Abstände zwischen Primzahlen

DIPLOMARBEIT

Ausgeführt am Institut für

Diskrete Mathematik und Geometrie

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von:
Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Drmota

durch

Marco Köck BSc
Mtr.Nr.: 0826908

26. August 2016

Michael Drmota	Marco Köck

Erklärung zur Verfassung der Arbeit

Marco Köck BSc
Am langen Felde 22/1/9, 1220 Wien

Ich versichere, diese Diplomarbeit selbständig verfasst, andere als angegebene Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfsmittel bedient zu haben.

Wien, 26. August 2016

Marco Köck

Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei meinen Eltern für ihren Rückhalt während meines gesamten Studiums bedanken. Ohne die moralische, aber auch finanzielle Unterstützung wäre dieses Studium nicht möglich gewesen. Ich möchte mich auch bei meiner Freundin Michaela bedanken, die mir geduldig zur Seite stand und mich immer wieder auf Fehler aufmerksam machte. Außerdem sei auch allen Studienkollegen gedankt, mit denen ich die unzähligen Stunden für die Vorbereitung von Prüfungen und Übungen verbringen durfte.
Zu guter Letzt bedanke ich mich bei meinem Betreuer Prof. Drmota, der mir jede meiner Fragen geduldig beantwortet und mit seinen Korrekturen und Anmerkungen diese Arbeit ermöglicht hat.

Kurzfassung

Eine sehr einfache Frage auf dem Gebiet der Primzahlen ist die nach den Abständen zwischen Primzahlen. Betrachtet man die ersten Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, … entdeckt man schnell, dass es auffällig viele Primzahlen mit Abstand 2 gibt. Die Vermutung, dass es unendlich viele Primzahlpaare mit Abstand 2 gibt, ist naheliegend, kann jedoch bis heute nicht bewiesen werden. Zu dieser Vermutung und zu weiteren Abwandlungen bzw. Verallgemeinerungen gibt es unzählige Teilergebnisse.

Ein großer Schritt gelang 2005 mit dem Artikel von Goldston, Pintz und Yıldırım [9]. Aufbauend auf diesem Artikel überraschte Zhang im Jahr 2014 mit dem Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen mit Abstand maximal 70.000.000 gibt [33]. Ausgehend von diesem Ergebnis entstand ein online organisierter Zusammenschluss (Polymath8), der dieses Ergebnis in vielen Details verbesserte [18, 19].

Eine weitere naheliegende Frage ist die nach besonders großen Abständen zwischen Primzahlen. Einige Ergebnisse lassen sich mit sehr einfachen Siebmethoden erreichen und stammen bereits aus der Antike. Doch auch auf diesem Gebiet gab es in letzter Zeit eine bedeutende Weiterentwicklung von Ford, Green, Konyagin und Tao [8].

Diese Arbeit beginnt mit einigen theoretischen Grundlagen, auf welchen die nachfolgenden Kapitel aufbauen. Danach wird ein kurzer Überblick über die geschichtlichen Ereignisse gegeben. Als Ausgangspunkt für die Resultate aus [9] werden wir ausgewählte Methoden aus der Siebtheorie betrachten. Mit Hilfe dieser Grundlagen werden wir die Ideen und Zusammenhänge von [9, 8] und [33] erarbeiten. Abschließend werden auch noch diverse daraus resultierende Verbesserungen angegeben.

Abstract

A simple question in the field of prime numbers is about prime gaps. If one looks at the first primes 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, … there are a lot of primes with difference 2. The twin prime conjecture is not far to seek, but has yet to be proven. However, there are a lot of different partial results and conjectures concerning this topic.

A big leap forward was the paper from Goldston, Pintz and Yıldırım in 2005 [9]. It also was a starting point for Zhang who surprised everybody with his paper in 2014, stating that there are infinite many primes with gap at most 70.000.000 [33]. Based on this result an online collaboration among mathematicians (Polymath8) improved this bound with many different techniques [18, 19].

Another interesting question is about large gaps between primes. Some results are based on simple sieve methods and date back to ancient times. However, there were also some major improvements very recently by Ford, Green, Konyagin and Tao [8].

This thesis begins with some theoretical ground work as basis for the following chapters. After that a short overview over historical events is given. As a starting point for the results from [9] we will look at selected methods from the field of sieve theory. Using these basic techniques we will develop some of the ideas and connections from [9, 8] and [33]. In the end some resulting improvements are presented.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Grundlagen

Dieses Kapitel dient als Grundstein für die folgende Arbeit. Es werden grundsätzliche Definitionen, Sätze und erste Zusammenhänge erläutert, auf die in den folgenden Kapiteln immer wieder zurückgegriffen werden wird. Es können jedoch nicht alle Sätze bewiesen werden, da dies den Umfang der Arbeit sprengen würde. Alle Definitionen sowie die hier ausgelassenen Beweise und weitere Details lassen sich leicht in [22, 16, 4, 24, 6, 1, 14] nachschlagen.

1.1 Zahlentheoretische Funktionen

Definition 1.1 (Zahlentheoretische Funktion)
Eine zahlentheoretische oder arithmetische Funktion a ist eine Funktion, die jeder positiven natürlichen Zahl eine komplexe Zahl zuordnet.

Jede zahlentheoretische Funktion entspricht einer Dirichletreihe.

Definition 1.2 (Dirichletreihe)
Eine Reihe der Form

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

mit $s = a + ib \in \mathbb{C}$ wird Dirichletreihe genannt.

Definition 1.3 (Dirichletprodukt)
Seien a und b zwei zahlentheoretische Funktionen, dann definiert man auf diesen das Dirichletprodukt wie folgt:

$$c(n) = (a * b)(n) = \sum_{d|n} a(d)b\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 \cdot d_2 = n} a(d_1) \cdot b(d_2).$$

Dem entspricht die Dirichletsche Reihe:

$$C(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d_1 \cdot d_2 = n} \frac{a(d_1)b(d_2)}{d_1^s \cdot d_2^s} = A(s) \cdot B(s).$$

Definition 1.4 (Multiplikativ)
Eine zahlentheoretische Funktion f heißt multiplikativ, wenn

$$f(n_1 n_2) = f(n_1) f(n_2)$$

und

$$f(1) = 1$$

für alle teilerfremden $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gilt.

Gilt diese Definition ohne die Bedingung teilerfremd, erhält man die Definition von vollständig multiplikativ.

Definition 1.5 (Vollständig multiplikativ)
Eine zahlentheoretische Funktion f heißt vollständig multiplikativ, wenn

$$f(n_1 n_2) = f(n_1) f(n_2)$$

und

$$f(1) = 1$$

für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gilt.

Oft wird statt vollständig multiplikativ auch der Begriff streng oder stark multiplikativ verwendet.

Satz 1.6
Eine multiplikative Funktion a ist durch die Werte bestimmt, die sie für Primzahlpotenzen $a(p^k), p \in \mathbb{P}, k \geq 1$ annimmt. Ist $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots p_m^{k_m}$, so gilt:

$$a(n) = a(p_1^{k_1}) \ldots a(p_m^{k_m}).$$

Für die Dirichletreihe gilt:

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{a(p)}{p^s} + \frac{a(p^2)}{p^{2s}} + \ldots\right).$$

Satz 1.7
Eine vollständig multiplikative Funktionen a ist durch die Werte $a(p), p \in \mathbb{P}$ wohldefiniert. Es gilt:

$$a(p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}) = a(p_1)^{k_1} \ldots a(p_m)^{k_m}.$$

Für die Dirichletreihe gilt:

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{a(p)}{p^s} + \left(\frac{a(p)}{p^s}\right)^s + \ldots\right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{a(p)}{p^s}}.$$

Diese Produktdarstellung heißt Eulersches Produkt.

1.2 Grundlegende Funktionen und Sätze

1.2.1 Eulersche φ-Funktion

Die Eulersche φ-Funktion gibt für jede natürliche Zahl n an, wie viele zu n teilerfremde natürliche Zahlen existieren, die nicht größer als n selbst sind.

Definition 1.8 (Eulersche φ-Funktion)
Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$\varphi(n) := |\{a \in \mathbb{N} | 1 \leq a \leq n \wedge ggT(a, n) = 1\}|.$$

Die Eulersche φ-Funktion ist eine multiplikative zahlentheoretische Funktion. Es gilt:

Satz 1.9
Für teilerfremde natürliche Zahlen m und n gilt:

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n). \tag{1.1}$$

Satz 1.10
Sei $n \in \mathbb{N}$ dann gilt:

$$\varphi(n) = \prod_{p|n} p^{k_p - 1}(p-1) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{1.2}$$

Wobei k_p die Anzahl ist, wie oft der k-te Primfaktor in der Zahl n vorkommt.

1.2.2 Möbiusfunktion

Definition 1.11 (Quadratfreie Zahl)
Eine natürliche Zahl heißt quadratfrei, wenn in ihrer eindeutigen Primfaktorzerlegung

$$n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$$

keine Primzahl mehr als einmal auftritt.

Die Möbiusfunktion ist wie folgt definiert:

Definition 1.12 (Möbiusfunktion)
Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^k & \text{wenn } n \text{ quadratfrei, } k \text{ ist die Anzahl der Primfaktoren} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auch die Möbiusfunktion ist eine multiplikative zahlentheoretische Funktion.

Satz 1.13
Für teilerfremde natürliche Zahlen m und n gilt:

$$\mu(m \cdot n) = \mu(m) \cdot \mu(n). \tag{1.3}$$

Satz 1.14
Für die summatorische Funktion der Möbiusfunktion gilt:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Die Möbius Umkehrformel bzw. die duale Möbius Umkehrformel erlaubt es, aus einer zahlentheoretischen Funktion ihre summatorische Funktion zu rekonstruieren. Wir benötigen in weiterer Folge die duale Möbius Umkehrformel:

Satz 1.15
Sei $D \subset \mathbb{N}$ und für jedes $d \in D$ gilt, dass auch alle $e|d$ in D sind. Dann ist

$$g(n) = \sum_{n|d} f(d) \tag{1.5}$$

genau dann wenn

$$f(n) = \sum_{n|d} g(d)\mu\left(\frac{d}{n}\right). \tag{1.6}$$

<u>*Beweis*</u> (siehe [25]):

Sei

$$\chi_{d=n} = \begin{cases} 1 & d = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $d \in D$ gilt laut (1.5):

$$\sum_{\substack{n|d \\ d \in D}} \mu\left(\frac{d}{n}\right) g(d) = \sum_{\substack{n|d \\ d \in D}} \mu\left(\frac{d}{n}\right) \sum_{\substack{d|e \\ e \in D}} f(e).$$

Für die nächste Umformung betrachten wir e. Dieses läuft für ein fixes d von $1d, 2d, \dots$, das heißt über $c \cdot d$ für c aus den natürlichen Zahlen.

$$= \sum_{\substack{n|d \\ d \in D}} \mu\left(\frac{d}{n}\right) \sum_{\substack{c \\ cd \in D}} \sum_{r \in D} f(r)\chi_{r=cd}$$

Als nächstes setzen wir $\frac{d}{n} = m$ und erhalten durch das Vertauschen der Summen:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{r \in D} f(r) \sum_{\substack{m \\ mn \in D}} \mu(m) \sum_{\substack{c \\ cmn \in D}} \chi_{cm=\frac{r}{n}} \\
&= \sum_{r \in D} f(r) \sum_{m \mid \frac{r}{n}} \mu(m).
\end{aligned}
$$

Aus der Definition der Möbiusfunktion 1.4 folgt direkt, dass nur der Term mit $\frac{r}{n} = 1$ übrig bleibt. Es folgt die Behauptung:

$$\sum_{n \mid d} g(d) \mu\left(\frac{d}{n}\right) = f(n). \tag{1.7}$$

□

1.2.3 Mangoldtfunktion

Eine weitere wichtige zahlentheoretische Funktion, benannt nach dem Mathematiker Hans von Mangoldt, ist:

Definition 1.16
Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & \text{falls } n \text{ sich als } n = p^k \text{ darstellen lässt,} \\ & \text{wobei } p \in \mathbb{P} \text{ und } k \in \mathbb{N}^+ \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die summierte Mangoldtfunktion wird auch Chebyshev Funktion genannt.

Definition 1.17 (Chebyshev ψ-Funktion)
Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$\psi(n) := \sum_{i=1}^{n} \Lambda(i).$$

Als nächstes wollen wir einen Zusammenhang zwischen der Mangoldtfunktion und der Möbiusfunktion herstellen.

Satz 1.18

Es gelten die folgenden Summenformeln:

- $\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log d = \Lambda(n).$
- $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n.$

1.2.4 Integrallogarithmus

Definition 1.19 (Integrallogarithmus)
Für $x > 0$ ist:

$$li(x) := \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

Die Funktion $\frac{1}{\ln t}$ hat bei $x = 1$ eine Singularität und deshalb muss li für $x > 1$ über einen Grenzwert definiert werden:

$$li(x) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \right).$$

Eine weitere Definition für $x > 1$ ist:

$$Li(x) := li(x) - li(2) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

1.2.5 Partielle Summation

Satz 1.20

Sei $c_1, c_2, \ldots$ eine Folge von komplexen Zahlen und sei

$$S(x) := \sum_{n \le x} c_n.$$

Weiters sei n_0 eine positive natürliche Zahl. Wenn $c_j = 0$ für $j < n_0$ und $f : [n_0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine stetige Ableitung in $[n_0, \infty)$ hat, dann gilt für $x > n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n \le x} c_n f(n) = S(x) f(x) - \int_{n_0}^x S(t) f'(t) \mathrm{d}t.$$

1.2.6 Chinesischer Restsatz

Satz 1.21 (Chinesischer Restsatz)
Seien $m_1, \dots, m_n$ paarweise teilerfremd, $a_1, \dots, a_n$ beliebig. Dann ist das Kongruenzensystem

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

stets lösbar, und die Lösung ist eindeutig mod $m_1 m_2 \dots m_n$.

1.2.7 Satz von Mertens

Der Satz von Mertens bezieht sich auf Ergebnisse bezüglich des asymptotischen Verhaltens von Reihen.

Satz 1.22
Sei $p \in \mathbb{P}$:

- $$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + \mathcal{O}(1). \tag{1.8}$$
- $$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + \mathcal{O}(1). \tag{1.9}$$
- $$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma} + o(1)}{\log x}. \tag{1.10}$$

Mit:

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right).$$

1.3 Primzahlen

Bereits im antiken Griechenland beschäftigte man sich mit Primzahlen und entdeckte einige ihrer Eigenschaften. Die wohl wichtigste Frage nach der Anzahl der Primzahlen wurde bereits von Euklid beantwortet:

Satz 1.23
Es existieren unendlich viele Primzahlen.

Beweis: Angenommen es gibt endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$. Betrachte:

$$x = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r + 1.$$

Es ist nicht möglich x durch p_i mit $i \leq n$ zu teilen, da immer Rest 1 bleibt. Da jede Zahl eine Primfaktorzerlegung haben muss, ist die ursprüngliche Liste der Primzahlen unvollständig.

$\square$

1.3.1 Primzahlsatz

Definition 1.24
Die Anzahl der Primzahlen $p \leq x$ ist:

$$\pi(x) := \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x\}.$$

Bereits Gauß (1792) und Legendre (1798) vermuteten, dass

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

gilt. Einige Zeit später bewies Chebyshev (1852) eine schwache Form dieser Vermutung, nämlich:

Satz 1.25
Es existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit:

$$\frac{ax}{\log x} < \pi(x) < \frac{bx}{\log x} \qquad \textit{für } x \geq 2.$$

Mit den numerisch gefundenen Werten $a = 0,921$ und $b = 1,106$ war ein starkes Indiz für die Gültigkeit des Primzahlsatzes gefunden. Der Beweis folgte jedoch erst im Jahr 1896 und wurde unabhängig von De la Vallée-Poussin und Hadamard erbracht [32].

Satz 1.26 (Primzahlsatz)
Sei $x \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{1}{\log t} \mathrm{d}t \sim \frac{x}{\log x} \qquad \text{für } x \to \infty$$

oder die äquivalente Formulierung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Eine genauere Approximation, die jedoch asymptotisch gleich ist, liefert:

$$\pi(x) = Li(x) + E(x). \tag{1.11}$$

Für jedes $A > 0$ gibt es eine Konstante $C(A) > 0$ mit:

$$|E(x)| \leq C(A) \frac{x}{\log(x)^A}.$$

Aus praktischen Gründen wird auch oft statt des Integrals im Primzahlsatz folgende Funktion verwendet:

Definition 1.27 (Chebyshev θ-Funktion)
Sei $x \in \mathbb{N}$, dann ist:

$$\theta(x) := \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \log p.$$

Satz 1.28
Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.
- $\theta(x) \sim x$.

Beweis (siehe [2]): Laut Definition 1.24 gilt:

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{p \leq x} \log p \frac{1}{\log p}.$$

Mit Hilfe der partiellen Summation aus Satz 1.20 erhalten wir:

$$= \theta(x) \frac{1}{\log x} + \int_2^x \theta(t) \frac{1}{t \log^2 t} \mathrm{d}t.$$

Es lässt sich zeigen (vgl. [2]), dass

$$\frac{\theta(t)}{t} = \mathcal{O}(1)$$

und

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log^k t} = \frac{x}{\log^k x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^{k+1} x}\right)$$

gilt. Damit erhalten wir

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

und somit

$$\theta(x) = \pi(x) \log x + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

□

1.3.2 Primzahlsatz für arithmetische Folgen

Auf den ersten Blick kann man davon ausgehen, dass es unendliche viele Primzahlen p der Form $p \equiv a (\mathrm{mod}\ q)$ gibt. Man kann sogar vermuten, dass die Primzahlen gleichmäßig über die $\varphi(q)$ relativ primen Äquivalenzklassen verteilt sind [32]. Wir schreiben:

Definition 1.29
Die Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x, für die $p \equiv a \bmod q$ mit $(a, q) = 1$ gilt, ist:

$$\pi(x; q, a) := \#\{p \in \mathbb{P} | p \leq x, p \equiv a \bmod q\}.$$

Satz 1.30 (Dirichlets Satz über arithmetische Folgen)
Wenn $d \leq 2$ *und* $a \neq 0$ *ganze teilerfremde Zahlen sind, dann enthält die arithmetische Folge*

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, ...$$

unendlich viele Primzahlen.

In Bezug auf Dirichlets Satz bewies De la Vallée-Poussin das folgende Resultat:

Satz 1.31 (Primzahlsatz für arithmetische Folgen)
Es gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x; q, a)}{\pi(x)} = \frac{1}{\varphi(q)}.$$

Das heißt:

$$\pi(x; q, a) \sim \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \frac{x}{\log x}.$$

Analog zu (1.11) gilt:

$$\pi(x; q, a) = \frac{1}{\varphi(q)} Li(x) + E(x; q, a).$$

Für jedes $A > 0$ *gibt es eine Konstante* $C(q, A) > 0$*, sodass der Fehlerterm mit*

$$|E(x; q, a)| \leq C(q, A) \frac{x}{\log(x)^A}$$

beschränkt werden kann.

Beispiel 1.32
Betrachtet man die Restklassen (mod 10), so enthalten diese bis zu einer gewissen Schranke ungefähr die gleiche Anzahl an Elementen [12]:

11	31	41	61	71	101	131	151	181	191	211	241	…		
3	13	23	43	53	73	83	103	113	163	173	193	223	233	…
7	17	37	47	67	97	107	127	137	157	167	197	227	…	
19	29	59	79	89	109	139	179	199	229	239	…			

Analog zu Definition 1.27 gilt:

Definition 1.33
Seien $x, q, a \in \mathbb{N}$, dann ist:

$$\theta(x; q, a) := \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x \\ p \equiv a (\mathrm{mod}\ q)}} \log p.$$

Die folgende Aussage folgt aus dem Primzahlsatz für arithmetische Folgen (vgl. Satz 1.28):

Satz 1.34
Es gilt:

$$\theta(x; q, a) \sim \frac{x}{\varphi(q)} \qquad \textit{für alle } (a, q) = 1. \tag{1.12}$$

1.4 Riemanns Ideen

Bei seiner Arbeit mit Reihen betrachtete Euler eine Funktion, die zu einer der wichtigsten mathematischen Funktionen zählt. Heute ist diese Funktion jedoch nicht als „Eulers ζ-Funktion“ sondern als „Riemannsche ζ-Funktion“ bekannt [10].

1.4.1 Riemannsche ζ-Funktion

Definition 1.35 (Riemannsche ζ-Funktion)
Für $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > 1$ ist:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \ .$$

Euler entdeckte mit dem folgenden Satz eine wichtige Verbindung zwischen den Primzahlen und der ζ-Funktion.

Satz 1.36 (Eulers Produktformel)
Für $s \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *gilt:*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} .$$

Satz 1.37
Die Riemannsche ζ*-Funktion lässt sich in die Halbebene* $Re(s) > 0$ *meromorph (d.h. bis auf Pole holomorph) fortsetzen. Diese Fortsetzung ist dort holomorph bis auf einen einfachen Pol an der Stelle 1 mit dem Residuum 1; außerdem ist sie in* $Re(s) \geq 1$ *nullstellenfrei [5].*

Betrachtet man die ζ-Funktion in ihrer analytischen Fortsetzung, so hat diese Funktion triviale Nullstellen ($s = \{-2, -4, -6, \dots\}$) und andere schwer zu berechnende Nullstellen.

1.4.2 Riemannsche Vermutung

In einer formlosen Bemerkung postulierte Riemann ohne Beweis folgende Vermutung:

Riemannsche Vermutung
Der Realteil aller nicht trivialen Nullstellen der ζ*-Funktion ist* $1/2$.

Die ζ-Funktion ist Teil der Klasse der L-Funktionen. Die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung beschäftigt sich mit dieser Klasse an Funktionen und enthält die Riemannsche Vermutung als Spezialfall.

1.4.3 Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung

Für die Formulierung der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung benötigen wir zuerst einige Definitionen.

Definition 1.38
Ein Dirchilet-Charakter modulo k ist ein Homomorphismus

$$\chi_k : (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^x \to \mathbb{C}^x$$

d.h. eine komplexwertige Funktion auf $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^x$ mit

$$\chi_k(1) = 1$$
$$\chi_k(ab) = \chi_k(a)\chi_k(b)$$

für alle $a, b \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^x$ [24].

Ein Dirichlet-Charakter heißt trivial, wenn dieser konstant 1 ist.

Definition 1.39
Sei χ_k ein Dirchilet-Charakter modulo k. Dieser wird auf natürliche Weise durch folgende Definition zu einer Funktion auf $\mathbb{Z}$:

$$\chi_k(n) := \begin{cases} \chi_k(n + k\mathbb{Z}) & \text{falls } (n,k) = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Hilfe der Multiplikation wird die Menge der Dirichlet-Charaktere zu einer abelschen Gruppe mit dem trivialen Charakter ε als neutrales Element.

$$\chi_k\psi : (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^x \to \mathbb{C}^x$$
$$\chi_k\psi(a) = \chi_k(a)\psi(a)$$

Weil

$$a^{\varphi(n)} = 1$$

für jedes $a \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^x$ gilt, nimmt ein modulo k definierter Dirichlet-Charakter genau die Werte der $\varphi(k)$-ten Einheitswurzel an. Deshalb existieren zu jedem k nur endlich viele Dirichlet-Charaktere modulo k.

Betrachtet man $k = p \in \mathbb{P}$, so ist die Gruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^x$ zyklisch. Ist g ein Erzeuger der Gruppe, das heißt eine primitive Wurzel modulo p, so sind die Dirichlet-Charaktere eindeutig durch die $(p-1)$-ten Einheitswurzeln festgelegt.

Für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ gilt:

Satz 1.40
Es gibt genau $\varphi(k)$ Dirichlet-Charaktere modulo k. Zu jedem $a \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^x$, $a \neq 1$ gibt es einen Dirichlet-Charakter modulo k mit $\chi_k(a) \neq 1$.

Wir wollen als nächstes die Dirichletsche L-Reihe definieren:

Definition 1.41 (Dirichletsche L-Reihe)
Jedem Charakter modulo k können wir eine Dirichletsche L-Reihe zuordnen:

$$L(s, \chi_k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_k(n)}{n^s}.$$

Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung
Der Realteil aller nicht trivialen Nullstellen von $L(s, \chi_k)$ ist $1/2$.

Wie bereits erwähnt, enthält die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung die Riemannsche Vermutung, da

$$L(s, \chi_1) = \zeta(s) \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

gilt und somit in der Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 0$ de gleichen Nullstellen wie bei ζ auftreten.

In Satz 1.31 hängt die Konstante $C(q, A)$ von q ab. Der Fehlerterm ist also nur aussagekräftig, wenn man q als fix und $x \to \infty$ betrachtet. Wenn man die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung voraussetzt, erhält man für $x \geq q$ folgende Aussage:

$$|E(x; q, a)| \leq C x^{1/2} \log x.$$

1.5 Der Satz von Bombieri-Vinogradov

Für viele Anwendungen benötigt man die starke Aussage der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung nicht, um den Fehlerterm aus dem Primzahlsatz für arithmetische Folgen (Satz 1.31) abzuschätzen. Oft reicht es, folgenden Satz zu verwenden:

Satz 1.42 (Bombieri-Vinogradov)
Für jede positive Konstante A existieren Konstanten B und C, sodass

$$\sum_{q \leq Q} \max_{y \leq x} |E(y; q)| \leq C \frac{x}{(\log x)^A} \tag{1.13}$$

mit

$$Q := \frac{x^{1/2}}{(\log x)^B}$$

und

$$E(x; q) := \max_{(a,q)=1} |E(x; q, a)|$$

gilt.

Die Konstante B kann im Gegensatz zu C explizit berechnet werden. Zum Beispiel ist $B = 24A + 46$ gültig. Eine Verbesserung dieses Satzes kann bis jetzt nicht bewiesen werden. Es wurde jedoch folgende Vermutung aufgestellt.

Elliott-Halberstam Vermutung

Sei die Fehlerfunktion:

$$E(x; q) := \max_{(a,q)=1} \left| \pi(x; q, a) - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \right| .$$

Dann wird vermutet, dass für $\theta < 1$ und $A > 0$ eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass

$$\sum_{1 \leq q \leq x^\theta} E(x; q) \leq \frac{C(A, q)x}{\log^A x}$$

gilt.

Die Zahl θ wird in diesem Zusammenhang als Parameter für die Verteilung der Primzahlen („level of distribution") verwendet.
Mit dem Satz von Bombieri-Vinogradov erhält man eine Verteilung von $\theta = 1/2$, was bedeutet, dass die Primzahlen über die Restklassen (mod q) dann gleich verteilt sind, wenn $q < x^{1/2}$ ist. Das heißt es braucht für ein fixes q sehr viele Primzahlen bis diese annähernd gleich über die Restklassen verteilt sind.

Würde man (1.13) für

$$Q = x^\theta \text{ mit } \theta > 1/2 \tag{1.14}$$

zeigen, könnte man sofort auf beschränkte Abstände zwischen Primzahlen schließen (vgl. Kapitel 5).

KAPITEL 2

Primzahltupel

Wenn sowohl p als auch $p+2$ Primzahlen sind, nennt man dieses Tupel Primzahlzwillinge. Dieses Konzept lässt sich auf mehrere aufeinanderfolgende Primzahlen mittels sogenannter k-Tupel verallgemeinern. In diesem Kapitel wollen wir erst den Spezialfall der Primzahlzwillinge betrachten und einige naheliegende Beobachtungen festhalten. Zusätzlich soll ein kurzer geschichtlicher Überblick gegeben werden. In weiterer Folge betrachten wir die Verallgemeinerung auf k-Tupel.
Quellen für dieses Kapitel: [22, 23, 11, 12, 31].

2.1 Primzahlzwillinge

Die kleinsten Primzahlzwillinge sind $(3, 5)$, $(5, 7)$ und $(11, 13)$. Die größten bekannten Zwillinge sind:

$$(3756801695685 \cdot 2^{666669} - 1, 3756801695685 \cdot 2^{666669} + 1).$$

Diese wurden im Jahr 2011 vom PrimeGrid Projekt gefunden [20].

Definition 2.1
Für $x \in \mathbb{N}$ sei:

$$\pi_2(x) := \#\{p \leq x : p+2 \in \mathbb{P}\}.$$

Primzahlzwillings Vermutung
Es existieren unendliche viele Primzahlzwillinge.

Im Jahr 1949 wurden Primzahlzwillinge von Clement wie folgt charakterisiert:

Satz 2.2
Es sei $n \geq 2$. Die Zahlen $(n, n+2)$ bilden genau dann ein Primzahlzwillingspaar, wenn

$$4((n-1)!+1)+n \equiv 0(mod\ n(n+2)). \tag{2.1}$$

Diese Charakterisierung hat jedoch keinen praktischen Wert bei der Bestimmung von Primzahlzwillingen, da die Berechnung von $n!$ zu aufwendig ist.

Satz 2.3 (Brunsche Konstante)
Brun bewies 1919 folgendes wichtiges Ergebnis:

$$\sum_{p:\,p+2\in\mathbb{P}}^{\infty} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right) < \infty. \tag{2.2}$$

Wäre die Summe divergent, könnte man sofort die Primzahlzwillings Vermutung beweisen. Aus der Beschränktheit kann man jedoch weder schließen, dass es endlich, noch, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

2.1.1 Heuristik

Laut dem Primzahlsatz ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Zahl $p \leq x$ bzw. $p+2 \leq x$ eine Primzahl ist $1/\log x$. Wenn man annimmt, dass diese zwei Wahrscheinlichkeiten unabhängig sind, erwartet man für die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl p als auch $p+2$ Primzahlen sind:

$$\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{\log x}=\frac{1}{\log(x)^2}.$$

Das Problem ist jedoch, dass man diese Wahrscheinlichkeiten nicht als unabhängig annehmen kann, da zum Beispiel im Fall p gerade auch $p+2$ gerade sein muss. Um diese Abhängigkeit in unserer Heuristik zu korrigieren, betrachtet man die Wahrscheinlichkeit, dass p und $p+2$ nicht durch $q \in \mathbb{P}$ teilbar sind.

Die Wahrscheinlichkeit, dass q eine beliebige Zahl p teilt ist $1/q$. Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass q die beiden unabhängig gewählten Zahlen p und $p+2$ nicht teilt

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)^2$$

ist.
Die Wahrscheinlichkeit, dass q weder p noch $p+2$ teilt, ist gleich zur Wahrscheinlichkeit

$$p \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ q) \text{ oder } p \not\equiv -2(\mathrm{mod}\ q).$$

Wenn $q > 2$, dann kann p in jeder der $q-2$ verschiedenen Restklassen (mod q) mit der Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{2}{q}$$

sein. Das zufällig gewählte p ist jedoch mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entweder in der Restklasse (mod 0) oder der Restklasse (mod -2). Der Korrekturfaktor für „durch 2 teilbar“ ist also gesamt:

$$\frac{1-\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

Analog ist der Korrekturfaktor für „teilbar durch q“:

$$\frac{1-\frac{2}{q}}{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}.$$

Da die Wahrscheinlichkeit, dass verschiedene Primfaktoren q in einer zufälligen Zahl p enthalten sind, unabhängig ist, kann man diese Wahrscheinlichkeit multiplizieren und erhält:

$$2\prod_{\substack{q\in\mathbb{P}\\ q\geq 3}} \frac{1-\frac{2}{q}}{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}.$$

Mit Hilfe folgender kurzer Umformung

$$\begin{aligned}
2\prod_{\substack{q\in\mathbb{P}\\ q\geq 3}} \frac{1-\frac{2}{q}}{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2} &= 2\prod_{\substack{q\in\mathbb{P}\\ q\geq 3}} \frac{\frac{q-2}{q}}{\frac{q^2-2q+1}{q^2}} \\
&= 2\prod_{\substack{q\in\mathbb{P}\\ q\geq 3}} \frac{q^2-2q}{q^2-2q+1} \\
&= 2\prod_{\substack{q\in\mathbb{P}\\ q\geq 3}} \frac{(q-1)^2-1}{(q-1)^2} \\
&= 2\prod_{\substack{q\in\mathbb{P}\\ q\geq 3}} \left(1-\frac{1}{(q-1)^2}\right)
\end{aligned}$$

erhält man die berühmte Primzahlzwillingskonstante.

Definition 2.4 (Primzahlzwillingskonstante)

$$C_2 := \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\geq 2}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \approx 0.66016$$

Der Wert wurde bereits 1961 von Wrench berechnet.

Quantitative Primzahlzwillings Vermutung

Man vermutet, dass gilt:

$$\pi_2(x) \sim C_2 \frac{x}{(\log x)^2}.$$

Im Weiteren benötigen wir folgende Definition:

Definition 2.5

Für jede Primzahl $\ell \in \mathbb{P}$ sei $\nu_A(\ell)$ gleich der Anzahl der verschiedenen Restklassen (mod ℓ), die von den Elementen aus A besetzt werden.

Wenn n und $n+2$ teilerfremd sein sollen, dann darf n nicht in den Restklassen $\{0, -2\}(\text{mod } \ell)$ sein. Das heißt, dass n in einer von $\ell - \nu_{\{0,2\}}(\ell)$ Restklassen liegt. Die oberen Argumente lassen sich zu folgender berühmten Vermutung erweitern:

Hardy-Littlewood Vermutung

Sei $\mathcal{H} = h_1, \ldots, h_k$ eine Menge positiver natürlicher Zahlen mit

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}) := \prod_{\ell} \frac{\left(1 - \frac{\upsilon_{\mathcal{H}}(\ell)}{\ell}\right)}{\left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^k} \neq 0$$

dann gilt:

$$\#\{n \leq x : n + h_1, \ldots, n + h_k \in \mathbb{P}\} \sim \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \frac{x}{(\log x)^k}.$$

2.2 Primzahl k-Tupel

Ähnlich zu den Primzahlzwillingen lassen sich andere Muster definieren. Es ist klar, dass es nur ein Primzahlpaar mit Abstand 1 geben kann - nämlich (2,3) - da für jede andere Zahl der direkte Nachfolger immer durch 2 teilbar ist. Daraus folgt direkt, dass Primzahlpaare immer aus zwei Primzahlen p und $p + h$ mit einem $h \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ bestehen müssen. Für $h = 2$ ergibt dies die Primzahlzwillinge. Für die Primzahldrillinge der Form p, $p + 2$ und $p + 4$ gibt es aus dem gleichen Argument wie oben nur eine Möglichkeit - nämlich (3,5,7) - da in jedem weiteren Tripel eine der Zahlen durch 3 teilbar ist. Dies kann man wie folgt verallgemeinern.

Sei $\mathcal{H} = (h_1, \ldots, h_{k_0})$ ein k_0-Tupel mit $h_i < h_j$ für alle $0 \leq i \leq j \leq k_0$. Wann ist es möglich unendlich viele Folgen der Form $n + \mathcal{H} = (n + h_1, \ldots, n + h_{k_0})$ zu finden, die ausschließlich aus Primzahlen bestehen?

Definition 2.6
$\mathcal{H} := (h_1, \ldots, h_{k_0})$ mit $h_i \in \mathbb{N}$ ist gültig, wenn mindestens eine Restklasse für ein beliebiges $p \in \mathbb{P}$ nicht getroffen wird.

Da $\mathcal{H} = (h_1, \ldots, h_{k_0})$ auf jeden Fall für $p \geq k_0$ gültig ist, muss man für die Gültigkeit nur endlich viele Primzahlen überprüfen. Zum Beispiel ist $(0, 2, 6)$ gültig, jedoch $(0, 2, 4)$ ungültig, da alle Restklassen modulo 3 getroffen werden.
Für $k_0 = 1$ erhält man eine zu Satz 1.23 äquivalente Aussage und für $k_0 = 2$ erhält man die Primzahlzwillings Vermutung.
1904 stellte Dickson folgende Vermutung auf:

Dicksons Primzahl k-Tupel Vermutung
Wenn $(x + h_1, \ldots, x + h_{k_0})$ ein gültiges Tupel ist, dann gibt es unendlich viele Zahlen n, sodass $(n + h_1, \ldots, n + h_{k_0})$ nur aus Primzahlen besteht [12].

Die heute übliche Vermutung ist etwas schwächer und lautet:

Primzahlmehrlings Vermutung
Falls $k_0 \geq 2$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_{k_0})$ ein gültiges Tupel ist, dann gibt es unendlich viele Primzahlen p derart, dass alle $p, p + b_1, \ldots, p + b_{k_0}$ prim sind [22].

Eine weitere, in der Literatur gebräuchliche Vermutung, ist nach Dickson-Hardy-Littlewood (DHL) benannt:

DHL$[k_0, 2]$ **Vermutung**
Wenn $\mathcal{H}$ ein gültiges k_0-Tupel ist, dann existieren unendlich viele $n + \mathcal{H}$, die zumindest 2 *Primzahlen enthalten.*

Umso kleiner k_0 ist, desto schwerer wird diese Vermutung zu beweisen. Für $k_0 = 2$ wären alle Fälle der Primzahlmehrlings Vermutung und insbesondere die Primzahlzwillings Vermutung enthalten.

KAPITEL 3

Siebmethoden

Die erste Siebmethode geht bereits auf Eratosthenes im 3. Jahrhundert v. Chr. zurück. Die moderne Siebtheorie hat ihren Beginn um 1920 und wurde von Viggo Brun entwickelt. Doch erst Selberg konnte mit seiner einfachen Idee überzeugen. Sein Sieb ist Ausgangspunkt für viele moderne Überlegungen und Erkenntnisse. In diesem Kapitel soll ein kurzer Überblick über die Ideen von Eratosthenes, Selberg und Brun gegeben werden, auf denen in weiterer Folge viele Ergebnisse aufbauen.

3.1 Das Sieb des Eratosthenes

Das Sieb des Eratosthenes ist ein Algorithmus zur Bestimmung von Primzahlen. Da die Multiplikation eine einfachere Operation ist, hatte Eratosthenes im 3. Jahrhundert v. Chr. die Idee des ersten Siebverfahrens. Es dient dazu, sämtliche Primzahlen sowie die Faktorisierungen der zerlegbaren Zahlen bis zu einer gegebenen Schranke zu bestimmen.
Quellen für dieses Kapitel: [6, 25].

Für das Sieb des Eratosthenes schreibt man alle Zahlen bis zu einer gewählten Schranke n auf. Im ersten Schritt streicht man alle Vielfachen der Zahl 2. In den folgenden Schritten wählt man die erste nicht eliminierte Zahl und streicht die Vielfachen dieser. Man ist fertig, wenn für die gewählte Zahl p gilt, dass $p^2 > n$.

1	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~

Abbildung 3.1: Sieb des Eratosthenes.

Abbildung 3.1 zeigt das Sieb des Eratosthenes ausgeführt bis zur Schranke $n = 40$. Hierbei sind die Vielfachen von 2 schwarz, von 3 blau und von 5 grün markiert. Innerhalb von 3 Schritten werden die Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$ (rot makiert) gefunden.

Diese Methode wurde von Legendre 1808 wie folgt formalisiert:

Definition 3.1
Für $x, z \in \mathbb{N}$ ist:

- $\Phi(x, z) := \#\{n \leq x : \text{n ist nicht teilbar durch ein } p \in \mathbb{P} : p \leq z\}$.
- $P(z) := \prod_{p<z} p$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\Phi(x, z) &= \sum_{\substack{n\leq x \\ (n,P(z))=1}} 1 \\
&\overset{(1.4)}{=} \sum_{n\leq x} \sum_{d|(n,P(z))} \mu(d) && (3.1) \\
&= \sum_{\substack{d|P(z) \\ d\leq x}} \mu(d) \sum_{\substack{n\leq x \\ d|n}} 1 \\
&= \sum_{\substack{d|P(z) \\ d\leq x}} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \\
&= \sum_{\substack{d|P(z) \\ d\leq x}} \mu(d)\frac{x}{d} + \mathcal{O}(1). && (3.2)
\end{aligned}$$

In weiterer Folge wollen wir die Bedingung $d \leq x$ eliminieren. Zuerst stellen wir fest, dass gilt:

$$P(z) = \prod_{p<z} p \leq \prod_{p<z} z = z^z.$$

Um die Bedingung $d \leq x$ zu eliminieren, wählen wir nun

$$z \leq \frac{\log x}{\log\log x}$$

woraus

$$\begin{aligned}\log P(z) \leq \log z^z = z\log z &\leq \frac{\log x}{\log\log x}\log\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right)\\ &\leq \frac{\log x}{\log\log x}\log\left(\frac{\log x}{1}\right) = \log x \qquad (3.3)\end{aligned}$$

folgt. $P(z)$ ist also sicherlich kleiner als x, womit wir die Bedingung $d \leq x$ in (3.2) weglassen können.

Es folgt also für (3.2):

$$\Phi(x,z) \leq x \sum_{d|P(z)} \frac{\mu(d)}{d} + \mathcal{O}\left(\sum_{d|P(z)} 1\right). \qquad (3.4)$$

Weiters gilt für jede multiplikative Funktion α

$$\sum_{d|D} \alpha(d) = \prod_{p|D} \left(1 + \alpha(p) + \ldots + \alpha(p^j)\right)$$

woraus folgt, dass

$$\sum_{d|P(z)} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{p\leq z}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

gilt. Da die Anzahl der Teiler $d|P(z)$: $2^{\pi(z)}$ kleiner gleich 2^z ist, folgt für den Fehlerterm

$$\mathcal{O}\left(\sum_{d|P(z)} 1\right) = \mathcal{O}(2^z)$$

und somit können wir aus (3.4) Folgendes folgern:

$$\Phi(x,z) \leq x\prod_{p\leq z}\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \mathcal{O}(2^z).$$

Mit Definition 3.1 erhalten wir:

$$\pi(x) - \pi(z) = \#\{p \in \mathbb{P} : z < p \leq x\} \leq \Phi(x,z).$$

Es folgt direkt:

$$\pi(x) \leq \Phi(x, z) + \pi(z).$$

Man kann wie folgt nach oben abschätzen:

$$\pi(x) \leq \Phi(x, z) + z. \tag{3.5}$$

Weiters gilt:

$$\prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_{p \leq z} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) \geq \sum_{n \leq z} \frac{1}{n} \sim \log z.$$

Gesamt erhalten wir nun:

$$\pi(x) \ll \frac{x}{\log z} + \mathcal{O}(2^z) + z.$$

Da wir in (3.3) $z \leq \frac{\log x}{\log \log x}$ gewählt haben, können wir aufgrund des Fehlerterms für $\pi(x)$ keine bessere Schranke als

$$\pi(x) \ll \frac{x}{\log \log x}$$

angeben. Das Sieb des Eratosthenes liefert somit nur eine schwächere Schranke als der Primzahlsatz. Die Schranke und die hier ausgeführten Schritte bieten jedoch einen guten Ausgangspunkt für weitere Überlegungen.

3.2 Selbergs Sieb

1947 hatte Atle Selberg durch seine Forschung über die Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion eine neue Siebmethode entdeckt. Seine Siebmethode ist ein wichtiger Bestandteil der heutigen Zahlentheorie und wird für uns ein wichtiger Startpunkt für weitere Überlegungen sein. In diesem Kapitel werden wir, ausgehend vom Sieb des Eratosthenes, Selbergs Ideen erarbeiten und diese später direkt auf k-Tupel anwenden. Abgesehen davon, dass wir so ein direktes Ergebnis erzielen, wird diese Anwendung der Ausgangspunkt für Überlegungen zu den Methoden von Pintz, János und Yıldırım sein.
Quellen für dieses Kapitel: [6, 26].

3.2.1 Einführung

Selbergs Idee war, die Möbiusfunktion in (3.1) mit einer quadratischen Form zu ersetzen. Für jede Folge $\lambda_d \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 = 1$ gilt:

$$\sum_{d|k} \mu(d) \leq \left(\sum_{d|k} \lambda_d \right)^2. \tag{3.6}$$

Wendet man dies auf (3.1) an erhält man:

$$\begin{aligned}
\Phi(x,z) &\leq \sum_{n\leq x} \left(\sum_{d|(n,P(z))} \lambda_d \right)^2 \\
&= \sum_{n\leq x} \left(\sum_{\substack{d_1|(n,P(z)) \\ d_2|(n,P(z))}} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \right) \\
&= \sum_{n\leq x} \left(\sum_{[d_1,d_2]|(n,P(z))} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \right) \\
&= \sum_{d_1,d_2|P(z)} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \sum_{\substack{n\leq x \\ [d_1,d_2]|n}} 1.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Wir wissen, dass folgende Gleichung gilt:

$$\#\{n \leq x : n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ d)\} = \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor = \frac{x}{d} + \mathcal{O}(1).$$

Mit dieser Gleichung folgt aus (3.7) sofort die Ungleichung:

$$\Phi(x,z) \leq x \sum_{d_1,d_2|P(z)} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{[d_1,d_2]} + \mathcal{O}\left(\sum_{d_1,d_2|P(z)} \left|\lambda_{d_1}\right| \left|\lambda_{d_2}\right| \right).$$

Mit der Wahl von $\lambda_d = 0$ für $d > z$ kann man die Ungleichung wie folgt verbessern:

$$\Phi(x,z) \leq x \sum_{d_1,d_2\leq z} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{[d_1,d_2]} + \mathcal{O}\left(\sum_{d_1,d_2\leq z} \left|\lambda_{d_1}\right| \left|\lambda_{d_2}\right| \right). \tag{3.8}$$

Es gilt:

1. $\sum_{d|n} \varphi(d) = $ n.
2. $[d_1,d_2](d_1,d_2) = d_1 d_2$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{d_1,d_2\le z}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{[d_1,d_2]} &\overset{(2.)}{=} \sum_{d_1,d_2\le z}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{d_1d_2}(d_1,d_2)\\
&\overset{(1.)}{=} \sum_{d_1,d_2\le z}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{d_1d_2}\sum_{\delta|(d_1,d_2)}\varphi(\delta)\\
&= \sum_{\delta\le z}\varphi(\delta)\sum_{\substack{d_1,d_2\le z\\ \delta|(d_1,d_2)}}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{d_1d_2}\\
&= \sum_{\delta\le z}\varphi(\delta)\left(\sum_{\substack{d\le z\\ \delta|d}}\frac{\lambda_d}{d}\right)^2. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Mit der so erhaltenen Transformation

$$u_\delta := \sum_{\substack{d\le z\\ \delta|d}}\frac{\lambda_d}{d} \qquad (3.10)$$

haben wir das ursprüngliche Problem diagonalisieren können:

$$= \sum_{\delta\le z}\varphi(\delta)u_\delta^2. \qquad (3.11)$$

Das nächste Ziel ist es, diese Diagonalform zu minimieren. Aus (1.6) erhalten wir:

$$\frac{\lambda_\delta}{\delta} = \sum_{\delta|d}\mu\left(\frac{d}{\delta}\right)u_d. \qquad (3.12)$$

Laut Definition 3.10 gilt, dass $u_\delta = 0$ für $\delta > z$ und aus $\lambda_1 = 1$ folgt:

$$\sum_{\delta<z}\mu(\delta)u_\delta = 1. \qquad (3.13)$$

Sei

$$V(z) := \frac{\mu(\delta)^2}{\varphi(\delta)}.$$

Es folgt aus (3.13):

$$\sum_{\delta<z}\mu(\delta)u_\delta - 1 = 0.$$

Durch erweitern mit $-\frac{2}{V(z)}$ erhält man:

$$\sum_{\delta<z}-\frac{2\mu(\delta)u_\delta}{V(z)} + \frac{2}{V(z)} = 0.$$

Es folgt direkt:

$$\sum_{\delta<z} -\frac{2\mu(\delta)u_\delta}{V(z)} + \frac{1}{V(z)} + \frac{\varphi(\delta)}{\mu(\delta)^2} = 0.$$

Mit der Definition von $V(z)$ erhält man:

$$\sum_{\delta<z} -\frac{2\mu(\delta)u_\delta}{V(z)} + \frac{1}{V(z)} + \frac{\mu(\delta)^2}{\varphi(\delta)V(z)^2} = 0. \tag{3.14}$$

Aus (3.14) und (3.11) folgt dann:

$$\begin{aligned}\sum_{\delta\le z}\varphi(\delta)u_\delta^2 &= \sum_{\delta\le z}\varphi(\delta)u_\delta^2 - \frac{2\mu(\delta)u_\delta}{V(z)} + \frac{1}{V(z)} + \frac{\mu(\delta)^2}{\varphi(\delta)V(z)^2}\\ &= \sum_{\delta\le z}\varphi(\delta)\left(u_\delta^2 - \frac{2\mu(\delta)u_\delta}{\varphi(\delta)V(z)} + \frac{\mu(\delta)^2}{\varphi(\delta)^2V(z)^2}\right) + \frac{1}{V(z)}\\ &= \sum_{\delta\le z}\varphi(\delta)\left(u_\delta - \frac{\mu(\delta)}{\left|\lambda_{d_1}\right|\left|\lambda_{d_2}\right|\varphi(\delta)V(z)}\right)^2 + \frac{1}{V(z)}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Man sieht sofort, dass (3.11) bei

$$u_\delta = \frac{\mu(\delta)}{\varphi(\delta)V(z)}$$

das Minimum $\frac{1}{V(z)}$ annimmt. Mit (3.12) erhalten wir:

$$\lambda_\delta = \delta \sum_{\substack{d\le z\\ \delta\mid d}} \frac{\mu\left(\frac{d}{\delta}\right)\mu(\delta)}{\varphi(\delta)V(z)}. \tag{3.16}$$

Somit folgt für (3.8):

$$\Phi(x,z) \le x\frac{1}{V(z)} + \mathcal{O}\left(\sum_{d_1,d_2\le z}\left|\lambda_{d_1}\right|\left|\lambda_{d_2}\right|\right). \tag{3.17}$$

Wir analysieren jetzt noch den Fehlerterm. Wegen (3.16) gilt:

$$\begin{aligned}
V(z)\lambda_\delta &= \delta \sum_{\substack{d\leq z\\ \delta|d}} \frac{\mu\left(\frac{d}{\delta}\right)\mu(\delta)}{\varphi(\delta)}\\
&= \delta \sum_{t\leq \frac{z}{\delta}} \frac{\mu(t)\mu(t\delta)}{\varphi(t\delta)}\\
&\overset{\substack{(1.1)\\(1.3)}}{=} \delta \sum_{\substack{t\leq \frac{z}{\delta}\\ (t,\delta)=1}} \frac{\mu(t)^2\mu(\delta)}{\varphi(\delta)\varphi(t)}\\
&\overset{(1.2)}{=} \mu(\delta)\prod_{p|\delta}\left(1+\frac{1}{p-1}\right) \underbrace{\sum_{\substack{t\leq \frac{z}{\delta}\\ (t,\delta)=1}} \frac{\mu(t)^2}{\varphi(t)}}_{=V(z)}. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$|V(z)||\lambda_\delta| \leq |V(z)|$$

ist und somit

$$|\lambda_\delta| \leq 1 \qquad \text{für alle } \delta.$$

Alles zusammen ergibt also:

Satz 3.2
Für $x, z \to \infty$ gilt:

$$\Phi(x,z) \leq \frac{x}{V(z)} + \mathcal{O}(z^2)$$

mit:

$$V(z) := \sum_{d\leq z} \frac{\mu(d)^2}{\varphi(d)}.$$

Die Wahl von λ_d hätte auch von Anfang an einfach angegeben werden können. Die oberen Rechnungen sollen die Wahl jedoch motivieren und werden im weiteren Kontext dieser Arbeit verfeinert.

Aus Satz 3.2 können wir direkt folgende obere Schranke ableiten:

Satz 3.3
Für $x \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\pi(x) \ll \frac{x}{\log x}.$$

<u>*Beweis*:</u> Wie in (3.5) können wir mit folgender Ungleichung starten:

$$\pi(x) \leq \Phi(x, z) + z.$$

Um Satz 3.2 zu verwenden, müssen wir eine untere Schranke für

$$\sum_{d \leq z} \frac{\mu(d)^2}{\varphi(d)}$$

finden. Wir beginnen mit folgender Abschätzung:

$$\begin{aligned}\sum_{d \leq z} \frac{\mu(d)^2}{\varphi(d)} &\geq \sum_{d \leq z} \frac{\mu(d)^2}{d} \\ &= \sum_{d \leq z} \frac{1}{d} - \sum_{d \leq z}^{\#} \frac{1}{d}.\end{aligned}$$

$\sum_{d \leq z}^{\#}$ ist dabei die Summe über nicht quadratfreie $d \in \mathbb{N}$. Wegen Satz 1.20 wissen wir:

$$\sum_{d \leq z} \frac{1}{d} = \log z + \mathcal{O}(1).$$

Weiters können wir folgende Abschätzung machen:

$$\sum_{d \leq z}^{\#} \frac{1}{d} \leq \frac{1}{4} \sum_{d \leq \frac{z}{4}}^{\#} \frac{1}{d}.$$

Durch Umformung mit den Rechenregeln für Logarithmen erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{d \leq z} \frac{\mu(d)^2}{\varphi(d)} &\geq \log z - \frac{1}{4} \log z + \mathcal{O}(1) \\ &= \log z - \frac{1}{4} (\log z - \log 4) + \mathcal{O}(1) \qquad (3.19)\end{aligned}$$

und können direkt folgende Schranke angeben:

$$\sum_{d \leq z} \frac{\mu(d)^2}{\varphi(d)} \gg \log z.$$

Damit gilt:

$$\pi(x) \ll \frac{x}{\log z} + z^2.$$

Wir wählen jetzt

$$z := \left(\frac{x}{\log x} \right)^{1/2}$$

und erhalten so unsere Behauptung.

□

Wir erhalten wie beim Sieb des Eratosthenes die obere Schranke $x/\log z$, jedoch mit einem besseren Fehlerterm.

3.2.2 Anwendung auf k-Tupel

Um Selbergs Sieb zu illustrieren, suchen wir eine obere Schranke für die Anzahl von primen k-Tupel. Sei $(n+h_1,\ldots,n+h_k)$ mit $x \leq n \leq 2x$ für große x. Die Idee ist, eine geeignete Funktion $a(n)$ zu finden, die 1 ist, wenn alle $(n+h_1,\ldots,n+h_k)$ prim sind und sonst nicht negativ. Dann ist

$$\sum_{x \leq n \leq 2x} a(n) \tag{3.20}$$

eine obere Schranke für die Anzahl von primen k-Tupel. Analog zu oben wählen wir für $a(n)$:

Definition 3.4
Sei λ_d eine Folge von reellen Zahlen, sodass

$$\lambda_1 = 1 \text{ und } \lambda_d = 0 \text{ für } d > R$$

und

$$a(n) := \sum_{d \mid (n+h_1),\ldots,(n+h_k)} \left(\lambda_d\right)^2. \tag{3.21}$$

Die optimale Wahl für λ_d ist hier:

$$\lambda_d \approx \mu(d) \left(\frac{\log\left(\frac{R}{d}\right)}{\log R} \right)^k.$$

Grundsätzlich wollen wir R so groß wie möglich zulassen, da dann mehr Freiheit bei der Wahl von λ_d möglich ist. Wenn R jedoch klein gewählt wird, ist die Auswertung von (3.20) leichter, da weniger Teiler d aus (3.21) berücksichtigt werden müssen. In diesem Kontext stellt sich heraus, dass R ungefähr die Größenordnung von $\sqrt{x}$ haben kann.
Mit dieser Festlegung erhält man folgende obere Schranke:

Satz 3.5
Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$a(n) \leq 2^k k! \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \frac{x}{(\log x)^k}.$$

Diese Schranke ist ca. das $2^k k!$-fache aus der Hardy-Littlewood Vermutung [26]. Weitere Details würden den Umfang dieser Arbeit sprengen und sind in [9] zu finden.

Wir haben nun mit Hilfe von Selbergs Sieb ein direktes Ergebnis erreicht. Die Definition 3.21 wird in weiterer Folge Ausgangspunkt für die Überlegungen von Pintz, János und Yıldırım sein.

3.3 Bruns Sieb

Brun entwickelte zwischen 1917 und 1924 eine eigene Siebmethode. Seine Motivation war es, die von Formel von Legendre für das Sieb des Eratosthenes zu vereinfachen.
Quelle für dieses Kapitel: [32].

Bruns Ausgangspunkt war (3.2) mit:

$$\Phi(x,z) = \sum_{\substack{d|P(z)\\ d\leq x}} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor .$$

Wir haben bereits gezeigt, dass die Bedingung $d \leq x$ in weiterer Folge weggelassen werden kann. Brun verbesserte diese Formel indem er statt $\mu(d)$ eine Funktion suchte, welche öfter verschwindet, jedoch trotzdem eine obere Schranke für $\Phi(x,z)$ liefert.

Wir interpretieren nun $\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$ als die Anzahl der natürlichen Zahlen $t \leq \frac{x}{d}$ und für die erste Umformung setzen wir $n = t \cdot d$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\Phi(x,z) &= \sum_{d|P(z)} \sum_{t\leq \frac{x}{d}} \mu(d)\\ &= \sum_{n\leq x} \sum_{d|(n,P(z))} \mu(d).\end{aligned}$$

Im Weiteren benötigen wir die folgende Definition:

Definition 3.6
$\omega(d)$ bezeichnet die Anzahl der unterschiedlichen Primfaktoren von d. Speziell ist $\omega(1) = 0$.

Wir betrachten nun die innere Summe und fassen die Werte zusammen, die dieselbe Anzahl an Primfaktoren haben. Dabei ist $K = \omega((n, P(z)))$:

$$\begin{aligned}\sum_{d|(n,P(z))} \mu(d) &= \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \binom{K}{k} \\ &= (1-1)^K \\ &= \begin{cases} 1 & K = 0 \\ 0 & K > 0. \end{cases}\end{aligned} \tag{3.22}$$

Anstatt nun die komplette Summe zu berechnen, betrachten wir nur die partielle Summe, die wir mit Hilfe einer binomischen Identität vereinfachen können:

$$\sum_{k \le l} (-1)^k \binom{K}{k} = (-1)^l \binom{K-1}{l}.$$

Wir definieren die Funktionen:

Definition 3.7
Sei $d \in \mathbb{N}$, dann ist:

$$\begin{aligned}\mu_1(d) &:= \begin{cases} \mu(d) & \text{für} \quad \omega(d) \le 2r+1 \\ 0 & \text{für} \quad \omega(d) > 2r+1 \end{cases} \\ \mu_2(d) &:= \begin{cases} \mu(d) & \text{für} \quad \omega(d) \le 2s \\ 0 & \text{für} \quad \omega(d) > 2s. \end{cases}\end{aligned} \tag{3.23}$$

So erhält man folgende Aussage für $r, s \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{d|P(z)} \mu_1(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \le \Phi(x,z) \le \sum_{d|P(z)} \mu_2(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor.$$

Wir sind nun bei einem Optimierungsproblem angelangt, welches von diversen Mathematikern quasi gelöst wurde. Eine exaktere Formulierung und Anwendungen von Bruns Sieb finden sich in [6].

KAPITEL 4

Abstände zwischen Primzahlen

Nach dem Primzahlsatz ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Zahl x prim ist, ungefähr $1/\log x$. Betrachtet man nun die durchschnittliche Lücke von großen Primzahlen, erhält man $\log x$. Naiv betrachtet erwartet man also, dass die Lücke mit dem x entsprechend mitwächst, was jedoch nur im Durchschnitt gilt. Im Speziellen können die Lücken jedoch sowohl kleiner als auch größer sein. Im folgenden Kapitel wollen wir uns zuerst mit großen und danach mit besonders kleinen Abständen zwischen Primzahlen beschäftigen.
Quellen für dieses Kapitel: [26, 31, 22, 9, 27, 8, 10].

4.1 Große Abstände zwischen Primzahlen

Zuerst halten wir einige sehr einfache Ergebnisse fest. Diese sollen als Motivation für die folgenden Verfeinerungen dienen. Beginnen wir mit folgender Aussage:

Satz 4.1
Sei $d_n = p_{n+1} - p_n$ der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen. Dieser Abstand d_n kann beliebig groß werden.

Beweis: Für jedes $n > 1$ sind die Zahlen

$$n! + 2, n! + 3, \dots , n! + n$$

zusammengesetzt, da $n! + 2$ durch 2, $n! + 3$ durch 3 usw. teilbar ist. Da n beliebig groß gewählt werden kann, folgt der Satz.

□

In Satz 4.1 haben wir eine erste Aussage über eine Lücke zwischen Primzahlen gemacht, die jedoch nicht gut ist, denn für $m = 15$ würde man laut dem Primzahlsatz bereits eine Lücke von $\log(m!) \approx 27$ und nicht nur 15 erwarten. Man kann Satz 4.1 sofort verbessern:

Satz 4.2
Sei $P(x) := 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} \cdot p_n$ die aus den Primzahlen $p_n < x$ zusammengesetzte Zahl, dann sind die Zahlen

$$P(x) + 2, P(x) + 3, \ldots, P(x) + n$$

nicht prim.

<u>Beweis</u>: $P(x) + k$ mit $k \leq n$ ist immer durch einen der Primfaktoren $p_n < k$ teilbar, da dieser sowohl in N als auch in k enthalten ist und somit aus $P(x) + k$ herausgehoben werden kann.

□

Der hier gefundene Abstand ist besser als der durch Satz 4.1 gefundene Abstand, jedoch immer noch nicht besser als der Durchschnitt aus dem Primzahlsatz.

In den 30er Jahren fanden Mathematiker einige bessere Abschätzungen für diesen Abstand. Die beste gelang Rankin [21] mit:

Satz 4.3
Es existiert eine Konstante c, sodass für unendlich viele Primzahlen p_n folgende Ungleichung gilt:

$$p_{n+1} - p_n > c \log p_n \frac{(\log \log p_n) \log \log \log \log p_n}{(\log \log \log p_n)^2}. \tag{4.1}$$

Der Bruch in (4.1) wächst und somit gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} = \infty.$$

Ranking konnte für (4.1) explizit die Konstante $c = \frac{1}{3}$ angeben.

4.1.1 Die Methoden von Green, Ford, Konyagin und Tao

Im Jahr 2016 erschien der Artikel von Green, Ford, Konyagin und Tao [8], der zum ersten Mal das Ergebnis aus Satz 4.3 bedeutend verbesserte. Es wurde folgender Satz bewiesen:

Satz 4.4
Die Schranke in Satz 4.3 gilt für ein beliebig großes $c > 0$.

Dafür wurden bereits existierende Techniken mit einem Zufallsmodell für Primzahlen in arithmetischen Progressionen kombiniert. Im Folgenden wollen wir einen kurzen Überblick über den Beweis geben.

Betrachten wir Satz 4.2, dann stellen wir fest, dass die Konstruktion deshalb funktioniert, da das Intervall $[2, n]$ von den Restklassen 0 mod p für $p \leq n$ gesiebt wird und jede dieser Zahlen in zumindest einer dieser Restklassen liegt. Wir verallgemeinern diese Methode indem wir ein Intervall $[y] := \{n \in \mathbb{N} : n \leq y\}$ betrachten, welches komplett von den Restklassen a_p mod p für jedes $p \leq x$ gesiebt wird. Dann sind die Zahlen

$$m + 1, \dots, m + y$$

zusammengesetzt, wenn $m \geq x$ mit $m = -a_p \bmod p$ für alle $p \leq x$, da jedes $m + i$ mit $i \leq y$ durch ein $p \leq x$ teilbar ist. Mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes kann man ein m mit $m < x + P(x)$ finden. Mit dieser Methode und dem Primzahlsatz kann man untere Schranken für den Abstand zwischen Primzahlen finden. Wenn man im Speziellen ein großes x findet mit dem man $[y]$ komplett mit den a_p mod p für $p \leq x$ sieben kann, dann kann man die Schranke (4.1) herleiten. Dabei hat y die Größenordnung:

$$y \sim c \frac{\log x (\log \log \log x)}{(\log \log x)^2} x. \tag{4.2}$$

Die Frage ist, wie man dieses sehr einfache Sieb des Eratosthenes (0 mod p) verbessern kann. In [8] wurde folgender Weg gewählt. Zuerst wurden die Primzahlen $p < x$ in vier verschiedene Klassen unterteilt:

- Stufe 1 Primzahlen: sehr kleine Primzahlen $p < \log x$ und mittlere Primzahlen zwischen z und $x/4$, wobei z zu einem späteren Zeitpunkt gewählt wird.
- Stufe 2 Primzahlen: kleine Primzahlen die zwischen $\log x$ und z liegen.
- Stufe 3 Primzahlen: sehr große Primzahlen die zwischen $x/2$ und x liegen.

- Stufe 4 Primzahlen: große Primzahlen die zwischen $x/4$ und $x/2$ liegen.

Es soll nun ein $[y]$ mit der Größe (4.2) Schritt für Schritt gesiebt werden.

Stufe 4

Betrachten wir zuerst den letzten Schritt dieser Siebmethode. Angenommen es wurden in den ersten drei Stufen bereits so viele Primzahlen gesiebt, dass die übrigen Elemente von $[y]$ weniger als die Anzahl der Stufe 4 Primzahlen sind. Nach dem Primzahlsatz sind das weniger als $(1/5 + o(1))x/\log x$ Primzahlen. Dann kann man das Verfahren beenden, indem man die Stufe 4 Primzahlen p zum sieben verwendet und damit jeweils eines der übrigen Elemente von $[y]$ entfernt.

Stufe 1

Um Primzahlen der Stufe 1 zu sieben, verwenden wir die klassische Methode vom Sieb des Eratosthenes (0 mod p). Die Elemente von [y], die nach diesem Schritt übrig bleiben, sind nicht durch Stufe 1 Primzahlen teilbar. Für ein verbleibendes Element treten folgende zwei Fälle auf:

1. teilbar durch eine kleine Stufe 2 Primzahl
2. enthält mindestens einen Primfaktor größer als $x/4$ und keine Primfaktoren kleiner als $\log x$

Im ersten Fall muss das Element eine z-glatte Zahl sein und im zweiten Fall eine Primzahl im Intervall $(x/4, y]$.

Die Frage ist: Wie viele verbleibende Elemente existieren?

Satz 4.5
Sei $1 < z \leq y$, wobei y und z sehr groß sind. Wähle

$$u := \frac{\log y}{\log z}.$$

Angenommen es gilt:

$$\log u = o(\log z). \tag{4.3}$$

Dann ist die Anzahl von z-glatten Zahlen in $[y]$ höchstens:

$$\frac{y \log z}{e^{u \log u + \mathcal{O}(u)}}.$$

Beweis: Sei $0 < \rho < 1$. Für eine z-glatte Zahl n kleiner als y gilt:

$$1 \leq \frac{y}{y^\rho} \frac{1}{n^{1-\rho}}.$$

Daraus folgt direkt, dass die Anzahl der z-glatten Zahlen in $[y]$ mit

$$\frac{y}{y^\rho} \sum_{\substack{n \leq y \\ z-glatt}} \frac{1}{n^{1-\rho}}$$

beschränkt ist. Vernachlässigt man die Bedingung $n \leq y$, so lässt sich die Summe als Eulerprodukt schreiben:

$$\frac{y}{y^\rho} \prod_{p \leq z} \left(1 + \frac{1}{p^{1-\rho}} + \frac{1}{p^{2(1-\rho)}} + \dots \right). \tag{4.4}$$

Wählt man

$$\rho := \frac{u \log u}{\log y}$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} y^\rho &= y^{\frac{u \log u}{\log y}} \\ &= \exp \left(\log \left(y^{\frac{u \log u}{\log y}} \right) \right). \end{aligned}$$

Mit $\log a^b = b \log a$ erhält man:

$$\begin{aligned} &= \exp \left(\frac{u \log u}{\log y} \log y \right) \\ &= e^{u \log u}. \end{aligned}$$

In weiterer Folge kann man (4.4) abschätzen:

$$\frac{y}{y^\rho} \prod_{p \leq z} \left(1 + \frac{1}{p^{1-\rho}} + \frac{1}{p^{2(1-\rho)}} + \dots \right) \ll \frac{y}{e^{u \log u}} \exp \left(\sum_{p \leq z} \frac{1}{p^{1-\rho}} \right). \tag{4.5}$$

Aus (1.9) erhalten wir

$$\exp \left(\sum_{p \leq z} \frac{1}{p} \right) = \log z$$

und können (4.5) wie folgt umformen:

$$\frac{y \log z}{e^{u \log u}} \exp \left(\sum_{p \leq z} \frac{1}{p^{1-\rho}} - \frac{1}{p} \right).$$

Direkt aus der Definition von u folgt

$$\rho := \frac{u \log u}{\log y} = \frac{\log u}{\log z}$$

und somit:

$$\begin{aligned}
\frac{y \log z}{e^{u \log u}} \exp\left(\sum_{p \le z} \frac{1}{p^{1-\rho}} - \frac{1}{p}\right) &= \frac{y \log z}{e^{u \log u}} \exp\left(\sum_{p \le z} \frac{p^{\rho} - 1}{p}\right) \\
&= \frac{y \log z}{e^{u \log u}} \exp\left(\sum_{p \le z} \frac{p^{\frac{\log u}{\log z}} - 1}{p}\right) \\
&= \frac{y \log z}{e^{u \log u}} \exp\left(\sum_{p \le z} \frac{\exp\left(\log p \frac{\log u}{\log z}\right) - 1}{p}\right). \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Da folgende Ungleichung für $c > 0$ und $0 \le t \le 1$ gilt

$$\exp(ct) - 1 \le (\exp(c) - 1)t,$$

bekommt man für $c = \log u$ und $t = \frac{\log p}{\log z}$:

$$\begin{aligned}
\exp\left(\log(u) \frac{\log p}{\log z}\right) - 1 &\le (\exp(\log u) - 1) \frac{\log p}{\log z} \\
&\le u \frac{\log p}{\log z}. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Wegen des Primzahlsatzes gilt:

$$\sum_{p \le z} \frac{\log p}{\log x} \ll 1.$$

Somit gilt, dass die Anzahl von z-glatten Zahlen in $[y]$ höchstens

$$\frac{y \log z}{e^{u \log u + \mathcal{O}(u)}}$$

ist.

□

Dabei ist es möglich den Faktor $\log z$ auf Kosten des Fehlerterms zu eliminieren. Dieser erhöht sich dann auf $\mathcal{O}(u \log \log(3u))$. Grundsätzlich soll z so groß wie möglich gewählt werden, wobei nur $\mathcal{O}\left(x/\log x\right)$ z-glatte Zahlen in $[y]$ enthalten sein sollen. Folgende Wahl stellt sich als gut heraus:

$$z := \exp\left(\frac{\log \log \log x}{4 \log \log x} \log x\right). \qquad (4.8)$$

Sei Q die Menge der Primzahlen im Intervall $(x/4, y]$, dann müssen alle Primzahlen bis auf $(1/5+o(1))x/\log x$ mit Hilfe der Stufe 2 und Stufe 3 Primzahlen gesiebt werden, damit das oben beschriebene Verfahren für Stufe 4 funktioniert.

Stufe 2

Für das Sieben der Stufe 2 Primzahlen wird eine Zufallskonstruktion gewählt, indem $a_p \bmod p$ gleichverteilt für jede Stufe 2 Primzahl angenommen wird. Man kann erwarten, dass die übrigen Elemente um den Faktor γ reduziert werden. Sei

$$\gamma := \prod_{\text{Stufe 2 Primzahl } p} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\prod\limits_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod\limits_{p \leq \log x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}.$$

Diese Produkte lassen sich mit (1.10) wie folgt anschreiben:

$$\gamma = \frac{\frac{e^{-\gamma+\mathcal{O}(1)}}{\log z}}{\frac{e^{-\gamma+\mathcal{O}(1)}}{\log\log x}}$$

$$= \frac{\log\log x}{\log z}.$$

Mit der oberen Wahl von z (siehe (4.8)) erhält man:

$$\gamma \sim \frac{4(\log\log x)^2}{\log x \log\log\log x}.$$

Mit (4.2) erhält man dann:

$$\gamma y \sim 4cx. \tag{4.9}$$

Im Speziellen erwartet man sogar, dass Q zu einer Zufallsmenge der Größe $4c(x/\log x)$ wird. In weiterer Folge soll c jedoch groß gewählt werden können, was ein weiteres Argument benötigt.

Stufe 3

Die Anzahl der Stufe 3 Primzahlen ist nach dem Primzahlsatz ungefähr $\frac{1}{2}\frac{x}{\log x}$, also kleiner als die $4c(x/\log x)$ übrigen Primzahlen. Die Stufe 3 Primzahlen müssen somit möglichst viele verbleibende Elemente aus $[y]$ sieben. Dieser Schritt gelingt mit einer technischen Verbesserung der Methoden aus [13], welche auf zwei weiteren Vermutungen basieren, die inzwischen bewiesen wurden. Das Ergebnis ist also uneingeschränkt gültig. Da der Beweis für Stufe 3 Primzahlen den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, wird hier auf die Literatur [13, 8] verwiesen.

4.2 Kleine Abstände zwischen Primzahlen

Im Weiteren wollen wir nur noch kleine Abstände zwischen Primzahlen betrachten, da es auf diesem Gebiet in den letzten Jahren einige bedeutende Verbesserungen gab.
Da der durchschnittliche Abstand zwischen zwei Primzahlen $\log p$ ist, gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} \leq 1$$

Erdös war der Erste der dieses Ergebnis in [7] festhielt. Diese Schranke wurde zwar mit der Zeit auf $0,24$ verbessert, ein Durchbruch lies jedoch länger auf sich warten.

4.2.1 Die Resultate von Goldston, Pintz und Yıldırım

Im Jahr 2009 machten Goldston, Pintz und Yıldırım mit ihrem Artikel „Primes in Tuples I" [9] einen entscheidenden Schritt. Sie bewiesen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, sodass der Abstand zur nächsten Primzahl verglichen mit dem durchschnittlichen Abstand zur nächsten Primzahl, beliebig klein werden kann. Das heißt:

$$\liminf_{p\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} = 0.$$

Dieses Ergebnis lieferte den Grundstein für viele weitere wichtige Entdeckungen. Unter der Annahme, dass die Elliott-Halberstam Vermutung (S. 17) gilt, konnte sogar folgendes Ergebnis bewiesen werden:

$$\liminf_{n\to\infty} (p_{n+1} - p_n) \leq 16.$$

In diesem Kapitel soll ein kurzer Überblick über die Idee des Beweises gegeben werden.

Satz 4.6

Angenommen die Elliott-Halberstam Vermutung ist gültig, dann gilt:

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n) \leq 16.$$

<u>Beweis</u>: Sei $k > 2 \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{H} = \{h_1 < \ldots < h_k\}$ mit $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \neq 0$. Da es unendlich viele Primzahlen gibt, folgt sofort, dass zumindest eine der Zahlen $n+h_1, \ldots, n+h_k$ für unendlich viele n eine Primzahl ergibt. Das heißt zumindest eine arithmetische Progression enthält unendlich viele Primzahlen. Die Frage ist, ob man zeigen kann, dass immer zwei dieser Zahlen unendlich oft prim sind. Dafür muss man sich überlegen, wie man zwei Primzahlen in $n+h_1, \ldots, n+h_k$ findet. Sei x groß und $x < n < 2x$. Angenommen man findet eine nicht negative Funktion $a(x)$ für die gilt:

$$\sum_{\substack{x\leq n\leq 2x\\ n+h_j\in\mathbb{P}}} a(n) > \frac{1}{k}\sum_{x\leq n\leq 2x} a(n) \qquad j = 1, \ldots, k. \tag{4.10}$$

Wenn man dann über $j = 1, \ldots, k$ summiert würde folgen, dass

$$\sum_{x\leq n\leq 2x} \#\{1 \leq j \leq k \,:\, n+h_j \in \mathbb{P}\}a(n) > \sum_{x\leq n\leq 2x} a(n)$$

sodass für eine Zahl n zwischen x und $2x$ zumindest 2 Primzahlen in $n+h_1, \ldots, n+h_k$ sein müssen. Die Frage ist also, wie man ein $a(n)$ findet für das (4.10) gilt. Analog zu Selbergs Sieb wählen wir $a(n)$ so wie in (3.21).

Um das Problem zu lösen, muss man nun das Verhältnis

$$\left(\sum_{\substack{x\leq n\leq 2x\\ n+h_j\in\mathbb{P}}} a(n)\right) \Big/ \left(\sum_{x\leq n\leq 2x} a(n)\right) \tag{4.11}$$

maximieren. Es handelt sich dabei wieder um quadratische Formen, die jedoch nicht beide gleichzeitig diagonalisiert werden können (vgl. (3.11)). Zuerst wählen wir hier

$$\lambda_d = \mu(d)P\left(\frac{\log R/d}{\log R}\right).$$

Das Ziel ist es, ein Polynom zu finden, welches das Verhältnis (4.11) maximiert. Man erreicht schließlich für den Zähler in (4.11):

$$\left(\sum_{x\leq n\leq 2x} a(n)\right) \sim \frac{x}{(\log R)^k}\mathfrak{S}(\mathcal{H})\int_0^1 \frac{y^{k-1}}{(k-1)!}P^{(k)}(1-y)^2\mathrm{d}y.$$

Um den Nenner in (4.11) zu behandeln, erweitern wir das Quadrat in (3.21) zu

$$\sum_{d_1,d_2\leq R} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \sum_{\substack{x\leq n\leq 2x \\ [d_1,d_2]|n+h_1,\ldots,n+h_k \\ n+h_h\in\mathbb{P}}} 1.$$

Die Bedingung $[d_1, d_2] \mid n+h_1, \ldots, n+h_k$ bedeutet wie in (3.7), dass n in $f([d_1, d_2])$ arithmetischen Progressionen (mod $[d_1, d_2]$) liegt. Für jede dieser Progressionen muss man die n zählen, sodass $n+h_j$ prim ist. Für manche Progressionen $f([d_1, d_2])$ kann es jedoch passieren, dass diese einen gemeinsamen Faktor mit $[d_1, d_2]$ haben und deshalb nicht prim sein können. Angenommen es gibt $g([d_1, d_2])$ Progressionen, sodass $n+h_j$ teilerfremd zu $[d_1, d_2]$ ist. Für jede dieser sind nun die Primzahlen zwischen x und $2x$ zu zählen. Aus dem Satz über arithmetische Folgen erhalten wir, wenn wir die Fehlerterme ignorieren, dass die Summe über n ungefähr

$$\frac{\pi(2x) - \pi(x)}{\varphi([d_1, d_2])} g([d_1, d_2])$$

ist. Dabei zählt $\varphi([d_1, d_2])$ die Anzahl der Restklassen (mod $[d_1, d_2]$). $\pi(2x) - \pi(x)$ können wir mit Hilfe des Primzahlsatzes abschätzen und so gelangen wir zu

$$\frac{x}{\log x} \sum_{d_1,d_2\leq R} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \frac{g([d_1, d_2])}{\varphi([d_1, d_2])}$$

für den Zähler aus (4.11).

Betrachten wir nun $g([d_1, d_2])$: Wenn $n + j_k$ prim sein soll, dann muss eine Restklasse $n \equiv -h_j (\text{mod } p)$ leer sein. Deshalb gibt es nach Definition 2.5 $(\nu_{\mathcal{H}}(p) - 1)$ Restklassen, die belegt sein dürfen. Aus dem Chinesischen Restsatz folgt, dass g multiplikativ definiert ist:

$$g([d_1, d_2]) = \prod_{p|[d_1,d_2]} (\upsilon_{\mathcal{H}}(p) - 1).$$

Aufgrund des Satzes von Bombieri-Vinogradov und seiner Gültigkeit bis zu $\sqrt{x}$, können wir für $[d_1, d_2]$, der bis zu R^2 wächst, die Schranke für R auf $x^{1/4}$ festlegen.

Mit weiteren Standardumformungen erhält man für den Nenner aus (4.11) schließlich

$$\left(\sum_{\substack{x\leq n\leq 2x \\ n+h_j\in\mathbb{P}}} a(n)\right) \sim \frac{x}{\log x \log(R)^{k-1}} \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \int_0^1 \frac{y^{k-2}}{(k-2)!} P^{(k-1)}(1-y)^2 \mathrm{d}y$$

und gesamt ist (4.11) also:

$$\frac{\frac{\log R}{\log x}\int\limits_0^1 \frac{y^{k-2}}{(k-2)!}P^{(k-1)}(1-y)^2\mathrm{d}y}{\int\limits_0^1 \frac{y^{k-1}}{(k-1)!}P^{(k)}(1-y)^2\mathrm{d}y}. \tag{4.12}$$

Mit Hilfe von Betaintegralen und mit $P(y) = y^{k+r}$ für $r \in \mathbb{N}$ kann man (4.12) zu

$$\underbrace{\frac{\log R}{\log x}}_{<(1/4)}\underbrace{\left(\frac{2(2r+1)}{(r+1)(k+2r+1)}\right)}_{<(4/k)}$$

umformen. Dieses Verhältnis ist am größten, wenn r bei $\sqrt{k}/2$ ist. Mit dieser Wahl von r gelangt man für den zweiten Bruch zu einem Wert knapp unter $4/k$ und mit der Wahl von R knapp unter $x^{1/4}$ erhalten wir für den ersten Bruch einen Wert knapp unter $1/4$. Die Schranke von $1/k$ wird so jedoch knapp nicht erreicht.

Mit der Elliott-Halberstam Vermutung können wir $R = x^{1/2-\varepsilon}$ setzen und erhalten mit $k = 7$ und $r = 1$ für (4.12) ein Verhältnis von $\frac{1{,}05}{k} > \frac{1}{k}$. Wählen wir also eine Menge $\mathcal{H}$ mit 7 Elementen und $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \neq 0$, so erhalten wir für unendlich viele n in $n + h_1, \ldots, n + h_7$ zumindest zwei Primzahlen.
Mit einer etwas besseren Wahl von $P(x)$ kann man sogar $k = 6$ erreichen. Das heißt also, dass $\mathfrak{S}(\{7, 11, 13, 17, 19, 23\}) \neq 0$ und somit kann man unter Annahme der Elliott-Halberstam Vermutung unendlich viele Primzahlen mit Abstand kleiner gleich 16 finden.

□

4.2.2 Weiterentwicklungen und offene Probleme

Goldston, Pintz und Yıldırım fassten in ihrem Artikel [9] vier bedeutende Fragen zusammen. Diese waren zu diesem Zeitpunkt ungeklärt.

1. Kann man ohne Voraussetzungen zeigen, dass es unendlich viele beschränkte Abstände zwischen Primzahlen gibt?

2. Ist $\theta = 1/2$ eine echte Schranke für Primzahltupel (vgl. (1.14))?

3. Kann man mit Hilfe der Elliott-Halberstam Vermutung zeigen, dass es drei oder mehr Primzahlen innerhalb eines k-Tupels gibt?

4. Ist es mit Hilfe der Elliott-Halberstam Vermutung und den heute bekannten Approximationen möglich, die Primzahlzwillings Vermutung zu zeigen?

Die erste Frage wurde von Zhang in [33] beantwortet. Die Fragen zwei und drei wurden von Maynard in [15] gelöst. Die letzte Frage ist bis heute ungeklärt.

KAPITEL 5

Beschränkte Abstände zwischen Primzahlen

In seinem Artikel „Bounded gaps between primes“ [33] bewies Yitang Zhang, dass es eine endliche Schranke H gibt, sodass es unendlich viele Paare p_n, p_{n+1} mit $p_{n+1} - p_n < H$ gibt. In diesem Kapitel wollen wir die wichtigsten Sätze und Ideen kurz zusammenfassen. In einem weiteren Unterkapitel werden wir kurz die kollektiven Verbesserungen von Zhangs Arbeit betrachten.
Quellen für dieses Kapitel: [11, 12, 31, 33, 28].

5.1 Der Satz von Zhang

Satz 5.1 (Beschränkte Abstände zwischen Primzahlen)
Es existiert eine natürliche Zahl H, sodass es unendliche viele Primzahlen p und q gibt mit $|p - q| \leq H$.

Zhang erreichte eine Schranke von 70.000.000 für H. Um diese Schranke zu beweisen, führte Zhang drei Schritte aus, die hier in umgekehrter Reihenfolge wiedergegeben werden.

Satz 5.2 (DHL $[k_0, 2]$)
Wenn $\mathcal{H}$ ein gültiges k_0-Tupel ist, dann existieren unendlich viele $n + \mathcal{H}$ die zumindest zwei Primzahlen enthalten.

Zhang erreichte $k_0 = 3.500.000$. Mit dieser Schranke lässt sich sofort Satz 5.1 ableiten, denn $\mathcal{H}$ muss aus verschiedenen Primzahlen größer als k_0 zusammengesetzt sein und es gilt:

$$\pi(70.000.000) - \pi(3.500.000) > 3.500.000.$$

Eine wichtige Technik für Zhangs Ergebnis ist das Identifizieren von beschränkten Abständen zwischen Primzahlen. Dies geschieht mit Hilfe der folgenden einfachen Überlegung die bereits von Goldston, Pintz und Yıldırım stammt.

Sei

$$S_1 := \sum_{x \le n \le 2x} \nu(n)$$

und

$$S_2 := \sum_{x \le n \le 2x} \left(\sum_{i=1}^{k} \theta(n + h_i) \right) \nu(n)$$

mit

$$\theta(n) = \begin{cases} \log n & n \in \mathbb{P} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn

$$S_2 > (\log 3x) S_1 \tag{5.1}$$

gilt, dann folgt, dass

$$\sum_{i=1}^{k_0} \theta(n + h_i) > \log 3x$$

für $x \le n \le 2x$ und ein hinreichend großes x gelten muss. Daraus folgt, dass zumindest zwei Terme in dieser Summe ungleich 0 sind und somit zwei Indices i_1 und i_2 mit $n + h_{i_1} \in \mathbb{P}$ und $n + h_{i_2} \in \mathbb{P}$ existieren müssen. So können beschränkte Abstände zwischen Primzahlen gefunden werden.

Das Problem ist jedoch die richtige Wahl für $\nu(n)$. In [9] verwendeten Goldston, Pintz und Yıldırım ein $\nu(n)$ der Form:

$$\nu(n) := \left(\sum_{d | P(n)} \lambda(d) \right)^2$$

mit

$$\mathcal{P}(n) := (n + h_1)(n + h_2) \dots (n + h_k).$$

Dabei ist

$$\lambda(n) = \mu(d) \frac{1}{m!} \left(\frac{\log R/d}{\log R} \right)^m$$

mit $m = k + l$ und $d \in \mathcal{D}$. Dabei ist $\mathcal{D}$ eine Teilmenge der quadratfreien Zahlen $\{1, \ldots, R\}$ mit $R < x^{1/4}$. Der Ausgangspunkt für Zhang war natürlich [9]. Zhang verbesserte viele der dort verwendeten Methoden. Eine von Zhangs Neuerungen war, dass er an dieser Stelle für $\mathcal{D}$ nicht die quadratfreien Zahlen, sondern die B-glatten Zahlen verwendete.

Definition 5.3 (Glatte Zahlen)
Sei $B \in \mathbb{N}$. Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ heißt B-glatt, wenn jede Primzahl $p \in \mathbb{P}$, die m teilt, kleiner gleich B ist:

$$p \mid m \Rightarrow p \leq B.$$

Die Frage ist jetzt, wie man $\mathcal{D}$ wählt und ob man den hier nicht angegebenen Fehlerterm beschränken kann. Zhang verwendete hierfür folgende Vermutung. Diese wurde von ihm, jedoch auch unabhängig davon von Motohashi and Pintz aufgestellt. Aus diesem Grund wird die folgende Vermutung MPZ Vermutung genannt:

MPZ$[\varpi, \delta]$ Vermutung
Sei $\mathcal{H}$ ein gültiges k_0-Tupel und h_i ein Element von $\mathcal{H}$. Weiters sei x groß. Wir definieren:

$$D := x^{1/4+\varpi}$$
$$P := \prod_{p:\, p<x^{\delta}} p$$
$$P(n) := \prod_{h\in\mathcal{H}} (n+h).$$

Für jede natürliche Zahl d sei

$$C_i(d) := \{c \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} : (c, d) = 1; P(c - h_i) = 0(mod\ d)\}$$

und für jede Funktion $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sei

$$\Delta(\gamma; d, c) = \sum_{\substack{x\leq n\leq 2x \\ n=c(mod\ d)}} \gamma(n) - \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{x\leq n\leq 2x \\ (n,d)=1}} \gamma(n)$$

mit:

$$\theta(n) = \begin{cases} \log n & n \in \mathbb{P} \\ 0 & sonst. \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\sum_{\substack{d<D^2 \\ d\mid P}} \sum_{c\in\mathbb{C}_i(d)} |\Delta(\theta; d, c)| \ll x \log^{-A} x.$$

Ignoriert man einen exponentiell kleinen Fehlerterm κ, stellt sich heraus, dass man aus MPZ[ϖ, δ] den Satz DHL[$k_0, 2$] ableiten kann. Man benötigt dazu eine glatte Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, die bei Ordnung k_0 im Punkt 1 verschwindet, mit:

$$k_0 \int\limits_0^1 g^{(k_0-1)}(x)^2 \frac{x^{k_0-2}}{(k_0-2)!} \mathrm{d}x > \frac{4}{1+4\varpi} \int\limits_0^1 g^{(k_0)}(x)^2 \frac{x^{k_0-1}}{(k_0-1)!} \mathrm{d}x.$$

Wählt man nun

$$g(x) := \frac{1}{(k_0+l_0)!}(1-x)^{k_0+l_0}$$

für einen reellen Parameter $l_0 > 0$ und ignoriert den Fehlerterm κ, so erhält man aus MPZ[ϖ, δ] den Satz DHL[$k_0, 2$], wenn man

$$k_0 > \left(\sqrt{1+4\varpi} - 1\right)^2 \tag{5.2}$$

hat. Die Details dazu finden sich in [31].

Das wichtigste, jedoch auch am schwierigsten zu beweisende Ergebnis von Zhang ist:

Satz 5.4
MPZ $[\varpi, \varpi]$ *gilt für alle* $0 < \varpi \leq \frac{1}{1168}$.

Um dieses Ergebnis in Satz 5.4 zu erreichen, wählte Zhang in seinem Beweis ein beliebiges $\varpi > 0$ und argumentierte am Schluss, dass der Beweis nur dann funktioniert, wenn

$$\frac{31}{32} + 36\varpi \leq 1 - \frac{\varpi}{2}$$

gilt, was äquivalent zu $\varpi \leq 1/1168$ ist. Setzt man das nun in (5.2) ein, erhält man $k_0 = 341.640$ und somit bereits eine leicht bessere Schranke als die von Zhang angegebene.

5.2 Die Methode von Goldston, Pintz und Yıldırım

Die in diesem Abschnitt beschriebene Vorgangsweise beruht zu großen Teilen auf dem Artikel [9] von Goldston, Pintz und Yıldırım und wurde von Zhang für seinen Artikel [33] bedeutend verfeinert. Da es im Zuge dieser Arbeit ohnehin weder möglich ist den kompletten Beweis von Satz 4.6 (Goldston, Pintz und Yıldırım) noch von Satz 5.1 (Zhang) wiederzugeben, soll zumindest ein Überblick verschafft werden. Wie bereits erwähnt, war eine der wichtigen Verbesserungen von Zhang die

Betrachtung von glatten Zahlen anstatt der von Goldston, Pintz und Yıldırım verwendeten quadratfreien Zahlen. Die weiteren Überlegungen funktionieren jedoch sowohl für die glatten als auch für die quadratfreien Zahlen.
Quellen für dieses Kapitel: [11, 12, 33].

Beginnen wir mit der Ungleichung (5.1). Es folgt direkt, dass

$$\sum_{x \le n \le 2x} \nu(n) \left(\sum_{i=1}^{k} \theta(n+h_i) - \log 3x \right) > 0$$

gilt. Man kann diese Summe wie folgt erweitern:

$$\sum_{\substack{d_1, d_2 \le R \\ D := [d_1, d_2]}} \lambda(d_1)\lambda(d_2) \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{x \le n \le 2x \\ D | P(n)}} \theta(n+h_i) - \log 3x \sum_{\substack{x \le n \le 2x \\ D | P(n)}} 1 \right). \tag{5.3}$$

Sei nun $\Omega(D)$ die Menge der Kongruenzklassen $m \pmod D$ mit $D|P(m)$. Weiters sei $\Omega_i(D)$ die Menge der Kongruenzklasse $m \in \Omega(D)$ mit $(D, m+h_i) = 1$. Dann ergibt sich für den geklammerten Ausdruck in (5.3):

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{m \in \Omega_i(D)} \sum_{\substack{x \le n \le 2x \\ n \equiv m (\mathrm{mod}\ D)}} \theta(n+h_i) - \log 3x \sum_{m \in D} \sum_{\substack{x \le n \le 2x \\ n \equiv m (\mathrm{mod}\ D)}} 1. \tag{5.4}$$

Diese Umformung entspricht dem Übergang von $D|P(n)$ in die bei Definition 2.6 verwendete Sichtweise. Es gilt:

$$\sum_{\substack{x \le n \le 2x \\ n \equiv m (\mathrm{mod}\ D)}} 1 = \frac{x}{D} + \mathcal{O}(1). \tag{5.5}$$

Hier ist $D := [d_1, d_2] \le d_1 d_2 \le R^2$. Da $R \le x^{1/2 - o(1)}$ gewählt wurde, ist der Fehlerterm für die nächsten Berechnungen irrelevant.

Aus Formel (1.12) wissen wir:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \le n \le 2x \\ n \equiv m (\mathrm{mod}\ D)}} \theta(n+h_i) &= \theta(2x; D, m+h_i) - \theta(x; D, m+h_i) \\ &\sim \frac{x}{\varphi(D)}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Der hier auftretende Fehlerterm kann durch den Satz von Bombieri-Vingradov (Satz 1.42) beschränkt werden, da $D < x^{1/2-o(1)}$. Für die folgenden Überlegungen ignorieren wir diese Fehlerterme.

Die Mengen $\Omega(D)$ und $\Omega_i(D)$ können mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes (Satz 1.21) konstruiert werden, wenn $D \in \mathbb{P}$. Wenn $\omega(D) := |\Omega(D)|$, dann ist $\omega(\cdot)$ eine multiplikative Funktion. Wenn außerdem jedes $|\Omega_i(p)| = \omega(p) - 1 =: \omega^*(p)$ und jedes $|\Omega_i(D)| = \omega^*(D)$ ist, so ist ω^* ebenfalls multiplikativ und wir erhalten für (5.4) mit Hilfe von (5.5) und (5.6):

$$k\omega^*(D)\frac{x}{\varphi(D)} - (\log 3x)\omega(D)\frac{x}{D}. \tag{5.7}$$

Dies kann man weiter zu

$$x\left(k\frac{\omega^*(D)}{\varphi(D)} - (\log 3x)\frac{\omega(D)}{D}\right)$$

umformen. Setzen wir nun in (5.3) ein, erhalten wir

$$\sum_{\substack{d_1,d_2\leq R\\ D:=[d_1,d_2]}} \lambda(d_1)\lambda(d_2)x\left(k\frac{\omega^*(D)}{\varphi(D)} - (\log 3x)\frac{\omega(D)}{D}\right)$$

und damit:

$$x\left(k\left(\sum_{\substack{d_1,d_2\leq R\\ D:=[d_1,d_2]}}\left(\lambda(d_1)\lambda(d_2)\frac{\omega^*(D)}{\varphi(D)}\right) - (\log 3x)\sum_{\substack{d_1,d_2\leq R\\ D:=[d_1,d_2]}}\left(\lambda(d_1)\lambda(d_2)\frac{\omega(D)}{D}\right)\right)\right). \tag{5.8}$$

Da der Ausdruck (5.7) typischerweise kleiner als Null ist, können die Gewichte λ_1 und λ_2 nicht alle positiv gewählt werden. Um die Summen über λ_1 und λ_2 auszuwerten, gibt es mehrere Möglichkeiten. Davon werden einige in [12] behandelt. An dieser Stelle wollen wir nur eine Methode wiedergeben.

5.2.1 Auswertung der Summen mittels Perrons Formel

Das Auswerten der Summen in (5.8) ist wie bereits erwähnt deshalb schwierig, da sowohl positive als auch negative Terme auftreten und es deshalb zu Aufhebungen kommt. Perrons Formel erlaubt es, mit Hilfe von komplexer Analysis, Ungleichungen auszuwerten.

Satz 5.5 (Perrons Formel)
Es gilt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{y^s}{s}\mathrm{d}s = \begin{cases} 1 & \text{für } y > 1 \\ 1/2 & \text{für } y = 1 \\ 0 & \text{für } 0 < y < 1. \end{cases}$$

Um herauszufinden, ob $d < R$ ist, berechnet man das Integral mit $y = R/d$. Der Fall, dass $d = R$ ist, hat in unseren Summen einen vernachlässigbaren Effekt. Die zweite Summe in (5.8) lässt sich wie folgt anschreiben:

$$\sum_{\substack{d_1,d_2\geq 1\\ D:=[d_1,d_2]}} \lambda(d_1)\lambda(d_2)\frac{\omega(D)}{D}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{(R/d_1)^{s_1}}{s_1}\mathrm{d}s_1\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{(R/d_2)^{s_2}}{s_2}\mathrm{d}s_2\right).$$

Das ist äquivalent zu:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\substack{\mathrm{Re}(s_1)=2\\ \mathrm{Re}(s_2)=2}}\left(\sum_{\substack{d_1,d_2\geq 1\\ D:=[d_1,d_2]}}\frac{\lambda(d_1)\lambda(d_2)}{d_1^{s_1}d_2^{s_2}}\frac{\omega(D)}{D}\right)R^{s_1+s_2}\frac{\mathrm{d}s_2}{s_2}\frac{\mathrm{d}s_1}{s_1}. \tag{5.9}$$

Um die innere Summe zu berechnen, widmen wir uns dem Spezialfall $\lambda(d) = \mu(d)$, da der allgemeine Fall analog zu behandeln ist. Wir haben also:

$$\left(\sum_{d_1,d_2\geq 1}\frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1^{s_1}d_2^{s_2}}\frac{\omega([d_1,d_2])}{[d_1,d_2]}\right).$$

Der Summand besteht ausschließlich aus multiplikativen Funktionen und kann daher für jede Primzahl p einzeln ausgewertet werden. Sollte p^2 entweder d_1 oder d_2 teilen, folgt sofort wegen Definition 1.12, dass der Summand 0 ist. Wir müssen daher die folgenden vier Fälle betrachten:

1. $p \nmid d_1$ und $p \nmid d_2$
2. $p \mid d_1$ und $p \nmid d_2$
3. $p \nmid d_1$ und $p \mid d_2$
4. $p \mid d_1$ und $p \mid d_2$

Der p-te Faktor ist deshalb:

$$1 - \frac{1}{p^{s_1}}\frac{\omega(p)}{p} - \frac{1}{p^{s_2}}\frac{\omega(p)}{p} + \frac{1}{p^{s_1+s_2}}\frac{\omega(p)}{p}.$$

Für hinreichend großes p gilt $\omega(p) = k$ und somit:

$$1 - \frac{k}{p^{s_1+1}} - \frac{k}{p^{s_2+1}} + \frac{k}{p^{s_1+s_2+1}}. \tag{5.10}$$

Laut Satz 1.36 ist der p-te Faktor der ζ-Funktion $\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$, womit wir (5.10) wie folgt approximieren können:

$$\left(1 - \frac{1}{p^{1+s_1+s_2}}\right)^{-k} \left(1 - \frac{1}{p^{1+s_1}}\right)^{k} \left(1 - \frac{1}{p^{1+s_2}}\right)^{k}.$$

Zusammengefasst haben wir für die innere Summe von (5.9) folgendes erreicht:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{d_1,d_2\geq 1} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1^{s_1} d_2^{s_2}} \frac{\omega([d_1,d_2])}{[d_1,d_2]}\right) &\approx \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{1+s_1+s_2}}\right)^{-k} \left(1 - \frac{1}{p^{1+s_1}}\right)^{k} \left(1 - \frac{1}{p^{1+s_2}}\right)^{k} \\ &= \frac{\zeta(1+s_1+s_2)^k}{\zeta(1+s_1)^k \zeta(1+s_2)^k}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Wir erhalten also für (5.9):

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\substack{\mathrm{Re}(s_1)=2 \\ \mathrm{Re}(s_2)=2}} \frac{\zeta(1+s_1+s_2)^k}{\zeta(1+s_1)^k \zeta(1+s_2)^k} G(s_1,s_2) R^{s_1+s_2} \frac{\mathrm{d}s_2}{s_2} \frac{\mathrm{d}s_1}{s_1} \tag{5.12}$$

mit:

$$G(s_1,s_2) := \frac{\zeta(1+s_1)^k \zeta(1+s_2)^k}{\zeta(1+s_1+s_2)^k} \left(1 - \frac{1}{p^{s_1}}\frac{\omega(p)}{p} - \frac{1}{p^{s_2}}\frac{\omega(p)}{p} + \frac{1}{p^{s_1+s_2}}\frac{\omega(p)}{p}\right). \tag{5.13}$$

Um den Wert des Integrals (5.12) zu bestimmen, sind noch eine Reihe von weiteren Schritten notwendig, die wir hier kurz skizzieren wollen. Eine genaue Abfolge und Erklärung dieser Schritte findet sich in [17].

Zuerst wird der Integrationsweg auf $\mathrm{Re}(s_1) = c_0/\log U$ und $\mathrm{Re}(s_2) = c_0/(2\log U)$ mit $U := \exp(\sqrt{\log x})$ verschoben. Außerdem wird das s_1 Integral auf $|\mathrm{Im}(s_1)| \leq U$ und das s_2 Integral auf $|\mathrm{Im}(s_2)| \leq U/2$ begrenzt. Wir wollen diese neuen Integrationswege in weiterer Folge L_1 und L_2 nennen. Da durch das Verschieben des Integrationsweges keine zusätzlichen Pole auftreten, reicht es das neue Integral zu bestimmen. Mit mehreren Abschätzungen lässt sich folgende Ungleichung zusammensetzen:

$$\left| \frac{\zeta(1+s_1+s_2)^k}{\zeta(1+s_1)^k \zeta(1+s_2)^k} G(s_1,s_2) R^{s_1+s_2} \right| \leq \exp(c\sqrt{\log x}).$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung lässt sich der Fehler, der durch das Begrenzen entsteht, mit $\exp(-c\log x)$ beschränken. Wendet man nun den Residuensatz auf das Integral (5.12) an, folgt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\left(\operatorname*{Res}_{s_1=0}(g(s_1,s_2))+\operatorname*{Res}_{s_1=-s_2}(g(s_1,s_2))\right)\mathrm{d}s_2+\mathcal{O}(\exp(-c\sqrt{\log x})) \tag{5.14}$$

mit:

$$g(s_1,s_2) := \left|\frac{\zeta(1+s_1+s_2)^k}{\zeta(1+s_1)^k\zeta(1+s_2)^k}G(s_1,s_2)\frac{R^{s_1+s_2}}{s_1s_2}\right|.$$

Durch diverse Abschätzungen und Umformungen für $\operatorname*{Res}_{s_1=-s_2}$ erhält man für (5.14):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\operatorname*{Res}_{s_1=0}(g(s_1,s_2))\mathrm{d}s_2+(\log\log x)^{\mathcal{O}(1)}(\log x)^{k+l-1/2} \tag{5.15}$$

wobei k eine große natürliche Zahl, l eine wesentlich kleinere natürliche Zahl und

$$z(s_1,s_2) := G(s_1,s_2)\left(\frac{\zeta(1+s_1+s_2)(s_1+s_2)}{\zeta(1+s_1)\zeta(1+s_2)}\right)^k$$

ist. Durch eine weitere Verschiebung des Integrationsweges von L_2 auf

$$L_3 := \left\{\operatorname{Re}(s_2)=\frac{-c_0}{\log U},\operatorname{Im}(s_2)\le\frac{U}{2}\right\}$$

erhält man für (5.15):

$$\operatorname*{Res}_{s_2=0}\operatorname*{Res}_{s_1=0} z(s_1,s_2)\frac{R^{s_1+s_2}}{(s_1s_2)^{k+l+1}(s_1+s_2)^k}$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|s_2|=\rho}\int\limits_{|s_1|=2\rho} z(s_1,s_2)\frac{R^{s_1+s_2}}{(s_1s_2)^{k+l+1}(s_1+s_2)^k}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2+(\log\log x)^{\mathcal{O}(1)}(\log x)^{k+l-1/2}.$$

Dabei ist ρ eine kleine positive Konstante. Durch weitere Umformungen erhält man schließlich

$$=\frac{z(0,0)}{(k+2l)!}\binom{2l}{l}(\log R)^{k+2l}+\mathcal{O}(\log N^{k+2l-1}\log\log N^c).$$

KAPITEL 6

Aktueller Stand der Dinge

Nach dem Erscheinen von Zhangs Arbeit dauerte es nur wenige Tage bis die ersten offensichtlichen Verbesserungen der Schranke 70.000.000 gefunden wurden. Durch diverse Techniken schafften auf der einen Seite Maynard und unabhängig davon das Polymath Projekt, welches später in zwei Subprojekte gegliedert wurde, bedeutende Verbesserungen. Durch die zeitliche Nähe von Maynards Artikel und dem Polymath8a Projekt wurden die Verbesserungen vom Polymath8a Projekt zu einem großen Teil obsolet. Die zwei verschiedenen Ansätze wurden schließlich im Polymath8b Projekt zum aktuell besten Ergebnis von $\mathcal{H} = 6$ kombiniert.
Quellen für dieses Kapitel: [29, 15, 30, 18, 19].

Zuerst verallgemeinern wir die Definition von $\mathcal{H}$ (vgl. Definition 2.6):

Definition 6.1
Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei:

$$\mathcal{H}_m := \liminf_{n\to\infty}(p_{n+m} - p_n)$$

und

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1.$$

Das heißt $\mathcal{H}_m$ ist die kleinste Zahl, sodass es unendlich viele Intervalle der Länge $\mathcal{H}_m$ gibt und diese Intervalle mindestens $m + 1$ Primzahlen enthalten. Wir haben bereits in den vorangehenden Kapiteln die Primzahlzwillings Vermutung kennengelernt. Diese ist äquivalent zur Vermutung, dass $\mathcal{H}_1 = 2$ gilt.

6.1 Überblick

- Polymath8a: „Bounded gaps between primes“ [18] beschäftigte sich mit dem Verbessern der Schranke $\mathcal{H}_1$ von Satz 5.1 und endete mit $\mathcal{H}_1 = 4680$.
- Maynard verbesserte in [15] Zhangs Schranke erheblich auf $\mathcal{H}_1 = 600$.
- Polymath8b: „Bounded intervals with many primes“ [19] beschäftigte sich mit der weiteren Verbesserung von $\mathcal{H}_1$. Hierfür wurden die Ergebnisse von Maynard und Polymath8a kombiniert und man erreichte $\mathcal{H}_1 = 246$. Unter der Annahme der verallgemeinerten Elliott-Halberstam Vermutung erreichte man sogar $\mathcal{H}_1 = 6$. Das Projekt beschäftigte sich außerdem mit dem auffinden von Werten für $\mathcal{H}_m$ und erreichte auf diesem Gebiet eine ganze Reihe von Ergebnissen.

6.2 Die Ergebnisse von Maynard

Wenn man nach beschränkten Intervallen sucht, die mehr als zwei Primzahlen enthalten, kann man die Goldston, Pintz und Yıldırım Methode weder in ihrer originalen, noch in der von Zhang verbesserten Form verwenden. Selbst unter der Annahme der Elliott-Halberstam Vermutung ist das beste verfügbare Ergebnis aus [9]:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+2} - p_n}{\log p_n} = 0.$$

Maynard konnte in [15] ohne die Elliott-Halberstam Vermutung zeigen, dass es Intervalle mit beliebig vielen Primzahlen gibt. Er erreichte das folgende wichtige Ergebnis:

Satz 6.2
Sei m aus den natürlichen Zahlen, dann gilt

$$\liminf_{n\to\infty} (p_{n+m} - p_n) \leq Cm^3 e^{4m}$$

für eine Konstante C.

Dieser Satz wurde laut Maynard unabhängig auch von Terence Tao bewiesen. Er schrieb dazu in [15]: „Terence Tao (private communication) has independently proven Theorem 1.1 (with a slightly weaker bound) at much the same time.“
Aus diesem Grund wird dieser Satz teilweise als „Satz von Maynard-Tao “ bezeichnet.

Maynard erreichte in [15] auch folgendes explizites Ergebnis:

Satz 6.3

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1} - p_n) \leq 600$$

Also $\mathcal{H}_1 \leq 600$.

Es ist wichtig zu bemerken, dass Maynard dieses Ergebnis ohne die von Zhang entwickelten Techniken beweisen konnte. Er verwendete nur den Satz von Bombieri-Vinogradov.

6.3 Das Polymath Projekt

Das Polymath Projekt wurde 2009 von Timothy Gowers als Experiment gegründet. Er wollte herausfinden, ob es möglich ist, Forschung im Bereich der Mathematik als online organisierte Community zu betreiben. Das achte Projekt in dieser Reihe wurde von Terence Tao administriert und war ein großer Erfolg.

6.3.1 Polymath8a

Im Polymath8a Projekt: „Bounded gaps between primes“ [18] ging es darum, die Schranke $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ und die neuen Techniken von Zhang zu verbessern. Das Projekt endete mit $\mathcal{H}_1 = 4680$. Da Maynard zur gleichen Zeit mit seinem Artikel [15] ein wesentlich besseres Ergebnis mit weniger komplexen Methoden erreichte, wurde ein Teil des ursprünglichen Artikels überflüssig. Man veröffentlichte schließlich nur einen Teil der Methoden, die für das Ergebnis verwendet wurden. Dieser Teil befasst sich hauptsächlich mit arithmetischen Progressionen mit großen Moduln, bei welchen die Restklasse nicht fix ist. Der wichtigste Satz dabei ist:

Satz 6.4
Sei

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{7}{300}$$

und seien $\varepsilon > 0$ *und* $A \geq 1$ *fixe reelle Zahlen. Für alle Primzahlen p sei* a_p *eine fixe invertierbare Restklasse modulo p und für* $q \geq 1$ *quadratfrei sei* a_q *die eindeutig invertierbare Restklasse modulo q mit*

$$a_q \equiv a_p mod\, p^{'}$$

wobei $p'|q$. Dann existiert ein $\delta > 0$, welches nur von ε abhängt, sodass für $x \geq 1$

$$\sum_{\substack{q \leq x^{\theta-\varepsilon} \\ q\ x^{\delta}-\text{glatt} \\ q \text{ quadratfrei}}} \left| \psi(x, q, a_q) - \frac{x}{\varphi(q)} \right| \ll \frac{x}{\log^A x}$$

gilt. Dabei hängen die Konstanten nur von A, ε und δ ab, jedoch nicht von den Restklassen a_p.

Hier ist ψ über die Mangoldtfunktion (vgl. Definition 1.16) wie folgt definiert:

$$\psi(x; q, a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n = a \bmod q}} \Lambda(n).$$

6.3.2 Polymath8b

Im Polymath8b Projekt: „Bounded intervals with many primes“ [19] ging es darum, den Wert von $\mathcal{H}_1$ weiter zu verbessern. Außerdem versuchte man möglichst gute Werte für verschiedene $\mathcal{H}_m$ zu finden, indem man die Techniken aus Polymath8a mit denen von Maynard [15] kombinierte. Das Projekt endete mit $\mathcal{H}_1 = 246$ und diversen Werten für spezielle $\mathcal{H}_m$.
Im Polymath8b Projekt spielt die verallgemeinerte Elliott-Halberstam Vermutung eine wichtige Rolle.

Definition 6.5
Für jede Funktion $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit endlichem Träger und für eine Restklasse $a(q)$ gilt:

$$\Delta(\alpha, a(q)) := \sum_{n=a(q)} \alpha(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(n,q)=1} \alpha(n).$$

Verallgemeinerte Elliott-Halberstam Vermutung
Sei $x^{\varepsilon} \leq N,\ M \leq x^{1-\varepsilon}$ für ein fixes $\varepsilon > 0$ so, dass $NM \sim x$ und seien α, β Koeffizientenfolgen in der Größe von N, M. Dann gilt

$$\sum_{q \lessapprox x^{\theta}} \sup_{a \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\times}} |\Delta(\alpha * \beta; a\,(q))| \ll x \log^{-A} x$$

für jedes fixe $A > 0$. Dabei bezeichnet $*$ das Dirichletprodukt (siehe Definition 1.3).

Diese Vermutung wurde bereits 1986 in [3] aufgestellt und kann mit einer modifizierten Variante des Satzes von Bombieri-Vinogradov für $0 < \theta < 1/2$ gezeigt werden.

Tabelle 6.1 listet die aktuell besten gefundenen Werte von $\mathcal{H}_m$ auf. Dabei ist EH die Elliott-Halberstam Vermutung (siehe S. 17) und VEH die verallgemeinerte Elliott-Halberstam Vermutung (siehe S. 62).

$\mathcal{H}_m$	vermutet	mit EH	mit VEH	ohne EH
$\mathcal{H}_1$	2	12	6	246
$\mathcal{H}_2$	6	270	252	395.106
$\mathcal{H}_3$	8	52.116	-	24.462.654
$\mathcal{H}_4$	12	474.266	-	1.404.556.152
$\mathcal{H}_5$	16	4.137.854	-	78.602.310.160

Tabelle 6.1: Die besten Ergebnisse für $\mathcal{H}_m$ [19].

Diese Ergebnisse entsprechen nicht denen im originalen Artikel [19], da die Schranken nach der Veröffentlichung weiter verbessert werden konnten.
Außerdem wurden folgende Sätze bewiesen:

Satz 6.6
Es gilt:

$$\mathcal{H}_m \leq Cme^{\left(4-\frac{28}{157}\right)m}$$

für alle $m \geq 1$ *und eine Konstante* C.

Mit Hilfe der Elliott-Halberstam Vermutung kann das Ergebnis wie folgt verbessert werden:

Satz 6.7
Angenommen die Elliott-Halberstam Vermutung gilt für alle $0 < \theta < 1$, *dann gilt:*

$$\mathcal{H}_m \leq Cme^{2m}$$

für alle $m \geq 1$ *und eine Konstante* C.

Ein weiterer wichtiger Satz ist der „near miss “ Beweis für die Primzahlzwillings Vermutung.

Satz 6.8
Angenommen es gilt die Elliott-Halberstam Vermutung für alle $0 < \theta < 1$, dann gilt mindestens eine der folgenden Aussagen:

1. $\mathcal{H}_1 = 2$ *(Primzahlzwillings Vermutung).*

2. *Wenn n ein genügend großes Vielfaches von 6 ist, dann ist zumindest n oder $n - 2$ als Summe von zwei Primzahlen darstellbar.*

Die gleiche Aussage gilt auch, wenn man $n - 2$ mit $n + 2$ ersetzt.

Liste verwendeter Symbole

Bezeichnung	**Beschreibung**
(a, b)	Größter gemeinsamer Teiler von a und b
$A(x) \sim B(x)$	Für zwei Funktionen A und B bedeutet $\sim$, dass $\frac{A(x)}{B(x)} = 1$ für $x \to \infty$ gilt.
$P^{(k)}$	k-te Ableitung von P
$[d_1, d_2]$	Kleinstes gemeinsames Vielfaches von d_1 und d_2
$\lfloor x \rfloor$	$\max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{P}$	Menge der Primzahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$f(x) \ll g(x)$	Es existiert eine Konstante $c > 0$ mit $f(x) \leq cg(x)$.
p_n	n-te Primzahl
$\#A$	Anzahl der Elemente in A
$Re(x)$	Für eine komplexe Zahl $x = a + ib$ ist der Realteil $Re(x) = a$.

Bezeichnung	**Beschreibung**
$a \mid b$	a teilt b ganzzahlig
$a \nmid b$	a teilt b nicht ganzzahlig
$\mathcal{H}$	$\mathcal{H} := (h_1, \dots, h_{k_0})$ mit $h_i \in \mathbb{N}$
$\sum^{\#}$	Summe über nicht quadratfreie Elemente
$\sum'$	Summe über quadratfreie Elemente
A^x	Die Einheitengruppe des Ringes A

Liste der Vermutungen

Literatur

[1] Aigner. *Zahlentheorie*. Vieweg+Teubner Verlag, 2012. ISBN: 3-8348-1805-4.

[2] *Analytische Zahlentheorie*. Aufgerufen am: 03.08.2016. URL: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster/v/azt11`.

[3] E. Bombieri, J. B. Friedlander und H. Iwaniec. „Primes in arithmetic progressions to large moduli“. *Acta Mathematica* 156.1 (1986), S. 203–251. ISSN: 1871-2509. DOI: `10.1007/BF02399204`.

[4] J. Brüdern. *Einführung in die analytische Zahlentheorie*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995. ISBN: 3-540-58821-3.

[5] P. Bundschuh. *Einführung in die Zahlentheorie*. Sechste, überarbeitete und aktualisierte Auflage. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. ISBN: 9783540764915.

[6] A. C. Cojocaru und M. R. Murty. *An introduction to sieve methods and their applications*. 1. publ. London Mathematical Society student texts ; 66. Cambridge: Cambridge Univ. Pr., 2006. ISBN: 978-0-521-84816-9.

[7] P. Erdös. „The difference of consecutive primes“. *Duke Math. J.* 6.2 (1940), S. 438–441. DOI: `10.1215/S0012-7094-40-00635-4`.

[8] K. Ford, B. Green, S. Konyagin und T. Tao. „Large gaps between consecutive prime numbers“. *Ann. Math. (2)* 183.3 (2016), S. 935–974. ISSN: 0003-486X; 1939-8980/e. DOI: `10.4007/annals.2016.183.3.4`.

[9] D. A. Goldston, J. Pintz und C. Y. Yıldırım. „Primes in tuples I“. *Ann. of Math. (2)* 170.2 (2005), S. 819–862. ISSN: 0003-486X. DOI: `10.4007/annals.2009.170.819`.

[10] E. Gracián. *Primzahlen: Ein langer Weg ins Unendliche*. Librero IBP, 2016. ISBN: 978-9089986917.

[11] A. Granville. *Bounded Gaps Between Primes*. Aufgerufen am: 29.06.2016. URL: http://www.dms.umontreal.ca/~andrew/CurrentEventsArticle.pdf.

[12] A. Granville. „Primes in intervals of bounded length“. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.* 52.2 (2015), S. 171–222. ISSN: 0273-0979; 1088-9485/e. DOI: 10.1090/S0273-0979-2015-01480-1.

[13] B. Green und T. Tao. „Linear equations in primes“. *Ann. Math. (2)* 171.3 (2010), S. 1753–1850. ISSN: 0003-486X; 1939-8980/e. DOI: 10.4007/annals.2010.171.1753.

[14] J. Havil. *Gamma: Eulers Konstante, Primzahlstrände und die Riemannsche Vermutung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. ISBN: 978-3-540-48495-0.

[15] J. Maynard. „Small gaps between primes“. *Annals of Mathematics, 01/01/2015* (2013), S. 383–413. ISSN: 0003-486X.

[16] H. L. Montgomery und R. C. Vaughan. *Classical theory; Multiplicative number theory*. 1. publ. Cambridge studies in advanced mathematics ; 97; Cambridge [u.a.]: Cambridge Univ. Press, 2007. ISBN: 0-521-84903-9.

[17] A. Perepelyuk. *On distribution of prime numbers*. Aufgerufen am: 26.08.2016. 2013. URL: http://www.etd.ceu.hu/2013/perepelyuk_anton.pdf.

[18] D. H. J. Polymath. „New equidistribution estimates of Zhang type“. *Algebra Number Theory* 8.9 (2014), S. 2067–2199. ISSN: 1937-0652. DOI: 10.2140/ant.2014.8.2067.

[19] D. H. J. Polymath. „Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes“. *Research in the Mathematical Sciences* 1.1 (2014), S. 1–83. ISSN: 2197-9847. DOI: 10.1186/s40687-014-0012-7.

[20] *PrimeGrid's Sophie Germain Prime Search*. Aufgerufen am: 04.05.2016. URL: http://www.primegrid.com/download/twin-666669.pdf.

[21] R. A. Rankin. „The Difference between Consecutive Prime Numbers“. *J. London Math. Soc.* S1-13.4 (1938), S. 242. DOI: 10.1112/jlms/s1-13.4.242.

[22] P. Ribenboim. *Die Welt der Primzahlen; Geheimnisse und Rekorde*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. ISBN: 978-3-642-18078-1.

[23] P. Ribenboim. *The little book of big primes*. Springer-Verlag, New York, 1991. ISBN: 0-387-97508-X. DOI: 10.1007/978-1-4757-4330-2.

[24] A. Schmidt. *Einführung in die algebraische Zahlentheorie*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. ISBN: 9783540459743.

[25] *Sieve Theory and its applications*. Aufgerufen am: 30.05.2016. URL: `http://www.math.tau.ac.il/~rudnick/courses/sieves2015.html`.

[26] K. Soundararajan. „Small gaps between prime numbers: the work of Goldston-Pintz-Yıldırım“. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 44.1 (2007), S. 1–18. ISSN: 0273-0979. DOI: `10.1090/S0273-0979-06-01142-6`.

[27] T. Tao. *Large gaps between consecutive prime numbers*. Aufgerufen am: 13.08.2016. URL: `https://terrytao.wordpress.com/2014/08/21/large-gaps-between-consecutive-prime-numbers/`.

[28] T. Tao. *Online reading seminar for Zhang's "bounded gaps between primes"*. Aufgerufen am: 28.06.2016. URL: `https://terrytao.wordpress.com/2013/06/04/online-reading-seminar-for-zhangs-bounded-gaps-between-primes`.

[29] T. Tao. *Polymath8b: Bounded intervals with many primes, after Maynard*. Aufgerufen am: 20.07.2016. URL: `https://terrytao.wordpress.com/2013/11/19/polymath8b-bounded-intervals-with-many-primes-after-maynard/`.

[30] T. Tao. *Polymath8b, VII: Using the generalised Elliott-Halberstam hypothesis to enlarge the sieve support yet further*. Aufgerufen am: 02.08.2016. URL: `https://terrytao.wordpress.com/2014/01/28/polymath8b-vii-using-the-generalised-elliott-halberstam-hypothesis-to-enlarge-the-sieve-support-yet-further/`.

[31] T. Tao. *The prime tuples conjecture, sieve theory, and the work of Goldston-Pintz-Yildirim, Motohashi-Pintz, and Zhang*. Aufgerufen am: 10.05.2016. URL: `https://terrytao.wordpress.com/2013/06/03/the-prime-tuples-conjecture-sieve-theory-and-the-work-of-goldston-pintz-yildirim-motohashi-pintz-and-zhang/`.

[32] G. Tenenbaum und M. Mendès France. *The prime numbers and their distribution*. Repr. with corr. Student mathematical library ; 6. Providence, RI: American Math. Soc., 2001. ISBN: 0-8218-1647-0.

[33] Y. Zhang. „Bounded gaps between primes“. *Ann. Math.* 179.3 (Mai 2014), S. 1121–1174. DOI: `10.4007/annals.2014.179.3.7`.