in [0, T]}$ die finanzielle Filtration gegeben durch $\mathcal{A}_t = \sigma\{(S_u, P(u, d)), u \leq t, d \in [0, T]\}$.

Die zugehörigen Finanzportfolios sind \mathfrak{S} und $\mathfrak{Z}^{(d)}$ für alle $d \in [0, T]$. Da jedes Finanzportfolio nur ein Basisfinanzinstrument enthält, gelten die Gleichheiten $\mathfrak{S} = \mathcal{S}$ und $\mathfrak{Z}^{(d)} = \mathcal{Z}^{(d)}$ für alle $d \in [0, T]$.

Die Voraussetzungen in [21, S.156], dass der Finanzmarkt alle verfügbaren Basisfinanzinstrumente beschreibt und genug Vermögen hat alle Nullkuponanleihen $\mathbf{Z}^{(d)}$ mit Fälligkeiten $d \in [0, T]$ und daher auch das Bankkonto gegeben durch \mathbf{B} zu enthalten, seien somit erfüllt.

Der Preisprozess des Bankkontos und der Aktie (definiert wie im Black-Scholes-Modell) sind durch die folgenden stochastischen Differentialgleichungen gegeben durch

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^* \quad (3.5)$$

$$dB_t = r_t B_t dt \quad (3.6)$$

wobei $S_0 > 0$ und $B_0 = 1$ gilt und $\mathbf{W}^* = (W_t^*)_{t \in [0, T]}$ eine \mathbb{P}^* -Standard-Brown'sche Bewegung auf dem Intervall $[0, T]$ ist.

3.3.1 Hedging Portfolio und Eigenschaften

Für den weiteren Verlauf betrachten wir Hedging Portfolios, die zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gegeben sind durch:

$$V_t(\phi) = \theta_t S_t + \nu_t B_t$$

Für jeden Zeitpunkt $t \in [0, T]$ beschreibt θ_t die Anzahl der Aktien und ν_t die Anzahl der Bankkonten im Portfolio. Die Handelsstrategie gegeben durch $\phi = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})$ ist

ein \mathbb{A} -adaptierter Prozess.

Die im weiteren Verlauf dieses Unterabschnittes genannten Definitionen entstammen inhaltlich aus [15, S.65;88-92].

Definition 3.4. θ und ν sind zwei progressiv messbare Prozesse auf $[0, T]$ und weiters ist $\mathbb{P}^* \left(\int_0^T \theta_u^2 du < \infty \right) = 1$ und $\mathbb{P}^* \left(\int_0^T \nu_u du < \infty \right) = 1$ erfüllt. Dann ist $\phi = (\theta, \nu)$ eine **selbstfinanzierende Handelsstrategie**, falls der Vermögensprozess

$$V_t(\phi) = \theta_t S_t + \nu_t B_t \quad \forall t \in [0, T]$$

die Bedingung

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \theta_u dS_u + \int_0^t \nu_u dB_u \quad \forall t \in [0, T]$$

erfüllt.

Definition 3.5. Ein **Claim** mit Maturität T ist eine Zufallsvariable X , die F_T -messbar und \mathbb{P}^* -integrierbar ist. Hier ist X für eine Funktion $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $X := g(S_T)$.

Definition 3.6. Eine selbstfinanzierende Strategie $\phi \in \Phi$ heißt \mathbb{P}^* -**zulässig**, falls $B^{-1}V(\phi)$ ein \mathbb{P}^* -Martingal ist. $\Phi(\mathbb{P}^*)$ ist die Menge der zulässigen Strategien.

Definition 3.7. Ein Claim X mit Fälligkeit T ist **replizierbar**⁹, falls es ein $\phi \in \Phi(\mathbb{P}^*)$ mit $B_T^{-1}V_T(\phi) = X$ \mathbb{P}^* -f.s. gibt.

Definition 3.8. Ist jeder Claim X replizierbar, so heißt der Finanzmarkt **vollständig**, andernfalls heißt dieser **unvollständig**.

Definition 3.9. Der **Arbitrage-Preis** $\Pi_t(X)$ von X zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ist definiert als das Anfangskapital $B_t^{-1}V_t(\phi)$ einer replizierbaren Strategie. Nach der risikoneutralen Bewertungsformel ist dieser für einen erreichbaren Claim X mit Fälligkeit T zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gegeben durch:

$$\Pi_t(X) = B_t \mathbb{E}^* \left[B_T^{-1} X \mid \mathcal{F}_t \right]$$

⁹auch: erreichbar

3.4 Das Versicherungsportfolio und die aktuarielle Modellierung

Das Versicherungsportfolio basierend auf [16, S.22] besteht aus L_x -Versicherungsnehmer, deren Lebenszeiten identisch verteilt und unabhängig (iid) sind. Das heißt, die Versicherungsnehmer schließen gleichartige Verträge ab und sind bei Vertragsabschluss im Alter x . Aufgrund dieser Eigenschaften ist das betrachtete Versicherungsportfolio homogen.

Die (zukünftigen) Lebenszeiten der einzelnen Versicherungsnehmer $1, \dots, L_x$ ab Versicherungsbeginn sind gegeben durch die nicht-negative iid Folge $\tau_1, \dots, \tau_{L_x}$ definiert auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Die Verteilungsfunktion von τ_i für $i = 1, \dots, L_x$ ist gegeben durch:

$$G_t = \mathbb{P}[\tau_i \leq t]$$

Angenommen, die Verteilung von τ_i ist absolut stetig, dann ist die Dichte definiert durch:

$$\mu_t dt = \mathbb{P}[t < \tau_i < t + dt]$$

Weiters erhalten wir folgende Resultate:

- ${}_m p_{x+t} = \mathbb{P}[\tau_i \geq t + m | \tau_i > t] \cdots$ Die Wahrscheinlichkeit, dass der i -te Versicherungsnehmer als $x + t$ -Jähriger m Jahre überlebt.
- $D_{x+t} = L_{x+t-1} - L_{x+t} \cdots$ Die Anzahl der Todesfälle im Intervall $(t - 1, t]$.

Da die (zukünftigen) Lebenszeiten iid sind, ist die Verteilungsfunktion, die Dichte und die Überlebenswahrscheinlichkeit für alle Versicherungsnehmer $i = 1, \dots, L_x$ gleich.

Die aktuarielle Filtration wird nach [16, S.22] konstruiert. Das heißt, sie wird vom Zählprozess der Todeszeitpunkte der Versicherungsnehmer der betrachteten Kohorte erzeugt. Die Definition und Eigenschaften dieses Zählprozesses basierend auf [18] werden nun beschrieben, wobei $t \in [0, T]$ gilt.

Definition 3.10. Sei τ_1, τ_2, \dots eine Folge von Stoppzeiten. Der **assoziierte Zählprozess** $N_t = \sum_i \mathbb{1}_{\tau_i \leq t}$ zählt, wieviele der Ereignisse, beschrieben durch die τ_i im Intervall $[0, t]$, wobei $t \in [0, T]$ gilt, eingetreten sind.

Eigenschaften der Stoppzeiten:

- $\mathbb{P}(\tau_i \rightarrow \infty) = 1$, das heißt der Zählprozess explodiert nicht in endlicher Zeit.

- $\mathbb{P}(\tau_i = \tau_j) = 0$ für $i \neq j$, das heißt es treten unterschiedliche Ereignisse nicht gleichzeitig auf.

Eigenschaften des Zählprozesses:

- $N_0 = 0$, $N_t = \sum_{0 < s \leq t} \Delta N_s$, $\Delta N_s = N_s - N_{s-}$
 - N_t wächst durch die Sprunghöhe 1.
 - Zwischen den Sprungzeiten ist N_t konstant.
 - N_t hat rechtsstetige Pfade mit linken Limites.

Die folgende Abbildung stellt den Zählprozess des Todes N_t graphisch dar.

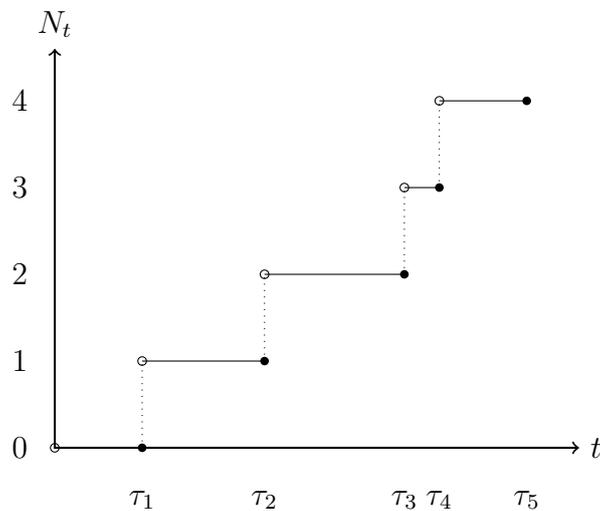


Abbildung 1: Zählprozess des Todes N_t

Die Stoppzeit τ_i beschreibt in der Lebensversicherung den Zeitpunkt des Todes einer versicherten Person, die als i -te Person im Portfolio stirbt. Der Zählprozess zählt daher wieviele Todeszeitpunkte, beschrieben durch die Folge τ_1, τ_2, \dots im Intervall $[0, t]$, eingetreten sind und wächst pro Todesfall um 1.

Sei $\mathbb{T} = (\mathcal{T}_t)_{t \in [0, T]}$ die versicherungstechnische Filtration. Diese Filtration wird nach [16, S.22] vom bereits konstruierten Zählprozess der Todeszeitpunkte erzeugt und ist zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gegeben durch $\mathcal{T}_t = \sigma(N_u : u \leq t)$.

3.5 Kombination der finanziellen und aktuariellen Modellierung

Für die Kombination der finanziellen und aktuariellen Filtration muss zuerst eine Annahme getroffen werden, in welcher Beziehung die beiden Filtrationen stehen. In diesem Modell wird die vereinfachte Annahme getroffen, dass die beiden Filtrationen unabhängig voneinander sind. Das Modell stammt aus [21, S.157-163] und wird dort „Basis Aktuarielles Modell“ genannt. Natürlich gibt es auch andere und schwierigere Varianten für die Kombination der beiden Filtrationen, siehe „Verbessertes Aktuarielles Modell“ in [21, S.164-167] und das „Modell mit Basisrisiko“ in [5].

Nun zu den Annahmen [21, Assumption 6.1] und [21, Assumption 6.3] des Modells, die die Unabhängigkeit der beiden Filtrationen fordern. Die erste der beiden Annahmen ist gegeben durch:

Annahme 3.1. *Gegeben sind drei Filtrationen $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t \in [0, T]}$ und $\mathbb{T} = (\mathcal{T}_t)_{t \in [0, T]}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Es gilt:*

- \mathcal{F}_t wird von \mathcal{A}_t und \mathcal{T}_t für alle $t \in [0, T]$ erzeugt.
- \mathbb{A} und \mathbb{T} sind unabhängig bezüglich dem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} .

Laut Konstruktion ist \mathbb{F} also die kleinste von \mathbb{A} und \mathbb{T} erzeugte Filtration. Das heißt, sie ist die kleinste Informationsmenge, die sowohl die finanziellen (Aktie und Nullkuponanleihen) als auch die versicherungstechnischen Informationen (Todeszeitpunkte der Versicherungsnehmer im Portfolio) beinhaltet. Die zweite der beiden Annahmen beschreibt das „Basis Aktuarielles Modell“.

Annahme 3.2. *Das „Basis Aktuarielles Modell“ ist gegeben durch:*

- Die drei Filtrationen \mathbb{F} , \mathbb{A} und \mathbb{T} erfüllen die definierten Aussagen der Annahme 3.1.
- Der gegebene State Price Deflator $\varphi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ hat die Produktstruktur $\varphi = \varphi^A \varphi^T$, wobei φ^A der \mathbb{A} -adaptierte finanzielle Deflator ist. φ^T ist die \mathbb{T} -adaptierte Wahrscheinlichkeitsdistortion und ein normalisiertes (\mathbb{P}, \mathbb{T}) -Martingal.
- Die Preisprozesse $(A_t^{(i)})_{t \in [0, T]}$ aller Basisinstrumente $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$, sind \mathbb{A} -adaptiert, integrierbar und φ -konsistent.

Das „Basis Aktuarielles Modell“ trifft wichtige Annahmen für spätere Berechnungen. Das Korollar [21, Korollar 6.5] ist eine Folgerung der Annahme 3.2.

Korollar 3.1. *Unter der Annahme 3.2. erhalten wir für jeden finanziellen Preisprozess $(A_t^{(i)})_{t \in [0, T]}$, $i \in \mathcal{I}$, die folgende (\mathbb{P}, \mathbb{A}) -Martingaleigenschaft:*

$$\varphi_t^A A_t^{(i)} = \mathbb{E}[\varphi_T^A A_T^{(i)} | \mathcal{A}_t]$$

Das heißt, dass die Preisprozesse $(A_t^{(i)})_{t \in [0, T]}$ der Basisinstrumente $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$, konsistent bezüglich φ^A und \mathbb{A} sind, da der Term $\varphi_T^A A_T^{(i)}$ unabhängig von der aktuariellen Filtration \mathbb{T} ist.

Anwendung des Korollars 3.1. auf den Aktienpreisprozess $(S_t)_{t \in [0, T]}$ in diesem finanziellen Modell ergibt:

Korollar 3.2. *Unter der Annahme 3.2. gilt für den Aktienpreisprozess $(S_t)_{t \in [0, T]}$ zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$:*

$$S_t = \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E}[\varphi_T S_T | \mathcal{F}_t] = \frac{1}{\varphi_t^A} \mathbb{E}[\varphi_T^A S_T | \mathcal{A}_t]$$

Beweis. Es gilt bereits $S_t = \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E}[\varphi_T S_T | \mathcal{F}_t]$ für alle $t \in [0, T]$. Da die Produktschreibweise $\varphi_t = \varphi_t^A \varphi_t^T$ für alle $t \in [0, T]$ gilt, kann S_t angeschrieben werden als:

$$\begin{aligned} S_t &= \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E}[\varphi_T S_T | \mathcal{F}_t] = \frac{1}{\varphi_t^A \varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi_T^A \varphi_T^T S_T | \mathcal{F}_t] = \frac{1}{\varphi_t^A} \mathbb{E}[\varphi_T^A S_T | \mathcal{A}_t] \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi_T^T | \mathcal{T}_t] = \\ &= \frac{1}{\varphi_t^A} \mathbb{E}[\varphi_T^A S_T | \mathcal{A}_t] \frac{\varphi_t^T}{\varphi_t^T} = \frac{1}{\varphi_t^A} \mathbb{E}[\varphi_T^A S_T | \mathcal{A}_t] \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit gilt, da die Wahrscheinlichkeitsdistortion φ_t^T für alle $t \in [0, T]$ ein (\mathbb{P}, \mathbb{T}) -Martingal ist. \square

4 Versicherungstechnischer Zahlungsstrom

Das folgende Kapitel führt wieder Begriffsbildungen aus dem Buch [21] ein. Wie auch schon im Abschnitt „2 Grundbegriffe für die Modellierung“ erwähnt, werden die folgenden Notationen, Definitionen, Begriffserklärungen und Aussagen mit denen aus dem Buch stammenden beinahe übereinstimmen.

Wegen der Unabhängigkeit der Filtrationen \mathbb{A} und \mathbb{T} konnte bereits der State Price Deflator φ in φ^A und φ^T aufgeteilt werden. Diese Produktschreibweise kann auch auf die versicherungstechnischen Zahlungsströme \mathbf{X} angewandt werden. Die folgenden Begriffe stammen aus [21, S.160/161].

Der Zahlungsstrom $\mathbf{X} = (X_0, \dots, X_T) \in \mathcal{L}_\varphi$ ist für alle $k \in \mathcal{J}$ gegeben durch

$$X_k = \Lambda^{(k)} U_k^{(k)}$$

wobei $\Lambda^{(k)}$ \mathcal{T}_k -messbar und $U_k^{(k)}$ \mathcal{A}_k -messbar ist.

$(U_t^{(k)})_{t \in [0, T]}$ ist der \mathbb{A} -adaptierte Preisprozess des Finanzportfolios $\mathfrak{U}^{(k)}$ mit Maturität $k \in \mathcal{J}$, das am Finanzmarkt \mathcal{I} erhältlich ist. Für ein geeignetes $\mathbf{y}^{(k)} = (y_i^{(k)})_{i \in \mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{(\mathcal{I})}$ ist das Finanzportfolio $\mathfrak{U}^{(k)}$ gegeben durch:

$$\mathfrak{U}^{(k)} = \sum_{i \in \mathcal{I}} y_i^{(k)} \mathcal{U}^{(i)} \quad (4.1)$$

Der Preis zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ setzt sich aufgrund der Linearität aus

$$U_t^{(k)} = \sum_{i \in \mathcal{I}} y_i^{(k)} A_t^{(i)}$$

zusammen. Da $(A_t^{(i)})_{t \in [0, T]}$ φ - und φ^A -konsistent ist, so ist $(U_t^{(k)})_{t \in [0, k]}$ aufgrund der Linearität ebenfalls φ - und φ^A -konsistent.

Die Formel (4.1) ist die mathematische Beschreibung des Unterabschnittes „1.4 Finanzielle Grundbegriffe“. Dort wurde auch die Annahme getroffen, dass nur in eine Aktie investiert wird. Das heißt, jedes Finanzportfolio besteht nur aus einem Basisfinanzinstrument. Es gilt daher, dass \mathcal{I} nur einelementig ist, wodurch die Summe wegfällt. Weiters ist $y^{(k)} = 1$ für alle $k \in \mathcal{J}$, daher gelten die Gleichheiten $(\mathfrak{S} = \mathcal{S}, \mathfrak{Z}^{(d)} = \mathcal{Z}^{(d)}$ für alle $d \in [0, T]$) aus dem Unterabschnitt „3.3 Finanzmarkt und finanzielle Modellierung“.

4.1 Der versicherungstechnische Teil¹⁰

Die Zufallsvariable $\Lambda^{(k)}$ beschreibt nach [21] die Anzahl der Einheiten der Finanzportfolios $\mathfrak{U}^{(k)}$, die gekauft werden müssen, um den versicherungstechnischen Zahlungsstrom X_k zum Zeitpunkt $k \in \mathcal{J}$ zu erfüllen. Diese Anzahl der Einheiten der Finanzportfolios ist von den Todeszeitpunkten der Versicherungsnehmer im Portfolio abhängig und nicht hedgebar.

Um den Zahlungsstrom X_k zu erzeugen, muss das Finanzportfolio $\mathfrak{U}^{(k)}$ zum Zeitpunkt $k \in \mathcal{J}$ verkauft werden.

¹⁰[21, S.160-163]

Mit einer Nullkuponanleihe kann der versicherungstechnische Zahlungsstrom zum Zeitpunkt $k \in \mathcal{J}$ nach [21, S.161] als ein Vektor angeschrieben werden

$$\mathbf{X}_k = X_k \mathbf{Z}^{(k)} = (0, \dots, 0, \Lambda^{(k)} U_k^{(k)}, 0, \dots, 0) \in \mathcal{L}_\varphi$$

wobei $\Lambda^{(k)}$ \mathcal{T}_k -messbar und $U_k^{(k)}$ \mathcal{A}_k -messbar ist. $(U_t^{(k)})_{t \in [0, T]}$ ist der \mathbb{A} -adaptierte, φ - und φ^A -konsistente Preisprozess des Finanzportfolios $\mathfrak{U}^{(k)}$ aus (4.1).

Der folgende Satz ist in Anlehnung an [21, Theorem 6.6, Remark 6.7] formuliert.

Satz 4.1. *Unter den obigen Annahmen ist der φ -konsistente Preisprozess eines versicherungstechnischen Zahlungsstromes $\mathbf{X}_k \in \mathcal{L}_\varphi$ zum Zeitpunkt $t \leq k$, wobei $t \in [0, T]$, $k \in \mathcal{J}$ gilt, gegeben durch*

$$Q_t[\mathbf{X}_k] = \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi_k^T \Lambda^{(k)} | \mathcal{T}_t] U_t^{(k)} = \Lambda_t^{(k)} U_t^{(k)}$$

wobei $(\Lambda_t^{(k)})_{t \in [0, T]}$ der wahrscheinlichkeitsdistortierte versicherungstechnische Prozess ist. Dieser ist zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ definiert als:

$$\Lambda_t^{(k)} := \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi_k^T \Lambda^{(k)} | \mathcal{T}_t] \quad (4.2)$$

Die einfachste Wahl der Wahrscheinlichkeitsdistortion φ^T , die die Annahme 3.2. erfüllt, ist $\varphi_t^T \equiv 1$ für alle $t \in [0, T]$.

Die folgende Definition stammt inhaltlich aus [21, Remark 6.7].

Definition 4.1. *Sei $\varphi_t^T \equiv 1$ für alle $t \in [0, T]$. Dann ist für \mathbf{X}_k der Preis zum Zeitpunkt $t \leq k$, wobei $t \in [0, T]$, $k \in \mathcal{J}$ gilt, gegeben durch:*

$$Q_t^0[\mathbf{X}_k] = \mathbb{E}[\Lambda^{(k)} | \mathcal{T}_t] U_t^{(k)}$$

In der Versicherungsbranche wird $Q_t^0[\mathbf{X}_k]$ die **best-estimate diskontierte Verbindlichkeit** genannt, wobei sich best-estimate auf den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[\Lambda^{(k)} | \mathcal{T}_t]$ bezieht.

Das bedeutet, dass im Fall $\varphi^T \equiv 1$ für die Replikation der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten die erwartete Anzahl $\mathbb{E}[\Lambda^{(k)} | \mathcal{T}_t]$ des Finanzportfolios $\mathfrak{U}^{(k)}$ zum Zeitpunkt $t \leq k$, wobei $t \in [0, T]$, $k \in \mathcal{J}$ gilt, verwendet wird. Der bedingte Erwartungswert kann mithilfe der Annahme, dass die (zukünftigen) Lebenszeiten der Versicherungsnehmer unabhängig sind, durch die Überlebenswahrscheinlichkeit

ausgedrückt werden (siehe: „5.3.1 Erlebensversicherung - Allgemeiner Fall“). Da aufgrund möglicher schlechterer Entwicklungen (in der Erlebensfallversicherung: Überlebenswahrscheinlichkeit steigt stark an) die erwartete Anzahl für das Hedging nicht ausreichen kann, muss eine Marge hinzugenommen werden. Der best-estimate Preis ergibt zusammen mit dieser Marge den modellbasierten Marktpreis für die versicherungstechnischen Verbindlichkeiten.

4.1.1 Die Risikomarge¹¹

Es gilt nicht mehr der Fall $\varphi_t^T \equiv 1$. Gewisse φ_k^T , die bestimmte Eigenschaften erfüllen, können eine Marge für versicherungstechnische Risiken erzeugen. Für diese muss jedoch die Annahme gelten, dass φ_k^T und $\Lambda^{(k)}$ gegeben \mathcal{T}_t für $t \leq k$, wobei $t \in [0, T]$, $k \in \mathcal{J}$ gilt, nicht-negativ korreliert sind. Dies ist eine abgeschwächte Variante von [21, Remarks 6.7], in dem die strikt positive Korrelation angenommen wird.

Für die nicht-negative Korrelation muss folgende Ungleichung gelten:

$$\frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi_k^T \Lambda^{(k)} | \mathcal{T}_t] \geq \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi_k^T | \mathcal{T}_t] \mathbb{E}[\Lambda^{(k)} | \mathcal{T}_t] = \mathbb{E}[\Lambda^{(k)} | \mathcal{T}_t]$$

Zum Zeitpunkt $t \leq k$, wobei $t \in [0, T]$, $k \in \mathcal{J}$, gilt wegen der positiven Korrelation für positive Preise $U_t^{(k)} \geq 0$:

$$\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}_k] = \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi_k^T \Lambda^{(k)} | \mathcal{T}_t] U_t^{(k)} \geq \mathbb{E}[\Lambda^{(k)} | \mathcal{T}_t] U_t^{(k)} = \mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}_k]$$

Das bedeutet, dass der risikoadjustierte Preis $\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}_k]$ zum Zeitpunkt $t \leq k$, wobei $t \in [0, T]$, $k \in \mathcal{J}$ gilt, größer gleich dem best-estimate Preis $\mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}_k]$ ist. Die Differenz $\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}_k] - \mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}_k] \geq 0$ wird „MVM“ (Marktwertmarge¹²) genannt und ist die zusätzliche Marge für schlechte Entwicklungen bezogen auf das nicht-hedgebare versicherungstechnische Risiko (in der Erlebensfallversicherung: Überlebenswahrscheinlichkeit steigt stark an).

4.2 Finanzieller Deflator für den Aktienpreisprozess

Wie bereits erwähnt, können, aufgrund der Unabhängigkeit der Filtrationen \mathbb{A} und \mathbb{T} , der finanzielle und aktuarielle Teil aufgespalten werden. Für die „klassische“ Anwendung des Föllmer-Sondermann-Ansatzes (siehe Abschnitt „5.3 Anwendung in der Lebensversicherung“) wird der Aktienpreisprozess $(S_t)_{t \in [0, T]}$ risikoneutral

¹¹[21, S.163/164]

¹²engl. Market Value Margin

bewertet. Um diesen Ansatz daher anwenden zu können, muss eine Maßtransformation für den finanziellen Teil durchgeführt werden, die im diesem Unterabschnitt (siehe Überschrift „Maßwechsel in [21]“) noch beschrieben wird.

Zusätzlich wird in diesem Unterabschnitt auch der passende finanzielle Deflator φ^A für den Aktienpreisprozess konstruiert. Dieser muss nämlich für den Preisprozess \mathbf{S} im Black-Scholes-Modell so gewählt werden, dass $(\varphi_t^A S_t)_{t \in [0, T]}$ die Bedingung aus Definition 2.4. erfüllt.

Sei \mathbb{P} das physikalische Maß und \mathbb{P}^* das risikoneutrale Maß, wobei $\mathbb{P} \sim {}^{13}\mathbb{P}^*$ gilt. Für die Wahl des finanziellen Deflators φ^A werden nun das konstruierte Finanzmarktmodell mit dem in (3.5) angeführten Aktienpreisprozess und das allgemeine Modell in [21] miteinander kombiniert. In beiden Fällen ist \mathbb{P}^* das zu \mathbb{P} äquivalente Martingalmaß. Da beide Maßtransformationen eindeutig sind, können die Dichten gleichgesetzt werden, woraus der finanzielle Deflator folgt. Nun zu der genauen Vorgangsweise.

Maßwechsel im Black-Scholes-Modell

Das Lemma in [15, Lemma 3.4.1.], das aus dem Satz von Girsanov hervorgeht und bereits alle Voraussetzungen für diesen erfüllt, gibt die Maßtransformation von \mathbb{P} zu \mathbb{P}^* an. Der Satz von Girsanov kann zum Beispiel in [15, Theorem B.2.1.] nachgelesen werden. Das Lemma ist gegeben durch:

Lemma 4.1. *Das eindeutige Martingalmaß \mathbb{P}^* für den diskontierten Aktienpreisprozess S_t^* ist zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ durch die folgende Radon-Nikodym Dichte gegeben:*

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(\int_0^t \frac{r_u - \mu}{\sigma} dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{r_u - \mu}{\sigma} \right)^2 du \right) = \quad (4.3)$$

$$= U_t > 0, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad (4.4)$$

Unter dem Martingalmaß \mathbb{P}^* hat der diskontierte Aktienpreis S_t^* zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ die Dynamik

$$dS_t^* = \sigma S_t^* dW_t^*$$

und der Prozess $W_t^* = W_t - \int_0^t \frac{r_u - \mu}{\sigma} du$, $t \in [0, T]$, ist eine Standard-Brown'sche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}^*)$.

Aufgrund von [15, Proposition B.2.1.] gilt, dass \mathbf{U} eindeutig ist.

¹³äquivalente Maße

Der Term $\lambda_u = \frac{r_u - \mu}{\sigma}$, $u \in [0, t]$, wird „Marktpreis des Risikos“ genannt. Die Maßtransformation (4.3) kann umgeschrieben werden in:

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(\int_0^t \lambda_u dW_u - \int_0^t \frac{1}{2} \lambda_u^2 du \right) = U_t > 0, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad (4.5)$$

Es ist anzumerken, dass die Maßtransformationen (4.3) und (4.5) bedingt auf die Filtration \mathcal{A}_t analog funktionieren.

Maßwechsel in [21]

Für die folgenden Resultate wird die Annahme getroffen, dass der State Price Deflator φ fixiert ist. Damit der dazugehörige Bewertungsprozess $\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}]_{t \in [0, T]}$ die φ -Konsistenz erfüllt, wird dieser dementsprechend fixiert.

Für die Maßtransformation (Satz von Girsanov) wird das Lemma aus [21, Lemma 2.17] in stetiger Zeit benötigt.

Lemma 4.2. *Gegeben ist ein fixierter State Price Deflator $\varphi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$. Der Prozess $(\xi_t)_{t \in [0, T]}$ definiert durch $\xi_t = \varphi_t B_t$ ist ein strikt positives (\mathbb{P}, \mathbb{F}) -Martingal mit Erwartungswert 1.*

Wegen Lemma 4.2. erfüllt ξ alle Anforderungen für den Satz von Girsanov, somit gilt: Das zu \mathbb{P} äquivalente Martingalmaß \mathbb{P}^* ist gegeben durch:

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \xi_t := \varphi_t B_t > 0, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad (4.6)$$

Aufgrund von [15, Proposition B.2.1.] gilt, dass ξ eindeutig ist.

Die Proposition aus [21, Proposition 2.18] beschreibt das Resultat.

Proposition 4.1. *Gegeben ist fixierter State Price Deflator $\varphi \in L_{T+1}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ und die Preisprozesse $(\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}])_{t \in [0, T]}$ von $\mathbf{X} \in \mathcal{L}_\varphi$ sind definiert durch (2.1). Die durch das Bankkonto diskontierten Preisprozesse $(B_t^{-1} \mathcal{Q}_t[\mathbf{X}])_{t \in [0, T]}$ sind $(\mathbb{P}^*, \mathbb{F})$ -Martingale.*

Korollar 4.1. *Unter den Annahmen des „Basis Aktuarielles Modell“ und des Maßwechsels (4.6), gilt für den Aktienpreisprozess $(S_t)_{t \in [0, T]}$ zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$:*

$$\begin{aligned} S_t &= B_t \mathbb{E}^*[B_T^{-1} S_T | \mathcal{A}_t] = B_t \mathbb{E}^*[B_T^{-1} S_T | \mathcal{F}_t] = \\ &= \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E}[\varphi_T S_T | \mathcal{F}_t] = \frac{1}{\varphi_t^A} \mathbb{E}[\varphi_T^A S_T | \mathcal{A}_t] \end{aligned}$$

Beweis. Die letzte Gleichheit wurde bereits im Beweis von Korollar 3.2. gezeigt. Die zweite Gleichheit gilt, da der Term $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{S}$ unabhängig von der aktuariellen Filtration \mathbb{T} ist. Die dritte Gleichheit gilt wegen des Maßwechsels (4.6):

$$\begin{aligned} S_t &= B_t \mathbb{E}^*[B_T^{-1}S_T|\mathcal{F}_t] = B_t \mathbb{E}[\xi_t^{-1}\xi_T B_T^{-1}S_T|\mathcal{F}_t] = \\ &= B_t \mathbb{E}[\varphi_t^{-1}B_t^{-1}\varphi_T B_T B_T^{-1}S_T|\mathcal{F}_t] = \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E}[\varphi_T S_T|\mathcal{F}_t] \quad \square \end{aligned}$$

Wegen Korollar 4.1. funktioniert die Maßtransformation (4.6) bedingt auf die Filtration \mathcal{A}_t analog. Es gilt $\varphi = \varphi^A$ und die Maßtransformation ist gegeben durch:

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{A}_t} = \xi_t^A := \varphi_t^A B_t > 0, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Kombination der beiden Modelle und Überprüfung der Eigenschaften

Da beide Maßtransformationen (4.3) und (4.6) eindeutig sind, können wir zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ die beiden Dichten gleichsetzen, das heißt $U_t = \varphi_t^A B_t$, und erhalten daraus:

$$\varphi_t^A = \frac{U_t}{B_t} = \exp\left(\int_0^t \lambda_u dW_u - \int_0^t \left(\frac{1}{2}\lambda_u^2 + r_u\right) du\right) = \quad (4.7)$$

$$= \exp\left(\int_0^t \lambda_u dW_u^* + \int_0^t \left(\frac{1}{2}\lambda_u^2 - r_u\right) du\right) \quad (4.8)$$

Nun gilt zwar die φ^A -Konsistenz für $(\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}])_{t \in [0, T]}$, aber es ist noch zu überprüfen, ob das soeben konstruierte φ^A die Eigenschaften eines State Price Deflators erfüllt, das heißt:

1. $\varphi^A \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$
2. $\varphi^A \gg 0$
3. $\varphi_0^A \equiv 1$

Beweisskizze:

1. Die Integrierbarkeit von φ^A ist erfüllt, da $P(0, T) = \mathbb{E}[\varphi_T^A] = \mathbb{E}^*[B_T^{-1}] < \infty$ gilt, wenn der Zins r im Vasicek-Modell konstruiert wird. Das kann in [17] nachgeschlagen werden. Weiters ist φ_t^A für alle $t \in [0, T]$ \mathcal{A}_t -adaptiert, da die Integrale von (4.7) nach Konstruktion \mathcal{A}_t -adaptiert sind.

2. φ_t^A ist für alle $t \in [0, T]$ auf der positiven Achse definiert, das heißt es gilt $\varphi_t^A \geq 0$ für alle $t \in [0, T]$. Der Fall $\varphi_t^A = 0$ kann ausgeschlossen werden, da $U_t > 0$ und $B_t > 0$ für alle $t \in [0, T]$ gilt. Also ist φ_t^A für alle $t \in [0, T]$ strikt positiv.
3. Wegen $\varphi_0^A = \exp\left(\int_0^0 \lambda_u dW_u^* + \int_0^0 \left(\frac{1}{2}\lambda_u^2 - r_u\right) du\right) = \exp(0) = 1$ ist $\varphi_0^A \equiv 1$ erfüllt.

Es wird angenommen, dass φ^A zusätzlich zu der Adaptiertheit und der Integrierbarkeit die Martingaleigenschaft erfüllt. Daher gilt, dass φ^A ein \mathbb{A} -Martingal ist.

Nun sind alle Eigenschaften überprüft und φ^A ist der zu wählende finanzielle Deflator, der die Bedingung aus Definition 2.4. erfüllt.

Eine wichtige Anmerkung ist, dass wir aus den Basisfinanzinstrumenten, die im Finanzmarkt enthalten sind, zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ den finanziellen Deflator φ_t^A erhalten.

5 Föllmer-Sondermann-Ansatz

5.1 Satz von der orthogonalen Projektion

Die folgenden Definitionen, Sätze und Begriffserklärungen stammen aus [18].

Definition 5.1. Ein Prozess θ heißt **prävisibel**, wenn dieser linkstetig und adaptiert ist.

Definition 5.2. Ein normierter Vektorraum H heißt **Hilbertraum** $(H, \|\cdot\|)$, falls ein Skalarprodukt (das heißt eine symmetrische Bilinearform) existiert, sodass

- $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$
- und bezüglich dieser Norm H vollständig ist.

Um zu der nächsten Proposition zu gelangen, wir zuerst die allgemein bekannte Definition für Vollständigkeit wiedergeben.

Definition 5.3. Ein metrischer Raum X heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in X auch in X konvergiert.

Proposition 5.1. Jeder lineare Unterraum eines Hilbertraumes ist **vollständig** genau dann, wenn er in H abgeschlossen ist.

Sei $\mathbf{M} = (M_t)_{t \in [0, T]}$ ein \mathbb{P}^* -Martingal. Betrachten wir den L^2 -Raum bezüglich des Produktmaßes $\mathbb{P}^* \times [\mathbf{M}]$. Das heißt, der Raum der \mathbb{A} -prävisiblen und quadratisch integrierbaren Prozesse $\boldsymbol{\theta}$, die

$$\mathbb{E}^* \left[\int_0^T \theta_u^2(\omega) d[\mathbf{M}]_u(\omega) \right] < \infty$$

erfüllen. Der entsprechende Hilbertraum wird mit $L^2(\mathbf{M})$ bezeichnet. Das zugehörige Skalarprodukt ist definiert durch:

$$\exists \text{ prävisible Prozesse } \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}, \text{ sodass: } \langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi} \rangle := \mathbb{E}^* \left[\int_0^T \theta_u(\omega) \psi_u(\omega) d[\mathbf{M}]_u(\omega) \right]$$

Anwendung:

Ist $\mathbb{E}^* \left[\int_0^T \theta_u^2 d[\mathbf{M}]_u \right] < \infty$ erfüllt, dann ist $\int_0^T \theta_u dM_u$ ein quadratintegrierbares Martingal. Auf dieses kann die Ito-Isometrie angewandt werden:

$$\mathbb{E}^* \left[\left(\int_0^T \theta_u dM_u \right)^2 \right] = \mathbb{E}^* \left[\int_0^T \theta_u^2 d[\mathbf{M}]_u \right]$$

Satz 5.1 (Satz von der orthogonalen Projektion). *Sei H ein Hilbertraum, $K \subset H$ konvex und abgeschlossen und $x_0 \in H$. Dann $\exists!$ $x \in K$, sodass $\|x - x_0\| = \inf_{y \in K} \|y - x_0\|$. Weiters gilt die Zerlegung:*

$$x_0 = x + y, \text{ wobei } x \in K, y \in K^\perp \\ K^\perp = \{y \in H \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in K\}$$

Anwendung (Satz von der orthogonalen Projektion):

Sei $H = L^2(\mathbb{P}^*)$ ein Hilbertraum und K ein linearer Teilraum von H definiert durch $K := \left\{ c + \int_0^T \theta_u dM_u : c \in \mathbb{R}, \theta \in L^2(\mathbf{M}) \right\}$ und somit konvex.

K_0 definiert durch $K_0 := \left\{ \int_0^T \theta_u dM_u : \theta \in L^2(\mathbf{M}) \right\}$ ist isometrisch isomorph zu $L^2(\mathbf{M})$ und deshalb vollständig. Daraus folgt die Vollständigkeit von K und wegen Definition 5.3 ist K abgeschlossen. Somit sind die Voraussetzungen für den „Satz von der orthogonalen Projektion“ erfüllt, der im nächsten Unterabschnitt angewandt wird.

5.2 Föllmer-Sondermann-Ansatz

Für den weiteren Verlauf werden die folgenden Konventionen bezogen auf die Schreibweise getroffen:

- diskontierter Vermögensprozess: $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{V}^*$
- deflatierter Vermögensprozess: $\varphi\mathbf{V} = \hat{\mathbf{V}}$
- diskontierter Aktienpreisprozess: $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{S}^*$
- deflatierter Aktienpreisprozess: $\varphi\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}$

Ausgangspunkt für den Föllmer-Sondermann-Ansatz ist die Unvollständigkeit des kombinierten Modells, das sowohl dem Langlebigkeitsrisiko (Überlebenswahrscheinlichkeit der Versicherungsnehmer) als auch dem finanziellen Risiko (Schwankungen des Aktienkurses, da Fonds nach Annahme in eine Aktie veranlagt wird) ausgesetzt ist. Das heißt, der versicherungstechnische Zahlungsstrom kann in diesem Fall nicht perfekt durch am Finanzmarkt handelbare Basisinstrumente repliziert werden. Folgernd können die versicherungstechnischen Verbindlichkeiten nicht vollständig abgesichert werden und es entsteht ein Restrisiko. Als Lösung für dieses Problem haben Föllmer und Sondermann die im Mittel selbstfinanzierenden Strategien eingeführt. Diese sind optimale Strategien im Bezug darauf, dass sie den quadratischen zukünftigen Kostenprozess, der durch die Replikation entsteht, minimieren. Die folgenden Aussagen über den Föllmer-Sondermann-Ansatz stammen aus [14] und [16]¹⁴. Es werden nur die wichtigsten Kernaussagen dargestellt.

Wie bereits in den vorigen Abschnitten erwähnt, ist die Handelsstrategie gegeben durch $\phi = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})$. Für den diskontierten Vermögensprozess zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gilt daher $V_t^*(\phi) = \theta_t S_t^* + \nu_t$. Die Handelsstrategien und der diskontierte Vermögensprozess erfüllen nun nach [14] folgende Bedingungen:

- $\boldsymbol{\theta}$ ist ein prävisibler Prozess und $\boldsymbol{\theta} \in L^2(\mathbf{M})$
- $\boldsymbol{\nu}$ ist \mathbb{F} -adaptiert
- $\mathbf{V}^* = \boldsymbol{\theta}\mathbf{S}^* + \boldsymbol{\nu}$ hat rechtsstetige Pfade und erfüllt $\mathbf{V}^* \in L^2(\mathbb{P}^*)$

Da $\boldsymbol{\theta}$ ein vorhersehbarer Prozess ist, können wir den kumulierten Ertrag aus den Fluktuationen der Aktienpreise bis zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ als stochastisches Integral anschreiben:

$$\int_0^t \theta_u dS_u^*$$

¹⁴Die Aussagen von [16] bezüglich der Einführung des Föllmer-Sondermann-Ansatzes stammen zwar von [14], werden jedoch in einer adaptierten und kürzeren Version dargestellt.

Definition 5.4. Der *kumulierte Kostenprozess* einer Strategie ϕ ist zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gegeben durch:

$$C_t(\phi) := V_t^*(\phi) - \int_0^t \theta_u dS_u^*$$

Der Kostenprozess ist also definiert als der diskontierte Vermögensprozess der Strategie ϕ minus den Erträgen aus der Aktienposition. Eine Strategie heißt selbstfinanzierend, falls der Kostenprozess konstant ist und im Mittel selbstfinanzierend, falls $C(\phi)$ ein \mathbb{P}^* -Martingal ist.

Definition 5.5. Der *Risikoprozess* einer Strategie ϕ ist zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ definiert durch:

$$R_t(\phi) := \mathbb{E}^* [(C_T(\phi) - C_t(\phi))^2 | \mathcal{F}_t]$$

Um die optimale Hedgingstrategie zu erhalten, ist es notwendig, sich auf zulässige Strategien zu beschränken, für die

$$V_T^*(\phi) = X \quad \text{f.s.}$$

gilt. Für zulässige Strategien ist dies möglich, jedoch nur mit Kosten gegeben durch C_T . Um diese Kosten möglichst klein zu halten, muss der Risikoprozess

$$R_0(\phi) = \mathbb{E}^* [(C_T(\phi) - C_0(\phi))^2 | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}^* \left[\left(X - c - \int_0^T \theta_u dS_u^* \right)^2 \right]$$

für alle $c \in \mathbb{R}$, $\theta \in L^2(\mathbf{S}^*)$ minimiert werden, wobei $c = C_0(\phi)$ gilt.

Die Lösung für die Minimierung liefert die orthogonale Projektion: Projiziere X auf den Unterraum K . Dies führt uns zur Kunita-Watanabe-Zerlegung gegeben durch:

$$X = \underbrace{c + \int_0^T \theta_u dS_u^*}_{\in K} + \underbrace{L_T}_{\in K^\perp} \quad (5.1)$$

Somit ist die optimale Projektion: $c + \int_0^T \theta_u dS_u^*$.

Insbesondere gilt für $1 \in K$: $\mathbb{E}^*[L_T] = \mathbb{E}^*[1 \cdot L_T] = 0$, das bedeutet \mathbf{L} ist ein \mathbb{P}^* -Martingal. Es gilt, dass $\int_0^T \theta_u dS_u^*$ ein \mathbb{P}^* -Martingal ist, woraus $\mathbb{E}^* \left[\int_0^T \theta_u dS_u^* \right] = 0$ folgt. Fassen wir die beiden Resultate zusammen, dann erkennen wir, dass der faire

Preis von X der Erwartungswert von X unter \mathbb{P}^* ist, das heißt es gilt: $c = \mathbb{E}^*[X]$.

Der Risikoprozess $R_0(\phi)$ ist also minimiert, wenn $c = \mathbb{E}^*[X]$ gilt. Das heißt ϕ soll so gewählt werden, dass

$$\mathbb{E}^*[(C_T(\phi) - \mathbb{E}^*[C_T(\phi)])^2] = \mathbb{E}^*[(L_T(\phi))^2]$$

minimiert wird.

Der folgende Satz, der aus [14, Theorem 2] und als Folgerung von diesem aus [16, Theorem 1.33] hervorgeht, ist die zentrale Aussage des Ansatzes von Föllmer und Sondermann.

Satz 5.2. *Es existiert eine eindeutige, zulässige und risikominimierende Strategie $\phi = (\theta, \nu)$ gegeben durch:*

$$(\theta, \nu) = (\theta, \mathbf{V}^* - \theta \mathbf{S}^*)$$

Der assoziierte Risikoprozess ist zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gegeben durch $R_t(\phi) = \mathbb{E}^*[(L_T(\phi) - L_t(\phi))^2 | \mathcal{F}_t]$.

Definition 5.6. *Der Risikoprozess $\mathbf{R}(\phi)$, wobei ϕ die risikominimierende Strategie ist, heißt **intrinsischer Risikoprozess**.*

5.3 Anwendung in der fondsgebundenen Lebensversicherung

Im vorigen Unterabschnitt wurde theoretisch erklärt, wie wir in einem unvollständigen Modell zu einer optimalen Strategie gelangen, um den Claim X zu hedgen. In diesem Unterabschnitt wird der Claim einer fondsgebundenen Erlebensversicherung $X = g(\mathbf{S})$ herangezogen. Die Vorgangsweise zur Gewinnung der Kunita-Watanabe-Zerlegung und des Risikoprozesses wird nach [16] und daraus folgernd nach [18] durchgeführt.

Es ist anzumerken, dass für diesen Unterabschnitt für die Wahrscheinlichkeitsdistortion $\varphi^T \equiv 1$ angenommen wird.

5.3.1 Erlebensversicherung - Allgemeiner Fall

Die Auszahlung einer Erlebensversicherung ist durch $H_E = (L_x - N_T) g(S_T)$ gegeben. Der intrinsische Wertprozess V_t ist die Auszahlung H_E bedingt auf den gegenwärtigen Zeitpunkt $t \in [0, T]$. Dieser ergibt sich daher durch die Bildung des bedingten Erwartungswertes $V_t = \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E}[\varphi_T H_E | \mathcal{F}_t]$. Nach Voraussetzung gilt, dass

\mathbb{F} die kleinste σ -Algebra ist, die sowohl \mathbb{A} und \mathbb{T} enthält. Weiters ist die Unabhängigkeit von \mathbb{A} und \mathbb{T} gegeben. Daraus folgend kann der intrinsische Wertprozess in einen versicherungstechnischen und einen finanziellen Teil aufgespalten werden. Das heißt:

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E} \left[\frac{\varphi_T^T}{\varphi_t^T} (L_x - N_T) | \mathcal{T}_t \right] \mathbb{E} \left[\frac{\varphi_T^A}{\varphi_t^A} g(S_T) | \mathcal{A}_t \right] = \\ &= \mathbb{E}[L_x - N_T | \mathcal{T}_t] \mathbb{E}^* \left[B_t B_T^{-1} g(S_T) | \mathcal{A}_t \right] \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen $\varphi^T \equiv 1$ und der Anwendung des Korollars 4.1. Es gilt für den diskontierten intrinsischen Wertprozess zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$:

$$V_t^* = \mathbb{E}[L_x - N_T | \mathcal{T}_t] \mathbb{E}^*[B_T^{-1} g(S_T) | \mathcal{A}_t]$$

Die beiden bedingten Erwartungswerte können nun getrennt voneinander betrachtet werden. Für den bedingten Erwartungswert des versicherungstechnischen Teils der Auszahlung H_E gilt:

$$\mathbb{E}[L_x - N_T | \mathcal{T}_t] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{L_x} \mathbb{1}_{\tau_i > T} | \mathcal{T}_t \right]$$

Sei $L_x - N_T$ die Anzahl der versicherten Personen, die den Zeitpunkt T der Versicherungsauszahlung erleben (Anzahl der lebenden x -Jährigen minus der Todesfälle bis zum Zeitpunkt T). Die Gleichheit bedeutet hierbei nur, dass der Term $L_x - N_T$ in eine Indikatorfunktion umgeschrieben werden kann.

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{L_x} \mathbb{1}_{\tau_i > T} | \mathcal{T}_t \right] = \sum_{i; \tau_i > t} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau_i > T} | \tau_i > t]$$

Da die Filtration \mathcal{T}_t die Information enthält, wieviele versicherte Personen zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ leben bzw. wieviele bis zu diesem Zeitpunkt gestorben sind, und hier aber nur das Ereignis relevant ist, wieviele den Zeitpunkt $t \in [0, T]$ überleben, kann die Bedingung des Erwartungswertes in $\tau_i > t$ umgeschrieben werden. Weiters ist anzumerken, dass aufgrund der Unabhängigkeit der versicherten Personen, die Summe aus dem Erwartungswert herausgezogen werden kann. Auch der Index der Summe kann umgeschrieben werden, da nur noch die x -Jährigen Personen, die zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ leben, aufsummiert werden. Für die anderen versicherten Personen nimmt die Indikatorfunktion den Wert 0 an.

$$\sum_{i; \tau_i > t} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau_i > T} | \tau_i > t] = \sum_{i; \tau_i > t} T-t p_{x+t}$$

Es gilt $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau_i > T} | \tau_i > t] = \mathbb{P}(\tau_i > T | \tau_i > t)$. Diese Wahrscheinlichkeit kann in die versicherungstechnische Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_{T-t}p_{x+t}$ umgeschrieben werden.

$$\sum_{i; \tau_i > t} {}_{T-t}p_{x+t} = (L_x - N_t) {}_{T-t}p_{x+t} \quad (5.2)$$

Wie bereits erwähnt, ist die Anzahl der Summanden die Anzahl der versicherten Personen, die zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ leben.

Der finanzielle Teil des intrinsischen Wertprozesses einer Erlebensversicherung ist gegeben durch:

$$\mathbb{E}^* \left[B_t B_T^{-1} g(S_T) \middle| \mathcal{A}_t \right] = v(t, S_t) \quad (5.3)$$

Hierbei gilt, dass $v(t, S_t)$ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} v(t, S_t) = 0 \quad (5.4)$$

mit der Endbedingung $v(T, S_T) = g(S_T)$ löst.

Fassen wir die beiden Resultate (5.2) und (5.3) zusammen, so ergibt sich für den diskontierten intrinsischen Wertprozess V_t^* zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$:

$$V_t^* = (L_x - N_t) {}_{T-t}p_{x+t} B_t^{-1} v(t, S_t) \quad (5.5)$$

Es muss die stochastische Differentialgleichung des finanziellen Teils noch gelöst werden. Die nächsten Schritte erklären dies genauer.

Ersetzen wir die finanziellen und versicherungstechnischen Terme durch $X_t := (L_x - N_t) {}_{T-t}p_{x+t}$ und $Y_t := B_t^{-1} v(t, S_t)$, so gilt:

$$V_t^* = X_t Y_t$$

Anwendung der partiellen Integration auf den intrinsischen Wertprozess ergibt:

$$V_t^* - V_0 = \int_0^t Y_{u-} dX_u + \int_0^t X_{u-} dY_u + [X, Y]_t$$

Nun ist jedoch noch unklar, wie die Differentialschreibweisen dX_u und dY_u und die Variation $[X, Y]_t$ aussehen.

Um die Differentialschreibweise von dX_u zu erhalten, betrachten wir zuerst

${}_{T-u}p_{x+u} = \exp\left(-\int_u^T \mu_{x+s} ds\right)$, woraus $d{}_{T-u}p_{x+u} = {}_{T-u}p_{x+u} \mu_{x+u} du$ folgt. Partielles Ableiten ergibt:

$$dX_u = (L_x - N_{u-}) {}_{T-u}p_{x+u} \mu_{x+u} du - {}_{T-u}p_{x+u} dN_u \quad (5.6)$$

Um eine kürzere Schreibweise für dX_u zu erhalten, definieren wir $M_t := N_t - \int_0^t (L_x - N_{u-}) \mu_{x+u} du$, sodass folgt:

$$dX_u = - {}_{T-u}p_{x+u} dM_u \quad (5.7)$$

Der Term $[N_t] - \int_0^t \lambda_u du = N_t - \int_0^t \lambda_u du$ ist ein Martingal¹⁵. Da in diesem Fall N_t der Zählprozess des Todes ist, ist die Intensität definiert durch $\lambda_u := \mathbb{1}_{\tau > u} \mu_u$.

Die Variation $[X, Y]_t$ fällt weg, da X und Y unabhängig voneinander sind.

Es folgt durch Einsetzen der Resultate (5.7) und $[X, Y]_t = 0$:

$$V_t^* - V_0 = - \int_0^t B_u^{-1} v(u, S_u) {}_{T-u}p_{x+u} dM_u + \quad (5.8)$$

$$+ \int_0^t (L_x - N_{u-}) {}_{T-u}p_{x+u} d(B_u^{-1}v(u, S_u)) \quad (5.9)$$

Um eine bessere Schreibweise für $d(B_u^{-1}v(u, S_u))$ zu erhalten, wird auf diesen Term die partielle Integration angewandt. Es gilt:

$$d(B_u^{-1}v(u, S_u)) = v(u, S_u) dB_u^{-1} + B_u^{-1} dv(u, S_u)$$

Anwendung der Ito-Formel auf $v(u, S_u)$:

$$d(B_u^{-1}v(u, S_u)) = v(u, S_u) dB_u^{-1} + \quad (5.10)$$

$$+ B_u^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial u} v(u, S_u) du + \frac{\partial}{\partial S_u} v(u, S_u) dS_u + \frac{1}{2} \sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2}{\partial S_u^2} v(u, S_u) \right) = \quad (5.11)$$

$$= v(u, S_u) dB_u^{-1} + B_u^{-1} \frac{\partial}{\partial S_u} v(u, S_u) dS_u \quad (5.12)$$

In der letzten Gleichheit wurde die Differentialgleichung (5.4) eingesetzt. Wird auf $S_u^* = B_u^{-1} S_u$ die partielle Integration angewandt, so gilt:

$$dS_u^* = S_u dB_u^{-1} + B_u^{-1} dS_u$$

¹⁵siehe: S.36

Multiplizieren mit $\frac{\partial}{\partial S_u} v(u, S_u)$ ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial S_u} v(u, S_u) dS_u^* = \frac{\partial}{\partial S_u} v(u, S_u) S_u dB_u^{-1} + B_u^{-1} \frac{\partial}{\partial S_u} v(u, S_u) dS_u = \quad (5.13)$$

$$= v(u, S_u) dB_u^{-1} + B_u^{-1} \frac{\partial}{\partial S_u} v(u, S_u) dS_u \quad (5.14)$$

Die Formeln (5.12) und (5.14) stimmen überein, daraus folgt:

$$d(B_u^{-1} v(u, S_u)) = \frac{\partial}{\partial S} v(u, S_u) dS_u^*$$

Einsetzen in (5.8) und (5.9) ergibt:

$$\begin{aligned} V_t^* - V_0 &= - \int_0^t B_u^{-1} v(u, S_u) {}_{T-u}p_{x+u} dM_u + \\ &+ \int_0^t (L_x - N_{u-}) {}_{T-u}p_{x+u} \frac{\partial}{\partial S} v(u, S_u) dS_u^* \end{aligned}$$

Um eine kürzere Schreibweise für den intrinsischen Wertprozess zu erhalten, werden zwei neue Variablen θ und ν definiert. Für Erstere gilt:

$$\theta_u := (L_x - N_{u-}) {}_{T-u}p_{x+u} \frac{\partial}{\partial S} v(u, S_u)$$

In Worten: Anzahl der Überlebenden kurz vor u · Überlebenswahrscheinlichkeit bis T · Delta-Hedge für $g(S_T)$.

Die zweite Variable ν ist definiert als:

$$\nu_u := -B_u^{-1} v(u, S_u) {}_{T-u}p_{x+u}$$

In Worten: Auszahlung der Leistung zum Zeitpunkt u diskontiert auf den Zeitpunkt 0 · Überlebenswahrscheinlichkeit bis T , das heißt die Auszahlung der Leistung an die Versicherungsnehmer, die zur Zeit T leben.

Durch die Einführung der neuen Variablen ist die Kunita-Watanabe-Zerlegung des diskontierten intrinsischen Wertprozesses V_t^* zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ deutlich erkennbar:

$$V_t^* - V_0 = \int_0^t \nu_u dM_u + \int_0^t \theta_u dS_u^*$$

Es folgt, dass $\boldsymbol{\theta}$ der optimale Föllmer-Sondermann Hedgingstrategie darstellt.

Der Verlustprozess L_t ist der nicht-absicherbare Teil der Zerlegung gegeben durch:

$$dL_t = \nu_t dM_t = -B_t^{-1} v(t, S_t)_{T-t} p_{x+t} dM_t$$

Für den intrinsischen Risikoprozess sind noch die folgende Definitionen und Folgerungen, die aus [18] stammen, notwendig.

Definition 5.7. \exists ein prävisibler Prozess $\boldsymbol{\theta}$ mit

$$\int_0^t \theta_u dN_u := \sum_{0 < s \leq t} \theta_s \Delta N_s$$

Das stochastische Integral ist wohldefiniert, da $\Delta N_s \neq 0$ nur für eine höchstens abzählbare Anzahl von s ist.

Definition 5.8. Der *quadratische Variationsprozess* von $\int \boldsymbol{\theta} d\mathbf{N}$ ist definiert durch:

$$\left[\int \boldsymbol{\theta} d\mathbf{N} \right]_t = \int_0^t \theta_u^2 d[\mathbf{N}]_u := \sum_{0 < s \leq t} \theta_s^2 (\Delta N_s)^2 = \sum_{0 < s \leq t} \theta_s^2 \Delta N_s$$

Definition 5.9. Der *Spitzklammerprozess* $\langle \int \boldsymbol{\theta} d\mathbf{N} \rangle$ ist der prävisible Komparator von $[\int \boldsymbol{\theta} d\mathbf{N}]$, das heißt der eindeutige prävisible Prozess, sodass $[\int \boldsymbol{\theta} d\mathbf{N}] - \langle \int \boldsymbol{\theta} d\mathbf{N} \rangle$ ein Martingal ist.

Folgerung des Spitzklammerprozesses: \exists prävisibler Prozess $\boldsymbol{\lambda}$, sodass:

$$\left\langle \int \boldsymbol{\theta} d\mathbf{N} \right\rangle_t = \int_0^t \theta_u^2 d\langle \mathbf{N} \rangle_u = \int_0^t \theta_u^2 \lambda_u du$$

Für $\boldsymbol{\theta} = 1$ (es gilt $[\mathbf{N}]_t = N_t$) und dem Resultat, dass $[\int \boldsymbol{\theta} d\mathbf{N}] - \langle \int \boldsymbol{\theta} d\mathbf{N} \rangle$ ein Martingal ist, folgt, dass $N_t - \int_0^t \lambda_u du = [\mathbf{N}]_t - \int_0^t \lambda_u du$ ein Martingal ist. Als Folgerungen dieser Aussagen gelten nun zwei Eigenschaften:

- Martingaleigenschaft:

$$\mathbb{E}^* \left[\int_t^T \theta_u dN_u \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^* \left[\int_t^T \theta_u \lambda_u du \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

- Ito-Isometrie-Eigenschaft des stochastischen Integrals bezüglich des Martingals $M_t = N_t - \int_0^t \lambda_u du$ liefert:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^* \left[\left(\int_t^T \theta_u dM_u \right)^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E}^* \left[\int_t^T \theta_u^2 d[\mathbf{M}]_u \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\
&= \mathbb{E}^* \left[\int_t^T \theta_u^2 d\langle \mathbf{M} \rangle_u \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\
&= \mathbb{E}^* \left[\int_t^T \theta_u^2 \lambda_u du \middle| \mathcal{F}_t \right]
\end{aligned}$$

Aus den Resultaten kann nun der intrinsische Risikoprozess berechnet werden:

$$\begin{aligned}
R_t &= \mathbb{E}^* \left[\left(\int_t^T \nu_u dM_u \right)^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^* \left[\int_t^T (\nu_u)^2 d[\mathbf{M}]_u \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\
&= \mathbb{E}^* \left[\int_t^T (\nu_u)^2 d\langle \mathbf{M} \rangle_u \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^* \left[\int_t^T (\nu_u)^2 (L_x - N_{u-}) \mu_{x+u} du \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\
&= \int_t^T \mathbb{E}^* [(\nu_u)^2 | \mathcal{F}_t] \mathbb{E} [(L_x - N_{u-}) | \mathcal{T}_t] \mu_{x+u} du = \\
&= (L_x - N_{t-}) \int_t^T \mathbb{E}^* [(\nu_u)^2 | \mathcal{F}_t] {}_{u-t}p_{x+t} \mu_{x+u} du \\
&= (L_x - N_{t-}) \int_t^T \mathbb{E}^* \left[(-B_u^{-1} v(u, S_u) {}_{T-u}p_{x+u})^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] {}_{u-t}p_{x+t} \mu_{x+u} du
\end{aligned}$$

6 Valuation Portfolio

6.1 Allgemeines

In diesem Kapitel wird das im Buch [21] konstruierte Valuation Portfolio (VaPo) für eine fondsgebundene Erlebensversicherung ohne Garantie eingeführt.

Der Grund für die Konstruktion des VaPos ist (wie im ersten Kapitel bereits beschrieben) die marktkonsistente Bewertung der Bilanz eines Versicherungsunternehmens, um daraus die Solvenz des Institutes bestimmen zu können. Das große Problem hierbei ist nämlich die Passivseite (der Bilanz), da versicherungstechnische Verbindlichkeiten auf keinem aktiven Markt gehandelt werden. Als Lösung für dieses Problem wird in dem Buch [21] das Valuation Portfolio eingeführt. Dieses ist ein Modell, das den Marktwert nachahmen soll.

Die folgende Abbildung zeigt eine Gegenüberstellung der Aktiva (Anlagebestand zur Deckung vers.tech. Verb.) und der Passiva (best-estimate Reserven) einer Bilanz.

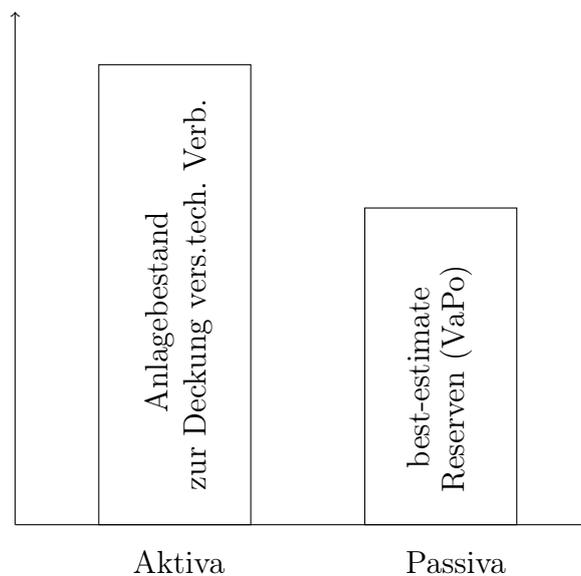


Abbildung 2: Gegenüberstellung der Aktiva und Passiva (VaPo); Nachahmung von Fig. 7.1. aus [21, S.170]

Das Valuation Portfolio ist nach [21] eine Abbildung des versicherungstechnischen Zahlungsstromes in einen Vektorraum mit Basisfinanzinstrumenten $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$, als Basis. Da es sich bei diesen Betrachtungen aber um ein unvollständiges Marktmodell handelt, da sowohl das Langlebkeitsrisiko (Überlebenswahrscheinlichkeiten der

Versicherungsnehmer) als auch das finanzielle Risiko (Aktienkursschwankungen) in das Modell einfließen, können die Basisfinanzinstrumente die versicherungstechnischen Verbindlichkeiten nicht perfekt replizieren. Das heißt, diese können nicht ohne Restrisiko abgesichert werden. Dieses kann mit dem Föllmer-Sondermann-Ansatz, welcher bereits im fünften Kapitel beschrieben wurde, minimiert werden. Als Ergebnis erhalten wir einen hedgebaren und einen nicht-hedgebaren Teil. Auf den nicht-hedgebaren Teil kann ein Risikomaß angewandt werden, im Fall von Föllmer-Sondermann ist das der intrinsische Risikoprozess.

Nach der Konstruktion des VaPos werden beide Seiten der Bilanz mit Basisfinanzinstrumenten beschrieben. Das heißt, die beiden Seiten können miteinander verglichen und daraus folgernd konsistent bewertet werden.

Das folgende Kapitel beschreibt theoretisch den Ablauf der Konstruktion des VaPos. Für dieses Modell wird eine vereinfachte Annahme getroffen. Es gilt nämlich für die Wahrscheinlichkeitsdistortion:

$$\varphi^T \equiv 1$$

Im Abschnitt „8 Protected Valuation Portfolio“ wird das VaPo auch für eine „schwierigere“ Wahrscheinlichkeitsdistortion konstruiert.

Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit werden die Prozesse und Werte immer diskontierte auf den Zeitpunkt 0 betrachtet. Auf die Schreibweise mit „Stern“ wird aber, bis auf eine Ausnahme (Vermögensprozess \mathbf{V}^*), verzichtet.

6.2 Föllmer-Sondermann-Ansatz

Für den Föllmer-Sondermann-Ansatz wird der Spezialfall $H = (L_x - N_T) g(S_T) = (L_x - N_T) S_T$ betrachtet, das heißt es gilt $g(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$.

Der diskontierte intrinsische Vermögensprozess ist zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} V_t^* &= \mathbb{E} \left[(L_x - N_T) \varphi_T^A S_T \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\ &= \mathbb{E}[L_x - N_T | \mathcal{T}_t] \mathbb{E}^* \left[B_T^{-1} S_T \middle| \mathcal{A}_t \right] \end{aligned}$$

Für den finanziellen Teil der Auszahlung gilt: $v(t, S_t) = \mathbb{E} [B_t B_T^{-1} S_T | \mathcal{A}_t]$. Der versicherungstechnische Teil bleibt im Vergleich zum allgemeinen Fall gleich. Es

gelten für den finanziellen Teil folgende Berechnungen:

$$\begin{aligned}
V_t^* &= (L_x - N_t) {}_{T-t}p_{x+t} B_t^{-1} v(t, S_t) = \\
&= (L_x - N_t) {}_{T-t}p_{x+t} B_t^{-1} \mathbb{E}^* \left[B_t B_T^{-1} S_T \middle| \mathcal{A}_t \right] = \\
&= (L_x - N_t) {}_{T-t}p_{x+t} \mathbb{E}^* \left[B_T^{-1} S_T \middle| \mathcal{A}_t \right] = \\
&= (L_x - N_t) {}_{T-t}p_{x+t} B_t^{-1} S_t = \\
&= (L_x - N_t) {}_{T-t}p_{x+t} S_t^*
\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit gilt, da $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{S}$ ein $(\mathbb{P}^*, \mathbb{A})$ -Martingal ist. Um die optimale Föllmer-Sondermann Hedgingstrategie zu erhalten, müssen die oben definierten Variablen θ und ν nun berechnet werden. Für den Delta-Hedge gilt $\frac{\partial}{\partial S_u} v(u, S_u) = 1$, daher folgt:

$$\begin{aligned}
\theta_u &= (L_x - N_{u-}) {}_{T-u}p_{x+u} \\
\nu_u &= -S_u^* {}_{T-u}p_{x+u}
\end{aligned}$$

In diesem Spezialfall $g(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$ ist die Kunita-Watanabe-Zerlegung gegeben durch:

$$V_t^* - V_0 = + \int_0^t -S_u^* {}_{T-u}p_{x+u} dM_u + \int_0^t (L_x - N_{u-}) {}_{T-u}p_{x+u} dS_u^* \quad (6.1)$$

Daraus folgt der Verlustprozess L_t :

$$dL_t = -S_t^* {}_{T-t}p_{x+t} dM_t$$

Der intrinsischer Risikoprozess $\mathbf{R} = (R_t)_{t \in [0, T]}$ ist im allgemeinen Fall ein sehr langer Term. In diesem Spezialfall kann R_t für $t \in [0, T]$ aber explizit berechnet werden:

$$R_t = (L_x - N_{t-}) \int_t^T \mathbb{E}^* \left[(-S_u^* {}_{T-u}p_{x+u})^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] {}_{u-t}p_{x+t} \mu_{x+u} du$$

Unter \mathbb{P}^* ist \mathbf{S}^* zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gegeben durch $S_t^* = S_0 e^{\sigma W_t^* - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$, daher gilt für $u \geq t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^* \left[(S_u^*)^2 {}_{T-u}p_{x+u}^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] &= S_0^2 \mathbb{E}^* \left[e^{2\sigma W_u^* - \sigma^2 u} {}_{T-u}p_{x+u}^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\
&= S_0^2 {}_{T-u}p_{x+u}^2 \mathbb{E}^* \left[e^{2\sigma W_u^* - \sigma^2 u} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\
&= S_0^2 {}_{T-u}p_{x+u}^2 e^{-\sigma^2 u} \mathbb{E}^* \left[e^{2\sigma W_u^*} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\
&= S_0^2 {}_{T-u}p_{x+u}^2 e^{-\sigma^2 u} \mathbb{E}^* \left[e^{2\sigma(W_u^* - W_t^*) + 2\sigma W_t^*} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\
&= S_0^2 {}_{T-u}p_{x+u}^2 e^{-\sigma^2 u} e^{2\sigma W_t^*} \mathbb{E}^* \left[e^{2\sigma(W_u^* - W_t^*)} \right]
\end{aligned}$$

Die Inkremente $W_u^* - W_t^*$ einer Brown'schen Bewegung sind unabhängig. Daher kann der bedingte Erwartungswert in der letzten Gleichheit durch einen Erwartungswert ersetzt werden.

Da $e^{2\sigma(W_u^* - W_t^*)} \sim \ln \mathcal{N}(0, 4\sigma^2(u-t))$ ¹⁶ gilt, können wir den Erwartungswert berechnen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^* [(S_u^*)^2 {}_{T-u}p_{x+u}^2 | \mathcal{F}_t] &= S_0^2 {}_{T-u}p_{x+u}^2 e^{-\sigma^2 u} e^{2\sigma W_t} e^{2\sigma^2(u-t)} = \\ &= S_0^2 {}_{T-u}p_{x+u}^2 e^{2\sigma W_t} e^{-\sigma^2 t} e^{\sigma^2(u-t)} = \\ &= S_0^2 e^{2\sigma W_t - \sigma^2 t} {}_{T-u}p_{x+u}^2 e^{\sigma^2(u-t)} = \\ &= (S_t^*)^2 {}_{T-u}p_{x+u}^2 e^{\sigma^2(u-t)} \end{aligned}$$

Nach Einsetzen des Resultates, erhalten wir für den intrinsischen Risikoprozess R_t :

$$R_t = (L_x - N_{t-}) (S_t^*)^2 \int_t^T e^{\sigma^2(u-t)} {}_{T-u}p_{x+u}^2 {}_{u-t}p_{x+t} \mu_{x+u} du = \quad (6.2)$$

$$= (L_x - N_{t-}) (S_t^*)^2 \int_t^T e^{\sigma^2(u-t)} {}_{T-u}p_{x+u} {}_{T-t}p_{x+t} \mu_{x+u} du \quad (6.3)$$

6.3 Modellannahmen

Das Portfolio für die Konstruktion des Valuation Portfolios einer fondsgebundenen Lebensversicherung besteht aus n Versicherungsnehmern, jeweils im Alter x , die zum Zeitpunkt 0 gleichartige Versicherungsverträge abschließen. Bei Betrachtung der Leistungsart handelt es sich um eine Erlebensversicherung ohne Garantie:

- Die Auszahlung im Erlebensfall ist der Index des Finanzportfolios \mathfrak{A} .

Es gelten die folgenden Modellannahmen:

- L_x ... Die Anzahl der x -jährigen Personen im Portfolio zum Zeitpunkt 0, das heißt zum Vertragsabschluss.
- $D_{x+t} = L_{x+t-1} - L_{x+t}$... Die Anzahl der Todesfälle im Intervall $(t-1, t]$.
- ${}_m p_{x+t}$... Die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherungsnehmer i für $i = 1, \dots, L_x$ als $x+t$ -Jähriger m Jahr überlebt.
- Π ... Die Prämienzahlung einer im Portfolio versicherten Person zum Zeitpunkt 0.

¹⁶Der Erwartungswert einer nach $\ln \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariable X ist definiert durch $\mathbb{E}[X] := e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$.

- $\mathcal{J} = \{0, T\}$... Die Laufzeit der fondsgebundenen Versicherung.

Im weiteren Verlauf werden die einzelnen Schritte, wie das Valuation Portfolio nach der Vorgehensweise von [21] konstruiert wird, erklärt.

6.4 Schritte zur Konstruktion des VaPos

1. Schritt: Konstruktion des VaPos Für die Modellierung des VaPos werden im Fall der fondsgebundenen Erlebensfallversicherung drei Finanzportfolios benötigt.

Es wird nun angegeben, welche Finanzportfolios für die Replikation der versicherungstechnischen Zahlungsströme herangezogen werden. Die Hochstellung bedeutet hierbei, wann ein Finanzportfolio veräußert wird.

- Der Prämienzahlungsstrom findet zur Zeit 0 statt. Daher wird hierfür nur eine Nullkuponanleihe mit Laufzeit 0 gegeben durch $\mathfrak{Z}^{(0)}$ betrachtet.
- Der Zahlungsstrom im Erlebensfall wird durch das Finanzportfolio $\mathfrak{S}^{(T)}$ modelliert.
- Für die Diskontierung des Zahlungsstromes im Erlebensfall wird eine Nullkuponanleihe $\mathfrak{Z}^{(T)}$ mit Laufzeit T benötigt.

Die erwähnten Finanzportfolios zur Replikation der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten der betrachteten fondsgebundenen Erlebensfallversicherungen spannen einen 3-dimensionalen Vektorraum auf:

$$(\mathfrak{Z}^{(0)}, \mathfrak{S}^{(T)}, \mathfrak{Z}^{(T)})$$

Es folgt die Abbildung:

$$\mathbf{X} \rightarrow -\mathfrak{Z}^{(0)} L_x \Pi + \mathfrak{Z}^{(T)} L_{x+T} \mathfrak{S}^{(T)}$$

Die unten stehenden Punkte sind dabei zu beachten:

- Die Anzahl der Lebenden zum Zeitpunkt 0 gegeben durch $L_x = \Lambda^{(0)}$ und zum Zeitpunkt T gegeben durch $L_{x+T} = \Lambda^{(T)}$ sind die versicherungstechnischen Variablen, wobei $\Lambda^{(0)}$ \mathcal{T}_0 -messbar und $\Lambda^{(T)}$ \mathcal{T}_T -messbar ist.
- Der Preisprozess $P(0, 0)$ von $\mathfrak{Z}^{(0)}$ ist \mathcal{A}_0 -messbar. Die Preisprozesse $(S_t)_{t \in [0, T]}$ von $\mathfrak{S}^{(T)}$ und $(P(t, T))_{t \in [0, T]}$ von $\mathfrak{Z}^{(T)}$ sind \mathbb{A} -adaptiert. Alle drei Preisprozesse sind integrierbar, φ - und φ^A -konsistent.

2. Schritt: Konstruktion des VaPos In diesem Schritt wird das VaPo zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ konstruiert. Das heißt, es wird bestimmt, wieviele Finanzportfolios zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gehalten werden müssen. Für die versicherungstechnische Variable ist dabei zu beachten, dass $\Lambda^{(T)}$ nicht \mathcal{T}_t -messbar ist, wobei $t \in [0, T]$ gilt. Deshalb werden diese Variablen durch die best-estimate Betrachtungsweise, das heißt durch den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[\Lambda^{(T)}|\mathcal{T}_t]$, ausgedrückt.

Daraus folgt die Abbildung:

$$\mathbf{X} \rightarrow \text{VaPo}_t(\mathbf{X}) = -\mathfrak{Z}^{(0)} L_x \Pi + \mathfrak{Z}^{(T)} \mathbb{E}[L_{x+T}|\mathcal{T}_t] \mathfrak{S}^{(T)} \quad (6.4)$$

Hat ein Versicherungsunternehmen bereits Zahlungen zu den Zeitpunkten $1, \dots, k$ getätigt, wobei $k \in \mathcal{J}$ gilt, dann müssen nur noch die ausstehenden Verbindlichkeiten $\mathbf{X}_{(k+1)} = (0, \dots, 0, X_{k+1}, \dots, X_T) \in \mathcal{L}_\varphi$ zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$, wobei $k \leq t < k+1$ gilt, betrachtet werden.

Für das VaPo der ausstehenden Verbindlichkeiten zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ mit $k \leq t < k+1$ gilt:

$$\text{VaPo}_t(\mathbf{X}_{(k+1)}) = \mathfrak{Z}^{(T)} \mathbb{E}[L_{x+T}|\mathcal{T}_t] \mathfrak{S}^{(T)} \quad (6.5)$$

Das heißt, in diesem Fall fällt nur der Prämienzahlungsstrom zum Zeitpunkt 0 weg. Da $\varphi^T \equiv 1$ gewählt wird, kann der bedingte Erwartungswert umgeschrieben werden. Es gilt für (6.4) und (6.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \rightarrow \text{VaPo}_t(\mathbf{X}) &= -\mathfrak{Z}^{(0)} L_x \Pi + \mathfrak{Z}^{(T)} (L_x - N_t) {}_{T-t}p_{x+t} \mathfrak{S}^{(T)} \\ \text{VaPo}_t(\mathbf{X}_{(k+1)}) &= \mathfrak{Z}^{(T)} (L_x - N_t) {}_{T-t}p_{x+t} \mathfrak{S}^{(T)} \end{aligned}$$

3. Schritt: Monetärer Wert des VaPos In diesem Schritt wird das $\text{VaPo}_t(\mathbf{X})$ auf den monetären Wert zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ abgebildet. Da hier die best-estimate Betrachtungsweise vorliegt, wird, wie bereits erwähnt, anstatt $\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}]$ der Ausdruck $\mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}]$ für den monetären Wert zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ verwendet.

Es gilt die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \text{VaPo}_t(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}] &= -L_x \Pi + (L_x - N_t) {}_{T-t}p_{x+t} B_t^{-1} \mathbb{E} \left[B_t B_T^{-1} S_T \middle| \mathcal{A}_t \right] = \\ &= -L_x \Pi + (L_x - N_t) {}_{T-t}p_{x+t} \mathbb{E} \left[B_T^{-1} S_T \middle| \mathcal{A}_t \right] = \\ &= -L_x \Pi + (L_x - N_t) {}_{T-t}p_{x+t} B_t^{-1} S_t = \\ &= -L_x \Pi + (L_x - N_t) {}_{T-t}p_{x+t} S_t^* \end{aligned}$$

Um nun den hedgebaren und den nicht-hedgebaren Teil zu erhalten, betrachten wir vorerst den Term $(L_x - N_t) {}_{T-t}p_{x+t} S_t^*$. Dieser ist genau der diskontierte intrinsische Vermögensprozess V_t^* aus dem Unterabschnitt „6.2 Föllmer-Sondermann-Ansatz“ (6.1). Die Kunita-Watanabe-Zerlegung ist gegeben durch

$$\mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}] = -L_x \Pi + \int_0^t \nu_u dM_u + \int_0^t \theta_u dS_u^*$$

wobei

$$\begin{aligned} \theta_u &= (L_x - N_{u-}) {}_{T-u}p_{x+u} \\ \nu_u &= -S_u^* {}_{T-u}p_{x+u} \end{aligned}$$

gilt. Das heißt, der monetäre Wert des hedgebaren Teils hat die Form

$$\mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}]_h = -L_x \Pi + \int_0^t (L_x - N_{u-}) {}_{T-u}p_{x+u} dS_u^* \quad (6.6)$$

und des nicht-hedgebaren Teils:

$$\mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}]_{nh} = \int_0^t -S_u^* {}_{T-u}p_{x+u} dM_u$$

Durch den nicht-hedgebaren Teil entsteht beim Replizieren des versicherungstechnischen Zahlungsstromes mit Basisfinanzinstrumenten ein Risiko. Eine Handelsstrategie bestimmt, wie die restlichen oder auch zukünftigen Risiken (Kosten) aussehen. Ein Maß für das zukünftige Risiko ist der intrinsische Risikoprozess. Eine Strategie heißt genau dann risikominimierend, wenn der intrinsische Risikoprozess im Vergleich zu anderen Strategien minimal ist. Der intrinsische Risikoprozess unter der optimalen Strategie $\phi = (\theta, \nu)$ ist gegeben durch:

$$R_t = (L_x - N_{t-}) (S_t^*)^2 \int_t^T e^{\sigma^2(u-t)} {}_{T-u}p_{x+u} {}_{T-t}p_{x+t} \mu_{x+u} du \quad (6.7)$$

Insgesamt ergibt sich für den monetären Wert des Valuation Portfolios:

$$\mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}] = \mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}]_h + \mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}]_{nh} \quad (6.8)$$

Auch das im 2. Schritt beschriebene $\text{VaPo}_t(\mathbf{X}_{(k+1)})$ für ausständige Verbindlichkeiten zum Zeitpunkt $t \in [0, T)$, wobei $k \leq t < k+1$ gilt, kann auf den monetären Wert $\mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}_{(k+1)}]$ abgebildet werden. Dieser monetäre Wert wird auch best-estimate Reserve für ausständige Verbindlichkeiten genannt und als $\mathcal{R}_t^0(\mathbf{X}_{(k+1)})$ angeschrieben.

$$\mathcal{R}_t^0(\mathbf{X}_{(k+1)}) = \mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}_{(k+1)}]_h + \mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}_{(k+1)}]_{nh} \quad (6.9)$$

7 Numerisches Beispiel für das Valuation Portfolio

7.1 Bemerkung

Das Beispiel basiert, bis auf den historische Daten für die Zinsmodellierung (Euribor aus [1], Spot-Rate-Kurve für AAA-Staatsanleihen im europäischen Raum aus [4]) und den Sterbewahrscheinlichkeiten aus der österreichischen Sterbetafel 2012 unisex (aus [2]), auf ausgedachte Zahlen und soll nur zur Veranschaulichung dienen.

7.2 Allgemeines

Für das numerische Beispiel werden folgende Konventionen getroffen. Die Anzahl der Versicherten in dem betrachteten homogenen Portfolio (Versicherungsnehmer sind im selben Lebensjahr, hier: $x=40$) beträgt zum Zeitpunkt des Versicherungsbeginns 1000, das heißt $L_{40} = 1000$. Die fondsgebundenen Erlebensversicherungen für diese Kohorte beginnen am 1. Jänner 2014 und dauern 10 Jahre, das heißt $T = 10$. Es wird weiters angenommen, dass dem Versicherungsnehmer beim Vertragsabschluss keine Kosten entstehen.

Die Prämie pro Versicherungsnehmer beträgt EUR 10. Diese wird in einen Investmentfonds investiert. Das in dem Investmentfonds enthaltene Geld wird in eine Aktie veranlagt, deren Kurswert zum Beginn der Versicherung EUR 10 beträgt. Das heißt, pro Versicherungsnehmer wird in 1 Stück Aktie investiert.

Für die Modellierung des Bankkontos wird ein stochastischer Zins, der nach Vasicek [17] modelliert wird, herangezogen. Die Wahl der Parameter für die Simulation kann durch historischen Daten oder durch Kalibrierung an aktuellen Marktdaten erfolgen. Schätzen wird diese zum Beispiel mit dem Maximum-Likelihood-Schätzer anhand von historischen Daten, so ergeben sich die optimalen Parameter für die Zinsmodellierung unter dem physischen Maß \mathbb{P} . Erfolgt die Parameterwahl durch Kalibrierung an aktuellen Marktdaten, so resultieren optimale Parameter für die Zinsmodellierung unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{P}^* . Es werden beide Methoden durchgeführt, da es für die Variablen unter beiden Maßen Zusammenhänge gibt.

Die Sterbewahrscheinlichkeiten und die Sterbeintensitäten basieren auf der österreichischen Sterbetafel 2012 (unisex). Die Überlebenswahrscheinlichkeit, dass ein $x + t$ -Jähriger noch $T - t$ Jahre lebt, ausgedrückt durch die Sterbeintensität, ist gegeben durch:

$${}_{T-t}p_{x+t} = \exp\left(-\int_t^{T-t} \mu_{x+u} du\right)$$

7.3 Sterbewahrscheinlichkeit und Sterbeintensität

Wie bereits erwähnt, stammen die Sterbewahrscheinlichkeiten aus der Sterbetafel 2012 unisex, die von der Statistik Austria zur Verfügung gestellt wird. Die Angaben erstrecken sich vom Alter 0 bis zum Alter 99, das heißt es gilt $x = 0, \dots, 99$ und $\omega = 99$.

Die Werte aus der Sterbetafel sind Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung, das heißt die Sterbewahrscheinlichkeiten werden aus tatsächlich eingetretene Sterbefällen berechnet. Normalerweise werden für Versicherungsarten mit Erlebensfallcharakter, wie es hier der Fall ist, Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung herangezogen, da diese einen Sicherheitszuschlag enthalten. Da jedoch die Konstruktion und Berechnung des Valuation Portfolios auf [21] basieren, wird wie in diesem Buch vorgegangen und daher die Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung für das Valuation Portfolio herangezogen.

Wie bereits erwähnt, können die Sterbewahrscheinlichkeiten aus der entsprechenden Sterbetafel entnommen werden. Die Überlebenswahrscheinlichkeit eines x -Jährigen erhalten wir aus der Beziehung:

$$q_x = 1 - p_x$$

Unter der Annahme, dass die Sterbeintensität unterjährig konstant ist, kann diese, ausgehend von der einjährigen Überlebenswahrscheinlichkeit, für jedes Alter $x = 0, \dots, 99$ berechnet werden:

$$\mu_x = -\log(p_x)$$

Die folgende Graphik zeigt die Sterbewahrscheinlichkeit und die Sterbeintensität basierend auf der Sterbetafel 2012 unisex.

7.4 Zählprozess des Todes

Für den Zählprozess des Todes wird die Annahme getroffen, dass dieser unterjährig konstant ist. Die Anzahl der Toten werden daher nur einmal im Jahr abgezogen. Diese Reduzierung erfolgt immer am letzten Tag (31. Dezember) des jeweiligen Jahres, das heißt $\tau_i = 31. \text{ Dezember}$ für alle $i = 1, \dots, 10$. Es gelten die Berechnungen:

$$\begin{aligned} N_0 &= 0 \\ N_i &= \lfloor L_{x+i} q_{x+i} \rfloor \quad \forall i = 0, \dots, 10 \end{aligned}$$

Im Anhang 2 wird dieser Zählprozess graphisch dargestellt.

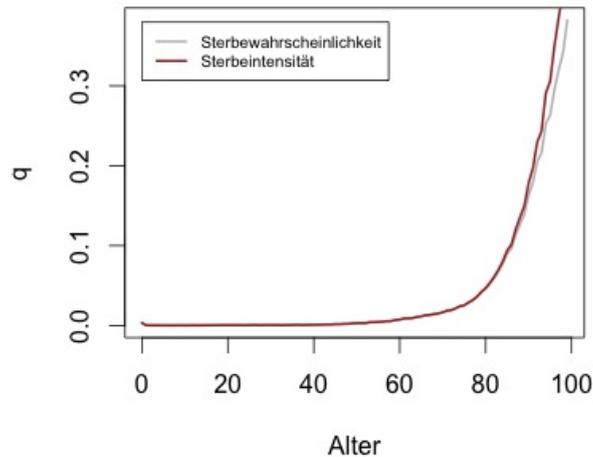


Abbildung 3: Sterbewahrscheinlichkeiten und Sterbeintensitäten basierend auf der Sterbetafel 2012 unisex aus [2]

7.5 Modellierung der Zinskurve auf eine NKP

Für die Modellierung der Zinskurve müssen passende und realitätsnahe Parameter gefunden werden. Dafür werden einerseits historische Daten des Referenzzinssatzes Euribor mit einer Maturität von 1 Monat aus [1] verwendet und andererseits die aktuelle Spot-Rate-Kurve für AAA-Staatsanleihen im europäischen Raum [4].

7.5.1 Historische Daten: Euribor

Die historische Daten erstrecken sich auf einem Zeitraum von 15 Jahren, das heißt von Jänner 1999 bis Jänner 2014. Für die Wahl der Beobachtungen wird jeweils der Euribor-Wert am ersten Handelstag im Monat gewählt, das heißt 1. Jänner 1999, 1. Februar 1999, ..., 2. Jänner 2014. Daraus ergeben sich 181 Beobachtungen. Zur Vereinfachung wird die Annahme getroffen, dass der Zins vom 2. Jänner am 1. Jänner bereits gilt.

Aufgrund der Wirtschaftskrise ab dem Jahr 2008 ist im betrachteten Zeitraum eine deutliche Senkung des Zinses zu erkennen. Der gewählte Zins unterliegt daher einer großen Schwankungsbreite. Um diese Volatilität auszugleichen, wird dieser größere Betrachtungszeitraum von 15 Jahren gewählt.

Die folgende Graphik stellt den Verlauf des Referenzzinssatzes Euribor mit einer Maturität von 1 Monat graphisch dar.

Die folgende Graphik zeigt den Verlauf des Euribor mit einer Maturität von 1 Monat von Jänner 1999 bis Jänner 2014.

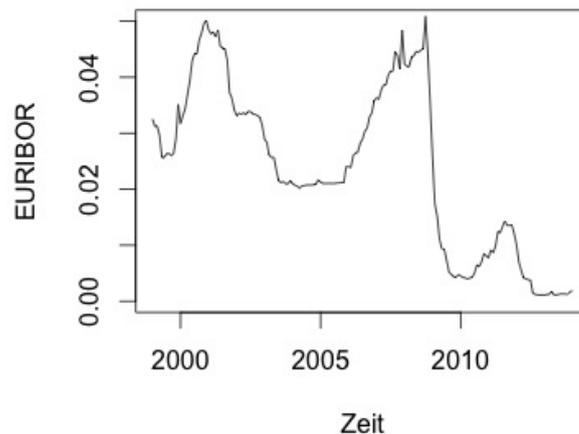


Abbildung 4: Euribor mit einer Maturität von 1 Monat

7.5.2 Aktuelle Marktdaten

Die aktuellen Marktdaten für die Zinskurve stammen von Spot-Rate-Werten für AAA-Staatsanleihen im europäischen Raum.

Die folgende Graphik zeigt den Verlauf des Zinse auf eine Nullkuponanleihe mit verschiedenen Maturitäten basierend auf Marktdaten.

7.5.3 Parameterwahl durch historische Daten

Im Unterabschnitt „3.2 Vasicek-Modell“ wurde bereits der Zins r in Form einer stochastischen Differentialgleichung unter der Dynamik (3.1) eingeführt. Hierbei wurde jedoch davon ausgegangen, dass der Zins zum Zeitpunkt 0 für den Zeitpunkt $t \in [0, T]$ modelliert wird. Für dieses numerische Beispiel sind t_i die Betrachtungszeitpunkte des zukünftigen Zinses. Es wird hier nicht zum Zeitpunkt 0, sondern

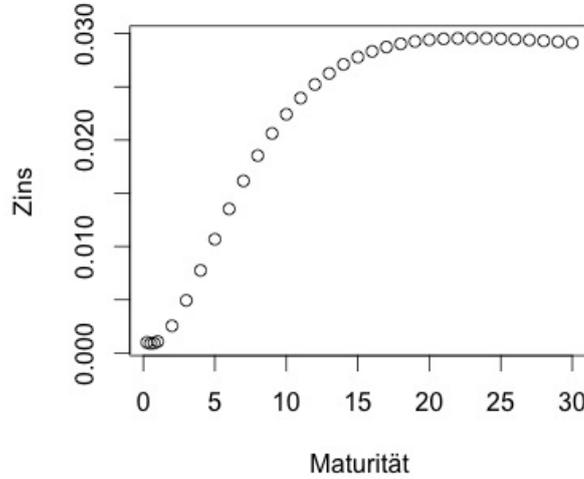


Abbildung 5: Zins auf eine Nullkuponanleihe mit verschiedenen Maturitäten basierend auf Marktdaten

zum Zeitpunkt t_i der Zins für den Zeitpunkt t_{i+1} für $i = 0, \dots, 180$ modelliert und es gilt $\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{1}{12}$ Jahr. Die Formeln (3.2), (3.3) und (3.4) werden adaptiert durch

$$r_{i+1} = e^{-a\Delta t} r_i + \frac{b}{a}(1 - e^{-a\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\Delta t}}{2a}} Z_{i+1}$$

$$\mathbb{E}[r_{i+1} | \mathcal{F}_i] = e^{-a\Delta t} r_i + \frac{b}{a}(1 - e^{-a\Delta t})$$

$$\mathbb{V}[r_{i+1} | \mathcal{F}_i] = \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2a\Delta t}}{2a} \right)$$

wobei Z_{i+1} eine standard-normalverteilte Zufallsvariable¹⁷ ist. Durch diese Formeln kann bereits der Zins r im Vasicek-Modell modelliert werden. Die Parameter a , b , σ und der Startwert r_0 sind jedoch noch unbekannt. Für die Wahl der Parameter a , b und σ wird der Maximum-Likelihood-Schätzer (ML-Schätzer) angewandt. Aufgrund von den gegebenen historischen Euribor-Daten können damit die gesuchten Parameter geschätzt werden. Gehen wir nach [6] vor, so müssen zuerst die folgenden Hilfsparameter (Terme aus den obigen Formeln) geschätzt werden, um danach \hat{a} , \hat{b}

¹⁷ $Z_{i+1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ für alle $i = 0, \dots, 180$

und $\hat{\sigma}^2$ zu erhalten.

$$\rho = e^{-a\Delta t} \quad (7.1)$$

$$\varrho = \frac{b}{a} \quad (7.2)$$

$$V^2 = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t}) \quad (7.3)$$

Die ML-Schätzer für diese Parameter sind nach [6, S.62] gegeben durch:

$$\hat{\rho} = \frac{n \sum_{i=1}^n r_{i+1} r_i - \sum_{i=1}^n r_{i+1} \sum_{i=1}^n r_i}{n \sum_{i=1}^n r_i^2 - (\sum_{i=1}^n r_i)^2}$$

$$\hat{\varrho} = \frac{\sum_{i=1}^n (r_{i+1} - \hat{\rho} r_i)}{n(1 - \hat{\rho})}$$

$$\hat{V}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [r_{i+1} - \hat{\rho} r_i - \hat{\varrho}(1 - \hat{\rho})]^2$$

Formen wir (7.1), (7.2) und (7.3) um, dann erhalten wir die Schätzer für die gesuchten Parameter:

$$\hat{a} = \frac{-\log(\hat{\rho})}{\Delta t}$$

$$\hat{b} = \hat{\varrho} \hat{a}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{a}\hat{V}^2}{1 - e^{-2\hat{a}\Delta t}}$$

Einsetzen der historischen Euribor-Daten r_i für $i = 0, \dots, 180$ ergeben folgende Werte für die nach Maximum-Likelihood geschätzten Parameter:

$$\hat{a} = 0.0513863828$$

$$\hat{b} = -0.0007965962$$

$$\hat{\sigma} = 0.0069804817$$

Durch die Methode der ML-Schätzung aus historischen Daten sind zwar nun die optimalen Parameter für den Zins unter dem physischen Maß bekannt, jedoch nicht jene unter dem risikoneutralen Maß. In der Theorie gilt jedoch, dass σ und $b = \kappa\gamma$ unter beiden Maßen gleich sind. Lediglich der Term $a = \kappa + \lambda\sigma$ wird unter dem risikoneutralen Maß zu κ , das nun bestimmt werden muss.

7.5.4 Parameterwahl durch Kalibrierung an aktuellen Marktdaten

Ausgangspunkt für die Parameterwahl ist die stetig-verzinsten Spot-Rate $R(T) := R(0, T)$ auf eine Nullkuponanleihe mit Maturität T . Diese ist zum Zeitpunkt 0 definiert durch:

$$R(T) := -\frac{\log P(T)}{T - t}$$

Der Preis der Nullkuponanleihe $P(T) := P(0, T)$ zum Zeitpunkt 0 mit Maturität T ist im Vasicek-Modell nach [6, S.59] (jedoch in adaptierter Form: $A(T)$ wird hier in den Exponenten geschrieben) gegeben durch

$$P(T) := e^{A(T) - B(T)r_0}$$

wobei

$$A(T) = (B(T) - T) \left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right) - \frac{\sigma^2}{4\kappa} B(T)^2$$
$$B(T) = \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa}$$

gilt.

Wir können nun den Zins auf die Nullkuponanleihe durch den Preis der Nullkuponanleihe mit Maturität T ausdrücken:

$$R(T) = -\frac{\log P(T)}{T} = -\frac{A(T) - B(T)r_0}{T} = -\frac{A(T)}{T} + \frac{B(T)r_0}{T}$$

Wechseln wir nun bei der obigen Gleichung $R(T)$ durch eine Zinskurve $R^M(T)$, deren Werte aus Marktdaten entnommen sind, aus, dann erhalten wir durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate¹⁸ $\hat{\kappa}$.

Nach Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate für $\hat{\kappa}$, ergibt sich mit einem Fehlerterm von 0.0006878 der folgende optimale Parameter:

$$\hat{\kappa} = 0.06537$$

Vergleichen wir nun $\hat{a} \approx 0.051$ mit $\hat{\kappa} \approx 0.065$, so ergibt sich kein großer Unterschied.

Die nächste Graphik zeigt den Verlauf des marktbasierten Zinses und des modellbasierten Zinses.

¹⁸ausgeführt mit der Funktion `nls` der Software R

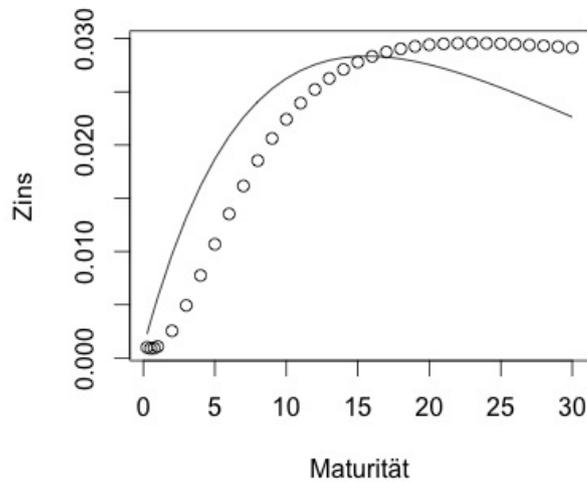


Abbildung 6: Zins auf eine Nullkuponanleihe mit verschiedenen Maturitäten basierend auf Modell- und Marktdaten

Der Beginn der fondsgebundenen Erlebensversicherungen ohne Garantie ist am 1. Jänner 2014. Da der Anfangswert zum Vertragsbeginn gegenwärtig und daher bekannt ist, kann er aus den historischen Euribor-Daten entnommen werden. Alle zukünftigen Zeitpunkte während der Versicherungsdauer sind, wie bereits erwähnt, unbekannt und müssen simuliert (hier: Vasicek-Modell) werden. Der Euribor-Wert mit Maturität 1 Monat hat am 1. Jänner 2014 einen Wert von 0,00214, das heißt $r_0 = 0,214\%$.

Die folgende Graphik stellt den Referenzzinssatz Euribor mit einer Maturität von 1 Monat im Zeitraum von 1999 bis 2014 und den aus historischen Daten modellierten Zins im Vasicek-Modell im Zeitraum von 2014 bis 2024 dar.

7.6 Aktienpreisprozess

Für die Modellierung des Aktienkurses im Zeitraum von 2014 bis 2024 wird, wie bereits im Unterabschnitt „3.3 Finanzmarkt und finanzielle Modellierung“ erwähnt, das Black-Scholes-Modell herangezogen. Für die Simulation zum Zeitpunkt t_{i+1} ausgehend vom Zeitpunkt t_i für $i = 0, \dots, 120$ ist der Aktienkurs gegeben durch

$$S_{i+1} = S_i e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma W_{\Delta t}}$$

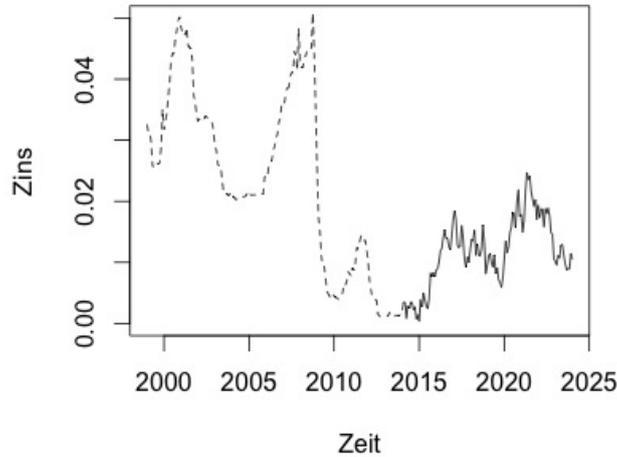


Abbildung 7: Euribor mit einer Maturität von 1 Monat und prognostizierter Zins

wobei für den Anfangswert $S_0 = 10$ gilt. Für die Parameter werden die Werte $\mu = 0.05$ und $\sigma = 0.5$ gewählt. Es gilt außerdem $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ und $W_{\Delta t} = W_{i+1} - W_i$ für $i = 0, \dots, 120$.

7.7 Bankkonto und diskontierter Aktienpreisprozess

Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (3.6) ausgehend vom Zeitpunkt t_i für die Berechnung des Bankkontos zum Zeitpunkt t_{i+1} ist gegeben durch:

$$B_{i+1} = B_i \exp \left(\int_t^{t+1} r_u \, du \right)$$

Diese Lösung kann mittels der Trapez-Regel für $i = 0, \dots, 120$ numerisch berechnet werden

$$B_{i+1} = B_0 \exp \left(\sum_{j=0}^i \frac{1}{24} (r_j + r_{j+1}) \right) = B_i \exp \left(\frac{1}{24} (r_i + r_{i+1}) \right)$$

wobei $B_0 = 1$ gilt.

Der diskontierte Aktienpreisprozess ergibt sich für $i = 0, \dots, 120$ durch die Division:

$$S_i^* = \frac{S_i}{B_i}$$

Die folgende Graphik zeigt den Aktienpreisprozess und den diskontierten Aktienpreisprozess für den Zeitraum 2014 bis 2024.

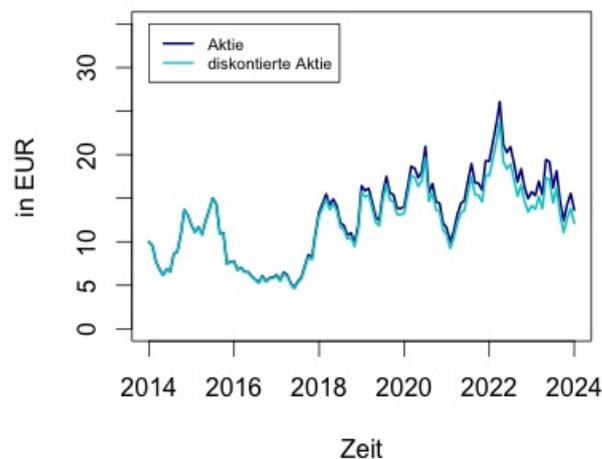


Abbildung 8: Verlauf des Aktienpreisprozesses und des diskontierten Aktienpreisprozesses

7.8 Berechnung des monetären Wertes des VaPos

7.8.1 Berechnung des monetären Wertes des hedgebaren Teil

Der monetäre Wert des hedgebaren Teils hat die Form:

$$Q_t^0[\mathbf{X}]_h = -L_x \Pi + \int_0^t (L_x - N_{u^-}) T_{-u} p_{x+u} dS_u^*$$

Die numerische Berechnung für den monetären Wert des hedgebaren Teils wird mit dem Euler-Verfahren durchgeführt. Es gelten die folgenden numerischen Berechnungen für den monetären Wert des hedgebaren Teils zu den Zeitpunkten $t_0 = 0$,

$$t_1 = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0^0[\mathbf{X}]_h &= -L_x \Pi \\ \mathcal{Q}_1^0[\mathbf{X}]_h &= -L_x \Pi + L_x T p_x (S_1^* - S_0) \end{aligned}$$

und zu den Zeitpunkten $t_{i+1} = \frac{i+1}{12}$ für $i = 1, \dots, n - 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{i+1}^0[\mathbf{X}]_h &= -L_x \Pi + L_x T p_x (S_1^* - S_0) + \\ &+ \sum_{j=1}^i (L_x - N_{[t_j]}) T - [t_j] p_{x+[t_j]} (S_{j+1}^* - S_j^*) \end{aligned}$$

wobei $t_n = T$ gilt. In den letzten Berechnungen sind die Überlebenswahrscheinlichkeiten und der Zählprozess des Todes auf ganze Werte abzurunden, da die zugehörigen Daten nur jährlich zur Verfügung stehen und die Bewertungen des Versicherungszahlungsstromes monatlich erfolgen.

Die folgende Graphik zeigt den Verlauf des monetären Wertes des hedgebaren Teils für den Zeitraum 2014 bis 2024.

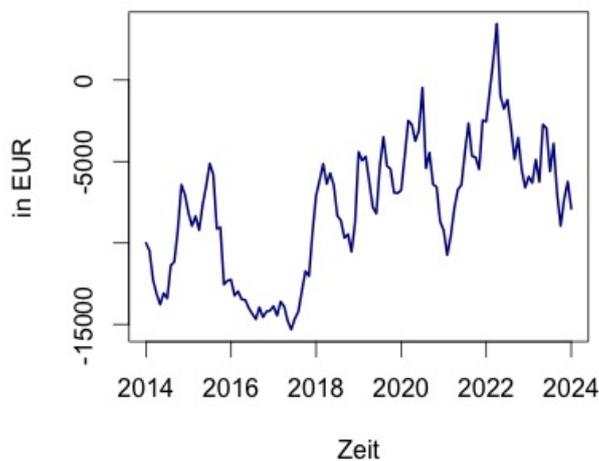


Abbildung 9: Verlauf des monetären Wertes des hedgebaren Teils

7.8.2 Berechnung des monetären Wertes des nicht-hedgebaren Teils

Der monetäre Wert des nicht-hedgebaren Teils hat die Form

$$\mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}]_{\text{nh}} = \int_0^t -S_u^* {}_{T-u}p_{x+u} dM_u$$

wobei

$$M_u = N_u - \int_0^u (L_x - N_{s-}) \mu_{x+s} ds$$

gilt. Die numerische Berechnung für den monetären Wert des nicht-hedgebaren Teils wird mit dem Euler-Verfahren durchgeführt. Es gelten die folgenden numerischen Berechnungen für den monetären Wert des nicht-hedgebaren Teils zu dem Zeitpunkt $t_0 = 0$

$$\mathcal{Q}_0^0[\mathbf{X}]_{\text{nh}} = 0$$

und zu den Zeitpunkten $t_{i+1} = \frac{i+1}{12}$ für $i = 0, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{i+1}^0[\mathbf{X}]_{\text{nh}} &= - \sum_{j=1}^i S_j^* {}_{T-[t_j]}p_{x+[t_j]} (M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) = \\ &= - \sum_{j=1}^i S_j^* {}_{T-[t_j]}p_{x+[t_j]} \left(N_{[t_{j+1}]} - N_{[t_j]} - \frac{1}{12} (L_x - N_{[t_j]}) \mu_{x+[t_j]} \right) \end{aligned}$$

wobei $t_n = T$ gilt. In den letzten Berechnungen sind die Überlebenswahrscheinlichkeiten und der Zählprozess des Todes auf ganze Werte abzurunden, da die zugehörigen Daten nur jährlich zur Verfügung stehen und die Bewertungen des Versicherungszahlungsstromes monatlich erfolgen.

Die folgende Graphik zeigt den Verlauf des monetären Wertes des nicht-hedgebaren Teils für den Zeitraum 2014 bis 2024.

7.8.3 Berechnung des intrinsischen Risikoprozesses

Der intrinsische Risikoprozess hat die Form:

$$R_t = (L_x - N_{t-}) (S_t^*)^2 \int_t^T e^{\sigma^2(u-t)} {}_{T-u}p_{x+u} {}_{T-t}p_{x+t} \mu_{x+u} du \quad (7.4)$$

Für die numerische Berechnung dieses Riemann-Integrales wird die Simpson-Regel angewandt.

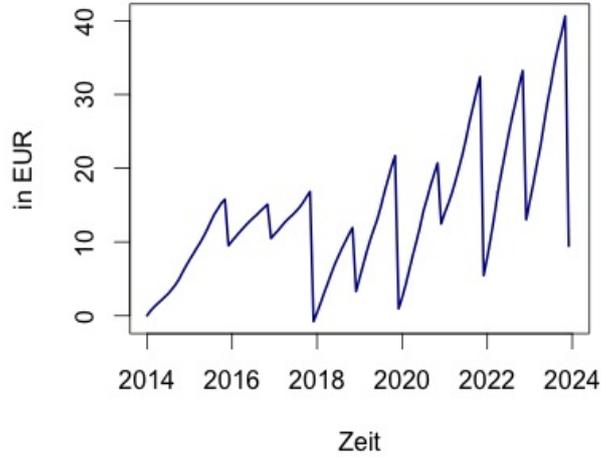


Abbildung 10: Verlauf des monetären Wertes des nicht-hedgebaren Teils

Nach der Anwendung der Simpson-Regel für die numerische Berechnung des Integrals in (7.4), ist der Risikoprozess zu den Zeitpunkten $t_0 = 0$ und $t_i = \frac{i}{120}$ für $i = 1, \dots, 120$ gegeben durch

$$R_0 = L_x S_0^2 \frac{T}{6} \left(4f\left(\frac{T}{2}\right) + f(T) \right)$$

$$R_i = (L_x - N_{[t_i]}) (S_i^*)^2 \left(\frac{T - t_i}{6} \left(f(t_i) + 4f\left(\frac{t_i + T}{2}\right) + f(T) \right) \right)$$

wobei in diesem Fall für die Funktion

$$f(u) = e^{\sigma^2(u-t_i)} {}_{T-[u]}p_{x+[u]} {}_{T-[t_i]}p_{x+[t_i]} \mu_{x+[u]}$$

gilt.

Die nächste Graphik zeigt den Verlauf des Wertes des intrinsischen Risikoprozesses.

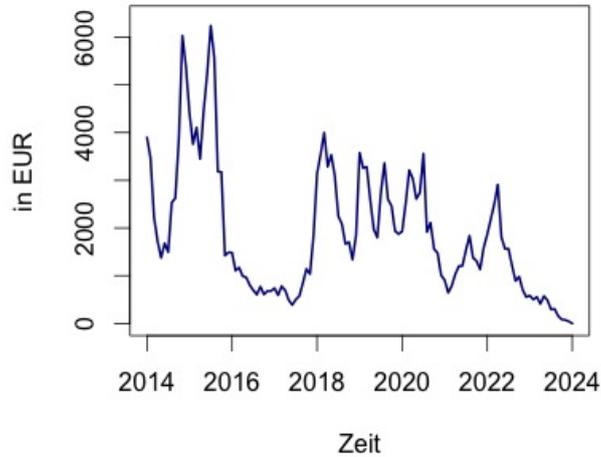


Abbildung 11: Verlauf des intrinsischen Risikoprozesses

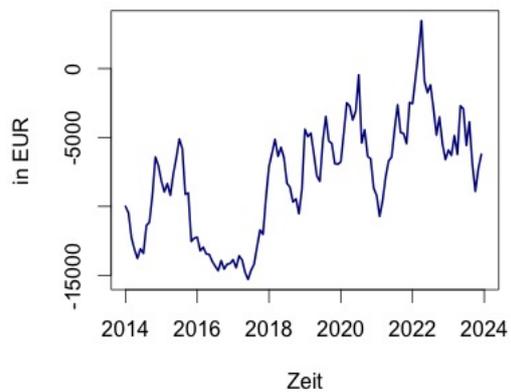
7.8.4 Berechnung des monetären Wertes und der best-estimate Reserve

Der monetäre Wert ergibt sich durch Addition des monetären Wertes des hedgebaren Teils und des monetären Wertes des nicht-hedgebaren Teils. Es gilt daher:

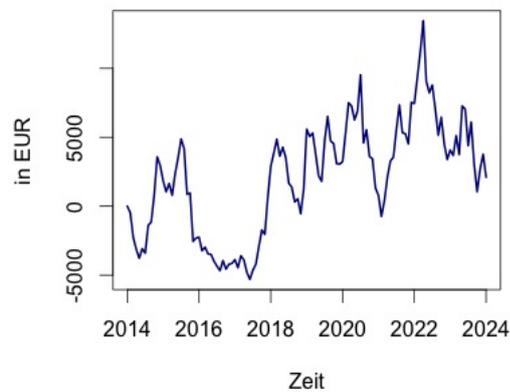
$$\mathcal{Q}^0[\mathbf{X}] = \mathcal{Q}^0[\mathbf{X}]_h + \mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}]_{nh}$$

Die best-estimate Reserve entspricht den monetären Wert zum Zeitpunkt $t \in [0, T)$ ohne dem Prämienzahlungsstrom zum Zeitpunkt 0.

Die folgende Graphik zeigt den Verlauf des monetären Wertes und der best-estimate Reserve für den Zeitraum 2014 bis 2024.



(a) Verlauf des monetären Wertes



(b) Verlauf der best-estimate Reserve

Abbildung 12: Verlauf des monetären Wertes und der best-estimate Reserve

Anhand der Abbildung ist zu erkennen, dass der monetäre Wert des Portfolios sehr stark vom Aktienkurs abhängt. Der Faktor Überlebenswahrscheinlichkeit spielt nur eine geringe Rolle, da dieser annähernd bei 100% ist. Das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass das Versicherungsunternehmen die Prämie behalten kann und keine Leistungsauszahlung stattfindet, ist sehr gering.

8 Protected Valuation Portfolio

8.1 Allgemeines

Die Konstruktion des Protected Valuation Portfolios (VaPo^{prot}) nach [21] erfolgt im Wesentlichen analog zum Abschnitt „6 Valuation Portfolio“. Der Unterschied besteht jedoch darin, dass nicht mehr für die Wahrscheinlichkeitsdistortion die vereinfachte Annahme $\varphi^T \equiv 1$ getroffen wird.

Die Wahl der nicht-trivialen Wahrscheinlichkeitsdistortion kann unterschiedlich erfolgen, wobei bestimmte Eigenschaften (werden im späteren Verlauf näher erklärt) für diese erfüllt sein müssen. Beispiele dazu: siehe [21]. In diesem Fall wird die Wahrscheinlichkeitsdistortion mittels Esscher-Prämie nach [21, Example 8.15] konstruiert. Der Ablauf wird im Unterabschnitt „8.2 Wahrscheinlichkeitsdistortion mittels Esscher-Prämie“ beschrieben. Eine weitere Folgerung, die im späteren Verlauf noch näher erklärt wird, ist, dass durch die nicht-triviale Wahl der Wahrscheinlichkeitsdistortion die zugehörige Reserve (risikoadjustierte Reserve) gegenüber der best-estimate Reserve einen höheren Wert aufweist. Das heißt, dass das Versicherungsunternehmen mehr Reserven zu bilden hat.

Die folgende Abbildung zeigt eine Gegenüberstellung der Aktiva (Anlagebestand zur Deckung der versicherungstechnischen Rückstellungen) und der Passiva (risikoadjustierte Reserven für die versicherungstechnischen Rückstellungen) einer Bilanz. Die risikoadjustierten Reserven für die versicherungstechnischen Rückstellungen ergeben sich aus der Summation der best-estimate Reserven mit der MVM (Marktwertmarge).

8.2 Wahrscheinlichkeitsdistortion mittels Esscher-Prämie

Es soll nun der wahrscheinlichkeitsdistortierte versicherungstechnische Prozess zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gegeben durch $\Lambda_t^{(T)} = \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi_T^T L_{x+T} | \mathcal{T}_t]$ mit einer passend gewählten Wahrscheinlichkeitsdistortion φ^T berechnet werden.

8.2.1 Risikofaktoren und Eigenschaften

Um die Berechnung durchzuführen, müssen Risikofaktoren bestimmt werden, die im Zusammenhang mit der versicherungstechnischen Variablen stehen. In diesem Fall ist diese gegeben durch L_{x+T} , wofür bereits in [21, S.213/214] die passenden Risikofaktoren bestimmt werden.

Ein Risikofaktor nach [21, S.213/214] ist zum Zeitpunkt $T - 1$ die Indikatorfunktion

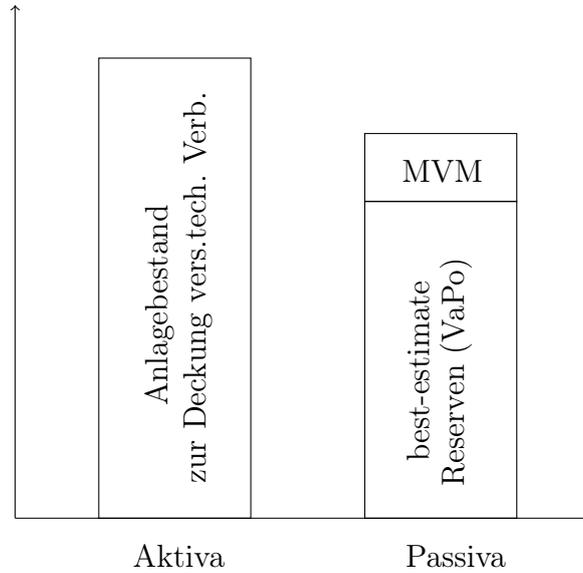


Abbildung 13: Gegenüberstellung der Aktiva und Passiva (VaPo^{prot}); Nachahmung von Fig. 8.1. aus [21, S.208]

$Y_T^{(i)} = \mathbb{1}_{\tau_i > T}$, ob die Person i das T -te Jahr überlebt. Das heißt, $Y_T^{(i)} = \mathbb{1}_{\tau_i > T}$ bedingt auf das Ereignis $\{\tau_i > T - 1\}$ ist Bernoulli-verteilt mit der Überlebenswahrscheinlichkeit $p_{x+T-1} = \mathbb{P}(\tau_i > T | \tau_i > T - 1)$. Die Anzahl der Personen im Portfolio ist auch die Anzahl der Risikofaktoren, das heißt zum Zeitpunkt $T - 1$ ist diese L_{x+T-1} .

Die Risikofaktoren können auch allgemeiner angeschrieben werden. So ist $Y_T^{(i)} = \mathbb{1}_{\tau_i > T}$ bedingt auf das Ereignis $\{\tau_i > t\}$ Bernoulli-verteilt mit der Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_{T-t}p_{x+t} = \mathbb{P}(\tau_i > T | \tau_i > t)$. Die Anzahl der Risikofaktoren ist zum Zeitpunkt t gegeben durch L_{x+t} .

Die Risikofaktoren $\mathbf{Y}^{(i)}$ sind für alle $i \in \{1, \dots, L_x\}$ unabhängig, identisch verteilt und \mathbb{A} -messbar. Es gilt weiters $\mathbf{Y}^{(i)} \in L^2(\mathbb{P})$ für alle $i \in \{1, \dots, L_x\}$, da $\mathbf{Y}^{(i)}$ eine Indikatorfunktion ist (und daher nur die Werte 0 und 1 annimmt).

Es gilt für die versicherungstechnische Variable:

$$L_{x+T} = \sum_{i=1}^{L_x} Y_T^{(i)} = \sum_{i=1}^{L_x} \mathbb{1}_{\tau_i > T}$$

Nun eine Wiederholung zu den Eigenschaften der Risikofaktoren. Diese können auch mit denen aus dem versicherungstechnischen Teil im Unterunterabschnitt

„5.3.1 Erlebensversicherung - Allgemeiner Fall“ verglichen werden.

Wie bereits erwähnt, ist $Y_T^{(i)}$ bedingt auf \mathcal{T}_{T-1} für alle $i \in \{1, \dots, L_{x+T-1}\}$ Bernoulli-verteilt mit Überlebenswahrscheinlichkeit p_{x+T-1} , das heißt es gilt:

$$\mathbb{E} \left[Y_T^{(i)} | \mathcal{T}_{T-1} \right] = p_{x+T-1} \quad \forall i \in \{1, \dots, L_{x+T-1}\}$$

Die Berechnung für die gesamte Kohorte ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_{x+T} | \mathcal{T}_{T-1}] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{L_x} Y_T^{(i)} | \mathcal{T}_{T-1} \right] = \\ &= \sum_{i; Y_{T-1}^{(i)}} \mathbb{E} \left[Y_T^{(i)} | \tau_i > T-1 \right] = \\ &= \sum_{i; Y_{T-1}^{(i)}} p_{x+T-1} = L_{x+T-1} p_{x+T-1} \end{aligned}$$

Da $\mathbb{E}[Y_T^{(i)} | \mathcal{T}_t] = \mathbb{E} \left[\dots \mathbb{E} \left[Y_T^{(i)} | \mathcal{T}_{T-1} \right] \dots | \mathcal{T}_t \right]$ und $p_{x+T-1} \cdot p_{x+T-2} \cdot \dots \cdot p_{x+t} = {}_{T-t}p_{x+t}$ für alle $i \in \{1, \dots, L_{x+t}\}$ und $t \in [0, T)$ gilt, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[Y_T^{(i)} | \mathcal{T}_t \right] &= {}_{T-t}p_{x+t} \\ \mathbb{E} [L_{x+T} | \mathcal{T}_t] &= L_{x+t} {}_{T-t}p_{x+t} \end{aligned}$$

8.2.2 Wahrscheinlichkeitsdistortion mittels Esscher-Prämie

Für die folgende Definition, die auf der Konstruktion der Wahrscheinlichkeitsdistortion mittels Esscher-Prämie nach [21, Example 8.15] basiert, ist es notwendig, dass die momenterzeugende Funktion für $a > 0$ an der Stelle $2a$ existiert, das heißt, dass gilt:

$$M_{L_{x+T}}(2a) = \mathbb{E}[\exp(2 a L_{x+T})] = \mathbb{E} \left[\exp \left(2 a \sum_{i=1}^{L_x} Y_T^{(i)} \right) \right] = \quad (8.1)$$

$$= \mathbb{E}[\exp(2 a L_x Y_T^{(i)})] < \infty \quad (8.2)$$

Ein wichtiger Schritt ist, dass $\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{L_x} Y_T^{(i)} \right] = \mathbb{E} \left[L_x Y_T^{(i)} \right]$ gilt. Der Grund dafür ist, dass die Lebenszeiten der einzelnen Versicherungsnehmer unabhängig und identisch verteilt sind. Für die gewählten Risikofaktoren existiert die momenterzeugende Funktion für $a > 0$ an der Stelle $2a$, da $Y_T^{(i)} \in L^2(\mathbb{P})$ gilt und L_x eine fixierte

Konstante ist.

Die folgende Definition basiert auf [21, Example 8.15].

Definition 8.1. Die Wahrscheinlichkeitsdistortion nach der Esscher-Prämie ist zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ definiert durch:

$$\varphi_t^T := \frac{\mathbb{E}[f(\mathbf{Y})|\mathcal{T}_t]}{\mathbb{E}[f(\mathbf{Y})]} = \frac{\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T})|\mathcal{T}_t]}{\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T})]}$$

wobei $f(\mathbf{Y}) = \exp(a \Lambda^{(T)}(\mathbf{Y})) = \exp(aL_{x+T})$ für $\mathbf{Y} = (Y^{(1)}, \dots, Y^{(L_x)})$ gilt. Die Funktion $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist eine koordinatenweise nicht fallende und strikt positive Funktion, da $a > 0$ und L_{x+T} eine positive Zufallsvariable ist. Nach der Annahme 3.2. des „Basis Aktuarielles Modell“ ist φ^T ein normalisiertes (\mathbb{P}, \mathbb{T}) -Martingal und eine Wahrscheinlichkeitsdistortion. Die Eigenschaften sind noch zu zeigen.

Beweisskizze:

1. φ^T ist normalisiert, da $\varphi_0^T = \frac{\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T})|\mathcal{T}_0]}{\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T})]} = 1$ gilt.
2. φ^T ist wegen den Eigenschaften der Funktion f strikt positiv \mathbb{P} -f.s.
3. φ^T erfüllt durch Anwendung der Turmeigenschaft die Martingaleigenschaft.

Die versicherungstechnische Variable ist zum Zeitpunkt T gegeben durch

$$\Lambda^{(T)}(\mathbf{Y}) = L_{x+T} = \sum_{i=1}^{L_x} Y_T^{(i)}$$

wobei $\mathbf{Y} = (Y^{(1)}, \dots, Y^{(L_x)})$ gilt. Weiters ist $L_{x+T} \in L^2(\mathbb{P})$ erfüllt, da $Y_T^{(i)} \in L^2(\mathbb{P})$ gilt.

Die versicherungstechnische Variable ist zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gegeben durch

$$\Lambda_t^{(T)}(\mathbf{Y}) = \frac{1}{\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T})|\mathcal{F}_t]} \mathbb{E}[L_{x+T} \exp(aL_{x+T})|\mathcal{F}_t]$$

wobei $\mathbf{Y} = (Y^{(1)}, \dots, Y^{(L_x)})$ gilt. Weiters ist $\Lambda^{(T)}(\mathbf{Y}) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ für alle $t \in [0, T]$ erfüllt, da wegen (8.2) $\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T})|\mathcal{F}_t] < \infty$, wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und $L_{x+T} \in L^2(\mathbb{P})$

$$\mathbb{E}[L_{x+T} \exp(aL_{x+T})|\mathcal{F}_t] \leq \sqrt{\mathbb{E}[L_{x+T}^2|\mathcal{F}_t]} \sqrt{\mathbb{E}[\exp(2aL_{x+T})|\mathcal{F}_t]} < \infty$$

gilt.

8.2.3 Die Fortuin-Kasteleyn-Ginibre (FKG) Ungleichung

Die nicht-negative Korrelation von $\Lambda^{(T)}$ mit φ_T^T gegeben \mathcal{F}_t ist oftmals von Bedeutung (hier für Korollar 7.1). Um diese zu erhalten, wird ein Spezialfall der Fortuin-Kasteleyn-Ginibre (FKG) Ungleichung angewandt. Dieser ist in [21, Lemma 8.7] formuliert durch:

Lemma 8.1. *Angenommen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sind zwei koordinatenweise nicht-fallende Funktionen. Für jeden Zufallsvektor $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_d)$ mit unabhängigen Komponenten und $f(\mathbf{Y}), g(\mathbf{Y}) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gilt:*

$$\mathbb{E}[f(\mathbf{Y})g(\mathbf{Y})] \geq \mathbb{E}[f(\mathbf{Y})]\mathbb{E}[g(\mathbf{Y})] \quad (8.3)$$

Betrachten wir $f(\mathbf{Y}) = \exp(aL_{x+T})$ und $g(\mathbf{Y}) = \Lambda^{(T)}(\mathbf{Y}) = \Lambda^{(T)} = L_{x+T}$. Da alle Annahmen für Lemma 8.1 bereits erfüllt sind, können wir dieses anwenden:

$$\begin{aligned} \Lambda_t^{(T)} &= \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi^T \Lambda^{(T)} | \mathcal{T}_t] = \frac{1}{\varphi^T} \frac{1}{\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T})]} \mathbb{E}[\exp(aL_{x+T}) L_{x+T} | \mathcal{T}_t] \\ &\geq \frac{1}{\varphi_t^T} \frac{1}{\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T})]} \mathbb{E}[\exp(aL_{x+T}) | \mathcal{T}_t] \mathbb{E}[L_{x+T} | \mathcal{T}_t] = \mathbb{E}[L_{x+T} | \mathcal{T}_t] = \mathbb{E}[\Lambda_T^{(T)} | \mathcal{T}_t] \end{aligned}$$

Die nicht-negative Korrelation von $\Lambda^{(T)}$ mit φ_T^T gegeben \mathcal{F}_t , die für das Lemma 8.2. gebraucht wird, ist erfüllt.

Es folgt, dass $(\Lambda_t^{(T)})_{t \in [0, T]}$ ein $(\mathbb{P}, \mathcal{T})$ -Supermartingal ist.

8.2.4 Berechnung des wahrscheinlichkeitsdistortierten versicherungstechnischen Prozesses

Der wahrscheinlichkeitsdistortierte versicherungstechnische Prozess zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ mit $\Lambda_t^{(T)} = \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi_T^T L_{x+T} | \mathcal{T}_t]$ soll berechnet werden. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi_T^T L_{x+T} | \mathcal{T}_t] &= \frac{1}{\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T}) | \mathcal{T}_t]} \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T}) | \mathcal{T}_T] L_{x+T} \middle| \mathcal{T}_t \right] = \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T}) | \mathcal{T}_t]} \mathbb{E}[\exp(aL_{x+T}) L_{x+T} | \mathcal{T}_t] = \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T}) | \mathcal{T}_t]} \mathbb{E} \left[\exp \left(a \sum_{i=1}^{L_x} Y_T^{(i)} \right) \sum_{i=1}^{L_x} Y_T^{(i)} \middle| \mathcal{T}_t \right] = \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T}) | \mathcal{T}_t]} \mathbb{E} \left[\exp \left(a \sum_{i=1}^{L_x} Y_T^{(i)} \right) \sum_{i=1}^{L_x} Y_T^{(i)} \middle| \mathcal{T}_t \right] = \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T}) | \mathcal{T}_t]} \mathbb{E}[\exp(a \sum_{i=1}^{L_x} Y_T^{(i)}) \sum_{i=1}^{L_x} Y_T^{(i)} | \mathcal{T}_t] = \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T}) | \mathcal{T}_t]} \mathbb{E}[\exp(a \sum_{i=1}^{L_x} Y_T^{(i)}) \sum_{i=1}^{L_x} Y_T^{(i)} | \mathcal{T}_t] = \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T}) | \mathcal{T}_t]} \exp(aL_{x+t}) L_{x+t} \mathbb{P}(\tau_i > T | \mathcal{T}_t) = \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T}) | \mathcal{T}_t]} \exp(aL_{x+t}) L_{x+t} {}_{T-t}p_{x+t}
\end{aligned}$$

Im Allgemeinen werden in diesen Berechnungen nur die vorherigen Resultate eingesetzt. Ein wichtiger Schritt ist, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_x | \mathcal{T}_t] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{L_x} \mathbb{1}_{\tau_i > 0} \middle| \mathcal{T}_t \right] = \sum_{i; \tau_i > t} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau_i > 0} | \tau_i > t] \\
&= \sum_{i; \tau_i > t} \mathbb{P}(\tau_i > 0 | \tau_i > t) = \sum_{i; \tau_i > t} 1 = L_{x+t}
\end{aligned}$$

gilt. Nun muss noch der bedingte Erwartungswert $\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T}) | \mathcal{T}_t]$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(aL_{x+T}) | \mathcal{T}_t] &= \mathbb{E} \left[\exp \left(a \sum_{i=1}^{L_x} Y_T^{(i)} \right) \middle| \mathcal{T}_t \right] = \\
&= \mathbb{E}[\exp(a \sum_{i=1}^{L_x} Y_T^{(i)}) | \mathcal{T}_t] = \\
&= \exp(aL_{x+t}) \mathbb{P}(\tau_i > T | \mathcal{T}_t) + \mathbb{P}(\tau_i \leq T | \mathcal{T}_t) = \\
&= \exp(aL_{x+t}) {}_{T-t}p_{x+t} + 1 - {}_{T-t}p_{x+t} = \\
&= (\exp(aL_{x+t}) - 1) {}_{T-t}p_{x+t} + 1
\end{aligned}$$

Der wahrscheinlichkeitsdistortierte versicherungstechnische Prozess zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ist gegeben durch:

$$\Lambda_t^{(T)} = \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E} [\varphi_T^T L_{x+T} | \mathcal{T}_t] = \frac{\exp(aL_{x+t}) L_{x+t} T-t p_{x+t}}{(\exp(aL_{x+t}) - 1) T-t p_{x+t} + 1} \quad (8.4)$$

8.3 Föllmer-Sondermann-Ansatz

Für den Föllmer-Sondermann Ansatz wird der Spezialfall $H = (L_x - N_T) g(S_T) = (L_x - N_T) S_T$ betrachtet, das heißt es gilt $g(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$.

Der intrinsische Vermögensprozess zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E} [(L_x - N_T) \varphi_T S_T | \mathcal{F}_t] = \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{\varphi_T^T}{\varphi_t^T} (L_x - N_T) \middle| \mathcal{T}_t \right] \mathbb{E} \left[\frac{\varphi_T^A}{\varphi_t^A} S_T \middle| \mathcal{A}_t \right] = \\ &= \Lambda_t^{(T)} \mathbb{E}^* [B_t B_T^{-1} S_T | \mathcal{A}_t] \end{aligned}$$

Für den diskontierten Vermögensprozess zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gilt:

$$\begin{aligned} V_t^* &= \Lambda_t^{(T)} \mathbb{E}^* [B_T^{-1} S_T | \mathcal{A}_t] = \\ &= \frac{\exp(aL_{x+t}) L_{x+t} T-t p_{x+t}}{(\exp(aL_{x+t}) - 1) T-t p_{x+t} + 1} B_t^{-1} S_t \\ &= \frac{\exp(aL_{x+t}) L_{x+t} T-t p_{x+t}}{(\exp(aL_{x+t}) - 1) T-t p_{x+t} + 1} S_t^* \end{aligned}$$

Die Berechnung des finanziellen Teils erfolgt analog wie beim Unterabschnitt „6.2 Föllmer-Sondermann Ansatz“. Den versicherungstechnischen Teil erhalten wir durch Einsetzen des Resultates (8.4).

Für die Berechnung der Kunita-Watanabe Zerlegung wird in ähnlicher Weise wie im Unterabschnitt „5.3.1 Erlebensversicherung - Allgemeiner Fall“ vorgegangen.

Ersetzen wir die finanziellen und versicherungstechnischen Terme durch $X_t := \frac{\exp(aL_{x+t}) L_{x+t} T-t p_{x+t}}{(\exp(aL_{x+t}) - 1) T-t p_{x+t} + 1}$ und $Y_t := S_t^*$, so gilt:

$$V_t^* = X_t Y_t$$

Anwendung der partiellen Integration auf den intrinsischen Wertprozess ergibt:

$$V_t^* - V_0 = \int_0^t Y_{u-} dX_u + \int_0^t X_{u-} dY_u + [X, Y]_t \quad (8.5)$$

Für die Variation gilt $[X, Y]_t = 0$ für alle $t \in [0, T]$. Einsetzen der bereits bekannten Resultate ergibt:

$$V_t^* - V_0 = \int_0^t S_{u-}^* dX_u + \int_0^t \frac{\exp(a(L_x - N_{u-})) (L_x - N_{u-})^{T-t} p_{x+u}}{(\exp(a(L_x - N_{u-})) - 1)^{T-u} p_{x+u} + 1} dS_u^*$$

8.4 Modellannahmen

siehe Unterabschnitt „6.3 Modellannahmen“

Im weiteren Verlauf werden die einzelnen Schritte, wie das Protected Valuation Portfolio nach der Vorgehensweise von [21] konstruiert wird, erklärt.

8.5 Schritte zur Konstruktion des Protected VaPos

1. Schritt: Konstruktion des Protected VaPos siehe „1. Schritt: Konstruktion des VaPos“ im Unterabschnitt „6.4 Schritte zur Konstruktion des VaPos“

2. Schritt: Konstruktion des Protected VaPos In diesem Schritt wird das $\text{VaPo}^{\text{prot}}$ zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ konstruiert. Das heißt es wird bestimmt, wieviele Finanzportfolios zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gehalten werden müssen. Für die versicherungstechnische Variable ist dabei zu beachten, dass $\Lambda^{(T)}$ nicht \mathcal{T}_t -messbar ist, wobei $t \in [0, T]$ gilt. Deshalb werden die Variablen durch den wahrscheinlichkeitsdistortierten versicherungstechnischen Prozess zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gegeben durch $\Lambda_t^{(T)} := \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi_T^T \Lambda^{(T)} | \mathcal{T}_t]$ ausgedrückt.

Darauf folgt die Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \rightarrow \text{VaPo}_t^{\text{prot}}(\mathbf{X}) &= -\mathfrak{Z}^{(0)} L_x \Pi + \mathfrak{Z}^{(T)} \Lambda_t^{(T)} \mathfrak{S}^{(T)} = \\ &= -\mathfrak{Z}^{(0)} L_x \Pi + \mathfrak{Z}^{(T)} \mathbb{E} \left[\frac{\varphi_T^T}{\varphi_t^T} L_{x+T} \middle| \mathcal{T}_t \right] \mathfrak{S}^{(T)} \end{aligned}$$

Für das $\text{VaPo}^{\text{prot}}$ der ausstehenden Verbindlichkeiten zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ mit $k \leq t < k + 1$ gilt:

$$\text{VaPo}_t^{\text{prot}}(\mathbf{X}_{(k+1)}) = \mathfrak{Z}^{(T)} \mathbb{E} \left[\frac{\varphi_T^T}{\varphi_t^T} L_{x+T} \middle| \mathcal{T}_t \right] \mathfrak{S}^{(T)}$$

Das heißt, in diesem Fall fällt nur der Prämienzahlungsstrom zum Zeitpunkt 0 weg. Einsetzen der Berechnung (8.4) des bedingten Erwartungswertes $\mathbb{E}[\varphi_T^T L_{x+T} | \mathcal{T}_t]$

ergibt für die vorigen zwei Formeln:

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &\rightarrow \text{VaPo}_t^{\text{prot}}(\mathbf{X}) = -\mathfrak{Z}^{(0)} L_x \Pi + \mathfrak{Z}^{(T)} \frac{\exp(aL_{x+t}) L_{x+t} T-t p_{x+t}}{(\exp(aL_{x+t}) - 1) T-t p_{x+t} + 1} \mathfrak{S}^{(T)} \\ \text{VaPo}_t^{\text{prot}}(\mathbf{X}_{(k+1)}) &= \mathfrak{Z}^{(T)} \frac{\exp(aL_{x+t}) L_{x+t} T-t p_{x+t}}{(\exp(aL_{x+t}) - 1) T-t p_{x+t} + 1} \mathfrak{S}^{(T)}\end{aligned}$$

3. Schritt: Monetärer Wert des Protected VaPos In diesem Schritt wird das $\text{VaPo}_t^{\text{prot}}(\mathbf{X})$ auf den monetären Wert zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ abgebildet. Es gilt die Abbildung:

$$\begin{aligned}\text{VaPo}_t^{\text{prot}}(\mathbf{X}) &\rightarrow \mathcal{Q}_t[\mathbf{X}] = -L_x \Pi + \frac{\exp(aL_{x+t}) L_{x+t} T-t p_{x+t}}{(\exp(aL_{x+t}) - 1) T-t p_{x+t} + 1} B_t^{-1} v(t, S) = \\ &= -L_x \Pi + \frac{\exp(aL_{x+t}) L_{x+t} T-t p_{x+t}}{(\exp(aL_{x+t}) - 1) T-t p_{x+t} + 1} B_t^{-1} \mathbb{E} \left[\frac{B_t}{B_T} S_T \middle| \mathcal{A}_t \right] = \\ &= -L_x \Pi + \frac{\exp(aL_{x+t}) L_{x+t} T-t p_{x+t}}{(\exp(aL_{x+t}) - 1) T-t p_{x+t} + 1} B_t^{-1} S_t = \\ &= -L_x \Pi + \frac{\exp(aL_{x+t}) L_{x+t} T-t p_{x+t}}{(\exp(aL_{x+t}) - 1) T-t p_{x+t} + 1} S_t^*\end{aligned}$$

Um nun den hedgebaren und den nicht-hedgebaren Teil zu erhalten, betrachten wir vorerst den Term $\frac{\exp(aL_{x+t}) L_{x+t} T-t p_{x+t}}{(\exp(aL_{x+t}) - 1) T-t p_{x+t} + 1} S_t^*$. Dieser ist genau der Vermögensprozess \hat{V}_t aus dem Unterabschnitt „8.3 Föllmer-Sondermann-Ansatz“ (8.6). Die Kunita-Watanabe-Zerlegung sieht in diesem Fall folgendermaßen aus:

$$\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}] = -L_x \Pi + \int_0^t \nu_u dX_u + \int_0^t \theta_u dS_u^*$$

mit

$$\begin{aligned}\theta_u &= \frac{\exp(a(L_x - N_{u-})) (L_x - N_{u-}) T-t p_{x+u}}{(\exp(a(L_x - N_{u-})) - 1) T-u p_{x+u} + 1} \\ \nu_u &= S_u^*\end{aligned}$$

Das heißt der monetäre Wert des hedgebaren Teils hat die Form:

$$\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}]_{\text{h}} = -L_x \Pi + \int_0^t \frac{\exp(a(L_x - N_{u-})) (L_x - N_{u-}) T-t p_{x+u}}{(\exp(a(L_x - N_{u-})) - 1) T-u p_{x+u} + 1} dS_u^* \quad (8.6)$$

und des nicht-hedgebaren Teils:

$$\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}]_{\text{nh}} = \int_0^t S_u^* dX_u$$

Insgesamt ergibt sich für den monetären Wert des Valuation Portfolios:

$$\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}] = \mathcal{Q}_t[\mathbf{X}]_h + \mathcal{Q}_t[\mathbf{X}]_{nh} \quad (8.7)$$

Es muss noch gezeigt werden, ob $\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}] \geq \mathcal{Q}_t^0[\mathbf{X}]$ gilt, das heißt, ob $\Lambda^{(k)}$ und φ_k^T gegeben \mathcal{F}_t nicht-negativ korreliert ist.

Dazu brauchen wir das Lemma aus [21, Lemma 8.5].

Lemma 8.2. *Es gilt die Annahme 3.2. Wähle den Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathcal{L}_\varphi$ wie im Unterabschnitt „6.4 Schritte zur Konstruktion des VaPos“ beschrieben und nehme an, dass der wahrscheinlichkeitsdistortierte versicherungstechnische Prozess $(\Lambda_t^{(k)})_{t \leq k}$ gegeben durch (4.2) ein $(\mathbb{P}, (\mathcal{T}_t)_{t \leq k})$ -Supermartingal ist. Dann gilt: $\Lambda^{(k)}$ und φ_k^T sind gegeben \mathcal{F}_t nicht-negativ korreliert, wobei $t < k$ für $t \in [0, T]$ und $k \in \mathcal{J}$ gilt.*

Wegen diesem Korollar und dem Unterabschnitt „8.2.3 Fortuin-Kasteleyn-Ginibre (FKG) Ungleichung“ ist Eigenschaft erfüllt und somit ist der risikoadjustierte monetäre Wert größer gleich als der best-estimate monetäre Wert.

Das im 2. Schritt beschriebene $\text{VaPo}_t(\mathbf{X}_{(k+1)})$ für ausständige Verbindlichkeiten kann zum Zeitpunkt $t \in [0, T)$, wobei $k \leq t < k + 1$ gilt, auf den monetären Wert $\mathcal{Q}_t[\mathbf{X}_{(k+1)}]$ abgebildet werden. Dieser monetäre Wert wird auch risikoadjustierte Reserve für ausständige Verbindlichkeiten genannt und als $\mathcal{R}_t(\mathbf{X}_{(k+1)})$ angeschlossen.

$$\mathcal{R}_t(\mathbf{X}_{(k+1)}) = \mathcal{Q}_t[\mathbf{X}_{(k+1)}]_h + \mathcal{Q}_t[\mathbf{X}_{(k+1)}]_{nh} \quad (8.8)$$

Für die risikoadjustierten Reserven gelten folgende Aussagen.

Das Korollar stammt aus [21, Corollary 8.3].

Korollar 8.1. *Es gilt die Annahme 3.2. Wähle den Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathcal{L}_\varphi$ wie im Unterabschnitt „6. Schritte zur Konstruktion des VaPos“ beschrieben und nehme an, dass die Preisprozesse $(U_t^{(k)})_{t \in [0, T]}$ nicht-negativ, \mathbb{P} -f.s., für alle $k \in \mathcal{J}$, wobei $t \in [0, T]$, $k \in \mathcal{J}$ gilt, sind. Dann gilt: Wenn $\Lambda^{(k)}$ nicht-negativ korreliert mit φ_k^T gegeben \mathcal{F}_t für alle $t < k$ ist, dann erhalten wir die Ungleichung:*

$$\mathcal{R}_t(\mathbf{X}_{(k+1)}) \geq \mathcal{R}_t^0(\mathbf{X}_{(k+1)}) \quad (8.9)$$

Die Definition ist aus [21, Remarks 8.4] entnommen.

Definition 8.2. *Es gelten die im Lemma 8.2. getroffenen Annahmen. Die Differenz der beiden Reserven ist der „MVM“ (Marktwertmarge) gegeben durch:*

$$\text{MVM}_t(\mathbf{X}_{(k+1)}) := \mathcal{R}_t(\mathbf{X}_{(k+1)}) - \mathcal{R}_t^0(\mathbf{X}_{(k+1)}) \geq 0 \quad (8.10)$$

Wegen dem Lemma 8.2. und dem Unterunterabschnitt „8.2.3 Fortuin-Kasteleyn-Ginibre (FKG) Ungleichung“ sind die Annahmen erfüllt und somit ist die risiko-adjustierte Reserve größer gleich als der best-estimate Reserve.

Literatur

- [1] Euribor rates. <http://de.euribor-rates.eu/> (26.5.2014).
- [2] Statistik Austria. Österreichische sterbetafel 2012 (unisex). http://www.statistik.at/web_de/statistiken/bevoelkerung/sterbetafeln/index.html (19.7.2014).
- [3] Statistik Austria. Versicherungsaktiengesellschaften - gliederung der bilanz. http://www.statistik.at/web_de/static/subdokumente/u_aktiengesellschaften_versicherungs-ag_gliederung_bilanz.pdf (16.4.2014), 2006.
- [4] European Central Bank. Spot-rate-kurve für aaa-staatsanleihen im europäischen raum, ecb. <https://www.ecb.europa.eu/stats/money/yc/html/index.en.html> (19.7.2014).
- [5] Francesca Biagini, Thorsten Rheinländer, and Irene Schreiber. Risk-minimization for life insurance liabilities with basis risk. paper, 2013.
- [6] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer, 2nd edition, 2006.
- [7] Börsenlexikon. <http://www.broker-test.de/boersenlexikon/basisinstrument/> (22.4.2014).
- [8] Hans Bühlmann. Life insurance with stochastic interest rates. In: *Ottaviani G (ed) Financial risk in insurance*, pages 1–24, 1992.
- [9] Hans Bühlmann. Stochastic discounting. *Insur Math Econ*, 11(2):113–127, 1992.
- [10] Freddy Delbaen and Walter Schachermayer. *The Mathematics of Arbitrage*. Springer, 2006.
- [11] Verband der Versicherungsunternehmen. <http://www.vvo.at/glossar.html> (9.4.2014).
- [12] Werner Doralt. *Versicherungsrecht 2011/2012*. KODEX des Österreichischen Rechts. Lexis Nexis, 15th edition, 2011.
- [13] EU. Richtlinie 2009/138/eg. <http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2009:335:0001:0155:de:PDF>, (20.5.2014).

- [14] Hans Föllmer and Dieter Sondermann. Hedging of non-redundant contingent claims. In *"Contributions to Mathematical Economics"*, W. Hildenbrand and A. Mas-Colell, pages 202–223. 1986.
- [15] Marek Musiela and Marek Rutkowski. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer, 2nd edition, 2000.
- [16] Thomas Møller. Risk-minimizing hedging strategies for unit-linked life insurance contracts. *ASTIN Bulletin*, 28(1):17–47, 1998.
- [17] Vasicek Oldrich. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5, S.177-188, 1977.
- [18] Thorsten Rheinländer. script, 2013. Vorlesung: Höhere Lebensversicherungsmathematik an der TU Wien.
- [19] Manfred Straube and Arlinda Berisha. Versicherungsvertragsrecht. script, 2010.
- [20] Maria V. Wüthrich, Hans Bühlmann, and Hansjörg Furrer. *Market-consistent actuarial valuation*. Springer, 2nd edition, 2010.
- [21] Mario V. Wüthrich and Michael Merz. *Financial Modeling, Actuarial Valuation and Solvency in Insurance*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. Aufl. edition, 2013.

Anhang 1 - Bemerkungen zur Zitierweise

Wegen den folgenden Gründen werden die zitierten Definitionen, Sätze, Lemmas, Korollare, Aussagen,... oft adaptiert formuliert:

- In dieser Arbeit werden oft Definitionen, Sätze, Lemmas, Korollare, Aussagen,... aus englischer Literatur zitiert, die in deutscher Verfassung bestmöglich wiedergegeben werden.
- Die Bewertung der versicherungstechnischen Verbindlichkeiten erfolgt in dieser Arbeit in stetiger Zeit (siehe: 2.1.2 Bewertung und Hedging) und in der Literatur [21] in diskreter Zeit. Daher werden zwar die Definitionen, Sätze, Lemmas, Korollare, Aussagen,... aus der Literatur [21] zitiert, jedoch adaptiert formuliert.
- Aus Konsistenzgründen werden die Definitionen usw. den gegebenen Umständen angepasst.

Anhang 2- Betriebsmittel

Die Berechnungen und Graphiken des Abschnittes „7 Numerisches Beispiel für das Valuation Portfolio“ wurden mit der Software *R* durchgeführt.

Anhang 3 - Österreichische Sterbetafel unisex 2012

Österreichische Sterbetafel Mann und Frau 2012: siehe nächste Seite

Österreichische Sterbetafel unisex 2012: siehe übernächste Seite

Quelle: STATISTIK AUSTRIA. Erstellt am: 10.12.2013.

Sterbetafel 2012

Genaueres Alter (am x-ten Geburtstag) in Jahren	Männer						Frauen					
	Sterbe- wahr- schein- lichkeit im Alters- intervall x bis x+1	Über- lebende im Alter x	Ge- storbene im Alters- intervall x bis x+1	Stationäre Bevölkerung		Fernere Lebens- erwartung im Alter x in Jahren	Sterbe- wahr- schein- lichkeit im Alters- intervall x bis x+1	Über- lebende im Alter x	Ge- storbene im Alters- intervall x bis x+1	Stationäre Bevölkerung		Fernere Lebens- erwartung im Alter x in Jahren
				im Alters- intervall x bis x+1	ab dem Alter x					im Alters- intervall x bis x+1	ab dem Alter x	
x	q _x	l _x	d _x	L _x	T _x	e _x	q _x	l _x	d _x	L _x	T _x	e _x
0	0,00316	100.000	316	99.721	7.825.688	78,26	0,00323	100.000	323	99.705	8.328.770	83,29
1	0,00029	99.684	29	99.669	7.725.967	77,50	0,00018	99.677	18	99.668	8.229.066	82,56
2	0,00010	99.655	10	99.650	7.626.297	76,53	0,00013	99.660	13	99.653	8.129.397	81,57
3	0,00012	99.645	12	99.639	7.526.647	75,53	0,00008	99.647	8	99.643	8.029.744	80,58
4	0,00015	99.633	15	99.625	7.427.008	74,54	0,00010	99.639	10	99.634	7.930.102	79,59
5	0,00007	99.618	7	99.614	7.327.383	73,55	0,00005	99.628	5	99.626	7.830.468	78,60
6	0,00010	99.611	10	99.606	7.227.768	72,56	0,00010	99.623	10	99.618	7.730.842	77,60
7	0,00007	99.601	7	99.598	7.128.162	71,57	0,00003	99.613	3	99.612	7.631.224	76,61
8	0,00005	99.594	5	99.592	7.028.565	70,57	0,00010	99.611	10	99.606	7.531.612	75,61
9	0,00014	99.589	14	99.582	6.928.973	69,58	0,00013	99.601	12	99.594	7.432.006	74,62
10	0,00007	99.575	7	99.571	6.829.391	68,59	0,00005	99.588	5	99.586	7.332.412	73,63
11	0,00009	99.568	9	99.563	6.729.820	67,59	0,00010	99.583	10	99.578	7.232.826	72,63
12	0,00019	99.558	19	99.549	6.630.257	66,60	0,00017	99.573	17	99.565	7.133.248	71,64
13	0,00007	99.540	7	99.536	6.530.708	65,61	0,00010	99.566	10	99.551	7.033.683	70,65
14	0,00027	99.533	26	99.520	6.431.171	64,61	0,00009	99.547	9	99.542	6.934.132	69,66
15	0,00027	99.507	27	99.493	6.331.652	63,63	0,00013	99.537	13	99.531	6.834.590	68,66
16	0,00029	99.479	29	99.465	6.232.159	62,65	0,00015	99.524	15	99.517	6.735.059	67,67
17	0,00029	99.450	28	99.436	6.132.694	61,67	0,00028	99.509	28	99.495	6.635.543	66,68
18	0,00070	99.422	70	99.387	6.033.258	60,68	0,00014	99.481	14	99.474	6.536.048	65,70
19	0,00062	99.352	62	99.321	5.933.871	59,73	0,00022	99.467	22	99.456	6.436.574	64,71
20	0,00046	99.290	46	99.267	5.834.550	58,76	0,00023	99.445	23	99.433	6.337.118	63,73
21	0,00076	99.244	75	99.207	5.735.282	57,79	0,00015	99.421	15	99.414	6.237.685	62,74
22	0,00060	99.169	59	99.140	5.636.076	56,83	0,00027	99.406	27	99.393	6.138.271	61,75
23	0,00070	99.110	69	99.075	5.536.936	55,87	0,00015	99.380	15	99.372	6.038.878	60,77
24	0,00055	99.041	55	99.013	5.437.861	54,91	0,00013	99.365	13	99.358	5.939.506	59,77
25	0,00080	98.986	79	98.947	5.338.847	53,94	0,00019	99.352	19	99.342	5.840.148	58,78
26	0,00093	98.907	92	98.861	5.239.900	52,98	0,00022	99.333	22	99.322	5.740.806	57,79
27	0,00075	98.815	74	98.778	5.141.039	52,03	0,00024	99.311	23	99.299	5.641.484	56,81
28	0,00052	98.741	51	98.715	5.042.261	51,07	0,00029	99.287	29	99.273	5.542.185	55,82
29	0,00093	98.690	92	98.644	4.943.546	50,09	0,00026	99.259	26	99.246	5.442.912	54,84
30	0,00071	98.598	70	98.563	4.844.902	49,14	0,00028	99.233	28	99.219	5.343.666	53,85
31	0,00066	98.528	65	98.495	4.746.339	48,17	0,00040	99.205	40	99.185	5.244.448	52,86
32	0,00056	98.462	56	98.435	4.647.844	47,20	0,00035	99.165	35	99.147	5.145.263	51,89
33	0,00069	98.407	68	98.373	4.549.410	46,23	0,00017	99.130	17	99.121	5.046.115	50,90
34	0,00076	98.339	75	98.301	4.451.037	45,26	0,00038	99.113	38	99.094	4.946.994	49,91
35	0,00092	98.264	90	98.219	4.352.736	44,30	0,00042	99.075	41	99.054	4.847.900	48,93
36	0,00113	98.174	111	98.118	4.254.517	43,34	0,00041	99.033	40	99.013	4.748.846	47,95
37	0,00083	98.062	81	98.022	4.156.399	42,39	0,00044	98.993	44	98.971	4.649.832	46,97
38	0,00102	97.981	100	97.931	4.058.378	41,42	0,00047	98.949	47	98.926	4.550.861	45,99
39	0,00104	97.882	102	97.831	3.960.446	40,46	0,00057	98.903	57	98.874	4.451.935	45,01
40	0,00120	97.780	117	97.721	3.862.615	39,50	0,00063	98.846	62	98.815	4.353.061	44,04
41	0,00131	97.663	128	97.599	3.764.894	38,55	0,00056	98.784	56	98.756	4.254.246	43,07
42	0,00155	97.535	151	97.459	3.667.295	37,60	0,00069	98.728	68	98.694	4.155.490	42,09
43	0,00162	97.383	157	97.305	3.569.836	36,66	0,00097	98.660	95	98.612	4.056.796	41,12
44	0,00165	97.226	160	97.146	3.472.532	35,72	0,00095	98.565	94	98.517	3.958.184	40,16
45	0,00206	97.066	200	96.966	3.375.386	34,77	0,00125	98.470	123	98.409	3.859.666	39,20
46	0,00227	96.866	219	96.756	3.278.420	33,84	0,00099	98.348	97	98.299	3.761.257	38,24
47	0,00257	96.647	249	96.522	3.181.663	32,92	0,00133	98.251	131	98.185	3.662.958	37,28
48	0,00256	96.398	247	96.275	3.085.141	32,00	0,00150	98.120	147	98.046	3.564.772	36,33
49	0,00310	96.151	298	96.002	2.988.866	31,09	0,00210	97.973	206	97.870	3.466.726	35,38
50	0,00387	95.853	371	95.668	2.892.864	30,18	0,00196	97.767	191	97.671	3.368.856	34,46
51	0,00389	95.483	371	95.297	2.797.196	29,30	0,00208	97.575	203	97.474	3.271.185	33,52
52	0,00377	95.111	359	94.932	2.701.899	28,41	0,00212	97.373	206	97.270	3.173.711	32,59
53	0,00511	94.753	484	94.511	2.606.966	27,51	0,00298	97.166	289	97.022	3.076.442	31,66
54	0,00554	94.268	522	94.007	2.512.456	26,65	0,00277	96.877	269	96.743	2.979.420	30,75
55	0,00558	93.747	523	93.485	2.418.448	25,80	0,00309	96.608	299	96.459	2.882.677	29,84
56	0,00640	93.224	597	92.925	2.324.963	24,94	0,00320	96.310	308	96.156	2.786.219	28,93
57	0,00685	92.627	635	92.310	2.232.038	24,10	0,00385	96.002	370	95.817	2.690.063	28,02
58	0,00776	91.992	713	91.636	2.139.728	23,26	0,00342	95.632	327	95.468	2.594.246	27,13
59	0,00940	91.279	858	90.850	2.048.092	22,44	0,00438	95.304	417	95.096	2.498.778	26,22
60	0,00953	90.421	862	89.990	1.957.242	21,65	0,00520	94.887	494	94.640	2.403.682	25,33
61	0,01199	89.559	1.074	89.022	1.867.252	20,85	0,00565	94.394	534	94.127	2.309.042	24,46
62	0,01198	88.485	1.060	87.955	1.778.230	20,10	0,00598	93.860	562	93.579	2.214.915	23,60
63	0,01286	87.425	1.124	86.863	1.690.275	19,33	0,00595	93.298	555	93.021	2.121.336	22,74
64	0,01455	86.301	1.255	85.673	1.603.412	18,58	0,00692	92.743	642	92.422	2.028.315	21,87
65	0,01504	85.045	1.279	84.406	1.517.739	17,85	0,00800	92.101	737	91.733	1.935.893	21,02
66	0,01731	83.766	1.450	83.041	1.433.333	17,11	0,00843	91.364	770	90.979	1.844.160	20,18
67	0,01738	82.316	1.431	81.601	1.350.292	16,40	0,00951	90.594	861	90.163	1.753.181	19,35
68	0,01926	80.885	1.558	80.106	1.268.692	15,69	0,00970	89.733	871	89.297	1.663.018	18,53
69	0,02011	79.327	1.595	78.530	1.188.585	14,98	0,01053	88.862	935	88.394	1.573.720	17,71
70	0,02216	77.732	1.723	76.871	1.110.055	14,28	0,01124	87.927	988	87.433	1.485.326	16,89
71	0,02441	76.009	1.855	75.082	1.033.185	13,59	0,01323	86.939	1.151	86.364	1.397.893	16,08
72	0,02495	74.154	1.850	73.229	958.103	12,92	0,01397	85.788	1.199	85.189	1.311.530	15,29
73	0,02816	72.304	2.036	71.286	884.874	12,24	0,01534	84.590	1.297	83.941	1.226.341	14,50
74	0,03264	70.268	2.293	69.121	813.588	11,58	0,01676	83.292	1.396	82.594	1.142.400	13,72
75	0,03390	67.975	2.304	66.822	744.466	10,95	0,01772	81.896	1.451	81.170	1.059.806	12,94
76	0,03648	65.670	2.396	64.472	677.644	10,32	0,02211	80.445	1.778	79.556	978.635	12,17
77	0,04188	63.274	2.650	61.949	613.172	9,69	0,02361	78.667	1.858	77.738	899.079	11,43
78	0,04532	60.624	2.747	59.250	551.222	9,09	0,02864	76.809	2.199	75.709	821.341	10,69
79	0,05321	57.877	3.080	56.337	491.972	8,50	0,03298	74.610	2.461	73.379	745.632	9,99
80	0,05932	54.797	3.250	53.172	435.635	7,95	0,03656	72.149	2.637	70.830	672.253	9,32
81	0,06316	51.547	3.256	49.919	382.464	7,42	0,04487	69.511	3.119	67.952	601.	

Männer und Frauen (Unisex-Tafel)						Genaueres Alter (am x-ten Geburtstag) in Jahren
Sterbe- wahr- schein- lichkeit im Alters- intervall x bis x+1	Über- lebende im Alter x	Ge- storbene im Alters- intervall x bis x+1	Stationäre Bevölkerung		Fernere Lebens- erwartung im Alter x in Jahren	
			im Alters- intervall x bis x+1	ab dem Alter x		
q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x	x
0.00319	100.000	319	99.713	8.084.206	80,84	0
0.00024	99.681	24	99.669	7.984.492	80,10	1
0.00011	99.657	11	99.652	7.884.823	79,12	2
0.00010	99.646	10	99.641	7.785.172	78,13	3
0.00013	99.636	13	99.629	7.685.531	77,14	4
0.00006	99.623	6	99.620	7.585.901	76,15	5
0.00010	99.617	10	99.612	7.486.281	75,15	6
0.00005	99.607	5	99.605	7.386.669	74,16	7
0.00007	99.602	7	99.598	7.287.065	73,16	8
0.00013	99.595	13	99.588	7.187.466	72,17	9
0.00006	99.581	6	99.578	7.087.878	71,18	10
0.00010	99.575	10	99.570	6.988.300	70,18	11
0.00018	99.566	18	99.557	6.888.729	69,19	12
0.00008	99.548	8	99.544	6.789.173	68,20	13
0.00018	99.540	18	99.531	6.689.629	67,21	14
0.00020	99.522	20	99.511	6.590.098	66,22	15
0.00022	99.501	22	99.490	6.490.587	65,23	16
0.00028	99.479	28	99.465	6.391.097	64,25	17
0.00043	99.451	43	99.429	6.291.632	63,26	18
0.00043	99.408	43	99.387	6.192.203	62,29	19
0.00035	99.365	35	99.348	6.092.816	61,32	20
0.00046	99.330	46	99.307	5.993.469	60,34	21
0.00043	99.285	43	99.263	5.894.161	59,37	22
0.00043	99.242	43	99.220	5.794.898	58,39	23
0.00034	99.199	34	99.182	5.695.678	57,42	24
0.00049	99.165	49	99.141	5.596.496	56,44	25
0.00058	99.116	58	99.087	5.497.355	55,46	26
0.00050	99.059	49	99.034	5.398.268	54,50	27
0.00040	99.009	40	98.989	5.299.234	53,52	28
0.00060	98.970	59	98.940	5.200.244	52,54	29
0.00049	98.910	49	98.886	5.101.305	51,58	30
0.00053	98.861	53	98.835	5.002.419	50,60	31
0.00046	98.809	45	98.786	4.903.584	49,63	32
0.00043	98.763	43	98.742	4.804.798	48,65	33
0.00057	98.720	57	98.692	4.706.056	47,67	34
0.00067	98.664	66	98.631	4.607.364	46,70	35
0.00077	98.598	76	98.560	4.508.733	45,73	36
0.00063	98.522	62	98.491	4.410.173	44,76	37
0.00074	98.460	73	98.423	4.311.682	43,79	38
0.00080	98.387	79	98.347	4.213.259	42,82	39
0.00091	98.308	89	98.263	4.114.912	41,86	40
0.00094	98.218	92	98.172	4.016.649	40,90	41
0.00112	98.126	110	98.071	3.918.477	39,93	42
0.00129	98.016	127	97.953	3.820.406	38,98	43
0.00130	97.889	128	97.826	3.722.453	38,03	44
0.00165	97.762	162	97.681	3.624.628	37,08	45
0.00163	97.600	159	97.520	3.526.947	36,14	46
0.00196	97.441	191	97.345	3.429.426	35,20	47
0.00203	97.250	198	97.151	3.332.081	34,26	48
0.00260	97.052	253	96.926	3.234.930	33,33	49
0.00292	96.799	283	96.658	3.138.004	32,42	50
0.00299	96.517	288	96.372	3.041.346	31,51	51
0.00295	96.228	283	96.087	2.944.974	30,60	52
0.00404	95.945	388	95.751	2.848.888	29,69	53
0.00415	95.557	396	95.359	2.753.137	28,81	54
0.00432	95.160	411	94.955	2.657.778	27,93	55
0.00477	94.750	452	94.524	2.562.823	27,05	56
0.00532	94.298	502	94.047	2.468.299	26,18	57
0.00554	93.796	520	93.536	2.374.253	25,31	58
0.00683	93.276	637	92.958	2.280.717	24,45	59
0.00730	92.639	676	92.301	2.187.759	23,62	60
0.00873	91.963	803	91.562	2.095.458	22,79	61
0.00889	91.160	810	90.755	2.003.896	21,98	62
0.00927	90.350	838	89.932	1.913.141	21,17	63
0.01057	89.513	946	89.040	1.823.209	20,37	64
0.01138	88.567	1.008	88.063	1.734.169	19,58	65
0.01265	87.559	1.108	87.005	1.646.107	18,80	66
0.01319	86.451	1.140	85.881	1.559.102	18,03	67
0.01417	85.311	1.209	84.707	1.473.221	17,27	68
0.01500	84.102	1.261	83.472	1.388.514	16,51	69
0.01633	82.841	1.352	82.165	1.305.043	15,75	70
0.01840	81.489	1.499	80.739	1.222.878	15,01	71
0.01902	79.990	1.521	79.229	1.142.139	14,28	72
0.02119	78.468	1.663	77.637	1.062.910	13,55	73
0.02390	76.805	1.836	75.887	985.273	12,83	74
0.02495	74.969	1.870	74.034	909.385	12,13	75
0.02836	73.099	2.073	72.062	835.351	11,43	76
0.03138	71.026	2.228	69.912	763.289	10,75	77
0.03562	68.797	2.451	67.572	693.377	10,08	78
0.04133	66.347	2.742	64.975	625.805	9,43	79
0.04582	63.604	2.914	62.147	560.830	8,82	80
0.05211	60.690	3.163	59.109	498.683	8,22	81
0.05935	57.527	3.415	55.820	439.574	7,64	82
0.06781	54.113	3.669	52.278	383.754	7,09	83
0.07745	50.443	3.907	48.490	331.476	6,57	84
0.08968	46.537	4.173	44.450	282.986	6,08	85
0.09645	42.363	4.086	40.320	238.536	5,63	86
0.11363	38.277	4.350	36.103	198.216	5,18	87
0.12669	33.928	4.298	31.779	162.113	4,78	88
0.13901	29.630	4.119	27.570	130.334	4,40	89
0.16327	25.511	4.165	23.428	102.764	4,03	90
0.17894	21.346	3.820	19.436	79.336	3,72	91
0.20501	17.526	3.593	15.729	59.900	3,42	92
0.21592	13.933	3.008	12.429	44.171	3,17	93
0.25245	10.925	2.758	9.546	31.742	2,91	94
0.26325	8.167	2.150	7.092	22.196	2,72	95
0.29500	6.017	1.775	5.129	15.105	2,51	96
0.32014	4.242	1.358	3.563	9.976	2,35	97
0.34088	2.884	983	2.392	6.413	2,22	98
0.38237	1.901	727	4.021	4.021	2,12	99

Anhang 4 - Zählprozess des Todes

Die Stoppzeiten beziehen sich auf den Stichtag 31. Dezember.
Das heißt: $\tau_i = 31.\text{Dezember } 20i$ für $i = 04, \dots, 13$.

