



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
Vienna University of Technology

INSTITUT FÜR  
MECHANIK UND  
MECHATRONIK  
Mechanics & Mechatronics



## DIPLOMARBEIT

# Konstruktion, Modellierung und Regelung eines schubvektorgesteuerten Single-Copters

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs  
unter der Leitung von

Privatdoz. Dr.tech. Alexander Schirrer  
Institut für Mechanik und Mechatronik  
Abteilung für Regelungstechnik und Prozessautomatisierung

eingereicht an der Technischen Universität Wien

**Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften**

von

Oskar Fürnhammer



Wien, am 21. August 2022

\_\_\_\_\_  
Oskar Fürnhammer

# Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre eidesstattlich, dass ich die Arbeit selbständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und alle aus ungedruckten Quellen, gedruckter Literatur oder aus dem Internet im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt übernommenen Formulierungen und Konzepte gemäß den Richtlinien wissenschaftlicher Arbeiten zitiert, durch Fußnoten gekennzeichnet bzw. mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Wien, am 21. August 2022

\_\_\_\_\_  
Oskar Fürnhammer

# Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Konstruktion, Modellierung und Regelung eines schubvektorgesteuerten Single-Copters. Zu Beginn werden einige konstruktive und fertigungstechnische Aspekte der Drohne beleuchtet und die Ideen hinter dem Entwurf der mechanischen und elektrischen Teilsysteme sowie Details zu den verwendeten Komponenten erläutert. Danach werden die systembeschreibenden Differentialgleichungen, basierend auf einer Kombination aus fundamentalen Sätzen der Physik (White Box) sowie rein datengetriebenen Modellierungsansätzen (Black Box) hergeleitet, alle Systemparameter identifiziert und das dabei erhaltene Gesamtmodell schließlich gegen aufgezeichnete Flugdaten validiert. Anschließend wird das Modell im regelungstechnischen Sinne analysiert und für die weitere Verwendung aufbereitet. Basierend auf den in der Modellbildung und -analyse gewonnenen Erkenntnissen wird eine kaskadierte Orientierungsregelung, bestehend aus einer quaternionenbasierten (Lage-)Winkelregelung sowie einer unterlagerten exakt eingangs-ausgangs-linearisierenden Winkelgeschwindigkeitsregelung, entworfen. Für den verbleibenden Freiheitsgrad der Höhe wird eine Regelung entworfen, die ebenfalls Konzepte der nichtlinearen Regelungstechnik mit einer klassischen PID-Regelung kombiniert. In weiterer Folge wird die Regelung um eine flachheitsbasierte Vorsteuerung der kinematischen Größen zu einer Zwei-Freiheitsgrad-Regelung erweitert. Zudem wird gezeigt, dass es sich beim Single-Copter um ein differentiell flaches System handelt, sich die Idee der flachen Parametrierung somit bis hin zu den Stellgrößen verfolgen lässt. Im Anschluss werden einige Aspekte die Wahl der Reglerparameter betreffend erläutert und die entworfene Regelung hinsichtlich Performanz, Stabilität und Robustheit für ausgewählte Störungen und Parametervariationen untersucht. Dabei wird gezeigt, dass die entworfene Regelung der weit verbreiteten Open-Source-Drohnensoftware ARDUPILOT in sämtlichen untersuchten Aspekten überlegen ist.

This thesis deals with the design, modelling and control of a ducted fan UAV with a single impeller, also referred to as Single Copter. In the scope of this work such a Single Copter was developed and deployed. For simulation and control design a mathematical model based on basic principals of physics as well as black box modelling techniques is derived and the necessary parameters identified. Subsequently the found set of nonlinear differential equations was validated using recorded data from flight tests. Following the gained insights an appropriate control law is designed. The proposed hierarchical attitude controller combines a high level quaternion based controller with a low level angular velocity control loop using feedback linearization. The altitude controller also combines nonlinear control concepts with classical PID-control. Following the idea of differential flatness the attitude controller is expanded to a two degrees of freedom control by means of adding angular velocity and acceleration feedforward terms. It is shown that this idea can be expanded even further and the system inputs can be (pre-)computed from a desired trajectory. Finally the proposed controller is tested via means of simulation for a set of test trajectories as well as recorded flight data and compared to the widely used, open-source drone software ARDUPILOT. It is shown that the designed control law performs better in all test cases.

# Vorwort

Diese Diplomarbeit entstand aus dem Wunsch, eine Drohne mit nur einem einzigen Rotor zu bauen und damit in gewisser Weise das Flugprinzip von Raketen nachzubilden. Durch die realisierte Konstruktion wird die Schubvektorsteuerung als grundlegender Steuerungsmechanismus vieler Raketen abgebildet. Im Unterschied zu Raketen kommen aufgrund des einzelnen schnell drehenden Rotors hierbei aber zusätzliche nichtlineare Kopplungseffekte zum Tragen. Der gewählte Aufbau macht diese komplexe Dynamik für regelungstechnische Fragestellungen praktisch zugänglich. Die Inspiration dazu stammt vor allem von dem Raketen-Prototypen *Starhopper* [23] der Firma SPACEX sowie dem Hobby-Modellbau-Projekt *Ikarus* [24].

Ich möchte mich an dieser Stelle ganz herzlich für die Betreuung sowie die vielen interessanten Gespräche bei Herrn Privatdoz. Dr.tech. Alexander Schirrer bedanken, der diese Arbeit nicht nur ermöglicht, sondern mit seiner umsichtigen und motivierenden Art auch stets in die richtigen Bahnen gelenkt hat. Mein bester Dank gilt zudem Prof. Dr.tech. Stefan Jakubek für die finanzielle Unterstützung meines Projektes sowie allen anderen Mitgliedern des Instituts für Mechanik und Mechatronik der Technischen Universität Wien.

Allen voran möchte ich mich bei meinen Eltern für die kontinuierliche Unterstützung über meine gesamte Studienzeit hinweg bedanken.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Konstruktion und Fertigung</b>	<b>2</b>
1.1 Mechanisches Teilsystem	3
1.1.1 Antriebsstrang	3
1.1.2 Steuerflächen	3
1.2 Elektrisches Teilsystem	4
1.2.1 Flugcomputer	5
1.3 Software	6
<b>2 Modellbildung</b>	<b>7</b>
2.1 Flugdynamik	8
2.1.1 Starrkörperdynamik	9
2.1.2 Parametrierung der Orientierung	9
2.1.3 Kräfte und Momente	13
2.1.4 Gesamtsystem	15
2.2 Parameteridentifikation	16
2.2.1 Globale Systemparameter	16
2.2.2 Kräfte und Momente	17
2.2.3 Flossenkonfigurationen	20
2.2.4 Aktordynamik	22
2.3 Modellvalidierung	26
2.3.1 Validierung der Regelstrecke	27
2.3.2 Validierung im geschlossenen Regelkreis	30
<b>3 Regelung</b>	<b>33</b>
3.1 Systemanalyse	33
3.1.1 Zustandsraumdarstellung	33
3.1.2 Ruhelagen und Linearisierung	34
3.1.3 Eingangstransformation	36
3.1.4 Stabilisierbarkeit	37
3.2 Reglerentwurf	40
3.2.1 Kaskadierte Orientierungsregelung	40
3.2.2 Höhenregelung	43
3.2.3 Exakte Feedforwardlinearisierung	45
3.3 Diskussion	45
<b>4 Ergebnisse</b>	<b>47</b>
4.1 Wahl der Reglerparameter	47
4.1.1 Orientierungsregelung	47
4.1.2 Höhenregelung	50
4.2 Simulationsstudien	51
4.2.1 Sensitivitätsanalyse	55
4.3 Diskussion	59

<b>5 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>60</b>
5.1 Zusammenfassung . . . . .	60
5.2 Ausblick . . . . .	61
<b>A Definitionen, Herleitungen und Beweise</b>	<b>63</b>
A.1 Definitionen . . . . .	63
A.2 Beweise . . . . .	64
<b>Nomenklatur</b>	<b>65</b>

# Einleitung

Der im Rahmen dieser Arbeit behandelte, schubvektorgesteuerte Single-Copter stellt nicht zuletzt aufgrund seiner systeminhärenten Eigenschaften eine spannende Herausforderung da. Das unteraktuierte, stark gekoppelte Mehrgrößensystem ist nicht nur instabil, sondern verliert bei geringen Rotordrehzahlen auch seine Steuerbarkeit. Es verhält sich also ähnlich einem fliegenden inversen Pendel mit stark gekoppelter Longitudinal- und Lateral-Dynamik.

## Begriffsklärung

In der englischsprachigen Literatur ist das hier behandelte System üblicherweise unter der Bezeichnung *Electric Ducted Fan EDF Unmanned Aerial Vehicle UAV*, zu Deutsch etwa unbemanntes, elektrisch betriebenes Mantelpropeller-Luftfahrzeug zu finden. In der deutschen Sprache existiert zu diesem Zeitpunkt noch keine geeignete Bezeichnung. In jedem Fall ist das Alleinstellungsmerkmal durch den einzelnen (griechisch *mónos*) Rotor gegeben, weshalb der Begriff Monokopter sinnvoll erscheinen mag. Nun wird in der deutschen Sprache der Begriff eines Monokopters aber üblicherweise synonym mit dem eines Gyropters verwendet. Da sich die Flugprinzipien grundlegend unterscheiden, ist es naheliegend einen andere Bezeichnung zu wählen. Während sich ein Gyropter ähnlich eines fallenden Ahornsamens durch die Luft schraubt und dabei um seine eigene Hochachse rotiert, besitzt die gebaute Drohne vier Steuerflächen, um den aus der Düse austretenden Luftstrom auszurichten. Dieses Funktionsprinzip wird als Schubvektorsteuerung (*Thrust Vector Control, TVC*) bezeichnet und findet bei vielen senkrecht startenden und landenden (*Vertical Take-Off and Landing, VTOL*) Luftfahrzeugen Verwendung. Aus diesem Grund wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit die im Hobby-Modellbau gängige Bezeichnung *Single-Copter* verwendet. Damit ist einerseits auf das Vorhandensein eines einzelnen Rotors hingewiesen und andererseits eine klare Abgrenzung zu den bestehenden Begrifflichkeiten gegeben.

## Ziele und Inhalt dieser Arbeit

Im Rahmen dieser Arbeit soll eine flugfähige Drohne realisiert und modelliert werden, um so die Brücke zwischen konstruktiven Entscheidungen und den daraus resultierenden Flugeigenschaften zu schlagen. Nach der Inbetriebnahme und Modellierung der Drohne soll ein geeignetes Konzept zur entkoppelnden Führungsregelung entwickelt und im Rahmen von Simulationsstudien untersucht werden. Konkret sind dabei folgenden Fragen zu beantworten:

1. Wodurch sind die wesentlichen systeminhärenten Kopplungen gegeben? Wie kann man diese durch konstruktive Entscheidungen gezielt beeinflussen?
2. Welche Regelungskonzepte eignen sich zur Entkopplung der Regelgrößen? Wie lassen sich die aus der Modellbildung gewonnenen Erkenntnisse für einen systematischen, modellbasierten Reglerentwurf nutzen?

# 1. Konstruktion und Fertigung

Das Herzstück des Single-Copters bildet ein elektrisch betriebener Mantelpropeller ② (*Electric Ducted Fan, EDF*) mit der zugehörigen Düse ③. Die Düse sorgt im Inneren für eine gerichtete Strömung und bietet an der Außenseite Befestigungsmöglichkeiten für die restlichen Komponenten.

Am unteren Ende der Düse sind vier, drehbar gelagerte Steuerflächen ⑥, im weiteren Verlauf dieser Arbeit auch Flossen genannt, angebracht. Diese dienen der Ausrichtung des austretenden Luftmassenstromes und werden mit gängigen Modellbau-Servos ⑦ über einen zugehörigen Hebelmechanismus positioniert. Ebenfalls an der Außenseite der Düse befestigt sind vier Batterien ①, der Motorregler ⑤ (*Electronic Speed Controller, ESC*), der Flugcomputer ④ sowie die Füße ⑧.

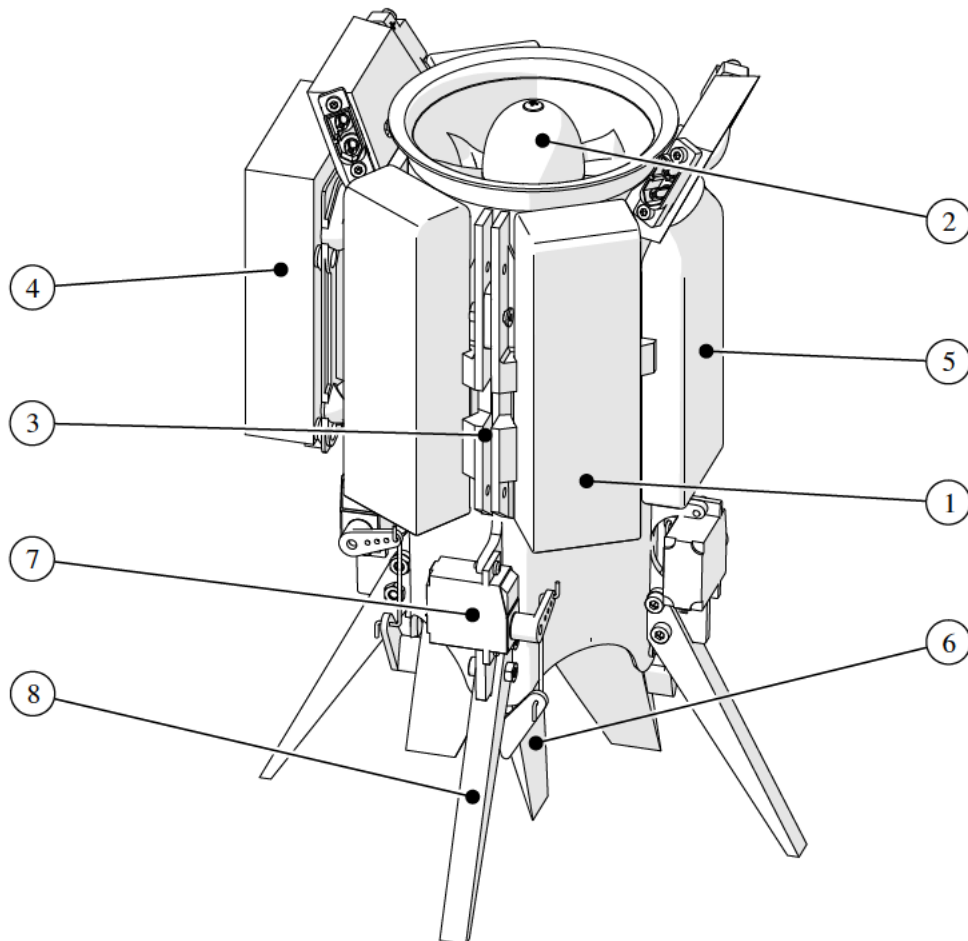


Abbildung 1.1: Hauptkomponenten des Single Copters



## 1.1 Mechanisches Teilsystem

Um einen stabilen Flug der Drohne, besonders in kritischen Flugphasen - wie beispielsweise dem Start, oder der Landung - zu ermöglichen, wurde der gesamte Aufbau mit dem Ziel einer massensymmetrischen Bauweise entworfen. Zudem erlaubt dies die Nutzung des gesamten Stellgrößenbereiches der Steuerflächen, denn anderenfalls müssten stationär von Null verschiedene Steuerflächen-Winkel zur Kompensation eines exzentrisch sitzenden Massmittelpunktes verwendet werden. Die gewählte, kompakte Bauweise soll günstige Flugeigenschaften und damit eine gute Manövrierbarkeit gewährleisten. Die Drohne besitzt eine Gesamtmasse von  $m = 1.466 \text{ kg}$  bei einer maximalen Schubkraft von  $f_{\text{th,MAX}} = 23.58 \text{ N}$  und damit ein Schub-Gewichts-Verhältnis von ungefähr 1.6.

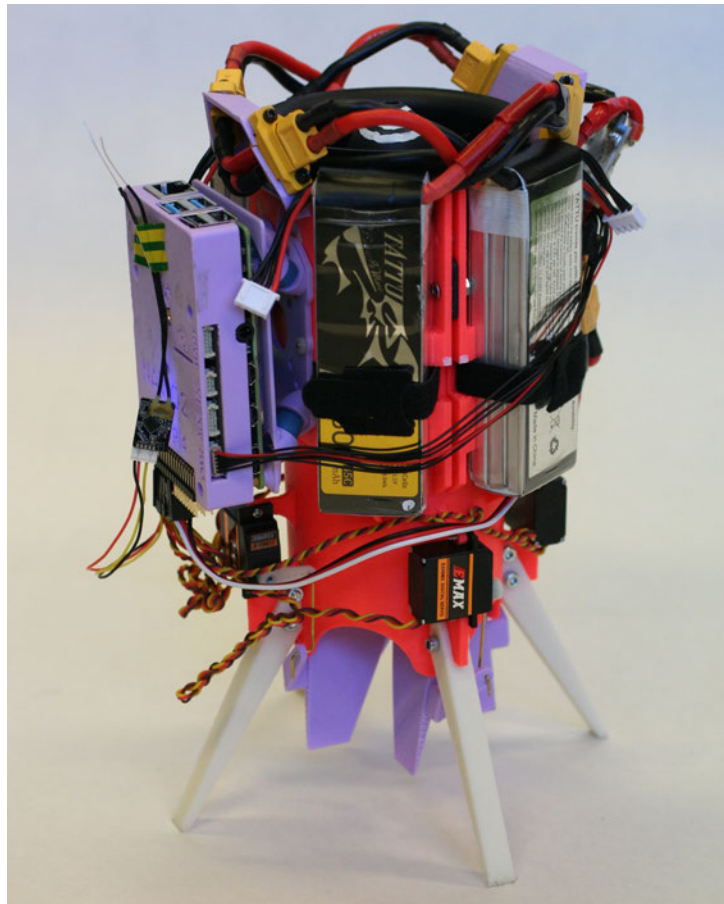


Abbildung 1.2: Foto des Single Copters

### 1.1.1 Antriebsstrang

Der Antriebsstrang setzt sich aus einem bürstenlosen Gleichstrommotor (*Brushless Direct Current motor*, BLDC motor), dem zugehörigen Motorregler (*Electronic Speed Controller*, ESC) sowie dem mit der Motorwelle fest verbundenen Propeller zusammen. Dabei sitzt der Propeller in einem Gehäuse, weshalb diese Kombination üblicherweise als elektrischer Mantelpropeller (*Electric Ducted Fan*, EDF) bezeichnet wird.

### 1.1.2 Steuerflächen

Das zentrale Steuerelement der Drohne ist durch die vier Steuerflächen gegeben. Diese sind über  $1 \text{ mm } \varnothing$  Messingstäbe mit den Armen der Servos verbunden. Die verwendeten, digitalen Modellbauservos werden über Pulsweitenmodulation (PWM) angesteuert. Dabei kann über die Tastgrad des Referenzsignals direkt der Soll-Winkel des Servoarmes vorgegeben werden. Um innerhalb des zulässigen Stellbereichs von

$\delta_{\text{MAX}} \pm 30^\circ$  ein möglichst lineares Aktorverhalten zu erreichen, wurden die Hebelarme der Flossen, also der Abstand vom Drehmittelpunkt der Steuerfläche zum Angriffspunkt der Verbindungsstange, gleich groß wie die (Hebel-)Arme der Servos ausgeführt. Eine Winkeländerung des Servoarmes bewirkt damit in guter Näherung eine Änderung des Steuerflächenwinkels um den selben Betrag.

Zusammenfassend stehen folgende fundamentale Anforderungen und Leitprinzipien im Kern des Entwurfsprozesses des mechanischen Teilsystems:

1. Massensymmetrische Bauweise: stationäre Steuerflächen-Stellwinkel in der Mitte des Arbeitsbereiches (Trim-Winkel gleich Null)
2. Kompakte Bauweise: kleine Massenträgheitsmomente, agiles Flugverhalten
3. Servoarme und Steuerflächen-Hebelarme gleicher Länge: quasi-linearerer, kinematischer Zusammenhang zwischen Servoarm- und Steuerflächenwinkel
4. Aerodynamischer Druckmittelpunkt der Flossen nahe an Drehachse: benötigte Stellkraft und Stromaufnahme der Servos wird minimal gehalten

## 1.2 Elektrisches Teilsystem

Abbildung 1.3 zeigt schematisch die Komponenten des elektrischen Teilsystems der Drohne. In Tabelle 1.1 sind zusätzlich sowohl die konkret verwendeten Modelle, als auch die Abkürzungen gelistet. Wie oftmals im Rahmen dieser Arbeit nehmen diese Bezug auf die übliche englische Bezeichnung.

Die Stromversorgung des UAVs besteht aus vier Lithium-Polymer-Akkumulatoren, welche verschalten in einer seriell-parallelen Anordnung eine Nennspannung von 22.2 V ( $6S^1$ ) bei einer Gesamtkapazität von 4600 mAh aufweisen. Das darauf folgende Power-Modul misst den Strom und die Klemmspannung der Batterien, stellt zudem noch eine von zwei Energieversorgungsmöglichkeiten für den Flugcomputer (FC) dar. Der darauf folgende Motorregler (ESC) bildet die andere, denn er bietet zusätzlich zu seiner eigentlichen Funktion, über den integrierten Spannungsregler (*Battery Eliminator Circuit*, BEC) noch jene der Energieversorgung. Zum einen für den Flugcomputer selbst, als auch über einen gemeinsamen Bus für die vier Servos.

Steuersignale werden über Funk vom Sender (RC-TX) an den Empfänger (RC-RX) übermittelt. Die Übertragung von Telemetrie-Daten an die Bodenstation (*Ground Control Station*, GCS) sowie die Konfiguration des Systems wird über eine WLAN-Brücke bewerkstelligt.

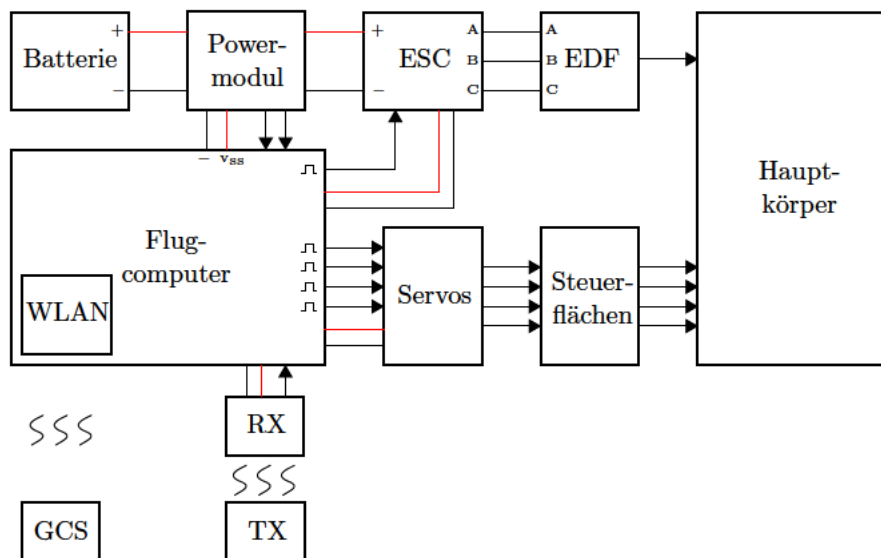


Abbildung 1.3: Blockschaltbild des elektrischen Teilsystems

<sup>1</sup>6 in Serie geschaltete Zellen mit einer Nennspannung von 3.7 V

Kürzel	Bezeichnung	Hersteller	Modell
BAT	Batterie	Tattu	3S1P, 2300 mAh, 11.1 V, 45C
PM	Power-Modul	Emlid	Power Module
ESC + BEC	Motor-Regler	unbekannt	80A, 6S
EDF	Impeller	FMS	70 mm, 12-Blatt
BLDC	Gleichstrommotor	FMS	Predator 3060-1900KV
	Servo	EMAX	ES09MD
TX	Funksender	FrSky	Taranis Q X7
RX	Funkempfänger	FrSky	R-XSR

Tabelle 1.1: Komponenten des elektrischen Teilsystems

### 1.2.1 Flugcomputer

Zentrales Element jedes unbemannten Flugobjekts ist der Flugcomputer, der gerade für instabile Systeme die besonders kritische Aufgabe der Stabilisierung übernimmt. Dieser besteht hier konkret aus einem RASPBERRY PI 4B [20] sowie einem ‐aufgesetzten‐ NAVIO2 AUTOPILOT [8]. Letzterer beherbergt die für den Flug notwendige Sensorik, Signalverarbeitungseinheiten sowie einige weitere Komponenten und Schnittstellen beispielsweise zur Kommunikation mit externen Messeinheiten.

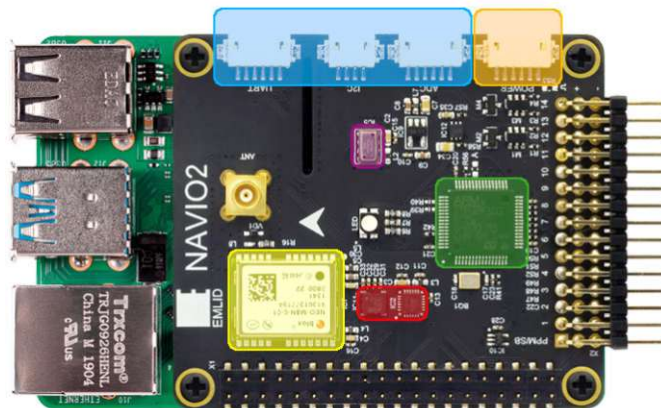


Abbildung 1.4: Flugcomputer (nachgezeichnet aus [8])

- Power-Modul-Port
- RC I/O Co-Prozessor
- Duale 9DoF IMU
- GNSS Modul
- Barometer
- Erweiterungsports (ADC, I2C, UART)

Der Flugcomputer selbst sitzt auf einer gedämpft angekoppelten Halterung. Diese Aufhängung erfüllt im Wesentlichen zwei Aufgaben: durch die Tiefpasscharakteristik der elastischen Ankopplung werden hochfrequente, mechanische Schwingungen gedämpft was für die störungsarme Messung der Beschleunigung und Winkelgeschwindigkeit notwendig ist, und zum anderen wird durch den zusätzlichen Abstand zum Elektromotor die Überlagerung des Erdmagnetfeldes durch jenes des Motors verringert. Beides ist für die akkurate Schätzung der Orientierung maßgeblich.

Bezeichnung	Modell
Inertiale Messeinheit (IMU 1)	MPU9250
Inertiale Messeinheit (IMU 2)	LSM9DS1
Barometer	MS5611
GNSS-Modul	U-blox M8N
RC-Coprozessor	Cortex-M3

Tabelle 1.2: Navio2 Spezifikationen

### 1.3 Software

Auf dem Flugcomputer läuft ein vom Hersteller EMLID speziell für den NAVIO2 AUTOPILOT angepasstes Betriebssystem. Der für die experimentellen Untersuchungen verwendete Flugregler ist durch die frei zugängliche Software ARDUPILOT 4.0.7 gegeben. Darin wird der gebaute Drohnen-Typ von Haus aus unterstützt.

Die Übertragung der Telemetrie-Daten an die Bodenstation sowie das Einstellen diverser Parameter wird über eine WLAN-Brücke bewerkstelligt. Dabei kommt die Software MISSION PLANNER, welche zum ARDUPILOT Ökosystem [1] gehört sowie QGROUNDCONTROL zum Einsatz.

## 2. Modellbildung

Im folgenden Kapitel wird ein mathematisches Modell der Drohne, großteils basierend auf fundamentalen Sätzen der Physik (White Box) hergeleitet. Für die Modellierung auf Subsystem- beziehungsweise Komponentenebene werden auch rein datengetriebene (Black Box) Zugänge verfolgt.

Der erste Abschnitt bietet eine Übersicht über die identifizierten Dynamiken und alle relevanten Gleichungen, während der zweite Abschnitt näher auf die verwendeten Modellierungsansätze, Identifikationsmechanismen und getroffenen Annahmen eingeht. Die gefundenen numerischen Werte der Parameter sind dabei stets im entsprechenden Abschnitt gelistet. Im dritten und letzten Abschnitt dieses Kapitels wird das Gesamtmodell schließlich gegen aufgezeichnete Flugdaten validiert. Dabei werden einerseits Validierungstests basierend auf der reinen Streckendynamik und andererseits Validierungstests des Drohnenmodells in Kombination mit einer stabilisierenden Regelung durchgeführt.

Da der Fokus auf der Identifikation der grundlegenden Flugdynamik liegt, welche in weiterer Folge für den Entwurf einer Regelung verwendet werden soll, ist es von größter Wichtigkeit die richtigen funktionalen Abhängigkeiten der Systemgrößen von- und zueinander sowie eine qualitativ korrekte Parametrierung zu finden. Trotz des einfachen mechanischen Aufbaus ist eine detaillierte Modellierung der durch den Impeller erzeugten Luftkräfte und -momente eine extrem schwierige Aufgabe, die tiefe Kenntnisse der Strömungsfelder im und außerhalb des Mantels erfordert. Um den Modellierungsaufwand vertretbar zu halten werden deshalb einige vereinfachende Annahmen getroffen und das Modell auf den Schwebeflug beschränkt. Für eine detaillierte Beschreibung der komplexen aerodynamischen Effekte sei beispielsweise auf die Arbeiten von Johnson & Turbe [16] und Ko et al. [17] verwiesen.

## 2.1 Flugdynamik

Man betrachte die Skizze aus Abbildung 2.1 mit dem orthonormalen, rechtshändigen Koordinatensystem  $W = \{x_W, y_W, z_W\}$ , welches fest mit der Erdoberfläche verbunden ist und der in der Luftfahrt üblichen Norden-Osten-Unten (*North-East-Down*, NED) Konvention folgt sowie dem mit dem Drohnenkörper fest verbundenen Koordinatensystem  $B = \{x_B, y_B, z_B\}$  dessen Ursprung mit dem Massenmittelpunkt des Flugobjektes zusammenfällt. Unter der Annahme, dass der Massenmittelpunkt zentrisch sitzt fällt die lokale  $z_B$ -Achse mit der Rotationsachse des Rotors zusammen. Die körperfeste  $y_B$ -Achse zeigt damit aus der Perspektive eines fiktiven Piloten nach rechts, die  $x_B$ -Achse nach vorne und die  $z_B$ -Achse nach unten. Die Indizes  $W$  beziehungsweise  $B$  beziehen sich dabei auf die gängige englischsprachige Notation bezeichnen entsprechend das erdfeste (*world fixed*) beziehungsweise körperfeste (*body fixed*) Koordinaten- und Bezugssystem.

Die Orientierung der Drohne kann dann in Form einer Rotationsmatrix  $R \in SO(3) : B \rightarrow W$ , welche körperfeste Größen in das Inertialsystem abbildet<sup>1</sup>, angegeben werden [5, 22].

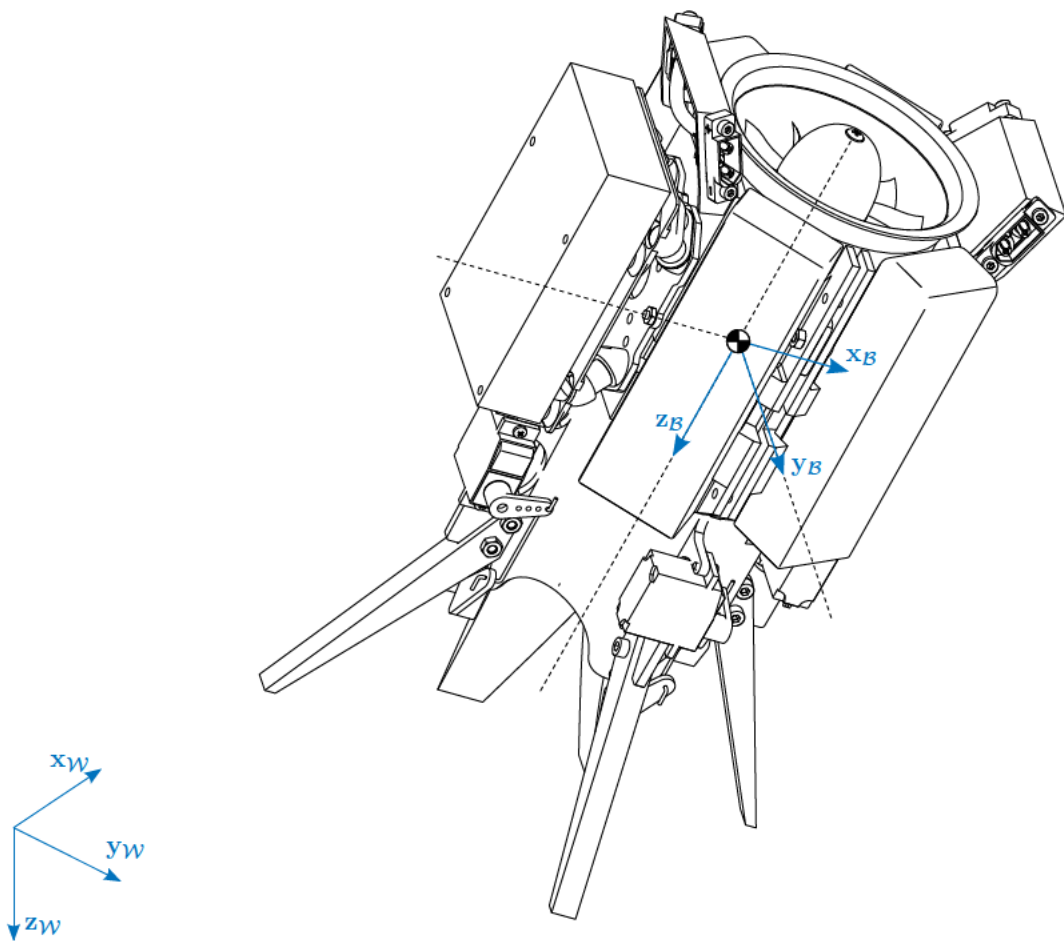


Abbildung 2.1: Koordinatensysteme

<sup>1</sup> $SO(n)$  steht für „spezielle orthogonale Gruppe im  $n$ -dimensionalen Raum“ und umfasst alle Drehungen dieses Raumes. Diese Drehungen werden durch orthogonale Matrizen  $R$  mit der Determinante  $\det(R) = +1$  beschrieben.

### 2.1.1 Starrkörperdynamik

Modelliert man die Drohne als ein System starrer Körper mit der Gesamtmasse  $m$ , bestehend aus dem Drohnenkörper und dem Rotor, so erhält man unter Verwendung des (Dreh-)Impulserhaltungssatzes einen Satz gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen in der Position  $\mathbf{p}$ , Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , Orientierung  $\mathbf{R}$  und Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  [25, 27].

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \quad \text{Position} \quad (2.1a)$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = mg\mathbf{z}_{\mathcal{W}} + \mathbf{R}\mathbf{f} \quad \text{Translation} \quad (2.1b)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_{\times} \quad \text{Orientierung} \quad (2.1c)$$

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \quad \text{Rotation} \quad (2.1d)$$

Darin beschreibt  $\boldsymbol{\omega}_{\times}$  eine schiefsymmetrische Matrix der Form

$$\boldsymbol{\omega}_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

mit den Komponenten des Winkelgeschwindigkeitsvektors  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ ,  $\mathbf{I}$  den als diagonal angenommenen Trägheitstensor des Drohnenkörpers<sup>2</sup> und  $\mathbf{f}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  die auf den Drohnenkörper wirkenden Kräfte und Momente, allesamt dargestellt im körperfesten Koordinatensystem  $\mathcal{B}$ . Die translatorischen Zustandsgrößen  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{v}$  sind demnach in weltfesten Koordinatensystem  $\mathcal{W}$  dargestellt.

Im Sinne einer kompakten Notation wird im Rahmen dieser Arbeit in der Regel nicht zwischen dem physikalischen Vektor und der Darstellung des selben unterschieden. Das zur Darstellung verwendete Koordinatensystem ergibt sich stets aus dem Kontext und wird nur in Ausnahmefällen explizit angegeben.

### 2.1.2 Parametrierung der Orientierung

Im dreidimensionalen Raum besitzt ein starrer Körper genau drei rotatorische Freiheitsgrade. Dementsprechend lässt sich die Orientierung in einer Minimalkoordinatendarstellung ebenfalls mit genau drei Parametern beschreiben. Im Unterschied dazu verwenden Nichtminimalkoordinaten-Darstellungen, wie beispielsweise die Rotationsmatrix aus Gleichung (2.1c) eine größere Anzahl an Parametern. Dem Nachteil des höheren Speicherbedarfs steht dabei der Vorteil der singularitätsfreien Beschreibung der Orientierung gegenüber. Gerade wenn aggressive Flugmanöver und damit einhergehend große Änderungen der Orientierung zu erwarten sind, ist deshalb eine Nichtminimalkoordinaten-Darstellungen notwendig. Eine gute Übersicht über die Möglichkeiten der Orientierungsparametrierung sowie wie die Umrechnung zwischen den verschiedenen Darstellungen ist in [5] zu finden. Speziell für Quaternionen und Rotationsmatrizen bietet auch [22] einen sehr guten Überblick.

In dieser Arbeit finden sowohl die in der Luftfahrt gebräuchlichen Roll-Nick-Gier-Winkel (*Roll-Pitch-Yaw*, RPY), welche zu den TRAIT-BRYAN-Winkeln<sup>3</sup> (Minimalkoordinatendarstellung, 3 Parameter) zählen, als auch Quaternionen (4 Parameter) Verwendung. Einige der wichtigsten Zusammenhänge sollen deshalb im Folgenden besprochen werden.

	Rotationsmatrix $\mathbf{R}$	Quaternion $\mathbf{q}$	RPY-Winkel $\phi$
Parameter	$3 \times 3 = 9$	$1 + 3 = 4$	3
Freiheitsgrade	3	3	3
Zwangsbedingungen	$9 - 3 = 6$ $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \quad \det(\mathbf{R}) = 1$	$4 - 3 = 1$ $\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^* = 1$	$3 - 3 = 0$

Tabelle 2.1: Parametrierung der Orientierung

<sup>2</sup>die Drohne exklusive Rotor

<sup>3</sup>oftmals auch Euler-Winkel genannt

## Roll-Nick-Gier-Winkel

Eine einfache und intuitive Möglichkeit die Orientierung eines Körpers oder Koordinatensystems gegenüber einem anderen zu beschreiben ist durch die Minimalkoordinatendarstellung

$$\boldsymbol{\phi}^T = [\varphi \quad \theta \quad \psi] \quad (2.3)$$

mit dem Roll-  $\varphi$ , Nick-  $\theta$  und Gierwinkel  $\psi$  (*Roll-Pitch-Yaw*, RPY) gegeben. Mit elementaren Rotationsmatrizen

$$\mathbf{R}_{\mathcal{K}\mathcal{I}} = \mathbf{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{\mathcal{L}\mathcal{K}} = \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{\mathcal{B}\mathcal{L}} = \mathbf{R}_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\varphi & s_\varphi \\ 0 & -s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix}$$

und der in der Luftfahrt üblichen Drehreihenfolge ZYX, erhält man die gesamte, durch  $\boldsymbol{\phi}$  vollständig parametrisierte Koordinatentransformation

$$\mathbf{R}_{\mathcal{B}\mathcal{W}}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{R}_{\mathcal{B}\mathcal{L}}\mathbf{R}_{\mathcal{L}\mathcal{K}}\mathbf{R}_{\mathcal{K}\mathcal{W}} = \mathbf{R}_{x,\varphi}\mathbf{R}_{y,\theta}\mathbf{R}_{z,\psi}, \quad (2.4)$$

die das inertialfeste Koordinatensystem  $\mathcal{W}$  in das körperfeste  $\mathcal{B}$  überführt. Die gesamte Rotationsmatrix (2.4) beschreibt somit drei aufeinander folgende Drehungen:

1. Drehung um die  $\mathbf{z}_{\mathcal{W}}$ -Achse um den Gierwinkel  $\psi$  ( $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{K}$ )
2. Drehung um die  $\mathbf{y}_{\mathcal{K}}$ -Achse des neuen (um  $\psi$  rotierten) Koordinatensystems  $\mathcal{K}$  um den Nickwinkel  $\theta$  ( $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ )
3. Drehung um die  $\mathbf{x}_{\mathcal{L}}$ -Achse des Koordinatensystems  $\mathcal{L}$  um den Rollwinkel  $\varphi$  ( $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{B}$ )

Die Transformation eines Vektors  $\mathbf{k}$  vom körperfesten  $\mathcal{B}$  in das weltfeste  $\mathcal{W}$  Koordinatensystem zufolge einer reinen Rotation ist dann durch

$$\mathbf{k}_{\mathcal{W}} = \mathbf{R}_{\mathcal{W}\mathcal{B}}\mathbf{k}_{\mathcal{B}} \quad (2.5)$$

mit

$$\mathbf{R}_{\mathcal{W}\mathcal{B}} = \mathbf{R}_{\mathcal{B}\mathcal{W}}^{-1} = \mathbf{R}_{\mathcal{B}\mathcal{W}}^T = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\varphi - c_\varphi s_\psi & s_\psi s_\theta + c_\psi c_\varphi s_\theta \\ c_\theta s_\psi & c_\psi c_\varphi + s_\psi s_\theta s_\varphi & c_\varphi s_\psi s_\theta - c_\psi s_\varphi \\ -s_\theta & c_\theta s_\varphi & c_\theta c_\varphi \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

gegeben. Dabei wurde die abgekürzte Schreibweise  $c_{(\cdot)} = \cos(\cdot)$ ,  $s_{(\cdot)} = \sin(\cdot)$  verwendet. Für die inverse Operation erhält man

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan2(R_{32}, R_{33}) \\ -\arcsin(R_{31}) \\ \arctan2(R_{21}, R_{11}) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

mit  $R_{ij}$  als Eintrag der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte der Rotationsmatrix  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\mathcal{W}\mathcal{B}}$ . Demnach bezeichnet  $\boldsymbol{\phi}$  in dieser Arbeit nicht nur den Pseudovektor der Drehwinkel selbst, sondern ebenfalls eine (nichtlineare) Abbildung, die aus einer Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  die zugehörigen RPY-Winkel bestimmt.

Um den kinematischen Zusammenhang zwischen den Drehraten und dem Winkelgeschwindigkeitsvektor zu bestimmen gilt es zu beachten, dass die RPY-Winkel und somit auch die zugehörigen Ableitungsgrößen  $\dot{\boldsymbol{\phi}}^T = [\dot{\varphi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]$  in verschiedenen Koordinatensystemen definiert sind und vor der Addition dementsprechend in ein gemeinsames Koordinatensystem transformiert werden müssen. Wählt man dazu naheliegenderweise das körperfeste System, so erhält man

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} = \dot{\psi}\mathbf{R}_{\mathcal{B}\mathcal{W}}\mathbf{z}_{\mathcal{W}} + \dot{\theta}\mathbf{R}_{\mathcal{B}\mathcal{L}}\mathbf{R}_{\mathcal{L}\mathcal{K}}\mathbf{y}_{\mathcal{K}} + \dot{\varphi}\mathbf{R}_{\mathcal{B}\mathcal{L}}\mathbf{x}_{\mathcal{L}} \\ &= \dot{\psi}\mathbf{R}_{\mathcal{B}\mathcal{L}}\mathbf{R}_{\mathcal{L}\mathcal{K}}\mathbf{z}_{\mathcal{K}} + \dot{\theta}\mathbf{R}_{\mathcal{B}\mathcal{L}}\mathbf{y}_{\mathcal{L}} + \dot{\varphi}\mathbf{x}_{\mathcal{B}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Die zweite Zeile von Gleichung (2.8) ergibt sich aufgrund der Tatsache, dass die Rotation um eine Achse die Komponente entlang dieser Achse unverändert lässt. Zusammenfassen führt schließlich auf den gesuchten Zusammenhang

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \tilde{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{\omega} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\phi}) = \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \boldsymbol{\phi}} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{s_\theta s_\varphi}{c_\theta} & \frac{c_\varphi s_\theta}{c_\theta} \\ 0 & c_\varphi & -s_\varphi \\ 0 & \frac{s_\varphi}{c_\theta} & \frac{c_\varphi}{c_\theta} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$



Zur Parametrierung der Orientierung mittels RPY-Winkeln reicht es demnach die kinematische Differentialgleichung (2.1c) durch Gleichung (2.9) zu ersetzen und die Rotationsmatrix gemäß Gleichung (2.6) zu parametrieren. Statt der 9 Parameter der Rotationsmatrix sind somit lediglich die drei Winkel  $\phi$  in den Zustandsvektor mit aufzunehmen.

Aus Gleichung (2.9) folgt aber auch, dass an der Stelle

$$\det(\tilde{\mathbf{R}}(\phi)) = \cos(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta \pm \frac{\pi}{2} \quad (2.10)$$

die Matrix  $\tilde{\mathbf{R}}(\phi)$  singularär ist. Aus der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  können an dieser Stelle die zugehörigen RPY-Drehraten  $\dot{\phi}$  nicht berechnet werden. Man spricht dabei von einer sogenannten Repräsentations-Singularität.

## Quaternionen

Eine Lösung dieses Problems ist durch Quaternionen gegeben. Im Weiteren sei durch  $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$  ein Quaternion mit der Darstellung

$$\mathbf{q} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_{1:3} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

und den reellen Zahlen  $q_0, q_1, q_2$  und  $q_3$  gegeben. Die Zahl  $q_0$  wird als Skalar- oder Realteil und  $\mathbf{q}_{1:3}$  als der Imaginär- oder Vektorteil des Quaternion  $\mathbf{q}$  bezeichnet. Wie schon zuvor wird im Sinne einer kompakten Notation nicht zwischen einem Quaternion und der Darstellung des selben unterschieden.

Für Quaternionen gelten folgende wichtige Eigenschaften [22]

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} q_0 \\ -\mathbf{q}_{1:3} \end{bmatrix} \quad \text{Konjugation} \quad (2.12a)$$

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad \text{Betrag} \quad (2.12b)$$

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* / \|\mathbf{q}\|^2 \quad \text{Inversion} \quad (2.12c)$$

$$\mathbf{q}_I = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{Identitätsquaternion} \quad (2.12d)$$

Wie schon bei der Parametrierung durch TRAIT-BRYAN-Winkel und Rotationen im Allgemeinen ist auch die Multiplikation zweier Quaternionen nicht kommutativ. Es gilt<sup>4</sup>

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{p} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \neq \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \quad (2.13)$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden stets Quaternionen der Länge  $\|\mathbf{q}\| = 1$ , auch Einheitsquaternionen genannt, verwendet. Offensichtlich ist für Einheitsquaternionen die Konjugation gleichbedeutend mit der Inversion.

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* \quad (2.14)$$

Einheitsquaternionen können stets in der Form

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \mathbf{l} \sin(\alpha/2) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

mit der Drehachse  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{l}\| = 1$  und dem Drehwinkel  $\alpha \in \mathbb{R}$  dargestellt werden.

Die Abbildung eines Vektors vom lokalen (körperfesten) in das globale (ortsfixe) Koordinatensystem kann damit sehr kompakt durch das Doppelprodukt

$$\mathbf{k}_W = \mathbf{q}_{WB} \otimes \mathbf{k}_B \otimes \mathbf{q}_{WB}^* \quad (2.16)$$

mit der Quaternionen-Form des Vektors  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

<sup>4</sup>in [5] ist die Quaternionen-Multiplikation anders definiert. Diese Arbeit hält sich an die Konvention aus [22, 4] welche auch dem MATLAB AEROSPACE BLOCKSET zu Grunde liegt.

angegeben werden. Man erkennt unmittelbar die Ähnlichkeit zur Abbildung mit einer Rotationsmatrix (2.5). Gleichsetzen der beiden Gleichungen führt direkt auf den Zusammenhang zwischen den Elementen der Rotationsmatrix und jenen des Quaternions.

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Für den kinematischen Zusammenhang zwischen den Quaternionen-Raten und der Winkelgeschwindigkeit gilt

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\omega} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Zur singularitätsfreien Orientierungsbeschreibung reicht es somit, die vier Komponenten des Quaternions  $\mathbf{q}$  in den Zustandsvektor mit aufzunehmen, Gleichung (2.1c) durch Gleichung (2.19) zu ersetzen und die Rotationsmatrix gemäß Gleichung (2.18) zu parametrieren.

#### Anmerkung 2.1.1: Notation

Wie bereits erwähnt wird im Sinne einer kompakten Notation auf die explizite Angabe der Indizes  $\mathcal{W}$  bzw.  $\mathcal{B}$  im Allgemeinen verzichtet. Um Verwirrung zu vermeiden, sei an dieser Stelle deshalb nochmals erwähnt wie die Abbildungen zu interpretieren sind.

- Transformationen werden ohne Index angeschrieben

$$\mathbf{R} := \mathbf{R}_{\mathcal{W}\mathcal{B}}, \quad \mathbf{q} := \mathbf{q}_{\mathcal{W}\mathcal{B}},$$

und sind passiv (Koordinatentransformation) und als Abbildungen vom lokale ins globale Koordinatensystem ( $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{W}$ ) zu verstehen.

$$\mathbf{k}_{\mathcal{W}} = \mathbf{R}\mathbf{k}_{\mathcal{B}}, \quad \mathbf{k}_{\mathcal{W}} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbf{q}^*.$$

- Indexlose Größen sind stets im körperfesten Koordinatensystem dargestellt. Die einzige Ausnahme ist durch die translatorischen Zustandsgrößen (Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  und Position  $\mathbf{p}$ ) gegeben.

### 2.1.3 Kräfte und Momente

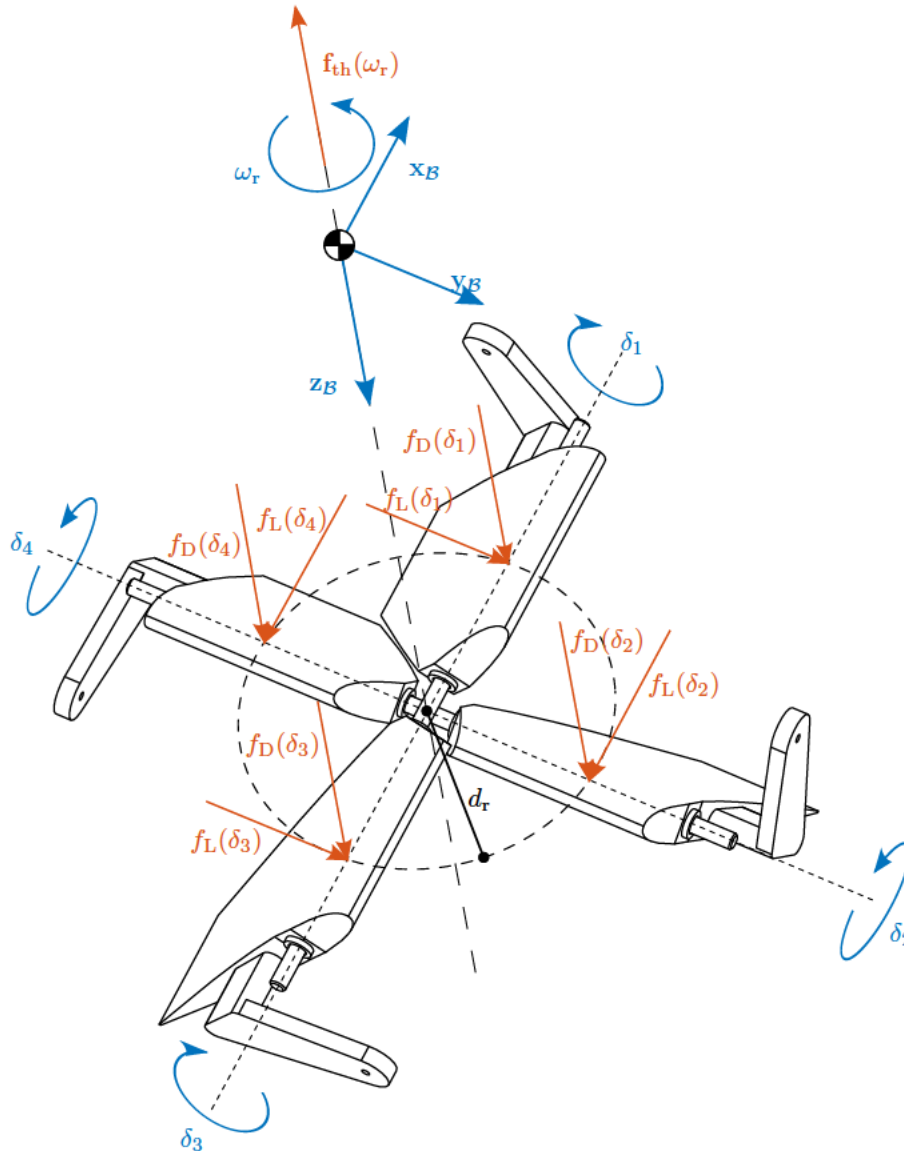


Abbildung 2.2: Anordnung der Steuerflächen

#### Kräfte

Unter Vernachlässigung externer Einflüsse wie beispielsweise Windkräften setzt sich die auf den Drohnenkörper wirkende äußere Gesamtkraft

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{th}(\omega_r) + \mathbf{f}_{cs}(\omega_r, \boldsymbol{\delta}) \quad (2.20)$$

aus der vom Mantelpropeller erzeugten Netto-Schubkraft<sup>5</sup>  $\mathbf{f}_{th}(\omega_r)$  und den von den vier Steuerflächen erzeugten Auftriebs- und Luftwiderstandskräften  $\mathbf{f}_{cs}(\omega_r, \boldsymbol{\delta})$  zusammen. Darin bezeichnet  $\omega_r$  die Winkelgeschwindigkeit des Impellers. Im Sinne einer kompakten Notation werden die Anstellwinkel der vier Steuerflächen in funktionale Gruppen zusammengefasst und im Weiteren mit

$$\boldsymbol{\delta}_x^T = [\delta_1 \quad \delta_3], \quad (2.21a)$$

$$\boldsymbol{\delta}_y^T = [\delta_2 \quad \delta_4], \quad (2.21b)$$

$$\boldsymbol{\delta}^T = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4] \quad (2.21c)$$

<sup>5</sup> Schubkraft korrigiert um den parasitären Luftwiderstand der genullten Steuerflächen

bezeichnet. Wie bereits in Gleichung (2.20) verwendet, kann damit die Abhängigkeit von bestimmten Steuerflächen sehr einfach ausgedrückt werden. Die Gruppe  $\delta_x$  bezeichnet also die (Winkel jener) Steuerflächen, welche entlang einer Parallelen zur körperfesten  $\mathbf{x}_B$ -Achse angeordnet sind und für ein Drehmoment um die  $\mathbf{x}_B$ -Achse sorgen. Vernachlässigt man zudem Änderungen in der Lage des aerodynamischen Druckmittelpunktes (*Center of Pressure*, CoP) und geht von vier äquivalenten Steuerflächen aus, so können die Auftriebs- und Luftwiderstandskräfte für jede der um einen beliebigen Winkel  $\delta_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  ausgelenkten Flossen durch

$$f_L(\omega_r, \delta_i) = C_L \omega_r^2 (\delta_i - \alpha_L \delta_i |\delta_i|) \quad \text{Auftriebskraft} \quad (2.22a)$$

$$f_D(\omega_r, \delta_i) = C_D \omega_r^2 \delta_i^2 \quad \text{Luftwiderstandskraft} \quad (2.22b)$$

beschrieben werden. Unter der Voraussetzung, dass keine (aerodynamischen) Kreuzkopplungseffekte auftreten, dürfen diese einfach superponiert werden. Damit erhält man

$$\mathbf{f}_{cs}(\omega_r, \boldsymbol{\delta}) = \sum_i^4 \mathbf{f}_{cs,i} = \begin{bmatrix} -f_L(\omega_r, \delta_2) - f_L(\omega_r, \delta_4) \\ f_L(\omega_r, \delta_1) + f_L(\omega_r, \delta_3) \\ f_D(\omega_r, \delta_1) + f_D(\omega_r, \delta_2) + f_D(\omega_r, \delta_3) + f_D(\omega_r, \delta_4) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Der Zusammenhang lässt sich unter Verwendung einer etwas zweckentfremdeten Notation und den in Gleichung (2.21) definierten Gruppen auch sehr kompakt als

$$\mathbf{f}_{cs}(\omega_r, \boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} -f_L(\omega_r, \boldsymbol{\delta}_y) \\ f_L(\omega_r, \boldsymbol{\delta}_x) \\ f_D(\omega_r, \boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

anschreiben.

Für die Schubkraft wird ein einfaches statisches Modell der Form

$$\mathbf{f}_{th}(\omega_r) = -C_{th} \omega_r^2 \mathbf{z}_B. \quad (2.25)$$

mit einer passenden Konstanten  $C_{th}$  verwendet.

## Momente

Das gesamte auf den Drohnenkörper wirkende Moment

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{cs}(\omega_r, \boldsymbol{\delta}) + \boldsymbol{\tau}_{gyr}(\omega_r, \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\tau}_{tq}(\omega_r) + \boldsymbol{\tau}_r(\dot{\omega}_r) \quad (2.26)$$

setzt sich aus dem Stellmoment der überströmten Steuerflächen  $\boldsymbol{\tau}_{cs}(\omega_r, \boldsymbol{\delta})$ , einem gyroskopischen Moment  $\boldsymbol{\tau}_{gyr}(\omega_r, \boldsymbol{\omega})$  zufolge des schnell drehenden Rotors, dem Luftwiderstandsmoment des Propellers  $\boldsymbol{\tau}_{tq}(\omega_r)$  sowie einem Anteil zufolge der Rotorträgheit  $\boldsymbol{\tau}_r(\dot{\omega}_r)$  zusammen.

Mit den zuvor definierten Gruppen der Anstellwinkel und passenden Abständen vom Massenmittelpunkt zu den Druckmittelpunkten der Steuerflächen

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{cs,1}^T &= [d_r \quad 0 \quad d_{13}] , & \mathbf{r}_{cs,2}^T &= [0 \quad d_r \quad d_{24}] , \\ \mathbf{r}_{cs,3}^T &= [-d_r \quad 0 \quad d_{13}] , & \mathbf{r}_{cs,4}^T &= [0 \quad -d_r \quad d_{24}] \end{aligned}$$

erhält man das Steuermoment

$$\boldsymbol{\tau}_{cs}(\boldsymbol{\delta}, \omega_r) = \sum_i^4 \mathbf{r}_{cs,i} \times \mathbf{f}_{cs,i} = \begin{bmatrix} -d_{13} (f_L(\omega_r, \delta_1) + f_L(\omega_r, \delta_3)) + d_r (f_D(\omega_r, \delta_2) - f_D(\omega_r, \delta_4)) \\ -d_{24} (f_L(\omega_r, \delta_2) + f_L(\omega_r, \delta_4)) + d_r (f_D(\omega_r, \delta_1) - f_D(\omega_r, \delta_3)) \\ d_r (f_L(\omega_r, \delta_1) + f_L(\omega_r, \delta_2) - f_L(\omega_r, \delta_3) - f_L(\omega_r, \delta_4)) \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Analog zu den Stellkräften lässt sich diese Gleichung mit (2.21) in der verkürzten Form

$$\boldsymbol{\tau}_{cs}(\boldsymbol{\delta}, \omega_r) = \begin{bmatrix} -d_{13} f_L(\omega_r, \boldsymbol{\delta}_x) \\ -d_{24} f_L(\omega_r, \boldsymbol{\delta}_y) \\ d_r f_L(\omega_r, \boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_r f_D(\omega_r, \boldsymbol{\delta}_y) \\ d_r f_D(\omega_r, \boldsymbol{\delta}_x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

anschreiben.

Modelliert man den Rotor als dünne Kreisscheibe, so erhält man unter Verwendung der Tatsache, dass

die Relativwinkelgeschwindigkeit des Rotors gegenüber dem Drohnenkörper im Allgemeinen um ein Vielfaches größer ist als jene des Drohnenkörpers selbst  $\omega_r \gg \omega_z$  für den Rotordrall näherungsweise

$$\mathbf{L}_r = -I_r \omega_r \mathbf{z}_B. \quad (2.29)$$

Ableiten gegenüber dem Inertialsystem führt auf

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L}_r)_{\mathcal{W}} = -I_r \dot{\omega}_r \mathbf{z}_B - \boldsymbol{\omega} \times I_r \omega_r \mathbf{z}_B = -\boldsymbol{\tau}_r - \boldsymbol{\tau}_{\text{gyr}}. \quad (2.30)$$

Dieses beiden Anteile müssen in entgegengesetzter Weise auf den Drohnenkörper wirken.

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{gyr}}(\boldsymbol{\omega}, \omega_r) = \boldsymbol{\omega} \times I_r \omega_r \mathbf{z}_B = I_r \omega_r \begin{bmatrix} \omega_y \\ -\omega_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\boldsymbol{\tau}_r(\dot{\omega}_r) = I_r \dot{\omega}_r \mathbf{z}_B \quad (2.32)$$

Schließlich wirkt noch ein Luftwiderstandsmoment der Form

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{tq}}(\omega_r) = C_{\text{tq}} \omega_r^2 \mathbf{z}_B. \quad (2.33)$$

auf den Impeller und damit auch auf den Drohnenkörper.

### Antriebsstrang

Mit der normalisierten Eingangsgröße

$$\hat{u}_r(u_r, v_{\text{bat}}) = \frac{u_r - u_{r,\text{MIN}}}{u_{r,\text{MAX}} - u_{r,\text{MIN}}} \frac{v_{\text{bat}}}{v_{\text{bat},\text{MAX}}},$$

als Funktion des ESC-Referenzsignals  $u_r$  sowie der Batteriespannung  $v_{\text{bat}}$  kann die Dynamik des Antriebsstranges kompakt durch ein nichtlineares System erster Ordnung der Form

$$T_r \dot{\omega}_r + \omega_r = K_r (\hat{u}_r + \alpha_r \hat{u}_r^2) \quad (2.34)$$

beschrieben werden.

### 2.1.4 Gesamtsystem

Fasst man die gefunden Gleichungen zusammen, so ergibt sich ein System 13 nichtlinearer, gekoppelter Differentialgleichungen<sup>6</sup> erster Ordnung in den in Tabelle 2.2 gelisteten Zuständen.

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \quad \text{Position} \quad (2.35a)$$

$$m \dot{\mathbf{v}} = mg \mathbf{z}_{\mathcal{W}} + \mathbf{R} (\mathbf{f}_{\text{th}} + \mathbf{f}_{\text{cs}}) \quad \text{Translation} \quad (2.35b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \tilde{\mathbf{R}} \boldsymbol{\omega} \quad \text{Orientierung} \quad (2.35c)$$

$$\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}_{\text{gyr}} + \boldsymbol{\tau}_r + \boldsymbol{\tau}_{\text{tq}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{cs}} \quad \text{Rotation} \quad (2.35d)$$

$$T_r \dot{\omega}_r = K_r (\hat{u}_r - \alpha_r \hat{u}_r^2) - \omega_r \quad \text{Rotordynamik} \quad (2.35e)$$

Bezeichnung	Symbol	Dimension
Position	$\mathbf{p}$	3
Geschwindigkeit	$\mathbf{v}$	3
Orientierung	$\boldsymbol{\phi}$ ( $\mathbf{q}$ )	3 (4)
Winkelgeschwindigkeit	$\boldsymbol{\omega}$	3
Rotor-Winkelgeschwindigkeit	$\omega_r$	1

Tabelle 2.2: Zustände des Drohnen-Modells

<sup>6</sup>14 wenn zur Parametrierung der Orientierung Quaternionen verwendet werden

## 2.2 Parameteridentifikation

Zur vollständigen Systembeschreibung sollen nun alle freien Parameter des Differentialgleichungssystems (2.35) bestimmt werden.

### 2.2.1 Globale Systemparameter

Die erste Identifikationsaufgabe besteht im Ermitteln der “globalen” Drohnenparameter - also allen relevanten Abständen, der Gesamtmasse sowie des diagonal angenommenen Trägheitstensors.

Während die Abmessungen  $d_{13}$ ,  $d_{24}$ ,  $d_r$  und das Massenträgheitsmoment  $I_r$  des Rotors einfach dem CAD-Modell entnommen, die Gesamtmasse  $m$  durch abwiegen leicht bestimmt werden kann, gestaltet sich die Ermittlung der Massenträgheitsmomente  $\mathbf{I}$  des Drohnenkörpers aufgrund des ungenauen CAD-Modells als weitaus schwierigere Aufgabe. Um Wärmeverzug zu vermeiden sind nämlich sämtliche 3D-gedruckten Teile (Düse, Flossen, etc.) dünnwandig ausgeführt und im Inneren mit einer Wabenstruktur versehen. Dies wird im CAD-Modell ebenso wenig wie die Verkabelung, die aber einen signifikanten Massenbeitrag liefert, abgebildet. Aus diesem Grund sollen die Massenträgheitsmomente experimentell bestimmt werden. Dazu wird die Drohne mit zwei biegeschlaffen Schnüren an Punkten mit identem Abstand zum Massenmittelpunkt aufgehängt. Der Energiesatz liefert dann für kleine Amplituden  $\beta \ll 1$  und unter vernachlässigter Dämpfung die Schwingungsgleichung [15]

$$\ddot{\beta} + \omega_0^2 \beta = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{mgD^2}{4hI}. \quad (2.36)$$

mit der ungedämpften Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$ , der Fadenlänge  $h$  sowie dem Abstand vom Massenmittelpunkt zu den beiden Aufhängungspunkten  $D/2$ . Nach einer einfachen Umformung erhält man für das gesuchte Massenträgheitsmoment

$$I = \frac{mgD^2}{4h\omega_0^2} = \frac{mgD^2T^2}{16h\pi^2}. \quad (2.37)$$

Dieses Experiment wurde für alle drei Achsen 5 Mal durchgeführt. Die Periodendauer  $T$  wurde dabei mittels Stoppuhr aufgezeichnet und pro Durchgang über jeweils 10 Perioden erfasst und gemittelt.

Die Parameter des Experiments (Fadenlänge  $h$ , Abstand zum Massenmittelpunkt  $D/2$ ) wurden soweit konstruktiv möglich gemäß den in [15] angeführten Kriterien optimiert. Die daraus erhaltenen Parameter sind in Tabelle 2.3 gelistet. Dabei wurden die gefundenen Massenträgheitsmomente bereits um den Beitrag der für das Experiment notwendigen Aufhängung, das Massenträgheitsmoment  $I_z$  um die körperfeste  $\mathbf{z}_B$  Achse um das jenes des Rotors  $I_r$  korrigiert.

Symbol	Wert	Einheit
$m$	1.466	kg
$I_x$	5.30e-3	kgm <sup>2</sup>
$I_y$	4.34e-3	kgm <sup>2</sup>
$I_z$	5.23e-3	kgm <sup>2</sup>
$I_r$	1.10e-5	kgm <sup>2</sup>
$d_{13}$	117e-3	m
$d_{24}$	119.5e-3	m
$d_r$	18.4e-3	m

Tabelle 2.3: Globale Drohnenparameter

## 2.2.2 Kräfte und Momente

Zur Bestimmung der Kräfte und Momente wird die Drohne wie in Abbildung 2.3 dargestellt befestigt.

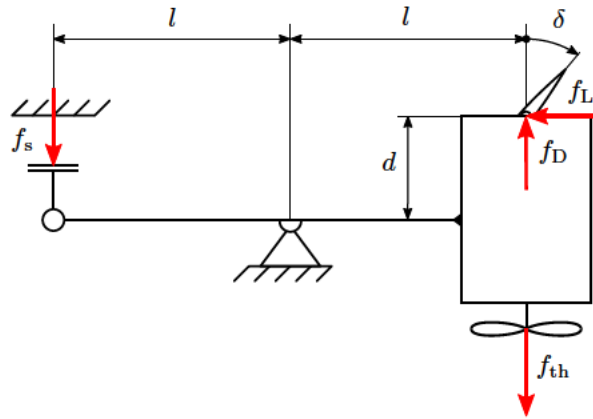


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung des Drohnenprüfstandes

Geht man davon aus, dass die Änderung der Position des aerodynamischen Druckmittelpunktes (*Center of Pressure*, CoP) für einen beliebigen Anstellwinkel  $\delta$  klein gegenüber dem Normalabstand  $d$  vom Massenmittelpunkt der Drohne zu der Drehachse der Steuerfläche ist, so kann die gemessene Kraft<sup>7</sup>

$$f_s = f_{th}(\omega_r) - f_D(\omega_r, \delta) - \frac{d}{l} f_L(\omega_r, \delta). \quad (2.38)$$

dazu verwendet werden, die auf eine Steuerfläche wirkenden Kräfte zu bestimmen. Bedingt durch die Symmetrie der verwendeten Flossenprofile behält die Luftwiderstandskraft unabhängig vom Vorzeichen von  $\delta$  stets ihre Wirkungsrichtung bei, während die Auftriebskraft ihr Vorzeichen mit der Richtung des Auslenkung ändert. Damit gilt

$$f_L(-\delta) = -f_L(\delta) \quad (2.39a)$$

$$f_D(-\delta) = f_D(\delta) \quad (2.39b)$$

und Gleichung (2.38) lässt sich auch in der Form

$$f_s = \begin{cases} f_{th}(\omega_r) - f_D(\omega_r, \delta) - \frac{d}{l} |f_L(\omega_r, \delta)| & \forall \delta > 0 \\ f_{th}(\omega_r) & \delta = 0 \\ f_{th}(\omega_r) - f_D(\omega_r, \delta) + \frac{d}{l} |f_L(\omega_r, \delta)| & \forall \delta < 0 \end{cases} \quad (2.40a)$$

$$\delta = 0 \quad (2.40b)$$

$$\forall \delta < 0 \quad (2.40c)$$

anschreiben. Die Luftwiderstandskraft  $f_D$  wurde dabei so normalisiert, dass  $f_D(\delta = 0) = 0$  gilt. Der hier als Schubkraft bezeichnete Ausdruck  $f_{th}(\omega_r)$  beschreibt demnach nicht den gesamten vom Propeller erzeugten Schub, sondern die resultierende Vertikal-Kraft bei unausgelenkten Steuerflächen.

<sup>7</sup>dabei wurde die Gewichtskraft vernachlässigt, was durch eine geeignete Korrektur des Messsignals stets erreicht werden kann

## Statischer Schub

Betrachtet man zuerst den einfachsten Fall  $\delta = 0$ , formal ausgedrückt durch Gleichung (2.40b) so lässt sich einfach ein Zusammenhang zwischen der Rotordrehzahl  $\omega_r$  und der Schubkraft  $f_{th}(\omega_r)$  finden.

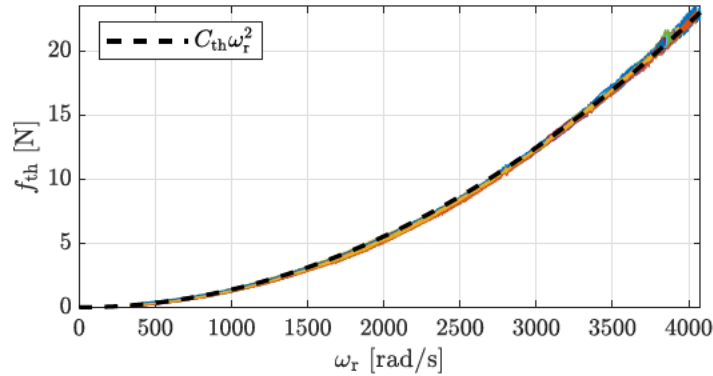


Abbildung 2.4: Statische Schubkraft  $f_{th}(\omega_r)$

Aus der Strahltheorie (*momentum theory*) ist bekannt, dass der erzeugte Schub im Schwebeflug quadratisch von der Blattumlaufgeschwindigkeit  $\omega_r R_r$  abhängt. Damit erhält man die Ausdrücke

$$f_{th}(\omega_r) = c_{th} \rho A_r R_r^2 \omega_r^2 = C_{th} \omega_r^2 \quad \text{Schubkraft} \quad (2.41)$$

$$\tau_{tq}(\omega_r) = c_{tq} \rho A_r R_r^3 \omega_r^2 = C_{tq} \omega_r^2 \quad \text{Luftwiderstandsmoment} \quad (2.42)$$

welche über die Beziehung

$$C_{tq} = C_{th} \sqrt{\frac{C_{th}}{2}} \quad (2.43)$$

miteinander verknüpft sind [26, 3]. Darin bezeichnet  $A_r = R_r^2 \pi$  die Rotorkreisfläche,  $R_r$  den Rotorradius,  $\rho$  die Luftdichte und  $c_{th}$  beziehungsweise  $c_{tq}$  von der Rotorgeometrie abhängige, dimensionslose Beiwerte. Praktisch reicht es die zusammengefassten Größen  $C_{th} = c_{th} \rho A_r R_r^2 > 0$  und  $C_{tq} = c_{tq} \rho A_r R_r^3 > 0$  zu bestimmen. Für ein statisches Modell mit einem Parameter

$$\mathbf{y} = \mathbf{n} a_0 \quad (2.44)$$

wie jenes aus Gleichung (2.41) erhält man für die optimale Wahl des Parameters

$$a_0 = (\mathbf{n}^T \mathbf{n})^{-1} \mathbf{n}^T \mathbf{y}. \quad (2.45)$$

Zur Bestimmung des Schubbeiwertes  $C_{th}$  wählt man also für den Datenvektor  $\mathbf{n}^T = [\omega_{r,1}^2 \ \cdots \ \omega_{r,N}^2]$  und den Ausgangsvektor  $\mathbf{y}^T = [f_{th,1} \ \cdots \ f_{th,N}]$  und erhält direkt den in Tabelle 2.4 angegebenen Wert. Es ergibt sich das maximale aufgezeichnete Schub-Gewichts-Verhältnis von

$$\frac{f_{th,MAX}}{mg} \approx \frac{23.58}{14.38} = 1.64 \quad (2.46)$$

bei einer Winkelgeschwindigkeit von  $\omega_r = 4048$  [rad/s] und einer Batteriespannung von  $v_{bat} = 22.31$  [V]. Über Gleichung (2.43) kann auch direkt eine Abschätzung für den Momentenbeiwert  $C_{tq}$  angegeben werden. Im Rahmen der im folgenden Abschnitt behandelten Modellvalidierung hat sich gezeigt, dass diese Abschätzung das tatsächliche Systemverhalten nicht ausreichend genau beschreibt. Basierend auf echten Flugdaten wurde deshalb ein leicht korrigierter Wert für  $C_{tq}$  bestimmt, der in Tabelle 2.4 angeführt ist.

## Auftriebs- und Luftwiderstandskräfte der Steuerflächen

Korrigiert man nun die Gleichungen (2.40) um den statischen Schub, so ergibt sich die Auftriebskraft  $f_L$  als der gerade und die Luftwiderstandskraft  $f_D$  als der ungerade Teil des Ausdrucks  $f_s - f_{th}$ . Aus der Strahltheorie ist bekannt, dass die vom Impeller induzierte Strömungsgeschwindigkeit durch

$$v_i = \sqrt{\frac{f_{th}}{2\rho A_r}} = \omega_r R_r \sqrt{\frac{c_{th}}{2}}. \quad (2.47)$$



beschrieben werden kann [26]. Nun ist die Auftriebs- und Luftwiderstandskraft einer überströmten Tragfläche quadratisch abhängig von der Anströmgeschwindigkeit, die im Schwebeflug ja gerade der vom Impeller induzierten Geschwindigkeit  $v_i$  entspricht. Es ist also naheliegend, die am Sensor gemessene Kraft nicht nur um die omniprésente, statische Schubkraft zu korrigieren, sondern die Daten anschließend auch mit  $\omega_r^2$  zu normieren.

Zur Identifikation der entsprechenden Modelle wurden drei Experimente, verteilt über den gesamten Betriebsbereich durchgeführt. Die zugehörigen Daten sind in Abbildung 2.5 dargestellt. Auf der rechten Seite der Abbildung ist die korrigierte und mit  $\omega_r^2$  normierte, gemessene Kraft dargestellt. Man erkennt unmittelbar, dass die Annahme der Proportionalität zwischen den auf eine Steuerfläche wirkenden Kräften und der quadratischen Rotorwinkelgeschwindigkeit  $\omega_r^2$  für den relevanten Betriebsbereich gerechtfertigt ist.

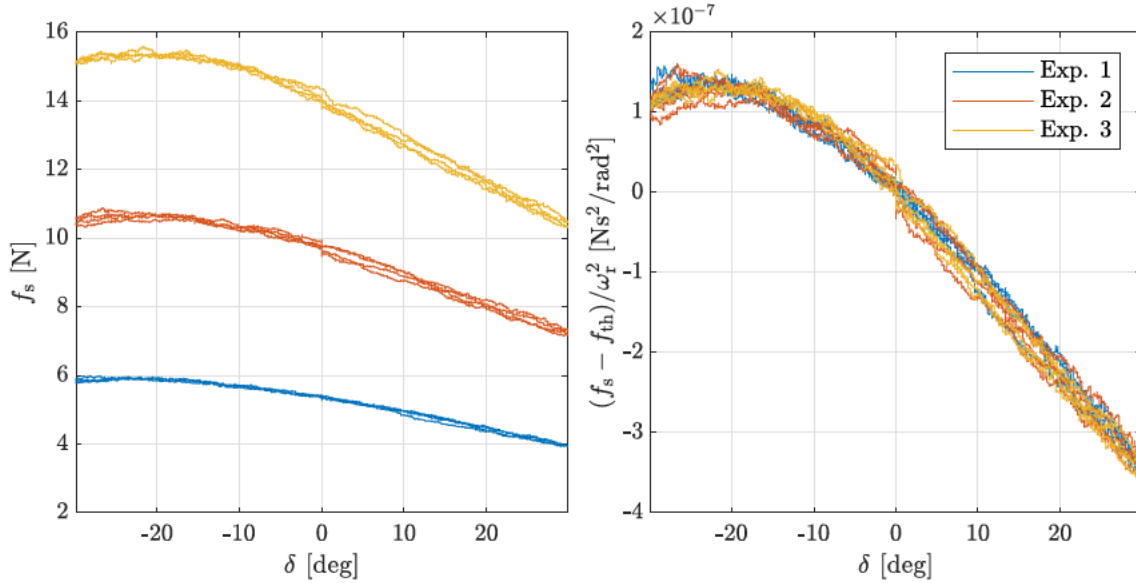


Abbildung 2.5: Gemessene Kraft  $f_s$  für verschiedene Steuerflächen-Anstellwinkel  $\delta$  und Rotordrehzahlen  $\omega_r$

Wählt man nun aus den aufgezeichneten Daten Tuple  $(\delta_i, \delta_j)$  so, dass  $\delta_i = -\delta_j$ ,  $\forall i, j$  gilt und addiert beziehungsweise subtrahiert die gemessenen Kräfte für die um einen Winkel  $\delta_i$  ausgelenkte Flosse und für die um einen Winkel  $\delta_j$  ausgelenkte Flosse, so erhält man die Ausdrücke

$$f_s(\delta_i) + f_s(\delta_j) - 2f_{th} = f_D(\delta_i) + f_D(\delta_j) = 2f_D(\delta_i) \quad (2.48)$$

$$f_s(\delta_i) - f_s(\delta_j) = \frac{d}{l} [f_L(\delta_i) - f_L(\delta_j)] = \frac{d}{l} 2f_L(\delta_i) \quad (2.49)$$

Damit stehen zwei Gleichungen zur Bestimmung von  $f_L$  und  $f_D$  zu Verfügung. Die beiden Ausdrücke sind in normierter Form in Abbildung 2.6 dargestellt. Die Widerstands- und Auftriebskraft einer um den Winkel  $\delta$  ausgelenkten Steuerfläche lässt sich somit durch die statischen Beziehungen

$$f_L(\omega_r, \delta) = C_L \omega_r^2 (\delta - \alpha_L \delta |\delta|) = C_L \omega_r^2 \tilde{\delta} \quad (2.50a)$$

$$f_D(\omega_r, \delta) = C_D \omega_r^2 \delta^2 \quad (2.50b)$$

beschreiben. Zur kompakten Beschreibung der Auftriebskraft (2.50a) wurde dabei der transformierte Steuerflächen-Winkel

$$\tilde{\delta} = \delta - \alpha_L \delta |\delta| \quad (2.51)$$

eingeführt.

Symbol	Wert	Einheit
$C_{th}$	1.384e-6	N s <sup>2</sup> /rad <sup>2</sup>
$C_{tq}$	1.698e-9	N s <sup>2</sup> /rad <sup>2</sup>
$C_L$	6.501e-9	N s <sup>2</sup> /rad <sup>2</sup> /deg
$\alpha_L$	1.012e-2	1/deg
$C_D$	6.269e-11	N s <sup>2</sup> /rad <sup>2</sup> /deg <sup>2</sup>

Tabelle 2.4: Aerodynamische Beiwerte

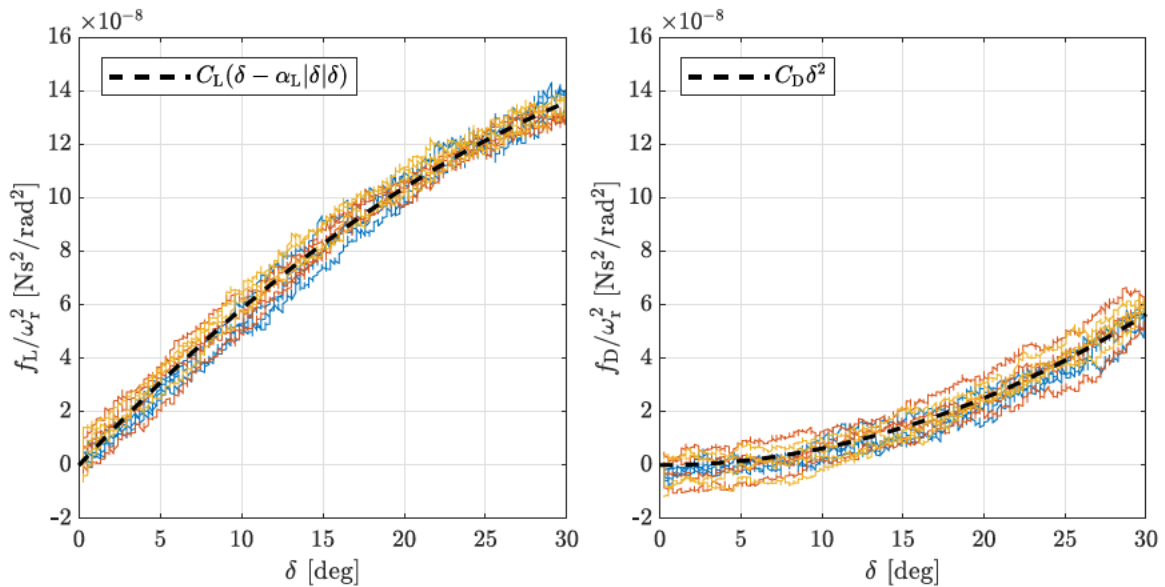


Abbildung 2.6: Normalisierte Auftriebs-  $f_L(\delta)/\omega_r^2$  und Luftwiderstandskraft  $f_D(\delta)/\omega_r^2$

Bei der Bestimmung der Koeffizienten  $C_D$ ,  $C_L$  und  $\alpha_L$  wurde wieder ein Least-Squares-Ansatz verwendet. Erwähnenswert hierbei ist, dass die Schätzung von  $C_L$  direkt vom Hebelarmverhältnis  $d/l$  abhängt. Den Längen  $l$  und  $d$  liegt die getroffene Annahme, dass der aerodynamische Druckmittelpunkt wie in Abbildung 2.3 dargestellt mit dem Gelenkmittelpunkt zusammenfällt, zugrunde. Im Experiment wurden die beiden Flossen  $\delta_x$  gleichzeitig bewegt und dementsprechend  $d = d_{13}$  gesetzt. Zur Validierung wurden die orthogonalen Steuerflächen  $\delta_y$  und  $d = d_{24}$  verwendet.

### 2.2.3 Flossenkonfigurationen

Neben dem Steuerflächenprofil, das durch die Parameter aus Tabelle 2.4 vollständig charakterisiert wird, stehen die Anzahl und Anordnung der Steuerflächen als Entwurfsfreiheitsgrade zur Verfügung. Es stellt sich somit die Frage wie diese zu platzieren sind, sodass das resultierende System günstige Eigenschaften aufweist. Um die nachfolgenden Ergebnisse kompakt zu halten sollen folgende Annahmen getroffen werden:

1. die Luftwiderstandskraft der Steuerflächen kann vernachlässigt werden ( $f_D = 0$ )
2. die Drehachsen sämtlicher Steuerflächen liegen in einer Ebene ( $d_{13} = d_{24} = d$ )

Erstere Annahme kann dadurch gerechtfertigt werden, dass die Luftwiderstandskraft für geeignete Steuerflächen-Profile und im relevanten Betriebsbereich stets klein gegenüber der Auftriebskraft ist  $|f_D| \ll |f_L|$ . Hinzu kommt die Tatsache, dass der effektive Hebelarm bezüglich des Massenmittelpunktes der Luftwiderstandskraft klein gegenüber jenem der Auftriebskraft ist  $d_r \ll d$ . Die zweite Annahme kann konstruktiv immer realisiert werden und ändert genauso wie die erste nichts an den Kernaussagen der angeführten Ergebnisse, vereinfacht die Notation aber erheblich. Damit lässt sich das Steuerflächenmoment für  $N_{cs}$

Konfiguration	Stern	Plus	Kreuz
Index	$\sphericalangle$	+	$\times$
Anzahl Steuerflächen $N_{cs}$	3	4	4
Nullwinkel $\gamma_0$	0	0	$\pi/4$

Tabelle 2.5: Flossenkonfigurationen

Steuerflächen  $\tilde{\delta}^T = [\tilde{\delta}_1 \ \dots \ \tilde{\delta}_{N_{cs}}]$  in der Form

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{cs} &= \sum_{i=1}^{N_{cs}} \mathbf{r}_{cs,i} \times \mathbf{f}_{cs,i} \approx \sum_{i=1}^{N_{cs}} \mathbf{r}_{cs,i} \times \mathbf{f}_{L,i} = \sum_{i=1}^{N_{cs}} \mathbf{R}_z^T(\gamma_i)(\mathbf{r}_{cs} \times \mathbf{f}_{L,i}) \\ &= \omega_r^2 C_L \mathbf{J} \tilde{\delta} \end{aligned} \quad (2.52)$$

mit  $\mathbf{r}_{cs}^T = [d_r \ 0 \ d]$ ,  $\mathbf{f}_{L,i}^T = [0 \ f_L(\omega_r, \delta_i) \ 0]$  und somit mit einer rein von der Geometrie abhängigen Matrix  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(d_r, d)$  der Dimension  $(3 \times N_{cs})$  darstellen. Verteilt man die Steuerflächen gleichmäßig über den Umfang, so gilt für den Winkel  $\gamma_i$  den die Drehachse der  $i$ -ten Steuerfläche mit der körperfesten  $\mathbf{x}_B$ -Achse einschließt

$$\gamma_i = 2\pi \frac{i-1}{N_{cs}} + \gamma_0, \quad 0 \leq \gamma_0 < \frac{2\pi}{N_{cs}}, \quad i = 1, \dots, N_{cs}. \quad (2.53)$$

$\gamma_0$  bezeichnet dabei den Winkel der ersten Steuerfläche. In weiterer Folge soll davon ausgegangen werden, dass zumindest  $N_{cs} \geq 3$  Steuerflächen zur Verfügung stehen und diese gleichmäßig über den Umfang der Drohne angebracht werden. Für  $N_{cs} = 3$  ist  $\mathbf{J}$  regulär und aus Gleichung (2.52) kann direkt  $\tilde{\delta}$  berechnet werden. Für  $N_{cs} > 3$  ist das resultierende Gleichungssystem unterbestimmt, da mehr als drei Steuerflächen zur Parametrierung der drei Komponenten des Moments  $\boldsymbol{\tau}_{cs}$  zur Verfügung stehen. Es existieren somit unendlich viele Lösungen. Praktisch ist es sinnvoll die Anstellwinkel  $\tilde{\delta}$  möglichst gering zu halten, somit das Optimierungsproblem

$$\min_{\tilde{\delta}} \|\tilde{\delta}\| \quad (2.54)$$

unter der Nebenbedingung (2.52) zu lösen. Besitzt die Matrix  $\mathbf{J}$  vollen Zeilenrang, so ist  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$  sicher invertierbar und man erhält unmittelbar die eindeutige Lösung

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{\omega_r^2 C_L} \mathbf{J}^\dagger \boldsymbol{\tau}_{cs} \quad (2.55)$$

mit der Rechtsinversen [2]

$$\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}. \quad (2.56)$$

der Konfigurationsmatrix  $\mathbf{J}$ .

### Stern-Konfiguration

Die mechanisch minimale Konfiguration ist durch  $N_{cs} = 3$  gleichmäßig verteilte Steuerflächen gegeben. Für die Winkel der einzelnen Flossen gilt dann

$$\gamma_{\sphericalangle} = \{0, 120, 240\} \text{ deg}. \quad (2.57)$$

Für die Konfigurationsmatrix und die zugehörige Inverse erhält man

$$\mathbf{J}_{\sphericalangle} = \begin{bmatrix} -d & d/2 & d/2 \\ 0 & -\sqrt{3}d/2 & \sqrt{3}d/2 \\ d_r & d_r & d_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\sphericalangle}^\dagger = \begin{bmatrix} -2/3d & 0 & 1/3d_r \\ 1/3d & -\sqrt{3}/3d & 1/3d_r \\ 1/3d & \sqrt{3}/3d & -1/3d_r \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

### Plus-Konfiguration

Verwendet man wiederum  $N_{cs} = 4$  Steuerflächen und ordnet diese so an, dass die Drehachsen von jeweils zwei Flossen parallel zur körperfesten  $\mathbf{x}_B$ - beziehungsweise  $\mathbf{y}_B$ -Achse sind, so erhält man die Winkel

$$\gamma_+ = \{0, 90, 180, 270\} \text{ deg}. \quad (2.59)$$

Für die Konfigurationsmatrix und die zugehörige Rechtsinverse gilt

$$\mathbf{J}_+ = \begin{bmatrix} -d & 0 & -d & 0 \\ 0 & -d & 0 & -d \\ d_r & d_r & -d_r & -d_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_+^\dagger = \begin{bmatrix} -1/2d & 0 & 1/4d_r \\ 0 & -1/2d & 1/4d_r \\ -1/2d & 0 & -1/4d_r \\ 0 & -1/2d & -1/4d_r \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Diese Konfiguration wird üblicherweise als Plus-Konfiguration bezeichnet. Da die realisierte Drohne von dieser Gebrauch macht (siehe Abbildung 2.2) soll diese Konfiguration als Grundlage für alle weiteren Untersuchungen herangezogen werden.

### Kreuz-Konfiguration

Die wohl einfachste Möglichkeit die vier Steuerflächen anderweitig zu platzieren besteht darin den gesamten Aktuierungsmechanismus zu drehen. Behält man also die Anzahl und Verteilung über den Umfang bei, so ergibt sich die neue Abbildung der um einen Winkel  $\gamma_0$  gedrehten Steuerflächen zu

$$\mathbf{J}_\times = \mathbf{R}_z^\top(\gamma_0)\mathbf{J}_+ \quad (2.61)$$

Der Versuch die Anstellwinkel  $\delta$  für ein gegebenes Stellmoment  $\tau_{cs,\times}$  zu minimieren ist gleichbedeutend mit der Maximierung der Zeilensummennorm der Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_z^\top(\gamma_0)$ . Man erhält

$$\gamma_{0,\times} = \arg \max \|\mathbf{R}_z^\top(\gamma_0)\|_\infty = 45 \text{ deg} \quad (2.62)$$

und damit

$$\gamma_\times = \gamma_+ + \gamma_{0,\times} = \{45, 135, 225, 315\} \text{ deg}. \quad (2.63)$$

Für die Konfigurationsmatrix sowie die zugehörige Rechtsinverse erhält man

$$\mathbf{J}_\times = \mathbf{R}_z^\top(\gamma_{0,\times})\mathbf{J}_+ = \begin{bmatrix} -d\sqrt{2}/2 & d\sqrt{2}/2 & -d\sqrt{2}/2 & d\sqrt{2}/2 \\ -d\sqrt{2}/2 & -d\sqrt{2}/2 & -d\sqrt{2}/2 & -d\sqrt{2}/2 \\ d_r & d_r & -d_r & -d_r \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{J}_\times^\dagger = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/4d & -\sqrt{2}/4d & 1/4d_r \\ \sqrt{2}/4d & -\sqrt{2}/4d & 1/4d_r \\ -\sqrt{2}/4d & -\sqrt{2}/4d & -1/4d_r \\ \sqrt{2}/4d & -\sqrt{2}/4d & -1/4d_r \end{bmatrix}$$

Aus den angeführten Ergebnisse ist unmittelbar ersichtlich, dass ein großer Normalabstand der Steuerflächen zum Massenmittelpunkt, beschrieben durch  $d$  ( $d_{13}$ ,  $d_{24}$ ) bei gleichem Stellmoment  $\tau_{cs}$  in kleineren Anstellwinkeln  $\delta$  resultiert. Es lässt sich zudem erkennen, dass mit der Kreuz-Konfiguration im Vergleich zur Plus-Konfiguration ein größeres, maximales Steuerflächenmoment bezüglich der  $\mathbf{x}_B$ - beziehungsweise  $\mathbf{y}_B$ -Achse erzeugt werden kann, da hierbei alle vier Steuerflächen zum Einsatz kommen. Durch die einfache Struktur von Gleichung (2.52) lassen sich die gefundenen Zusammenhänge leicht auf eine beliebige Flossenanzahl und -platzierung erweitern.

## 2.2.4 Aktordynamik

### Antriebsstrang

Da für den verwendeten ESC und BLDC keine zuverlässigen Datenblätter verfügbar sind, und der fix mit der Motorwelle verbundene Propeller eine nichtlineare Last darstellt, ist mit einem nichtlinearen Zusammenhang zwischen der Referenz des Motor-Reglers  $u_r$  und der Winkelgeschwindigkeit des Impellers  $\omega_r$  zu rechnen. Hinzu kommt die Tatsache, dass die vom ESC an die Terminals des BLDCs angelegte Motorspannung nicht nur eine Funktion des PWM-Signals  $u_r$  ist, sondern auch von der Batteriespannung  $v_{bat}$  abhängt. Da sich diese während eines Fluges stark ändert, kann dieser Effekt im Allgemeinen nicht vernachlässigt werden. Die Identifikationsaufgabe besteht nun darin, ein Modell des geregelten Antriebsstranges zu finden.

Dazu wird in einem ersten Schritt die obere und untere Grenze der Pulsweite des Referenzsignals bestimmt und anschließend ein statischer Zusammenhang zwischen der normalisierten Referenz<sup>8</sup>  $\hat{u}_r$  (*throttle*)

<sup>8</sup>auch Gas genannt

und der Winkelgeschwindigkeit des Propellers  $\omega_r$  hergestellt.

Die Änderung der Versorgungsspannung kann berücksichtigt werden, indem man als Systemeingänge bezogene Größen verwendet. Damit erhält man für den neuen, virtuellen Stelleingang

$$\hat{u}_r(u_r, v_{\text{bat}}) = \frac{u_r(t) - u_{r,\text{MIN}}}{u_{r,\text{MAX}} - u_{r,\text{MIN}}} \frac{v_{\text{bat}}(t)}{v_{\text{bat},\text{MAX}}}. \quad (2.65)$$

Der Wert  $u_{r,\text{MIN}}$  ist dabei nicht der untere Grenzwert der vom ESC akzeptierten Pulsweite, sondern ein empirisch gefundener Wert, sodass

$$\omega_r(\hat{u}_r(u_r = u_{r,\text{MIN}}, v_{\text{bat}})) \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.66)$$

für eine beliebige Spannung  $v_{\text{bat}}$  innerhalb des Betriebsbereiches erfüllt ist.

Der linke Teil von Abbildung 2.8 zeigt zehn Experimente, durchgeführt über den gesamten nutzbaren Ladezustand der Batterie. Dabei wurde ein quasi-statisches Referenzsignal der Form

$$u_r(t) = A + B \sin\left(2\pi \frac{1}{30} t\right) \quad (2.67)$$

verwendet.

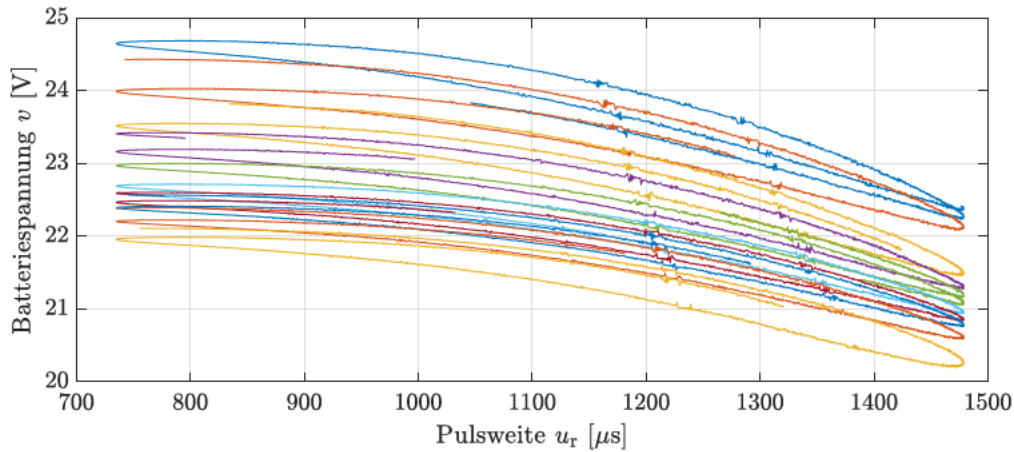


Abbildung 2.7: Spannung  $v_{\text{bat}}$  und Pulsweite  $u_r$  der quasistatischen Antriebsstrang-Identifikation

Normalisiert man nun das Eingangssignal mit Hilfe von Gleichung (2.65), so lässt sich das statische Eingangs-Ausgangs-Verhalten (EA-Verhalten) des Antriebsstranges durch den nichtlinearen Zusammenhang

$$\omega_r = K_r \underbrace{(\hat{u}_r - \alpha_r \hat{u}_r^2)}_{\hat{u}_r} \quad (2.68)$$

beschreiben. Die beiden Parameter  $K_r$  und  $\alpha_r$  erhält man unmittelbar als Lösung [2, 18]

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_r \\ -K_r \alpha_r \end{bmatrix} = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{y} \quad (2.69)$$

des Least-Squares-Problems

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_{r,1} & \hat{u}_{r,1}^2 \\ \vdots & \vdots \\ \hat{u}_{r,N} & \hat{u}_{r,N}^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_{r,1} \\ \vdots \\ \omega_{r,N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}}. \quad (2.70)$$

Auf der linken Seite von Abbildung 2.8 ist die gemessene Winkelgeschwindigkeit des Rotors  $\omega_r$  für die Batteriespannungen und ESC-Referenzsignale der Experimente aus Abbildung 2.7 dargestellt. Die rechte Seite zeigt das geschätzte Modell (2.68) sowie einen Validierungsdatensatz.

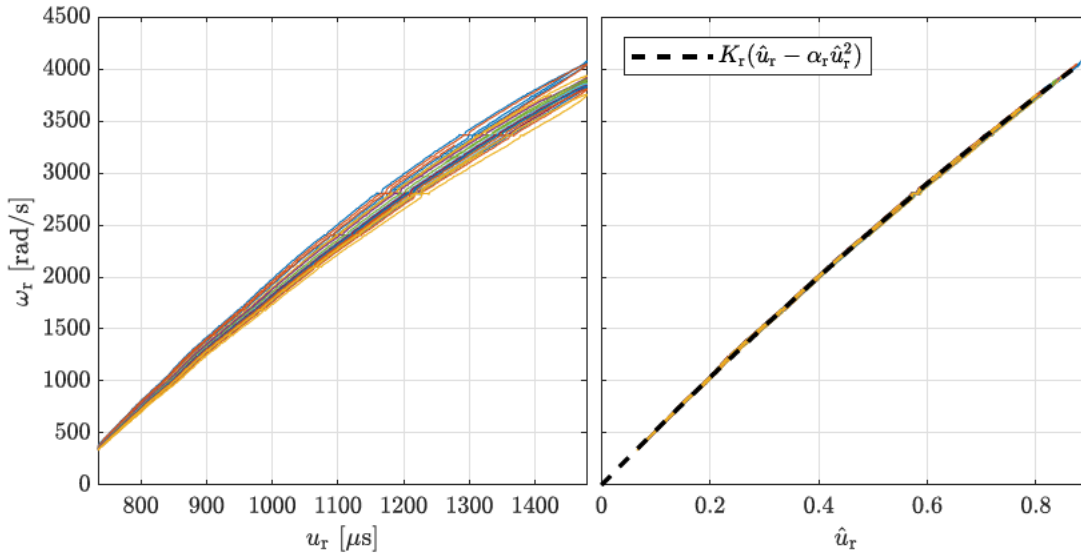


Abbildung 2.8: Gaskurve des Antriebsstranges

Weitere in Abbildung 2.10 dargestellte Experimente zeigen, dass sich das EA-Verhalten des Antriebsstranges nicht ausreichend genau durch den identifizierten, statischen Zusammenhang beschreiben lässt. Offensichtlich muss es sich beim voridentifizierten Teil aber gerade um einen Spezialfall des gesamten dynamischen Übertragungsverhaltens handeln. Es erscheint also sinnvoll, das Modell aus Gleichung (2.68) zu erweitern. Ein mögliches, dynamisch minimales Modell ist durch

$$\underbrace{T_r \dot{\omega}_r + \omega_r}_{\text{PT1}} = \underbrace{K_r(\hat{u}_r - \alpha_r \hat{u}_r^2)}_{\text{Eingangs-Nichtlinearität}} = K_r \tilde{u}_r \quad (2.71)$$

gegeben. Unter Verwendung des bereits identifizierten Teils lässt sich die rechte Seite von Gleichung (2.71) berechnen, und es muss in weiterer Folge lediglich die Zeitkonstante  $T_r$  des Verzögerungsgliedes erster Ordnung

$$G_r(s) = \frac{\omega_r(s)}{\tilde{u}_r(s)} = \frac{K_r}{1 + T_r s} \quad (2.72)$$

bestimmt werden. Diese Kombination aus einer statischen Eingangs-Nichtlinearität gefolgt von einem linearen, dynamischen System gehört zur Klasse der sogenannten Hammerstein-Modelle und ist für den Antriebsstrang schematisch in Abbildung 2.9 dargestellt.

Unter der Annahme eines Haltegliedes nullter Ordnung<sup>9</sup> kann nun das Übertragungsverhalten des diskreten Äquivalents von Gleichung (2.72) und anschließend  $T_r$  bestimmt werden. Praktisch wurden für die Identifikation verschiedene Modellstrukturen untersucht. Dabei hat sich gezeigt, dass die Verwendung eines einfachen *Output Error*-Modells und damit einhergehend die Annahme von additivem, weißem Ausgangsrauschen zu guten Ergebnissen führt.

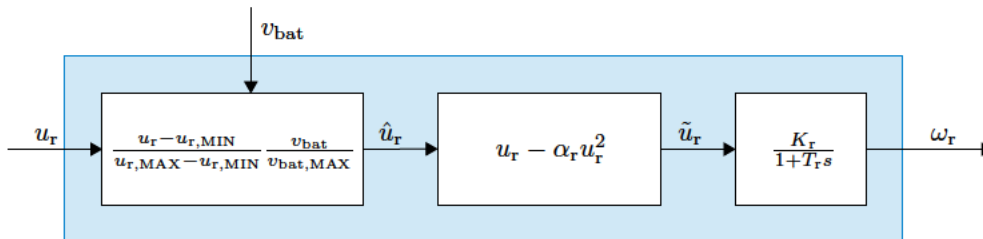


Abbildung 2.9: Blockschaltbild des identifizierten Antriebsstrang-Modells

Das Verhalten des Modells, beschrieben durch die Gleichungen (2.65) und (2.71) sowie der verwendete Validierungsdatensatz sind in Abbildung 2.10 dargestellt. Man erkennt die gute Übereinstimmung zwi-

<sup>9</sup> dies kann durch den diskret arbeitenden ESC gerechtfertigt werden

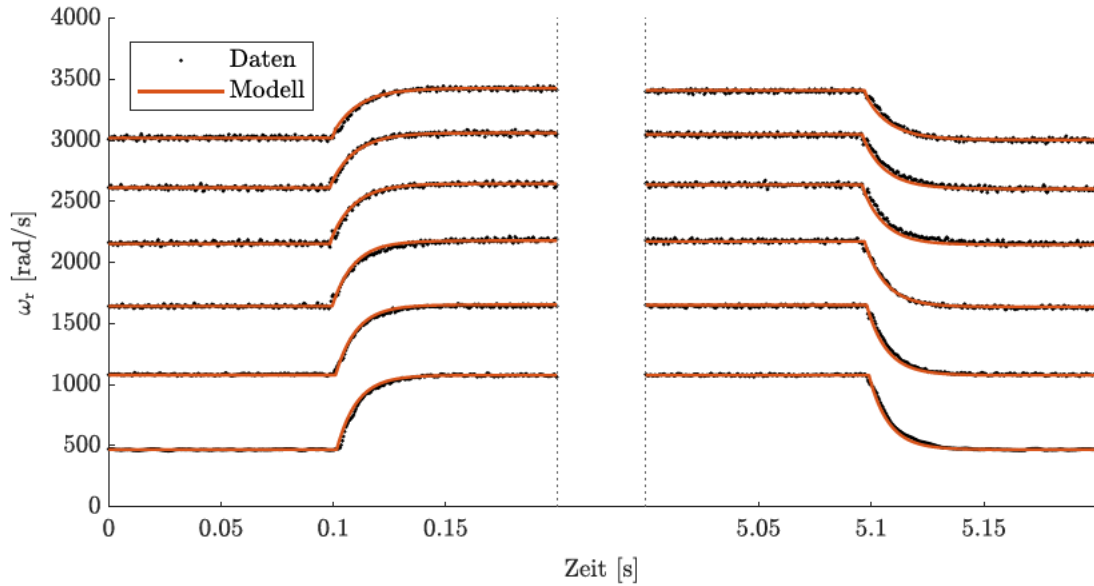


Abbildung 2.10: Sprungantworten des Antriebsstranges

sehen Daten und Modell über den gesamten Betriebsbereich hinweg. In Tabelle 2.6 sind die identifizierten Parameter des Antriebsstranges gelistet.

Symbol	Wert	Einheit
$v_{\text{bat,MAX}}$	25.2	V
$u_{\text{r,MIN}}$	674e-6	s
$u_{\text{r,MAX}}$	1482e-6	s
$K_{\text{r}}$	5343	rad/s
$\alpha_{\text{r}}$	0.1586	
$T_{\text{r}}$	8.267e-3	s

Tabelle 2.6: Parameter des Antriebsstrangs

## Servos

Wie schon bei der Charakterisierung des Antriebsstranges ersichtlich wurde, können auch die Steuerflächen nicht beliebig schnell einer Referenzgröße folgen. Das Verhalten des Aktuierungsmechanismus (Servo und Steuerfläche) soll deshalb dynamisch charakterisiert werden. Aus dem CAD-Modell ist bereits bekannt, dass jeder Flosse ein Stellbereich von  $\pm 30$  deg zu Verfügung steht. Unter der Annahme, dass es sich beim Aktuierungsmechanismus in guter Näherung zumindest um ein statisch lineares System handelt, kann aus der Pulsweite  $u_{s,i}$  des Servo-Referenzsignals mittels linearer Interpolation direkt der Stellwinkel der Flosse  $\delta_i$  berechnet werden. Als bekannte Stützpunkte stehen dazu der minimale, maximale und genullte Flossenwinkel sowie die zugehörigen Pulsweiten zur Verfügung und es lässt sich eine statische Funktion mit den Stützstellen

$$(u_{s,\text{MIN},i}, u_{s,0,i}, u_{s,\text{MAX},i}) \leftrightarrow (-30, 0, 30) \quad (2.73)$$

für alle  $i = \{1, 2, 3, 4\}$  Steuerflächen angeben. Offensichtlich kann man das Modell theoretisch weiter verbessern, indem zusätzliche Referenzpunkte hinzugefügt werden. Praktisch hat sich aber gezeigt, dass bedingt durch Fertigungstoleranzen mit einem Spiel von etwa  $\pm 2$  deg zu rechnen ist. Die potentiell zu erreichende Steigerung der Modellgüte durch Hinzunahme weiterer Referenzpunkte wird somit ohnehin durch derartige Fehlereinflüsse überlagert.

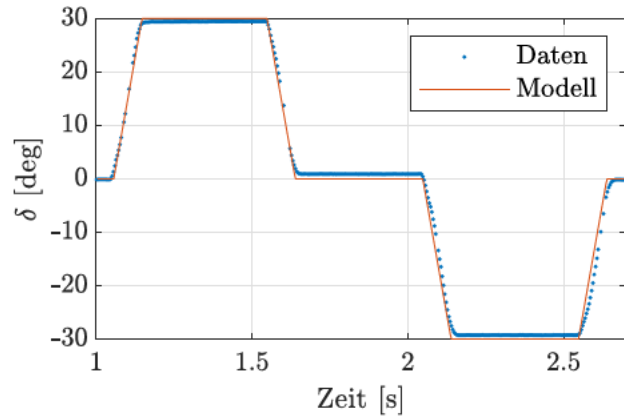
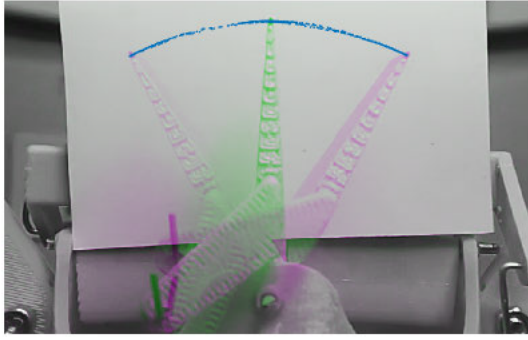


Abbildung 2.11: Servodynamik

Um das dynamische Verhalten zu untersuchen wurde ein Servo mit sprungförmigen Testsignalen beaufschlagt und die so erhaltenen Sprungantworten mit einer Hochgeschwindigkeitskamera bei einer Rate von 240 Bildern pro Sekunde aufgezeichnet. Anschließend kann aus den einzelnen Bildern der Anstellwinkel der Steuerflächen als Funktion der Zeit berechnet werden.

Das nichtlineare Systemverhalten ist unmittelbar erkennbar und kann durch eine Beschränkung der Steuerflächen-Winkelgeschwindigkeit der Form

$$|\dot{\delta}| \leq \dot{\delta}_{\text{MAX}} = 330 \text{ deg/s} \quad (2.74)$$

beschrieben werden. In der rechten Abbildung 2.11 lässt sich die gute Übereinstimmung zwischen dem Modell und einem Validierungsdatensatz erkennen.

Praktisch hat sich gezeigt, dass die Raten-Begrenzung (2.74) während des Flugbetriebes keine Rolle spielt, da niemals Stellgeschwindigkeiten dieser Amplitude von der Regelung gefordert werden. Aus diesem Grund wird das Stellverhalten in weiterer Folge durch den rein statischen, eindeutig invertierbaren Zusammenhang (2.73) beschreiben.

## 2.3 Modellvalidierung

Nach der abgeschlossenen Systemidentifikation gilt es nun, das erhaltene Gesamtmodell gegen aufgezeichnete Flugdaten zu validieren. Dies führt für instabile Systeme unweigerlich auf ein Problem, denn ohne eine stabilisierende Regelung ist eine Validierung integrierter Systemgrößen wie beispielsweise der Orientierung nicht möglich, da die (mehrfache) Integration numerischer Daten i.A. nicht beschränkt bleibt. Existiert andererseits ein stabilisierender Regler, so ist erstens ein Modell der Regelung notwendig, und zweitens die Separation zwischen Regler- und Streckendynamik bei nichtlinearen Systemen i.A. nicht möglich. Im Rahmen dieser Arbeit wurden deshalb zwei Zugänge verfolgt -

- (a) Die Validierung der Regelstrecke basierend auf direkt messbaren Systemgrößen (IMU-Daten) (Abschnitt 2.3.1) sowie
- (b) die Validierung des gesamten, geschlossenen Regelkreises (Abschnitt 2.3.2)

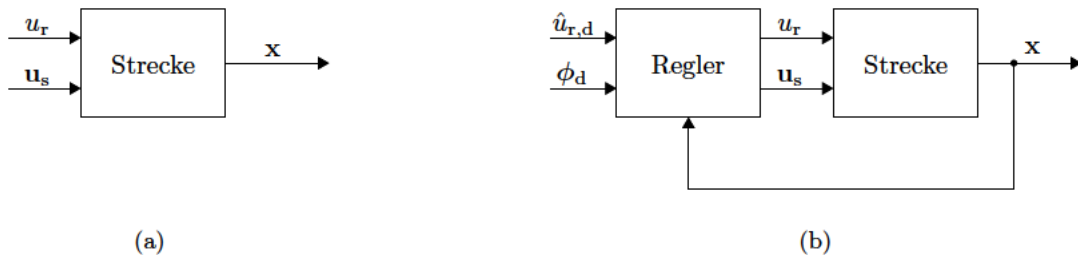


Abbildung 2.12: Konfigurationen der Modellvalidierung



Beide Zugänge besitzen eine Reihe von Vor- und Nachteilen welche in nachfolgender Tabelle gelistet sind. Ergebnisse aus Simulationsstudien werden in weiterer Folge mit MIL (*Model In the Loop*), Daten aus Versuchen an der realen Hardware mit HIL (*Hardware In the Loop*) gekennzeichnet.

	Vorteile	Nachteile
(a)	Validierung von Teilsystemen möglich  Reine Streckendynamik	Nur Validierung anhand direkt messbarer oder beschränkt integrierbarer Signale möglich
(b)	Validierung anhand integrierten Größen	Regelung (inkl. Modell) notwendig  Modellfehler in Strecken- und Reglerdynamik nicht unterscheidbar  Manche Modellfehler werden von Regelung unterdrückt

### Sensormodell

Um das echte System so gut als möglich abzubilden wurden die Charakteristika, allen voran Diskretisierungsfehler, Sensorrauschen und -drifts, der inertialen Messeinheit basierend auf den im Datenblatt angeführten Spezifikationen des primären Sensors MPU9250 in einer vereinfachten Form nachgebildet. Die Weiterverarbeitung der Sensordaten ist der im folgenden Abschnitt 2.3.2 verwendeten Regelung AR-DUCOPTER 4.0.7 nachempfunden und beinhaltet im Wesentlichen

1. Das Abtasten der IMU-Messgrößen mit einer Frequenz von 1 kHz
2. Filtern der Daten mit einem Tiefpassfilter zweiter Ordnung und den Grenzfrequenzen
  - Winkelgeschwindigkeiten: 60 Hz
  - Beschleunigungen: 20 Hz
3. Downsampling der Daten auf die Regler-Abtastfrequenz  $f_c = 400$  Hz

Allen folgend angeführten Simulationsstudien wurde dieses Sensormodell zu Grunde gelegt.

### 2.3.1 Validierung der Regelstrecke

Betrachtet man die Systemgleichungen (2.35) genauer, so fällt auf, dass das rotatorische und translatorische System weitestgehend unabhängig von einander behandelt werden können.

#### Rotatorisches Teilsystem

Aus dem Drehimpulserhaltungssatz erhält man einen Ausdruck der Form

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}_s, u_r, v_{\text{bat}}) \quad (2.75)$$

Sämtliche Terme, abgesehen von der Winkelbeschleunigung  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  stehen direkt als Messgrößen zur Verfügung oder können unmittelbar aus den identifizierten Modellgleichungen bestimmt werden. Die Winkelbeschleunigung  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  kann wiederum durch numerisches Differenzieren der aufgezeichneten Gyroskop-Daten berechnet werden. Damit lässt sich der allgemeine Gleichungsfehler untersuchen und man kann versuchen diesen durch optimale Wahl der Parameter zu minimieren.

$$\min \tau_e \quad \tau_e = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\tau} \quad (2.76)$$

Hilfreich ist dabei auch die Betrachtung von speziellen Systemzuständen, wie etwa dem Schwebeflug. Dabei befindet sich das System im Gleichgewicht und man erhält mit  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$  einen Satz von Gleichungen zur Optimierung ausgewählter Systemparameter. Eine detaillierte Behandlung der Ruhelage(n) findet sich im ersten Abschnitt des Folgekapitels 3.1.2 wieder.

Beispielsweise ist der Zusammenhang für den Drehmomentbeiwert  $C_{tq}$  aus Gleichung (2.43) nur unter der idealisierten Modellvorstellung der Strahltheorie gültig. Es hat sich gezeigt, dass der damit bestimmte Wert das Systemverhalten nicht ausreichend akkurat beschreibt. Dies ist auf nicht modellierte Effekte, wie beispielsweise ein im Gehäuse des Impellers verbauter Stator, oder die Kabel des ESCs, die einseitig durch die Düse laufen, zurückzuführen. Aus der Giermomentenfreiheit im Schwebeflug folgt bei äquivalent ausgeglenkten Flossen

$$-\tilde{\delta}_{1,0} = -\tilde{\delta}_{2,0} = \tilde{\delta}_{3,0} = \tilde{\delta}_{4,0} = \tilde{\delta}_0 \quad (2.77)$$

direkt

$$4d_r C_L \omega_r^2 \tilde{\delta}_0 \stackrel{!}{=} C_{tq} \omega_r^2 \rightarrow C_{tq} = 4d_r C_L \tilde{\delta}_0. \quad (2.78)$$

Damit erhält man den in Tabelle 2.4 aus dem vorherigen Abschnitt angegebenen Wert.

Abbildung 2.13 zeigt nun die linke und rechte Seite von Gleichung (2.75) für ausgewählte Abschnitte von zwei Validierungsdatensätzen welche im Rahmen von Testflügen aufgezeichnet wurden.

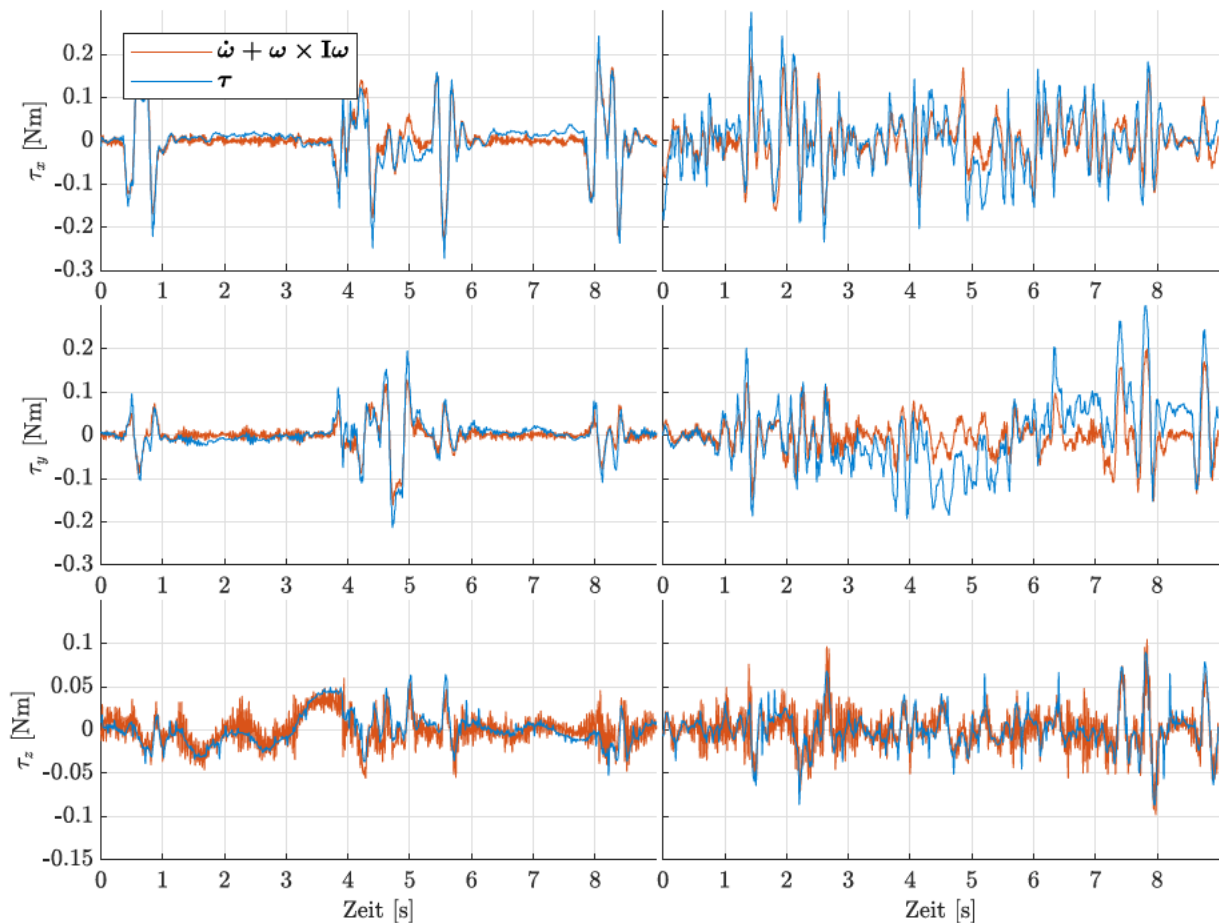


Abbildung 2.13: Validierung des rotatorischen Teilsystems der Regelstrecke

Die gute Übereinstimmung über einen großen, weit über den reinen Schwebeflug hinausgehenden Betriebsbereich des UAVs ist unmittelbar erkennbar. Die Werte der zugehörigen Beschleunigung und Orientierung sind den Abbildungen 2.14 und 2.16 dargestellt.

Man kann nun basierend auf Gleichung (2.76) ein Optimierungsproblem formulieren und versuchen weitere Parameter zu optimieren. Dies ist nicht Gegenstand dieser Arbeit, bietet aber eine interessante Grundlage für mögliche weitere Untersuchungen.

### Translatorisches Teilsystem

Gemäß des Impulserhaltungssatzes ist die Beschleunigung des Massenmittelpunktes direkt proportional zur Summe der äußeren Kräfte. In der Realität sitzt der Flugcomputer und damit auch sämtliche Sensorik nicht im Massenmittelpunkt, sondern außen an der Düse. Berücksichtigt man, dass Gravitationseinflüsse

in gleicher Weise auf den Beschleunigungsaufnehmer und die Drohne wirken, so erhält man mit dem näherungsweise konstanten Ortsvektor  $\mathbf{r}_{\text{IMU}}$  vom Massenmittelpunkt zur inertialen Messeinheit (IMU) für die vom Sensor gemessene Beschleunigung [10]

$$\mathbf{a}_{\text{IMU}} = \frac{\mathbf{f}}{m} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\text{IMU}}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{\text{IMU}}. \quad (2.79)$$

Die Beschleunigung muss bei einer exzentrisch sitzenden IMU also um einen Anteil zufolge der Rotation korrigiert werden. Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, dass  $\mathbf{f}$  alle äußeren, nicht-gravitativen Kräfte bezeichnet. In Abbildung 2.14 sind die an der IMU gemessenen (HIL) sowie die simulierten Beschleunigungen (MIL) dargestellt. Dabei wurde die  $a_z$ -Komponente um die Konstante  $g$  korrigiert.

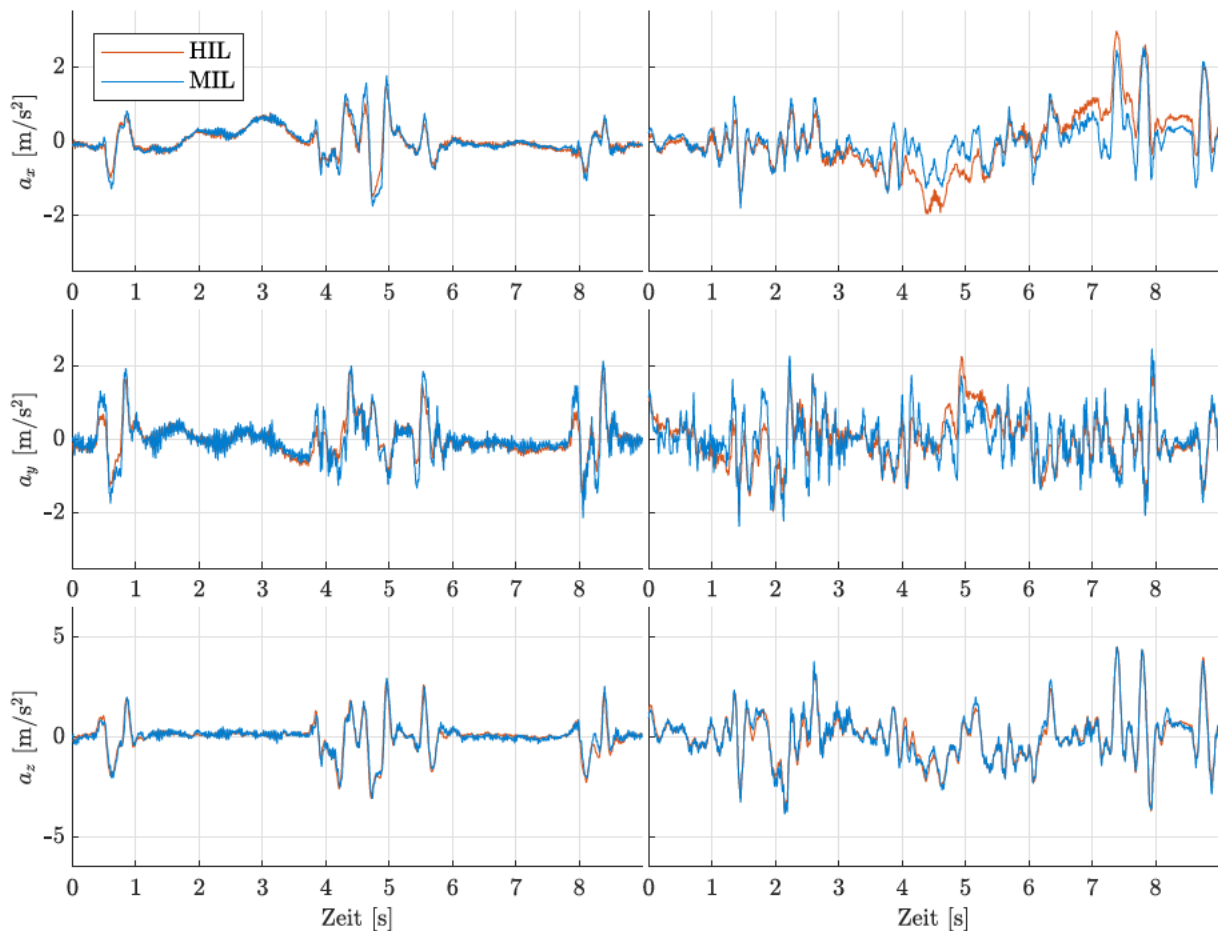


Abbildung 2.14: Validierung des translatorischen Teilsystems der Regelstrecke

Die Winkelbeschleunigung  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  in Gleichung (2.79) wurde wieder durch numerisches Differenzieren von  $\boldsymbol{\omega}$  berechnet. Grundsätzlich könnte man aus Gleichung (2.75) explizit  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  bestimmen und in Gleichung (2.79) einsetzen. Damit koppeln Fehler im zuvor behandelten rotatorischen Teilsystem aber unmittelbar in die Betrachtungen des translatorischen Teilsystems ein. Berechnet man die Winkelbeschleunigung hingegen durch numerische Differentiation, so wird dieses Problem umgangen, und man erhält ein Gleichungssystem, das nur von einer Untermenge der freien Systemparameter abhängt, die allesamt mit einer hohen Genauigkeit bestimmt werden konnten.

Aus diesen Gründen ist davon auszugehen, dass die verbleibende Differenz zwischen simulierten und gemessenen Beschleunigungen wahrscheinlich nicht auf abweichende Parameterwerte, sondern unmodellierte Effekte zurückzuführen ist. Für einen Erklärungsversuch ist es hilfreich, sich vor Augen zu führen, dass große Roll- und oder Nickwinkel unmittelbar zu großen Horizontalbeschleunigungen und in weiterer Folge zu großen translatorischen Geschwindigkeiten führen. Das verwendete Modell ist an dieser Stelle nicht mehr gültig und müsste um weitere aerodynamische Effekte (Luftwiderstand, Anströmgeschwindigkeit der Flossen entspricht nicht mehr der vom Rotor induzierten Geschwindigkeit etc.) erweitert werden.

In jedem Fall stimmen die simulierten und gemessenen Größen in der Nähe des hier betrachteten Schwebflugs gut miteinander überein.

### 2.3.2 Validierung im geschlossenen Regelkreis

Der zweite verfolgte Validierungszugang besteht darin, das Modell der Regelstrecke in Kombination mit einer stabilisierenden Regelung zu untersuchen. Da auf dem gebauten UAV ARDUOPTER 4.0.7, welche zu der Open-Source-Drohnensoftware ARDUPILOT [1] gehört, installiert ist, zum Zeitpunkt des Verfassens dieser Arbeit aber keine geeignete Möglichkeit der *Software In the Loop* SIL-Simulation unter Verwendung aufgezeichneter Fernsteuerungssignale existiert, wurde die Regelung basierend auf dem frei zugänglichen Quellcode in MATLAB/SIMULINK nachgebildet und gegen aufgezeichnete Flugdaten validiert. Die Möglichkeit der MIL-Simulation erlaubt nun

1. die Validierung des geschlossenen Regelkreises,
2. das modellbasierte Einstellen der Regler-Parameter von ARDUOPTER 4.0.7 sowie
3. die simulative Untersuchung von Regler- und oder Drohnenmodifikationen.

#### ArduCopter

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die angeführten Erklärungen keinen Anspruch auf Vollständigkeit haben. Praktisch sind in ARDUOPTER unzählige Filter, Sättigungen, Normierungen und Skalierungen implementiert, die dafür sorgen, dass die Regelung für ein großes Spektrum an Drohnen konfiguriert werden kann. Oft basieren diese auf Erfahrungen, pragmatischen Überlegungen oder decken selten auftretende Randfälle im Flugbetrieb ab. Hinzu kommt die Tatsache, dass die Regelung nicht in als rein sequentielle Abfolge zu verstehen ist, sondern sehr stark parallelisiert und mit verschiedenen Abtastfrequenzen abläuft. Eine vollständige Auflistung würde über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen, nichts desto trotz soll an dieser Stelle ein Überblick über die grundsätzliche Architektur geboten werden um die Nachvollziehbarkeit der angeführten Ergebnisse gewährleisten zu können.

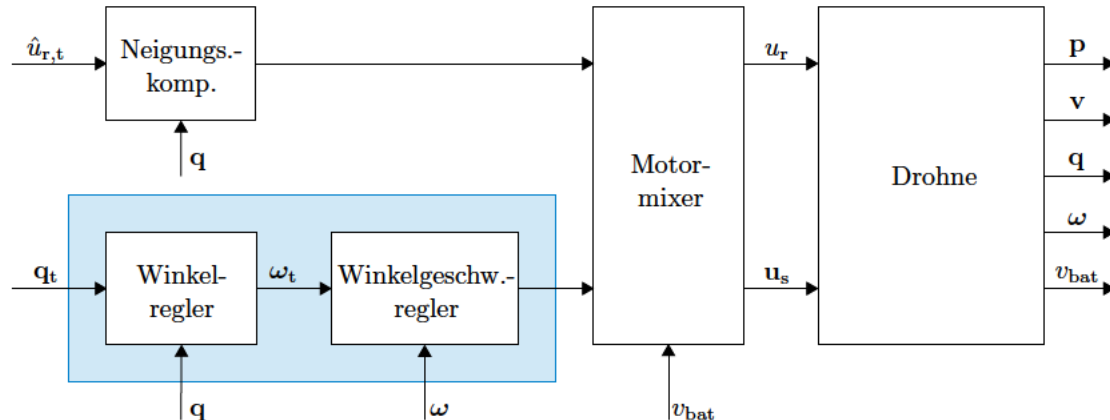


Abbildung 2.15: Struktur von ARDUOPTER 4.0.7

Abbildung 2.15 zeigt die Systemarchitektur der Regelung für den verwendeten Flugmodus *Stabilize* und den Drohrentyp *Single Copter*. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde dabei auf eine Darstellung der Ein- und Ausgangskonditionierung verzichtet.

In jedem Iterationsschritt werden folgende Schleifen durchlaufen:

1. RC-RX (100 Hz): Umwandlung der empfangenen Fernsteuer-Signale in Referenzgrößen des Reglers. Im beschriebenen Modus ist dies die normalisierte Rotor-Referenz  $\hat{u}_{r,t}$ , Roll-  $\varphi_t$  und Nickwinkel  $\theta_t$ , sowie die Gierrate  $\dot{\alpha}_t$
2. Winkelregelung (400 Hz):
  - Upsampling und filtern des Sollwertes

- Integration der Soll-Gierrate. Berechnung des Soll-Quaternions  $\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_t(\phi_t)$
  - Aus der Differenz der Soll-  $\mathbf{q}_t$  und Ist-Orientierung  $\mathbf{q}$  wird über ein nichtlineares Regelgesetz die Referenz  $\omega_t$  der unterlagerten Winkelgeschwindigkeitsregelung berechnet
3. Winkelgeschwindigkeitsregelung (400 Hz):
- Soll-  $\omega_t$  und Ist-  $\omega$  Winkelgeschwindigkeiten werden tiefpassgefiltert, anschließend die Differenz  $\omega_e$  gebildet
  - Filtern der Differenz, Anwendung eines PID-Regelgesetzes
4. Motormixer (400 Hz):
- Korrektur der Ausgänge um die Batteriespannung und den Luftdruck
  - Skalierung der Ausgänge
  - Priorisierung der Roll-Nick Aktuierung gegenüber dem Gierwinkel, Beschränkung der Ausgänge
  - Aufteilen der Ausgänge auf die vier Steuerflächen
5. Skalierung der intern verwendeten, normalisierten Größen auf Pulsweiten der PWM-Signale und finale Ausgabe:
- ESC-Ausgang  $u_r$ : 400 Hz
  - Servo-Ausgänge  $u_s$ : 50 Hz

Damit ist es nun möglich, das Verhalten des geschlossenen Regelkreises zu simulieren und mit den aufgezeichneten Daten zu vergleichen. Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, dass in den Abbildungen 2.13, 2.14 und 2.16 Daten derselben zwei Testflüge dargestellt sind.

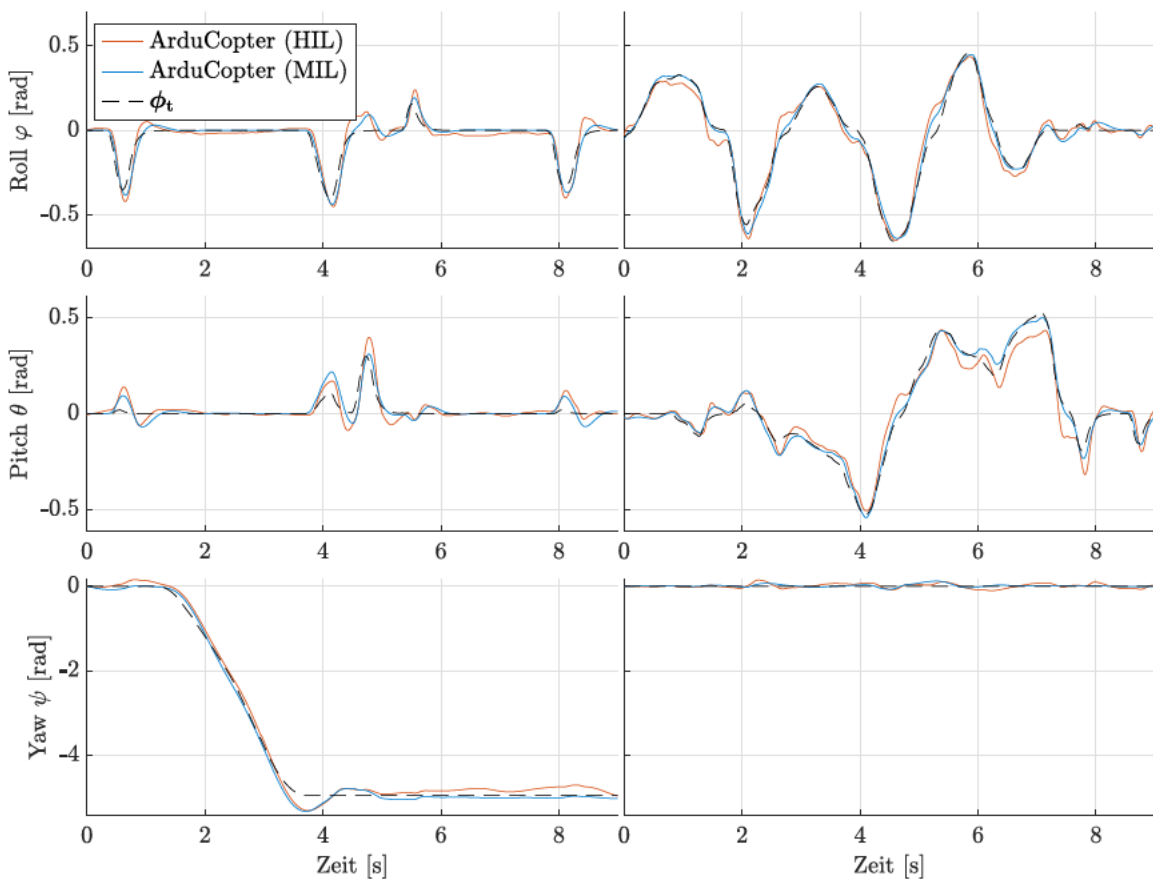


Abbildung 2.16: Validierung des geschlossenen Regelkreises

Man erkennt auch hier wieder die gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Simulation und den aufgezeichneten Flugdaten. Besonders anschaulich ist dabei die Kopplung der beiden Achsen

durch das Kreiselmoment  $\tau_{\text{gyr}}$ , wie beispielsweise bei Sekunde 8 des links dargestellten Testfluges zu sehen. Schnelle Rollbewegungen führen unmittelbar zu einer Ausweichbewegung in der orthogonalen Nick-Achse.

Basierend auf den angestellten Untersuchungen wird das identifizierte Streckenmodell als validiert betrachtet und soll nun als Grundlage für den Entwurf einer Regelung verwendet werden.

# 3. Regelung

## 3.1 Systemanalyse

Da die Drohne über kein GPS verfügt, die Absolutposition der Drohne somit nicht mess- und nur unzureichend genau schätzbar ist, soll in weiterer Folge lediglich die vertikale Komponente der Position und Geschwindigkeit berücksichtigt werden. Der  $n = 9$  dimensionale Zustandsvektor des reduzierten Systems ist dann durch

$$\mathbf{x}^T = [p_z \quad v_z \quad \phi^T \quad \omega^T \quad \omega_r] \quad (3.1)$$

gegeben.

### 3.1.1 Zustandsraumdarstellung

Das System lässt sich kompakt als Zustandsraummodell in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} v_z \\ g + \frac{c_\theta c_\varphi}{m} (f_D(\omega_r, \boldsymbol{\delta}) - C_{th} \omega_r^2) + \frac{1}{m} (s_\theta f_L(\omega_r, \boldsymbol{\delta}_y) + c_\theta s_\varphi f_L(\omega_r, \boldsymbol{\delta}_x)) \\ \omega_x + \frac{s_\theta s_\varphi}{c_\theta} \omega_y + \frac{c_\varphi s_\theta}{c_\theta} \omega_z \\ c_\varphi \omega_y - s_\varphi \omega_z \\ \frac{s_\varphi}{c_\theta} \omega_y + \frac{c_\varphi}{c_\theta} \omega_z \\ \frac{I_z - I_y}{I_x} \omega_y \omega_z + \frac{I_x}{I_x} \omega_r \omega_y + \frac{d_r}{I_x} f_D(\omega_r, \boldsymbol{\delta}_y) - \frac{d_{13}}{I_x} f_L(\omega_r, \boldsymbol{\delta}_x) \\ - \frac{I_x - I_z}{I_y} \omega_z \omega_x - \frac{I_x}{I_y} \omega_r \omega_x + \frac{d_r}{I_y} f_D(\omega_r, \boldsymbol{\delta}_x) - \frac{d_{24}}{I_x} f_L(\omega_r, \boldsymbol{\delta}_y) \\ \frac{I_y - I_x}{I_z} \omega_x \omega_y - \frac{I_x}{I_z T_r} \omega_r + \frac{I_x K_r}{I_z T_r} \tilde{u}_r + \frac{C_{tq}}{I_z} \omega_r^2 + \frac{d_r}{I_z} f_L(\omega_r, \boldsymbol{\delta}) \\ - \frac{1}{T_r} (\omega_r - K_r \tilde{u}_r) \end{bmatrix} \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = [p_z \quad \phi^T]^T \quad (3.2b)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x}^T \in \mathbb{R}^n$ , Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  und Ausgang  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$  sowie den beiden vektorwertigen Funktionen  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  darstellen.

Als Eingänge stehen dabei zuvor definierten Größen

$$\mathbf{u}^T = [\tilde{u}_r \quad \boldsymbol{\delta}^T] \quad (3.3)$$

zur Verfügung.

Wie in Abschnitt 2.2.4 gezeigt, hängt die Rotorwinkelgeschwindigkeit nicht nur von dem Referenzsignal des ESCs, sondern auch von der Versorgungsspannung ab. Da diese aber messbar ist und die Transformationsgesellschaften (2.65), (2.68) eindeutig invertierbar sind, kann aus jedem  $\tilde{u}_r(u_r, v_{bat})$  das passende  $u_r$  eindeutig bestimmt werden.

### 3.1.2 Ruhelagen und Linearisierung

Oftmals ist es sinnvoll, kleine Auslenkungen um eine bestimmte Ruhelage des Systems zu betrachten.

#### Ruhelagen

Man sucht in einem ersten Schritt also Systemeingänge und -zustände, welche der Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

genügen. Dies führt für das betrachtete System auf das nichtlineare Gleichungssystem

$$0 = mg - C_{th}\omega_{r,0}^2 c_{\theta,0} c_{\varphi,0} + f_D(\omega_{r,0}, \boldsymbol{\delta}_0) - s_{\theta,0} f_L(\omega_{r,0}, \boldsymbol{\delta}_{y,0}) - c_{\theta,0} s_{\varphi,0} f_L(\omega_{r,0}, \boldsymbol{\delta}_{x,0}) \quad (3.5a)$$

$$0 = d_r f_D(\omega_{r,0}, \boldsymbol{\delta}_{y,0}) - d_{13} f_L(\omega_{r,0}, \boldsymbol{\delta}_{x,0}) \quad (3.5b)$$

$$0 = d_r f_D(\omega_{r,0}, \boldsymbol{\delta}_{x,0}) - d_{24} f_L(\omega_{r,0}, \boldsymbol{\delta}_{y,0}) \quad (3.5c)$$

$$0 = C_{tq}\omega_{r,0}^2 + d_r f_L(\omega_{r,0}, \boldsymbol{\delta}_0) \quad (3.5d)$$

$$0 = -\omega_{r,0} + K_r \tilde{u}_{r,0} \quad (3.5e)$$

Das System (3.5) ist offensichtlich unterbestimmt, weshalb in weiterer Folge davon ausgegangen werden soll, dass in der Ruhelage auch die anfangs vernachlässigte horizontale Beschleunigung verschwindet. Dies kann bei einem zentrisch sitzenden Massenmittelpunkt nur bei  $\theta_0 = \varphi_0 = 0$  der Fall sein. Aus der ersten Gleichung (3.5a) folgt dann

$$C_{th} = \frac{mg}{\omega_{r,0}^2} + C_D(\delta_{1,0}^2 + \delta_{2,0}^2 + \delta_{3,0}^2 + \delta_{4,0}^2), \quad (3.6)$$

aus der vorletzten Gleichung (3.5d) wiederum

$$\begin{aligned} C_{tq}\omega_{r,0}^2 &= d_r C_L \omega_{r,0}^2 (\tilde{\delta}_{1,0} + \tilde{\delta}_{2,0} + \tilde{\delta}_{3,0} + \tilde{\delta}_{4,0}) \\ C_{tq} &= d_r C_L (\tilde{\delta}_{1,0} + \tilde{\delta}_{2,0} + \tilde{\delta}_{3,0} + \tilde{\delta}_{4,0}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Der vom Propeller erzeugte Schub muss also gleich der Gewichtskraft inklusive dem parasitären Luftwiderstand der Flossen sein, während das resultierende Luftwiderstandsmoment zufolge des rotierenden Propellers durch die Flossen kompensiert werden muss. Aus den beiden Gleichungen (3.5b), (3.5c) folgt

$$d_r C_D (\tilde{\delta}_{1,0}^2 - \tilde{\delta}_{3,0}^2) = d_{24} C_L (\tilde{\delta}_{2,0} + \tilde{\delta}_{4,0}), \quad (3.8a)$$

$$d_r C_D (\tilde{\delta}_{2,0}^2 - \tilde{\delta}_{4,0}^2) = d_{13} C_L (\tilde{\delta}_{1,0} + \tilde{\delta}_{3,0}). \quad (3.8b)$$

Das resultierende Problem ist nach wie vor unterbestimmt, formal existieren somit unendlich viele Ruhelagen. Dies ist recht einfach nachzuvollziehen, da die Aufteilung des Giermoments auf die Flossen grundsätzlich beliebig ist, solange die dazu verwendeten Flossenpaare den Gleichungen (3.8) genügen. Praktisch ist es aber sinnvoll, das Luftwiderstandsmoment gleichmäßig auf alle vier Steuerflächen aufzuteilen, da damit der Anstellwinkel der Flossen klein und der Auftriebsverlust<sup>1</sup> gering bleibt.

Mit der zusätzlichen Forderung

$$-\tilde{\delta}_{1,0} = -\tilde{\delta}_{2,0} = \tilde{\delta}_{3,0} = \tilde{\delta}_{4,0} = \tilde{\delta}_0 \quad (3.9)$$

erhält man schließlich die Ruhelage

$$\tilde{\delta}_0 = \frac{C_{tq}}{4d_r C_L}, \quad (3.10a)$$

$$\omega_{r,0} = \sqrt{\frac{mg}{C_{th} - 4C_D \tilde{\delta}_0^2}}, \quad (3.10b)$$

$$\tilde{u}_{r,0} = \frac{1}{K_r} \omega_{r,0}. \quad (3.10c)$$

Für die identifizierten Parameter ergeben sich die in Tabelle 3.1 angeführten Werte. Invertieren des Zusammenhangs (2.51) liefert den physikalischen Steuerflächen-Winkel in der Ruhelage  $\delta_0$ , der wie zu erwarten, sehr nahe an  $\tilde{\delta}_0$  liegt.

<sup>1</sup>das gilt sowohl für den Auftrieb der einzelnen Steuerflächen, als auch in Bezug auf die resultierenden parasitären Effekte der Flossen in der Vertikaldynamik der Drohne



Symbol	Wert	Einheit
$\tilde{\delta}_0$	3.55	deg
$\delta_0$	3.69	deg
$\omega_{r,0}$	3227	rad/s
$\tilde{u}_{r,0}$	0.604	

Tabelle 3.1: Ruhelage für äquivalente Steuerflächen-Winkel

Eine andere Möglichkeit  $\delta_0$  zu bestimmen bestünde darin, eine Achse gegenüber einer anderen zu bevorzugen. Beispielsweise könnte man die Winkel der beiden Steuerflächen  $\delta_x$  so wählen, dass das resultierende Giermoment teilweise oder gänzlich verschwindet. Damit steht ein größerer Stellbereich der orthogonalen Flossen  $\delta_y$  für die Regelung zur Verfügung.

### Linearisiertes Modell

Für das um diese Ruhelage (3.10) linearisierte System gibt sich dann ein Ausdruck der Form

$$\frac{d}{dt} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \quad (3.11a)$$

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} \quad (3.11b)$$

mit dem  $n$ -dimensionalen Zustand  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , dem  $p$ -dimensionalen Eingang  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^p$ , dem  $q$ -dimensionalen Ausgang  $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^q$ , sowie den Matrizen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  und  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ .

Nach einiger Rechnung erhält man die gesuchten Systemmatrizen

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2C_{th}\omega_{r,0}}{m} + \frac{4}{m}a_D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_r\omega_{r,0}}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_r\omega_{r,0}}{I_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2C_{tg}\omega_{r,0}}{I_z} - \frac{I_r}{I_z T_r} - \frac{4}{I_z}a_L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix}, \quad (3.12a)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m}b_D & -\frac{1}{m}b_D & \frac{1}{m}b_D & \frac{1}{m}b_D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_{13}}{I_x}b_L & -\frac{d_r}{I_x}b_D & \frac{d_{13}}{I_x}b_L & -\frac{d_r}{I_x}b_D \\ 0 & \frac{d_r}{I_y}b_D & \frac{d_{24}}{I_y}b_L & \frac{d_r}{I_y}b_D & \frac{d_{24}}{I_y}b_L \\ \frac{I_r}{I_z} \frac{K_r}{T_r} & -\frac{d_r}{I_z}b_L & -\frac{d_r}{I_z}b_L & \frac{d_r}{I_z}b_L & \frac{d_r}{I_z}b_L \\ \frac{K_r}{T_r} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_r & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 \end{bmatrix}. \quad (3.12b)$$

mit den Komponenten der Luftkraft-Gradienten

$$a_D = \left. \frac{\partial f_D}{\partial \omega_r} \right|_0 = 2C_D \omega_{r,0} \delta_0^2,$$

$$b_D = \left. \frac{\partial f_D}{\partial \delta} \right|_0 = 2C_D \omega_{r,0}^2 \delta_0,$$

$$a_L = \left. \frac{\partial f_L}{\partial \omega_{r,0}} \right|_0 = 2C_L \omega_r (\delta_0 - \alpha_L \delta_0 |\delta_0|),$$

$$b_L = \left. \frac{\partial f_L}{\partial \delta} \right|_0 = C_L \omega_{r,0}^2 (1 - 2\alpha_L |\delta_0|).$$

### 3.1.3 Eingangstransformation

Wie bereits in Abschnitt 2.2.3 im Rahmen der Betrachtungen hinsichtlich der Flossenkonfigurationen ersichtlich wurde, hängen die Steuerflächenkräfte und -momente stets von der gewichteten Summe mehrerer Steuerflächenwinkel ab. Es ist also naheliegend eine Allokationsmatrix der Form

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\delta} = \mathbf{T}\boldsymbol{\delta}_+. \quad (3.13)$$

einzuführen. Die Matrix  $\mathbf{T}$  wird im Kontext der Multicopter-Regelung oftmals als (Motor-)Mixer bezeichnet und wurde in Anlehnung an eben diese Idee so gewählt, dass der Betrag des größten Elementes gleich eins<sup>2</sup> ist. Mit den Komponenten der neuen virtuellen Stellgröße  $\boldsymbol{\delta}_+^T = [\delta_x \ \delta_y \ \delta_z]$  kann dann in weiterer Folge direkt ein Stellmoment bezüglich einer der drei körperfesten Achsen vorgegeben werden. Zur besseren Interpretierbarkeit des Stellaufwandes ist es zweckmäßig auch die inverse Abbildung

$$\begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\delta}_+ = \mathbf{T}^\dagger \boldsymbol{\delta} \quad (3.14)$$

mit der Linksinversen [2]

$$\mathbf{T}^\dagger = (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \quad (3.15)$$

einzuführen.

#### Eingangsaffines Modell

Transformiert man die Flossenkräfte (2.24) und -momente (2.28) mit Hilfe der Beziehung  $\tilde{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{T}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_+$ , so erhält man die sehr kompakten Ausdrücke

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{cs}(\tilde{\boldsymbol{\delta}}_+, \omega_r) &= \omega_r^2 \begin{bmatrix} C_L 2\tilde{\delta}_y \\ -C_L 2\tilde{\delta}_x \\ C_D(2\tilde{\delta}_y^2 + 2\tilde{\delta}_x^2 + 4\tilde{\delta}_z^2) \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\tau}_{cs}(\tilde{\boldsymbol{\delta}}_+, \omega_r) &= \omega_r^2 \begin{bmatrix} d_{13} C_L 2\tilde{\delta}_x \\ d_{24} C_L 2\tilde{\delta}_y \\ d_r C_L 4\tilde{\delta}_z \end{bmatrix} + \omega_r^2 \begin{bmatrix} -d_r C_D 4\tilde{\delta}_y \tilde{\delta}_z \\ d_r C_D 4\tilde{\delta}_x \tilde{\delta}_z \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Beitrag des Luftwiderstandes der Flossen zur gesamten Vertikalkraft in der Ruhelage

$$f_z = mg - C_{th}\omega_r^2 - C_D(2\tilde{\delta}_y^2 + 2\tilde{\delta}_x^2 + 4\tilde{\delta}_z^2).$$

Im schlechtest möglichen Fall, nämlich voll ausgelenkter Steuerflächen  $\delta_i = \delta_{MAX} = 30^\circ$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  beträgt der auf den Schub bezogene Fehler

$$\frac{C_D 4\delta_{MAX}}{C_{th}} \approx 16\%.$$

Selbst bei aggressiven Flugmanövern werden üblicherweise nicht mehr als  $15^\circ$  (entspricht  $\approx 4\%$  Modellfehler) Stellgröße verwendet, womit der durch die Steuerflächen induzierte Luftwiderstand in guter Näherung vernachlässigt werden kann. Auch für den Momentenbeitrag ist eine ähnliche Abschätzung zweckmäßig, da für die identifizierten Systemparameter  $d_{13}C_L$  um zwei Größenordnungen größer als  $d_r C_D$  ist. Damit erhält man

$$\mathbf{f}_{cs}(\tilde{\boldsymbol{\delta}}_+, \omega_r) \approx C_L \omega_r^2 \begin{bmatrix} 2\tilde{\delta}_y \\ -2\tilde{\delta}_x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.16a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{cs}(\tilde{\boldsymbol{\delta}}_+, \omega_r) \approx C_L \omega_r^2 \begin{bmatrix} 2d_{13}\tilde{\delta}_x \\ 2d_{24}\tilde{\delta}_y \\ 4r\tilde{\delta}_z \end{bmatrix} = C_L \omega_r^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2d_{13} & & \\ & 2d_{24} & \\ & & 4d_r \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_+. \quad (3.16b)$$

<sup>2</sup>entspricht bei bezogenen Größen einer Allokation von 100%.

In jedem Fall sind diese Vereinfachungen durch die Simulation am vollständigen Modell - behandelt im folgenden Abschnitt - zu prüfen.

Offensichtlich können die Abbildungen  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{D}$  nicht unabhängig von einander sein. Einsetzen der Zusammenhänge (3.13), (3.14) in die Gleichung (2.52) beziehungsweise (2.55) führt auf

$$\frac{1}{C_L \omega_r^2} \tau_{cs} = \mathbf{J} \tilde{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{J} \mathbf{T} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_+ = \mathbf{D} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_+, \quad (3.17a)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}_+ = \mathbf{T}^\dagger \tilde{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{T}^\dagger \mathbf{J}^\dagger \tau_{cs} \frac{1}{C_L \omega_r^2} = \mathbf{D}^{-1} \tau_{cs} \frac{1}{C_L \omega_r^2}. \quad (3.17b)$$

Während  $\mathbf{T}$  die Aufteilung der virtuellen auf die physikalischen Stellgrößen widerspiegelt, beschreibt  $\mathbf{D}$  die verbleibende Skalierung zufolge der unterschiedlichen effektiven Hebelarme. Die Wahl von  $\mathbf{T}$  ist nicht eindeutig, die Matrix sollte aber jedenfalls so gewählt werden, dass  $\mathbf{D} = \mathbf{J} \mathbf{T}$  diagonal besetzt ist. Damit ist sichergestellt, dass genau ein virtueller Eingang genau eine Komponente des Steuerflächen-Moments beeinflusst.

Mit den getroffenen Vereinfachungen ist das System affin im Eingang (*affine input*, AI)  $\tilde{\mathbf{u}}^T = [\tilde{u}_r \quad \tilde{\boldsymbol{\delta}}_+^T]$  und lässt sich in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_i \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \tilde{u}_i, \quad \tilde{u}_i \in \{\tilde{u}_r, \tilde{\delta}_x, \tilde{\delta}_y, \tilde{\delta}_z\} \quad (3.18)$$

mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} v_z \\ g - \frac{c_\theta c_\varphi}{m} C_{th} \omega_r^2 \\ \omega_x + \frac{s_\theta s_\varphi}{c_\theta} \omega_y + \frac{c_\varphi s_\theta}{c_\theta} \omega_z \\ c_\varphi \omega_y - s_\varphi \omega_z \\ \frac{s_\varphi}{c_\theta} \omega_y + \frac{c_\varphi}{c_\theta} \omega_z \\ \frac{I_z - I_y}{I_x} \omega_y \omega_z + \frac{I_r}{I_x} \omega_r \omega_y \\ - \frac{I_x - I_z}{I_y} \omega_z \omega_x - \frac{I_r}{I_y} \omega_r \omega_x \\ \frac{I_y - I_x}{I_z} \omega_x \omega_y - \frac{I_r}{I_z T_r} \omega_r + \frac{C_{tg}}{I_z} \omega_r^2 \\ - \frac{1}{T_r} \omega_r \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{g}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{I_r K_r}{I_z T_r} \\ \frac{K_r}{T_r} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_L \omega_r^2 \cos(\theta) \sin(\varphi)}{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2C_L \omega_r^2 d_{13}}{I_x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_L \omega_r^2 \sin(\theta)}{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2C_L \omega_r^2 d_{24}}{I_y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4C_L \omega_r^2 d_r}{I_z} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

darstellen.

### 3.1.4 Stabilisierbarkeit

Mit den Systemmatrizen des linearisierten Modells (3.12) ist es möglich, die lokale Stabilisierbarkeit des Systems zu beurteilen. Das Paar  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ist dann und nur dann stabilisierbar, wenn alle instabilen Eigenwerte der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  über den Eingang  $\mathbf{B}$  steuerbar sind [14].

#### Stabilität

Die Ruhelage  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  eines Systems ist global asymptotisch stabil, wenn sämtliche Eigenwerte  $\lambda_i$

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  in der linken offenen  $s$ -Halbebene liegen, also

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0 \quad (3.22)$$

erfüllen [19]. Für die identifizierten Parameter erhält man die Eigenwerte

$$\lambda^T = [0 \quad 0 \quad 0 + j9.51 \quad 0 - j9.51 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -120.96] \quad (3.23)$$

und somit eine instabile Ruhelage. Der letzte Eigenwert  $\lambda_9 = -1/T_r = -120.96$  entspricht dem Pol der Übertragungsfunktion (2.72) also der Dynamik der Antriebsstranges. Das konjugiert komplexe Eigenwertpaar  $\lambda_{3,4} = 0 \pm j9.51$  spiegelt die dynamische Kopplung zufolge des gyroskopischen Moments  $\tau_{\text{gyr}}$  wider. Bedingt durch die Linearisierung um  $\theta_0 = \varphi_0 = 0$  erhält man die restlichen Eigenwerte als Pole der trivialen Doppelintegratorketten der Winkel- und Vertikalbeschleunigung.

### Steuerbarkeit

Gemäß dem Steuerbarkeitskriterium von KALMAN ist das Paar  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  dann und nur dann vollständig steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_s(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (3.24)$$

vollen Rang  $n$  besitzt [13, 19]. Für das betrachtete System und die identifizierten Parameter ist die Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{S}_s(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  schlecht konditioniert, es also zweckmäßig zur Beurteilung der numerischen Steuerbarkeit in einem ersten Schritt die strukturelle Steuerbarkeit [19] des Systems zu untersuchen. Bezeichne  $\bar{\mathbf{A}}$  die Strukturmatrix einer Matrix  $\mathbf{A}$ , so liefert Satz A.1 eine notwendige und hinreichende Bedingung für strukturelle Steuerbarkeit des linearen Systems. Betrachtet man den Strukturgraphen 3.1 des linearisierten Systems (3.12), so ist unmittelbar ersichtlich, dass das System eingangsverbunden ist.

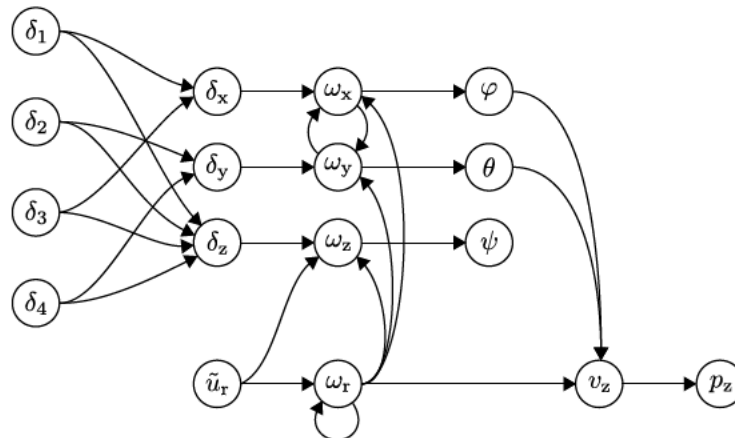


Abbildung 3.1: Strukturgraph des linearisierten Systems

Im Graphen wurden die Terme  $a_D$  und  $b_D$  aus Gründen der Übersichtlichkeit und da diese im Allgemeinen um Größenordnungen kleiner als sämtliche anderen Einträge sind, vernachlässigt. Es lässt sich zeigen, dass die folgend angeführten Rechnungen unabhängig der vernachlässigten Terme zum selben Ergebnis führen. Nach einer kurzen Rechnung erhält man für den strukturellen Rang der Steuerbarkeitsmatrix

$$\text{s-rang}([\bar{\mathbf{A}} \quad \bar{\mathbf{B}}]) = n. \quad (3.25)$$

und damit ein vollständig strukturell steuerbares System. Damit ist die notwendige Bedingung für die numerische Steuerbarkeit des Systems gegeben. Transformiert man die Eingänge mit Hilfe der Beziehung (3.14) in die neuen Eingänge, so ergibt sich

$$\mathbf{B}_+ = [\mathbf{b}_r \quad \mathbf{b}_x \quad \mathbf{b}_y \quad \mathbf{b}_z] = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

und damit ebenfalls

$$\text{s-rang}([\bar{\mathbf{A}} \quad \bar{\mathbf{B}}_+]) = n. \quad (3.27)$$

Geht man, vorerst ohne Beweis davon aus, dass das System für die identifizierten Parameter vollständig steuerbar ist, so ist es auch stabilisierbar. Eine Berechnung der numerischen Steuerbarkeit über das Steuerbarkeitskriterium von KALMAN mit einer spaltennormierten Steuerbarkeitsmatrix hat dieses Ergebnis für die verwendeten Parameter bestätigt.

Auffällig ist, dass sämtliche Einträge in den zu den Steuerflächen gehörigen Spalten der Eingangsmatrizen  $\mathbf{B}$  beziehungsweise  $\mathbf{B}_+$  die Winkelgeschwindigkeit des Rotors  $\omega_{r,0}$  beinhalten. Die Steuerbarkeit hängt also direkt von Rotorwinkelgeschwindigkeit ab. Intuitiv ist dies recht einfach nachzuvollziehen, da die Steuerflächen nur einen (Stell-)Kraftbeitrag leisten können solange sie überströmt werden. Dies kann im Rahmen des verwendeten Modell offensichtlich nur durch die vom Rotor induzierte Strömung erreicht werden.

Alle folgenden Überlegungen basieren auf dem AI-System (3.18)-(3.20) das nun als Entwurfsgrundlage für eine Regelung dienen soll.

## 3.2 Reglerentwurf

Bedingt durch die unterschiedlichen Zeitskalen der translatorischen und rotatorischen Systemdynamik separieren viele state-of-the-art eVTOL-Regelungen diese und implementieren in weiterer Folge eine Kaskadenregelung, bestehend aus einem Positionsregler sowie einer unterlagerten Orientierungsregelung. Oftmals ist die Regelung der Orientierung selbst wieder als Regler-Kaskade ausgeführt und soll in dieser Arbeit ebenfalls auf diese Art und Weise realisiert werden.

Der Grundgedanke der Kaskadenregelung ist in jedem Fall der selbe; nur bei einer hinreichend schnellen und robusten Sollwertfolge der inneren (unterlagerten) Regelkreise kann auch die Referenz der äußeren, langsameren Regelkreise präzise verfolgt werden. Aus diesem Grund liegt ein besonderer Fokus dieser Arbeit auf dem Entwurf der inneren Regelschleife, während für die äußere Reglerschleife bewährte Konzepte aus der Drohnenregelung zum Einsatz kommen.

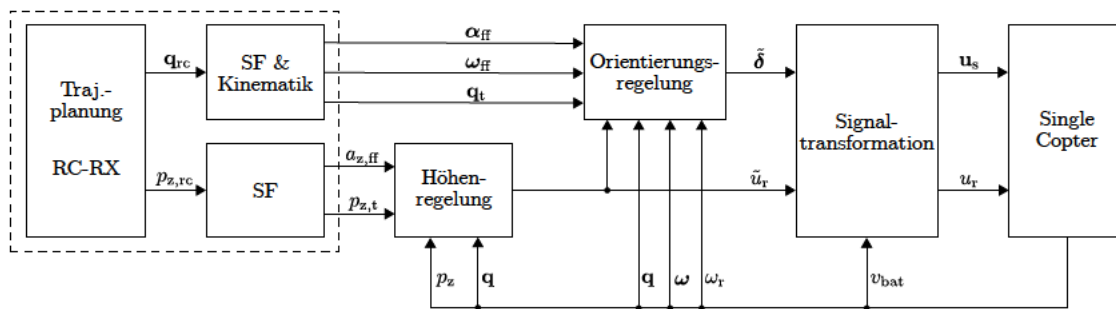


Abbildung 3.2: Struktur der implementierten Regelung

Die grundlegende Struktur der implementierten Regelung ist schematisch in Abbildung 3.2 dargestellt. Für eine vollständige Auflistung der verwendeten Indizes sei an dieser Stelle auf die Nomenklatur im Anhang verwiesen. In einem ersten Schritt werden die von einem (Auto-)piloten erhaltenen Steuersignale mit Hilfe eines Sollwertfilters (SF) geglättet. Aus der gefilterten Referenzgröße der Orientierung  $q_t$  und den zugehörigen Ableitungen kann dann die gewünschte Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{ff}$  und -beschleunigung  $\alpha_{ff}$  berechnet und für eine Vorsteuerung genutzt werden. Zur Stabilisierung des Fehlersystems, also der verbleibenden Abweichung zwischen Soll-  $q_t$  und Ist-Orientierung  $q$  kommt ein quaternionen-basierter Proportionalregler gefolgt von einer unterlagerten Winkelgeschwindigkeitsregelung zum Einsatz. Diese innere Regelschleife kombiniert dabei eine exakt eingangs-ausgangs-linearisierende Zustandsrückführung mit einem PI-Regler.

Analog dazu lässt sich aus der gefilterten Höhen-Referenz  $p_{z,t}$  durch zweimalige Differenziation die gewünschte Vertikalbeschleunigung  $a_{z,ff}$  berechnen und direkt als Vorsteuerungsanteil aufschalten. Zur Stabilisierung der Höhe kommt eine einfache PID-Reglung kombiniert mit einer Entzerrung des statischen Antriebsstrang-Verhaltens zum Einsatz. In beiden Fällen wird somit eine (Vor-)Steuerung (*feedforward control*) mit einer Regelung (*feedback control*) zu einer Zwei-Freiheitsgrad-Regelung kombiniert.

### 3.2.1 Kaskadierte Orientierungsregelung

Um klar zwischen den Ebenen der als Kaskadenregelung ausgeführten *Orientierungsregelung* unterscheiden zu können, bezeichnet in weiterer Folge

- *Winkelregelung* eine Regelung auf Ebene der Lage-Winkel, beschrieben durch  $\mathbf{R}$ ,  $\phi$ , oder  $\mathbf{q}$  und
- *Winkelgeschwindigkeitsregelung* den sinngemäß darauf folgenden unterlagerten Regelkreis, der die robuste Sollwertfolge der Ableitungsgrößen, beschrieben durch  $\dot{\mathbf{R}}$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  beziehungsweise  $\omega$  sicherstellen soll.

#### Winkelregelung

Die quaternionenbasierte *Winkelregelung* basiert auf den Publikation [4, 12], die äquivalente Regelgesetze vorschlagen. Während in [12] das Regelgesetz angeführt und im Rahmen von Simulationsstudien unter-

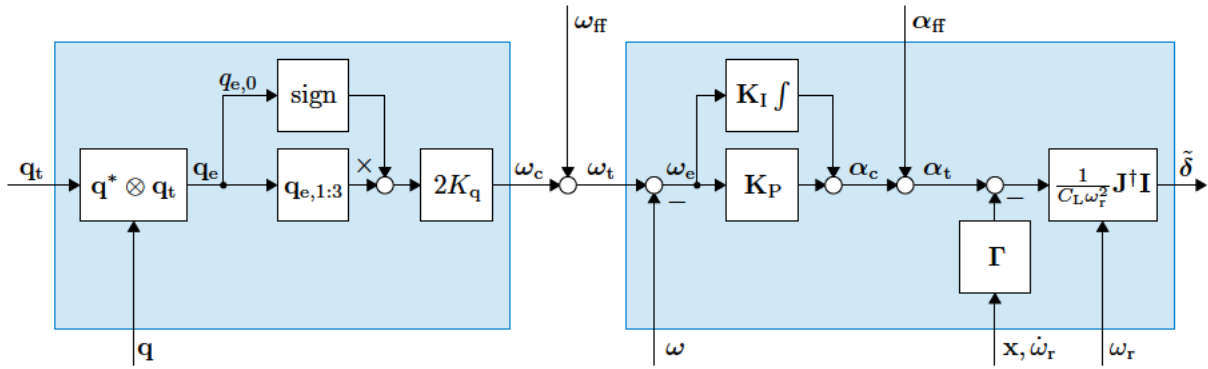


Abbildung 3.3: Kaskadierte Orientierungsregelung

sucht wird, sind in [4] zusätzlich ein Stabilitätsbeweis sowie sinnvolle Erweiterungen für Quadcopter zu finden. Ziel der Regelung ist die Stabilisierung der Orientierung  $\pm \mathbf{q}$  and der Stelle  $\pm \mathbf{q}_t$ . Die Vorzeichenunabhängigkeit liegt darin begründet, dass durch die Antipoden  $\pm \mathbf{q}$  dieselbe physikalische Orientierung beschrieben wird<sup>3</sup>. Gesucht ist somit ein Regelgesetz, das

$$\omega_c(\mathbf{q}) = \omega_c(-\mathbf{q}) \quad (3.28)$$

für ein beliebiges  $\mathbf{q}$  erfüllt. Dazu wird das in [4, 12] vorgeschlagene Regelgesetz

$$\omega_c(\mathbf{q}_e) = \frac{2}{T_q} \text{sign}(q_{e,0}) \mathbf{q}_{e,1:3} = 2K_q \text{sign}(q_{e,0}) \mathbf{q}_{e,1:3} \quad \text{sign}(q_{e,0}) = \begin{cases} +1, & q_{e,0} \geq 0 \\ -1, & q_{e,0} < 0 \end{cases} \quad (3.29a)$$

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q}_t \quad (3.29b)$$

verwendet. Das Fehlermaß  $\mathbf{q}_e$  beschreibt die Rotation von der aktuellen  $\mathbf{q}$  zur gewünschten Orientierung  $\mathbf{q}_t$  und  $T_q = 1/K_q$  die Zeitkonstante des resultierenden, geschlossenen Regelkreises. Für einen Stabilitätsbeweis sei an dieser Stelle auf [4] verwiesen. Um zu zeigen, dass es sich beim geschlossenen Regelkreis um ein entkoppeltes System erster Ordnung handelt, setzt man das Regelgesetz (3.29) in die kinematische Differentialgleichung (2.19) ein und erhält ohne Einschränkung der Allgemeinheit für  $\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_1$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \frac{2}{T_q} \text{sign}(q_{e,0}) \mathbf{q}_{e,1:3} = \frac{1}{T_q} \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \\ -q_0 q_1 \\ -q_0 q_2 \\ -q_0 q_3 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage  $\mathbf{q}_1$  ( $q_0 \approx 1, q_{1:3} \ll 1$ ) ergibt sich schließlich das entkoppelte System erster Ordnung

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{T_q} \begin{bmatrix} 0 \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

mit der Zeitkonstante  $T_q$  [4]. Dem Beweis liegt also die Annahme, dass die Winkelgeschwindigkeit direkt vorgegeben werden kann  $\omega = \omega_c$  zugrunde. Praktisch steht die Reglerverstärkung  $K_q = 1/T_q$  als Entwurfs-Freiheitsgrad zur Verfügung und soll in weiterer Folge passend gewählt werden.

*Anmerkung 3.2.1: Maximaler Ausgang der Quaternionenregelung [4]*

Gemäß der Definition eines Einheitsquaternions gilt  $\|\mathbf{q}\| = 1$  und für den vektoriellen Teil des Fehlerquaternions somit  $\|\mathbf{q}_{e,1:3}\| \leq 1$ . Der Reglerausgang beträgt demnach maximal  $\|\omega_c\| \leq 2K_q$ .

### Winkelgeschwindigkeitsregelung

Betrachtet man nun das vollständig steuerbare, rotatorische Subsystem

$$\mathbf{I} \dot{\omega} + \omega \times \mathbf{I} \omega = \tau_{\text{gyr}} + \tau_r + \tau_{tq} + \tau_{cs}, \quad (3.32)$$

<sup>3</sup>es gilt  $\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}(-\mathbf{q})$  für ein beliebiges Einheitsquaternion  $\mathbf{q}$

so erhält man für das AI-Modell (3.18) aus dem vorherigen Abschnitt einen Ausdruck der Form

$$\boldsymbol{\tau}_{cs} = C_L \omega_r^2 \mathbf{D} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_+ = \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\tau}_{gyr} - \boldsymbol{\tau}_r - \boldsymbol{\tau}_{tq}. \quad (3.33)$$

Die konstante Matrix  $\mathbf{D}$  ist positiv definit und somit stets invertierbar. Für Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_r > 0$  existiert auch ein endlicher Kehrwert und  $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_+$  lässt sich explizit als Funktion der Zustandsgrößen sowie deren Ableitungen angeben.

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_+ &= \frac{1}{C_L \omega_r^2} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{I} (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{I}^{-1} (-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}_{gyr} + \boldsymbol{\tau}_r + \boldsymbol{\tau}_{tq})) \\ &= \frac{1}{C_L \omega_r^2} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{I} (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\omega}, \omega_r, \dot{\omega}_r)) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Wählt man die Stellgröße  $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_+$  nach Gleichung (3.34), so erhält man ein lineares, entkoppeltes System mit der neuen, virtuellen Eingangsgröße  $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$  und der Ausgangsgröße  $\boldsymbol{\omega}$ .

Durch ein PI-Regelgesetz der Form

$$\boldsymbol{\alpha}_c = \mathbf{K}_P \boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{K}_I \int_0^t \boldsymbol{\omega}_e(\tau) d\tau \quad (3.35a)$$

$$\boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{\omega} \quad (3.35b)$$

und geeignete Wahl der diagonal besetzten Reglerverstärkungsmatrizen  $\mathbf{K}_P$ ,  $\mathbf{K}_I$  sowie  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_c$  kann damit unmittelbar die Dynamik des rotatorischen Subsystems vorgegeben werden. In Gleichung (3.35b) bezeichnet  $\boldsymbol{\omega}_t$  den Sollwert der Winkelgeschwindigkeit, welcher durch die überlagerte *Winkelregelung* (3.29) vorgegeben wird  $\boldsymbol{\omega}_t = \boldsymbol{\omega}_c$ .

Der Ausdruck  $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}, \dot{\omega}_r)$  in Gleichung (3.34) kompensiert die modellinhärenten Kopplungen exakt und erzeugt damit lineares EA-Verhalten bezüglich der Winkelbeschleunigung. Aufteilen des Regler-Ausganges auf die vier Steuerflächen führt auf das Stellgesetz

$$C_L \tilde{\boldsymbol{\delta}} = C_L \mathbf{T} \tilde{\boldsymbol{\delta}}_+ = \frac{1}{\omega_r^2} \mathbf{T} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{I} (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\Gamma}) = \frac{1}{\omega_r^2} \mathbf{J}^\dagger \mathbf{I} (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\Gamma}) \quad (3.36)$$

und damit auf einen Ausdruck, der eine klare Interpretation besitzt. Hinter dem Ausdruck  $C_L \tilde{\boldsymbol{\delta}}$  steht die Auftriebskennlinie<sup>4</sup> des verwendeten Steuerflächenprofils,  $\mathbf{T}$  beschreibt die Aufteilung des Regler-Ausganges auf die Steuerflächen und  $\mathbf{D}$  die effektiven Hebelarme der gruppierten Flossen. Der Ausdruck  $\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{T} \mathbf{D}^{-1}$  ist wie bereits gezeigt ausschließlich von der Steuerflächen-Konfiguration, sprich der Anzahl und Platzierung abhängig. Um mit denselben Anstellwinkeln  $\boldsymbol{\delta}$  größere Winkelbeschleunigungen zu erzwingen, stehen somit folgende (konstruktive) Maßnahmen zur Verfügung:

1. Reduktion der Massenträgheitsmomente  $\mathbf{I}$ .
2. Erhöhung der Abstände  $\mathbf{D}$  der Flossen zum Massenmittelpunkt.
3. Verwendung eines anderen Profils  $C_L$ ,  $\alpha_L$  und damit eine Erhöhung des Auftriebes der Steuerflächen.
4. Erhöhung der Anströmgeschwindigkeit  $\propto \omega_r^2$ .

### Kinematische Vorsteuerung

Die Sollwertfolge lässt sich weiter verbessern, indem man zusätzlich zu der Regelung noch einen Steuerungsanteil hinzufügt. Die Idee lässt sich folgendermaßen zusammenfassen - ist die gewünschte Trajektorie, beschrieben durch  $\boldsymbol{\phi}_t(t)$  beziehungsweise  $\mathbf{q}_t(t)$  inklusive der zugehörigen Ableitungsgrößen bekannt, so kann über die kinematische Differentialgleichung (2.9) beziehungsweise (2.19) direkt die gewünschte Winkelgeschwindigkeit vorberechnet werden. Dies lässt sich für eine beliebige Ableitungsordnung fortsetzen, vorausgesetzt die Trajektorie ist hinreichend oft differenzierbar. Für eine Parametrierung über

<sup>4</sup> der für große Stellwinkel relevante, quadratische Korrekturtermin ist implizit durch den Zusammenhang zwischen  $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$  und  $\boldsymbol{\delta}$  gegeben



RPY-Winkel oder Quaternionen erhält man

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{ff}} = \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \dot{\boldsymbol{\phi}}_t \quad \boldsymbol{\omega}_{\text{ff}} = 2 \mathbf{q}_t^* \otimes \dot{\mathbf{q}}_t \quad (3.37a)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{\text{ff}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ff}} = \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \left( \ddot{\boldsymbol{\phi}}_t - \frac{d\tilde{\mathbf{R}}}{dt} \boldsymbol{\omega}_{\text{ff}} \right) \quad \boldsymbol{\alpha}_{\text{ff}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{ff}} = 2 \dot{\mathbf{q}}_t^* \otimes \dot{\mathbf{q}}_t + 2 \mathbf{q}_t^* \otimes \ddot{\mathbf{q}}_t \quad (3.37b)$$

Um die Notation etwas zu vereinfachen wurde dabei auf eine explizite Angabe der Soll-Orientierung  $\boldsymbol{\phi}_t$  in  $\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\phi}_t)$  der linken beiden Gleichungen verzichtet. Wie schon in Abschnitt 2.1.2 besprochen sind die Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung durch den vektoriellen Teil der resultierenden Quaternionen gegeben.

Im Falle der Trajektorienfolgeregelung soll durch die Regelung gewährleistet werden, dass sich  $\mathbf{q}(t)$  entlang von  $\mathbf{q}_t(t)$  und  $\boldsymbol{\omega}(t)$  entlang von  $\boldsymbol{\omega}_t(t)$  bewegt. Das Regelgesetz (3.35) muss also entsprechend angepasst werden. Hinzufügen des Vorsteuerungsanteils für auf das leicht modifizierte Regelgesetz

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{K}_P \boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{K}_I \int_0^t \boldsymbol{\omega}_e(\tau) d\tau + \boldsymbol{\alpha}_{\text{ff}} = \boldsymbol{\alpha}_c + \boldsymbol{\alpha}_{\text{ff}}, \quad (3.38a)$$

$$\boldsymbol{\omega}_e = \underbrace{\boldsymbol{\omega}_c + \boldsymbol{\omega}_{\text{ff}}}_{\boldsymbol{\omega}_t} - \boldsymbol{\omega} \quad (3.38b)$$

mit dem neuen Regelfehler  $\boldsymbol{\omega}_e$  sowie den Vorsteuerungsanteilen  $\boldsymbol{\omega}_{\text{ff}}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_{\text{ff}}$  aus Gleichung (3.37). Die Sollwinkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_t$  setzt sich nunmehr aus einem Anteil des überlagerten Winkelreglers  $\boldsymbol{\omega}_c = \boldsymbol{\omega}_c(\mathbf{q}_t, \mathbf{q})$  sowie dem Vorsteuerungsanteil  $\boldsymbol{\omega}_{\text{ff}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ff}}(\mathbf{q}_t, \dot{\mathbf{q}}_t)$  zusammen. Analoges gilt auch für die Winkelbeschleunigung  $\boldsymbol{\alpha}$  (siehe Abbildung 3.3).

### Sollwertfilter

Für eine Steuerung gemäß (3.37) ist die zweite Ableitung der Soll-Orientierung  $\ddot{\mathbf{q}}_t$  notwendig. Eine Möglichkeit sowohl offline als auch online zu den Ableitungsgrößen zu gelangen, besteht darin die aus der Trajektorienplanung oder von einem Piloten erhaltenen Referenzgrößen mit einem sogenannten Sollwert-Filter (*setpoint filter*, SF) zu glätten. Das SF wird als lineares Tiefpassfilter

$$G_{\text{sf}}(s) = \frac{1}{(1 + T_{\text{sf}}s)^{N_{\text{sf}}}} \quad (3.39)$$

mit der  $N_{\text{sf}}$ -fachen Polstelle  $p_0 = -1/T_{\text{sf}}$  realisiert. Für ein Filter vierter Ordnung ist das zugehörige Zustandsraummodell durch

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.40a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.40b)$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/T_{\text{sf}}^4 & -4/T_{\text{sf}}^3 & -6/T_{\text{sf}}^2 & -4/T_{\text{sf}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/T_{\text{sf}}^4 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

und  $\mathbf{C} = \mathbf{E}$  gegeben. Somit stehen nicht nur die gesuchten Ableitungen zur Verfügung, es kann durch geeignete Wahl der Zeitkonstante  $T_{\text{sf}}$  und Filterordnung  $N_{\text{sf}}$  auch direkt die Dynamik der Referenzgröße(n) beeinflusst werden.

### 3.2.2 Höhenregelung

Neben der für die Orientierungsregelung verwendeten Eingangsgröße  $\boldsymbol{\delta}_+$  steht noch der normalisierte Eingang des Antriebsstranges  $\tilde{u}_r$  zur Verfügung. Dieser soll in weiterer Folge dazu genutzt werden die Sollwertfolge der Flughöhe  $p_z$  zu garantieren. Vernachlässigt man den Kraftbeitrag der Steuerflächen in der Vertikaldynamik, so erhält man

$$f_{\text{th}} c_{\theta} c_{\varphi} = m(g - a_z). \quad (3.42)$$

Berechnet man nun aus einer hinreichend oft stetig differenzierbaren Solltrajektorie  $p_{z,t}(t)$ , beispielsweise durch Verwenden eines Sollwertfilters, die gewünschte Vertikalbeschleunigung  $a_{z,\text{ff}} = \ddot{p}_{z,t}$ , so erhält man aus Gleichung (3.42) direkt die notwendige Schubkraft, um dieser Trajektorie zu folgen.

### Anmerkung 3.2.2: Neigungskompensation

Der Faktor  $c_\theta c_\varphi = \cos(\theta) \cos(\varphi)$  beschreibt die Projektion des körperfesten Schubvektors in das welt-feste Koordinatensystem und damit die Reduktion der Vertikalkraft zufolge der Neigung der Drohne.

Da in Gleichung (3.42) die Beschleunigung zufolge der Steuerflächen vernachlässigt wurde, ist alleine aufgrund des Modellfehlers schon nicht davon auszugehen, dass durch eine reine Steuerung tatsächlich  $p_z(t) = p_{z,t}(t), \forall t$  gilt. Aus diesem Grund soll das Stellgesetz zusätzlich um einen Regelungsanteil  $a_{z,c}$  erweitert werden. Einsetzen liefert

$$f_{th} = m \frac{g - a_{z,t}}{c_\theta c_\varphi} \quad \text{mit} \quad a_{z,t} = a_{z,ff} + a_{z,c}. \quad (3.43)$$

Für eine einfache ideale PID-Regelung erhält man

$$a_{z,c} = K_{P,z} p_{z,e} + K_{I,z} \int_0^t p_{z,e}(\tau) d\tau + K_{D,z} \frac{d}{dt} p_{z,e}, \quad (3.44a)$$

$$p_{z,e} = p_{z,t} - p_z. \quad (3.44b)$$

mit den Regler-Verstärkungen  $K_{P,z}$ ,  $K_{I,z}$ ,  $K_{D,z}$  sowie dem Regelfehler  $p_{z,e}$ . Setzt man das Schubkraftmodell (2.41) und den Zusammenhang zwischen  $\tilde{u}_r$  und der Rotordrehzahl (2.68) in Gleichung (3.43) ein, erhält man schließlich das Stellgesetz

$$\tilde{u}_r = \sqrt{\frac{m}{C_{th} K_r^2}} \sqrt{\frac{g - a_{z,ff} - a_{z,c}}{c_\theta c_\varphi}}. \quad (3.45)$$

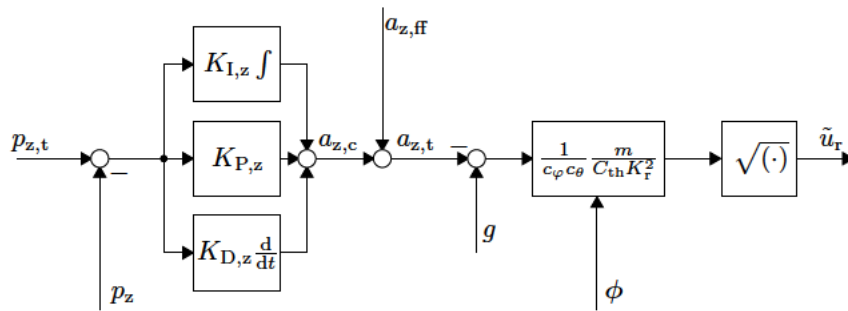


Abbildung 3.4: Höhenregelung

Praktisch ist keine Schubumkehr möglich, es muss somit stets

$$\frac{g - a_{z,ff} - a_{z,c}}{c_\theta c_\varphi} \geq 0 \quad (3.46)$$

erfüllt sein. Die Neigungskompensation  $c_\theta c_\varphi$  ist zudem nur für  $\mathbf{z}_B^T \mathbf{z}_W > 0$  sinnvoll. Damit lässt sich direkt die maximale Steigbeschleunigung angeben

$$-a_{z,t} \leq \frac{C_{th}}{m} \omega_{r,MAX}^2 c_\theta c_\varphi - g = a_{z,MAX}(\theta, \varphi), \quad (3.47)$$

welche schon im Rahmen der Trajektorienplanung berücksichtigt werden kann. Für die identifizierten Parameterwerte und  $\omega_{r,MAX} = 4000$  rad/s erhält man die maximale Aufstiegsbeschleunigung bei einer vollkommen aufgerichteten Drohne<sup>5</sup>

$$-a_{z,MAX}(\theta = \varphi = 0) = \frac{C_{th}}{m} \omega_{r,MAX}^2 - g \approx 5.30 \text{ m/s}^2 \quad (3.48)$$

sowie den maximalen Neigungswinkel bei konstanter Höhe

$$\cos^{-1}(\mathbf{z}_B^T \mathbf{z}_W) = \cos^{-1}(c_\theta c_\varphi) = \cos^{-1}\left(\frac{mg}{C_{th} \omega_{r,MAX}^2}\right) \approx 50 \text{ deg}. \quad (3.49)$$

<sup>5</sup>  $\mathbf{z}_B^T \mathbf{z}_W = 1$

### 3.2.3 Exakte Feedforwardlinearisierung

Bisher wurde die Tatsache genutzt, dass über die kinematische Differentialgleichung und ein Sollwertfilter Vorsteuerungsanteile für die modellunabhängigen kinematischen Ableitungsgrößen berechnet werden können. Praktisch unterliegt die Drohne - so wie jedes mechanische System - Stellgrößenbeschränkungen. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass es sich beim Single-Copter um ein differentiell flaches System handelt, die Idee der differentiellen Parametrierung also bis zu den Systemeingängen erweitert werden kann. Als Grundlage soll wieder das AI-System (3.18) herangezogen werden.

Gemäß dem im Anhang A angeführten Beweis ist das System für Ausgangswahl  $\mathbf{y}^T = [p_z \quad \phi^T]$  an einem generischen Punkt  $\mathbf{x}$  nicht eingangs-ausgangs-linearisierbar. Betrachtet man jedoch das Differentialgleichungssystem

$$m\ddot{p}_z = mg - C_{th}\omega_r^2 c_\varphi c_\theta - 2C_L\omega_r^2 \tilde{\delta}_x c_\theta s_\varphi - 2C_L\omega_r^2 \tilde{\delta}_y s_\theta \quad (3.50a)$$

$$I_x \dot{\omega}_x = \omega_y \omega_z (I_z - I_y) + I_r \omega_r \omega_y + 2C_L \omega_r^2 d_{13} \tilde{\delta}_x \quad (3.50b)$$

$$I_y \dot{\omega}_y = \omega_x \omega_z (I_z - I_x) - I_r \omega_r \omega_x + 2C_L \omega_r^2 d_{24} \tilde{\delta}_y \quad (3.50c)$$

$$I_z \dot{\omega}_z = \omega_x \omega_y (I_y - I_x) + K_{tq} \omega_r^2 - \frac{I_r}{T_r} \omega_r + \frac{I_r K_r}{T_r} \tilde{u}_r + 4C_L \omega_r^2 d_r \tilde{\delta}_z \quad (3.50d)$$

$$T_r \dot{\omega}_r = -\omega_r + K_r \tilde{u}_r \quad (3.50e)$$

etwas genauer, so fällt auf, dass die ersten drei Gleichungen ausschließlich von den drei unbekannt GröÙen  $\omega_r$ ,  $\tilde{\delta}_x$  und  $\tilde{\delta}_y$  abhängen. Man kann nun die beiden Gleichungen (3.50b) und (3.50c) nach  $\tilde{\delta}_x$  beziehungsweise  $\tilde{\delta}_y$  lösen und die Lösungen in Gleichung (3.50a) einsetzen. Dies führt unmittelbar auf eine quadratische Gleichung

$$b_2 \omega_r^2 + b_1 \omega_r + b_0 = 0$$

mit den Koeffizienten

$$b_0 = (I_x \omega_x \omega_z - I_z \omega_x \omega_z + I_y \dot{\omega}_y) d_{13} s_\theta + (I_z \omega_y \omega_z - I_y \omega_y \omega_z + I_x \dot{\omega}_x) d_{24} c_\theta s_\varphi + d_{13} d_{24} m (\ddot{p}_z - g),$$

$$b_1 = I_r d_{13} \omega_x s_\theta - I_r d_{24} \omega_y c_\theta s_\varphi,$$

$$b_2 = C_{th} d_{13} d_{24} c_\theta c_\varphi$$

und der eindeutigen Lösung

$$\omega_r = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2 b_0}}{2b_2}. \quad (3.51)$$

Einmalige Differenziation von (3.51) führt auf  $\dot{\omega}_r$  und unter Zuhilfenahme der beiden Gleichungen (3.50d), (3.50e) können damit die verbleibenden EingangsgröÙen  $\tilde{\delta}_z$  und  $\tilde{u}_r$  berechnet werden. Die Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung, die in der angeführten Vorgehensweise als bekannt angenommen wurden lassen sich, wie bereits in Gleichung (3.37) gezeigt, durch Ableiten der kinematischen Differentialgleichung bestimmen. Es ist somit möglich sämtliche SystemgröÙen über den Ausgang und die drei Ableitungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \chi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}) \quad (3.52)$$

zu parametrieren. Gemäß Definition A.2 handelt es sich somit um einen flachen Ausgang. Damit lässt sich schon im Rahmen der Trajektorienplanung die notwendige StellgröÙe angeben.

## 3.3 Diskussion

Die vorgeschlagene Regelung kombiniert das Konzept der Feedforwardlinearisierung auf Ebene der Kinematik mit der exakten Feedbacklinearisierung auf Ebene der Kinetik.

Ersterer Teil kann je nach Betriebsmodus als reiner Steuerungsanteil betrachtet werden und muss nicht notwendigerweise online und in jedem Zeitschritt neu berechnet werden. Sind nämlich die ReferenzgröÙen  $\phi_{rc}$  beziehungsweise  $\mathbf{q}_{rc}$  sowie  $p_{z,rc}$  a priori bekannt, beispielsweise wenn die Flugroute nicht über Funktionssignale direkt vom Piloten, sondern im Rahmen einer Trajektorienplanung vorgegeben wird, so lassen sich auch die zugehörigen AbleitungsgröÙen (Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung sowie Vertikalbeschleunigung) vorab bestimmen. Des Weiteren wurde gezeigt, dass das System für die Ausgangswahl zwar nicht EA-linearisierbar, sehr wohl aber differentiell flach ist, sich die Idee der Vorsteuerung bis hin

zu den notwendigen Systemgrößen fortführen lässt. Dies lässt sich beispielsweise dazu nutzen, eine a priori Abschätzung des Stellaufwandes angeben zu können.

Die exakte Feedbacklinearisierung ist für das rotatorische Teilsystem auf Ebene der Winkelbeschleunigung durch die skalierten, berechneten Momente, für die Vertikaldynamik auf Ebene der Beschleunigung durch die Neigungskompensation sowie die statische Entzerrung des Zusammenhanges zwischen der vertikalen Beschleunigung und der normalisierten Rotor-Referenzgröße  $\tilde{u}_r$  gegeben.

Aufgrund der Separation der Regelungsaufgabe in einen Steuerungs- (*feedforward control*) und Regelungsteil (*feedback control*) lässt sich das Ganze als Zwei-Freiheitsgrad-Regelung auffassen.

Der große Vorteil dieser Reglerstruktur liegt darin, dass die gesamte kinematische Vorsteuerung sowie die Winkelregelung modellunabhängig sind, während die komplexe Dynamik des Single-Copters nahe am Systemeingang linearisiert wird. Bedingt durch die modellbasierte Struktur der unterlagerten Winkelgeschwindigkeitsregelung sowie der Höhenregelung ist die Adaption des Regelgesetzes für einen beliebigen Aufbau (Flossenkonfigurationen, Steuerflächenprofile, Schubkennfeld etc.) einfach möglich. Durch die Gliederung der Regelungsaufgabe in einen Regelungs- und einen Steuerungsteil ist es zudem möglich die Steuerung überhaupt zu deaktivieren, und die Regelung im Ein-Freiheitsgrad-Modus zur Sollwertfolge zu verwenden.

## 4. Ergebnisse

Im folgenden Kapitel wird das vorgeschlagene Regelgesetz im Rahmen von Simulationsstudien validiert. Dazu werden zuallererst einige Aspekte hinsichtlich der Wahl der Reglerparameter beleuchtet, anschließend das Verhalten des geschlossenen Regelkreises anhand ausgewählter Testtrajektorien untersucht, und abschließend die Robustheit der Regelung gegenüber Modell- und Messfehlern sowie anderweitigen Störungen untersucht.

Wie bereits im Rahmen der Modellvalidierung ersichtlich wurde, konnte das reale System mit der Regelung aus ARDUPILOT stabilisiert werden. In Simulationen soll nun gezeigt werden, dass die vorgeschlagene Regelung ARDUROVER 4.0.7 [1] überlegen ist. Um die Vergleichbarkeit gewährleisten zu können werden alle folgenden Untersuchungen am vollständigen Simulationsmodell aus Abschnitt 2.3.2 durchgeführt. Dies beinhaltet im Unterschied zum zeitkontinuierlichen Entwurfsmodell diskret und mit den Abtastfrequenzen

- Regelung:  $f_c = 400$  Hz
- ESC:  $f_{ESC} = 400$  Hz
- Servos:  $f_s = 50$  Hz

arbeitende Subsysteme, die Stellgeschwindigkeitsbeschränkung der Steuerflächen gemäß Gleichung (2.74) sowie das Sensormodell aus Abschnitt 2.3.

### 4.1 Wahl der Reglerparameter

Sämtliche Parameter der in Kapitel 3 ausgelegten Regelung wurden empirisch bestimmt, die Regelung selbst in diskreter Form implementiert. Einige grundlegende Überlegungen diesbezüglich sind im folgenden Abschnitt ausgeführt.

#### 4.1.1 Orientierungsregelung

##### Winkelgeschwindigkeitsregelung

Geht man in einem ersten Schritt davon aus, dass die Rückführung gemäß Gleichung (3.34) exakt ist, also tatsächlich die gesamte Systemdynamik beinhaltet, so erhält man für das resultierende System einen einfachen Integrator mit der Übertragungsfunktion

$$G_p(s) = \frac{\omega(s)}{\alpha(s)} = \frac{1}{s}.$$

und der Winkelbeschleunigung  $\alpha = \dot{\omega}$  als neuem Eingang. Dies gilt natürlich für alle drei Komponenten des Winkelgeschwindigkeits- beziehungsweise Winkelbeschleunigungsvektors. Um die Notation einfach zu halten sind die folgenden Überlegungen in skalarer Form angeschrieben, lassen sich aber unmittelbar auf den mehrdimensionalen Fall übertragen. Mit dem PI-Regler aus Gleichung (3.35) in skalarer Form

$$G_{c,\omega}(s) = \frac{\alpha_c(s)}{\omega_e(s)} = \frac{K_P s + K_I}{s} \quad (4.1)$$

erhält man die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises

$$G_o(s) = G_p(s)G_{c,\omega}(s) = \frac{K_P s + K_I}{s^2} \quad (4.2)$$

sowie die Führungsübertragungsfunktion  $G_{\omega_t}(s)$  und Störungsübertragungsfunktion  $G_{\alpha_d}(s)$

$$G_{\omega_t}(s) = \frac{\omega(s)}{\omega_t(s)} = \frac{K_P s + K_I}{s^2 + K_P s + K_I} = \frac{2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (4.3)$$

$$G_{\alpha_d}(s) = \frac{\omega(s)}{\alpha_d(s)} = \frac{s}{s^2 + K_P s + K_I} = \frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (4.4)$$

die beide das charakteristische Polynom

$$P(s) = s^2 + K_P s + K_I = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2. \quad (4.5)$$

besitzen.  $G_{\alpha_d}(s)$  beschreibt das Übertragungsverhalten einer Beschleunigungsstörung und kann als Übertragungspfad eines verallgemeinerten Störmoments  $\alpha_d \propto \tau_d$  betrachtet werden. Aus Gleichung (4.4) wird unmittelbar die Notwendigkeit eines Integrators in der Regelung ersichtlich, denn durch das global differenzierende Verhalten können damit auch sprungförmige Störungen stationär unterdrückt werden. Dies ist wichtig, denn im Allgemeinen lassen sich weder die Steuerflächen perfekt trimmen, noch kann ein exakt mittig sitzender Massenmittelpunkt praktisch realisiert werden. Viele derartige Effekte resultieren in einem konstanten oder quasi-konstanten Störmoment.

Gleichung (4.5) liefert direkt einen Zusammenhang zwischen den Reglerparametern  $K_I$ ,  $K_P$  und den Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises. Im Grunde genommen ließen sich damit aus einem geforderten Dämpfungsmaß  $\zeta$  sowie einer geforderten ungedämpften Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  durch Koeffizientenvergleich die zugehörigen Reglerverstärkungen bestimmen. Praktisch hat das Betreiben von Polplatzierung zu keinen guten Ergebnissen geführt. Zum einen, da Stellgrößenbeschränkungen existieren, die in Kombination mit den erhaltenen großen Integratorverstärkungen, aber ohne geeignete Anti-Windup-Strategie zu problematischen Sättigungseffekten führen. Zum anderen, da der Effekt der Abtastung durch die Regelung gefolgt von der Unterabtastung der Servo-Ausgänge mit der niedrigen Frequenz  $f_s = 50$  Hz in dieser Betrachtung unberücksichtigt bleibt.

Geht man davon aus, dass sich die Regelung in Kombination mit den Servos effektiv wie eine mit der Abtastfrequenz  $f_s = f_c/8$  arbeitende Regelung verhält, so lässt sich eine Abschätzung für die maximale Bandbreite des geschlossenen Regelkreises angeben. In [19] wird für die Abtastfrequenz, welche nun durch die Frequenz der Servos  $f_s$  gegeben ist

$$f_s \geq 6f_{\text{MAX}} \quad (4.6)$$

mit der höchsten im Regelkreis vorkommende Frequenz  $f_{\text{MAX}}$  empfohlen. Je größer das Frequenzverhältnis  $f_s/f_{\text{MAX}}$ , desto eher kann die diskret implementierte Regelung als quasi kontinuierlich betrachtet werden. Die Reglerverstärkungen wurden nun empirisch und auf folgende Art und Weise bestimmt

1. Setzt man vorerst  $K_I = 0$  (reine P-Regelung), so erhält man für die Führungs- und Störübertragungsfunktion PT1-Verhalten mit der Grenzfrequenz  $K_P/2\pi$  und damit näherungsweise die Forderung

$$f_s \geq \frac{6K_P}{2\pi} \Leftrightarrow K_P \leq \frac{2\pi f_s}{6} \approx f_s = 50. \quad (4.7)$$

Die Verstärkung  $K_P$  wurde nun so lange erhöht, bis der störungsfreie, geschlossene Regelkreis das gewünschte Führungsverhalten aufweist, die Reglerverstärkung aber noch Gleichung (4.7) genügt.

2. In einem zweiten Schritt wurde  $K_I$  schrittweise solange erhöht bis das gewünschte Führungs- und Störverhalten unter Berücksichtigung der Stellgrößenbeschränkungen erreicht wurde.

Simulationen haben gezeigt, dass die Wahl  $K_P = 20$  und  $K_I = 30$  für alle drei rotatorischen Freiheitsgrade und unter Berücksichtigung der Stellgrößenbeschränkungen sowie der untersuchten Störfälle zu guten Ergebnissen führt. Damit erhält man ein überkritisch gedämpftes System

$$\zeta = \frac{K_P}{2\sqrt{K_I}} = 1.83 \quad \omega_0 = \sqrt{K_I} = 5.48$$

mit den

$$\begin{array}{ll} p_0 = -1.6, & p_1 = -18.4 & \text{Polstellen} \\ q_0 = -1.5 & & \text{Nullstelle} \end{array}$$

der Führungsübertragungsfunktion  $G_{\omega_t}(s)$ . Bedingt durch die Quasi-Kürzung von  $p_0$  und  $q_0$  kann der Pol  $p_1 = -18.4$  als dominant betrachtet werden und der geschlossene Regelkreis besitzt effektiv eine Zeitkonstante von  $T \approx 0.05$  s.

## Winkelregelung

In der Literatur wird nun oftmals gefordert, dass der unterlagerte Regelkreis um etwa eine Größenordnung schneller sein sollte als der äußere. Damit kann die innere Regelschleife näherungsweise als Durchschaltung betrachtet werden. Gemäß dieser Forderung erhält man eine maximale Reglerverstärkung der Winkelregelung von

$$K_q \leq \frac{-p_1}{10} \approx 2. \quad (4.8)$$

Praktisch wurde auch hier wieder ein empirischer Zugang gewählt, und die Reglerverstärkung  $K_q$  entsprechend experimentell eingestellt. Dabei hat sich herausgestellt, dass zum einen weitaus größere als in Gleichung (4.8) geforderte Verstärkungen gewählt werden können und zum anderen eine unterschiedliche Gewichtung der drei Freiheitsgrade für den Single-Copter sinnvoll ist.

Man betrachte dazu zuerst Abbildung 4.1, in welcher das Verhalten des geschlossenen Regelkreises für verschiedene Reglerverstärkungen  $K_q$  und eine sprungförmige Referenz im Rollwinkel  $\varphi_t(t) = 10 \frac{\pi}{180} \sigma(t)$  dargestellt ist.

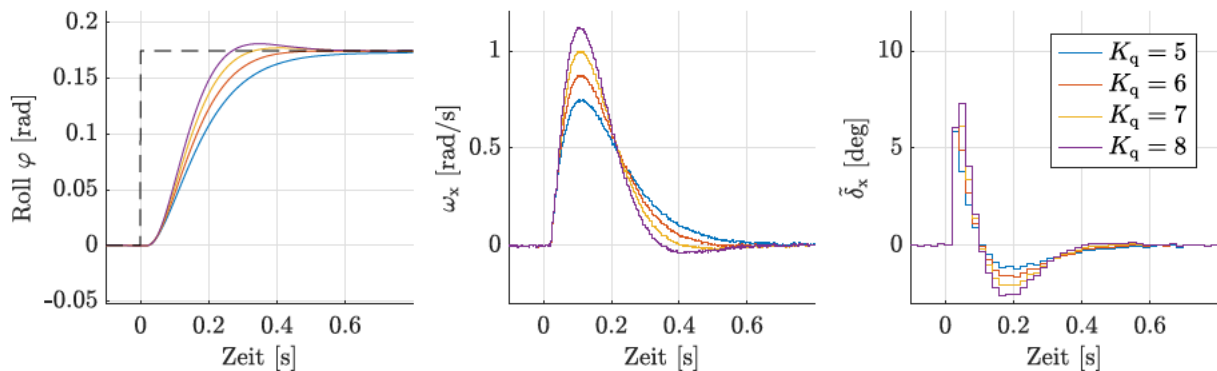


Abbildung 4.1: Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises: Rollwinkel  $\varphi$

Für  $K_q > 6$  tritt unerwünschtes Überschwingen auf, für  $K_q < 6$  wird der geschlossene Regelkreis langsamer als nötig. Da das System in guter Näherung symmetrisch im Roll- und Nickverhalten ist, wurden die Regler-Verstärkungen  $K_\varphi = K_\theta = 6$  gewählt.

Analoges Prozedere kann auch für einen Referenzgrößensprung im Gierwinkel  $\psi_t$  durchgeführt werden. Man beachte die unterschiedliche Skalierung der Zeitachse der Abbildungen 4.1 und 4.2. In der rechten Spalte der Abbildung 4.2 wurde die dargestellte Stellgröße  $\Delta\tilde{\delta}_z = \tilde{\delta}_z - \tilde{\delta}_{z,0}$  bereits um den Wert der Ruhelage korrigiert.

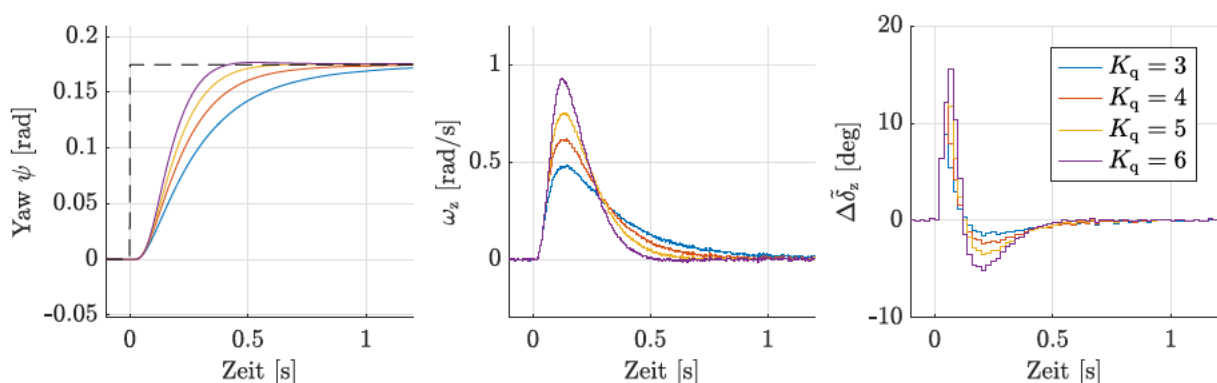


Abbildung 4.2: Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises: Gierwinkel  $\psi$

Da der effektive Hebelarm  $4d_r$  des virtuellen Einganges  $\tilde{\delta}_z$  deutlich kleiner ist als jener der Roll-  $2d_{13}$  beziehungsweise Nick-Steuerflächengruppen  $2d_{24}$ , ist es zweckmäßig, die Reglerverstärkung für die betrachtete Achse geringer zu wählen. Hinzu kommt die Tatsache, dass der Gierwinkel für die Stabilität des Systems irrelevant ist und somit als der unwichtigste Freiheitsgrad des Single-Copters angesehen werden kann. Praktisch hat sich ein Verhältnis von 2/3 und damit eine Verstärkung von  $K_\psi = 4$  als gut geeignet herausgestellt.

Regelung	Parameter	Wert	Einheit
Orientierungsregelung	$K_\varphi$	6	rads <sup>-1</sup> /rad
	$K_\theta$	6	rads <sup>-1</sup> /rad
	$K_\psi$	4	rads <sup>-1</sup> /rad
	$\mathbf{K}_P$	20 <b>E</b>	rads <sup>-2</sup> /rads <sup>-1</sup>
	$\mathbf{K}_I$	30 <b>E</b>	rads <sup>-2</sup> /rad
Höhenregelung	$K_{P,z}$	7	ms <sup>-2</sup> /m
	$K_{I,z}$	4	ms <sup>-2</sup> /ms
	$K_{D,z}$	5	ms <sup>-2</sup> /ms <sup>-1</sup>
	$T_{D,z}$	0.05	s

Tabelle 4.1: Verwendete Reglerparameter

### 4.1.2 Höhenregelung

Die angeführten Überlegungen lassen sich in ähnlicher Form auf die Höhenregelung übertragen, deren Parameter ebenfalls empirisch bestimmt wurden. Im Unterschied zur Orientierungsregelung kommt zur Regelung des Fehlersystem hierbei jedoch eine PID-Regelung zum Einsatz. Dabei wurde der D-Anteil des idealen PID-Regler aus Gleichung (3.44) um ein Realisierungsglied mit der Zeitkonstante  $T_{D,z}$  erweitert. Die verwendeten Reglerverstärkungen sind in Tabelle 4.1 gelistet.

#### Diskrete Implementierung

Im Sinne einer einfachen Implementierbarkeit wurde zur Approximation des Integral die Rechteckssumme (explizites Euler-Verfahren) für den Differentialquotient des D-Gliedes der Rückwärtsdifferenzenquotient verwendet. Das diskrete Stellgesetz erhält man unmittelbar durch Substitution der komplexen Frequenzvariable

$$\frac{1}{s} = \frac{T_c}{z-1} \quad (4.9)$$

in die Winkelgeschwindigkeitsregelung (3.35) .

$$G_{c,\omega}(z) = K_P + K_I T_c \frac{1}{z-1} \quad (4.10)$$

und Höhenregelung (3.44)

$$G_{z,c}(z) = K_{P,z} + K_{I,z} T_c \frac{1}{z-1} + K_{D,z} \frac{1}{T_{D,z} + \frac{T_c}{z-1}} \quad (4.11)$$

Darin bezeichnet  $T_c = 1/f_c$  die Abtastzeit des Reglers. Sämtliche Reglerparameter sind in Tabelle 4.1 gelistet.



## 4.2 Simulationsstudien

Um in einem ersten Schritt einerseits das Verhalten der Orientierungsregelung im Ein- und Zwei-Freiheitsgrad-Modus - also ohne und mit kinematischen Vorsteueranteilen  $\omega_{ff}$ ,  $\alpha_{ff}$  und andererseits das Verhalten des Systems für beliebige, stark von der Ruhelage  $\mathbf{q}_I$  abweichende Orientierungen  $\mathbf{q}$  zu zeigen, wurde ein Manöver bestehend aus drei sequentiellen Salti, jeweils bezüglich einer der körperfesten Achsen durchgeführt.

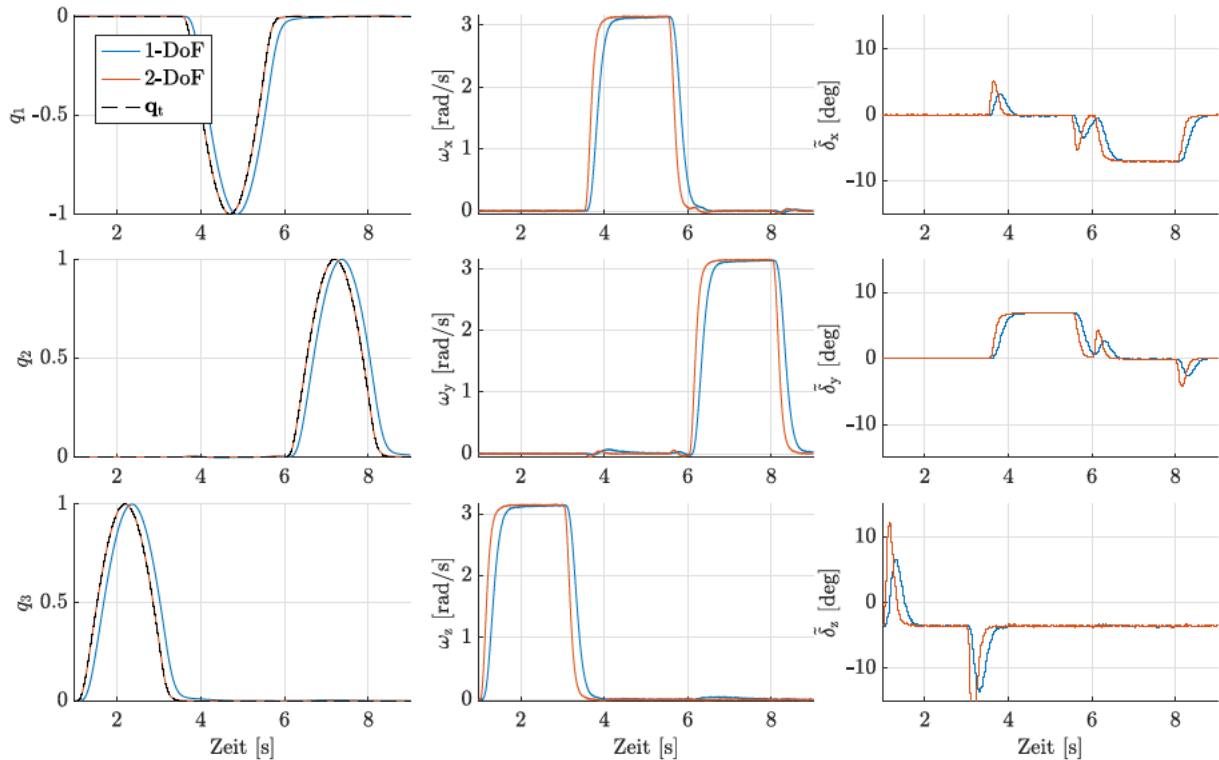


Abbildung 4.3: Orientierungsregelung: Salti mit 1-DoF- und 2-DoF-Regelung

Wie man in Abbildung 4.3 erkennen kann stabilisiert die vorgeschlagene Regelung das System entlang der geforderten, sehr dynamischen Trajektorie  $\mathbf{q}_t(t)$ . Während des Manövers wurde die Rotordrehzahl auf den Wert der Ruhelage  $\omega_r = \omega_{r,0}$  gesetzt, das System dementsprechend ohne Höhenregelung betrieben. Offensichtlich kann dabei die Höhe  $p_z$  nicht gehalten werden, auch dann nicht, wenn die Höhenregelung aktiviert gewesen wäre, da die Bedingung für den maximalen Neigungswinkel (3.49) mehrmals und über große Zeiträume verletzt wird.

Nimmt man nun die Höhe  $p_z$  als vierten Ausgang hinzu, so ist das System gemäß Definition A.2 flach und sämtliche Systemgrößen können wie in Abschnitt 3.2.3 gezeigt vorberechnet werden. Für die notwendige Glättung der Orientierungsreferenz wurde dazu ein Sollwertfilter vierter Ordnung  $N_{sf,\phi} = 4$  mit einer Zeitkonstante  $T_{sf,\phi} = 0.025$ , für die Höhe ebenfalls ein Filter vierter Ordnung mit  $T_{sf,p} = 0.1$  verwendet.

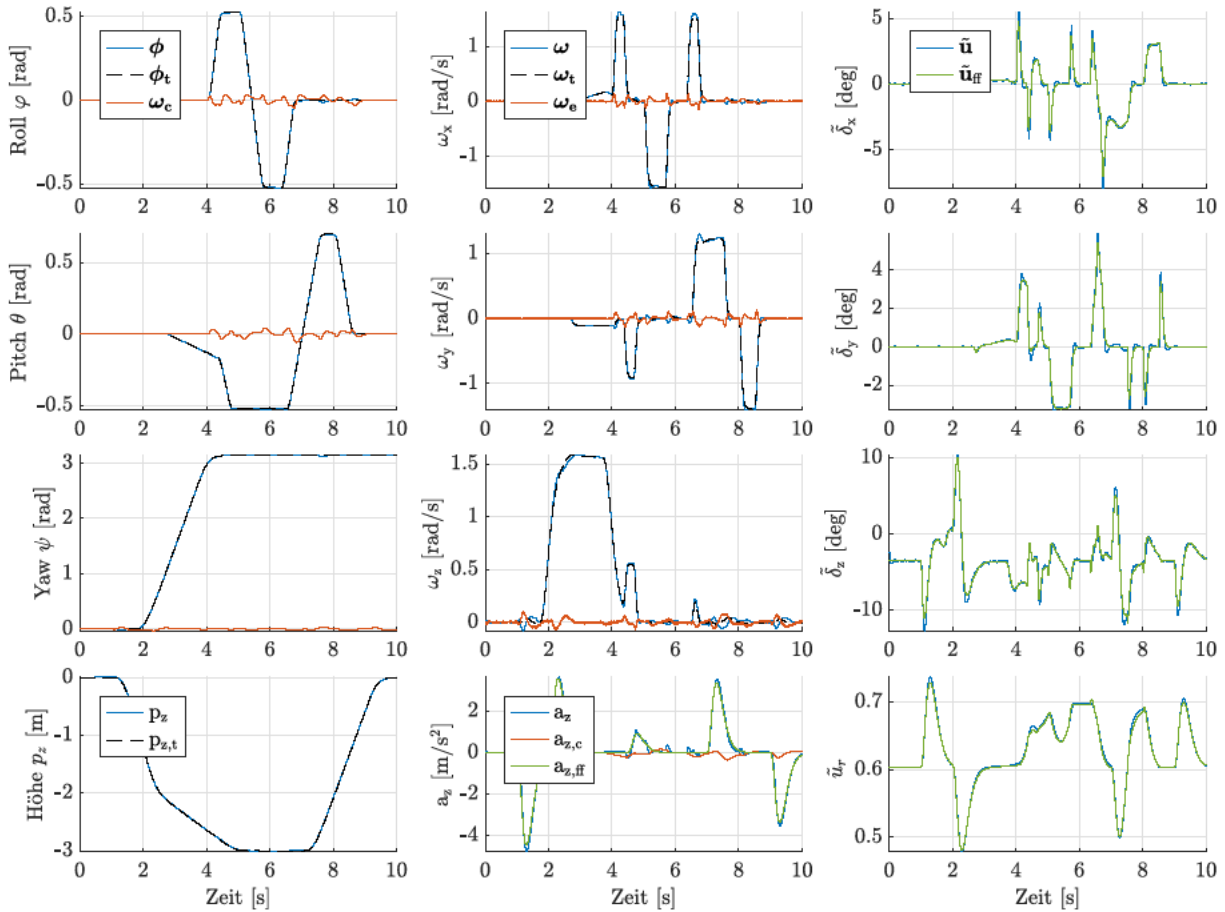


Abbildung 4.4: Orientierungs- und Höhenregelung

Abbildung 4.4 zeigt eine Testtrajektorie sowie das Verhalten des geschlossenen Regelkreises für die gesamte in Kapitel 3 ausgelegte Zwei-Freiheitsgrad-Regelung. Die ersten drei Zeilen sind dabei den rotatorischen, die vierte und letzte Zeile den translatorischen Systemgrößen gewidmet.

In der linken Spalte der ersten drei Zeilen ist die Soll-Orientierung  $\phi_t$ , die Ist-Orientierung  $\phi$  sowie der Ausgang des quaternionbasierten (Lage-)Winkelreglers  $\omega_c$ , also der mit den Verstärkungen aus Tabelle 4.1 skalierte Reglerfehler, dargestellt. Die mittlere Spalte zeigt die Größen der darauf folgenden unterlagerten Winkelgeschwindigkeitsregelung. Diese sind die Soll-Winkelgeschwindigkeit  $\omega_t = \omega_{ff} + \omega_c$ , die tatsächlich erreichte Ist-Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  sowie den Reglerfehler  $\omega_e = \omega_t - \omega$ .

In der letzten Zeile ist auf der linken Seite die Soll-  $p_{z,t}$  und Ist-Höhe  $p_z$ , in der mittleren Spalte der Vorsteuerungs-  $a_{z,ff}$  und Regleranteil  $a_{z,c}$  sowie die tatsächlich realisierte Beschleunigung  $a_z$  dargestellt. In der rechten Spalte von Abbildung 4.4 sind schließlich die tatsächlich realisierten Systemeingänge  $\tilde{u}$  abgebildet.

In allen Freiheitsgraden wird der größte Anteil der Sollwertfolge offensichtlich durch die kinematische Vorsteuerung bewerkstelligt. Sämtliche Kreuzkopplungen werden erfolgreich unterdrückt.

Um die Güte des der exakten Feedforwardlinearisierung zu Grunde gelegten Modells aus Abschnitt 3.2.3 zu untersuchen sind in der rechten Spalte zusätzlich die vorberechneten Eingangsgrößen  $\tilde{u}_{ff}$  dargestellt. Man erkennt, dass die a priori berechneten  $\tilde{u}_{ff}$  sehr nahe an den tatsächlich im geschlossenen Regelkreis realisierten Stellgrößen  $\tilde{u}$  liegen. Dies ist insofern bemerkenswert, als dass dem Entwurfsmodell (3.18) einige Vereinfachungen zu Grunde gelegt wurden, zudem sämtliche Diskretisierungseffekte - beispielsweise die langsam arbeitenden Servos - vernachlässigt wurden. Offensichtlich reicht das Modell dennoch aus, um schon vor dem Flug Aussagen über die Realisierbarkeit einer bestimmten Trajektorie machen zu können.

## Vergleich mit ArduCopter

Es bleibt zu klären wie die entworfene Regelung im Vergleich mit jener aus ARDUOPTER 4.0.7 [1] abschneidet. Dieser Vergleich gestaltet sich insofern schwierig, als dass nicht die Fernsteuerungssignale direkt, sondern die mit dem Sollwertfilter geglättete Referenz die Führungsgröße der Regelung darstellt (siehe Abbildung 3.2). Aufgrund der unterschiedlichen Struktur und Ordnung des Filters der implementierten Regelung und jenem aus ARDUOPTER sind diese Größen im Allgemeinen nicht gleich. Um dennoch zu zeigen, dass die vorgeschlagene Regelung das gesteckte Ziel der Führungsgrößenentkoppelung besser erreicht, wurden zwei Zugänge gewählt:

- Betreiben der Regelung im 1-Freiheitsgrad-Modus (1-DoF) und ohne Sollwertfilter
- Wahl der Filterordnung  $N_{sf,\phi}$  und Zeitkonstante  $T_{sf,\phi}$  so, dass die Sollgrößen möglichst ähnlich zu jenen aus ARDUOPTER sind

Im Fall (a) wird also auf eine Filterung in beiden Architekturen verzichtet und die Vorsteuerungsanteile  $\omega_{ff}$ ,  $\alpha_{ff}$  dementsprechend genullt. Die Regelungen wird somit, wie schon bei der ersten Testtrajektorie aus Abbildung 4.3, im Ein-Freiheitsgrad-Modus und mit deaktivierter Höhenregelung bei  $\omega_r = \omega_{r,0}$  betrieben. In Abbildung 4.5 ist nun das Verhalten des geschlossenen Regelkreises für Referenzsprünge im Roll- und Nickwinkel der Form  $\phi_t(t) = 45 \frac{\pi}{180} \sigma(t)$  dargestellt.

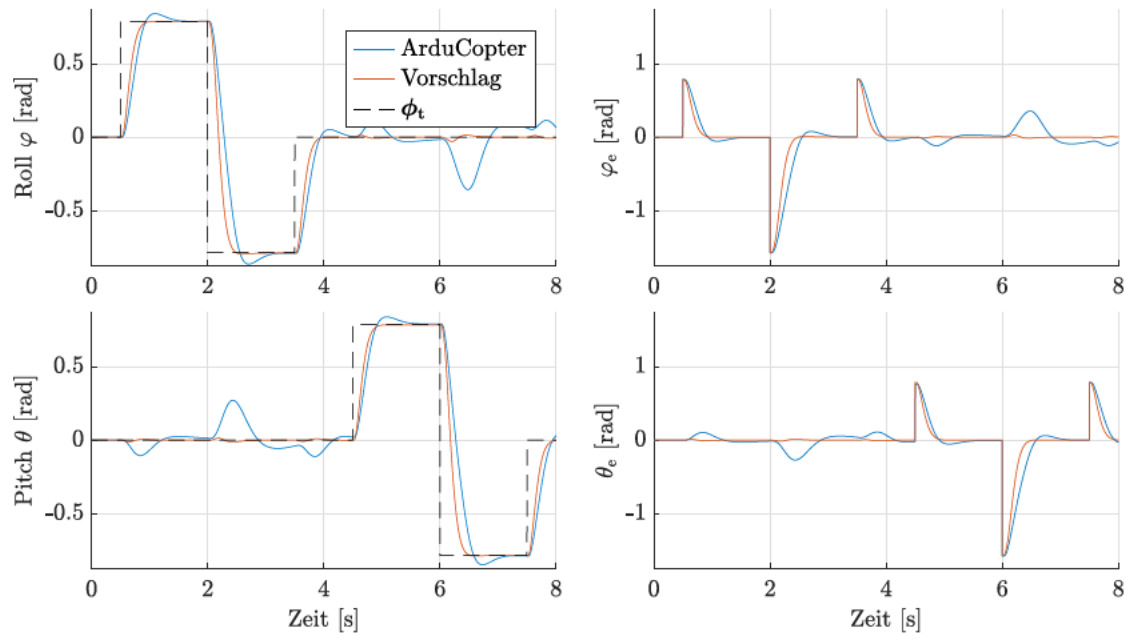


Abbildung 4.5: Vergleich mit ARDUOPTER: Entkopplung der Roll- und Nickdynamik (1-DoF Regelung)

Man erkennt unmittelbar, dass die vorgeschlagene Regelung die beiden Freiheitsgrade trotz der schnelleren Dynamik besser als die Vergleichsregelung aus ARDUOPTER entkoppelt. Für den Referenzsprung im Rollwinkel  $\varphi$  bei Sekunde  $t = 2$  ergibt sich für das mit ARDUOPTER geregelte System für den Zeitraum  $t^* \in [2, 3]$  ein maximaler Fehler der orthogonalen Nickachse von ungefähr  $\max |\theta_e(t^*)| = 15.5^\circ$ . Für die entworfene Regelung fällt dieser Fehler um mehr als eine Größenordnung geringer aus. Bedingt durch die Symmetrie des Aufbaus lässt sich dasselbe Verhalten bei Sekunde  $t = 6$  im Rollwinkel beobachten. Im Rahmen des Vergleiches (b) wird der Sollwert-Filter aktiviert und wie schon zuvor  $T_{sf,\phi} = 0.025$  und  $N_{sf,\phi} = 4$  gesetzt.

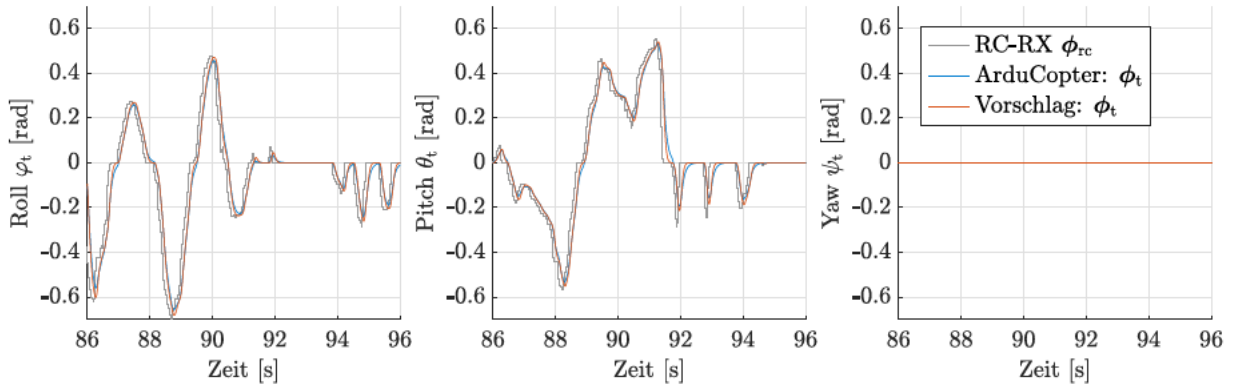


Abbildung 4.6: Vergleich mit ARDUOPTER: Sollwertfilter

Abbildung 4.6 zeigt die empfangenen Fernsteuersignale  $\phi_{rc}$ , die gefilterte Referenz des in ARDU-COPTER implementierten Sollwertfilters sowie jene der eigenen Implementation. Man erkennt, dass die Führungsgrößen der folgenden Orientierungsregelung für beide Architekturen sehr ähnlich sind.

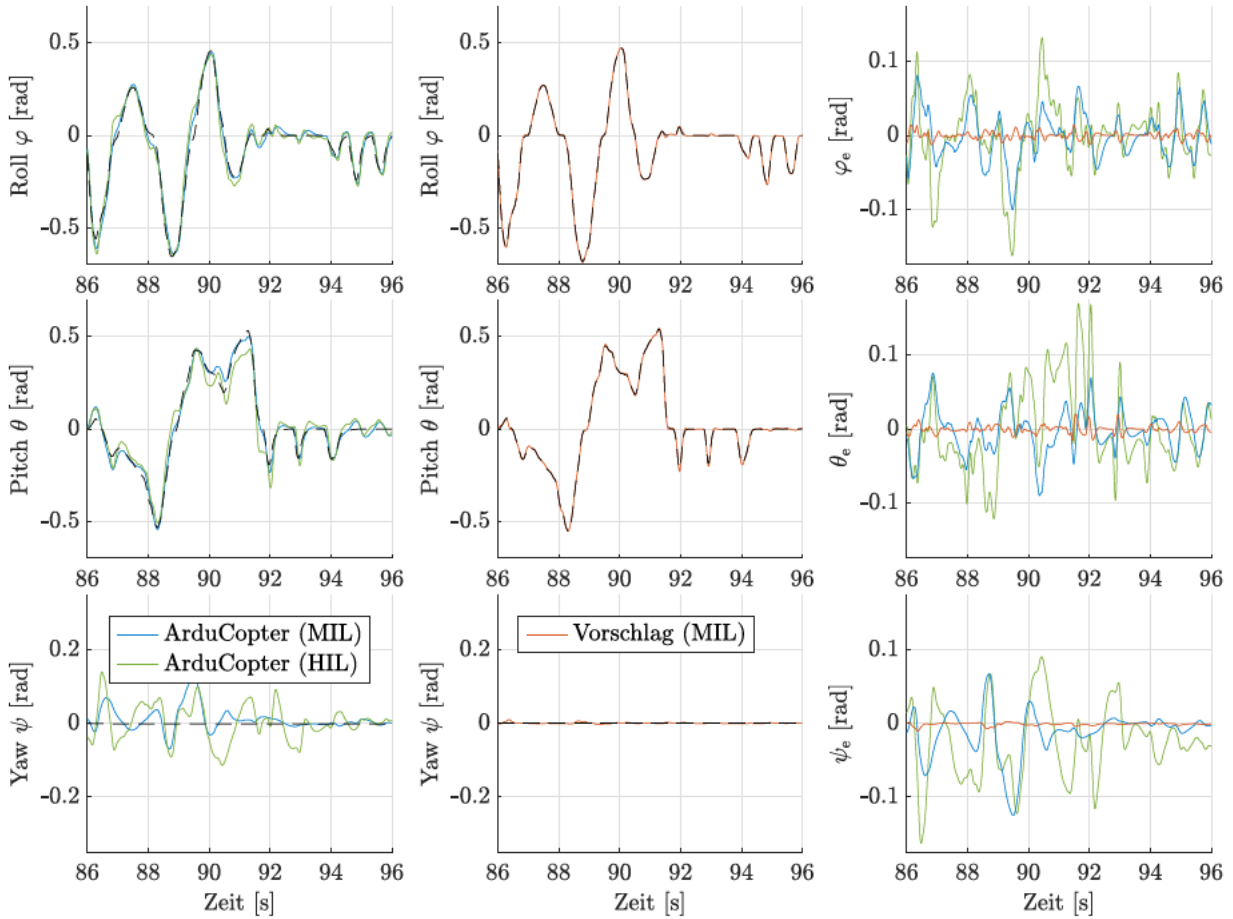


Abbildung 4.7: Vergleich mit ARDUOPTER: Reglerperformanz

Verwendet man nun die geglätteten Referenzsignale als Sollwerte der Regelung, so erhält man das in Abbildung 4.7 dargestellte Verhalten. Darin ist in der linken Spalte das Verhalten des geschlossenen Regelkreises für die MIL-Simulation mit der Regelung aus ARDUOPTER blau sowie für einen Flugversuch an der echten Hardware (HIL) grün dargestellt. Die mittlere Spalte zeigt das simulierte Verhalten der entworfenen Regelung, während in der rechten Spalte schließlich der Regelfehler in den RPY-Winkeln für die drei Fälle abgebildet ist.

Es lässt sich erkennen, dass die ARDUOPTER-Implementierung das reale System (HIL) selbst für große Referenzgrößen stabilisiert. Die Simulationsergebnisse zeigen aber deutlich, dass die in dieser Arbeit

Regelung	$\varphi_{e,RMS}$ [rad]	$\theta_{e,RMS}$ [rad]	$\psi_{e,RMS}$ [rad]
ARDUCOPTER (HIL)	4.84e-2	5.69e-2	5.60e-2
ARDUCOPTER (MIL)	3.18e-2	3.05e-2	3.37e-2
Vorschlag (MIL)	4.69e-3	5.26e-3	2.08e-3

Tabelle 4.2: Vergleich mit ARDUOPTER: Regelfehler

vorgeschlagene Orientierungsregelung trotz des dynamischeren Sollwertes günstigeres Führungsverhalten als die Vergleichsregelung aus ARDUOPTER aufweist und das gesteckte Ziel der Entkopplung besser erreicht. In Tabelle 4.2 sind die Effektivwerte der Regelfehler für die beiden Regelungen gelistet. Verglichen mit ARDUOPTER fällt der quadratische Mittelwert des Regelfehlers für die betrachtete Trajektorie und die vorgeschlagene Regelung um ungefähr eine Größenordnung kleiner aus.

### 4.2.1 Sensitivitätsanalyse

Im folgenden Abschnitt soll die Robustheit der vorgeschlagenen Regelung an einigen relevanten Aspekten gezeigt werden. Dazu wurde im Rahmen von Simulationen das Verhalten des geschlossenen Regelkreises in Bezug auf Variationen in den Systemparametern, allgemeine externe Störungen, Störungen in den Systemeingängen sowie Messfehler untersucht. Eine vollständige Abhandlung sämtlicher Störfälle würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, weshalb in weiterer Folge nur die wichtigsten Ergebnisse gelistet sind. Alle anderen untersuchten Fälle haben sich als unkritisch herausgestellt.

#### Parametervariationen

Mit den Zusammenhängen aus Kapitel 2 ist bereits gezeigt, welche Parameter sich in welcher Art und Weise auf die Dynamik der Regelstrecke auswirken. In Kapitel 3 wurde dies für einen systematischen, modellbasierten Regelungs- und Vorsteuerungsentwurf genutzt.

Betrachtet man beispielsweise das Stellgesetz der Winkelgeschwindigkeitsregelung (3.34), so wird klar, dass sich die Entkopplungsmatrix im Grunde genommen in eine konstante Matrix  $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{I}/C_L$  sowie eine Skalierung mit dem Reziprokwert der quadratischen Rotorwinkelgeschwindigkeit zerlegen lässt. Da die fiktiven Zentrifugalkräfte  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$  für ähnliche Einträge in  $\mathbf{I}$  und moderate Amplituden in der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  vernachlässigbar sind, kann dieser Beitrag aus dem Rückführterm  $\boldsymbol{\Gamma}$  gestrichen werden. Änderungen in  $\mathbf{I}$  resultieren somit, wie auch die effektiven Hebelarme  $\mathbf{D}$ , ausschließlich in einer Skalierung des Stelleinganges. Nun kann das Stellgesetz (3.34) ja gerade als Inversion der Systemdynamik interpretiert werden, woraus folgt, dass eine Skalierung von  $\mathbf{D}$  oder  $\mathbf{I}$  im Allgemeinen zu ähnlichen Änderungen im Verhalten des geschlossenen Regelkreises führen werden. Da der Trägheitstensor  $\mathbf{I}$  den interessanteren und üblicherweise schwieriger zu bestimmenden Parameter darstellt, wurde dieser für die nachstehende Untersuchung herangezogen.

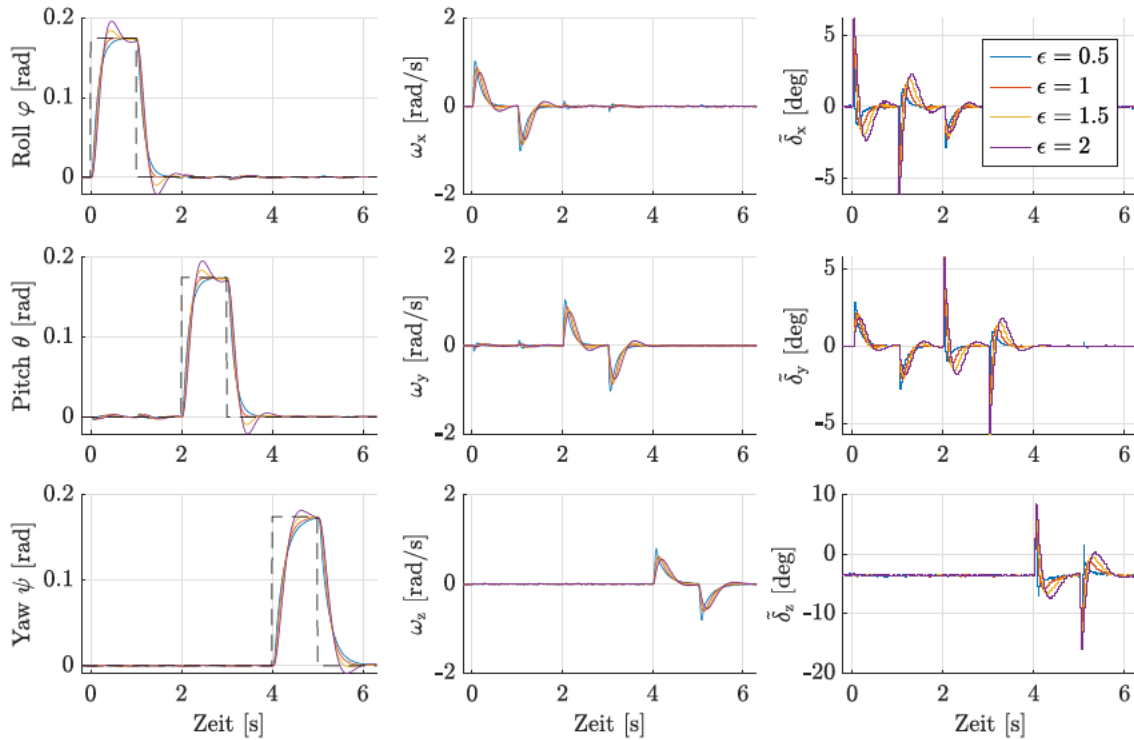


Abbildung 4.8: Systemdynamik für Variationen im Trägheitstensor  $\epsilon \mathbf{I}$

Abbildung 4.8 zeigt Sprungantworten in den RPY-Winkeln für mit einem Parameter  $\epsilon$  skalierte Trägheitstensoren  $\mathbf{I}$ . Die Variation des Parameters betrifft dabei nur das Streckenmodell, während der Regelung stets der Nominalwert  $\epsilon = 1$  zu Grunde gelegt wurde. Man erkennt, dass das Sollwertfolge für größere Modellfehler zwar schlechter wird, für den gesamten betrachteten Bereich  $\epsilon \in [0.5, 2]$  aber befriedigend ist. Die Höhe  $p_z$  hat sich dabei als insignifikant herausgestellt, weshalb auf eine Darstellung derselben in Abbildung 4.8 verzichtet wurde.

Ein weiterer Parameter der mit großen Unsicherheiten verbunden ist, ist das Massenträgheitsmoment des Rotors  $I_r$ , das im Rahmen dieser Arbeit dem CAD-Modell entnommen wurde. Betrachtet man wieder die angeschriebenen Systemgleichungen, so lässt sich erkennen, dass zum einen das Kreiselmoment  $\tau_{\text{gyr}}$  und zum anderen der Momentenbeitrag zufolge der Rotorträgheit  $\tau_r$  linear von diesem Parameter abhängen. Es ist also eine Veränderung in der Kreuzkopplung zwischen der Roll- und Nickachse, sowie der Gier-Höhen-Dynamik zu erwarten.

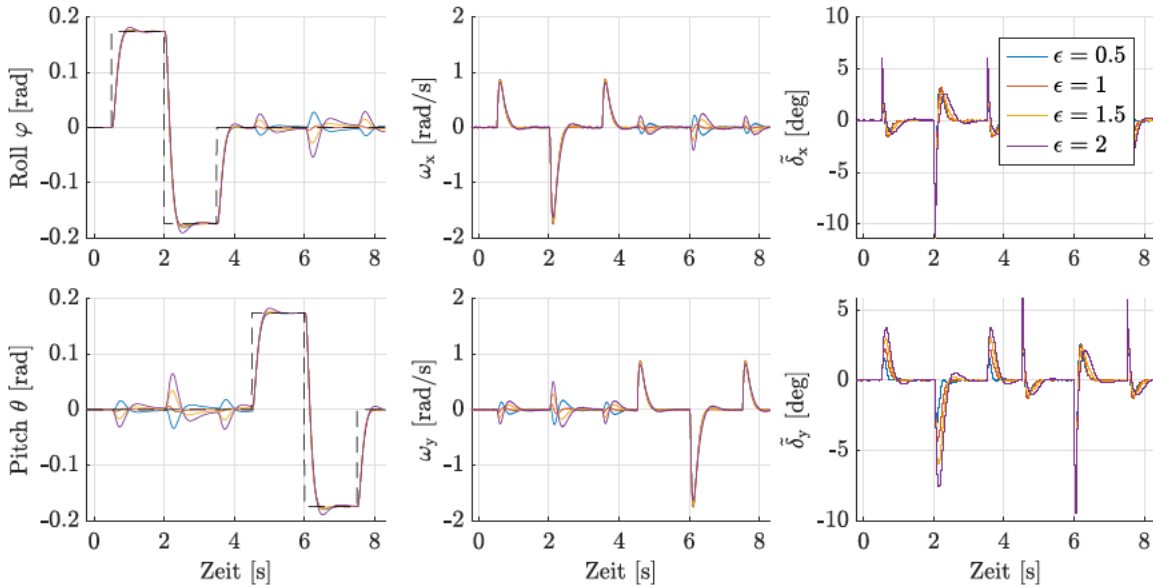


Abbildung 4.9: Roll- und Nickdynamik für verschiedene Rotor-Massenträgheitsmomente  $\epsilon I_r$

In Abbildung 4.9 sind Sprungantworten im Roll-  $\varphi$  und Nickwinkel  $\theta$  für verschiedene mit einem Parameter  $\epsilon$  skalierte Massenträgheitsmomente  $I_r$  dargestellt. Man erkennt, dass für  $\epsilon \in [0.5, 1.5]$  das Führungsverhalten ähnlich ist, die Kreuzkopplung zwischen den beiden Freiheitsgraden mit steigendem Modellfehler jedoch zunimmt. Bei  $\epsilon = 2$ , also einer Verdoppelung des Massenträgheitsmomentes  $I_r$ , tritt leichtes Überschwingen auf, und auch die Kopplungseffekte zwischen den beiden Freiheitsgraden nehmen weiter zu. Da die Entkoppelung, allen voran der Roll- und Nickdynamik ein wesentliches Ziel der Flugregelung ist, sollte der exakten Bestimmung von  $I_r$  somit besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden.

Betrachtet man den Momentenbeitrag

$$\tau_r = I_r \dot{\omega}_r = \frac{I_r}{T_r} (-\omega_r + K_r \tilde{u}_r)$$

etwas genauer, so erkennt man, dass das Moment  $\tau_r$  und damit auch die benötigte Stellgröße  $\tilde{\delta}_z$  mit dem Verhältnis  $I_r/T_r$  skalieren. Praktisch bringt eine Änderung von  $I_r$  im Allgemeinen auch eine Änderung der Zeitkonstante  $T_r$  des Rotor-Subsystems mit sich. Da zur Modellierung ein Blackbox-Ansatz verwendet wurde, scheint  $I_r$  im identifizierten Modell jedoch nicht explizit auf, weshalb eine systematische Untersuchung nur schwierig möglich ist. Wichtig ist zudem, dass in Gleichung direkt der Stelleingang des Antriebsstrangs  $\tilde{u}_r$  aufscheint. Es gilt also zu beachten, dass  $\tilde{u}_r$  den (skalierten) Beschränkungen von  $\tilde{\delta}_z$  genügt<sup>1</sup>. Entscheidend ist demnach allen voran der Ruck  $\dot{a}_z$ , da es für eine Änderung der Beschleunigung einer Änderung der Rotordrehzahl bedarf. Für einen expliziten Zusammenhang sei auf Abschnitt 3.2.3 verwiesen. Wie man der nachfolgenden Abbildung 4.10 entnehmen kann, ist das System sogar gegenüber sprungförmigen Änderungen moderater Amplitude in  $\tilde{u}_r$  robust, wenngleich sehr große Amplituden in der Stellgröße  $\tilde{\delta}_z$  zur Störgrößenkompensation benötigt werden.

### Störungen

Bei der Wahl der Reglerparameter der Winkelgeschwindigkeitsregelung wurde argumentiert, dass bedingt durch den Integrator in der Regelung auch sprungförmige Störungen stationär unterdrückt werden können. Dieselbe Argumentationskette lässt sich auch direkt auf die Höhenregelung übertragen. Damit ist bereits eine große Klasse der möglichen äußeren Störungen abgehandelt. Als Beispiel sei an dieser Stelle eine Luftwiderstandskraft, und damit im Allgemeinen einhergehend ein Luftwiderstandsmoment bezüglich des Massenmittelpunktes wie sie im (stationären) Vorwärts-, Steig und Sinkflug auftritt, erwähnt. Eine andere wichtige Klasse der Störungen ist durch Perturbationen in den Stellgrößen gegeben. Bedingt durch Fertigungstoleranzen weisen die Steuerflächen beispielsweise Hysterese in ihrem Verhalten auf.

<sup>1</sup>Stellgrößen- und Stellgeschwindigkeitsbeschränkung

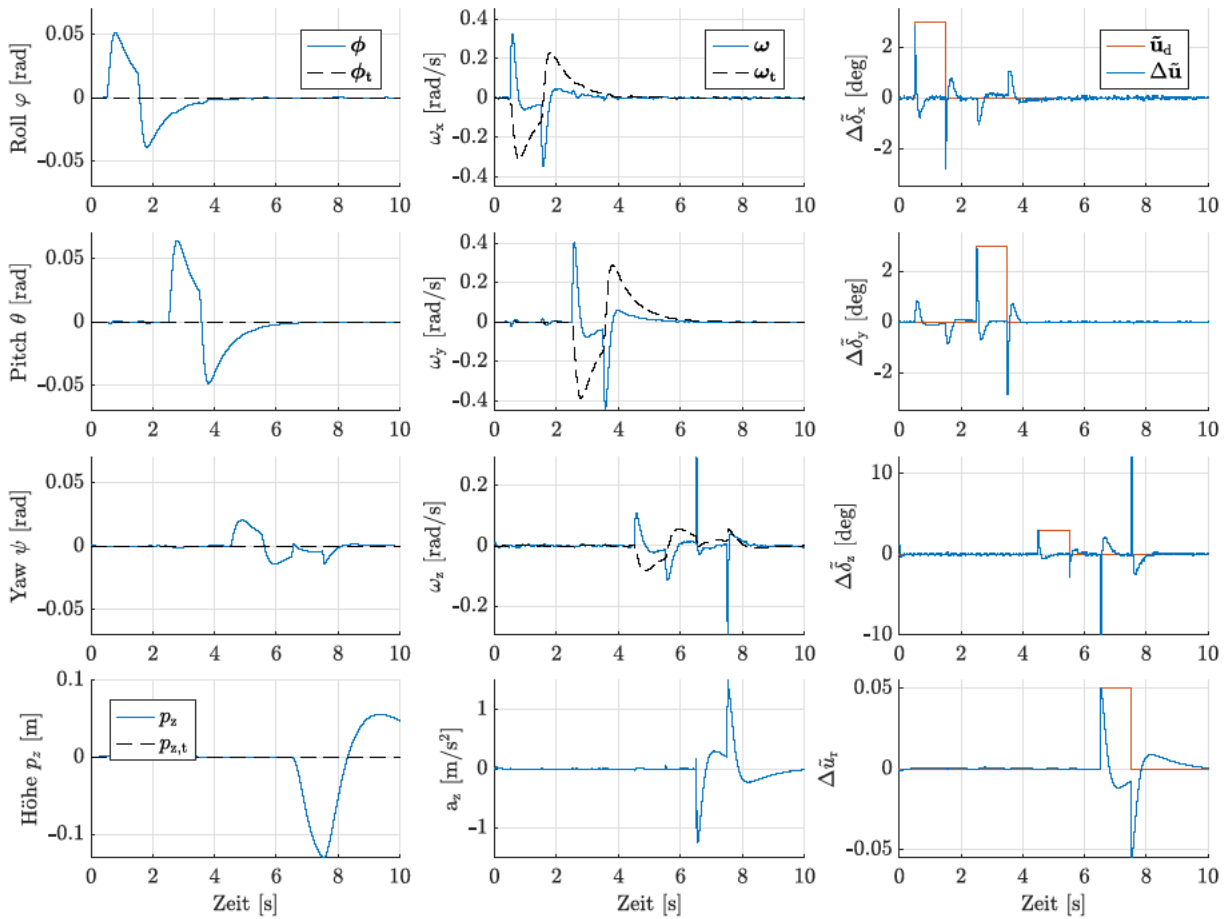


Abbildung 4.10: Eingangsstörungen

Um diese und weitere Effekte zu quantifizieren und simulativ zu untersuchen wurden sprungförmige Störungen an den Systemeingang angelegt. Einer dieser Testläufe ist in Abbildung 4.10 dargestellt. Dabei wurden in den Eingängen der Steuerflächen Sprünge mit einer Amplitude von  $3^\circ$ , im Eingang des Antriebsstrangs Sprünge mit einer Amplitude von 0.05 verwendet. Vergleicht man die Amplituden der Störsignale mit den in den Testtrajektorien 4.3 und 4.4 benötigten Stellgrößen, so wird klar, dass diese sehr groß ausfallen. In der linken Spalte sind die Störeingänge  $\mathbf{u}_d$  sowie die gesamte am Systemeingang angelegte Stellgröße bezüglich der Ruhelage  $\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_0$  dargestellt.  $\Delta \tilde{\mathbf{u}}$  setzt sich dementsprechend additiv aus einem Teil zufolge der Regelung und dem Störanteil  $\mathbf{u}_d$  zusammen. Man erkennt, dass selbst für große und dynamische Störungen der Fehler in den Führungsgrößen klein bleibt.

### Messfehler

Wie eingangs erwähnt wurde in sämtlichen hier gelisteten Ergebnissen das Sensor-Modell aus Abschnitt 2.3 verwendet. Dabei stehen die Grenzfrequenzen der Winkelgeschwindigkeits- und Beschleunigungstiefpassfilter als Freiheitsgrade zur Verfügung. Da die Beschleunigungen in der entworfenen Regelung nicht direkt als Messgrößen verwendet werden, beschränkt sich der einstellbare Parameter auf die Grenzfrequenz des Winkelgeschwindigkeitsfilters. Simulationen haben gezeigt, dass eine Reduktion der Grenzfrequenz auf 20 Hz mit den verwendeten Reglerparametern zu keiner signifikanten Veränderung im Systemverhalten führt.



## 4.3 Diskussion

Im Rahmen dieses Kapitels wurde ein einfaches Vorgehensmodell zur Bestimmung der Reglerparameter besprochen und auf die entworfene Regelung aus Kapitel 3 angewandt. Anschließend wurde durch Simulationen gezeigt, dass die vorgeschlagene Orientierungsregelung für beliebige Referenzgrößen und die gewählten Reglerparameter sowohl im Ein-Freiheitsgrad-Modus (ohne kinematische Vorsteuerung), als auch im Zwei-Freiheitsgrad-Modus in der Lage ist, das System zu stabilisieren und ausgezeichnetes Führungsverhalten aufweist. Der einschränkende Faktor - vor allem für sehr agile Flugmanöver - ist durch die mit  $f_s = 50$  Hz arbeitenden Modellbauservos gegeben. Die Abtastfrequenz stellt einen Freiheitsgrad im Entwurfsprozess dar und sollte in weiterführenden Arbeiten größer gewählt werden, um ausreichend Aktorbandbreite zur Verfügung zu stellen. Anschließend wurde die entworfene Regelung mit ARDUPILOT, eines der größten Open-Source-Drohnensoftwarepakete [6], verglichen. Simulationsstudien haben gezeigt, dass die entwickelte Regelung in beiden Modi (1-DoF, 2-DoF) und in sämtlichen Versuchen besser als jene aus ARDUCOPTER 4.0.7 abschneidet. Abschließend wurde die Robustheit der Regelung gegenüber Parameterunsicherheiten, Störungen in den Stellgrößen und einfachen Messfehlern untersucht.

# 5. Zusammenfassung und Ausblick

## 5.1 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde mit kostengünstigen, kommerziell erhältlichen Modellbauteilen ein schubvektorgesteuerter Single-Copter realisiert. Als Flugcomputer kommt dabei der RASPBERRY PI 4B mit dem NAVIO2 AUTOPILOT zum Einsatz, auf welchem bereits ARDUPILOT 4.0.7 vorinstalliert ist und für den gebauten Drohnentyp ohne weiteren Entwicklungsaufwand verwendet werden kann.

Basierend auf fundamentalen physikalischen Prinzipien wurde ein vereinfachtes Systemmodell für den Single-Copter hergeleitet, parametrisiert und validiert. Durch die Modellierung auf Komponentenebene und die daraus folgende modulare Modellstruktur wurde nicht nur die Systemdynamik, also die Relation der relevanten Systemgrößen zueinander herausgearbeitet, sondern auch das Fundament für eine mögliche Erweiterung auf eine beliebige Steuerflächenkonfiguration (Anzahl und Anordnung) gelegt sowie die Konsequenzen hinsichtlich des Systemverhaltens ersichtlich gemacht. Damit ist gezeigt, wie sich konstruktiven Entscheidungen auf das Systemverhalten auswirken und somit die erste der beiden Forschungsfragen beantwortet. Die Modellvalidierung hat sich aufgrund der Instabilität des unregulierten Systems als Herausforderung dargestellt und wurde durch zwei Zugänge bewerkstelligt: einerseits durch die Validierung des reinen Streckenmodells basierend auf direkt messbaren Größen und andererseits, indem die vorinstallierte Regelung ARDUROTOR 4.0.7 in MATLAB/SIMULINK implementiert und für eine Validierung im geschlossenen Regelkreis herangezogen wurde.

ARDUPILOT zählt zu den am meisten verwendeten Open-Source-Drohnensoftwarepaketen [6] und läuft auf über einer Million Drohnen [1], weshalb die darin implementierte Regelung ARDUROTOR 4.0.7 in weiterer Folge als Referenz für Vergleiche mit der in dieser Arbeit entworfenen Regelung herangezogen wurde. Praktisch hat sich der Single-Copter mit der vorinstallierten Regelung als gut steuerbar herausgestellt, wenn auch die Kreuzkopplung in der Roll- und Nickdynamik bei schnellen Bewegungen zu einer signifikanten Degradierung des Führungsverhaltens und damit aus Sicht des Piloten zu ungünstigen Flugeigenschaften führte. Basierend auf dieser Erkenntnis wurde beim Reglerentwurf besonderes Augenmerk auf die Entkopplung der Führungsgrößen gelegt. Bewerkstelligt wurde dies zum einen durch die exakte EA-Linearisierung auf Ebene der Winkelgeschwindigkeit, welche in Kombination mit der überlagerten Winkelregelung zu einem robusten, entkoppelten Führungsverhalten in der Orientierung führt und zum anderen durch eine Höhenregelung, die eine Neigungskompensation und statische Entzerrung des Schubkennfeldes mit einem PID-Regler kombiniert. Diese Regelung wurde in weiterer Folge um kinematische Vorsteuerungsanteile zu einer Zwei-Freiheitsgrad-Regelung kombiniert. Zudem wurde gezeigt, dass das System für den gewählten Ausgang flach ist und damit schon vor dem Flug eine Abschätzung für den Stellgrößenaufwand einer Referenztrajektorie angegeben werden kann. Mit dieser Entwurfssystematik ist nun gezeigt, wie sich das gewonnene Modellwissen für einen Reglerentwurf nutzen lässt. Zudem wird mit den Stellgesetzen (3.36) und (3.45) sowie den darauf folgenden Interpretationen direkt die zweite Leitfrage beantwortet.

Abschließend durchgeführte Simulationsstudien haben gezeigt, dass die entworfene Regelung das System auch für große Referenzgrößensprünge und unter Störeinfluss stabilisiert, die Führungsgrößen gut entkoppelt und in sämtlichen Versuchen besser als die Vergleichsregelung aus ARDUROTOR 4.0.7 abschneidet. Eine Implementation der vorgeschlagenen Regelung an der echten Hardware ist nicht Teil der Arbeit, kann aber auf Basis der durchgeführten Analysen in Folgearbeiten durchgeführt werden.

## 5.2 Ausblick

Abschließend seien an dieser Stelle noch einige Vorschläge zu weiteren Verbesserungen hinsichtlich der Konstruktion, Modellierung und Regelung eines schubvektorgesteuerten Single-Copters angeführt.

### Konstruktion, Aktorik und Sensorik

Allgemeine konstruktive Aspekte betreffend empfiehlt sich

1. Statorblätter innerhalb des Mantels beziehungsweise der Düse anzubringen und/oder eine zweite Steuerflächenebene einzuführen, um so das stationäre Giermoment  $\tau_{tq}(\omega_r, 0)$  zu kompensieren. Weitere Steuerflächen in einer vertikalen versetzten Ebene anzubringen, hätte unter der Voraussetzung, dass keine aerodynamische Kopplung zwischen den Flossen auftritt, den Vorteil das System schon auf mechanischer Ebene in den Stellgrößen zu entkoppeln.
2. durch eine direkte Verbindung zwischen Servos und Steuerflächen die Hysterese im Verhalten des Steuerflächenmechanismus zu minimieren. Gemäß den angeführten Ergebnissen ist es zudem sinnvoll, die Steuerflächen in einer Kreuzkonfiguration anzuordnen.
3. einen geeigneteren Impeller, welcher für geringe bis mittlere Strömungsgeschwindigkeiten optimiert ist, zu verwenden, um damit eine bessere Energieausbeute zu erzielen.
4. zwei in Serie geschaltete (2S) anstatt der vier seriell-parallel verschalteten (2S2P) Batterien zu verwenden.

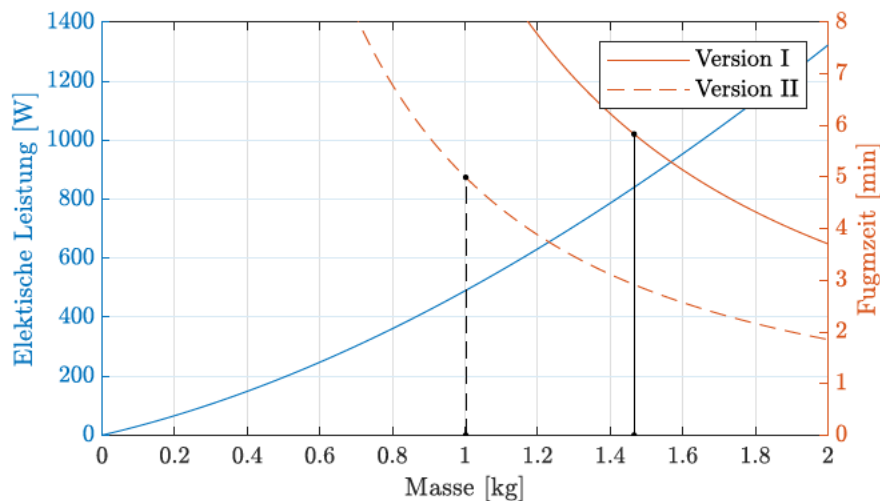


Abbildung 5.1: Leistung und Flugzeit des Single-Copters Version II

Abbildung 5.1 zeigt die auf durchgeführten Strom- und Spannungsmessungen basierte benötigte elektrische Leistung im Schwebeflug sowie die daraus resultierende Flugzeit in Abhängigkeit der Masse. Der Rechnung wurde zu Grunde gelegt, dass 80% der nominellen Batteriekapazität tatsächlich für den Flug nutzbar sind. Die Auswertung für eine verbesserte Version II sind in Tabelle 5.1 gelistet und dem realisierten Aufbau (Version I) gegenübergestellt. Halbieren der Batterieanzahl führt demnach zu einer Reduktion der Flugzeit von ungefähr 14%, erhöht das Schub-Gewichts-Verhältnis gleichzeitig aber um 50%. Zudem führt die geringere Anzahl der Batterien zu einer signifikanten Reduktion der Systemkomplexität (Verkabelungsaufwand, Montage, Komplexität der Düse etc.). Sekundäre Effekte wie diese wurden bei der Berechnung der Masse und Flugzeit nur zum Teil berücksichtigt. Es handelt sich also um eine konservative Abschätzung, womit der Vergleich weiter zu Gunsten von Version II ausfällt.

5. die Verwendung eines an den Verwendungszweck angepassten Flugcomputers. Beschränkt sich die Anwendung auf den manuell gesteuerten Flug oder wenig rechenintensive Regelungsaufgaben, so empfiehlt sich beispielsweise der Flugcomputer PIXHAWK 4 MINI oder PIXHAWK XRACER, die deutlich leichter als der verwendete ausfallen.

Version	I	II
Masse [kg]	1.5	1.0
nutzbare Kapazität [Ah]	3.68	1.84
Schub-Gewichtsverhältnis	1.6	2.4
nom. Flugzeit [min]	5.8	5.0

Tabelle 5.1: Spezifikationen des Single-Copters Version II

## Modellbildung und Regelung

Zur Modellierung des Antriebsstranges wurde ein Black-Box-Ansatz verwendet, wodurch nur zusammengefasste, nicht physikalische Parameter im Modell aufscheinen. Im Allgemeinen ist es sinnvoll, die Variation physikalischer Parameter und die Auswirkungen auf die Systemdynamik zu untersuchen, weshalb die White-Box-Modellierung des Antriebsstranges eine sinnvolle Möglichkeit weiterführender Arbeiten darstellt. Ebenfalls die Modellbildung und -validierung betreffend könnte man das rudimentär formulierte Optimierungsproblem (2.76) systematisieren und lösen, was eine weitere Verbesserung der Modellgüte erlauben würde. Das identifizierte Modell wurde mit dem Ziel des Schwebefluges erstellt, kann durch Hinzunahme weiterer aerodynamischer Effekte aber auf ein breites Spektrum an Flugzuständen erweitert werden [16, 17].

Die Regelung betreffend wäre ein naheliegender nächster Schritt der Entwurf einer (überlagerten) Positionsbeziehungsweise Geschwindigkeitsregelung. Zudem ließe sich die entworfene Regelung durch folgende Modifikation weiter verbessern:

- (i) Es stellt sich die Frage ob tatsächlich alle Terme in der Zustandsrückführung  $\Gamma$  aus Gleichung (3.34) benötigt werden, oder eine einfache Kompensation des Kreiselmoments  $\tau_{gyr}$  für ein gutes Führungsverhalten ausreichend ist.
- (ii) Zudem ließen sich die Stellgrößenbeschränkungen durch Verwendung einer passenden Anti-Windup-Strategie, von modellprädiktiven (MPC), oder iterativ lernenden (ILC) Regelkonzepten systematisch berücksichtigen.
- (iii) Eine weitere Möglichkeit bestünde darin, anstatt des statischen Motormixers einen dynamischen, wie beispielsweise in [9] gezeigt, zu verwenden.
- (iv) Man könnte auch basierend auf der Flachheit des Systems und den Zusammenhängen aus Abschnitt 3.2.3 versuchen ein beschränktes Optimierungsproblem zu formulieren und dies für eine exakte Feedforwardlinearisierung nutzen.

Hinsichtlich der Implementierbarkeit eigener Regelungsalgorithmen und Modifizierbarkeit der bestehenden Regelung hat sich ARDUPILOT als schlecht geeignet herausgestellt. Dies vor allem der stark verkoppelten und parallelisierten, aber schlecht dokumentierten Softwarearchitektur geschuldet. Dadurch sind Modifikationen am Code mit großem Aufwand verbunden. Als Alternative bietet sich das Projekt PX4 AUTOPILOT [7] an, welches bessere MATLAB/SIMULINK-Unterstützung bietet zudem einen gut dokumentierten, gepflegten und ebenso frei verfügbaren Quellcode besitzt.

# A. Definitionen, Herleitungen und Beweise

## A.1 Definitionen

### Definition A.1: Strukturelle Steuerbarkeit [19]

Eine Klasse  $\mathcal{S}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  von Systemen ist genau dann strukturell steuerbar, wenn

1.  $\mathcal{S}$  eingangsverbunden ist,
2. die Bedingung

$$\text{s-rang}([\bar{A} \quad \bar{B}]) = n \quad (\text{A.1})$$

erfüllt ist.

### Definition A.2: Differentielle Flachheit [11, 21]

Man betrachte ein System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (\text{A.2})$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und dem Eingang  $\mathbf{u}^T \in \mathbb{R}^m$ . Das System (A.2) wird als (differentiell) flach bezeichnet, wenn  $m$  Funktionen  $\mathbf{y}^T = [y_1 \quad \dots \quad y_m]$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(\mu)}) \quad (\text{A.3})$$

so existieren, dass

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \chi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\sigma)}) \quad (\text{A.4})$$

$$(\text{A.5})$$

gilt. In diesem Fall wird  $\mathbf{y}$  als flacher Ausgang bezeichnet. Sämtliche Systemgrößen (Zustands- und Eingangsgrößen) können somit über den flachen Ausgang und endlich viele Zeitableitungen eindeutig parametrisiert werden.

### Definition A.3: Exakte Eingangs-Ausgangs-Linearisierung [13, 21]

Man betrachte ein eingangsaffines System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) u_i \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $\mathbf{u}^T = [u_1 \ \dots \ u_m]$ , dem Ausgang  $\mathbf{y}^T = [y_1 \ \dots \ y_m]$  sowie den glatten Vektorfeldern  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$  und glatten Skalarfeldern  $h_i(\mathbf{x})$ . Differenziert man jeden der  $m$  Ausgänge so lange, bis ein oder mehrere Eingänge zum ersten Mal aufscheinen, so führt dies auf einen Ausdruck der Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \dots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

mit dem relativen Grad  $r_i$  des Ausganges  $y_i$ , der  $(m \times m)$ -Entkopplungsmatrix  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})$  sowie dem virtuellen Eingang  $\mathbf{v}^T = [v_1 \ \dots \ v_m]$ . Unter der Voraussetzung, dass die Entkopplungsmatrix  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  regulär ist erhält man damit das Stellgesetz

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}) (\mathbf{v} - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x})) \quad (\text{A.9})$$

welches das System in  $m$  entkoppelte, lineare Integratorketten der Längen  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  überführt.

## A.2 Beweise

### Zur EA-Linearisierbarkeit des Single-Copters

Für das AI-System (3.18) gilt

$$\begin{bmatrix} \ddot{p}_z \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \underbrace{\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}(\mathbf{x})} \begin{bmatrix} \tilde{u}_r \\ \tilde{\delta}_x \\ \tilde{\delta}_y \\ \tilde{\delta}_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

wobei \* Einträge ungleich Null kennzeichnet. Man erkennt unmittelbar, dass die Matrix  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  aufgrund ihrer Struktur und somit an einem beliebigen Punkt  $\mathbf{x}$  singularär ist. Einsetzen des Zusammenhangs

$$\ddot{\phi} = \tilde{\mathbf{R}}\dot{\omega} + \dot{\tilde{\mathbf{R}}}\omega \quad (\text{A.11})$$

führt auf einen Ausdruck der Form

$$\ddot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \ddot{p}_z \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{G} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}. \quad (\text{A.12})$$

Gemäß dem Determinantenmultiplikationssatz ist auch die Entkopplungsmatrix

$$\det(\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{G}) = \det(\tilde{\mathbf{R}}) \det(\mathbf{G}) = \det(\tilde{\mathbf{R}}) \cdot 0 = 0 \quad (\text{A.13})$$

singularär, das Regelgesetz (A.9) gemäß Definition A.3 für die Ausgangswahl  $\mathbf{y}^T = [p_z \ \phi]$  somit nicht realisierbar.

Offensichtlich ließe sich dieses Problem durch Wahl eines anderen Ausganges lösen. Streicht man beispielsweise das EA-Paar  $(\tilde{u}_r, p_z)$ , also die erste Zeile und Spalte der Matrix  $\mathbf{G}$ , so erhält man eine reguläre Entkopplungsmatrix<sup>1</sup>. Alternativ kann man als Ausgang die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  wählen, wie dies schon im Rahmen der entworfenen *Winkelgeschwindigkeitsregelung* aus Gleichung (3.34) getan wurde.

<sup>1</sup>für Punkte  $\mathbf{x}$ , sodass  $\det(\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{x})) \neq 0$

# Nomenklatur

## Symbole

$u$	PWM-Signal
$\hat{u}_r$	Normalisierte Drehzahlreferenz
$v_{\text{bat}}$	Batteriespannung
$\mathbf{f}$	Kraft
$\tau$	Moment
$\delta$	Anstellwinkel Steuerfläche
$\omega_r$	Rotor-Winkelgeschwindigkeit
$\mathbf{R}$	Rotationsmatrix
$\phi$	Vektor der RPY-Winkel
$\mathbf{q}$	Quaternion
$\varphi$	Rollwinkel
$\theta$	Nickwinkel
$\psi$	Gierwinkel
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit
$\alpha$	Winkelbeschleunigung
$\mathbf{p}$	Position
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeit
$\mathbf{a}$	Beschleunigung
$A_r$	Rotorkreisfläche
$R_r$	Rotorradius
$I_r$	Massenträgheitsmoment Rotor
$\mathbf{I}$	Trägheitstensor
$C_D$	Luftwiderstandskoeffizient
$C_L$	Auftriebskoeffizient
$C_{\text{th}}$	Schubbeiwert
$C_{\text{tq}}$	Drehmomentbeiwert
$\sigma$	Einheitssprung
$\mathbf{E}$	Einheitsmatrix

## Subskripte

rc	Radio Control Input
sf	Setpoint Filter

t	Target
ff	Feedforward
d	Disturbance
e	Error
c	Controller
r	Rotor
s	Servo
cs	Control Surface
L	Lift
D	Drag
th	Thrust
tq	Torque
$\wedge$	Stern-Konfiguration
+	Plus-Konfiguration
$\times$	Kreuz-Konfiguration

## Abkürzungen

TVC	Thrust Vector Control
RPY	Roll-Pitch-Yaw
EA	Eingangs-Ausgangs
AI	Affine Input
MIL	Model In the Loop
SIL	Software In the Loop
HIL	Hardware In the Loop
EDF	Electric Ducted Fan
ESC	Electronic Speed Controller
BLDC	Brushless Direct Current
BEC	Battery Eliminator Circuit
IMU	Inertial Measurement Unit
UAV	Unmanned Aerial Vehicle
MAV	Micro Air Vehicle
VTOL	Vertical Take-Off and Landing
eVTOL	electric Vertical Take-Off and Landing

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Hauptkomponenten des Single Copters . . . . .	2
1.2	Foto des Single Copters . . . . .	3
1.3	Blockschaltbild des elektrischen Teilsystems . . . . .	4
1.4	Flugcomputer (nachgezeichnet aus [8]) . . . . .	5
2.1	Koordinatensysteme . . . . .	8
2.2	Anordnung der Steuerflächen . . . . .	13
2.3	Schematische Darstellung des Drohnenprüfstandes . . . . .	17
2.4	Statische Schubkraft $f_{th}(\omega_r)$ . . . . .	18
2.5	Gemessene Kraft $f_s$ für verschiedene Steuerflächen-Anstellwinkel $\delta$ und Rotordrehzahlen $\omega_r$ . . . . .	19
2.6	Normalisierte Auftriebs- $f_L(\delta)/\omega_r^2$ und Luftwiderstandskraft $f_D(\delta)/\omega_r^2$ . . . . .	20
2.7	Spannung $v_{bat}$ und Pulsweite $u_r$ der quasistatischen Antriebsstrang-Identifikation . . . . .	23
2.8	Gaskurve des Antriebsstranges . . . . .	24
2.9	Blockschaltbild des identifizierten Antriebsstrang-Modells . . . . .	24
2.10	Sprungantworten des Antriebsstranges . . . . .	25
2.11	Servodynamik . . . . .	26
2.12	Konfigurationen der Modellvalidierung . . . . .	26
2.13	Validierung des rotatorischen Teilsystems der Regelstrecke . . . . .	28
2.14	Validierung des translatorischen Teilsystems der Regelstrecke . . . . .	29
2.15	Struktur von ARDUOPTER 4.0.7 . . . . .	30
2.16	Validierung des geschlossenen Regelkreises . . . . .	31
3.1	Strukturgraph des linearisierten Systems . . . . .	38
3.2	Struktur der implementierten Regelung . . . . .	40
3.3	Kaskadierte Orientierungsregelung . . . . .	41
3.4	Höhenregelung . . . . .	44
4.1	Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises: Rollwinkel $\varphi$ . . . . .	49
4.2	Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises: Gierwinkel $\psi$ . . . . .	49
4.3	Orientierungsregelung: Salti mit 1-DoF- und 2-DoF-Regelung . . . . .	51
4.4	Orientierungs- und Höhenregelung . . . . .	52
4.5	Vergleich mit ARDUOPTER: Entkopplung der Roll- und Nickdynamik (1-DoF Regelung) . . . . .	53
4.6	Vergleich mit ARDUOPTER: Sollwertfilter . . . . .	54
4.7	Vergleich mit ARDUOPTER: Reglerperformanz . . . . .	54
4.8	Systemdynamik für Variationen im Trägheitstensor $\epsilon \mathbf{I}$ . . . . .	56
4.9	Roll- und Nickdynamik für verschiedene Rotor-Massenträgheitsmomente $\epsilon I_r$ . . . . .	57
4.10	Eingangsstörungen . . . . .	58
5.1	Leistung und Flugzeit des Single-Copters Version II . . . . .	61



# Tabellenverzeichnis

1.1	Komponenten des elektrischen Teilsystems . . . . .	5
1.2	Navio2 Spezifikationen . . . . .	6
2.1	Parametrierung der Orientierung . . . . .	9
2.2	Zustände des Drohnen-Modells . . . . .	15
2.3	Globale Drohnenparameter . . . . .	16
2.4	Aerodynamische Beiwerte . . . . .	20
2.5	Flossenkonfigurationen . . . . .	21
2.6	Parameter des Antriebsstrangs . . . . .	25
3.1	Ruhelage für äquivalente Steuerflächen-Winkel . . . . .	35
4.1	Verwendete Reglerparameter . . . . .	50
4.2	Vergleich mit ARDUOPTER: Regelfehler . . . . .	55
5.1	Spezifikationen des Single-Copters Version II . . . . .	62

# Literaturverzeichnis

- [1] ArduPilot Development Team and Community. Ardupilot, 2022. URL <https://ardupilot.org/>.
- [2] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. CMS books in mathematics. Springer, New York, NY, 2 edition, 2003. ISBN 0387002936.
- [3] W. Bittner. *Flugmechanik der Hubschrauber*. Springer, 2002. ISBN 3-540-42013-4.
- [4] D. Brescianini, M. Hehn, and R. D’Andrea. Nonlinear quadrocopter attitude control. Technical report, Zürich, 2013.
- [5] J. Diebel. Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors. *Matrix*, 58, 1 2006.
- [6] DoneAnalyst. The Rise of Open-Source Drones, 2021. URL <https://droneanalyst.com/2021/05/30/rise-of-open-source-drones>.
- [7] Dronecode Project. Px4 autopilot, 2022. URL <https://px4.io/>.
- [8] Emlid. Navio2 - Autopilot Hat for Raspberry Pi, 2021. URL <https://navio2.emlid.com/>.
- [9] M. Faessler, D. Falanga, and D. Scaramuzza. Thrust mixing, saturation, and body-rate control for accurate aggressive quadrotor flight. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2(2):476–482, 2017. doi: 10.1109/LRA.2016.2640362.
- [10] W. Fichter and J. Stephan. *Flugregelung*. Springer Vieweg, 2020. ISBN 978-3-662-60907-1.
- [11] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61:1327–1361, 1995.
- [12] E. Fresk and G. Nikolakopoulos. Full quaternion based attitude control for a quadrotor. In *2013 European Control Conference (ECC)*, pages 3864–3869, 2013. doi: 10.23919/ECC.2013.6669617.
- [13] S. Jakubek and C. Hametner. *Skriptum Zustandsregelung von Mehrgrößensystemen*. Institut für Mechanik und Mechatronik, Technische Universität Wien, 2015.
- [14] S. Jakubek, C. Hametner, and A. Schirrer. *Skriptum Digital Control*. 2019.
- [15] M. Jardin and E. Mueller. *Optimized Measurements of UAV Mass Moment of Inertia with a Bifilar Pendulum*. doi: 10.2514/6.2007-6822. URL <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2007-6822>.
- [16] E. Johnson and M. Turbe. Modeling, control, and flight testing of a small ducted fan aircraft. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 29, 07 2006. doi: 10.2514/1.16380.
- [17] A. Ko, O. Ohanian, and P. Gelhausen. Ducted fan uav modeling and simulation in preliminary design. 08 2007. ISBN 978-1-62410-160-1. doi: 10.2514/6.2007-6375.
- [18] M. Kozek. *Skriptum Identifikation - Experimentelle Modellbildung*. Institut für Mechanik und Mechatronik, Technische Universität Wien, 2016.
- [19] J. Lunze. *Regelungstechnik 2*. Srpinger Vieweg, 2016.
- [20] Raspberry Pi. Raspberry Pi 4 Model B, 2022. URL <https://www.raspberrypi.com/products/raspberry-pi-4-model-b/>.

- [21] K. Röbenack. *Nichtlineare Regelungssysteme*. Springer Vieweg, 2017. ISBN 9783662440919.
- [22] J. Solà. Quaternion kinematics for the error-state kalman filter, 2017. URL <https://arxiv.org/abs/1711.02508>.
- [23] SpaceX. 150 Meter Starhopper Test, 2020. URL [https://youtu.be/bYb3bfA6\\_sQ](https://youtu.be/bYb3bfA6_sQ).
- [24] tesla500. Ikarus electric rocket Thrust-vectoring flying ducted fan, 2018. URL <https://youtu.be/RMeEh50UaDs>.
- [25] K. P. Valavanis and G. J. Vachtsevanos. *Handbook of Unmanned Aerial Vehicles*. Springer Publishing Company Inc., 2014. ISBN 9048197066.
- [26] B. G. van der Wall. *Grundlagen der Hubschrauber-Aerodynamik*. Springer Vieweg, 2015. ISBN 978-3-662-44399-6.
- [27] C. Woernle. *Mehrkörpersysteme*. Springer Vieweg, 2016. ISBN 9783662466872.