Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Analyse von agentenbasierten Modellen mithilfe von Markovketten

Ausgeführt am Institut für
Analysis & Scientific Computing
der Technischen Universität Wien
unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Felix Breitenecker
durch

Florian Kitzler

St. Martin 72
A-3971 St. Martin

Wien, am 17. Oktober 2016

Erklärung zur Verfassung der Arbeit

Florian Kitzler, St. Martin 72, 3971 St. Martin, Österreich

“Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst habe, dass ich die verwendeten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben habe und dass ich die Stellen der Arbeit - einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen -, die anderen Werken oder dem Internet im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.”

Ort, Datum	Unterschrift

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während dem Verfassen dieser Arbeit und im gesamten Zeitraum meines Studiums sowohl fachlich als auch persönlich unterstützt, motiviert und inspiriert haben.

Zuerst gebührt mein Dank Herrn Prof. Breitenecker, der meine Diplomarbeit betreut und begutachtet hat. Für die stets konstruktive Kritik möchte ich mich herzlich bedanken.

Außerdem möchte ich Herrn Dipl.-Ing. Bicher für die Unterstützung danken. Die hilfreichen Anregungen und der konstruktive Gedankenaustausch in vielen Gesprächen haben maßgeblich dazu beigetragen, dass diese Diplomarbeit in dieser Form vorliegt.

Weiters möchte ich mich bei allen Teilnehmern an den zahlreichen interessanten Diskussionen bedanken, die neue Ideen und Inspirationen geliefert haben. Oft hilft ein Perspektivenwechsel um die richtigen Fragen aufzuwerfen und somit zu neuen Schlussfolgerungen zu kommen.

Ebenfalls möchte ich einen Dank an meine Kommilitonen Sebastian, Claire, Julian, Irina, Stefan, Marianne, Andreas und Elisabeth aussprechen, die mich mit Humor, Originalität, Motivation, Inspiration und Ehrlichkeit in unzähligen Stunden durchs Studium begleitet haben.

Ein besonderer Dank gilt meiner Freundin Viktoria, die mich während der Studienzeit stets emotional aber auch mit ihrem Sinn für Ästhetik bei der Gestaltung meiner Diplomarbeit unterstützt hat.

Abschließend möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mir mein Studium durch ihre Unterstützung ermöglicht haben und mich stets in meinem Bestreben bestärkt und gestärkt haben.

Florian Kitzler,

Wien, am 17. Oktober 2016

Abstract Deutsch

Die Bedeutung agentenbasierter Modellierung nimmt stetig zu. Agentenbasierte Modelle werden in vielen unterschiedlichen Bereichen eingesetzt, unter anderem in der Ökonomie, den Sozialwissenschaften oder zur Modellierung im Gesundheitssystemmanagement. Vorstellbare Gründe für den verstärkten Einsatz dieser eher jungen Modellierungstechnik sind die einfache Darstellbarkeit, die Flexibilität von agentenbasierten Modellen sowie die Möglichkeit heterogene Systeme einfach zu beschreiben. Eine weitere wichtige Eigenschaft und das größte Unterscheidungsmerkmal zu anderen Modellierungstechniken ist die Interaktionsfähigkeit der einzelnen Komponenten des Modells. Aus diesem Grund ist es möglich auch sehr komplexe Systeme aus einer Bottom-up Perspektive zu beschreiben.

Bei der Analyse von agentenbasierten Modellen kann es jedoch auch zu Problemen kommen. So gibt es üblicherweise eine viel größere Anzahl an unbekannten Parametern, was die Parametrisierung bzw. Kalibrierung erschwert. Außerdem gibt es noch kaum spezifische Analyse- und Validierungsmethoden, die auf die speziellen Eigenschaften agentenbasierter Modelle zugeschnitten sind. Aufgrund dieser Tatsache stellt sich oft die Frage, ob es nicht eine andere Beschreibung des Modells gibt.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einer Methode, bestehende agentenbasierte Modelle als Markovkette darzustellen. Dies ist ein stochastische Prozesse, der die Eigenschaft der „Gedächtnislosigkeit“ besitzt. Das bedeutet, dass der weitere Verlauf des Prozesses nur von dem aktuellen Zustand abhängig ist und Ereignisse in der Vergangenheit keinen Einfluss darauf haben. Dazu wird zuerst die Dynamik des Modells auf dem Raum aller Konfigurationen beschrieben. Ausgehend von dieser sogenannten Mikrobeschreibung des agentenbasierten Modells als Markovkette kann man durch das Zusammenlegen von Zuständen zu einer Makrobeschreibung gelangen. Eine entscheidende Eigenschaft dabei ist die sogenannte „Lumpability“ der mikroskopischen Markovkette, die sicherstellt, dass auch der makroskopische Prozess wiederum gedächtnislos und damit eine Markovkette ist.

Anhand ausgewählter Beispielen wird gezeigt, wie man von einem bestehenden agentenbasierten Modell zur Darstellung als makroskopische Markovkette gelangt. Die Fallbeispiele erfüllen dabei wichtige Eigenschaften agentenbasierter Modelle und sind auf der anderen Seite einfach genug um sie schnell zu implementieren und Ergebnisse zu erhalten. Als Beispiele werden einfache Bewegungsmodelle, dynamische Entscheidungsmodelle und dynamische Spiele betrachtet. Auf die unterschiedlichen Interaktionsformen der Agenten wird zudem genauer eingegangen. Im Zuge der Behandlung der Fallbeispiele wird der Fokus auf die Möglichkeit gelegt, die dabei entstandenen Markovketten mit spezifischen Verfahren zu analysieren und wichtige Kennzahlen des Modells zu berechnen. Da es sich dabei lediglich um das Lösen linearer Gleichungssysteme handelt, wird dazu wenig Rechenzeit benötigt. Dies ist ein großer Vorteil zu üblichen Analysemethoden wie Monte-Carlo-Simulation des agentenbasierten Modells. Es zeigt sich, dass die vorgestellte Methode sehr gut dazu geeignet ist, eine große Klasse von agentenbasierten Modellen als Markovkette darzustellen und zu analysieren.

Abstract english

The importance of agent-based modeling has increased more and more in recent years. Agent-based models have become a widely used tool for example in economy, social sciences and health care management. Some reasons for this development might be the picturesqueness of agent-based models, their flexibility, and the possibility to easily describe heterogeneous systems. Another advantage over other modeling techniques is the possibility of the model entities to interact with each other. Therefore it is possible to describe very complex systems from a bottom-up perspective. This means that the parts of the models are defined seperately and the dynamic of the system arises from interactions of the model entities.

Nevertheless problems occur when it comes to analyse those models. Agent-based models usually have a bigger set of unknown parameters, which makes it harder to parameterize or calibrate them. Additionally methods to analyse and validate, which exploit the specific properties of agent-based models, barely exist. This raises the question of whether it is possible to describe the model in a different, easier analysable, way.

This work describes a method to represent given agent-based models as markov chains. These are very simple stochastic processes that have the property to be 'memoryless'. This means that the further development of the process only depend on the current state and not on events in the past.

To do so it is first necessary to describe the dynamics of the model on the set of configurations. This generated markov chain is also called the microdynamic of the model. Lumping together states of the microdynamics then creates a markov chain in a macroscopic sense, which is called the macrodynamics. It turns out that it is not always possible to create the markov chain of the macrodynamics, but in case it is, we can benefit from it by a reduced dimension of the state space.

Based on selected examples it is shown how to create a markov chain of the microdynamics, and if possible, lump together states to obtain a markov chain of the macrodynamics. The case studies hold important properties of agent-based models and are easy enough to be implemented and to create output data fast. The regarded examples are models of movement, opinion dynamic models and dynamic games. It was also focused on the different ways of interaction between the agents in the different models. Another focus is on the methods to analyse the created markov chains with specific procedures and to calculate characteristic numbers of the model. This is done by just solving systems of linear equations and therefore really fast, which is a big advantage over other analysing methods like monte-carlo-simulation. Our case studies imply that this method can be a powerful tool when it comes to analysing for a big class of agent-based models.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis **v**

1 Einleitung **2**

2 Agentenbasierte Modelle **4**
2.1 Definition agentenbasierter Modelle 4
2.2 Stochastische Modelle 5
2.3 Eigenschaften agentenbasierter Modelle 6

3 Interaktionsformen in ABM **10**
3.1 Einführende Beispiele 10
3.1.1 Lieferkettenmodell 10
3.1.2 Schellings Segregationsmodell 11
3.2 Grundlagen der Graphentheorie 12
3.3 Wichtige Netzwerktypen 14
3.3.1 Vollständiges Netzwerk 14
3.3.2 Das k-Ring Netzwerk 15
3.3.3 Gitternetzwerk 15
3.3.4 Zufallsnetzwerk 15
3.3.5 Small-World Netzwerk 17
3.3.6 Power Netzwerk 18

4 Markovketten **20**
4.1 Definition und Grundlagen 20
4.2 Ersteintrittszeiten und Absorbtionsverhalten 23
4.3 Klassifikation der Zustände 25
4.4 Stationäre Verteilung und asymptotisches Verhalten 27
4.5 Reduktion des Zustandsraums - Lumpability 29

5 Agentenbasierte Modelle als Markovketten **36**
5.1 Formale Beschreibung von ABM 36
5.2 Mikrodynamik - MK auf Konfigurationsraum 37
5.3 Makrodynamik - MK auf reduziertem Zustandsraum 40

6 Beispiele **42**
6.1 Vorbemerkungen 42
6.2 Bewegungsmodelle 43
6.2.1 Random Walk Modell eines Agenten - 1D 43
6.2.2 Random Walk Modell mehrerer Agenten - 1D 51
6.2.3 Bewegungsmodell mit Interaktion - 1D 52
6.2.4 Bewegungsmodell mit Interaktion - 2D 58
6.3 Dynamische Entscheidungsmodelle 61
6.3.1 Binäres Entscheidungsmodell - Ein Kontaktpartner 61
6.4 Dynamische Spiele 76
6.4.1 Dynamisches Kooperationsspiel 77

7 Ergebnisse **84**

A Appendix **88**
A.1 Wahrscheinlichkeitstheorie 88
A.2 Algorithmen zur Erzeugung von Netzwerken 89
A.2.1 Albert-Barabasi Modell 89
A.2.2 Erdös-Renyi Modell 89
A.2.3 Watts-Strogatz Modell 89
A.3 MATLAB Code 89
A.3.1 Aktualisierungsregel des Random Walk Modells eines Agenten . . . 89
A.3.2 Aktualisierungsregel des Bewegungsmodells mit Interaktion 1D . . . 90
A.3.3 Aktualisierungsregel des binären Entscheidungsmodells 91
A.3.4 Aktualisierungsregel des Kooperationsspiels 91
A.3.5 Approximation der Übergangsmatrix 91

Abbildungsverzeichnis **93**

Literaturverzeichnis **96**

KAPITEL 1

Einleitung

Die Anwendung von agentenbasierten Modellen (kurz ABM) nimmt laufend zu. Dabei sind die Einsatzmöglichkeiten dieser noch jungen Modellbildungstechnik nicht auf einzelne Wissenschaftsbereiche beschränkt. Sie findet unter anderem Anwendung in der Biologie, den Sozialwissenschaften oder den Wirtschaftswissenschaften. Beispiele dafür sind etwa dynamische Entscheidungsmodelle [Def00] bzw. [BLA11], demographische Modelle [BOP03], ein Verkehrsmodell [CBN03], ein Lieferkettenmodell [MN06] sowie eine Simulation des Versorgungskettenmanagements [SLS98]. Hierbei können Individuen wie Menschen oder Tiere, Fahrzeuge sowie Firmen oder Institutionen mithilfe von Agenten modelliert werden.

In der Modellbildung unterscheidet man zwischen makroskopischen und mikroskopischen Modellen, letzteren werden auch die agentenbasierten Modelle zugeordnet. Mikroskopische Modelle beschreiben jedes Individuum bzw. jedes Element des Modells einzeln. Dabei können die Eigenschaften der einzelnen Elemente unterschiedlich sein. Das Verhalten des Systems entsteht aus dem Verhalten der einzelnen Elemente. Im Gegensatz dazu wird bei makroskopischen Modellen das zu beschreibende System als Ganzes abgebildet. Die Unterscheidung zwischen einzelnen Individuen ist dabei nicht möglich.

Ein Grund für die zunehmende Beliebtheit ABM ist ihre einfache Darstellbarkeit. Durch den leicht verständlichen Aufbau sind sie auch für Nichtfachleute besser nachvollziehbar. Aus einfachen Interaktionsregeln der autonomen Agenten entsteht ein unvorhersehbares, komplexes Verhalten auf makroskopischer Ebene. Außerdem sind Modifikationen einfacher durchführbar als etwa bei gleichungsbasierten Modellen. Bei letzteren werden darüber hinaus häufig Vereinfachungen getroffen, um lösbare Gleichungen zu erhalten. ABM sind dagegen flexibel einsetzbar und ermöglichen es besser heterogene Strukturen abzubilden. Dies führt jedoch auch auf gewisse Nachteile, die bei der Arbeit mit ABM beachtet werden müssen.

ABM benötigen üblicherweise mehr Rechenkapazität als vergleichbare makroskopische Modelle. Durch die hohe Flexibilität bzw. Heterogenität haben ABM häufig eine sehr große Anzahl an

Parametern. Diese sind sehr oft nicht bekannt bzw. können schwer geschätzt werden, was einen erhöhten Rechenaufwand zur Parametrisierung bzw. Kalibrierung des Modells zur Folge hat. Außerdem sind selten detailreiche Datensätze vorhanden, die zur Validierung des Modells herangezogen werden können. Diese Umstände erschweren die Analyse des ABM. Oft stellt sich daher die Frage, ob es nicht ein einfacheres makroskopisches Modell gibt, das man stattdessen verwenden kann.

Ein Zugang ist es stochastische ABM als Markovketten (kurz MK) zu beschreiben, da diese mit einfachen Methoden untersucht werden können. Diese Arbeit befasst sich damit, anhand ausgewählter Beispiele zu zeigen, wie man ein gegebenes ABM als MK beschreiben und analysieren kann. Dazu wird in Kapitel 2 eine Einführung in die Theorie stochastischer ABM gegeben und die Vor- und Nachteile dieser Modellbildungstechnik zusammengefasst. Kapitel 3 beschäftigt sich mit den möglichen Interaktionsformen von Agenten und wie man diese mithilfe von Netzwerkmodellen beschreiben kann. Kapitel 4 stellt einen Überblick über die Theorie der Markovketten dar und gibt die wichtigsten Resultate wieder. Es wird auf die mögliche Analysemethoden von Markovketten, sowie die Existenz und Eindeutigkeit von Grenzverteilungen, eingegangen. Außerdem wird der Begriff der „Lumpability“ einer Markovkette beschrieben, der für die Darstellbarkeit eines ABM als makroskopische MK entscheidend ist.

Den Kern der Arbeit bilden die darauffolgenden Kapitel 5 und 6. Kapitel 5 befasst sich mit dem theoretischen Konzept von *Banisch et al.* [BLA11]. Darin wird beschrieben, wie aus einem agentenbasierten Modell, das den Prozess auf mikroskopischer Ebene beschreibt, nach Konstruktion einer geeigneten Projektion, eine entsprechende makroskopische Beschreibung erhalten wird. Dies erfolgt auf Basis der sogenannten Random Mapping Representation einer Markovkette und anschließender Reduktion des Zustandsraums. In Kapitel 6 werden die Beispiele der Fallstudie vorgestellt. Diese stammen größtenteils aus der Literatur zu agentenbasierten Modellen oder wurden aus solchen abgeleitet. Die betrachteten Beispiele sind einfache Bewegungsmodelle, dynamische Entscheidungsmodelle sowie dynamische Spiele. Besonderer Wert wird auf die Implementierung dieser Methode in Hinblick auf die Konstruktion der geeigneten Projektion gelegt. Anschließend werden sie Simulationsergebnisse des agentenbasierten Modells mit denen der entsprechenden Markovkette verglichen. Dazu wird eine Monte-Carlo-Simulation des agentenbasierten Modells durchgeführt.

Das abschließende Kapitel umfasst eine Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse sowie einen Ausblick auf eine mögliche Anwendung dieser Technik auf komplexere agentenbasierte Modelle. Dabei wird kurz auf die Probleme eingegangen die bei der Anwendung auf komplexere Modelle auftauchen können. Es wird außerdem auf die Wahl der Beispiele eingegangen und erklärt wieso sich diese besonders gut eignen bzw. welche Eigenschaften von ABM damit nicht berücksichtigt werden.

KAPITEL 2

Agentenbasierte Modelle

Wie schon eingangs beschrieben, werden agentenbasierte Modelle (kurz ABM) in vielen Wissenschaftsbereichen verwendet um komplexe Systeme zu beschreiben. Aus diesem Grund gibt es auch unterschiedliche Auffassungen, wie ABM bzw. Agenten definiert sind. Eine einheitliche, formale Beschreibung ABM gibt es daher nicht. Auch wenn sich die in der Literatur verfügbaren Definitionen zumeist vom Wortlaut unterscheiden, sind deren Aussagen zumeist sehr ähnlich. *Nigel Gilbert*, siehe [Gil07], definiert ein ABM als Computermethode, die es Forschern erlaubt Modelle bestehend aus interagierenden Agenten zu erzeugen, zu analysieren und damit zu experimentieren. („agent-based modeling is a computational method that enables a researcher to create, analyze, and experiment with models composed of agents that interact within an environment“, siehe [Gil07]). Dabei sind Agenten eigenständige Programme oder Bestandteile des Programms, die es erlauben soziale Akteure zu beschreiben. Diese können sowohl mit der Umgebung als auch mit anderen Agenten interagieren. Andere, wie *John Casti* [Cas97], verlangen von Agenten adaptives Verhalten und eine gewisse Lernfähigkeit. Demnach besitzen Agenten Basisregeln, die die Verhaltensregeln widerspiegeln und übergeordnete Regeln diese Regeln zu ändern. Dies impliziert die Möglichkeit die Verhaltensweise zu ändern und somit einem gewissen Lerneffekt zu erzielen. Wir verwenden in weiterer Folge die Definition von *Macal und North*, siehe [MN06], die im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

Definition agentenbasierter Modelle

Definition 1: *Agentenbasierte Modelle sind Modelle von Systemen, die aus autonomen, interagierenden Entitäten, auch Agenten genannt, bestehen.*

Diese Agenten müssen bestimmte Eigenschaften erfüllen.

1. Ein Agent muss eindeutig identifizierbar und von anderen Komponenten des Systems klar unterscheidbar sein. Jeder Agent besitzt gewisse Eigenschaften, auch Attribute genannt, sowie Verhaltensregeln.

2. Ein Agent befindet sich in einer Umgebung, in der er mit anderen Agenten, aber auch mit der Umgebung selbst interagieren kann. Dazu besitzt jeder Agent Regeln wie die Interaktion stattfindet, mit wem interagiert werden kann bzw. wie Informationen von anderen Agenten aufgenommen werden.

3. Ein Agent ist autonom und selbstgesteuert. Jeder Agent kann auch unabhängig von anderen Agenten in seiner Umgebung funktionieren.

Darüber hinaus können Agenten noch weitere Eigenschaften besitzen.

4. Ein Agent kann zielgerichtet sein, d.h. er kann Ziele verfolgen, wie etwa seinen Nutzen zu maximieren. Dabei kann der Agent das Resultat seines Verhaltens mit seinem Ziel vergleichen.

5. Ein Agent kann flexibel sein und seine Verhaltensregeln anpassen. Er kann lernen, um seine Ziele zu erreichen. Dazu benötigt er ebenfalls eine Art Gedächtnis. Ein Agent kann also Regeln besitzen um seine Verhaltensregeln zu modifizieren.

ABM können also sowohl aus eher passiven, reagierenden Agenten als auch aus aktiven, zielgerichteten Agenten bestehen.

Stochastische Modelle

In der Modellbildung unterscheidet man zwischen deterministischen und stochastischen Modellen. Deterministische Modelle beschreiben Vorgänge, die nach einem gewissen Gesetz und immer gleich ablaufen. Aus einem Eingabewert wird somit immer der selbe Ausgabewert reproduziert. Deterministische Modelle sind etwa in der klassischen Dynamik zu finden. Ein Beispiel dafür ist das Newton'sche Gravitationsgesetz, das die Gravitationskraft

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

zwischen zwei Punktmassen m_1 und m_2 beschreibt, die sich in einer Entfernung r voneinander befinden. Die Konstante G wird auch Gravitationskonstante genannt. Ein Modell, das die Bewegung zweier Massen nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz beschreibt reproduziert bei gleichen Ausgangswerten immer das selbe Ergebnis, in diesem Fall die selben Trajektorien der Massen.

Im Unterschied zu deterministischen Modellen sind stochastische Modelle zufallsbehaftet. Das bedeutet, dass der selbe Eingabewert zu unterschiedlichen Ausgabewerten führen kann. Bei agentenbasierten Modellen kann der Zufall an unterschiedlichen Stellen eine Rolle spielen. So können etwa die Eigenschaften der Agenten zu Beginn der Simulation anhand einer Anfangsverteilung zufällig angenommen werden. Es kann auch bei der Bewegung der Agenten oder der Wahl der Interaktionspartner zu zufälligen Einflüssen kommen oder die Einflüsse sind zwar in der Realität deterministisch, aber zu kompliziert zu beschreiben, dass sich nur eine stochastische

Modellierung eignet.

Als Beispiel kann man ein demografisches Modell betrachten, in dem die Agenten Personen darstellen. Diese besitzen je nach Geschlecht, Alter und anderer Faktoren eine gewisse Wahrscheinlichkeit zu sterben, zu emigrieren oder auch Kinder zu gebären. Die Zusammensetzung der Bevölkerung ändert sich so im Verlauf der Zeit. Durch die zufälligen Einflüsse kommt es bei jedem Simulationslauf zu unterschiedlichen Resultaten.

Durch die Eigenschaft stochastischer Modelle immer unterschiedliche Ausgabewerte zu produzieren ist bei der Interpretation der Ergebnisse achtzugeben. Um valide Aussagen treffen zu können, muss die Simulation bei gleichen Anfangswerten sehr oft wiederholt und die Ausgabewerte gesammelt werden. Diese gesammelten Daten können als empirische Stichprobe der unbekannten Verteilung des Ausgabewertes aufgefasst werden. Kennzahlen dieser Stichprobe erlauben nun Aussagen über die Verteilung der Ausgabewerte zu treffen. So kann das Stichprobenmittel als Schätzer für den Erwartungswert verwendet werden. Andere Werte wie die Varianz sind ein Maß für die Streuung der Werte um des Erwartungswert und sollten bei der Interpretation der Ergebnisse mit einbezogen werden.

Eigenschaften agentenbasierter Modelle

Vor- und Nachteile einer jeden Modellbildungstechnik ergeben sich aus ihren spezifischen Eigenschaften. Die Wahl der richtigen Modellbildungstechnik hängt dabei vom zu modellierenden System und dem Zweck des Modells ab. Dabei ist entscheidend zu wissen wodurch sich verschiedene Methoden unterscheiden. Im folgenden werden die wichtigsten Eigenschaften von ABM zusammengefasst und Unterschiede zu anderen Modellbildungstechniken beschrieben.

Eine wichtige Eigenschaft und ein Vorteil gegenüber vielen anderen Methoden ist die einfache Beschreib- und Darstellbarkeit agentenbasierter Modelle. So kann man die einzelnen Komponenten des Modells definieren und ihre möglichen Interaktionen textuell beschreiben ohne dazu zu sehr ins Detail zu gehen. Dies kann dabei helfen das Modell auch für einen Nichtfachmann verständlich zu machen. Im Unterschied dazu werden bei gleichungsbasierten Modellen anhand von getroffenen Annahmen und bekannten Gesetzmäßigkeiten Formeln und Gleichungen hergeleitet die das System bzw. seine Komponenten beschreiben. Um diese und weitere Eigenschaften ABM zu verdeutlichen wird ein Beispiel aus der Biologie betrachtet, dass das Schwarmverhalten von Vögeln oder Fischen als ABM beschreiben soll, siehe [MCS10] bzw. [MN06].

Das sogenannte Boids Modell simuliert die Bewegung von einzelnen Agenten innerhalb eines Schwarms oder einer Herde. Dabei besitzen die Agenten einfache Verhaltensregeln wie sie sich in der Gruppe verhalten müssen. Aus diesen einfachen Regeln der einzelnen Agenten entsteht ein unvorhersehbares, komplexes Verhalten des Schwarms. Man nennt dies auch emergentes Verhalten bzw. Emergenz. Die Verhaltensregeln der Agenten im Boids Modell sind üblicherweise

1. Seperation: Vermeide lokale Anhäufungen von Agenten.
2. Angleichung: Bewege dich in dieselbe Richtung wie deine Nachbarn.
3. Zusammenhalt: Bewege dich ins Zentrum deiner Nachbarn.

Die Agenten beobachten während der Simulation sowohl die Position als auch die Richtung der Nachbaragenten und passen die eigene Bewegungsrichtung den Regeln entsprechend an. Aus diesen Regeln die nur lokal Wirkung zeigen, ergibt sich ein globales Verhalten des gesamten Schwarms. Nach einer gewissen Anzahl an Iterationen bewegen sich die Agenten, ausgehen von einer zufälligen Positionierung, im Schwarm in die selbe Richtung.

Agentenbasierte Modelle sind außerdem sehr flexibel. So können Modelle einfach angepasst und verändert werden, ohne die Modellstruktur zu sehr verändern zu müssen. Dazu muss man lediglich die Verhaltensregeln der Agenten anpassen und kann das veränderte Verhalten des Systems beobachten. Mögliche weitere Verhaltensregeln für das Boids Modell sind:

4. Futtersuche
5. Ausweichen von Hindernissen
6. Fliehen vor Jägern

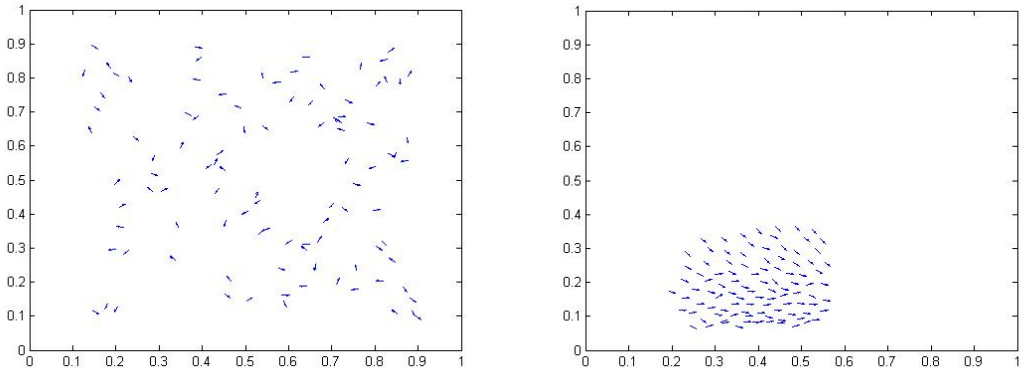

Abbildung 2.1: Boids Simulation eines Fischschwarms nach 1000 Zeititerationen (rechts) ausgehend von zufälligen Anfangswerten (links).

Agentenbasierte Modelle eignen sich sehr gut dazu Systeme mit heterogenen Elementen zu beschreiben. Dies kann zum einen bedeuten, dass es unterschiedliche Typen von Agenten gibt mit unterschiedlichen Verhaltensregeln die in einer gemeinsamen Umgebung miteinander interagieren. Modelle dieser Art werden in der Literatur auch Multi-Agent Modelle genannt, siehe [SLS98]. Zum anderen können aber auch Agenten des selben Typs unterschiedliche beschreibende Parameterwerte besitzen. Man kann damit z.B. die Bevölkerung eines Landes durch Un-

terscheiden in Geschlecht, Alter, ethnische bzw. religiöse Zugehörigkeit oder andere demographische Merkmale detailreicher beschreiben.

Eigenschaften wie Flexibilität und Heterogenität bringen aber auch Nachteile und Gefahren mit sich. Um brauchbare Resultate zu erhalten wird eine große Anzahl an Agenten benötigt. Dies führt auf einen, im Vergleich zu anderen Modellbildungstechniken, sehr hohen Rechenaufwand bei der Simulation. Dieser Faktor fällt bei stochastischen ABM noch deutlicher ins Gewicht, da eine große Anzahl an Simulationsdurchgängen benötigt wird um exakte Resultate zu bekommen.

Ein weiterer Nachteil bei heterogenen ABM ist das Fehlen von Daten um Modelle zu kalibrieren. Zwar kann das Modell sehr detailliert aufgebaut werden, doch das Bestimmen der zahlreichen spezifischen Parameter benötigt große Datenmengen, die selten vorhanden sind. Unter anderem aufgrund der Tatsache, dass ABM eine junge Modellbildungstechnik ist, fehlen zudem spezifische Analyse- und Validierungsmethoden.

Der wichtigste Grund warum die Beliebtheit von ABM ist die Möglichkeit der Agenten in ihrer Umgebung miteinander zu interagieren. Das nächste Kapitel geht genauer auf mögliche Interaktionsformen von Agenten ein.

KAPITEL 3

Interaktionsformen in ABM

Als wichtigstes Unterscheidungsmerkmal zu anderen Modellbildungstechniken, findet in agentenbasierten Modellen (kurz ABM) Interaktion zwischen den Modellkomponenten, also den Agenten, statt. Es ist dabei wichtig festzustellen wann eine Interaktion stattfindet, mit welchen Agenten interagiert werden kann und wie die Interaktion verläuft. Der letzte Punkt wird häufig auch als Aktualisierungsregel (engl.: *update rule*) bezeichnet und gibt an, wie sich die Eigenschaften und Werte der Attribute der beteiligten Agenten nach dem Kontakt verändern. Der Zeitpunkt der Interaktion hängt vom betrachteten Modell ab. In zeit-diskreten Modellen kann in jedem Zeitschritt ein Agent, eine gewisse Anzahl an Agenten oder jeder Agent interagieren. Es kann auch nur zu bestimmten Events zur Interaktion kommen, z.B. wenn sich ein weiterer Agent in unmittelbarer Nähe befindet.

Es bleibt die Frage mit wem ein Agent während der Simulation interagiert. Auch hier gibt es unterschiedliche Vorgangsweisen. Bei manchen Modellen werden die Interaktionspartner zufällig aus allen restlichen Agenten ausgewählt. Es ist aber auch möglich ein statisches oder dynamisches Netzwerk an Interaktionspartnern zu haben. Netzwerke werden mathematisch mithilfe der Graphentheorie beschrieben. Diese Netzwerke werden dazu verwendet, alle möglichen Interaktionspartner eines jeden Agenten festzulegen und werden deshalb in weiterer Folge als Kontakt- bzw. Interaktionsnetzwerk bezeichnet. Zur Motivation sollen zwei Beispiel dienen.

Einführende Beispiele

Lieferkettenmodell

Dieses vereinfachte Modell, siehe [MN06], besteht aus fünf Typen von Agenten und zwar Fabriken, Lieferanten, Großhändler, Einzelhändler und Kunden, die folgendermaßen miteinander interagieren:

1. Kunden bestellen Produkte bei einem Einzelhändler.

2. Falls der Bestand im Lager des Einzelhändlers ausreicht, bekommt der Kunde sofort das Produkt, ansonsten wir eine Vorbestellung vermerkt.

3. Einzelhändler bekommen Lieferungen von Großhändlern und bestellen, je nach Lagerbestand und Vorbestellungen, Waren vom Großhändler.

4. Großhändler werden von den Lieferanten beliefert.

5. Fabriken produzieren die Produkte abhängig von der Nachfrage.

Berücksichtigt werden dabei Lagerkosten sowie Wartezeiten der Kunden. Die Versorger passen dabei ihre Bestellstrategie an. Wenn man davon ausgeht, dass Kunden immer bei den selben Einzelhändlern einkaufen, diese wiederum bei den selben Großhändlern bestellen usw., ergibt sich ein statisches Lieferkettennetzwerk, siehe Abbildung 3.1. Dabei gibt es einen Warenfluss von den Fabriken zu den Kunden und einen Informationsfluss in Form von Bestellungen von den Kunden zu den Fabriken. In diesem Fall hat jeder Agent ein festes, also statisches Kontaktnetzwerk.

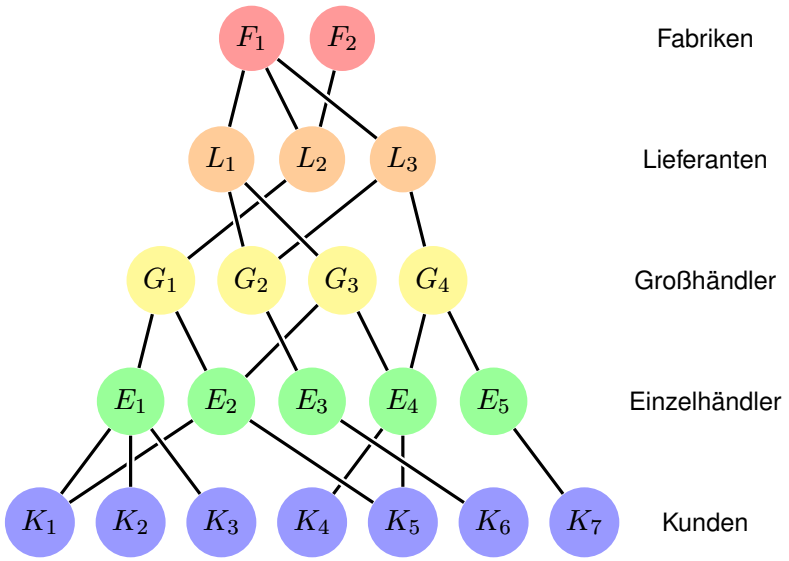

Abbildung 3.1: Kontaktnetzwerk des agentenbasierten Lieferkettenmodells nach [MN06].

Schellings Segregationsmodell

Eines der ältesten ABM ist das Segregationsmodell von *Thomas Schelling*, siehe [Sch71]. Es ist ein vereinfachtes Modell zur Beschreibung von Rassensegregation in amerikanischen Städten.

Das Modell besteht aus zwei Typen von Agenten, grüne und rote, die sich auf einem regulären, quadratischen Gitter befinden. Jede Zelle stellt eine Wohnung dar und kann entweder von einem grünen Agenten oder von einem roten Agenten bewohnt sein bzw. leer stehen (schwarz dargestellt). Jeder Agent hat einen Toleranzwert τ, welchen Anteil vom jeweils anderen Typ er in seiner Nachbarschaft von 8 Zellen duldet. Liegt der tatsächliche Wert darüber, so bewegt sich der Agent auf ein freies Feld. Die Kontaktpartner sind hier variabel. Ein Agent der sich bewegt verändert seine Kontaktpartner. Diese hängen von der aktuell besetzten Zelle ab. Man kann somit das Interaktion der Agenten durch ein dynamisches Kontaktnetzwerk beschreiben. Die möglichen Kontaktpartner hängen dabei von der aktuellen Position der jeweiligen Agenten ab.

Abbildung 3.2 zeigt die Startkonfiguration und einen Gleichgewichtspunkt bei einem Toleranzwert von $\tau = 0.4$, der nach wenigen Iterationen erreicht wurde. Die Simulation wurde in NETLOGO 5.1.0 durchgeführt.

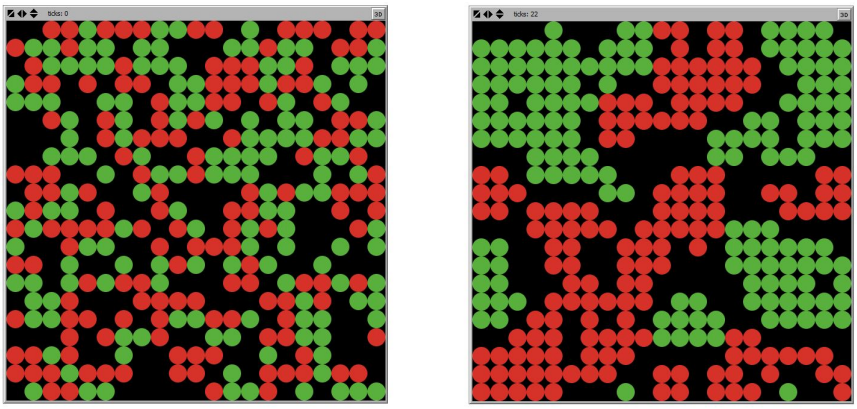

Abbildung 3.2: Schellings Segregationsmodell auf 20 $\times$ 20 Gitter mit 150 roten und 150 grünen Agenten. Anfangskonfiguration (links) sowie Konfiguration nach 22 Zeititerationen (rechts).

Grundlagen der Graphentheorie

Wie die beiden einführenden Beispiele zeigen, kann ein Großteil der Interaktionsregeln mithilfe von Netzwerken dargestellt werden. Diese können statisch oder dynamisch sein. Statische Netzwerke sind im gesamten Simulationsverlauf konstant. Ein Agent hat also zu jedem Zeitpunkt die selben Interaktionspartner (vgl. Lieferkettenmodell), egal wo er sich gerade befindet und welche Eigenschaften er besitzt. Dynamische Netzwerke ändern sich je nach Verlauf der Simulation. So können z.B. nach räumlicher Annäherung Kontakte hinzukommen und auch gelöscht werden (vgl. Schellings Segregationsmodell).

Grundlage für eine mathematische Beschreibung von Netzwerken bietet die Graphentheorie. Im folgenden werden die wichtigsten Begriffe eingeführt, siehe [Jun04] und [Die12].

Definition 2: *Ein Graph G ist ein Paar $G = (V, E)$ bestehend aus einer endlichen Menge $V \neq \emptyset$ und einer Menge E von zwei-elementigen Teilmengen von V. Wir nennen V die Ecken (engl.: vertices) des Graphen und ein Element $e = \{a, b\}$ aus E eine Kante (engl.: edge) mit Endpunkten a und b. Wir sprechen auch von benachbarten Ecken a und b oder kurz von Nachbarn, i.Z.* $a \overset{e}{—} b$.

Man nennt Graphen nach Definition 2 auch ungerichtet, da die Kanten keine Orientierung haben. Ein Beispiel für einen häufig verwendeten Graphen ist der vollständige Graph K_N bei dem alle $N = |V|$ Ecken benachbart sind, d.h. E beinhaltet alle möglichen, zwei-elementigen Teilmengen von V. Eine Möglichkeit einen Graph darzustellen, ist es, jeden Knoten als fetten Punkt und jede Kante als meist gerade Verbindungslinie der Endpunkte zu zeichnen. Abbildung 3.3 zeigt die vollständigen Graphen K_4 und K_5.

Wir verwenden in der weiteren Folge die Begriffe Netzwerk und Graph synonym und sprechen bei Netzwerken auch von Knoten statt Ecken sowie Verbindungen statt Kanten. Um Netzwerke dazu zu verwenden mögliche Kontaktpartner in agentenbasierten Modellen zu beschreiben, wird jedem Knoten ein bestimmter Agent zugeordnet. Wir sagen die Agenten i und j sind fähig zu interagieren oder kurz sind Nachbarn, wenn die zugehörigen Knoten/ Ecken im Graph/ Netzwerk benachbart sind, also $i \overset{e}{—} j$ für ein $e \in E$.

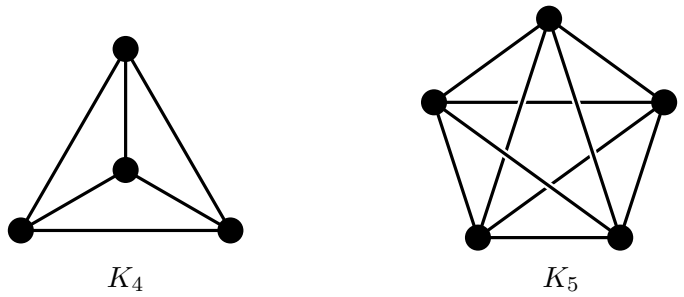

Abbildung 3.3: Graphische Darstellung der vollständigen Graphen K_4 und K_5.

Nach den bisherigen Überlegungen ist Agent i Nachbar von Agent j genau dann, wenn Agent j Nachbar von Agent i ist. Dies ist nicht immer der Fall. Es gibt Modelle in denen manche Agenten auch Informationen von anderen Agenten erhalten können, ohne selber welche weiterzugeben. Auch diese Kontaktmodelle kann man mit sogenannten gerichteten Graphen realisieren. Wir beschränken uns bei den behandelten Beispielen in Kapitel 6 jedoch auf Modelle des ersten Typs.

Die folgenden Abschnitte behandeln häufig vorkommende Netzwerktypen. Es wird dabei auf die wichtigsten Eigenschaften, die Verwendung und die Erzeugung eingegangen, siehe [AB02] und [Wil06]. Dazu müssen noch Kennzahlen von Netzwerken wie Pfadlänge, Clustering-Koeffizient oder Grad des Graphen beschrieben werden. Wir setzen ein Netzwerk $G = (V, E)$ mit $N = |V|$ Knoten voraus.

Definition 3:

1. *Grad eines Netzwerkes: Für jeden Knoten $v \in V$ ist der Grad definiert als die Anzahl der Verbindungen die v enthalten, oder anders ausgedrückt, die Anzahl der Nachbarn. Der Grad des Netzwerkes ist definiert als der durchschnittliche Grad der enthaltenen Knoten und errechnet sich mittels*

$$\mathsf{Grad}(G) = \frac{1}{N} \sum_{v \in V} \mathsf{Grad}(v) = 2\frac{|E|}{N}.$$

2. *Clustering-Koeffizient: Für den Knoten $v \in V$ sei k_v die Anzahl der Nachbarn. Ein Cluster bezeichnet eine Teilmenge von Knoten, die alle untereinander verbunden sind. Insgesamt gibt es $k_v(k_v - 1)/2$ mögliche Verbindungen zwischen den Nachbarn von v. Wir definieren den lokalen Clustering-Koeffizienten C_v eines Knotens v als den Anteil der im Netzwerk existierenden Verbindungen also*

$$C_v = \frac{\text{\# Verbundenen Nachbarn}}{k_v(k_v - 1)/2} \in [0, 1].$$

und den globalen Clustering-Koeffizienten als den Durchschnitt aller lokaler Clustering-Koeffizienten

$$C = \frac{1}{N} \sum_{v \in V} C_v.$$

3. *Pfadlänge bzw. Durchmesser: Für ein Paar Knoten $v, u \in V$ ist der kürzeste Pfad $L_{v,u}$ definiert als die kleinste Anzahl an Verbindungen, die durchlaufen werden müssen, um von Knoten v zu Knoten u zu gelangen. Die Durchschnittliche Pfadlänge ist definiert als*

$$L = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{v \in V} \sum_{v \neq u \in V} L_{v,u}.$$

Wichtige Netzwerktypen

Vollständiges Netzwerk

Beim vollständigen Netzwerk sind alle N Knoten verbunden. Jeder Agent kann also mit jedem Agenten interagieren. Vollständige Netzwerke entstehen indem man die Ecken V eines vollständigen Graphen als Knotenmenge und die Kantenmenge E eines vollständigen Graphen als

Verbindungen eines Netzwerks definiert. Abbildung 3.3 zeigt diesen Fall für $N = 4$ und $N = 5$. Vollständige Netzwerke kommen in der Realität selten vor. Sie können jedoch in Modellen zur Vereinfachung verwendet werden, wenn man etwa voraussetzt, dass alle Agenten über alle anderen Agenten und deren Informationen Bescheid wissen.

Das k-Ring Netzwerk

Beim k-Ring Netzwerk oder kurz k-Ring sind die Knoten im Kreis angeordnet und es bestehen Verbindungen zu den $k \in \mathbb{N}^g := \{2, 4, 6, \ldots\}$ nächstgelegenen Knoten. Abbildung 3.4 illustriert das 2-Ring Netzwerk sowie das 4-Ring Netzwerk bei jeweils 8 Knoten.

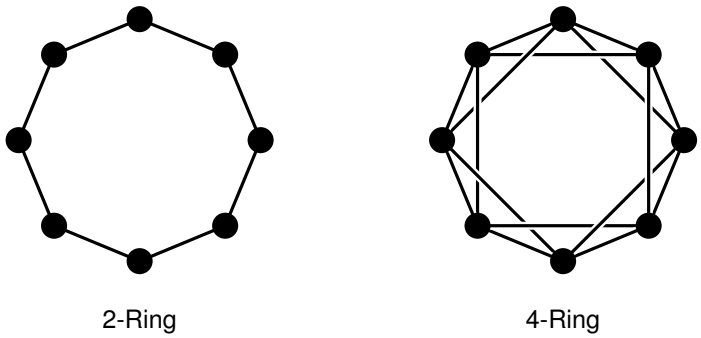

Abbildung 3.4: Graphische Darstellung des k-Ring Netzwerkes.

Das k-Ring Netzwerk wird verwendet um eine lokale Nachbarschaft zu beschreiben. Dies kann eine räumliche Nachbarschaft ausdrücken oder von allgemeinerer Natur sein.

Gitternetzwerk

Eine Möglichkeit lokale Nachbarschaften in 2D zu beschreiben sind Gitternetzwerke. Hier wird eine zweidimensionale Fläche in ein gleichmäßiges Gitter unterteilt. Die Gitterpunkte bilden das Zentrum von sogenannten Zellen auf denen sich Agenten befinden können. So kann man eine lokale Nachbarschaftsumgebung der Zellen definieren. Zu den wichtigsten zählen die Von-Neumann-Umgebung und die Moore-Umgebung, siehe [WG00]. In Abbildung 3.5 und 3.6 werden diese Nachbarschaftsumgebungen auf den Zellen sowie als Netzwerk dargestellt. Dabei wird die Nachbarschaft des roten Feldes bzw. Knotens blau hervorgehoben.

Zufallsnetzwerk

Beim Zufallsnetzwerk werden Verbindungen zwischen bestehenden Knoten zufällig gebildet. Dabei gibt es keine natürliche räumliche Anordnung wie beim k-Ring oder Gitternetzwerk. Zu-

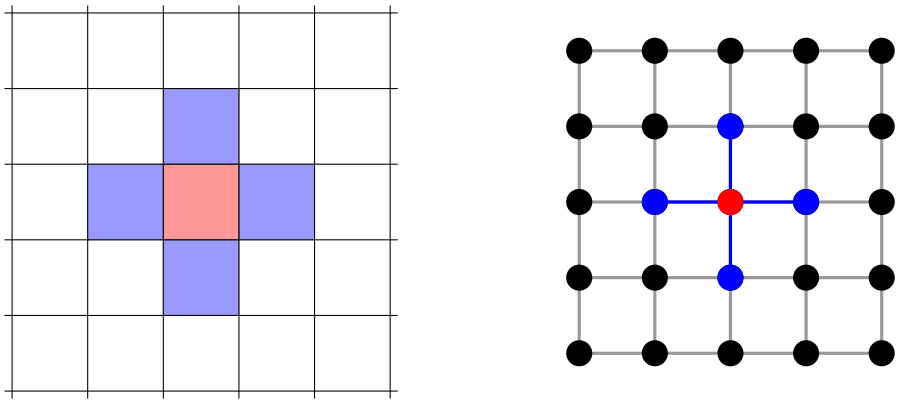

Abbildung 3.5: Von-Neumann-Umgebung auf Zellen und als Netzwerk dargestellt.

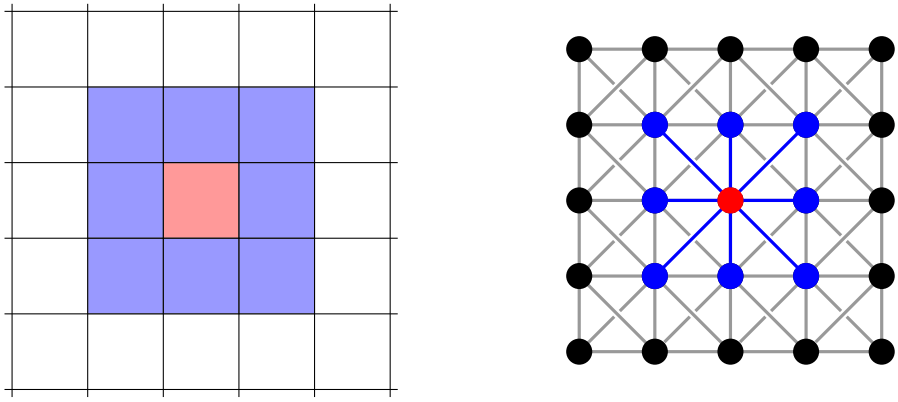

Abbildung 3.6: Moore-Umgebung auf Zellen und als Netzwerk dargestellt.

fallsnetzwerke haben in der Regel sehr geringe Clustering-Koeffizienten und kurze Pfadlängen.

Eine Möglichkeit, ein Zufallsnetzwerk zu erzeugen, bietet das Erdös-Rényi Modell, siehe [AB02]. Dabei wird ein Netzwerk mit N Knoten dadurch erzeugt, dass n Verbindungen zufällig aus den $N(N-1)/2$ möglichen Verbindungen ausgewählt werden. Eine äquivalente Methode zur Erzeugung eines Zufallsnetzwerkes ist das Binomialmodell. Dabei wird jede mögliche Verbindung mit Wahrscheinlichkeit p erzeugt. Der entstandene Graph besteht durchschnittlich aus $pN(N-1)/2$

Verbindungen.

Die beiden folgenden Typen von Netzwerken haben keine feste Struktur, wie etwa das k-Ring Netzwerk oder die vorgestellten Gitternetzwerke, sondern werden durch gewisse Eigenschaften dem einen oder anderen Typ zugeordnet. Dabei ist die Einteilung nicht eindeutig. Ein Netzwerk kann sowohl einen Small-World Charakter haben, als auch Eigenschaften eines Power Netzwerkes teilen.

Small-World Netzwerk

Die Grundlage für Small-World Netzwerke bietet das sogenannte Kleine-Welt-Phänomen, im Englischen auch „six degrees of seperation“ genannt. Dieses besagt, dass ein Mensch jeden anderen Menschen auf der Erde über eine kurze Kette von Bekanntschaften kennt. Dieses Phänomen wurde 1967 vom amerikanischen Psychologen Stanley Milgram zum ersten Mal experimentell nachgewiesen. Das Modell war folgendermaßen aufgebaut. Man bat 60 zufällig gewählte Personen ein Paket an eine Zielperson in einer weit entfernten Stadt zu schicken. Dies sollte allerdings nur passieren, wenn der Absender diese Person persönlich kennt. Wenn dies nicht der Fall war, sollte man das Paket an eine bekannte Person schicken, von der man annahm, sie kenne die Zielperson besser als man selbst. Der Paketweg wurde dabei dokumentiert und die angekommenen Pakete hatten eine durchschnittliche Weglänge von 5.5.

Das Kleine-Welt-Phänomen kann auch auf Netzwerke übertragen werden, dabei bezeichnen wir als Small-World Netzwerke solche, die zwei eher entgegengesetzte Eigenschaften verbinden. Small-World Netzwerke haben die Tendenz zur Cluster-Bildung und besitzen außerdem sehr kurze Pfadlängen. Anders ausgedrückt gibt es lokale Strukturen wie bei k-Ring Netzwerken, aber auch Verbindungen zu sehr weit entfernten Knoten, wie etwa bei Zufallsnetzwerken.

Viele real existierende Netzwerke haben Small-World Charakter. *Watts und Strogatz* haben gezeigt, dass das Stromversorgungsnetz der USA (Generatoren, Transistoren und Umspannwerke als Knoten, Hochspannungsleitungen als Verbindungen), ein Filmschauspielernetzwerk (Schauspieler sind verbunden, wenn sie gemeinsam in einem Film mitwirken) und das neuronale Netz einer Wurmart (Neuronen als Knoten, Synapsen als Verbindungen) Small-World Netzwerke bilden, siehe [WS98].

In dem Paper [WS98] haben *Watts und Strogatz* außerdem einen Algorithmus entwickelt, um ausgehend von einem k-Ring Netzwerk, ein Small-World Netzwerk zu erhalten. Dazu werden iterativ Verbindung mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p gelöscht und neue erstellt. Der durchschnittliche Grad des Netzwerks bleibt dabei erhalten, d.h. die Gesamtanzahl der Verbindungen bleibt konstant. Der genaue Algorithmus ist im Anhang A.2.3 abgebildet. Für $p = 0$ bleibt das k-Ring Netzwerk unverändert, während bei einem Wert von $p = 1$ ein völlig zufälliges Netzwerk entsteht. Abbildung 3.7 zeigt ein Small-World Netzwerk nach dem Algorithmus von Watts und Strogatz.

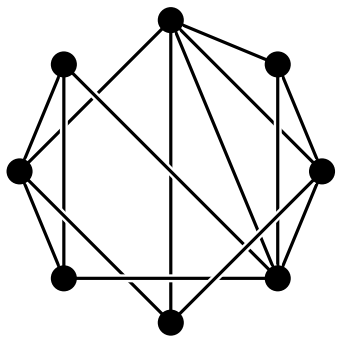

Abbildung 3.7: Graphische Darstellung eines Small-World Netzwerkes nach [Wil06].

Power Netzwerk

Alle bisher beschriebenen Netzwerktypen bzw. die Algorithmen zu deren Erzeugung haben zwei Gemeinsamkeiten. Zum einen ist die Anzahl der Knoten fest und zum anderen werden Verbindungen zwischen zwei Knoten immer mit der selben Wahrscheinlichkeit gebildet. Das sind Eigenschaften, die viele reale Netzwerke nicht besitzen. Diese wachsen im Verlauf der Zeit und neu hinzugefügte Knoten gehen Verbindungen zu Knoten mit hohem Grad ein. Man nennt das auch „bevorzugte Konnektivität“. Knoten mit sehr hohem Grad, also mit vielen existierenden Verbindungen, werden bevorzugt für neue Verbindungen ausgewählt. Dies führt dazu, dass einige wenige Knoten sehr viele Verbindungen haben und auf den Begriff des Power Netzwerks. Ein Power Netzwerk oder auch skalenfreies Netzwerk genannt ist dadurch gekennzeichnet, dass die Grad-Verteilung der Knoten einer Exponentialverteilung $P(k) \sim k^{-\gamma}$ folgt, dabei ist $P(k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Knoten genau k Verbindungen besitzt. Das heißt es gibt viele Knoten mit sehr wenigen Nachbarn und einzelne Knoten mit sehr vielen Nachbarn.

Beispiele für Power Netzwerke sind etwa das World Wide Web, siehe [AJB99], (websites als Knoten, hyperlinks als Verbindungen) oder das Internet, siehe [FFF99], (physikalische Verbindungen wie Kabel zwischen Computern und Routern). Diese beiden Netzwerke haben ebenfalls einen Small-World Charakter, siehe [AB02].

Barabási und Albert, siehe [BA99], haben einen Algorithmus beschrieben, der ein Power Netzwerk erzeugt. Dazu startet man mit einem kleinen zusammenhängendem Netzwerk, etwa einen k-Ring, und fügt weitere Knoten hinzu. Diese neuen Knoten bilden Verbindungen mit bereits existierenden Knoten. Dabei hängt die Wahrscheinlichkeit einen Knoten zu wählen von dessen Grad ab. Knoten mit höherem Grad werden dabei eher gewählt als Knoten mit wenigen Nachbarn. Der vollständige Algorithmus ist im Anhang A.2.1 beschrieben.

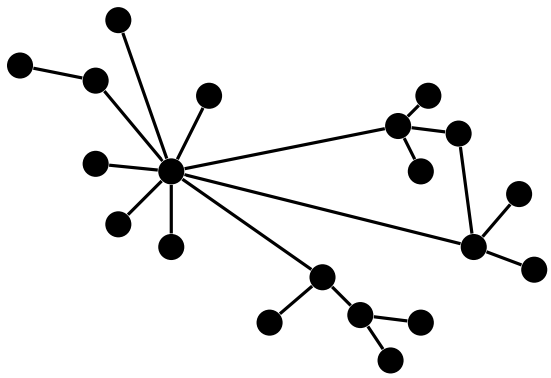

Abbildung 3.8: Graphische Darstellung eines Power Netzwerkes nach [Wil06].

KAPITEL 4

Markovketten

Im folgenden Kapitel wird der Begriff der Markovkette (kurz MK) eingeführt. Namensgeber dieser speziellen stochastischen Prozesse ist der russische Mathematiker *Andrej Andreevič Markov* (1856-1922). Der Aufbau des Kapitels folgt weitestgehend [WS12] und [WW12]. Wir beginnen mit der Definition und wichtigen Eigenschaften einer MK. Man ist häufig daran interessiert das System auf Gleichgewichtspunkte zu untersuchen, also Zustände die sich im weiteren Verlauf nicht mehr ändern. Dies führt auf den Begriff der stationären Verteilung. Satz 18 gibt schließlich eine Aussage zur Existenz und Eindeutigkeit von Grenzverteilungen, die das asymptotische Verhalten des Prozesses wiedergeben. Dazu werden in Kapitel 4.3 die Begriffe Aperiodizität und Irreduzibilität definiert. Zu guter Letzt wird in Kapitel 4.5 der Begriff der „Lumpability“ eingeführt, der bei der Darstellung von agentenbasierten Modellen (kurz ABM) als MK in Kapitel 5 von großer Bedeutung ist.

Definition und Grundlagen

Markovprozesse sind stochastische Prozesse, die die sogenannte Markov-Eigenschaft erfüllen. Dazu wird zuerst der Begriff des stochastischen Prozesses definiert.

Definition 4: *Sei $T \neq \emptyset$ eine Indexmenge, $(S, \mathcal{S})$ ein messbarer Raum, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Man nennt eine Familie $\{X_t\}_{t \in T}$ von Zufallsgrößen $X_t : \Omega \to S$ einen stochastischen Prozess.*

Die Werte $t \in T$ meinen in diesem Zusammenhang gewisse Zeitpunkte, zu denen man den Zufallsprozess betrachtet. Verwendet werden meist $T = [0, \infty]$ für zeit-stetige sowie $T = \mathbb{N}_0$ für zeitdiskrete stochastische Prozesse. Wir wollen uns in der Folge auf den Fall $T = \mathbb{N}_0$ beschränken. Der Raum $(S, \mathcal{S})$ wird auch als der Zustandsraum des stochastischen Prozesses bezeichnet. Für S beschränken wir uns auf endliche oder abzählbare Teilmengen der natürlichen Zahlen, also $S \subset \mathbb{N}$. Als Maß dient dabei das Zählmaß auf $\mathbb{N}$, das jeder Teilmenge von $\mathbb{N}$ die Anzahl der

Elemente zuordnet und schreiben kurz S für den Zustandsraum. Die Elemente des Zustandsraum werden als Markovzustände oder kurz Zustände des Prozesses bezeichnet. Wir erhalten mit diesen Forderungen die

Definition 5: *Sei $S = \{1, \ldots, m\}$ bzw. $S = \{1, 2, \ldots\}$ endlich oder abzählbar. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Man nennt die Folge von Zufallsgrößen $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ einen zeitdiskreten stochastischen Prozess mit höchstens abzählbarem Zustandsraum.*

Die Markov-Eigenschaft gibt an, dass der Prozess zum Zeitpunkt $n + 1$ lediglich vom Zustand des Prozesses zum Zeitpunkt n abhängt. Man nennt diese Eigenschaft auch Gedächtnislosigkeit und meint damit, dass es für den weiteren Verlauf keinen Unterschied macht, wie man zum gegenwärtigen Zustand gekommen ist.

Definition 6: *Ein zeitdiskreter stochastischer Prozess mit höchstens abzählbarem Zustandsraum erfüllt die Markov-Eigenschaft, wenn*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, X_0 = k_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \tag{4.1}$$

mit $i, j, k_0, \ldots, k_{n-1} \in S$. Mann nennt diesen Prozess eine Markovkette mit höchstens abzählbarem Zustandsraum.

Dabei bezeichnet $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit für Ereignisse A bedingt durch B, mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Wir wollen MK verwenden, um ABM zu beschreiben. Der Zustandsraum wird deshalb bei den betrachteten Beispielen immer endlich sein. Wenn nicht anders angegeben, wird im folgenden mit dem Begriff MK ein endlicher Zustandsraum gemeint.

Definition 7: *Sei $S = \{1, \ldots, m\}$ endlich und $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Markovkette mit Zustandsraum S. Dann bezeichnen wir mit $P(n) = p_{ij}(n)$ die sogenannte Übergangsmatrix. Dabei ist*

$$p_{ij}(n) := \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt n vom Zustand $i \in S$ in den Zustand $j \in S$ zu wechseln.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind im Allgemeinen also noch vom Zeitpunkt n abhängig. Ist dies nicht der Fall, so nennt man die Markovkette auch stationär bzw. zeithomogen.

Definition 8: *Erfüllt eine zeitdiskrete Markovkette die Eigenschaft*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i) \quad \forall i, j \in S, \forall n \in \mathbb{N}$$

so nennt man sie auch stationär. Die Übergangsmatrix ist gegeben als $P = p_{ij}$ mit $p_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j, X_0 = i)$.

Für die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} gilt

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, m\} \tag{4.2}$$

sowie

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{4.3}$$

Matrizen mit diesen Eigenschaften nennt man auch *stochastische Matrizen*. Es sei erwähnt, dass (4.2) und (4.3) sinngemäß auch für abzählbar viele Zustände gilt.

Die Übergangsmatrix gibt also die 1-Schritt Übergangswahrscheinlichkeiten der Markovkette an. Für gegebene Anfangsverteilung ist man häufig an der Verteilung der Zustände zu einem späteren Zeitpunkt $n > 1$ interessiert.

Satz 9. *Sei $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ eine stationäre zeitdiskrete Markovkette mit Übergangsmatrix P. $\mu^0 = (\mu_1^0, \ldots, \mu_m^0)$ die Anfangsverteilung der m Zustände, d.h. $\mu_i^0 = \mathbb{P}(X_0 = i) \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$. Dann ist die transiente Verteilung zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ gegeben als*

$$\mu^n = \mu^0 \cdot P^n = \mu^0 \cdot \underbrace{(P \cdot P \cdot \ldots \cdot P)}_{n\text{-Mal}}. \tag{4.4}$$

Bew: Wir führen den Beweis per Induktion. Für $n = 1$ berechnet sich die Verteilung des j-ten Zustandes aus den 1-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij} \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$ und der Anfangsverteilung μ^0 unter Ausnutzen der bedingten Wahrscheinlichkeit.

$$\begin{aligned} \mu_j^1 = \mathbb{P}(X_1 = j) &= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X_1 = j, X_0 = i) = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(X_0 = i) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \mu_i^0 \end{aligned}$$

Gibt man μ^1 als Zeilenvektor an so gilt demnach $\mu^1 = \mu^0 P$.
Gelte nun (4.4) für $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne μ^n den Zeilenvektor der Verteilung zum Zeitpunkt n. Da nach der Markov-Eigenschaft der Übergang nur vom momentanen Zustand abhäng, kann nach der selben Argumentation gefolgert werden:

$$\mu^{n+1} = \mu^n P = (\mu^0 P^n) P = \mu^0 P^{n+1}$$

■

Eine Veranschaulichung einer MK ist der sogenannte Übergangsgraph. Er enthält als Kreise die möglichen Zustände des Systems. Die gerichteten Pfeile geben dabei die möglichen Übergänge an, also alle Übergänge, für die eine positive Wahrscheinlichkeit gegeben ist. Die Wahrscheinlichkeiten können dabei auch als Zahlen neben den Pfeilen angegeben werden. Der mögliche

Verbleib in einem Zustand wird durch einen kreisförmig geschlossenen Pfeil beim Zustand angegeben (z.B. gilt für den Zustand 5 in Abbildung 4.1: $p_{5,5} > 0$).

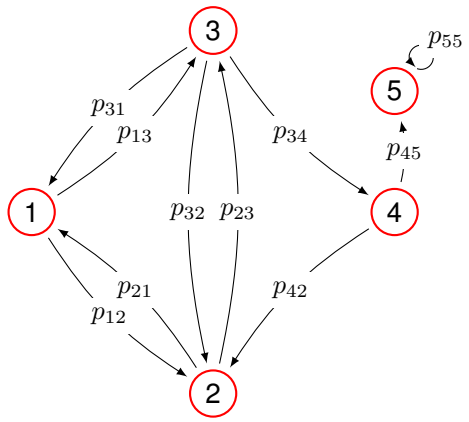

Abbildung 4.1: Übergangsgraph einer Markovkette mit 5 Zuständen.

Da kein weiterer Pfeil vom Zustand 5 wegführt, muss laut (4.3) die Übergangswahrscheinlichkeit $p_{55} = 1$ sein. Wenn sich die Markovkette in Zustand 5 befindet, bleibt sie für immer dort. Man nennt Zustände mit dieser Eigenschaft *absorbierend*. In Abbildung 4.2 ist eine verkürzte Darstellung des Übergangsgraphen angegeben.

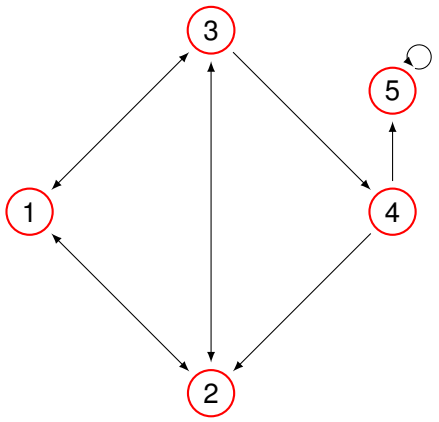

Abbildung 4.2: Übergangsgraph einer MK mit 5 Zuständen - Verkürzte Darstellung.

Ersteintrittszeiten und Absorbtionsverhalten

Im gesamten Abschnitt wird eine stationäre MK $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ mit endlichem Zustandsraum S betrachtet. Da wir im folgenden häufig in einem festen Anfangszustand $i \in S$ starten, werden

wir für beliebige Ereignisse A und Zufallsvariablen T die bedingte Wahrscheinlichkeit mit

$$\mathbb{P}_i(A) := \mathbb{P}(A|X_0 = i)$$

und die bedingte Erwartung mit

$$\mathbb{E}_i(T) := \mathbb{E}(T|X_0 = i)$$

abkürzen. Analog dazu wird auch die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Bedingung einer gegebenen Startverteilung μ als $\mathbb{P}_\mu(A)$ geschrieben.

Als Beispiel soll hier eine MK mit Zustandsraum $S = \{1, 2, \ldots, m\}$ mit einem absorbierenden Zustand m dienen. Da ein Entkommen aus dem absorbierenden Zustand nicht möglich ist, wollen wir wissen, ob bzw. wann die Markovkette diesen Zustand erreicht. Der Zeitpunkt an dem sich die Markovkette erstmals im absorbierenden Zustand m befindet nennen wir *Ersteintrittszeit*. Diese ist wiederum eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, die wir als

$$T_m = \inf\{n \geq 0 \ : \ X_n = m\} \quad (\inf \emptyset = \infty) \tag{4.5}$$

definieren. Es gilt $T_m = n$, wenn nach n Zeitschritten erstmals der absorbierende Zustand angenommen wird und $T_m = \infty$, wenn während des gesamten Prozessablaufs dieser niemals angenommen wird. In der Literatur werden Zufallsvariablen von der Form (4.5) auch *Stoppzeiten* genannt, siehe [WW12], Definition 46.

Sei $\mathbb{P}_i(T_m > t), t \in \mathbb{N}_0$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Markovkette den absorbierenden Zustand erst nach dem Zeitpunkt t erreicht und

$$\mathbb{P}_i(T_m = \infty) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_i(T_m > t).$$

Falls $\mathbb{P}_i(T_m = \infty) = 0$ also $\mathbb{P}_i(T_m < \infty) = 1$ so wird der absorbiernde Zustand mit Sicherheit in endlicher Zeit erreicht. Die Zufallsvariable T_m hat in diesem Fall Werte in $\mathbb{N}_0$ und die Erwartung der Ersteintrittszeit lässt sich, abhängig von dem Anfangszustand, berechnen als

$$\mathbb{E}_i(T_m) = \sum_{t=0}^{\infty} t\mathbb{P}_i(T_m = t) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(T_m > t).$$

Die letzte Gleichheit gilt, da T_m nur Werte in $\mathbb{N}_0$ hat, siehe Satz 32. Dieser Erwartungswert lässt sich sogar mittels linearem Gleichungssystem lösen, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 10 (Erwartungswert der Ersteintrittszeit). *Falls $\mathbb{P}_j(T_m < \infty) = 1$ für alle $j \neq m$, so ist $\mathbb{E}_i(T_m)$ die kleinste Lösung $u_i \geq 0,\ i \in \{1, \ldots, m\}$, des Gleichungssystems*

$$u_i = 1 + \sum_{j=1}^{m-1} p_{ij} u_j. \tag{4.6}$$

Bew: siehe [WS12].

■

Das lineare Gleichungssystem (4.6) ist im Allgemeinen nicht eindeutig lösbar. Für u_m entsteht wegen $p_{mj} = 0, \ \forall j \in \{1, \ldots, m-1\}$ in (4.6) die Gleichung $u_m = u_m$. Diese kann aus dem Gleichungssystem gestrichen werden. Zum Berechnen der erwarteten Ersteintrittzeiten wird also das lineare Gleichungssystem

$$(P_{m-1} - \mathsf{Id}_{m-1}) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

gelöst. Dabei ist P_{m-1} die (m - 1 $\times$ m - 1) Übergangsmatrix ohne m-ter Zeile und Spalte.

Das selbe Prinzip kann man auch auf eine Menge von Zuständen $J \subset S$ anwenden. Dabei ist

$$T_J = \inf\{n \geq 0 \ : \ X_n \in J\} \tag{4.8}$$

die Ersteintrittzeit in die Klasse J von Zuständen. Sei $k = |J|$ die Anzahl der Zustände in J und bezeichne mit Q die Matrix die entsteht, wenn man in der Übergangsmatrix P alle Zeilen und Spalten streicht, die den Indices $i \in J$ entsprechen, so erhält man die erwarteten Ersteintrittszeiten durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$(Q - \mathsf{Id}_{m-k}) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{m-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

mit $u_i = \mathbb{E}(T_i)$. Wenn der betragsmäßig größte Eigenwert von Q kleiner als 1 ist, existiert eine eindeutige Lösung dieses Gleichungssystems. Um das Gleichungssystem zu lösen, muss die Matrix $(Q - \mathsf{Id}_{m-k})$ invertiert werden. Die Inverse $(Q - \mathsf{Id}_{m-k})^{-1}$ wird auch *Fundamentalmatrix* genannt.

Klassifikation der Zustände

Oft ist man am Langzeitverhalten des Prozesses interessiert. Um diese Frage zu beantworten müssen jedoch zuerst wichtige Eigenschaften der MK bzw. deren Zustände definiert werden.

Definition 11: *Seien i und j Zustände einer Markovkette $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ mit Zustandsraum S.*

1. *Man nennt j von i aus erreichbar, i.Z. $i \to j$, falls*

$$\mathbb{P}_i(X_n = j \ \text{ für ein } \ n \geq 0) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_{ij}^{(n)} > 0 \quad \text{ für ein } n \geq 0.$$

2. *i, j sind verbunden, i.Z. $i \leftrightarrow j$, falls $i \to j$ und $j \to i$.*

Dabei bezeichnet $p_{ij}^{(n)}$ die n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand i nach Zustand j, welcher im stationären Fall gleich $(P^n)_{i,j}$ ist. Es ist einfach einzusehen, dass $\leftrightarrow$ eine Äquivalenzrelation darstellt, die den Zustandsraum S in disjunkte Teilmengen zerlegt. Wir nennen diese Teilmengen Klassen der MK.

Definition 12: *Man nennt eine Menge von Zuständen $C \subset S$ eine Klasse, wenn*

i) $i \in C, j \in C \quad \Rightarrow \quad i \leftrightarrow j$ *und*

ii) $i \in C, i \leftrightarrow j \quad \Rightarrow \quad j \in C,$

d.h. alle Zustände in C sind verbunden und $C \subset S$ ist maximal.

Definition 13: *Man nennt eine Menge von Zuständen $C \subset S$ eine abgeschlossene Klasse, wenn*

i) *C ist Klasse und*

ii) $i \in C, j \notin C \quad \Rightarrow \quad i \not\rightarrow j,$

d.h. kein Zustand $j \notin C$ ist von C aus erreichbar. Mann nennt eine abgeschlossene Klasse, die nur aus einem Zustand besteht, also $C = \{i\}$, einen absorbierenden Zustand. Dies gilt genau dann wenn $p_{ii} = 1$.

Satz 14 (Dekompositions-Theorem).
Der Zustandsraum S jeder Markovkette kann eindeutig zerlegt werden in

$$S = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k \cup T \tag{4.10}$$

wobei $C_1, C_2, \ldots, C_k$ abgeschlossene Klassen sind und T die Vereinigung aller anderen Klassen.

Definition 15: *Eine Markovkette heißt irreduzibel, wenn alle Zustände zu einer einzigen abgeschlossenen Klasse gehören. Anderenfalls heißt die Markovkette reduzibel.*

Definition 16: *Ein Zustand $i \in S$ heißt transient, wenn es ausgehend von Zustand i eine positive Wahrscheinlichkeit gibt, nie wieder zu i zurückzukehren. Anderfalls nennt man i rekurrent.*

Definition 17: *Ein Zustand $i \in S$ hat die Periode k, wenn jede mögliche Rückkehr zu Zustand i ein Vielfaches von k Zeitschritten braucht, also*

$$k = \mathsf{ggT}\Big\{n \ : \ \mathbb{P}(X_n = i, X_0 = i) > 0\Big\}. \tag{4.11}$$

Hat ein Zustand Periode 1 so nennt man ihn aperiodisch, andernfalls periodisch mit Periode k.

Beispiel: Betrachten wir die MK aus Abbildung 4.1. Hier zerfällt der Zustandsraum in die abgeschlossene Klasse $C = \{5\}$ und die nicht abgeschlossenen Klassen $T = \{1, 2, 3, 4\}$. Der absorbierende Zustand 5 ist rekurrent mit Periode 1 (aperiodisch). Die Zustände aus $T = \{1, 2, 3, 4\}$ sind transient und aperiodisch. Die mögliche Rückkehrpfade zu Zustand 4 sind zum Beispiel:

$n:$	0		1		2		3		4		5
	4	$\mapsto$	2	$\mapsto$	3	$\mapsto$	4				
	4	$\mapsto$	2	$\mapsto$	1	$\mapsto$	3	$\mapsto$	4		
	4	$\mapsto$	2	$\mapsto$	3	$\mapsto$	2	$\mapsto$	3	$\mapsto$	4

usw. also $k = \mathsf{ggT}\{3, 4, 5, 6, \ldots\} = 1$.

Stationäre Verteilung und asymptotisches Verhalten

In diesem Kapitel wird die Frage nach dem Langzeitverhalten der MK behandelt. Konvergiert die Verteilung der Zustände gegen eine Grenzverteilung? Ist diese eindeutig bzw. unabhängig von der gewählten Anfangsverteilung? Diese Fragen können mit den Eigenschaften aus dem vorherigen Kapitel beantwortet werden. Wir beginnen mit der Definition einer Grenzverteilung.

Im ganzen Kapitel sei $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ eine MK mit endlichem Zustandsraum $S = \{1, \ldots, m\}$ und Übergangsmatrix P.

Definition 18: *Wir nennen eine Verteilung $\pi = [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m]$ eine Grenzverteilung der Markovkette, wenn*

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) \quad j \in S. \tag{4.12}$$

Satz 19 (Grenzverteilung). *Falls eine Grenzverteilung π existiert, erfüllt sie*

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{m} \pi_i p_{ij} \tag{4.13}$$

und

$$\sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1. \tag{4.14}$$

Bew: siehe [WS12].

■

Gleichung (4.13) wird auch *Balancegleichung* genannt und kann in Matrix-Schreibweise auch

$$\pi = \pi P \tag{4.15}$$

geschrieben werden. Gleichung (4.14) nennen wir *Normierungsgleichung*. Die Existenz einer Grenzverteilung ist nicht immer gesichert. Manche MK besitzen jedoch stationäre Verteilungen. Diese sind wie folgt definiert.

Definition 20: *Die Verteilung $\pi^* = [\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots, \pi_m^*]$ wird stationäre Verteilung der Markovkette genannt, wenn für $\mathbb{P}(X_0 = i) = \pi_i^*$ für alle $i \in S$*

$$\mathbb{P}(X_n = i) = \pi_i^* \quad \forall i \in S \quad \forall n \geq 0$$

gilt.

Stationäre Verteilungen sind also Anfangsverteilungen, die sich in weiterer Folge nicht mehr verändern.

Satz 21 (Charakterisierung stationärer Verteilungen). *$\pi^* = [\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots, \pi_m^*]$ ist eine stationäre Verteilung genau dann, wenn sie die Balancegleichung (4.13) und die Normierungsgleichung (4.14) erfüllt.*

Bew: siehe [WS12].

■

Mithilfe dieser äquivalenten Formulierung können wir stationäre Verteilungen bei bekannter Übergangsmatrix P bestimmen. Dazu verwenden wir die Matrixgleichung (4.15) der *Balancegleichung*. Transponieren wir die Vektoren auf beiden Seiten so erhält man

$$\begin{array}{rrcl} & \pi^T & = & P^T \pi^T \\ \Leftrightarrow & \mathsf{Id}_m \pi^T & = & P^T \pi^T \\ \Leftrightarrow & (P^T - \mathsf{Id}_m)\pi^T & = & 0_m, \end{array}$$

dabei ist 0_m der m-dimensionale Nullvektor und Id_m die m-dimensionale Einheitsmatrix. Um nun auch die *Normierunsgleichung* in dieses System einzubauen, erweitert man die Matrix um eine weitere Zeile $[1, 1, \ldots, 1]$. Wegen

$$[1, 1, \ldots, 1] \cdot \pi^T = \sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1$$

beschreibt die $m + 1$-te Zeile die *Normierungsgleichung*, wenn auf der rechten Seite in der $m + 1$-ten Zeile eine 1 angefügt wird. Es gilt also folgendes:

Korollar 22: (Matrixgleichung stationärer Verteilungen). $\pi^* = [\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots, \pi_m^*]$ *ist stationäre Verteilung genau dann, wenn*

$$\begin{pmatrix} (P^T - \mathsf{Id}_m) \\ \\ 1 \;\; 1 \cdots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1^* \\ \vdots \\ \pi_m^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_m \\ \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

gilt.

Eine Grenzverteilung ist also, falls existent, auch eine stationäre Verteilung und erfüllt somit auch die Matrixgleichung (4.16). Die Frage nach Eindeutigkeit einer Grenzverteilung kann im Fall einer irreduziblen MK positiv beantwortet werden.

Satz 23 (Eindeutigkeit einer Grenzverteilung). *Eine irreduzible Markovkette hat eine eindeutige stationäre Verteilung, d.h. es existiert genau eine Verteilung* $\pi^* = [\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots, \pi_m^*]$ *die (4.16) erfüllt. Falls eine Grenzverteilung existiert, muss sie somit mit der eindeutigen stationären Verteilung übereinstimmen.*

Bew: siehe [WS12].

■

Ist die Markovkette außerdem aperiodisch so gilt

Satz 24 (Existenz und Eindeutigkeit einer Grenzverteilung). *Eine zeitdiskrete irreduzible aperiodische Markovkette besitzt eine eindeutige Grenzverteilung*

Bew: siehe [WS12].

■

Diese eindeutige Grenzverteilung kann nun mit Gleichung (4.16) bestimmt werden.

Reduktion des Zustandsraums - Lumpability

In manchen Fällen ist es notwendig bzw. sinnvoll den Zustandsraum einer MK zu reduzieren. Dies geschieht, indem man mehrere Markovzustände zusammenfasst und somit eine Partition des Zustandsraums erhält. Auf dieser Partition wird nun ein neuer stochastischer Prozess definiert und künftig als reduzierter Prozess bezeichnet. Einfache Beispiele zeigen, dass der reduzierter Prozess im Allgemeinen keine MK mehr darstellt. Deshalb muss die Markoveigenschaft (4.1) beim Zusammenlegen mehrerer Zustände erneut überprüft werden. Ob die Markoveigenschaft gilt, hängt von der ursprünglichen MK, der gewählten Partition sowie der Anfangsverteilung μ^0 der ursprünglichen MK ab. So kann es sein, dass zu einer gegebenen MK nur bestimmte Partitionen die Markoveigenschaft erhalten. Es kann aber auch vorkommen, dass bei einer gegebenen Partition die Anfangsverteilung μ^0 entscheidet, ob der reduzierte Prozess eine MK

darstellt.

Dies führt auf den Begriff der „Lumpability“ (wörtlich übersetzt: Klumpigkeit) einer MK, der erstmals von *Kemeny und Snell* in [KS83] eingeführt wurde. In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Definitionen und Sätze nach [KS83] angeführt. Dazu ist im folgenden $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ eine stationäre MK auf dem Zustandsraum $S = \{1, \ldots, r\}$ mit Übergangsmatrix $P = (p_{ij})$. Die Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand i in den Zustand j wird auch geschrieben als

$$P(i,j) = p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i).$$

Definition 25: *Eine Partition $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_\ell\}$ des Zustandsraums $S = \{1, 2, \ldots, r\}$ mit $\ell < r$ ist eine Zerlegung von S in nichtleere, paarweise disjunkte Teilmengen, d.h. es gilt:*

1. $A_k \neq \emptyset \quad \forall k = 1, \ldots, \ell.$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j, i, j \in \{1, \ldots, \ell\}.$
3. $\bigcup_{k=1}^{\ell} A_k = S.$

Wir bezeichnen mit $\hat{S} := \{1, \ldots, \ell\}$ die Indexmenge der Partition.

Definition 26: *Der reduzierte stochastische Prozess (engl.: lumped process) $Y = (Y_n)_{n=0}^{\infty}$ wird auf dem Zustandsraum $\hat{S} = \{1, \ldots, \ell\}$ folgendermaßen definiert:*

$$Y_n = j \quad \Leftrightarrow \quad X_n \in A_j \quad \forall j \in \hat{S}, \forall n \geq 0, \tag{4.17}$$

mit Übergangswahrscheinlichkeiten von der Form

$$\mathbb{P}(Y_n = j \mid Y_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, Y_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_n \in A_j \mid X_{n-1} \in A_{i_{n-1}}, \ldots, X_0 \in A_{i_0}), \tag{4.18}$$

mit $j, i_0, \ldots, i_{n-1} \in \hat{S}$.

Definition 27: *Wir bezeichnen eine Markovkette X als „lumpable“ bezüglich einer Partition $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_\ell\}$, wenn für alle Anfangsvektoren μ^0 der Prozess definiert durch (4.17) und (4.18) die Markoveigenschaft (4.1) erfüllt und die Übergangswahrscheinlichkeiten unabhängig von der gewählten Anfangsverteilung μ^0 sind.*

Wie schon zuvor erwähnt, ist dies im Allgemeinen nicht der Fall. Dies soll anhand eines Beispiels aus [RS91] verdeutlicht werden.

Beispiel: Wir betrachten die MK auf dem Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

mit $0 < p \leq 1$. Als Partition wird $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ mit $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2, 3\}$ gewählt, d.h. Zustand 2 und 3 werden verbunden. Um festzustellen, ob der reduzierte stochastische Prozess die Markoveigenschaft erfüllt, müssen die Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmt werden. In diesem Fall gilt z.B.

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in A_1 \mid X_n \in A_2, X_{n-1} \in A_1) = 0,$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in A_1 \mid X_n \in A_2, X_{n-1} \in A_2) = 1,$$

also ist die Markoveigenschaft nicht erfüllt.

Wir bezeichnen mit

$$P(i, A_j) = p_{iA_j} = \sum_{k \in A_j} p_{ik}, \tag{4.20}$$

die Einschritt-Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand i in die Menge A_j. Mithilfe dieser Übergangswahrscheinlichkeit kann eine hinreichende Bedingung angegeben werden, unter der der reduzierte Prozess die Markoveigenschaft erfüllt.

Satz 28. *Eine Markovkette X ist stark „lumpable“ bezüglich einer Partition $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_\ell\}$ genau dann, wenn für jedes Paar von Mengen $A_i, A_j, i, j \in \hat{S}$ der Partition die Übergangswahrscheinlichkeit $P(k, A_j) = p_{kA_j}$ den selben Wert für alle $k \in A_i$ besitzt.*
In diesem Fall ergeben sich als Übergangswahrscheinlichkeiten der reduzierten Markovkette, die Werte

$$\hat{P}(i, j) = \hat{p}_{ij} := p_{kA_j} \quad k \in A_i, i, j \in \hat{S}, \tag{4.21}$$

die zur Übergangsmatrix $\hat{P}$ der reduzierten Markovkette zusammengefasst werden.

Bew: siehe [KS83], Theorem 6.3.2.

■

Für endliche Zustandsräume kann die Übergangsmatrix der reduzierten MK auch in Form einer Matrixgleichung angegeben werden. Sei dazu U eine $\ell \times r$ Matrix, deren i-te Zeile ein Wahrscheinlichkeitsvektor mit gleichgroßen Werten an den Stellen der Zustände in A_i ist. Eine weitere Matrix V ist gegeben als $r \times \ell$ Matrix, in der die j-te Spalte für Zustände in A_j den Wert 1 annimmt und sonst 0. Dann gilt die Matrixgleichung

$$\hat{P} = UPV. \tag{4.22}$$

Die Form der Matrizen U und V wird anhand von Beispielen weiter unten konkretisiert. Es gilt außerdem der folgende

Satz 29. *Eine Markovkette X ist „lumpable“ bezüglicher der Partition $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_\ell\}$ genau dann, wenn die Matrizen U und V, definiert bezüglich der Partition $\mathcal{A}$, folgende Matrixgleichung erfüllen:*

$$VUPV = PV \tag{4.23}$$

Bew: siehe [KS83], Theorem 6.3.4 und 6.3.5.

■

Satz 29 bietet sich an, um zu überprüfen, ob eine gewählte Partition dazu geeignet ist eine reduzierte MK zu erzeugen.

Beispiel: Wir betrachten ein weiteres Mal das obige Beispiel einer MK mit $S = \{1, 2, 3\}$ und der Übergangsmatrix (4.19) und wollen Satz 29 dazu verwenden, um zu untersuchen, ob es eine nicht triviale Partition gibt bezüglich der die MK „lumpable“ ist.
Sei die Partition $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ gegeben, dann sind $r = 3, \ell = 2$ und die Matrizen U und V lauten

$$U = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen die Gleichheit der Matrixgleichung (4.23):

$$\begin{array}{ccccc} VU & PV & = & PV \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Diese ist nicht erfüllt und somit laut Satz 29 der reduzierte Prozess keine MK.
Auch die letzte mögliche Partition $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$ erfüllt die Matrixgleichung (4.23) nicht. Man erhält

$$VUPV = \begin{pmatrix} 1 - \frac{p}{2} & \frac{p}{2} \\ 1 & 0 \\ 1 - \frac{p}{2} & \frac{p}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad PV = \begin{pmatrix} 1 - p & p \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

was für die möglichen Werte von $0 < p \leq 1$ ebenfalls ungleich ist. Somit ist die MK für keine Partition „lumpable“.

Beispiel: Ein weiteres Beispiel aus [RS91] soll nun eine „lumpable“ MK zeigen. Wir betrachten eine MK mit 3 Zuständen $S = \{1, 2, 3\}$ und der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 - p & p & 0 \\ q & 0 & 1 - q \\ q & 1 - q & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

mit $0 < p \leq 1$ und $0 < q < 1$. Als Partition wird $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2,3\}\}$ gewählt. Somit ergibt sich mit

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Gleichheit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}}_{VU} \underbrace{\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \\ q & 1-q \end{pmatrix}}_{PV} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \\ q & 1-q \end{pmatrix}}_{PV}.$$

Die Übergangsmatrix $\hat{P}$ wird mithilfe von Gleichung (4.22) berechnet:

$$\hat{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \\ q & 1-q \end{pmatrix}}_{PV} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

Die Matrixdarstellung (4.23) aus Satz 29 ist sehr gut dazu geeignet zu überprüfen, ob eine gewählte Partition auf eine MK führt. Aus den obigen Beispielen beziehungsweise der Definition der Matrizen U und V lässt sich im Fall einer „lumpable“ MK folgendes schließen:

1. Sei o.B.d.A die Partition $\mathcal{A}$ aufsteigend nummeriert, dann hat die Matrix VU die Form

$$VU = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & W_\ell \end{pmatrix}, \tag{4.25}$$

   wobei die W_j stochastische Matrizen der Dimension $|A_j|$ sind. Durch die Wahl von U sind dabei für jedes $j \in \hat{S}$ alle Einträge innerhalb von A_j gleich.

2. Bedingung (4.23) bedeutet, dass die Spalten von PV Eigenvektoren der Matrix VU zum Eigenwert 1 sind.

3. In den Spalten der Matrix PV haben alle Einträge die zur selben Menge A_i gehören den selben Wert. Die Einträge der Matrix PV sind wegen

$$PV = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} \sum_{v \in A_1} p_{1v} & \cdots & \sum_{v \in A_\ell} p_{1v} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{v \in A_1} p_{rv} & \cdots & \sum_{v \in A_\ell} p_{rv} \end{pmatrix}$$

gegeben als

$$(PV)_{k,j} = p_{kA_j} = \sum_{v \in A_j} p_{kv}.$$

Diese müssen nach Satz 28 für alle $k \in A_i$ gleich sein.

KAPITEL 5

Agentenbasierte Modelle als Markovketten

In ihrem Paper [BLA11] entwickeln *Banisch et al.* eine Methode, um agentenbasierte Modelle (kurz ABM) mithilfe von Markovketten (kurz MK) zu beschreiben. Die Methode wird dabei auf einfache Entscheidungsmodelle angewandt und die betrachteten Beispiele werden mithilfe von Eigenschaften der MK analysiert. Die Vorgangsweise ist folgende: Zuerst wird das ABM als MK auf dem Raum aller Konfigurationen beschrieben. Diese MK wird auch als Mikrodynamik oder Mikrobeschreibung des ABM bezeichnet. Dieser Schritt beruht auf der Arbeit von *Izquierdo et al.*, siehe [IIGS09]. Darin werden 10 bekannte ABM, wie z.B. Schellings Segregationsmodell [Sch71], als stationäre MK beschrieben und analysiert. Dabei werden zwar alle Informationen des Modells in der MK wiedergegeben, doch die hohe Dimensionalität des Konfigurationsraums sowie der Übergangsmatrix führen zu Problemen in der Analyse.

Banisch et al. zeigen im nächsten Schritt, wie man aus der Mikrobeschreibung des ABM eine Makrobeschreibung erhält. Dazu wird eine Projektion vom Konfigurationsraum auf den Zustandsraum des Makromodells definiert. Die konstruierte Projektion muss dabei bestimmte Bedingungen erfüllen, um zu garantieren, dass der Prozess immer noch die Markoveigenschaft erfüllt. Üblicherweise betrachtet man dabei aggregierte Größen oder Observablen des Modells.

In den folgenden Abschnitten werden die einzelnen Schritte formal präzisiert. Dazu wird zuerst einen Notation für das ABM angegeben.

Formale Beschreibung von ABM

Wie schon im letzten Kapitel angemerkt, existiert keine universelle Definition bzw. Notation von ABM. Oftmals sind in der Praxis außerdem nur rein textuelle Beschreibungen der Modellstruktur bzw. der Modelldynamik gegeben. Ausgehend von dieser textuellen Beschreibung kann man

nun versuchen, eine formale Definition des Modells herzuleiten. Die folgende Notation wird im Verlauf dieser Arbeit für zeit-diskrete ABM mit äquidistanten Zeitschritten verwendet.

Sei $N \in \mathbb{N}$ die Anzahl der betrachteten Agenten im Modell. Jeder Agent besitzt gewisse Eigenschaften, auch Attribute genannt, die ihn beschreiben. Diese Attribute können verschiedene quantifizierbare Werte, also Zahlenwerte, oder nicht quantifizierbare Werte, wie z.B. Strings oder boolesche Werte, annehmen. Wir bezeichnen $x_i(n) \in \sigma$ als den Zustand des i-ten Agenten und $x(n) = \Big(x_1(n), \ldots, x_N(n)\Big)$ als die Konfiguration bzw. den Zustand des Modells zum Zeitpunkt n. Wenn der Zeitpunkt des Zustandes keine Rolle spielt, wird auch $x = (x_1, \ldots, x_N)$ geschrieben. Der Zustand $x_i(n)$ ist ein Vektor, der die Werte aller Attribute des Agenten zusammenfasst, σ bezeichnet dabei den individuellen Merkmalsraum eines Agenten und $|\sigma|$ gibt die Anzahl der möglichen Wertkombinationen aller Attribute an. Der individuelle Merkmalsraum gibt alle möglichen Werte der einzelnen Attribute an und ist bei den betrachteten Beispiele stets endlich.

Der Zustand der Agenten, und damit auch des ABM, ändert sich im Verlauf der Simulation. Zum einen können sich Agenten unabhängig in ihrer Umgebung bewegen und so ihre Attribute verändern, zum anderen können auch Änderungen nach Interaktionen mit anderen Agenten erfolgen. All diese Möglichkeiten werden in der sogenannten Aktualisierungsregel (engl.: *update rule*) zusammengefasst. Diese erzeugt aus $x(n)$ einen möglichen Zustand $x(n+1)$. Anders ausgedrückt wird ausgehend von einem Zustand des ABM ein Zeitschritt der Simulation durchgeführt. Dabei werden die Attribute aller Agenten aktualisiert. Da es sich um stochastische Modelle handelt, kann dies jedoch zu unterschiedlichen Zuständen $x(n+1)$ führen. Der Aktualisierungsprozess verläuft dabei meist in zwei Schritten. Zuerst wird eine zufällige Auswahl von Agenten gemäß einer gegebenen Verteilung getroffen. Danach werden, auf Basis dieser Auswahl, die Attribute der Agenten nach vorgegebenen Regeln aktualisiert.

Mikrodynamik - MK auf Konfigurationsraum

Der vorherige Abschnitt beschreibt die Dynamik des ABM in Hinblick auf die Zustände der Agenten, also die Werte der Attribute. Ausgehend von einem Startwert

$$x(0) = \Big(x_1(0), \ldots, x_N(0)\Big)$$

wird mittels Aktualisierungsregel eine Simulation durchgeführt. Die Dynamik des ABM kann nun auch als MK auf dem Raum aller Konfigurationen des Modells aufgefasst werden. Eine Konfiguration fasst die Eigenschaften aller Agenten zusammen. Wir bezeichnen mit

$$\sigma^N =: \Sigma = \Big\{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r\Big\}$$

den Raum aller Konfigurationen des Modells, oder kurz Konfigurationsraum, dabei ist

$$\underbrace{\sigma^N = \sigma \times \sigma \times \ldots \times \sigma}_{N\text{ -mal}}$$

das kartesische Produkt der individuellen Merkmalsräume.

Die Möglichkeit ein stochastisches ABM als MK auf dem Konfigurationsraum Σ darzustellen, leitet sich aus einer weiteren Eigenschaft von MK ab, der sogenannten Random Mapping Representation (kurz RMR), siehe [LPW09].

Definition 30: *Als Random Mapping Representation einer Übergangsmatrix P auf dem Zustandsraum S wird eine Funktion $f: S \times \Lambda \to S$ gemeinsam mit einer Λ-wertigen Zufallsvariable Z bezeichnet, die*

$$\mathbb{P}\Big(f(i, Z) = j\Big) = p_{ij}$$

für alle Zustände $i, j \in S$ erfüllen.

Sei $Z_1, Z_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen die alle wie Z verteilt sind und X_0 habe die Verteilung μ^0, dann ist die Folge $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ definiert durch

$$X_n := f(X_{n-1}, Z_n) \quad \textit{für} \quad n \geq 1$$

eine Markovkette mit Übergangsmatrix P und Anfangsverteilung μ^0.

Es gilt der folgende

Satz 31. *Jede Markovkette $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ auf einem endlichen Zustandsraum S mit Übergangsmatrix P besitzt eine RMR.*

Bew: nach [LPW09]: Sei $S = \{1, 2, \ldots, m\}$ der Zustandsraum der Markovkette und P die $m \times m$ Übergangsmatrix. Sei das Intervall $\Lambda = [0, 1]$ gegeben und die Zufallsvariablen $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ sind uniform auf dem Intervall Λ verteilt. Wir setzen

$$F_{j,k} = \sum_{i=1}^{k} p_{ji}$$

und definieren

$$f(j, z) := k \quad \text{falls} \quad F_{j,k-1} < z \leq F_{j,k}.$$

Somit gilt

$$\mathbb{P}\Big(f(j, Z) = k\Big) = \mathbb{P}(F_{j,k-1} < Z \leq F_{j,k}) = p_{jk}.$$

■

Bemerkung: Im Gegensatz zur Übergangsmatrix ist eine RMR nicht eindeutig. Betrachtet man den Beweis von Satz 31, so hätte auch die Funktion $f(j, 1-z)$ eine RMR der selben Übergangsmatrix dargestellt.

Umgekehrt kann zu jeder RMR in natürlicher Weise eine MK mit Übergangsmatrix

$$p_{ij} := \mathbb{P}\Big(f(i, Z) = j\Big)$$

gefunden werden. Somit kann jedes ABM, das eine Darstellung als RMR besitzt, als MK auf dem Konfigurationsraum aufgefasst werden.

Wie schon eingangs erwähnt, nennt man diese MK die Mikrodynamik des ABM. Sie wird im folgenden mit (Σ, P) bezeichnet. Die RMR ist eine geeignete Weise um ABM zu beschreiben und viele sind implizit schon als solche gegeben. In textuellen Beschreibungen wird etwa angegeben unter welchen Umständen sich die Attribute der Agenten verändern. Die Zufallsvariablen $Z, Z_1, \ldots$ beschreiben dabei die stochastischen Komponenten der Dynamik und die Funktion f definiert die Übergänge im Konfigurationsraum in Abhängigkeit von den Zufallsvariablen. Zum Verständnis der RMR wollen wir ein Beispiel aus [LPW09] anführen, das in ähnlicher Weise in Kapitel 6 wieder auftaucht.

Beispiel: Random Walk auf $\mathbb{Z}_n$
Sei $n \in \mathbb{N}$, $S = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ die Restmenge bei Division durch n. Die Übergangsmatrix

$$p_{ij} := \begin{cases} 0.5 & \text{falls } j \equiv i+1 \mod n \\ 0.5 & \text{falls } j \equiv i-1 \mod n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschreibt eine MK eines Random Walks auf einem Kreis mit n Feldern. Anstatt die Übergangsmatrix anzugeben, kann man die MK auch implizit als RMR beschreiben: In jedem Zeitschritt wird eine Münze geworfen. Bei Kopf bewegt man sich im Uhrzeigersinn, bei Zahl entgegen dem Uhrzeigersinn. Formal gibt es eine Folge von Zufallsvariablen $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ die uniform auf der Menge $\Lambda = \{-1, +1\}$ verteilt sind. Diese beschreiben den Münzwurf in jedem Zeitschritt. Die Funktion f aus der RMR in Definition 30 wird nun als

$$f(i, z) := i + z \mod n \qquad \forall i \in S$$

gewählt und es gilt

$$\mathbb{P}\Big(f(i, Z) = j\Big) = \mathbb{P}\Big((i + Z) \mod n = j\Big) = p_{ij}.$$

Für eine Anfangsverteilung der Zustände μ^0 kann nun mithilfe der Übergangsmatrix und Satz 9 die Dynamik des Modells beschrieben werden. Dabei ist anzumerken, dass die Übergangsmatrix im Allgemeinen viele 0-Einträge besitzt, da nur wenige Übergänge im Konfigurationsraum möglich sind.

Wie schon zuvor erwähnt, gibt es $|\sigma|$ mögliche Zustände für jeden Agenten. Somit erhält man eine Dimension des Konfigurationsraums von $r = |\sigma|^N$ und eine $|\sigma|^N \times |\sigma|^N$ Übergangsmatrix.

Dies ist in der Regel eine enorm hohe Dimension und führt zu Problemen in der Analyse, da hierbei oftmals die Fundamentalmatrix bestimmt und somit eine Matrix hoher Dimension invertiert werden muss. Um die Dimension des Zustandsraum zu reduzieren, versucht man mehrere Konfigurationen zusammenzufassen. Dies ist bei der Analyse des Modells auch sinnvoll, da man nicht immer zwischen allen möglichen Konfigurationen unterscheiden möchte, sondern Konfigurationen mit den selben Eigenschaften gleich behandelt. Der folgende Abschnitt beschreibt die Vorgangsweise von *Banisch et al.*

Makrodynamik - MK auf reduziertem Zustandsraum

Bei der Simulation ABM ist man üblicherweise nicht an allen Details des Models zu jedem Zeitpunkt interessiert, sondern an der Dynamik wichtiger Variablen auf makroskopischer Ebene. Ziel dieses Abschnittes ist es, eine MK zu konstruieren, die die Makrodynamik des Modells beschreibt. Dazu werden mehrere unterschiedliche Konfigurationen zu einem neuen Markovzustand zusammengefasst. Die Art und Weise, wie dies geschieht, ist von Modell zu Modell unterschiedlich und hängt auch davon ab, was zu analysieren ist. So kann man etwa gewisse Symmetrien des Modells ausnutzen. Häufig verwendet werden sogenannte aggregierte Größen. Diese geben etwa an, welcher Anteil der Agenten eine gewisse Eigenschaft teilt. Die unterschiedlichen Möglichkeiten werden bei den Beispielen in Kapitel 6 genauer besprochen. Wir bezeichnen die gesuchte MK als $Y = (Y_n)_{n=0}^{\infty}$ auf dem neuen Zustandsraum $\hat{S} = \{1, 2, \ldots, \ell\}$ mit Übergangsmatrix $\hat{P}$, kurz $(\hat{S}, \hat{P})$. *Banisch et al.* geben dabei zwei äquivalente Zugänge an.

Wir bezeichnen mit Π eine Projektionsabbildung vom Konfigurationsraum Σ auf den neuen Zustandsraum $\hat{S}$. Die Abbildung Π wird dabei so gewählt, dass die Konfigurationen des Urbilds Π^{-1} eine bestimmte Makroeigenschaft teilen. Ein anderer aber äquivalenter Zugang ist es, eine Observable des Modells zu definieren und die Konfigurationen zusammenzufassen, die den selben Wert dieser Observablen annehmen. Dabei ist eine Observable eine Abbildung $\phi : \Sigma \to \hat{S}$ die jeder Konfiguration den Wert einer bestimmten Modellgröße zuordnet. Dies kann z.B. der Wert einer aggregierten Größe sein oder ein Wert der sich daraus berechnet. Jede Observable definiert in natürlicher Weise eine Projektion Π, indem alle Konfigurationen, die den selben Wert der Observable besitzen, zu einem neuen Markovzustand zusammengefasst werden. Umgekehrt definiert jede Projektionsabbildung Π eine Observable mit Bild in $\hat{S}$. Wir verwenden im weiteren Verlauf die Darstellung mit Projektionabbildung $\Pi : \Sigma \to \hat{S}$.

Der erhaltene stochastische Prozess erfüllt dabei nicht notwendigerweise die Markoveigenschaft, vgl. Kapitel 4.5. Sei dazu $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$ die MK der Mikrodynamik auf dem Konfigurationsraum $\Sigma = \{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k\}$ mit r Konfigurationen, $\hat{S} = \{1, 2, \ldots, \ell\}$ mit $r < \ell$ der Zustandsraum des projezierten Prozesses und $\Pi : \Sigma \to \hat{S}$ eine Projektionsabbildung. Diese legt die Partition $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_\ell\}$ mittels

$$A_k := \Big\{\Sigma_j \in \Sigma \ : \ \Pi(\Sigma_j) = k\Big\} = \Pi^{-1}(k)$$

fest. Die Mengen aus $\mathcal{A}$ sind also die Urbildmengen der Projektionsabbildung. Wir definieren nun die Makrodynamik des ABM bezüglich der Projektionsabbildung Π als den reduzierten

stochastischen Prozess $Y = (Y_n)_{n=0}^{\infty}$ auf dem Zustandsraum $\hat{S}$ bezüglich der Partition $\mathcal{A}$ wie in 4.17 und 4.18. Falls nun die MK X der Mikrodynamik auf Σ bezüglich der Partition $\mathcal{A}$ „lumpable“ ist, so erfüllt der stochastische Prozess Y die Markoveigenschaft (4.1). Somit kann die Makrodynamik als MK beschrieben werden. Dabei kann die Übergangsmatrix $\hat{P}$ mittels Gleichung (4.21) bestimmt werden. Satz 28 und 29 geben dazu hinreichende Bedingungen zur „Lumpability“ an.

Die Bedingungen aus Satz 28 und 29 geben an, dass nur Zustände zusammengefasst werden dürfen, die bezüglich der Übergangsmatrix P der Mikrodynamik gewisse Symmetrien aufweisen. Wir werden in den Beispielen in Kapitel 6 sehen, dass ohne solche Symmetrien, die Makrodynamik nicht als Markovkette aufgefasst werden kann. *Banisch et al.* nennen als möglichen Grund dafür, das auftreten von Langzeiteffekten, wodurch die Markoveigenschaft nicht erfüllt ist.

KAPITEL 6

Beispiele

In diesem Kapitel soll anhand ausgewählter Beispiele gezeigt werden, wie die Konstruktion einer Markovkette (kurz MK) eines gegebenen agentenbasierten Modells (kurz ABM) funktioniert. Die Beispiele wurden großteils aus der Literatur zu ABM entnommen oder aus solchen motiviert. Es handelt sich dabei um einfache Bewegungsmodelle, dynamische Entscheidungsmodelle und dynamische Spiele. Diese Beispiele wurden ausgewählt, da sie einfach zu beschreiben und implementieren sind und trotzdem viele Besonderheiten von ABM beinhalten. Außerdem können sie auch als Teilmodell von komplexeren ABM verwendet werden, wie etwa die Bewegungsmodelle bzw. die Struktur der Interaktionsnetzwerke der dynamischen Entscheidungsmodelle und Spiele. Im Kapitel 7 wird nochmals genauer auf die Auswahl der Beispiele eingegangen. Anhand dieser Beispiele soll demonstriert werden, welche Analysemöglichkeiten die Darstellung als MK bietet und in welchen Fällen eine makroskopische Beschreibung überhaupt möglich ist. Vor der Beschreibung der Beispiele werden noch einige Bemerkungen zum Aufbau und zur Implementierung gemacht.

Vorbemerkungen

Der Aufbau der einzelnen Modellbeispiele erfolgt nach folgendem Schema: Zuerst wird eine textuelle Beschreibung des agentenbasierten Modells angegeben. Dabei werden die Agenten und ihre Eigenschaften, die Umgebung in der sie sich befinden und mögliche Interaktionen beschrieben. Anschließend wird daraus eine formale Definition des Modells, wie in Kapitel 5.1 dargestellt, abgeleitet. Dabei wird der individuelle Merkmalsraum und mögliche Zustandsänderungen der Agenten, also die sogenannte Aktualisierungsregel, festgelegt. Beides wird im Abschnitt Modellbeschreibung des agentenbasierten Modells zusammengefasst. Aus dieser impliziten Random Mapping Representation, siehe Kapitel 5.2, wird in weiterer Folge die Mikrodynamik des ABM als Markovkette beschrieben und falls möglich eine Makrodynamik durch Zusammenlegen von Markovzuständen gefolgert.

Bei der Bestimmung der Übergangsmatrix der Markovkette gibt es zwei Möglichkeiten. Zum einen können die Übergangswahrscheinlichkeiten exakt aus der Aktualisierungsregel des ABM bestimmt werden. Bei hoher Dimension des Konfigurationsraums und vielen möglichen Übergängen ist dies jedoch nicht praktikabel. In solchen Fällen können die Übergangswahrscheinlichkeiten auch, wie bei [IIGS09] beschrieben, approximiert werden. Dafür wird die Aktualisierungsregel des ABM benötigt, die aus einem Zustand $x(n)$ des ABM einen möglichen neuen Zustand $x(n+1)$ erzeugt. Diese liegt mit dem ABM sowieso vor und besteht aus dem Programmteil der in jeder Zeititeration durchgeführt wird. Da es sich um stochastische Modelle handelt, muss dieser Vorgang hinreichend oft wiederholt werden. Die relativen Häufigkeiten der Übergänge können dann als Approximation der Übergangswahrscheinlichkeiten verwendet werden, wie das Gesetz der großen Zahlen nahelegt. Im Anhang, siehe A.3.5 ist ein Algorithmus zum approximativen Bestimmen der Übergangsmatrix angegeben.

Liegen der Zustandsraum sowie die Übergangsmatrix vor, so hat man alle notwendigen Voraussetzungen zur Analyse der MK hinsichtlich stationärer Verteilung, asymptotischem Verhalten, absorbierender Zustände sowie Ersteintrittszeiten, siehe Kapitel 4. Dabei wird stets (Σ, P) für die MK der Mikrodynamik und $(\hat{S}, \hat{P})$ für eine makroskopische Darstellung als Bezeichnung gewählt. Die Analyse der MK wird dabei genau dokumentiert um Möglichkeiten in der Anwendung hervorzuheben. Zur Veranschaulichung der Simulationsergebnisse werden außerdem Vergleichsplots angegeben. Dabei wird die Verteilung der Zustände zu einem gewissen Zeitpunkt als Balkendiagramm dargestellt. Im Fall des ABM wird eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt. Das heißt, ausgehend vom selben Startwert wird die Simulation sehr häufig durchgeführt und dabei der Endzustand gespeichert. Anhand der Zuordnung zu den Markovzuständen erhält man somit eine Verteilung ebendieser. Die Verteilung der MK kann mittels Formel (4.4) leicht bestimmt werden.

Bewegungsmodelle

In den hier beschriebenen Bewegungsmodellen befinden sich mehrere Agenten auf einem endlichen diskreten ein- oder zweidimensionalen Ortsgitter. Die Gitterpunkte bilden das Zentrum von Feldern, auf denen sich auch mehrere Agenten gleichzeitig aufhalten können. In jedem Zeitschritt führt jeder Agent eine Aktion durch. Entweder er bleibt stehen oder er bewegt sich auf ein Nachbarfeld. Nachbarfelder sind im 1D Fall die jeweils rechts bzw. links angrenzenden Felder, sofern existent. Die Randfelder haben jeweils nur ein Nachbarfeld. Im 2D Fall gibt es höchstens 4 Nachbarfelder (**N**orden, **O**sten, **S**üden, **W**esten). Die Bewegungsrichtung ist zufällig, was auf ein stochastisches ABM führt, jedoch werden die Bewegungsregeln nach Interaktion angepasst. Die genauen Bewegungsregeln werden in den Beispielen angegeben.

Random Walk Modell eines Agenten - 1D

Sogenannte Random Walks (auch Drunkard's Walk oder auf Deutsch Irrfahrt genannt) sind häufig untersuchte stochastische Modelle, siehe z.B. [LPW09]. Diese existieren in unterschiedlichen Varianten. Eine davon wurde bereits in Kapitel 5.2 angeführt. Bei allen Varianten ist die Bewe-

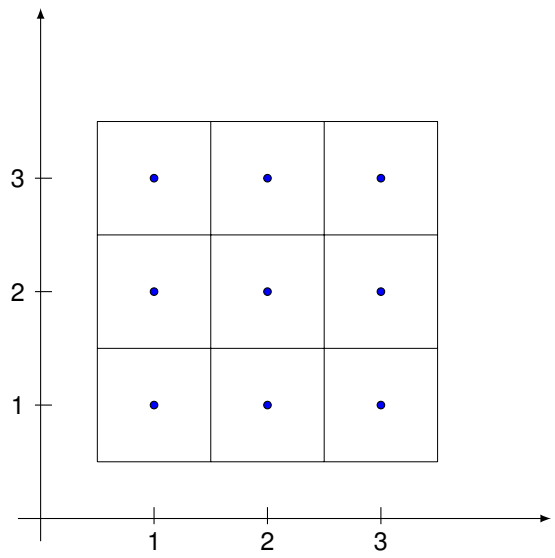

Abbildung 6.1: Beispiel eines 2D Gitters mit 3 $\times$ 3 Feldern.

gung der Agenten rein zufällig und es kommt zu keinerlei Interaktion zwischen den Agenten. Obwohl dies streng genommen nicht der Definition eines ABM entspricht wird dieses Beispiel als Einstieg gewählt. Durch Modifikation des Modells in Kapitel 6.2.3 wird daraus tatsächlich ein ABM.

Modellbeschreibung des agentenbasierten Modells

Betrachtet wird das folgende ABM eines eindimensionalen Random Walks mit $m \in \mathbb{N}$ Feldern auf denen sich ein Agent nach folgenden Regeln bewegen kann:

1. Der Agent bewegt sich in jedem Zeitschritt auf ein Nachbarfeld - stehenbleiben ist nicht zulässig.

2. Die beiden Randfelder haben nur ein Nachbarfeld. Befindet sich der Agent auf einem dieser Felder, so wechselt er mit Wahrscheinlichkeit 1 im nächsten Zeitschritt auf dieses Nachbarfeld.

3. Alle anderen Felder haben jeweils 2 Nachbarfelder (linkes sowie rechtes Nachbarfeld). Der Wechsel des Agenten in das linke wie das rechte Nachbarfeld ist dabei gleich wahrscheinlich.

Die Bewegungsregeln sind in Abbildung 6.2 dargestellt. Die Pfeile geben dabei die möglichen Bewegungen im nächsten Zeitschritt samt Wahrscheinlichkeit an. Der Agent hat nur ein Merkmal und zwar seine Position auf dem Gitter. Diese wird als natürliche Zahl zwischen 1 und m angegeben. Wir erhalten den individuellen Merkmalsraum des Agenten $\sigma = \{1, \ldots, m\}$ und bezeichnen mit $x_1 \in \sigma$ die Position des Agenten auf dem Gitter. Die Dynamik des ABM in

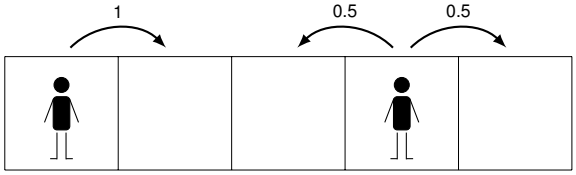

Abbildung 6.2: Bewegungsregeln eines unabhängigen Agenten auf einem endlichen 1D Gitter mit 5 Feldern.

Hinblick auf den Zustand des Agenten kann mithilfe der Aktualisierungsregel, siehe A.3.1, beschrieben werden. Dies ist der Code-Teil des Programms, der in jedem Zeitschritt aufgerufen wird.

Beschreibung als Markovkette

Um die Mikrodynamik des ABM als MK zu beschreiben wird zuerst der Zustandsraum der MK, also der Raum aller Konfigurationen, benötigt. Für den Fall eines einzigen Agenten ist dieser identisch mit dem individuellen Merkmalsraums des Agenten also $\Sigma = \sigma^1 = \sigma = \{1, \ldots, m\}$. Die Zahl gibt dabei an auf welcher Position am Gitter sich der Agent befindet. Aus der Modellbeschreibung des ABM, insbesondere der Aktualisierungsregel, kann die Übergangsmatrix P der Mikrodynamik einfach bestimmt werden und lautet

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0.5 & 0 & 0.5 & & & & \\ & 0.5 & 0 & 0.5 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0.5 & 0 & 0.5 \\ & & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}. \tag{6.1}$$

Der zur Mikrodynamik gehörige Übergangsgraph wird in Abbildung 6.3 wiedergegeben.

Abbildung 6.3: Übergangsgraph für die MK der Mikrodynamik eines Random Walk Modells eines Agent auf m Feldern.

Bevor die MK der Mikrodynamik analysiert wird, ist noch zu untersuchen ob es eine makroskopische Beschreibung des Modells gibt. Dies mag bei einem Modell mit einem Agenten seltsam erscheinen, doch laut Definition 27 ist die MK der Mikrodynamik, also (Σ, P), lumpable bezüglich der Partition $\mathcal{A} = \left\{\{1, m\}, \{2, m-1\}, \ldots, \{\lceil \frac{m}{2} \rceil\}\right\}$ falls m eine gerade Zahl ist und $\mathcal{B} = \left\{\{1, m\}, \{2, m-1\}, \ldots, \{\frac{m}{2}, \frac{m}{2}+1\}\right\}$ falls m eine ungerade Zahl ist. Die Klammer $\lceil \cdot \rceil$ bezeichnet dabei die nächstgrößere ganze Zahl.

Dies kann einfach mittels Satz 29 nachgewiesen werden. Wir betrachten den Fall $m = 6$, also eine ungerade Anzahl an Feldern. Dann lauten die Matrizen

$$U = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichheit $VUPV = PV$ aus Formel (4.23) lässt sich leicht nachrechnen. Die Übergangsmatrix $\hat{P}_6$ der Makrodynamik mit Zustandsraum $\hat{S}_6 = \{1, 2, 3\}$ zur Partition $A_1 = \{1, 6\}, A_2 = \{2, 5\}, A_3 = \{3, 4\}$ berechnet sich nach Formel (4.22) zu

$$\hat{P}_6 = UPV = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Die Übergangsmatrix für diesen Fall ist in Abbildung 6.4 ersichtlich.

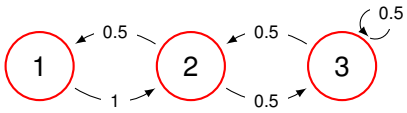

Abbildung 6.4: Übergangsgraph für die MK der Makrodynamik eines Random Walks eines Agenten auf 5 Feldern

Im ungeraden Fall für $m = 5$ erhält man die Übergangsmatrix

$$\hat{P}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei als Partition $B_1 = \{1, 5\}, B_2 = \{2, 4\}, B_3 = \{3\}$ gewählt wird. Der zugehörige Übergangsgraph für $m = 5$ ist in Abbildung 6.5 angegeben.

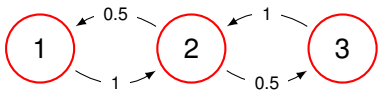

Abbildung 6.5: Übergangsgraph für die MK der Makrodynamik eines Random Walks eines Agenten auf 5 Feldern

Wie eben gezeigt wurde ist eine Partition des Konfigurationsraums möglich, sodass der reduzierte Prozess die Markoveigenschaft erhält. Ob diese Zusammenlegung der Zustände sinnvoll ist, ergibt sich aus dem Zweck des Modells. Ist man etwa daran interessiert wie weit sich der Agent vom Zentrum entfernt, so kann diese Partition den Zustandsraum halbieren. Sind die Felder jedoch durch unterschiedliche Eigenschaften ausgezeichnet oder möchte man die exakte Position der Agenten wissen, so verliert man durch die Zusammenlegung wertvolle Information. Im Anwendungsfall wird man genau umgekehrt vorgehen. Zuerst überlegt man welche Konfigurationen man auf Basis einer gemeinsamen Eigenschaft zusammenlegen würde und anschließend überprüft man, ob der reduzierte Prozess immer noch die Markoveigenschaft erfüllt.

Analyse der Markovkette: Mikrodynamik

Die Markovkette der Mikrodynamik (Σ, P) enthält keine absorbierenden Zustände. Aus dem Übergangsgraph ist ersichtlich, dass alle Zustände verbunden sind. Es handelt sich demnach um eine irreduzible Markovkette. Sie besteht demnach nur aus einer Klasse deren Zustände alle miteinander verbunden sind. Aus Satz 23 kann eine eindeutige stationäre Verteilung gefolgert werden. Diese kann mittels linearem Gleichungssystem (4.16) berechnet werden. Für $m \geq 3$ Zustände ergibt sich daraus die eindeutige stationäre Verteilung

$$\pi = \frac{1}{m-1} \cdot (0.5, 1, 1, \ldots, 1, 0.5). \tag{6.2}$$

Satz 24 würde eine eindeutige Grenzverteilung liefern, kann hier jedoch nicht angewendet werden, da die Markovkette nicht aperiodisch ist. Dies kann man anhand des ersten Zustands einsehen. Beginnend beim ersten Zustand sind alle möglichen Rückkehrzeitpunkte gerade. Mögliche

Rückkehrpfade wären:

$n:$	0		1		2		3		4		5		6
	1	$\mapsto$	2	$\mapsto$	1								
	1	$\mapsto$	2	$\mapsto$	3	$\mapsto$	2	$\mapsto$	1				
	1	$\mapsto$	2	$\mapsto$	3	$\mapsto$	2	$\mapsto$	3	$\mapsto$	2	$\mapsto$	1

Zustand 1 ist also, wie auch alle anderen Zustände, periodisch mit Periode 2. Die Verteilung π aus Formel (6.2) ist im Allgemeinen keine Grenzverteilung. Startet man für beliebiges m den Prozess mit Sicherheit in Zustand 1, also $\mu_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, so erhält man aufgrund der Periodizität folgendes Verhalten. Zu jedem ungeradzahligen Zeitpunkt $n = 1, 3, 5, \ldots$ befindet sich der Prozess lediglich in Zuständen mit ungerader Nummer, zu jedem geradzahligen Zeitpunkt $n = 0, 2, 4, \ldots$ befindet sich der Prozess nur in Zuständen mit ungeraden Nummern. Die Verteilung aus Gleichung (6.2) kann also nicht Grenzverteilung für alle Startwerte sein. Sie ist jedoch Grenzverteilung bei Startverteilungen, die zu gleichen Teilen wie die stationäre Verteilung aus geraden wie ungeraden Zuständen besteht, siehe Abbildung 6.6.

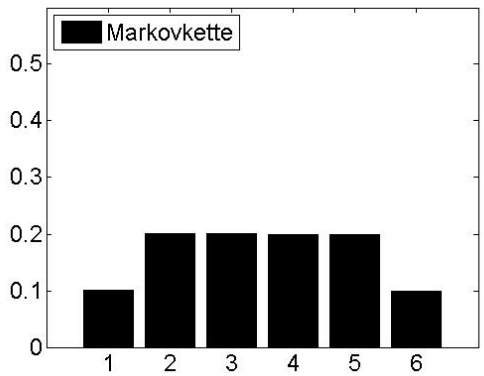

Abbildung 6.6: Verteilung der Markovzustände bei einer Anfangsverteiung von $\mu_0 = (0.5, 0.5, 0, 0, 0, 0)$ für das 1D Random Walk Modell eines Agenten auf 6 Feldern nach $n = 50$ Zeitschritten.

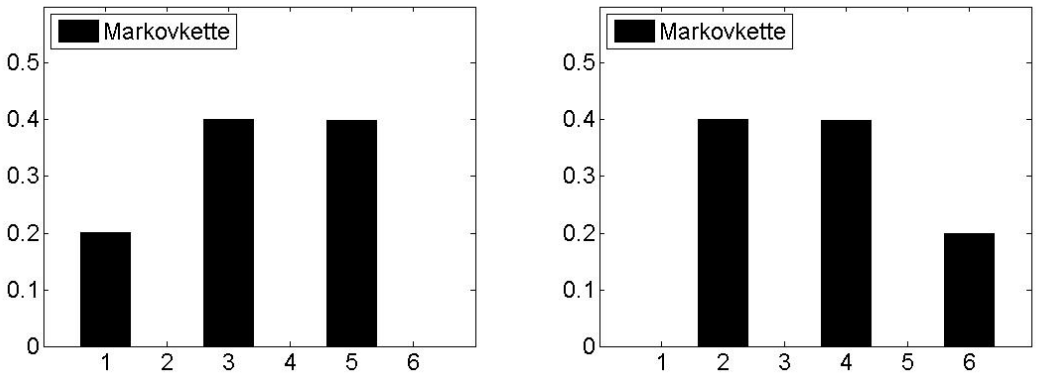

Abbildung 6.7: Verteilung der Markovzustände bei einer Anfangsverteilung von $\mu_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ für das 1D Random Walk Modell eines Agenten auf 6 Feldern nach $n = 50$ Zeitschritten (links) sowie $n = 51$ Zeitschritten.

Hier ist auf der x-Achse die Position des Agenten angegeben, die gleichzeitig die Nummer des Markovzustands der Mikrodynamik ist. Die y-Achse gibt die Wahrscheinlichkeit dieses Zustands zum gegebenen Zeitpunkt n an, also $\mathbb{P}_{\mu^0}(X_n = i)$. Abbildung 6.7 zeigt das periodische Verhalten der Markovkette beim Start in einem festen Zustand. Hier wird keine Grenzverteilung erreicht, jedoch ändert sich das Verhalten des Prozesses nicht mehr. Für jeden weiteren geraden Zeitpunkt $n = 52, 54, 56, \ldots$ erhält man die Verteilung links in Abbildung 6.7 und für jeden weiteren ungeraden Zeitpunkt $n = 53, 55, \ldots$ erhält man die Verteilung rechts.

Analyse der Markovkette: Makrodynamik

Wir wollen nun auch die Markovkette der Makrodynamik $(\hat{S}, \hat{P})$ betrachten. Für den Fall $m = 5$ sowie jede andere ungerade Anzahl von Feldern erhalten wir qualitativ keine Unterschiede zu der Markovkette der Mikrodynamik. Auch hier erhält man eine irreduzible, periodische (mit Periode 2) Markovkette ohne absorbierenden Zustand. Es gibt somit ebenfalls eine stationäre Verteilung, die im Fall $m = 5$ nach Gleichung (4.16) zu $\hat{\pi}_5 = (0.25, 0.5, 0.25)$ berechnet werden kann. Aus den selben Gründen wie vorhin ist diese Verteilung jedoch keine Grenzverteilung für alle Startverteilungen. Vielmehr kommt es erneut zu periodischen Verhalten. Der Grund dafür ist die gewählte Partition $\mathcal{B} = \Big\{\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3\}\Big\}$. Dadurch dass jeweils nur gerade mit geraden und ungerade mit ungeraden Zuständen zusammengelegt werden, bleibt die periodische Eigenschaft der Mikrodynamik erhalten.

Anders verhält sich dies bei geraden Werten von m. Aufgrund der Wahl der Partition $\mathcal{A} = \Big\{\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\Big\}$ werden jeweils geradzahlige und ungeradzahlige Zustände der Mikrodynamik zusammengefasst, die in der periodischen Verteilung die selbe Wahrscheinlichkeit haben. Deshalb gibt es für diese Markovkette eine Grenzverteilung, die für den Fall $m = 6$ die

Werte $\hat{\pi}_6 = (0.2, 0.4, 0.4)$ annimmt. Die Grenzverteilung ist in diesem Fall eindeutig und unabhängig von der Wahl der Anfangsverteilung. Aufgrund der Tatsache dass $\hat{p}_{33} > 0$ gilt, ist jeder Zustand aperiodisch und somit kann Satz 24 angewendet werden.

Simulationsergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Simulationsergebnisse des agentenbasierten Modells mit den Simulationsergebnissen der davon abgeleiteten Markovkette verglichen. Abbildung 6.6 zeigt die stationäre Verteilung von (Σ, P), die nach 50 Zeitschritten bereits erreicht wurde, wenn der Prozess mit jeweils gleich großer Wahrscheinlichkeit von 0.5 in Zustand 1 oder Zustand 2 startet. Im agentenbasierten Modell bedeutet das, ein Agent startet zufällig entweder auf Feld 1 oder Feld 2. In Abbildung 6.8 sind die Ergebnisse der beiden Modelle zusammengefasst. Je mehr

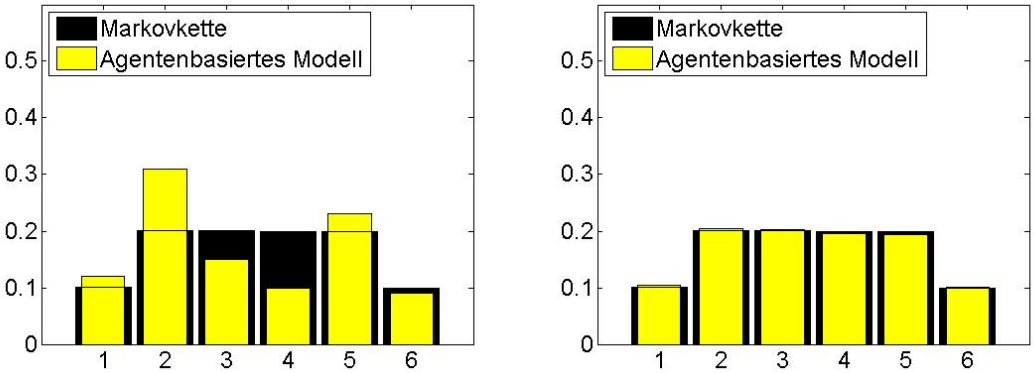

Abbildung 6.8: Simulationsergebnisse des 1D Random Walk Modells eines Agenten auf 6 Feldern zum Endzeitpunkt $n = 50$ bei 100 Agentendurchläufen (links) sowie 10.000 Agentendurchläufen (rechts) zur Startverteilung $\mu_0 = (0.5, 0.5, 0, 0, 0, 0)$.

Agentendurchläufe durchgeführt werden, desto näher liegt man an der Verteilung, welche die MK vorgibt. In Abbildung 6.9 werden die Simulationsergebnisse bei festem Anfangszustand angegeben. Hier wurden 10.000 Agentendurchläufe durchgeführt.

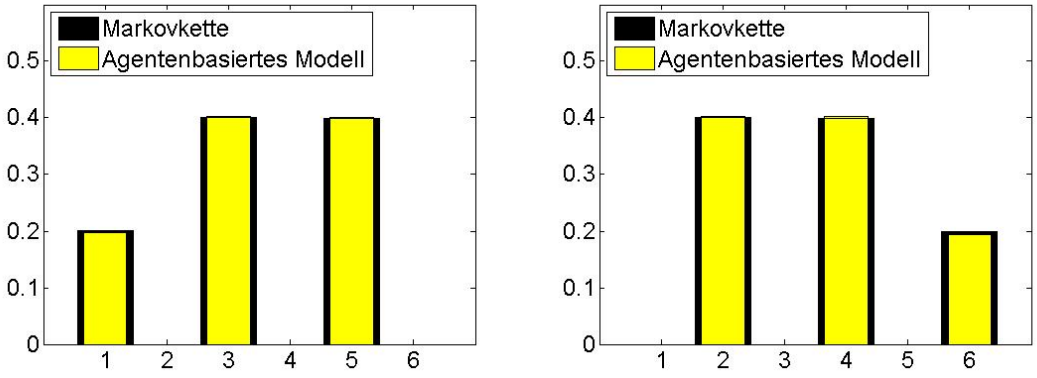

Abbildung 6.9: Simulationsergebnisse des 1D Random Walk Modells eines Agent auf 6 Feldern zum Endzeitpunkt $n = 50$ (links) sowie $n = 51$ (rechts) mit Startverteilung $\mu_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ und 10.000 Agentendurchläufen.

Die Simulationsergebnisse der Makrodynamik $(\hat{S}, \hat{P})$ können nun einfach durch Zusammenlegen der Zustände gemäß der gewählten Partition erhalten werden. Die Verteilung der MK kann auch mit Formel (4.4) bezogen auf $\hat{P}$ berechnet werden.

Random Walk Modell mehrerer Agenten - 1D

Das nächste Beispiel soll ein Random Walk Modell mehrerer Agenten beschreiben. Diese bewegen sich unabhängig voneinander nach den selben Regeln wie vorhin auf einem Gitter mit $m \in \mathbb{N}$ Feldern. Dabei können sich beliebig viele Agenten auf dem selben Feld befinden. Es kommt zu keinerlei Interaktion zwischen den Agenten. Die Bewegungsregeln der Agenten werden nochmals zusammengefasst:

1. Jeder Agent bewegt sich in jedem Zeitschritt auf ein Nachbarfeld - stehenbleiben ist nicht zulässig.
2. Die beiden Randfelder haben nur ein Nachbarfeld. Befindet sich ein Agent auf einem dieser Felder, so wechselt er mit Wahrscheinlichkeit 1 im nächsten Zeitschritt auf dieses Nachbarfeld.
3. Alle anderen Felder haben jeweils 2 Nachbarfelder (linkes sowie rechtes Nachbarfeld). Der Wechsel eines Agenten in das linke wie das rechte Nachbarfeld ist dabei gleich wahrscheinlich.
4. Die Agenten agieren dabei in jedem Fall synchron.
5. Es kommt zu keinerlei Interaktion.

Wenn man die Bewegung von mehreren unabhängigen Agenten beschreiben will, so kann man auf die bisherigen Ergebnisse zurückgreifen. Beschreibe $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ sowie $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ die Markovketten der Bewegung zweier unabhängiger Agenten, dann berechnet sich die gemeinsame

Verteilung zu einem Zeitpunkt n mit der Gleichung

$$\mathbb{P}(X_n = j_X, Y_n = j_Y | X_0 = i_X, Y_0 = i_Y) = \mathbb{P}_{i_X}(X_n = j_x) \cdot \mathbb{P}_{i_Y}(Y_n = j_Y). \tag{6.3}$$

Somit können die Ergebnisse aus dem vorherigen Beispiel verwendet werden. Ein Random Walk Modell mit $N \in \mathbb{N}$ Agenten auf $m \in \mathbb{N}$ Feldern ist also nichts anderes als das unabhängige N-malige Durchführen eines Random Walk Modells eines Agenten auf m Feldern. Formel (6.3) ergibt die Verteilung des kombinierten Modells.

Bewegungsmodell mit Interaktion - 1D

Modellbeschreibung des agentenbasierten Modells

Wie Gleichung (6.3) aus dem vorherigen Beispiel zeigt, kann man den Random Walk für einen Agenten auch einfach für mehrere Agenten verwenden, aber nur sofern sich diese unabhängig voneinander bewegen. Zu einer gegebenen Startverteilung der $N \in \mathbb{N}$ Agenten kann die Endverteilung zu einem beliebigen Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ bestimmt werden. Eine wesentlich Eigenschaft von Agenten ist es nun aber, zu interagieren. Wir wollen nun ein Bewegungsmodell beschreiben, indem die Agenten sich nach Interaktion gegenseitig beeinflussen. Wir nehmen an, dass sich Agenten gerne auf dem selben Feld aufhalten. Im gewählten Fall ist die Wahrscheinlichkeit eines Agenten auf einem Feld mit einem anderen Agenten zu bleiben bei 0.6, dabei entscheiden sich die Agenten unabhängig voneinander für ein Stehenbleiben oder Weitergehen. Zusammengefasst gibt es folgende Regeln:

1. Auf jedem Feld können sich mehrere Agenten befinden.
2. Befindet sich ein Agent alleine auf einem Feld, so bewegt er sich im nächsten Zeitschritt auf eines der Nachbarfelder (kein Stehenbleiben). Dabei wird jedes Nachbarfeld mit gleich hoher Wahrscheinlichkeit gewählt.
3. Befindet sich mehr als ein Agent auf demselben Feld, so ist es für diese Agenten auch erlaubt stehenzubleiben. Die Wahrscheinlichkeit am selben Feld zu bleiben wird dabei mit 0.6 angenommen. Bleibt ein Agent nicht stehen so bewegt er sich, mit gleich hoher Wahrscheinlichkeit, auf eines seiner Nachbarfelder.
4. Die Agenten agieren dabei in jedem Fall synchron.

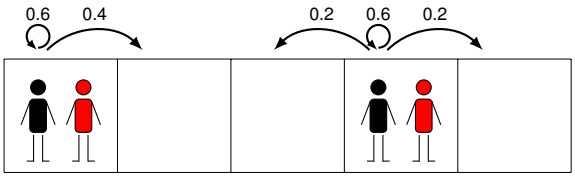

Abbildung 6.10: Bewegungsregeln zweier abhängiger Agenten auf einem endlichen 1D Gitter mit 5 Feldern.

Zusätzlich zu den Bewegungsregeln aus Abbildung 6.2 für Agenten die sich alleine auf einem Feld befinden, kommen noch die Bewegungsregeln in Abbildung 6.10 hinzu, für den Fall dass sich mehrere Agenten auf einem Feld befinden.

Wie im vorigen Beispiel sei $N \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Agenten und $m \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Felder auf einem 1D Gitter. Der individuelle Merkmalsraum eines Agenten werde mit $\sigma = \{1, \ldots, m\}$ bezeichnet. Wir bezeichnen mit $x_i \in \sigma$ die aktuelle Position des i-ten Agenten. Die Dynamik des ABM in Hinblick auf die Zustände der Agenten wird mit Aktualisierungsregel im Anhang, siehe A.3.2, beschrieben.

Beschreibung als Markovkette

Um die Mikrodynamik des ABM als Markovkette zu beschreiben benötigen wir wiederum den Konfigurationsraum des Modells. Dieser lautet $\Sigma = \sigma^N$ und besteht aus N-Tupel von Zahlen, die die jeweilige Position der Agenten wiedergeben. Eine Konfiguration hat dabei die Form $x = (x_1, \ldots, x_N)$, mit $x_i \in \sigma$. Unser Ziel ist es nun einen Zustandsraum für einen reduzierten stochastischen Prozess zu finden, der wiederum die Markoveigenschaft erfüllt. Da sich alle Agenten nach den selben Regeln fortbewegen, ist es nicht weiter notwendig zwischen den Agenten zu unterscheiden. Wir sind lediglich daran interessiert wie viele Agenten sich auf jedem Feld befinden. Dies führt auf Zustände der Form

$$S = \Big\{ s \in \mathbb{N}_0^m \mid s(i) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{\{X_k = i\}} \ , \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \ \forall X \in \Sigma \Big\}. \tag{6.4}$$

Also wird für jede mögliche Konfiguration des agentenbasierten Modells die Anzahl der Agenten auf jedem Feld summiert und als Vektor angegeben. Jeder Eintrag steht dabei für die Anzahl der Agenten auf dem jeweiligen Feld. Der Ausdruck $\mathbb{1}_{\{X_k = i\}}$ nimmt dabei entweder den Wert 1 oder 0 an, je nachdem ob der j-te Agent sich auf Feld i befindet oder nicht. Zusätzlich werden wie im vorherigen Beispiel symmetrische Zustände zusammengelegt. Wir betrachten als Beispiel ein Bewegungsmodell mit Interaktion von 2 Agenten auf 5 Feldern.

Der Zustandsraum der MK der Makrodynamik wird mittels Formel (6.4) bestimmt und enthält Zustände von der Form $(2, 0, 0, 0, 0)$ oder $(1, 1, 0, 0, 0)$. Aus Symmetriegründen können verschiedene Zustände zusammengelegt werden, was die Dimension des Zustandsraums weiter verringert. So kann man die Zustände $(2, 0, 0, 0, 0)$ und $(0, 0, 0, 0, 2)$ miteinander identifizieren. In beiden Fällen befinden sich beide Agenten auf demselben Randfeld - beide ganz links oder ganz rechts. Aufgrund der Bewegungsregeln sind die Vorraussetzungen für Satz 4.21 für die gewählte Partition erfüllt, wodurch die Zusammenlegung gerechtfertigt ist. Der reduzierte Prozess erfüllt somit weiterhin die Markoveigenschaft (4.1). Alle Markovzustände sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Zustände in $\hat{S}$	Zustände in S	Konfigurationen in Σ
1	(2,0,0,0,0), (0,0,0,0,2)	(1,1), (5,5)
2	(1,1,0,0,0), (0,0,0,1,1)	(1,2), (2,1), (4,5), (5,4)
3	(1,0,1,0,0), (0,0,1,0,1)	(1,3), (3,1), (3,5), (5,3)
4	(1,0,0,1,0), (0,1,0,0,1)	(1,4), (4,1), (2,5), (5,2)
5	(1,0,0,0,1)	(1,5), (5,1)
6	(0,2,0,0,0), (0,0,0,2,0)	(2,2), (4,4)
7	(0,1,1,0,0), (0,0,1,1,0)	(2,3), (3,2), (3,4), (4,3)
8	(0,1,0,1,0)	(2,4), (4,2)
9	(0,0,2,0,0)	(3,3)

Die Übergangswahrscheinlichkeiten wurden in diesem Beispiel exakt bestimmt. Dazu werden zuerst alle möglichen Übergänge notiert und die Übergangswahrscheinlichkeiten aus den Bewegungsregeln berechnet. Exemplarisch werden die Übergänge von den Zuständen 1 bzw. 2 aus angegeben.

Mögliche Übergänge	Übergangswahrscheinlichkeit
$1 \mapsto 1$	$0.6 \cdot 0.6$
$1 \mapsto 2$	$2 \cdot 0.6 \cdot 0.4$
$1 \mapsto 6$	$0.4 \cdot 0.4$
$2 \mapsto 2$	0.5
$2 \mapsto 7$	0.5

Macht man dies für alle Zustände, so erhält man die Übergangsmatrix

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.48 & 0 & 0 & 0 & 0.16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 \\ 0.04 & 0.24 & 0.08 & 0 & 0 & 0.36 & 0.24 & 0 & 0.04 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.08 & 0.48 & 0.08 & 0.36 \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

der Übergangsgraph dazu ist in Abbildung 6.11 angegeben.

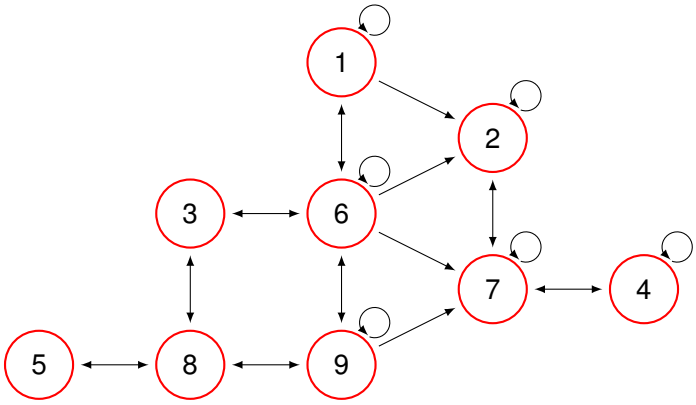

Abbildung 6.11: Übergangsgraph für die Markovkette eines Bewegungsmodells mit Interaktion von 2 Agenten auf 5 Feldern.

Analyse der Markovkette

Aus dem Übergangsgraph in Abbildung 6.11 ist ersichtlich, dass nicht alle Zustände verbunden sind. So ist zwar Zustand 2 von 6 aus erreichbar, umgekehrt jedoch nicht. Die MK der Makrodynamik ist demnach reduzibel. Nach dem Dekompositions-Theorem - Satz 14 - kann sie zerlegt werden in die abgeschlossene verbundene Klasse $C = \{2, 4, 7\}$ und die verbundene Klasse $T = \{1, 3, 5, 6, 8, 9\}$, mit $S = C \cup T$.

Die Zustände in T sind alle transient, d.h. ausgehend von einem Zustand aus T wird die Markovkette nur endlich oft wieder in diesem Zustand landen. Es gibt also einen endlichen Zeitpunkt ab dem sich die Markovkette nur noch in C befindet. Die Suche nach einer Grenzverteilung begrenzt sich auf die Suche nach einer Grenzverteilung der Markovkette mit Zustandsraum C.

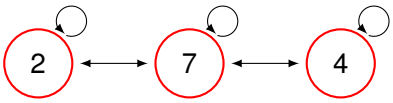

Abbildung 6.12: Übergangsgraph für die MK eines Bewegungsmodells mit Interaktion von 2 Agenten auf 5 Feldern auf dem Zustandsraum C.

Die neu entstandene Markovkette ist irreduzibel und aperiodisch. Nach Satz 24 existiert eine eindeutige Grenzverteilung, die mit der Matrixgleichung (4.16) berechnet werden kann. Die Grenzverteilung lautet

$$\hat{\pi}_C = (0.25, 0.25, 0.5) = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{P}(X_n = 2), \mathbb{P}(X_n = 4), \mathbb{P}(X_n = 7)),$$

dabei wurde die reduzierte Übergangsmatrix $\hat{P}_C$ verwendet, bei der nur die Zeilen und Spalten aus C berücksichtigt werden. Da die erhaltene Grenzverteilung unabhängig von der Anfangsverteilung ist und alle Zustände in T transient sind, ist die Grenzverteilung der ursprünglichen

Markovkette - mit Zustandsraum $\hat{S}$ - gegeben als

$$\hat{\pi} = (0, 0.25, 0, 0.25, 0, 0, 0.5, 0, 0).$$

Obwohl die Wahrscheinlichkeit stehenzubleiben bei beiden Agenten sehr hoch, wenn sich der andere Agent auf dem selben Feld befindet, ist die Wahrscheinlichkeit bei großem n einen der Zustände 1, 6 oder 9 anzutreffen verschwindend klein.

Wie oben schon beschrieben sind alle Zustände in T transient, werden also nach endlicher Zeit - und zwar dann wenn die Markovkette erstmals einen Zustand in C annimmt - nicht mehr erreicht. Mithilfe der Ersteintrittszeit kann man nun berechnen wie lange es durchschnittlich dauert, ausgehend von einem Startwert $\mathbb{P}(X_0 = j) = 1, \;\; j \in T$ die absorbierende Klasse C zu erreichen. Wir verwenden das lineare Gleichungssystem aus Formel (4.9) und erhalten

$$u = (2.19, 0, 5.31, 0, 7.08, 2.53, 0, 6.08, 2.64)^{\mathsf{T}}, \tag{6.6}$$

mit $u_i = \mathbb{E}_i(T_C)$ mit der Notation aus Kapitel 4. Dabei ist T_C die Zufallsvariable der Ersteintrittszeit in einen der Zustände aus C.

Simulationsergebnisse:

Es werden wiederum die Simulationsergebnisse des agentenbasierten Modells mit denen der davon abgeleiteten MK der Makrodynamik verglichen. Abbildung 6.13 sowie 6.14 vergleichen die Ergebnisse für unterschiedliche Startwerte sowie Zeitpunkte. In beiden Fällen ist die Grenzverteilung nach 50 Zeitschritten bereits erreicht.

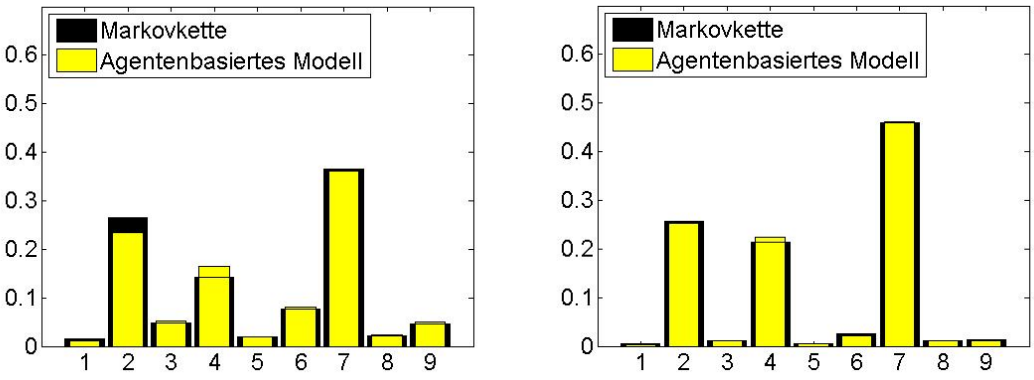

Abbildung 6.13: Simulationsergebnisse des 1D Bewegungsmodells mit Interaktion von 2 Agenten auf 5 Feldern zum Endzeitpunkt n = 10 bei 10.000 Agentendurchläufen und Anfangsverteilung $\mu_0 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ (links) bzw. $\mu_0 = \frac{1}{9}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ (rechts).

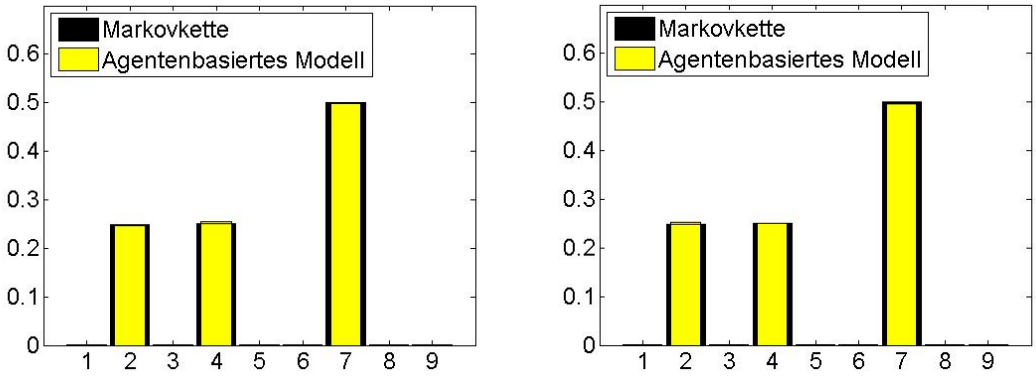

Abbildung 6.14: Simulationsergebnisse des 1D Bewegungsmodells mit Interaktion von 2 Agenten auf 5 Feldern zum Endzeitpunkt n = 50 bei 10.000 Agentendurchläufen und Anfangsverteilung $\mu_0 = (0,0,0,0,1,0,0,0,0)$ (links) bzw. $\mu_0 = \frac{1}{9}(1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ (rechts).

Außerdem werden die Erwartungswerte der Ersteintrittszeiten in die Zustände $C = \{2,4,7\}$ berechnet. Dazu werden für alle Agenten die Zeitschritte notiert, die dazu benötigt werden, einen der genannten Zustände zu erreichen und anschließend über alle Werte gemittelt. Als Ergebnis erhalten wir den Vektor der durchschnittlichen Ersteintrittszeiten

$$\tilde{u} = (2.20, 0, 5.28, 0, 7.12, 2.55, 0, 6.13, 2.61)^{\mathsf{T}}$$

bei 10.000 Agentendurchläufen pro Startwert - vgl. mit den Ergebnissen der Markovkette in Gleichung (6.6).

An diesem Beispiel kann man eine wichtige Eigenschaft agentenbasierter Modelle erkennen, die sogenannte Emergenz. Aus den einfachen Bewegungs- und Interaktionsregeln der Agenten entsteht ein unvorhergesehenes Verhalten des Systems. Aufgrund der gewählten Regeln wäre davon auszugehen, dass es häufig vorkommt beide Agenten auf dem selben Feld anzutreffen. Genau das Gegenteil ist jedoch der Fall. Die Zustände $\{1,6,9\}$, die diesen Sachverhalt widerspiegeln, werden nach einer gewissen Anzahl an Zeitschritten nie wieder erreicht. Im asymptotischen Verhalten kommen dagegen nur noch die Zustände $\{2,4,7\}$ vor. Dieses Verhalten war aus der Modellbeschreibung des ABM nicht direkt ablesbar, konnte jedoch einfach aus der MK bestimmt werden. Dazu sind nicht einmal die genauen Übergangswahrscheinlichkeiten nötig. Die Struktur des Übergangsgraphen, wie in Abbildung 6.11, reicht dazu schon aus.

Auch für andere Parameterwerte von N und m kann das selbe Verhalten festgestellt werden. Dabei ist anzumerken, dass für größere Werte die Dimension des Zustandsraums der MK stark steigt. Betrachtet man z.B. die Anzahl der Konfigurationen, also den Zustandsraum der MK der Mikrodynamik, so berechnet sich die Dimension als $\dim(\Sigma) = m^N$. Verdoppelt man nun die Anzahl der Agenten bei gleichbleibender Anzahl an Feldern, so ist die Dimension des neuen

Zustandsraums wegen

$$m^{2N} = (m^N)^2 \tag{6.7}$$

das Quadrat der Dimension des ursprünglichen Zustandsraums. Verdoppelt man die Anzahl an Feldern bei gleicher Anzahl an Agenten so steigert sich die Dimension wegen

$$(2 \cdot m)^N = 2^N \cdot m^N \tag{6.8}$$

immer noch um den Faktor 2^N. Dies zeigt sehr deutlich, wie schnell sich die Dimension des Zustandsraums durch hinzufügen von Agenten oder Feldern vergrößert. Der Zustandsraum der Makrodynamik hat die Dimension

$$\dim(S) = \binom{m+N-1}{N} = \frac{(m+N-1)!}{N!(m-1)!},$$

wobei man von homogenen Agenten ausgeht, jedoch die Symmetrie nicht berücksichtigt. Wir wollen nun das Bewegungsmodell auf 2 Dimensionen ausdehnen.

Bewegungsmodell mit Interaktion - 2D

Als letztes Bewegungsmodell betrachten wir ein 2D Bewegungsmodell mit Interaktion bei dem sich die Agenten wiederum beeinflussen, wenn sich mindestens zwei Agenten auf dem selben Feld befinden. Der Vollständigkeit halber werden die genauen Regeln nochmals angeführt.

Modellbeschreibung des agentenbasierten Modells

Wir betrachten ein quadratisches Gitter mit $m \times m$ Feldern ($m \in \mathbb{N}$) auf dem sich $N \in \mathbb{N}$ Agenten nach folgenden Regeln bewegen könnnen.

1. Befindet sich ein Agent alleine auf einem Feld, so bewegt er sich im nächsten Zeitschritt auf eines der Nachbarfelder (kein Stehenbleiben). Dabei wird jedes Nachbarfeld mit gleich hoher Wahrscheinlichkeit gewählt. Im 2D Fall sind die möglichen Nachbarfelder: **N**,**O**,**S**,**W**.

2. Befinden sich mehr als ein Agent auf dem selben Feld, so ist es für diese Agenten auch erlaubt stehenzubleiben. Die Wahrscheinlichkeit am selben Feld zu bleiben wird dabei mit 0.6 angenommen. Bleibt ein Agent nicht stehen, so bewegt er sich mit gleich hoher Wahrscheinlichkeit auf eines seiner Nachbarfelder.

3. Die Agenten agieren dabei in jedem Fall synchron.

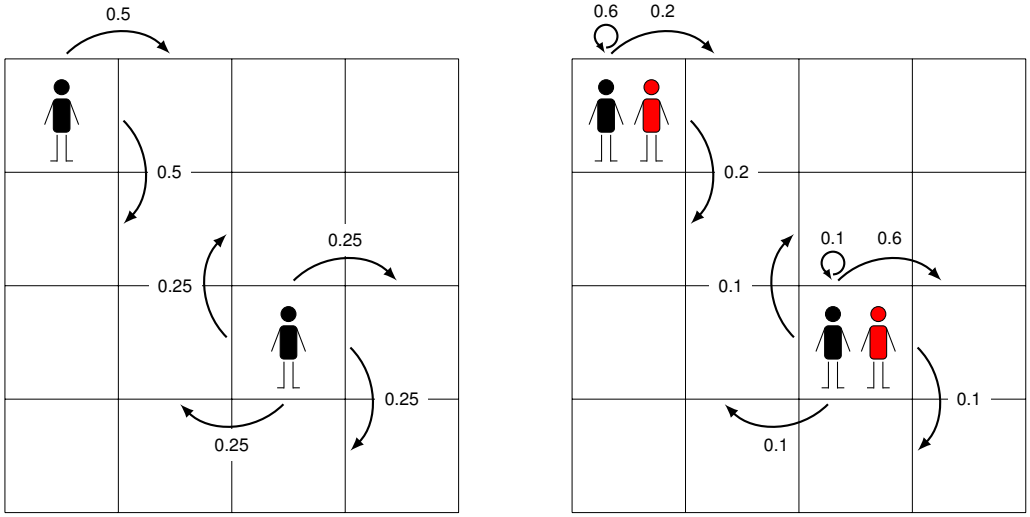

Abbildung 6.15: Bewegungsregeln eines unabhängigen (links) sowie beeinflussten Agenten (rechts) auf einem quadratischem Gitter.

Beschreibung und Analyse der Markovkette

Es bezeichne N die Anzahl der Agenten, die sich auf den $m \times m$ Feldern des quadratischen Gitters bewegen. Die Position eines Agenten wird als Zahlenpaar $(i, j) \in \{1, \ldots, m\}^2 =: \sigma$ angegeben. Eine Konfiguration für N Agenten hat die folgende Form

$$x = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_N \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_N \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \in \sigma^N =: \Sigma. \tag{6.9}$$

Wir bezeichnen mit $x_k = (i_k, j_k)$ die Position des k-ten Agenten. Die Zustände der Markovkette werden im 2D Fall in Form einer $(m \times m)$ Matrix angegeben und bilden den Zustandsraum

$$S = \left\{ s \in \mathbb{N}_0^{m \times m} \mid s(i,j) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{\{X_k = (i,j)\}} \,,\ \forall (i,j) \in \{1, \ldots, m\}^2,\ \forall X \in \Sigma \right\}.$$

Als Beispiel betrachten wir das Bewegungsmodell mit Interaktion von 2 Agenten auf 3×3 Feldern. Um die Dimension der Übergangsmatrix möglichst gering zu halten werden, wieder aus Symmetriegründen, Zustände zusammengefasst, wie etwa

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für den Fall mit 2 Agenten und $m = 3$.

Der Zustandsraum der Markovkette besteht aus 11 Zuständen. In Tabelle 6.1 sind diese bzw. jeweils ein Repräsentant davon abgebildet. Die zugehörigen möglichen Konfigurationen für den ersten Markovzustand in $\hat{S}$ sind in diesem Fall $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, vgl Formel (6.9).

$\hat{S}$	Zustand in S	$\hat{S}$	Zustand in S	$\hat{S}$	Zustand in S
1	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		

Tabelle 6.1: Zustandsraum des 2D Bewegungsmodells mit Interaktion von 2 Agenten auf 3×3 Feldern.

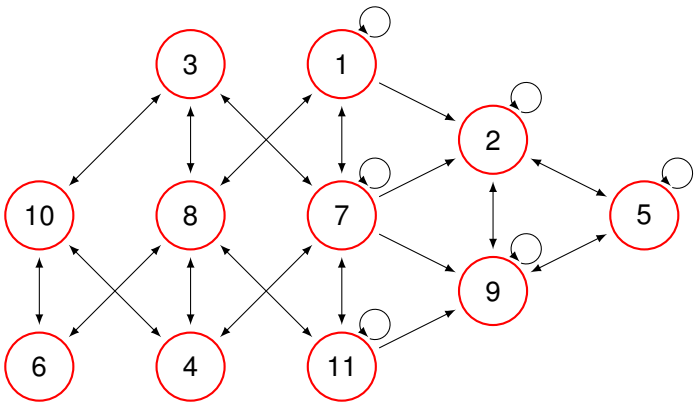

Abbildung 6.16: Übergangsgraph für die Markovkette des Bewegungsmodells mit Interaktion von 2 Agenten auf 3×3 Feldern.

Die Übergangsmatrix wurde in diesem Beispiel approximiert, der dazugehörige Übergangsgraph

wird in Abbildung 6.16 angegeben. Der Zustandsraum zerfällt nach Satz 14 auch hier in eine abgeschlossene verbundene Klasse $T = \{2, 5, 9\}$ und eine weitere verbundene Klasse $C = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11\}$, mit $S = C \cup T$. Die Grenzverteilung besteht wie im 1D Fall nur aus den Zuständen in T und lautet

$$\hat{\pi} = \frac{1}{3}(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0),$$

dazu wurde die Teilmatrix P_C verwendet, die

$$\hat{P}_C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1667 & 0.333 \\ 0.1667 & 0.5 & 0.333 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$$

lautet.

Wie schon im 1D Fall zeigt sich auch hier das selbe Verhalten. Die Zustände mit beiden Agenten auf dem selben Feld werden auch hier nach einer gewissen Zeit nie wieder angenommen.

Dynamische Entscheidungsmodelle

Bei den kommenden Modellen handelt es sich um dynamische Entscheidungsprozesse, bei denen sich die Meinung eines Agenten zu gewissen Themen nach Interaktion verändern kann. Der Meinung eines Agenten wird dabei ein Zahlenwert zugeordnet. Wir unterscheiden zwischen binären bzw. diskreten Entscheidungsmodellen, bei denen die Meinungen nur zwei unterschiedliche bzw. diskrete Werte annehmen können und kontinuierlichen Entscheidungsmodellen, in denen beliebige Werte in einem gegebenen Intervall möglich sind. Beispiele für dynamische Entscheidungsmodelle finden sich etwa in [Def00] oder [BLA11] aus dem auch das kommende binäre Entscheidungsmodell motiviert wurde. Nach Interaktion mit einem oder mehreren Agenten kann sich die Meinung des betrachteten Agenten ändern. Dabei spielen zusätzlich noch stochastische Einflüsse eine Rolle. Mögliche Interaktionspartner werden dabei durch Netzwerke - siehe Kapitel 3 - festgelegt. Es werden im folgenden nur binäre Entscheidungsmodelle betrachtet, also Modelle in denen die Agenten zwischen zwei unterschiedlichen Meinungen wählen können.

Binäres Entscheidungsmodell - Ein Kontaktpartner

Modellbeschreibung des agentenbasierten Modells

Betrachtet wird eine Anzahl von $N \in \mathbb{N}$ Agenten deren Meinungsfindung folgendermaßen abläuft:

1. Jeder Agent besitzt einen Meinungswert aus der Menge $\{0, 1\}$. Dabei bedeutet 1 die Zustimmung zu einem Thema und 0 die Ablehnung.

2. In jedem Zeitschritt wird ein Agent zufällig gewählt. Dieser wählt nun einen anderen Agenten aus seinem Kontaktnetzwerk aus.

3. Unterscheiden sich die Meinungen, so ändert der Agent mit Wahrscheinlichkeit 0.5 seine Meinung.

Ein Agent besitzt als einziges Merkmal den Zahlenwert seiner Meinung. Dieser liegt für das binäre Entscheidungsmodell in der Menge $\sigma = \{0, 1\}$, die den individuellen Merkmalsraum beschreibt. Es bezeichne $x_i \in \sigma$ die Meinung des i-ten Agenten. In jedem Zeitschritt wird nun zufällig ein Agent ausgewählt, der nach Interaktion seine Meinung ändern kann. Die möglichen Interaktionspartner werden durch ein Netzwerk festgelegt und die Auswahl des Interaktionspartners erfolgt basierend auf einer uniformen Verteilung. Die betrachteten Netzwerke sind statisch also im Verlauf der gesamten Simulation unveränderlich. Die Dynamik des ABM in Hinsicht auf die Zustände der Agenten kann mit der Aktualisierungsregel, siehe A.3.3, beschrieben werden.

Beschreibung als Markovkette

Wir beginnen mit der Beschreibung der Mikrodynamik als MK. Der Konfigurationsraum Σ ist gegeben als $\Sigma = \sigma^N = \{0, 1\}^N$. Eine Konfiguration fasst also die Meinungen aller Agenten zusammen und hat die Form $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$. mithilfe der Aktualisierungsregel kann man nun die Übergangsmatrix P der Mikrodynamik bestimmen. Die Frage nach einer makroskopischen Darstellung kann hier nicht allgemein beantwortet werden. Dies ist eine Folge der unterschiedlichen Topologie der Netzwerke. Beim Zusammenfassen von Zuständen muss gemäß Satz 28 sichergestellt sein, dass der reduzierte Prozess die Markoveigenschaft erfüllt. Dazu müssen die in (4.21) definierten Übergangswahrscheinlichkeiten p_{xA_j} für alle Konfigurationen $x \in A_i$ den selben Wert annehmen. Diese Übergangswahrscheinlichkeiten hängen jedoch auch von dem gewählten Interaktionsnetzwerk ab, wie in den kommenden Beispielen gezeigt wird.

Makrodynamik für das vollständige Netzwerk: Beschreibung und Analyse

Beim vollständigen Netzwerk, siehe Kapitel 3.3.1, sind alle Agenten miteinander verbunden. Also wird der Kontaktpartner aus allen anderen Agenten zufällig ausgewählt. Da die Position eines Agenten keinen Einfluss auf die möglichen Kontaktpartner bzw. die Verhaltensregeln des Agenten hat, muss man zwischen den einzelnen Agenten nicht unterscheiden. Die Topologie des vollständigen Netzwerkes erlaubt es also, alle Agenten mit der selben Meinung zusammenzufassen. Die einzelnen Markovzustände werden durch die Gesamtzahl der Agenten mit Meinung 1 bzw. Meinung 0 beschrieben. Dies wird als Liste zweier Zahlen $[k, N - k]$ angegeben und entspricht dem Markovzustand k. Dies bedeutet, dass k Agenten die Meinung 1 vertreten und $N - k$ Agenten die Meinung 0. Der Zustandsraum ist gegeben als

$$\hat{S} = \Big\{ j \equiv [j, N - j] \mid j = 0 \ldots N \Big\}. \tag{6.10}$$

Hier beginnt anders als in Definition 5 die Nummerierung bei 0. Für N Agenten hat der Zustandsraum $N + 1$ Elemente.

Da in jedem Zeitschritt nur höchstens ein Agent seine Meinung ändern kann, sind von jedem Zustand k nur Übergänge zu den Zuständen $k-1$ und $k+1$ möglich bzw. ein Verbleib in Zustand k. Die Zustände 0 sowie N sind absorbierend. Der Übergangsgraph ist in Abbildung 6.17 angegeben.

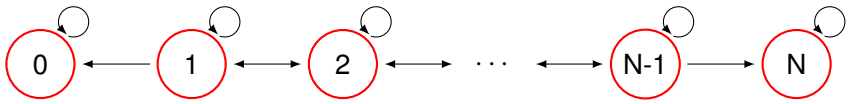

Abbildung 6.17: Übergangsgraph für die Markovkette eines binären Entscheidungsmodells mit N Agenten in einem vollständigen Netzwerk.

Für ein vollständiges Netzwerk lassen sich die Übergangswahrscheinlichkeiten exakt bestimmen. Da jeweils nur ein Agent ausgewählt wird und seine Meinung ändern kann, gibt es nur mögliche Übergänge zwischen zwei benachbarten Zuständen. Wir betrachten den Zustand k und wollen die Übergangswahrscheinlichkeiten $\hat{p}_{k,k-1}$, sowie $\hat{p}_{k,k}$ und $\hat{p}_{k,k+1}$ bestimmen. Der Übergang zum Zustand $k-1$ bedeutet, dass der ausgewählte Agent zuvor die Meinung 1 vertritt, auf einen Kontaktpartner mit Meinung 0 trifft und sich für die neue Meinung entscheidet, somit gilt $\hat{p}_{k,k-1} = \frac{k}{N}\frac{N-k}{N-1}\frac{1}{2}$. Ebenso erhält man $\hat{p}_{k,k+1} = \frac{N-k}{N}\frac{k}{N-1}\frac{1}{2} = \hat{p}_{k,k-1}$ und $\hat{p}_{k,k} = 1 - (\hat{p}_{k,k-1} + \hat{p}_{k,k+1})$. Dabei entsteht die Übergangsmatrix

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0.75 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.167 & 0.667 & 0.167 & 0 \\ 0 & 0 & 0.125 & 0.75 & 0.125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wenn N den Wert 4 annimmt.

Ähnlich wie im Fall des Random Walk Modells, siehe Kapitel 6.2.1, könnte man aufgrund der Symmetrie der Übergangsmatrix auch hier noch weitere Zustände zusammenlegen. Dazu wählt man die Partition $\mathcal{A} = \left\{\{0,N\},\{1,N-1\},\ldots,\{\frac{N}{2}\}\right\}$ für gerades N bzw. $\mathcal{B} = \left\{\{0,N\},\{1,N-1\},\ldots,\{\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor+1\}\right\}$ für ungerades N, wobei $\lfloor\cdot\rfloor$ die nächstkleinere ganze Zahl ist. Diese Partitionen würden alle Konfigurationen zusammenfassen bei denen die selbe Anzahl an Agenten eine Meinung teilt, ob Zustimmung oder Ablehnung ist dabei egal. Da man bei Entscheidungsprozessen jedoch an der Meinung der Agenten Interesse hat, wird diese Reduktion nicht weiter untersucht.

Wir vergleichen wiederum zu zwei Zeitpunkten $n = 10$ sowie $n = 100$ die transiente Verteilung der Zustände bei $N = 20$ Agenten. Als Startverteilung wählen wir dabei den Fall, dass genau die Hälfte aller Agenten den Wert 0 sowie 1 annehmen.

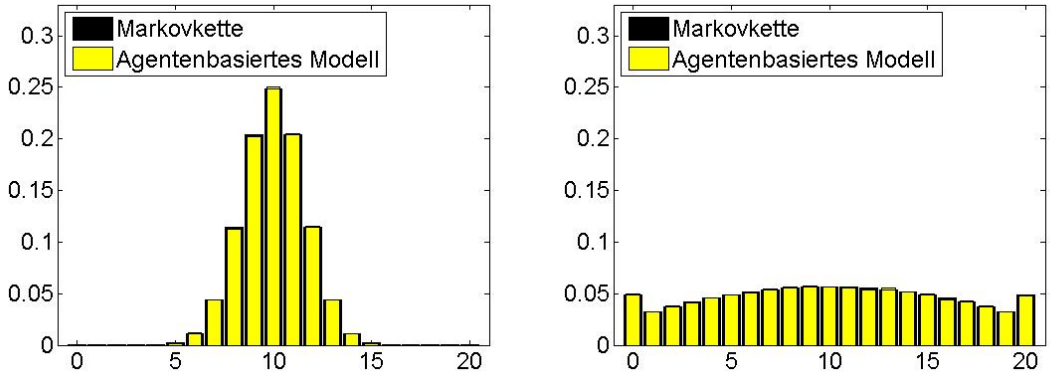

Abbildung 6.18: Simulationsergebnisse des binären Entscheidungsmodells mit vollständigem Netzwerk von 20 Agenten mit Anfangsverteilung $\mu^0 : \mu^0_{10} = 1$ zum Endzeitpunkt $n = 10$ (links) sowie $n = 150$ (rechts).

Anhand der Übergangsmatrix ist ersichtlich, dass es zwei absorbierende Zustände geben muss, Zustand 0 sowie Zustand N. Demnach ist die Markovkette reduzibel und wir können die Eindeutigkeit der Grenzverteilung nicht folgern. Für jede Startverteilung landet die Markovkette jedoch nach endlich vielen Schritten in einem der beiden absorbierenden Zuständen. Wir suchen nach stationären Verteilungen. Also Verteilungen die sich im Zeitverlauf nicht mehr ändern. Wir sehen, dass jede Verteilung $\mu^0 = (\alpha, 0, \ldots, 0, 1 - \alpha)$ mit $\alpha \in [0, 1]$ eine solche ist. Das bedeutet, dass mit Wahrscheinlichkeit α alle Agenten eines Durchlaufs im Zustand 0 und mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ alle im Zustand 1 sind. Da ein Entkommen aus den absorbierenden Zuständen nicht möglich ist, stellt jede Verteilung dieser Form eine stationäre Verteilung dar. Für andere Anfangsverteilungen als in Abbildung 6.18 erhält man auch eine dieser stationären Verteilungen als asymptotisches Verhalten, siehe Abbildung 6.19.

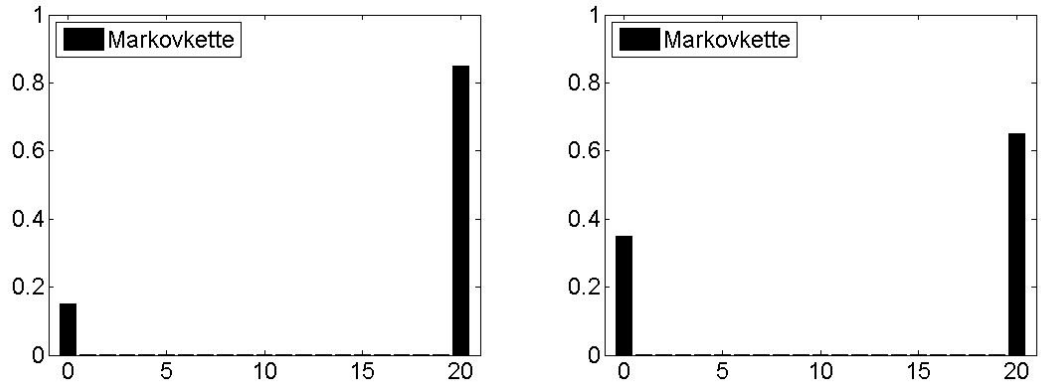

Abbildung 6.19: Grenzverteilung des binären Entscheidungsmodells mit vollständigem Netzwerk von 20 Agenten mit Anfangsverteilung $\mu^0 : \mu^0_{18} = 1$ (links) sowie $\mu^0 : \mu^0_{14} = 1$ (rechts).

Es bleibt die Frage zu klären, wie lange es durchschnittlich dauert bis ausgehend von einem Zustand $j \in \{1, \ldots, N-1\}$ ein absorbierender Zustand erreicht wird. Wir lösen dazu das lineare Gleichungssystem für die Ersteintrittszeit (4.9) und erhalten dabei den Vektor $(u_1, \ldots, u_{N-1})^\mathsf{T} = (135, 230, 303, 362, 409, 446, 474, 493, 504, 508, 504, 493, 474, 446, 409,\ 362, 303, 230, 135)^\mathsf{T}$. Dabei ist $u_i = \mathbb{E}(T_i)$ der Erwartungswert der Ersteintrittszeit in einen absorbierenden Zustand, wenn in Zustand i gestartet wird. Bei der Startverteilung aus Abbildung 6.18 würde das eine Ersteintrittszeit von 508 Zeitschritten bedeuten. Wir wollen auch dieses Ergebnis mittels Monte-Carlo-Simulation überprüfen. Dabei werden 50.000 Durchgänge im agentenbasierten Modell simuliert und so lange fortgesetzt bis sich das Modell in einem der beiden absorbierenden Zustände 0 oder N befindet. Wir erhalten als Ergebnis die durchschnittliche Ersteintrittszeit von 508,9 Zeitschritten, jedoch ist die Simulationsdauer mit 254 Sekunden schon deutlich länger als bei der Markovkette. Man erkennt hier einen Vorteil der Analyse mittels MK. Beim Berechnen von Verteilungen, Grenzverteilungen, stationären Verteilungen sowie Ersteintrittszeiten müssen nur lineare Gleichungssysteme gelöst werden, was mittels MATLAB auch für größere Dimensionen deutlich schneller ist.

Makrodynamik für das Ring Netzwerk: Beschreibung und Analyse

Als nächstes betrachten wir das k-Ring Netzwerk mit $k = 2$, siehe Kapitel 3.3.2. Dabei sind die Agenten in einem Kreis angeordnet und können mit den beiden Agenten interagieren, die ihnen am nächsten liegen, siehe Abbildung 6.20. Dabei werden Agenten mit Meinung 1 grün und Agenten mit Meinung 0 rot dargestellt. Es ist zu überprüfen ob das Zusammenlegen der Zustände wie in (6.10) hier auch möglich ist. Dazu müssen gemäß Satz 28 die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\hat{p}_{ij} := p_{xA_j} \qquad x \in A_i \tag{6.11}$$

für alle $k \in A_i$ den selben Wert annehmen. Dabei ist die Partition $\mathcal{A}$ so gewählt, dass Konfigurationen mit der selben Anzahl an Agenten mit Meinung 1 zusammengefasst werden, also

$$A_i = \Big\{ x \in \Sigma \mid \sum_{\ell=1}^{N} x_\ell = i \Big\}. \tag{6.12}$$

Die Nummerierung beginnt in diesem Beispiel bei 0, dabei sind in A_0 alle Konfigurationen zusammengefasst, in denen kein Agent die Meinung 1 vertritt usw. Die Wahrscheinlichkeiten p_{xA_j} aus Gleichung (6.11) geben dabei die Einschritt-Übergangswahrscheinlichkeiten der Mikrodynamik an, von einer Konfiguration $x \in A_i$ liegt in die Partition A_j zu gelangen. Damit der reduzierte Prozess die Markoveigenschaft erfüllt, muss diese Wahrscheinlichkeit unabhängig von der gewählten Konfiguration $x \in A_i$ sein.

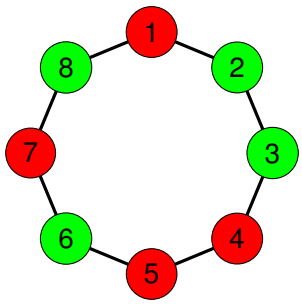

Abbildung 6.20: Anordnung von 8 Agenten im Ring Netzwerk.

Wir zeigen am Beispiel $N = 8$, dass dies nicht der Fall ist. Dazu betrachten wir zwei Konfigurationen die beide in der Menge A_4 liegen und zwar $x = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ und $y = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$. Wir stellen uns dabei die Agenten im Kreis angeordnet vor, siehe Abbildung 6.20. Die Agenten mit den Nummern 2 und 8 bilden die Nachbarschaft des ersten Agenten, die Agenten mit den Nummern 1 und 3 bilden die Nachbarschaft des zweiten Agenten, usw. Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit $\hat{p}_{xA_3}$ bzw. $\hat{p}_{yA_3}$ bestimmen. Diese müssen laut Satz 28 übereinstimmen. Um in die Partition A_3 zu gelangen muss ein Agent mit Meinung 1 diese ändern, d.h. die zufällige Auswahl muss auf einen Agenten fallen, der Meinung 1 und zumindest einen Nachbarn mit Meinung 0 hat. Im Fall der Konfiguration x gibt es nur 2 Agenten die das erfüllen, im Fall von y gibt es davon 4. Außerdem muss der Agent einen Nachbarn mit Meinung 0 zur Interaktion auswählen. Es ergeben sich die Übergangswahrscheinlichkeiten aus der Aktualisierungsregel zu $\hat{p}_{xA_3} = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ und $\hat{p}_{yA_3} = \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Die Wahrscheinlichkeit von y aus in die Partition A_3 zu gelangen ist also doppelt so hoch wie die von x aus. Der reduzierte Prozess ist somit keine Markovkette.

Der Grund dafür ist die Topologie des Netzwerkes. In Fall eines Ring Netzwerkes kommt es nur zu lokaler Interaktion. Somit können Cluster entstehen in denen eine Meinung vorherrscht, wie bei Konfiguration x zu sehen. Wir werden später sehen, dass sich solche Cluster in diesem Beispiel nicht mehr auflösen können. Was passieren kann, wenn für eine gewählte Partition die Markoveigenschaft nicht nachgewiesen wird, ist in Abbildung 6.21 zu sehen. Hier wurde für $N = 20$ Agenten die Partition gemäß (6.12) gewählt und eine Markovkette vorausgesetzt. Die Übergangsmatrix wurde approximiert. Dazu wurden für jeden Zustand des reduzierten Prozesses mit Zustandsraum $\hat{S} = \{0, \ldots, N\}$ sehr viele zufällige Konfigurationen erzeugt und mithilfe der Aktualisierungsregel ein Übergang in einen neuen Zustand festgestellt. Die relativen Häufigkeiten der Übergänge wurden als Approximation der Übergangswahrscheinlichkeiten verwendet, siehe A.3.5.

Wir sehen hier deutliche Unterschiede zwischen den Ergebnissen des ABM (gelb) und der erzeugten Markovkette (schwarz). Da aufgrund der lokalen Nachbarschaften nicht alle denkbaren Übergänge möglich sind, verzögert sich das Eintreten in einen der absorbierenden Zustände. Die

approximative Bestimmung der Übergangsmatrix hat folgenden Einfluss: Es werden die Unterschiede der einzelnen Wahrscheinlichkeiten p_{xA_j} für unterschiedliche Konfigurationen x ignoriert und durch die zufällige Auswahl der Konfigurationen über die p_{xA_j} gemittelt. Dies führt dazu, dass der lokale Einfluss des Ring Netzwerks verloren geht und das Ergebnis verfälscht. Zu Beginn der Simulation wurde angenommen, dass ein Agent mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Meinung 0 oder 1 vertritt. Dies führt zu einer Binomialverteilung als Anfangsverteilung der Markovkette.

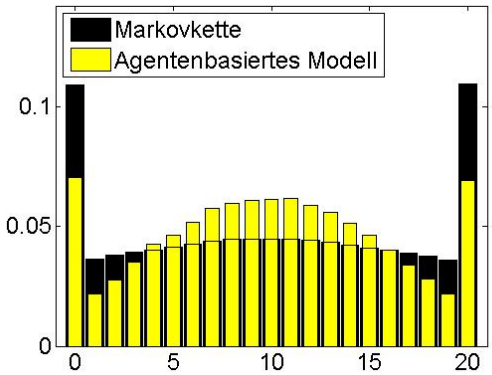

Abbildung 6.21: Simulationsergebnisse des binären Entscheidungsmodells mit Ring Netzwerk von 20 Agenten bei falsch gewählter Partition.

Hier zeigt sich, dass bei der Wahl der Partition vorsichtig vorzugehen ist. Das Zusammenlegen der Konfigurationen mag hier zwar vernünftig erscheinen, die Überlegungen zeigen jedoch, dass es im Fall des Ring Netzwerkes nicht möglich is, damit eine MK zu erzeugen. Wir können jedoch aufgrund der gleichmäßigen Nachbarschaftsstruktur des Ring Netzwerkes eine Partition finden, die zu einer MK führt.

Durch die Symmetrie des Netzwerkes können wir Zustände zusammenlegen, die gemäß der Aktualisierungsregel die selben Eigenschaften besitzen. Dabei können wir die Position der Agenten ändern, sofern alle Nachbarn gleich bleiben:

1. Drehung: Es werden alle Konfigurationen zusammengefasst, die durch eine Drehung ineinander übergeführt werden können.

2. Spiegelung: Es werden alle Konfigurationen zusammengefasst, die durch eine Spiegelung ineinander übergeführt werden können.

In Abbildung 6.22 und 6.22 sind Beispiele für beide Fälle angeführt.

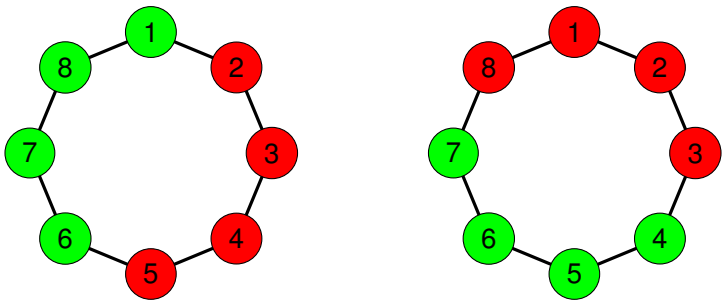

Abbildung 6.22: Konfigurationen die durch Drehung ineinander übergeführt werden können.

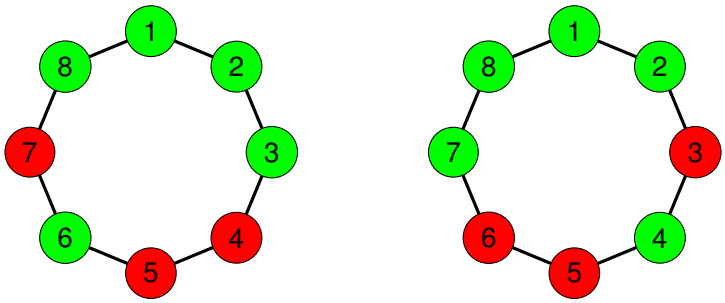

Abbildung 6.23: Konfigurationen die durch Spiegelung ineinander übergeführt werden können.

Dies führt auf eine Gesamtanzahl von 30 Zuständen, was im Vergleich zur Mikrodynamik mit $8^2 = 256$ immer noch eine starke Reduktion der Dimension ist. Die Übergangsmatrix wurde approximativ bestimmt. Bei der Analyse der Markovkette, der Übergangsgraph ist in Abbildung 6.24 angegeben, kann man folgende Eigenschaften erkennen.

Zustände in $\hat{S}$	Konfiguration	Zustände in $\hat{S}$	Konfiguration
1	$(0,0,0,0,0,0,0,0)$	16	$(1,1,0,0,1,1,0,0)$
2	$(1,0,0,0,0,0,0,0)$	17	$(1,1,0,1,0,1,0,0)$
3	$(1,1,0,0,0,0,0,0)$	18	$(1,1,0,1,0,0,1,0)$
4	$(1,0,1,0,0,0,0,0)$	19	$(1,0,1,0,1,0,1,0)$
5	$(1,0,0,1,0,0,0,0)$	20	$(1,1,0,1,0,1,1,0)$
6	$(1,0,0,0,1,0,0,0)$	21	$(1,1,1,0,1,0,1,0)$
7	$(1,1,1,0,0,0,0,0)$	22	$(1,1,1,0,1,1,0,0)$
8	$(1,1,0,1,0,0,0,0)$	23	$(1,1,1,1,0,1,0,0)$
9	$(1,1,0,0,1,0,0,0)$	24	$(1,1,1,1,1,0,0,0)$
10	$(1,0,1,0,1,0,0,0)$	25	$(1,1,1,0,1,1,1,0)$
11	$(1,0,0,1,0,1,0,0)$	26	$(1,1,1,1,0,1,1,0)$
12	$(1,1,1,1,0,0,0,0)$	27	$(1,1,1,1,1,0,1,0)$
13	$(1,1,1,0,1,0,0,0)$	28	$(1,1,1,1,1,1,0,0)$
14	$(1,1,1,0,0,1,0,0)$	29	$(1,1,1,1,1,1,1,0)$
15	$(1,1,0,1,1,0,0,0)$	30	$(1,1,1,1,1,1,1,1)$

Tabelle 6.2: Zustandsraum des binären Entscheidungsmodells mit Ring Netzwerk von 8 Agenten.

Wie auch im vorherigen Beispiel sind die Zustände 1 und 30 absorbierend. Die entsprechenden Konfigurationen lauten $1 \equiv (0,0,0,0,0,0,0,0)$ und $30 \equiv (1,1,1,1,1,1,1,1)$. Die absorbierenden Zustände bilden abgeschlossene, verbundene Klassen mit nur einem Element $C_1 = \{1\}$ und $C_2 = \{30\}$. Außerdem ist $C_3 = \{2,3,7,12,24,28,29\}$ eine weitere abgeschlossene, verbundene Klasse. Die darin enthaltenen Zustände beschreiben alle lokalen Cluster wie $(1,0,0,0,0,0,0,0)$, $(1,1,0,0,0,0,0,0), \ldots, (1,1,1,1,1,1,1,0)$. Aufgrund der Verhaltensregeln der Agenten kann diese Klasse nicht mehr verlassen werden. Dies liegt daran, dass in diesen Konfigurationen immer nur die Agenten am Rand der Cluster ihre Meinung ändern können. Alle anderen haben nur Nachbarn mit dem selben Wert 0 oder 1. Im Übergangsgraph ist diese Klasse als vertikale Kette links dargestellt. Nach einer endlichen Anzahl von Zeitschritten landet die Markovkette darin. Der Prozess endet schließlich in einem der absorbierenden Zustände. Alle anderen Zustände werden zu einer verbundene Klasse T zusammengefasst. Eine weitere Besonderheit bietet der Zustand $19 \equiv (1,0,1,0,1,0,1,0)$. Dieser kann nur zu Beginn der Simulation angenommen werden und wird danach von keinem anderen Zustand aus erreicht.

Die Zustände der Makrodynamik können aus der Tabelle 6.2 entnommen werden. Dabei wurde zu jedem Zustand der reduzierten MK ein Repräsentant aus dem Konfigurationsraum gewählt. Es ist anzumerken, dass im Übergangsgraph der Verbleib im selben Zustand nicht wie bei den früheren Beispielen angezeigt wird. Durch die Aktualisierungsregel ist in jedem Fall $\hat{p}_{ii} > 0$ für alle Zustände $i \in \hat{S} = \{1,2,\ldots,30\}$. Auf die Darstellung als geschlossene Pfeile über den

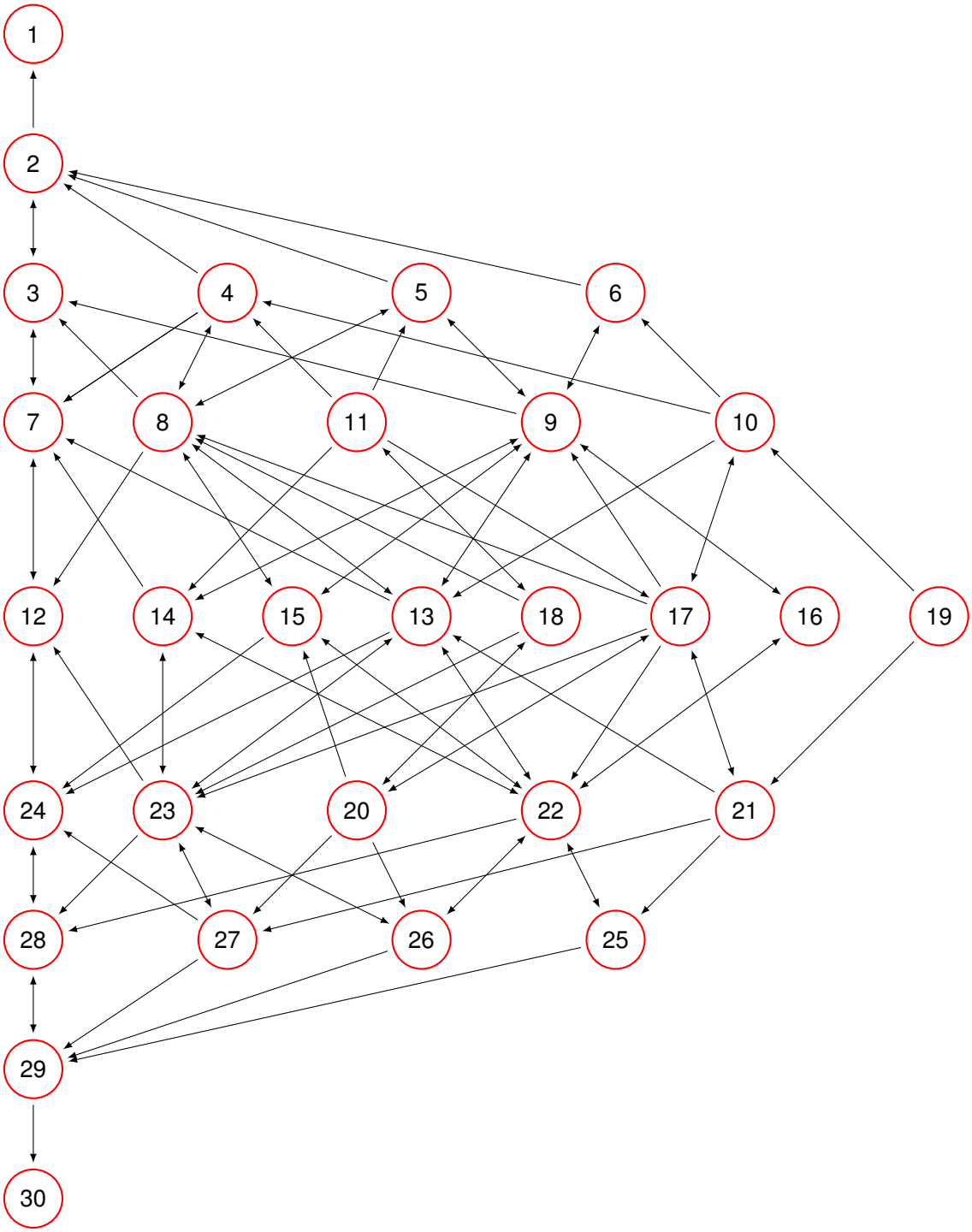

Abbildung 6.24: Übergangsgraph für die Markovkette eines binären Entscheidungsmodells mit 8 Agenten in einem Ring Netzwerk. Die Zustände sind in Tabelle 6.2 augelistet.

Zuständen in Abbildung 6.24 wurde aufgrund der besseren Übersichtlichkeit verzichtet.
Wie schon im dynamischen Entscheidungsmodell mit vollständigem Netzwerk, gibt es auch hier keine eindeutige Grenzverteilung. Es wird jedoch immer eine Verteilung von der Form $\hat{\pi} = (\alpha, 0, \ldots, 0, 1-\alpha)$ mit $\alpha \in [0,1]$ als asymptotische Verteilung erreicht. Zum Vergleich mit dem vollständigen Netzwerk soll auch hier der erwartete Ersteintritt in einen der beiden absorbierenden Zuständen mit Formel (4.9) berechnet werden. Mit $\mathbb{E}(T_j) = u_j$ ergeben sich für die Zustände mit jeweils 4 Agenten mit Meinung 1 die Werte

$$(u_{12}, u_{13}, \ldots, u_{19})^\mathsf{T} \approx (128, 119, 116, 112, 110, 111, 107)^\mathsf{T}.$$

Im Vergleich dazu ist $\tilde{u}_5 \approx 71$ der Erwartungswert für den entsprechenden Zustand im vollständigen Netzwerk. Man sieht, dass durch die lokalen Interaktionen ein Konsens in der gesamten Agentenbevölkerung viel langsamer eintritt. Im Fall des Ring Netzwerks ist außerdem zu erwähnen, dass die Zustände aus C_3 vergleichsweise längere Ersteintrittszeiten aufweisen.

Zum Vergleich der Simulationsergebnisse wurde wiederum eine Monte-Carlo-Simulation des ABM durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.25 wiedergegeben. Im linken Bild ist die Verteilung der Zustände der Makrodynamik angegeben. Das rechte Bild zeigt eine Klasseneinteilung nach Formel (6.12). Gestartet wurde der Prozess im Zustand $19 \equiv (1,0,1,0,1,0,1,0)$ bei einer Simulationsdauer von 30 Zeitschritten.

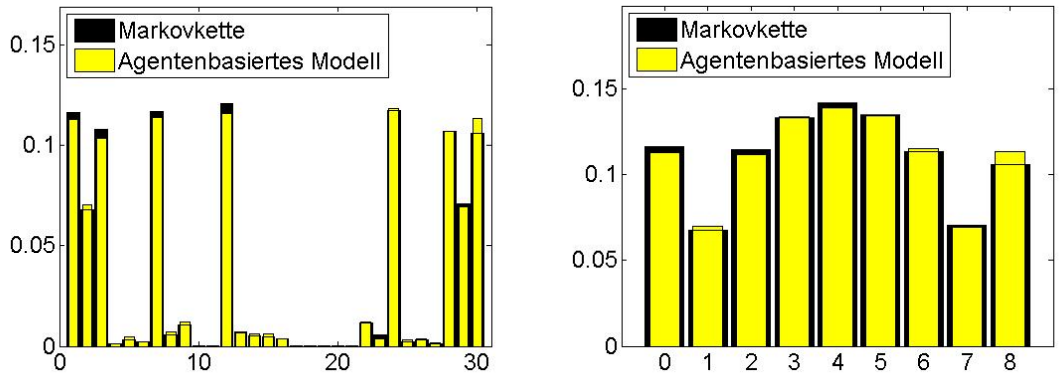

Abbildung 6.25: Simulationsergebnisse des binären Entscheidungsmodells mit Ring Netzwerk von 8 Agenten.

Makrodynamik für das Gitternetzwerk: Beschreibung und Analyse

Ein ähnliches Verhalten wie beim k-Ring Netzwerk entsteht auch bei einem Gitternetzwerk, siehe Kapitel 3.3.3. Dabei sind die Agenten auf einem quadratischen Gitter angeordnet. Die Interaktionspartner hängen dabei von der gewählten Nachbarschaftsumgebung (Moore oder Von-Neumann) ab. Anders als beim Ring Netzwerk haben nicht alle Agenten die selbe Anzahl an Nachbarn. Wir betrachten ein binäres Entscheidungsmodell mit $N = 9$ Agenten und einer Von-Neumann-Umgebung, siehe Abbildung 3.5. Dabei werden wiederum Agenten mit Meinung 1

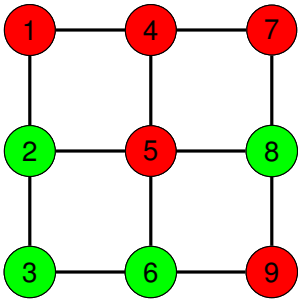

Abbildung 6.26: Anordnung von 9 Agenten in einem Gitternetzwerk mit Von-Neumann-Umgebung.

grün und Agenten mit Meinung 0 rot dargestellt. In Abbildung 6.26 sieht man eine mögliche Konfiguration der Mikrodynamik. Die möglichen Interaktionspartner sind dabei durch Linien verbunden.

Bei der Wahl der Partition wird ähnlich wie beim Ring Netzwerk vorgegangen. Alle Konfigurationen die durch Spiegelung oder 90° Drehung der entsprechenden Konfigurationsmatrix ineinander übergeführt werden können, werden zu einem neuen Markovzustand zusammengefasst . In den Abbildungen 6.27 und 6.28 sind für beide Fälle Beispiele angegeben.

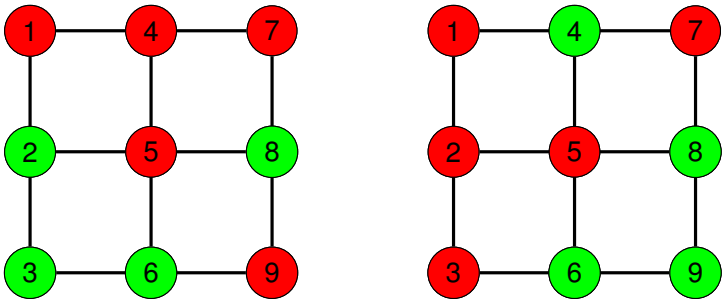

Abbildung 6.27: Konfigurationen die durch Drehung ineinander übergeführt werden können.

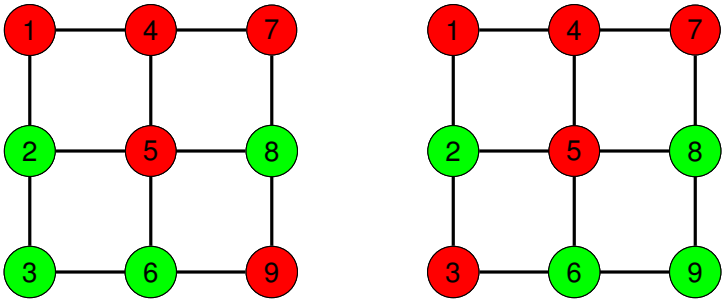

Abbildung 6.28: Konfigurationen die durch Spiegelung ineinander übergeführt werden könne.

Der entstandene Zustandsraum $\hat{S}$ der Makrodynamik enthält 102 Zustände, die Mikrodynamik enthält $9^2 = 512$ Zustände. Somit konnte auch hier die Dimension auf etwa ein Fünftel gedrückt werden. Die Übergangsmatrix wurde wieder approximativ bestimmt. Es existieren wiederum 2 absorbierende Zustände, die den Konfigurationen $1 \equiv (0,0,0,0,0,0,0,0,0)$ und $102 \equiv (1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ entsprechen. Im Gegensatz zum Ring Netzwerk bilden alle anderen Zustände eine verbundene Klasse T. Die MK zerfällt also in $\hat{S} = C_1 \cup C_2 \cup T$ mit $C_1 = \{1\}$ und $C_2 = \{102\}$. Auch hier gibt es zwei Zustände, die von keinem anderen Markovzustand aus erreichbar sind. Im Fall der Van-Neumann-Umgebung sind dies die Zustände $50 \equiv (1,0,1,0,1,0,1,0,1)$ und $74 \equiv (0,1,0,1,0,1,0,1,0)$.

In Abbildung 6.29 sind die Simulationsergebnisse nach 50 Zeitschritten angegeben. Links ist ein Ausschnitt der Verteilung der Mikrodynamik abgebildet. Auf der rechten Seite wurden die Ergebnisse in Klassen nach Formel (6.12) zusammengefasst. Der Prozess wurde dabei zu gleichen Teilen in den Zuständen 50 und 74 gestartet. Beim ABM wurden 10.000 Iterationen durchgeführt.

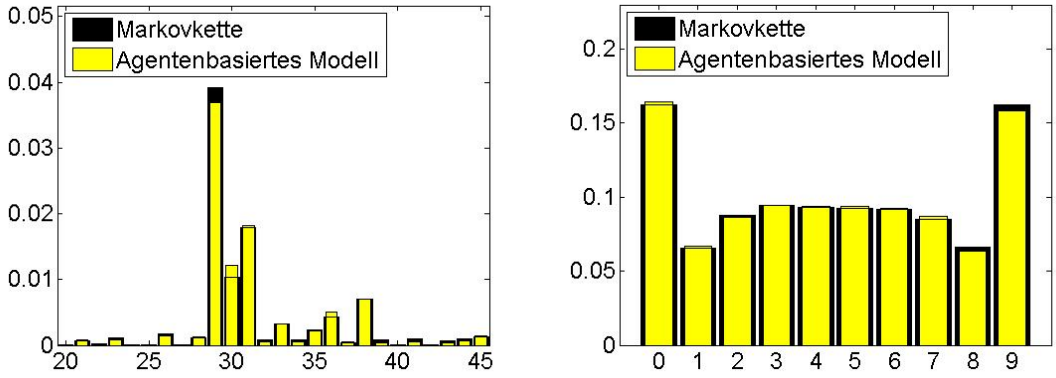

Abbildung 6.29: Simulationsergebnisse des binären Entscheidungsmodells mit Von-Neumann Netzwerk von 9 Agenten.

Wir wollen nun auch dieses binäres Entscheidungsmodell am Gitter mit einer Moore-Umgebung ausstatten. Die Wahl der Partition und somit des Zustandsraum kann im Vergleich zur Von-Neumann-Umgebung beibehalten werden. Was sich jedoch ändert sind die Übergangswahrscheinlichkeiten. Da die Nachbarschaft der einzelnen Agenten größer ist als im Fall der Von-Neumann-Umgebung kommt es auch zu Übergängen, die vorher nicht möglich waren. So können z.B. die Zustände $50 \equiv (1,0,1,0,1,0,1,0,1)$ und $74 \equiv (0,1,0,1,0,1,0,1,0)$ auch von anderen Zuständen aus erreicht werden. Ein Beispiel für so einen Übergang ist in Abbildung 6.30 angegeben.

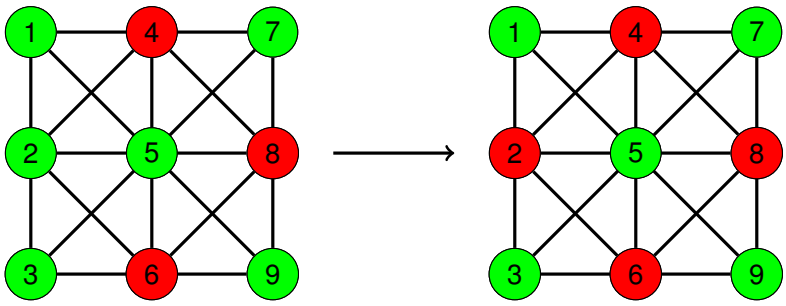

Abbildung 6.30: Möglicher Übergang in den Zustand $(1,0,1,0,1,0,1,0,1)$.

Zur Vollständigkeit werden auch hier die Simulationsergebnisse bei gleichen Voraussetzungen wie in Abbildung 6.29 angegeben. Die Zeit bis zur Absorption in einen der Zustände 1 oder 102 ist dabei etwas kürzer. Mithilfe von Formel (4.9) kann dies nachgewiesen werden. Für die Startzustände 50 und 74 erhalten wir bei Von-Neumann-Umgebung eine erwartete Ersteintrittszeit in die Zustände C_1 oder C_2 von $(\mathbb{E}(T_{50}), \mathbb{E}(T_{74}))^\mathsf{T} \approx (104, 104)^\mathsf{T}$ und für die Moore-Umgebung

$(\mathbb{E}(\tilde{T}_{50}), \mathbb{E}(\tilde{T}_{74}))^{\mathsf{T}} \approx (92, 91)^{\mathsf{T}}$.

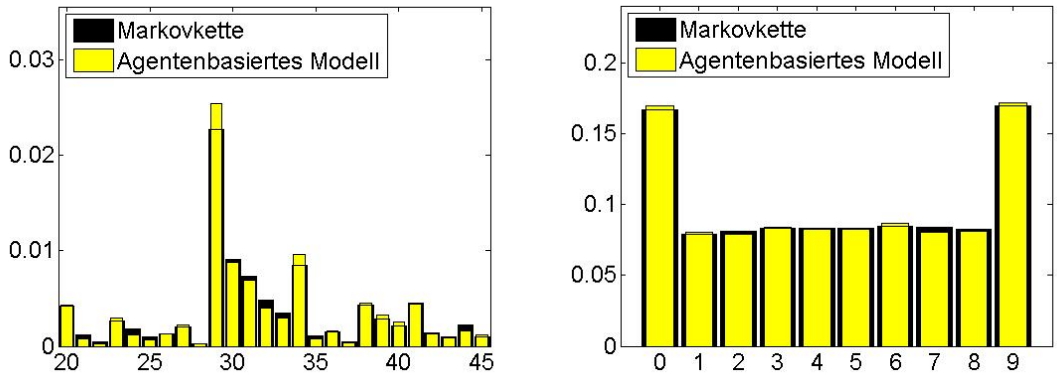

Abbildung 6.31: Simulationsergebnisse des binären Entscheidungsmodells mit Moore Netzwerk von 9 Agenten.

Makrodynamik für andere Netzwerktypen

Für die verbliebenen Netzwerke (Zufallsnetzwerk, Small-World Netzwerk und Power Netzwerk) können keine allgemeinen Regeln angegeben werden, welche Konfigurationen zusammenzulegen sind. Zwar kann man für ein gegebenes Kontaktnetzwerk vereinzelt Konfigurationen zusammenfassen, doch durch das Fehlen von Symmetrien wird der Zustandsraum stets sehr groß bleiben. Es bleibt nur die Darstellung der Mikrodynamik als MK. In Abbildung 6.32 sind die Simulationsergebnisse für den Fall eines Small-World Netzwerkes angegeben. Dabei wurde ein Small-World Netzwerk mit 8 Agenten nach dem in Kapitel 3.3.5 beschriebenen Algorithmus erzeugt. Der Konfigurationsraum Σ umfasst $2^8 = 256$ Konfigurationen, die den Zustandsraum der Mikrodynamik bilden. Die Übergangsmatrix P wurde wieder approximiert.

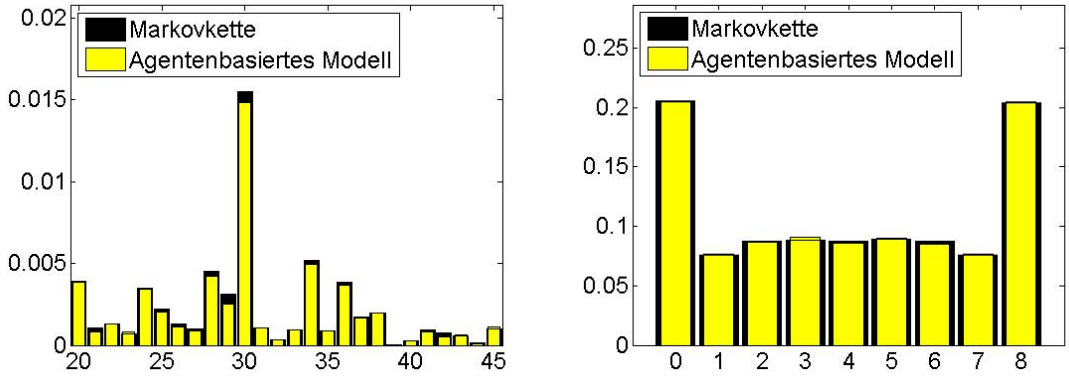

Abbildung 6.32: Simulationsergebnisse des binären Entscheidungsmodells mit Small-World Netzwerk von 8 Agenten.

Dynamische Spiele

Die Spieltheorie beschäftigt sich mit Entscheidungssituationen, die in Form von sogenannten Spielen modelliert werden. Dabei wird ein Spiel durch folgende Eigenschaften beschrieben, siehe [BW16] :

1. Menge der Spieler N
2. Menge der möglichen Strategien S
3. Nutzenfunktion U
4. Spielregeln

Nachdem jeder Spieler seine Strategie gewählt hat, kann mithilfe der Nutzenfunktion U die Auszahlung an alle Spieler bestimmt werden. Die Spielregeln geben an, in welcher Reihenfolge die Spieler ihre Strategien wählen bzw. ob dies simultan geschieht. Außerdem legen sie fest in welchem Ausmaß die Spieler informiert sind. Man spricht von einem Spiel mit vollständiger Information, wenn alle Spieler über die möglichen Strategien aller Spieler und deren Auszahlungswerte Bescheid wissen. Die Wahl der Strategie erfolgt unter Berücksichtigung dieser Information und ist darauf gerichtet den Auszahlungswert zu maximieren. Dabei müssen auch die Überlegungen der Gegenspieler bedacht werden. Wir beschränken uns auf 2-Personen-Spiele, die auch Matrixspiele genannt werden. Dabei werden die Auszahlungswerte der Spieler in Form einer Matrix angegeben. Es wird zwischen dem Zeilenspieler und dem Spaltenspieler unterschieden. Außerdem werden nur symmetrische Spiele untersucht, bei denen die Strategien und Auszahlungswerte für beide Spieler gleich sind. Ein einfaches Beispiel zur Konkretisierung der eben eingeführten Begriffe ist das klassische „Schere-Stein-Papier“. Dabei gibt es 3 Strategien und zwar Schere, Stein und Papier mit den Regeln:

- Stein schlägt Schere.

- Schere schlägt Papier.
- Papier schlägt Stein.

Dabei werden die Strategien simultan, also von beiden Spielern gleichzeitig gewählt. Das Spiel kann in Matrixschreibweise wie in Tabelle 6.3 geschrieben werden. Das Zahlenpaar $(0, 0)$ in der ersten Zeile und ersten Spalte gibt dabei den Auszahlungswert der beiden Spieler an, wenn beide die Strategie „Schere“ spielen. In diesem Fall ist es ein Unentschieden und kein Spieler bekommt einen Punkt. Die erste Zahl der Zahlenpaare gibt dabei den Auszahlungswert des Zeilenspielers an, die zweite Zahl somit den Auszahlungswert des Spaltenspielers. Spielt der Zeilenspieler „Schere“ und der Spaltenspieler „Stein“, so gewinnt letzterer (Auszahlung: +1).

	Schere	Stein	Papier
Schere	$(0, 0)$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
Stein	$(1, -1)$	$(0, 0)$	$(-1, 1)$
Papier	$(-1, 1)$	$(1, -1)$	$(0, 0)$

Tabelle 6.3: Auszahlungsmatrix des Spiels „Schere-Stein-Papier“.

Wir wählen als agentenbasiertes Modell wiederholte 2-Personen-Spiele mit abwechselnden Partnern und gleicher Spielstruktur. Das bedeutet, dass in jeder Spielrunde die gleichen Strategien mit gleichen Auszahlungswerten zur Verfügung stehen. Die Agenten wissen welche Strategie der Mitspieler im vorherigen Spiel gewählt hat und entscheiden sich anhand dieser Information für eine neue Strategie. Die Entscheidungsregeln der Agenten hängen dabei von der Auszahlungsmatrix, also dem jeweiligen Spiel ab. Zu Beginn der Simulation werden den Agenten zufällig Strategien zugeordnet, die möglichen Kontaktpartner werden dabei wie im dynamischen Entscheidungsmodell durch Netzwerke festgelegt.

Dynamisches Kooperationsspiel

Wir betrachten ein symmetrisches 2-Personen-Spiel der Form wie in Tabelle 6.4 mit $c > a > d > b$ und $2a > (b + c)$.

	C	D
C	(a, a)	(b, c)
D	(c, b)	(d, d)

Tabelle 6.4: Auszahlungsmatrix eines symmetrischen 2-Personen-Spiels mit 2 Strategien.

Dieses Spiel wird auch als Gefangenendilemma bezeichnet. Dabei ist es für beide Spieler am besten zu kooperieren (Strategie C, aus dem Englischen für *cooperate*), jedoch kann sich ein Spieler durch Ausweichen auf Strategie D (aus dem Englischen für *defect*) einen Vorteil verschaffen.

Der Name Gefangenendilemma (engl.: *prisoner's dilemma*) ergibt sich aus folgendem sozialem Dilemma. Zwei Personen werden eines schweren Verbrechen verdächtigt und unabhängig voneinander befragt. Das Strafausmaß für das Verbrechen beträgt 6 Jahre, jedoch liegen keine Beweise für das schwere Verbrechen vor. Es gibt jedoch Beweise für ein leichteres Verbrechen nach dem beide Verdächtigen verurteilt werden können. Gestehen beide das schwere Verbrechen, so werden beide zu einer Freiheitsstrafe von 4 Jahren verurteilt. Leugnen beide so werden beide zu 2 Jahren Haft verurteilt. Gesteht jedoch nur ein Verdächtiger, so wird dieser als Kronzeuge straffrei bleiben und der andere zu 6 Jahren verurteilt. Die Spielmatrix wird in diesem Beispiel zu

	leugnen	gestehen
leugnen	$(-2,-2)$	$(-6,0)$
gestehen	$(0,-6)$	$(-4,-4)$.

Tabelle 6.5: Auszahlungsmatrix beim Gefangenendilemma.

Zwar ist es für beide Spieler das Beste zu leugnen, jedoch besteht dabei die Gefahr vom anderen Spieler verraten zu werden. Wird das Spiel nun öfters wiederholt, so gibt es mehrere mögliche Verhaltensregeln seine Strategie anzupassen.

Als „Tit for Tat“ Strategie (kurz: TFT) wird folgendes Verhalten beschrieben: Zu Beginn wird die Kooperationsstrategie (Strategie C) gewählt. Wählt der Gegenspieler im vorherigen Spiel Kooperation so bleibt man dabei, ansonsten ändert man seine Strategie auf D. Genauer untersucht hat diese Strategie *Robert Axelrod* in seinem Buch „The Evolution of Cooperation“, siehe [Axe06]. Nach *Axelrod* erfüllt die TFT Strategie folgende vier Eigenschaften. Sie ist einfach, nachsichtig, nett und provozierbar. Die „Tit for Tat“ Strategie strebt grundsätzlich Kooperation an, lässt sich aber auch nicht vom Gegenspieler ausnutzen. Bei Abweichen des Gegenspielers von der Kooperation wird auch selbst gewechselt. Jedoch kann bei einer Rückkehr zur Kooperation diese wieder aufgenommen werden.

Die TFT Strategie hat auch Schwächen. Wenn zum Beispiel zwei TFT Spieler aufeinandertreffen, die eine unterschiedliche Strategie gewählt haben, wird keine Kooperation mehr möglich. Die Spieler spielen nun abwechselnd C und D und schaden einander. Außerdem können lokale Störungen in einer ansonsten homogenen kooperierenden Gruppe diese Kooperation zerstören. Um diese Schwächen zu beseitigen kann die klassische TFT Strategie zu einer „Generous Tit for Tat“ (kurz: GTFT) Strategie verändert werden, siehe [NS93]. Ein GTFT Spieler ist großzügiger als ein klassischer TFT Spieler. Er bleibt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit p_1 bei der Kooperationsstrategie C, auch wenn der Gegenspieler im letzten Zug Strategie D gewählt hat.

Modellbeschreibung des agentenbasierten Modells

Betrachtet wird eine Anzahl von $N \in \mathbb{N}$ Agenten, die zwischen zwei Spielstrategien entscheiden können. In jedem Zeitschritt wird ein Paar Agenten ausgewählt, dass einmal das Kooperationsspiel wie in Tabelle 6.4 bzw. 6.5 spielt, siehe auch [Wil06]. Beide Spieler wissen was der Ge-

genspieler im vorherigen Zeitschritt gespielt hat und beide Spieler befolgen die GTFT Strategie mit $p_1 = 0.2$. Die möglichen Kontatktpartner werden wiederum durch ein statisches Netzwerk festgelegt. Zusammengefasst gelten folgende Regeln:

1. Jeder Agent spielt eine Strategie C oder D. Dabei bedeutet C Kooperation und D keine Kooperation.

2. In jedem Zeitschritt wird ein Agent gewählt. Dieser wählt nun einen anderen Agenten aus seinem Kontaktnetzwerk aus.

3. Die ausgewählten Agenten spielen simultan eine Runde des Kooperationsspiels wie in Tabelle 6.4. Dabei wird der Zug mit der GTFT Strategie gewählt.

Üblicherweise werden bei Spielen bzw. dynamischen Spielen die Auszahlungswerte der einzelnen Spieler als Merkmal betrachtet. Wir sind jedoch nur daran interessiert wie und wie schnell sich die Kooperation in der gesamten Agentenpopulation durchsetzt und nicht welche Auszahlung die einzelnen Spieler im Verlauf der Simulaton erhalten. Der individuelle Merkmalsraum ist somit $\sigma = \{C, D\}$ und beinhaltet die beiden Spielstrategien C und D. Es bezeichne $x_i \in \sigma$ die aktuelle Strategie des i-ten Agenten. In jedem Zeitschritt kommt es zu einer Interaktion, in diesem Fall einem Spiel, zwischen zwei Agenten bei der beide ihre Strategien ändern können. Die Interaktionspartner werden dabei zufällig und uniform aus einem vorgegebenen Netzwerk gewählt. Die Aktualisierungsregel ist in Anhang A.3.4 angegeben und beschreibt die Dynamik des ABM.

Beschreibung der Markovkette

Der Konfigurationsraum besteht aus allen möglichen Konfigurationen des ABM, $\Sigma = \sigma^N = \{C, D\}^N$. Identifiziert man nun die Spielstrategie C mit dem Zahlenwert 1 und die Spielstrategie D mit dem Zahlenwert 0 so entsteht exakt der selbe Konfigurationsraum wie beim binären Entscheidungsmodell. Auch hier hat jeder Agent zwei Optionen zur Auswahl. Aufgrund der unterschiedlichen Aktualisierungsregeln für die Agenten erhält man jedoch andere Übergangswahrscheinlichkeiten.

Makrodynamik: Beschreibung und Analyse

Für das vollständige Netzwerk kann mittels oben beschriebener Identifizierung auch in diesem Beispiel die Partition wie in Gleichung (6.12) gewählt werden. Das heißt der k-te Markovzustand der Makrodynamik beinhaltet alle Konfigurationen in denen genau k Agenten die Strategie C spielen. Somit ist $\hat{S} = \{0, 1, \ldots, N\}$ und es gibt $N + 1$ Zustände. Durch die gegebene Aktualisierungsregel der GTFT Strategie sind nur Übergänge von Zustand k in den Zustand $k + 1$ möglich. Dieser Übergang tritt dann ein, wenn zwei Agenten mit unterschiedlicher Strategie aufeinandertreffen und der vorher kooperierende Spieler auch dabei bleibt. Der andere Spieler wechselt in diesem Fall sicher zur Kooperation. In allen anderen Fällen bleibt die Gesamtanzahl an kooperierenden Spielern gleich groß. Die Übergangswahrscheinlichkeiten lauten

$p_{k,k+1} = \frac{k}{N} \cdot \frac{N-k}{N-1} \cdot 0.2$ und $p_{k,k} = 1 - p_{k,k+1}$. Für $N = 4$ entsteht die Übergangsmatrix

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.87 & 0.13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Übergangsgraph ist in Abbildung 6.33 angegeben. Der Zustand 0 ist absorbierend, wird jedoch von keinem anderen Zustand $\{1, 2, \ldots, N\}$ aus erreicht. Ein weiterer absorbierender Zustand ist $N + 1$, dieser wird in jedem Fall von den Zuständen in $\{1, 2, \ldots, N\}$ aus erreicht. Die Markovkette kann zerlegt werden in die Klassen $C_1 \cup C_2 \cup T$, mit den abgelschossenen, verbundenen Klassen $C_1 = \{0\}$ und $C_2 = \{10\}$. Alle anderen Klassen werden in T zusammengefasst mit $T = \{1\} \cup \{2\} \cup \ldots \cup \{9\}$. Da der Zustand 0 mit keinem anderen Zustand in Verbindung steht, kann er im folgenden vernachlässigt werden. Startet der Prozess in Zustand 0, so wird er diesen niemals verlassen. Startet der Zustand außerhalb von Zustand 0 so kann dieser niemals erreicht werden.

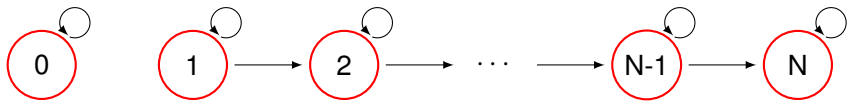

Abbildung 6.33: Übergangsgraph für die Markovkette eines dynamischen Kooperationsspiels mit N Agenten in einem vollständigen Netzwerk.

Für alle anderen Netzwerktypen muss man wie im vorherigen Beispiel die Symmetrien der Interaktionsnetzwerke ausnutzen um den Zustandsraum zu reduzieren. Wir wollen nun die unterschiedlichen Netzwerktypen in Hinblick auf die Ersteintrittszeiten in den absorbierenden Zustand vergleichen. Die Agentenzahl wird dabei bei allen mit $N = 9$ Agenten angenommen. Untersucht wird, wie lange die Agenten brauchen, bis alle kooperieren. Dazu wird vorausgesetzt, dass nur ein Agent zu Beginn der Simulation kooperiert und alle anderen die Strategie D spielen. Dies entspricht im vollständigen Netzwerk dem Zustand 1, beim Ringnetzwerk dem Zustand $1 \equiv (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ und bei den Gitternetzwerken den Zuständen $2 \equiv (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $3 \equiv (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ und $4 \equiv (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, vgl Abbildung 6.26.

Am langsamsten stellt sich die Kooperation beim Ring Netzwerk nach durchschnittlich 153 Zeitschritten ein, gefolgt vom Moore Netzwerk (113 Zeitschritte) und dem Von-Neumann Netzwerk (112 Zeitschritte). Das vollständige Netzwerk erreicht nach durchschnittlich 109 Zeitschritten am schnellsten eine Kooperation. Etwas überraschend ist die Tatsache, dass im Moore Netzwerk, in dem die Agenten bis zu 8 Nachbarn besitzen, erst später ein Konsens erreicht wird

als im Von-Neumann Netzwerk mit höchstens 4 Nachbarn. Dieser Umstand wird jedoch klarer wenn man sich die möglichen Übergänge im Detail ansieht. Dazu betrachten wir als Beispiel eine Konfiguration in der nur noch ein Agent Strategie D spielt (rot) und der Rest schon kooperiert (grün), siehe Abbildung 6.34.

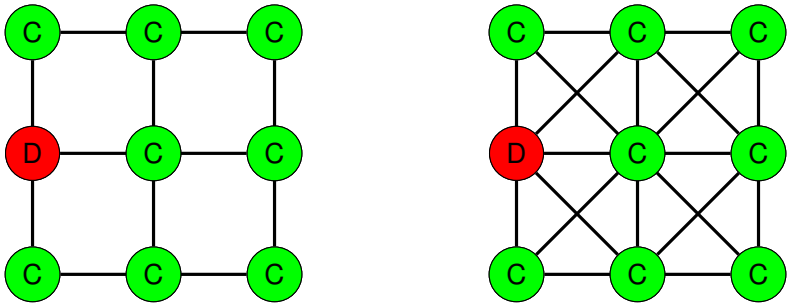

Abbildung 6.34: Nachbarschaft des nicht kooperierenden Spielers im Von-Neumann Netzwerk (links) und Moore Netzwerk (rechts).

Um nun in den absorbierenden Zustand zu gelangen muss der nicht kooperierende Spieler ausgewählt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies passiert, ist im Von-Neumann Netzwerk

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} = 0.25$$

und im Moore Netzwerk

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} \approx 0.24.$$

Somit wird der nicht kooperierende Spieler im Moore Netzwerk weniger oft ausgewählt und der Übergang in den absorbierenden Zustand ist unwahrscheinlicher als im Von-Neumann Netzwerk. Dies ist nur eine exemplarische Konfiguration, doch sie zeigt, dass nicht nur die Anzahl der Nachbarn für die Ersteintrittszeit ausschlaggebend ist.

In Abbildung 6.35 sind für die oben angeführten Fälle die Simulationsergebnisse dargestellt. Dabei wurde jeweils im Zustand gestartet in dem nur ein Agent kooperiert und 100 Zeitschritte simuliert. Für die Monte-Carlo-Simulation des ABM wurden 10.000 Iterationen gemacht. Da jeder Netzwerktyp eine unterschiedliche Anzahl an Markovzuständen besitzt, wurden die Ergebnisse wiederum in Klassen der Art (6.12) eingeteilt.

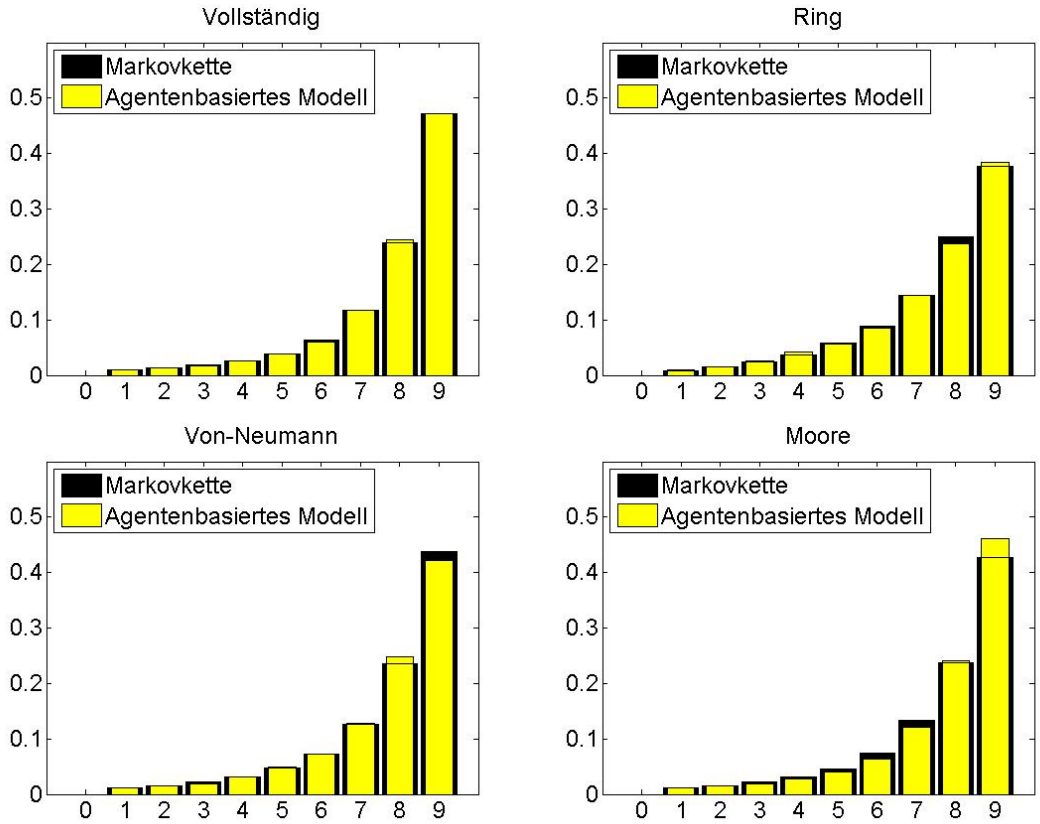

Abbildung 6.35: Simulationsergebnisse des dynamischen Kooperationsspiels mit 9 Agenten mit vollständigem Netzwerk (links oben), Ring Netzwerk (rechts oben), Gitternetzwerk mit Von-Neumann-Umgebung (links unten) sowie Gitternetzwerk mit Moore-Umgebung (rechts unten).

KAPITEL 7

Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst. Dabei wird aufgezeigt für welche Anwendungen die beschriebene Analysemethode verwendet werden kann und wo Probleme auftauchen können.

Die Arbeiten von *Banisch et al.* [BLA11] sowie *Izquierdo et al.* [IIGS09] zeigen, dass alle agentenbasierten Modelle als Markovketten der Mikrodynamik dargestellt werden können, wenn sie in Form der Random Mapping Representation, siehe Definition 30, dargestellt werden können. Wie schon die betrachteten Beispiele gezeigt haben ist dies in der Praxis jedoch fast immer der Fall. Meist ist die Modellbeschreibung jedoch textuell gegeben und muss erst umformuliert werden. Dazu wird der individuelle Merkmalsraum festgelegt und mögliche Änderungen der Merkmale der Agenten in der Aktualisierungsregel zusammengefasst. Die Random Mapping Representation liegt somit implizit in der Modellbeschreibung vor.

Die im letzten Kapitel vorgestellten Fallbeispiele wurden aufgrund folgender Eigenschaften gewählt:

1. Einfachheit
2. Repräsentativität
3. Übertragbarkeit

Durch die Einfachheit eignen sich die Modelle besonders gut zur Darstellung und Analyse mittels Markovketten. Die Agenten besitzen einfache Regeln und jeweils nur ein veränderbares Merkmal. Der individuelle Merkmalsraum ist hier immer endlich und die Anzahl der möglichen Zustände sehr klein. Außerdem kann es pro Zeitschritt nur zu wenigen Änderungen im Merkmalsraum der Agenten kommen. Dies führt darauf, dass die Übergangsmatrix P schwach besetzt ist, also sehr viele 0-Einträge besitzt. Die Modelle bzw. die Regeln der Agenten sind darüber hinaus einfach darstellbar und somit leicht vermittelbar. So können die Bewegungsregeln

im Bewegungsmodell mit Interaktion in einer Grafik, siehe Abbildung 6.10 und 6.15, abgebildet werden. Auch im dynamischen Entscheidungsmodell ist die Nachbarschaftsstruktur der Agenten gut darstellbar, siehe Abbildung 6.20 oder 6.26. Dies macht es leicht die Modelle zu implementieren und die Ergebnisse zu interpretieren.

Trotz der Einfachheit der Beispiele repräsentieren sie eine große Klasse von agentenbasierten Modellen sehr gut. Sie beeinhalten sehr viele Eigenschaften von agentenbasierten Modellen. So kommt es zu Interaktionen zwischen den Agenten. Im Fall der Bewegungsmodelle finden Interaktionen statt, wenn sich zwei Agenten auf demselben Feld befinden. Es handelt sich also um eine räumliche Interaktion. Diese Art der Interaktion kann z.B. beim Modellieren eines epidemiologischen Modells verwendet werden, bei dem sich Menschen oder andere Lebewesen durch Kontakt mit anderen infizieren können. In den dynamischen Entscheidungsmodellen oder Spielen werden Netzwerke verwendet um mögliche Interaktionen festzulegen. Diese können auch eine räumliche Nachbarschaft beschreiben, wie etwa das Ring- oder Gitternetzwerk. Jedoch können mit Netzwerken auch Nachbarschaften und somit Interaktionen allgemeinerer Art dargestellt werden. Das Beispiel des Lieferkettenmodells aus Kapitel 3.1.1 beschreibt eine mögliche Anwendung solcher Interaktionsarten. Dabei sind ökonomische Agenten in einem Kontaktnetzwerk angeordnet und können mit ihren Nachbarn interagieren. Diese Agenten können Kunden, Verkäufer, Zulieferer aber auch größere Firmen oder Institutionen darstellen. Außerdem konnte man selbst bei diesen einfachen Beispielen emergentes Verhalten beobachten, also das Entstehen von komplexem Verhalten des Systems aus einfachen Regeln der Agenten.

Die Bemerkungen aus dem letzten Absatz sollen verdeutlichen, dass die betrachteten Modelle auch auf allgemeinere Modelle übertragbar sind. Dies kann die Art der Bewegung der Agenten oder aber auch die Form der Interaktion zwischen den Agenten betreffen. Darüber hinaus ist auch die Vorgangsweise um auf eine Darstellung als Markovkette zu gelangen auch auf komplexere Modelle übertragbar. Dabei ist zuerst die Random Mapping Representation des agentenbasierten Modelles gesucht. Für vorhandene Modelle ist diese durch die Aktualisierungsregel bereits festgelegt. Nach dem Bestimmen der Übergangsmatrix P ist die Mikrodynamik als Markovkette (Σ, P) beschrieben. Die Beschreibung als Makrodynamik $(S, \hat{P})$ ist jedoch keineswegs garantiert. Dazu müssen die Agenten alle die selben Eigenschaften teilen und die Modellstruktur gewisse Symmetrien aufweisen. Dies ist jedoch nicht immer der Fall. Für eine Vielzahl an agentenbasierten Modellen ist somit keine Darstellung als Makrodynamik mittels Markovkette möglich.

Als Abschluss soll noch aufgezeigt werden, in welchen Fällen die Darstellung als Markovkette schwierig oder unmöglich ist. Zu Schwierigkeiten kommt es bei folgenden Eigenschaften:

1. Heterogenität

2. Flexibilität

3. Komplexität

Wie schon in Kapitel 2 beschrieben, ist eine wesentliche Eigenschaft von agentenbasierten Modellen die, dass heterogene Strukturen gut abgebildet werden können. Dies bedeutet, dass es unterschiedliche Typen von Agenten geben kann oder dass die Agenten unterschiedliche Strategien verfolgen um ihre Ziele zu erreichen. Dies erschwert die Darstellung des ABM als Makrodynamik dadurch, dass die Agenten nicht ununterscheidbar sind. Im schlechtesten Fall ist somit die Mikrodynamik des ABM die einzige Darstellung als Markovkette.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von agentenbasierten Modellen ist ihre Flexibilität. Die Modelle können leicht verändert werden ohne die Modellstruktur zu sehr zu verändern. Dieser Vorteil wird im Allgemeinen nicht auf die daraus abgeleitete Markovkette vererbt. So sieht man anhand der Beispiele, dass schon das Hinzufügen von Agenten, etwa beim Bewegungsmodell mit Interaktion in Kapitel 6.2.3 bzw. 6.2.4, den Zustandsraum der Markovkette verändert. Beim binären Entscheidungsmodell in Kapitel 6.3.1 hat man außerdem gesehen, dass unterschiedliche Nachbarschaften zu unterschiedlich großen Zustandsräumen der Makrodynamik führen. Es muss somit jeder Fall einzeln betrachtet werden. Im agentenbasierten Modell musste im Vergleich dazu nur ein kleiner Codeabschnitt geändert werden, der für die Wahl der Interaktionspartner verantwortlich ist.

Auch die Komplexität von agentenbasierten Modellen kann bei der Darstellung als Markovkette zu Problemen führen. Wie schon beim Beispiel des Bewegungsmodells beschrieben, siehe Gleichung (6.7) sowie (6.8), kann der Zustandsraum der Markovkette bei einer großen Anzahl an Agenten schon bei einfachen Beispielen sehr groß werden. In komplexeren Modellen, in denen z.B. eine heterogene Bevölkerung abgebildet wird oder in denen die Agenten viele Merkmale besitzen, kann somit die Dimension des Konfigurationsraums riesig werden. Da zur Analyse des Modells die Fundamentalmatrix bestimmt wird, muss eine riesige Matrix invertiert werden. Dies kann ab einer gewissen Größe aufgrund des großen Speicherplatzbedarfs nicht sinnvoll durchgeführt werden. Dazu können Agenten mit den selben Eigenschaften zusammengefasst werden.

Allerdings lassen sich einige dieser Probleme auch umgehen oder abschwächen. So ist das Invertieren einer Matrix nicht unbedingt nötig um die Lösung der linearen Gleichungssysteme wie in (4.9) oder (4.16) zu bestimmen. Außerdem sind die Übergangsmatrizen sehr schwach besetzt, haben also viele 0-Einträge. Dies kann dazu verwendet werden um die Gleichungssysteme effizient zu lösen. Auch die Heterogenität kann bis zu einem gewissen Grad mithilfe von Markovketten abgebildet werden.

Zusammengefasst lässt sich sagen, dass die Darstellung als Markovkette eine gute Möglichkeit ist agentenbasierte Modelle zu analysieren. Aus der Übergangsmatrix lassen sich einfach und schnell Kennzahlen des Modells berechnen. Dazu muss lediglich ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Ob diese Methode auch für größere, komplexere, anwendungsorientierte Beispiele tauglich ist, muss jedoch erst in weiterer Forschungsarbeit nachgewiesen werden. Probleme die dabei auftreten können sind die hohe Dimensionalität der Übergangsmatrix, sowie die oben beschriebenen Schwierigkeiten die dabei entstehen, wenn heterogene, komplexe Modelle analysiert werden sollen.

ANHANG A

Appendix

Wahrscheinlichkeitstheorie

Satz 32. *Sei T eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$ dann gilt*

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > t)$$

Bew:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{t=1}^{\infty} t\mathbb{P}(X = t) = \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{t} \mathbb{P}(X = t) = \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{k \leq t\}} \mathbb{P}(X = t) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{t \geq k\}} \mathbb{P}(X = t) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{t=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = t) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k)
\end{aligned}$$

■

Algorithmen zur Erzeugung von Netzwerken

Albert-Barabasi Modell

Der Algorithmus des Albert-Barabasi Modells (siehe [AB02], S. 71) erzeugt ein Netzwerk dessen Grad einer Exponentialverteilung folgt. Dabei ist der Grad eines Knoten die Anzahl der damit verbundenen anderen Knoten. Das Netzwerk wird dynamisch erzeugt, ausgehend von einer kleinen Anfangszahl m_0 an Knoten werden in jedem Schritt neue Knoten hinzugefügt und mit m schon existenten Knoten verbunden. Dabei hängt die Wahrscheinlichkeit einen Knoten auszuwählen von seinem Grad ab. Je mehr Verbindungen ein Knoten aufweist desto eher wird er gewählt. Der Algorithum lautet folgendermaßen:

1. Erzeuge ein Netzwerk mit einer kleinen Anzahl $m_0 \in \mathbb{N}$ an Knoten. Bezeichne mit k_i den Grad des i-ten Knoten. Das Netzwerk muss $k_i \geq 1$ erfüllen.

2. Solange die gewünschte Knotenanzahl nicht erreicht ist, wiederhole:

   a) Berechne die Auswahlwahrscheinlichkeit Π des i-ten Knoten in Abhängigkeit des Grades k_i mit

   $$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \tag{A.1}$$

   b) Erzeuge einen Knoten und verbinde ihn mit $m \leq m_0$ schon existierenden Knoten im Netzwerk nach A.1.

Der Algorithmus erzeugt ein Netzwerk dessen Grad unabhängig von der Wahl von m, m_0 exponentialverteilt mit Exponent $\gamma = 3$.

Erdös-Renyi Modell

Das Erdös-Renyi Modell (siehe [AB02], S. 54 f.) erzeugt einen Zufallsgraphen. Ausgehen von N isolierten Knoten werden alle möglichen Kanten zwischen diesen Knoten mit einer Wahrscheinlichkeit p erzeugt. Jeder Knoten k besitzt dabei einen durchschnittlichen Grad von $\langle k \rangle \approx pN$.

Watts-Strogatz Modell

Das Watts-Strogatz Modell (siehe [AB02], S. 67 f.) erzeugt ausgehend von einem k-Ring Netzwerk ein Small-World Netzwerk, indem bestehende Kanten mit Wahrscheinlichkeit p zufällig geändert werden. Der Parameter $p \in [0, 1]$ gibt dabei den Grad der Zufälligkeit des Netzwerkes an. Für $p = 0$ bleibt das k-Ring Netzwerk bestehen, bei $p = 1$ entsteht ein vollkommen zufälliger Graph.

MATLAB Code

Aktualisierungsregel des Random Walk Modells eines Agenten

```
% x1 ... Position des Agenten aus {1,2,...,m}
if x1 == 1
        x1 = 2;
elseif x1 == m
        x1 = m-1;
else
    % waehle Zufallszahl zwischen 0 und 1
    p = rand();
    if p < 0.5
        x1 = x1 + 1;
    else
        x1 = x1 - 1;
    end
end
```

Aktualisierungsregel des Bewegungsmodells mit Interaktion 1D

```
% x = (x(1), x(2), ... , x(N)) ... Konfiguration des ABM
% x(i) aus {1,2,...,m}
for i = 1:N
% falls i-ter Agent alleine auf seinem Feld ist
    if x(i) == 1
        x(i) = 2;
    elseif x(i) == m
        x(i) = m-1;
    else
        if rand() < 0.5
            x(i) = x(i) + 1;
        else
            x(i) = x(i) - 1;
        end
    end
    % falls ein weiterer Agent sich hier befindet
    % Agent bewegt sich mit Wahrscheinlichkeit 0.4
    if rand() < 0.4
        if x(i) == 1
            x(i) = 2;
        elseif x1 == m
            x(i) = m-1;
        else
            if rand() < 0.5
                x(i) = x(i) + 1;
            else
                x(i) = x(i) - 1;
            end
        end
    % Agent bleibt mit Wahrscheinlichkeit 0.6 stehen
    else
        x(i) = x(i);
    end
end
```

Aktualisierungsregel des binären Entscheidungsmodells

```
% x = (x(1), x(2), ..., x(N)) ... Konfiguration des ABM
% x(i) aus {0,1}
% waehle zufaelligen Agenten i
i = randi(N);
% waehle Interaktionspartner aus Netzwerk von i
k = randneighbour(i);
if x(i) ~= x(k)
    p = rand();
    if p < 0.5
        x(i) = x(n);
    end
end
```

Aktualisierungsregel des Kooperationsspiels

```
% x = (x(1), x(2), ..., x(N)) ... Konfiguration des ABM
% x(i) aus {C,D}
% waehle zufaelligen Agenten i
i = randi(N);
% waehle Interaktionspartner aus Netzwerk von i
k = randneighbour(i);
if x(i) ~= x(k)
    % Kooperierender Spieler wechselt mit Wahrscheinlichkeit 0.8
    % seine Strategie
    if x(i) == C
        % Spieler k wechselt zu C
        x(k) = C;
        if rand() < 0.8
            x(i) = D;
        end
    else
        % Spieler i wechselt zu C
        x(i) = C;
        if rand() < 0.8
            x(k) = D;
        end
    end
end
```

Approximation der Übergangsmatrix

Ausgehend von einer Matrix P, die nur 0 Einträge hat, bestimmt folgender Code die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markovkette und speichert diese in der Matrix P ab. Dabei erzeugt die Funktion **setup_configurations()** eine Matrix der möglichen Zustände bzw. jeweils einen Repräsentanten des Konfigurationsraums. Um eine Konfiguration zu erzeugen wird **configurations(state,:)** aufgerufen. Die Funktion **one_step(conf)** berechnet einen Zeitschritt des ABM,

also die Aktualisierungsregel, und gibt die neue Konfiguration aus. Schließlich bestimmt die Funktion **conf2index(conf,configurations)** den Index des neu erhaltenen Markovzustands.

```
% In der Matrix configurations sind zeilenweise die unterschiedlichen
% Konfigurationen des ABM gespeichert
configurations = setup_configurations();
% s ... Anzahl der Zustaende
[s,~] = size(configurations);
iterations = 50000;
% Initialisiere Uebergangsmatrix
P = zeros(s,s);
for state = 1:s
    for k = 1:iterations
        % Erzeuge Konfiguration zu aktuellem Zustand
        conf = configurations(state,:);
        % Simuliere einen Schritt des ABM
        conf_new = one_step(conf);
        % Ermittle neuen Zustand
        state_new = conf2state(conf_new,configurations);
        % Speichere Uebergang
        P(state,state_new) = P(state,state_new) + 1;
    end
end
P = P/iterations;
```

Abbildungsverzeichnis

2.1 Boids Simulation eines Fischschwarms nach 1000 Zeititerationen (rechts) ausgehend von zufälligen Anfangswerten (links). 7

3.1 Kontaktnetzwerk des agentenbasierten Lieferkettenmodells nach [MN06]. . . . 11
3.2 Schellings Segregationsmodell auf 20 $\times$ 20 Gitter mit 150 roten und 150 grünen Agenten. Anfangskonfiguration (links) sowie Konfiguration nach 22 Zeititerationen (rechts). 12
3.3 Graphische Darstellung der vollständigen Graphen K_4 und K_5. 13
3.4 Graphische Darstellung des k-Ring Netzwerkes. 15
3.5 Von-Neumann-Umgebung auf Zellen und als Netzwerk dargestellt. 16
3.6 Moore-Umgebung auf Zellen und als Netzwerk dargestellt. 16
3.7 Graphische Darstellung eines Small-World Netzwerkes nach [Wil06]. 18
3.8 Graphische Darstellung eines Power Netzwerkes nach [Wil06]. 19

4.1 Übergangsgraph einer Markovkette mit 5 Zuständen. 23
4.2 Übergangsgraph einer MK mit 5 Zuständen - Verkürzte Darstellung. 23

6.1 Beispiel eines 2D Gitters mit 3 $\times$ 3 Feldern. 44
6.2 Bewegungsregeln eines unabhängigen Agenten auf einem endlichen 1D Gitter mit 5 Feldern. 45
6.3 Übergangsgraph für die MK der Mikrodynamik eines Random Walk Modells eines Agent auf m Feldern. 45
6.4 Übergangsgraph für die MK der Makrodynamik eines Random Walks eines Agenten auf 5 Feldern 46
6.5 Übergangsgraph für die MK der Makrodynamik eines Random Walks eines Agenten auf 5 Feldern 47
6.6 Verteilung der Markovzustände bei einer Anfangsverteiung von $\mu_0 = (0.5, 0.5, 0, 0, 0, 0)$ für das 1D Random Walk Modell eines Agenten auf 6 Feldern nach $n = 50$ Zeitschritten. 48
6.7 Verteilung der Markovzustände bei einer Anfangsverteilung von $\mu_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ für das 1D Random Walk Modell eines Agenten auf 6 Feldern nach $n = 50$ Zeitschritten (links) sowie $n = 51$ Zeitschritten. 49

6.8 Simulationsergebnisse des 1D Random Walk Modells eines Agenten auf 6 Feldern zum Endzeitpunkt $n = 50$ bei 100 Agentendurchläufen (links) sowie 10.000 Agentendurchläufen (rechts) zur Startverteilung $\mu_0 = (0.5, 0.5, 0, 0, 0, 0)$. 50
6.9 Simulationsergebnisse des 1D Random Walk Modells eines Agent auf 6 Feldern zum Endzeitpunkt $n = 50$ (links) sowie $n = 51$ (rechts) mit Startverteilung $\mu_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ und 10.000 Agentendurchläufen. 51
6.10 Bewegungsregeln zweier abhängiger Agenten auf einem endlichen 1D Gitter mit 5 Feldern. 52
6.11 Übergangsgraph für die Markovkette eines Bewegungsmodells mit Interaktion von 2 Agenten auf 5 Feldern. 55
6.12 Übergangsgraph für die MK eines Bewegungsmodells mit Interaktion von 2 Agenten auf 5 Feldern auf dem Zustandsraum C. 55
6.13 Simulationsergebnisse des 1D Bewegungsmodells mit Interaktion von 2 Agenten auf 5 Feldern zum Endzeitpunkt n = 10 bei 10.000 Agentendurchläufen und Anfangsverteilung $\mu_0 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ (links) bzw. $\mu_0 = \frac{1}{9}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ (rechts). 56
6.14 Simulationsergebnisse des 1D Bewegungsmodells mit Interaktion von 2 Agenten auf 5 Feldern zum Endzeitpunkt n = 50 bei 10.000 Agentendurchläufen und Anfangsverteilung $\mu_0 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ (links) bzw. $\mu_0 = \frac{1}{9}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ (rechts). 57
6.15 Bewegungsregeln eines unabhängigen (links) sowie beeinflussten Agenten (rechts) auf einem quadratischem Gitter. 59
6.16 Übergangsgraph für die Markovkette des Bewegungsmodells mit Interaktion von 2 Agenten auf 3×3 Feldern. 60
6.17 Übergangsgraph für die Markovkette eines binären Entscheidungsmodells mit N Agenten in einem vollständigen Netzwerk. 63
6.18 Simulationsergebnisse des binären Entscheidungsmodells mit vollständigem Netzwerk von 20 Agenten mit Anfangsverteilung $\mu^0 : \ \mu^0_{10} = 1$ zum Endzeitpunkt $n = 10$ (links) sowie $n = 150$ (rechts). 64
6.19 Grenzverteilung des binären Entscheidungsmodells mit vollständigem Netzwerk von 20 Agenten mit Anfangsverteilung $\mu^0 : \ \mu^0_{18} = 1$ (links) sowie $\mu^0 : \ \mu^0_{14} = 1$ (rechts). 64
6.20 Anordnung von 8 Agenten im Ring Netzwerk. 66
6.21 Simulationsergebnisse des binären Entscheidungsmodells mit Ring Netzwerk von 20 Agenten bei falsch gewählter Partition. 67
6.22 Konfigurationen die durch Drehung ineinander übergeführt werden können. . . 68
6.23 Konfigurationen die durch Spiegelung ineinander übergeführt werden können. . 68
6.24 Übergangsgraph für die Markovkette eines binären Entscheidungsmodells mit 8 Agenten in einem Ring Netzwerk. Die Zustände sind in Tabelle 6.2 augelistet. . 70
6.25 Simulationsergebnisse des binären Entscheidungsmodells mit Ring Netzwerk von 8 Agenten. 71
6.26 Anordnung von 9 Agenten in einem Gitternetzwerk mit Von-Neumann-Umgebung. 72
6.27 Konfigurationen die durch Drehung ineinander übergeführt werden können. . . 72

6.28 Konfigurationen die durch Spiegelung ineinander übergeführt werden könne. . 73
6.29 Simulationsergebnisse des binären Entscheidungsmodells mit Von-Neumann Netzwerk von 9 Agenten. 74
6.30 Möglicher Übergang in den Zustand $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$. 74
6.31 Simulationsergebnisse des binären Entscheidungsmodells mit Moore Netzwerk von 9 Agenten. 75
6.32 Simulationsergebnisse des binären Entscheidungsmodells mit Small-World Netzwerk von 8 Agenten. 76
6.33 Übergangsgraph für die Markovkette eines dynamischen Kooperationsspiels mit N Agenten in einem vollständigen Netzwerk. 80
6.34 Nachbarschaft des nicht kooperierenden Spielers im Von-Neumann Netzwerk (links) und Moore Netzwerk (rechts). 81
6.35 Simulationsergebnisse des dynamischen Kooperationsspiels mit 9 Agenten mit vollständigem Netzwerk (links oben), Ring Netzwerk (rechts oben), Gitternetzwerk mit Von-Neumann-Umgebung (links unten) sowie Gitternetzwerk mit Moore-Umgebung (rechts unten). 82

Literaturverzeichnis

[AB02] Réka Albert and Albert-László Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Review of Modern Physics*, 74, 2002.

[AJB99] Réka Albert, Hawoong Jeong, and Albert-László Barabási. Diameter of the world wide web. *Nature*, 401, 1999.

[Axe06] Robert Axelrod. *The Evolution of Cooperation: Revised Edition*. Basic Books, 2006.

[BA99] Albert-László Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286:509–512, 1999.

[BLA11] Sven Banisch, Ricardo Lima, and Tanya Araújo. Agent based models and opinion dynamics as markov chains. Technical report, Cornell University, 2011.

[BOP03] Francesco C. Billari, Fausta Ongaro, and Alexia Prskawetz. *Agent-Based Computational Demography: Using Simulation to Improve Our Understanding of Demographic Behaviour*. Physica-Verlag HD, Heidelberg, 2003.

[BW16] Florian Bartholomae and Marcus Wiens. *Spieltheorie: Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch (German Edition)*. Springer Gabler, 2016.

[Cas97] John L. Casti. *Would-Be Worlds: How Simulation Is Changing the Frontiers of Science*. John Wiley & Sons, 1997.

[CBN03] Nurhan Cetin, Adrian Burri, and Kai Nagel. A large-scale agent-based traffic microsimulation based on queue model. In *In Proceedings of Swiss Transport Research Conference (STRC), Monte Verita, CH*, pages 3–4272, 2003.

[Def00] Guillaume Deffuant. Mixing beliefs among interacting agents. *Advances in Complex Systems*, 03, 2000.

[Die12] Reinhard Diestel. *Graphentheorie (Springer-Lehrbuch Masterclass) (German Edition)*. Springer, 2012.

[FFF99] Michalis Faloutsos, Petros Faloutsos, and Christos Faloutsos. On power-law relationships of the internet topology. *SIGCOMM Comput. Commun. Rev.*, 29(4):251–262, August 1999.

[Gil07] Nigel Gilbert. *Agent-Based Models (Quantitative Applications in the Social Sciences)*. SAGE Publications, Inc, 2007.

[IIGS09] Luis R. Izquierdo, Segismundo S. Izquierdo, José Manuel Galán, and José Ignacio Santos. Techniques to understand computer simulations: Markov chain analysis. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 12(1), 2009.

[Jun04] Dieter Jungnickel. *Graphs, Networks and Algorithms (Algorithms and Computation in Mathematics)*. Springer, 2004.

[KS83] John G. Kemeny and J. Laurie Snell. *Finite Markov Chains: With a New Appendix "Generalization of a Fundamental Matrix"(Undergraduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1983.

[LPW09] David A. Levin, Yuval Peres, and Elisabeth L. Wilmer. Markov chains and mixing times. *American Mathematical Society*, 2009.

[MCS10] Charles M. Macal, Wai Kin Victor Chan, and Young-Jun Son. Agent-based simulation tutorial - simulation of emergent behavior and differences between agent-based simulation and discrete-event simulation. In *Proceedings of the 2010 Winter Simulation Conference*, 2010.

[MN06] Charles M. Macal and Michael J. North. Tutorial on agent-based modeling and simulation part 2: How to model with agents. In *Proceedings of the 2006 Winter Simulation Conference*, 2006.

[NS93] Martin Nowak and Karl Sigmund. A strategy of win-stay, lose-shift that outperforms tit-for-tat in the prisoner's dilemma game. *Nature*, 364, 1993.

[RS91] Gerardo Rubino and Bruno Sericola. A finite characterization of weak lumpable markov processes. part i: The discrete time case. *Stochastic Processes and their Applications*, 38(2):195 – 204, 1991.

[Sch71] Thomas Schelling. Dynamic models of segregation. *Journal of Mathematical Sociology*, 1, 1971.

[SLS98] Troy J. Strader, Fu-Ren Lin, and Michael J. Shaw. Simulation of order fulfillment in divergent assembly supply chains. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 1, 1998.

[WG00] Dieter A. Wolf-Gladrow. *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models: An Introduction (Lecture Notes in Mathematics)*. Springer, 2000.

[Wil06] Allen Wilhite. Economic activity on fixed networks. *Handbook of Computational Economics*, 2, 2006.

[WS98] Duncan J. Watts and Steven H. Strogatz. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 393, 1998.

[WS12] Karl-Heinz Waldmann and Ulrike M. Stocker. *Stochastische Modelle: Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2.auflage edition, 2012.

[WW12] Karsten Webel and Dominik Wied. *Stochastische Prozesse: Eine Einführung für Statistiker und Datenwissenschaftler (German Edition)*. Gabler Verlag, 2012.