Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Die Modellierung von Schadstoffemissionen in ökonomischen Wachstumsmodellen

Ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Alexia Fürnkranz-Prskawetz

durch
Markus Sledz, BSc

8. Dezember 2014

Danksagungen

Ich möchte mich auf dieser Seite nachdrücklich bei bestimmten Personen bedanken:

Mein Dank gilt Frau Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Alexia Fürnkranz-Prskawetz für das Bereitstellen dieses interessanten Themas der Diplomarbeit. Ihre Expertise und konstruktive Kritik halfen mir durchdachte Thesen und Fragestellungen zu formulieren. Während des Schreibens meiner Diplomarbeit sah ich mich immer sehr gut betreut und beraten, was ich sehr zu schätzen wusste.

Besonders bedanken möchte ich mich bei meinen Eltern, Joanna und Anton Sledz, die mir das Studium überhaupt erst ermöglicht haben und mich während meiner Schulzeit, ebenfalls im Laufe des Studiums nicht nur finanziell, auch moralisch immer unterstützt und den Rücken gestärkt haben.

Ein herzliches Dankeschön an meine Freundin Paulina Piatek, die zahlreiche Stunden Korrektur gelesen hat. Ein großes Danke für die liebevolle Unterstützung und den Zuspruch während des Studiums.

Weiters bedanke ich mich bei meinem Bruder, der mich immer wieder ermutigte und eine starke Stütze über die gesamte Dauer meines Studiums war.

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

BIP	Bruttoinlandsprodukt
CO_2	Kohlenstoffdioxid
CES	Constant Elasticity of Substitution
CRS	Constant Returns to Scale
CSD	Commission on Sustainable Development
DRS	Decreasing Returns to Scale
EKC	Environmental Kuznets Curve
EU	Europäische Union
G7	Gruppe der Sieben
GDP	Gross Domestic Product
Glg.	Gleichung
IRS	Increasing Returns to Scale
Kap.	Kapitel
max	maximiere
min	minimiere
UK	United Kingdom
UNCHE	United Nations Conference on the Human Environment
UNCED	United Nations Conference on Environment and Development
USA	United States of America
Vgl.	vergleiche
WCED	World Commission on Environment and Development
WSSD	World Summit on Sustainable Development

Abstract

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wird das Problem der Modellierung von Schadstoffemissionen in ökonomischen Wachstumsmodellen näher erörtert. Es werden verschiedene Wachstumsmodelle mit unterschiedlichen Umweltvariablen dargestellt. Dabei sind diese Umweltgrößen als erneuerbare Resource definiert. Abgesehen von der Modellierung dieser Umweltgrößen, liegt ein Augenmerk auf den Dynamiken von physischem Kapital, Humankapital und Umweltvariablen bei endogenen Wachstumsmodellen mit und ohne Einfluss der Umwelt. Im Detail werden zum besseren Verständnis auch die exogenen Modelle von Solow und Ramsey präsentiert. In Folge an die exogenen Wachstumsmodelle wird die Diskussion mit den endogen Wachstumsmodellen AK, Schumpeter und Lucas weitergeführt. Es wird evaluiert, welche Auswirkungen Umweltqualität, Emissionsaustoß und -bestand auf den Konsum, Wachstumspfad sowie den Steady State der oberhalb angeführten Modelle haben. Die Ergebnisse zeigen, dass unter bestimmten Voraussetzungen ein nachhaltiges ökologisches Wachstum möglich ist.
Abschließend wird ein Modell von Bovenberg und Smulder analysiert. Dafür werden die Aussagen von Bovenberg und Smulder nachvollzogen um diese theoretischen Resultate danach anhand spezifischer Funktionen zu untersuchen. Darüberhinaus wird das Modell erweitert. Zu diesem Zweck werden Ergebnisse und Schlussfolgerungen aus der gesamten Diplomarbeit für die Erweiterung des Bovenberg/Smulder-Modells verwendet. Die Resultate zeigen, dass in diesem Modell der Komsum, optimaler Wachstumpfad und Steady State nachhaltig, ökologisch und pareto optimal für die Bevölkerung sind.

1 Einleitung

> "Elf der vergangenen zwölf Jahre waren die wärmsten seit Beginn der Temperaturaufzeichnungen. Wir stehen mitten im Wandel des Weltklimas und sind speziell im Alpenraum sehr massiv davon betroffen. Die anthropogene Klimaänderung findet bereits statt und kann durch Gegenmaßnahmen keinesfalls mehr aufgehalten, sondern nur mehr in ihren Auswirkungen gemildert werden. Es müssen daher zusätzlich zu Klimaschutzmaßnahmen dringend Maßnahmen der Anpassung an den Klimawandel gesetzt werden."[1]

Dieses Zitat des Bundesministeriums für Land- und Forstwirtschaft, Umwelt und Wasserwirtschaft zeigt, wie fortgeschritten die Umweltverschmutzung und -zerstörung und somit der Treibhauseffekt sind. Der Begriff der Nachhaltigkeit ist einer, der in diesem Zusammenhang immer auftritt. Um die Umwelt zu verbessern reicht es nicht nur Klimaschutzmaßnahmen durchzusetzen, sondern man muss auch die Auswirkungen auf die Wirtschaft überprüfen, ob diese Umweltaktionen durchführbar sind und diese Vorkehrungen zu keinem Wohlstandsverlust führen.
Deshalb stellen sich folgende Fragen in der Wachstumstheorie, falls man einen Umweltaspekt in Betracht zieht:

- Ist Umweltschutz und Wirtschaftswachstum möglich,
- kann anhaltendes Wirtschaftswachstum generiert werden ohne einen Schadstoffausstoß zu generieren,
- und welche Auswirkungen haben Umwelt und Schadstoffemissionen in Wachstumsmodellen.[2]

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit der Thematik der Auswirkungen der Umweltqualität und Schadstoffemissionen auf das Wirtschaftswachstum. Dafür wird eine Variable, welche die Umweltqualität oder die Schadstoffemissionen misst, in Form einer Bestandsgröße in mathematische Wachstumsmodelle eingefügt. Um diesen Vorgang besser zu verstehen werden im zweiten Kapitel wichtige Punkte im Zusammenhang mit dem Thema Umwelt behandelt. Aufbauend auf diesen Grundlagen werden im dritten Kapitel die mathematischen Modellierungsgrundlagen für ökonomische Wachstumsmodelle gefolgert, damit im vierten Kapitel ein Blick auf die ökologischen Auswirkungen auf exogene, ökonomische Wachstumsmodelle gelegt werden kann. Dies wird im fünften Kapitel anschließend auf endogene, ökonomische Wachstumsmodelle erweitert. Im

[1] Bundesministerium für Land- und Forstwirtschaft, Umwelt und Wasserwirtschaft (2012)
[2] Vgl. Xepapadeas (2005)

sechsten Kapitel beschäftigt sich diese Diplomarbeit mit einem speziellen ökonomischen Wachstumsmodell, mit dem verschiedene Szenarien analysiert werden, um den Zusammenhang zwischen Wirtschaftswachstum und Umwelt aufzuzeigen. Das Kapitel sieben fasst nochmals alle Ergebnisse der vorgestellten Modelle, die Interpretationen dieser Modelle sowie Lösungswege für eine nachhaltige Entwicklung der Wirtschaft zusammen.

2 Umwelt

In den Industriestaaten gibt es seit Beginn der neunziger Jahre intensive Diskussionen über den Zusammenhang von Umwelt und Wirtschaftswachstum. Daraus resultieren auch einige Fragen: Welchen Einfluss hat das Wirtschaftswachstum auf die Umwelt und umgekehrt? Wollen Industriestaaten Wachstum um jeden Preis? Ist "grünes" Wachstum möglich und damit eine Entkoppelung von Umwelt und Wirtschaft?
Indikatoren in Österreich und Deutschland weisen auf eine leichte Entkoppelung von Wirtschaft und Umwelt, sowie auf ein "grünes" Wachstum hin.[3] Jedoch wird die Idee von Wachstum um jeden Preis, welche in den USA und in Schwellenländern praktiziert wird, auf dem europäischen Kontinent nicht umgesetzt. In der EU wird der Umweltverschmutzung durch die Kernziele 2020 ein Riegel vorgeschoben. Für den Punkt Klimawandel und nachhaltige Energiewirtschaft sind folgende Punkte angedacht.

- Verringerung der Treibhausgasemissionen um 20 % (oder sogar um 30 %, sofern die Voraussetzungen hierfür gegeben sind) gegenüber 1990;
- Erhöhung des Anteils erneuerbarer Energien auf 20 %;
- Steigerung der Energieeffizienz um 20 %.[4]

Ein Wort das in diesem Zusammenhang immer fällt ist Nachhaltigkeit, welches im nachfolgenden Kapitel erläutert wird.

2.1 Nachhaltigkeit

Nachhaltigkeit ist ein weit verbreiteter Ausdruck, welcher jedoch auch ein Sammelbegriff für viele Umweltschutzaktionen darstellt.
Wenn man den Begriff "Nachhaltigkeit" in die Suchmaschine Google eingibt, findet diese innerhalb von 0,18 Sekunden über 15 Millionen Einträge, welche einen Zusammenhang mit diesem Thema haben. Der Begriff der Nachhaltigkeit lautet im Englischen "sustainable development". Die wortwörtliche Übersetzung aus dem Englischen bedeutet soviel wie "erhaltbar", "haltbar" oder "kann aufrechterhalten werden". An diesen Bespielen ist schon ersichtlich, dass es schwierig ist die Bedeutung der Nachhaltigkeit zu definieren. Der Duden erläutert den Begriff wie folgt:

> *Nachhaltigkeit*
> "Prinzip, nach dem nicht mehr verbraucht werden darf, als jeweils nachwachsen, sich regenerieren, künftig wieder bereitgestellt werden kann."[5]

[3] Vgl. Haberson und Medek (2013) und Carsten (2012)
[4] Vgl. Europäische Komission (2010), Seite 13
[5] Duden (2012)

Das bedeutet, dass versucht wird allen Menschen und Generationen, egal zu welchem Zeitpunkt sie leben, dieselben Chancen zu ermöglichen.

Geschichtlich tritt die Nachhaltigkeit zum ersten Mal im 18. Jahrhundert in Schriften des kursächsischen Hofs in Freiberg auf, und zwar in Zusammenhang der Forstwirtschaft. Hans Carl von Carlowitz, Oberberghauptmann des Hofs, formuliert als Erster verschiedene Prinzipien, um dauerhaft genügend Holz zur Verfügung zu haben.

> "Denn je mehr Jahr vergehen, in welchem nichts geplanzet und gesaet wird, je langsamer hat man den Nutzen zugewarten, und um so viel tausend leidet man von Zeit zu Zeit Schaden, ja um so viel mehr geschickt weitere Verwüstung, daß endlich die annoch vorhandenen Gehöltze angegriffen, vollends consumiret und sich je mehr und mehr vermindern müssen."[6]

Es sollte darauf geachtet werden, dass nicht mehr Bäume geschlagen werden, als wieder nachwachsen können. Dadurch bleibt das Kapital (Holz) selbst erhalten und wird bestenfalls für künftige Generationen aufgebaut. Carlowitz kritisiert auf diese Weise den Gedanken des kurzfristigen Gewinns. Ein Feld bringe jährlich einen Ertrag, da es immer mit einem Teil der Ernte des Vorjahres neu bewirtschaftet wird. Würde man die Saat verkaufen, so würde der Gewinn in einem Jahr steigen, jedoch würde im darauffolgenden Jahr keine Ernte vorhanden sein. Bei Holz müsse man Jahrzehnte warten und aus diesem Grund müsse man über noch einen längeren Zeitraum planen als bei Feldfrüchten. Deshalb sei der Wechsel von Wäldern zu Feldern und Weiden eine Kurzsichtigkeit. Man müsse darauf achten, dass man den Reichtum der nächsten Generation vererbt. Aus diesen Gedanken und mit dem Satz: "von den Zinsen zu leben und nicht vom Kapital", entwickelte sich die Idee der Nachhaltigkeit.[7]
Ein halbes Jahrhundert (1798) später schrieb Thomas Robert Malthus in seinem Essay on the Principle of Population über die langsam steigende Nahrungsmittelproduktion, welche mit dem starken Bevölkerungswachstum zu einer Verknappung der Lebensmittel führen würde. Damit würden die Preise für Nahrung steigen, jedoch würde das Bevölkerungswachstum ein Sinken der Löhne einleiten. Mit verschiedenen Maßnahmen wollte Malthus dem gegensteuern. Es kam aufgrund des stärker auftretenden technischen Fortschrittes, als Malthus es annahm, doch zu keiner bedrohlichen Knappheit der Nahrungsgüter. Somit sieht man, dass Nachhaltigkeit schon lang im Fokus der Menschheit ist.[8]

Ein negatives Beispiel in Sachen nachhaltige Entwicklung ist die Insel Nauru. Auf der Insel wurde 1900 angefangen die großen Phosphatvorkommen abzubauen. Bis in die Gegenwart wurde diese natürliche Ressource massiv abgebaut. Die Gewinne werden in einen Staatsfond verwaltet. Dieser hatte in den siebziger Jahren ein Volumen von zirka einer Milliarde Dollar. Somit war Nauru gemessen an der Fläche, das reichste Land der Welt. Die Nauruer reisten um die Welt, kauften die kostspieligsten Dinge,

[6] Carlowitz (1712), Seite 105
[7] Vgl. Carlowitz (1713)
[8] Vgl. Malthus (1798) und Fürnkranz-Prskawetz (2011)

bauten immer größere Anwesen und umrundeten aus Langeweile ihre kleine Insel (eine Fläche von 21,20 km^2) in sündhaft teuren Gefährten. Es wurde jedoch verabsäumt das Geld in Bildung und wichtige nachhaltige Infrastruktur zu investieren. Zurzeit sind 80 Prozent der Landfläche zerstört, wodurch sich die Insel nicht mehr selbst versorgen kann. Weiters sind Alkoholismus und Diabetes die häufigsten Krankheiten. Zudem sind 80 Prozent der Männer übergewichtig, womit auf Nauru einige der dicksten Menschen der Welt leben. Dieses Beispiel zeigt die Notwendigkeit der Nachhaltigkeit deutlich auf.[9]

Es gibt zwei wichtige Organisationen, die sich mit dem Thema Nachhaltigkeit seit langer Zeit beschäftigen und somit eine Vorreiterrolle auf diesem Gebiet einnehmen. Dies sind die "Brundtland Kommission" und der "Club of Rome". Die nächsten zwei Unterkapiteln beschäftigen sich mit diesen beiden wichtigen Organisationen und ihrer Herangehensweise zur Thematik Umwelt und nachhaltige Entwicklung.

2.1.1 Brundtland Kommission

Die Brundtland Kommission ist die Kurzform der Weltkommission für Umwelt und Entwicklung und wurde nach der Vorsitzenden, der ehemaligen norwegischen Ministerpräsidentin, Gro Harlem Brundtland benannt. Diese Kommission veröffentlichte 1987 den Report "Our Common Future" (Unsere gemeinsame Zukunft), in dem erstmals ein Entwurf der nachhaltigen Entwicklung formuliert und definiert wurde. Die Veröffentlichung dieses Berichtes gilt als Anstoß der internationalen Diskussion über Nachhaltigkeit bzw. nachhaltige Entwicklung. In diesem Bericht wird Nachhaltigkeit wie folgt definiert:

> "Nachhaltige Entwicklung ist Entwicklung, die die Bedürfnisse der Gegenwart befriedigt, ohne zu riskieren, dass zukünftige Generationen ihre eigenen Bedürfnisse nicht befriedigen können."[10]

Das Konzept der Nachhaltigkeit in diesem Bericht enthält eine globale Politikstrategie zur Bekämpfung von einzelnen Problemen, wie u.a. Umweltverschmutzung, globale Hochrüstung, Schuldenkrise, Bevölkerungsentwicklung und Wüstenausbreitung in der Dritten Welt, welche jedoch als Wirkungsgeflechte gesehen werden sollten, die durch einzelne Maßnahmen nicht gelöst werden können. Stattdessen müssten Wege gefunden werden diese gemeinsam zu lösen. Gleichzeitig aber müsste auf den materieller Wohlstand und Fortschritt Acht gegeben werden. Weiteres sollte auf die Schonung natürlicher Ressourcen als Lebensgrundlage ein Augenmerk gelegt werden, da der Konsum in den Industrieländern nicht in demselben Ausmaß auf die gesamte Weltbevölkerung übertragen werden kann ohne eine massive Umweltverschlechterung zu verursachen. Wie auch schon der "Club of Rome" (Kap. 2.1.2) sieht die "Brundtland-Kommission" Schranken des ökonomischen Wachstums, wo es zu Umweltzerstörung und ökologischen Katastrophen kommt. Das Wirtschaftswachstum muss sich an der Umwelt orientieren

[9] Vgl. Gowdy und McDaniel (1999)
[10] United Nations (1987), Seite 51

und darf deren kritische Schranken nicht überspringen. Nach der Ansicht der Kommission ist es an der Zeit Ökonomie und Ökologie zusammenzubringen, so dass Regierungen, Menschen und die Wirtschaft gemeinsam an einer dauerhaften Entwicklung für unseren Planeten arbeiten können.[11] Weiters ist nach der Brundtland-Kommission zwischen intragenerationeller Gerechtigkeit und intergenerationeller Gerechtigkeit zu unterscheiden. Ersteres sieht eine objektive Aufteilung der ökonomischen und ökologischen Interessen zwischen Industrie- und Entwicklungsländern in einer Generation vor. Zweiteres ist die klassische nachhaltige Sicht auf Zuteilung der Ressourcen zwischen den Generationen.[12]

Die wichtigsten Konferenzen der Vereinten Nationen zum Thema nachhaltige Entwicklung in chronologischer Reihenfolge sind:

1972: *United Nations Conference on the Human Environment - UNCHE*, Die erste Umweltkonferenz der Vereinten Nationen.

1987: *World Commission on Environment and Development - WCED*, Abschlussbericht "Our Common Future" - Entstehung der Brundtlandt-Kommission.

1992: *United Nations Conference on Environment and Development - UNCED*, Konferenz von Rio bei der 178 Nationen sich verpflichten eine nachhalige Entwicklung einzuhalten. Zu diesem Zwecke unterschreiben sie die Agenda 21.

1992: *Commission on Sustainable Development - CSD*, Kommission zur Weiterführung der Rio-Ziele.

2002: *World Summit on Sustainable Development - WSSD*, Nachfolgende Veranstaltung der Konferenz von Rio.[13]

Noch vor der ersten Konferenz der Vereinten Nationen im Jahre 1972 formierte sich der Club of Rome.

2.1.2 Club of Rome

Der Club of Rome hat im Gegensatz zu der Brundtland-Kommission eine sehr konservative Einstellung zur Nachhaltigkeit. Diese nichtkommerzielle Organisation hat mit ihrem ersten Bericht "The Limits to Growth" im Jahre 1972 von Dennis L. Meadows schon für Aufsehen gesorgt. Gegründet wurde diese Vereinigung mit großer Anstrengung und Idee von Aurelio Peccei und Alexander King. Den beiden gelang es eine Konferenz in Rom zu organisieren, die jedoch keinen Erfolg zum Abschluss hatte. Nach dem Ende der Konferenz trafen sich sechs der Teilnehmer, Aurelio Peccei, Alexander King, Hugo Thiemann, Max Kohnstamm, Jean Saint-Geours sowie Erich Jantsch und formierten den Club of Rome.[14]

[11]Vgl. United Nations (1987)
[12]Vgl. Hauff und Kleine (2009)
[13]Vgl. Hauff und Kleine (2009)
[14]Vgl. Lexikon der Nachhaltigkeit (2013)

"The Limits To Growth" wurde 15 Jahre vor dem Brundtland-Bericht verfasst. Dieser Studie wird und wurde nicht dieselbe Wichtigkeit zugeschrieben wie dem Brundtland-Bericht. Jedoch werden auch in dieser Arbeit wichtige Thesen und Aussagen getätigt. An diesem Paper waren 17 Wissenschaftler vom Massachusetts Institute of Technology gemeinsam tätig. Die vier Hauptautoren waren Dr. Donella H. Meadows, Dr. Dennis L. Meadows, Dr. Erich K. O. Zahn und Peter Milling. Die Autoren haben sich den Verlauf wichtiger Wirtschaftsgrößen und deren Prognose für den Zeitraum von 1900 bis 2100 angesehen. Dieser zeitliche Abfolge ist in der Abbildung 2.1 zu sehen, unter der Annahme, dass die Menschheit mit den gegeben Ressourcen so umgeht wie bisher.[15]
Weitere wichtige Berichte des Club of Rome neben dem "The Limits To Growth" sind die Folgeberichte "Beyond the Limits" (Meadows, Meadows und Randers, 1992) sowie "The Future of The Oceans" (Borgese, 1986) und "Faktor 4" (von Weizsäcker, Lovins und Lovins, 1995). Der Bericht "2052 - A Global Forecast for the Next Forty Years" erschien 2012 und ist von Jørgen Randers, welcher bereits bei "The Limits to Growth" unter den Autoren gewesen war. Dieser Bericht versucht neue Vorhersagen und Prognosen zu tätigen.

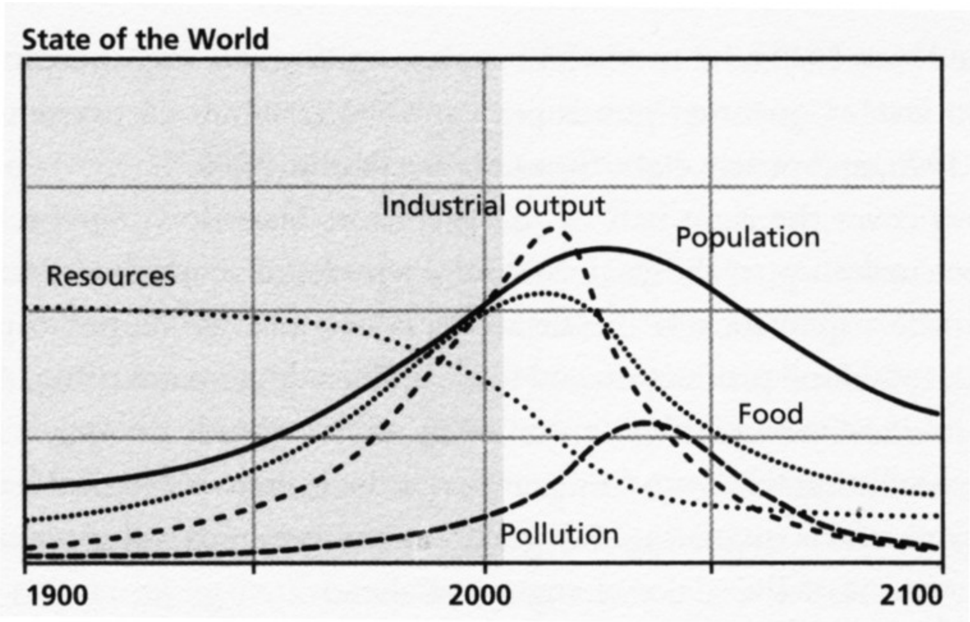

Abbildung 2.1: Vorhersage aus dem Bericht "The Limits to Growth"
(Vgl. Meadows, Meadows, Randers und Behrens (1972))

[15]Vgl. Meadows, Meadows, Randers und Behrens (1972)

2.2 Kuznets Kurve

Mit dem "Club of Rome" und der "Brundtland Kommission" fiel der Startschuss zu einer politischen Diskussion und zu einer wissenschaftlichen Forschung im Bereich "grünes" Wachstum, nachhaltige Entwicklung und Folgen der Umweltverschmutzung. Am Beginn kamen die meisten Forschungserebnisse aus empirischen Studien zu diesen Themen. Eine wichtige Erkenntnis aus diesen Studien zur Modellierung von Schadstoffemissionen, welche im Kapitel 3 näher erläutert wird, ist die "Environmental Kuznets Kurve". Diese Kurve beschreibt den Zusammenhang zwischen der Umweltverschmutzung und dem Pro-Kopf-Einkommen.[16]

Im Jahr 1954 erwähnte Simon Kuznet in seinem Paper "Economic Growth and Income Inequality" zum ersten Mal eine verkehrte U-Kurve, mit der das Pro-Kopf-Einkommen und die Ungleichverteilung des Kapitals beschrieben wird. Für diese Idee erhielt Kuznet 1971 den Wirtschaftsnobelpreis. Über die Jahre wurde diese Kurve auch mit einigen empirischen Studien belegt. Zum Beispiel zeigten Randolph und Lott (1993) einen U-förmigen-Zusammenhang zwischen dem logarithmierten Pro-Kopf-BIP und dem GINI-Koeffizienten. Der GINI-Koeffizient ist ein statistisches Maß zur Darstellung der Ungleichverteilung. Dieser Index nimmt nur Werte zwischen Null und Eins an, dabei steht Null für Vermögen ist gleichverteilt und Eins, Vermögen ist ungleichverteilt.
Diese U-Form stammt von einer Verzerrung der Verteilung von Kapital bei einem Steigen des Pro-Kopf-Einkommens. Startet man mit einem niedrigen Pro-Kopf-Einkommen gibt es noch eine geringe Ungleichverteilung, bedingt durch wenig Kapital, welche durch den Zuwachs des Einkommens dann verstärkt wird. Jedoch ab einem bestimmten Wendepunkt setzt der Effekt ein, dass es durch das hohe Pro-Kopf-Einkommen zu einer Umverteilung der Ungleichverteilung hin zur Gleichverteilung kommt.[17]

Mit Beginn der Neuziger Jahre erhielt die Kuznetskurve eine neue Bedeutung. Drei Arbeiten befassten sich mit empirischen Studien zum Thema, Umwelt und dem Zusammenhang mit der Ökonomie. In der Arbeit von Panayotou (1993) "Empirical Tests and Policy Analysis of Environmental Degradation at Different Stages of Economic Development" kam zuerst der Ausdruck der "Environmental Kuznets Curve" (EKC, Abb.2.2) vor. In den drei Arbeiten wurde eine Beziehung zwischen Umweltqualität und Pro-Kropf-Einkommen gefunden, welche genauso wie bei Kuznets Theorie von Kapitalverteilung und Pro-Kopf-Einkommen vor zirka 50 Jahren, die Form einer verkehrten "U" hat.[18]
Gründe für diese Form sind leicht erklärt. Bei einer Volkswirtschaft mit niedrigem Pro-Kopf-Einkommen handelt es sich um einen Staat, in dem der landwirtschaftliche Sektor stark vertreten ist und welcher eine geringe Schadstoffemission hat. Das Pro-Kopf-Einkommen steigt durch die Industrialisierung und dadurch steigt auch der

[16] Vgl. Kuznet (1955)
[17] Vgl. Kuznet (1955), Ahluwalia (1976), Barro (2000) und Randolph und Lott (1993)
[18] Vgl. Grossman (1994), Grossman und Krueger (1993), Shafik und Bandyopadhyay (1992) und Panayotou (1993)

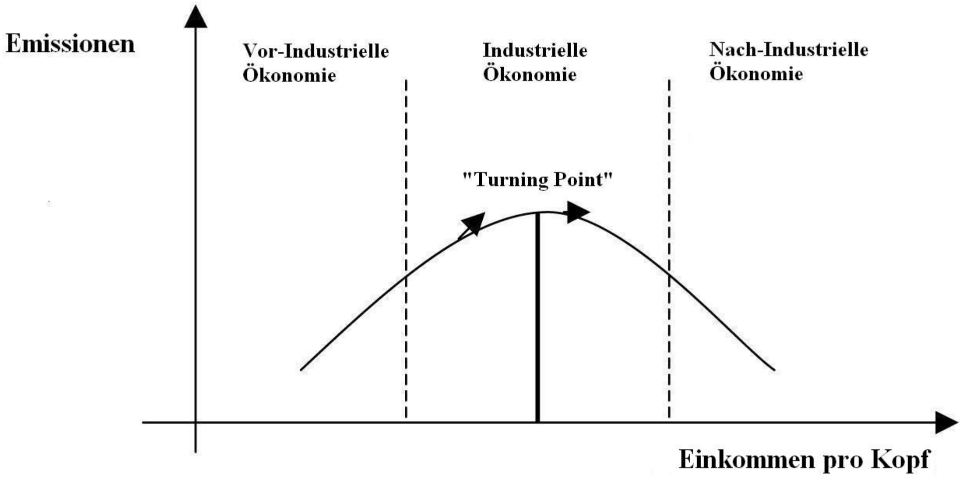

Abbildung 2.2: Kuznet-Kurve (Eigene Darstellung in Anlehnung an Papayotou (1993))

Schadstoffausstoß. Damit ergibt sich auch eine Verschiebung von Arbeitskräften vom primären Sektor in den sekundären Sektor und dadurch ein weiter verstärkter Einsatz der Industrie sowie ein höheres Pro-Kopf-Einkommen. Die Urbanisierung und Mobilität verschlechtert auch die Umwelt. Mit anderen Worten, den Individuen ist es bei ihrem Nutzen wichtiger mehr Geld zu verdienen und Kapital anzusparen als eine saubere Luft zu haben.[19]
Erreicht die Volkswirtschaft ein bestimmtes Pro-Kopf-Einkommen, fällt die Umweltqualität in der Nutzenfunktion mehr ins Gewicht und die Personen legen mehr Wert auf eine saubere Umwelt. Durch das hohe Pro-Kopf-Einkommen, die Globalisierung und neue Umweltauflagen (durch den Wunsch der Bevölkerung nach einer sauberer Umwelt) wird die arbeitskraftintensive Industrie in wenig entwickelte Länder ziehen. Dies zieht eine Regeneration der Umwelt mit sich. Weiters können auch der erhöhte Einsatz von Kapital in der Forschung zu umweltschonenden Erfindungen führen, womit es zu einer Entlastung der Umwelt kommt.[20]

[19] Vgl. de Bruyn und Heintz (2002), Grossmann und Kruger (1995), Grossman und Helpman (1991) und Robinson (1976)
[20] Vgl. de Bruyn und Heintz (2002), Grossmann und Kruger (1995), Grossman und Helpman (1991) und Robinson (1976)

2.3 Empirische Daten

Aus der Environmental Kuznets Kurve ergibt sich ein Zusammenhang zwischen Pro-Kopf-Einkommen und Emissionen. In Abbildung 2.3 sind die CO_2-Emissionen von Kanada, Frankreich, Deutschland, Italien, Japan, des Vereinigtes Köngreichs und der Vereinigten Staaten von Amerika (G7 - Gruppe der Sieben[21]) von 1960 bis 2004 (Basisjahr 1993) zu sehen. Seit 1970 ist es bei diesen sieben Ländern zu einer Reduktion des CO_2-Ausstoßes gekommen. Gleichzeitig ist das Wachstum des Bruttoinlandsprodukts konstant und das Pro-Kopf-Einkommen sehr hoch.[22] Damit ist dies auch ein gutes Beispiel für die Environmental Kuznets Curve, genauer gesagt für Staaten, die sich nach dem "Turning Point" (siehe Abb. 2.2) befinden.

Im Gegensatz zu den G7-Staaten haben die Schwellenländer[23] Brasilien, China, In-

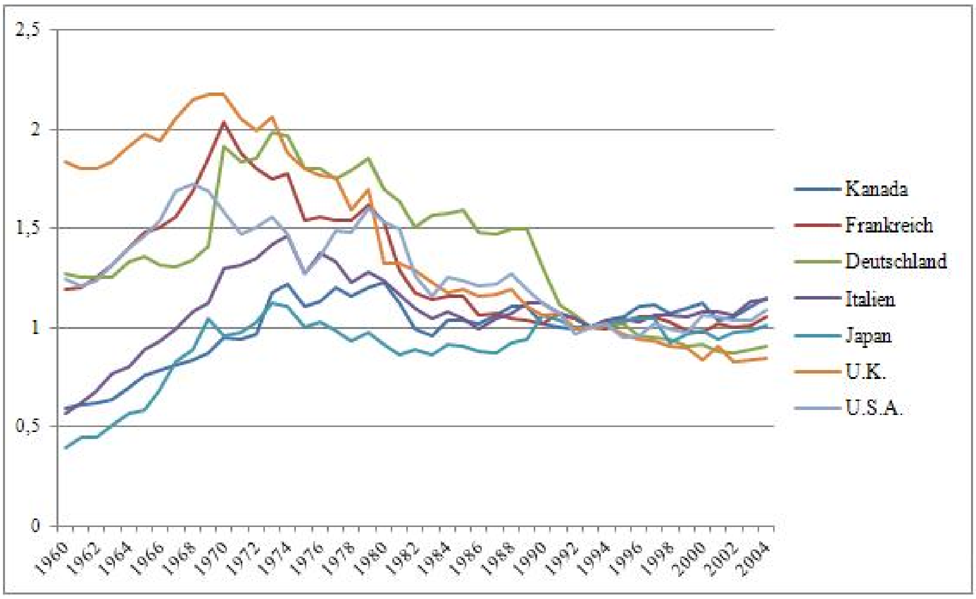

Abbildung 2.3: Anteil der CO_2-Emissionen zum Basisjahr 1993 des Produktionssektors verschiedener Länder von 1960 - 2004
(Eigene Darstellung; Datenquelle vgl. United Nations Environment Programme (2013))

dien, Russland, Südafrika und Türkei ein niedriges Pro-Kopf-Einkommen, jedoch ein hohes Wachstum des Bruttoinlandsprodukts.[24] Die Schwellenländer sind laut Theorie der Environmental Kuznets Curve vor dem "Turning Point" (siehe Abb. 2.2). Somit müsste laut dieser Theorie der Ausstoß von Schadstoffen über die Zeit zugenommen haben. Die Zunahme der CO_2-Emissionen von 1960 bis 2004 in den Schwellenländern

[21] die sieben führenden Industrieländer; Vgl. Weltbank (2013b), International Monetary Fund (2013) und Bundesministerium für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung (2013)
[22] Vgl. Weltbank (2013a)
[23] Vgl. Weltbank (2013b) und International Monetary Fund (2013)
[24] Vgl. Weltbank (2013a)

ist in Abbildung 2.4 deutlich zu erkennen.
Um den Verlauf bzw. die Weiterentwicklung der Wirtschaft und Umweltqualität (auch

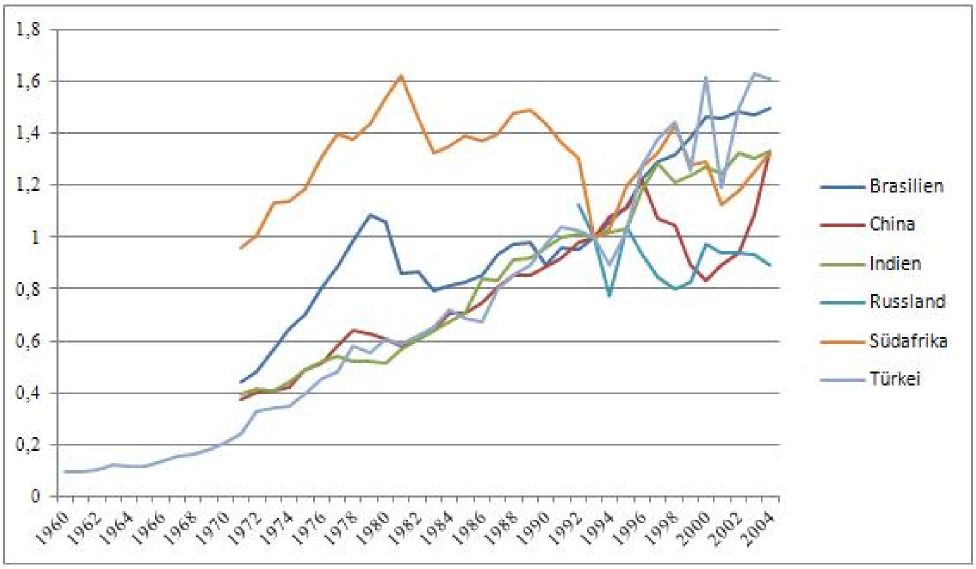

Abbildung 2.4: Anteil der CO_2-Emissionen zum Basisjahr 1993 des Produktionssektors verschiedener Länder von 1960 - 2004
(Eigene Darstellung; Datenquelle vgl. United Nations Environment Programme (2013))

deren Wechselwirkung) von Industrie-, Schwellen-, und Entwicklungsländer unter Berücksichtigung der Environmental Kuznets Curve zu untersuchen, werden im nächsten Kapitel theoretische Ansätze zur Modellierung von Schadstoffemissionen genauer betrachtet.

3 Modellierung von Schadstoffemissionen

Nach dem im Kapitel 2 die Definition der Nachhaltigkeit, politische Grundlagen, die Theorie zur "Environmental Kuznets Kurve" und empirische Daten vorgestellt worden sind, wird sich das Kapitel 3 mit den mathematischen Modellierungsgrundlagen für ökonomische Wachstumsmodelle beschäftigen. Aus diesem Grund werden einleitend die fünf Basisfakten der Wachstumstheorie nach Romer (1994, Seite 12) angeführt:

- Es existieren mehrere Unternehmen am Markt;
- Entdeckungen unterscheiden sich vom Input so, dass Entdeckungen von mehreren Personen genutzt werden können;
- Physische Tätigkeiten können wiederholt werden;
- Technologischer Fortschritt wird von Personen entdeckt;
- Es existieren Unternehmen und Individuen, die eine Marktmacht besitzen und monopolistische Gewinne erwirtschaften.

Erweitert man diese Modelle um einen Umweltaspekt, folgt noch ein Faktum.

- In der Produktion entstehen Schadstoffe, welche der Umwelt schaden und Auswirkungen auf die individuelle Nutzenfunktion haben.

Der letzte Punkt kann noch verfeinert werden, was bei der Modellierung von Schadstoffemissionen wichtig ist.

1. Emissionen sind Abfallprodukte der Produktion oder des Konsums.
2. Emissionen haben einen Einfluss auf die gesamte Umgebung.
3. Emissionen wirken sich direkt auf den Nutzen der Individuen aus.
4. Emissionen beeinflussen die Produktivität, sowohl positiv als auch negativ.[25]

[25] Vgl. Xepapadeas (2005)

3.1 Grundlagen

So wie es bei Wachstumsmodellen üblich ist, wird auch bei Wachstumsmodellen mit Umweltbelastung eine Hicksneutrale Produktionsfunktion[26] mit abnehmenden Skalenerträgen (3.2)-(3.3) und Inada-Bedingungen (3.4)-(3.5) verwendet. Dabei repräsentiert K das Kapital, L ist die Bevölkerung und A bezeichnet den technischen Fortschritt. Es wird angenommen, dass der technische Fortschritt nur eine Auswirkung auf die Produktivität der Individuen hat. Deshalb entsteht der Ausdrück AL, dieser Begriff wird als effektive Arbeitskraft bezeichnet.[27] Insgesamt bedeutet das folgendes:

$$Y = F(K, AL) \tag{3.1}$$

$$F_K(K, AL) > 0, \qquad F_L(K, AL) > 0, \tag{3.2}$$
$$F_{KK}(K, AL) < 0, \qquad F_{LL}(K, AL) < 0, \tag{3.3}$$

$$\lim_{K \to 0} F_K(K, AL) = \infty, \qquad \lim_{L \to 0} F_L(K, AL) = \infty, \tag{3.4}$$
$$\lim_{K \to \infty} F_K(K, AL) = 0, \qquad \lim_{L \to \infty} F_L(K, AL) = 0, \tag{3.5}$$

Folglich besagen die Inada-Bedingungen, dass das Grenzprodukt eines jeden Inputfaktors gegen unendlich konvergiert, wenn der jeweilige Einsatz gegen null läuft (3.4). Somit ergibt sich, dass bei einer Produktionsfunktion der Input unverzichtbar für die Erstellung ist.
Strebt ein Faktoreinsatz gegen unendlich, so muss das Grenzprodukt des Faktors gegen null konvergieren (3.5). Entsprechend ist gewährleistet, dass bei kleinem Input die Produktionsfunktion steiler ist, jedoch bei großen Werten die Funktion flacher verläuft.

Um die effektive Pro-Kopf-Produktionsfunktion $f(k)$ zu erhalten und diese auch in Modellen verweden zu können, muss $F(K, AL)$ eine linear homogene Funktion sein und der effektiven Pro-Kopf-Kapitalstock $k = \frac{K}{AL}$ definiert sein. Mittels Umformungen (Glg. 3.6) ergibt sich die Pro-Kopf-Produktionsfunktion.[28]

$$\frac{F(K, AL)}{AL} = F(\frac{K}{AL}, 1) = F(k, 1) =: f(k) \tag{3.6}$$

In Modellen mit Nutzenfunktion wird angenommen, dass die Nutzenfunktion eine konkave Funktion mit abnehmender Rate des Grenznutzens ($u_c(c) > 0, u_{cc}(c) < 0$) ist.

[26] Ab hier wird davon ausgegangen, dass alle Variablen mit Blockbuchstaben von der Zeit t abhängig sind ($Y = F(K, AL) \equiv Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$). Bei Abweichungen wird dies erwähnt.
Bei einer eindimensionalen Funktion wird mit $'$ immer von der Ableitung nach dem einem Argument ausgegangen.
[27] Vgl. Prettner (2010)
[28] Vgl. Prettner (2010)

Nachdem die makroökonomischen Grundlagen festgelegt sind, werden die verschiedenen Schadstoffvariablen und Emissionenmöglichkeiten definiert.[29]

3.2 Modellierung des Emissionsausstoßes

Als Erstes wird der Ausstoß von Schadstoffen zum Zeitpunkt t definiert.

$$Z(t) = \Phi(Y(t)) \tag{3.7}$$

Wie bereits oben erwähnt sind Schadstoffe ein Abfallprodukt der Produktion. Daher ist es klar, dass $Z(t)$ der "Flow of Pollution" eine Funktion des Outputs $Y(t)$ ist. Im einfachsten Fall wird angenommen, das $Z(t) = \phi Y(t)$ mit $\phi > 0$ ist. Womit ϕ den Prozentsatz angibt, wieviel des Outputs zusätzlich noch an Schadstoffen in die Umwelt gelangt. Dies kann auch vom Kapital (K) oder Pro-Kopf-Kapital (mögliche Modellierung mittels EKC Kapitel 2.2) abhängig sein ($\phi(K)$). So würde es dann eine weitere Einschränkung der Funktion zur Folge haben. Die erste Ableitung müsste kleiner Null sein ($\phi'(K) < 0$). Das bedeutet, dass mit wachsendem Kapital weniger Schadstoffe freigesetzt werden. Da aber mit Sicherheit nicht das gesamte Kapital zur Reduktion des Schadstoffaustoßes verwendet wird, ist es realistischer das Kapital in zwei Teile zu gliedern. K_a ist für die Verringerung der Emissionen verantwortlich und K_Y für die Produktion, weiters gilt $K = K_Y + K_a$. AL ist die effektive Arbeitskraft. Somit folgt eine mögliche neue Definition der Produktionsfunktion und der Funktion für die jetzigen Schadstoffemissionen, welche nun wie folgt aussehen könnte

$$Y = F(K_Y, AL, K_a) \tag{3.8}$$

$$Z = \phi(K_a)Y \tag{3.9}$$

Alternativ versucht man den Flow of Emission in die Produktionsfunktion einfließen zu lassen. Ein Beispiel dafür wäre

$$Y = F(K, AL, BZ) \text{ mit } \frac{\partial Y}{\partial Z} > 0 \tag{3.10}$$

Wobei BZ der effektive Ausstoß von Schadstoffen ist. Der Ausdruck $\frac{\partial Y}{\partial Z}$ ist positiv, womit klar ist, dass ein Anstieg von Z einen Anstieg vom Output Y impliziert.
Es kann auch eine Variable z ($0 \leq z \leq 1$; Intensität der Schadstoffemissionen) in die Produktionsfunktion ($F(.,z) = F(.)z$) Einfluss nehmen, welche zum Beispiel Auswirkungen auf die Kapitalakkumulation ($\dot{K} = F(.,z) - c = F(.)z - c$) oder auf die Schadstoffemission hat. Modelliert man Wachstumsmodelle mit z so geht man von dem Fall aus, dass ein hoher Ausstoß von Schadstoffemissionen auch einen höhen Output generiet.

[29] Als Grundlage gelten ab hier für das restliche Kapitel die Arbeiten von Aghion und Howitt (1998) und Xepapadeas (2005).

3.3 Modellierung des Emissionsbestandes

Eine weitere Möglichkeit ist auch die Betrachtung der Konzentration der Schadstoffe in der gesamten Umwelt, da nicht alle Schadstoffemissionen in einer Zeitperiode (Z) auch wieder abgebaut werden. Die Gesamtmenge der Schadstoffe wird mit P (Pollutionstock, Emmisonsbestand) bezeichnet.

$$\dot{P} = Z - mP + h(P) \tag{3.11}$$

Die Gesamtheit der Schadstoffmenge ergibt sich durch den jetzigen Ausstoß (Z), den linearen Abbau mit $m > 0$ und eine nichtlineare Regeneration (manchmal auch Feedbackfunktion genannt; $h(P)$). Diese Variable kann natürlich auch einen Einfluss auf die Produktion haben.

$$Y = F(K, AL, P) \text{ mit } \frac{\partial Y}{\partial P} > 0 \tag{3.12}$$

3.4 Modellierung der Umweltqualität

Da der Emissionsausstoß nicht immer messbar ist oder aus mehreren Faktoren besteht, die gemeinsam einfacher zum Erfassen sind, gibt es die Möglichkeit eine Variable für die Umweltqualität zu verwenden. In der Literatur wird dafür E verwendet und leitet sich aus dem Englischen "Environment" ab. Diese Variable ist größer Null und hat nach oben eine Grenze ($0 \leq E \leq E^{max}$), welche mit der maximalen Tragfähigkeit des ökologischen Systems gleichzusetzen ist. In der englischsprachigen Literatur ist die maximale Tragfähigkeit besserbekannt unter dem Ausdruck "carrying capacity". Die Änderungsrate bei dieser Variable ergibt sich durch eine Subtraktion des derzeitigen Schadstoffausstoßes (Z) und der eigenständigen Regenerationsfunktion der Umwelt ($R(E)$), welche vom jetzigen Zustand der Umwelt abhängig ist.

$$\dot{E} = R(E) - Z \tag{3.13}$$

Bei Bedarf kann auch die Produktionsfunktion adaptiert und mit der Umweltqualität modelliert werden.

$$Y = F(K, AL, E) \text{ mit } \frac{\partial Y}{\partial E} > 0 \tag{3.14}$$

Man beachte, dass E positiv ist. Ein Anstieg von E ist eine Verbesserung der Umwelt und führt auch zu mehr Output, da die Produktivität der Arbeiter steigt.
Im Gegensatz dazu ist in der Gleichung (3.10) ein Anstieg von Z, welcher die Umweltqualität senkt, jedoch so zu verstehen, dass durch "schmutzige" Produktion mehr Output erzeugt wird (gilt auch für die Schadstoffgesamtmenge (Glg. 3.12)).
Formuliert man das Modell mit Intensität der Schadstoffemissionen z, sieht die Akkummulation der Umweltqualität wie folgt aus.

$$\dot{E} = R(E) - F(., z)z^{\gamma} \tag{3.15}$$

3.5 Die Nutzenfunktion und weitere Modellierungseffekte

Wichtig bei der Modellierung der Schadstoffemissionen in Hinblick auf endogene Wachstumsmodelle ist die Nutzenfunktion. So wie bei der Produktionsfunktion (Glg. 3.10, 3.12 und 3.14) ist entweder der jetztige Austoß (Z), die Schadstoffmenge (P) oder die Umweltqualität (E) eine Entscheidungsvariable in der Nutzenfunktion. Das führt zu folgender neuen Definiton der Nutzenfuktion

$$u(c, Z), u(c, P) \text{ und } u(c, E) \tag{3.16}$$

Wie bei der Produktionsfunktion ergeben sich für die Ableitung jene Folgerungen:
Da ein Anstieg bei Z und P einer Verschlechterung gleicht, sinkt der Nutzen für die Individuen bei gleichbleibenden Konsum. Da die Umweltqualität (E) positiv ist, bedeutet ein Anstieg eine Verbesserung der Lebensqualität, was bei gleichbleibendem Konsum zu einer Nutzenverbesserung führt. Außerdem sind alle Funktionen konkav, da der Effekt der einzelnen Variablen mit dem Bestand abnimmt, wie bei der Nutzenfunkion des Konsum. Beim Emissionsaustoß und -bestand in der Nutzenfunktion bedeutet dies, dass das jede weitere Einheit den Nutzen nicht so stark negativ beeinflusst, wie die vorige. [30]

$$\frac{\partial u(c,Z)}{\partial Z} < 0, \frac{\partial u(c,P)}{\partial P} < 0 \text{ und } \frac{\partial u(c,E)}{\partial E} > 0 \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial u(c,Z)}{\partial^2 Z} < 0, \frac{\partial u(c,P)}{\partial^2 P} < 0 \text{ und } \frac{\partial u(c,E)}{\partial^2 E} < 0 \tag{3.18}$$

Nicht nur die Nutzen- und Produktionsfunktion sind von der Umweltsituation abhängig, denn die Bevölkerung wird auch unter einer schlechten Umweltqualität leiden. Dies kann sich in der Produktivität der Arbeiter wieder spiegeln oder in der Fertilität einen Einfluss haben.
Um die Leistungsfähigkeit der Bevölkerung in Abhängigkeit mit der Umwelt in der Produktion abzubilden, muss dies in einer neuen Funktion (Variablen) abgebildet werden. $A_L(P)$ wäre das Potenzial der Arbeiter, dies ist in einem Modell ohne Emissionen gleich eins. Durch einen Anstieg von P und somit eine Verschlechterung der Umwelt würde die Wirkungsfähigkeit weniger werden. Das bedeutet folgendes

$$\frac{\partial A_L(P)}{\partial P} < 0 \text{ und } \lim_{P \to \infty} A_L(P) = 0. \tag{3.19}$$

Für die Fertilität ergibt sich ähnliches, ist die Wachstumsrate n ($= \frac{\dot{N}}{N}$) von der Umweltqualität E abgängig und somit eine Funktion von dieser $n(E)$, muss die erste Ableitung größer null sein (n'(E) > 0). Dies hat zur Folge, dass die Bevölkerung schneller wächst in dem Fall in dem die Umweltqualität sich verbessert. Weiteres gelten folgende Limiten für das Wachstums der Bevölkerung(n^* ... die maximale Wachstumsrate der Bevölkerung).

[30]Vgl. McConnell (1997)

$$\lim_{E \to 0} n(E) = n^*, \tag{3.20}$$

$$\lim_{E \to E^{min}} n(E) \to 0 \tag{3.21}$$

4 Schadstoffe in exogenen Wachstumsmodellen

Um die Auswirkungen von Schadstoffen in endogenen Wachstumsmodellen besser zu verstehen, werden in diesem Kapitel das klassische Solow-Modell (Kap. 4.1) um einen Emmisonsbestand erweitert und die Folgen auf das Wirtschaftswachstum näher erläutert. Weiters wird im Ramsey-Modell (Kap. 4.2) ein Emissionsbestand zum klassischen Modell hinzugefügt, um die Wirkung von Schadstoffen auf den Konsum zu beurteilen.

4.1 Solow-Modell

Das Solow-Modell ist ein neoklassisches Wachstumsmodell, in dem das Bevölkerungswachstum ($\frac{\dot{L}}{L}$) und die Änderungsrate des technischen Fortschritts ($\frac{\dot{A}}{A}$) (siehe Gleichung 4.4 und Gleichung 4.3) exogen vorgegeben werden. Die Ökonomie produziert mit der Funktion $F(K, AL)$. Als Inputgrößen werden das Kapital K, die Bevölkerung L und der technischer Fortschritt A verwendet. Die Kapitalakkumaltion ($\dot{K}$) besteht aus der Sparquote s, die angibt wieviel von der Produktion angespart wird, sowie aus der Abschreibung δ, die mit einer Inflation gleichgesetzt werden kann. Die Sparquote s entspricht einem konstanten Wert. Aufgrund der Fixierung der Sparquote konsumiert die Bevölkerung in jedem Lebensabschnitt gleich viel. Aufgrund dessen haben die Individuen keine Entscheidung über ihren Konsum, wodurch sich damit keine Optimierungsmöglichkeit des Konsum über die Zeit in diesem Modell ergibt.[31]

$$Y = F(K, AL) \tag{4.1}$$

$$\dot{K} = sY - \delta K \tag{4.2}$$

$$\frac{\dot{A}}{A} = g_A \tag{4.3}$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n \tag{4.4}$$

$$s, \delta, g_A, n \geq 0 \tag{4.5}$$

Mit Hilfe von Adaptionen ist es möglich das Wachstum der endogenen Variablen auszurechnen. Zu diesem Zweck definiert man $k = \frac{K}{AL}$ als den effektiven Pro-Kopf-Kapitalstock, wodurch sich mittels Umformung die effektive Pro-Kopf-Produktionsfunktion $f(k)$ $(= F(k, 1) = F(\frac{K}{AL}, 1) = \frac{F(K,AL)}{AL})$ ergibt. Um das Modell an die vorherigen Änderungen anzupassen, formt man die Änderungsrate des Kapitalstocks in eine effektive

[31] Vgl. Solow (1956) und Solow (1957)

Pro-Kopf-Größe um.[32]

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - g_A - n \text{ oder} \tag{4.6}$$

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n + g_A)k \tag{4.7}$$

Im Steady State ist das Wachstum von k unter den Inada-Bedingungen gleich Null ($\dot{k} = 0$), somit folgt

$$sf(k^*) = (\delta + n + g_A)k^* \tag{4.8}$$

k^* erfüllt diese Bedingung. k^* ist für die Berechnung des Steady States im Modell mit Emissionen von Bedeutung.
Die goldene Regel der Kapitalakkumulation sagt aus, dass für das Wachstumsgleichgewicht ein Pro-Kopf-Konsum exsistiert, welcher am höchsten ist. Damit muss für jede Sparquote s im langfristigen Gleichgewicht die Gleichung (4.8) gelten.[33] Weiters ist das Konsumniveau im Gleichgewicht definiert durch

$$c^* = (1 - s)f(k^*). \tag{4.9}$$

Setzt man für $sf(k^*)$ ein und definiert anschließend den gleichgewichtigen Konsum als Funktion der Sparquote, kann die nachstehende Funktion über s maximiert werden.

$$c^*(s) = f(k^*(s)) - (\delta + n + g_A)k^*(s) \tag{4.10}$$

Die Maximierung ergibt die Bedingung erster Ordnung

$$\left[f'(k^*(s)) - \delta - n - g_A\right] \frac{\mathrm{d}k^*}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{4.11}$$

wobei $dk^*/ds > 0$, dadurch muss $f'(k^*) = \delta + n + g_A$ gelten.[34]
Somit folgt aus Gleichung (4.6), (4.8), (4.10) und (4.11), dass Output, Konsum und Kapital mit der konstanten Rate $(n + g_A)$ wachsen.

Mit Emissionsbestand P

Erweitert man das Modell um die Variable P (Emissionsbestand) mit der Änderungsrate $\dot{P} = \phi Y - mP$ und den Eigenschaften aus Kapitel 3, sieht das Modell wie folgt

[32] Vgl. Prettner (2010), Herleitung siehe Appendix A.2.1
[33] Vgl. Solow (1956) und Solow (1957)
[34] Vgl. Solow (1956) und Solow (1957)

aus.[35]

$$Y = F(K, AL) \tag{4.12}$$
$$\dot{K} = sY - \delta K \tag{4.13}$$
$$\dot{P} = \phi Y - mP \tag{4.14}$$
$$\frac{\dot{A}}{A} = g_A \tag{4.15}$$
$$\frac{\dot{L}}{L} = n \tag{4.16}$$
$$s, \delta, g_A, n, \phi, m \geq 0 \tag{4.17}$$

Dabei gibt ϕ an, wieviel der Produktion (Y) nochmals in Form von Emissionen in die Umwelt emittiert wird. Bei m handelt es sich um die Regeneration der Umwelt.
Um das Modell zu analysieren, ist es vorteilhaft anstelle des Emissionsstocks (P), den effektiven Pro-Kopf-Emissionsstock ($p = \frac{P}{AL}$) zu verwenden. Dieser ist[36]

$$\frac{\dot{p}}{p} = \frac{\dot{P}}{P} - g_A - n \text{ oder} \tag{4.18}$$
$$\dot{p} = \phi f(k) - (m + n + g_A)p. \tag{4.19}$$

Die Gleichung (4.7) bleibt im Modell mit Schadstoffemissionen gleich, wodurch man auch die Lösung k^* zur weiteren Analyse verwenden kann. Im Steady State ist das Wachstum aller endogenen Variablen gleich Null, dadurch folgt

$$p^* = \frac{\phi f(k^*)}{(m + n + g_A)}. \tag{4.20}$$

Anhand der Gleichung (4.18) ist zu sehen, dass der Emissionsstock mit Rate $(n + g_A)$ steigt (Wachstum der Produktionsfunktion). Somit kann der Schadstoffausstoß nur gestoppt werden, wenn das Bevölkerungswachstum und das Wachstum des technischen Fortschritts gleich Null sind ($n = g_A = 0$). Das bedeutet jedoch auch kein Wachstum von Ouput, Konsum und Kapital, siehe dafür Gleichung (4.11), da diese Werte mit Rate $(n+g_A)$ wachsen. So eine Wachstumrate im Modells ist jedoch nicht erstrebenswert. Weiters kann kein Emissionsbestand abgebaut werden, da grundsätzlich $n, g_A \geq 0$ gilt und für eine Reduktion $n, g_A < 0$ notwendig wäre. Diese Folgerungen sind zudem auf die Eigenschaft zurückzuführen, dass es keine Kosten für die Emission von Schadstoffen im Solow-Modell gibt. Weder in der Produktionsfunktion noch wird eine Nutzenfunktion verwendet in der eine Umweltvariable verwendet wird.[37]
Eine Möglichkeit das Solow-Modell zu verbessern, stellt die Betrachtung der exogenen Variablen des Bevölkerungswachstums und des technischen Fortschritts, sowie der fixen Variable ϕ als Funktion dar.

[35]Vgl. Xepapadeas (2005) und Grossman und Helpman (1991)
[36]Herleitung siehe Appendix A.2.2
[37]Vgl. Xepapadeas (2005) bis zum Ende diese Unterkapitels 4.1

n und g_A werden als Funktion von P definiert ($n = n(P)$, $g_A = g(P)$). Die Ableitung beider Funktionen ist kleiner Null ($n'(P) < 0$, $g'(P) < 0$). Folglich würde ein Anstieg der Emissionen einen Rückgang des Bevölkerungswachstums und des techischen Fortschritts bewirken.
Viel effektiver ist die Änderung der Variable ϕ in eine Funktion vom Kapital ($\phi = \phi(k)$) mit den Eigenschaften $\phi'(k) < 0$, $\lim_{k\to\infty} \phi(k) \to 0$ und $\lim_{k\to\infty} \phi(k)f(k) \to 0$. Somit würde es eine Tendenz zur sauberen Industrie geben und der Emissionsbestand im Steady State würde geringer sein.
Um das Modell noch realistischer zu modellieren, könnte das Kapital k und die Sparquote s in zwei Teile getrennt werden. Diese wären k_Y, $k_a(k = k_Y + k_a)$ und s_Y, s_a ($s = s_Y + s_a$). k_Y und s_Y werden in der Produktion verwendet mit $\dot{k_Y} = s_Y f(k_Y) - (\delta + n + g_a)k_Y$. k_a und s_a werden verwendet, um eine "grüne" Technologie zu entwickeln. Dies geschieht mittels $\dot{k_a} = s_a f(k_Y) - (\delta + n + g_A)k_a$ und hat Auswirkungen auf ϕ mit $\phi = \phi(k_a)$, $\lim_{k_a\to\infty} \phi(k_a) \to 0$ und $\lim_{k_a\to\infty} \phi(k_a)f(k_Y) \to 0$. Damit ergibt sich für den Emissoinsausstoß $\dot{p} = \phi(k_a)f(k_Y) - (m + n + g_A)$ als Formel. Mit steigendem k_a konvergiert der Emissionsausstoß gegen $\dot{p} = -(m + n + g_A)$. Daher muss es einen "turning point" geben, ab diesem $\phi(k_a)f(k_Y) < (m + n + g_A)$ gilt. Da neu produzierte Emissionen kleiner als die natürliche Regeneration sind, folgt im Solow-Modell einen Rückgang des Emissionsbestands mit gleichzeitigem Wirtschaftswachstum.

4.2 Ramsey-Modell

Bei den Adaptionen im Solow-Modell (Kap. 4.1) handelt es sich um eine Endogenisierung der exogenen Variablen. Deshalb ist es sinnvoller sich den Aufbau und die Auswirkungen in einem Modell mit mehr endogenen Variablen anzusehen. Aus diesem Grund betrachtet dieses Unterkapitel das Ramsey-Modell[38] ohne Bevölkerungswachstum ($\frac{\dot{L}}{L} = 0$). Das Modell enthält den Konsum der Individuen, welcher frei wählbar ist. Somit sind die Sparquote s und der Konsum c laut Definition endogen.
Im Ramsey-Modell wird der Nutzen ($u(c)$), eine konkave Funktion abhängig vom Konsum der einzelnen Individuen, über einen unendlichen Planungshorizont maximiert. Als Einschränkung für die Bevölkerung ergibt sich ihr Pro-Kopf-Kapital (k). Es existiert weiters eine Abschreibung des Kapitals in der Höhe von δ, diese Abwertung des Kapitals muss mit in der Änderungsrate des Kapital ($\dot{k}$) beachtet werden. Damit ergibt sich folgende Definition.[39]

$$\max_c \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c) dt \tag{4.21}$$

$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k \tag{4.22}$$

$$\tag{4.23}$$

[38]Vgl. Ramsey (1928), Cass (1965) und Koopmans (1965)
[39]Vgl. Prettner (2010)

Die Lösung[40] für den Konsum ist

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta}(f(k)' - \rho - \delta). \tag{4.24}$$

Diese Gleichung wird in der Literatur Keynes-Ramsey-Regel genannt. Aus dieser Regel geht hervor, dass das Wachstums des Konsum positiv ist solange $f(k)' > \rho + \delta$ gilt. Die Ableitung der Produktionsfunktion (das Grenzprodukt des Kapitals) kann allgemein mit dem wirtschaftlichen Zinssatz gleichgesetzt werden ($f'(k) = r$). Der Zinssatz r kann als Entschädigung interpretiert werden, die ein Individuum erhält, falls es seinen Gegenwartskonsum um eine Einheit einschränkt um diesen für eine Einheit in der Zukunft zu erhöhen. Der Ausdruck $\rho+\delta$ kann als Wert interpretiert werden, bei welchem Individuen gerade noch indifferent zwischen dem Gegenwarts- und Zukunftskonsum sind. Sofern $r > \rho + \delta$ gilt, ist es sinnvoll die intertemporale Konsumsubstitution einzugehen.[41]

Mit Emissionsbestand P

Geht man von einem Emissionsbestand aus und zudem von einer Nutzenfunktion aus, die von P abhängig ist und die Eigenschaften von Gleichung (3.17) hat, definieren die angeführten Gleichungen das neue Ramsey-Modell.[42] Dabei legt ϕ den Anteil der Produktion (Y) fest, welche nochmals in Form von Emissionen in die Umwelt abgeben wird. Bei m handelt es sich um die Regeneration der Umwelt.

$$\max_c \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c,P) dt \tag{4.25}$$

$$\dot{k} = f(k) - c - \delta k \tag{4.26}$$

$$\dot{P} = \phi f(k) - mP \tag{4.27}$$

Die Lösung[43] für das Wachstum des Konsums hat die Form

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta}\left[f(k)'\left(1 + \frac{\mu\phi}{u_c(c,P)}\right) - \rho - \delta + \frac{u_{cP}(c,P)}{u_c(c,P)}\dot{P}\right]. \tag{4.28}$$

Um die beiden Modelle zu vergleichen, ist der Steady State ($\dot{P} = \dot{c} = \dot{k} = 0$) wichtig. In der ersten Spalte der Gleichungen (4.29) - (4.29) sind die Ergebnisse für das Modell ohne Emissionsbestand, in der zweiten Spalte für das Modell mit Emissionsbestand angeführt. Dabei repräsentiert k^* den Kapital- und P^* den Emissionsbestand zu dem

[40] Herleitung siehe Appendix A.3.1 und vgl. Prettner (2010)
[41] Vgl. Ramsey (1928), Cass (1965) und Koopmans (1965)
[42] Vgl. Xepapadeas (2005)
[43] Herleitung siehe Appendix A.3.2

die Gleichungen erfüllt sind.

$$f(k^*) = c^* + \delta k^* \qquad\qquad f(k^*) = c + \delta k^* \tag{4.29}$$

$$f'(k^*) = \rho + \delta \qquad f'(k^*)\left(1 + \frac{\mu\phi}{u_c(c,P)}\right) = \rho + \delta \tag{4.30}$$

$$f(k^*) = \frac{mP^*}{\phi} \tag{4.31}$$

Im Steady State ist ersichtlich, dass durch den negativen Schattenpreis des Schadstoffbestandes μ, die Wachstumsrate geringer ist. Dies folgt aufgrund des Terms

$$\left(1 + \frac{\mu\phi}{u_c(c,P)}\right), \tag{4.32}$$

der die linke Seite der Gleichung (4.30) verkleinert. Der Wachstumspfad wird auch durch das negative μ gebremst. Positives Wachstum ist nur möglich , wenn

$$f'(k^*)\left(1 + \frac{\mu\phi}{u_c(c,P)}\right) > \rho + \delta \tag{4.33}$$

gilt. Ein Vergleich mit der Gleichung aus dem Modell ohne Umweltfaktoren ($f(k)' > \rho + \delta$) zeigt, dass im Modell mit Umweltvariablen diese Ungleichung zeitlich früher erfüllt ist. Weiters kommt es auch noch auf den Term $u_c(c,P)$ an. Da der Grenznutzen einer zusätzlichen Konsumeinheit im Pollutionsstock sinkt oder gleich bleiben sollte, ist die Annahme $u_c(c,P) \leq 0$ sinnvoll. Der Term $u_c(c,P)$ wird im AK-Modell (Kapitel 5.1) noch näher erläutert. Somit folgt, dass das Wachstum des Konsums im Ramsey-Modell mit Emissionsbestand gedroselt wird, dadurch kleiner als im allgemeinen Modell ist und auch vom technischen Fortschritt abhängig ist ($\Rightarrow f'(k)$ ist von A beeinflusst).

4.3 Resümee zu exogenen Wachstumsmodellen

In einfachen exogenen Modellen ist eine Modellierung mit Pollutionsstock möglich. Die Problematik in den beiden verwendeten Modellen ist jedoch dieselbe wie in den Modellen ohne Emissionen.

Im Solow-Modell hängt die Wachstumsrate des Emissionsbestands direkt von g_A (Wachstum des techischen Fortschritts) und n (Bevölkerungswachstum) ab. Somit wäre das Wachstum des Emissionsstocks exponentiell, wodurch die Verschlechterung der Umwelt nur durch einen Stop des Wachstums ($g_A = n = 0$) ermöglicht wird.

Im Ramsey-Modell können schon bessere Aussagen über das Verhalten der Umwelt getätigt werden. Bei diesem Modell handelt es sich um ein exogenes Wachstumsmodell und somit treten im Modell mit Pollutionsstock die gleichen Probleme auf, wie in dem Modell ohne Emissionen. Umweltschäden weisen im Ramsey-Modell eine physische Begrenzung für die Produktion auf, da sie die Ergiebigkeit der endogenen Faktoren herabsetzen. Das Gleichgewicht im Ramsey-Modell mit Umwelteinfluss erreicht nicht den

Wert des Modells ohne Umwelteinfluss, womit Niveaueffekte auftreten. Will der soziale Planer die Umweltqualität bei einem konstanten Wert halten oder womöglich verbessern, ist dies mit Kosten verbunden. Diese Kosten haben eine Reduktion des Konsum oder der Investitionen zur Folge. Damit erklärt sich auch das niedrigere Wachstumsgleichgewicht bei Berücksichtigung der Umweltsituation, welches deutlich niedriger ist als im vergleichbaren Fall ohne Berücksichtigung der Umwelt.

In beiden Modellen (Solow, Kapitel 4.1 und Ramsey, Kapitel 4.2) neigt die Produktion mit Einbeziehung der Umwelt zu einer niedrigeren Güterfertigstellung. Die Kapitalakkumulation ist geringer und der Konsum erreicht nicht das Niveau der Modelle ohne Emissionen. Jedoch kommt es in beiden Modellen nur unter bestimmten Voraussetzungen zu einem Abbau von Schadstoffen. Insbesondere ist der Rückweg zu einer sauberen Umwelt nur durch geringeren Konsum und weniger Produktion möglich. Damit setzt Neoklassische Wachstumstheorie sehr stark auf eine Backstop-Strategie die zu einem Zeitpunkt T verfügbar ist und eine sehr starke Auswirkung auf die Umwelt hat. Des Weiteren haben das Solow- und Ramsey-Modell die Eigenschaft, dass der Kapitalstock vollkommen substituiert werden kann, wodurch eine laufende Evaluierung der notwenigen Ressourcen durchgeführt werden kann und sich somit keine Wachstumsgrenzen ergeben.[44] In Folge dessen wird auch bei den Modellen von Solow und Ramsey von einem Wachstumsoptimismus gesprochen. Die Backstop-Strategie und der Wachstumsoptimismus lassen eine genaue Betrachtung nicht zu, da es in der allgemeinen Definition starke Grenzen in exogenen Wirtschaftwachstumsmodellen gibt. Aus diesem Grund werden im nächsten Kapitel 5, endogene Wirtschaftwachstumsmodelle zur Erweiterung um Umweltvariablen herangezogen.

[44] Vgl. Fürnkranz (2011)

5 Schadstoffe in endogenen Wachstumsmodellen

Da exogene Wachstumsmodelle keine genaue Betrachtung der Umwelt im Zusammenhang mit der Technologie (A) zulassen, beschäftigt sich das nächste Kapitel explizit mit den Auswirkungen von Schadstoffen in endogenen Wachstumsmodellen und baut auf dem Kapitel 3 auf. Es werden jeweils die AK-, Schumpeter- und Lucas-Basismodelle betrachtet und danach mittels eines Emissionsbestands (P) oder einer Umweltqualität (E) erweitert, um die Auswirkungen auf die Wirtschaft zu erläutern. Zudem wird immer von einem sozialen Planer ausgegangen. Dieser wohlwollende soziale Planer teilt die Ressourcen der Ökonomie nach Belieben und erzielt in der idealen Ökonomie ein kompetitives Marktgleichgewicht, welches pareto-effizient ist. Dieses Gleichgewicht können die Individuen nicht erreichen, da die einzelnen Individuen in ihren Entscheidungen nicht die Effekte auf die Umwelt berücksichtigen.

5.1 AK-Modell

Zuerst wird man das einfache AK-Modell[45] ohne Bevölkerungswachstum ($\frac{\dot{L}}{L} = 0$) und mit einem technischen Fortschritt über die Zeit betrachtet. Wie bei AK-Modellen üblich, ist die Produktionsfunktion gleich $Y = AK (\Rightarrow \frac{Y}{L} = y = \frac{AK}{L} = Ak := f(k)$; mit $A > 0$). Dieses Modell ist dem Ramsey-Modell sehr ähnlich, hat aber den Vorteil, dass

- es eine einfache Produktionsfunktion besitzt und dass
- der technische Fortschritt endogen ist. Das bedeutet, dass der technische Fortschritt aus dem Modell heraus erklärt wird.

Die Definition ist wie folgt.

$$\max_c \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c, P) dt \tag{5.1}$$

$$\dot{k} = Ak - c - \delta k \tag{5.2}$$

Aus der Lösung für das Konsumwachstum (siehe dafür Gleichung (5.8)) ist nun zu erkennen, dass im Steady State ($\dot{c} = \dot{k} = 0$) die Ungleichung $A = \rho + \delta$ und Gleichung $f(k) = c + \delta k$ gelten müssen. Aus diesen beiden Formeln folgt, dass der technischen Fortschritt größer Null sein muss. Hier können Parallelen zum Ramsey-Modell (Kapitel 4.2, $f(k)' = \rho + \delta$) gezogen werden, bei dem jedoch die Grenzproduktivität des Kapitals

[45] Vgl. Rebelo (1991)

statt dem technischem Fortschritt in der Ungleichung von Bedeutung ist. Nun kann der Parameter für den technischen Fortschritt (A) auch als Funktion endogener Variablen definiert werden, wodurch der Unterschied zum Ramsey-Modell deutlich wird.

Mit Emissionsbestand P

Fügt man nun den Pollutionstock hinzu,[46] welcher sich aus Formel (3.11) ergibt und sich folgendermaßen definieren lässt.

$$\dot{P} = \phi Ak - mP \tag{5.3}$$

Dabei gibt ϕ den Anteil der Produktion (Y) an, der nochmals in Form von Emissionen ausgestoßen wird. Bei m handelt es sich um die Regenerationsquote der Umwelt. Ergibt sich für den sozialen Planer jenes Maximierungsproblem zu lösen.

$$\underset{c}{max} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c,P)dt \tag{5.4}$$
$$\dot{k} = Ak - c - \delta k \tag{5.5}$$
$$\dot{P} = \phi Ak - mP \tag{5.6}$$

Wendet man das Pontryagin'sche Maximumprinzip auf dieses mathematische Problem an, kommt man auf die nachstehende Lösung[47] für das Wachstum des Konsums.

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta}\left[A\left(1 + \frac{\mu\phi}{u_c(c,P)}\right) - \rho - \delta + \frac{u_{cP}(c,P)}{u_c(c,P)}\dot{P}\right] \tag{5.7}$$

Zum Vergleich ist nun das Ergebnis[48] für das AK-Modell ohne Emissionen angeführt.

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta}(A - \rho - \delta) \tag{5.8}$$

Somit ist zu erkennen, dass die Wachstumsrate des Konsums mit Emissionsbestand durch Adaptionen auf die Wachstumsrate des Konsums ohne Emissionsbestand zurückzuführen ist. Nimmt man nämlich die Pollution (P) aus der Gleichung (5.7) mittels $\mu = 0$ (Schattenpreise von P) und $u_{cP}(c,P) = 0$ (da die Nutzenfunktion keine Abhängigkeit von P hat) heraus, erhält man die Wachstumsrate des allgemeinen Modells.
Betrachtet man die Formel (5.7) genauer, so ist zuerkennen, dass die Formel aus zwei wichtigen Teilen besteht:

1. $u_{cP}(c,P)$ - dieser Wert kann größer, kleiner oder gleich Null sein, dadurch kann die Formel unterschiedlich stark beinflusst werden.

2. μ - der Schattenpreis der "Umweltverschmutzung", welcher in dem Fall negativ sein muss.

[46]Vgl. Xepapadeas (2005)
[47]Herleitung siehe Appendix A.4.4
[48]Herleitung siehe Appendix A.4.3

Ist die Nutzenfunktion zwischen den Variablen P und c separierbar ($u_{cP}(c, P) = 0$) oder es gilt $u_{cP}(c, P) < 0$. Dann existiert ein endlicher Steady State. Dieser hat auch eine Wachstumsrate von Null und dadurch gibt es keine zusätzliche Umweltverschmutzung. Dies ergibt sich aus der negativen Externalität der Schadstoffemission, des positiven learning-by-doing-Effektes und des negativen Schattenpreises ($\mu < 0$) der Umweltemission.[49]
Jedoch kann man Formel (5.7) und (5.8) auch in Hinsicht auf den Pfad des Konsums ansehen. Nimmt man in Formel (5.7) an, dass $u_{cP}(c, P) = 0$ ist, so folgt, dass der Pfad des Konsums im Model mit Pollution kleiner sein muss als im Modell ohne Pollution. Dies ist im Modell mit Schadstoffen aus dem Term $1 + \frac{\mu\phi}{u_c(c,P)}$ zu folgern, da $\mu < 0$ gilt und somit die positive Wirkung des technischen Fortschritt (A) verringert und damit das Wachstum verkleinert.
Weiters kann man Einschränkungen für das Kapital in der Form von

$$\dot{k} = Ak_Y - c \tag{5.9}$$

$$\dot{P} = \phi A k_Y - \psi k_a - mP \tag{5.10}$$

$$k = k_a + k_Y \tag{5.11}$$

definieren. In dieser Adaption ist es möglich ein optimales Wachstum zu generieren und damit nachhaltig zu agieren. Dies gilt falls folgende Gleichung für das veränderte Modell eingehalten wird.[50]

$$\frac{\psi}{\phi} = \frac{A\rho}{A - \rho} \tag{5.12}$$

In dem Modell mit geteiltem Kapital (5.9) folgt der Verlauf der Emission in Phasendiagrammen ähnlich der Kuznets Kurve.[51] Bei wenig Kapital wird sehr viel Geld in die Produktion (k_Y) gesteckt, um schnell Geld zu akkumulieren, welches zu einem hohen Schadstoffausstoß führt. Zu einem späteren Zeitpunkt wird dann jedoch das Kapital Richtung k_a transferiert. Dadurch kommt es wieder zu einen Abbau des Pollutionstocks.[52]

Mit Umweltqualität E

Um eine andere Sichtweise auf die Problematik zu bekommen, kann das AK-Modell anstatt mit Schadstoffemissionen (P) mit der Umweltqualität (E) genauer betrachtet werden.[53] Um einen gewissen Unterschied in der Berechnung zu erhalten, wird in diesem betrachteten Modell die Umweltqualität als Differenz $E - E^{max}$ (Definition von E^{max} siehe Kapitel 3) modelliert. Dies führt zu einer negativen Variable mit den Eigenschaften $E^{min} \leq E \leq 0$. E^{min} ist mit dem totalen Versagen des Ökosystems

[49] Vgl. Michel und Rotillon (1995) - Proposition 1 und Proposition 3
[50] Für die Herleitung siehe Appendix A.4.5.
[51] Siehe dafür Michel und Rotillon (1995)
[52] Vgl. Michel und Rotillon (1995)
[53] Vgl. Mohtadi (1996) und Xepapadeas (2005)

gleichzusetzen. Das Optimierungsproblem für den sozialen Planer ergibt sich wie folgt. Zur Betrachtung der Unterschiede zum Modell mit Pollution (P) wurde die Abschreibung (δ) weggelassen und die Intenstität der Emissionen (z) zum Maximierungsproblem hinzugefügt. Dabei gilt für $z \in (0,1)$. Ist z nahe bei 1 so wird durch die massive Emission von Schadstoffen die Produktion zur Gänze ausgenutzt. In der Formel für die Änderungsrate der Umweltqualität ($\dot{E}$) repräsentiert θ die Regenerationsrate der Umwelt.

$$\max_{c} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c,E)dt \tag{5.13}$$

$$\dot{K} = AKz - c \tag{5.14}$$

$$\dot{E} = -AKz^{\gamma+1} + \theta E \tag{5.15}$$

Als Lösung für die Wachstumsrate des Konsums ergibt sich folgende Gleichung heraus.[54]

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta}\left[Az\left(1 - \frac{\nu z^\gamma}{u_c(c,E)}\right) - \rho + \frac{u_{cE}(c,E)}{u_c(c,E)}\dot{E}\right] \tag{5.16}$$

Als Ergebnis für das Maximierungsproblem ohne Umweltverschmutzung ergibt sich die Lösung.[55]

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta}(A - \rho) \tag{5.17}$$

Da die Nutzenfunktion nicht näher beschrieben wird und beliebig gewählt werden kann, wird zur einfacheren Berechnung eine zwischen c und E entkoppelte Nutzenfunktion angenommen ($u_{cE}(c,E) = 0$). Daraus ist ersichtlich, dass zwei Variablen für das Wachstum verantwortlich sind.Dabei handelt es sich um die Intensität der Schadstoffe ($0 \leq z \leq 1$) sowie der Schattenpreis der Umweltqualität (ν), wobei beide das Wachstum des Konsums verkleinern. Die Intensität der Schadstoffe z verkleinert durch dessen Definition multiplikativ den technischen Fortschritt. Eine Verkleinerung gilt auch für den Klammerausdruck mit dem Schattenpreis ν.
Im Steady State ($\dot{P} = \dot{c} = \dot{E} = 0$) muss folgendes Gleichungssystem gelöst werden:

$$c = AKz \tag{5.18}$$

$$E = AKz\frac{z^\gamma}{\theta} \tag{5.19}$$

$$\rho = Az\left(1 - \frac{\nu z^\gamma}{u_c(c,E)}\right) \tag{5.20}$$

Durch das öftere Vorkommen von z und der Multiplikator-Eigenschaft von ν ist zu erkennen, dass die Intensität der Schadstoffe z und der Schattenpreis der Umweltqualität ν eine wichtige Rolle für die Lage des Steady States einnehmen. Jedoch hat der

[54]Herleitung siehe Appendix A.4.2
[55]Herleitung siehe Appendix A.4.1

technische Fortschritt noch einen größeren Einfluss, da der technische Fortschritt A im Gegensatz zu den konstanten z und ν, endogen ist und eine Funktion in Abhänigkeit von Modellvariablen sein kann. Diese endogenen Variablen werden entweder Kapital oder Umwelt oder beide Variablen sein. Diese tiefergehnde Analyse überschreitet jedoch den Umfang dieser Diplomarbeit.
Weiters zeigten Gradus und Smulder (1992), Smulder und Gradus (1996), Smulder (1999), Rubio und Aznar (2000) und Reis (2001) in ihren Arbeiten, dass in AK-Modellen und in Erweiterungen des Modells kein Wachstum nachhaltig ist. Das bedeutet, dass kein positives Wachstum ohne Vergrößerung der Umweltverschmutzung existiert.

Vergleich Emissionsbestand P und Umweltqualität E

Setzt man den Vergleich zwischen dem Modell mit Emissionsbestand und dem Modell mit Umweltqualität, so vergleicht man die folgenden Wachstumsraten des Konsum miteinandern.

1. $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta}\left[A\left(1 + \frac{\mu\phi}{u_c(c,P)}\right) - \rho - \delta + \frac{u_{cP}(c,P)}{u_c(c,P)}\dot{P}\right]$
2. $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta}\left[Az\left(1 - \frac{\nu z^\gamma}{u_c(c,E)}\right) - \rho + \frac{u_{cE}(c,E)}{u_c(c,E)}\dot{E}\right]$,

Während im Modell mit Umweltqualität der Ausstoß des Schadstoffes mit z^γ gemessen wird, erfolgt die Messung im Modell mit Emissionsbestand hingegen mit der Variable ϕ. Beide Variablen haben denselben Effekt auf den Schattenpreises, da es zu einer Verstärkung des negativen Einflusses kommt. Jedoch wird mit z auch der Produktion geschadet $(AKz - c)$, da es diese hemmt. Diese Wirkung ist auch in der Wachstumsrate des Konsums ersichtlich, weil der Term Az vorhanden ist und somit es zu einer Minimierung des Konsums führt $(0 \leq z \leq 1)$.
Die Terme $u_c(c,E)$,$u_c(c,P)$ haben positives Vorzeichen (allgemeine Beschreibung zur Nutzenfunktion in Kapitel 3). Die Ableitung ist sehr stark von der Definition der Nutzenfunktion abhängig. Aus diesem Grund wird hier nicht weiter auf diesen Teil der Gleichung eingegangen. Bei der Ableitung der Nutzenfunktion nach c und E bzw. c und P tritt die Besonderheit auf, dass für das Vorzeichen keine Aussage getroffen werden kann. Damit ist eine nähere Betrachtung des Vorzeichens nicht von Vorteil ohne vorher genaue Annahmen zutreffen
Ist man bereit einige Einschränkungen einzugehen, kann man die beiden Wachstumsraten dennoch genauer betrachten. Im Modell mit Schadstoffemissionen setzt man $\phi = 1$, $\delta = 0$ und $u_{cP}(c,P) = 0$ (Nutzenfunktion besteht aus einem Konsum- und Emissionsbestandsteil, welche additiv zusammenhängen). Im Modell mit Umweltqualität wird $z = 1$ und $u_{cE}(c,E) = 0$ (Nutzenfunktion besteht aus einem Konsum- und Umweltqualitätsteil, welche additiv zusammenhängen) gesetzt.
Diese Nutzenfunktion $(u_{cE}(c,E) = 0)$ führt zu zwei Gleichungen für den Konsum,

- $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta}\left[A\left(1 - \frac{\nu}{u_c(c,E)}\right) - \rho\right]$,

- $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta}\left[A\left(1 + \frac{\mu}{u_c(c,P)}\right) - \rho\right]$

Durch diese Annahmen ist ersichtlich, dass das Wachstum des Konsums stark vom Schattenpreis ($\nu > 0$ bzw. $\mu < 0$) der einzelnen Umweltvariable (E bzw. P) und von dem Grenznutzen abhängig ist. In beiden Fällen ist die Wirkung dieselbe, weil in beiden Fällen die Umweltverschmutzung das Wachstum des Konsums verringert.
Allgemein kann bei AK-Modellen zusammengefasst werden, dass nur unter strengen Annahmen des Modells der Bestand von Schadstoffen abgebaut werden kann, um dabei noch ein positives Wachstum zu generieren.

5.2 Schumpeter-Modell

Um den Ökonomen Schumpeter[56] entstand der Begriff der horizontalen Innovation. In diesem Modell[57] und Erweiterungen des Schumpeter-Modells[58] steht die Produktivitätsverbesserung jedes einzelnen Gutes im Vordergrund. Dies geschieht in der Produktion durch eine fixe, stetige Anzahl i ($\in [0,1]$) von Gütern ($x(i)$), welche einen Produktivitätsparameter $B(i)$ besitzen. Um diese Güter zu produzieren sind ungelernte Arbeitskräfte L_Y notwendig. Die Produktionsfunktion ist[59]

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^1 B(i)x(i)^{\alpha} di. \tag{5.21}$$

Mit der Produktionsfunktion für jedes Gut $x(i) = \frac{K(i)}{B(i)}$ ($K(i) \ldots$ Kapital, welches zur Produktion von Gut i verwendet wird) kommt man auf die leichter verwendbare Produktionsfunktion[60]

$$Y = F(K, BL_Y) = K^{\alpha}(BL_Y)^{1-\alpha} \tag{5.22}$$

Von besonderer Wichtigkeit ist die Spezifikation der Wachstumsrate von B. Die Wahrscheinlichkeit für neue Entdeckungen ist poissonverteilt mit Rate ξ. In der Forschung arbeiten L_R Forscher (die gesamte Bevölkerung ist somit $L_Y + L_R$) und σ ist der Sprung in der Innovation. Somit ergibt sich folgende Wachstumsrate für den Produktivitätsparameter.[61]

$$\dot{B} = \xi\sigma BL_R \tag{5.23}$$

[56]* 8. Februar 1883, † 8. Januar 1950; österreichischer Ökonom, welcher den Begriff der *Schöpferischen Zerstörung* mitbegründete.
[57]Vgl. Schumpeter (1911)
[58]Vgl. Schumpeter (1942)
[59]Vgl. Schumpeter (1912) und Schumpeter (1942)
[60]Herleitung siehe Appendix A.5.1
[61]Vgl. Schumpeter (1912) und Schumpeter (1942)

Aus den Gleichungen (5.22) und (5.23) ergibt sich für einen sozialen Planer das Maximierungsproblem

$$\max_{c} \int_{0}^{\infty} e^{-\rho t} u(c) dt \tag{5.24}$$

$$\dot{K} = Y - c = K^{\alpha}(BL_Y)^{1-\alpha} - c \tag{5.25}$$

$$\dot{B} = \xi \sigma B L_R, \tag{5.26}$$

mit der Lösung des Wachstum des Konsums[62]

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta}(\alpha \frac{Y}{K} - \rho). \tag{5.27}$$

Mit Umweltqualität E

Ergänzt man das Schumpeter-Modell noch um die Umweltqualität (E) erhält der Planer folgendes Maximierungsproblem.[63]

$$\max_{c} \int_{0}^{\infty} e^{-\rho t} u(c, E) dt \tag{5.28}$$

$$\dot{K} = K^{\alpha}(BL_Y)^{1-\alpha} z - c \tag{5.29}$$

$$\dot{B} = \xi \sigma B L_R \tag{5.30}$$

$$\dot{E} = -K^{\alpha}(BL_Y)^{1-\alpha} z^{\gamma+1} + \theta E \tag{5.31}$$

In diesem Modell wird die Umweltqualität als Differenz $E - E^{max}$ (Definition von E^{max} siehe Kapitel 3) modelliert. Dies führt zu einer negativen Variable mit den Eigenschaften $E^{min} \leq E \leq 0$. E^{min} ist mit dem totalen Versagen des Ökosystems gleichzusetzen. Weiters ist in der Variable E die Intenstität der Emissionen (z) hinzugefügt. Dabei gilt für $z \in (0, 1)$. Ist z nahe bei 1 so wird durch die massive Emission von Schadstoffen die Produktion zur Gänze ausgenutzt. Bei θ handelt es sich um die umwelteigene Regeneration. Um diesen Punkt mit Kapitel 3 zu vergleichen, ist die Regenerationsfunktion, welche vom aktuellem Zustand der Umwelt abhängig ist, einfach mit $R(E) = +\theta E$ definiert.[64]
Löst man dieses Problem kommt man auf nachstehende Lösung.[65]

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta}\left[\alpha \frac{Y}{K}\left(1 - \frac{\nu z^{\gamma}}{u_c(c, P)}\right) - \rho + \frac{u_{cE}(c, E)}{u_c(c, P)}\dot{E}\right] \tag{5.32}$$

Diese Variante von endogenen Wachstumsmodellen ist in soweit besser, als schon im Basismodell nachhaltiges Wachstum möglich ist. Unter der Vorraussetztung, dass $\sigma > \rho$ gilt, wachsen Kapital, Output und Produktivität (B). Im Gegenzug verringert sich die

[62] Herleitung siehe Appendix A.5.2
[63] Vgl. Aghion und Howitt (1998) und Xepapadeas (2005)
[64] Vgl. Aghion und Howitt (1998)
[65] Herleitung siehe Appendix A.5.3

Umweltverschmutzung und es kommt zu einer Verbesserung der Umweltqualität. Dies ist möglich, da in der Schumpeter-Lösung (5.32) zum Unterschied zu dem AK-Modell (Glg. 5.16) der Term Az durch den Term $\frac{Y}{K}$ ersetzt wird. Da $\frac{Y}{K} = (\frac{BL_Y}{K})^{1-\alpha}$ gilt, ist ersichtlich, dass B schneller steigen muss als K und den Verkleinerungsfaktor von z ausgleichen muss, um den oben genannten positiven Effekt auf die Umwelt zu erzielen. Jedoch ist auch ersichtlich, dass der Konsum bei gleichen Anfangswerten im Modell mit Umweltqualität (5.32) geringer ist als in jenem ohne Umweltqualität (5.27), da der Term

$$1 - \frac{\nu z^{\gamma}}{u_c(c, P)} \tag{5.33}$$

einen verkleinerten, multiplikativen Einfluss hat.

5.3 Lucas-Modell

Das Modell von Lucas[66], in der Literatur oft als Lucas-Uzawa[67] bezeichnet, legt den Fokus vom technischen Fortschritt hin zur Bildung und somit zum Akkumulieren von Humankapital. Der große Unterschied im Vergleich zum Schumpeter-Modell (Kapitel 5.2) liegt darin, dass im Schumpeter-Modell die Produktivitätsverbesserung (B, siehe Glg. 5.23) im Vordergrund steht. Das AK-Modell (Kapitel 5.1) erklärt endogenes Wachstum, indem Kapital als Summe von Sach- und Humankapial definiert wird (Kapital (K) = Sachkapital + Humankapital) und auf dieselbe Art, in der Produktion erzeugt wird. Sach- und Humankapital werden jedoch nicht gemeinsam in der Produktion akkumuliert. Lucas stellt deshalb in seinem Modell einen zweiten Sektor vor, in dem das Humankapital (H) produziert wird. Hierbei handelt es sich um den Bildungssektor[68]

$$\dot{H} = A_H L_H H - \iota H. \tag{5.34}$$

Dabei repräsetiert A_H die technische Effizienz des Bildungssektors. L_H sind die Arbeitskräfte, welche im Bildungssektor arbeiten. ι kann in der oberen Formel (5.34) als die Abschreibung des Humankapitals verstanden werden oder ein natürliches Vergessen sein, ähnlich zur Abschreibung des Kapitals (δ). Der Bildungssektor nutzt das Humankapital intensiv und produziert somit zusätzliches Humankapital sowohl für den Bildungssektor als auch für den Sachgütersektor. Das Humankapital wächst im Verhältnis, je produktiver der Bildungssektor ist, je mehr Arbeitkräfte in der Bildung angestellt sind und je kleiner die Abschreibung ι ist.[69]

[66]Vgl. Lucas (1988)
[67]Formal ähnliches Modell, Vgl. Uzawa (1965)
[68]Vgl. Lucas (1988)
[69]Vgl. Lucas (1988)

Das Maximierungsproblem sieht somit wie folgt aus:

$$\max_{c} \int_{0}^{\infty} e^{-\rho t} u(c,P) dt \tag{5.35}$$

$$\dot{K} = A_Y K^{\alpha} (L_Y H)^{1-\alpha} - c - \delta K \tag{5.36}$$

$$\dot{H} = A_H L_H H - \iota H \tag{5.37}$$

A_Y ist der technische Fortschritt der Produktion und L_Y die Arbeiter in der Produktion. Humankapital H geht als multiplikativer Faktor in die Produktionsfunktion ($Y = A_Y K^{\alpha}(L_Y H)^{1-\alpha}$) ein und verstärkt somit die Produktivität der Arbeiter. Bei Schumpeter verstärkt der Produktivitätsparameter (B) auch die physische Arbeit, jedoch akkumuliert sich dieser mit der Formel (5.23). Bei Humankapital gibt es durch ι ein natürliches Vergessen, wodurch die Wirtschaft ständig in Humankapital "investieren" muss um nicht mit diesem Kapitalstock, welcher auch für die Produktivität wichtig ist, auf Null zu sinken. Dies ist im Schumpeter-Modell nicht der Fall, da es keine Abschreibung gibt und der Produktivitätsparameter eine Verbesserung der Maschinen darstellt.[70]
Weiters kann das Lucas-Modell auch für ein Individuum gerechnet werden, in so einem Modell gilt $\widetilde{L}_H + \widetilde{L}_Y = 1$. Somit hat das Indiviuum die Möglichkeit seine Zeit anteilsmäßig in Arbeit oder Bildung zu investieren. Durch mehr Bildung ist es produktiver, jedoch kann es weniger arbeiten.
In der Literatur wird dieses Vorgehen oft als Normierung bezeichnet, die mit $\widetilde{L}_Y = \frac{L_H}{L_H+L_Y}$ und $\widetilde{L}_H = \frac{L_Y}{L_H+L_Y}$ das gleiche Ergebnis liefert.[71]

Mit diesem Lucas-Modell wird versucht die unterschiedlichen Reaktionen auf Zuflüsse des Kapital (K) zu modellieren. Damit wird auch erklärt warum Entwicklungsländer trotz hoher Kapitalinvestitionen kein Wirtschaftswachstum erzeugen können. Durch Mangel an Humankapital sind die Investitionen nicht effektiv.
Für den Konsum ergibt sich nach dem Lösen der Hamilton-Funktion[72], welche sich aus dem Maximierungsproblem (5.35) herleitet, folgendes Wachstum[73]:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta}(\alpha A_Y K^{\alpha-1}(L_Y H)^{1-\alpha} - \rho - \delta) \tag{5.38}$$

Für den Steady State des dynamischen Modells müssen die Formeln für $\dot{c}$, $\dot{K}$ und $\dot{H}$ gleich Null sein. Dadurch ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

$$c = A_Y K^{\alpha}(L_Y H)^{1-\alpha} - \delta K \tag{5.39}$$

$$H = \frac{A_H L_H H}{\iota} \tag{5.40}$$

$$\rho + \delta = \alpha A_Y K^{\alpha-1}(L_Y H)^{1-\alpha} \tag{5.41}$$

[70] Vgl. Lucas (1988), Schumpeter (1911) und Schumpeter (1942)
[71] Vgl. Lucas (1988)
[72] Vgl. Hamilton (1834)
[73] Herleitung siehe Appendix A.6.1

Aus der Formel $H = \frac{A_H L_H H}{\iota}$ ist zuerkennen, dass es keine eindeutige Lösung für H im Steady State gibt. Jedoch folgt aus der Gleichung für die Arbeitkräfte im Bildungssektor $L_H = \frac{\iota}{A_H}$. Damit reduziert sich das Gleichungssystem auf zwei Komponenten.

$$c = A_Y K^\alpha (L_Y H)^{1-\alpha} - \delta K \tag{5.42}$$

$$\rho + \delta = \alpha A_Y K^{\alpha-1} (L_Y H)^{1-\alpha} \tag{5.43}$$

Die zweite Gleichung (5.43) kann auf K umgeformt werden.

$$K^{\alpha-1} = \frac{\rho+\delta}{\alpha A_Y (L_Y H)^{1-\alpha}} \tag{5.44}$$

$$K = \left(\frac{\rho+\delta}{\alpha A_Y (L_Y H)^{1-\alpha}} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{5.45}$$

Aus der Gleichung (5.45) ist nun zu erkennen, dass das Kapital K nur von den Variablen Humankapital H, Arbeitskräfte des Produktionssektors L_Y und dem technischen Fortschritt für den Produktionsektor A_Y abhängig ist. Die Gleichung (5.45) kann nun in die Gleichung (5.42) eingesetzt werden. Dadurch ist sichtbar, dass für den optimalen Konsum im Steady State auch wiederum die Variablen (K, H, L_Y) wichtig sind, die in der Formel (5.43) das Kapital beschreiben.

Mit Emissionsbestand P

Um die Auswirkungen von Schadstoffen in einem Lucas-Modell zu analysieren, wird das Modell um einen Emissionsbestand P (Glg. 3.11) erweitert. Dabei ist ϕ der Anteil an der Produktion (Y), der in Form von Emissionen in der Produktion ausgestoßen wird. Bei m handelt es sich um die Regenerationsrate der Umwelt. Damit folgt das adaptierte Lucas-Modell:

$$\max_c \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c) dt \tag{5.46}$$

$$\dot{K} = A_Y K^\alpha (L_Y H)^{1-\alpha} - c - \delta K \tag{5.47}$$

$$\dot{H} = A_H L_H H - \iota H \tag{5.48}$$

$$\dot{P} = \phi A_Y K^\alpha (L_Y H)^{1-\alpha} - mP \tag{5.49}$$

Für dieses neue Maximierungsproblem ergibt[74] sich

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta} \left[\alpha A_Y K^{\alpha-1} (L_Y H)^{1-\alpha} \left(1 + \frac{\mu\phi}{u_c(c,P)} \right) - \rho - \delta + \frac{u_{cP}(c,P)}{u_c(c,P)} \dot{P} \right]. \tag{5.50}$$

Nun wird das Wachstum des Konsums im allgemeinen Modell (5.38) mit dem um den Zustand P erweiterten Modell (5.50) verglichen. Es ist zu erkennen, dass wie in den zuvor vorgestellten AK-Modell und Schumpetermodell es im Steady State ($\dot{P} = 0$)

[74] Herleitung siehe Appendix A.6.2

durch den negativen Schattenpreis des Emissionsbestandes μ (< 0) zu einem geringeren Konsum kommt.

$$c = A_Y K^\alpha (L_Y H)^{1-\alpha} - \delta K \tag{5.51}$$

$$H = \frac{A_H L_H H}{\iota} \tag{5.52}$$

$$P = \frac{\phi}{m} A_Y K^\alpha (L_Y H)^{1-\alpha} \tag{5.53}$$

$$\rho + \delta = \alpha A_Y K^{\alpha-1} (L_Y H)^{1-\alpha} \left(1 + \frac{\mu\phi}{u_c(c,P)}\right) \tag{5.54}$$

Dieser negative Trend wird noch durch ϕ, den Prozentsatz des Outputs welcher zusätzlich noch an Schadstoffen in die Umwelt gelangt, verstärkt. Zu erkennen ist dies an den Formeln (5.54) und (5.43). Jedoch kann dies, wie im Kapitel 3, vom Kapital abhängig sein ($\phi(K)$ mit $\phi(K)' < 0$). Eine Adaption in diesem Model könnte eine Abhängigkeit der Variable ϕ vom technischen Fortschritt A_Y (mit den gleichen Eigenschaften wie beim Kapital) sein. Diese beiden Abhängigkeiten von ϕ führen zu einer Verkleinerung der Auswirkung von μ in diesen Modell. Mit wachstendem K oder A_Y gilt, dass $\lim_{K\to\infty} \phi(K) \to 0$ und $\lim_{A_Y\to\infty} \phi(A_Y) \to 0$. Somit folgt klarerweise $\lim_{K\to\infty} \mu\phi(K) \to 0$ und $\lim_{A_Y\to\infty} \mu\phi(A_Y) \to 0$, wodurch für den Ausdruck $\left(1 + \frac{\mu\phi}{u_c(c,P)}\right)$ folgende zwei Limiten zuerwarten sind

$$\lim_{K\to\infty} \left(1 + \frac{\mu\phi}{u_c(c,P)}\right) \to 1 \text{ und} \tag{5.55}$$

$$\lim_{A_Y\to\infty} \left(1 + \frac{\mu\phi}{u_c(c,P)}\right) \to 1 \tag{5.56}$$

Damit wäre der gleiche Steady State wie im Modell ohne Schadstoffe zu erreichen.
Weiters hat ein stark wachsender technischer Fortschritt (A_Y) oder eine schnelle Akkumulation von Kapital zwei Vorteile. Da die beiden Werte in der Produktionsfunktion erhalten sind, wird nämlich mehr produziert und es kommt durch ein kleineres ϕ zu einem geringeren Schadstoffausstoß in der Produktion. Natürlich kann auch ϕ von K und A_Y abhängig sein. In dieser Modellierungsvariante würden allerdings dieselben Effekte auftreten, wobei sogar eine Verstärkung der Auswirkungen zu erwarten wäre.

5.4 Resümee zu endogenen Wachstumsmodellen

Anhand der Maximierung des Nutzens mittels eines sozialen Planers wurden die Auswirkungen von Schadstoffen in endogenen Wachstumsmodellen gemessen. Es wurde gezeigt, dass die Einbeziehung von Schadstoffen in ein AK-Modell (Kap. 5.1), Schumpeter-Modell (Kap. 5.2) oder ein Lucas-Modell (Kap. 5.3) mittels einer Bestandsgröße P oder E zu einer Reduktion des Konsums im Steady State führt. Auch der Wachstumspfad ist in Modellen mit Emissionsbestand oder einer Umweltqualität kleiner.

Im AK-Modell ergibt sich jedoch kein nachhaltiges Wachstum, in dem die Schadstoffemissionen gestoppt oder sogar verringert werden könnte. Nur mittels weiteren Einschränkungen beim Kapital kann dieser gewünschten Effekt eintreten. Dafür muss das Geld in zwei Teile aufgeteilt werden ($K = K_a + K_Y$), K_a wird zur Reduktion der Emissionen verwendet. Im Gegensatz dazu wird K_Y in der Produktion eingesetzt. In diesem Zusammenhang kann von "green jobs" gesprochen werden, die in der Forschung mit Hilfe von K_a generiert werden.
Im Schumpeter-Modell ist bereits im Basismodell eine Reduktion der Schadstoffe möglich. Dies gilt jedoch nur bei der Unterstellung eines großen technischen Fortschritts. Somit ist aus diesen beiden endogenen Wachstumsmodellen mit Schadstoffemissionen zu folgern, dass durch Forschung die Emissionen sehr stark gesenkt werden können und nachhaltiges Wirtschaftswachstum erzeugt werden könnte. Dazu müsste das Motto des österreichischen Lebensministeriums "Nachhaltig für Natur und Mensch" in "Mittels Forschung nachhaltig für Natur und Mensch" geändert werden.[75]
Im Lucas-Modell ergibt sich auch durch einen hohen Einsatz von Kapital und einen starken technischen Fortschritt, dass die Emissionen gestoppt werden können. Ist in diesem Modell die Regeneration der Umwelt (m) auch noch groß, kann davon ausgegangen werden, dass sich die Umwelt sogar nach einiger Zeit erholt.
In allen drei Modellen fällt auf, dass der Schattenpreis der Umweltvariablen (μ und ν) einen stark abschwächenden Einfluss auf den Steady State hat.
Aus diesen drei endogenen Wachstumsmodellen kann nun der Schluss gezogen werden, dass die Erhaltung einer nachhaltigen und lebenswerten Umwelt eine große Herausforderung darstellt, die viele Chancen mit sich bringt. Durch die Investitionen in "green jobs", welche in der Forschung zu fördern sind und dargestellt werden in den Modellen durch einen großen oder stark wachsenden technischen Fortschritt, hilft man dem Klimaschutz und der Umstellung des Energiesystems auf erneuerbare Energien. Damit wird in Richtung einer sauberen Umwelt gearbeitet, die damit für Wirtschaftswachstum mit einem langfristigen Nutzen sorgt.

Um diesen langfristigen Übergang noch genauer zu analysieren, wird im nächsten Kapitel ein endogenes ökonomisches Wachstumsmodell mit physischem Kapital und Humankapital mittels einer ökologischen Variable erweitert und analysiert.

[75] Vgl. Bundesministerium für Land- und Forstwirtschaft, Umwelt und Wasserwirtschaft (2012)

6 Auswirkungen von Schadstoffen in einem speziellen, endogenen Wachstumsmodell

Im Kapitel 4 wurden die klassischen exogenen Wachstumsmodelle Solow und Ramsey um die Bestandsgröße Umwelt erweitert und danach theoretisch gelöst. Diese zwei Schritte wurden für die endogenen ökonomischen Modelle AK, Schumpeter und Lucas im Kapitel 5 durchgeführt. Diese Analyse zeigt, dass bei der erneuerbaren Ressource Umwelt als Optimum gilt, dass die Ausstoßrate geringer als die Regenerationsrate sein muss um nachhaltiges Wachstum zu generieren. Abschließend beschäftigt sich dieses Kapitel mit einem speziellen, endogenen Modell. Dieses Modell wird theoretisch mit Hilfe der Hamilton-Funktion[76] gelöst und danach ausgewertet und analysiert.

Das folgende Modell basiert auf den Arbeiten von Bovenberg und Smulder (1995) sowie Bovenberg und Smulder (1996).[77]
Die Arbeiten von Bovenberg und Smulder beschäftigen sich mit den Auswirkungen der Umweltpolitik auf die Kapitalakkumulation, den Folgen des Wirtschaftswachstums in Zusammenhang mit steigenden Bekämpfungskosten der Umweltschäden, dem Wandel der Technologie und der Beziehung zwischen Umweltqualität und einem nachhaltigen Wachstum. Für das Bovenberg/Smulder-Modell wird ein endogenes Wachstumsmodell mit zwei Sektoren (Produktion und Forschung) zur Berechnung der Wachstumsraten und Analyse der Wirtschaft herangezogen. Dieses Modell stellt die Dynamiken der Zustände des physischen Kapitals, des Humankapitals und der Umwelt, welche eine erneuerbare Größe ist, dar. Diese drei Größen werden durch Umweltvariablen, Schadstoffemissionen, Sparquote, Forschung und noch anderen Inputfaktoren der Produktion beeinflusst. Die ökonomischen Grundlagen für die Entwicklung des Modells von Bovenberg und Smulder bilden dabei die Publikationen von Lucas (1988) und Rebelo (1991).[78]

[76]Vgl. Hamilton (1834)
[77]Genauere Informationen zu den Publikationen der Arbeiten sind im Literaturverzeichnis angeführt.
[78]Vgl. Bovenberg und Smulder (1995) und Bovenberg und Smulder (1996)

6.1 Das Bovenberg/Smulder-Modell

Die Nutzenfunktion

Ein sozialer Planer maximiert den Nutzen der Bevölkerung über einen unendlichen Planungshorizont.[79] Die Formulierung für das Maximierungsproblem lautet:

$$\max_{c} \int_{0}^{\infty} e^{-\rho t} u(c(t)) dt \tag{6.1}$$

Dabei ist $c(t)$ der Konsum zum Zeitpunkt t, $u(\cdot)$ ist die Nutzenfunktion der Individuen und ρ die Diskontrate des Nutzens über die Zeit, da der Nutzen in der Zukunft weniger Wert ist als heutiger Nutzen ($\rho > 0$).[80]
Um Schadstoffemissionen zu messen wird in diesem Modell die Umweltqualität E (Glg. 3.13) hinzugefügt. Da die Umwelt auch eine Auswirkung auf den Nutzen hat, ist die Nutzenfunktion noch zusätzlich von der Variable E abhängig und die Maximierungsfunktion des sozialen Planers erweitert sich auf die Form:[81]

$$\max_{c} \int_{0}^{\infty} e^{-\rho t} u(c, E) dt \tag{6.2}$$

Die Nutzenfunktion aus Konsumsicht ist eine konkave Funktion jedoch mit einer abnehmenden Rate des Grenznutzens ($u_c(c, E) > 0$, $u_{cc}(c, E) < 0$). Das bedeutet, dass mit jeder Konsumeinheit mehr, auch der Nutzen steigt, jedoch mit einer abnehmenden Rate. Dieselben Kriterien müssen auch für die Nutzenfunktion in Bezug auf die Umweltvariable E gelten ($u_E(c, E) > 0$, $u_{EE}(c, E) < 0$), da die Umweltqualität mit steigendem Wert eine Verbesserung für die Individuen mit sich bringt.[82]

Die Produktion

Für das Bovenberg/Smulder-Modell werden zwei Sektoren angenommen.[83] Der erste Sektor ist die Produktion, in der ein finales Gut produziert wird. Dieses finale Gut wird als Y bezeichnet. Dieses Gut kann konsumiert oder investiert werden. Der zweite Sektor stellt den Forschungssektor dar, in dem Wissen und neue umweltfreundliche Technologien entwickelt werden. Dies ist ein reiner Investitionssektor, in welchem kein Gut zum Konsum produziert wird.[84]

$$Y = F(E, K_Y, Z_Y) \tag{6.3}$$

[79] Auch in diesem Kapitel wird wie bereits in Kapitel 3, 4 und 5 auf die Verwendung des Zeitparameters t bei allen Variablen verzichtet, falls dieser Parameter keine nähere Erläuterung benötigt.
[80] Vgl. Cass (1965) und Koopmans (1965)
[81] Vgl. Bovenberg und Smulder (1995) und Bovenberg und Smulder (1996)
[82] Vgl. Xepapadeas (2005), Aghion und Howitt (1998), Bovenberg und Smulder (1995) und Bovenberg und Smulder (1996)
[83] Vgl. Lucas (1988) und Rebelo (1991)
[84] Vgl. Bovenberg und Smulder (1995) und Bovenberg und Smulder (1996)

Für die ökonomische Modellierung wird in Bovenberg und Smulder (1995) die Gleichung (6.3) verwendet. Als Einsatz für das finale Gut Y wird ein Teil des physischen Kapitals K_Y verwendet. Als zweiter Inputparameter kommt der effektive Emissionsausstoß der Produktion Z_Y zum Einsatz. Diese Variable wird nach der Definiton des zweiten Sektors, der Forschung, noch genauer definiert, da dieser Sektor ebenfalls vom Humankapital abhängig ist. Die dritte Größe für die Produktionsfunktion ist die Umweltqualität E. Bovenberg und Smulder modellieren den technischen Fortschritt als eine abhängige Funktion der Umweltqualität ($A(E)$). Damit ergeben sich einige Adaptionsmöglichkeiten für dieses Modell.
Die Produktion ist für die Akkumulation des physischen Kapitals wichtig. Das produzierte finale Gut wird entweder angespart oder es wird von den Individuen konsumiert, woraus sich ergibt, dass die Änderungrate des Kapitals die Differenz zwischen Produktion und Konsum darstellt. Der Konsum wird mit c bezeichnet. Damit ist die Kapitalakkumulationsgleichung definiert mit[85]

$$\dot{K} = Y - c. \tag{6.4}$$

Das Humankapital

Humankapital wird im zweiten Sektor, der Forschung, weiterentwickelt und als Bestandsgröße modelliert. Für diese Tätigkeit wird physisches Kapital K_H (die Summe der beiden physischen Kapitalarten wird als $K = K_Y + K_H$ bezeichnet) und der Anteil des effektivem Emissionsausstoßes bei der Erzeugung von Humankapital Z_H benötigt. Diese beiden Parameter (K_H und Z_H) werden wiederum als Inputvariablen in einer Funktion verwendet, bei der A, der Technologieparameter, und die Umwelt E eine wichtige Rolle einnehmen.[86]

$$\dot{H} = V(E, K_H, Z_H) \tag{6.5}$$

$$\dot{H} = A(E)\ W(K_H, Z_H) \tag{6.6}$$

Dabei stammt die Gleichung (6.5) aus Bovenberg und Smulder (1995) und die Gleichung (6.6) aus Bovenberg und Smulder (1996). Wie bei der ersten Erwähnung des effektiven Emissionsaustoßes der Produktion, ist Z_Y vom Humankapital abhängig, wobei dies auch für Z_H (der effektive Emissionsausstoßes für die Akkumulation von Humankapital) gilt. Dabei wird Humankapital zur Gänze in umweltschonende Technik investiert. Mit P wird der aktuelle wirtschaftsweite Emissionsbestand bezeichnet. Um den Emissionsbestand gemeinsam mit dem Humankapital und somit wachsender umweltfreundlicher Technologie zu modellieren, werden die beiden Variablen multipliziert ($Z = HP$). Infolgedessen ergeben sich nachstehende Eigenschaften für den effektiven Emissionsausstoß:[87]

[85] Vgl. Bovenberg und Smulder (1995)
[86] Vgl. Bovenberg und Smulder (1995) und Bovenberg und Smulder (1996)
[87] Vgl. Bovenberg und Smulder (1995)

- Die Summe aus dem effektiven Emissionsausstoß der Produktion Z_Y und dem effektiven Emissionsausstoß für die Akkumulation von Humankapital Z_H wird als $Z(= Z_Y + Z_H)$ bezeichnet.

- Der effektive Emissionsausstoß wird im fixen Verhältnis υ auf Produktion und Forschung aufgeteilt ($Z_H = (1 - \upsilon)HP$, $Z_Y = \upsilon HP$).

- Bei steigendem Humankapital steigt der effektive Emissionsausstoß Z ohne den wirtschaftsweiten Emissionsbestand P zu vergrößern. Dies ist deshalb der Fall, weil mit Hilfe des Humankapitals der wirtschaftsweite Emissionsbestand besser genutzt wird. Damit muss weniger P verwendet werden, um die gleiche Menge von Z zu erzeugen.

- Mit stagnierendem Humankapital muss der wirtschaftsweite Emissionsbestand vergrößert werden, um dieselbe Menge des finalen Guts in der Produktion sicher zu stellen.

Durch diese Eigenschaften ergeben sich nachstehende Formeln für den effektiven Emissionsausstoß.

$$Z_H = (1 - \upsilon)HP \tag{6.7}$$

$$Z_Y = \upsilon HP \tag{6.8}$$

$$Z = Z_Y + Z_H = HP \tag{6.9}$$

Die Umweltkomponente

Die Umwelt kann auf viele verschiedene Arten in einem endogenen Wachstumsmodell formuliert werden (siehe Kapitel 3). In diesem Modell wird Umwelt mit der Natur sowie Tier- und Pflanzenwelt gleichgesetzt. Dadurch ergibt sich, dass die Umweltkomponente eine erneuerbare Ressource sein muss und genau dieselben Eigenschaften wie physisches Kapital und Humankapital als Bestandsgröße aufweist.[88]
Aus den Eigenschaften einer Bestandsgröße ergibt sich, dass für die Umweltkomponente die Umweltqualität aus Kapitel 3 gewählt werden muss und somit die Gleichung (3.13) verwendet wird. Die Variable E, welche die Umweltqualität repräsentiert, ist größer als Null und besitzt eine obere Grenze ($0 \leq E \leq E^{max}$)[89]. Zwei Punkte sind für die Berechnung der Bestandsgröße Umweltqualität essenziell:[90]

1. Die Regeneration der Umwelt und

2. die Verschmutzung der Umwelt.

[88]Vgl. Bovenberg und Smulder (1995) und Bovenberg und Smulder (1996)
[89]Vgl. Aghion und Howitt (1998) und Xepapadeas (2005)
[90]Vgl. Bovenberg und Smulder (1995) und Bovenberg und Smulder (1996)

Weiters gilt, dass die Umweltparameter bei einer sehr geringen Belastung die Produktivität der Bevölkerung positiv beeinflussen. Mit schlechter werdenden Umweltkomponenten hat die Umwelt ein starkes negatives Gewicht auf die Leistungsfähigkeit der Arbeitskräfte und mindert somit den Output. Effekte der Umweltpolitik, eingesetzt durch einen sozialen Planer mit unendlichem Planungshorizont, sind durch eine sich natürlich erholende Umwelt[91] dementsprechend nur auf lange Sicht gesehen positiv und haben kurzfristig keine Auswirkung. Jedoch sind Verunreinigungen der Umwelt sofort spürbar. Das bedeutet, dass die Umweltpolitik der Gesellschaft kurzfristig schadet, in dem sie hohe Kosten verursacht. Langfristig verbessert sie das Wachstum auf nachhaltige Weise.
Durch die Berücksichtigung der Schadstoffemissionen in der Forschungsfunktion versuchen die beiden Autoren folgende Eigenschaften des Wachstumspfades zu generieren. Durch eine Reduktion der Schadstoffemissionen in der Produktion können diese Schadstoffkapazitäten in die Forschung transferiert werden, um dort an weiterer umweltschonender Technologie zu arbeiten. Aus diesem Grund ist bei Bovenberg und Smulder die Umweltkomponente als eine Stockgröße wie z.B. physisches Kapital oder Humankapital gestaltet.

$$\dot{E} = M(E, P) \tag{6.10}$$

$$\dot{E} = N(E) - P \tag{6.11}$$

Formel (6.10) bezieht sich auf Bovenberg und Smulder (1995) und Formel (6.11) stammt aus der Arbeit von Bovenberg und Smulder (1996). E stellt die Umweltqualität und P den wirtschaftsweiten Emissionsbestand dar. Die Änderungsrate der Variable E ergibt sich durch eine Subtraktion des derzeitigen Schadstoffausstoßes (P) und der eigenständigen Regenerationsfunktion der Umwelt ($N(E)$), welche vom jetzigen Zustand der Umwelt (E) abhängig ist. Dabei muss für die Umweltfunktionen $M(\cdot)$ und $N(\cdot)$ für die zweifache Ableitung (M_{EE}, N_{EE}) gelten, dass diese kleiner Null ist.[92] Damit nehmen die Steigungen der Kurven kontinuierlich ab und demzufolge ergibt sich die Existenz von E^{max} für jede Umweltfunktion.[93]

[91] Dies geschieht meist sehr langsam.
[92] Vgl. Bovenberg und Smulder (1995) und Bovenberg und Smulder (1996)
[93] Tragler, Pecher, Sedlecky und Riedl (2010)

6.2 Optimale Zuteilung, Ramsey-Regel und Arbitrage-Bedingung

Fügt man nun alle Formeln aus den Abschnitten

- die Nutzenfunktion,
- die Produktion,
- das Humankapital und
- die Umweltkomponente

zusammen, erhält man das folgende Maximierungsproblem.[94]

$$\max_{c,P} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c,E)dt \tag{6.12}$$

$$\dot{K} = F(E, K_Y, Z_Y) - c \tag{6.13}$$
$$\dot{H} = V(E, K_H, Z_H) \tag{6.14}$$
$$\dot{E} = M(E, P) \tag{6.15}$$

$$K = K_Y + K_H \tag{6.16}$$
$$Z = Z_Y + Z_H = HP \tag{6.17}$$

Durch die Definition der Hamiltonfunktion[95] errechnet sich die bestmögliche Zuteilung im Optimum für das Kapital K (6.18), den effektiven Emissionsausstoß Z (6.19) und die Umweltqualität E (6.20)[96]. Diese Zuteilungen ergeben sich aus den Bedingungen erster Ordnung für eine optimale Lösung des Maximierungsproblems.[97]

$$\frac{\partial F}{\partial K_Y} = \frac{\kappa}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial K_H} \tag{6.18}$$

$$\frac{\partial F}{\partial Z_Y} = \frac{\kappa}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial Z_H} \tag{6.19}$$

$$\frac{\partial F}{\partial Z_Y} H = -\frac{\nu}{\lambda} M_P(E, P) \tag{6.20}$$

[94] Vgl. Bovenberg und Smulder (1995)
[95] Vgl. Hamilton (1834), für die Definition siehe A.7
[96] Herleitung siehe Appendix A.7
[97] Vgl. Bovenberg und Smulder (1995)

Dabei repräsentiert λ den Schattenpreis des Kapitals, κ ist der Schattenpreis des Humankapitals und ν steht für den Schattenpreis der Umweltvariable.

$$r = \rho - \frac{\dot{u}_c(c,E)}{u_c(c,E)} \tag{6.21}$$

$$= \rho - \frac{u_{cc}(c,E)\dot{c} + u_{cE}(c,E)\dot{E}}{u_c(c,E)} \tag{6.22}$$

Die Formel (6.21)[98] ähnelt der Ramsey-Regel aus Kapitel 4.2. Diese spezielle Ramsey-Regel (6.21) gibt an, ab welchem Wert die Individuen noch wertneutral zwischen einem Gegenwarts- oder Zukunftskonsum sind. Durch einen höheren Zinssatz (r) werden Güter in der Zukunft vergleichsweise billiger als in der Gegenwart. Dadurch wird der Kauf auf einen späteren Zeitpunkt verschoben. Darüber hinaus bedeutet eine kleinere Zeitpräferenzrate (ρ), dass die Individuen aktuellen Konsum späterem Konsum vorziehen. Deshalb muss im Verhälnis zur Zeitpräferenz oder zum Zinssatz der zusätztliche Nutzen des Konsums über die Zeit $\dot{u}_c(c,E)$ größer Null sein. Somit bestimmt sich die Höhe der Kapitalrücklage endogen, da die Entscheidung über den Konsum zinsabhängig ist.[99]

$$r = \frac{\partial F}{\partial K_Y} = \frac{\partial V}{\partial Z_H}P + \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\frac{\nu}{\lambda}}\left(\frac{u_E(c,E)}{u_c(c,E)} + \frac{\partial F}{\partial E}\right) + u_E(c,E) + \frac{\dot{\nu}}{\nu} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \tag{6.23}$$

Bei (6.23)[100] handelt es sich um eine Arbitrage-Bedingung für die Zustände K, H, E. Diese Bedingung besagt, dass jede eingesetzte Einheit der Größen Kapital, Humankapital und Umwelt denselben Gewinn erwirtschaften muss. Zudem muss der Gewinn mindestens dem Zinssatz des Kapitalmarktes entsprechen, da sonst mehr Gewinn auf dem Kapitalmarkt enstehen kann und es somit nicht mehr vorteilhaft ist ein Produkt zu generieren.[101]

Der erste Teil der Formel (6.23) zeigt, dass der endogene Kapitalmarktzinssatz gleich der Ableitung der Produktionsfunktion sein muss, $r = \frac{\partial F}{\partial K_Y}$. Aus betriebswirtschaftlicher Sicht gibt die Ableitung der Produktionsfunktion Auskunft über die Outputsteigerung bei Einsatz einer zusätzlichen Einheit Kapital in der Produktion. Damit sagt die Gleichung (6.23) aus, dass eine zusätzliche Kapitaleinheit nur solange in die Produktion einzusetzten ist, bis die Einheit Kapital in der Produktion eine größere Rendite bringt als eine Einheit Kapital am Kapitalmarkt.[102]

Der zweiten Teil der Gleichgung (6.23) beschreibt das Gleichgewicht zwischen Zinssatz und Humankapital, $r = \frac{\partial V}{\partial Z_H}P + \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$. Aus diesem Teil der Gleichung ist ersichtlich, dass die relative Veränderung des Schattenpreises des Kapitals ($\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$) und des Humankapitals ($\frac{\dot{\kappa}}{\kappa}$) eine starke Rolle einnehmen. Es zeigt sich, dass die Ableitung der

[98] Herleitung siehe Appendix A.7
[99] Vgl. Ramsey (1928), Cass (1965), Koopmans (1965) und Bovenberg und Smulder (1995)
[100] Herleitung siehe Appendix A.7
[101] Vgl. Bovenberg und Smulder (1995)
[102] Vgl. Bovenberg und Smulder (1995) und Bovenberg und Smulder (1996)

Produktionsfunktion des Humankapitals nach dem effektiven Emissionsaustoßes ($\frac{\partial V}{\partial Z_H}$) beim Humankapital wichtig ist. Im Gegesatz dazu ist bei der Produktion das physische Kapital von Bedeutung. Dies erklärt sich dadurch, dass in der Forschung das Humankapital selbst mehr Einfluss auf die Veränderung hat als das physische Kapital.
Der dritte Teil des Ausdrucks (6.23), welcher die Arbitrage-Bedingung des Kapitalmarktes und der Umwelt repräsentiert, wird von den Ableitungen der Nutzenfuntion geprägt. Dabei ist das Verhältnis zwischen $u_E(c, E)$ und $u_c(c, E)$ zu beachten, da es Rückschlüsse auf die Individuen zulässt. Bei $\frac{u_E(c,E)}{u_c(c,E)} > 1$ ist der Grenznutzen der Umwelt größer als jener des Grenznutzens des Konsums, da der Bevölkerung die Umwelt wichtiger ist als der Konsum. Gilt $\frac{u_E(c,E)}{u_c(c,E)} < 1$, so ist der Gesellschaft der Nutzen aus Konsum von größerer Bedeutung als der Nutzen aus einer sauberen Umwelt. Bei $\frac{u_E(c,E)}{u_c(c,E)} = 1$ sind die Individuen indifferent zwischen dem Konsumnutzen und dem Umweltnutzen.
Um noch mehr Aussagen über die optimalen Zuteilung zu ermöglichen, erfolgt im nächsten Kapitel eine Konkretisierung der Produktions-, Humankapital-, Umwelt- sowie Nutzenfunktion.

6.3 Sensitivitätsanalyse

Für eine genauere Analyse der Gleichungen (6.18), (6.19), (6.20), (6.21) und (6.23) müssen die Funktionen $u(c, E)$, $F(E, K_Y, Z_Y)$, $V(E, K_H, Z_H)$ und $M(E, P)$ definiert werden.
Bei der Funktion $u(c, E)$ muss es sich um eine konkave Nutzenfunktion mit einer abnehmenden Rate des Grenznutzens des Konsums ($u_c(c, E) > 0$, $u_{cc}(c, E) < 0$) und des Grenznutzens der Umweltvariable ($u_E(c, E) > 0$, $u_{EE}(c, E) < 0$) handeln.[103]
Aus diesem Grund wird für die Nutzenfunktion die Gleichung

$$u(c, E) = \frac{\sigma}{\sigma - 1}(cE^{\psi})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{6.24}$$

verwendet.[104]
Dabei berechnet sich das Verhältnis zwischen $u_E(c, E)$ und $u_c(c, E)$ wie folgt:[105]

$$\frac{u_E(c, E)}{u_c(c, E)} = \psi\frac{c}{E} \tag{6.25}$$

Für die Funktionen $F(E, K_Y, Z_Y)$ und $V(E, K_H, Z_H)$ werden Produktionsfunktionen benötigt. Es werden dafür zwei klassische Produktionsfunktionen verwendet - die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion[106] (6.26), (6.28) und alternativ die CES-Funktion[107](6.27), (6.29). CES ist die Kurzform für constant elasticity of substitution.

[103]Genauere Definiton siehe Kapitel 3.1 und 3.5
[104]Vgl. Bovenberg und Smulder (1996)
[105]Herleitung siehe Appendix A.7.2
[106]Vgl. Cobb und Douglas (1928)
[107]Vgl. Solow (1956) und Arrow, Chenery, Minas und Solow (1961)

$$F(E, K_Y, Z_Y) = A(E) K_Y^{\alpha} Z_Y^{\beta} \tag{6.26}$$

$$F(E, K_Y, Z_Y) = A(E) \left(\omega K_Y^{-\varsigma} + (1-\omega) Z_Y^{-\varsigma}\right)^{-\frac{1}{\varsigma}} \tag{6.27}$$

$$V(E, K_H, Z_H) = A(E) K_H^{\gamma} Z_H^{\chi} \tag{6.28}$$

$$V(E, K_H, Z_H) = A(E) \left(\varphi K_H^{-\varkappa} + (1-\varphi) Z_H^{-\varkappa}\right)^{-\frac{1}{\varkappa}} \tag{6.29}$$

α und γ bzw. β und χ sind die Elastizität des Outputs in Bezug auf das Kapital bzw. den effektiven Emissionsausstoß. Diese Parameter werden auch als partielle Produktionselastizität bezeichnet. Die Summe der partiellen Produktionselastizitäten ($\alpha + \beta$, $\gamma + \chi$) ergibt den Skalenertrag, welcher nun abnehmende ($\alpha + \beta < 1$, $\gamma + \chi < 1$), konstanten ($\alpha + \beta = 1$, $\gamma + \chi = 1$) oder zunehmende ($\alpha + \beta > 1$, $\gamma + \chi > 1$) sein kann. Wodurch die Produktion gegenüber dem Input unterproportional, proportional oder überproportional steigt.[108]
Bei ω und φ handelt es sich um den Distributionsparameter.ς und $\varkappa$ sind Substitutionsparameter. Die CES-Funktion beschreibt eine Isoquanten, die durch den Distributionsparameter die Schiefe und den Substitutionsparameter die Krümmung definiert wird.
Für die Umweltqualität wird eine einfache Form verwendet:[109]

$$M(E, P) = N(E) - P \tag{6.30}$$

Werden die Formel (6.26), (6.27), (6.28), (6.29) und (6.30) in den Gleichungen (6.18), (6.19), (6.20), (6.21) und (6.23) eingesetzt, erhalten die optimalen Zuteilungsgleichungen die Form:[110]

Cobb-Douglas-Funktion:

$$\frac{\alpha}{\gamma} K_Y^{\alpha-1} Z_Y^{\beta} = \frac{\kappa}{\lambda} K_H^{\gamma-1} Z_H^{\chi} \tag{6.31}$$

$$\frac{\beta}{\chi} K_Y^{\alpha} Z_Y^{\beta-1} = \frac{\kappa}{\lambda} K_H^{\gamma} Z_H^{\chi-1} \tag{6.32}$$

$$A(E)\ \beta K_Y^{\alpha} Z_Y^{\beta-1} H = \frac{\nu}{\lambda} \tag{6.33}$$

[108] Vgl. Cobb und Douglas (1928)
[109] Vgl. Bovenberg un Smulder (1996)
[110] Herleitung siehe Appendix A.7.1

CES-Funktion:

$$\frac{\omega}{\varphi}\frac{K_Y^{-\varsigma-1}}{\left(\omega K_Y^{-\varsigma}+(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma}\right)^{\frac{1+\varsigma}{\varsigma}}}=\frac{\kappa}{\lambda}\frac{K_H^{-\varkappa-1}}{\left(\varphi K_H^{-\varkappa}+(1-\varphi)Z_H^{-\varkappa}\right)^{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}} \tag{6.34}$$

$$\frac{(1-\omega)}{(1-\varphi)}\frac{Z_Y^{-\varsigma-1}}{\left(\omega K_Y^{-\varsigma}+(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma}\right)^{\frac{1+\varsigma}{\varsigma}}}=\frac{\kappa}{\lambda}\frac{Z_H^{-\varkappa-1}}{\left(\varphi K_H^{-\varkappa}+(1-\varphi)Z_H^{-\varkappa}\right)^{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}} \tag{6.35}$$

$$\frac{(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma-1}}{\left(\omega K_Y^{-\varsigma}+(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma}\right)^{\frac{1+\varsigma}{\varsigma}}}H=\frac{\nu}{\lambda} \tag{6.36}$$

Bei der Cobb-Douglas-Funktion ist die optimale Zuteilung von den Exponenten der Inputgrößen abhängig und somit sind die Produktionselastizitäten von großer Bedeutung. Ist eine Elastizität stärker als die andere, muss beim Faktor mit dem schwächeren Exponenten mehr Kapital oder effektiver Emissionsausstoß verwendendet werden, um die Gleichung zu erfüllen.
Ähnlich zu dem Fall im vorigen Absatz ist die Aufteilung der Ressourcen bei der CES-Funktion. Hier sind die Verhältnisse $\frac{\omega}{\varphi}$ und $\frac{(1-\omega)}{(1-\varphi)}$ wichtig. Es muss beim Kapital oder effektiven Emissionsausstoß mit kleinerem Distributionsparameter größere Rohstoffemengen zur Verfügung gestellt werden.
Sind weiters κ und λ nicht gleich, muss dies durch die unterschiedliche Aufteilung des Inputs auf die zwei Sektoren ausgeglichen werden.
Damit zeigt sich, dass die optimale Zuteilung auch durch exogen Variablen (α, γ, β, χ, ω, φ) gesteuert wird.

Für die Ramsey-Regel ergibt sich durch die gewählte Nutzenfunktion die Lösung:[111]

$$r = \rho+\frac{1}{\sigma}\frac{\dot{c}}{c}+\frac{\psi\frac{\sigma-1}{\sigma}\dot{E}}{E} \tag{6.37}$$

Wird nun die Diskontrate ρ auf die andere Seite der Gleichung gebracht, erhält die Gleichung auf der r-Seite die Form $r-\rho$. Da ρ die Diskontrate des Nutzens ist, kann somit der Term $r-\rho$ per Definition als der Effektivzinssatz gesehen werden. Somit investieren Individuen nur in den Konsum oder in die Umwelt, wenn der Wert $\frac{1}{\sigma}\frac{\dot{c}}{c}+\frac{\psi\frac{\sigma-1}{\sigma}\dot{E}}{E}$ und demzufolge die Änderungsrate des Konsums bzw. der Umweltqualität höher als die Effektivverzinsung ist.

Die Arbitrage-Bedingung für die Cobb-Douglas- und CES-Funktion haben die nach-

[111] Herleitung siehe Appendix A.7.3

stehende Notation:[112]

Cobb-Douglas-Funktion:

$$r = A(E)\ \alpha K_Y^{\alpha-1} Z_Y^{\beta} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \tag{6.38}$$

$$= A(E)\ \chi K_H^{\gamma} Z_H^{\chi-1} + \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} = \tag{6.39}$$

$$= \frac{\lambda}{\nu}\left(\psi\frac{c}{E} + A'(E) K_Y^{\alpha} Z_Y^{\beta}\right) + \psi c^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} E^{(\psi\frac{\sigma-1}{\sigma})-1} + \frac{\dot{\nu}}{\nu} \tag{6.40}$$

CES-Funktion:

$$r = A(E)\frac{\omega K_Y^{-\varsigma-1}}{\left(\omega K_Y^{-\varsigma} + (1-\omega) Z_Y^{-\varsigma}\right)^{\frac{1+\varsigma}{\varsigma}}} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \tag{6.41}$$

$$= A(E)\frac{(1-\varphi) Z_H^{-\varkappa-1}}{\left(\varphi K_H^{-\varkappa} + (1-\varphi) Z_H^{-\varkappa}\right)^{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}} P + \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} = \tag{6.42}$$

$$= \frac{\lambda}{\nu}\left(\psi\frac{c}{E} + \frac{A'(E)}{\left(\omega K_Y^{-\varsigma} + (1-\omega) Z_Y^{-\varsigma}\right)^{\frac{1}{\varsigma}}}\right) + \psi c^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} E^{(\psi\frac{\sigma-1}{\sigma})-1} + \frac{\dot{\nu}}{\nu} \tag{6.43}$$

Basierend auf den Arbeiten von Bovenberg und Smulder sowie der Analyse aller endogenen Wachstumsmodellen in dieser Diplomarbeit wird nun der Fokus auf eine mögliche Weiterentwickelung des Bovenberg/Smulder-Modells gelegt.

[112] Herleitung siehe Appendix A.7.2 und A.7.1

6.4 Erweiterung des Bovenberg/Smulder-Modells

In diesem Kapitel wird eine konkrete Erweiterung für das vorherig besprochene Bovenberg/Smulder-Modell vorgestellt. Für dieses spezielle Modell wird die Wachstumsrate des Konsums berechnet. Diese Wachstumsrate wird zusätzlich auf ein nachhaltiges Wachstum untersucht.

Um die Voraussetzung aus dem Bovenberg/Smulder-Modell und aus dem Kapitel 3.5 zu erfüllen, wird die nachstehende Nutzenfunktion[113] verwendet.

$$u(c, E) = \frac{\sigma}{\sigma - 1}(cE^{\psi})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{6.44}$$

Für σ gilt $\sigma < 1$.[114] Damit die Bedingung für die erste Ableitung der Nutzenfunktion nach dem Konsum[115] erfüllt ist, muss σ zwischen Null und Eins sein ($0 < \sigma < 1$). $0 < \psi$ ergibt sich aus der ersten Ableitung der Nutzenfunktion nach der Umweltqualität[116]. Aus der Bedingung $u_{EE}(cE) < 0$ leitet[117] sich ab, dass die nachstehende Ungleichung für ψ und σ gelten muss.

$$\psi < \frac{\sigma}{(\sigma - 1)} \tag{6.45}$$

Nicht nur, dass die Einschränkungen für ψ und σ die Basisbedingungen für die Ableitungen erfüllen, werden durch die Positivität der Variablen ψ und σ auch die stärkeren Bedingungen für die Limiten der Ableitungen der Nutzenfunktion (Glg. (6.46) und Glg. (6.47)) eingehalten.[118]

$$\lim_{c \to 0} u_c(c, E) = \infty, \qquad \lim_{E \to 0} u_E(c, E) = \infty, \tag{6.46}$$

$$\lim_{c \to \infty} u_c(c, E) = 0, \qquad \lim_{E \to \infty} u_E(c, E) = 0, \tag{6.47}$$

Als Produktionsfunktion wird eine Cobb-Douglas-Funktion mit konstanten Skalenerträgen verwendet, wobei A_Y der Technologieparameter der Produktion ist. Damit entspricht diese Produktionsfunktion auch den Annahmen aus Kapitel 3.[119]

$$Y = F(E, K_Y, Z_Y) = A_Y K_Y^{\alpha} Z_Y^{\beta}, \qquad \text{mit } \alpha + \beta = 1 \tag{6.48}$$

Für das Humankapital gilt zudem die Annahme der Cobb-Douglas-Funktion mit konstanten Skalenerträgen als Erzeugungsfunktion neuer schadstoffreduzierender Produktionsmethoden, jedoch ist in dieser Funktion A_H der Technologieparameter der Forschung.[120]

$$W(K_H, Z_H) = A_H K_H^{\gamma} Z_H^{\chi}, \qquad \text{mit } \gamma + \chi = 1 \tag{6.49}$$

[113] Vgl. Bovenberg und Smulder (1996)
[114] Vgl. Bovenberg und Smulder (1996)
[115] Ableitung siehe Appendix A.7.2
[116] Ableitung siehe Appendix A.7.2
[117] Herleitung siehe Appendix A.7.2
[118] Vgl. Aghion und Howitt (1998), Ryder und Heal (1973) und Xepapadeas (2005)
[119] Vgl. Cobb und Douglas (1928)
[120] Vgl. Cobb und Douglas (1928) und Bovenberg und Smulder (1995)

Weiters wird in diesem Modell das Wissen (Humankapital) nach einiger Zeit wertlos. Dies ist ökonomisch mit einer Nutzlosigkeit der Technologie zu vergleichen. Um diesen Effekt zu modellieren, wird bei der Änderungsrate des Humankapitals ($\dot{H}$) von der Humankapitalproduktionsfunktion ($W(\cdot)$) ein Teil (ι) des aktuellen Humankapitals subtrahiert.[121]

$$\dot{H} = W(K_H, Z_H) - \iota H \tag{6.50}$$

Für die Umweltkomponente können auch weitere Spezifizierungen der Funktionen getroffen werden.
Die Regeneration der Umwelt wird mittels einer Funktion $R(E)$ modelliert und die Verschmutzung wird durch den aktuellen wirtschaftsweiten Emissionsbestand P repräsentiert. Da die Regenerationsfunktion und der aktuelle wirtschaftsweite Emissionsbestand in diesem Modell die einzigen zwei Größen sind, die einen Einfluss auf die Umwelt haben, ergibt sich, dass die Änderungsrate der Umweltqualität sich aus der Differenz dieser beiden Werte ergibt.[122]

$$\dot{E} = R(E) - P \tag{6.51}$$

Für die Regenerationsfunktion ($R(E)$) ist folgender ökologischer Grundstein vorgegeben. Die Umweltqualität kann sich aufgrund natürlicher Abläufe regenerieren. Biologische Größen können nur bis zu einer Sättigungsgrenze, im Englischen carrying capacity ($\Omega = E^{max}$), wachsen, darüber übersteigt die Sterberate die Geburtenrate. Als Beispiel stelle man sich Bäume in einem Wald vor. Ab einer gewissen Anzahl von Bäumen werden sich die Gewächse gegenseitig Sonnenlicht wegnehmen, welches jedoch zum Überleben nötig ist. Somit werden die Bäume ohne genügend Sonne langsam verwelken und nach einiger Zeit absterben. Deshalb ist ein unendliches Wachstum der Natur auf einem limitieren Lebensraum eine nicht nachweisbare Annahme. Weiters führt so eine natürliche obere Schranke zur nachstehenden logistischen Regenerationsfunktion.[123]

$$R(E) = rE\left(1 - \frac{E}{\Omega}\right) \tag{6.52}$$

6.4.1 Lösung für das Wachstum des Konsums

Werden die Formeln aus dem Bovenberg/Smulder-Modell (Kapitel 6.1) vewendet und mit den Konkretisierungen der Nutzenfunktion und den Erweiterungen für Produktionsfunktion, Humankapital und Umwelt aus Kapitel 6.4 zusammengeführt, erhält man das folgende Maximierungsproblem.

[121]Vgl. Fürnkranz (2011)
[122]Vgl. Bovenberg und Smulder (1996) und Fürnkranz (2011)
[123]Vgl. Fürnkranz (2011) und Verhust (1838)

$$\max_{c,P} \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{\sigma}{\sigma - 1} (cE^\psi)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dt \tag{6.53}$$

$$\dot{K} = A_Y K_Y^\alpha Z_Y^\beta - c \qquad \text{mit } \alpha + \beta = 1 \tag{6.54}$$

$$\dot{H} = A_H K_H^\gamma Z_H^\chi - \iota H \qquad \text{mit } \gamma + \chi = 1 \tag{6.55}$$

$$\dot{E} = \varpi E \left(1 - \frac{E}{\Omega}\right) - P \tag{6.56}$$

$$K = K_Y + K_H \tag{6.57}$$

$$Z = Z_Y + Z_H = \upsilon HP + (1 - \upsilon) HP \tag{6.58}$$

Wendet man das Pontryagin'sche Maximumprinzip auf dieses Maximierungsproblem an, gelangt man zur nachstehenden Lösung[124] für das Wachstum des Konsums.

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma \left(A_Y \alpha K_Y^{\alpha-1} Z_Y^\beta + \frac{\kappa A_H \gamma K_H^{\gamma-1} Z_H^\chi}{u_c(c, E)} + \frac{\psi \frac{\sigma-1}{\sigma} \dot{E}}{E} - \rho \right) \tag{6.59}$$

Vergleicht man die Lösung des Modells (6.59) mit der Lösung[125] des Modells ohne Umweltqualität (6.60), können einige Parallelen zu den zuvor vorgestellten exogenen und endogenen Modellen gezogen werden.

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma \left(A_Y \alpha K_Y^{\alpha-1} Z_Y^\beta + \frac{\kappa A_H \gamma K_H^{\gamma-1} Z_H^\chi}{u_c(c)} - \rho \right) \tag{6.60}$$

Es ist zu erkennen, dass sich die beiden Lösungen für das Wachstum des Konsums durch den Term

$$\frac{\psi \frac{\sigma-1}{\sigma} \dot{E}}{E} \tag{6.61}$$

unterscheiden. Wie am Beginn dieses Kapitels bereits erwähnt, gilt $0 < \psi < \frac{\sigma}{(\sigma-1)}$. Weiters gilt $0 < E$ und für σ gilt, dass es strikt größer Null und strikt kleiner Eins sein muss ($0 < \sigma < 1$). Aus der Bedingung für σ folgt, dass der Term $\frac{\sigma-1}{\sigma}$ negativ ist. Somit ergibt sich für das Wachstum des Konsums im Modell mit Umweltqualität ein schwächerer Wachstumspfad als im Modell ohne Umweltqualität. Setzt man die Gleichung für $\dot{E}$ ein, ist dieser Effekt noch deutlicher zu erkennen[126].

[124]Herleitung siehe Appendix A.8.2
[125]Herleitung siehe Appendix A.8.1
[126]Da für $0 < \sigma < 1$ gilt, repräsentiert $-\acute{\sigma}(= \frac{\sigma-1}{\sigma})$ einen eingesetzen Term für σ.

$$\psi \frac{\sigma - 1}{\sigma} \frac{\varpi E \left(1 - \frac{E}{\Omega}\right) - P}{E} \tag{6.62}$$

$$\overset{\frac{\sigma-1}{\sigma}=-\acute{\sigma}}{\Longrightarrow} \psi \acute{\sigma} \left[-\varpi \left(1 - \frac{E}{\Omega}\right) + \frac{P}{E} \right] \tag{6.63}$$

Der wirtschaftsweite Emissionsbestand P wirkt sich positiv auf das Wachstum des Konsums aus. Die Regenerationsfunktion besitzt hingegen einen negativen Einfluss auf das Wachstum. Diese Auswirkungen oder sehr ähnlich veranlagte Ergebnisse sind auch in allen bisher untersuchten Modellen aufgetreten.
Ein wesentlicher Unterschied zu den bisher untersuchten Modellen ergibt sich bei der Analyse der Steady States ($\dot{c} = \dot{K} = \dot{H} = 0$, im Modell mit Umweltqualität gilt $\dot{E} = 0$). Damit sind die Steady States mit und ohne Umweltqualität in diesem eigens erweiterten Modell gleich. Es kommt jedoch im Modell mit Umweltqulität noch eine Formel (6.67) hinzu.

$$c = A_Y K_Y^{\alpha} Z_Y^{\beta} \qquad c = A_Y K_Y^{\alpha} Z_Y^{\beta} \tag{6.64}$$

$$H = \frac{A_H K_H^{\gamma} Z_H^{\chi}}{\iota} \qquad H = \frac{A_H K_H^{\gamma} Z_H^{\chi}}{\iota} \tag{6.65}$$

$$\rho = A_Y \alpha K_Y^{\alpha-1} Z_Y^{\beta} + \frac{\kappa A_H \gamma K_H^{\gamma-1} Z_H^{\chi}}{u_c(c)} \qquad \rho = A_Y \alpha K_Y^{\alpha-1} Z_Y^{\beta} + \frac{\kappa A_H \gamma K_H^{\gamma-1} Z_H^{\chi}}{u_c(c, E)} \tag{6.66}$$

$$P = \varpi E \left(1 - \frac{E}{\Omega}\right) \tag{6.67}$$

Es ist anhand Gleichung (6.67) zu erkennen, dass im Steady State keine Verschlechterung der Umwelt zustande kommt. Dies ist deshalb der Fall, weil der effektive Emissionsaustoß gleich der Regenerationsrate der Umwelt ist. Im Bovenberg/Smulder-Modell ist P keine Zustandsvariable, sondern eine Kontrollvariable (wie der Konsum c). Um nachhaltig zu agieren, sollte der soziale Planer für den Emissionsaustoß ein P wählen, sodass die Ungleichung $P < \varpi E \left(1 - \frac{E}{\Omega}\right)$ zur jeder Zeit erfüllt ist. Damit es zu einer selbstständigen Erholung der Umwelt kommt. Bei der Analyse ist noch zu beachten, dass im Modell ohne Umweltqualität für $Z = H$ gilt[127] und im Modell mit Umweltqualität für $Z = HP$ gilt. Setzt man im Modell mit Umwelqualität den effektiven Emissionausstoß gleich eins ($P = 1$), würden dieselben Voraussetzungen gelten wie im Modell ohne Umweltqualität. Hiermit muss für ein nachhaltiges Wachstum $1 \leq \varpi E \left(1 - \frac{E}{\Omega}\right)$ gelten ($\dot{E}$ ist immer positiv). Das bedeutet es können durch die Einhaltung der Gleichung $1 \leq \varpi E \left(1 - \frac{E}{\Omega}\right)$ im Modell mit Umweltqualität, dieselben Werte für Konsum, Kapital und Humankapital erreicht werden wie im Modell ohne Umweltqualität. Zugleich kann damit noch die Umwelt verbessert werden. Dementsprechend ist ein nachhaltig-ökologisches Wachstum möglich.

[127]Siehe für die Definition des Modells Appendix A.8.1

6.5 Resümee zum Bovenberg/Smulder-Modell

Das Bovenberg/Smulder-Modell ist ein endogenes ökonomisches Wachstumsmodell, welches sowohl mit dem Humankapital als auch mit einer Umweltkomponente modelliert ist. Dabei ist die Umweltvariable eine erneuerbare Ressource. Bei der Analyse dieses Modells werden die zeitlich abhängigen Dynamiken der Größen physisches Kapital, Humankapital und Umweltqualität berechnet. In diesem Modell kann der optimale Wachstumspfad auch nachhaltig sein, da bei diesem Wachstumspfad Konsum, physisches Kapital und Humankapital steigen, jedoch Emissionen und die Umweltqualität unverändert bleiben.[128] Dieses nachhaltige Wachstum wird durch die Umweltpolitik, welche durch die Einschränkungen

$$P < \varpi E \left(1 - \frac{E}{\Omega}\right), \tag{6.68}$$

$$1 \leq \varpi E \left(1 - \frac{E}{\Omega}\right) \tag{6.69}$$

im erweiterten Bovenberg/Smulder-Modell repräsentiert wird, für bestimmte ϖ und Ω möglich gemacht. Nichtsdestotrotz kommt es auch in diesem Modell zu einem schwächeren Wachstumspfad für den Konsum. Dies wird mittels dem negativen Term

$$\frac{\psi \frac{\sigma-1}{\sigma} \dot{E}}{E} \tag{6.70}$$

erwirkt.

Weiters zeigen Bovenberg und Smulder in ihren Arbeiten, dass das numerische Lösen ihres Grundmodells mit einer hohen Umweltbelastung - dies defniert den Ist-Zustand in den Industriestaaten - als Startwert, zu folgendem Resultat führt. Durch diese Ausgangslage im Modell kommt es zu einer übermäßigen Zuteilung der Ressourcen in den Forschungssektor, welcher dadurch eine sehr viel umweltschonendere Technologie entwickelt. Ist umweltfreundliche Technik in größerer Menge vorhanden, zieht der soziale Planer das Kapital langsam aus der Forschung ab und verwendet dieses Kapital zur Konsumbefriedigung. Wenn die Umwelt eine bestimmte Grenze erreichtt und die Bevölkerung Kapital gespart hat, wird dieses angesparte Kapital wieder in der Forschung angelegt.[129]

Umweltmaßnahmen der Regierung müssen laut Bovenberg und Smulder die Form einer Investition in die Forschung annehmen und nicht die einer Reglementierung von Schadstoffemissionen sein. Durch eine kontinuierlichen Einsatz des Kapitals in der Forschung würden die ganze Zeit an einem Humankapital geforscht werden, welches eine Verbesserung der Umwelt mit sich bringen würde.[130]

[128]Vgl. Bovenberg und Smulder (1995)
[129]Vgl. Bovenberg und Smulder (1995) und Bovenberg und Smulder (1996)
[130]Vgl. Bovenberg und Smulder (1995) und Bovenberg und Smulder (1996)

7 Zusammenfassung der Ergebnisse

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde die Modellierung von Schadstoffemissionen in ökonomischen Wachstumsmodellen erörtert.

Bei den klassischen exogenen Modellen von Solow (Kapitel 4.1) und Ramsey (Kapitel 4.2) mit einer Umweltgröße neigen die Produktionssektoren zu einer niedrigeren Kapazität als in den Modellen ohne Umweltgröße. Die Akkumulation des physischen Kapitals ist geringer und der Konsum der Individuen erreicht nicht das Niveau der Modelle ohne Emissionen. Allgemein können Emissionen in den Modellen mit Schadstoffen nur durch einen Produktionsstopp abgebaut werden. Jedoch können in den Modellen von Solow und Ramsey unter bestimmten Voraussetzungen Schadstoffe reduziert werden. Insbesondere ist somit der Rückweg zu einer sauberen Umwelt nur durch geringeren Konsum und weniger Nutzen für die Bevölkerung möglich. Des Weiteren haben das Solow- und Ramsey-Modell die Eigenschaft, dass der Kapitalstock vollkommen substituiert werden kann, wodurch eine laufende Evaluierung der notwenigen Ressourcen durchgeführt werden kann, folglich sehr variable eingesetzt werden können und sich daher keine Wachstumsgrenzen ergeben. In Folge dessen wird auch bei den Modellen von Solow und Ramsey von einem Wachstumsoptimismus gesprochen. Ein weitläufigeres Problem ist der exogene technischen Fortschritts. Da dieser technischen Fortschritt und damit das Wirtschaftswachstum nicht explizit modelltechnisch erklären lässt, ist eine noch genauere Betrachtung der exogenen Modelle nicht vorteilhaft.

In endogenen Wachstumsmodellen werden mittels eines sozialen Planers, der den Nutzen maximiert, die Auswirkungen von Schadstoffen auf die Umwelt gemessen. Unter Einbeziehung von Umweltvariablen P oder E in das AK-Modell (Kap. 5.1), Schumpeter-Modell (Kap. 5.2) oder Lucas-Modell (Kap. 5.3) kommt es zu einer Reduktion des Konsums im Steady State. Der Wachstumspfad verläuft in den drei endogenen Modellen mit Emissionsbestand oder einer Umweltqualität langsamer. Durch einen hohen Einsatz von Kapital und einen starken technischen Fortschritt können die Emissionen gestoppt werden. Weiters tritt mittels Aufteilung des Kapitals ($K = K_Y + K_a$) ein positiver Effekt für die Umwelt ein. Mittels einer starken Regeneration der Umwelt erholt sich die Umwelt sogar nach einiger Zeit selbständig. Somit ergibt sich aus den endogenen Wachstumsmodellen, dass eine nachhaltige, saubere und lebenswerte Umwelt eine große Herausforderung darstellt, die viele Chancen in der Anlagen von "green jobs"(Forschung) hat. Der technische Fortschritt und Humankapital helfen durch ihr starkes Wachstum dem Klimaschutz und der Umstellung des Energiesystems auf erneuerbare Energien. Damit wird in Richtung einer sauberen Umwelt gearbeitet, die damit für Wirtschaftswachstum mit einem langfristigen ökologischen Nutzen sorgt. Das Bovenberg/Smulder-Modell ist ein endogenes ökonomisches Wachstumsmodell mit Humankapital und Umweltqualität. In diesem speziellen Modell ist Wachstum und eine saubere Umwelt möglich. Es steigen der Konsum, Produktionsoutput und Humankapital zeitgleich reduzieren sich Emissionen und die Umweltqualität verbessert sich. Dies wird durch einen beträchtlichen Aufwand im Forschungssektor, welcher umweltschonendere Technologie entwickelt, umgesetzt. Nach der Erzeugung von genügend umweltfreundlicher Technik wird das Kapital langsam aus der Forschung abgezogen und für den Konsum der Individuen verwendet. Diese Investition-Konsum-Wellen wiederholen sich ständig, falls eine Abschreibung beim Humankapital existiert. Im Fall ohne Verlust des Wissens ergibt sich nur eine Investition-Konsum-Welle.

Nun kann der Schluss gezogen werden, dass ein nachhaltiges Wachstum mit sauberer Umwelt eine große Herausforderung für eine Volkwirtschaft ist. Dies kann jedoch durch Investitionen in der Forschung erreicht werden. Ein stark wachsendes Humankapital, hilft dem Klimaschutz, kann die natürliche Regeneration intensivieren und die angesammelten Schadstoffe schneller eliminieren. Somit werden eine saubere Umwelt, ein nachhaltiges Wirtschaftswachstum und ein langfristiger Nutzen für die Individuen hergestellt.

A Appendix

A.1 Annahmen

Im Appendix gilt

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1}{-c\frac{u_{cc}(c,.)}{u_c(c,.)}}$$

Außerdem wird zur Berechnung der Wachstumsraten des Konsums das Pontryagin'sche Maximumprinzip verwendet, welches mit Hilfe einer Hamilton-Funktion[131] gelöst wird.

A.2 Solow-Modell

A.2.1 Solow-Modell

$$\begin{aligned}
k &= \frac{K}{AL} \\
\Rightarrow \ln(k) &= \ln(\frac{K}{AL}) = \ln(K) - \ln(AL) = \ln(K) - (\ln(A) + \ln(L)) \\
\Rightarrow \frac{\partial \ln(k)}{\partial t} &= \frac{\partial(\ln(P) - \ln(A) - \ln(L))}{\partial t} \\
\Rightarrow \frac{\dot{k}}{k} &= \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L} \\
\frac{\dot{k}}{k} &= \frac{\dot{K}}{K} - g_A - n \\
\frac{\dot{k}}{k} &= \frac{sY - \delta K}{K} - g_A - n \\
\frac{\dot{k}}{k} &= \frac{sF(K, AL)}{K} - \delta - g_A - n \\
\frac{\dot{k}}{k} &= \frac{sf(k)AL}{K} - \delta - g_A - n \\
\dot{k} &= sf(k) - (\delta + g_A + n)k
\end{aligned}$$

[131] Vgl. Hamilton (1834)

A.2.2 Solow-Modell mit Schadstoffemissionen (P)

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{P}{AL} \\
\Rightarrow \ln(p) &= \ln(\frac{P}{AL}) = \ln(P) - \ln(AL) = \ln(P) - (\ln(A) + \ln(L)) \\
\Rightarrow \frac{\partial \ln(p)}{\partial t} &= \frac{\partial(\ln(P) - \ln(A) - \ln(L))}{\partial t} \\
\Rightarrow \frac{\dot{p}}{p} &= \frac{\dot{P}}{P} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L} \\
\frac{\dot{p}}{p} &= \frac{\dot{P}}{P} - g_A - n \\
\frac{\dot{p}}{p} &= \frac{\phi F(K, AL) - mP}{P} - (g_A + n) \\
\dot{p} &= \frac{\phi F(K, AL)p}{P} - (m + g_A + n)p \\
\dot{p} &= \frac{\phi F(K, AL)\frac{P}{AL}}{P} - (m + g_A + n)p \\
\dot{p} &= \phi\frac{F(K, AL)}{AL} - (m + g_A + n)p \\
\dot{p} &= \phi f(k) - (m + g_A + n)p
\end{aligned}
$$

A.3 Ramsey-Modell

A.3.1 Ramsey-Modell - Sozialer Planer mit Abschreibung (δ)

$$\underset{c}{max} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c) dt$$

$$\dot{k} = Y - c - \delta k = f(k) - c - \delta k$$

$$\mathcal{H}(k, \lambda) = u(c) + \lambda[f(k) - c - \delta k]$$

$$\begin{aligned}
&\lambda = u_c(c) \Rightarrow \dot{\lambda} = u_{cc}(c)\dot{c} \\
&\dot{\lambda} = \lambda\rho - \lambda(f'(k) - \delta) = \lambda(\rho - f'(k) + \delta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow u_{cc}(c)\dot{c} &= u_c(c)(\rho - f'(k) + \delta) \\
\dot{c} &= \frac{u_c(c)}{u_{cc}(c)}(\rho - f'(k) + \delta) \\
\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\eta}(f'(k) - \rho - \delta)
\end{aligned}$$

A.3.2 Ramsey-Modell - Sozialer Planer mit Abschreibung (δ) und Schadstoffemissionen (P)

$$\underset{c}{max} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c, P) dt$$

$$\begin{aligned}
\dot{k} &= Y - c - \delta k = f(k) - c - \delta k \\
\dot{P} &= \phi f(k) - mP
\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(k, P, \lambda, \mu) = u(c, P) + \lambda[f(k) - c - \delta k] + \mu[\phi f(k) - mP]$$

$$\begin{aligned}
&\lambda = u_c(c, P) \Rightarrow \dot{\lambda} = u_{cc}(c, P)\dot{c} + u_{cP}(c, P)\dot{P} \\
&\dot{\lambda} = \lambda\rho - \lambda(f'(k) - \delta) - \mu\phi f'(k) = \lambda(\rho - f'(k) + \delta) - \mu\phi f'(k) \\
&\dot{\mu} = \mu\rho + \mu m = \mu(\rho + m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow u_{cc}(c, P)\dot{c} + u_{cP}(c, P)\dot{P} &= u_c(c, P)(\rho - f'(k) + \delta) - \mu\phi f'(k) \\
\dot{c} &= \frac{u_c(c, P)}{u_{cc}(c, P)}\left(\rho - f'(k) + \delta - \frac{\mu\phi f'(k)}{u_c(c, P)} - \frac{u_{cP}(c, P)}{u_c(c, P)}\dot{P}\right) \\
\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\eta}\left[f'(k)\left(1 + \frac{\mu\phi}{u_c(c, P)}\right) - \rho - \delta + \frac{u_{cP}(c, P)}{u_c(c, P)}\dot{P}\right]
\end{aligned}$$

A.4 AK-Modell

A.4.1 AK-Modell - Sozialer Planer

$$\underset{c}{max}\int_0^\infty e^{-\rho t}u(c)dt$$

$$\dot{K} = Y - c = AK - c$$

$$\mathcal{H}(K,\lambda) = u(c) + \lambda[AK - c]$$

$$\begin{aligned}\lambda &= u_c(c) \Rightarrow \dot{\lambda} = u_{cc}(c)\dot{c}\\ \dot{\lambda} &= \lambda\rho - \lambda A = \lambda(\rho - A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow u_{cc}(c)\dot{c} &= u_c(c)(\rho - A)\\ \dot{c} &= \frac{u_c(c)}{u_{cc}(c)}(\rho - A)\\ \frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\eta}(A - \rho)\end{aligned}$$

A.4.2 AK-Modell - Sozialer Planer mit Umweltqualität (E)

$$\underset{c}{max}\int_0^\infty e^{-\rho t}u(c,E)dt$$

$$\begin{aligned}\dot{K} &= Y - c = AKz - c\\ \dot{E} &= -P(Y,z) - \theta E = -Yz^\gamma - \theta E = -AKz^{\gamma+1} - \theta E\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(K,E,\lambda,\nu) = u(c) + \lambda[AKz - c] + \nu[-AKz^{\gamma+1} - \theta E]$$

$$\begin{aligned}\lambda &= u_c(c,E) \Rightarrow \dot{\lambda} = u_{cc}(c,E)\dot{c} + u_{cE}(c,E)\dot{E}\\ \dot{\lambda} &= \lambda\rho - \lambda Az + \nu Az^{\gamma+1} = \lambda(\rho - Az) + \nu Az^{\gamma+1}\\ \dot{\nu} &= \nu\rho - \nu(-\theta) = \nu(\rho + \theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow u_{cc}(c,E)\dot{c} + u_{cE}(c,E)\dot{E} &= u_c(c,E)(\rho - Az) + \nu Az^{\gamma+1}\\ \dot{c} &= \frac{u_c(c,E)}{u_{cc}(c,E)}\left(\rho - Az + \frac{\nu Az^{\gamma+1}}{u_c(c,E)} - \frac{u_{cE}(c,E)}{u_c(c,E)}\dot{E}\right)\\ \frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\eta}\left[Az\left(1 - \frac{\nu z^\gamma}{u_c(c,E)}\right) - \rho + \frac{u_{cE}(c,E)}{u_c(c,E)}\dot{E}\right]\end{aligned}$$

A.4.3 AK-Modell - Sozialer Planer mit Abschreibung (δ)

$$\max_c \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c) dt$$

$$\dot{k} = Y - c - \delta k = Ak - c - \delta k$$

$$\mathcal{H}(k, \lambda) = u(c) + \lambda[Ak - c - \delta k]$$

$$\lambda = u_c(c) \Rightarrow \dot{\lambda} = u_{cc}(c)\dot{c}$$
$$\dot{\lambda} = \lambda\rho - \lambda(A - \delta) = \lambda(\rho - A + \delta)$$

$$\Rightarrow u_{cc}(c)\dot{c} = u_c(c)(\rho - A + \delta)$$
$$\dot{c} = \frac{u_c(c)}{u_{cc}(c)}(\rho - A + \delta)$$
$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta}(A - \rho - \delta)$$

A.4.4 AK-Modell - Sozialer Planer mit Abschreibung (δ) und Schadstoffemissionen (P)

$$\max_c \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c, P) dt$$

$$\dot{k} = Y - c - \delta k = Ak - c - \delta k$$
$$\dot{P} = \phi Ak - mP$$

$$\mathcal{H}(k, P, \lambda, \mu) = u(c, P) + \lambda[Ak - c - \delta k] + \mu[\phi Ak - mP]$$

$$\lambda = u_c(c, P) \Rightarrow \dot{\lambda} = u_{cc}(c, P)\dot{c} + u_{cP}(c, P)\dot{P}$$
$$\dot{\lambda} = \lambda\rho - \lambda(A - \delta) - \mu\phi A = \lambda(\rho - A + \delta) - \mu\phi A$$
$$\dot{\mu} = \mu\rho + \mu m = \mu(\rho + m)$$

$$\Rightarrow u_{cc}(c, P)\dot{c} + u_{cP}(c, P)\dot{P} = u_c(c, P)(\rho - A + \delta) - \mu\phi A$$
$$\dot{c} = \frac{u_c(c, P)}{u_{cc}(c, P)}\left(\rho - A + \delta - \frac{\mu\phi A}{u_c(c, P)} - \frac{u_{cP}(c, P)}{u_c(c, P)}\dot{P}\right)$$
$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta}\left[A\left(1 + \frac{\mu\phi}{u_c(c, P)}\right) - \rho - \delta + \frac{u_{cP}(c, P)}{u_c(c, P)}\dot{P}\right]$$

A.4.5 AK-Modell - Sozialer Planer mit geteiltem Kapital ($k = k_a + k_y$) und Schadstoffemissionen (P)

$$\max_c \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c,P)dt$$

$$\begin{aligned}
\dot{k} &= Ak_y - c \\
\dot{P} &= \phi A k_y - \psi k_a - mP \\
k &= k_a + k_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}(k_y, P, \lambda, \mu) = u(c,P) + \lambda[Ak_y - c] + \mu[\phi A k_y - \psi k_a - mP] \\
\overset{k_y = k - k_a}{\Longrightarrow} &\mathcal{H}(k, P, \lambda, \mu) = u(c,P) + \lambda[Ak - Ak_a - c] + \mu[\phi A k - (\phi A + \psi)k_a - mP]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda = u_c(c,P) \Rightarrow \dot{\lambda} = u_{cc}(c,P)\dot{c} + u_{cP}(c,P)\dot{P} \\
&\dot{\lambda} = \lambda\rho - \lambda A + \mu\phi A = \lambda(\rho - A) + \mu\phi A \\
&\dot{\mu} = \mu\rho + \mu m = \mu(\rho + m)
\end{aligned}$$

Falls $k_a > 0$ gilt, dann muss aufgrund der Bedingungen erster Ordnung für k_a die Gleichung $\lambda A = \mu(\phi A + \psi)$ gelten, setzt man nun in die Formel $\dot{\lambda} = \lambda(\rho - A) + \mu\phi A$ ein, kommt man auf folgendes Ergebnis.

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= \lambda\ (\rho - A) + \frac{\lambda A}{\phi A + \psi}\phi A \\
\dot{\lambda} &= \lambda\left(\rho - A + \frac{A\phi A}{\phi A + \psi}\right) \\
\dot{\lambda} &= \lambda\left(\rho + \frac{-A(\phi A + \psi) + A\phi A}{\phi A + \psi}\right) \\
\dot{\lambda} &= \lambda\left(\rho - \frac{\psi A}{\phi A + \psi}\right)
\end{aligned}$$

Weil das Wachstum des Konsums unbeschränkt ist und die Wertigkeit des Kapitals mit der Zeit abnimmt[132], muss für den Schattenpreis des Konsums (λ) der Limes $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$ sein. Aus diesen Voraussetzungen folgt die nächste Ungleichung.

$$\begin{aligned}
0 < \rho - \frac{\psi A}{\phi A + \psi} \\
\rho < \frac{\psi A}{\phi A + \psi}
\end{aligned}$$

[132] Da immer weniger Zeit zum Konsumieren des Geldes bleibt.

Weitere Umformungen ergeben:

$$
\begin{aligned}
\rho &< \frac{\psi A}{\phi A + \psi} \\
\rho\phi A + \rho\psi &< \psi A \\
\rho\phi A &< \psi A - \rho\psi \\
\frac{A\rho}{(A-\rho)} &< \frac{\psi}{\phi} \\
\frac{\psi}{\phi} &> \frac{A\rho}{(A-\rho)}
\end{aligned}
$$

A.5 Schumpeter-Modell

A.5.1 Produktionsfunktion

$$\begin{aligned}
&\max_{x(i)} Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^1 B(i)x(i)^\alpha di \\
&s.t. \int_0^1 B(i)x(i)di = K
\end{aligned}$$

Die optimale Bedingung für jedes $x(i)$ ergibt sich durch folgende Umformungen, dabei ist ϑ der Lagrange-Multiplikator:

$$\begin{aligned}
&\alpha B(i)L_Y^{1-\alpha}x(i)^{\alpha-1} = \vartheta B(i) \\
&\alpha L_Y^{1-\alpha}x(i)^{\alpha-1} = \vartheta \\
&L_Y^{1-\alpha}x(i)^{\alpha-1} = \frac{\vartheta}{\alpha} \\
&x(i)^{\alpha-1} = \frac{\vartheta}{\alpha}L_Y^{\alpha-1} \\
&x(i) = (\frac{\vartheta}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}L_Y
\end{aligned}$$

Da $x(i)$ unabhängig von i ist, folgt:

$$\begin{aligned}
&x(i) = (\frac{\vartheta}{\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}L_Y \equiv x \\
&\text{und somit} \\
&\int_0^1 B(i)x(i)^\alpha di \stackrel{x(i)=x}{\Longrightarrow} x^\alpha \int_0^1 B(i)di = x^\alpha B \stackrel{x=\frac{K}{B}}{\Longrightarrow} \left(\frac{K}{B}\right)^\alpha B \\
&\Rightarrow\ Y = L_Y^{1-\alpha}\left(\frac{K}{B}\right)^\alpha B = K^\alpha(BL_Y)^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

A.5.2 Schumpeter-Modell - Sozialer Planer

$$\max_c \int_0^\infty e^{-\rho t}u(c)dt$$

$$\begin{aligned}
&\dot{K} = Y - c = K^\alpha(BL_Y)^{1-\alpha} - c \\
&\dot{B} = \xi\sigma BL_R
\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(K, B, \lambda, \zeta) = u(c) + \lambda[K^{\alpha}(BL_Y)^{1-\alpha}z - c] + \zeta[\xi\sigma BL_R]$$

$$\lambda = u_c(c) \Rightarrow \dot{\lambda} = u_{cc}(c)\dot{c}$$
$$\dot{\lambda} = \lambda\rho - \lambda(\alpha K^{\alpha-1}(BL_Y)^{1-\alpha}) = \lambda(\rho - \alpha\frac{Y}{K})$$
$$\dot{\zeta} = \zeta\rho - \zeta\xi\sigma L_R = \zeta(\rho - \xi\sigma L_R)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow u_{cc}(c)\dot{c} &= u_c(c)(\rho - \alpha\frac{Y}{K}) \\
\dot{c} &= \frac{u_c(c)}{u_{cc}(c)}(\rho - \alpha\frac{Y}{K}) \\
\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\eta}(\alpha\frac{Y}{K} - \rho) \\
\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\eta}(\alpha K^{\alpha-1}(BL_Y)^{\alpha-1} - \rho)
\end{aligned}$$

A.5.3 Schumpeter-Modell - Sozialer Planer mit Umweltqualität (E)

$$\max_{c} \int_0^{\infty} e^{-\rho t}u(c, E)dt$$

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= Y - c = K^{\alpha}(BL_Y)^{1-\alpha}z - c \\
\dot{B} &= \xi\sigma BL_R \\
\dot{E} &= -Yz^{\gamma} - \theta E = -K^{\alpha}(BL_Y)^{1-\alpha}z^{\gamma+1} + \theta E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(K, B, \lambda, \nu, \zeta) =& u(c, E) + \lambda[K^{\alpha}(BL_Y)^{1-\alpha}z - c] + \nu[-K^{\alpha}(BL_Y)^{1-\alpha}z^{\gamma+1} + \theta E] + \\
&+ \zeta[\xi\sigma BL_R]
\end{aligned}$$

$$\lambda = u_c(c, E) \Rightarrow \dot{\lambda} = u_{cc}(c, E)\dot{c} + u_{cE}(c, E)\dot{E}$$
$$\dot{\lambda} = \lambda\rho - \left[\lambda(\alpha K^{\alpha-1}(BL_Y)^{1-\alpha}z) - \nu\alpha K^{\alpha-1}(BL_Y)^{1-\alpha}z^{\gamma+1}\right] = \lambda(\rho - \alpha\frac{Y}{K}) + \nu\alpha\frac{Y}{K}z^{\gamma}$$
$$\dot{\nu} = \nu\rho - \nu(-\theta) = \nu(\rho + \theta)$$
$$\dot{\zeta} = \zeta\rho - \zeta\xi\sigma L_R = \zeta(\rho - \xi\sigma L_R)$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow u_{cc}(c,E)\dot{c} + u_{cE}(c,E)\dot{E} &= u_c(c,E)(\rho - \alpha\frac{Y}{K}) + \nu\alpha\frac{Y}{K}z^\gamma \\
u_{cc}(c,E)\dot{c} &= u_c(c,E)\left(\rho - \alpha\frac{Y}{K} + \frac{\nu\alpha\frac{Y}{K}z^\gamma}{u_c(c,E)} - \frac{u_{cE}(c,E)}{u_c(c,E)}\dot{E}\right) \\
\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\eta}\left[\alpha\frac{Y}{K}\left(1 - \frac{\nu z^\gamma}{u_c(c,E)}\right) - \rho + \frac{u_{cE}(c,E)}{u_c(c,E)}\dot{E}\right] \\
\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\eta}\left[\alpha K^{\alpha-1}(BL_Y)^{1-\alpha}\left(1 - \frac{\nu z^\gamma}{u_c(c,E)}\right) - \rho + \frac{u_{cE}(c,E)}{u_c(c,E)}\dot{E}\right]
\end{aligned}
$$

A.6 Lucas-Modell

A.6.1 Lucas-Modell - Sozialer Planer mit Abschreibung (δ)

$$\max_{c} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c) dt$$

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= A_Y K^\alpha (L_Y H)^{1-\alpha} - c - \delta K \\
\dot{H} &= A_H L_H H - \iota H
\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(K, H, \lambda, \kappa) = u(c) + \lambda[A_Y K^\alpha (L_Y H)^{1-\alpha} - c - \delta K] + \kappa[A_H L_H H - \iota H]$$

$$\begin{aligned}
&\lambda = u_c(c) \Rightarrow \dot{\lambda} = u_{cc}(c)\dot{c} \\
&\dot{\lambda} = \lambda\rho - \lambda(A_Y \alpha K^{\alpha-1}(L_Y H)^{1-\alpha} - \delta) = \lambda(\rho - A_Y \alpha K^{\alpha-1}(L_Y H)^{1-\alpha} + \delta) \\
&\dot{\kappa} = \kappa\rho - \kappa(A_H L_H - \iota) = \kappa(\rho - A_H L_H + \iota)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow u_{cc}(c)\dot{c} &= u_c(c)(\rho - \alpha A_Y K^{\alpha-1}(L_Y H)^{1-\alpha} + \delta) \\
\dot{c} &= \frac{u_c(c)}{u_{cc}(c)}(\rho - \alpha A_Y K^{\alpha-1}(L_Y H)^{1-\alpha} + \delta) \\
\frac{\dot{c}}{c} &= \frac{1}{\eta}(\alpha A_Y K^{\alpha-1}(L_Y H)^{1-\alpha} - \rho - \delta)
\end{aligned}$$

A.6.2 Lucas-Modell - Sozialer Planer mit Abschreibung (δ) und Schadstoffemissionen (P)

$$\max_{c} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c, P) dt$$

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= A_Y K^\alpha (L_Y H)^{1-\alpha} - c - \delta K \\
\dot{H} &= A_H L_H H - \iota H \\
\dot{P} &= \phi A_Y K^\alpha (L_Y H)^{1-\alpha} - mP
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(K, P, H, \lambda, \mu, \kappa) =& u(c, P) + \lambda[A_Y K^\alpha (L_Y H)^{1-\alpha} - c - \delta K] + \\
&+ \mu[\phi A_Y K^\alpha (L_Y H)^{1-\alpha} - mP] + \kappa[A_H L_H H - \iota H]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda = u_c(c,P) \Rightarrow \dot{\lambda} = u_{cc}(c,P)\dot{c} + u_{cP}(c,P)\dot{P} \\
&\dot{\lambda} = \lambda\rho - \lambda(\alpha A_Y K^{\alpha-1}(L_Y H)^{1-\alpha} - \delta) - \mu\phi\alpha A_Y K^{\alpha-1}(L_Y H)^{1-\alpha} = \\
&\quad = \lambda(\rho - A_Y \alpha K^{\alpha-1}(L_Y H)^{1-\alpha} + \delta) - \mu\phi\alpha A_Y K^{\alpha-1}(L_Y H)^{1-\alpha} \\
&\dot{\kappa} = \kappa\rho - \kappa(A_H L_H - \iota) = \kappa(\rho - A_H L_H + \iota) \\
&\dot{\mu} = \mu\rho - \mu(-m) = \mu(\rho + m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & u_{cc}(c,P)\dot{c} + u_{cP}(c,P)\dot{P} = u_c(c,P)\left(\rho - A_Y\alpha K^{\alpha-1}(L_Y H)^{1-\alpha} + \delta\right) - \\
& - \mu\phi\alpha A_Y K^{\alpha-1}(L_Y H)^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{cc}(c,P)\dot{c} = u_c(c,P)\Bigg(&\rho - A_Y\alpha K^{\alpha-1}(L_Y H)^{1-\alpha} + \delta - \frac{\mu\phi\alpha A_Y K^{\alpha-1}(L_Y H)^{1-\alpha}}{u_c(c,P)} - \\
&- \frac{u_{cP}(c,P)}{u_c(c,P)}\dot{P}\Bigg) \\
\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\eta}&\left[\alpha A_Y K^{\alpha-1}(L_Y H)^{1-\alpha}\left(1 + \frac{\mu\phi}{u_c(c,P)}\right) - \rho - \delta + \frac{u_{cP}(c,P)}{u_c(c,P)}\dot{P}\right]
\end{aligned}$$

A.7 Bovenberg/Smulder-Modell

$$\max_{c,P} \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c,E)dt$$

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= Y - c = F(E, K_Y, Z_Y) - c \\
\dot{H} &= V(E, K_H, Z_H) \\
\dot{E} &= M(E, P)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K &= K_Y + K_H \\
Z &= Z_Y + Z_H
\end{aligned}$$

Die Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(K, H, E, \lambda, \kappa, \nu, \tau, \varrho) = u(c, E) + \lambda[F(E, K_Y, Z_Y) - c] + \kappa[V(E, K_H, Z_H)] + \\
+ \nu[M(E, P)] + \tau[K - K_Y - K_H] + \varrho[HP - Z_Y - Z_H]
\end{aligned}$$

Die Bedingungen erster Ordnung

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = u_c(c, E) - \lambda \stackrel{!}{=} 0 \\
&\Rightarrow \lambda = u_c(c, E) \\
&\Rightarrow \dot{\lambda} = \dot{u}_c(c, E) = u_{cc}(c, E)\dot{c} + u_{cE}(c, E)\dot{E}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K_Y} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial K_Y} - \tau \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K_H} &= \kappa \frac{\partial V}{\partial K_H} - \tau \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad \lambda \frac{\partial F}{\partial K_Y} &= \kappa \frac{\partial V}{\partial K_H}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z_Y} &= \lambda \frac{\partial F}{\partial Z_Y} - \varrho \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z_H} &= \kappa \frac{\partial V}{\partial Z_H} - \varrho \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad \lambda \frac{\partial F}{\partial Z_Y} &= \kappa \frac{\partial V}{\partial Z_H}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} &= \nu M_P(E,P) + \varrho H \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \ \varrho H &= -\nu M_P(E,P) \\
\Rightarrow \ \lambda \frac{\partial F}{\partial Z_Y} H &= -\nu M_P(E,P)
\end{aligned}
$$

Die kanonische Differentialgleichungen

Ramsey-Regel

$$
\begin{aligned}
& \dot{\lambda} = \rho\lambda - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} \\
& \dot{\lambda} = \rho\lambda - \tau \\
& \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \rho - \frac{\tau}{\lambda} \\
\stackrel{\dot{u}_c(c,E)=\dot{\lambda}}{\Longrightarrow} \quad & \frac{\dot{u}_c(c,E)}{u_c(c,E)} = \rho - \frac{\tau}{\lambda} \\
\stackrel{\frac{\tau}{\lambda}=:r}{\Longrightarrow} \quad & \frac{\dot{u}_c(c,E)}{u_c(c,E)} = \rho - r \\
\Rightarrow \quad & \frac{u_{cc}(c,E)\dot{c} + u_{cE}(c,E)\dot{E}}{u_c(c,E)} = \rho - r
\end{aligned}
$$

Abitrage Bedingung

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} &= \rho\lambda - \dot{\lambda} \\
\tau &= \rho\lambda - \dot{\lambda} \\
\stackrel{\tau=\lambda\frac{\partial F}{\partial K_Y}}{\Longrightarrow} \quad \lambda\frac{\partial F}{\partial K_Y} &= \rho\lambda - \dot{\lambda} \\
\frac{\partial F}{\partial K_Y} &= \rho - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \\
\frac{\partial F}{\partial K_Y} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} &= \rho \\
\stackrel{\rho=r+\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial F}{\partial K_Y} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} &= r + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \\
\frac{\partial F}{\partial K_Y} &= r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} &= \rho\kappa - \dot{\kappa} \\
\varrho P &= \rho\kappa - \dot{\kappa} \\
\overset{\varrho=\kappa\frac{\partial V}{\partial Z_H}}{\Longrightarrow} \quad \kappa\frac{\partial V}{\partial Z_H}P &= \rho\kappa - \dot{\kappa} \\
\frac{\partial V}{\partial Z_H}P &= \rho - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} \\
\frac{\partial V}{\partial Z_H}P + \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} &= \rho \\
\overset{\rho=r+\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial V}{\partial Z_H}P + \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} &= r + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \\
\frac{\partial V}{\partial Z_H}P + \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} &= r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E} &= \rho\nu - \dot{\nu} \\
u_E(c,E) + \lambda\frac{\partial F}{\partial E} + \nu u_E(c,E) &= \rho\nu - \dot{\nu} \\
\lambda\left(\frac{1}{\lambda}u_E(c,E) + \frac{\partial F}{\partial E}\right) + \nu u_E(c,E) &= \rho\nu - \dot{\nu} \\
\frac{\lambda}{\nu}\left(\frac{1}{\lambda}u_E(c,E) + \frac{\partial F}{\partial E}\right) + u_E(c,E) &= \rho - \frac{\dot{\nu}}{\nu} \\
\frac{1}{\frac{\nu}{\lambda}}\left(\frac{u_E(c,E)}{u_c(c,E)} + \frac{\partial F}{\partial E}\right) + u_E(c,E) + \frac{\dot{\nu}}{\nu} &= \rho \\
\overset{\rho=r+\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{\frac{\nu}{\lambda}}\left(\frac{u_E(c,E)}{u_c(c,E)} + \frac{\partial F}{\partial E}\right) + u_E(c,E) + \frac{\dot{\nu}}{\nu} &= r + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \\
\frac{1}{\frac{\nu}{\lambda}}\left(\frac{u_E(c,E)}{u_c(c,E)} + \frac{\partial F}{\partial E}\right) + u_E(c,E) + \frac{\dot{\nu}}{\nu} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} &= r
\end{aligned}
$$

A.7.1 Sensitivitätsanalyse - Optimale Zuteilung

Cobb-Douglas-Funktion

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial K_Y} &= \frac{\kappa}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial K_H}\\
A(E)\alpha K_Y^{\alpha-1}Z_Y^{\beta} &= \frac{\kappa}{\lambda}A(E)\gamma K_H^{\gamma-1}Z_H^{\chi}\\
\frac{\alpha}{\gamma}K_Y^{\alpha-1}Z_Y^{\beta} &= \frac{\kappa}{\lambda}K_H^{\gamma-1}Z_H^{\chi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial Z_Y} &= \frac{\kappa}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial Z_H}\\
A(E)K_Y^{\alpha}\beta Z_Y^{\beta-1} &= \frac{\kappa}{\lambda}A(E)K_H^{\gamma}\chi Z_H^{\chi-1}\\
\frac{\beta}{\chi}K_Y^{\alpha}Z_Y^{\beta-1} &= \frac{\kappa}{\lambda}K_H^{\gamma}Z_H^{\chi-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial Z_Y}H &= -\frac{\nu}{\lambda}M_P(E,P)\\
A(E)K_Y^{\alpha}\beta Z_Y^{\beta-1}H &= -\frac{\nu}{\lambda}(-1)\\
A(E)\beta K_Y^{\alpha}Z_Y^{\beta-1}H &= \frac{\nu}{\lambda}
\end{aligned}$$

CES-Funktion

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial K_Y} &= A(E)\left(-\frac{1}{\varsigma}\left(\omega K_Y^{-\varsigma}+(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma}\right)^{-\frac{1}{\varsigma}-1}\left(\omega(-\varsigma)K_Y^{-\varsigma-1}\right)\right)\\
&= A(E)\frac{\omega K_Y^{-\varsigma-1}}{\left(\omega K_Y^{-\varsigma}+(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma}\right)^{\frac{1+\varsigma}{\varsigma}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial K_H} &= A(E)\left(-\frac{1}{\varkappa}\left(\varphi K_H^{-\varkappa}+(1-\varphi)Z_H^{-\varkappa}\right)^{-\frac{1}{\varkappa}-1}\left(\varphi(-\varkappa)K_H^{-\varkappa-1}\right)\right)\\
&= A(E)\frac{\varphi K_H^{-\varkappa-1}}{\left(\varphi K_H^{-\varkappa}+(1-\varphi)Z_H^{-\varkappa}\right)^{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial K_Y} &= \frac{\kappa}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial K_H} \\
A(E)\frac{\omega K_Y^{-\varsigma-1}}{\left(\omega K_Y^{-\varsigma}+(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma}\right)^{\frac{1+\varsigma}{\varsigma}}} &= \frac{\kappa}{\lambda}A(E)\frac{\varphi K_H^{-\varkappa-1}}{\left(\varphi K_H^{-\varkappa}+(1-\varphi)Z_H^{-\varkappa}\right)^{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}} \\
\frac{\omega}{\varphi}\frac{K_Y^{-\varsigma-1}}{\left(\omega K_Y^{-\varsigma}+(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma}\right)^{\frac{1+\varsigma}{\varsigma}}} &= \frac{\kappa}{\lambda}\frac{K_H^{-\varkappa-1}}{\left(\varphi K_H^{-\varkappa}+(1-\varphi)Z_H^{-\varkappa}\right)^{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial Z_Y} &= A(E)\left(-\frac{1}{\varsigma}\left(\omega K_Y^{-\varsigma}+(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma}\right)^{-\frac{1}{\varsigma}-1}\left((1-\omega)(-\varsigma)Z_Y^{-\varsigma-1}\right)\right) \\
&= A(E)\frac{(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma-1}}{\left(\omega K_Y^{-\varsigma}+(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma}\right)^{\frac{1+\varsigma}{\varsigma}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial Z_H} &= A(E)\left(-\frac{1}{\varkappa}\left(\varphi K_H^{-\varkappa}+(1-\varphi)Z_H^{-\varkappa}\right)^{-\frac{1}{\varkappa}-1}\left((1-\varphi)(-\varkappa)Z_H^{-\varkappa-1}\right)\right) \\
&= A(E)\frac{(1-\varphi)Z_H^{-\varkappa-1}}{\left(\varphi K_H^{-\varkappa}+(1-\varphi)Z_H^{-\varkappa}\right)^{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial Z_Y} &= \frac{\kappa}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial Z_H} \\
A(E)\frac{(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma-1}}{\left(\omega K_Y^{-\varsigma}+(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma}\right)^{\frac{1+\varsigma}{\varsigma}}} &= \frac{\kappa}{\lambda}A(E)\frac{(1-\varphi)Z_H^{-\varkappa-1}}{\left(\varphi K_H^{-\varkappa}+(1-\varphi)Z_H^{-\varkappa}\right)^{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}} \\
\frac{(1-\omega)}{(1-\varphi)}\frac{Z_Y^{-\varsigma-1}}{\left(\omega K_Y^{-\varsigma}+(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma}\right)^{\frac{1+\varsigma}{\varsigma}}} &= \frac{\kappa}{\lambda}\frac{Z_H^{-\varkappa-1}}{\left(\varphi K_H^{-\varkappa}+(1-\varphi)Z_H^{-\varkappa}\right)^{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial Z_Y}H &= -\frac{\nu}{\lambda}M_P(E,P) \\
-\frac{1}{\varsigma}\left(\omega K_Y^{-\varsigma}+(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma}\right)^{-\frac{1}{\varsigma}-1}\left((1-\omega)(-\varsigma)Z_Y^{-\varsigma-1}\right)H &= -\frac{\nu}{\lambda}(-1) \\
\frac{(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma-1}}{\left(\omega K_Y^{-\varsigma}+(1-\omega)Z_Y^{-\varsigma}\right)^{\frac{1+\varsigma}{\varsigma}}}H &= \frac{\nu}{\lambda}
\end{aligned}$$

A.7.2 Ableitungen der Nutzenfunktion

$$\begin{aligned}
u(c,E) =& \frac{\sigma}{\sigma-1}(cE^{\psi})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \\
=& \frac{\sigma}{\sigma-1}c^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}(E^{\psi})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \\
=& \frac{\sigma}{\sigma-1}c^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}E^{\psi\frac{\sigma-1}{\sigma}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_c(c,E) =& \frac{\sigma}{\sigma-1}\frac{\sigma-1}{\sigma}c^{-\frac{1}{\sigma}}(E^{\psi})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \\
=& c^{-\frac{1}{\sigma}}E^{\psi\frac{\sigma-1}{\sigma}}
\end{aligned}$$

$$u_{cc}(c,E) = -\frac{1}{\sigma}c^{-\frac{1+\sigma}{\sigma}}E^{\psi\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

$$\begin{aligned}
u_E(c,E) =& \frac{\sigma}{\sigma-1}\psi\frac{\sigma-1}{\sigma}c^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}E^{(\psi\frac{\sigma-1}{\sigma})-1} \\
=& \psi c^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}E^{(\psi\frac{\sigma-1}{\sigma})-1}
\end{aligned}$$

$$u_{EE}(c,E) = \psi\left[\left(\psi\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)-1\right]c^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}E^{(\psi\frac{\sigma-1}{\sigma})-2}$$

$$u_{cE}(c,E) = \psi\frac{\sigma-1}{\sigma}c^{-\frac{1}{\sigma}}E^{\left(\psi\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)-1}$$

Verhältnis des Grenznutzens

$$\begin{aligned}
\frac{u_E(c,E)}{u_c(c,E)} &= \frac{c^{-\frac{1}{\sigma}}E^{\psi\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\psi c^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}E^{(\psi\frac{\sigma-1}{\sigma})-1}} \\
&= \psi c^{\frac{\sigma-1}{\sigma}-(-\frac{1}{\sigma})}E^{(\psi\frac{\sigma-1}{\sigma})-1-(\psi\frac{\sigma-1}{\sigma})} \\
&= \psi c^{\frac{\sigma-1+1}{\sigma}}E^{-1} \\
&= \psi\frac{c^{\frac{\sigma}{\sigma}}}{E} \\
&= \psi\frac{c}{E}
\end{aligned}$$

Folgerungen aus der zweiten Ableitungen der Nutzenfunktion

$$
\begin{aligned}
&\left(\psi\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)-1= \\
=&\frac{\psi(\sigma-1)-\sigma}{\sigma}= \\
=&\frac{\psi\sigma-\psi-\sigma}{\sigma}
\end{aligned}
$$

Da $0<\sigma$ gilt folgt

$$
\begin{aligned}
\psi\sigma-\psi-\sigma &< 0 \\
\psi(\sigma-1)-\sigma &< 0 \\
\psi(\sigma-1) &< \sigma \\
\psi &< \frac{\sigma}{(\sigma-1)}
\end{aligned}
$$

A.7.3 Sensitivitätsanalyse - Ramsey Rule

$$
\begin{aligned}
r =&\rho-\frac{\dot{u}_c(c,E)}{u_c(c,E)} \\
=&\rho-\frac{u_{cc}(c,E)\dot{c}+u_{cE}(c,E)\dot{E}}{u_c(c,E)} \\
=&\rho-\frac{u_{cc}(c,E)\dot{c}}{u_c(c,E)}+\frac{u_{cE}(c,E)\dot{E}}{u_c(c,E)} \\
=&\rho-\frac{-\frac{1}{\sigma}c^{-\frac{1+\sigma}{\sigma}}E^{\psi\frac{\sigma-1}{\sigma}}\dot{c}}{c^{-\frac{1}{\sigma}}E^{\psi\frac{\sigma-1}{\sigma}}}+\frac{\psi\frac{\sigma-1}{\sigma}c^{-\frac{1}{\sigma}}E^{\left(\psi\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)-1}\dot{E}}{c^{-\frac{1}{\sigma}}E^{\psi\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \\
=&\rho+\frac{\dot{c}}{c}\frac{1}{\sigma}+\frac{\psi\frac{\sigma-1}{\sigma}\dot{E}}{E}
\end{aligned}
$$

A.8 Erweitertes Bovenberg/Smulder-Modell

A.8.1 Erweitertes Bovenberg/Smulder-Modell - Sozialer Planer

$$\max_{c} \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{\sigma}{\sigma - 1} c^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dt$$

$$\begin{aligned} \dot{K} &= A_Y K_Y^\alpha Z_Y^\beta - c \\ \dot{H} &= A_H K_H^\gamma Z_H^\chi - \iota H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= K_Y + K_H \\ Z &= Z_Y + Z_H = H \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(K, H, \lambda, \kappa) = u(c) + \lambda[A_Y K_Y^\alpha Z_Y^\beta - c] + \kappa[A_Y K_H^\gamma Z_Y^\chi - \iota H]$$

$$\begin{aligned} &\lambda = u_c(c) \Rightarrow \dot{\lambda} = u_{cc}(c)\dot{c} \\ &\dot{\lambda} = \lambda\rho - \lambda(A_Y \alpha (K - K_H)^{\alpha-1} Z_Y^\beta) - \kappa(A_Y \gamma (K - K_Y)^{\gamma-1} Z_Y^\chi) = \\ &\quad = \lambda(\rho - A_Y \alpha (K - K_H)^{\alpha-1} Z_Y^\beta) - \kappa A_H \gamma (K - K_Y)^{\gamma-1} Z_H^\chi \\ &\dot{\kappa} = \kappa\rho - \kappa(-\iota) = \kappa(\rho + \iota) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{cc}(c)\dot{c} &= u_c(c)(\rho - A_Y \alpha (K - K_H)^{\alpha-1} Z_Y^\beta) - \kappa A_H \gamma (K - K_Y)^{\gamma-1} Z_H^\chi \\ \dot{c} &= \frac{u_c(c)}{u_{cc}(c)} \left(\rho - A_Y \alpha (K - K_H)^{\alpha-1} Z_Y^\beta - \frac{\kappa A_H \gamma (K - K_Y)^{\gamma-1} Z_H^\chi}{u_c(c)} \right) \\ \frac{\dot{c}}{c} &= \sigma \left(A_Y \alpha K_Y^{\alpha-1} Z_Y^\beta + \frac{\kappa A_H \gamma K_H^{\gamma-1} Z_H^\chi}{u_c(c)} - \rho \right) \end{aligned}$$

A.8.2 Erweitertes Bovenberg/Smulder-Modell - Sozialer Planer mit Umwelt (E)

$$\max_{c,P} \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{\sigma}{\sigma-1}(cE^{\psi})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dt$$

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= A_Y K_Y^{\alpha} Z_Y^{\beta} - c \\
\dot{H} &= A_H K_H^{\gamma} Z_H^{\chi} - \iota H \\
\dot{E} &= \varpi E \left(1 - \frac{E}{\Omega}\right) - P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K &= K_Y + K_H \\
Z &= Z_Y + Z_H = HP
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(K,E,H,\lambda,\kappa,\nu) &= u(c,E) + \lambda[A_Y K_Y^{\alpha} Z_Y^{\beta} - c] + \kappa[A_Y K_H^{\gamma} Z_Y^{\chi} - \iota H] \\
&+ \nu\left[\varpi E - \frac{\varpi E^2}{\Omega} - P\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda = u_c(c,E) \Rightarrow \dot{\lambda} = u_{cc}(c,E)\dot{c} + u_{cE}(c,E)\dot{E} \\
&\dot{\lambda} = \lambda\rho - \lambda(A_Y\alpha(K-K_H)^{\alpha-1}Z_Y^{\beta}) - \kappa(A_Y\gamma(K-K_Y)^{\gamma-1}Z_H^{\chi}) = \\
&\quad = \lambda(\rho - A_Y\alpha(K-K_H)^{\alpha-1}Z_Y^{\beta}) - \kappa A_H\gamma(K-K_Y)^{\gamma-1}Z_H^{\chi} \\
&\dot{\nu} = \nu\rho - \nu\left(\varpi - \frac{\varpi E}{\Omega}\right) = \nu\left(\rho - \varpi + \frac{\varpi E}{\Omega}\right) \\
&\dot{\kappa} = \kappa\rho - \kappa(-\iota) = \kappa(\rho + \iota)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & u_{cc}(c,E)\dot{c} + u_{cE}(c,E)\dot{E} = u_c(c,E)(\rho - A_Y\alpha(K-K_H)^{\alpha-1}Z_Y^{\beta}) - \\
& - \kappa A_H\gamma(K-K_Y)^{\gamma-1}Z_H^{\chi} \\
& u_{cc}(c,E)\dot{c} = u_c(c,E)\Bigg(\rho - A_Y\alpha(K-K_H)^{\alpha-1}Z_Y^{\beta} - \frac{\kappa A_H\gamma(K-K_Y)^{\gamma-1}Z_H^{\chi}}{u_c(c,E)} - \\
& - \frac{u_{cE}(c,E)}{u_c(c,E)}\dot{E}\Bigg)
\end{aligned}$$

$$\dot{c} = \frac{u_{c,E}(c)}{u_{cc}(c,E)} \left(\rho - A_Y \alpha (K - K_H)^{\alpha-1} Z_Y^{\beta} - \frac{\kappa A_H \gamma (K - K_Y)^{\gamma-1} Z_H^{\chi}}{u_c(c,E)} - \frac{u_{cE}(c,E)}{u_c(c,E)} \dot{E} \right)$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma \left(A_Y \alpha K_Y^{\alpha-1} Z_Y^{\beta} + \frac{\kappa A_H \gamma K_H^{\gamma-1} Z_H^{\chi}}{u_c(c,E)} + \frac{\psi \frac{\sigma-1}{\sigma} \dot{E}}{E} - \rho \right)$$

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] Aghion, P.; Howitt, P. (1998): *Endogenous Growth Theory*, The MIT Press, Seite 151 - 171.

[2] Ahluwalia, M. S. (1976): *Income Distribution and Development: Some Stylized Fact*, American Economic Review 66 (2), Seite 128 - 135.

[3] Arrow, K.; Chenery, H. B.; Minhas, B. S.; Solow, R. M. (1961): *Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency*, Review of Economics and Statistics 43 (3), Seite 225–250.

[4] Barro, R. J. (2000): *Inequality and Growth in a Panel of Countries*, Journal of Economic Growth 5 (1), Seite 5 - 32.

[5] Borgese, E. M. (1986):*The Future of the Oceans: A Report to the Club Rome*, Harvest House Limited Pub.

[6] Bovenberg, A. L.; Smulder, S. (1995): *Environment Quality and Pollution-augmenting Technological in a Two-sector endogenous Growth Model*, Journal of Public Economics Growth 57, Seite 369 - 391.

[7] Bovenberg, A. L.; Smulder, S. (1996): *Transitional Impacts of Environmental Policy in an Endogenous Growth Model*, International Economic Review Vol. 37 No. 4 , Seite 861 - 893.

[8] Bruyn, S. M. de; Heintz, R. J. (2002): *The Environment Kuznets Curve Hypothesis*, Handbook of Environmental and Resource Economics new Edition, Seite 656 - 677.

[9] Carlowitz, H. C. von (1713): *haußwirthliche Nachricht und Naturmäßige Anweisung zur wilden Baum-Zucht*, Freiberg.

[10] Cass, H. (1965): *Optimal Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation*, Review of Economic Studies 32, Seite 233 - 240.

[11] Cobb, C. W.; Douglas, P. H. (1928): *A Theory of Production*, The American Economic Review 18 (1), Seite 139 – 165

[12] Europäische Kommission (2010): *EUROPA 2020 - Eine Strategie für intelligentes, nachhaltiges und integratives Wachstum*, Mitteilung der Kommission von 3.3.2010.

[13] Fürnkranz-Prskawetz, A. (2011): *Umwelt- und Bevölkerungsökonomie*, Folien zur Vorlesung an der TU Wien.

[14] Gowdy, J. M.; McDaniel, C. N. (1999): *The Physical Destruction of Nauru - an Example of Weak Sustainability*, Land Economics 75, Seite 333 - 338.

[15] Gradus, R.; Smulders, S. (1992): *The Trade-off Between Environmental Care and Long-term Growth - Pollution in Three Growth Models*, Journal of Economic Growth 58, Seite 25 - 51.

[16] Grossman, G. (1994): *Pollution and Growth: What Do We Know*, Cambridge University Press.

[17] Grossman, G.; Helpman E. (1991): *Innovation and Growth in the Global Economy*, The MIT Press.

[18] Grossman, G.; Krueger, A. B.(1993): *Environmental Impact of a North American Free Trade Agreement*, MIT Press.

[19] Grossman, G.; Krueger, A. B.(1995): *Economic Growth and the Environment*, The Quarterly Journal of Economics 110, Seite 353 - 377.

[20] Hamilton, W. R. (1834): *On a General Method in Dynamics*, Philosophical Transactions of theRoyal Society Part II, Seite 247 – 308.).

[21] von Hauff, M.; Kleine, A. (2009): *Nachhalige Entwicklung - Grundlagen und Umsetzung*, Oldenbourg Verlag München.

[22] Koopmans, T. C. (1965): *On the Concept of Optimal Economic Growth*, The Econometric Approch to Development Planning, Amsterdam.

[23] Kuznet, S. (1955): *Economic Growth and Income Inequality*, American Economic Review 45 (1), Seite 1 - 28.

[24] Lucas, Jr. R. (1988): *On the Mechanics of Economic Development*, Journal of Monetary Economics 22, Seite 3 - 42.

[25] Malthus, T. R. (1798): *An Essay on the Principle of Population*, J. Johnson, London.

[26] McConnell, K. E. (1997): *Income and the Demand for Environmental Quality*, Environment and Development Economics 2 (4), Seite 383 - 399.

[27] Meadows, D. H.; Meadows, D.; Randers, J.; Behrens, W. W. III (1972): *The Limits to Growth*, Universe Books, Massachusetts Institute of Technology.

[28] Meadows, D. H.; Meadows, D.; Randers, J. (1992): *Beyond the Limits*, Chelsea Green Publishing.

[29] Michel, P.; Rotillon, G.(1995): *Disutility of Pollution and Endogeneous Growth*, Environmental and Resource Economics 6, Seite 279 - 300.

[30] Mohtadi, H. (1996): *Environment Growth and Optimal Policy Design*, Journal of Public Economics 63, Seite 119 - 140.

[31] Papayotou, T. (1993): *Empirical Tests and Policy Analysis of Environmental Degradation at Different Stages of Economic Development*, Working Paper WP238 - Technology And Employment Programme.

[32] Prettner, K. (2010): *Dynamic Macroeconomics*, Skriptum zur Vorlesung an der TU Wien.

[33] Ramsey, F. P. (1928): *A Mathematical Theory of Saving*, The Economic Journal 38, Seite 543 - 559.

[34] Randers, J. (2012):*2052: A Global Forecast for the Next Forty Years*, Chelsea Green Publishing.

[35] Randolph, S. M.; Lott, W. F. (1993): *Can The Kuznets Effect Be Relied on to Induce Equalizing Growth?*, World Development 21 (5), Seite 829 - 840.

[36] Rebelo, S. T. (1991): *Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth*, Journal of Political Economy 99, Seite 500 – 521.

[37] Reis, A. B. (2001): *Enogenous Growth and The Possibility of Eliminating Pollution*, Journal of Environmental Economics and Management 42, Seite 360 - 373.

[38] Robinson, S. (1976): *A Note on The U Hypothesis Relating Income Inequality and Economic Development*, American Economics Review 66 (3), Seite 437 - 440.

[39] Romer, P. (1994): *The Origins of Endogenous Growth*, Journal of Economics Perspectiv 8, Seite 3 - 22.

[40] Rubio, S. J.; Aznar, J. (1992): *Sustainable Growth and Environment Policies*, Fondazione Eni Enrico Mattei Discussion Paper 25.

[41] Ryder, H. E.; Heal, G. M. (1973): *Optimal Growth with Intertemorally Dependent Preferences*, The Review of Economic Studies 40 (1), Seite 1 - 31.

[42] Schumpeter,J. (1911): *Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung: Eine Untersuchung über Unternehmergewinn, Kapital, Kredit, Zins und den Konjunkturzyklus*, Duncker und Humblot, Leipzig.

[43] Schumpeter,J. (194): *Capitalism, Socialism and Democracy*, Harper & Brothers, New York.

[44] Shafik, N.; Bandyopadhyay, S. (1992): *Economic Growth and Environment Quality: Time Series and Cross-Country Evidence*, Background Paper of World Development Report.

[45] Smulder, S. (1999): *Endogenous Growth Theory and the Environment*, Handbook of Environmental and Resource Economics, Seite 610 - 621.

[46] Smulder, S.; Gradus, R. (1996): *Pollution Abatement and Long-Term Growth*, European Journal of Political Economy 12, Seite 505 - 532.

[47] Solow, R. M. (1956): *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, European Journal of Political Economy 12, Seite 505 - 532.

[48] Solow, R. M. (1957): *Technical Change and the Aggregate Production Function*, Review of Economics and Statistics 39, Seite 312 - 320.

[49] Tragler, G.; Pecher, M.; Sedlecky, G.; Riedl, M. (2010): *Nichtlineare Optimierung*, Skriptum zur Vorlesung von Gernot Tragler an der TU Wien, Wien.

[50] United Nations - World Commission on Environment and Development (1987): *Report of the World Commission on Environment and Development: Our Common Future*, UN Documents - Gathering a body of global agreements.

[51] Uzawa, H. (1965): *Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth*, International Economic Review, Seite 18 – 31.

[52] Verhulst, P. (1838): *Notice Sur la Loi Que la Population Poursuit Dans Son Accroissement*, Corresp. Math. Phys. 10, Seite 113 –121.

[53] Weizsäcker, U. E. von; Lovins, A. B.; Lovins, L. H. (1995): *Faktor Vier. Doppelter Wohlstand - halbierter Naturverbrauch*, Droemer Knaur Verlag.

[54] Wirl, F. (2006): *Pollution Thresholds Under Uncertainty*, Environment and Development Economics 11 (4), Seite 493 - 506.

[55] Xepapadeas, A. (2005): *Economic Growth and the Environment*, Handbook of Environment Economics, Volume 3, Seite 1219 - 1271.

[56] Bundesministerium für Land- und Forstwirtschaft, Umwelt und Wasserwirtschaft (2012): *Anpassungsstrategie*, http://www.lebensministerium.at/umwelt/ klimaschutz/klimapolitik_national/anpassungsstrategie.html, 11.11.2012.

[57] Bundesministerium für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung (2013): *Lexikon der Entwicklungspolitik - Gruppe der 8 (G8)*, http://www.bmz.de/de/service/glossar/G/g8.html, 03.11.2013.

[58] Carstens, P. (2012): *Sind Wachstum und Umweltschutz vereinbar?*, http://www.geo.de/GEO/natur/oekologie/wirtschaft-sind-wachstum-und-umweltschutz-vereinbar-71960.html, GEO, 11.05.2013

[59] Duden (2012): *Nachhalitgkeit*, http://www.duden.de/rechtschreibung/Nachhaltigkeit#Bedeutung2b, 11.11.2012.

[60] Haberson, R.; Medek, P. (2013): *Österreichische Umwelttechnik-Branche auf starkem Wachstumskurs*, http://portal.wko.at/wk/format_detail.wk?angid=1&stid=722434&dstid=678, Wirtschaftskammer Oberösterreich (WKO), 11.05.2013.

[61] International Monetary Fund (2013): *Data and Statistics - World Economic and Financial Surveys World Economic Outlook Database — WEO Groups and Aggregates Information*, http://www.imf.org/external/pubs/ft/weo/2010/02/weodata/groups.html#oem, 03.11.2013.

[62] Lexikon der Nachhaltigkeit (2012): *Hompage Lexikon der Nachhaltigkeit*, http://www.nachhaltigkeit.info/artikel/definitionen_1382.htm, 11.11.2012.

[63] United Nations Environment Programme (2013): *Environmental Data Explorer - Emissions of CO2 - from Manufacturing Industries and Construction (IEA)*, http://geodata.grid.unep.ch/options.php?selectedID=1150&selectedDataset type=1, 01.11.2013.

[64] World Bank (2013a): *Data - GDP (current US$)*, http://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.MKTP.CD/countries, 02.11.2013.

[65] World Bank (2013b): *Data - Country and Lending Groups*, http://data.worldbank.org/about/country-classifications/country-and-lending-groups#OECD_members, 03.11.2013.