



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

EIN BEITRAG ZUR BEWERTUNG FONDSGEBUNDENER LEBENSVERSICHERUNGS- PRODUKTE MIT GARANTIERTER ER- UND ABLEBENSLEISTUNG

Ausgeführt am Institut für
WIRTSCHAFTSMATHEMATIK
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
AO.UNIV.PROF. DIPL.-ING. DR. TECHN. FRIEDRICH HUBALEK

und in Zusammenarbeit mit
DI DR. PETER BAUMANN
der Finanzmarktaufsicht

durch
THOMAS KOLLER BSC
1140 Wien, Hanakgasse 4/6

Danksagung

Die vorliegende Diplomarbeit ist eine Kooperationsarbeit zwischen der Technischen Universität Wien und der Österreichischen Finanzmarktaufsicht.

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek für die kompetente Betreuung, besonders bei mathematischen Fragestellungen, seitens der Technischen Universität Wien bedanken.

Des Weiteren bedanke ich mich bei Herrn DI Dr. Peter Baumann von der Finanzmarktaufsicht für die vielseitige Unterstützung und Geduld, welche mir entgegengebracht wurde. Sein außergewöhnliches Engagement hat stets zur Entwicklung meiner Diplomarbeit beigetragen.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meiner Familie und bei all jenen, die mich während meiner Studienzeit unterstützt und motiviert haben.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst habe. Alle wörtlichen und sinngemäßen Übernahmen aus anderen Werken wurden als solche kenntlich gemacht und alle in der Arbeit verwendeten Hilfsmittel im Literaturverzeichnis aufgelistet.

Die vorliegende Diplomarbeit habe ich in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Ort, Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

1	Aufbau der Arbeit	3
1.1	Einleitung	3
1.2	Aufbau der Arbeit	3
2	Variable Annuitäten	6
2.1	Guaranteed Minimum Accumulation Benefit	6
2.2	Guaranteed Minimum Accumulation Benefit mit Ablebensleistung	8
3	Mathematische Vorbereitung	10
3.1	Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen	10
3.2	Stochastische Prozesse und Filtrationen	15
3.3	Martingale und Brownsche Bewegungen	16
3.4	Stochastische Integration bezüglich einer Brownschen Bewegung - Itô-Integral .	19
3.5	Itô-Prozess und Itô-Formel	24
3.6	Stochastische Differentialgleichungen	27
3.7	Der Satz von Girsanov	28
4	Black-Scholes Modell	31
4.1	Black-Scholes Modell	31
4.2	Black-Scholes-Formel für europäische Optionen	40
5	Grundlagen der Zinstheorie	46
5.1	Bankkonto und risikolose Zinsrate	46
5.2	Tageszählkonvention	47
5.3	Weitere Zinsraten und ihr Zusammenhang zu den Nullkuponanleihen	48
5.4	Zinsstrukturkurve & Zero-Bond Kurve	52
5.5	Forward Rates & Forward Rate Agreements	54
5.6	Interest-Rate Swaps & Forward Swap Rates	57
5.7	Swaptions	59

6	Hull-White extended Vasiček Modell	62
6.1	Hull-White extended Vasiček Modell	62
6.2	Herleitung des Hull-White extended Vasiček Modells	64
6.3	Nullkuponanleihen und Optionen des Hull-White Modells	78
7	Sterblichkeitsmodell	83
8	Die geschlossene Formel für GMABs mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung	92
8.1	Das Finanzmarktmodell unter dem Aktienmaß $\mathbb{Q}^S$	96
8.2	Beweis der geschlossenen Formel	106
9	Kalibrierung der Parameter	112
9.1	Bestimmung der Zero-Bond Kurve	114
9.2	Schätzung der Parameter a_r und σ_r des Hull-White-Zinsmodells	121
9.3	Kalibrierung der Korrelation zwischen Aktie und Zins	125
9.4	Kalibrierung der impliziten Aktienvolatilität	127
9.5	Parameter für das Sterblichkeitsmodell	129
10	Der faire Preis der GMABs mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung	130
	Literaturverzeichnis	135
	Abbildungsverzeichnis	139
	Tabellenverzeichnis	140
A	Anhang	141
A.1	R-Code zur Bestimmung der Zero-Bond Kurve	141
A.2	R-Code zur Schätzung der Parameter a_r und σ_r des Hull-White-Zinsmodells . .	144
A.3	R-Code zur Preisbestimmung des GMABs mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung	152

Kapitel 1

Aufbau der Arbeit

1.1 Einleitung

Die Grundlage der vorliegenden Diplomarbeit bildet der wissenschaftliche Artikel „Closed-form solutions for Guaranteed Minimum Accumulation Benefits“ von Mikhail Krayzler, Rudi Zagst und Bernhard Brunner [19]. In diesem Artikel wird der Preis eines speziellen fondsgebundenen Lebensversicherungsprodukts, dem Guaranteed Minimum Accumulation Benefit, kurz GMAB, mit Hilfe einer geschlossenen Formel berechnet. Genauer gesagt werden drei unterschiedliche Garantieprodukte betrachtet, welche vorab bestimmte Auszahlungen im Erlebensfall garantieren. Die mit der geschlossenen Formel berechneten Preise werden anschließend miteinander verglichen sowie Sensitivitätsanalysen durchgeführt.

Im Zuge der Diplomarbeit wird eines dieser Garantieprodukte genau analysiert und durch eine zusätzlich garantierte Ablebensleistung erweitert. Während auf die mathematischen Hintergründe detailliert eingegangen und das in diesem Artikel verwendete Finanzmarktmodell ausführlich hergeleitet wird, wird das dort präsentierte Sterblichkeitsmodell direkt übernommen. Des Weiteren wird die im Artikel vorgestellte geschlossene Formel an die Produkterweiterung angepasst und schrittweise bewiesen. Die für die Preisberechnung notwendigen Parameter werden mit Hilfe der im Artikel vorgeschlagenen Verfahren kalibriert. Abschließend wird der Preis der Produkterweiterung unter Verwendung der geschlossenen Formel für verschiedene Szenarien berechnet.

1.2 Aufbau der Arbeit

Um einen Überblick über den Aufbau der Masterarbeit zu erhalten, werden die folgenden Kapitel kurz zusammengefasst:

Kapitel 2: Variable Annuitäten

In diesem Kapitel wird das spezielle fondsgebundene Lebensversicherungsprodukt mit garantierter Er- und Ablebensleistung aus Kapitel 1.1, gleichzeitig Hauptgegenstand dieser Arbeit, vorgestellt. Dieses Versicherungsprodukt gehört zur Familie der variablen Annuitäten, einer großen Klasse fondsgebundener Lebensversicherungsprodukte.

Kapitel 3: Mathematische Vorbereitung

Vor der Darstellung der verschiedenen Modelle, welche für die Preisberechnung des in Kapitel 2 definierten Lebensversicherungsprodukts herangezogen werden, beinhaltet dieses Kapitel die Einführung der dafür benötigten mathematischen Grundlagen. Diese bilden das Fundament der nachfolgenden Berechnungen.

Kapitel 4: Black-Scholes Modell

Da bei dem Versicherungsprodukt unter anderem in Aktien oder Fonds investiert wird, wird ein Modell gesucht, das den Finanzmarkt geeignet abbildet. Dafür wird das in [19] verwendete Black-Scholes Modell gewählt und in Kapitel 4 vorgestellt. Mit Hilfe der risikoneutralen Bewertungsformel können Finanzderivate bewertet werden. Für die zwei wichtigsten Finanzderivate, die europäische Call- und Put-Option, wird anschließend die bekannte Black-Scholes Formel hergeleitet.

Kapitel 5: Grundlagen der Zinstheorie

Neben den Aktien spielt auch der risikolose Zins, zu welchem Geld auf einem Bankkonto investiert werden kann, eine bedeutende Rolle. Dieses Kapitel stellt die verschiedenen Zinssätze sowie ihren Zusammenhang zu den Nullkuponanleihen vor und bildet die Basis für Kapitel 6. Des Weiteren wird hier ein Überblick über Forward Rate Agreements, Zinsswaps und Optionen auf Swaps, die sogenannten Swaptions, gegeben.

Kapitel 6: Hull-White extended Vasiček Modell

In der Literatur gibt es eine große Auswahl an Zinsmodellen, wobei das in [19] verwendete Hull-White extended Vasiček Modell auch in dieser Arbeit zur Anwendung kommt. Dieses Modell hat den Vorteil, dass es an die aktuelle am Markt beobachtbare Zinsstrukturkurve angepasst werden kann. In diesem Kapitel werden nicht nur die wichtigsten Eigenschaften des Zinsprozesses gezeigt, sondern auch die Theorie der Nullkuponanleihen und europäischen Optionen im Hull-White Modell präsentiert.

Kapitel 7: Sterblichkeitsmodell

Eine maßgebliche Bedeutung zeigt die zukünftige Sterblichkeitsentwicklung der Bevölkerung, da die Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeit des Versicherungsnehmers ebenfalls in die Berechnung des Versicherungsprodukts mit einfließt. Dieses Kapitel schließt mit der Präsentation des Sterblichkeitsmodells alle Vorbereitungen ab, sodass die geschlossene Formel hergeleitet werden kann.

Kapitel 8: Die geschlossene Formel für GMABs mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung

Mit Hilfe des Black-Scholes Modell aus Kapitel 4, des Hull-White extended Vasiček Modells aus Kapitel 6 und des Sterblichkeitsmodell aus Kapitel 7 kann eine geschlossene Formel gefunden werden, mit welcher der faire Preis des Versicherungsprodukts berechnet werden kann. Dem eigentlichen Beweis der geschlossenen Formel geht dabei eine neue Darstellung des Finanzmarktmodells unter einem neuen Maß, dem Aktienmaß, voraus.

Kapitel 9: Kalibrierung der Parameter

Um diese geschlossene Formel verwenden zu können, müssen alle dafür notwendigen Parameter kalibriert werden. Darunter fallen die Preise der Nullkuponanleihen, die Parameter aus dem Hull-White Modell, die Aktienvolatilität und die Korrelation zwischen Aktie und Zinssatz. Die Parameter aus dem Sterblichkeitsmodell werden direkt aus [19] übernommen. Die Kalibrierung erfolgt teilweise mit Hilfe von **R**, wobei der Code in diesen Fällen im Anhang beigefügt wurde.

Kapitel 10: Der faire Preis der GMABs mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung

In Kapitel 10 wird der Preis der Produkterweiterung, mit Hilfe der geschlossenen Formel aus Kapitel 8 und der aus Kapitel 9 erhaltenen Parameter, für verschiedene Laufzeiten und unterschiedlich alte Versicherungsnehmer berechnet. Dabei wird zusätzlich zwischen männlichem und weiblichem Versicherungsnehmer unterschieden.

Kapitel 2

Variable Annuitäten

Der Begriff *variable Annuitäten*, im Englischen auch Variable Annuities genannt, beschreibt eine in den USA entstandene Variante von fondsgebundenen Lebens- oder Rentenversicherungsprodukten, welche eine zusätzliche Wahl bestimmter Garantien ermöglicht.

Der Versicherungsnehmer leistet dabei eine Einmalzahlung oder laufende Prämien, welche vom Versicherungsunternehmen direkt in die vom Versicherungsnehmer ausgewählten Fonds investiert werden. Das Risikoprofil des Portfolios kann daher durch die Wahl der Fonds vom Versicherungsnehmer selbst bestimmt werden. Die zur Auswahl stehenden Fonds werden wiederum vom Versicherer festgelegt.

Zusätzlich werden vom Versicherungsunternehmen verschiedene Garantien, meist in Form von Renten- oder Kapitalauszahlungen im Er- oder Ablebensfall angeboten. Diese hat der Versicherer in jedem Fall, also auch bei einer schlechten Fondsentwicklung zu leisten. Der Versicherungsnehmer hat die Möglichkeit für ihn geeignete Garantien gegen eine transparente Garantiegebühr auszuwählen. Da die Garantie nicht vom ausgewählten Fondsportfolio oder einer konventionell festverzinslichen Anlage erzeugt, sondern vom Versicherungsunternehmen übernommen wird, kann das gesamte Investment des Versicherungsnehmers von der Marktentwicklung profitieren.

Der Versicherungsnehmer weiß schon vor Vertragsabschluss, wie hoch die garantierte Mindestleistung ist und kann die Fondsentwicklung sowie die damit verbundene maximale Auszahlung während der Laufzeit beobachten [18, 19, 22].

2.1 Guaranteed Minimum Accumulation Benefit

In der vorliegenden Diplomarbeit wird ein spezielles Produkt der variablen Annuitäten, das *Guaranteed Minimum Accumulation Benefit*, kurz *GMAB*, betrachtet und vorgestellt. Die wissenschaftlichen Artikel [2], [3], [18] und [19] dienen dabei als Grundlage für diese Arbeit. Wir folgen diesen Artikeln vor allem in diesem Kapitel.

Definition 2.1 *GMAB*

Der Versicherungsnehmer zahlt eine *Bruttoprämie*, die sich aus Risikoprämie, Sparprämie, diversen Kosten, wie Abschluss und Verwaltungskosten, und der Versicherungssteuer zusammensetzt. Um das Modell einfach zu halten, bleiben die Kosten und die Versicherungssteuer in dieser Arbeit unberücksichtigt und werden Null gesetzt. Zu Vertragsbeginn $t = 0$ wird die

Sparprämie P vom Versicherer in das *Anlageportfolio* A investiert. Dieses besteht aus einem vom Versicherungsnehmer ausgewählten Investmentfonds S . Der Wert dieses Anlageportfolios zu Zeitpunkt $t \in [0, T]$ wird mit A_t bezeichnet und *Fondsguthaben* genannt. Zusätzlich wählt der Versicherungsnehmer eine der im nächsten Absatz vorgestellten *Garantien* G . Falls der Versicherungsnehmer die bei Vertragsbeginn festgelegte *Laufzeit* T überlebt, erhält er bei Vertragsende $t = T$ das Maximum von Fondsguthaben und Garantie ausbezahlt. Der Wert des GMABs zu Vertragsende wird mit V_T bezeichnet und ist durch folgende Formel definiert:

$$V_T = \max(A_T, G_T) \mathbb{I}_{\{\tau > T\}} \quad (2.1)$$

mit Indikatorfunktion

$$\mathbb{I}_{\{\tau > T\}} = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau > T \\ 0 & \text{für } \tau \leq T \end{cases}$$

wobei τ für die *Restlebenszeit* des Versicherungsnehmers bei Vertragsbeginn steht.

Im folgenden bezeichne $\mathbb{I}_{\{A\}}$ stets eine Indikatorfunktion, welche

$$\mathbb{I}_{\{A\}} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllt.

Folgende vier Garantiemöglichkeiten sind derzeit am Markt üblich:

- **Beitragsrückgewähr:** Die garantierte Leistung zu Ablaufzeitpunkt T ist genau die Sparprämie P :

$$G_T = P$$

- **Garantierte Mindestverzinsung (Roll-up Garantie):** Die garantierte Leistung zu Ablaufzeitpunkt T ist die Sparprämie P mit einem zu Vertragsbeginn festgelegten Zinssatz δ , auch Roll-up Rate genannt, verzinst:

$$G_T = P e^{\delta T}$$

Die Beitragsrückgewähr ist ein Spezialfall der garantierten Mindestverzinsung mit $\delta = 0$.

- **Höchststandsicherung (Ratchet Garantie):** Bei der Höchststandsicherung wird das Fondsguthaben zu bestimmten vorab definierten Zeitpunkten t_i ($i = 1, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$) ermittelt. Die garantierte Leistung zu Ablaufzeitpunkt T ist der höchste Stand des Fondsguthabens an diesen Stichtagen t_i :

$$G_T = \max_{0=t_0 < t_1 < \dots < t_n=T} A_{t_i}$$

- **Maximum der garantierten Mindestverzinsung und Höchststandsicherung:**
Wie der Name schon sagt, ist die garantierte Leistung zu Ablaufzeitpunkt T das Maximum aus der garantierten Mindestverzinsung und der Höchststandsicherung:

$$G_T = \max \left(P e^{\delta T}, \max_{0=t_0 < t_1 < \dots < t_n=T} A_{t_i} \right)$$

Beispiel 2.2 GMAB mit Beitragsrückgewähr

Der Versicherungsnehmer leistet zu Beginn eine Sparprämie von $P = 10.000 \text{ €}$, welche in das Anlageportfolio A ($A_0 = 10.000 \text{ €}$) investiert wird. Die Garantie ist in diesem Fall exakt der Wert der Sparprämie ($G_T = 10.000 \text{ €}$). Nach einer Laufzeit von $T = 10$ Jahren erhält der Versicherungsnehmer das Maximum von vorhandenen Fondsguthaben A_T und Garantie G_T . Ist das Fondsguthaben beispielsweise auf 15.000 € angestiegen, erhält der Versicherungsnehmer diesen Betrag, da dieser größer als die Garantie G_T ist. Hat das Fondsguthaben an Wert verloren und wäre etwa auf 5.000 € gesunken, bekommt der Versicherungsnehmer dennoch den garantierten Betrag von 10.000 € .

Beispiel 2.3 GMAB mit garantierter Mindestverzinsung

Im Falle der garantierten Mindestverzinsung würde die Sparprämie $P = 10.000 \text{ €}$ mit der fixierten Zinsrate δ verzinst werden, um den garantierten Wert zu bekommen. Angenommen es wird eine jährliche Verzinsung von $\delta = 2\%$ vereinbart, dann würde die Garantie G_T zum Endzeitpunkt $T = 10$ gerundet 12.214 € ($= P e^{\delta T} = 10.000 \cdot e^{10 \cdot 0,02}$) betragen. Analog zur Beitragsrückgewähr bekommt der Versicherungsnehmer das Maximum von vorhandenen Fondsguthaben A_T und der Garantie G_T .

Beispiel 2.4 GMAB mit Höchststandsicherung

Bei der Höchststandsicherung wird das Fondsguthaben zu bestimmten Zeitpunkten t_i ($i = 1, \dots, n; n \in \mathbb{N}$) ermittelt. Werden die Zeitpunkte jährlich, jeweils zu Jahresbeginn gewählt, so wird das Fondsguthaben immer am Jahresanfang bewertet. Die Garantie ist nun genau der höchste Wert der zu diesen festgesetzten Zeitpunkten ermittelten Fondsguthaben. Dieser Wert ist nicht mit dem absoluten Höchststand des Fondsguthabens über die gesamte Laufzeit zu verwechseln. Der Versicherungsnehmer erhält ebenfalls wieder das Maximum von vorhandenen Fondsguthaben A_T und Garantie G_T .

Beispiel 2.5 GMAB mit dem Maximum der garantierten Mindestverzinsung und Höchststandsicherung

In diesem Fall werden zusätzlich die Werte der garantierten Mindestverzinsung und der Höchststandsicherung miteinander verglichen und der größere Wert dieser beiden Garantien als neue Garantie angenommen. Der Versicherungsnehmer bekommt schließlich das Maximum von vorhandenen Fondsguthaben und neuer Garantie.

2.2 Guaranteed Minimum Accumulation Benefit mit Ablebensleistung

Da die garantierte Ablaufleistung der Produktvariante GMAB nur vom Versicherer ausgezahlt wird, falls der Versicherungsnehmer das Ende der Vertragslaufzeit T überlebt, wird dieses Pro-

dukt im Zuge der Diplomarbeit erweitert, sodass auch Leistungen im Ablebensfall vorgesehen werden können.

Dazu wird im folgenden von jährlichen Schritten $t \in \mathbb{N}$ bis zu Vertragsende $T \in \mathbb{N}$ mit $t \leq T$ ausgegangen, wobei die Auszahlung immer am Ende des Todesjahres beziehungsweise spätestens zu Vertragsende stattfindet.

Das GMAB mit dieser Ablebensleistung garantiert dem Versicherungsnehmer im Falle seines vorzeitigen Ablebens, also vor Vertragsende T , zusätzlich das Maximum von Fondsguthaben und Garantie am Ende des Todesjahres. Der nominelle Auszahlungsbetrag mit Vertragslaufzeit T ist gegeben durch:

$$V_T = \max(A_T, G_T) \mathbb{I}_{\{\tau > T\}} + \sum_{t=1}^T \max(A_t, G_t) \mathbb{I}_{\{t-1 < \tau \leq t\}} \quad (2.2)$$

Der erste Teil kann dabei mit dem letzten Summanden zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} V_T &= \max(A_T, G_T) \mathbb{I}_{\{\tau > T\}} + \sum_{t=1}^T \max(A_t, G_t) \mathbb{I}_{\{t-1 < \tau \leq t\}} \\ &= \max(A_T, G_T) \mathbb{I}_{\{\tau > T\}} + \sum_{t=1}^{T-1} \max(A_t, G_t) \mathbb{I}_{\{t-1 < \tau \leq t\}} + \max(A_T, G_T) \mathbb{I}_{\{T-1 < \tau \leq T\}} \\ &= \max(A_T, G_T) (\mathbb{I}_{\{\tau > T\}} + \mathbb{I}_{\{T-1 < \tau \leq T\}}) + \sum_{t=1}^{T-1} \max(A_t, G_t) \mathbb{I}_{\{t-1 < \tau \leq t\}} \\ &= \max(A_T, G_T) \mathbb{I}_{\{T-1 < \tau\}} + \sum_{t=1}^{T-1} \max(A_t, G_t) \mathbb{I}_{\{t-1 < \tau \leq t\}} \end{aligned}$$

Durch die Indikatorfunktion kommt nur einer der Summanden zur Auszahlung.

Guaranteed Minimum Accumulation Benefit mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung

Obwohl in Kapitel 2.1 vier verschiedene Garantiemöglichkeiten vorgestellt wurden, konzentriert sich die vorliegende Arbeit ausschließlich auf die garantierte Mindestverzinsung. Die nominelle Auszahlung V_T des GMAB mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung ist daher:

$$V_T = \max(A_T, Pe^{\delta T}) \mathbb{I}_{\{T-1 < \tau\}} + \sum_{t=1}^{T-1} \max(A_t, Pe^{\delta t}) \mathbb{I}_{\{t-1 < \tau \leq t\}} \quad (2.3)$$

Nachdem die nominelle Auszahlung des GMAB mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung für eine bestimmte Sparprämie P bekannt ist, gilt es den fairen Preis (=Bruttoprämie) dieses Versicherungsproduktes zu bestimmen. Da sich dieser, wie in Definition 2.1 beschrieben, aus der Sparprämie, welche in einen Fonds investiert wird, und der Risikoprämie, welche die Garantie vertraglich zusichert, zusammensetzt, kann die Risikoprämie anschließend leicht hergeleitet werden.

Kapitel 3

Mathematische Vorbereitung

Um den Leser für die nachfolgenden Kapitel, in welchen das Finanzmarkt- und Sterblichkeitsmodell vorgestellt werden, vorzubereiten, werden in diesem Kapitel die mathematischen Grundlagen zusammengefasst. Diese bilden die Basis für viele spätere Berechnungen.

Wird beispielsweise der Preisprozess einer Aktie auf einem Finanzmarkt modelliert, werden stochastische Prozesse in stetiger Zeit verwendet, welche wiederum direkt mit stochastischen Differentialgleichungen in Verbindung stehen. Bevor diese stochastischen Differentialgleichungen definiert werden können, müssen mathematischen Vorbereitungen getroffen werden. Dazu erfolgt in Kapitel 3.1 eine Einführung in die Welt der Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen, die über stochastische Prozesse und Filtrationen in Kapitel 3.2 bis zu Martingale und Brownschen Bewegungen in Kapitel 3.3 reicht. Dem anschließend definierten stochastischen Integral in Kapitel 3.4 folgt die Definition der Itô-Prozesse und der Itô-Formel in Kapitel 3.5. In Kapitel 3.6 können schließlich die stochastischen Differentialgleichungen definiert werden. Abschließend wird in Kapitel 3.7 der Satz von Grisanov, welcher im Black-Scholes Modell eine zentrale Rolle spielt, erklärt. Wir folgen in den Kapiteln 3.1 bis 3.6 den bekannten Werken [5] und [20] und in Kapitel 3.7 zusätzlich [8]. Einen vertiefenden Einblick in die Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie bietet außerdem [21], welches besonders in den Kapitel 3.1 bis 3.3 verwendet wird.

3.1 Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen

Zuerst sei Ω eine Menge, sodass die Idee eines Maßes auf Ω formuliert werden kann. Dazu stelle sich der Leser eine große mit Apfelmus bedeckte Platte vor (vgl. [5]). Die Platte entspricht dabei der Menge Ω . Für jede Untermenge $A \subseteq \Omega$ sei nun eine positive reelle Zahl $\mu(A)$ definiert, welche der Menge des Apfelmuses, das auf der Menge A liegt, entspricht. $\mu(A)$ wird daher auch als das Maß von A bezeichnet. Bei der mathematischen Formulierung dieser Idee stellt sich heraus, dass es Teilmengen $A \subseteq \Omega$ gibt, die eine mathematische Definition von $\mu(A)$ unmöglich machen. Daher sei $\mu(A)$ nur auf den „guten“ Teilmengen $A \subseteq \Omega$ definiert. Diese guten Teilmengen werden messbare Mengen genannt und das notwendige mathematische Konzept dafür heißt σ -Algebra.

Definition 3.1 σ -Algebra $\mathcal{F}$ und Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$

Sei Ω eine gegebene Menge. Eine Familie oder Menge $\mathcal{F}$ von Teilmengen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Ω heißt σ -Algebra, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$
- (ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ wobei $A^c = \Omega \setminus A$ das Komplement von A in Ω ist
- (iii) $A_n \in \mathcal{F}$ für $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$
- (iv) $A_n \in \mathcal{F}$ für $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Für die Definition der σ -Algebra würden (ii) und (iii) ausreichen. Einfache Beispiele sind $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, wobei $\mathcal{P}(\Omega)$ die Menge aller Untermengen von Ω , die sogenannte *Potenzmenge*, bezeichnet.

Ein Paar $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt *Messraum*, falls Ω eine Menge und $\mathcal{F}$ eine σ -Algebra auf Ω ist. Die Teilmengen A von Ω , welche in $\mathcal{F}$ sind heißen *$\mathcal{F}$ -messbare Mengen*.

Jetzt kann das sogenannte Maß definiert werden.

Definition 3.2 Maß μ und Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum. Ein Maß μ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist eine Funktion

$$\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

die folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{F}$
- (ii) $\mu(\emptyset) = 0$
- (iii) Falls $A_n \in \mathcal{F}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ paarweise disjunkt ist, also $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, dann gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Diese Eigenschaft wird auch σ -Additivität genannt.

Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ heißt *Maßraum*, falls μ ein Maß auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$ ist.

Definition 3.3 Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ und Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum. Ein Maß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls es eine Funktion

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

ist, welche zusätzlich die Bedingung $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ erfüllt.

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ wird in diesem Fall *Wahrscheinlichkeitsraum* genannt. Die zugrundeliegende Menge Ω heißt auch Ereignisraum und die Elemente der σ -Algebra $\mathcal{F}$ werden mit Ereignisse oder Events bezeichnet.

Es sei nun überlegt, wie eine Familie $\mathcal{U}$ von Teilmengen der Gesamtmenge Ω , die keine σ -Algebra ist, zu einer σ -Algebra erweitert werden kann. Obwohl $\mathcal{U}$ in jedem Fall zur Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$, welche eine σ -Algebra wäre, erweitert werden kann, soll jedoch die kleinstmöglichen σ -Algebra erzeugt werden.

Theorem 3.4 Von $\mathcal{U}$ erzeugte σ -Algebra $\sigma(\mathcal{U})$

Sei $\mathcal{U}$ eine beliebige Familie von Teilmengen der Gesamtmenge Ω , dann existiert eine eindeutige minimale Erweiterung $\mathcal{F}$ zu einer σ -Algebra. $\mathcal{F}$ wird dann die von $\mathcal{U}$ erzeugte σ -Algebra genannt und auch mit $\sigma(\mathcal{U})$ bezeichnet. Diese erfüllt:

$$(i) \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$$

$$(ii) \mathcal{F} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } \Omega$$

$$(iii) \mathcal{F} \text{ ist minimal, also falls es eine weitere } \sigma\text{-Algebra } \mathcal{G} \text{ auf } \Omega \text{ gibt mit } \mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}, \text{ so gilt } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$$

$\mathcal{F}$ kann auch kurz folgendermaßen definiert werden:

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{U}) = \bigcap \{ \mathcal{G}; \mathcal{G} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } \Omega, \mathcal{U} \subseteq \mathcal{G} \}$$

Die wichtigste σ -Algebra stellt die sogenannte Borel- σ -Algebra dar.

Definition 3.5 Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}$

Sei Ω gegeben durch $\Omega = \mathbb{R}^n$, dann ist die *Borel- σ -Algebra* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, jene σ -Algebra, welche durch die Klasse der offenen Mengen auf $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gehört zur Klasse der offenen Mengen, falls $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ existieren, mit $a_i \leq b_i$ für $i = 1, \dots, n$, sodass $A = \times_{i=1}^n (a_i, b_i]$. Die Elemente der Borel- σ -Algebra werden *Borel-Mengen* genannt.

$\mathcal{B}$ enthält neben allen offenen auch alle geschlossenen Mengen. Da das Komplement offener Mengen immer geschlossen ist, kann $\mathcal{B}$ beispielsweise auch durch die Klasse der geschlossenen Mengen erzeugt werden.

Definition 3.6 Messbarkeit von Funktionen

Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\Omega', \mathcal{F}')$ ein Messraum. Eine Funktion $Y : \Omega \rightarrow \Omega'$ heißt $\mathcal{F}$ - $\mathcal{F}'$ -messbar oder messbar bezüglich $\mathcal{F}$, wenn

$$Y^{-1}(U) = \{ \omega \in \Omega : Y(\omega) \in U \} \in \mathcal{F}$$

für alle $U \in \mathcal{F}'$.

Definition 3.7 Von X erzeugte σ -Algebra $\sigma(X)$

Falls $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine beliebige Funktion ist, so ist die von X erzeugte σ -Algebra $\sigma(X)$ die kleinste σ -Algebra, welche alle Mengen

$$X^{-1}(U)$$

enthält, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist.

Weiters gilt $\sigma(X) = \{X^{-1}(B); B \in \mathcal{B}\}$, wobei $\mathcal{B}$ die Borel- σ -Algebra auf $\mathbb{R}^n$ ist. X ist dann klarerweise $\sigma(X)$ -messbar.

Definition 3.8 *Zufallsvariable X*

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathbb{R}, \mathcal{F}')$ ein Messraum. Eine *Zufallsvariable* X ist eine $\mathcal{F}$ -messbare Funktion

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Zufallsvariablen weisen den möglichen Ereignissen $\omega \in \Omega$ eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl $X(\omega)$ zu. Bei einem Münzwurf beispielsweise +1 für Kopf und -1 für Zahl.

Definition 3.9 *Verteilungsfunktion und Dichte von X*

Jede Zufallsvariable X erzeugt ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_X auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$, welches durch

$$\mu_X(B) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}$$

definiert ist. (Für Kopf: $\mu_X(+1) := \mathbb{P}(\{\text{Kopf}\}) = \frac{1}{2}$). Die *Verteilungsfunktion* von X wird mit F_X bezeichnet und ist folgendermaßen definiert:

$$F_X(x) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

($F_X(0) := \mathbb{P}(\{\text{Zahl}\})$, $F_X(1) := \mathbb{P}(\{\text{Zahl}, \text{Kopf}\})$). Alternativ wird auch folgendes geschrieben:

$$\mu_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Die *Dichte* von X ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, die folgendes erfüllt:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x) dx$$

Definition 3.10 $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *Raum*

Für ein $p \in [1, \infty)$ sei $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ der Raum aller messbaren Funktionen f , welche

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$$

erfüllen. Für ein $f \in L^p$ sei die L^p -Norm $\|f\|_p$ definiert durch

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Für $p = \infty$ ist diese Norm gegeben durch

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{m \in \mathbb{R}; |f| \leq m; \mathbb{P}\text{-f.ü.}\}.$$

Streng genommen müsste hier von Äquivalenzklassen von $\mathbb{P}$ -f.ü. gleichen Funktionen, anstatt von Normen, gesprochen werden.

Eine Menge $N \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(N) = 0$ heißt *Nullmenge*. Wenn eine Eigenschaft für alle $x \in \Omega$ ausgenommen auf der Nullmenge N gilt, so gilt die Eigenschaft fast überall oder fast sicher (bezüglich $\mathbb{P}$), kurz geschrieben „ $\mathbb{P}$ -f.ü.“, beziehungsweise „ $\mathbb{P}$ -f.s.“.

Definition 3.11 Erwartungswert und Varianz von X

Für jede Zufallsvariable $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sind ihr *Erwartungswert* $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

und falls $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ihre *Varianz* $\mathbb{V}[X]$ durch

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

gegeben.

Definition 3.12 Normalverteilung von X ($\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *normalverteilt*, wenn die Verteilung von X eine Dichte der Form

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

hat, wobei $\sigma > 0$ und μ Konstanten sind. Anders ausgedrückt:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B p_X(x) dx \quad \text{für alle Borelmengen } B \subseteq \mathbb{R}.$$

Für die Verteilungsfunktion der Normalverteilung folgt:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Falls $\sigma^2 = 1$ und $\mu = 0$ wird die Verteilung *Standardnormalverteilung* ($\mathcal{N}(0, 1)$) genannt und die Verteilungsfunktion mit $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ bezeichnet.

Definition 3.13 Unabhängigkeit

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ heißen *unabhängig*, falls

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Verallgemeinert für σ -Algebren und Zufallsvariablen bedeutet Unabhängigkeit folgendes:

- Zwei σ -Algebren $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathcal{F}$ heißen *unabhängig*, falls

$$\mathbb{P}(G \cap H) = \mathbb{P}(G) \cdot \mathbb{P}(H)$$

für alle $G \in \mathcal{G}$ und alle $H \in \mathcal{H}$.

- Zwei Zufallsvariablen X und Y heißen *unabhängig*, falls ihre σ -Algebren $\sigma(X)$ und $\sigma(Y)$ unabhängig sind.

Angenommen die zwei Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig und X , Y und XY sind in L^1 , dann gilt:

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

Für alle folgenden Definitionen in diesem Kapitel sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegeben. Des Weiteren sei T eine Indexmenge, welche die Zeit beschreibt. Häufig wird $T \in \mathbb{N}$ oder $T = \mathbb{R}^+$ gewählt.

3.2 Stochastische Prozesse und Filtrationen

Nachdem Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum definiert wurden, wird nun eine ganze Familie davon, der sogenannte stochastische Prozess, betrachtet. Wir folgen dabei, wie zu Beginn des Kapitels erwähnt, den Werken [5], [20] und [21].

Definition 3.14 *Stochastischer Prozess* X

Ein *stochastischer Prozess* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ist eine Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \geq 0}$ mit

$$X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} : (t, \omega) \mapsto X_t(\omega).$$

Wird t als die Zeit und ω als individuelles Experiment definiert, so beschreibt $X_t(\omega)$ (oder auch $X(t, \omega)$) das Ergebnis des Experiments zu Zeitpunkt t .

Zufallsvariable: Für ein festes $t \in T$ ist $X(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto X_t(\omega)$ Zufallsvariable und ist $\mathcal{F}$ -messbar.

Pfad: Für ein festes $\omega \in \Omega$ heißt $X(\cdot, \omega) : T \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto X_t(\omega)$ Pfad oder Trajektorie von X .

Sind alle Pfade von einem stochastischen Prozess X stetig, dann heißt dieser Prozess X stetig.

Für den stochastischen Prozess X kann auch $(X_t)_{t \in T}$ mit $T \subseteq \mathbb{N}$ oder $T \subseteq \mathbb{R}^+$ geschrieben werden.

Beispiel 3.15 *Symmetrische Irrfahrt*

Sei $Y = (Y_t)_{t \in T}$ mit $T \in \mathbb{N}$ eine Folge von *u.i.v.* (unabhängig identisch verteilten) Zufallsvariablen mit

$$Y_t = \begin{cases} +1 & \text{für Kopf, mit } \mathbb{P}(\{\text{Kopf}\}) = \frac{1}{2} \\ -1 & \text{für Zahl, mit } \mathbb{P}(\{\text{Zahl}\}) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \forall t \in T.$$

Dann ist Y ein stochastischer Prozess und heißt *symmetrische Irrfahrt*.

Definition 3.16 *Filtration* $\mathbb{F}$ & *filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$

Eine *Filtration* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist eine wachsende Folge von Teil- σ -Algebren von $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}$$

Sind $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{F}$ eine Filtration darüber, so heißt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ *filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum*.

Bemerkung: $\mathcal{F}_t$ gibt die durch die beobachteten Ereignisse erhaltene Informationen zu Zeitpunkt t wider. Da die Filtration eine wachsende Familie ist, geht keine Information verloren, es kann nur neue Information dazu gewonnen werden.

Definition 3.17 *Rechtsstetigkeit von Filtration* $\mathbb{F}$

Eine Filtration $\mathbb{F}$ heißt *rechtsstetig*, falls $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s \geq t} \mathcal{F}_s$.

Definition 3.18 *Vollständigkeit von Filtration* $\mathbb{F}$

Eine Filtration $\mathbb{F}$ heißt *vollständig*, falls $\mathcal{F}_0$ alle $\mathbb{P}$ -Nullmengen von $\mathcal{F}$ enthält:

$$(A \subset B \in \mathcal{F} \text{ und } \mathbb{P}[B] = 0) \Rightarrow A \in \mathcal{F}_0$$

Jedes Ereignis A mit Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A] = 0$ muss daher schon zu Zeitpunkt $t = 0$ bekannt sein.

Definition 3.19 *Messbarkeit von Prozessen*

Ein stochastischer Prozess X heißt *adaptiert* zu Filtration $\mathbb{F}$, falls X_t für alle $t \in T$ messbar bezüglich $\mathcal{F}_t$ ist.

Für jedes fixe t wird der Prozess X_t komplett durch die Information $\mathcal{F}_t$, welche zu Zeitpunkt t vorhanden ist, bestimmt.

Definition 3.20 *Natürliche Filtration* $\mathbb{F}^X$

Die übliche *natürliche Filtration* $\mathbb{F}^X = \sigma(X_s, s \in [0, t])$ ist die kleinste Filtration, bezüglich welcher der stochastische Prozess X adaptiert ist.

$\mathbb{F}^X$ ist also die von X erzeugte Filtration und beschreibt die durch X gewonnene Information im Intervall $[0, t]$.

Bemerkung: Wird keine Filtration erwähnt, ist automatisch die natürliche Filtration gemeint, die zusätzlich rechtsstetig und vollständig gemacht wird.

3.3 Martingale und Brownsche Bewegungen

Die Theorie der Stochastischen Integration, welche im folgenden Unterkapitel präsentiert wird, steht in direktem Zusammenhang zur Theorie der Martingale. Um mit Martingalen arbeiten zu können, werden in diesem Kapitel einige Grundlagen der Maßtheorie beschrieben. Dabei folgen wir wieder den Werken [5], [20] und [21].

Sei $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Wenn $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine σ -Algebra ist, dann wird der *bedingte Erwartungswert* von X unter $\mathcal{G}$ mit $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ bezeichnet und folgendermaßen definiert:

Definition 3.21 Bedingte Erwartung

Die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ ist eine (f.s. eindeutige) Funktion von Ω nach $\mathbb{R}^n$, die folgendes erfüllt:

- $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ ist $\mathcal{G}$ -messbar
- Für alle $G \in \mathcal{G}$ gilt:

$$\int_G \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P}$$

Der zweite Punkt ist dabei äquivalent zu:

$$\int_{\Omega} Z \cdot \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_{\Omega} Z \cdot X d\mathbb{P}, \quad \text{für alle } \mathcal{G}\text{-messbaren } Z.$$

Die Existenz und Eindeutigkeit von $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ wird durch das Radon-Nykodym Theorem gesichert (siehe [20] und [21]).

Folgende Eigenschaften der bedingten Erwartung werden des öfteren verwendet:

Bemerkung: Seien $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ zwei σ -Algebren, sodass $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, sei $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine weitere Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ und sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y|\mathcal{G}] = \alpha \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + \beta \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$
- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$
- $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$, falls X messbar bezüglich $\mathcal{G}$ ist
- $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$, falls Y messbar bezüglich $\mathcal{G}$ ist
- $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$, falls X unabhängig von $\mathcal{G}$ ist
- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$

Definition 3.22 Martingal M

Ein stochastischer Prozess $M = (M_t)_{t \geq 0}$ heißt *Martingal* bezüglich Filtration $\mathbb{F}$, falls gilt:

- (i) $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ für alle $t \in T$ ($M_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$)
- (ii) M ist adaptiert bezüglich $\mathbb{F}$
- (iii) $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ für $0 \leq s \leq t$

Falls (iii) ersetzt wird durch

(iii)' $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s$, dann ist M ein *Supermartingal*.

(iii)'' $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s$, dann ist M ein *Submartingal*.

Bemerkung:

- Würde der Prozess M den Gewinnverlauf eines Spiels beschreiben, wäre M ein faires Spiel in (iii), ein ungünstiges in (iii)' und ein günstiges in (iii)''.
• Jedes Martingal M hat einen konstanten Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_0]] = \mathbb{E}[M_0] \in \mathbb{R}$$

Einer der bedeutendsten stochastischen Prozesse ist die Brownsche Bewegung und diese wird in der folgenden Definition vorgestellt.

Definition 3.23 Brownsche Bewegung W

Ein adaptierter stochastischer Prozess $W = (W_t)_{t \geq 0}$ heißt *Brownsche Bewegung* (bezüglich $\mathbb{F}$ und $\mathbb{P}$, mit Werten im $\mathbb{R}^d$), falls für $s \leq t$ folgendes gilt:

(i) $\mathbb{P}[W_0 = 0] = 1$

- (ii) W hat unabhängige Inkremente/Zuwächse, wenn sich die Zeitintervalle nicht überschneiden: Für alle $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ mit $k \in \mathbb{N}$ sind alle

$$W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$$

unabhängig.

- (iii) W hat stationäre Inkremente: Für alle $s, t \in [0, \infty)$ haben folgende Zuwächse die selbe Verteilung ($\stackrel{d}{=}$):

$$W_{t+h} - W_{s+h} \stackrel{d}{=} W_t - W_s \stackrel{d}{=} W_{t-s}$$

- (iv) W hat normalverteilte Inkremente: Für alle $s, t \in [0, \infty)$ gilt:

$$W_{t+h} - W_{s+h} \stackrel{d}{=} W_t - W_s \stackrel{d}{=} W_{t-s} \sim \mathcal{N}(0, t-s)$$

- (v) W hat $\mathbb{P}$ -f.s. stetige Pfade.

Bemerkung: Sei W_t eine Brownsche Bewegung, dann sind folgende Prozesse ebenfalls wieder Brownsche Bewegungen auf $[0, \infty]$ bzw. $[s, \infty]$:

- (a) $W_1(t) := -W(t)$
- (b) $W_2(t) := tW(\frac{1}{t})$ für $t > 0$ und $W_2(0) := 0$
- (c) $W_3(t) := \sqrt{a}W(\frac{t}{a})$ für eine Konstante $a > 0$
- (d) $W_4(t) := W(t) - W(s)$ für ein festes $s > 0$

Weiter sei

- (e) $X_t = \mu t + \sigma W_t$ mit Drift μ und Volatilität σ . Dabei werden μ und σ konstant angenommen und es gilt $\mu > 0$. X_t wird auch lineare Brownsche Bewegung genannt.

- (f) $Z_t = e^{\mu W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$ mit μ und σ wie in (e). Z_t wird auch geometrische Brownsche Bewegung genannt.

Bemerkung: W_t und Z_t sind Martingale, wobei $\mathbb{E}[Z_t] = 1$.

Definition 3.24

Sei $X_t(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiger Prozess und sei $p > 0$. Dann ist der p -te Variationprozess von X definiert durch:

$$\langle X, X \rangle_t^{(p)}(\omega) := \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{t_k \leq t} |X_{t_{k+1}}(\omega) - X_{t_k}(\omega)|^p$$

wobei $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$ und $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$.

Falls $p = 1$ heißt dieser Prozess die *Totalvariation* und falls $p = 2$ wird er *quadratische Variation* genannt.

Bemerkung: Eine Brownsche Bewegung W_t hat eine unendliche Totalvariation und für die quadratische Variation gilt:

$$\langle W, W \rangle_t^{(2)}(\omega) = t \quad \text{f.s.}$$

3.4 Stochastische Integration bezüglich einer Brownschen Bewegung - Itô-Integral

Das Ziel in diesem Kapitel ist eine Definition des *stochastischen Integrals* $\int_a^b f(t) dW_t$, auch Itô-Integral genannt. Wir folgen dabei wieder den Werken [5] und [20] und zusätzlich [16].

Um sich besser vorstellen zu können was das stochastische Integral eigentlich darstellt ist es hilfreich vorerst nochmals die symmetrische Irrfahrt Y aus Beispiel 3.15 zu betrachten. Sei $X_n = \sum_{i=0}^n Y_i$, dann ist X_n ein Martingal und beschreibt beispielsweise den Gewinn und Verlust aus einem fairen Spiel nach n Runden.

Angenommen X_n entspricht einer Reihe von Münzwürfen $(Y_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$, welche dem Spieler bei Kopf jeweils einen Euro Gewinn und bei Zahl jeweils einen Euro Verlust bescheren. Nun wird dem Spieler die Möglichkeit eines variablen Einsatzes gegeben und zwischen Kopf und Zahl hin und her zu wechseln. Mathematisch wird das durch die Spielstrategie $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschrieben, wobei jedes (S_n) messbar bezüglich $\mathcal{F}_{n-1}$ ist. Das bedeutet, dass die Strategie zwar nicht zu Beginn festgelegt werden muss, der Spieler bei einem Strategiewechsel zu Zeitpunkt n (Veränderung der Höhe des Einsatzes oder setzen auf Kopf oder Zahl) nur die Information aus den vorigen Münzwürfen $1, \dots, n-1$ zur Verfügung hat. Der Gewinn aus dem Spiel mit Strategie S lässt sich folglich durch $\sum_{i=0}^n S_i(X_{i+1} - X_i)$ darstellen und ist wieder ein Martingal.

In stetiger Zeit nimmt nun die Brownsche Bewegung W den Platz der Irrfahrt und ein stochastischer Prozess $f(t, \omega)$ die Stelle der Strategie ein. Das stochastische Integral $\int_a^b f(t) dW_t$ stellt somit eine stetige Verallgemeinerung von obigem Spiel dar. Wie wird dieses schließlich definiert? [16]

Der naheliegendste Ansatz wäre die pfadweise Definition des stochastischen Integrals als Riemann-Stieltjes Integral. Aufgrund der unendlichen Totalvariation der Brownschen Bewegung ist dies allerdings nicht möglich. Daher wird das Itô-Integral $\int_a^b f(t) dW_t$ für verschiedene Funktionen in zwei Schritten konstruiert. Hierfür wird angenommen, dass die Brownsche Bewegung W_t auf ganz Ω stetige Pfade hat und wie bereits erwähnt ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ mit rechtsstetiger, vollständiger und von der Brownschen Bewegung erzeugten Filtration $\mathbb{F}$ und die Zeit-Indexmenge $T = \mathbb{R}^+$ gegeben sind.

Schritt 1: Itô-Integral für einfache Funktionen (Integranden)

Im ersten Schritt wird das Itô-Integral für einfache Prozesse definiert.

Definition 3.25 *Funktionenmenge* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Sei $L^2[a, b]$ definiert als die Menge aller Funktionen $\varphi : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\int_a^b \mathbb{E}[\varphi^2(s)] ds < \infty,$$

wobei der stochastische Prozess φ adaptiert zur natürlichen Filtration $\mathbb{F}$ ist.

Der Prozess φ gehört zu L^2 , falls $\varphi \in L^2[0, t]$ für alle $t > 0$.

Definition 3.26 *Einfache Funktionen* φ

Eine Funktion $\varphi \in L^2$ heißt *einfach*, falls $k \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = t$ existieren mit

$$\varphi(t, \omega) = \sum_{j=0}^k \varphi(t_j, \omega) \mathbb{I}_{[t_j, t_{j+1})}$$

für alle $t \in T$ und $\omega \in \Omega$, wobei $\varphi(t_j, \omega)$ messbar bezüglich $\mathcal{F}_{t_j}$ sind.

Die Funktion φ ist dabei in jedem Teilintervall konstant ($\varphi(s, \omega) = \varphi(t_j, \omega)$ für $s \in [t_j, t_{j+1})$) und es ist von wesentlicher mathematischer und ökonomischer Bedeutung, dass die Funktion dabei an der linken Intervallgrenze t_j ausgewertet wird.

Definition 3.27 *Itô-Integral für einfache Funktionen* φ

Für eine einfache Funktion $\varphi \in L^2$ ist das *Itô-Integral* wie folgt definiert:

$$\int_0^t \varphi(s, \omega) dW_s(\omega) := \sum_{j=0}^k \varphi(t_j, \omega) (W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega))$$

Schritt 2: Itô-Integral für Funktionen aus $V_{\mathbb{F}}(T)$

Ausgehend von dem stochastischen Integral für einfache Funktionen wird ein stochastisches Integral für kompliziertere Funktionen definiert. Dabei werden die Integranden durch einfache Funktionen approximiert.

Definition 3.28 *Funktionenmenge* $V_{\mathbb{F}}(T)$

Sei $V_{\mathbb{F}}(T)$ definiert als die Menge aller Funktionen $f : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- (a) f ist progressiv messbar:

$$f|_{[0,t] \times \Omega} \text{ ist } \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t\text{-messbar f\"ur alle } t \in T$$

Jeder progressiv messbarer Prozess ist ein $(\mathcal{F}_t)$ -adaptierter Prozess.

- (b) $\mathbb{E} \left[\int_0^t f^2(s) ds \right] < \infty \quad (L^2\text{-Konvergenz})$

Theorem 3.29

Sei $X : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $(d \geq 1)$ ein adaptierter stochastischer Prozess mit rechtsstetigen Pfaden. Dann ist X progressiv messbar.

Eine Brownsche Bewegung ist progressiv messbar, da sie laut Definition stetige Pfade hat.

Definition 3.30 *Itô-Integral für* $f \in V_{\mathbb{F}}(T)$

Wird die Funktion $f \in V_{\mathbb{F}}(T)$ durch eine Folge von einfachen Funktionen $\varphi_n \in L^2$ approximiert

$$\int_0^t \mathbb{E} [(\varphi_n(s) - f(s))^2] ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Dann ist das Itô-Integral für alle $f \in V_{\mathbb{F}}(T)$ wie folgt definiert:

$$\int_0^t f(s, \omega) dW_s := L^2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \varphi_n(s, \omega) dW_s,$$

wobei φ_n genau die einfache Funktionen sind.

Bemerkung Eigenschaften des Itô-Integrals für Funktionen $f \in V_{\mathbb{F}}(T)$ Für Funktionen $f, g \in V_{\mathbb{F}}(T)$, α, β konstant und $0 < s < t$ gilt für das Itô-Integral:

- (1) Es hat Erwartungswert Null:

$$\mathbb{E} \left[\int_s^t f(u, \omega) dW_u \right] = 0 \quad (3.1)$$

beziehungsweise

$$\mathbb{E} \left[\int_s^t f(u, \omega) dW_u \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0 \quad (3.2)$$

- (2) Es gilt die *Itô-Isometrie*:

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_s^t f(u, \omega) dW_u \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_s^t (f(u, \omega))^2 du \right] \quad (3.3)$$

beziehungsweise

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_s^t f(u, \omega) dW_u \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_s^t (f(u, \omega))^2 du \middle| \mathcal{F}_s \right] \quad (3.4)$$

(3)

$$\int_s^t f(u, \omega) dW_u \text{ ist } \mathcal{F}_t\text{-messbar.} \quad (3.5)$$

(4) Es ist ein Martingal bezüglich $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t f(u, \omega) dW_u \middle| \mathcal{F}_s \right] = \int_0^s f(u, \omega) dW_u \quad \mathbb{P}\text{-f.s. für alle } s < t \quad (3.6)$$

(5) Es ist linear:

$$\int_s^t \alpha f(u, \omega) + \beta g(u, \omega) dW_u = \alpha \int_s^t f(u, \omega) dW_u + \beta \int_s^t g(u, \omega) dW_u \quad (3.7)$$

(6)

$$\int_0^t f(u, \omega) dW_u = \int_0^s f(u, \omega) dW_u + \int_s^t f(u, \omega) dW_u \quad (3.8)$$

Da die Eigenschaften (1) und (4) immer wieder verwendet werden, werden diese im folgenden bewiesen.

Beweis von Eigenschaft (1):

Es soll gezeigt werden, dass für eine stetige und deterministische Funktion $f \in V_{\mathbb{F}}(T)$ das stochastische Integral $\int_s^t f dW_u \sim \mathcal{N} \left(0, \int_s^t f^2 du \right)$ für alle $t \geq 0$.

Im ersten Schritt wird die Funktion f durch einfache Funktionen $f(t_j, \omega)$ approximiert und daher ist das stochastische Integral wie folgt darzustellen:

$$\int_s^t f dW_u = \sum_{j=0}^k f(t_j, \omega) (W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega))$$

Somit gilt für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t f dW_s \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^k f(t_j, \omega) (W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega)) \right] \\ &\stackrel{\textcircled{*}^1}{=} \sum_{j=0}^k \mathbb{E} [f(t_j, \omega) (W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega))] \\ &\stackrel{\textcircled{*}^2}{=} \sum_{j=0}^k \mathbb{E} [f(t_j, \omega)] \mathbb{E} [W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega)] \\ &\stackrel{\textcircled{*}^3}{=} \sum_{j=0}^k \mathbb{E} [f(t_j, \omega)] \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

$\textcircled{*}^1$ Der Erwartungswert ist linear, daher darf die Summe aus dem Erwartungswert herausgezogen werden.

- ⊗² Da f adaptiert ist, hängt $f(t_j, \omega)$ nur von der Brownschen Bewegung im Intervall $[0, t_j]$ ab. Die Brownsche Bewegung hat nach ihrer Definition unabhängige Inkremente, daher ist $(W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega))$ unabhängig von $f(t_j, \omega)$.
- ⊗³ Die Inkremente der Brownschen Bewegungen sind normalverteilt und haben Erwartungswert Null.

Für die Varianz gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V} \left[\int_s^t f dW_u \right] &\stackrel{\odot^1}{=} \mathbb{E} \left[\left(\int_s^t f dW_u \right)^2 \right] - \underbrace{\left(\mathbb{E} \left[\int_s^t f dW_u \right] \right)^2}_{=0} \\
&\stackrel{\odot^2}{=} \mathbb{E} \left[\left(\int_s^t f dW_u \right)^2 \right] \\
&\stackrel{\odot^3}{=} \mathbb{E} \left[\int_s^t f^2 du \right] \\
&\stackrel{\odot^4}{=} \int_s^t f^2 du
\end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

- ⊙¹ $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
- ⊙² siehe Beweis des Erwartungswertes oben.
- ⊙³ Itô-Isometrie aus Gleichung (3.3).
- ⊙⁴ Da f deterministisch ist darf es aus dem Erwartungswert herausgezogen werden.

[5]

□

Beweis von Eigenschaft (4):

Seien s und t fix mit $s < t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\int_0^t f dW_u \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^s f dW_u + \int_s^t f dW_u \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&\stackrel{\odot^1}{=} \mathbb{E} \left[\underbrace{\int_0^s f dW_u}_{\mathcal{F}_s\text{-messbar}} \middle| \mathcal{F}_s \right] + \underbrace{\mathbb{E} \left[\int_s^t f dW_u \middle| \mathcal{F}_s \right]}_{=0} \\
&\stackrel{\odot^2}{=} \int_0^s f dW_u
\end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

- ⊙¹ Der Erwartungswert ist linear, daher darf der Erwartungswert getrennt werden.
- ⊙² $\int_0^s f dW_u$ ist laut Gleichung (3.5) $\mathcal{F}_s$ -messbar. Daher kann das Integral aus dem Erwartungswert herausgezogen werden. Der zweite Erwartungswert ist analog zum ersten Teil des vorigen Beweises Null.

[5]

□

3.5 Itô-Prozess und Itô-Formel

Wir folgen weiterhin den bekannten Werken [5] und [20].

Definition 3.31 *Itô-Prozess* X

Sei W eine Brownsche Bewegung bezüglich $\mathbb{F}$ und seien

- (i) $v \in V_{\mathbb{F}}(T)$,
- (ii) $u : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ progressiv messbar mit $\mathbb{P} \left(\int_0^t |u| ds < \infty \right) = 1$ für alle $t \in T$ und
- (iii) X_0 eine $\mathcal{F}_0$ -messbare Zufallsvariable,

dann heißt X_t *Itô-Prozess*:

$$X_t(\omega) := X_0(\omega) + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dW_s(\omega) \quad (3.9)$$

In differenzieller Schreibweise:

$$dX_t = u(t)dt + v(t)dW_t \quad (3.10)$$

Definition 3.32 *Itô-Formel*

Seien

- $U \subseteq \mathbb{R}$ offen,
- X ein Itô-Prozess, welcher nur Werte in U annimmt und
- $f : [0, \infty) \times U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \in C^{1,2}$ (dh: f ist einmal stetig differenzierbar im ersten Argument und zweimal stetig differenzierbar im zweiten Argument)

Dann ist $Y_t := f(t, X_t)$ ein Itô-Prozess und es gilt für fast alle $\omega \in \Omega$:

In Integral-Schreibweise:

$$\begin{aligned} Y_t(\omega) = f(0, X_0(\omega)) &+ \int_0^t \frac{\partial f(s, X_s(\omega))}{\partial x} v(s, \omega) dW_s(\omega) + \\ &+ \int_0^t \left(\frac{\partial f(s, X_s(\omega))}{\partial s} + \frac{\partial f(s, X_s(\omega))}{\partial x} u(s, \omega) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(s, X_s(\omega))}{\partial x^2} v(s, \omega)^2 \right) ds \end{aligned} \quad (3.11)$$

Kurzschreibweise:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f_x v dW_s + \int_0^t \left(f_s + f_x u + \frac{1}{2} f_{xx} v^2 \right) ds$$

In Differenzial-Schreibweise:

$$dY_t(\omega) = \frac{\partial f(t, X_t(\omega))}{\partial x} v(t, \omega) dW_t(\omega) + \left(\frac{\partial f(t, X_t(\omega))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, X_t(\omega))}{\partial x} u(t, \omega) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, X_t(\omega))}{\partial x^2} v(t, \omega)^2 \right) dt \quad (3.12)$$

Kurzschreibweise:

$$dY = f_x v dW + \left(f_t + f_x u + \frac{1}{2} f_{xx} v^2 \right) dt$$

In alternativer Schreibweise:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f_s ds + \int_0^t f_x dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx} (dX_s)^2 \quad (3.13)$$

$$dY_t = f_t dt + f_x dX_t + \frac{1}{2} f_{xx} (dX_t)^2 \quad (3.14)$$

wobei mit der symbolischen Notation $(dW_t)^2 = dt$ und $(dt)^2 = dt dW_t = dW_t dt = 0$ folgt:

$$(dX_t)^2 = (u dt + v dW_t)^2 = u^2 (dt)^2 + 2uv dt dW_t + v^2 (dW_t)^2 = v^2 dt$$

Mehrdimensionaler Fall

Definition 3.33 *Mehrdimensionaler Itô-Prozess* X

Sei $W_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(n)})$ eine n -dimensionale Brownsche Bewegung bezüglich $\mathbb{F}$ und seien

- (i) $v \in V_{\mathbb{F}}([0, \infty))$,
- (ii) $u : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ progressiv messbar mit $\mathbb{P} \left(\int_0^t |u_i(s)| ds < \infty \right) = 1$ für alle $t \in T$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und
- (iii) X_0 eine $\mathcal{F}_0$ -messable Zufallsvariable,

dann heißt X_t m -dimensionaler Itô-Prozess:

$$X_t(\omega) := X_0(\omega) + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dW_s(\omega)$$

Dabei wird die Komponentenschreibweise verwendet:

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_m(t) \end{pmatrix}, \quad W(t) = \begin{pmatrix} W_1(t) \\ \vdots \\ W_m(t) \end{pmatrix},$$

$$u(t, \omega) = \begin{pmatrix} u_1(t, \omega) \\ \vdots \\ u_m(t, \omega) \end{pmatrix}, \quad v(t, \omega) = \begin{pmatrix} v_{11}(t, \omega) & \cdots & v_{1n}(t, \omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1}(t, \omega) & \cdots & v_{mn}(t, \omega) \end{pmatrix}$$

In differenzieller Schreibweise:

$$dX_t = u(t)dt + v(t)dW_t$$

oder

$$dX_t^{(i)} = u_i(t)dt + \sum_{j=1}^m v_{ij}(t)dW_t^{(j)}$$

bzw.

$$\begin{cases} dX_1(t) &= u_1(t)dt + v_{11}(t)dW_1^{(1)}(t) + \cdots + v_{1n}(t)dW_1^{(n)}(t) \\ \vdots & \\ dX_m(t) &= u_m(t)dt + v_{m1}(t)dW_m^{(1)}(t) + \cdots + v_{mn}(t)dW_m^{(n)}(t) \end{cases}$$

Definition 3.34 Mehrdimensionale Itô-Formel

Seien

- $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen,
- X_t ein m -dimensionaler Itô-Prozess, welcher nur Werte in U annimmt und
- $f = (f_1, \dots, f_p)^T : [0, \infty] \times U \rightarrow \mathbb{R}^p$ mit $(p \geq 1)$ und $f \in C^{1,2}$.

Dann ist $Y_t = (Y_t^{(1)}, \dots, Y_t^{(p)}) := f(t, X_t)$ ein p -dimensionaler Itô-Prozess und es gilt für fast alle $\omega \in \Omega$ und alle Komponenten $k \in \{1, \dots, p\}$:

In Integral-Schreibweise:

$$\begin{aligned} Y_t^{(k)} &= f_k(0, X_0) + \int_0^t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_k(s, X_s)}{\partial x_i} v_{ij}(s) dW_s^j + \\ &+ \int_0^t \left(\frac{\partial f_k(s, X_s)}{\partial s} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_k(s, X_s)}{\partial x_i} u_i(s) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f_k(s, X_s)}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{l=1}^m v_{il}(s) v_{jl}(s) \right) ds \end{aligned}$$

In differentialer Schreibweise:

$$\begin{aligned} dY_t^{(k)} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_k(t, X_t)}{\partial x_i} v_{ij}(s) dW_t^j + \\ &+ \left(\frac{\partial f_k(t, X_t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_k(t, X_t)}{\partial x_i} u_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f_k(t, X_t)}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{l=1}^m v_{il}(s) v_{jl}(s) \right) dt \end{aligned}$$

In alternativer Schreibweise:

$$dY_t^{(k)} = \frac{\partial f_k(t, X_t)}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_k(t, X_t)}{\partial x_i} dX_t^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f_k(t, X_t)}{\partial x_i \partial x_j} dX_t^{(i)} dX_t^{(j)} \quad (3.15)$$

mit

$$dW_t^{(i)} dW_t^{(j)} = \begin{cases} dt, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

und $(dt)^2 = 0$ bzw. $dt dW_t^{(i)} = 0 = dW_t^{(i)} dt$.

3.6 Stochastische Differentialgleichungen

Auch in diesem Kapitel folgen wir [5] und [20].

Definition 3.35 *Stochastische Differential- und Integralgleichung*

Seien

- eine n -dimensionale Brownsche Bewegung $W_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(n)})$,
- eine messbare Funktion $v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$,
- eine messbare Funktion $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ und
- ein Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^m$ gegeben.

Es sei ein stochastischer Prozess X gesucht, welcher die *stochastische Differentialgleichung* erfüllt:

$$dX_t = \underbrace{u(t, X_t)dt}_{\text{Drift-Term}} + \underbrace{v(t, X_t)dW_t}_{\text{Diffusions-Term}}$$

$$X_0 = x_0$$

Anders formuliert, soll ein Prozess X gefunden werden, welcher folgende stochastische Integralgleichung löst:

$$X_t = x_0 + \int_0^t u(s, X_s) ds + \int_0^t v(s, X_s) dW_s$$

Eigentlich sind es m Gleichungen ($i = 1, \dots, m$):

$$dX_t^{(i)} = u_i(t, X_t) dt + \sum_{k=1}^n v_{ik}(t, X_t) dW_t^{(k)}$$

Definition 3.36 *Lösung einer stochastischen Differentialgleichung*

Ein Prozess X heißt Lösung der stochastischen Differentialgleichung, falls:

- (a) X ist adaptiert bezüglich $\mathbb{F}$,
- (b) $\mathbb{P} \left[\int_0^t |u_i(s, X_s)| ds < \infty \right] = 1$ für alle $i = 1, \dots, m$,
- (c) $\mathbb{P} \left[\int_0^t (v_{ij}(s, X_s))^2 ds < \infty \right] = 1$ für alle $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$,
- (d) $X_0 = x_0$ f.s. und
- (e) X erfüllt die stochastische Differentialgleichung

Bemerkung starke und schwache Lösung Falls die Brownsche Bewegung W mit natürlicher Filtration $\mathbb{F}$ gegeben ist und X adaptiert bezüglich $\mathbb{F}$ ist, so spricht man von einer starken Lösung.

Falls $\mathbb{F}$ Teil der Lösung ist (gemeinsam mit X), so spricht man nur von einer schwachen Lösung. X muss dabei nicht adaptiert bezüglich $\mathbb{F}$ sein.

Bemerkung Eindeutigkeit und Existenz Für eine stochastische Differentialgleichung existiert eine eindeutige, starke Lösung falls für ein konstantes $K > 0$

- (i) die Lipschitzbedingung: $\|u(t, x) - u(t, y)\| + \|v(t, x) - v(t, y)\| \leq K\|x - y\|$ und
- (ii) die Wachstumsbedingung: $\|u(t, x)\|^2 + \|v(t, x)\|^2 \leq K(1 + \|x\|)^2$

erfüllt sind. Weiters gilt für die Lösung: $\mathbb{E} \left[\int_0^t \|X_t\|^2 dt \right] < \infty$.

Die Lipschitzbedingung alleine reicht nicht aus, um die globale Existenz zu garantieren. Eine sogenannte Explosion in endlicher Zeit wäre möglich, falls die Wachstumsbedingung nicht erfüllt wäre.

3.7 Der Satz von Girsanov

Zusätzlich zu [5] und [20] folgen wir in diesem Kapitel [8].

Der Satz von Girsanov beschreibt die Veränderung einer stochastischen Differentialgleichung bei einem Wechsel des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$. Speziell ändert sich der Drift-Term bei einer Veränderung des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$, da dieser von $\mathbb{P}$ abhängt, während der Diffusions-Term unverändert bleibt.

Vorallem in der Finanzmathematik soll der Drift-Term geeignet gewählt werden, daher spielt der Satz von Girsanov in diesem Bereich eine große Rolle.

Anders formuliert können zwei unterschiedliche stochastische Differentialgleichungen als derselbe Prozess betrachtet werden, aber unter unterschiedlichen Maßen.

Definition 3.37 Äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße

Angenommen es sind zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}^*$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegeben. Dann heißen diese *äquivalent* ($\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^*$), falls sie die gleichen Nullmengen haben:

$$\mathbb{P}[A] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}^*[A] = 0 \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}$$

Definition 3.38 Radon-Nikodym Dichte

Für zwei äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}^*$ ist es möglich das eine Maß durch die *Radon-Nikodym Dichte* des anderen Maßes auszudrücken:

$$\mathbb{P}^*[A] = \int_A \rho_t(\omega) d\mathbb{P} \quad A \in \mathcal{F}_t$$

Wähle das neue Maß so: $d\mathbb{P}^* = \rho_t d\mathbb{P}$ bzw. anders dargestellt:

$$\left. \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = \rho_t,$$

wobei der Prozess ρ_t die Radon-Nikodym Dichte von $\mathbb{P}^*$ bezüglich $\mathbb{P}$ bedingt auf $\mathcal{F}_t$ ist und ein $\mathbb{P}$ -Martingal ist.

Bei der Berechnung des Erwartungswerts einer integrierbaren Zufallsvariable X kann es sinnvoll sein von einem Wahrscheinlichkeitsmaß zu einem anderen äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß zu wechseln:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}^*(\omega) = \int_{\Omega} X(\omega) \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[X \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \right]$$

Wird mit bedingten Erwartungswerten gearbeitet gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[X|\mathcal{F}_t] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[X \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} | \mathcal{F}_t \right]}{\rho_t}$$

Da ρ ein nichtnegatives $\mathbb{P}$ -Martingal ist und jedes stochastische Integral mit $\mathbb{P}$ -Brownscher Bewegung W ein Martingal ist kann ρ als Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} d\rho_t &= \varphi_t \rho_t dW_t \\ \rho_0 &= 1 \end{aligned}$$

interpretiert werden. Durch das Anwenden der Itô-Formel aus Definition 3.32 ist ρ durch

$$d\rho_t = e^{\int_0^t \varphi_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \varphi_s^2 ds}$$

ausdrückbar. Die Anfangsbedingung $\rho_0 = 1$ und die Tatsache, dass ρ ein Martingal ist garantieren, dass $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\rho_t] = 1$ und somit eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

Theorem 3.39 Der Satz von Girsanov

Betrachte die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = u(t, X_t)dt + v(t, X_t)dW_t$$

mit Drift-Koeffizient $u(t, X_t)$ und Diffusions-Koeffizient $v(t, X_t)$ unter Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ mit Brownscher Bewegung W .

Sei ein neuer Drift durch $u^*(t, X_t)$ gegeben und sei angenommen, dass $\frac{u^*-u}{v}$ ($= \varphi$) beschränkt ist. Definiere das neue Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ durch

$$\rho_t = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{u^*(s, X_s) - u(s, X_s)}{v(s, X_s)} \right)^2 ds + \int_0^t \frac{u^*(s, X_s) - u(s, X_s)}{v(s, X_s)} dW_s \right].$$

Dann ist $\mathbb{P}^*$ äquivalent zu $\mathbb{P}$, der Prozess W^* , welcher durch

$$dW_t^* = dW_t - \left(\frac{u^*(t, X_t) - u(t, X_t)}{v(t, X_t)} \right) dt$$

bzw.

$$W_t^* = W_t - \int_0^t \left(\frac{u^*(s, X_s) - u(s, X_s)}{v(s, X_s)} \right) ds$$

definiert ist, ist eine Brownsche Bewegung unter $\mathbb{P}^*$ und

$$dX_t = u^*(t, X_t)dt + v(t, X_t)dW_t^*.$$

Eine wichtige Voraussetzung für den Satz von Girsanov ist, dass ρ_t ein Martingal ist. Eine hinreichende Bedingung dafür ist die Novikov-Bedingung:

Definition 3.40 Novikov-Bedingung

Falls ρ_t die Bedingung

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{u^*(s, X_s) - u(s, X_s)}{v(s, X_s)} \right)^2 ds \right) \right] < \infty$$

erfüllt, ist ρ_t ein Martingal.

Der Satz von Girsanov zeigt somit, dass bei einer gewünschten Veränderung des Drifts einfach ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß mit Hilfe der Radon-Nikodym Dichte definiert werden muss, wobei der richtige Ausdruck durch die Differenz „gewünschter Drift – gegebener Drift“ gegeben ist.

Kapitel 4

Black-Scholes Modell

Auf Finanzmärkten werden neben Aktien auch Finanzderivate gehandelt. Einfache Beispiele dafür wären die Kauf- und Verkaufsoption auf eine Aktie, auch Call- oder Put-Option genannt. Um diese Art von Verträgen bewerten zu können, wird ein vereinfachtes mathematisches Modell des Finanzmarkts aufgestellt, das sogenannte *Black-Scholes Modell*. Wir verwenden in diesem Kapitel nicht nur die bisher eingeführte Theorie, sondern folgen auch den bekannten Werken [4], [5], [6], [20], [33] und [37].

4.1 Black-Scholes Modell

Im Black-Scholes Modell haben die Investoren, unter bestimmten Annahmen, die Möglichkeit in zwei Wertpapiere zu investieren. Einerseits gibt es ein risikofreies Wertpapier, das Bankkonto, andererseits ein risikobehaftetes Wertpapier, die Aktie. Des Weiteren soll es keine Möglichkeit zur Arbitrage, also dem Erzielen von risikolosen Gewinnen, geben, was schließlich zur Existenz des risikoneutralen Maßes oder Martingalmaßes führt. Ist der abgebildete Finanzmarkt vollständig, also die Eindeutigkeit des Martingalmaßes gegeben, so kann der faire Preis eines Finanzderivats mit Hilfe der risikoneutralen Bewertungsformel berechnet werden.

Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ mit Filtration $\mathbb{F}$ gegeben, welche rechtsstetig und vollständig ist. $(W_t)_{t \geq 0}$ ist eine standardisierte Brownsche Bewegung bezüglich $\mathbb{P}$ und erzeugt die Filtration $\mathbb{F}$.

Bevor die Wertpapierprozesse dargestellt werden, werden die Grundvoraussetzungen, welche der Finanzmarkt im Black-Scholes Modell erfüllen muss, erläutert:

- Das Handel erfolgt in stetiger Zeit.
- Es gibt keine Handelsbeschränkungen. Das bedeutet, dass beliebig viele Einheiten der Aktien gekauft werden können und beliebig viele Leerverkäufe (= Verkauf von Finanzinstrumenten, über welche der Verkäufer zum Verkaufszeitpunkt nicht verfügt) erlaubt sind.
- Die Soll- und die Habenzinsen sind gleich. Das Geld kann daher zur selben Zinsrate risikolos geborgt und angelegt werden.
- Es gibt keine Transaktionskosten, Steuern und Gebühren.

- Es gibt keine Ausfälle, weil alle Beteiligten die Vereinbarungen einhalten.

Risikofreies Wertpapier B

Definition 4.1 *Bankkonto*

Sei $r : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche den Zins beschreibt. Dann wird der Wert-Prozess der *Bankkontoeinheit* B durch

$$dB_t = r(t)B_t dt \quad \text{mit } B_0 = 1 \quad (4.1)$$

beschrieben. Die Lösung ist durch

$$B_t = e^{\int_0^t r(s) ds} \quad (4.2)$$

gegeben.

Risikobehaftetes Wertpapier S

Definition 4.2 *Aktie*

Sei $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit $\sigma(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$, welche die Volatilität beschreibt und $\mu : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine progressiv messbare Funktion, welche als Drift bezeichnet wird. Dann wird der Kursverlauf der *Aktie* S durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = \mu(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dW_t \quad \text{mit } S_0 > 0 \quad (4.3)$$

beziehungsweise durch die stochastische Integralgleichung

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu(u)S_u du + \int_0^t \sigma(u)S_u dW_u \quad (4.4)$$

beschrieben. Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung ist durch

$$S_t = S_0 \cdot \exp \left(\int_0^t \sigma(s) dW_s + \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right) ds \right) \quad (4.5)$$

gegeben.

Beweis

Um zu zeigen, dass

$$S_t = S_0 \cdot \exp \left(\underbrace{\int_0^t \sigma(s) dW_s + \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right) ds}_{=Y_t} \right) = S_0 \cdot \exp(Y_t) = f(t, Y_t)$$

tatsächlich die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = \mu(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dW_t \quad \text{mit } S_0 > 0$$

löst, wird die 1-dimensional Itô-Formel aus Definition 3.32 auf den Itô-Prozess

$$dY_t = \sigma(t)dW_t + \left(\mu(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t) \right) dt$$

angewendet. $S_t = S_0 \exp(Y_t) = f(t, Y_t)$ ist dann ebenfalls ein Itô-Prozess und es gilt:

$$\begin{aligned} dS_t &= \frac{\partial f(t, Y_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, Y_t)}{\partial Y} dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, Y_t)}{\partial Y^2} (dY_t)^2 \\ &= 0 + S_0 \exp(Y_t) dY_t + \frac{1}{2} S_0 \exp(Y_t) \sigma^2(t) dt \\ &= S_t dY_t + \frac{1}{2} S_t \sigma^2(t) dt \\ &= S_t \left(\sigma(t) dW_t + \left(\mu(t) - \frac{1}{2} \sigma^2(t) \right) dt \right) + \frac{1}{2} S_t \sigma^2(t) dt \\ &= S_t \sigma(t) dW_t + S_t \mu(t) dt \\ &= S_t \mu(t) dt + S_t \sigma(t) dW_t \end{aligned}$$

[37]

□

Arbitragefreier Finanzmarkt

Im Black-Scholes Modell soll das Erzielen von risikolosen Gewinnen nicht möglich sein. In diesem Fall wird von einem arbitragefreien Finanzmarkt gesprochen, wobei die risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaße dabei eine entscheidende Rolle spielen.

Definition 4.3 Handelsstrategie φ

Ein progressiv-messbarer $\mathbb{R}^2$ -wertiger Prozess $\varphi = (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})$ heißt *Handelsstrategie* (dynamischer Portfolio-Prozess) für das Zeitintervall $[0, T]$ und (B, S) , falls

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\int_0^t |\varphi_s^{(0)}| ds < \infty \right] &= 1 \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{und} \\ \mathbb{P} \left[\int_0^t |\varphi_s^{(1)}|^2 ds < \infty \right] &= 1 \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

erfüllt sind. Diese Voraussetzungen sichern die Existenz des stochastischen Integral.

$\varphi_t^{(0)}$ entspricht der zu Zeitpunkt $t \in [0, T]$ in das Bankkonto investierten Geldmenge.
 $\varphi_t^{(1)}$ entspricht der zu Zeitpunkt $t \in [0, T]$ in die Aktie investierten Geldmenge.

Definition 4.4 Vermögensprozess V

Der *Vermögensprozess* V des Portfolios zu Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ist durch

$$V_t(\varphi) := \varphi_t^{(0)} B_t + \varphi_t^{(1)} S_t$$

gegeben.

Definition 4.5 Gewinnprozess G

Der Gewinnprozess G des Portfolios zu Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ist durch

$$G_t(\varphi) := \underbrace{\int_0^t \varphi_s^{(0)} dB_s}_{\text{Handelsgewinne aus dem Bankkonto}} + \underbrace{\int_0^t \varphi_s^{(1)} dS_s}_{\text{Handelsgewinne aus Aktieninvestitionen}}$$

gegeben.

Definition 4.6 Selbstfinanzierende Handelsstrategie

Eine Handelsstrategie φ heißt *selbstfinanzierend*, falls für den Vermögensprozess $V_t(\varphi)$ mit $t \in [0, T]$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned} V_t(\varphi) &= V_0(\varphi) + G_t(\varphi) \\ &= V_0(\varphi) + \int_0^t \varphi_s^{(0)} dB_s + \int_0^t \varphi_s^{(1)} dS_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass nach dem Anfangszeitpunkt $t = 0$ kein Geld mehr in das Portfolio dazu- gegeben oder weggenommen werden kann. Wertänderungen des Depots ergeben sich lediglich durch die Wertänderung der zugrundeliegenden Wertpapiere oder durch Umschichtung des investierten Geldes und nicht durch Kapitalzu- oder abflüsse von außen.

Definition 4.7 Arbitragestrategie

Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie wird *Arbitragestrategie* genannt, falls der Vermögensprozess V für $T > 0$ folgendes erfüllt:

- $V_0 = 0$,
- $\mathbb{P}[V_T \geq 0] = 1$ und
- $\mathbb{P}[V_T > 0] > 0$

Durch Arbitragestrategien können risikolos, also ohne Einsatz von Geldmitteln, Gewinne erzielt werden. Dies widerspricht jedoch den Vorstellungen von einem gut funktionierenden Finanzmarkt. Ein Markt heißt daher *arbitragefrei*, falls es keine Arbitragestrategien bzw. Arbitragemöglichkeiten gibt.

Bemerkung: Definition 4.7 ist mathematisch nicht ganz korrekt formuliert, da beispielsweise durch die sogenannte Verdoppelungsstrategie eine Arbitragemöglichkeit gefunden werden kann. Für eine präzise Einleitung werden dem interessierten Leser die Werke [11] und [36] empfohlen. Diese geben einen vertiefenden Einblick in dieses Thema.

Der Erste Fundamentalsatz der Arbitrargetheorie erklärt schließlich den Zusammenhang zwischen arbitragefreien Finanzmärkten und den risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßen.

Theorem 4.8 Erster Fundamentalsatz der Arbitrargetheorie

Der Finanzmarkt ist genau dann arbitragefrei, wenn ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ existiert. Dieses Maß $\mathbb{Q}$ wird auch risikoneutrales Maß genannt.

Definition 4.9 Äquivalentes Martingalmaß

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ wird zu $\mathbb{P}$ *äquivalentes Martingalmaß* genannt, genau dann wenn:

- $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ und
- der diskontierte Preisprozess $\tilde{S}_t := \frac{S_t}{B_t}$ ein lokales $\mathbb{Q}$ -Martingal ist.

Üblicherweise wird das Bankkonto B als Numéraire verwendet. Das Bankkonto zahlt keine Dividenden aus und hat immer einen positiven Wert.

Ausgehend von den Aktiendynamiken

$$dS_t = \mu(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dW_t \quad \text{mit } S_0 > 0$$

mit Lösung

$$S_t = S_0 \cdot \exp \left(\int_0^t \sigma(s) dW_s + \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right) ds \right)$$

soll der diskontierten Aktienpreisprozess

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \cdot \exp \left(\int_0^t \sigma(s) dW_s + \int_0^t \left(\mu(s) - r(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right) ds \right)$$

als Lösung von

$$d\tilde{S}_t = \underbrace{(\mu(t) - r(t))\tilde{S}_t dt}_{u(t, \tilde{S}_t)} + \underbrace{\sigma(t)\tilde{S}_t dW_t}_{v(t, \tilde{S}_t)} \quad \text{mit } \tilde{S}_0 > 0$$

ein Martingal sein.

Dies ist der Fall, falls $\int_0^t (\mu(s) - r(s)) ds = 0$, da aus dem direkt folgenden Beweis bekannt ist, dass

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \cdot \exp \left(\int_0^t \sigma(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds \right)$$

ein Martingal ist.

Beweis

Der stochastische Prozess $\tilde{S}_t$ heißt Martingal, falls er $\mathbb{E} \left[\tilde{S}_t \middle| \mathcal{F}_s \right] = \tilde{S}_s$ erfüllt. Diese Eigenschaft wird nun nachgeprüft:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\tilde{S}_t \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[\tilde{S}_0 \cdot \exp \left(\int_0^t \sigma(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(u) du \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\tilde{S}_0 \cdot \exp \left(\int_0^s \sigma(u) dW_u + \int_s^t \sigma(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(u) du - \frac{1}{2} \int_s^t \sigma^2(u) du \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] \end{aligned}$$

Da $\tilde{S}_0 \cdot \exp \left(\int_0^s \sigma(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(u) du \right)$ messbar bezüglich $\mathcal{F}_s$ ist, kann dieser Ausdruck aus dem Erwartungswert herausgezogen werden. Gleichzeitig ist $\exp \left(\int_s^t \sigma(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_s^t \sigma^2(u) du \right)$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und daher kann die Bedingung weggelassen werden. Somit gilt:

$$\mathbb{E} \left[\tilde{S}_t \middle| \mathcal{F}_s \right] = \tilde{S}_0 \cdot \exp \left(\int_0^s \sigma(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(u) du \right) \mathbb{E} \left[\exp \left(\int_s^t \sigma(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_s^t \sigma^2(u) du \right) \right]$$

Aus der (1)-ten Eigenschaft der Itô-Integrale ist bekannt, dass

$$\int_s^t \sigma(u) dW_u \sim \mathcal{N} \left(0, \int_s^t \sigma^2(u) du \right)$$

Für $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ gilt außerdem $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu_X + b, (a\sigma_X)^2)$ für deterministische a, b . Daher ist

$$\int_s^t \sigma(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_s^t \sigma^2(u) du \sim \mathcal{N} \left(-\frac{1}{2} \int_s^t \sigma^2(u) du, \int_s^t \sigma^2(u) du \right)$$

Weiters gilt für $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, dass e^Y Log-Normalverteilt ist, mit Erwartungswert $\mathbb{E}[e^Y] = e^{\mu_Y + \frac{\sigma_Y^2}{2}}$. In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{S}_t | \mathcal{F}_s] &= \tilde{S}_0 \cdot \exp \left(\int_0^s \sigma(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(u) du \right) \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \int_s^t \sigma^2(u) du + \frac{1}{2} \int_s^t \sigma^2(u) du \right) \\ &= \tilde{S}_0 \cdot \exp \left(\int_0^s \sigma(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(u) du \right) \cdot 1 \\ &= \tilde{S}_s \end{aligned}$$

Somit erfüllt $\tilde{S}_t$ die Martingaleigenschaft. □

Sei wieder das Ausgangsproblem betrachtet. Mit Hilfe des Satzes von Girsanov aus Theorem 3.39 und dem neuen Drift $u^*(t, \tilde{S}_t) = 0$, kann ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ mit Radon-Nikodym-Dichte

$$\rho_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{r(s) - \mu(s)}{\sigma(s)} \right)^2 ds + \int_0^t \frac{r(s) - \mu(s)}{\sigma(s)} dW_s(\omega) \right]$$

wobei

$$dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t - \frac{r(t) - \mu(t)}{\sigma(t)} dt$$

beziehungsweise

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t - \int_0^t \frac{r(s) - \mu(s)}{\sigma(s)} ds$$

gefunden werden, sodass die neuen Dynamiken von $\tilde{S}_t$ durch

$$d\tilde{S}_t = \sigma(t) \tilde{S}_t dW_t^{\mathbb{Q}} \quad \text{mit } \tilde{S}_0 > 0$$

mit Lösung

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \cdot \exp \left(\int_0^t \sigma(s) dW_s^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds \right)$$

gegeben sind und $\tilde{S}_t$, wie gerade eben gezeigt, ein $\mathbb{Q}$ -Martingal ist. Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ ist das gesuchte äquivalente Martingalmaß, oder risikoneutrale Maß.

Für den Aktienpreisprozess S_t ergibt sich durch einfaches Umformen:

$$\begin{aligned} S_t &= \exp \left(\int_0^t r(s) ds \right) \tilde{S}_t \\ &= \exp \left(\int_0^t r(s) ds \right) \cdot \tilde{S}_0 \cdot \exp \left(\int_0^t \sigma(s) dW_s^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds \right) \\ &= S_0 \cdot \exp \left(\int_0^t \sigma(s) dW_s^{\mathbb{Q}} + \int_0^t \left(r(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right) ds \right), \end{aligned}$$

wobei S_t die Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung ist:

$$dS_t = r(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dW_t^{\mathbb{Q}} \quad \text{mit } S_0 > 0$$

Es konnte also ein risikoneutrales Maß $\mathbb{Q}$ gefunden werden und mit Hilfe des ersten Fundamentalsatz der Arbitrage Theorie aus Theorem 4.8 ist der Finanzmarkt arbitragefrei. In einem arbitragefreien Finanzmarkt ist nicht nur der diskontierte Aktienpreisprozess $\tilde{S}_t$ ein $\mathbb{Q}$ -Martingal, sondern auch der diskontierte Preisprozess $\frac{X_t}{B_t}$ aller Finanzderivate X , falls der Preisprozess durch folgende Bewertungsformel definiert wird:

Definition 4.10 *Risikoneutrale Bewertungsformel*

Der arbitragefreie Preisprozess $(X_t)_{t \in [0, T]}$ für ein Finanzderivat X mit Auszahlung X_T zu Auszahlungszeitpunkt T ist gegeben durch:

$$X_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} X_T \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (4.6)$$

Der derzeitige Preisprozess ist allerdings noch nicht eindeutig gegeben, da theoretisch auch mehrere Martingalmaße gefunden werden können. Es stellt sich daher die Frage, wann das gefundene Martingalmaß $\mathbb{Q}$ eindeutig ist? Im nächsten Unterkapitel wird gezeigt, dass alle möglichen $\mathbb{Q}$'s den gleichen Preisprozess produzieren, falls das Derivate X erreichbar ist. Der Preisprozess ist dann durch $X_t = V_t(\varphi)$ gegeben.

Vollständiger Finanzmarkt

Es wird also ein eindeutiges Martingalmaß $\mathbb{Q}$ gesucht, um einen eindeutigen Preisprozess X_t für das Finanzderivat X erzielen zu können. Dafür wird direkt mit folgendem Theorem gestartet:

Theorem 4.11 Zweiter Fundamentalsatz der Arbitrage Theorie

Angenommen der Markt ist arbitragefrei. Dann das Martingalmaß $\mathbb{Q}$ genau dann eindeutig, wenn der Finanzmarkt vollständig ist.

Das folgende Theorem liefert die Lösung:

Theorem 4.12 The Converse of the Girsanov Theorem

Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{P})$ mit Filtration $\mathbb{F}$ gegeben, welche rechtsstetig und vollständig ist. $(W_t)_{t \geq 0}$ ist eine standardisierte Brownsche Bewegung bezüglich $\mathbb{P}$ und erzeugt die Filtration $\mathbb{F}$.

Angenommen es existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ welches absolut stetig bezüglich $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}_T$ ist ($\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, dh: $\mathbb{P}[A] = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}[A] = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$) mit likelihood-Prozess $\rho_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

Dann existiert ein adaptierter Prozess φ sodass ρ folgende Dynamiken hat:

$$\begin{aligned} d\rho_t &= \varphi_t \rho_t dW_t \\ \rho_0 &= 1 \end{aligned}$$

Jede absolut stetige Maßtransformation kann also durch eine Girsanov-Transformation erhalten werden und da $\varphi_t = \frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t}$ eine eindeutige Lösung hat, ist das Martingalmaß $\mathbb{Q}$ eindeutig.

Dieses Theorem klärt also die Frage der Vollständigkeit. Mit den nachfolgenden Zeilen wird zusätzlich ein alternativer Lösungsweg dargestellt, um einen noch besseren Überblick geben zu können:

Definition 4.13 Vollständiger Finanzmarkt

Ein Finanzmarkt heißt *vollständig*, falls jedes Finanzderivat X erreichbar ist. Diese Finanzderivate werden auch replizierbar oder hedgebar genannt.

Definition 4.14 Erreichbares Finanzderivat

Ein Finanzderivat X mit Fälligkeit T (dh: X ist F_T -messbar) heißt *erreichbar*, falls eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ existiert, mit $V_T(\varphi) = X_T$ f.ü..

In Kapitel 3.4 wurde gezeigt, dass für ein $h \in V_{\mathbb{F}}(T)$ das Itô-Integral

$$X_t = X_0 + \int_0^t h(s, \omega) dW_s$$

für $t \geq 0$ ein Martingal bezüglich Filtration $\mathcal{F}_t$ ist.

Der Martingaldarstellungssatz sagt, dass die Umkehrung ebenfalls gilt:

Theorem 4.15 Martingaldarstellungssatz

Sei W eine Brownsche Bewegung und $\mathbb{F}$ eine Filtration, welche durch W erzeugt wird:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W = \sigma\{W_s; 0 \leq s \leq t\}$$

Dann kann jedes $\mathcal{F}_t$ -adaptierte Martingal M wie folgt dargestellt werden:

$$M_t = M_0 + \int_0^t h(s) dW_s,$$

wobei h ein $\mathcal{F}_t$ -adaptierter stochastischer Prozess ist mit $\int_0^t h^2(s) ds < \infty$ f.s..

Aus dem Invariance Lemma aus [5] ist bekannt, dass eine selbstfinanzierende Handelsstrategie unter dem Wahrscheinlichkeitsmaßwechsel zum risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ weiter eine selbstfinanzierende Handelsstrategie bleibt und der diskontierte Vermögensprozess $\tilde{V}_t := \frac{V_t}{B_t}$ ebenfalls ein $\mathbb{Q}$ -Martingal ist mit:

$$\tilde{V}_t(\varphi) := \varphi_t^{(0)} + \varphi_t^{(1)} \tilde{S}_t$$

beziehungsweise

$$\tilde{V}_t(\varphi) = \tilde{V}_0(\varphi) + \int_0^t \varphi_s^{(1)} d\tilde{S}_s$$

Es soll nun X erreichbar werden, sodass

$$\tilde{V}_T(\varphi) := \frac{X_T}{B_T}$$

und daher wird eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\varphi = (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})$ gesucht, welche genau die obige Gleichung $\tilde{V}_t(\varphi) = \tilde{V}_0(\varphi) + \int_0^t \varphi_s^{(1)} d\tilde{S}_s$ erfüllen muss.

Um eben diese Existenz zu zeigen wird der Martingaldarstellungssatz (unter $\mathbb{Q}$) verwendet, welcher für das $\mathbb{Q}$ -Martingal $\tilde{V}$

$$\tilde{V}_t(\varphi) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{X_T}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

die Existenz einer Funktion h liefert, sodass:

$$\tilde{V}_t(\varphi) = \tilde{V}_0(\varphi) + \int_0^t h(s) dW_s^{\mathbb{Q}}$$

Da $d\tilde{S}_t = \sigma(t)\tilde{S}_t dW_t^{\mathbb{Q}}$ gilt, kann für $dW_s^{\mathbb{Q}}$ in obiger Gleichung $\frac{d\tilde{S}_t}{\sigma(t)\tilde{S}_t}$ geschrieben werden:

$$\tilde{V}_t(\varphi) = \tilde{V}_0(\varphi) + \int_0^t \frac{h(s)}{\sigma(s)\tilde{S}_s} d\tilde{S}_s$$

Werden $\varphi_t^{(1)}$ und $\varphi_t^{(0)}$ wie folgt gewählt

$$\begin{aligned} \varphi_t^{(1)} &= \frac{h(t)}{\sigma(t)\tilde{S}_t} \\ \varphi_t^{(0)} &= \tilde{V}_t(\varphi) - \varphi_t^{(1)}\tilde{S}_t \end{aligned}$$

kann eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\varphi = (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)})$ gefunden werden, die X repliziert. Da das Finanzderivat X beliebig gewählt wurde, kann für jedes Derivat eine selbstfinanzierende Handelsstrategie gefunden werden. Alle Finanzderivate sind somit erreichbar und der Finanzmarkt ist vollständig. Der zweite Fundamentalsatz der Arbitrage theorie aus Theorem 4.11 liefert schlussendlich die Eindeutigkeit des Martingalmaßes $\mathbb{Q}$. Daher ist auch jeder Preisprozess $(X_t)_{t \in [0, T]}$ von X eindeutig und durch die risikoneutrale Bewertungsformel aus Definition 4.10 gegeben.

Bevor die Black-Scholes-Formel für die europäische Call- und Put-Option betrachtet wird, wird der log-Preis der Aktie $Y = \ln(S)$, welcher in Kapitel 8 eine größere Bedeutung bekommt, dargestellt:

Definition 4.16 *Log-Preis der Aktie*

Der *log-Preis* der Aktie $Y = \ln(S)$ ist gegeben durch den affinen Prozess:

$$dY_t = \left(r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t) \right) + \sigma(t)dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (4.7)$$

Beweis

Um zu zeigen, dass der log-Preis der Aktie $Y = \ln(S)$ tatsächlich durch den affinen Prozess

$$dY_t = \left(r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t) \right) + \sigma(t)dW_t^{\mathbb{Q}}$$

gegeben ist, wird die 1-dimensionale Itô-Formel aus Definition 3.32 auf den Itô-Prozess

$$dS_t = \underbrace{r(t)S_t dt}_{u(t)} + \underbrace{\sigma(t)S_t dW_t^{\mathbb{Q}}}_{v(t)}$$

angewendet.

Dann ist $Y_t = f(t, S_t) = \ln(S_t)$ wieder ein Itô-Prozess mit

$$\begin{aligned} dY_t &\stackrel{\textcircled{*}^1}{=} \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, S_t)}{\partial S^2} v^2(t) dt \\ &\stackrel{\textcircled{*}^2}{=} 0 + \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} \sigma^2(t) S_t^2 dt \\ &\stackrel{\textcircled{*}^3}{=} r(t) dt + \sigma(t) dW_t^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2} \sigma^2(t) dt \\ &\stackrel{\textcircled{*}^4}{=} \left(r(t) - \frac{1}{2} \sigma^2(t) \right) dt + \sigma(t) dW_t^{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

$\textcircled{*}^1$ Itô-Formel aus Definition 3.32 anwenden.

$\textcircled{*}^2$ Ableitungen berechnen:

- $\frac{\partial f(t, S_t)}{\partial t} = \frac{\partial \ln(S_t)}{\partial t} = 0$
- $\frac{\partial f(t, S_t)}{\partial S} = \frac{\partial \ln(S_t)}{\partial S} = \frac{1}{S_t}$
- $\frac{\partial^2 f(t, S_t)}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 \ln(S_t)}{\partial S^2} = -\frac{1}{S_t^2}$

$\textcircled{*}^3$ Verwende $dS_t = r(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dW_t^{\mathbb{Q}}$ und kürze S_t .

$\textcircled{*}^4$ Umformen der Gleichung.

□

4.2 Black-Scholes-Formel für europäische Optionen

In diesem Kapitel werden die zwei wichtigsten Finanzderivate am Finanzmarkt, die sogenannte europäische Call- und Put-Option, betrachtet und ihr fairer Preis mit Hilfe der risikoneutralen Bewertungsformel aus Definition 4.10 berechnet.

Definition 4.17 *Call-Option*

Eine *europäische Call-Option* C auf eine Aktie S mit Strike-Preis K und Ausübungszeitpunkt T ist ein Vertrag, welcher folgende Punkt erfüllt:

- Der Käufer der Option hat zum Zeitpunkt T das Recht, aber nicht die Pflicht, eine Einheit der Aktie S zu Preis K vom Verkäufer der Option zu kaufen.
- Die Option kann nur zum Fälligkeitstermin T ausgeübt werden.
- Sowohl der Strike-Preis K , als auch die Optionslaufzeit T werden zu Vertragsbeginn festgelegt.
- Falls der Käufer die Option ausübt, muss der Verkäufer der Option die Aktie S zu Preis K verkaufen.
- Der Verkäufer erhält vom Käufer eine Prämie, den Optionspreis C_0 , als Gegenleistung.

Definition 4.18 *Put-Option*

Eine *europäische Put-Option* P auf eine Aktie S mit Strike-Preis K und Ausübungszeitpunkt T ist ein Vertrag, welcher folgende Punkte erfüllt:

- Der Käufer der Option hat zum Zeitpunkt T das Recht, aber nicht die Pflicht, eine Einheit der Aktie S zu Preis K an den Verkäufer der Option zu verkaufen.
- Die Option kann nur zum Fälligkeitstermin T ausgeübt werden.
- Sowohl der Strike-Preis K , als auch die Optionslaufzeit T werden zu Vertragsbeginn festgelegt.
- Falls der Käufer die Option ausübt, muss der Verkäufer der Option die Aktie S zu Preis K kaufen.
- Der Verkäufer erhält vom Käufer eine Prämie, den Optionspreis P_0 , als Gegenleistung.

Beispiel 4.19

Angenommen, jemand kauft sich heute, also zum Zeitpunkt $t = 0$, eine europäische Call-Option auf eine Aktie S mit dem heutigen Wert S_0 . Die Laufzeit des Calls betrage ein Jahr, $T = 1$, und der vereinbarte Strike-Preis sei $K = 100\text{€}$. Dem Verkäufer zahlt der Käufer im Gegenzug den Optionspreis C_0 .

Nach genau einem Jahr hat der Käufer der Call-Option nun die Möglichkeit die Aktie zum Strike-Preis K zu kaufen. Seine Entscheidung hängt natürlich vom Werte der Aktie nach einem Jahr ab.

Wird die Aktie zu Zeitpunkt $T = 1$ am Markt für beispielsweise 105€ gehandelt, also $S_1 = 105\text{€}$, so macht der Käufer von seinem Recht der Call-Option Gebrauch, kauft die Aktie für $K = 100\text{€}$ und verkauft sie am Markt zum tatsächlichen Preis von 105€ , was ihm einen Gewinn von 5€ beschert. In diesem Fall heißt die Option *im Geld* oder *in-the-money*, da $S_T > K$.

Ist die Aktie am Markt für 95€ zu haben, also $S_1 = 95\text{€}$, lässt der Käufer seine Option verfallen. Die Option heißt in diesem Fall *aus dem Geld* oder *out-of-the-money*, da $S_T < K$.

Entspricht der Wert der Aktie exakt dem Strike-Preis $S_T = K$ hat die Option ebenfalls keinen Wert, da die Aktie am Markt zum gleichen Preis gekauft werden kann. Die Option wird dann *am Geld* oder *at-the-money* genannt.

Im Falle einer Put-Option ist es genau anders herum.

Die Auszahlung der Call-Option zum Ausübungszeitpunkt T hängt vom Aktienwert S_T ab und ist als Funktion in Abbildung 4.1 dargestellt:

$$C_T := \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$

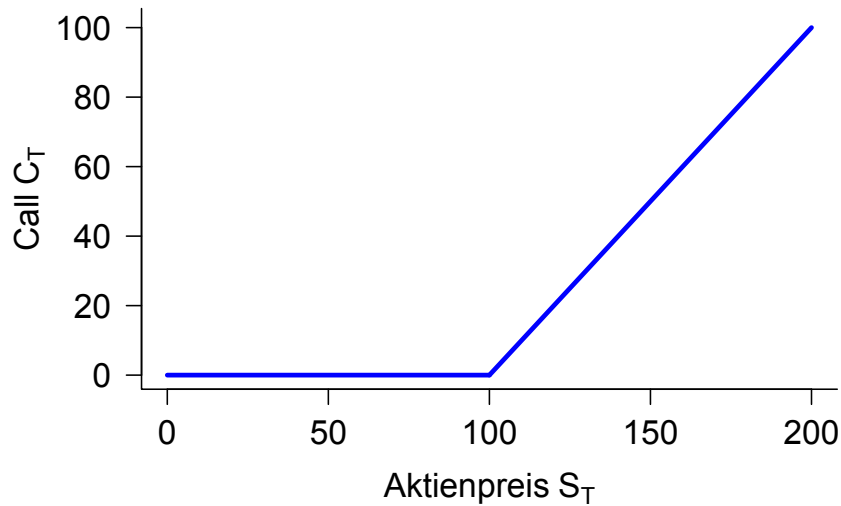


Abbildung 4.1: Die Auszahlungsfunktion einer Call-Option zu Zeitpunkt T , abhängig von den Aktienpreisen S_T [5]

Für die Put-Option gilt nach ähnlichen Überlegungen:

$$P_T := \max(K - S_T, 0) = (K - S_T)^+$$

Diese werden in Abbildung 4.2 dargestellt.

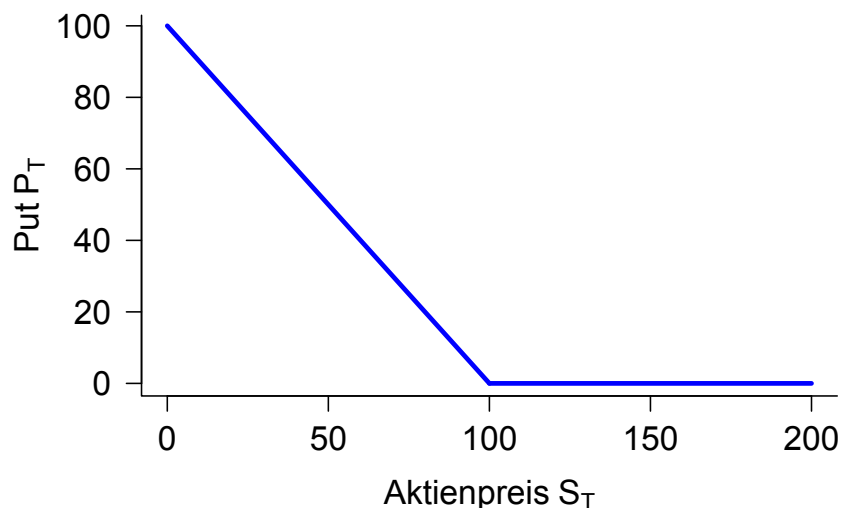


Abbildung 4.2: Die Auszahlungsfunktion einer Put-Option zu Zeitpunkt T , abhängig von den Aktienpreisen S_T [5]

Es wurden die Auszahlungsfunktionen der Call- und Put-Option dargestellt und nun soll der faire Preis der Optionen, C_0 und P_0 , sowie die arbitragefreien Preisprozess C_t und P_t bestimmt werden. In den folgenden Überlegungen haben der Zins r und die Volatilität σ konstante Werte.

Theorem 4.20 Black-Scholes-Formel

Betrachte sowohl eine europäische Call-Option $C_T = (S_T - K)^+$, als auch eine europäische Put-Option $P_T = (K - S_T)^+$ mit Ausübungszeitpunkt $T > 0$ und Strike-Preis $K > 0$. Dann sind die arbitragefreien Preisprozesse C_t und P_t dieser Optionen für $t \in [0, T]$ folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned} C_t &= C_t(S_t, T - t, K, \sigma, r) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\ P_t &= P_t(S_t, T - t, K, \sigma, r) = K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1) \end{aligned}$$

wobei

$$d_{1,2} := \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

und $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung für $x \in \mathbb{R}$ ist:

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Beweis

Mit Hilfe der risikoneutralen Bewertungsformel $X_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} X_T | \mathcal{F}_t]$ gilt für die Call-Option:

$$\begin{aligned} C_t &:= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} C_T | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - K) \mathbb{I}_{\{S_T \geq K\}} | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - K) \mathbb{I}_{\{S_T \geq K\}}] \\ &= e^{-r(T-t)} \left(\underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T \mathbb{I}_{\{S_T \geq K\}}]}_{\textcircled{1}} - K \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{\{S_T \geq K\}}]}_{\textcircled{2}} \right) \end{aligned}$$

Der vierte Schritt gilt wegen $S_T = S_t e^{\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}$ und der Unabhängigkeit von $(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})$ und $\mathcal{F}_t$ unter $\mathbb{Q}$. Bevor $\textcircled{1}$ und $\textcircled{2}$ berechnet werden können, wird den Ausdruck $\{S_T \geq K\}$ aus der Indikatorfunktion näher betrachtet:

$$\begin{aligned} \{S_T \geq K\} &= \left\{ S_t e^{\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \geq K \right\} \\ &= \left\{ \sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \geq \ln\left(\frac{K}{S_t}\right) \right\} \\ &= \left\{ W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma} \right\} = \dots \end{aligned}$$

Mit der Überlegung

$$(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}) \sim \mathcal{N}(0, T-t) \Rightarrow \frac{W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}}{\sqrt{T-t}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

folgt

$$\begin{aligned}
\dots &= \left\{ \frac{W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}}{\sqrt{T-t}} \geq -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\} \\
&= \left\{ \underbrace{\frac{W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}}{\sqrt{T-t}}}_Z \leq \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}_{d_2} \right\} \\
&= \{Z \leq d_2\} \quad \text{mit } Z \sim \mathcal{N}(0, 1)
\end{aligned}$$

Da $Z = -\frac{W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}}{\sqrt{T-t}} \Leftrightarrow W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} = -\sqrt{T-t}Z$ mit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ folgt für ①:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T \mathbb{I}_{\{S_T \geq K\}}] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_t e^{\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} \mathbb{I}_{\{Z \leq d_2\}}\right] \\
&= S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\sigma\sqrt{T-t}Z} \mathbb{I}_{\{Z \leq d_2\}}\right] \\
&= S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\sigma\sqrt{T-t}z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= S_t e^{r(T-t)} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) - \sigma\sqrt{T-t}z - \frac{z^2}{2}} dz \\
&= S_t e^{r(T-t)} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z + \sigma\sqrt{T-t})^2} dz \\
&= S_t e^{r(T-t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy}_{\text{Dichte der Standardnormalverteilung}} \\
&= S_t e^{r(T-t)} \Phi(d_1)
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wird $z + \sigma\sqrt{T-t}$ mit y substituiert, wobei sich natürlich auch die Grenzen mitändern.

② lässt sich ebenfalls schnell berechnen:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{\{S_T \geq K\}}] = \mathbb{Q}[S_T \geq K] = \mathbb{Q}[X \leq d_2] = \Phi(d_2)$$

Die für ① und ② erhaltenen Ergebnisse werden nun wieder in die Ursprungsgleichung eingesetzt, sodass das gewünschte Ergebnis erzielt wird:

$$\begin{aligned}
C_t &= e^{-r(T-t)} \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T \mathbb{I}_{\{S_T \geq K\}}] - K \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}_{\{S_T \geq K\}}] \right) \\
&= e^{-r(T-t)} \left(S_t e^{r(T-t)} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \right) \\
&= S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)
\end{aligned}$$

Für die europäische Put-Option lässt der Beweis analog durchführen. □

Die Preise der europäischen Call- und Put-Option (C_0 und P_0) zu Zeitpunkt $t = 0$ sind, abhängig vom Aktienpreis S_0 in den Abbildungen 4.3 und 4.4 dargestellt. Dabei haben die Optionen eine

Laufzeit 6 Monaten ($T = 0,5$), einen Strike-Preis $K = 100$, eine Volatilität $\sigma = 0,5$ und einen Zinssatz $r = 0,02$.

Die Abbildungen 4.3 und 4.4 wurden in **R** mit Hilfe der Funktion **EuropeanOption()** aus dem Package „RQuantLib“ realisiert, wobei die Aktie („underlying“) $S_0 \in (0, 200]$.

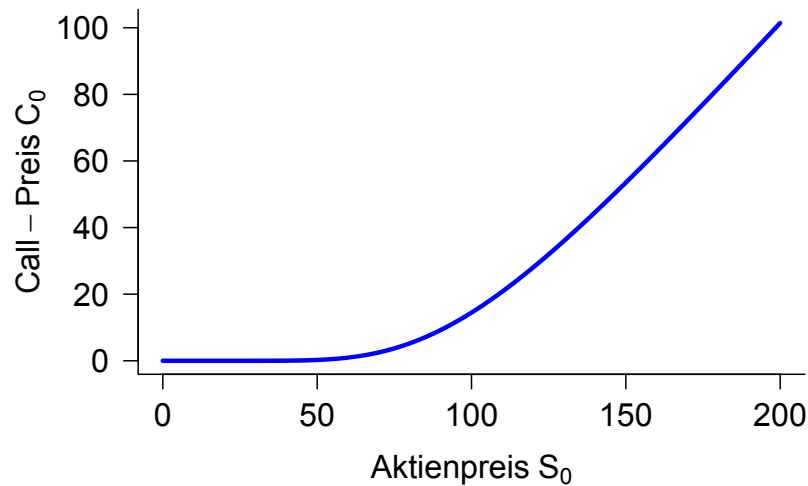


Abbildung 4.3: Black-Scholes Preise einer Call-Option zu $t = 0$ mit $T = 0,5$, $K = 100$, $\sigma = 0,5$ und $r = 0,02$. R-Code: `EuropeanOption(type=„call“, underlying=100, strike=100, dividendYield=0, riskFreeRate=0.02, maturity=0.5, volatility=0.5)` [5]

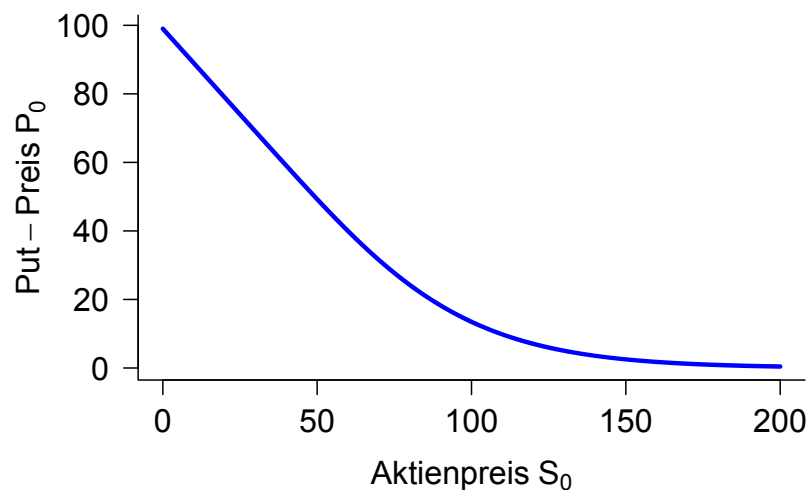


Abbildung 4.4: Black-Scholes Preise einer Put-Option zu $t = 0$ mit $T = 0,5$, $K = 100$, $\sigma = 0,5$ und $r = 0,02$. R-Code: `EuropeanOption(type=„put“, underlying=100, strike=100, dividendYield=0, riskFreeRate=0.02, maturity=0.5, volatility=0.5)` [5]

Kapitel 5

Grundlagen der Zinstheorie

In in Kapitel 5 werden nicht nur das Bankkonto und ihr risikoloser Zinssatz aus Kapitel 4.1 nochmals genauer betrachtet, sondern auch die verschiedenen Zinssätze definiert und ihr Zusammenhang zu den Zero-Bonds erläutert. Es wird ebenfalls ein Überblick über die wichtigsten Finanzprodukte gegeben, welche in Kapitel 9 zu Kalibrierung der Parameter verwendet werden. Dazu gehören Forward Rate Agreements, die sogenannten FRAs, Zinsswaps und Swaptions, also Optionen auf Swaps. Wir folgen in diesem Kapitel [8] und [33].

5.1 Bankkonto und risikolose Zinsrate

Ausgegangen wird in diesem Unterkapitel von dem in Kapitel 4.1 definierten Bankkonto. Da das Verborgene von Geld belohnt werden muss, wächst der in das Bankkonto investierte Geldbetrag im Laufe der Zeit. Der Anstieg dieses Betrags hängt von der zugrundeliegenden Zinsrate ab. Dieses Konzept wird nun genauer beschrieben:

Definition 5.1 *Bankkonto & risikolose Zinsrate*

Auf einem *Bankkonto* B kann Geld zu einem Zinssatz risikolos investiert werden. Der Wertprozess des Bankkontos sei durch $B = (B_t)_{t \geq 0}$ gegeben, wobei $B_0 = 1$. Die Entwicklung des Bankkontos kann durch die Differentialgleichung

$$dB_t := r(t)B_t dt \quad (5.1)$$

mit Lösung

$$B_t := \exp \left(\int_0^t r(s) ds \right) \quad (5.2)$$

beschrieben werden, wobei $r(t)$ der risikolose Zinssatz zu Zeitpunkt t ist, mit welchem der Geldbetrag auf dem Bankkonto anwächst. Dieser Zinssatz wird auch *instantaneous Spot Rate* oder *Short Rate* genannt. Wird also eine Geldeinheit zu Zeitpunkt 0 in ein Bankkonto investiert, erhält der Investor zu Zeitpunkt t genau $B(t)$ ausbezahlt.

In direktem Zusammenhang dazu steht die Nullkuponanleihe oder der Zero-Coupon Bond.

Definition 5.2 Nullkuponanleihe

Eine *Nullkuponanleihe* mit Laufzeit T , auch *Zero-Coupon Bond* oder *T-Bond* genannt, ist ein Vertrag, welcher dem Besitzer die Auszahlung von einer Geldeinheit zu Endzeitpunkt T garantiert. Vor Zeitpunkt T finden keine Zahlungen statt. Der Wert des Vertrages zur Zeit $t < T$ wird mit $P(t, T)$ bezeichnet. Klarerweise gilt $P(T, T) = 1$ für alle T .

Um den Preis einer Nullkuponanleihe bestimmen zu können, muss das Verhalten der risikolosen Zinsrate bekannt sein. Es wird zwischen folgenden zwei Fällen unterschieden:

Fall 1: Die risikolose Zinsrate ist eine zeitabhängige deterministische Funktion $r(t)$ mit $t \in \mathbb{R}^+$. Dann ist $P(t, T)$ folgendermaßen berechenbar:

$$P(t, T) := \exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.3)$$

Fall 2: Die risikolose Zinsrate ist ein stochastischer Prozess $r(t)$ mit $t \in \mathbb{R}^+$. Dann ist $P(t, T)$ mit Hilfe der risikoneutralen Bewertungsformel durch folgende bedingte Erwartung unter Martingalmaß $\mathbb{Q}$ und Filtration $\mathbb{F}_t$ gegeben:

$$P(t, T) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.4)$$

Für die folgenden Definitionen wird angenommen, dass die risikolose Zinsrate eine deterministische Funktion ist. Später, bei der Einführung des Hull-White extended Vasicek Modells in Kapitel 6, folgt sie wieder einem stochastischen Prozess.

Werden zwei Zeitpunkte T_1 und T_2 mit $t \leq T_1 \leq T_2$ in der Zukunft betrachtet, kann mit Hilfe der heutigen Preise für einen T_1 -Bond ($= P(t, T_1)$) und einen T_2 -Bond ($= P(t, T_2)$) der Preis eines T_2 -Bonds zu Zeitpunkt T_1 ($= P(T_1, T_2)$) berechnet werden:

$$P(T_1, T_2) = \exp \left(- \int_{T_1}^{T_2} r(s) ds \right) = \frac{\exp \left(- \int_{T_1}^{T_2} r(s) ds \right) \cdot \exp \left(- \int_t^{T_1} r(s) ds \right)}{\exp \left(- \int_t^{T_1} r(s) ds \right)} = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}$$

5.2 Tageszählkonvention

Bevor weitere Zinssätze definiert und deren unter Unterschiede erläutert werden, wird geklärt, welche Vorschriften es auf den Finanzmärkten für die Zählung der Zinstage gibt. Stellen t und T zwei verschiedene Zeitpunkte dar und werden diese durch zwei Zahlen ausgedrückt, macht die Definition „ $T - t$ “ Sinn. Werden diese Zeitpunkte jedoch durch jeweils ein bestimmtes Datum (Tag/Monat/Jahr) beschrieben, muss die Zeitspanne dazwischen definiert werden. Dies geschieht üblicherweise durch das Zählen der Anzahl der Tage zwischen diesen Zeitpunkten. Am Markt gibt es jedoch keine eindeutige Zählweise, da je nach Vereinbarung bestimmte Tage, wie beispielsweise Urlaubs- oder Feiertage, mitgezählt werden oder nicht. Diese Regeln werden Tageszählkonventionen oder Day Count Conventions genannt und müssen bei den Berechnungen berücksichtigt werden. Am Finanzmarkt gibt es dafür mehrere Möglichkeiten, wobei eine Auswahl davon in der folgenden Definition dargestellt wird:

Definition 5.3 Tageszählkonventionen

Das *Zeitmaß* zwischen zwei Zeitpunkten t und T wird mit $\tau(t, T)$ bezeichnet. Je nach Wahl der *Tageszählkonvention*, sind unterschiedliche Werte für τ möglich. Grundsätzlich werden die Tageszählkonventionen in der Form $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$ angegeben. Der Zähler bestimmt dabei die Anzahl der Tage zwischen dem Anfangsdatum t und dem Enddatum T und der Nenner die Anzahl der Tage innerhalb eines Jahres.

$\frac{\text{Actual}}{365}$: In diesem Fall hat ein Jahr genau 365 Tage und die Anzahl der Tage zwischen dem Anfangs- und dem Enddatum entspricht der tatsächlichen Anzahl der Kalendertage zwischen diesen Zeitpunkten. Für das Zeitmaß zwischen dem 1.1.2014 ($= t$) und dem 1.7.2014 ($= T$) gilt bei dieser Konvention: $\tau(t, T) = \frac{181}{365} = 0,4959$.

$\frac{\text{Actual}}{360}$: Ein Jahr zählt bei dieser Tageszählkonvention genau 360 Tage und zwischen dem Anfangsdatum und dem Enddatum wird, wie im ersten Fall, die tatsächlichen Anzahl der Kalendertage gezählt. Für das Zeitmaß zwischen dem 1.1.2014 ($= t$) und dem 1.7.2014 ($= T$) gilt bei dieser Konvention: $\tau(t, T) = \frac{182}{360} = 0,5028$.

$\frac{30}{360}$: Das Jahr ist 360 Tage lang und es wird angenommen, dass ein Monat 30 Tage hat. In diesem Fall ergibt sich für den Zeitraum zwischen den Zeitpunkten $t = (Tag_1, Monat_1, Jahr_1)$ und $T = (Tag_2, Monat_2, Jahr_2)$ folgende Berechnungsformel:

$$\frac{\max(30 - Tag_1, 0) + \min(Tag_2, 30) + 30 \cdot (Monat_2 - Monat_1 - 1) + 360 \cdot (Jahr_2 - Jahr_1)}{360}$$

Für das Zeitmaß zwischen dem 1.1.2014 und dem 1.7.2014 gilt bei dieser Konvention: $\tau(t, T) = \frac{\max(30-1,0) + \min(1,30) + 30 \cdot (7-1-1) + 360 \cdot (2014-2014)}{360} = \frac{180}{360} = 0,5$.

Wie bereits erwähnt müssen eventuell zusätzliche Anpassungen in einer bestimmten Konvention durchgeführt werden. Ist T beispielsweise ein Feiertag, kann es durch den folgenden Arbeitstag ersetzt werden, was sich natürlich wieder direkt auf das Zeitmaß τ auswirkt.

Im Zuge der Parameterkalibration in Kapitel 9 wird die Tageszählkonvention $\frac{\text{Actual}}{360}$ verwendet, wobei Feiertage nicht mitgerechnet werden und stattdessen der nächste Arbeitstag genommen wird.

5.3 Weitere Zinsraten und ihr Zusammenhang zu den Nullkuponanleihen

Nachdem nun ein Maß für die Zeitspanne zwischen zwei Zeitpunkten, welche durch ein Datum ausgedrückt werden, definiert wurde, werden wieder die Nullkuponanleihen betrachtet. Obwohl die Nullkuponanleihen, im Vergleich zu den Zinsraten, nicht direkt am Markt beobachtbar sind bilden sie die Basis in der Zinstheorie. Alle möglichen Zinsraten können durch Nullkuponanleihe-Preise ausgedrückt werden, welche vor allem bei der Berechnung des Barwerts von zukünftigen Zahlungen von Bedeutung sind. Umgekehrt kann man bei Kenntnis der Nullkuponanleihe-Preise die beliebigen Zinssätze bestimmen.

Die Zinsraten werden einerseits in *einfache Zinsraten* oder *Simply Compounded Rates* für am Finanzmarkt beobachtbare Zinsraten und andererseits in *stetige Zinsraten* oder *Continuously Compounded Rates* für theoretische Modelle unterteilt und auch *Spot Rates* genannt. In diesem Kapitel wird ein Überblick über die verschiedenen Spot Rates und deren Zusammenhang mit der Nullkuponanleihe gegeben.

Definition 5.4 *Einfache Zinsrate*

Die *einfache Zinsrate* oder *Simply Compounded Spot Rate* $L(t, T)$ beschreibt die konstante Zinsrate, welche für ein Investment zu Zeitpunkt t genau eine Geldeinheit zu (End-)Zeitpunkt T produziert. Die dafür investierten $P(t, T)$ Geldeinheiten zu Zeitpunkt t wachsen proportional zur Laufzeit, daher ist $L(t, T)$ folgendermaßen definiert:

$$L(t, T) := \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)} \quad (5.5)$$

Die am Markt vorhandenen Euribor Zinssätze, siehe dazu Definition 5.5, sind Beispiele für einfache Zinsraten. Um aus dem Euribor die Preise der Nullkuponanleihen $P(t, T)$ zu Zeitpunkt t mit Laufzeit T berechnen zu können, wird obige Gleichung umgeformt:

$$P(t, T) := \frac{1}{1 + L(t, T)\tau(t, T)} \quad (5.6)$$

$\tau(t, T)$ wird üblicherweise mit Hilfe von Tageszählkonvention $\frac{\text{Actual}}{360}$ berechnet. $P(t, T)$ beschreibt also die Anzahl der Geldeinheiten, die zu Zeitpunkt t zu Zinsrate $L(t, T)$ angelegt werden müssen, sodass dieses Investment am Ende der Laufzeit auf eine Geldeinheit angewachsen ist:

$$P(t, T)(1 + L(t, T)\tau(t, T)) := 1 \quad (5.7)$$

Definition 5.5 *Euribor/Eonia*

Der *Euribor* (Euro Interbank Offered Rate) ist ein Zinssatz im Interbankengeschäft für Termingelder in Euro. An jedem Arbeitstag melden 32 europäische Kreditinstitute einen Zinssatz, zu welchem sie anderen Banken Anleihen in Euro gewähren. Davon wird ein Durchschnittszinssatz ermittelt und täglich um 11 Uhr von Informationsanbieter Thomson Reuters veröffentlicht. Um sich vor Zinsausreißern zu schützen, fließen die höchsten 15% und die niedrigsten 15% nicht in die Berechnung mit ein.

Obwohl üblicherweise von einem einzigen Euribor-Zinssatz die Rede ist, existieren derzeit 8 verschiedene Euribor-Zinssätze mit je unterschiedlichen Laufzeiten. Seit dem 1. November 2013 werden Werte für die Laufzeiten 1 Woche, 2 Wochen, 1 Monat, 2, 3, 6, 9 und 12 Monate bestimmt. Früher wurden Werte für alle 12 monatlichen und 1 bis 3 wöchentlichen Laufzeiten berechnet.

Der Euribor wurde gemeinsam mit dem Euro am 1. Jänner 1999 eingeführt und hängt von vielen unterschiedlichen Faktoren ab. Einerseits spielen wirtschaftliche Umstände, wie das Wirtschaftswachstum, die Höhe der Inflation und die Kreditwürdigkeit eine wesentliche Rolle, andererseits hat auch das gegenseitige Vertrauen der Banken einen Einfluss auf den Zinssatz.

Der Euribor ist für viele real gehandelte Zinsprodukte von großer Bedeutung, da er, beispielsweise bei Futures, Swaps oder auch bei außerbörsliche Zinstermingeschäften, wie Forward Rate Agreements, die Grundlage bildet.

Der *Eonia* (Euro OverNight Index Average) hat im Vergleich zum Euribor eine Laufzeit von 1 Tag und wird täglich um 18 Uhr bekanntgegeben. Der Eonia beschreibt also den Zinssatz, welchen Banken einander für Geldgeschäfte mit einer Laufzeit von einem Tag gewähren. [12, 29, 30]

Sei Y eine beliebige einfache Zinsrate, zu welcher eine Geldmenge G für ein Jahr investiert wird, sodass der Investor genau $G(1 + Y)$ nach diesem Jahr zurückerhält. Wird sowohl das zur einfachen Zinsrate Y investierte Kapital G , als auch die nach einem Jahr erhaltene Zinszahlung GY für ein weiteres Jahr zu gleicher Zinsrate Y investiert, erhält der Investor $G(1 + Y)(1 + Y) = G(1 + Y)^2$ nach dem zweiten Jahr. Falls der Reinvestierungsvorgang für n Jahre wiederholt wird, bedeutet das eine Auszahlung von $G(1 + Y)^n$ am Ende. Dieses Konzept führt zur jährlichen Verzinsung.

Definition 5.6 Jährliche Zinsrate

Die *jährliche Zinsrate* oder *Annually Compounded Spot Rate* $Y(t, T)$ beschreibt die konstante Zinsrate, welche für ein Investment zu Zeitpunkt t genau eine Geldeinheit zu (End-)Zeitpunkt T produziert. Dabei wird mit $P(t, T)$ Geldeinheiten zu Zeitpunkt t gestartet und das erhaltene Kapital einmal im Jahr reinvestiert. $Y(t, T)$ lässt sich daher wie folgt beschreiben:

$$Y(t, T) := \frac{1}{P(t, T)^{\frac{1}{\tau(t, T)}}} - 1 \quad (5.8)$$

Um aus der jährlichen Zinsrate $Y(t, T)$ die Preise der Nullkuponanleihen $P(t, T)$ zu Zeitpunkt t mit Laufzeit T berechnen zu können, wird die obige Gleichung umgeformt:

$$P(t, T) := \frac{1}{(1 + Y(t, T))^{\tau(t, T)}} \quad (5.9)$$

Für $\tau(t, T)$ wird üblicherweise die Tageszählkonvention $\frac{\text{Actual}}{365}$ gewählt. $P(t, T)$ beschreibt also die Anzahl der Geldeinheiten, die zu Zeitpunkt t zu jährlicher Zinsrate $Y(t, T)$ angelegt werden müssen, sodass dieses Investment am Ende der Laufzeit auf eine Geldeinheit angewachsen ist:

$$P(t, T)(1 + Y(t, T))^{\tau(t, T)} := 1 \quad (5.10)$$

Eine Erweiterung der jährlichen Verzinsung ist die unterjährige Verzinsung. In diesem Fall wird das Kapital k -mal im Jahr reinvestiert.

Definition 5.7 Unterjährliche Zinsrate

Die *unterjährliche Zinsrate* oder *k-times-per-year Compounded Spot Rate* $Y^k(t, T)$ beschreibt die konstante Zinsrate, welche für ein Investment zu Zeitpunkt t genau eine Geldeinheit zu (End-)Zeitpunkt T produziert. Dabei wird ebenfalls wieder mit $P(t, T)$ Geldeinheiten zu Zeitpunkt t gestartet, das erhaltene Kapital jedoch k -mal jährlich reinvestiert. $Y^k(t, T)$ lässt sich daher wie folgt beschreiben:

$$Y^k(t, T) := \frac{k}{P(t, T)^{\frac{1}{k \cdot \tau(t, T)}}} - k \quad (5.11)$$

Um aus der unterjährlichen Zinsrate $Y^k(t, T)$ die Preise der Nullkuponanleihen $P(t, T)$ zu Zeitpunkt t mit Laufzeit T berechnen zu können, wird die obige Gleichung umgeformt:

$$P(t, T) := \frac{1}{\left(1 + \frac{Y^k(t, T)}{k}\right)^{k \cdot \tau(t, T)}} \quad (5.12)$$

$P(t, T)$ beschreibt also die Anzahl der Geldeinheiten, die zu Zeitpunkt t zu Zinsrate $Y^k(t, T)$ angelegt werden müssen, sodass dieses Investment am Ende der Laufzeit auf eine Geldeinheit angewachsen ist:

$$P(t, T) \left(1 + \frac{Y^k(t, T)}{k} \right)^{k \cdot \tau(t, T)} := 1 \quad (5.13)$$

Definition 5.8 *Stetige Zinsrate*

Die *stetige Zinsrate* oder *Continuously-Compounded Spot Rate* $R(t, T)$ beschreibt die konstante Zinsrate, welche ein Investment von $P(t, T)$ Geldeinheiten zu Zeitpunkt t kontinuierlich anwachsen lässt, um zu (End-)Zeitpunkt T genau eine Geldeinheit zu erhalten. Das erhaltene Kapital wird sozusagen unendlich oft, also in jedem Zeitpunkt, reinvestiert:

$$R(t, T) := -\frac{\ln(P(t, T))}{\tau(t, T)} \quad (5.14)$$

Um aus der stetigen Zinsrate $R(t, T)$ die Preise der Nullkuponanleihen $P(t, T)$ zu Zeitpunkt t mit Laufzeit T berechnen zu können, wird die obige Gleichung umgeformt:

$$P(t, T) := e^{-R(t, T)\tau(t, T)} \quad (5.15)$$

$P(t, T)$ beschreibt also die Anzahl der Geldeinheiten, die zu Zeitpunkt t zu Zinsrate $R(t, T)$ angelegt werden müssen, sodass dieses Investment am Ende der Laufzeit auf eine Geldeinheit angewachsen ist:

$$P(t, T)e^{R(t, T)\tau(t, T)} := 1 \quad (5.16)$$

Wie bereits vermutet kann die stetige Zinsrate $R(t, T)$ auch als Grenzwert der unterjährlichen Zinsrate für k gegen ∞ betrachtet werden:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} Y^k(t, T) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{P(t, T)^{\frac{1}{k \cdot \tau(t, T)}}} - k \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1 - P(t, T)^{\frac{1}{k \cdot \tau(t, T)}}}{\frac{1}{k} P(t, T)^{\frac{1}{k \cdot \tau(t, T)}}} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{P(t, T)^{\frac{1}{k \cdot \tau(t, T)}} \cdot \frac{1}{\tau(t, T)k^2} \ln(P(t, T))}{-\frac{1}{k^2} P(t, T)^{\frac{1}{k \cdot \tau(t, T)}} + \frac{1}{k} P(t, T)^{\frac{1}{k \cdot \tau(t, T)}} \frac{1}{\tau(t, T)k^2} \ln(P(t, T))} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\tau(t, T)} \ln(P(t, T))}{-1 + \frac{1}{k \tau(t, T)} \ln(P(t, T))} \\ &= -\frac{\ln(P(t, T))}{\tau(t, T)} \\ &= R(t, T) \end{aligned}$$

Im dritten Schritt werden sowohl die Regel von de l'Hospital, als auch $a^b = e^{b \ln(a)}$ angewendet.

Zusammenhang zur Short Rate:

Die Short Rate ist der Grenzwert aller zuvor definierten Spot Rates, wenn die Laufzeit der Geldanlage gegen Null geht. Wählt man das Zeitintervall $[t, T]$ unendlich klein sind all diese Spot Rates äquivalent zueinander:

$$\lim_{T \rightarrow t^+} L(t, T) = \lim_{T \rightarrow t^+} Y(t, T) = \lim_{T \rightarrow t^+} Y^k(t, T) \quad \{\text{für alle } k\} = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T) = r(t)$$

5.4 Zinsstrukturkurve & Zero-Bond Kurve

Bevor das in Kapitel 6 definierte Hull-White extended Vasicek Modell an die aktuelle am Markt beobachtbare Zinsstrukturkurve angepasst werden kann, müssen diese und die sogenannte Zero-Bond Kurve definiert werden.

Definition 5.9 *Zinsstrukturkurve*

Die *Zinsstrukturkurve* oder *Yield-Kurve* setzt sich für einen beliebigen Betrachtungszeitpunkt t aus am Finanzmarkt beobachtbaren Zinssätzen zusammen und kann, wie in Abbildung 5.1, graphisch dargestellt werden.

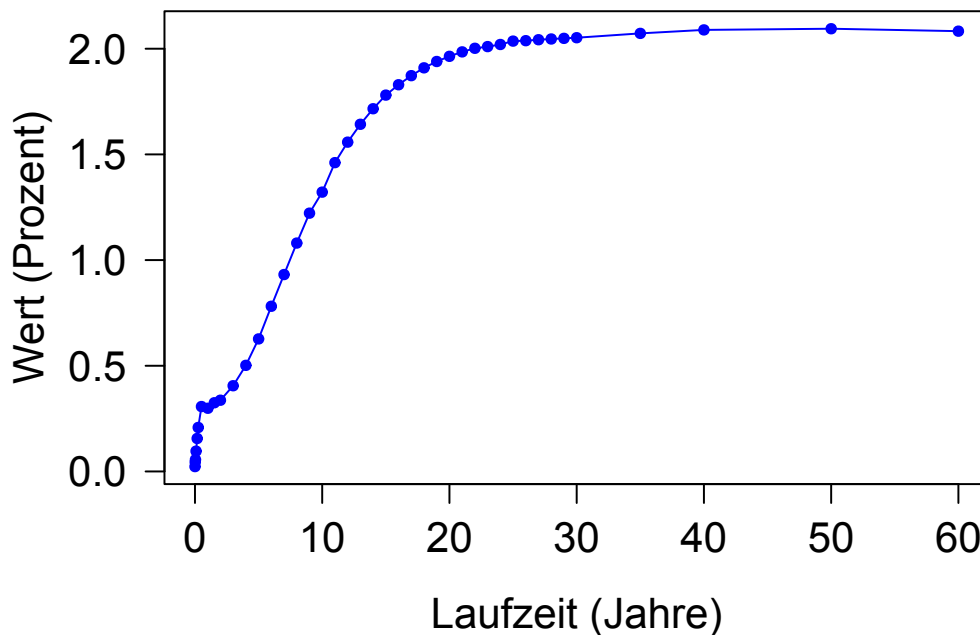


Abbildung 5.1: Zinsstrukturkurve vom 01.08.2014 aus Kapitel 9.1

Genauer gesagt ist die Zinsstrukturkurve zu Zeitpunkt t der Graph folgender Funktion:

$$T \mapsto \begin{cases} L(t, T) & t < T \leq t + 1 \text{ (Jahre)} \\ Y(t, T) & t + 1 < T \text{ (Jahre)} \end{cases} \quad (5.17)$$

Abhängig von der Laufzeit T werden verschiedene Zinsraten genommen. Für eine Laufzeit von bis zu einem Jahr ($T \leq 1$) werden einfache Zinsraten aus Definition 5.4, wie zum Beispiel die verschiedenen Euribor Zinsraten, verwendet und für Laufzeiten von mehr als einem Jahr ($T > 1$) jährliche Zinsraten aus Definition 5.6.

Es ist zu beachten, dass die Begriffe Zinsstrukturkurve und Yield-Kurve oft für mehrere verschiedene Kurven, welche sich aus am Markt vorhandenen Zinsraten zusammensetzen, verwendet werden und daher oft nicht eindeutig sind.

Definition 5.10 *Zero-Bond Kurve*

Die *Zero-Bond Kurve* stellt abhängig von der Laufzeit T die Preise der Nullkuponanleihen dar, welche zum Endzeitpunkt T eine Geldeinheit auszahlen. Für einen bestimmten Zeitpunkt t ist die Zero-Bond Kurve der Graph folgender Funktion

$$T \mapsto P(t, T), \quad T > t. \quad (5.18)$$

Aufgrund der Annahme, dass die Zinsraten strikt positiv sind, ist die Zero-Bond Kurve eine in T fallende Funktion, beginnend bei $P(t, t) = 1$. Es sei zu Beachten, dass die Preise der Nullkuponanleihen nur zu diskreten Zeitpunkten beobachtbar sind und die Kurve üblicherweise mit Hilfe der Cubic Spline Interpolation geglättet wird.

Abbildung 5.2 zeigt ein Beispiel einer Zero-Bond Kurve mit diskreten Werten, während Abbildung 5.3 die interpolierte Zero-Bond Kurve darstellt. Die genaue Konstruktion dieser Kurve wird in Kapitel 9.1 erklärt.

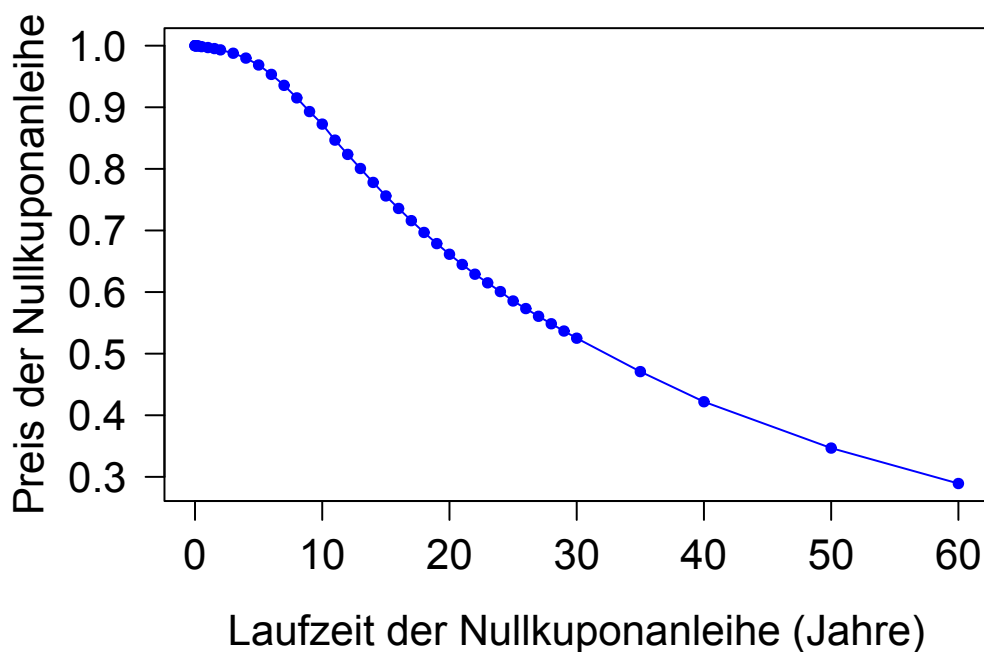


Abbildung 5.2: Zero-Bond Kurve vom 01.08.2014 aus Kapitel 9.1 mit diskreten Werten.

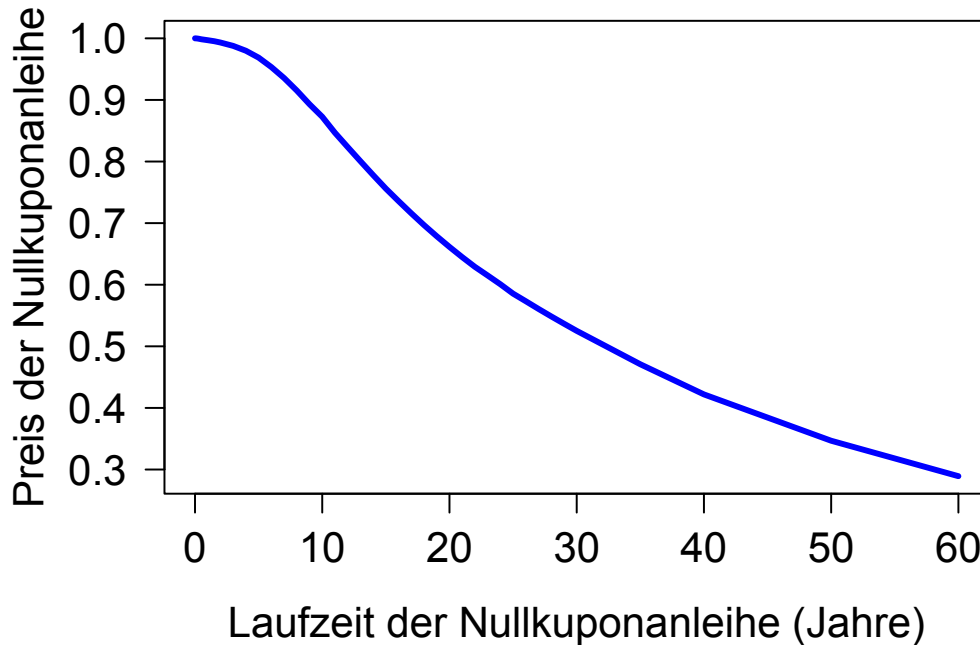


Abbildung 5.3: Zero-Bond Kurve vom 01.08.2014 aus Kapitel 9.1 mit der Spline Funktion interpoliert.

5.5 Forward Rates & Forward Rate Agreements

Nachdem bei den vorigen Definitionen der Short und Spot Rates für ein Investment jeweils zwei Zeitpunkte betrachtet wurden, der Ausübungszeitpunkt t und die Dauer der Veranlagung T , wird nun ein dritten Zeitpunkt miteinbezogen, um heute einen bestimmten Zinssatz für ein Investment in der Zukunft zu betrachten.

Definition 5.11 *Forward Rate*

Die *Forward Rate* ist der heute festgelegte Zinssatz für ein Investment in der Zukunft und wird durch die drei Zeitpunkte $t \leq T_1 \leq T_2$ beschrieben. Zu Zeitpunkt t wird die Forward Rate fixiert, sodass ein Investment von T_1 bis T_2 zu diesem Zinssatz veranlagt werden kann.

Forward Rates machen also Sinn, wenn ein zukünftiges Investment mit einem heute bestimm-
baren Zinssatz verzinsen werden soll, um sich beispielsweise gegen fallende Zinsen abzusichern.
Andererseits werden Forward Rates auch verwendet, um einen zukünftigen Kredit mit einem
heute bestimm-
baren Zinssatz aufzunehmen und gegen steigende Zinsen abgesichert zu sein.
Durch ein Forward Rate Agreement (FRA) kann dieses Vorhaben realisiert werden. Ein FRA
funktioniert im Prinzip wie ein Tauschgeschäft, wobei die zu t fixierte Forward Rate K gegen
die zu T_1 aktuelle Simply Compounded Spot Rate $L(T_1, T_2)$, die sich ja zu jener zu Zeitpunkt t
verändert haben kann, ausgetauscht wird. Eigentlich findet nur eine Differenzzahlung statt und
es wird zu Marktpreisen investiert. Durch eben genau diese Differenzzahlung kann jedoch das
gleiche Ergebnis erzielt werden, welches geplant wurde, also das Investment zu Forward Rate
 K zu veranlagern. Beispiel 5.15 am Ende des Unterkapitels soll diesen Sachverhalt nochmals
verdeutlichen.

Definition 5.12 Forward Rate Agreement (FRA)

Sei K die zu Zeitpunkt t gewünschte und fixierte Forward Rate, zu welcher ein Investment N von T_1 bis T_2 ($t \leq T_1 \leq T_2$) veranlagt werden soll. Ein FRA ist ein Tauschgeschäft, welches zu Zeitpunkt T_2 eine fixe auf K basierende Zahlung gegen eine variable auf $L(T_1, T_2)$ basierende Zahlung tauscht. $L(T_1, T_2)$ wird zu Zeitpunkt T_1 aktualisiert und hat eine Laufzeit bis T_2 .

Der Käufer des FRAs erhält somit zu Zeitpunkt T_2 genau $KN\tau(T_1, T_2)$ Geldeinheiten und zahlt $L(T_1, T_2)N\tau(T_1, T_2)$, beim Verkäufer ist es genau umgekehrt. Der Vertrag hat zu Zeitpunkt T_2 also folgenden Wert:

$$FRA_{T_2}(t, T_1, T_2, K, N, \tau(T_1, T_2)) = (K - L(T_1, T_2))N\tau(T_1, T_2)$$

Um den Sachverhalt einfach zu halten wird angenommen, dass beide Zinsraten die selbe Tageszählkonvention haben.

Im nächsten Schritt soll der Wert des FRAs zu Zeitpunkt t bestimmen werden. Dazu werden folgende Überlegungen angestellt:

Laut Definition 5.13 der einfachen Zinsrate gilt $L(t, T) := \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)}$, sodass der Ausdruck FRA_{T_2} folgendermaßen umgeformt werden kann:

$$\begin{aligned} FRA_{T_2}(t, T_1, T_2, \tau(T_1, T_2), N, K) &= \left(K - \frac{1 - P(T_1, T_2)}{\tau(T_1, T_2)P(T_1, T_2)} \right) N\tau(T_1, T_2) \\ &= \left(K\tau(T_1, T_2) - \frac{1}{P(T_1, T_2)} + 1 \right) N \end{aligned}$$

Natürlich kann anstatt der jährlichen Zinsrate bzw. Simply Compounded Spot Rate auch beispielsweise die jährliche Zinsrate bzw. Anually Compounded Spot Rate genommen werden. Das Endergebnis ist dann aber die Anually Compounded Forward Interest Rate anstatt der Simply Compounded Forward Interest Rate.

Um den Wert des FRAs zu Zeitpunkt t zu erhalten, muss mit dem Nullkuponanleihe-Preis $P(t, T_2)$ multipliziert werden:

$$\begin{aligned} FRA(t, T_1, T_2, \tau(T_1, T_2), N, K) &= FRA_t(t, T_1, T_2, \tau(T_1, T_2), N, K) \\ &= P(t, T_2) \left(K\tau(T_1, T_2) - \frac{1}{P(T_1, T_2)} + 1 \right) N \\ &= \left(P(t, T_2)K\tau(T_1, T_2) - \frac{P(t, T_2)}{P(T_1, T_2)} + P(t, T_2) \right) N \\ &= \left(P(t, T_2)K\tau(T_1, T_2) - \frac{P(t, T_1)P(T_1, T_2)}{P(T_1, T_2)} + P(t, T_2) \right) N \\ &= (P(t, T_2)K\tau(T_1, T_2) - P(t, T_1) + P(t, T_2)) N \end{aligned}$$

Interessant ist nun jener Wert für K , bei welchem zu Zeitpunkt t einen fairen Vertrag, also $FRA_t = 0$, entsteht. Dieses eindeutige K kann durch umformen der Gleichung erhalten werden und wird (Simply Compounded) Forward Interest Rate genannt:

$$\begin{aligned} 0 &= (P(t, T_2)K\tau(T_1, T_2) - P(t, T_1) + P(t, T_2)) N \\ P(t, T_2)K\tau(T_1, T_2) &= P(t, T_1) - P(t, T_2) \\ K &= \frac{P(t, T_1) - P(t, T_2)}{P(t, T_2)\tau(T_1, T_2)} \end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{\tau(T_1, T_2)} \left(\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} - 1 \right)$$

Definition 5.13 *Simply Compounded Forward Interest Rate*

Die *Simply Compounded Forward Interest Rate* zu Zeitpunkt t mit Ausübungszeitpunkt T_1 und Endzeitpunkt T_2 ($t \leq T_1 \leq T_2$) wird mit $F(t, T_1, T_2)$ bezeichnet und ist durch

$$F(t, T_1, T_2) := \frac{1}{\tau(T_1, T_2)} \left(\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} - 1 \right) \quad (5.19)$$

definiert. Die Simply Compounded Forward Interest Rate ist also jene fixierte Forward Rate im FRA, welche das Forward Rate Agreement zu einem fairen Vertrag macht.

Der obigen Ausdruck von $FRA(t, T_1, T_2, \tau(T_1, T_2), N, K)$ kann auch mit der eben definierten Simply Compounded Forward Interest Rate ausformuliert werden:

$$\begin{aligned} FRA(t, T_1, T_2, \tau(T_1, T_2), N, K) &= (P(t, T_2)K\tau(T_1, T_2) - P(t, T_1) + P(t, T_2)) N \\ &= (P(t, T_2)K\tau(T_1, T_2) - (F(t, T_1, T_2)\tau(T_1, T_2) + 1) P(t, T_2) + P(t, T_2)) N \\ &= NP(t, T_2)\tau(T_1, T_2) (K - F(t, T_1, T_2)) \end{aligned}$$

Soll die Simply Compounded Forward Interest Rate durch die Simply Compounded Spot Rate $L(t, T)$ ausgedrückt werden, folgt mit Hilfe von $P(t, T) = \frac{1}{1+L(t, T)\tau(t, T)}$ aus Definition 5.4:

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{1}{\tau(T_1, T_2)} \left(\frac{1 + L(t, T_2)\tau(t, T_2)}{1 + L(t, T_1)\tau(t, T_1)} - 1 \right)$$

Konvergiert der Endzeitpunkt T_2 der Forward Rate gegen den Ausübungszeitpunkt T_1 , wird die Instantaneous Forward Rate erzeugt. Für T_2 nahe bei T_1 sei $\tau(T_1, T_2) = T_2 - T_1$:

$$\begin{aligned} f(t, T_1) &:= \lim_{T_2 \rightarrow T_1^+} F(t, T_1, T_2) \\ &= \lim_{T_2 \rightarrow T_1^+} \frac{1}{\tau(T_1, T_2)} \left(\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} - 1 \right) \\ &= \lim_{T_2 \rightarrow T_1^+} \frac{1}{T_2 - T_1} \left(\frac{P(t, T_1) - P(t, T_2)}{P(t, T_2)} \right) \\ &= - \lim_{T_2 \rightarrow T_1^+} \frac{1}{P(t, T_2)} \left(\frac{P(t, T_2) - P(t, T_1)}{T_2 - T_1} \right) \\ &= - \frac{1}{P(t, T_1)} \frac{\partial P(t, T_1)}{\partial T_1} \\ &= - \frac{\partial \ln(P(t, T_1))}{\partial T_1} \end{aligned}$$

Definition 5.14 *Instantaneous Forward Interest Rate*

Die *Instantaneous Forward Interest Rate* zu Zeitpunkt t mit Endzeitpunkt T ($t < T$) wird mit $f(t, T)$ bezeichnet und ist durch

$$f(t, T) := - \frac{\partial \ln(P(t, T))}{\partial T} \quad (5.20)$$

definiert. Für die Preise der Nullkuponanleihen folgt daher:

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, u) du \right) \quad (5.21)$$

Damit diese Notation Sinn macht, wird vorausgesetzt, dass die Zero-Bond Kurve eine glatte Funktion für alle T ist.

Wie zu Beginn des Kapitel 5.5 versprochen, wird abschließend ein Beispiel eines FRAs gebracht:

Beispiel 5.15

Angenommen Bank A möchte in einem Jahr ($T_1 = 1$) ein Investment von 1 Million € (=N) für ein Jahr ($T_2 = 2$) zu Forward Rate $F(t, T_1, T_2)$ veranlagen. Da Bank A davon ausgeht, dass die Zinsen bis zu T_1 fallen werden, kauft sie sich zu Zeitpunkt t ein Forward Rate Agreement, welches sie dagegen absichert. Zu Zeitpunkt T_1 legt Bank A schließlich die Million zu Marktpreisen am Markt an und erhält diese zu T_2 wieder zusammen mit den Zinsen, insgesamt also $N(1 + L(T_1, T_2))$, zurück. Gleichzeitig werden zu T_2 die Differenzzahlungen durchgeführt.

Sind die Zinsen tatsächlich gesunken, also $L(T_1, T_2) < F(t, T_1, T_2)$, so erhält Bank A zusätzlich zu den Zinsen die Differenzzahlung $N(F(t, T_1, T_2) - L(T_1, T_2))$ und hat somit genau die gewünschten $N(1 + F(t, T_1, T_2))$ ($= N(1 + L(T_1, T_2)) + N(F(t, T_1, T_2) - L(T_1, T_2))$).

Falls die Zinsen allerdings gestiegen sind, also $L(T_1, T_2) > F(t, T_1, T_2)$, so profitiert Bank A nicht davon und muss die Differenzzahlung $N(L(T_1, T_2) - F(t, T_1, T_2))$ leisten. Dadurch erhält sie aber wieder genau ihr gewünschtes Ergebnis $N(1 + F(t, T_1, T_2))$ ($= N(1 + L(T_1, T_2)) - N(L(T_1, T_2) - F(t, T_1, T_2))$).

Will Bank A in einem Jahr ($T_1 = 1$) einen Kredit für ein Jahr ($T_2 = 2$) zu Forward Rate $F(t, T_1, T_2)$ aufnehmen und sich gegen steigende Zinsen absichern, muss sie ein Forward Rate Agreement zu Zeitpunkt t verkaufen.

Bemerkung Notation eines FRAs Auf den Finanzmärkten werden FRAs mit einer maximalen Gesamtlaufzeit von 24 Monaten gehandelt. Dabei lässt sich die Gesamtlaufzeit in die sogenannte Vorlaufzeit und die Anlageperiode unterteilen. Während die Vorlaufzeit die Dauer zwischen den Zeitpunkten t und T_1 beschreibt, bestimmt die Anlageperiode die Zeit von T_1 bis T_2 . Ein FRA mit einer Vorlaufzeit von einem Jahr und einer Anlageperiode von 6 Monaten wird als 12x18 FRA notiert. Es werden also die Zeitpunkte T_1 und T_2 anstatt der eigentlichen Zeitspannen zwischen den Zeitpunkten als Information dazugegeben. Im Falle des obigen Beispiels würde von einem 12x24 FRA gesprochen werden.

5.6 Interest-Rate Swaps & Forward Swap Rates

Im vorigen Kapitel wurde das Konzept eines FRA erläutert und die Simply Compounded Forward Interest Rate unter der Überlegung eines fairen FRA-Vertrags eingeführt. Eine Verallgemeinerung des Forward Rate Agreements mit mehreren aufeinanderfolgenden Tauschgeschäften sind die sogenannten *Interest-Rate Swaps (IRS)*. Ein fairer IRS-Vertrag kann schließlich mit Hilfe der Forward Swap Rates erhalten werden.

Definition 5.16 Interest-Rate Swaps

Zum heutigen Zeitpunkt t werden die Zinsrate K und der Nominalwert N festgelegt. Ein IRS tauscht Zahlungen zu bestimmten zukünftigen Zeitpunkten $T_i \in \{T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta}\}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, wobei $t \leq T_{\alpha} \leq T_{\alpha+1} \leq \dots \leq T_{\beta}$.

Der Besitzer des IRS erhält zu jedem dieser Zeitpunkte die fixe Geldmenge $N\tau_i K$ und bezahlt die variable $N\tau_i L(T_{i-1}, T_i)$, wobei $\tau_i = \tau(T_{i-1}, T_i)$ das Zeitmaß zwischen T_{i-1} und T_i gemäß Tageszählkonvention ist. In diesem Fall wird von einem *Receiver Forward Swap (RFS)* gesprochen. Für den Verkäufer ist es genau anders herum, er bezahlt die fixe Geldmenge und erhält die variabel, dann wird der Vertrag *Payer Forward Swap (PFS)* genannt.

Die Zinsraten $L(T_{i-1}, T_i)$ werden jeweils zu Zeitpunkt $T_{i-1} \in \{T_{\alpha}, T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta-1}\}$ aktualisiert und laufen bis zum dazugehörigen Zeitpunkt $T_i \in \{T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta}\}$, an welchem auch die dazugehörigen Differenzzahlungen stattfinden. Um die Notation möglichst einfach zu halten, wird angenommen, dass sowohl die fixen auf K basierenden Zahlungen, als auch die variablen auf $L(T_{i-1}, T_i)$ basierenden Zahlungen zum selben Zeitpunkt stattfinden.

Mit der Definitionen der Mengen $\mathcal{T} := \{T_{\alpha}, \dots, T_{\beta}\}$ und $\tau := \{\tau_{\alpha+1}, \dots, \tau_{\beta}\}$ lässt sich ein RFS daher als Portfolio von FRAs darstellen:

$$\begin{aligned}
RFS(t, \mathcal{T}, \tau, N, K) &= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} FRA(t, T_{i-1}, T_i, \tau_i, N, K) \\
&= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) (K - F(t, T_{i-1}, T_i)) \\
&= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) \left(K - \frac{1}{\tau_i} \left(\frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)} - 1 \right) \right) \\
&= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (\tau_i P(t, T_i) K - (P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i))) \\
&= -NP(t, T_{\alpha}) + NP(t, T_{\beta}) + NK \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)
\end{aligned}$$

Analog zu den FRAs soll ein fairer IRS-Vertrag zu Zeitpunkt t definiert werden. Dies ist der Fall, wenn obiger Vertrag zu t den Wert Null annimmt. Die Zinsrate K , welche diesen fairen Vertrag ermöglicht wird Forward Swap Rate genannt.

Definition 5.17 Forward swap rate

Die *Forward Swap Rate* $S_{\alpha, \beta}(t)$ zu Zeitpunkt t für die Menge der Zeitpunkte $\mathcal{T}$ und der Zeitmaße τ macht einen IRS-Vertrag zu einem fairen Vertrag zu Zeitpunkt t . Sie ist also jene fixierte Zinsrate K , sodass $RFS(t, \mathcal{T}, \tau, N, K) = 0$ gilt. Durch einfaches Umformen folgt:

$$S_{\alpha, \beta}(t) = \frac{P(t, T_{\alpha}) - P(t, T_{\beta})}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)} \quad (5.22)$$

Beweis

$$0 = -NP(t, T_\alpha) + NP(t, T_\beta) + NK \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)$$

$$K \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) = P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)$$

$$K = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)}$$

□

5.7 Swaptions

Zum Abschluss dieser Einführung werden Optionen auf Interest-Rate Swaps, kurz *Swaptions* genannt, betrachtet. Hier wird zwischen der European Payer-Swaption und der European Receiver-Swaption unterschieden, welche dem Besitzer das Recht, aber nicht die Pflicht geben, in einen Payer Forward Swap beziehungsweise in einen Receiver Forward Swap zu gegebener zukünftiger Zeit T_α einzutreten.

Die Dauer dieser Option ist somit T_α und wird mit Swaption Maturity bezeichnet. Die Dauer des Swaps wird Tenor der Swaption genannt und ist in diesem Fall $T_\beta - T_\alpha$. Die Zahlungszeitpunkte sind $T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$ mit den dazugehörigen $\tau_{\alpha+1}, \dots, \tau_\beta$.

Der Payoff einer RFS zu Zeitpunkt T_α , unter der Annahme, dass diese Option nur ausgeführt wird, falls dieser Wert positiv ist, sei mit Hilfe von Definition 5.16:

$$\left(N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i) (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+$$

Swaptions werden mit Hilfe der Black-Scholes Formel ausgewertet. Der Wert einer Receiver Swaption zu Zeitpunkt t ist laut [8]:

$$RS^{Black}(t, \mathcal{T}, \tau, N, K, \sigma_{\alpha, \beta}) = N (K \Phi(d_2) - S_{\alpha, \beta}(t) \Phi(d_1)) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) \quad (5.23)$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{\ln \left(\frac{S_{\alpha, \beta}(t)}{K} \right) \pm \frac{1}{2} \left(\sigma_{\alpha, \beta} \sqrt{\tau(t, T_\alpha)} \right)^2}{\sigma_{\alpha, \beta} \sqrt{\tau(t, T_\alpha)}}$$

und für die Payer Swaption gilt nach [8]:

$$PS^{Black}(t, \mathcal{T}, \tau, N, K, \sigma_{\alpha, \beta}) = N (S_{\alpha, \beta}(t) \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i), \quad (5.24)$$

wobei $\sigma_{\alpha,\beta}$ die Implizite Volatilität der Swaption, abhängig von der Optionsdauer T_α und dem Tenor $T_\beta - T_\alpha$, bezeichnet und beispielsweise in Bloomberg, einer kostenpflichtigen Datenbank im Internet, zu finden ist.

Beispiele für Impliziten at-the-money Swaption Volatilitäten sind in Abbildung 5.4 zu sehen. Näheres dazu wird in Kapitel 9.2 erläutert.

Implizite ATM Swaption Volatilitäten

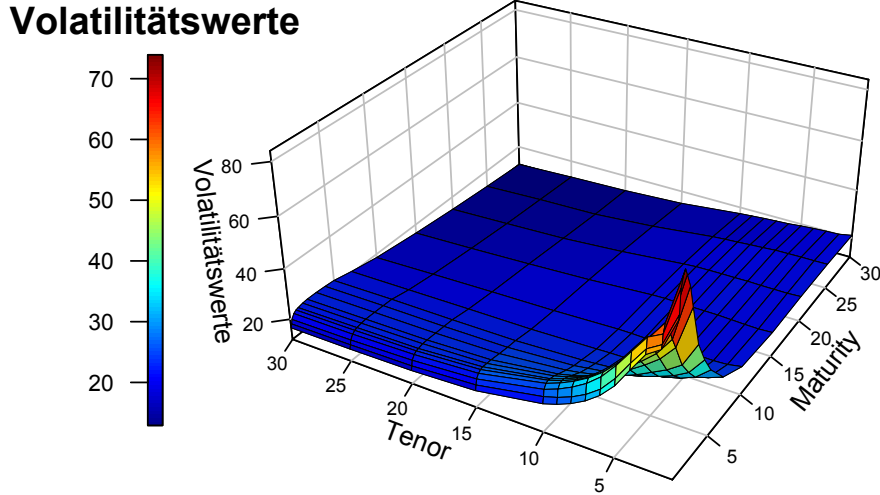


Abbildung 5.4: Implizite at-the-money Swaption Volatilitäten $\sigma_{\alpha,\beta}$ vom 01.08.2014 aus Kapitel 9.2

Definition 5.18 *At-the-money Swaption*

Eine Swaption (Receiver oder Payer) heißt *at-the-money*, falls

$$K = S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)}. \quad (5.25)$$

Eine Receiver Swaption heißt *in-the-money*, falls $K > S_{\alpha,\beta}(t)$ und *out-of-the-money*, wenn $K < S_{\alpha,\beta}(t)$. Bei der Payer Swaption ist es genau umgekehrt. Die Begriffe „at-the-money“, „in-the-money“ und „out-of-the-money“ wurden in Beispiel 4.19 erklärt.

Für eine at-the-money Receiver Swaption ergibt sich daher folgender Preis:

$$\begin{aligned} RS^{Black}(t, \mathcal{T}, \tau, N, S_{\alpha,\beta}(t), \sigma_{\alpha,\beta}) &= N (S_{\alpha,\beta}(t) \Phi(d_2) - S_{\alpha,\beta}(t) \Phi(d_1)) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) \\ &= N S_{\alpha,\beta}(t) (\Phi(d_2) - \Phi(d_1)) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) \\ &= N \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)} (\Phi(d_2) - \Phi(d_1)) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) \\ &= N (P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)) (\Phi(d_2) - \Phi(d_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= N (P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)) (\Phi(d_2) - \Phi(-d_2)) \\
&= N (P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)) (\Phi(d_2) - (1 - \Phi(d_2))) \\
&= N (P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)) (2\Phi(d_2) - 1)
\end{aligned}$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{\ln \left(\frac{S_{\alpha,\beta}(t)}{S_{\alpha,\beta}(T)} \right) \pm \frac{1}{2} \left(\sigma_{\alpha,\beta} \sqrt{\tau(t, T_\alpha)} \right)^2}{\sigma_{\alpha,\beta} \sqrt{\tau(t, T_\alpha)}} = \pm \frac{1}{2} \sigma_{\alpha,\beta} \sqrt{\tau(t, T_\alpha)}$$

Für die Payer Swaption folgt analog.

$$PS^{Black}(t, \mathcal{T}, \tau, N, S_{\alpha,\beta}(t), \sigma_{\alpha,\beta}) = N (P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)) (2\Phi(d_1) - 1) \quad (5.26)$$

Kapitel 6

Hull-White extended Vasiček Modell

In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass mit der Existenz eines risikoneutralen Maßes $\mathbb{Q}$ der arbitragefreie Preisprozess X_t zu Zeitpunkt t eines Finanzderivats X mit Auszahlung X_T zu Zeitpunkt T mit Hilfe der risikoneutralen Bewertungsformel

$$X_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} X_T \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

berechnet wird. Für die Preise der Nullkuponanleihen $P(t, T)$, welche zu Zeitpunkt T eine Geldeinheit auszahlen, gilt nach Kapitel 5 somit

$$P(t, T) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Wenn die Dynamiken des stochastischen Prozesses $r := (r(t))_{t \geq 0}$ direkt unter dem Martingalmaß $\mathbb{Q}$ modelliert werden und die Verteilung von $\exp \left(-\int_t^T r(s)ds \right)$, bedingt auf die zu t vorhandene Information, charakterisiert wird, können alle Preise der Nullkuponanleihen $P(t, T)$ berechnet werden. Sind diese bekannt, können, wie in Kapitel 5 gezeigt, auch alle anderen Zinsraten evaluiert werden.

In diesem Kapitel wird das *Hull-White extended Vasiček Modell* eingeführt. Dieses Zinsmodell hat den Vorteil, dass es an die aktuelle Zero-Bond Kurve angepasst werden kann und anschließend versucht die zukünftige Zinsentwicklung zu modellieren.

Während das Hull-White Modell in Kapitel 6.1 aufgestellt wird und einige Eigenschaften präsentiert werden, folgt in Kapitel 6.2 die Herleitung des Zinsmodells. Hier werden die zuvor dargestellten Formeln bewiesen. In Kapitel 6.3 werden schließlich die Preise der Nullkuponanleihen und Swaptions veranschaulicht. In diesen Unterkapiteln folgen wir [5] und [8].

6.1 Hull-White extended Vasiček Modell

Die Dynamiken der Zinsrate r werde, analog zu [5], direkt unter dem Martingalmaß $\mathbb{Q}$ definiert. Dieser Vorgang wird Martingal-Modellierung genannt und es wird angenommen, dass r unter $\mathbb{Q}$ folgender Differentialgleichung genügt

$$dr(t) := \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW^{\mathbb{Q}}(t). \quad (6.1)$$

In der Literatur gibt es eine große Auswahl an Zinsmodellen für r unter dem Martingalmaß $\mathbb{Q}$. Es wurde in diesem Fall das Hull-White extended Vasiček Zinsmodell gewählt, da dieses laut [8] eines der wichtigsten Zinsmodelle ist und auch noch heute im Risikomanagement verwendet wird.

Definition 6.1 *Hull-White extended Vasiček Zinsmodell*

Die $\mathbb{Q}$ -Dynamik des Zinsprozesses r ist im Hull-White Modell durch

$$dr(t) = (\theta_r(t) - a_r r(t))dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \quad (6.2)$$

gegeben, wobei a_r und σ_r Konstanten in $\mathbb{R}^+$ sind und $W_r^{\mathbb{Q}}$ eine standard $\mathbb{Q}$ -Brownsche Bewegung darstellt. Der Index r soll dabei die Zugehörigkeit zum Zinsprozess r verdeutlichen. Die deterministische Funktion $\theta_r(t)$ wird so gewählt, dass das Hull-White Zinsmodell an die aktuelle am Markt beobachtbare Zero-Bond Kurve angepasst werden kann. Wie in Kapitel 6.2 gezeigt wird, erfüllt $\theta_r(t)$:

$$\theta_r(t) = \frac{\partial f^*(0, t)}{\partial t} + a_r f^*(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - e^{-2a_r t}) \quad (6.3)$$

Dabei ist $f^*(0, t)$ die Instantaneous Forward Interest Rate zu Zeitpunkt 0 mit Laufzeit t aus Definition 5.14, die durch die am Markt beobachtbaren Nullkuponanleihe-Preise $P^*(0, t)$ aus Definition 5.10 bestimmt werden kann:

$$f^*(0, t) = -\frac{\partial \ln(P^*(0, t))}{\partial t}$$

Die Zero-Coupon Bonds $P^*(0, t)$ werden in Kapitel 9.1 mit Hilfe der Bootstrap-Methode berechnet.

In Kapitel 6.2 wird die Lösung der stochastischen Differentialgleichung der Zinsrate r hergeleitet. Diese ist folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{-a_r(t-s)}r(s) + \int_s^t e^{-a_r(t-u)}\theta_r(u)du + \int_s^t e^{-a_r(t-u)}\sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \\ &= e^{-a_r(t-s)}r(s) + \phi(t) - \phi(s)e^{-a_r(t-s)} + \int_s^t e^{-a_r(t-u)}\sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \end{aligned} \quad (6.4)$$

mit

$$\phi(t) = f^*(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r t})^2 \quad (6.5)$$

Ebenso wird in Kapitel 6.2 gezeigt, dass $r(t)$ bedingt auf $\mathcal{F}_s$ normalverteilt ist, mit folgendem Erwartungswert und folgender Varianz:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= e^{-a_r(t-s)}r(s) + \phi(t) - \phi(s)e^{-a_r(t-s)} \\ \mathbb{V}_{\mathbb{Q}}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - e^{-2a_r(t-s)}) \end{aligned}$$

Ein Nachteil des Hull-White Zinsmodells ist, dass die Zinsrate r mit positiver Wahrscheinlichkeit negativ werden kann [8]:

$$\mathbb{Q}[r(t) < 0] = \Phi\left(-\frac{\phi(t)}{\sqrt{\frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - e^{-2a_r t})}}\right)$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist jedoch gering und daher meist vernachlässigbar.

Theorem 6.2 Hull-White extended Vasiček Zinsmodell

Die $\mathbb{Q}$ -Dynamik des Zinsprozesses r ist im Hull-White extended Vasiček Zinsmodell auch folgendermaßen darstellbar:

$$r(t) = \phi(t) + x(t) \quad \text{mit } r(0) = r_0, \quad (6.6)$$

wobei

$$\begin{aligned} \phi(t) &= f^*(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r t})^2 \\ dx(t) &= -a_r x(t)dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(t), \quad x(0) = 0. \end{aligned}$$

Der Beweis folgt am Ende von Kapitel 6.2.

6.2 Herleitung des Hull-White extended Vasiček Modells

Da das Hull-White Modell ein Spezialfall der affinen Zinsmodelle ist, werden in diesem Kapitel zuerst die affinen Zinsmodelle vorgestellt.

Affine Zinsmodelle

Definition 6.3 Affines Zinsmodell

Ein Zinsmodell heißt affines Zinsmodell, falls die stetige Zinsrate $R(t, T)$ eine affine Funktion der risikolosen Zinsrate bzw. Short Rate $r(t)$ ist. Das ist der Fall, wenn

$$R(t, T) = \alpha(t, T) + \beta(t, T)r(t),$$

wobei $\alpha(t, T)$ und $\beta(t, T)$ deterministische Funktionen sind.

Theorem 6.4

Ein Zinsmodell ist ein affines Zinsmodell, falls die Nullkuponanleihe-Preise folgende Form haben:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

Beweis

Es muss nachgeprüft werden, ob $R(t, T) = \alpha(t, T) + \beta(t, T)r(t)$ gilt. Dazu wird Definition 5.8 $\left(R(t, T) := -\frac{\ln(P(t, T))}{\tau(t, T)}\right)$ mit $\tau(t, T) = T - t$ verwendet:

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t} = -\frac{\ln(A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)})}{T - t} = \underbrace{-\frac{\ln(A(t, T))}{T - t}}_{\alpha(t, T)} + \underbrace{\frac{B(t, T)}{T - t}}_{\beta(t, T)} r(t)$$

□

Es stellt sich nun die Frage, ob es einen Zusammenhang zwischen der Affinität eines Zinsmodells und der Dynamik der Short Rate gibt. Im Zuge dessen sei nochmals an die allgemeine Definition (6.1) erinnert:

$$dr(t) := \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW^{\mathbb{Q}}(t)$$

Wie müssen $\mu(t, r(t))$ und $\sigma(t, r(t))$ aufgebaut sein, damit das Zinsmodell ein affines Zinsmodell ist?

Die Antwort lautet, dass $\mu(t, r(t))$ und $\sigma(t, r(t))$ selbst wieder affine Funktionen sein müssen und laut [8] folgende Form haben:

$$\begin{aligned}\mu(t, x) &= \lambda(t)x + \eta(t) \\ \sigma(t, x) &= \sqrt{\gamma(t)x + \delta(t)}\end{aligned}$$

für passende deterministische Funktionen $\lambda(t)$, $\eta(t)$, $\gamma(t)$ und $\delta(t)$.

Wie im folgenden Beweis gezeigt wird, müssen die Funktionen $A(t, T)$ und $B(t, T)$ folgende Differentialgleichungen mit Anfangswertbedingung lösen:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln(A(t, T))}{\partial t} - \eta(t)B(t, T) + \frac{1}{2}\delta(t)B^2(t, T) = 0 \\ A(T, T) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial B(t, T)}{\partial t} + \lambda(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(t, T) + 1 = 0 \\ B(T, T) = 0 \end{cases}$$

Beweis

Es wird obige Aussage für eine konstante Short Rate r bewiesen, wobei der Beweis mit mehr Aufwand auch für stochastische $r(t)$ gebracht werden kann. In [5] wird gezeigt, dass $P(t, T)$ folgende partielle Differentialgleichungen erfüllen muss:

$$\begin{aligned}P_t + \mu P_r + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} - rP &= 0 \\ P(T, T) &= 1\end{aligned}$$

Sei $P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r}$, dann sind die Ableitungen:

- (a) $P_t(t, T) = A_t(t, T)e^{-B(t, T)r} - A(t, T)B_t(t, T)re^{-B(t, T)r}$
- (b) $P_r(t, T) = -A(t, T)B(t, T)e^{-B(t, T)r}$
- (c) $P_{rr}(t, T) = A(t, T)B^2(t, T)e^{-B(t, T)r}$

Werden sowohl $P(t, T)$, als auch die Ableitungen in die obigen Gleichungen eingesetzt und gleichzeitig $e^{-B(t, T)r}$ und $A(t, T)$ herausgehoben, folgt:

$$e^{-B(t, T)r} \left(A_t(t, T) + A(t, T) \left(-B_t(t, T)r - \mu(t, r)B(t, T) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)B^2(t, T) - r \right) \right) = 0$$

$$A(T, T)e^{-B(T, T)r} = 1$$

Diese Gleichung kann nach der Division mit $e^{-B(t, T)r}$ und $A(t, T)$ und da $\frac{A_t(t, T)}{A(t, T)} = \frac{\partial \ln(A(t, T))}{\partial t}$ vereinfacht werden zu:

$$\frac{\partial \ln(A(t, T))}{\partial t} - r(1 + B_t(t, T)) - \mu(t, r)B(t, T) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)B^2(t, T) = 0$$

$$\begin{cases} A(T, T) = 1 \\ B(T, T) = 0 \end{cases}$$

Werden μ und σ durch

$$\begin{cases} \mu(t, r) = \lambda(t)r + \eta(t) \\ \sigma(t, r) = \sqrt{\gamma(t)r + \delta(t)} \end{cases}$$

ersetzt, wird die obige Gleichung zu einer separablen Differentialgleichung und lässt sich wie folgt umformen:

$$\frac{\partial \ln(A(t, T))}{\partial t} - r(1 + B_t(t, T)) - (\lambda(t)r + \eta(t))B(t, T) + \frac{1}{2}(\gamma(t)r + \delta(t))B^2(t, T) = 0$$

$$\frac{\partial \ln(A(t, T))}{\partial t} - \eta(t)B(t, T) + \frac{1}{2}\delta(t)B^2(t, T) - \left(1 + B_t(t, T) + \lambda(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(t, T) \right) r = 0$$

Diese Gleichung gilt für alle t, T und r . Für fix gewählte t und T muss sie also auch für alle r erfüllt sein. Das ist jedoch nur der Fall, falls der Koeffizient von r den Wert Null hat. Daher gilt einerseits

$$B_t(t, T) + \lambda(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(t, T) + 1 = 0$$

und andererseits, da der Koeffizient von r den Wert Null hat:

$$\frac{\partial \ln(A(t, T))}{\partial t} - \eta(t)B(t, T) + \frac{1}{2}\delta(t)B^2(t, T) = 0$$

Zusammengefasst können die gewünschten Ergebnisse für $A(t, T)$ und $B(t, T)$ erzielt werden:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln(A(t, T))}{\partial t} - \eta(t)B(t, T) + \frac{1}{2}\delta(t)B^2(t, T) = 0 \\ A(T, T) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial B(t, T)}{\partial t} + \lambda(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(t, T) + 1 = 0 \\ B(T, T) = 0 \end{cases}$$

□

Nachdem die affinen Zinsmodellen im Allgemeinen erläutert wurden, wird nun der Spezialfall Hull-White Zinsmodell betrachtet:

Spezialfall: Hull-White extended Vasiček Modell

Das Hull-White extended Vasiček Zinsmodell

$$dr(t) = \underbrace{(\theta_r(t) - a_r r(t))}_{\mu(t, r(t))} dt + \underbrace{\sigma_r}_{\sigma(t, r(t))} dW_r^{\mathbb{Q}}(t)$$

gehört mit $\lambda(t) = -a_r$, $\eta(t) = \theta_r(t)$, $\gamma(t) = 0$ und $\delta(t) = \sigma_r^2$ zur Gruppe der Zinsmodelle mit affiner Struktur und daher sind die Preise der Nullkuponanleihen durch

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

gegeben, wobei A und B folgende Differentialgleichungen lösen:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln(A(t, T))}{\partial t} - \theta_r(t)B(t, T) + \frac{\sigma_r^2}{2}B^2(t, T) = 0 \\ A(T, T) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial B(t, T)}{\partial t} - a_r B(t, T) + 1 = 0 \\ B(T, T) = 0 \end{cases}$$

Im Fall von $B(t, T)$ führt die Methode der Variation der Konstanten zur Lösung:

$$B(t, T) = \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-t)})$$

Für $\ln(A(t, T))$ erhält man:

$$\ln(A(t, T)) = \int_t^T \left(\frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r(T-s)})^2 - \frac{\theta_r(s)}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-s)}) \right) ds$$

Beweis der Differentialgleichung von $B(t, T)$:

Lineare skalare Differentialgleichungen 1. Ordnung können mit der Methode der Variation der Konstanten gelöst werden. Aus [15] ist folgendes bekannt:

Theorem 6.5

Für eine Differentialgleichung von der Form

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$$

ist jede Lösung gegeben durch

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

Dabei ist $x_h(t)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x'(t) + a(t)x(t) = 0$$

und gegeben durch

$$x_h(t) = ce^{-\int_t^T a(s)ds} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Weil $x_p(t)$ eine beliebige Partikulärlösung von

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$$

ist, wird es mit der Methode der Variation der Konstanten gelöst:

$$x_p(t) = c(t)e^{-\int_t^T a(s)ds} \quad \text{mit} \quad \int_t^T e^{\int_t^s a(u)du} b(s)ds$$

Für die Differenzialgleichung von B bedeutet das:

$$\begin{cases} B(T, T) & = 0 \\ \underbrace{\frac{\partial B(t, T)}{\partial t}}_{x'(t)} - \underbrace{a_r}_{a(t)} \underbrace{B(t, T)}_{x(t)} & = \underbrace{-1}_{b(t)} \end{cases}$$

Somit ergibt sich für die homogene Lösung:

$$x_h(t) = ce^{-\int_t^T a(s)ds} = ce^{-\int_t^T a_r ds} = ce^{-[a_r s]_t^T} = ce^{-a_r(T-t)}$$

und für die Partikulärlösung:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= c(t)e^{-\int_t^T a(s)ds} \\ &= \int_t^T e^{\int_t^s a(u)du} b(s)ds \cdot e^{-\int_t^T a(s)ds} \\ &= - \int_t^T e^{a_r(s-t)} ds \cdot e^{-a_r(T-t)} \\ &= - \left[-\frac{1}{a_r} e^{a_r(s-t)} \right]_t^T \cdot e^{-a_r(T-t)} \\ &= \left(\frac{1}{a_r} e^{a_r(T-t)} - \frac{1}{a_r} \right) \cdot e^{-a_r(T-t)} \\ &= \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-t)}) \end{aligned}$$

Zusammen ergibt das

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = ce^{-a_r(T-t)} + \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-t)})$$

und da $B(T, T) = 0$ folgt für c :

$$\begin{aligned} x(T) &= ce^{-a_r(T-T)} + \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-T)}) = 0 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Das ergibt wiederum die Lösung:

$$B(t, T) = x(t) = \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-t)})$$

□

Beweis der Differentialgleichung von $\ln(A(t, T))$:

Das Einsetzen der Lösung der ersten Differentialgleichung in die Zweite liefert folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln(A(t, T))}{\partial t} &= \theta_r(t)B(t, T) - \frac{\sigma_r^2}{2}B^2(t, T) \\ &= \frac{\theta_r(t)}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-t)}) - \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r(T-t)})^2\end{aligned}$$

Durch die Integration der Gleichung von t bis T nach ds

$$\begin{aligned}\int_t^T \frac{\partial \ln(A(s, T))}{\partial s} ds &= \int_t^T \left(\frac{\theta_r(s)}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-s)}) - \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r(T-s)})^2 \right) ds \\ \ln(A(T, T)) - \ln(A(t, T)) &= \int_t^T \left(\frac{\theta_r(s)}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-s)}) - \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r(T-s)})^2 \right) ds\end{aligned}$$

und da $A(T, T) = 1$, und somit $\ln(A(T, T)) = 0$, ergibt sich die Lösung:

$$\begin{aligned}\ln(A(t, T)) &= \int_t^T \left(\frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r(T-s)})^2 - \frac{\theta_r(s)}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-s)}) \right) ds \quad \text{oder} \\ \ln(A(t, T)) &= \int_t^T \left(\frac{\sigma_r^2}{2} B^2(s, T) - \theta_r(s)B(s, T) \right) ds\end{aligned}$$

□

Beweis der Darstellung von $\theta_r(t)$

Zuerst sei an die Definition des Hull-White Modells erinnert:

$$dr(t) = (\theta_r(t) - a_r r(t))dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(t)$$

Die deterministische Funktion $\theta_r(t)$ des Hull-White Modells wird so gewählt, sodass das Zinsmodell an die am Markt beobachtbare Zinsstrukturkurve angepasst wird. In diesem Fall ist $\theta_r(t)$ von folgender Gestalt:

$$\theta_r(t) = \frac{\partial f^*(0, t)}{\partial t} + a_r f^*(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - e^{-2a_r t})$$

Beweis

Einerseits werden die mit Hilfe der in Kapitel 9.1 vorgestellten Bootstrap Methode berechneten Nullkuponanleihe-Preise $P^*(0, T)$ aus den Marktdaten verwendet, andererseits ist aus dem Kapitel 6.2 bekannt, dass das Hull-White Modell ein affines Zinsmodell ist, wobei:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

mit

$$B(t, T) = \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-t)})$$

$$\ln(A(t, T)) = \int_t^T \left(\frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r(T-s)})^2 - \frac{\theta_r(s)}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-s)}) \right) ds$$

In dieser Gleichung steckt auch jenes $\theta_r(t)$, welches ausgedrückt werden soll.

Da zwischen den Instantaneous Forward Interest Rates und den Nullkuponanleihe-Preisen der direkte Zusammenhang

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}$$

besteht, ist es günstig Instantaneous Forward Interest Rates anstatt der Nullkuponanleihe-Preise zu verwenden, wobei f^* wieder durch $f^*(t, T) = -\frac{\partial \ln P^*(t, T)}{\partial T}$ definiert ist. Durch einfaches Umformen ergibt sich aus

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

folgendes für die Instantaneous Forward Interest Rate:

$$f(t, T) = \frac{\partial B(t, T)}{\partial T} r(t) - \frac{\partial \ln(A(t, T))}{\partial T}$$

Mit Hilfe der obigen Lösungen für $B(t, T)$ und $\ln(A(t, T))$ können die Ableitungen für $t = 0$ berechnet werden.

Für $\frac{\partial B(0, T)}{\partial T}$ folgt:

$$\frac{\partial B(0, T)}{\partial T} = \frac{\partial \left(\frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) \right)}{\partial T} = -\frac{1}{a_r} (-a_r) e^{-a_r T} = e^{-a_r T}$$

Unter Verwendung der Leibnitz Regel

$$\frac{d}{dy} \left(\int_{g(y)}^{h(y)} F(x, y) dx \right) = F(h(y), y) \frac{dh(y)}{dy} - F(g(y), y) \frac{dg(y)}{dy} + \int_{g(y)}^{h(y)} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy$$

mit $y = T$, $h(y) = T$, $g(y) = 0$ und $x = s$ beim Schritt $\circledast$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(A(0, T))}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\int_0^T \left(\frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r(T-s)})^2 - \frac{\theta_r(s)}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-s)}) \right) ds \right) \\ &\stackrel{\circledast}{=} \left(\underbrace{\frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r(T-T)})^2}_{=0} - \underbrace{\frac{\theta_r(T)}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-T)})}_{=0} \right) \cdot 1 \\ &\quad - \left(\frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r(T-0)})^2 - \frac{\theta_r(0)}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-0)}) \right) \cdot 0 \\ &\quad + \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r(T-s)})^2 - \frac{\theta_r(s)}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-s)}) \right) ds \\ &= \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r(T-s)})^2 \right) - \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\theta_r(s)}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-s)}) \right) \right) ds \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\int_0^T \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \frac{\partial}{\partial T} \left((1 - e^{-a_r(T-s)})^2 \right) ds}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\int_0^T \frac{\theta_r(s)}{a_r} \frac{\partial}{\partial T} (1 - e^{-a_r(T-s)}) ds}_{\textcircled{2}}$$

Um die Übersicht zu wahren, werden die Terme $\textcircled{1}$ und $\textcircled{2}$ separat berechnet. Dazu werden die üblichen Ableitungs- und Integrationsregeln verwendet:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \int_0^T \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \frac{\partial}{\partial T} \left((1 - e^{-a_r(T-s)})^2 \right) ds \\ &= \int_0^T \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (2(1 - e^{-a_r(T-s)}) (-(-a_r)e^{-a_r(T-s)})) ds \\ &= \int_0^T \frac{\sigma_r^2}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-s)}) e^{-a_r(T-s)} ds \\ &= \int_0^T \frac{\sigma_r^2}{a_r} (e^{-a_r(T-s)} - e^{-2a_r(T-s)}) ds \\ &= \frac{\sigma_r^2}{a_r} \left[\frac{1}{a_r} e^{-a_r(T-s)} - \frac{1}{2a_r} e^{-2a_r(T-s)} \right]_0^T \\ &= \frac{\sigma_r^2}{a_r} \left(\frac{1}{a_r} - \frac{1}{2a_r} - \frac{1}{a_r} e^{-a_r T} + \frac{1}{2a_r} e^{-2a_r T} \right) \\ &= \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (2 - 1 - 2e^{-a_r T} + e^{-2a_r T}) \\ &= \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1^2 - 2e^{-a_r T} + (e^{-a_r T})^2) \\ &= \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r T})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &= \int_0^T \frac{\theta_r(s)}{a_r} \frac{\partial}{\partial T} (1 - e^{-a_r(T-s)}) ds \\ &= \int_0^T \frac{\theta_r(s)}{a_r} (-(-a_r)e^{-a_r(T-s)}) ds \\ &= \int_0^T \theta_r(s) e^{-a_r(T-s)} ds \end{aligned}$$

Für $\frac{\partial \ln(A(0,T))}{\partial T}$ folgt daher:

$$\frac{\partial \ln(A(0,T))}{\partial T} = \textcircled{1} - \textcircled{2} = \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r T})^2 - \int_0^T \theta_r(s) e^{-a_r(T-s)} ds$$

Nach dem Einsetzen der Ergebnisse für $\frac{\partial B(0,T)}{\partial T}$ und $\frac{\partial \ln(A(0,T))}{\partial T}$ in die Instantaneous Forward

Interest Rate Gleichung folgt:

$$\begin{aligned} f(0, T) &= \frac{\partial B(0, T)}{\partial T} r(0) - \frac{\partial \ln(A(0, T))}{\partial T} \\ &= e^{-a_r T} r(0) + \int_0^T \theta_r(s) e^{-a_r(T-s)} ds - \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r T})^2 \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass die observierte Instantaneous Forward Interest Rate f^* gegeben ist, kann die gesuchte Funktion θ_r gefunden werden. Dazu wird die Gleichung

$$f^*(0, T) = e^{-a_r T} r(0) + \int_0^T \theta_r(s) e^{-a_r(T-s)} ds - \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r T})^2$$

umgeschrieben:

$$f^*(0, T) = x(T) - g(T),$$

wobei x und g definiert sind durch

$$\begin{cases} x'(t) &= -a_r x(t) + \theta_r(t) \\ x(0) &= r(0) \end{cases} \quad g(t) = \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r t})^2$$

Beweis

Dieser Beweis zeigt, dass $x(T)$ tatsächlich die obige Differentialgleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} x(T) &= e^{-a_r T} r(0) + \int_0^T \theta_r(s) e^{-a_r(T-s)} ds \\ x'(T) &= -a_r e^{-a_r T} r(0) + \frac{\partial}{\partial T} \left(\int_0^T \theta_r(s) e^{-a_r(T-s)} ds \right) \\ &\stackrel{\circledast}{=} -a_r e^{-a_r T} r(0) + \theta_r(T) e^{-a_r(T-T)} \cdot 1 - \theta_r(0) e^{-a_r(T-0)} \cdot 0 + \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} (\theta_r(s) e^{-a_r(T-s)}) ds \\ &= -a_r e^{-a_r T} r(0) + \theta_r(T) + \int_0^T \theta_r(s) \frac{\partial (e^{-a_r(T-s)})}{\partial T} ds \\ &= -a_r e^{-a_r T} r(0) + \theta_r(T) + \int_0^T \theta_r(s) (-a_r) e^{-a_r(T-s)} ds \\ &= -a_r \left(e^{-a_r T} r(0) + \int_0^T \theta_r(s) e^{-a_r(T-s)} ds \right) + \theta_r(T) \\ &= -a_r x(T) + \theta_r(T) \end{aligned}$$

wobei in $\circledast$ wieder die Leibnitz Regel verwendet wird. □

Ausgehend von der Tatsache:

$$\begin{aligned} f^*(0, T) &= x(T) - g(T) \\ \Leftrightarrow x(T) &= f^*(0, T) + g(T) \\ \Leftrightarrow x'(T) &= \frac{\partial f^*(0, T)}{\partial T} + g'(T) \end{aligned}$$

kann die obige Differentialgleichung für $\theta_r(t)$ umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
\theta_r(t) &= x'(t) + a_r x(t) \\
&= \frac{\partial f^*(0, t)}{\partial t} + g'(t) + a_r x(t) \\
&= \frac{\partial f^*(0, t)}{\partial t} + g'(t) + a_r (f^*(0, t) + g(t)) \\
&= \frac{\partial f^*(0, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r t})^2 \right) + a_r \left(f^*(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r t})^2 \right) \\
&= \frac{\partial f^*(0, t)}{\partial t} + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} 2(1 - e^{-a_r t}) (-(-a_r) e^{-a_r t}) + a_r f^*(0, t) \\
&\quad + a_r \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - 2e^{-a_r t} + e^{-2a_r t}) \\
&= \frac{\partial f^*(0, t)}{\partial t} + \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (2e^{-a_r t} - 2e^{-2a_r t}) + a_r f^*(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - 2e^{-a_r t} + e^{-2a_r t}) \\
&= \frac{\partial f^*(0, t)}{\partial t} + a_r f^*(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - e^{-2a_r t})
\end{aligned}$$

Somit wurde geklärt woher $\theta_r(t)$ seine Gestalt hat. □

Lösung der stochastischen Differentialgleichung von r

Als nächstes soll die Lösung der stochastischen Differentialgleichung der Zinsrate r

$$\begin{aligned}
r(t) &= e^{-a_r(t-s)} r(s) + \int_s^t e^{-a_r(t-u)} \theta_r(u) du + \int_s^t e^{-a_r(t-u)} \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \\
&= e^{-a_r(t-s)} r(s) + \phi(t) - \phi(s) e^{-a_r(t-s)} + \int_s^t e^{-a_r(t-u)} \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(u)
\end{aligned}$$

mit

$$\phi(t) = f^*(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r t})^2$$

nachvollzogen werden. Ebenso die daraus folgenden Ergebnisse für den Erwartungswert und die Varianz:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= e^{-a_r(t-s)} r(s) + \phi(t) - \phi(s) e^{-a_r(t-s)} \\
\mathbb{V}_{\mathbb{Q}}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - e^{-2a_r(t-s)})
\end{aligned}$$

Beweis

Dabei wird wieder von der $\mathbb{Q}$ -Dynamik des Zinsprozesses r aus Gleichung (6.2) ausgegangen:

$$dr(t) = (\theta_r(t) - a_r r(t))dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(t)$$

Um diese Differentialgleichung lösen zu können, wird eine bekannte Methode zum Lösen von stochastischen Differentialgleichungen angewendet. Im ersten Schritt wird $\widehat{r}(t)$ definiert und $d\widehat{r}(t)$ berechnet:

$$\begin{aligned}\widehat{r}(t) &:= e^{a_r t} r(t) \\ d\widehat{r}(t) &\stackrel{\circledast^1}{=} a_r e^{a_r t} r(t) dt + e^{a_r t} dr(t) \\ &\stackrel{\circledast^2}{=} a_r e^{a_r t} r(t) dt + e^{a_r t} ((\theta_r(t) - a_r r(t)) dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(t)) \\ &\stackrel{\circledast^3}{=} e^{a_r t} (\theta_r(t) dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(t))\end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

- $\circledast^1$ Ableiten von $d\widehat{r}(t) = d(e^{a_r t} r(t))$ unter Verwendung der Produktregel.
- $\circledast^2$ Einsetzen der Ursprungsgleichung für $dr(t)$.
- $\circledast^3$ Umformen der Gleichung.

Das Integrieren dieser Gleichungen von s bis t führt zu

$$\widehat{r}(t) = \widehat{r}(s) + \int_s^t e^{a_r u} \theta_r(u) du + \int_s^t e^{a_r u} \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(u)$$

und somit folgt für $r(t)$:

$$\begin{aligned}r(t) &\stackrel{\circledcirc^1}{=} e^{-a_r t} \widehat{r}(t) \\ &\stackrel{\circledcirc^2}{=} e^{-a_r t} \left(\widehat{r}(s) + \int_s^t e^{a_r u} \theta_r(u) du + \int_s^t e^{a_r u} \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \right) \\ &\stackrel{\circledcirc^3}{=} e^{-a_r t} (e^{a_r s} r(s)) + \int_s^t e^{-a_r(t-u)} \theta_r(u) du + \int_s^t e^{-a_r(t-u)} \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \\ &\stackrel{\circledcirc^4}{=} e^{-a_r(t-s)} r(s) + \int_s^t e^{-a_r(t-u)} \theta_r(u) du + \int_s^t e^{-a_r(t-u)} \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(u)\end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

- $\circledcirc^1$ Umformen der obigen Definition $\widehat{r}(t) := e^{a_r t} r(t)$ ergibt $r(t) = e^{-a_r t} \widehat{r}(t)$
- $\circledcirc^2$ Einsetzen der obigen Integralgleichung für $\widehat{r}(t)$.
- $\circledcirc^3$ Einsetzen der obigen Definition $\widehat{r}(s) := e^{a_r s} r(s)$ und Umformen.
- $\circledcirc^4$ Umformen der Gleichung

Schließlich wird der für $\theta_r(t)$ gefundenen Ausdruck aus Gleichung (6.3) direkt in den zweiten Term der Gleichung von $r(t)$ eingesetzt. Das Anwenden der Integrationsregeln, unter anderem der partiellen Integrationsregel ($\int u'v = uv - \int uv'$) bei $\circledast$, und das geschickte Umformen führen schließlich zu:

$$\begin{aligned}
\int_s^t e^{-a_r(t-u)} \theta_r(u) du &= \int_s^t e^{-a_r(t-u)} \left(\frac{\partial f^*(0, u)}{\partial u} + a_r f^*(0, u) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - e^{-2a_r u}) \right) du \\
&= \int_s^t \underbrace{e^{-a_r(t-u)}}_v \underbrace{\frac{\partial f^*(0, u)}{\partial u}}_{u'} du + \int_s^t e^{-a_r(t-u)} a_r f^*(0, u) du + \int_s^t e^{-a_r(t-u)} \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - e^{-2a_r u}) du \\
&\stackrel{(*)}{=} [e^{-a_r(t-u)} f^*(0, u)]_s^t - \int_s^t e^{-a_r(t-u)} a_r f^*(0, u) du + \int_s^t e^{-a_r(t-u)} a_r f^*(0, u) du + \\
&\quad + \frac{\sigma_r^2}{2a_r} \int_s^t e^{-a_r(t-u)} - e^{-a_r(t-u)} e^{-2a_r u} du \\
&= f^*(0, t) - e^{-a_r(t-s)} f^*(0, s) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r} \int_s^t e^{-a_r(t-u)} du - \frac{\sigma_r^2}{2a_r} \int_s^t e^{-a_r(t+u)} du \\
&= f^*(0, t) - e^{-a_r(t-s)} f^*(0, s) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r} \left[\frac{1}{a_r} e^{-a_r(t-u)} \right]_s^t - \frac{\sigma_r^2}{2a_r} \left[-\frac{1}{a_r} e^{-a_r(t+u)} \right]_s^t \\
&= f^*(0, t) - e^{-a_r(t-s)} f^*(0, s) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r(t-s)}) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (e^{-2a_r t} - e^{-a_r(t+s)}) \\
&= f^*(0, t) - e^{-a_r(t-s)} f^*(0, s) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r(t-s)} + e^{-2a_r t} - e^{-a_r(t+s)} - 2e^{-a_r t} + 2e^{-a_r t}) \\
&= f^*(0, t) - e^{-a_r(t-s)} f^*(0, s) + \\
&\quad + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - 2e^{-a_r t} + e^{-2a_r t} - e^{-a_r(t-s)} - e^{-2a_r s} e^{-a_r(t-s)} + 2e^{-a_r s} e^{-a_r(t-s)}) \\
&= f^*(0, t) - e^{-a_r(t-s)} f^*(0, s) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \left((1 - e^{-a_r t})^2 - (1 - 2e^{-a_r s} + e^{-2a_r s}) e^{-a_r(t-s)} \right) \\
&= f^*(0, t) - e^{-a_r(t-s)} f^*(0, s) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r t})^2 - \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r s})^2 e^{-a_r(t-s)} \\
&= f^*(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r t})^2 - e^{-a_r(t-s)} \left(f^*(0, s) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r s})^2 \right) \\
&= \phi(t) - \phi(s) e^{-a_r(t-s)}
\end{aligned}$$

mit

$$\phi(t) = f^*(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r t})^2$$

Zusammen mit dem ersten und dem dritten Term der Gleichung für $r(t)$ ergibt das die gewünschte Gleichung:

$$\begin{aligned}
r(t) &= e^{-a_r(t-s)} r(s) + \int_s^t e^{-a_r(t-u)} \theta_r(u) du + \int_s^t e^{-a_r(t-u)} \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \\
&= e^{-a_r(t-s)} r(s) + \phi(t) - \phi(s) e^{-a_r(t-s)} + \int_s^t e^{-a_r(t-u)} \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(u)
\end{aligned}$$

Um den Erwartungswert und die Varianz berechnen zu können, werden die Eigenschaften des stochastischen Integrals aus Kapitel 3.4 in Erinnerung gerufen:

Der Erwartungswert von $r(t)$ erfüllt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-a_r(t-s)}r(s) + \phi(t) - \phi(s)e^{-a_r(t-s)} + \int_s^t e^{-a_r(t-u)}\sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&\stackrel{\circledast^1}{=} e^{-a_r(t-s)}r(s) + \phi(t) - \phi(s)e^{-a_r(t-s)} + \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sigma_r \int_s^t e^{-a_r(t-u)} dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \middle| \mathcal{F}_s \right]}_{=0} \\
&\stackrel{\circledast^2}{=} e^{-a_r(t-s)}r(s) + \phi(t) - \phi(s)e^{-a_r(t-s)}
\end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

$\circledast^1$ Herausziehen der deterministischen Funktionen aus dem Erwartungswert.

$\circledast^2$ Nach der (1)-ten Eigenschaft der Itô-Integrale aus Kapitel 3.4, siehe dazu Gleichung (3.2), gilt:

$$\mathbb{E} \left[\int_s^t f(u) dW_u \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0$$

Die Varianz von $r(t)$ erfüllt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{\mathbb{Q}}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{V}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-a_r(t-s)}r(s) + \phi(t) - \phi(s)e^{-a_r(t-s)} + \int_s^t e^{-a_r(t-u)}\sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&\stackrel{\circledcirc^1}{=} \sigma_r^2 \mathbb{V}_{\mathbb{Q}} \left[\int_s^t e^{-a_r(t-u)} dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&\stackrel{\circledcirc^2}{=} \sigma_r^2 \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(\int_s^t e^{-a_r(t-u)} dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] - \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(\int_s^t e^{-a_r(t-u)} dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right]}_{=0} \right) \\
&\stackrel{\circledcirc^3}{=} \sigma_r^2 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(\int_s^t e^{-a_r(t-u)} dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&\stackrel{\circledcirc^4}{=} \sigma_r^2 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_s^t (e^{-a_r(t-u)})^2 du \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&\stackrel{\circledcirc^5}{=} \sigma_r^2 \int_s^t e^{-2a_r(t-u)} du \\
&= \sigma_r^2 \left[\frac{1}{2a_r} e^{-2a_r(t-u)} \right]_s^t \\
&= \sigma_r^2 \left(\frac{1}{2a_r} - \frac{1}{2a_r} e^{-2a_r(t-s)} \right) \\
&= \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - e^{-2a_r(t-s)})
\end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

$$\circledcirc^1 \quad \mathbb{V}[aX + b] = a^2 \mathbb{V}[X]$$

$$\circledcirc^2 \quad \mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

⊙³ Anwenden der Eigenschaft (3.2): $\mathbb{E} \left[\int_s^t f(u) dW_u \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0$

⊙⁴ Anwenden der Itô-Isometrie aus Gleichung (3.4):

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_s^t f(u) dW_u \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_s^t (f(u))^2 du \middle| \mathcal{F}_s \right]$$

⊙⁵ Herausziehen der deterministischen Funktion aus dem Erwartungswert.

□

Erläuterung der alternativen Darstellung des Hull-White extended Vasiček Modells

Nachdem sowohl der Erwartungswert, als auch die Varianz hergeleitet wurden, wird abschließend die Richtigkeit der alternative Darstellung von $r(t)$ gezeigt:

$$r(t) = \phi(t) + x(t) \quad \text{mit } r(0) = r_0$$

wobei

$$\begin{aligned} \phi(t) &= f^*(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r t})^2 \\ dx(t) &= -a_r x(t) dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \quad \text{mit } x(0) = 0 \end{aligned}$$

Beweis

Es wird wieder die bekannte Methode zum Lösen von stochastischen Differentialgleichungen verwendet:

$$\begin{aligned} \widehat{x}(t) &:= e^{a_r t} x(t) \\ d\widehat{x}(t) &\stackrel{①}{=} a_r e^{a_r t} x(t) dt + e^{a_r t} dx(t) \\ &\stackrel{②}{=} a_r e^{a_r t} x(t) dt + e^{a_r t} (-a_r x(t) dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(t)) \\ &\stackrel{③}{=} e^{a_r t} \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

⊙¹ Ableiten von $d\widehat{x}(t) = d(e^{a_r t} x(t))$ unter Verwendung der Produktregel.

⊙² Einsetzen der Ursprungsgleichung für $dx(t)$.

⊙³ Umformen der Gleichung.

Das Integrieren dieser Gleichungen von 0 bis t ergibt

$$\widehat{x}(t) = \widehat{x}(s) + \int_s^t e^{a_r u} \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(u)$$

Somit folgt für $x(t)$:

$$\begin{aligned}
x(t) &\stackrel{\circledast^1}{=} e^{-a_r t} \widehat{x}(t) \\
&\stackrel{\circledast^2}{=} e^{-a_r t} \left(\widehat{x}(s) + \int_s^t e^{a_r u} \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \right) \\
&\stackrel{\circledast^3}{=} e^{-a_r t} \left(e^{a_r s} x(s) + \int_s^t e^{a_r u} \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \right) \\
&\stackrel{\circledast^4}{=} x(s) e^{-a_r(t-s)} + \int_s^t \sigma_r e^{-a_r(t-u)} dW_r^{\mathbb{Q}}(u)
\end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

- $\circledast^1$ Umformen der obigen Definition $\widehat{x}(t) := e^{a_r t} x(t)$ ergibt $x(t) = e^{-a_r t} \widehat{x}(t)$
- $\circledast^2$ Einsetzen der obigen Integralgleichung für $\widehat{x}(t)$.
- $\circledast^3$ Einsetzen der obigen Definition $\widehat{x}(s) := e^{a_r s} x(s)$ und Umformen.
- $\circledast^4$ Umformen der Gleichung

Wird das Ergebnis für $x(t)$ in die Gleichung für $r(t)$ eingesetzt und etwas umgeformt, führt dies zu folgendem Resultat:

$$\begin{aligned}
r(t) &= \phi(t) + x(t) \\
&= \phi(t) + x(s) e^{-a_r(t-s)} + \int_s^t \sigma_r e^{-a_r(t-u)} dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \\
&= \phi(t) + (r(s) - \phi(s)) e^{-a_r(t-s)} + \int_s^t \sigma_r e^{-a_r(t-u)} dW_r^{\mathbb{Q}}(u) \\
&= r(s) e^{-a_r(t-s)} + \phi(t) - \phi(s) e^{-a_r(t-s)} + \int_s^t \sigma_r e^{-a_r(t-u)} dW_r^{\mathbb{Q}}(u)
\end{aligned}$$

Somit wurde die Richtigkeit des alternativen Ansatzes gezeigt. □

6.3 Nullkuponanleihen und Optionen des Hull-White Modells

Um in Kapitel 9.2 die Parameter a_r und σ_r des Hull-White Modells schätzen zu können, müssen unter anderem die Preise von Payer Swaptions berechnet werden. Diese können als Summe von Europäischen Put-Optionen auf eine Nullkuponanleihe gesehen werden. Zuerst sind daher die Preise der Nullkuponanleihen im Hull-White Modell interessant, um die Europäischen Call- und Put-Optionen auf eine Nullkuponanleihe definieren und anschließend die Preise von Swaptions darzustellen zu können.

Definition 6.6 Nullkuponanleihe-Preise im Hull-White Zinsmodell

Die Preise der Nullkuponanleihen $P(t, T)$ sind im Hull-White Modell wie folgt gegeben:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (6.7)$$

mit

$$B(t, T) = \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-t)})$$

$$A(t, T) = \frac{P^*(0, T)}{P^*(0, t)} e^{B(t, T)f^*(0, t) - \frac{\sigma_r^2}{4a_r}(1 - e^{-2a_r t})B^2(t, T)}$$

Beweis

Folgende Tatsachen wurden für die Nullkuponanleihe-Preise bereits in Kapitel 6.2 gezeigt:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

mit

$$B(t, T) = \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-t)})$$

$$\ln(A(t, T)) = \int_t^T \left(\frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r(T-s)})^2 - \frac{\theta_r(s)}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-s)}) \right) ds$$

und

$$\theta_r(t) = \frac{\partial f^*(0, t)}{\partial t} + a_r f^*(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - e^{-2a_r t})$$

Es muss daher nur mehr die Gleichung für $A(t, T)$ gezeigt werden. Durch das Einsetzen von $\theta_r(t)$ in die Gleichung von $\ln(A(t, T))$ folgt:

$$\begin{aligned} \ln(A(t, T)) &= \int_t^T \left(\frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r(T-s)})^2 - \frac{\theta_r(s)}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-s)}) \right) ds \\ &= \int_t^T \frac{\sigma_r^2}{2} B^2(s, T) ds - \int_t^T \left(\frac{\partial f^*(0, s)}{\partial s} + a_r f^*(0, s) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - e^{-2a_r s}) \right) B(s, T) ds \\ &= \underbrace{\frac{\sigma_r^2}{2} \int_t^T B^2(s, T) ds}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\int_t^T \frac{\partial f^*(0, s)}{\partial s} B(s, T) ds}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\int_t^T a_r f^*(0, s) B(s, T) ds}_{\textcircled{3}} \\ &\quad - \underbrace{\frac{\sigma_r^2}{2a_r} \int_t^T (1 - e^{-2a_r s}) B(s, T) ds}_{\textcircled{4}} \end{aligned}$$

Um die Rechnungen übersichtlich zu gestalten, wird dieser Ausdruck in vier Teile unterteilt und jeder Teil separat berechnet. Bei $\textcircled{2}$ wird die Regel der partiellen Integration ($\int u'v = uv - \int uv'$) verwendet:

$$\begin{aligned}
① &= \int_t^T B^2(s, T) ds \\
&= \int_t^T \frac{1}{a_r^2} (1 - e^{-a_r(T-s)})^2 ds \\
&= \frac{1}{a_r^2} \int_t^T 1 - 2e^{-a_r(T-s)} + e^{-2a_r(T-s)} ds \\
&= \frac{1}{a_r^2} \left[s - 2e^{-a_r(T-s)} \frac{1}{a_r} + e^{-2a_r(T-s)} \frac{1}{2a_r} \right]_t^T \\
&= \frac{1}{a_r^2} \left(T - t - \frac{2}{a_r} + 2e^{-a_r(T-t)} \frac{1}{a_r} + \frac{1}{2a_r} - e^{-2a_r(T-t)} \frac{1}{2a_r} \right) \\
&= \frac{1}{a_r^3} \left(a_r(T-t) - 2(1 - e^{-a_r(T-t)}) + \frac{1}{2}(1 - e^{-2a_r(T-t)}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
② &= \int_t^T \underbrace{\frac{\partial f^*(0, s)}{\partial s}}_{u'} \underbrace{B(s, T)}_v ds \\
&= [f^*(0, s)B(s, T)]_t^T - \int_t^T f^*(0, s) (-e^{-a_r(T-s)}) ds \\
&= -f^*(0, t)B(t, T) + \int_t^T f^*(0, s)e^{-a_r(T-s)} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
③ &= \int_t^T a_r f^*(0, s) B(s, T) ds \\
&= \int_t^T \underbrace{f^*(0, s)}_{=-\frac{\partial \ln(P^*(0, s))}{\partial s}} ds - \int_t^T f^*(0, s)e^{-a_r(T-s)} ds \\
&= -[\ln(P^*(0, s))]_t^T - \int_t^T f^*(0, s)e^{-a_r(T-s)} ds \\
&= -\ln\left(\frac{P^*(0, T)}{P^*(0, t)}\right) - \int_t^T f^*(0, s)e^{-a_r(T-s)} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
④ &= \int_t^T (1 - e^{-2a_r s}) B(s, T) ds \\
&= \int_t^T (1 - e^{-2a_r s}) \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r(T-s)}) ds \\
&= \frac{1}{a_r} \int_t^T (1 - e^{-2a_r s} - e^{-a_r(T-s)} + e^{-a_r(T+s)}) ds \\
&= \frac{1}{a_r} \left[s + e^{-2a_r s} \frac{1}{2a_r} - e^{-a_r(T-s)} \frac{1}{a_r} - e^{-a_r(T+s)} \frac{1}{a_r} \right]_t^T
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a_r^2} \left(a_r(T-t) + \frac{1}{2} (e^{-2a_r T} - e^{-2a_r t}) - 1 + e^{-a_r(T-t)} - e^{-2a_r T} + e^{-a_r(T+t)} \right)$$

Werden alle vier Teile wieder zusammengesetzt, folgt:

$$\begin{aligned} \ln(A(t, T)) &= \frac{\sigma_r^2}{2a_r^3} \left(a_r(T-t) - 2(1 - e^{-a_r(T-t)}) + \frac{1}{2}(1 - e^{-2a_r(T-t)}) \right) + f^*(0, t)B(t, T) \\ &\quad - \int_t^T f^*(0, s)e^{-a_r(T-s)}ds + \ln \left(\frac{P^*(0, T)}{P^*(0, t)} \right) + \int_t^T f^*(0, s)e^{-a_r(T-s)}ds \\ &\quad - \frac{\sigma_r^2}{2a_r^3} \left(a_r(T-t) + \frac{1}{2}(e^{-2a_r T} - e^{-2a_r t}) - 1 + e^{-a_r(T-t)} - e^{-2a_r T} + e^{-a_r(T+t)} \right) \\ &= \ln \left(\frac{P^*(0, T)}{P^*(0, t)} \right) + f^*(0, t)B(t, T) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^3} \left(-2(1 - e^{-a_r(T-t)}) + \frac{1}{2}(1 - e^{-2a_r(T-t)}) \right) \\ &\quad - \frac{\sigma_r^2}{2a_r^3} \left(\frac{1}{2}(e^{-2a_r T} - e^{-2a_r t}) - 1 + e^{-a_r(T-t)} - e^{-2a_r T} + e^{-a_r(T+t)} \right) \\ &= \ln \left(\frac{P^*(0, T)}{P^*(0, t)} \right) + f^*(0, t)B(t, T) - \frac{\sigma_r^2}{4a_r^3} (4 - 4e^{-a_r(T-t)} - 1 + e^{-2a_r(T-t)} \\ &\quad + e^{-2a_r T} - e^{-2a_r t} - 2 + 2e^{-a_r(T-t)} - 2e^{-2a_r T} + 2e^{-a_r(T+t)}) \\ &= \ln \left(\frac{P^*(0, T)}{P^*(0, t)} \right) + f^*(0, t)B(t, T) \\ &\quad - \frac{\sigma_r^2}{4a_r^3} (1 - 2e^{-a_r(T-t)} + e^{-2a_r(T-t)} - e^{-2a_r t} + 2e^{-a_r(T+t)} - e^{-2a_r T}) \\ &= \ln \left(\frac{P^*(0, T)}{P^*(0, t)} \right) + f^*(0, t)B(t, T) - \frac{\sigma_r^2}{4a_r^3} (1 - e^{-2a_r t}) (1 - 2e^{-a_r(T-t)} + e^{-2a_r(T-t)}) \\ &= \ln \left(\frac{P^*(0, T)}{P^*(0, t)} \right) + f^*(0, t)B(t, T) - \frac{\sigma_r^2}{4a_r} (1 - e^{-2a_r t}) \frac{1}{a_r^2} (1 - e^{-a_r(T-t)})^2 \\ &= \ln \left(\frac{P^*(0, T)}{P^*(0, t)} \right) + f^*(0, t)B(t, T) - \frac{\sigma_r^2}{4a_r} (1 - e^{-2a_r t}) B^2(t, T) \end{aligned}$$

Für $A(t, T)$ folgt daher:

$$A(t, T) = \frac{P^*(0, T)}{P^*(0, t)} e^{B(t, T)f^*(0, t) - \frac{\sigma_r^2}{4a_r}(1 - e^{-2a_r t})B^2(t, T)}$$

□

Nachdem der Preis einer Nullkuponanleihe bestimmt wurde, wird zu der Definition einer europäischen Call- und Put-Option auf eine Nullkuponanleihe und anschließend zu den europäischen Payer- und Receiver Swaption übergegangen. Diese Definitionen werden aus [8] übernommen und ohne Beweis dargestellt.

Definition 6.7 Europäische Call- und Put-Option auf eine Nullkuponanleihe

Der Preis einer Europäischen Call- und Put-Option $ZBC(t, T_1, T_2, K)$ und $ZBP(t, T_1, T_2, K)$ zu Zeit t mit Dauer T_1 und Strikepreis K auf die Nullkuponanleihe $P(T_1, T_2)$ mit Dauer T_2 ist durch folgende Formel gegeben:

$$ZBC(t, T_1, T_2, K) = P(t, T_2)\Phi(h) - KP(t, T_1)\Phi(h - \sigma_p) \quad (6.8)$$

$$ZBP(t, T_1, T_2, K) = KP(t, T_1)\Phi(-h + \sigma_p) - P(t, T_2)\Phi(-h) \quad (6.9)$$

mit

$$\sigma_p = \sigma_r \sqrt{\frac{1 - e^{-2a_r(T_1-t)}}{2a_r}} B(T_1, T_2)$$

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \left(\frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)K} \right) + \frac{\sigma_p}{2}$$

Definition 6.8 *Europäischen Payer- und Receiver Swaption*

Sei PS^{HW} eine Europäischen Payer Swaption mit Strikepreis K , Optionsdauer T_α und Nominalwert N , welche dem Besitzer das Recht gibt zu Zeitpunkt T_α einen Zinsswap mit Auszahlungzeitpunkten $T_i \in \mathcal{T} = \{T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta\}$, zu welchen der Besitzer die fixierte Rate K zahlt und den variablen Euribor erhält, einzutreten.

Weiters seien $\tau_i = \tau(T_{i-1}, T_i)$ gemäß Tageszählkonvention gegeben,

$$c_i = \begin{cases} K\tau_i & \text{für } i = \alpha + 1, \dots, \beta - 1 \\ 1 + K\tau_i & \text{für } i = \beta \end{cases}$$

r^* der Wert der Spot Rate zu Zeitpunkt T_α sodass

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i A(T_\alpha, T_i) e^{-B(T_\alpha, T_i)r^*} = 1$$

erfüllt ist und

$$X_i = A(T_\alpha, T_i) e^{-B(T_\alpha, T_i)r^*}.$$

Der Preis der Payer Swaption zu Zeitpunkt $t < T_\alpha$ ist dann gegeben durch:

$$PS^{HW}(t, T_\alpha, \mathcal{T}, N, K, a_r, \sigma_r) = N \cdot \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i ZBP(t, T_\alpha, T_i, X_i) \quad (6.10)$$

Der Preis der dazugehörigen Receiver Swaption berechnet sich analog:

$$RS^{HW}(t, T_\alpha, \mathcal{T}, N, K, a_r, \sigma_r) = N \cdot \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i ZBC(t, T_\alpha, T_i, X_i) \quad (6.11)$$

Kapitel 7

Sterblichkeitsmodell

In diesem Kapitel wird ein Modell für die Überlebenswahrscheinlichkeit des Versicherungsnehmers aufgestellt. Dafür folgen wir den Überlegungen aus [19].

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum aus Definition 3.16 und sei eine x -jährige Person zu Zeitpunkt $t = 0$ mit maximal erreichbarem Höchstalter T^* betrachtet. Die zufällige Restlebenszeit der versicherten Person wird durch die Zufallsvariable τ_x beschrieben, welche dem ersten Sprung eines *Zählprozesses* $N_{x+t}(t)$ mit *Zufallsintensität* $\lambda_{x+t}(t)$ entspricht:

$$\tau_x := \min(T^*, \inf(t \in [0, T^*] : N_{x+t}(t) > 0)) \quad (7.1)$$

Ein Zählprozess $N = (N(t))_{t \geq 0}$ ist ein spezieller stochastischer Prozess, welcher die bis zum Zeitpunkt t eingetretenen Ereignisse zählt. Mit einer aufsteigenden Folge von nichtnegativen Zufallsvariablen $0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots$, welche die Eintrittszeitpunkte der Ereignisse modelliert gilt (vgl. [17] und [35]):

$$N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{S_i \leq t\}}$$

Die Anzahl der Sprünge, die pro Zeiteinheit erwartet werden, wird durch eine Intensität $\lambda(t)$ beschrieben. In diesem Fall wird $\lambda(t)$ durch eine Funktion der Zeit dargestellt und muss folgendes erfüllen (vgl. [17] und [35]):

$$\begin{aligned} \lambda(t) &> 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}^+ \\ \int_a^b \lambda(t) dt &< \infty \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Es wird angenommen, dass $N_{x+t}(t)$ ein *doppelt stochastischer Poissonprozess* (*Cox-Prozess*) mit vorhersehbarer Intensität $\lambda_{x+t}(t)$ ist. Das bedeutet, dass für einen beliebigen Pfad von $\lambda_{x+t}(t)$ der Zählprozess $N_{x+t}(t)$ zu einem *bedingten Poissonprozess mit Hazard-Prozess* $\int_0^t \lambda_{x+s}(s) ds$ wird. Es folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{x+T}(T) - N_{x+t}(t) = k \mid \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T) &= \frac{\left(\int_0^T \lambda_{x+s}(s) ds - \int_0^t \lambda_{x+s}(s) ds \right)^k}{k!} e^{-\left(\int_0^T \lambda_{x+s}(s) ds - \int_0^t \lambda_{x+s}(s) ds \right)} \\ &= \frac{\left(\int_t^T \lambda_{x+s}(s) ds \right)^k}{k!} e^{-\int_t^T \lambda_{x+s}(s) ds} \end{aligned}$$

Es werden zwei Teil-Filtrationen $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ und $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \geq 0}$ von $\mathbb{F}$ eingeführt, welche durch die folgenden zwei σ -Algebren erzeugt werden:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_t &= \sigma(\lambda_{x+s}(s) : s \leq t) \\ \mathcal{H}_t &= \sigma(\mathbb{I}_{\{\tau_x \leq s\}} : s \leq t)\end{aligned}$$

Während $\mathbb{G}$ die Entwicklung der Zufallsintensität $\lambda_{x+t}(t)$ des Zählprozesses $N_{x+t}(t)$ beschreibt und somit die Sterblichkeitsentwicklung darstellt, gibt $\mathbb{H}$ die Information wieder, ob der Versicherungsnehmer noch am Lebens ist oder nicht. Wie bereits erwähnt wird das Ableben des Versicherungsnehmer durch den ersten Sprung des Zählprozesses $N_{x+t}(t)$ repräsentiert.

Definition 7.1 Überlebenswahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit, gemessen zu Zeitpunkt t , dass eine $x+t$ -jährige Person zumindest den Zeitpunkt T überlebt ist durch $p_{x+t}(t, T | \mathcal{F}_t)$ gegeben und wird *Überlebenswahrscheinlichkeit* genannt:

$$p_{x+t}(t, T | \mathcal{F}_t) := \mathbb{P}(\tau_x > T | \mathcal{F}_t) \quad (7.2)$$

Theorem 7.2

Für die zuvor definierte Überlebenswahrscheinlichkeit gilt:

$$p_{x+t}(t, T | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T \lambda_{x+s}(s) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (7.3)$$

Beweis

Mit Hilfe der Turmeigenschaft des Erwartungswerts und aufgrund der obigen Überlegungen gilt:

$$\begin{aligned}p_{x+t}(t, T | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(\tau_x > T | \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{I}_{\{\tau_x > T\}} | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [\mathbb{I}_{\{\tau_x > T\}} | \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T] | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{P}(\tau_x > T | \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{P}(N_{x+T}(T) = 0 | \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{P}(N_{x+T}(T) - N_{x+t}(t) = 0 | \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T \lambda_{x+s}(s) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right]\end{aligned}$$

□

Als nächstes wird die Entwicklung der Sterbeintensität λ betrachtet. Wie in [19] vorgeschlagen wird einen 2-Stufen-Ansatz, basierend auf die Arbeiten von [9] und [10], verwendet. Im ersten Schritt wird die *Anfangssterbeintensität* $\lambda_{x+t}(0)$ einer $x+t$ -jährigen Person zu Zeitpunkt 0 mit Hilfe des *Standard Gompertz Modells* parametrisiert:

$$\lambda_{x+t}(0) = \frac{1}{b} e^{\frac{x+t-m}{b}} \quad (7.4)$$

Die konstanten Parameter m und b können aus der entsprechenden Sterbetafel geschätzt werden. Mehr Details zum Standard Gompertz Modell können in [7], einige Informationen zur Anwendung in Bezug auf Variable Annuities in [32] nachgelesen werden.

Obwohl das Gompertz Modell weit verbreitet ist, ist dieses Modell nicht ausreichend, wenn Sprünge in Sterberaten bestehen oder Verbesserungen durchgeführt werden sollen. Daher wird im zweiten Schritt der *Sterblichkeits-Verbesserungsfaktor* $\xi_{x+t}(t)$ eingeführt, welcher das Verhältnis der Sterbeintensität $\lambda_{x+t}(t)$ von einer $x + t$ -jährigen Person zu Zeitpunkt t zu der Sterbeintensität $\lambda_{x+t}(0)$ von einer $x + t$ -jährigen Person zu Zeitpunkt 0 beschreibt:

$$\xi_{x+t}(t) = \frac{\lambda_{x+t}(t)}{\lambda_{x+t}(0)}$$

Die Dynamiken des mit der Zeit fallenden $\xi_{x+t}(t)$ lassen sich wie die Zinsraten durch das Hull-White extended Vasiček Modell beschreiben:

$$d\xi_{x+t}(t) = k_\xi (e^{-\gamma_\xi t} - \xi_{x+t}(t)) dt + \sigma_\xi dW_\xi(t),$$

wobei k_ξ die sogenannte mean reversion, $e^{-\gamma_\xi t}$ die zeitabhängige Drift und σ_ξ die Volatilität von $\xi_{x+t}(t)$ ist.

Für die Sterbeintensität $\lambda_{x+t}(t) = \lambda_{x+t}(0) \cdot \xi_{x+t}(t)$ einer $x + t$ -jährigen Person zu Zeitpunkt t gilt daher folgendes Theorem:

Theorem 7.3 Sterbeintensität $\lambda_{x+t}(t)$

Die Dynamiken der Sterbeintensität $\lambda_{x+t}(t)$ werden durch folgende stochastische Differentialgleichung beschrieben:

$$d\lambda_{x+t}(t) = (c_1 e^{c_2 t} - c_3 \lambda_{x+t}(t)) dt + c_4 e^{c_5 t} dW_\xi(t)$$

wobei

$$c_1 := \frac{k_\xi}{b} e^{\frac{x-m}{b}}, \quad c_2 := \frac{1}{b} - \gamma_\xi, \quad c_3 := k_\xi - \frac{1}{b}, \quad c_4 := \frac{\sigma_\xi}{b} e^{\frac{x-m}{b}} \quad \text{und} \quad c_5 := \frac{1}{b}$$

Die Sterbeintensität $\lambda_{x+T}(T)$ zu Zeitpunkt T ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu_{\lambda(T)}$ und Varianz $\sigma_{\lambda(T)}^2$:

$$\mu_{\lambda(T)} := \mathbb{E}[\lambda_{x+T}(T) \mid \mathcal{F}_0] = \lambda_x(0) e^{-c_3 T} + \frac{c_1}{c_2 + c_3} (e^{c_2 T} - e^{-c_3 T})$$

$$\sigma_{\lambda(T)}^2 := \mathbb{V}[\lambda_{x+T}(T) \mid \mathcal{F}_0] = \frac{c_4^2}{2c_5 + 2c_3} (e^{2c_5 T} - e^{-2c_3 T})$$

Beweis

Es ist bekannt, dass $\xi_{x+t}(t)$ ein Itô-Prozess ist:

$$d\xi_{x+t}(t) = \underbrace{k_\xi (e^{-\gamma_\xi t} - \xi_{x+t}(t))}_{u(t)} dt + \underbrace{\sigma_\xi}_{v(t)} dW_\xi(t)$$

Daher kann die Itô-Formel aus Definition 3.32 auf die Funktion $f(t, \xi_{x+t}(t)) = \lambda_{x+t}(t) = \lambda_{x+t}(0) \cdot \xi_{x+t}(t)$ angewendet werden, um deren Dynamiken zu bekommen:

$$\begin{aligned}
\lambda_{x+t}(t) &= \left(f_t + f_x u + \frac{1}{2} f_{xx} v^2 \right) dt + f_x v dW_t \\
&= \left(\lambda_{x+t}(0) \xi_{x+t}(t) \frac{1}{b} + \lambda_{x+t}(0) \cdot (k_\xi (e^{-\gamma_\xi t} - \xi_{x+t}(t))) + 0 \right) dt + \lambda_{x+t}(0) \cdot \sigma_\xi dW_\xi(t) \\
&= \left(\lambda_{x+t}(t) \frac{1}{b} + \frac{1}{b} e^{\frac{x+t-m}{b}} k_\xi e^{-\gamma_\xi t} - \lambda_{x+t}(t) k_\xi \right) dt + \frac{1}{b} e^{\frac{x+t-m}{b}} \sigma_\xi dW_\xi(t) \\
&= \left(\frac{k_\xi}{b} e^{\frac{x-m}{b}} e^{(\frac{1}{b} - \gamma_\xi)t} - \left(k_\xi - \frac{1}{b} \right) \lambda_{x+t}(t) \right) dt + \frac{\sigma_\xi}{b} e^{\frac{x-m}{b}} e^{\frac{1}{b}t} dW_\xi(t) \\
&= (c_1 e^{c_2 t} - c_3 \lambda_{x+t}(t)) dt + c_4 e^{c_5 t} dW_\xi(t)
\end{aligned}$$

mit

$$c_1 := \frac{k_\xi}{b} e^{\frac{x-m}{b}}, \quad c_2 := \frac{1}{b} - \gamma_\xi, \quad c_3 := k_\xi - \frac{1}{b}, \quad c_4 := \frac{\sigma_\xi}{b} e^{\frac{x-m}{b}} \quad \text{und} \quad c_5 := \frac{1}{b}$$

Um den Erwartungswert und die Varianz berechnen zu können, muss die stochastische Differentialgleichung gelöst werden. Dazu wird im ersten Schritt $\widehat{\lambda_{x+t}}(t)$ definiert und $d\widehat{\lambda_{x+t}}(t)$ berechnet:

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda_{x+t}}(t) &:= e^{c_3 t} \lambda_{x+t}(t) \\
d\widehat{\lambda_{x+t}}(t) &\stackrel{\textcircled{*}^1}{=} c_3 e^{c_3 t} \lambda_{x+t}(t) dt + e^{c_3 t} d\lambda_{x+t}(t) \\
&\stackrel{\textcircled{*}^2}{=} c_3 e^{c_3 t} \lambda_{x+t}(t) dt + e^{c_3 t} \left((c_1 e^{c_2 t} - c_3 \lambda_{x+t}(t)) dt + c_4 e^{c_5 t} dW_\xi(t) \right) \\
&\stackrel{\textcircled{*}^3}{=} e^{c_3 t} (c_1 e^{c_2 t} + c_4 e^{c_5 t} dW_\xi(t))
\end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

- $\textcircled{*}^1$ Ableiten von $d\widehat{\lambda_{x+t}}(t) = d(e^{c_3 t} \lambda_{x+t}(t))$ unter Verwendung der Produktregel.
- $\textcircled{*}^2$ Einsetzen der Ursprungsgleichung für $d\lambda_{x+t}(t)$.
- $\textcircled{*}^3$ Umformen der Gleichung.

Das Integrieren dieser Gleichungen von s bis t führt zu

$$\widehat{\lambda_{x+t}}(t) = \widehat{\lambda_{x+t}}(s) + \int_s^t e^{c_3 u} c_1 e^{c_2 u} du + \int_s^t e^{c_3 u} c_4 e^{c_5 u} dW_\xi(u)$$

und somit folgt für $\lambda_{x+t}(t)$:

$$\begin{aligned}
\lambda_{x+t}(t) &\stackrel{\textcircled{*}^1}{=} e^{-c_3 t} \widehat{\lambda_{x+t}}(t) \\
&\stackrel{\textcircled{*}^2}{=} e^{-c_3 t} \left(\widehat{\lambda_{x+t}}(s) + \int_s^t e^{c_3 u} c_1 e^{c_2 u} du + \int_s^t e^{c_3 u} c_4 e^{c_5 u} dW_\xi(u) \right) \\
&\stackrel{\textcircled{*}^3}{=} e^{-c_3 t} (e^{c_3 s} \lambda_{x+t}(s)) + \int_s^t e^{-c_3(t-u)} c_1 e^{c_2 u} du + \int_s^t e^{-c_3(t-u)} c_4 e^{c_5 u} dW_\xi(u) \\
&\stackrel{\textcircled{*}^4}{=} e^{-c_3(t-s)} \lambda_{x+t}(s) + \int_s^t e^{-c_3(t-u)} c_1 e^{c_2 u} du + \int_s^t e^{-c_3(t-u)} c_4 e^{c_5 u} dW_\xi(u)
\end{aligned}$$

- ⊙¹ Umformen der obigen Definition $\widehat{\lambda_{x+t}}(t) := e^{c_3 t} \lambda_{x+t}(t)$ ergibt $\lambda_{x+t}(t) = e^{-c_3 t} \widehat{\lambda_{x+t}}(t)$
- ⊙² Einsetzen der obigen Integralgleichung für $\widehat{\lambda_{x+t}}(t)$.
- ⊙³ Einsetzen der obigen Definition $\widehat{\lambda_{x+t}}(s) := e^{c_3 s} \lambda_{x+t}(s)$ und Umformen.
- ⊙⁴ Umformen der Gleichung

Für den Erwartungswert von $\lambda_{x+T}(T)$ gilt daher:

$$\begin{aligned}
\mu_{\lambda_{x+T}(T)} &= \mathbb{E}[\lambda_{x+T}(T) | \mathcal{F}_0] \\
&= \mathbb{E} \left[e^{-c_3 T} \lambda_{x+T}(0) + \int_0^T e^{-c_3(T-u)} c_1 e^{c_2 u} du + \underbrace{\int_0^T e^{-c_3(T-u)} c_4 e^{c_5 u} dW_\xi(u)}_{=0} \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\
&\stackrel{\circledast^1}{=} e^{-c_3 T} \lambda_{x+T}(0) + \int_0^T e^{-c_3(T-u)} c_1 e^{c_2 u} du + \underbrace{\mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-c_3(T-u)} c_4 e^{c_5 u} dW_\xi(u) \middle| \mathcal{F}_0 \right]}_{=0} \\
&\stackrel{\circledast^2}{=} e^{-c_3 T} \lambda_{x+T}(0) + \int_0^T e^{-c_3(T-u)} c_1 e^{c_2 u} du \\
&= e^{-c_3 T} \lambda_{x+T}(0) + \int_0^T c_1 e^{(c_2+c_3)u - c_3 T} du \\
&= e^{-c_3 T} \lambda_{x+T}(0) + \left[c_1 e^{(c_2+c_3)u - c_3 T} \cdot \frac{1}{c_2 + c_3} \right]_0^T \\
&= e^{-c_3 T} \lambda_{x+T}(0) + \frac{c_1}{c_2 + c_3} (e^{c_2 T} - e^{-c_3 T})
\end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

- ⊙¹ Herausziehen der deterministischen Funktionen aus dem Erwartungswert.
- ⊙² Nach der (1)-ten Eigenschaft der Itô-Integrale, siehe Gleichung (3.2), gilt:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t f(s) dW_s \middle| \mathcal{F}_0 \right] = 0$$

Die Varianz von $\lambda_{x+T}(T)$ erfüllt:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\lambda_{x+T}(T)}^2 &= \mathbb{V}[\lambda_{x+T}(T) | \mathcal{F}_0] \\
&\stackrel{\circledast^1}{=} c_4^2 \mathbb{V} \left[\int_0^T e^{-c_3(T-u)} e^{c_5 u} dW_\xi(u) \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\
&\stackrel{\circledast^2}{=} c_4^2 \left(\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T e^{-c_3(T-u)} e^{c_5 u} dW_\xi(u) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] - \underbrace{\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T e^{-c_3(T-u)} e^{c_5 u} dW_\xi(u) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right]}_{=0} \right) \\
&\stackrel{\circledast^3}{=} c_4^2 \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T e^{-c_3(T-u)} e^{c_5 u} dW_\xi(u) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\
&\stackrel{\circledast^4}{=} c_4^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T (e^{-c_3(T-u)} e^{c_5 u})^2 du \middle| \mathcal{F}_0 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\odot^5}{=} c_4^2 \int_0^T e^{-2c_3 T} e^{2u(c_5+c_3)} du \\
&= c_4^2 e^{-2c_3 T} \left[e^{2u(c_5+c_3)} \frac{1}{2(c_5+c_3)} \right]_0^T \\
&= c_4^2 e^{-2c_3 T} \frac{1}{2(c_5+c_3)} (e^{2T(c_5+c_3)} - 1) \\
&= \frac{c_4^2}{2(c_5+c_3)} (e^{2c_5 T} - e^{-2c_3 T})
\end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

$$\odot^1 \quad \mathbb{V}[aX + b] = a^2 \mathbb{V}[X]$$

$$\odot^2 \quad \mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$\odot^3 \quad \text{Anwenden der Eigenschaft (3.2): } \mathbb{E} \left[\int_0^t f dW_s \middle| \mathcal{F}_0 \right] = 0$$

$$\odot^4 \quad \text{Anwenden der Itô-Isometrie aus Gleichung (3.4):}$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_s^t f(u) dW_u \right)^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] = \mathbb{E} \left[\int_s^t (f(u))^2 du \middle| \mathcal{F}_0 \right]$$

$$\odot^5 \quad \text{Herausziehen der deterministischen Funktion aus dem Erwartungswert.}$$

□

Ein Nachteil dieses Modells ist, dass die Sterbeintensität $\lambda_{x+T}(T)$ mit positiver Wahrscheinlichkeit negativ werden kann:

$$\mathbb{P}(\lambda_{x+T}(T) < 0) = \mathbb{P} \left(\frac{\lambda_{x+T}(T) - \mu_{\lambda(T)}}{\sigma_{\lambda(T)}^2} < -\frac{\mu_{\lambda(T)}}{\sigma_{\lambda(T)}^2} \right) = \Phi \left(-\frac{\mu_{\lambda(T)}}{\sigma_{\lambda(T)}^2} \right)$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist jedoch gering und daher vernachlässigbar.

Theorem 7.4 Affines Sterblichkeitsmodell

Die Überlebenswahrscheinlichkeiten können aufgrund des affinen Modells der Sterbeintensität $\lambda_{x+t}(t)$ als geschlossene Formel ausgedrückt werden:

$$p_{x+t}(t, T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T \lambda_{x+s}(s) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] = e^{C_\lambda(t, T) - D_\lambda(t, T) \lambda_{x+t}(t)} \quad (7.5)$$

wobei $C_\lambda(t, T)$ und $D_\lambda(t, T)$ folgendermaßen gegeben sind:

$$\begin{aligned}
D_\lambda(t, T) &= \frac{1 - e^{-c_3(T-t)}}{c_3} \\
C_\lambda(t, T) &= \frac{c_1}{c_2 c_3} (e^{c_2 t} - e^{c_2 T}) - \frac{c_1}{c_3(c_2 + c_3)} (e^{c_2 t - c_3(T-t)} - e^{c_2 T}) - \frac{c_4^2}{4c_3^2 c_5} (e^{2c_5 t} - e^{2c_5 T}) \\
&\quad + \frac{c_4^2}{c_3^2} \frac{1}{2c_5 + c_3} (e^{2c_5 t - c_3(T-t)} - e^{2c_5 T}) - \frac{c_4^2}{4c_3^2(c_3 + c_5)} (e^{2c_5 t - 2c_3(T-t)} - e^{2c_5 T})
\end{aligned}$$

Beweis

Es werden die in Kapitel 6.2 beschriebenen Überlegungen angewendet. Ausgehend von den Dynamiken der Sterbeintensität $\lambda_{x+t}(t)$:

$$d\lambda_{x+t}(t) = \underbrace{(c_1 e^{c_2 t} - c_3 \lambda_{x+t}(t))}_{\mu(t, \lambda) = \eta(t) + \zeta(t)\lambda} dt + \underbrace{c_4 e^{c_5 t}}_{\sigma(t, \lambda) = \sqrt{\gamma(t)\lambda + \delta(t)}} dW_\xi(t)$$

werden die deterministischen Funktionen wie folgt gewählt:

$$\begin{cases} \zeta(t) &= -c_3 \\ \eta(t) &= c_1 e^{c_2 t} \\ \gamma(t) &= 0 \\ \delta(t) &= (c_4 e^{c_5 t})^2 \end{cases}$$

Die Funktionen $C_\lambda(t, T)$ und $D_\lambda(t, T)$ lösen folgende zwei Differentialgleichungen mit Anfangswertbedingung:

$$\begin{cases} \frac{\partial C_\lambda(t, T)}{\partial t} - \eta(t) D_\lambda(t, T) + \frac{1}{2} \delta(t) D_\lambda^2(t, T) = 0 \\ C_\lambda(T, T) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial D_\lambda(t, T)}{\partial t} + \zeta(t) D_\lambda(t, T) - \frac{1}{2} \gamma(t) D_\lambda^2(t, T) + 1 = 0 \\ D_\lambda(T, T) = 0 \end{cases}$$

beziehungsweise

$$\begin{cases} \frac{\partial C_\lambda(t, T)}{\partial t} - c_1 e^{c_2 t} D_\lambda(t, T) + \frac{1}{2} (c_4 e^{c_5 t})^2 D_\lambda^2(t, T) = 0 \\ C_\lambda(T, T) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial D_\lambda(t, T)}{\partial t} - c_3 D_\lambda(t, T) + 1 = 0 \\ D_\lambda(T, T) = 0 \end{cases}$$

Die Lösung der zweiten Differentialgleichung wird analog zu Kapitel 6.2 berechnet und lautet:

$$D_\lambda(t, T) = \frac{1 - e^{-c_3(T-t)}}{c_3}$$

Diese Lösung wird danach in die erste Differentialgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_\lambda(t, T)}{\partial t} &= c_1 e^{c_2 t} D_\lambda(t, T) - \frac{1}{2} (c_4 e^{c_5 t})^2 D_\lambda^2(t, T) \\ &= c_1 e^{c_2 t} \left(\frac{1 - e^{-c_3(T-t)}}{c_3} \right) - \frac{1}{2} (c_4 e^{c_5 t})^2 \left(\frac{1 - e^{-c_3(T-t)}}{c_3} \right)^2 \\ &= \frac{c_1}{c_3} e^{c_2 t} - \frac{c_1}{c_3} e^{c_2 t - c_3(T-t)} - \frac{c_4^2}{2c_3^2} e^{2c_5 t} (1 - 2e^{-c_3(T-t)} + e^{-2c_3(T-t)}) \end{aligned}$$

$$= \frac{c_1}{c_3} e^{c_2 t} - \frac{c_1}{c_3} e^{c_2 t - c_3(T-t)} - \frac{c_4^2}{2c_3^2} e^{2c_5 t} + \frac{c_4^2}{c_3^2} e^{2c_5 t - c_3(T-t)} - \frac{c_4^2}{2c_3^2} e^{2c_5 t - 2c_3(T-t)}$$

Das Integrieren dieser Gleichung führt zu:

$$\begin{aligned} \int_t^T \frac{\partial C_\lambda(s, T)}{\partial s} ds &= \int_t^T \frac{c_1}{c_3} e^{c_2 s} - \frac{c_1}{c_3} e^{c_2 s - c_3(T-s)} - \frac{c_4^2}{2c_3^2} e^{2c_5 s} + \frac{c_4^2}{c_3^2} e^{2c_5 s - c_3(T-s)} - \frac{c_4^2}{2c_3^2} e^{2c_5 s - 2c_3(T-s)} ds \\ \underbrace{C_\lambda(T, T)}_{=0} - C_\lambda(t, T) &= \int_t^T \frac{c_1}{c_3} e^{c_2 s} ds - \int_t^T \frac{c_1}{c_3} e^{c_2 s - c_3(T-s)} ds - \int_t^T \frac{c_4^2}{2c_3^2} e^{2c_5 s} ds \\ &\quad + \int_t^T \frac{c_4^2}{c_3^2} e^{2c_5 s - c_3(T-s)} ds - \int_t^T \frac{c_4^2}{2c_3^2} e^{2c_5 s - 2c_3(T-s)} ds \\ C_\lambda(t, T) &= - \underbrace{\int_t^T \frac{c_1}{c_3} e^{c_2 s} ds}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\int_t^T \frac{c_1}{c_3} e^{c_2 s - c_3(T-s)} ds}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\int_t^T \frac{c_4^2}{2c_3^2} e^{2c_5 s} ds}_{\textcircled{3}} \\ &\quad - \underbrace{\int_t^T \frac{c_4^2}{c_3^2} e^{2c_5 s - c_3(T-s)} ds}_{\textcircled{4}} + \underbrace{\int_t^T \frac{c_4^2}{2c_3^2} e^{2c_5 s - 2c_3(T-s)} ds}_{\textcircled{5}} \end{aligned}$$

Um die Rechnungen übersichtlich zu gestalten, unterteilen wir diesen Ausdruck in fünf Teile und berechnen diese separat:

$$\textcircled{1} = \int_t^T \frac{c_1}{c_3} e^{c_2 s} ds = \left[\frac{c_1}{c_2 c_3} e^{c_2 s} \right]_t^T = \frac{c_1}{c_2 c_3} (e^{c_2 T} - e^{c_2 t})$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &= \int_t^T \frac{c_1}{c_3} e^{c_2 s - c_3(T-s)} ds = \int_t^T \frac{c_1}{c_3} e^{s(c_2 + c_3) - c_3 T} ds = \left[\frac{c_1}{c_3 (c_2 + c_3)} e^{s(c_2 + c_3) - c_3 T} \right]_t^T \\ &= \frac{c_1}{c_3 (c_2 + c_3)} (e^{c_2 T} - e^{t(c_2 + c_3) - c_3 T}) = \frac{c_1}{c_3 (c_2 + c_3)} (e^{c_2 T} - e^{c_2 t - c_3(T-t)}) \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} = \int_t^T \frac{c_4^2}{2c_3^2} e^{2c_5 s} ds = \left[\frac{c_4^2}{4c_3^2 c_5} e^{2c_5 s} \right]_t^T = \frac{c_4^2}{4c_3^2 c_5} (e^{2c_5 T} - e^{2c_5 t})$$

$$\textcircled{4} = \int_t^T \frac{c_4^2}{c_3^2} e^{2c_5 s - c_3(T-s)} ds = \int_t^T \frac{c_4^2}{c_3^2} e^{s(2c_5 + c_3) - c_3 T} ds = \left[\frac{c_4^2}{c_3^2 (2c_5 + c_3)} e^{s(2c_5 + c_3) - c_3 T} \right]_t^T =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c_4^2}{c_3^2(2c_5 + c_3)} (e^{2c_5T} - e^{t(2c_5+c_3)-c_3T}) = \frac{c_4^2}{c_3^2(2c_5 + c_3)} (e^{2c_5T} - e^{2c_5t-c_3(T-t)}) \\
\textcircled{5} &= \int_t^T \frac{c_4^2}{2c_3^2} e^{2c_5s-2c_3(T-s)} ds = \int_t^T \frac{c_4^2}{2c_3^2} e^{2s(c_5+c_3)-c_3T} ds = \left[\frac{c_4^2}{4c_3^2(c_5 + c_3)} e^{s(c_5+c_3)-c_3T} \right]_t^T \\
&= \frac{c_4^2}{4c_3^2(c_5 + c_3)} (e^{2c_5T} - e^{2t(c_5+c_3)-2c_3T}) = \frac{c_4^2}{4c_3^2(c_5 + c_3)} (e^{2c_5T} - e^{2c_5t-2c_3(T-t)})
\end{aligned}$$

Setzen wir alle fünf Teile wieder zusammen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
C_\lambda(t, T) &= -\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} - \textcircled{4} + \textcircled{5} \\
&= -\frac{c_1}{c_2c_3} (e^{c_2T} - e^{c_2t}) + \frac{c_1}{c_3(c_2 + c_3)} (e^{c_2T} - e^{c_2t-c_3(T-t)}) + \frac{c_4^2}{4c_3^2c_5} (e^{2c_5T} - e^{2c_5t}) \\
&\quad - \frac{c_4^2}{c_3^2(2c_5 + c_3)} (e^{2c_5T} - e^{2c_5t-c_3(T-t)}) + \frac{c_4^2}{4c_3^2(c_5 + c_3)} (e^{2c_5T} - e^{2c_5t-2c_3(T-t)}) \\
&= \frac{c_1}{c_2c_3} (e^{c_2t} - e^{c_2T}) - \frac{c_1}{c_3(c_2 + c_3)} (e^{c_2t-c_3(T-t)} - e^{c_2T}) - \frac{c_4^2}{4c_3^2c_5} (e^{2c_5t} - e^{2c_5T}) \\
&\quad + \frac{c_4^2}{c_3^2(2c_5 + c_3)} (e^{2c_5t-c_3(T-t)} - e^{2c_5T}) - \frac{c_4^2}{4c_3^2(c_5 + c_3)} (e^{2c_5t-2c_3(T-t)} - e^{2c_5T})
\end{aligned}$$

□

Kapitel 8

Die geschlossene Formel für GMABs mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung

In diesem Kapitel soll eine geschlossene Formel gefunden werden, mit welcher der faire Preis der GMABs mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung aus Kapitel 2.2 berechnet werden kann. Dazu wird einerseits ein Modell für den Finanzmarkt, um die Performance des Anlageportfolios zu modellieren, und andererseits ein Sterblichkeitsmodell, welches die Überlebenswahrscheinlichkeit des Versicherungsnehmers widerspiegelt, benötigt.

Für den Finanzmarkt wird eine Modellkombination aus Black-Scholes Modell aus Kapitel 4 für die Aktienpreise und Hull-White Modell aus Kapitel 6 für Zinsentwicklung gewählt, für das Sterblichkeitsmodell wird das in Kapitel 7 vorgestellte Modell verwendet. Bei der Herleitung der geschlossenen Formel folgen wir [19]. Zuvor werden jedoch sowohl die verschiedenen Modelle, als auch das Versicherungsprodukt nochmals kurz zusammengefasst:

Black-Scholes Modell aus Kapitel 4:

Das Bankkonto B wird durch die Differentialgleichung

$$dB(t) = r(t)B(t)dt \quad \text{mit } B(0) = 1$$

beschrieben. Der Prozess $r(t)$ stellt die Zinsrate dar. Die Lösung ist durch

$$B(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}$$

gegeben. Mit dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ ist der Aktienprozess S durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = r(t)S(t)dt + \sigma_S(t)S(t)dW_S^{\mathbb{Q}}(t) \quad \text{mit } S(0) = 1$$

mit Lösung

$$S(t) = S(0) \cdot \exp \left(\int_0^t \sigma_S(s)dW_S^{\mathbb{Q}}(s) + \int_0^t \left(r(s) - \frac{1}{2}\sigma_S^2(s) \right) ds \right)$$

gegeben. Dabei ist $\sigma_S(s)$ die Aktienvolatilität und $W_S^{\mathbb{Q}}$ die Brownsche Bewegung bezüglich der Aktie.

Der Log-Preis der Aktie $Y = \ln(S)$ wird durch folgende Dynamiken beschrieben:

$$dY(t) = \left(r(t) - \frac{1}{2}\sigma_S^2(t) \right) + \sigma_S(t)dW_S^{\mathbb{Q}}(t) \quad \text{mit } Y(0) = 0$$

Hull-White Modell aus Kapitel 6:

Die $\mathbb{Q}$ -Dynamiken des Zinsprozesses r sind im Hull-White Modell folgendermaßen dargestellt:

$$r(t) = \phi(t) + x(t) \quad \text{mit } r(0) = r_0,$$

wobei

$$\begin{aligned} \phi(t) &= f(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r t})^2 \\ dx(t) &= -a_r x(t)dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \quad \text{mit } x(0) = 0 \end{aligned}$$

Die Parameter a_r und σ_r sind zwei positive Konstanten, $W_r^{\mathbb{Q}}$ die Brownsche Bewegung bezüglich des Zinsprozesses und $f(0, t) = -\frac{\partial P(0, t)}{\partial t}$ die Instantaneous Forward Interest Rate mit Nullkuponanleihe $P(0, t)$. Für die Korrelation zwischen Aktie und Zins ρ_{Sr} gilt:

$$dW_S^{\mathbb{Q}}(t)dW_r^{\mathbb{Q}}(t) = \rho_{Sr}dt$$

Sterblichkeitsmodell aus Kapitel 7:

Die Überlebenswahrscheinlichkeiten werden mit Sterbeintensität $\lambda_{x+t}(t)$ in folgender Formel ausgedrückt:

$$p_{x+t}(t, T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T \lambda_{x+s}(s)ds} \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{C_\lambda(t, T) - D_\lambda(t, T)\lambda_{x+t}(t)}$$

wobei $C_\lambda(t, T)$ und $D_\lambda(t, T)$ folgendermaßen gegeben sind:

$$\begin{aligned} D_\lambda(t, T) &= \frac{1 - e^{-c_3(T-t)}}{c_3} \\ C_\lambda(t, T) &= \frac{c_1}{c_2 c_3} (e^{c_2 t} - e^{c_2 T}) - \frac{c_1}{c_3(c_2 + c_3)} (e^{c_2 t - c_3(T-t)} - e^{c_2 T}) - \frac{c_4^2}{4c_3^2 c_5} (e^{2c_5 t} - e^{2c_5 T}) \\ &\quad + \frac{c_4^2}{c_3^2} \frac{1}{2c_5 + c_3} (e^{2c_5 t - c_3(T-t)} - e^{2c_5 T}) - \frac{c_4^2}{4c_3^2(c_3 + c_5)} (e^{2c_5 t - 2c_3(T-t)} - e^{2c_5 T}) \end{aligned}$$

mit

$$c_1 := \frac{k_\xi}{b} e^{\frac{x-m}{b}}, \quad c_2 := \frac{1}{b} - \gamma_\xi, \quad c_3 := k_\xi - \frac{1}{b}, \quad c_4 := \frac{\sigma_\xi}{b} e^{\frac{x-m}{b}} \quad \text{und} \quad c_5 := \frac{1}{b}$$

GMAB mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung aus Kapitel 2:

Wie in Kapitel 2.2 vorgestellt, werden in der vorliegenden Arbeit GMABs mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung betrachtet. Bei diesem fondsgebundenen Versicherungsprodukt mit T -jähriger Laufzeit zahlt der x -jährige Versicherungsnehmer zu Vertragsbeginn $t = 0$ eine Sparprämie P , welche vom Versicherer in das Anlageportfolio A investiert wird. Dieses besteht aus einem vom Versicherungsnehmer ausgewählten Investmentfonds S . Zusätzlich garantiert der Versicherer dem Versicherungsnehmer eine Mindestverzinsung der eingezahlten Sparprämie. Dazu wird die Sparprämie mit der zu Vertragsbeginn fixierten Zinsrate δ verzinst. Der Versicherungsnehmer bekommt nun sowohl im Er- als auch im Ablebensfall das Maximum von Fondsguthaben und Garantie ausbezahlt:

$$V_T = \max(A_T, Pe^{\delta T})\mathbb{I}_{\{T-1 < \tau\}} + \sum_{t=1}^{T-1} \max(A_t, Pe^{\delta t})\mathbb{I}_{\{t-1 < \tau \leq t\}}$$

Dabei steht τ für die Restlebenszeit des Versicherungsnehmers zu Vertragsbeginn und es sei $t, T \in \mathbb{N}$ mit $t \leq T$.

Theorem 8.1 Die geschlossene Formel für GMABs mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung

Der faire Preis eines GMABs mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung ist mit

- Sparprämie P ,
- Vertragslaufzeit T und
- garantierter Zinsrate δ

für einen x -jährigen Versicherungsnehmer durch folgende geschlossene Formel gegeben:

$$\begin{aligned} V(0) = & P \cdot \left[\Phi \left(\frac{\mu_{Y(T)} - \delta T}{\sigma_{Y(T)}} \right) + e^{\delta T - \mu_{Y(T)} + \frac{1}{2}\sigma_{Y(T)}^2} \Phi \left(\frac{\delta T + \sigma_{Y(T)}^2 - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} \right) \right] p_x(0, T-1) \\ & + P \cdot \sum_{t=1}^{T-1} \left[\Phi \left(\frac{\mu_{Y(t)} - \delta t}{\sigma_{Y(t)}} \right) + e^{\delta t - \mu_{Y(t)} + \frac{1}{2}\sigma_{Y(t)}^2} \Phi \left(\frac{\delta t + \sigma_{Y(t)}^2 - \mu_{Y(t)}}{\sigma_{Y(t)}} \right) \right] (p_x(0, t-1) - p_x(0, t)) \end{aligned} \quad (8.1)$$

wobei $\sigma_{Y(T)}^2$ und $\mu_{Y(T)}$ den Erwartungswert und die Varianz von $Y(T)$ (siehe Definition 4.16) unter Aktienmaß $\mathbb{Q}^S$ darstellen. Für die Berechnungen wird von einer konstanten Aktienvolatilität σ_S ausgegangen, daher haben $\sigma_{Y(T)}^2$ und $\mu_{Y(T)}$ folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \mu_{Y(T)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T)|\mathcal{F}_0] \\ &= -\ln P(0, T) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) + \\ &\quad + \frac{\sigma_S \sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \left(T - \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) \right) + \frac{1}{2} \sigma_S^2 T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{Y(T)}^2 &= \mathbb{V}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T)|\mathcal{F}_0] \\
&= \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) + \\
&\quad + \frac{2\sigma_S \sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \left(T - \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) \right) + \sigma_S^2 T
\end{aligned}$$

mit

- dem Preis einer Nullkuponanleihe $P(0, T)$ mit Laufzeit T ,
- den Parametern a_r und σ_r des Hull-White Zinsmodells,
- der Volatilität der Aktie σ_S und
- der Korrelation ρ_{Sr} zwischen Aktie und Zins.

Für die Überlebenswahrscheinlichkeiten $p_x(0, T)$ gilt:

$$p_x(0, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T \lambda_{x+s}(s) ds} \right] = e^{C_\lambda(0, T) - D_\lambda(0, T) \lambda_x(0)}$$

wobei $C_\lambda(0, T)$ und $D_\lambda(0, T)$ folgendermaßen gegeben sind:

$$\begin{aligned}
D_\lambda(0, T) &= \frac{1 - e^{-c_3 T}}{c_3} \\
C_\lambda(0, T) &= \frac{c_1}{c_2 c_3} (1 - e^{c_2 T}) - \frac{c_1}{c_3 (c_2 + c_3)} (e^{-c_3 T} - e^{c_2 T}) - \frac{c_4^2}{4c_3^2 c_5} (1 - e^{2c_5 T}) \\
&\quad + \frac{c_4^2}{c_3^2} \frac{1}{2c_5 + c_3} (e^{-c_3 T} - e^{2c_5 T}) - \frac{c_4^2}{4c_3^2 (c_3 + c_5)} (e^{-2c_3 T} - e^{2c_5 T})
\end{aligned}$$

mit

$$c_1 := \frac{k_\xi}{b} e^{\frac{x-m}{b}}, \quad c_2 := \frac{1}{b} - \gamma_\xi, \quad c_3 := k_\xi - \frac{1}{b}, \quad c_4 := \frac{\sigma_\xi}{b} e^{\frac{x-m}{b}} \quad \text{und} \quad c_5 := \frac{1}{b}$$

und

$$\lambda_x(0) := \frac{1}{b} e^{\frac{x-m}{b}}$$

Um Theorem 8.1 beweisen zu können, müssen zuerst einerseits das Finanzmarktmodell unter dem Aktienmaß $\mathbb{Q}^S$ dargestellt und andererseits der Erwartungswert und die Varianz des Zinsprozesses r und der Log-Darstellung der Aktie $Y = \ln(S)$ unter diesem Maß berechnet werden. Für diese Vorbereitungen, welche in Kapitel 8.1 durchgeführt werden, folgen wir [8] und [19]. Mit Hilfe dieser Ergebnisse wird anschließend der Beweis in Kapitel 8.2 durchgeführt. Dabei folgen wir abermals [19].

8.1 Das Finanzmarktmodell unter dem Aktienmaß $\mathbb{Q}^S$

Da die Sparprämie P zu Vertragsabschluss zu 100% in die Aktie $S(t)$ investiert wird, ist der Anfangswert des Anlageportfolios A genau $A(0) = P$. Die Veränderung dieses Kontos hängt ausschließlich von den Änderungen der Aktie ab:

$$\begin{aligned} A(t) &= P \cdot S(t) \\ \Leftrightarrow dA(t) &= P \cdot dS(t) \\ dA(t) &= P \cdot dS(t) \cdot \frac{S(t)}{S(t)} \\ dA(t) &= A(t) \cdot \frac{dS(t)}{S(t)} \\ \frac{dA(t)}{A(t)} &= \frac{dS(t)}{S(t)} \end{aligned}$$

Die Aktie S wird nun als Numéraire verwendet, damit der Maßwechsel zum Aktienmaß $\mathbb{Q}^S$ durchgeführt werden kann.

Das neue Maß $\mathbb{Q}^S$ ist durch folgende Radon-Nikodym Dichte gegeben [19, 14]:

$$\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}} = \frac{\frac{S(T)}{B(T)}}{\frac{S(0)}{B(0)}} = \frac{S_0 e^{\int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}}(u) + \int_0^T (r(u) - \frac{1}{2} \sigma_S^2(u)) du}}{e^{\int_0^T r(u) du} \frac{S_0}{1}} = \exp \left(\int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}}(u) - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_S^2(u) du \right)$$

Unter dem neuen Maß sind die zwei Brownsche Bewegungen $W_r^{\mathbb{Q}^S}$ und $W_S^{\mathbb{Q}^S}$ folgendermaßen bestimmt:

$$\begin{aligned} dW_r^{\mathbb{Q}^S} &= dW_r^{\mathbb{Q}} - \rho_{Sr} \sigma_S(t) dt \\ dW_S^{\mathbb{Q}^S} &= dW_S^{\mathbb{Q}} - \sigma_S(t) dt \end{aligned}$$

Welche Dynamiken haben der Zinsprozess $r(t)$ und die Log-Aktie $Y(t)$ unter dem neuen Maß?

Um diese Frage zu beantworten sei vorerst nur $x(t)$ anstatt von $r(t) = \phi(t) + x(t)$ betrachtet. Durch das Einsetzen der obigen Ausdrücke der Brownschen Bewegungen in die Ursprungsgleichung von $dx(t)$ und $dY(t)$ ergeben sich folgende Dynamiken für x und Y unter dem Maß $\mathbb{Q}^S$:

$$\begin{aligned} dx(t) &= -a_r x(t) dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \\ &= -a_r x(t) dt + \sigma_r \left(dW_r^{\mathbb{Q}^S}(t) + \rho_{Sr} \sigma_S(t) dt \right) \\ &= (-a_r x(t) + \sigma_r \sigma_S(t) \rho_{Sr}) dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}^S}(t) \\ dY(t) &= \left(r(t) - \frac{1}{2} \sigma_S^2(t) \right) dt + \sigma_S(t) dW_S^{\mathbb{Q}}(t) \\ &= \left(r(t) - \frac{1}{2} \sigma_S^2(t) \right) dt + \sigma_S(t) \left(dW_S^{\mathbb{Q}^S}(t) + \sigma_S(t) dt \right) \\ &= \left(r(t) + \frac{1}{2} \sigma_S^2(t) \right) dt + \sigma_S(t) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(t) \end{aligned}$$

Die erste Gleichung wird mit Hilfe der bereits bekannten Methode zum Lösen von Differentialgleichungen gelöst:

$$\begin{aligned}\widehat{x}(t) &:= e^{a_r t} x(t) \\ d\widehat{x}(t) &\stackrel{\circledast^1}{=} a_r e^{a_r t} x(t) dt + e^{a_r t} dx(t) \\ &\stackrel{\circledast^2}{=} a_r e^{a_r t} x(t) dt + e^{a_r t} \left((-a_r x(t) + \sigma_r \sigma_S(t) \rho_{Sr}) dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}^S}(t) \right) \\ &\stackrel{\circledast^3}{=} e^{a_r t} \left(\sigma_r \sigma_S(t) \rho_{Sr} dt + \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}^S}(t) \right)\end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

- $\circledast^1$ Ableiten von $d\widehat{x}(t) = d(e^{a_r t} x(t))$ unter Verwendung der Produktregel.
- $\circledast^2$ Einsetzen der Ursprungsgleichung für $dx(t)$.
- $\circledast^3$ Umformen der Gleichung.

Das Integrieren dieser Gleichungen von 0 bis t ergibt

$$\widehat{x}(t) = \widehat{x}(0) + \int_0^t e^{a_r u} \sigma_r \sigma_S(u) \rho_{Sr} du + \int_0^t e^{a_r u} \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u)$$

Da $x(0) = 0$ und somit auch $\widehat{x}(0) = e^{a_r \cdot 0} x(0) = 0$ folgt für $x(T)$:

$$\begin{aligned}x(T) &\stackrel{\circledcirc^1}{=} e^{-a_r T} \widehat{x}(T) \\ &\stackrel{\circledcirc^2}{=} e^{-a_r T} \left(\int_0^T e^{a_r u} \sigma_r \sigma_S(u) \rho_{Sr} du + \int_0^T e^{a_r u} \sigma_r dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \right) \\ &\stackrel{\circledcirc^3}{=} \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T e^{-a_r (T-u)} \sigma_S(u) du + \sigma_r \int_0^T e^{-a_r (T-u)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u)\end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

- $\circledcirc^1$ Umformen der obigen Definition $\widehat{x}(t) := e^{a_r t} x(t)$ ergibt $x(t) = e^{-a_r t} \widehat{x}(t)$
- $\circledcirc^2$ Einsetzen der obigen Integralgleichung für $\widehat{x}(t)$.
- $\circledcirc^3$ Umformen der Gleichung

Schließlich folgt für $r(T)$:

$$\begin{aligned}r(T) &= \phi(T) + x(T) \\ &= f(0, T) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r T})^2 + \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T e^{-a_r (T-u)} \sigma_S(u) du + \sigma_r \int_0^T e^{-a_r (T-u)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u)\end{aligned}$$

Um die zweite Gleichung zu lösen, wird diese ebenfalls von 0 bis T integriert:

$$\begin{aligned}Y(T) &= Y(0) + \int_0^T \left(r(u) + \frac{1}{2} \sigma_S^2(u) \right) du + \int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) \\ &= Y(0) + \int_0^T (\phi(u) + x(u)) du + \int_0^T \frac{1}{2} \sigma_S^2(u) du + \int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u)\end{aligned}$$

Es erfolgt eine separate Berechnung von $\int_0^T x(u)du$ und $\int_0^T \phi(u)du$, damit die Berechnung übersichtlich bleibt:

$$\begin{aligned}
\int_0^T x(u)du &= \int_0^T \left(\sigma_r \rho_{Sr} \int_0^u e^{-a_r(u-z)} \sigma_S(z) dz + \sigma_r \int_0^u e^{-a_r(u-z)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(z) \right) du \\
&= \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T \int_0^u \sigma_S(z) e^{-a_r(u-z)} dz du + \sigma_r \int_0^T \int_0^u e^{-a_r(u-z)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(z) du \\
&\stackrel{\circledast}{=} \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T \sigma_S(z) \int_z^T e^{-a_r(u-z)} du dz + \sigma_r \int_0^T \int_z^T e^{-a_r(u-z)} du dW_r^{\mathbb{Q}^S}(z) \\
&= \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T \sigma_S(z) \left[-\frac{1}{a_r} e^{-a_r(u-z)} \right]_z^T dz + \sigma_r \int_0^T \left[-\frac{1}{a_r} e^{-a_r(u-z)} \right]_z^T dW_r^{\mathbb{Q}^S}(z) \\
&= \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T \sigma_S(z) \left(-\frac{1}{a_r} e^{-a_r(T-z)} + \frac{1}{a_r} \right) dz + \\
&\quad + \sigma_r \int_0^T \left(-\frac{1}{a_r} e^{-a_r(T-z)} + \frac{1}{a_r} \right) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(z) \\
&= \frac{\sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-z)}) \sigma_S(z) dz + \frac{\sigma_r}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-z)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(z) \\
&= \frac{\sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u) du + \frac{\sigma_r}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u)
\end{aligned}$$

Bei der Vertauschung der Integrale in Schritt $\circledast$ ändern sich die Intervallgrenzen von $0 \leq u \leq T$ und $0 \leq z \leq u$ auf $0 \leq z \leq T$ und $z \leq u \leq T$. In den nachfolgenden Schritten werden die üblichen Integrationsregeln verwendet. Für das zweite Integral folgt:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \phi(u)du &= \int_0^T f(0, u) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r u})^2 du \\
&\stackrel{\circledcirc}{=} \int_0^T -\frac{\partial \ln P(0, u)}{\partial u} du + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \int_0^T (1 - 2e^{-a_r u} + e^{-2a_r u}) du \\
&= -[\ln P(0, u)]_0^T + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \left[u + \frac{2}{a_r} e^{-a_r u} - \frac{1}{2a_r} e^{-2a_r u} \right]_0^T \\
&= -\ln P(0, T) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \left(T + \frac{2}{a_r} e^{-a_r T} - \frac{1}{2a_r} e^{-2a_r T} - 0 - \frac{2}{a_r} + \frac{1}{2a_r} \right) \\
&= -\ln P(0, T) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right)
\end{aligned}$$

Während im Schritt $\circledcirc$ die Definition $f(t, T) = \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}$ verwendet wird, folgen die nachfolgenden Schritte den üblichen Integrationsregeln.

Werden diese Resultate in die Ausgangsgleichung eingesetzt und die Tatsache $Y(0) = 0$ beachtet, folgt:

$$Y(T) = \int_0^T \phi(u)du + \int_0^T x(u)du + \int_0^T \frac{1}{2} \sigma_S^2(u)du + \int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\ln P(0, T) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) \\
&\quad + \frac{\sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u) du + \frac{\sigma_r}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \\
&\quad + \int_0^T \frac{1}{2} \sigma_S^2(u) du + \int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u)
\end{aligned}$$

Verteilung unter $\mathbb{Q}^S$:

Ausgehend von der Annahme einer zeitabhängigen Volatilität $\sigma_S(t)$ im Black-Scholes-Hull-White-Modell sind $r(T)$ und $Y(T)$ bedingt auf $\mathcal{F}_0$ unter Maß $\mathbb{Q}^S$ normalverteilt. Für die Erwartungswerte $\mu_{r(T)}$ und $\mu_{Y(T)}$, Varianzen $\sigma_{r(T)}^2$ und $\sigma_{Y(T)}^2$ und den Korrelationskoeffizient $\rho_{Y(T)r(T)}$ ergeben sich folgende Lösungen:

$$\begin{aligned}
\mu_{r(T)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[r(T)|\mathcal{F}_0] = \phi(T) + \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T e^{-a_r(T-u)} \sigma_S(u) du \\
\sigma_{r(T)}^2 &= \mathbb{V}_{\mathbb{Q}^S}[r(T)|\mathcal{F}_0] = \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \\
\mu_{Y(T)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T)|\mathcal{F}_0] = -\ln P(0, T) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) \\
&\quad + \frac{\sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u) du + \int_0^T \frac{1}{2} \sigma_S^2(u) du \\
\sigma_{Y(T)}^2 &= \mathbb{V}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T)|\mathcal{F}_0] = \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) \\
&\quad + \frac{2\sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u) du + \int_0^T \sigma_S^2(u) du \\
\rho_{Y(T)r(T)} &= \frac{\text{Cov}[Y(T), r(T)]}{\sigma_{Y(T)} \sigma_{r(T)}} \\
&= \frac{1}{\sigma_{Y(T)} \sigma_{r(T)}} \left(\sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T \sigma_S(u) e^{-a_r(T-u)} du + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r T} + e^{-2a_r T}) \right)
\end{aligned}$$

Beweis für $\mu_{r(T)}$:

Der Erwartungswert von $r(T)$ erfüllt:

$$\begin{aligned}
\mu_{r(T)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[r(T)|\mathcal{F}_0] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\phi(T) + \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T e^{-a_r(T-u)} \sigma_S(u) du + \sigma_r \int_0^T e^{-a_r(T-u)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\
&\stackrel{\textcircled{*1}}{=} \phi(T) + \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T e^{-a_r(T-u)} \sigma_S(u) du + \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\sigma_r \int_0^T e^{-a_r(T-u)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \middle| \mathcal{F}_0 \right]}_{=0} \\
&\stackrel{\textcircled{*2}}{=} \phi(T) + \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T e^{-a_r(T-u)} \sigma_S(u) du
\end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

⊗¹ Herausziehen der deterministischen Funktionen aus dem Erwartungswert.

⊗² Nach der (1)-ten Eigenschaft der Itô-Integrale, siehe Gleichung (3.2), gilt:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t f(s) dW_s \middle| \mathcal{F}_0 \right] = 0$$

□

Beweis für $\sigma_{r(T)}^2$:

Die Varianz von $r(T)$ erfüllt:

$$\begin{aligned} \sigma_{r(T)}^2 &= \mathbb{V}_{\mathbb{Q}^S}[r(T)|\mathcal{F}_0] \\ &\stackrel{\circledast^1}{=} \sigma_r^2 \mathbb{V}_{\mathbb{Q}^S} \left[\int_0^T e^{-a_r(T-u)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ &\stackrel{\circledast^2}{=} \sigma_r^2 \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\left(\int_0^T e^{-a_r(T-u)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] - \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\left(\int_0^T e^{-a_r(T-u)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right]}_{=0} \right) \\ &\stackrel{\circledast^3}{=} \sigma_r^2 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\left(\int_0^T e^{-a_r(T-u)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ &\stackrel{\circledast^4}{=} \sigma_r^2 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\int_0^T (e^{-a_r(T-u)})^2 du \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ &\stackrel{\circledast^5}{=} \sigma_r^2 \int_0^T e^{-2a_r(T-u)} du \\ &= \sigma_r^2 \left[\frac{1}{2a_r} e^{-2a_r(T-u)} \right]_0^T \\ &= \sigma_r^2 \left(\frac{1}{2a_r} - \frac{1}{2a_r} e^{-2a_r T} \right) \\ &= \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

⊙¹ $\mathbb{V}[aX + b] = a^2 \mathbb{V}[X]$

⊙² $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

⊙³ Anwenden der Eigenschaft (3.2): $\mathbb{E} \left[\int_0^t f(s) dW_s \middle| \mathcal{F}_0 \right] = 0$

⊙⁴ Anwenden der Itô-Isometrie aus Gleichung (3.4):

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_s^t f(u) dW_u \right)^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] = \mathbb{E} \left[\int_s^t (f(u))^2 du \middle| \mathcal{F}_0 \right]$$

⊙⁵ Herausziehen der deterministischen Funktion aus dem Erwartungswert.

□

Beweis für $\mu_{Y(T)}$:

Der Erwartungswert von $Y(T)$ erfüllt:

$$\begin{aligned}
\mu_{Y(T)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} [Y(T) | \mathcal{F}_0] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[-\ln P(0, T) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) \right. \\
&\quad + \frac{\sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u) du + \frac{\sigma_r}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \\
&\quad \left. + \int_0^T \frac{1}{2} \sigma_S^2(u) du + \int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\
&\stackrel{⊙^1}{=} -\ln P(0, T) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) \\
&\quad + \frac{\sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u) du + \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\frac{\sigma_r}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \middle| \mathcal{F}_0 \right]}_{=0} \\
&\quad + \underbrace{\int_0^T \frac{1}{2} \sigma_S^2(u) du + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) \middle| \mathcal{F}_0 \right]}_{=0} \\
&\stackrel{⊙^2}{=} -\ln P(0, T) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) \\
&\quad + \frac{\sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u) du + \int_0^T \frac{1}{2} \sigma_S^2(u) du
\end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

⊙¹ Herausziehen der deterministischen Funktionen aus dem Erwartungswert.

⊙² Anwenden der Eigenschaft (3.2): $\mathbb{E} \left[\int_0^t f(s) dW_s \middle| \mathcal{F}_0 \right] = 0$

□

Für die letzten zwei Beweise wird folgender Satz gebraucht:

Theorem 8.2

Für zwei Itô-Prozesse

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= \int_0^t a(s) dW_1(s) & \text{bzw.} & & dX_1(t) &= a(t) dW_1(t) \\
X_2(t) &= \int_0^t b(s) dW_2(s) & \text{bzw.} & & dX_2(t) &= b(t) dW_2(t)
\end{aligned}$$

mit korrelierten Brownschen Bewegungen

$$dW_1(s)dW_2(s) = \rho dt$$

gilt:

$$\mathbb{E}[X_1(t)X_2(t)] = \rho \int_0^t a(s)b(s)ds$$

Beweis

Um dieses Theorem beweisen zu können wird die Zwei-dimensionale Itô-Formel aus Definition 3.34 auf $Z(t) := X_1(t)X_2(t) = f(t, X_1(t), X_2(t))$ angewendet:

$$\begin{aligned} dZ_t &= \underbrace{\frac{\partial f(t, X_1, X_2)}{\partial t} dt}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f(t, X_1, X_2)}{\partial X_1}}_{=X_2(t)} \underbrace{dX_1(t)}_{=a(t)dW_1(t)} + \underbrace{\frac{\partial f(t, X_1, X_2)}{\partial X_2}}_{=X_1(t)} \underbrace{dX_2(t)}_{=b(t)dW_2(t)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 f(t, X_1, X_2)}{\partial X_1^2}}_{=0} dX_1(t)dX_1(t) + \underbrace{\frac{\partial^2 f(t, X_1, X_2)}{\partial X_2^2}}_{=0} dX_2(t)dX_2(t) \right. \\ &\quad \left. + 2 \underbrace{\frac{\partial^2 f(t, X_1, X_2)}{\partial X_1 \partial X_2}}_{=1} \underbrace{dX_1(t)dX_2(t)}_{=a(t)b(t)dW_1(t)dW_2(t)} \right) \\ &= X_2(t)a(t)dW_1(t) + X_1(t)b(t)dW_2(t) + a(t)b(t) \underbrace{dW_1(t)dW_2(t)}_{=\rho dt} \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert von Z_t gilt aufgrund der (1)-ten Eigenschaft der Itô-Integrale, siehe Gleichung (3.2), schließlich:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_t] &= \underbrace{Z_0}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E} \left[\int_0^t X_2(s)a(s)dW_1(s) \right]}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E} \left[\int_0^t X_1(s)b(s)dW_2(s) \right]}_{=0} + \mathbb{E} \left[\rho \int_0^t a(s)b(s)ds \right] \\ &= \rho \int_0^t a(s)b(s)ds \end{aligned}$$

□

Beweis für $\sigma_{Y(T)}^2$:

Die Varianz von $Y(T)$ erfüllt:

$$\begin{aligned} \sigma_{Y(T)}^2 &= \mathbb{V}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T)|\mathcal{F}_0] \\ &\stackrel{\circledast 1}{=} \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \mathbb{V}_{\mathbb{Q}^S} \left[\int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \middle| \mathcal{F}_0 \right] + \mathbb{V}_{\mathbb{Q}^S} \left[\int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) \middle| \mathcal{F}_0 \right] + \\ &\quad + 2 \frac{\sigma_r}{a_r} Cov \left[\int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u), \int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) \middle| \mathcal{F}_0 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\circledast 2}{=} \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\left(\int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\left(\int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] + \\
&\quad + 2 \frac{\sigma_r}{a_r} Cov \left[\int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u), \int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\
&\stackrel{\circledast 3}{=} \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\left(\int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\left(\int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] + \\
&\quad + 2 \frac{\sigma_r}{a_r} \mathbb{E} \left[\int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \cdot \int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\
&\stackrel{\circledast 4}{=} \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\left(\int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\left(\int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] + \\
&\quad + 2 \frac{\sigma_r}{a_r} \rho_{Sr} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u) du \\
&\stackrel{\circledast 5}{=} \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)})^2 du \middle| \mathcal{F}_0 \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\int_0^T \sigma_S^2(u) du \middle| \mathcal{F}_0 \right] + \\
&\quad + 2 \frac{\sigma_r}{a_r} \rho_{Sr} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u) du \\
&\stackrel{\circledast 6}{=} \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)})^2 du + \int_0^T \sigma_S^2(u) du + 2 \frac{\sigma_r}{a_r} \rho_{Sr} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u) du \\
&= \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \int_0^T (1 - 2e^{-a_r(T-u)} + e^{-2a_r(T-u)}) du + \\
&\quad + \int_0^T \sigma_S^2(u) du + 2 \frac{\sigma_r}{a_r} \rho_{Sr} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u) du \\
&= \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \left[u - \frac{2}{a_r} e^{-a_r(T-u)} + \frac{1}{2a_r} e^{-2a_r(T-u)} \right]_0^T + \\
&\quad + \int_0^T \sigma_S^2(u) du + 2 \frac{\sigma_r}{a_r} \rho_{Sr} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u) du \\
&= \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} e^{-a_r(T-T)} + \frac{1}{2a_r} e^{-2a_r(T-T)} - 0 + \frac{2}{a_r} e^{-a_r T} - \frac{1}{2a_r} e^{-2a_r T} \right) + \\
&\quad + \int_0^T \sigma_S^2(u) du + 2 \frac{\sigma_r}{a_r} \rho_{Sr} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u) du \\
&= \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) + \\
&\quad + \int_0^T \sigma_S^2(u) du + 2 \frac{\sigma_r}{a_r} \rho_{Sr} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u) du
\end{aligned}$$

Erläuterung der Schritte:

$$\circledast^1 \quad \mathbb{V}[(a_1 X + b_1) + (a_2 Y + b_2) | \mathcal{F}_0] = a_1^2 \mathbb{V}[X | \mathcal{F}_0] + a_2^2 \mathbb{V}[Y | \mathcal{F}_0] + 2a_1 a_2 Cov[X, Y | \mathcal{F}_0]$$

$$\circledast^2 \quad \mathbb{V}[X | \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[X^2 | \mathcal{F}_0] - \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_0]^2 \text{ und } \mathbb{E} \left[\int_0^t f(s) dW_s \middle| \mathcal{F}_0 \right] = 0$$

$$\odot^3 \text{ Cov}[X, Y|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_0]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_0])|\mathcal{F}_0] \text{ und } \mathbb{E}\left[\int_0^t f(s)dW_s \Big| \mathcal{F}_0\right] = 0$$

$$\odot^4 \text{ Aufgrund des vorigen Beweises gilt: } \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T a_s dW_1(s)\right) \cdot \left(\int_0^T b_s dW_2(s)\right)\right] = \rho_{Sr} \int_0^T a_s b_s ds$$

$$\odot^5 \text{ Anwenden der Itô-Isometrie: } \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t f(u)dW_u\right)^2 \Big| \mathcal{F}_0\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t (f(u))^2 du \Big| \mathcal{F}_0\right].$$

$$\odot^6 \text{ Herausziehen der deterministischen Funktion aus dem Erwartungswert.}$$

□

Beweis für $\text{Cov}(Y(T), r(T))$:

Die Covarianz von $Y(T)$ und $r(T)$ erfüllt:

$$\text{Cov}[Y(T), r(T)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[(Y(T) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T)]) \cdot (r(T) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[r(T)])]$$

Es werden $Y(T) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T)]$ und $r(T) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[r(T)]$ separat berechnet, damit die Berechnung übersichtlich bleibt:

$$\begin{aligned} Y(T) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T)] &= \\ &= \int_0^T \phi(u)du + \frac{\sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u)du + \\ &\quad + \frac{\sigma_r}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) + \int_0^T \frac{1}{2} \sigma_S^2(u)du + \int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) \\ &\quad - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\int_0^T \phi(u)du + \frac{\sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u)du + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma_r}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) + \int_0^T \frac{1}{2} \sigma_S^2(u)du + \int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) \right] \\ &= \int_0^T \phi(u)du + \frac{\sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u)du + \\ &\quad + \frac{\sigma_r}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) + \int_0^T \frac{1}{2} \sigma_S^2(u)du + \int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) \\ &\quad - \left(\int_0^T \phi(u)du + \frac{\sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S(u)du + \int_0^T \frac{1}{2} \sigma_S^2(u)du \right) \\ &= \frac{\sigma_r}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) + \int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(T) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[r(T)] &= \\ &= \phi(T) + \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T e^{-a_r(T-u)} \sigma_S(u)du + \sigma_r \int_0^T e^{-a_r(T-u)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \\ &\quad - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\phi(T) + \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T e^{-a_r(T-u)} \sigma_S(u)du + \sigma_r \int_0^T e^{-a_r(T-u)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi(T) + \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T e^{-a_r(T-u)} \sigma_S(u) du + \sigma_r \int_0^T e^{-a_r(T-u)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \\
&\quad - \left(\phi(T) + \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T e^{-a_r(T-u)} \sigma_S(u) du \right) \\
&= \sigma_r \int_0^T e^{-a_r(T-u)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u)
\end{aligned}$$

Diese Ergebnisse werden in die obige Gleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\text{Cov}[Y(T), r(T)] &= \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[(Y(T) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T)]) \cdot (r(T) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[r(T)]) \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\left(\frac{\sigma_r}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) + \int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \sigma_r \int_0^T e^{-a_r(T-u)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\frac{\sigma_r^2}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \cdot \int_0^T e^{-a_r(T-u)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \right] + \\
&\quad + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\sigma_r \int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}^S}(u) \cdot \int_0^T e^{-a_r(T-u)} dW_r^{\mathbb{Q}^S}(u) \right] \\
&\stackrel{*}{=} \frac{\sigma_r^2}{a_r} \int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) e^{-a_r(T-u)} du + \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T \sigma_S(u) e^{-a_r(T-u)} du \\
&= \frac{\sigma_r^2}{a_r} \int_0^T (e^{-a_r(T-u)} - e^{-2a_r(T-u)}) du + \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T \sigma_S(u) e^{-a_r(T-u)} du \\
&= \frac{\sigma_r^2}{a_r} \left[\frac{1}{a_r} e^{-a_r(T-u)} - \frac{1}{2a_r} e^{-2a_r(T-u)} \right]_0^T + \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T \sigma_S(u) e^{-a_r(T-u)} du \\
&= \frac{\sigma_r^2}{a_r} \left(\frac{1}{a_r} e^{-a_r(T-T)} - \frac{1}{2a_r} e^{-2a_r(T-T)} - \frac{1}{a_r} e^{-a_r T} + \frac{1}{2a_r} e^{-2a_r T} \right) + \\
&\quad + \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T \sigma_S(u) e^{-a_r(T-u)} du \\
&= \frac{\sigma_r^2}{a_r} \left(\frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) - \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) + \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T \sigma_S(u) e^{-a_r(T-u)} du \\
&= \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r T} + e^{-2a_r T}) + \sigma_r \rho_{Sr} \int_0^T \sigma_S(u) e^{-a_r(T-u)} du
\end{aligned}$$

Bei $*$ wird abermals $\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T a(s) dW_1(s) \right) \cdot \left(\int_0^T b(s) dW_2(s) \right) \right] = \rho_{Sr} \int_0^T a(s) b(s) ds$ verwendet.

□

Für den Spezialfall einer konstanten Aktien-Volatilität σ_S folgt

$$\mu_{r(T)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[r(T)|\mathcal{F}_0] = \phi(T) + \frac{\sigma_S \sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} (1 - e^{-a_r T})$$

$$\sigma_{r(T)}^2 = \mathbb{V}_{\mathbb{Q}^S}[r(T)|\mathcal{F}_0] = \frac{\sigma_r^2}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T})$$

$$\mu_{Y(T)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T)|\mathcal{F}_0] =$$

$$\begin{aligned}
&= -\ln P(0, T) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) + \\
&\quad + \frac{\sigma_S \sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \left(T - \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) \right) + \frac{1}{2} \sigma_S^2 T \\
\sigma_{Y(T)}^2 &= \mathbb{V}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T)|\mathcal{F}_0] \\
&= \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) + \\
&\quad + \frac{2\sigma_S \sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \left(T - \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) \right) + \sigma_S^2 T \\
\rho_{Y(T)r(T)} &= \frac{\text{Cov}[Y(T), r(T)]}{\sigma_{Y(T)} \sigma_{r(T)}} \\
&= \frac{1}{\sigma_{Y(T)} \sigma_{r(T)}} \left(\frac{\sigma_S \sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} (1 - e^{-a_r T} + e^{-2a_r T}) \right)
\end{aligned}$$

Beweis

Alle Integrale über σ_S können berechnet werden und liefern folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{-a_r(T-u)} \sigma_S du &= \sigma_S \left[\frac{1}{a_r} e^{-a_r(T-u)} \right]_0^T \\
&= \sigma_S \left(\frac{1}{a_r} e^{-a_r(T-T)} - \frac{1}{a_r} e^{-a_r T} \right) \\
&= \frac{\sigma_S}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) \\
\int_0^T (1 - e^{-a_r(T-u)}) \sigma_S du &= \sigma_S \left[u - \frac{1}{a_r} e^{-a_r(T-u)} \right]_0^T \\
&= \sigma_S \left(T - \frac{1}{a_r} e^{-a_r(T-T)} - 0 + \frac{1}{a_r} e^{-a_r T} \right) \\
&= \sigma_S \left(T - \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) \right) \\
\int_0^T \sigma_S^2 du &= \sigma_S^2 [u]_0^T = \sigma_S^2 T
\end{aligned}$$

□

8.2 Beweis der geschlossenen Formel

Um den fairen Preis des GMAB mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung aus Kapitel Kapitel 2.2 zu Zeitpunkt $t = 0$ zu bestimmen, muss der Erwartungswert der diskontierten zukünftigen Auszahlungen unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ berechnet werden.

Dies geschieht mit Hilfe der risikoneutralen Bewertungsformel aus Definition 4.10:

$$V(0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \max(A(T), Pe^{\delta T}) \mathbb{I}_{\{\tau > T-1\}} + \sum_{t=1}^{T-1} e^{-\int_0^t r(s)ds} \max(A(t), Pe^{\delta t}) \mathbb{I}_{\{t-1 < \tau \leq t\}} \middle| \mathcal{F}_0 \right]$$

Mit den Überlegungen $A(t) = P \cdot S(t)$ aus Kapitel 8.1 und $Y(t) = \ln(S(t))$ aus Definition 4.16 für alle $t \in [0, T]$ folgt:

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \max(PS(T), Pe^{\delta T}) \mathbb{I}_{\{\tau > T-1\}} + \sum_{t=1}^{T-1} e^{-\int_0^t r(s)ds} \max(PS(t), Pe^{\delta t}) \mathbb{I}_{\{t-1 < \tau \leq t\}} \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \max(Pe^{Y(T)}, Pe^{\delta T}) \mathbb{I}_{\{\tau > T-1\}} + \sum_{t=1}^{T-1} e^{-\int_0^t r(s)ds} \max(Pe^{Y(t)}, Pe^{\delta t}) \mathbb{I}_{\{t-1 < \tau \leq t\}} \middle| \mathcal{F}_0 \right] \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird P aus dem Erwartungswert herausgezogen, anschließend die Summe des zweiten Terms unter Verwendung der Linearität des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned} &= P \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \max(e^{Y(T)}, e^{\delta T}) \mathbb{I}_{\{\tau > T-1\}} + \sum_{t=1}^{T-1} e^{-\int_0^t r(s)ds} \max(e^{Y(t)}, e^{\delta t}) \mathbb{I}_{\{t-1 < \tau \leq t\}} \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ &= P \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \max(e^{Y(T)}, e^{\delta T}) \mathbb{I}_{\{\tau > T-1\}} \middle| \mathcal{F}_0 \right] + \\ &\quad + P \cdot \sum_{t=1}^{T-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t r(s)ds} \max(e^{Y(t)}, e^{\delta t}) \mathbb{I}_{\{t-1 < \tau \leq t\}} \middle| \mathcal{F}_0 \right] \end{aligned}$$

Aufgrund der Unabhängigkeit zwischen Finanzmarkt- und Sterblichkeitsmodell gilt:

$$\begin{aligned} &= P \cdot \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \max(e^{Y(T)}, e^{\delta T}) \middle| \mathcal{F}_0 \right]}_{\textcircled{1}} \cdot \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbb{I}_{\{\tau > T-1\}} \middle| \mathcal{F}_0]}_{\textcircled{2}} + \\ &\quad + P \cdot \sum_{t=1}^{T-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t r(s)ds} \max(e^{Y(t)}, e^{\delta t}) \middle| \mathcal{F}_0 \right] \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbb{I}_{\{t-1 < \tau \leq t\}} \middle| \mathcal{F}_0]}_{\textcircled{3}} \end{aligned}$$

Um die Übersicht zu wahren, werden die Terme $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ und $\textcircled{3}$ wieder separat betrachtet:

Die Brownschen Bewegungen $W_r^{\mathbb{Q}}$ und $W_S^{\mathbb{Q}}$ haben unabhängige Inkremente. Daher sind $W_r^{\mathbb{Q}}$ und $\mathcal{F}_0$ beziehungsweise $W_S^{\mathbb{Q}}$ und $\mathcal{F}_0$ unabhängig unter $\mathbb{Q}$ und die Bedingung $\mathcal{F}_0$ kann weggelassen werden. Anschließend wird die Maximumfunktion durch eine Schreibweise mit Indikatorfunktionen ersetzt und $e^{Y(T)}$ herausgezogen:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} \max(e^{Y(T)}, e^{\delta T}) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s)ds} (e^{Y(T)} \mathbb{I}_{\{Y(T) \geq \delta T\}} + e^{\delta T} \mathbb{I}_{\{Y(T) \leq \delta T\}}) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{Y(T) - \int_0^T r(s)ds} (\mathbb{I}_{\{Y(T) \geq \delta T\}} + e^{\delta T - Y(T)} \mathbb{I}_{\{Y(T) \leq \delta T\}}) \right] \end{aligned}$$

Aus Definition 4.16 ist bekannt, dass $Y(T) = Y(0) + \int_0^T \left(r(u) - \frac{1}{2}\sigma_S^2(u)\right) du + \int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}}(u)$.

Anschließendes Kürzen von $\int_0^T r(s) ds$ führt zu:

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{Y(0) + \int_0^T \left(r(u) - \frac{1}{2}\sigma_S^2(u)\right) du + \int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}}(u) - \int_0^T r(s) ds} \left(\mathbb{I}_{\{Y(T) \geq \delta T\}} + e^{\delta T - Y(T)} \mathbb{I}_{\{Y(T) \leq \delta T\}} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{Y(0)} e^{\int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}}(u) - \int_0^T \frac{1}{2}\sigma_S^2(u) du} \left(\mathbb{I}_{\{Y(T) \geq \delta T\}} + e^{\delta T - Y(T)} \mathbb{I}_{\{Y(T) \leq \delta T\}} \right) \right] \end{aligned}$$

Da $A(0) = P$ ist $S(0) = 1$ und somit $e^{Y(0)} = S(0) = 1$. Aus Kapitel 8.1 ist ebenfalls bekannt, dass $e^{\int_0^T \sigma_S(u) dW_S^{\mathbb{Q}}(u) - \int_0^T \frac{1}{2}\sigma_S^2(u) du} = \frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}}$. Somit kann der Wechsel zu Maß $\mathbb{Q}$ durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}} \left(\mathbb{I}_{\{Y(T) \geq \delta T\}} + e^{\delta T - Y(T)} \mathbb{I}_{\{Y(T) \leq \delta T\}} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[\mathbb{I}_{\{Y(T) \geq \delta T\}} + e^{\delta T - Y(T)} \mathbb{I}_{\{Y(T) \leq \delta T\}} \right] \\ &= \mathbb{Q}^S(Y(T) \geq \delta T) + e^{\delta T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[e^{-Y(T)} \mathbb{I}_{\{Y(T) \leq \delta T\}} \right] \end{aligned}$$

Da $Y(T) \sim \mathcal{N}(\mu_{Y(T)}, \sigma_{Y(T)}^2)$ und die Normalverteilung eine symmetrische Verteilung ist, folgt mit der Transformation zur standardnormalverteilten Zufallsvariable $Z(T)$:

$$Z(T) = \frac{Y(T) - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

für den ersten Teil, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^S(Y(T) \geq \delta T) &= \mathbb{Q}^S \left(\frac{Y(T) - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} \geq \frac{\delta T - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} \right) \\ &= \mathbb{Q}^S \left(Z(T) \geq \frac{\delta T - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} \right) \\ &= 1 - \Phi \left(\frac{\delta T - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} \right) \\ &= \Phi \left(-\frac{\delta T - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} \right) \\ &= \Phi \left(\frac{\mu_{Y(T)} - \delta T}{\sigma_{Y(T)}} \right) \end{aligned}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung darstellt.

Für den zweiten Teil ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[e^{-Y(T)} \mathbb{I}_{\{Y(T) \leq \delta T\}} \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[e^{-\sigma_{Y(T)} Z(T) - \mu_{Y(T)}} \cdot \mathbb{I}_{\left\{ \frac{Y(T) - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} \leq \frac{\delta T - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} \right\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} \left[e^{-\sigma_{Y(T)} Z(T) - \mu_{Y(T)}} \cdot \mathbb{I}_{\left\{ Z(T) \leq \frac{\delta T - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} \right\}} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\delta T - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}}} e^{-\sigma_{Y(T)} z - \mu_{Y(T)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\frac{\delta T - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\mu_{Y(T)}} e^{-\frac{1}{2}z^2 - \sigma_{Y(T)}z - \frac{1}{2}\sigma_{Y(T)}^2 + \frac{1}{2}\sigma_{Y(T)}^2} dz \\
&= e^{-\mu_{Y(T)} + \frac{1}{2}\sigma_{Y(T)}^2} \int_{-\infty}^{\frac{\delta T - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2 + 2\sigma_{Y(T)}z + \sigma_{Y(T)}^2)} dz \\
&= e^{-\mu_{Y(T)} + \frac{1}{2}\sigma_{Y(T)}^2} \int_{-\infty}^{\frac{\delta T - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z + \sigma_{Y(T)})^2} dz
\end{aligned}$$

Jetzt wird folgende Substitution angewendet:

$$y := z + \sigma_{Y(T)}$$

$$dy = dz$$

wobei sich die Grenzen auf

$$\begin{aligned}
-\infty + \sigma_{Y(T)} &= -\infty \\
\frac{\delta T - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} + \sigma_{Y(T)} &= \frac{\delta T + \sigma_{Y(T)}^2 - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}}
\end{aligned}$$

verändern:

$$\begin{aligned}
&= e^{-\mu_{Y(T)} + \frac{1}{2}\sigma_{Y(T)}^2} \int_{-\infty}^{\frac{\delta T + \sigma_{Y(T)}^2 - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
&= e^{-\mu_{Y(T)} + \frac{1}{2}\sigma_{Y(T)}^2} \Phi \left(\frac{\delta T + \sigma_{Y(T)}^2 - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} \right)
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt das für ①:

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} &= \mathbb{Q}^S(Y(T) \geq \delta T) + e^{\delta T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S} [e^{-Y(T)} \mathbb{I}_{\{Y(T) \leq \delta T\}}] \\
&= \Phi \left(\frac{\mu_{Y(T)} - \delta T}{\sigma_{Y(T)}} \right) + e^{\delta T} e^{-\mu_{Y(T)} + \frac{1}{2}\sigma_{Y(T)}^2} \Phi \left(\frac{\delta T + \sigma_{Y(T)}^2 - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{\mu_{Y(T)} - \delta T}{\sigma_{Y(T)}} \right) + e^{\delta T - \mu_{Y(T)} + \frac{1}{2}\sigma_{Y(T)}^2} \Phi \left(\frac{\delta T + \sigma_{Y(T)}^2 - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} \right)
\end{aligned}$$

Für nachfolgende Berechnungen wird von einer konstanten Aktienvolatilität σ_S ausgegangen, daher haben $\sigma_{Y(T)}^2$ und $\mu_{Y(T)}$ folgende Darstellung:

$$\mu_{Y(T)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T)|\mathcal{F}_0] =$$

$$\begin{aligned}
&= -\ln P(0, T) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) + \\
&\quad + \frac{\sigma_S \sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \left(T - \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) \right) + \frac{1}{2} \sigma_S^2 T \\
\sigma_{Y(T)}^2 &= \mathbb{V}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T) | \mathcal{F}_0] \\
&= \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) + \\
&\quad + \frac{2\sigma_S \sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \left(T - \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) \right) + \sigma_S^2 T
\end{aligned}$$

mit

- dem Preis einer Nullkuponanleihe $P(0, T)$ mit Laufzeit T ,
- den Parametern a_r und σ_r des Hull-White Zinsmodells,
- der Volatilität der Aktie σ_S und
- der Korrelation ρ_{Sr} zwischen Aktie und Zins.

Mit den Ergebnissen aus Kapitel 7 folgt für alle $T \in \mathbb{N}$ und somit auch für ②:

$$\textcircled{2} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbb{I}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{F}_0] = p_x(0, T | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T \lambda_{x+s}(s) ds} \middle| \mathcal{F}_0 \right] = e^{C_\lambda(0, T) - D_\lambda(0, T) \lambda_x(0)}$$

wobei $C_\lambda(0, T)$ und $D_\lambda(0, T)$ folgendermaßen gegeben sind:

$$\begin{aligned}
D_\lambda(0, T) &= \frac{1 - e^{-c_3 T}}{c_3} \\
C_\lambda(0, T) &= \frac{c_1}{c_2 c_3} (1 - e^{c_2 T}) - \frac{c_1}{c_3(c_2 + c_3)} (e^{-c_3 T} - e^{c_2 T}) - \frac{c_4^2}{4c_3^2 c_5} (1 - e^{2c_5 T}) \\
&\quad + \frac{c_4^2}{c_3^2} \frac{1}{2c_5 + c_3} (e^{-c_3 T} - e^{2c_5 T}) - \frac{c_4^2}{4c_3^2(c_3 + c_5)} (e^{-2c_3 T} - e^{2c_5 T})
\end{aligned}$$

mit

$$c_1 := \frac{k_\xi}{b} e^{\frac{x-m}{b}}, \quad c_2 := \frac{1}{b} - \gamma_\xi, \quad c_3 := k_\xi - \frac{1}{b}, \quad c_4 := \frac{\sigma_\xi}{b} e^{\frac{x-m}{b}} \quad \text{und} \quad c_5 := \frac{1}{b}$$

und

$$\lambda_x(0) := \frac{1}{b} e^{\frac{x-m}{b}}$$

Für ③ wird nach der Zerlegung der Indikatorfunktion die Tatsache $\mathbb{Q}(A \cap B) = \mathbb{Q}(A)\mathbb{Q}(B|A)$ verwendet:

$$\begin{aligned}
\textcircled{3} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbb{I}_{\{t-1 < \tau \leq t\}} | \mathcal{F}_0] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbb{I}_{\{t-1 < \tau\}} \mathbb{I}_{\{\tau \leq t\}} | \mathcal{F}_0] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbb{I}_{\{t-1 < \tau\}} (1 - \mathbb{I}_{\{\tau > t\}}) | \mathcal{F}_0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{I}_{\{t-1 < \tau\}} \middle| \mathcal{F}_0 \right] \cdot \left(1 - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{I}_{\{\tau > t\}} \middle| \mathbb{I}_{\{t-1 < \tau\}} \vee \mathcal{F}_0 \right] \right) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^{t-1} \lambda_{x+s}(s) ds} \middle| \mathcal{F}_0 \right] \cdot \left(1 - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t \lambda_{x+s}(s) ds} \middle| \mathbb{I}_{\{t-1 < \tau\}} \vee \mathcal{F}_0 \right] \right) \\
&= p_x(0, t-1 | \mathcal{F}_0) \cdot (1 - p_{x+t-1}(t-1, t | \mathcal{F}_0))
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Überlegung:

$$\begin{aligned}
&p_x(0, t) = p_x(0, 1) \cdot p_{x+1}(1, 2) \cdot \dots \cdot p_{x+t-1}(t-1, t) \\
\Leftrightarrow &p_x(0, t) = p_x(0, t-1) p_{x+t-1}(t-1, t) \\
\Leftrightarrow &p_{x+t-1}(t-1, t) = \frac{p_x(0, t)}{p_x(0, t-1)}
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\textcircled{3} &= p_x(0, t-1 | \mathcal{F}_0) \cdot (1 - p_{x+t-1}(t-1, t | \mathcal{F}_0)) \\
&= p_x(0, t-1 | \mathcal{F}_0) \cdot \left(1 - \frac{p_x(0, t | \mathcal{F}_0)}{p_x(0, t-1 | \mathcal{F}_0)} \right) \\
&= p_x(0, t-1 | \mathcal{F}_0) - p_x(0, t | \mathcal{F}_0)
\end{aligned}$$

Dabei lassen sich $p_x(0, t-1 | \mathcal{F}_0)$ und $p_x(0, t | \mathcal{F}_0)$ für alle $t \in [0, T]$ analog zu $\textcircled{2}$ lösen.

Nachdem die Terme $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ und $\textcircled{3}$ separat berechnet wurden, können sie in die ursprüngliche Gleichung eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
V(0) &= P \cdot \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s) ds} \max(e^{Y(T)}, e^{\delta T}) \middle| \mathcal{F}_0 \right]}_{\textcircled{1}} \cdot \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{I}_{\{\tau > T-1\}} \middle| \mathcal{F}_0 \right]}_{\textcircled{2}} + \\
&\quad + P \cdot \sum_{t=1}^{T-1} \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t r(s) ds} \max(e^{Y(t)}, e^{\delta t}) \middle| \mathcal{F}_0 \right] \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{I}_{\{t-1 < \tau \leq t\}} \middle| \mathcal{F}_0 \right]}_{\textcircled{3}} = \\
&= P \cdot \left[\Phi \left(\frac{\mu_{Y(T)} - \delta T}{\sigma_{Y(T)}} \right) + e^{\delta T - \mu_{Y(T)} + \frac{1}{2} \sigma_{Y(T)}^2} \Phi \left(\frac{\delta T + \sigma_{Y(T)}^2 - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} \right) \right] p_x(0, T-1) \\
&\quad + P \cdot \sum_{t=1}^{T-1} \left[\Phi \left(\frac{\mu_{Y(t)} - \delta t}{\sigma_{Y(t)}} \right) + e^{\delta t - \mu_{Y(t)} + \frac{1}{2} \sigma_{Y(t)}^2} \Phi \left(\frac{\delta t + \sigma_{Y(t)}^2 - \mu_{Y(t)}}{\sigma_{Y(t)}} \right) \right] (p_x(0, t-1) - p_x(0, t))
\end{aligned}$$

Somit wurde das Theorem bewiesen. □

Kapitel 9

Kalibrierung der Parameter

Bevor der Preis der GMAB mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung aus Kapitel 2.2 mit der geschlossenen Formel berechnet werden kann, müssen die dafür notwendigen Parameter kalibriert werden. Dazu wird die geschlossene Formel aus Theorem 8.1 nochmals in Erinnerung gerufen:

Der faire Preis eines GMABs mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung und

- Sparprämie P ,
- Vertragslaufzeit T und
- Roll-up Rate δ

ist für einen x -jährigen Versicherungsnehmer durch folgende geschlossene Formel gegeben:

$$\begin{aligned} V(0) = & P \cdot \left[\Phi \left(\frac{\mu_{Y(T)} - \delta T}{\sigma_{Y(T)}} \right) + e^{\delta T - \mu_{Y(T)} + \frac{1}{2} \sigma_{Y(T)}^2} \Phi \left(\frac{\delta T + \sigma_{Y(T)}^2 - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} \right) \right] p_x(0, T-1) \\ & + P \cdot \sum_{t=1}^{T-1} \left[\Phi \left(\frac{\mu_{Y(t)} - \delta t}{\sigma_{Y(t)}} \right) + e^{\delta t - \mu_{Y(t)} + \frac{1}{2} \sigma_{Y(t)}^2} \Phi \left(\frac{\delta t + \sigma_{Y(t)}^2 - \mu_{Y(t)}}{\sigma_{Y(t)}} \right) \right] (p_x(0, t-1) - p_x(0, t)) \end{aligned}$$

wobei $\sigma_{Y(T)}^2$ und $\mu_{Y(T)}$ den Erwartungswert und die Varianz von $Y(T)$ unter Aktienmaß $\mathbb{Q}^S$ darstellen. Für unsere Berechnungen wird von einer konstanten Aktienvolatilität σ_S ausgegangen, daher haben $\sigma_{Y(T)}^2$ und $\mu_{Y(T)}$ folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \mu_{Y(T)} = & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T)|\mathcal{F}_0] \\ = & -\ln P(0, T) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) + \\ & + \frac{\sigma_S \sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \left(T - \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) \right) + \frac{1}{2} \sigma_S^2 T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{Y(T)}^2 &= \mathbb{V}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T)|\mathcal{F}_0] \\
&= \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) + \\
&\quad + \frac{2\sigma_S \sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \left(T - \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) \right) + \sigma_S^2 T
\end{aligned}$$

mit

- dem Preis einer Nullkuponanleihe $P(0, T)$ mit Laufzeit T ,
- den Parametern a_r und σ_r des Hull-White Zinsmodells,
- der Volatilität der Aktie σ_S und
- der Korrelation ρ_{Sr} zwischen Aktie und Zins.

Für die Überlebenswahrscheinlichkeiten $p_x(0, T)$ gilt:

$$p_x(0, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T \lambda_{x+s}(s) ds} \right] = e^{C_\lambda(0, T) - D_\lambda(0, T) \lambda_x(0)}$$

wobei $C_\lambda(0, T)$ und $D_\lambda(0, T)$ folgendermaßen gegeben sind:

$$\begin{aligned}
D_\lambda(0, T) &= \frac{1 - e^{-c_3 T}}{c_3} \\
C_\lambda(0, T) &= \frac{c_1}{c_2 c_3} (1 - e^{c_2 T}) - \frac{c_1}{c_3 (c_2 + c_3)} (e^{-c_3 T} - e^{c_2 T}) - \frac{c_4^2}{4c_3^2 c_5} (1 - e^{2c_5 T}) \\
&\quad + \frac{c_4^2}{c_3^2} \frac{1}{2c_5 + c_3} (e^{-c_3 T} - e^{2c_5 T}) - \frac{c_4^2}{4c_3^2 (c_3 + c_5)} (e^{-2c_3 T} - e^{2c_5 T})
\end{aligned}$$

mit

$$c_1 := \frac{k_\xi}{b} e^{\frac{x-m}{b}}, \quad c_2 := \frac{1}{b} - \gamma_\xi, \quad c_3 := k_\xi - \frac{1}{b}, \quad c_4 := \frac{\sigma_\xi}{b} e^{\frac{x-m}{b}} \quad \text{und} \quad c_5 := \frac{1}{b}$$

und

$$\lambda_x(0) := \frac{1}{b} e^{\frac{x-m}{b}}$$

Während die Sparprämie P , die Vertragslaufzeit T und die Roll-up Rate δ zu Beginn des Vertrages gewählt werden, müssen die anderen Parameter aus der aktuellen Marktsituation geschätzt werden.

Im ersten Schritt wird die Zero-Bond Kurve bestimmt, da diese auch zur Bestimmung der Parameter a_r und σ_r aus dem Hull-White Modell aus Kapitel 6, welche im zweiten Schritt kalibriert werden, benötigt wird. Anschließend werden geeignete Werte für die Aktienvolatilität σ_S und die Korrelation ρ_{Sr} zwischen Aktien und Zinssatz gewählt. Die Parameter b , m , k , γ und σ aus dem Sterblichkeitsmodell werden aus [19] übernommen.

9.1 Bestimmung der Zero-Bond Kurve

Die Zero-Bond Kurve wird mit Hilfe der sogenannten Bootstrapping-Methode konstruiert. Im dritten Kapitel von [13] wird diese Methode anhand eines Beispiels erläutert. Das dort beschriebene Verfahren wird etwas adaptiert und in diesem Kapitel angewendet.

Um die Zero-Bond Kurve aufbauen zu können, werden, wie auch in [19] und [13] vorgeschlagen, Euribor Zinsraten bis zu einer Laufzeit von 6 Monaten, 6x12 und 12x18 FRAs für 12- und 18-monatige Laufzeiten und Euribor Swaps für Laufzeiten von 2 bis 60 Jahren verwendet. Die gewählten Zinssätze sollen die risikolose Zinskurve annähern, es wären allerdings auch andere Ansätze, bei welchen beispielsweise Staatsanleihen mit etwaigen Abschlägen verwendet werden, möglich.

All diese Daten stammen vom 01.08.2014 ($=t_0$) und wurden aus Bloomberg, einer kostenpflichtigen Datenbank im Internet, genommen. In Tabelle 9.1 sind sie übersichtlich aufgelistet. Mit Hilfe des Bloomberg-Kürzels können die Zinsraten in Bloomberg gefunden werden.

Der Abrechnungstag oder Spot date t ist üblicherweise 2 Arbeitstage später. In diesem Fall gilt $t = 05.08.2014$, da der 01.08.2014 auf einen Freitag fällt. Als Tageszählkonvention wird $\frac{actual}{360}$ verwendet. [13]

Die aus Bloomberg genommenen Zinssätze ergeben folgende Zinsstrukturkurve:

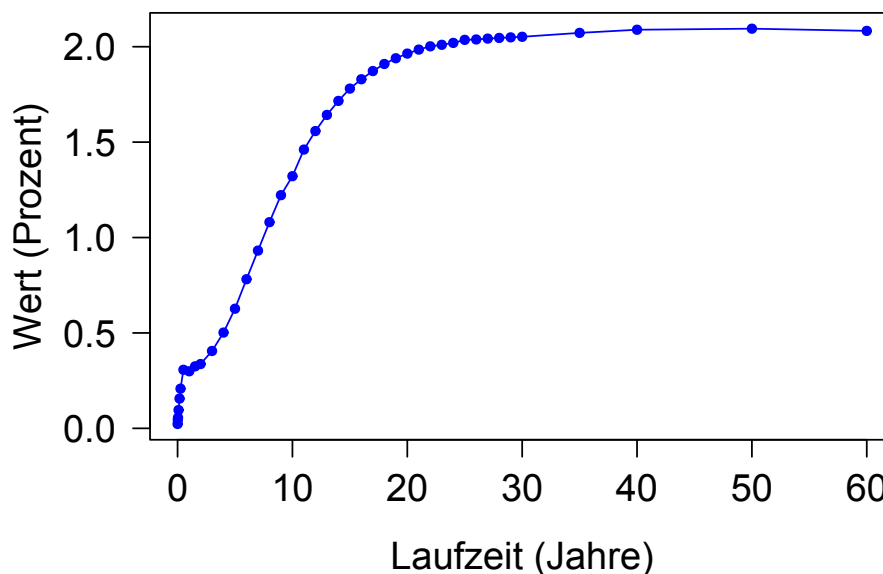


Abbildung 9.1: Zinsstrukturkurve bestehend aus Eonia-, Euribor-, FRA- und Euribor Swap-Werten vom 01.08.2014 aus Bloomberg

Zinsrate	Bloomberg-Kürzel	Wert in %
Eonia	EONIA Index	0,0230
1W-Euribor	EUR001W Index	0,0440
2W-Euribor	EUR002W Index	0,0560
1M-Euribor	EUR001M Index	0,0960
2M-Euribor	EUR002M Index	0,1560
3M-Euribor	EUR003M Index	0,2080
6M-Euribor	EUR006M Index	0,3070
6x12 FRA	EUFR0F1 Curncy	0,2990
12x18 FRA	EUFR011F Curncy	0,3250
2Y-Euribor Swap	EUSA2 Curncy	0,3370
3Y-Euribor Swap	EUSA3 Curncy	0,4055
4Y-Euribor Swap	EUSA4 Curncy	0,5020
5Y-Euribor Swap	EUSA5 Curncy	0,6270
6Y-Euribor Swap	EUSA6 Curncy	0,7815
7Y-Euribor Swap	EUSA7 Curncy	0,9315
8Y-Euribor Swap	EUSA8 Curncy	1,0805
9Y-Euribor Swap	EUSA9 Curncy	1,2220
10Y-Euribor Swap	EUSA10 Curncy	1,3215
11Y-Euribor Swap	EUSA11 Curncy	1,4610
12Y-Euribor Swap	EUSA12 Curncy	1,5580
13Y-Euribor Swap	EUSA13 Curncy	1,6425
14Y-Euribor Swap	EUSA14 Curncy	1,7160
15Y-Euribor Swap	EUSA15 Curncy	1,7805
16Y-Euribor Swap	EUSA16 Curncy	1,8295
17Y-Euribor Swap	EUSA17 Curncy	1,8725
18Y-Euribor Swap	EUSA18 Curncy	1,9095
19Y-Euribor Swap	EUSA19 Curncy	1,9395
20Y-Euribor Swap	EUSA20 Curncy	1,9640
21Y-Euribor Swap	EUSA21 Curncy	1,9850
22Y-Euribor Swap	EUSA22 Curncy	2,0020
23Y-Euribor Swap	EUSA23 Curncy	2,0100
24Y-Euribor Swap	EUSA24 Curncy	2,0200
25Y-Euribor Swap	EUSA25 Curncy	2,0360
26Y-Euribor Swap	EUSA26 Curncy	2,0380
27Y-Euribor Swap	EUSA27 Curncy	2,0425
28Y-Euribor Swap	EUSA28 Curncy	2,0460
29Y-Euribor Swap	EUSA29 Curncy	2,0490
30Y-Euribor Swap	EUSA30 Curncy	2,0520
35Y-Euribor Swap	EUSA35 Curncy	2,0725
40Y-Euribor Swap	EUSA40 Curncy	2,0890
50Y-Euribor Swap	EUSA50 Curncy	2,0945
60Y-Euribor Swap	EUSA60 Curncy	2,0830

Tabelle 9.1: Eonia-, Euribor-, FRA- und Euribor Swap-Werte vom 01.08.2014 aus Bloomberg

Bootstrapping-Methode

Die Zero-Bond Kurve stellt, wie in Kapitel 5.4 beschrieben, die Preise der Nullkuponanleihen $P(t, T)$ abhängig von ihrer Laufzeit T dar. Weiters ist aus den Kapitel 5.3, 5.5 und 5.6 bekannt, wie die verschiedenen Zinssätze mit den Preisen der Nullkuponanleihe in Zusammenhang stehen. Beginnend mit den Zinsraten mit den geringsten Laufzeiten, werden nach und nach alle Preise der Nullkuponanleihen berechnet, bis am Ende die gesamte Zero-Bond Kurve konstruiert wurde.

Im ersten Schritt werden der Eonia und die Euribor Zinssätze $L(t, T_i)$ für $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$, abhängig von ihrer Laufzeit $\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\} = \{1 \text{ Tag}, 1 \text{ Woche}, 2 \text{ Wochen}, 1 \text{ Monat}, 2 \text{ Monate}, 3 \text{ Monate}, 6 \text{ Monate}\}$ betrachtet. Fällt das Laufzeitende auf ein Wochenende oder einen Feiertag, wird stattdessen der nächste Arbeitstag genommen. Die Preise der Nullkuponanleihen ergeben sich durch die aus Definition 5.4 bereits bekannte Formel

$$P(t, T_i) := \frac{1}{1 + L(t, T_i)\tau(t, T_i)}$$

wobei die Zeitmaße $\tau(t, T_i)$ gemäß Tageszählkonvention $\frac{\text{actual}}{360}$ berechnet werden.

Tabelle 9.2 stellt nicht nur alle mit obiger Formel berechneten Preise der Nullkuponanleihen, sondern auch die verschiedenen Zeitmaße dar.

Zinsrate	Laufzeit	Wert in %	Zeitmaß	Preise der Nullkuponanleihen
Eonia	$T_1 = 06.08.2014$	$L(t, T_1) = 0,0230$	$\tau(t, T_1) = 0,0028$	$P(t, T_1) = 1,00000$
1W-Euribor	$T_2 = 12.08.2014$	$L(t, T_2) = 0,0440$	$\tau(t, T_2) = 0,0194$	$P(t, T_2) = 0,99999$
2W-Euribor	$T_3 = 19.08.2014$	$L(t, T_3) = 0,0560$	$\tau(t, T_3) = 0,0389$	$P(t, T_3) = 0,99998$
1M-Euribor	$T_4 = 05.09.2014$	$L(t, T_4) = 0,0960$	$\tau(t, T_4) = 0,0861$	$P(t, T_4) = 0,99992$
2M-Euribor	$T_5 = 06.10.2014$	$L(t, T_5) = 0,1560$	$\tau(t, T_5) = 0,1722$	$P(t, T_5) = 0,99973$
3M-Euribor	$T_6 = 05.11.2014$	$L(t, T_6) = 0,2080$	$\tau(t, T_6) = 0,2556$	$P(t, T_6) = 0,99947$
6M-Euribor	$T_7 = 05.02.2014$	$L(t, T_7) = 0,3070$	$\tau(t, T_7) = 0,5111$	$P(t, T_7) = 0,99843$

Tabelle 9.2: Preise der Nullkuponanleihen berechnet aus den Eonia- und Euriborzinssätzen

Im zweiten Schritt werden mit Hilfe bereits berechneter Nullkuponanleihe-Preise und der 6x12 und 12x18 FRAs die Preise der Nullkuponanleihen für die Laufzeiten $\{T_8, T_9\} = \{12 \text{ Monate}, 18 \text{ Monate}\}$ ermittelt. In Definition 5.13 wurde die einfache Zinsrate $F(t, T_{i-1}, T_i)$ (für $i \in \{8, 9\}$) folgendermaßen definiert:

$$F(t, T_{i-1}, T_i) := \frac{1}{\tau(T_{i-1}, T_i)} \left(\frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)} - 1 \right)$$

Diese Gleichung kann nach $P(t, T_i)$ zu

$$P(t, T_i) := \frac{P(t, T_{i-1})}{1 + \tau(T_{i-1}, T_i)F(t, T_{i-1}, T_i)}$$

umgeformt werden. Um den Preis der Nullkuponanleihe $P(t, T_8) := \frac{P(t, T_7)}{1 + \tau(T_7, T_8)F(t, T_7, T_8)}$ mit 1-jähriger Laufzeit zu erhalten, werden das im dem ersten Schritt berechnete $P(t, T_7)$, die aus Bloomberg erhaltenen Zinsrate $F(t, T_7, T_8)$ des 6x12 FRAs und das berechnete Zeitmaß $\tau(T_7, T_8)$ in die Formel eingesetzt.

Analog kann dieses $P(t, T_8)$, gemeinsam mit der Zinsrate $F(t, T_8, T_9)$ des 12x18 FRAs und dem Zeitmaß $\tau(T_8, T_9)$ für die Berechnung der Nullkuponanleihe $P(t, T_9) := \frac{P(t, T_8)}{1 + \tau(T_8, T_9)F(t, T_8, T_9)}$ mit 18-monatiger Laufzeit verwendet werden.

Die Ergebnisse für $P(t, T_8)$ und $P(t, T_9)$ sind in Tabelle 9.3 aufgelistet.

Zinsrate	Laufzeit	Wert in %	Zeitmaß	Preise der Nullkuponanleihen
6x12 FRA	$T_8 = 05.08.2015$	$F(t, T_7, T_8) = 0,2990$	$\tau(T_7, T_8) = 0,511$	$P(t, T_8) = 0,9969$
12x18 FRA	$T_9 = 05.02.2016$	$F(t, T_8, T_9) = 0,3250$	$\tau(T_8, T_9) = 0,506$	$P(t, T_9) = 0,9953$

Tabelle 9.3: Preise der Nullkuponanleihen berechnet aus dem 6x12 und 12x18 FRA

Im letzten Schritt werden die 6-Monats Euribor Zins-Swaps mit einer Laufzeit von 2 bis 60 Jahren und die bereits bekannten $P(t, T_i)$ verwendet, um die weiteren Preise der Nullkuponanleihen zu berechnen.

Wie bereits aus Kapitel 5.6 bekannt, ist ein Zins-Swap eine Vereinbarung, welche einen festen Cashflow gegen einen variablen Cashflow in derselben Währung austauscht. Laut der Beschreibung in Bloomberg wird die fixe Swap Rate jährlich ausbezahlt, während die Auszahlung der variablen Zinssätze, in diesem Fall der aktuellen 6-Monats-Euribor, halbjährlich stattfindet.

Da die aus Bloomberg erhaltenen fixen Swap Raten genau jene Zinssraten sind, welche den Zins-Swap zu einem fairen Vertrag zu Zeitpunkt t machen, werden zuerst die jährlichen festen Zahlungen den halbjährlichen variablen Zahlungen gegenübergestellt. Die Zeitpunkte T'_k für $k \in \{1, \dots, n\}$ beschreiben dabei die halbjährlichen Zahlungszeitpunkte, wobei n die Anzahl der Zahlungszeitpunkte für die Laufzeiten {2 Jahre, 3 Jahre, 4 Jahre, ..., 30 Jahre, 35 Jahre, 40 Jahre, 50 Jahre, 60 Jahre} der jeweiligen Swaps darstellt, also $n \in \{4, 6, 8, \dots, 60, 70, 80, 100, 120\}$.

Während $L(T'_{k-1}, T'_k)$ die halbjährlich gezahlten variablen Zinssätze darstellt, in diesem Fall die aktuellen 6-Monats-Euribor Werte, werden die jährlich ausbezahlte fixe Swap Rate, deren Werte aus Bloomberg genommen wurden, mit S_{t, T_n} bezeichnet. Gemeinsam mit den passenden Diskontierungsfaktoren $P(t, T'_k)$ und $T'_0 = t$ ergibt dies folgende Formel:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} S_{t, T_n} \tau(T'_{2(k-1)}, T'_{2k}) P(t, T'_{2k})}_{\text{jährliche Zahlungen}} = \underbrace{\sum_{k=1}^n L(T'_{k-1}, T'_k) \tau(T'_{k-1}, T'_k) P(t, T'_k)}_{\text{halbjährliche Zahlungen}}$$

Der 6-Monats-Euribor ist nach Definition 5.4 eine einfache Zinsrate, sodass $L(t, T) := \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)}$. Wird diese Tatsache verwendet folgt auf der rechten Seite:

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} S_{t, T_n} \tau(T'_{2(k-1)}, T'_{2k}) P(t, T'_{2k}) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - P(T'_{k-1}, T'_k)}{\tau(T'_{k-1}, T'_k) P(T'_{k-1}, T'_k)} \tau(T'_{k-1}, T'_k) P(t, T'_k)$$

Das Kürzen von $\tau(T'_{k-1}, T'_k)$ auf der rechten Seite und die genauere Betrachtung des Teils $\frac{P(t, T'_k)}{P(T'_{k-1}, T'_k)} = \frac{P(t, T'_{k-1})P(T'_{k-1}, T'_k)}{P(T'_{k-1}, T'_k)} = P(t, T'_{k-1})$ führt schließlich zu:

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} S_{t, T_n} \tau(T'_{2(k-1)}, T'_{2k}) P(t, T'_{2k}) = \sum_{k=1}^n (1 - P(T'_{k-1}, T'_k)) P(t, T'_{k-1})$$

Das Berechnen von $(1 - P(T'_{k-1}, T'_k)) P(t, T'_{k-1})$ ergibt:

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} S_{t, T_n} \tau(T'_{2(k-1)}, T'_{2k}) P(t, T'_{2k}) = \sum_{k=1}^n (P(t, T'_{k-1}) - P(t, T'_k))$$

Da die rechte Summe eine Teleskopsumme ist, bleiben nur der erste und der letzte Summand übrig:

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} S_{t, T_n} \tau(T'_{2(k-1)}, T'_{2k}) P(t, T'_{2k}) = P(t, T'_0) - P(t, T'_n)$$

Mit $T'_0 = t$ folgt $P(t, T'_0) = P(t, t) = 1$. Wird der letzte Term der linken Summe gleichzeitig separat betrachtet, führt das zu:

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} S_{t, T_n} \tau(T'_{2(k-1)}, T'_{2k}) P(t, T'_{2k}) + S_{t, T_n} \tau(T'_{n-2}, T'_n) P(t, T'_n) = 1 - P(t, T'_n)$$

Das Lösen dieser Gleichung nach $P(t, T'_n)$ bringt, nach mehreren Umformungen, die Formel:

$$P(t, T'_n) = \frac{1 - S_{t, T_n} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \tau(T'_{2(k-1)}, T'_{2k}) P(t, T'_{2k})}{1 + S_{t, T_n} \tau(T'_{n-2}, T'_n)}$$

Dieser komplizierte Ausdruck hat keinen Bezug mehr zu halbjährlichen, sondern nur mehr zu jährlichen Zeitpunkten und kann daher einfacher dargestellt werden. Dazu seien $T_k (= T'_{2k})$ die neuen jährlichen Zahlungszeitpunkte und n bezeichne die Anzahl der jährlichen Zahlungszeitpunkte, die mit der Laufzeit des jeweiligen Swaps übereinstimmt. Dies ergibt daher folgende Darstellung für $P(t, T_n)$:

$$P(t, T_n) = \frac{1 - S_{t, T_n} \sum_{k=1}^{n-1} \tau(T_{k-1}, T_k) P(t, T_k)}{1 + S_{t, T_n} \tau(T_{n-1}, T_n)}$$

Der Vollständigkeit halber wird auch die Formel für die Swap Rate S_{t, T_n} angegeben, welche ebenfalls durch einfaches Umformen erhalten werden kann:

$$S_{t, T_n} = \frac{1 - P(t, T_n)}{\sum_{k=1}^n \tau(T_{k-1}, T_k) P(t, T_k)}$$

Um die Preise der Nullkuponanleihen $P(t, T_n)$ für die Laufzeiten $\{T_{10}, \dots, T_{42}\} = \{2 \text{ Jahre}, 3 \text{ Jahre}, \dots, 29 \text{ Jahre}, 30 \text{ Jahre}, 35 \text{ Jahren}, 40 \text{ Jahren}, 50 \text{ Jahren}, 60 \text{ Jahren}\}$ bestimmen zu können, wird obige Formel verwendet, jedoch ein wenig adaptiert. Aufgrund der Wahl von $P(t, T_8)$, dem Preis der Nullkuponanleihe mit einer Laufzeit von einem Jahr, als Startwert für die Berechnungen, und der damit verbundenen komplizierten Notation der Zeitmaße τ , gibt es

für $P(t, T_{10})$ und $P(t, T_{11})$ eine eigene Darstellung und erst ab $P(t, T_{12})$ eine allgemeine Formel:

$$P(t, T_{10}) = \frac{1 - S_{t, T_{10}} \tau(t, T_8) P(t, T_8)}{1 + S_{t, T_{10}} \tau(T_8, T_{10})}$$

$$P(t, T_{11}) = \frac{1 - S_{t, T_{11}} (\tau(t, T_8) P(t, T_8) + \tau(T_8, T_{10}) P(t, T_{10}))}{1 + S_{t, T_{11}} \tau(T_{10}, T_{11})}$$

$$P(t, T_n) = \frac{1 - S_{t, T_n} (\tau(t, T_8) P(t, T_8) + \tau(T_8, T_{10}) P(t, T_{10}) + \sum_{i=11}^{n-1} \tau(T_{i-1}, T_i) P(t, T_i))}{1 + S_{t, T_n} \tau(T_{n-1}, T_n)}$$

$$\forall n \in \{12, \dots, 42\}$$

In Tabelle 9.4 sind alle mit diesen Formeln berechneten Preise der Nullkuponanleihen aufgelistet.

In Abbildung 9.2 werden alle berechneten Preise der Nullkuponanleihen abhängig von ihrer Laufzeit dargestellt. Da diese Kurve jedoch nur Werte zu diskreten Zeitpunkten darstellt, soll sie mit Hilfe der kubischen Spline-Interpolation geglättet werden. Dazu wird die R-Funktion **spline()** verwendet. Abbildungen 9.3 zeigt die mit der **spline**-Funktion interpolierte Zero-Bond Kurve. [34]

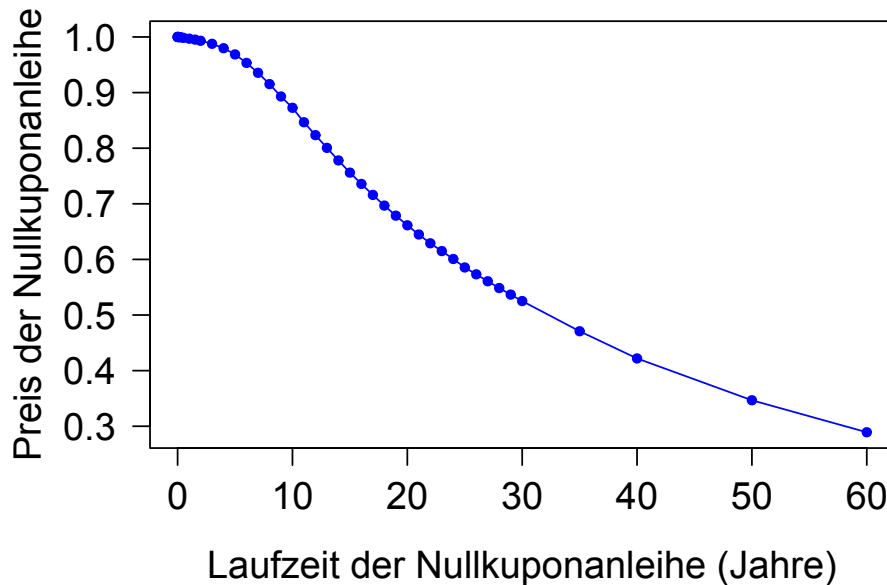


Abbildung 9.2: Zero-Bond Kurve vom 01.08.2014 mit diskreten Werten

Alle Berechnung in diesem Kapitel werden mit Hilfe der R-Funktion **Zero.Bond.Kurve()** durchgeführt. Der Code dieser Funktion, sowie die Vorbereitung zu dessen Verwendung sind im Anhang A.1 zu finden.

Zinsrate	Laufzeit	Wert in %	Zeitmaß	Preise der Nullkuponanleihen
2Y-Eur. Swap	$T_{10} = 05.08.2016$	$S_{t,T_{10}} = 0,3370$	$\tau(T_8, T_{10}) = 1,02$	$P(t, T_{10}) = 0,9932$
3Y-Eur. Swap	$T_{11} = 07.08.2017$	$S_{t,T_{11}} = 0,4055$	$\tau(T_{10}, T_{11}) = 1,02$	$P(t, T_{11}) = 0,9877$
4Y-Eur. Swap	$T_{12} = 06.08.2018$	$S_{t,T_{12}} = 0,5020$	$\tau(T_{11}, T_{12}) = 1,01$	$P(t, T_{12}) = 0,9798$
5Y-Eur. Swap	$T_{13} = 05.08.2019$	$S_{t,T_{13}} = 0,6270$	$\tau(T_{12}, T_{13}) = 1,01$	$P(t, T_{13}) = 0,9687$
6Y-Eur. Swap	$T_{14} = 05.08.2020$	$S_{t,T_{14}} = 0,7815$	$\tau(T_{13}, T_{14}) = 1,02$	$P(t, T_{14}) = 0,9534$
7Y-Eur. Swap	$T_{15} = 05.08.2021$	$S_{t,T_{15}} = 0,9315$	$\tau(T_{14}, T_{15}) = 1,01$	$P(t, T_{15}) = 0,9356$
8Y-Eur. Swap	$T_{16} = 05.08.2022$	$S_{t,T_{16}} = 1,0805$	$\tau(T_{15}, T_{16}) = 1,01$	$P(t, T_{16}) = 0,9153$
9Y-Eur. Swap	$T_{17} = 07.08.2023$	$S_{t,T_{17}} = 1,2220$	$\tau(T_{16}, T_{17}) = 1,02$	$P(t, T_{17}) = 0,8930$
10Y-Eur. Swap	$T_{18} = 05.08.2024$	$S_{t,T_{18}} = 1,3215$	$\tau(T_{17}, T_{18}) = 1,01$	$P(t, T_{18}) = 0,8727$
11Y-Eur. Swap	$T_{19} = 05.08.2025$	$S_{t,T_{19}} = 1,4610$	$\tau(T_{18}, T_{19}) = 1,01$	$P(t, T_{19}) = 0,8467$
12Y-Eur. Swap	$T_{20} = 05.08.2026$	$S_{t,T_{20}} = 1,5580$	$\tau(T_{19}, T_{20}) = 1,01$	$P(t, T_{20}) = 0,8235$
13Y-Eur. Swap	$T_{21} = 05.08.2027$	$S_{t,T_{21}} = 1,6425$	$\tau(T_{20}, T_{21}) = 1,01$	$P(t, T_{21}) = 0,8006$
14Y-Eur. Swap	$T_{22} = 07.08.2028$	$S_{t,T_{22}} = 1,7160$	$\tau(T_{21}, T_{22}) = 1,02$	$P(t, T_{22}) = 0,7780$
15Y-Eur. Swap	$T_{23} = 06.08.2029$	$S_{t,T_{23}} = 1,7805$	$\tau(T_{22}, T_{23}) = 1,01$	$P(t, T_{23}) = 0,7561$
16Y-Eur. Swap	$T_{24} = 05.08.2030$	$S_{t,T_{24}} = 1,8295$	$\tau(T_{23}, T_{24}) = 1,01$	$P(t, T_{24}) = 0,7357$
17Y-Eur. Swap	$T_{25} = 05.08.2031$	$S_{t,T_{25}} = 1,8725$	$\tau(T_{24}, T_{25}) = 1,01$	$P(t, T_{25}) = 0,7159$
18Y-Eur. Swap	$T_{26} = 05.08.2032$	$S_{t,T_{26}} = 1,9095$	$\tau(T_{25}, T_{26}) = 1,02$	$P(t, T_{26}) = 0,6968$
19Y-Eur. Swap	$T_{27} = 05.08.2033$	$S_{t,T_{27}} = 1,9395$	$\tau(T_{26}, T_{27}) = 1,01$	$P(t, T_{27}) = 0,6787$
20Y-Eur. Swap	$T_{28} = 07.08.2034$	$S_{t,T_{28}} = 1,9640$	$\tau(T_{27}, T_{28}) = 1,02$	$P(t, T_{28}) = 0,6614$
21Y-Eur. Swap	$T_{29} = 06.08.2035$	$S_{t,T_{29}} = 1,9850$	$\tau(T_{28}, T_{29}) = 1,01$	$P(t, T_{29}) = 0,6448$
22Y-Eur. Swap	$T_{30} = 05.08.2036$	$S_{t,T_{30}} = 2,0020$	$\tau(T_{29}, T_{30}) = 1,01$	$P(t, T_{30}) = 0,6290$
23Y-Eur. Swap	$T_{31} = 05.08.2037$	$S_{t,T_{31}} = 2,0100$	$\tau(T_{30}, T_{31}) = 1,01$	$P(t, T_{31}) = 0,6150$
24Y-Eur. Swap	$T_{32} = 05.08.2038$	$S_{t,T_{32}} = 2,0200$	$\tau(T_{31}, T_{32}) = 1,01$	$P(t, T_{32}) = 0,6008$
25Y-Eur. Swap	$T_{33} = 05.08.2039$	$S_{t,T_{33}} = 2,0360$	$\tau(T_{32}, T_{33}) = 1,01$	$P(t, T_{33}) = 0,5855$
26Y-Eur. Swap	$T_{34} = 06.08.2040$	$S_{t,T_{34}} = 2,0380$	$\tau(T_{33}, T_{34}) = 1,02$	$P(t, T_{34}) = 0,5732$
27Y-Eur. Swap	$T_{35} = 05.08.2041$	$S_{t,T_{35}} = 2,0425$	$\tau(T_{34}, T_{35}) = 1,01$	$P(t, T_{35}) = 0,5607$
28Y-Eur. Swap	$T_{36} = 05.08.2042$	$S_{t,T_{36}} = 2,0460$	$\tau(T_{35}, T_{36}) = 1,01$	$P(t, T_{36}) = 0,5486$
29Y-Eur. Swap	$T_{37} = 05.08.2043$	$S_{t,T_{37}} = 2,0490$	$\tau(T_{36}, T_{37}) = 1,01$	$P(t, T_{37}) = 0,5367$
30Y-Eur. Swap	$T_{38} = 05.08.2044$	$S_{t,T_{38}} = 2,0520$	$\tau(T_{37}, T_{38}) = 1,02$	$P(t, T_{38}) = 0,5251$
35Y-Eur. Swap	$T_{39} = 05.08.2049$	$S_{t,T_{39}} = 2,0725$	$\tau(T_{38}, T_{39}) = 5,07$	$P(t, T_{39}) = 0,4709$
40Y-Eur. Swap	$T_{40} = 05.08.2054$	$S_{t,T_{40}} = 2,0890$	$\tau(T_{39}, T_{40}) = 5,07$	$P(t, T_{40}) = 0,4219$
50Y-Eur. Swap	$T_{41} = 05.08.2064$	$S_{t,T_{41}} = 2,0945$	$\tau(T_{40}, T_{41}) = 10,15$	$P(t, T_{41}) = 0,3467$
60Y-Eur. Swap	$T_{42} = 06.08.2074$	$S_{t,T_{42}} = 2,0830$	$\tau(T_{41}, T_{42}) = 10,15$	$P(t, T_{42}) = 0,2892$

Tabelle 9.4: Preise der Nullkuponanleihen berechnet aus den Euribor Swaps

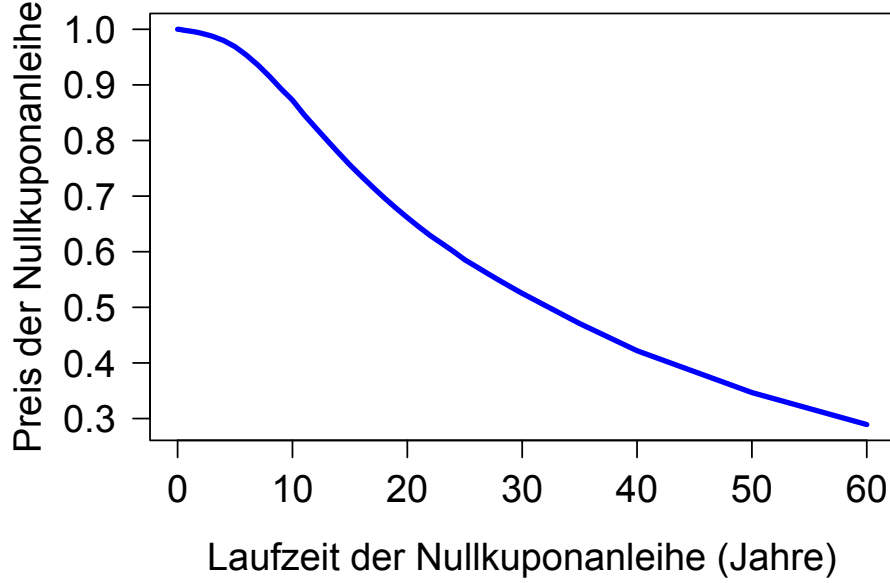


Abbildung 9.3: Zero-Bond Kurve vom 01.08.2014 mit der Spline Funktion interpoliert

9.2 Schätzung der Parameter a_r und σ_r des Hull-White-Zinsmodells

Um die fehlenden Parameter a_r und σ_r des Hull-White-Zinsmodells schätzen zu können, werden die at-the-money Payer Swaption Preise PS für eine Auswahl von Swaptions auf zwei verschiedene Arten berechnet und miteinander verglichen. Die Preise werden sowohl mit der marktabhängigen Black Formel PS^{Black} aus Definition 5.18, als auch mit der theoretischen Formel $PS^{HW}(a_r, \sigma_r)$ aus dem Hull-White-Modell aus Definition 6.8 berechnet und es wird die Summe der quadratischen Differenzen dieser Preise gebildet. Danach wird ein Optimierungsverfahren angewendet, welches jenes Paar (a_r, σ_r) findet, das die minimale Summe der quadratischen Differenzen erzeugt. Diese Kombination (a_r, σ_r) passt das Hull-White Modell an die aktuelle Marktsituation an. [19, 34]

Für die Berechnung werden Swaptions mit einer Maturity T_α und einem Tenor $T_\beta - T_\alpha$ von jeweils bis zu 30 Jahren betrachtet, genauer $T_\alpha = \{1, 2, 3, 6, 9, 12, 18 \text{ Monat(e)}\}$ und $T_\beta - T_\alpha = \{2, 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20, 25, 30 \text{ Jahre}\}$ und $T_\beta - T_\alpha = \{1, \dots, 10, 15, 20, 25, 30 \text{ Jahre}\}$. Der Abrechnungstag oder Spot date wird wieder mit t bezeichnet.

Im ersten Schritt werden die at-the-money Payer Swaption Preise PS^{Black} mit der Black Formel aus Definition 5.18 ermittelt. Mit $\mathcal{T} := \{T_\alpha, T_\beta\}$, $\tau := \tau(t, T_\alpha)$ und Nominale $N = 1$ gilt:

$$PS^{Black}(t, \mathcal{T}, \tau, N, S_{\alpha, \beta}(t), \sigma_{\alpha, \beta}) = (P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)) \left(2\Phi \left(\frac{1}{2} \sigma_{\alpha, \beta} \sqrt{\tau(t, T_\alpha)} \right) - 1 \right)$$

Während $P(t, T_\alpha)$ und $P(t, T_\beta)$ aus der in Kapitel 9.1 konstruierten Zero-Bond Kurve abgelesen werden können, sind die aktuellen impliziten at-the-money Swaption Volatilitäten $\sigma_{\alpha, \beta}$ in Bloomberg zu finden. Tabelle 9.5 und die Abbildungen 9.4 und 9.5 zeigen alle Werte der Impliziten Volatilitäten vom 01.08.2014, abhängig von der Maturity und dem Tenor.

$\sigma_{\alpha,\beta}$ Maturity/Tenor	1 J.	2 J.	3 J.	4 J.	5 J.	6 J.	7 J.	8 J.	9 J.	10 J.	15 J.	20 J.	25 J.	30 J.
1 Monat	68,8	57,1	53,6	46,3	38,8	33,4	29,5	26,6	24,4	22,7	18,3	17,0	16,6	16,5
2 Monate	70,3	58,5	55,3	48,5	41,2	35,4	31,6	28,8	26,7	25,1	20,2	18,5	18,0	17,8
3 Monate	78,8	61,9	59,1	52,4	45,6	39,7	35,4	32,2	29,6	27,6	22,3	20,5	19,7	19,4
6 Monate	82,4	65,1	58,3	51,5	45,8	40,6	36,7	33,6	31,1	29,1	23,7	22,0	21,3	21,1
9 Monate	83,8	64,4	58,1	51,3	45,0	39,8	36,2	33,4	31,2	29,5	24,4	22,7	22,1	21,8
12 Monate	81,3	61,4	54,9	48,9	43,8	39,5	36,0	33,3	31,1	29,3	24,7	22,9	22,5	22,1
18 Monate	76,2	56,5	49,7	45,1	41,1	37,2	34,3	32,1	30,3	28,8	24,5	23,3	22,8	22,5
2 Jahre	67,8	52,1	46,3	42,3	38,8	35,5	32,9	30,9	29,3	28,0	24,4	23,3	23,0	22,7
3 Jahre	52,0	42,9	39,3	36,6	33,9	31,7	29,9	28,5	27,3	26,4	23,8	23,1	22,9	22,7
4 Jahre	43,5	37,1	34,1	32,0	30,1	28,7	27,7	26,7	25,9	25,1	23,3	22,9	22,8	22,5
5 Jahre	36,8	32,3	30,1	28,6	27,4	26,5	25,8	25,2	24,7	24,3	23,0	22,7	22,6	22,2
7 Jahre	28,0	25,9	24,9	24,1	23,6	23,3	23,0	22,9	22,8	22,6	21,7	21,4	21,0	20,6
10 Jahre	22,8	21,8	21,5	21,6	21,5	21,5	21,5	21,6	21,7	21,7	20,7	20,1	19,4	18,6
15 Jahre	21,4	21,1	21,2	21,4	21,6	21,6	21,6	21,6	21,7	21,5	19,7	18,4	17,3	16,4
20 Jahre	21,8	21,5	21,5	21,5	21,6	21,5	21,5	21,4	21,3	20,9	18,4	16,5	15,5	14,6
25 Jahre	21,7	21,6	21,6	21,5	21,4	21,0	20,7	20,3	20,0	19,6	16,7	14,7	14,1	13,1
30 Jahre	21,1	20,1	19,9	19,6	19,2	18,7	18,4	18,1	17,7	17,3	14,7	13,4	12,7	11,8

Tabelle 9.5: Implizite at-the-money Swaption Volatilitäten $\sigma_{\alpha,\beta}$ vom 01.08.2014 aus Bloomberg

Implizite ATM Swaption Volatilitäten

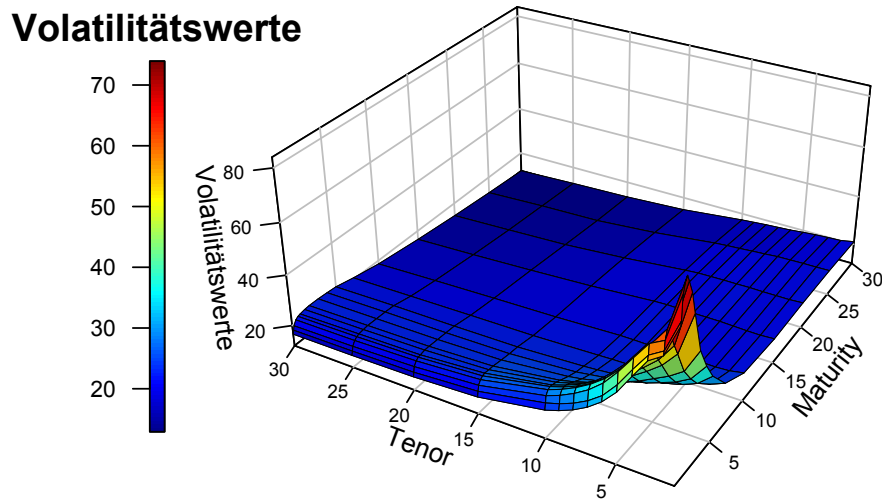


Abbildung 9.4: Implizite at-the-money Swaption Volatilitäten $\sigma_{\alpha,\beta}$ vom 01.08.2014

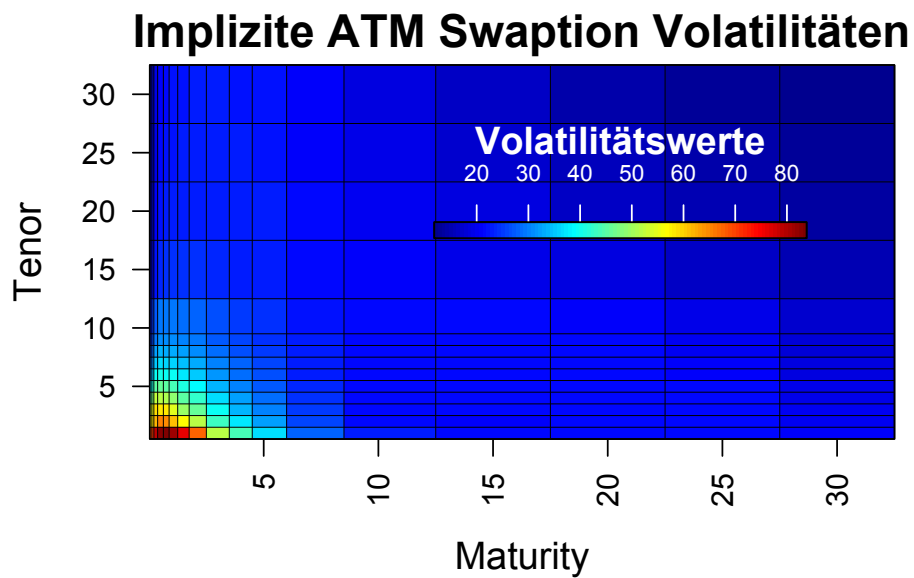


Abbildung 9.5: Implizite at-the-money Swaption Volatilitäten $\sigma_{\alpha,\beta}$ vom 01.08.2014

Im zweiten Schritt werden die at-the-money Payer Swaption Preise PS^{HW} mit der Formel aus dem Hull-White Modell (Definition 6.8) ermittelt. Mit den Auszahlungzeitpunkten $T_i \in \mathcal{T} := \{T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta\}$ und Nominale $N = 1$ gilt: [8, 34]

$$PS^{HW}(t, T_\alpha, \mathcal{T}, N, S_{\alpha, \beta}(t), a_r, \sigma_r) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i ZBP(t, T_\alpha, T_i, X_i)$$

wobei

$$ZBP(t, T_\alpha, T_i, X_i) = X_i P(t, T_\alpha) \Phi(-h + \sigma_p) - P(t, T_i) \Phi(-h)$$

mit

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \left(\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_\alpha) X_i} \right) + \frac{\sigma_p}{2}$$

$$\sigma_p = \sigma_r \sqrt{\frac{1 - e^{-2a_r \tau(t, T_\alpha)}}{2a_r}} B(T_\alpha, T_i)$$

$$X_i = A(T_\alpha, T_i) e^{-B(T_\alpha, T_i) r^*}$$

$$A(T_\alpha, T_i) = \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_\alpha)} e^{B(T_\alpha, T_i) f(t, T_\alpha) - \frac{\sigma_r^2}{4a_r} (1 - e^{-2a_r \tau(t, T_\alpha)}) B(T_\alpha, T_i)^2}$$

$$B(T_\alpha, T_i) = \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r \tau(T_\alpha, T_i)})$$

$$f(t, T_\alpha) = -\frac{\partial \ln(P(t, T_\alpha))}{\partial t}$$

und r^* sei jener Zinssatz, sodass

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i A(T_\alpha, T_i) e^{-B(T_\alpha, T_i) r^*} = 1$$

mit

$$c_i = \begin{cases} S_{\alpha, \beta}(t) \tau(T_{i-1}, T_i) & \text{für } i = \alpha + 1, \dots, \beta - 1 \\ 1 + S_{\alpha, \beta}(t) \tau(T_{i-1}, T_i) & \text{für } i = \beta \end{cases}$$

$$S_{\alpha, \beta}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau(T_{i-1}, T_i) P(t, T_i)}$$

Die Werte für $P(t, T_\alpha)$, $P(t, T_\beta)$ und $P(t, T_i)$ können aus der in Kapitel 9.1 konstruierten Zero-Bond Kurve erhalten werden.

Im dritten und letzten Schritt wird die Summe der quadratischen Differenzen

$$\Psi = \sum_{\alpha, \beta} (PS^{Black} - PS^{HW})^2$$

ermittelt.

Die R-Funktion **ATMPayerSwaptionPreise()** berechnet Ψ für ein beliebiges Paar (a_r, σ_r) . Jenes Paar (a_r, σ_r) , welches das kleinste Ψ erzeugt, ist das optimale Paar, um das Hull White Modell an die aktuelle Marktsituation anzupassen. Dazu wird die R-Funktion **optim()** auf **ATMPayerSwaptionPreise()** angewendet, welche das minimale Ψ mit dem dazugehörigem Paar (a_r, σ_r) mit Hilfe des Nelder-Mead Optimierungsverfahren ermittelt [34]. Die optimalen Parameter werden in Tabelle 9.6 dargestellt.

Paramter	Wert
a_r	0,0381
σ_r	0,0075
Ψ	0,0055

Tabelle 9.6: Die optimalen Parameter a_r und σ_r des Hull-White Modells mit dazugehörigem Ψ

Der R-Code der Funktion **ATMPayerSwaptionPreise()**, sowie die Teilergebnisse PS^{Black} und PS^{HW} , und die Anwendung des Optimierungsverfahren **optim()** werden im Anhang A.2 dargestellt und erklärt.

9.3 Kalibrierung der Korrelation zwischen Aktie und Zins

Die Korrelation ρ_{Sr} soll den Zusammenhang und die gegenseitigen Auswirkungen zwischen der Aktie und dem Zins bestmöglich beschreiben. Es ist daher interessant, wie stark sich Veränderungen des Aktienkurses auf den Zinskurs auswirken und umgekehrt. Da es am Markt keine Größe gibt, welche diese Korrelation widerspiegelt, folgen wir der Idee aus [19].

Zuerst wird ein Index gesucht, welcher einen Aktienkurs im Europäischen Raum bestmöglich repräsentiert. Dazu wird der auch schon in [19] verwendete EuroStoxx 50 gewählt. Der EuroStoxx 50 ist ein Aktienindex bestehend aus den 50 größten Blue Chips des Euroraums. Als Blue Chips werden die Aktien der größten börsennotierten Unternehmen bezeichnet. Diese Unternehmen zeichnen sich in der Regel durch einen hohen Börsenwert und ein großes Handelsvolumen aus. Da Blue Chips im Vergleich zu anderen Aktien verhältnismäßig selten überraschende Kurschwankungen erleben, sind sie bei Anlegern als sichere Aktien beliebt und gut zur Beschreibung der aktuellen Lage am Aktienmarkt geeignet. [1, 25, 23]

Den EuroStoxx 50 gibt es seit 1998, wobei das Unternehmen Stoxx Limited für die Berechnung und Zusammensetzung verantwortlich ist. Einmal jährlich wird überprüft, ob die beteiligten Aktiengesellschaften alle notwendigen Anforderungen erfüllen und die Auswahl gegebenenfalls überarbeitet und ausgetauscht. Die derzeit am stärksten vertretenen Länder sind Frankreich, Deutschland, Spanien, Italien und Holland, und die bedeutendsten Branchen der Banken- und Versicherungssektor, die Energie-, Öl- und Gaskonzerne, Telekommunikationsunternehmen, Chemiekonzerne und Nahrungsmittelriesen. [1, 25, 23]

Obwohl es den EuroStoxx 50 erst seit 1998 gibt, wurden die Werte bis zum 31.12.1986 zurückgerechnet. Der gesamte Börsenkurs des EuroStoxx 50 ist auf [27] als *.txt* Datei zu finden und wird in Abbildung 9.6 dargestellt.

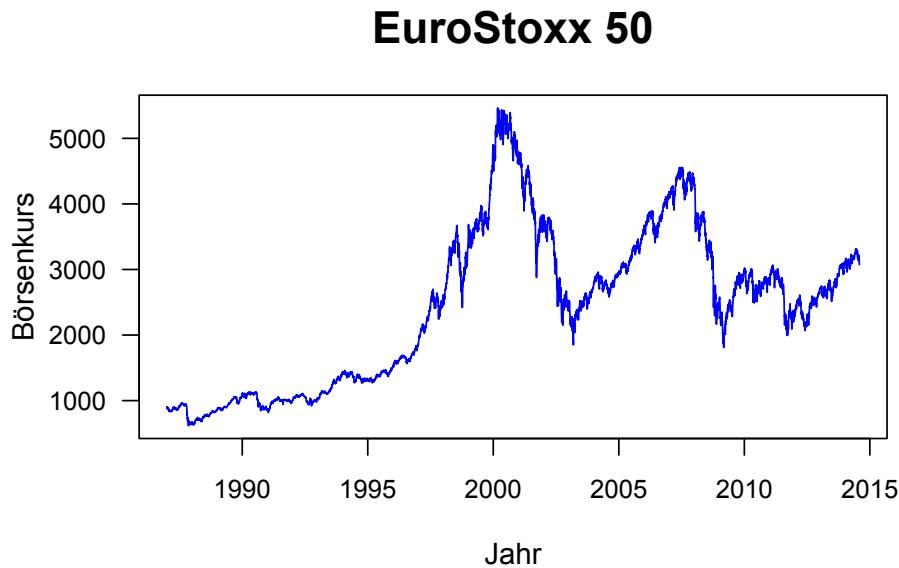


Abbildung 9.6: Börsenkurs des EuroStoxx 50 von 31.12.1986 bis 01.08.2014 [27]

Für den Zinskurs wird der bereits vorgestellte 3-Monats-Euribor verwendet [19]. Derzeit melden 32 verschiedene europäische Kreditinstitute täglich den Zinssatz, zu welchem sie anderen Banken Anleihen mit einer Laufzeit von 3 Monaten in Euro gewähren. Der sich daraus ergebende Durchschnittszinssatz ist der sogenannte 3-Monats-Euribor. Die Werte des 3-Monats-Euribors wurden von [31] zusammengestellt und sind in Abbildung 9.7 zu sehen. Bloomberg würde sowohl diese Daten, als auch jene des EuroStoxx 50 ebenfalls zur Verfügung stellen, es soll in diesem Fall jedoch eine kostenlose Alternativen aufgezeigt werden. [29, 12, 30]

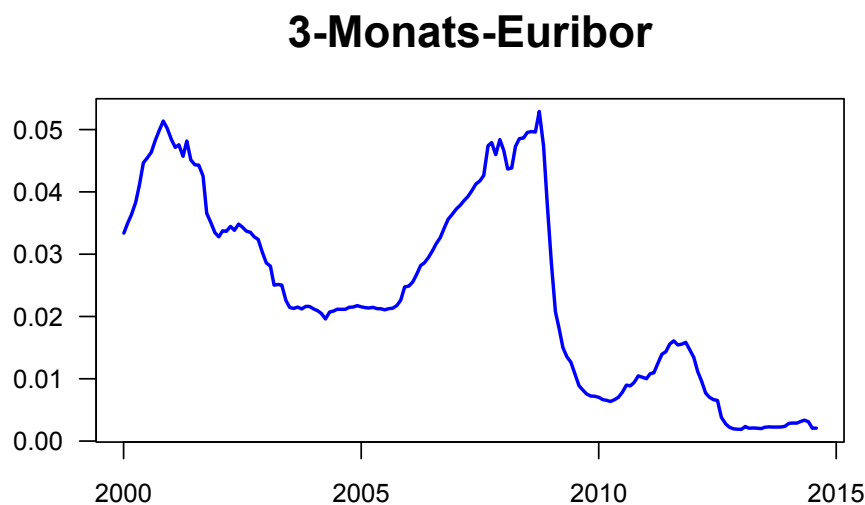


Abbildung 9.7: Werte des 3-Monats-Euribors von 03.01.2000 bis 01.08.2014 [31]

Um die Veränderung des Aktien- und Zinskurses gut darzustellen, werden der EuroStoxx 50 S_t und der 3-Monats-Euribor r_t jeweils zur gleichen Zeit am Anfang jedes Monats seit dem Jahr 2000 betrachtet und die Log-returns des EuroStoxx 50, $\ln\left(\frac{S_t}{S_{t+1}}\right)$, sowie die absoluten Differenzen des 3-Monats-Euribors, $|r_t - r_{t+1}|$ berechnet [19]. In Tabelle 9.7 sind ein Teil dieser Werte dargestellt.

Datum	EuroStoxx 50 S_t	$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t+1}}\right)$	3-Monats-Euribor r_t	$ r_t - r_{t+1} $
03.01.2000	4849,2	0,01187	0,03338	0,00158
01.02.2000	4792,0	-0,08844	0,03496	0,00137
01.03.2000	5235,1	0,02256	0,03633	0,00200
03.04.2000	5118,3	-0,03662	0,03833	0,00271
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
01.04.2014	3186,3	-0,00385	0,00313	0,00023
01.05.2014	3198,6	-0,01526	0,00336	0,00027
02.06.2014	3247,8	-0,00335	0,00309	0,00103
01.07.2014	3258,7	0,05884	0,00206	0,00002
01.08.2014	3072,5		0,00208	

Tabelle 9.7: EuroStoxx 50 und dessen Log-returns, sowie 3-Monats-Euribor und dessen absoluten Differenzen auf monatlicher Basis ab dem Jahr 2000. [27, 31]

Die Korrelation ρ_{Sr} zwischen Aktie und Zins ist nun die Korrelation zwischen den EuroStoxx 50 Log-returns und den absoluten 3-Monats-Euribor Differenzen. Mit Hilfe der Excel-Funktion **Korrel()** wird folgendes Ergebnis für ρ_{Sr} erzielt:

Korrelation ρ_{Sr}
0,1842

Tabelle 9.8: Korrelation zwischen Aktie und Zins ρ_{Sr}

9.4 Kalibrierung der impliziten Aktienvolatilität

Die implizite Aktienvolatilität σ_S beschreibt die in der Zukunft zu erwartende Schwankungsintensität der Aktien. Um einen geeigneten Wert für diese Volatilität zu bekommen, wird von [19] der Volatilitätsindex VStoxx als Approximation vorgeschlagen.

Der VStoxx oder EuroStoxx 50 Volatility Index misst die zu erwartende Volatilität der EuroStoxx 50 Aktien der zukünftigen 30 Tage anhand ihrer Optionspreise für verschiedene Laufzeiten. Der VStoxx wird für Laufzeiten von einem Monat bis zu zwei Jahren berechnet, wobei der Haupt-VStoxx aus der Linearen Interpolation zweier Sub-Indizes erhalten werden kann. Das Berechnungsmodell wurde von Goldman Sachs und der Deutschen Börse entwickelt und die Werte sind auf Bloomberg oder kostenlos bei [28] zu finden. [26, 24]

Während Abbildung 9.8 den historischen Verlauf des Haupt-VStoxx darstellt, zeigt Abbildung 9.9 die Werte aller VStoxxs' für den 01.08.2014 abhängig von den Laufzeiten.

Die implizite Aktienvolatilität wurde für die Berechnung des Preises des Versicherungsproduktes konstant gewählt. Da die Versicherungsprodukte üblicherweise eine Laufzeit haben, welche

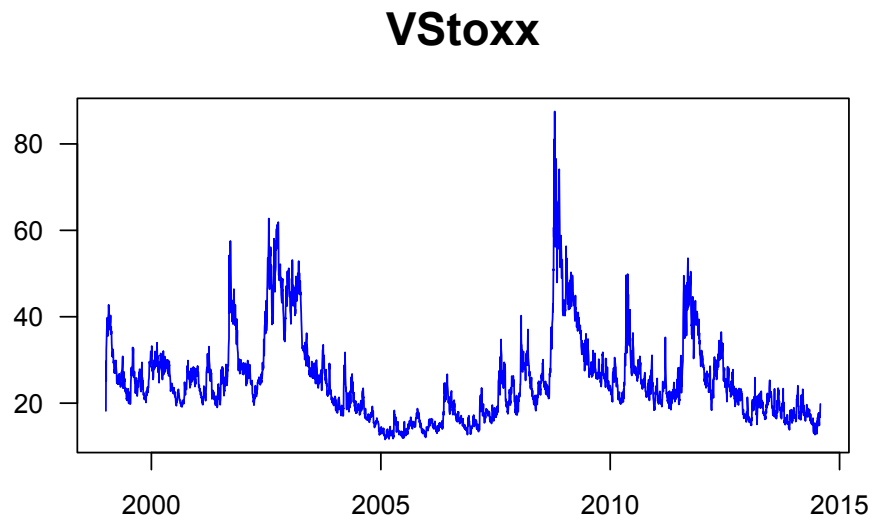


Abbildung 9.8: Werte des Haupt-VStoxx von 04.01.1999 bis 01.08.2014 [28]

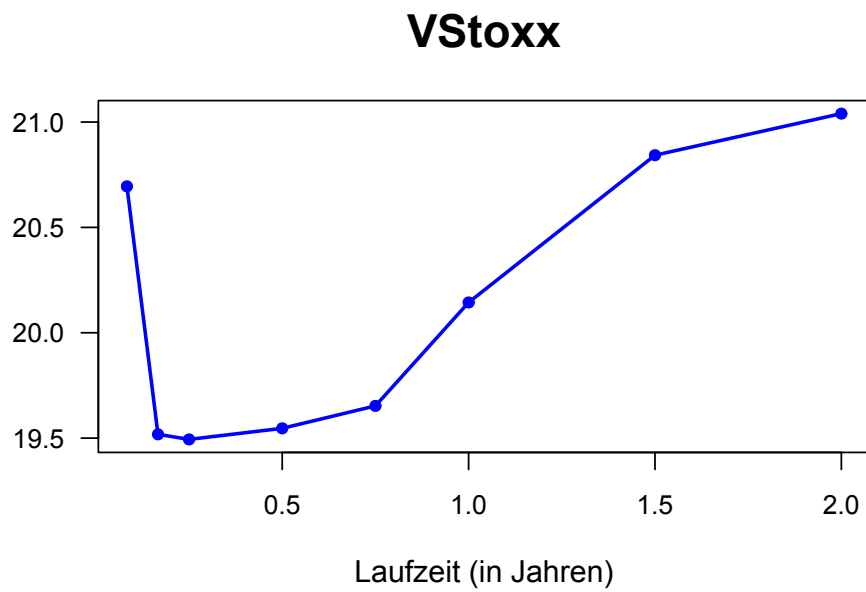


Abbildung 9.9: Werte des VStoxx vom 01.08.2014 abhängig von der Laufzeit [28]

größer als 2 Jahre ist, wird der VStoxx mit der längsten Laufzeit, also jener mit einer Laufzeit von 2 Jahren, gewählt. In diesem Fall hat die implizite Aktienvolatilität σ_S somit folgenden Wert:

implizite Aktienvolatilität σ_S
0,2104

Tabelle 9.9: Implizite Aktienvolatilität σ_S

9.5 Parameter für das Sterblichkeitsmodell

Da in dieser Arbeit das Hauptaugenmerk auf das Finanzmarktmodell und nicht auf das Sterblichkeitsmodell gelegt wird, werden die notwendigen Parameter, welche für das Sterblichkeitsmodell gebraucht werden, direkt aus [19] übernommen. Die Methoden der Parameterschätzung kann der interessierte Leser in [19] nachlesen.

Sowohl für den weiblichen, als auch den männlichen Versicherungsnehmer gibt es Werte für b , m , k , γ und σ :

	b	m	k	γ	σ
♀	7,80	88,09	0,5529	0,0223	0,0512
♂	9,57	83,89	0,4301	0,0179	0,0485

Tabelle 9.10: Parameter des Sterblichkeitsmodells [19]

Kapitel 10

Der faire Preis der GMABs mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung

Nachdem alle für unsere Formel benötigten Parameter kalibriert wurden, kann der faire Preis eines GMABs mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung aus Kapitel 2.2 berechnet werden. Mit

- dem Alter x des Versicherungsnehmers,
- der Sparprämie P ,
- der Vertragslaufzeit T und
- der Roll-up Rate δ

ist der faire Preis dieses Versicherungsprodukts durch die geschlossene Formel aus Theorem 8.1 gegeben:

$$\begin{aligned} V(0) = & P \cdot \left[\Phi \left(\frac{\mu_{Y(T)} - \delta T}{\sigma_{Y(T)}} \right) + e^{\delta T - \mu_{Y(T)} + \frac{1}{2} \sigma_{Y(T)}^2} \Phi \left(\frac{\delta T + \sigma_{Y(T)}^2 - \mu_{Y(T)}}{\sigma_{Y(T)}} \right) \right] p_x(0, T - 1) \\ & + P \cdot \sum_{t=1}^{T-1} \left[\Phi \left(\frac{\mu_{Y(t)} - \delta t}{\sigma_{Y(t)}} \right) + e^{\delta t - \mu_{Y(t)} + \frac{1}{2} \sigma_{Y(t)}^2} \Phi \left(\frac{\delta t + \sigma_{Y(t)}^2 - \mu_{Y(t)}}{\sigma_{Y(t)}} \right) \right] (p_x(0, t - 1) - p_x(0, t)) \end{aligned}$$

wobei $\sigma_{Y(T)}^2$ und $\mu_{Y(T)}$ den Erwartungswert und die Varianz von $Y(T)$ unter Aktienmaß $\mathbb{Q}^S$ darstellen. Für unsere Berechnungen wird von einer konstanten Aktienvolatilität σ_S ausgegangen. Daher haben $\sigma_{Y(T)}^2$ und $\mu_{Y(T)}$ folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \mu_{Y(T)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T)|\mathcal{F}_0] \\ &= -\ln P(0, T) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) + \\ &\quad + \frac{\sigma_S \sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \left(T - \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) \right) + \frac{1}{2} \sigma_S^2 T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{Y(T)}^2 &= \mathbb{V}_{\mathbb{Q}^S}[Y(T)|\mathcal{F}_0] \\ &= \frac{\sigma_r^2}{a_r^2} \left(T - \frac{2}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) + \frac{1}{2a_r} (1 - e^{-2a_r T}) \right) + \\ &\quad + \frac{2\sigma_S \sigma_r \rho_{Sr}}{a_r} \left(T - \frac{1}{a_r} (1 - e^{-a_r T}) \right) + \sigma_S^2 T\end{aligned}$$

mit

- dem Preis einer Nullkuponanleihe $P(0, T)$ mit Laufzeit T ,
- den Parametern a_r und σ_r des Hull-White Zinsmodells,
- der Volatilität der Aktie σ_S und
- der Korrelation ρ_{Sr} zwischen Aktie und Zins.

Aus Kapitel 9 sind neben der Zero-Bond Kurve folgende Parameterwerte bekannt:

a_r	σ_r	σ_S	ρ_{Sr}
0,0381	0,0075	0,2104	0,1842

Tabelle 10.1: Parameter des Finanzmarktmodells

Für die Überlebenswahrscheinlichkeiten $p_x(0, T)$ gilt:

$$p_x(0, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T \lambda_{x+s}(s) ds} \right] = e^{C_\lambda(0, T) - D_\lambda(0, T) \lambda_x(0)}$$

wobei $C_\lambda(0, T)$ und $D_\lambda(0, T)$ folgendermaßen gegeben sind:

$$\begin{aligned}D_\lambda(0, T) &= \frac{1 - e^{-c_3 T}}{c_3} \\ C_\lambda(0, T) &= \frac{c_1}{c_2 c_3} (1 - e^{c_2 T}) - \frac{c_1}{c_3 (c_2 + c_3)} (e^{-c_3 T} - e^{c_2 T}) - \frac{c_4^2}{4c_3^2 c_5} (1 - e^{2c_5 T}) \\ &\quad + \frac{c_4^2}{c_3^2} \frac{1}{2c_5 + c_3} (e^{-c_3 T} - e^{2c_5 T}) - \frac{c_4^2}{4c_3^2 (c_3 + c_5)} (e^{-2c_3 T} - e^{2c_5 T})\end{aligned}$$

mit

$$c_1 := \frac{k_\xi}{b} e^{\frac{x-m}{b}}, \quad c_2 := \frac{1}{b} - \gamma_\xi, \quad c_3 := k_\xi - \frac{1}{b}, \quad c_4 := \frac{\sigma_\xi}{b} e^{\frac{x-m}{b}} \quad \text{und} \quad c_5 := \frac{1}{b}$$

und

$$\lambda_x(0) := \frac{1}{b} e^{\frac{x-m}{b}}$$

Die Parameter des Sterblichkeitsmodells werden, wie in Kapitel 9.5 beschrieben, direkt aus [19] übernommen und sind in Tabelle 10.2 zu finden.

In den folgenden Abbildungen werden die Preise der speziellen GMABs mit einer Sparprämie von $P = 1.000$, diverser Roll-up Raten $\delta \in \{0\%, 0,5\%, 1\%, 2\%, 3\%\}$, verschiedener Laufzeiten (1

	b	m	k	γ	σ
♀	7,80	88,09	0,5529	0,0223	0,0512
♂	9,57	83,89	0,4301	0,0179	0,0485

Tabelle 10.2: Parameter des Sterblichkeitsmodells [19]

bis 60 Jahre) und unterschiedlich alten Versicherungsnehmern (1 bis 60 Jahre) dargestellt. Dabei wird zusätzlich zwischen männlichem und weiblichem Versicherungsnehmer unterschieden. Die Preise werden mit Hilfe der R-Funktion **Preis()** berechnet, wobei der R-Code im Anhang A.3 zu finden ist.

In Abbildung 10.1 werden die Preise des GMABs mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung aus Kapitel 2.2 für 1- bis 60-jährige Versicherungsnehmer mit 1- bis 60-jähriger Vertragslaufzeit und einer Roll-up Rate von 0% abgebildet. Auf der linken Seite sind die Preise für weibliche, auf der rechten Seite jene für männliche Versicherungsnehmer dargestellt. Auf dem ersten Blick lässt sich jedoch erkennen, dass es kaum preisliche Unterschiede zwischen weiblichen und männlichen Versicherungsnehmern gibt.

Es wird nun die Preisentwicklung des Versicherungsprodukts anhand eines 25-jährigen Versicherungsnehmers betrachtet. Auch wenn der Preis für ein- bis zweijährige Vertragslaufzeiten im Vergleich zu längeren Laufzeiten niedrig ist, steigt dieser bis zu einer Laufzeit von 10 Jahren kontinuierlich an, wo er auch sein Maximum erreicht. Nach einem geringem Abfall bei einer Laufzeit von 10 bis 20 Jahren hält sich der Preis bis zu einer Laufzeit von 35 Jahren stabil. Für Produkte mit einer Vertragslaufzeit bis zu 35 Jahren spielt das Alter des Versicherungsnehmer eine sehr geringe Rolle, da die Preise fast keine Unterschiede aufweisen. Bei Produkten mit einer Laufzeit von mehr als 35 Jahren sinkt der Preis zwar nochmals mit der Vertragsdauer des Versicherungsprodukts, der Fall des Preises ist für jüngere Versicherungsnehmer jedoch stärker erkennbar, als für ältere.

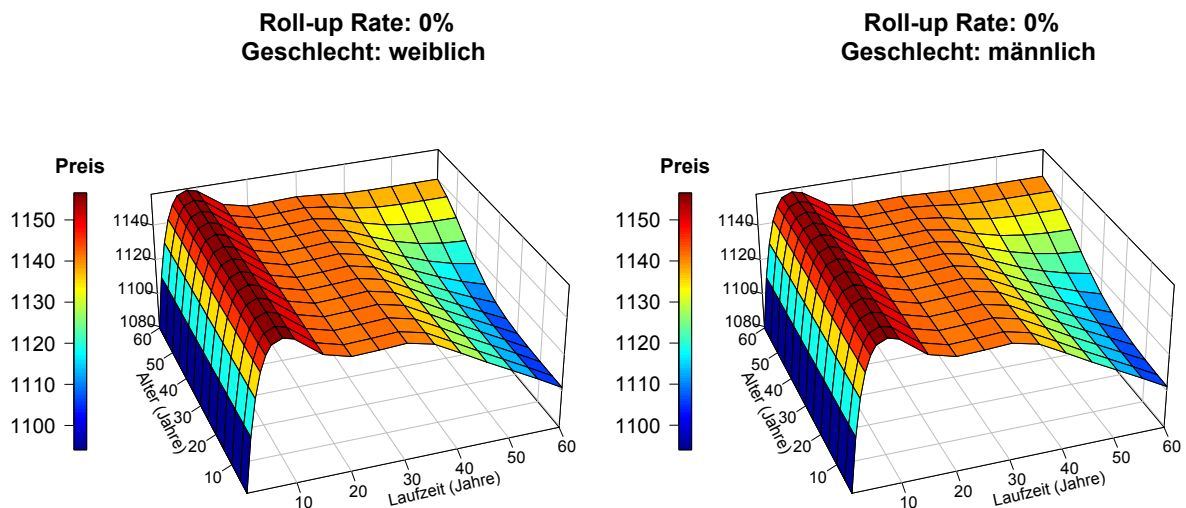


Abbildung 10.1: Preise des GMABs mit einer Roll-up Rate von 0%

Wird die Roll-up Rate auf 0,5% erhöht, siehe dazu Abbildung 10.2, ist für eine Vertragslaufzeit bis zu 10 Jahren ein ähnliches Verhalten des Preises erkennbar. Nach einer stabileren Phase bei einer Laufzeit von 10 bis 20 Jahren steigt der Preis jedoch nochmals an, bis er bei einer

Laufzeit von 35 Jahren sein Maximum erreicht. Für längere Laufzeiten fällt der Preis wieder und verhält sich analog zum ersten Fall.

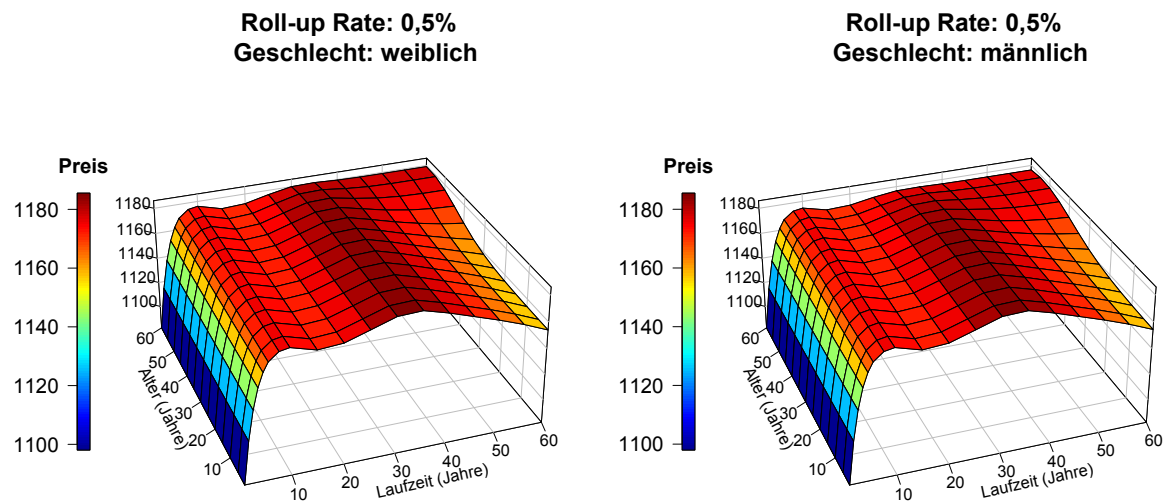


Abbildung 10.2: Preise des GMABs mit einer Roll-up Rate von 0,5%

Bei einer Roll-up Rate von 1% zeigt sich in Abbildung 10.3, abgesehen von generell höheren Preisen, ein Unterschied bei längeren Vertragslaufzeiten. Hier bleiben die Preise ab einer Laufzeit von 35 Jahren stabil und es sind kaum Unterschiede zwischen älteren und jüngeren Versicherungsnehmern erkennbar.

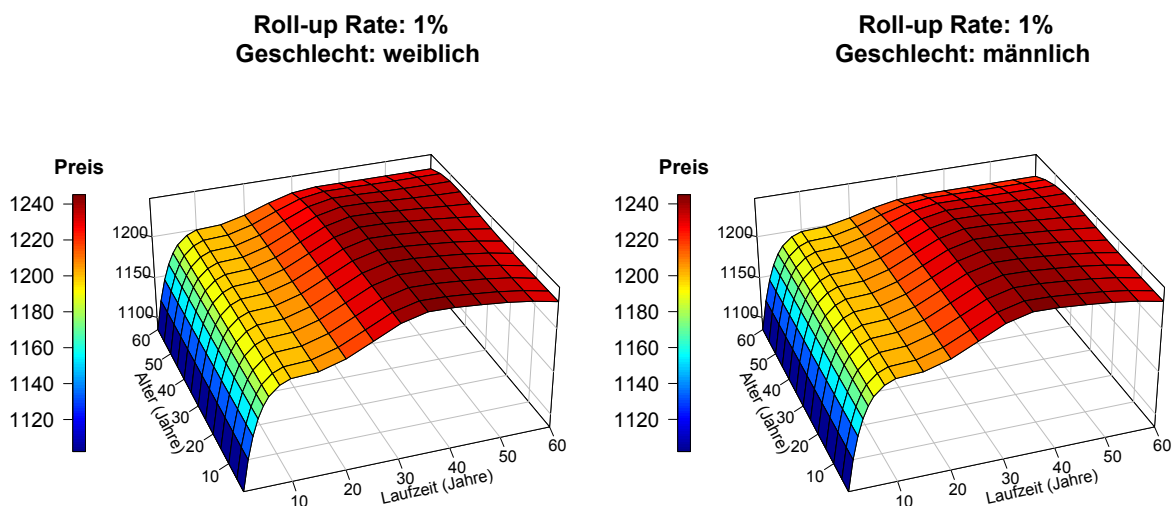


Abbildung 10.3: Preise des GMABs mit einer Roll-up Rate von 1%

Ab einer Roll-up Rate von 2% steigen die Preise auch bei längeren Vertragslaufzeiten kontinuierlich an, wobei der Anstieg bei jüngeren Versicherungsnehmern deutlich stärker ausfällt. Darüber hinaus steigen auch die Preise des Versicherungsprodukts, wenn die Roll-up Rate erhöht wird. Betrachte dazu Abbildung 10.4 und 10.5.

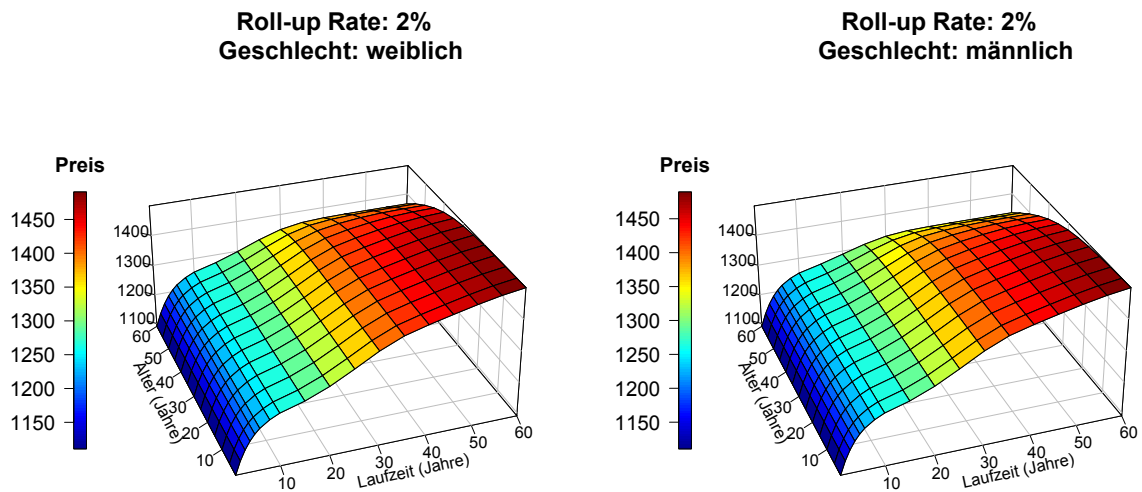


Abbildung 10.4: Preise des GMABs mit einer Roll-up Rate von 2%

Je höher die Roll-up Rate gewählt wird, desto höher sind die Preise des Versicherungsprodukts. Bei älteren Versicherungsnehmern ist der Anstieg jedoch aufgrund der zukünftigen Lebenserwartung deutlich geringer.

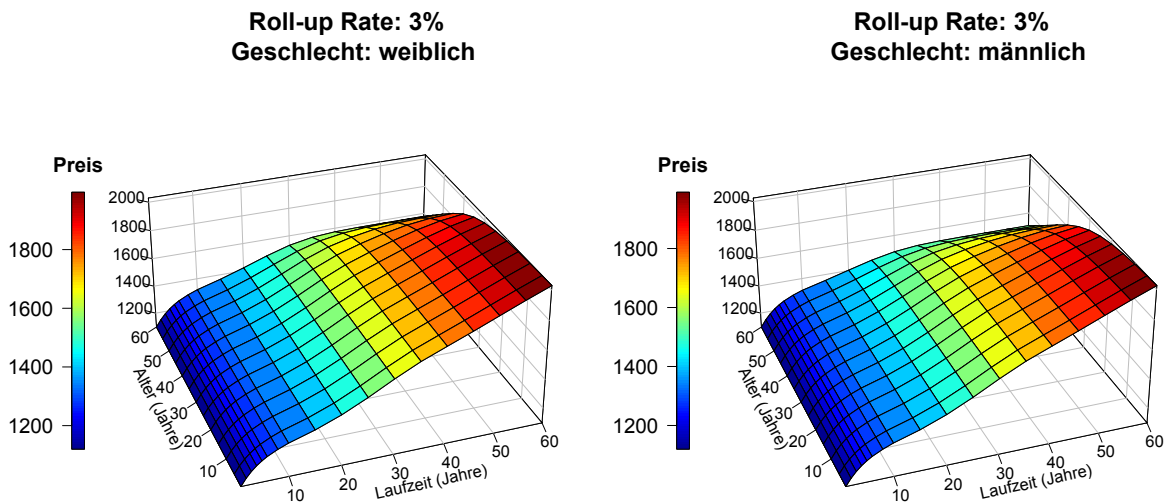


Abbildung 10.5: Preise des GMABs mit einer Roll-up Rate von 3%

Literaturverzeichnis

- [1] AG WALLSTREET:ONLINE: *EuroStoxx 50*. <http://www.wallstreet-online.de/indizes/euro-stoxx-50>, 06 2014. zuletzt abgerufen: 22.06.2014.
- [2] BACINELLO, ANNA RITA; MILLOSOVICH, PIETRO; OLIVIERI ANNAMARIA und ERMANO PITACCO: *Variable annuities: A unifying valuation approach*. Insurance: Mathematics and Economics, 49(3):285–297, 2011.
- [3] BAUER, DANIEL; KLING, ALEXANDER und JOCHEN RUSS: *A universal pricing framework for guaranteed minimum benefits in variable annuities*. www.ifa-ulm.de/fileadmin/user_upload/download/forschung/2008_ifa_Bauer-et_al_A-Universal-Pricing-Framework-for-Guaranteed-Minimum-Benefits-in-Variable-Annuities.pdf, 2008. zuletzt abgerufen: 24.06.2014 auf <http://www.ifa-ulm.de/index.php?id=197>.
- [4] BINGHAM, NICHOLAS H. und RÜDIGER KIESEL: *Risk-neutral valuation; pricing and hedging of financial derivatives*. Springer finance. Springer, London [u.a.], 1998.
- [5] BJÖRK, TOMAS: *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford Univ. Press, Oxford [u.a.], 2. ed., 1. publ. Auflage, 2004.
- [6] BLACK, FISCHER und MYRON SCHOLES: *The pricing of options and corporate liabilities*. The Journal of Political Economy, Seiten 637–654, 1973.
- [7] BOWERS, N.L.; GERBER, H.U.; HICKMAN J.C.; JONES D.A. und C.J. NISBITT: *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, 1997.
- [8] BRIGO, DAMIANO und FABIO MERCURIO: *Interest rate models; theory and practice ; with smile, inflation and credit*. Springer finance. Springer, Berlin [u.a.], 2. ed., corr. 3. print. Auflage, 2007.
- [9] DAHL, MIKKEL: *Stochastic mortality in life insurance: market reserves and mortality-linked insurance contracts*. Insurance: Mathematics and Economics, 35(1):113 – 136, 2004.
- [10] DAHL, MIKKEL und THOMAS MØLLER: *Valuation and hedging of life insurance liabilities with systematic mortality risk*. Insurance: Mathematics and Economics, 39(2):193 – 217, 2006.
- [11] DELBAEN, F. und W. SCHACHERMAYER: *The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes*. Mathematische Annalen, 312:215–250, 1996.
- [12] FEDERATION, EUROPEAN BANKING: *Euribor und Eonia*. <http://www.euribor-ebf.eu/euribor-org/about-euribor.html> und <http://www.euribor-ebf.eu/euribor-eonia-org/about-eonia.html>, 06 2014. zuletzt abgerufen: 28.06.2014 auf <http://www.euribor-ebf.eu/>.

- [13] FILIPOVIĆ, DAMIR: *Term-structure models; a graduate course*. Springer finance : Textbook. Springer, Berlin [u.a.], 2009.
- [14] GEMAN, HELYETTE; EL KAROUI, NICOLE und JEAN-CHARLES ROCHET: *Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing*. Journal of Applied Probability, 32:443–458, 1995.
- [15] HEUSER, HARRO: *Gewöhnliche Differentialgleichungen; Einführung in Lehre und Gebrauch*. Studium. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 6., aktualisierte Aufl. Auflage, 2009.
- [16] KELLER-RESSEL, MARTIN: *Stochastische Analysis*. <http://page.math.tu-berlin.de/~mkeller/index.php?target=teaching>, 7 2012. zuletzt abgerufen: 18.08.2014 auf page.math.tu-berlin.de/~mkeller/stochana/stochana_kap3.pdf.
- [17] KERSTING, GÖTZ und ANTON WAKOLBINGER: *Stochastische Prozesse*. Mathematik Kompakt. Springer Basel, 2014.
- [18] KLING, ALEXANDER und JOCHEN RUSS: *Produktinnovationen made in USA*. www.ifa-uhl.de/fileadmin/user_upload/download/sonstiges/2009_ifa_Kling-Russ-Produktinnovationen-made-in-USA.pdf, 5 2009. zuletzt abgerufen: 24.06.2014 auf <http://www.ifa-uhl.de/index.php?id=254>.
- [19] KRAYZLER, M.; ZAGST, R. und B. BRUNNER: *Closed-form solutions for guaranteed minimum accumulation benefits*. submitted paper, 2013.
- [20] ØKSENDAL, BERNT K.: *Stochastic differential equations; an introduction with applications*. Universitext. Springer, Berlin [u.a.], 5. ed. Auflage, 1998.
- [21] KUSOLITSCH, NORBERT: *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie; Eine Einführung*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2. Auflage, 2014.
- [22] LIFE, SWISS: *Themenschwerpunkt Variable Annuities*. 7 2011. zuletzt abgerufen: 14.08.2014 auf www.vorsorge-know-how.de/uploads/media/2011-variable-annuities.pdf.
- [23] LIMITED, STOXX: *EURO STOXX 50® Index*. www.stoxx.com/download/indices/factsheets/sx5e_fs.pdf, 04 2014. zuletzt abgerufen: 22.06.2014 auf http://www.stoxx.com/indices/index_information.html?symbol= SX5E.
- [24] LIMITED, STOXX: *EURO STOXX 50® VOLATILITY INDICES (VSTOXX®)*. www.stoxx.com/download/indices/factsheets/v2tx_fs.pdf, 04 2014. zuletzt abgerufen: 23.06.2014 auf http://www.stoxx.com/indices/index_information.html?symbol=V2TX.
- [25] LIMITED, STOXX: *STOXX® INDEX METHODOLOGY GUIDE*. www.stoxx.com/download/indices/rulebooks/stoxx_indexguide.pdf, 04 2014. zuletzt abgerufen: 22.06.2014 auf http://www.stoxx.com/indices/index_information.html?symbol= SX5E.
- [26] LIMITED, STOXX: *STOXX® STRATEGY INDEX GUIDE*. www.stoxx.com/download/indices/rulebooks/stoxx_strategy_guide.pdf, 06 2014. zuletzt abgerufen: 23.06.2014 auf http://www.stoxx.com/indices/index_information.html?symbol=V2TX.
- [27] LIMITED, STOXX: *SX5E*. http://www.stoxx.com/download/historical_data/h_sx5e.txt, 08 2014. zuletzt abgerufen: 04.08.2014 auf http://www.stoxx.com/indices/index_information.html?symbol= SX5E.

- [28] LIMITED, STOXX: *V2TX*. http://www.stoxx.com/download/historical_values/h_vstoxx.txt, 08 2014. zuletzt abgerufen: 04.08.2014 auf http://www.stoxx.com/indices/index_information.html?symbol=V2TX.
- [29] MEDIA, TRIAMI: *Euribor und Eonia*. <http://de.euribor-rates.eu/was-ist-der-euribor.asp> und <http://de.euribor-rates.eu/eonia.asp>, 06 2014. zuletzt abgerufen: 28.06.2014 auf <http://de.euribor-rates.eu/>.
- [30] MEDIA, TRIAMI: *Euribor und Eonia*. <http://de.global-rates.com/zinssatze/euribor/euribor.aspx> und <http://de.global-rates.com/zinssatze/eonia/eonia.aspx>, 06 2014. zuletzt abgerufen: 28.06.2014 auf <http://de.global-rates.com/>.
- [31] MEDIA, TRIAMI: *Euribor-Zinsen*. <http://de.euribor-rates.eu/euribor-2014.asp>, 08 2014. zuletzt abgerufen: 04.08.2014 auf <http://de.euribor-rates.eu/>.
- [32] MILEVSKY, MOSHE und STEVEN E. POSNER: *The titanic option: valuation of the guaranteed minimum death benefit in variable annuities and mutual funds*. The Journal of Risk and Insurance, 68(1):55–79, 2001.
- [33] REITZ, STEFAN: *Mathematik in der modernen Finanzwelt; Derivate, Portfoliomodelle und Ratingverfahren*. Vieweg+Teubner: Wiesbaden, Wiesbaden, 2011.
- [34] RÜFENACHT, NILS: *Implicit embedded options in life insurance contracts; a market consistent valuation framework*. Contributions to management science. Physica-Verl., Berlin [u.a.], 2012. Zugl.: Basel, Univ., Diss., 2011.
- [35] RICCARDO, GATTO: *Stochastische Modelle der aktuariellen Risikotheorie: Eine mathematische Einführung*. Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2014.
- [36] SCHACHERMAYER, W.: *Martingale measures for discrete-time processes with infinite horizon*. Mathematical Finance, 4(1):25–55, 1994.
- [37] SHREVE, STEVEN E.: *Continuous-time models; Stochastic calculus for finance*. Springer finance. Springer, New York, NY [u.a.], 2004.

Abbildungsverzeichnis

4.1	Die Auszahlungsfunktion einer Call-Option zu Zeitpunkt T , abhängig von den Aktienpreisen S_T [5]	42
4.2	Die Auszahlungsfunktion einer Put-Option zu Zeitpunkt T , abhängig von den Aktienpreisen S_T [5]	42
4.3	Black-Scholes Preise einer Call-Option zu $t = 0$ mit $T = 0,5$, $K = 100$, $\sigma = 0,5$ und $r = 0,02$, abhängig von den Aktienpreisen S_0 .	45
4.4	Black-Scholes Preise einer Put-Option zu $t = 0$ mit $T = 0,5$, $K = 100$, $\sigma = 0,5$ und $r = 0,02$, abhängig von den Aktienpreisen S_0 .	45
5.1	Zinsstrukturkurve vom 01.08.2014 aus Kapitel 9.1	52
5.2	Zero-Bond Kurve vom 01.08.2014 aus Kapitel 9.1 mit diskreten Werten.	53
5.3	Zero-Bond Kurve vom 01.08.2014 aus Kapitel 9.1 mit der Spline Funktion interpoliert.	54
5.4	Implizite at-the-money Swaption Volatilitäten $\sigma_{\alpha,\beta}$ vom 01.08.2014 aus Kapitel 9.2	60
9.1	Zinsstrukturkurve bestehend aus Eonia-, Euribor-, FRA- und Euribor Swap-Werten vom 01.08.2014 aus Bloomberg	114
9.2	Zero-Bond Kurve vom 01.08.2014 mit diskreten Werten	119
9.3	Zero-Bond Kurve vom 01.08.2014 mit der Spline Funktion interpoliert	121
9.4	Implizite at-the-money Swaption Volatilitäten $\sigma_{\alpha,\beta}$ vom 01.08.2014	123
9.5	Implizite at-the-money Swaption Volatilitäten $\sigma_{\alpha,\beta}$ vom 01.08.2014	123
9.6	Börsenkurs des EuroStoxx 50 von 31.12.1986 bis 01.08.2014 [27]	126
9.7	Werte des 3-Monats-Euribors von 03.01.2000 bis 01.08.2014 [31]	126
9.8	Werte des Haupt-VStoxx von 04.01.1999 bis 01.08.2014 [28]	128
9.9	Werte des VStoxx vom 01.08.2014 abhängig von der Laufzeit [28]	128
10.1	Preise des GMABs mit einer Roll-up Rate von 0%	132
10.2	Preise des GMABs mit einer Roll-up Rate von 0,5%	133

10.3	Preise des GMABs mit einer Roll-up Rate von 1%	133
10.4	Preise des GMABs mit einer Roll-up Rate von 2%	134
10.5	Preise des GMABs mit einer Roll-up Rate von 3%	134
A.1	Die Preise der at-the-money Payer Swaptions PS^{Black} vom 01.08.2014	145
A.2	Die Preise der at-the-money Payer Swaptions PS^{HW} vom 01.08.2014	148

Tabellenverzeichnis

9.1	Eonia-, Euribor-, FRA- und Euribor Swap-Werte vom 01.08.2014 aus Bloomberg	115
9.2	Preise der Nullkuponanleihen berechnet aus den Eonia- und Euriborzinssätzen	116
9.3	Preise der Nullkuponanleihen berechnet aus dem 6x12 und 12x18 FRA	117
9.4	Preise der Nullkuponanleihen berechnet aus den Euribor Swaps	120
9.5	Implizite at-the-money Swaption Volatilitäten $\sigma_{\alpha,\beta}$ vom 01.08.2014 aus Bloomberg	122
9.6	Die optimalen Parameter a_r und σ_r des Hull-White Modells mit dazugehörigem Ψ	125
9.7	EuroStoxx 50 und dessen Log-returns, sowie 3-Monats-Euribor und dessen absoluten Differenzen auf monatlicher Basis ab dem Jahr 2000. [27, 31]	127
9.8	Korrelation zwischen Aktie und Zins ρ_{Sr}	127
9.9	Implizite Aktienvolatilität σ_S	129
9.10	Parameter des Sterblichkeitsmodells [19]	129
10.1	Parameter des Finanzmarktmodells	131
10.2	Parameter des Sterblichkeitsmodells [19]	132
A.1	Die Preise der at-the-money Payer Swaptions PS^{Black} vom 01.08.2014	146
A.2	Die Preise der at-the-money Payer Swaptions PS^{HW} vom 01.08.2014	147

Anhang A

R-Codes

A.1 R-Code zur Bestimmung der Zero-Bond Kurve

Vorbereitung

Vorbereitet wird eine .csv-Datei analog zu Tabelle 9.1, jedoch mit ein wenig anderen Überschriften:

	Zinsrate	Bloomberg	Wert_Prozent
1	Eonia	EONIA Index	0,0230
2	1W-Euribor	EUR001W Index	0,0440
3	2W-Euribor	EUR002W Index	0,0560
4	1M-Euribor	EUR001M Index	0,0960
5	2M-Euribor	EUR002M Index	0,1560
6	3M-Euribor	EUR003M Index	0,2080
7	6M-Euribor	EUR006M Index	0,3070
8	6x12 FRA	EUFR0F1 Curncy	0,2990
9	12x18 FRA	EUFR011F Curncy	0,3250
10	2Y-Euribor Swap	EUSA2 Curncy	0,3370
11	3Y-Euribor Swap	EUSA3 Curncy	0,4055
...			
37	29Y-Euribor Swap	EUSA29 Curncy	2,0490
38	30Y-Euribor Swap	EUSA30 Curncy	2,0520
39	35Y-Euribor Swap	EUSA35 Curncy	2,0725
40	40Y-Euribor Swap	EUSA40 Curncy	2,0890
41	50Y-Euribor Swap	EUSA50 Curncy	2,0945
42	60Y-Euribor Swap	EUSA60 Curncy	2,0830

Die Werte der jeweiligen Zinsraten aus der Spalte „Zinsrate“ können mit dem Kürzel aus der Spalte „Bloomberg“ in Bloomberg gefunden werden und müssen in die Spalte „Wert_Prozent“ eingetragen werden.

Diese Tabelle wird als .csv-Datei unter dem Namen „Input Zero-Bond Kurve“ abgespeichert und mit

```
> INPUT<-read.csv2("C:/Users/.../Input Zero-Bond Kurve.csv", sep=";", dec=",")
```

als „data.frame“ in R eingelesen. Bevor die Funktion ausgeführt werden kann, müssen die Packages **bizdays** und **lubridate** installiert und geladen werden. Genauere Informationen darüber sind in den Kommentarzeilen des R-Codes zu finden.

Sowohl das data.frame „INPUT“, als auch das Datum der Daten werden der R-Funktion übergeben, welche mit **Zero_Bond_Kurve(INPUT,day,month,year)** ausgeführt wird.

```
> Zero_Bond_Kurve(INPUT,1,8,2014)
```

Als Output erhalten wir eine .csv-Datei mit dem Namen „Output Zero-Bond Kurve“, welche neben den Preisen der Nullkuponanleihen auch die Werte der verschiedenen τ 's, sowie das Ende der Laufzeit enthält:

X	LAUFZEIT	TAU1	TAU2	ZEROBONDKURVE
1	2014-08-05	0,000000000	0,000000000	1,0000000
2	2014-08-06	0,002777778	0,016666667	0,9999994
3	2014-08-12	0,019444444	0,019444444	0,9999914
4	2014-08-19	0,038888889	0,047222222	0,9999782
5	2014-09-05	0,086111111	0,086111111	0,9999173
6	2014-10-06	0,172222222	0,083333333	0,9997314
7	2014-11-05	0,255555556	0,255555556	0,9994687
8	2015-02-05	0,511111111	0,502777778	0,9984333
9	2015-08-05	1,013888889	0,511111111	0,9969347
10	2016-02-05	1,525000000	0,505555556	0,9952814
11	2016-08-05	2,030555556	1,019444444	0,9931908
12	2017-08-07	3,050000000	1,011111111	0,9877237
13	2018-08-06	4,061111111	1,011111111	0,9798288
14	2019-08-05	5,072222222	1,016666667	0,9686651
15	2020-08-05	6,088888889	1,01388889	0,9533690
...				
38	2043-08-05	29,422222220	1,016666667	0,5367390
39	2044-08-05	30,438888890	5,072222222	0,5251060
40	2049-08-05	35,511111110	5,072222222	0,4708636
41	2054-08-05	40,583333330	10,147222222	0,4219425
42	2064-08-05	50,730555560	10,147222222	0,3467290
43	2074-08-06	60,877777780	0,000000000	0,2891906

Der Code der R-Funktion „Zero_Bond_Kurve“:

```
Zero_Bond_Kurve<-function(INPUT,day,month,year){

  # Diese Funktion benötigt folgende Packages:
  # 1) bizdays (für: "add", "adjust.next"),
  # 2) lubridate (für: %m+%)

  DATE<-as.Date(strptime(ISOdate(year,month,day), format="%Y-%m-%d"))
```

```
SPOTDATE<-add(DATE,2,Calendar(holidaysANBIMA))
# DATE: "ISOdate" setzt die eingegebenen Zahlen für day/month/year
# zu einem Datum zusammen und ergänzt Stunden/Minuten/Sekunden
# -> Output: "Year-Month-Day 12:00:00 GMT" mit class "POSIXct" "POSIXt"
# "strptime" nimmt nur "Year-Month-Day" mit class "POSIXlt" "POSIXt"
# "as.Date" verwandelt es in class "Date" (nicht unbedingt notwendig)
# SPOTDATE: "add(date,n,Calendar)" addiert n Arbeitstage zum
# gegebenen Datum
# Laut Bloomberg ist der Abrechnungstag/Spot date 2 Arbeitstage später!
# "Calendar" erzeugt einen Kalender, basierend auf einer Liste von
# Urlaubstagen
# holidaysANBIMA ist ein Beispiel für so eine Liste von Urlaubstagen,
# welche von ANBIMA (www.anbima.com.br) zur Verfügung gestellt wird.
```

```
DATESHELP<-1:29
```

```
for(i in 1:29){DATESHELP[i]<-SPOTDATE %m+% years(i+1)}
```

```
LAUFZEITENDE_VEC<-c(SPOTDATE + 1,
                     SPOTDATE + 7,
                     SPOTDATE + 14,
                     SPOTDATE %m+% months(1),
                     SPOTDATE %m+% months(2),
                     SPOTDATE %m+% months(3),
                     SPOTDATE %m+% months(6),
                     SPOTDATE %m+% months(12),
                     SPOTDATE %m+% months(18),
                     DATESHELP,
                     SPOTDATE %m+% years(35),
                     SPOTDATE %m+% years(40),
                     SPOTDATE %m+% years(50),
                     SPOTDATE %m+% years(60))
```

```
LAUFZEITENDE_VEC<-adjust.next(LAUFZEITENDE_VEC,Calendar(holidaysANBIMA))
# LAUFZEITENDE_VEC in ein Vektor, der abhängig vom Zinssatz
# das Enddatum der Laufzeit enthält
# "%m+%": addiert (subtrahiert) Monate zu einem Datum, ohne über
# den letzten Tag des neuen Monats zu springen.
# "adjust.next": springt zum nächsten Arbeitstag, wenn das gegebene
# Datum kein Arbeitstag ist
```

```
TAU_VEC1<-as.numeric(difftime(LAUFZEITENDE_VEC,SPOTDATE,units="days")/360)
```

```
TAU_VEC2<-as.numeric(difftime(tail(LAUFZEITENDE_VEC,-1),
```

```
head(LAUFZEITENDE_VEC,-1),units="days")/360)
```

```
# TAU_VEC1/TAU_VEC2 sind Vektoren der Zeitdifferenzen gemäß
# Tageszählkonvention ACT./360.
# TAU_VEC1 betrachtet die Zeitdifferenz zwischen dem Spot date und
# dem Laufzeitende des INPUTS
# TAU_VEC2 betrachtet die Zeitdifferenz zwischen den verschiedenen
# Laufzeitenden des INPUTS
# head() (tail()) gibt die ersten (letzten) n Reihen, falls n > 0, oder
# alle außer den letzten (ersten) n Reihen, falls n < 0, zurück.
```

```

ZEROBONDKURVE<-rep(0,42)
for(i in 1:7){ZEROBONDKURVE[i]<-(1/(1+INPUT$Wert_Prozent[i]*0.01*
  TAU_VEC1[i]))}
for(i in 8:9){ZEROBONDKURVE[i]<-(ZEROBONDKURVE[i-1]/
  (1+INPUT$Wert_Prozent[i]*0.01*TAU_VEC2[i-1]))}
ZEROBONDKURVE[10]<-((1-INPUT$Wert_Prozent[10]*0.01*ZEROBONDKURVE[8]*
  TAU_VEC1[8])/(1+INPUT$Wert_Prozent[10]*0.01*(TAU_VEC2[8]+TAU_VEC2[9])))
ZBHELP<-(ZEROBONDKURVE[8]*TAU_VEC1[8]+ZEROBONDKURVE[10]*(TAU_VEC2[8]+
  TAU_VEC2[9]))
ZEROBONDKURVE[11]<-((1-INPUT$Wert_Prozent[11]*0.01*(ZBHELP))/
  (1+INPUT$Wert_Prozent[11]*0.01*TAU_VEC2[10]))
for(i in 12:42){
  ZBHELP<-ZBHELP+ZEROBONDKURVE[i-1]*TAU_VEC2[i-2]
  ZEROBONDKURVE[i]<-((1-INPUT$Wert_Prozent[i]*0.01*(ZBHELP))/(
    1+INPUT$Wert_Prozent[i]*0.01*TAU_VEC2[i-1]))
}

# Berechnen der Preise der Nullkuponanleihe laut Kapitel 9.1

LAUFZEIT<-c(SPOTDATE,LAUFZEITENDE_VEC)
TAU1<-c(0,TAU_VEC1)
TAU2<-c(0,TAU_VEC2,0)
ZEROBONDKURVE<-c(1,ZEROBONDKURVE)
OUTPUT<-cbind.data.frame(LAUFZEIT,TAU1,TAU2,ZEROBONDKURVE)
  # cbind.data.frame damit das Datum übernommen wird!

write.table(OUTPUT, "C:/Users/.../Output Zero-Bond Kurve.csv", sep=";",
  dec=".", col.names = NA)
  # In .csv-Datei speichern, col.names=NA brauchen wir, damit die
  # Spaltennamen in der abgespeicherten csv.-Datei an der richtigen
  # Stelle stehen
}

```

A.2 R-Code zur Schätzung der Parameter a_r und σ_r des Hull-White-Zinsmodells

Vorbereitung

Eingelesen werden die .csv-Datei mit dem Namen „Output Zero-Bond Kurve“ aus der vorigen R-Funktion **Zero_Bond_Kurve()** und die Impliziten at-the-money Swaption Volatilitäten $\sigma_{\alpha,\beta}$ als .csv-Datei mit dem Namen „Input ATM Implied Swaption Volatilities“:

	Maturity_Tenor	X1. Jahr	X2. Jahre	X3. Jahre	...	X25. Jahre	X30. Jahre
1	0,08 Jahre	68,8	57,1	53,6	...	16,6	16,5
2	0,17 Jahre	70,3	58,5	55,3	...	18,0	17,8
3	0,25 Jahre	78,8	61,9	59,1	...	19,7	19,4
4	0,5 Jahre	82,4	65,1	58,3	...	21,3	21,1

5	0,75 Jahre	83,8	64,4	58,1	...	22,1	21,8
6	1 Jahr	81,3	61,4	54,9	...	22,5	22,1
7	1,5 Jahre	76,2	56,5	49,7	...	22,8	22,5
8	2 Jahre	67,8	52,1	46,3	...	23,0	22,7
9	3 Jahre	52,0	42,9	39,3	...	22,9	22,7
10	4 Jahre	43,5	37,1	34,1	...	22,8	22,5
11	5 Jahre	36,8	32,3	30,1	...	22,6	22,2
12	7 Jahre	28,0	25,9	24,9	...	21,0	20,6
13	10 Jahre	22,8	21,8	21,5	...	19,4	18,6
14	15 Jahre	21,4	21,1	21,2	...	17,3	16,4
15	20 Jahre	21,8	21,5	21,5	...	15,5	14,6
16	25 Jahre	21,7	21,6	21,6	...	14,1	13,1
17	30 Jahre	21,1	20,1	19,9	...	12,7	11,8

Bevor die Funktion ausgeführt werden kann, muss das Package **lubridate** installiert und geladen werden. Um das Optimierungsverfahren später erfolgreich anwenden zu können werden diese Dateien innerhalb der Funktion eingelesen und nur die zwei Parameter a_r und σ_r als Vektor x übergeben (siehe dazu mehr in Unterkapitel „Optimierungsverfahren“):

```
> x<-c(0.0381,0.0075)
> ATMPayerSwaptionPreise(x)
[1] 0.0055
```

Als Output erhalten wir einerseits die Summe der quadratischen Differenzen Ψ , sowie zwei .csv-Datei mit den Namen „Output PS_Black“ und „Output PS_HW“, welche die verschiedenen at-the-money Swaption Preise der Black- beziehungsweise Hull-White-Formel beinhalten. Diese Werte sind in den zwei Abbildungen A.1 und A.2 und Tabellen A.1 und A.2 dargestellt:

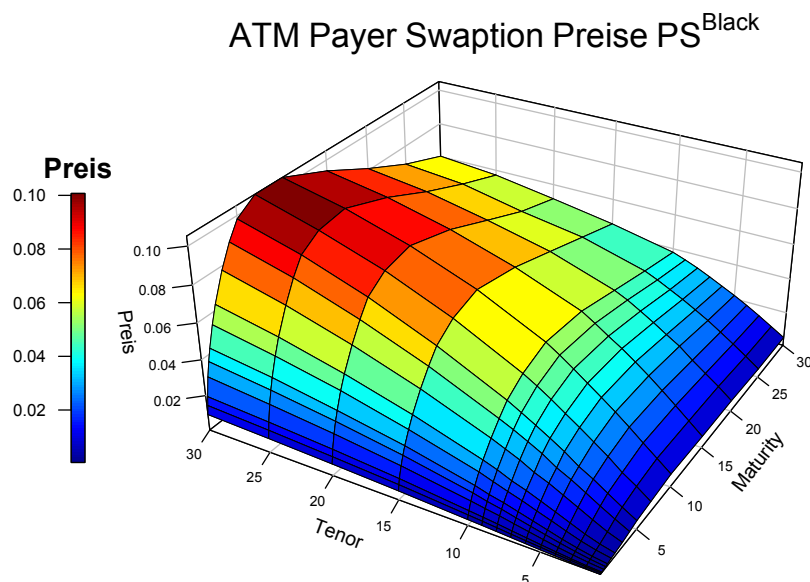


Abbildung A.1: Die Preise der at-the-money Payer Swaptions PS^{Black} vom 01.08.2014

PS^{Black}		1 J.	2 J.	3 J.	4 J.	5 J.	6 J.	7 J.	8 J.	9 J.	10 J.	15 J.	20 J.	25 J.	30 J.
Tenor	Maturity														
1 Monat		0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0019	0,0023	0,0027	0,0031	0,0034	0,0053	0,0068	0,0081	0,0092
2 Monate		0,0004	0,0007	0,0012	0,0017	0,0023	0,0029	0,0035	0,0042	0,0048	0,0054	0,0082	0,0104	0,0123	0,0139
3 Monate		0,0005	0,0009	0,0016	0,0023	0,0031	0,0040	0,0049	0,0058	0,0066	0,0074	0,0112	0,0141	0,0166	0,0187
6 Monate		0,0007	0,0014	0,0024	0,0035	0,0048	0,0062	0,0076	0,0090	0,0102	0,0115	0,0171	0,0217	0,0254	0,0288
9 Monate		0,0009	0,0018	0,0031	0,0046	0,0062	0,0079	0,0096	0,0115	0,0129	0,0148	0,0217	0,0274	0,0323	0,0364
12 Monate		0,0012	0,0022	0,0037	0,0055	0,0076	0,0097	0,0117	0,0138	0,0155	0,0176	0,0259	0,0323	0,0382	0,0428
18 Monate		0,0017	0,0030	0,0050	0,0074	0,0101	0,0126	0,0153	0,0176	0,0201	0,0227	0,0324	0,0410	0,0480	0,0538
2 Jahre		0,0020	0,0039	0,0063	0,0094	0,0125	0,0156	0,0185	0,0210	0,0242	0,0268	0,0383	0,0480	0,0563	0,0630
3 Jahre		0,0028	0,0056	0,0092	0,0131	0,0169	0,0206	0,0237	0,0277	0,0309	0,0341	0,0479	0,0595	0,0695	0,0778
4 Jahre		0,0038	0,0077	0,0119	0,0163	0,0207	0,0244	0,0293	0,0332	0,0369	0,0403	0,0559	0,0692	0,0805	0,0894
5 Jahre		0,0049	0,0094	0,0142	0,0191	0,0233	0,0286	0,0332	0,0376	0,0417	0,0458	0,0628	0,0773	0,0891	0,0983
7 Jahre		0,0059	0,0115	0,0164	0,0224	0,0277	0,0329	0,0379	0,0430	0,0477	0,0520	0,0698	0,0842	0,0954	0,1049
10 Jahre		0,0074	0,0134	0,0193	0,0254	0,0312	0,0367	0,0420	0,0473	0,0524	0,0571	0,0742	0,0873	0,0975	0,1050
15 Jahre		0,0066	0,0128	0,0190	0,0251	0,0309	0,0363	0,0415	0,0461	0,0509	0,0555	0,0691	0,0800	0,0883	0,0941
20 Jahre		0,0063	0,0121	0,0173	0,0226	0,0284	0,0328	0,0375	0,0418	0,0460	0,0494	0,0613	0,0694	0,0766	0,0811
25 Jahre		0,0051	0,0103	0,0153	0,0201	0,0248	0,0289	0,0329	0,0366	0,0402	0,0434	0,0533	0,0591	0,0663	0,0695
30 Jahre		0,0050	0,0094	0,0138	0,0180	0,0219	0,0254	0,0289	0,0323	0,0352	0,0378	0,0454	0,0514	0,0571	0,0602

Tabelle A.1: Die Preise der at-the-money Payer Swaptions PS^{Black} vom 01.08.2014

<i>PS^{HW}</i>														
Tenor	1 J.	2 J.	3 J.	4 J.	5 J.	6 J.	7 J.	8 J.	9 J.	10 J.	15 J.	20 J.	25 J.	30 J.
Maturity														
1 Monat	0,0009	0,0017	0,0025	0,0033	0,0040	0,0046	0,0053	0,0059	0,0064	0,0069	0,0089	0,0104	0,0115	0,0123
2 Monate	0,0012	0,0024	0,0035	0,0046	0,0056	0,0065	0,0074	0,0082	0,0090	0,0097	0,0125	0,0146	0,0161	0,0172
3 Monate	0,0015	0,0029	0,0043	0,0056	0,0068	0,0080	0,0090	0,0100	0,0110	0,0118	0,0153	0,0178	0,0197	0,0211
6 Monate	0,0021	0,0041	0,0060	0,0078	0,0096	0,0112	0,0127	0,0141	0,0154	0,0166	0,0215	0,0250	0,0276	0,0296
9 Monate	0,0025	0,0050	0,0073	0,0095	0,0116	0,0135	0,0153	0,0170	0,0186	0,0201	0,0260	0,0302	0,0334	0,0358
12 Monate	0,0029	0,0057	0,0084	0,0109	0,0133	0,0155	0,0176	0,0195	0,0213	0,0230	0,0298	0,0347	0,0384	0,0411
18 Monate	0,0035	0,0069	0,0101	0,0132	0,0161	0,0187	0,0212	0,0236	0,0257	0,0277	0,0359	0,0419	0,0463	0,0497
2 Jahre	0,0040	0,0079	0,0115	0,0150	0,0182	0,0213	0,0241	0,0268	0,0292	0,0315	0,0408	0,0476	0,0527	0,0565
3 Jahre	0,0048	0,0094	0,0137	0,0178	0,0216	0,0252	0,0286	0,0317	0,0345	0,0372	0,0483	0,0564	0,0626	0,0672
4 Jahre	0,0054	0,0106	0,0154	0,0199	0,0242	0,0282	0,0318	0,0353	0,0385	0,0415	0,0539	0,0631	0,0700	0,0752
5 Jahre	0,0059	0,0114	0,0166	0,0215	0,0261	0,0303	0,0343	0,0380	0,0415	0,0447	0,0581	0,0681	0,0757	0,0813
7 Jahre	0,0065	0,0125	0,0182	0,0235	0,0285	0,0331	0,0375	0,0415	0,0453	0,0489	0,0637	0,0748	0,0831	0,0893
10 Jahre	0,0068	0,0132	0,0192	0,0248	0,0300	0,0349	0,0394	0,0437	0,0478	0,0515	0,0674	0,0793	0,0882	0,0947
15 Jahre	0,0067	0,0129	0,0188	0,0243	0,0294	0,0343	0,0388	0,0431	0,0471	0,0509	0,0668	0,0786	0,0872	0,0939
20 Jahre	0,0063	0,0121	0,0177	0,0229	0,0277	0,0323	0,0366	0,0407	0,0445	0,0481	0,0632	0,0742	0,0826	0,0890
25 Jahre	0,0058	0,0112	0,0164	0,0212	0,0257	0,0300	0,0340	0,0378	0,0413	0,0447	0,0586	0,0690	0,0769	0,0830
30 Jahre	0,0053	0,0103	0,0151	0,0195	0,0237	0,0276	0,0313	0,0348	0,0380	0,0411	0,0541	0,0639	0,0713	0,0769

Tabelle A.2: Die Preise der at-the-money Payer Swaptions PS^{HW} vom 01.08.2014

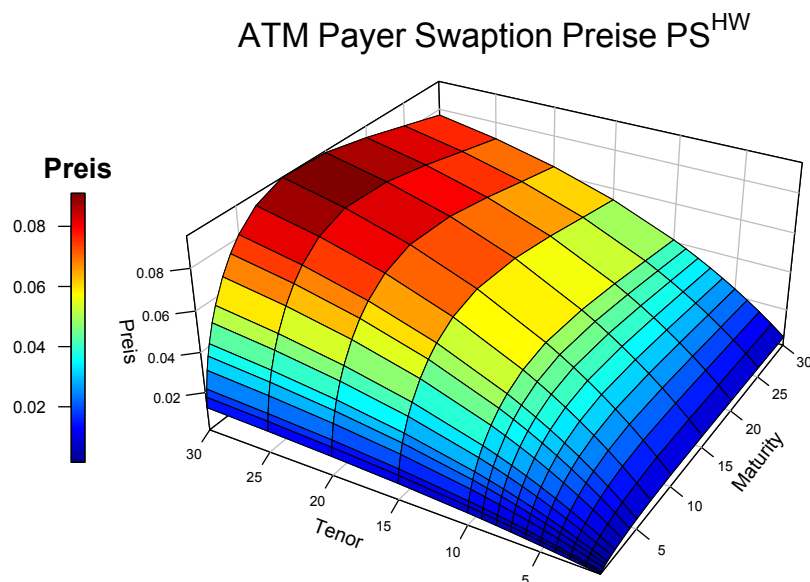


Abbildung A.2: Die Preise der at-the-money Payer Swaptions PS^{HW} vom 01.08.2014

Der Code der R-Funktion „ATMPayerSwaptionPreise()“:

```
ATMPayerSwaptionPreise<-function(x){

#-----
# Erklärung & Daten einlesen
#-----

# Folgende Packages müssen installiert und geladen werden:
# 1) lubridate

# Das Paar x<-c(a_r,sigma_r) wird an die Funktion übergeben

a<-x[1]
sigma<-x[2]

# Sowohl die Zero-Bond Kurve (Output der Funktion "Zero_Bond_Kurve"),
# als auch die Impliziten ATM Swaption Volatilitäten werden eingelesen:

ZBK<-read.csv2("C:/Users/.../Output Zero-Bond Kurve.csv",sep=";",dec=",")
Volas<-read.csv2("C:/Users/.../Input ATM Implied Swaption Volatilities.csv",
sep=";",dec=",")
Volas2<-Volas[,-1]

# head(ZBK): (ACHTUNG: Manchmal ändert sich die LAUFZEIT auf ein
# anderes Datumsformat!)
#   X   LAUFZEIT      TAU1      TAU2 ZEROBONDKURVE
#   1 2014-08-05 0,000000000 0,00000000    1,0000000
#   2 2014-08-06 0,002777778 0,01666667    0,9999994

# head(Volas): (Werte in %)
```

```

# Maturity_Tenor X1.Jahr X2.Jahre ... X30.Jahre
#      0,08 Jahre      68,8      57,1 ...      16,5
#      0,17 Jahre      70,3      58,5 ...      17,8

#-----
# Spline Funktion auf Zero-Bond Kurve anwenden
#-----

ZBKSpline<-splinefun(as.Date(ZBK$LAUFZEIT),ZBK$ZEROBONDKURVE)

# Ableitung:
ZBKHelp<-ZBKSpline(as.Date(ZBK$LAUFZEIT),deriv=1)
ZBKSpline2<-splinefun(as.Date(ZBK$LAUFZEIT),ZBKHelp)

#-----
# T_alpha, T_beta bestimmen
#-----

SPOTDATE<-as.Date(ZBK$LAUFZEIT[1])

T_alpha<-c(SPOTDATE %m+% months(1),
           SPOTDATE %m+% months(2),
           SPOTDATE %m+% months(3),
           SPOTDATE %m+% months(6),
           SPOTDATE %m+% months(9),
           SPOTDATE %m+% months(12),
           SPOTDATE %m+% months(18),
           SPOTDATE %m+% years(2),
           SPOTDATE %m+% years(3),
           SPOTDATE %m+% years(4),
           SPOTDATE %m+% years(5),
           SPOTDATE %m+% years(7),
           SPOTDATE %m+% years(10),
           SPOTDATE %m+% years(15),
           SPOTDATE %m+% years(20),
           SPOTDATE %m+% years(25),
           SPOTDATE %m+% years(30))

T_beta<-matrix(0,17,14)

for(i in 1:17){T_beta[i,<-c(T_alpha[i] %m+% years(1),
                           T_alpha[i] %m+% years(2),
                           T_alpha[i] %m+% years(3),
                           T_alpha[i] %m+% years(4),
                           T_alpha[i] %m+% years(5),
                           T_alpha[i] %m+% years(6),
                           T_alpha[i] %m+% years(7),
                           T_alpha[i] %m+% years(8),
                           T_alpha[i] %m+% years(9),
                           T_alpha[i] %m+% years(10),

```

```

T_alpha[i] %m+% years(15),
T_alpha[i] %m+% years(20),
T_alpha[i] %m+% years(25),
T_alpha[i] %m+% years(30))}

#-----
# TEIL1: ATM Payer Swaption Preise mit BLACK FORMEL
#-----

PS_Black<-matrix(0,17,14)

for(i in 1:17){
  for(j in 1:14){PS_Black[i,j]<-(ZBKSpline(T_alpha[i])-
    ZBKSpline(T_beta[i,j]))*(2*pnorm((0.5*Volas2[i,j]/100)*
    sqrt(as.numeric(diff(c(SPOTDATE,T_alpha[i]))/360))-1)
  )
}
}

write.table(PS_Black, "C:/Users/.../Output PS_Black.csv", sep=";",
  dec=".", col.names = NA)

#-----
# TEIL2: ATM Payer Swaption Preise mit HULL-WHITE FORMEL
#-----

S<-function(x,y,z){(ZBKSpline(x)-ZBKSpline(z))/sum(ZBKSpline(y)*0.5)}
f<-function(x){-ZBKSpline2(x)/ZBKSpline(x)}
tau<-function(x,y){as.numeric(diff(c(x,y))/360)}
B<-function(a,x,y){(1/a)*(1-exp(-a*tau(x,y)))}
A<-function(a,s,x,y,f){(ZBKSpline(y)/ZBKSpline(x))*exp(B(a,x,y)*f-
  ((s^2)/(4*a))*(1-exp(-2*a*tau(SPOTDATE,x)))*(B(a,x,y)^2))}
sigma_p<-function(a,s,x,y){s*sqrt((1-exp(-2*a*tau(SPOTDATE,x)))/(
  2*a))*B(a,x,y)}

PS_HW<-matrix(0,17,14)
r_Stern<-0.01

#Schleife über die T_alpha's
for(i in 1:17){
  f_Wert<-f(T_alpha[i])

  #Schleife über die T_beta's
  for(j in 1:14){

    T_i<-T_alpha[i] %m+% months(6)

    #Schleife über die halbjährlichen Zahlungszeitpunkte T_i
    #(max. 60 Zahlungszeitpunkte, da max. 30 Jahre Laufzeit)
    for(k in 1:60){if(T_i[k]<T_beta[i,j]){
      T_i_help<-T_i[k] %m+% months(6);T_i<-c(T_i,T_i_help)
    }
  }
}

```

```

}
  else{}
  if(is.na(T_i[k+1])==TRUE) break
}

S_Wert<-S(T_alpha[i],T_i,T_beta[i,j])

B_Werte<-1:length(T_i)
A_Werte<-1:length(T_i)
sigma_p_Werte<-1:length(T_i)
c_Werte<-1:length(T_i)
Summe<-0
X_Werte<-1:length(T_i)
h_Werte<-1:length(T_i)
ZBP_Werte<-1:length(T_i)

for(k in 1:length(T_i)){
  B_Werte[k]<-B(a,T_alpha[i],T_i[k])
  A_Werte[k]<-A(a,sigma,T_alpha[i],T_i[k],f_Wert)
  sigma_p_Werte[k]<-sigma_p(a,sigma,T_alpha[i],T_i[k])
  if(k<length(T_i)){c_Werte[k]<-(S_Wert*0.5)}else{c_Werte[k]<-(1+S_Wert*0.5)}
}

r_opt<-function(r_Stern){for(k in 1:length(T_i)){
  Summe<-(Summe+(c_Werte[k]*A_Werte[k]*exp(-B_Werte[k]*r_Stern)))};Summe-1}
r_Stern<-uniroot(r_opt,c(-1,1),tol=0.000001)$root

for(k in 1:length(T_i)){
  X_Werte[k]<-(A_Werte[k]*exp(-B_Werte[k]*r_Stern))
  h_Werte[k]<-((1/sigma_p_Werte[k])*log(ZBKSpline(T_i[k])/
  (ZBKSpline(T_alpha[i])*X_Werte[k]))+(sigma_p_Werte[k]/2))
  ZBP_Werte[k]<-(X_Werte[k]*ZBKSpline(T_alpha[i])*pnorm(-h_Werte[k]+
  sigma_p_Werte[k])-ZBKSpline(T_i[k])*pnorm(-h_Werte[k]))
}

PS_HW[i,j]<-sum(c_Werte*ZBP_Werte)

}
}

write.table(PS_HW, "C:/Users/.../Output PS_HW.csv", sep=";", dec=".",
  col.names = NA)

#-----
# TEIL3: Summe der quadratischen Differenzen
#-----

QDiff<-matrix(0,17,14)
for(i in 1:17){for(j in 1:14){QDiff[i,j]<-(PS_Black[i,j]-PS_HW[i,j])^2}}

```

```

SummeQDiff<-sum(QDiff)
return(SummeQDiff)

}

```

Optimierungsverfahren:

Um die Parameter a_r und σ_r zu kalibrieren, wird mit der R-Funktion **optim()** gearbeitet. Zuerst werden für a_r und σ_r Startwerte gewählt, hier $a_r = 0,01$ und $\sigma_r = 0,001$, und als Vektor „par_start“ abgespeichert. Dieser Vektor wird gemeinsam mit der Funktion **ATMPayerSwaptionPreise()** an die Funktion **optim()** übergeben, welche uns mit Hilfe des Nelder-Mean Verfahrens die Parameterwerte $(a_r, \sigma_r) = (0,0381, 0,0075)$ und $\Psi = 0,0055$ zurückgibt. [34]

```

> par_start<-c(0.01,0.001)
> optim(par_start,ATMPayerSwaptionPreise,method="Nelder-Mead")
$par
[1] 0.038098541 0.007467899

$value
[1] 0.005549128

```

A.3 R-Code zur Preisbestimmung des GMABs mit Ablebensleistung und garantierter Mindestverzinsung

Der Code der R-Funktion „Preis()“:

```

Preis<-function(x,Praemie,grT,delta,v1,v2){

#-----
# Erklärung & Daten einlesen
#-----

# Das Package "lubridate" muss installiert werden

# An die Funktion sind folgende Parameter zu übergeben:

# Alter des Versicherungsnehmer: x
# Sparprämie P: Praemie
# Vertragslaufzeit T: grT
# Verzinsungsrate der Garantie: delta

# Parameter des Sterblichkeitsmodells in einem Vektor:
# v1=(b,m,k,gamma,sigma)
# Parameter des Finanzmarktmodells in einem Vektor:
# v2=(a_r,sigma_r,sigma_S,rho)

```

```

ZBK<-read.csv2("C:/Users/.../Input Zero-Bond Kurve.csv",sep=";",dec=",")

ZBKspline<-splinefun(as.Date(ZBK$LAUFZEIT),ZBK$ZEROBONDKURVE)
ZBKHelp<-ZBKspline(as.Date(ZBK$LAUFZEIT),deriv=1)
ZBKspline2<-splinefun(as.Date(ZBK$LAUFZEIT),ZBKHelp)

#-----
# Sterblichkeitsmodell
#-----

b<-v1[1]
m<-v1[2]
k<-v1[3]
gamma<-v1[4]
sigma<-v1[5]

c1<-((k/b)*exp((x-m)/b))
c2<-((1/b)-gamma)
c3<-(k-(1/b))
c4<-((sigma/b)*exp((x-m)/b))
c5<-(1/b)

lambda<-(1/b)*exp((x-m)/b)

C_fun<-function(z){(c1/(c2*c3))*(1-exp(c2*z))
- (c1/(c3*(c2+c3)))*(exp(-c3*z)-exp(c2*z))
- ((c4^2)/(4*(c3^2)*c5))*(1-exp(2*c5*z))
+ ((c4^2)/(c3^2))*(1/(2*c5+c3))*(exp(-c3*z)-exp(2*c5*z))
- ((c4^2)/(4*(c3^2)*(c3+c5)))*(exp(-2*c3*z)-exp(2*c5*z))}
D_fun<-function(z){(1-exp(-c3*z))/c3}
p_fun<-function(z){exp(C_fun(z)-D_fun(z)*lambda)}

#-----
# Finanzmarktmodell
#-----

a_r<-v2[1]
sigma_r<-v2[2]
sigma_S<-v2[3]
rho<-v2[4]

mu_Y<-function(z){ - log(ZBKspline(as.Date(ZBK$LAUFZEIT[1]) %m+% years(z)))
+ ((sigma_r^2)/(2*a_r^2))*(z-(2/a_r)*(1-exp(-a_r*z))+(1/(2*a_r))*
(1-exp(-2*a_r*z))) + ((sigma_r*sigma_S*rho)/a_r)*(z-(1/a_r)*
(1-exp(-a_r*z))) + (0.5*sigma_S^2*z)}
sigma_Y2<-function(z){ ((sigma_r^2)/(a_r^2))*(z-(2/a_r)*(1-exp(-a_r*z)+
(1/(2*a_r))*(1-exp(-2*a_r*z))) + 2*((sigma_r*sigma_S*rho)/a_r)*(z-(1/a_r)*
(1-exp(-a_r*z))) + sigma_S^2*z}

```

```

#-----
# Preis des GMAB
#-----

Preis1<-0

for(i in 1:(grT-1)){
  Preis1 <- Preis1 + Praemie * (pnorm((mu_Y(i) - delta*i)/sqrt(sigma_Y2(i)))
    + exp(delta*i - mu_Y(i) + 0.5*sigma_Y2(i)) * pnorm((delta*i + sigma_Y2(i)
    - mu_Y(i))/sqrt(sigma_Y2(i)))) * (p_fun(i-1) - p_fun(i))
}

Preis1 <- Preis1 + Praemie * (pnorm((mu_Y(grT) - delta*grT)/
sqrt(sigma_Y2(grT))) + exp(delta*grT - mu_Y(grT) +
0.5*sigma_Y2(grT)) * pnorm((delta*grT + sigma_Y2(grT)
- mu_Y(grT))/sqrt(sigma_Y2(grT)))) * p_fun(grT-1)

return(Preis1)

}

```