



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

DIPLOMARBEIT

Zweidimensionale Dividendenprobleme

Ausgeführt am Institut für

Statistik und Wirtschaftsmathematik
an der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits

durch

Lisbeth Schmid, BSc

22. Januar 2018

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| Abbildungsverzeichnis | 3 |
| Abkürzungsverzeichnis | 4 |
| Symbolverzeichnis | 5 |
| 1 Einleitung | 6 |
| 2 Risikomodelle | 8 |
| 2.1 Individuelles und Kollektives Modell | 8 |
| 2.2 Einführung in das Cramér-Lundberg Modell | 13 |
| 2.3 Post-Dividenden Risikoprozess | 18 |
| 3 Eindimensionale, optimale Dividendenstrategie | 19 |
| 3.1 Motivation zur Kontrolltheorie | 19 |
| 3.2 Allgemeine Einführung in die Kontrolltheorie | 23 |
| 3.2.1 Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung | 24 |
| 3.2.2 Verifikationssatz | 26 |
| 3.3 Maximierung der erwarteten Dividende | 30 |
| 3.3.1 Endliche Obergrenze | 30 |
| 3.3.2 Unendliche Obergrenze | 35 |
| 4 Zweidimensionale, optimale Dividendenstrategie | 40 |
| 4.1 Wendepunkt der optimalen Barrierefunktion | 42 |
| 4.2 Betrachtung zweier Unternehmen | 45 |
| 4.3 Hinreichende Bedingung zur Fusionierung | 47 |
| 5 Darstellung der Fusionsentscheidung | 50 |
| 5.1 Eigenschaften und Einschränkungen im Modell | 50 |
| 5.2 Fusionsentscheidung in Abhängigkeit von der Drift | 52 |
| 5.3 Fusionsentscheidung in Abhängigkeit von der Standardabweichung | 55 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.4 | Fusionsentscheidung in Abhängigkeit von Diskontierungsfaktor und Korrelation | 57 |
| 6 | Appendix | 61 |
| 6.1 | Abbildung: Funktion g und Ableitungen | 61 |
| 6.2 | Bisektionsverfahren für Nullstelle von Funktion g | 62 |
| 6.3 | Abbildung: Wendepunkt Funktion f | 63 |
| 6.4 | Abbildung: Funktion f - Verschiedene Diskontierungsfaktoren | 64 |
| 6.5 | Abbildung: Nullstelle zweite Ableitung Funktion f - Verschiedene Diskontierungsfaktoren | 66 |
| 6.6 | Fusionsentscheidung nach ρ und μ | 67 |
| 6.7 | Vergleich b_m^* und $b_1^* + b_2^*$ | 69 |
| 6.8 | Fusionsentscheidung nach ρ und σ | 70 |
| 6.9 | Fusionsentscheidung nach ρ und δ | 72 |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Beispiel Risikoprozess | 16 |
| 2 | Anpassungskoeffizient | 17 |
| 3 | Wertfunktion | 32 |
| 4 | Abgeleitete Wertfunktion | 32 |
| 5 | Abschätzung der Wertfunktion | 39 |
| 6 | Funktion $g(y)$ und ihre erste und zweite Ableitung | 43 |
| 7 | Funktion g nahe Null | 44 |
| 8 | Zweite Ableitung Funktion g | 45 |
| 9 | Unternehmensentscheidung nach ρ und μ | 54 |
| 10 | Vergleich b_m^* und $b_1^* + b_2^*$ | 55 |
| 11 | Unternehmensentscheidung nach ρ und σ | 56 |
| 12 | Wendepunkt Funktion f mit $\delta = 0,5$ | 57 |
| 13 | Vergleich Funktionen f | 58 |
| 14 | Zweite Ableitung Funktion f mit $\delta = 0,1,0,5$ und 1 | 58 |
| 15 | Unternehmensentscheidung nach δ und ρ | 59 |
| 16 | Unternehmensentscheidung nach δ, ρ und σ | 60 |

Abkürzungsverzeichnis

bzw. beziehungsweise

d.h. das heißt

f.s. fast sicher

HJB Hamilton-Jacobi-Bellman

Symbolverzeichnis

| | |
|-----------|--|
| b^* | optimale Barriere |
| c | Prämienrate |
| d | Dividendenrate |
| D^0 | Obergrenze der Dividende |
| δ | Diskontierungsfaktor |
| G | Verteilungsfunktion von Y_i |
| J | Zielfunktional |
| λ | Poisson-Parameter |
| Λ | relativer Sicherheitszuschlag |
| μ | Drift |
| n | Anzahl der Policen der Versicherung |
| N | zufällige Anzahl an Schäden in einer Periode |
| p | Wahrscheinlichkeit, dass kein Schaden anfällt |
| q | Wahrscheinlichkeit, dass zumindest ein Schaden anfällt |
| R | Risikoprozess |
| S | Gesamtschaden |
| σ | Standardabweichung |
| τ | Ruinzeitpunkt |
| u | Kontrollprozess |
| W | Brownsche Bewegung |
| x | Anfangskapital |
| X_i | Schadenshöhe eines Schadens |
| X_t | Vermögen Versicherung |
| ξ | Anfangsbedingung |
| Y | Schäden einer Police |

1 Einleitung

Zwei börsennotierte Versicherungen stehen vor der Entscheidung, gemeinsame oder getrennte Wege zu gehen. Damit wird für beide Parteien die Frage aufgeworfen, ob eine Fusionierung profitabel ist oder nicht. Der entsprechenden Antwort geht diese Arbeit nach.

Das folgende Kapitel widmet sich der grundlegenden Betrachtung einer Versicherung in der Mathematik. Im Zuge dessen wird das Cramér-Lundberg Modell eingeführt. Verwendete und weiterführende Literatur für diesen Abschnitt sind Bowers (1997) [2], Gerber (1979) [3], Gerber (2016) [4], Heilmann (2014) [6], Nowak (2014) [7] und Radtke (2012) [8].

Aber in welcher Hinsicht wird hier von Profitabilität gesprochen? Eine berechtigte Frage, auf welche im Kapitel über die Kontrolltheorie sowohl verallgemeinert als auch speziell im Hinblick auf das Dividendenproblem eingegangen wird. Hier wird die optimale Dividende für eine beschränkte und für eine unbeschränkte Dividendenrate eruiert. Zweitere findet im Laufe der Arbeit Anwendung. Dieser Abschnitt basiert vor allem auf der Vorlesung „Stochastische Kontrolltheorie“. Darüber hinaus wird als Literatur Asmussen (1997) [1] hinzugezogen, welche aufgrund des Verzichts auf den Verifikationssatz von dieser Arbeit abweicht und somit eine Alternative zu diesem Kapitel bietet.

Im nächsten Abschnitt wird die zuvor gefundene Barriere als Funktion genauer analysiert. Des Weiteren wird zur Betrachtung ein zweites Unternehmen herangezogen. Dabei werden die Versicherungsunternehmen sowohl separiert als auch fusioniert betrachtet und miteinander verglichen. Darüber hinaus wird eine hinreichende Bedingung zur Profitabilität eingeführt. Dieses Kapitel basiert auf Gerber und Shiu (2006) [5].

Der letzte Teil dieser Arbeit soll die zuvor gefundene hinreichende Bedingung kri-

tisch betrachten, mit punktuellen Auswertungen vergleichen und ein Gefühl für das Verhältnis der einzelnen Variablen zueinander vermitteln.

2 Risikomodelle

Die Grundidee einer Versicherung ist eine ganz einfache: Gegen Zahlung einer festen Prämie wird für VersicherungsnehmerInnen ein Risiko übernommen. Was für KundInnen so verständlich wirkt, ist aus Sicht der Versicherung ganz anders. Im ersten Kapitel dieser Arbeit wird ein Modell eingeführt, das in der Versicherungsmathematik nicht wegzudenken ist – das Cramér-Lundberg Modell. Dieses bildet zugleich die Basis für die gesamte Arbeit. Dabei geht es um nichts Geringeres, als die Ein- und Ausgaben der Versicherung darzustellen. Der erste Teil des Kapitels soll sich den Schäden, die der Versicherung anfallen, widmen. Im nächsten Schritt werden diesen die Prämien gegenübergestellt, um so das Cramér-Lundberg Modell einzuführen. Im dritten Teil wird dieses Modell erweitert. Dabei wird angenommen, dass es sich bei der Versicherung um eine Aktiengesellschaft handelt. Das Vermögen des Unternehmens wird um die ausgezahlte Dividende verringert. Als Quellen dienen in diesem Kapitel [2], [3], [4], [6], [7] und [8].

2.1 Individuelles und Kollektives Modell

Für die Versicherungen fallen durch Schäden, die durch Verträge beziehungsweise (bzw.) Polizzen gedeckt sind, Kosten an. Diese werden als Einzelschäden bezeichnet und können als Gesamtschäden zusammengefasst werden. Hierfür wird zwischen zwei Modellen unterschieden: dem Individuellen und dem Kollektiven Modell.

Im Individuellen Modell werden die einzelnen Polizzen der Versicherung betrachtet. Ihre Anzahl wird mit n definiert.

Für das Individuelle Modell werden folgende Zufallsvariablen und Parameter verwendet:

| | | |
|-------|-----|---|
| n | ... | Anzahl der Policen der Versicherung |
| Y_i | ... | Schäden der i -ten Police mit $i = 1, \dots, n$ |
| G_i | ... | Verteilungsfunktion von Y_i |
| p_i | ... | Wahrscheinlichkeit, dass bei der i -ten Police kein Schaden anfällt |
| q_i | ... | Wahrscheinlichkeit, dass bei der i -ten Police zumindest ein Schaden anfällt |

Somit erhält man

$$\mathbb{P}(Y_i > 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_i = 0) = 1 - G_i(0)$$

und

$$p_i + q_i = 1.$$

Des Weiteren wird definiert:

$$I_i := \mathbb{1}_{(0, \infty)}(Y_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } Y_i > 0 \\ 0 & \text{falls } Y_i = 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

Die Indikatorvariable I_i unterscheidet somit, ob bei der i -ten Police Schäden auftreten oder nicht. Somit ist

$$I_i \sim B(1, q_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Angenommen $I_i = 1$, so wird die Schadenshöhe mit \tilde{Y}_i für $i = 1, \dots, n$ bezeichnet und $\tilde{G}_i(\cdot)$ als ihre Verteilung. Daher ist die Verteilung von \tilde{Y}_i gleich der Verteilung von Y_i bedingt durch $Y_i > 0$, das heißt (d.h.)

$$\tilde{G}_i(x) := \mathbb{P}[\tilde{Y}_i \leq x] = \mathbb{P}[Y_i \leq x | Y_i > 0], \quad x > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Mit der Annahme, dass es keine Schäden der Höhe Null gibt, erhält man mittels der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$\tilde{G}_i(x) = \frac{\mathbb{P}[0 < Y_i \leq x]}{\mathbb{P}[Y_i > 0]} = \frac{G_i(x) - G_i(0)}{1 - G_i(0)} = \frac{G_i(x) - (1 - q_i)}{q_i}, \quad x > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Der Gesamtschaden für das Individuelle Modell S^{ind} ist somit

$$S^{\text{ind}} = I_1 \cdot \tilde{Y}_1 + \dots + I_n \cdot \tilde{Y}_n.$$

Im nächsten Schritt wird die Verteilungsfunktion G^{ind} des Gesamtschadens S^{ind} evaluiert. Hierfür wird angenommen, dass die Polizzen voneinander unabhängig sind, d.h. Y_1, \dots, Y_n sind stochastisch unabhängig und somit auch I_1, \dots, I_n .

Daher ist die Verteilung $G_i(\cdot)$ von $I_i \cdot \tilde{Y}_i$

$$G_i(x) = p_i \cdot \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) + q_i \cdot \tilde{G}_i(x).$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der Y_1, \dots, Y_n ist die Verteilungsfunktion G^{ind} die endliche Faltung der Verteilungsfunktionen G_1, \dots, G_n , d.h.

$$G^{\text{ind}} = G_1 * \dots * G_n.$$

Es ist jedoch möglich die ersten beiden Kumulanten von S^{ind} ohne G^{ind} zu berechnen:

$$\begin{aligned} \text{i) } \mathbb{E}[S^{\text{ind}}] &= \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n I_i \cdot \tilde{Y}_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[I_i \cdot \tilde{Y}_i] = \sum_{i=1}^n q_i \mathbb{E}[\tilde{Y}_i], \quad i = 1, \dots, n \\ \text{ii) } \mathbb{V}[Y_i] &= \mathbb{E}[Y_i^2] - (\mathbb{E}[Y_i])^2 \stackrel{\text{totaler Erwartungswert}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_i^2 | I_i]] - (q_i \mathbb{E}[\tilde{Y}_i])^2 \\ &= \underbrace{p_i \cdot \mathbb{E}[Y_i^2 | Y_i = 0]}_{=0} + q_i \cdot \mathbb{E}[Y_i^2 | Y_i > 0] - (q_i \mathbb{E}[\tilde{Y}_i])^2 \\ &= q_i \cdot \mathbb{E}[\tilde{Y}_i^2] - (q_i \mathbb{E}[\tilde{Y}_i])^2, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Daher folgt

$$\mathbb{V}[S^{\text{ind}}] = \mathbb{V}[\sum_{i=1}^n Y_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}[Y_i] = \sum_{i=1}^n q_i \cdot \mathbb{E}[\tilde{Y}_i^2] - \sum_{i=1}^n (q_i \mathbb{E}[\tilde{Y}_i])^2.$$

Beim Kollektiven Modell werden nicht die einzelnen Polizzen betrachtet. Stattdessen wird das Portfolio als eine Menge von unbekanntem Polizzen aufgefasst. Alle auftretenden Schäden der Versicherung einer Periode bilden eine Zufallssumme.

Für das kollektive Modell werden folgende Zufallsvariablen definiert:

N ... zufällige Anzahl an übernommenen Schäden in einer Periode

X_i ... Schadenshöhe des i -ten Schadens $i = 1, \dots, N$,

wobei

i) X_i für alle $i = 1, \dots, N$ unabhängig und identisch verteilt ist und

ii) N unabhängig von X_i für alle $i = 1, \dots, N$ ist.

Daher ist der Gesamtschaden einer Periode

$$S^{\text{coll}} = X_1 + \dots + X_N = \sum_{i=1}^N X_i$$

und S^{coll} ist somit eine Zufallssumme.

Wegen der Unabhängigkeit von der Schadensanzahl und den Einzelschadenshöhen erhält man für die Verteilungsfunktion

$$F_{S^{\text{coll}}}(x) := \mathbb{P}[S \leq x] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[N = n] \cdot \mathbb{P}[\sum_{i=1}^n X_i \leq x] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[N = n] \cdot F^{*n}(x).$$

Mithilfe der Gleichung von Wald lassen sich die ersten beiden Kumulanten des Gesamtschadens durch die ersten beiden Kumulanten der Schadensanzahl und Einzelschadenshöhe darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S^{\text{coll}}] &= \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X] \\ \mathbb{V}[S^{\text{coll}}] &= \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[N] \cdot (\mathbb{E}[X])^2 \end{aligned}$$

Zuletzt wird gezeigt, dass das Individuelle und das Kollektive Modell den gleichen Gesamtschaden generieren, indem sie sich bei der Zufallsvariable auf unterschiedliche Kriterien fokussieren, womit beide Modelle Vor- und Nachteile bei der numerischen Berechnung bzw. Approximation der Verteilungsfunktion vom Gesamtschaden aufweisen.

Der Gesamtschaden wird folgendermaßen definiert:

n ... Anzahl der Policen der Versicherung
 N_j ... zufällige Anzahl der Schäden der j -ten Police in einer Periode
 $j = 1, \dots, n$
 X_{ij} ... Schadenshöhe des i -ten Schadens in der j -ten Police
 $i = 1, \dots, N_j$ und $j = 1, \dots, n$

$$S := \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{N_j} X_{ij}$$

Im ersten Schritt wird gezeigt, dass S dem Gesamtschaden im Individuellem Modell entspricht:

Y_j ist der Gesamtschaden der j -ten Police, d.h.

$$Y_j := \sum_{i=1}^{N_j} X_{ij}, \quad j = 1, \dots, n.$$

So lässt sich S folgendermaßen darstellen:

$$S = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{N_j} X_{ij} = (X_{11} + \dots + X_{1N_1}) + \dots + (X_{n1} + \dots + X_{nN_n}) = \sum_{j=1}^n Y_j = S^{\text{ind}}$$

Um zu zeigen, dass S auch dem Gesamtschaden im Kollektiven Modell entspricht, wird die zufällige Gesamtschadensanzahl definiert mit

$$N := \sum_{j=1}^n N_j.$$

Die Einzelschäden werden von

$$X_{11}, \dots, X_{1N_1}, X_{21}, \dots, X_{2N_2}, \dots, X_{n1}, \dots, X_{nN_n}$$

zu

$$X_1, \dots, X_N$$

umnummeriert.

Somit lässt sich der Gesamtschaden darstellen als

$$S = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{N_j} X_{ij} = \sum_{i=1}^N X_i = S^{\text{coll}}.$$

2.2 Einführung in das Cramér-Lundberg Modell

Im vorherigen Abschnitt wurde der Gesamtschaden als Summe der Einzelschäden in einer Periode beschrieben. Dabei wurde der Schadenszeitpunkt der Einzelschäden jedoch nicht berücksichtigt. Dieser ist genauso wie die Schadenshöhe zufällig. Hierfür wird der Zeitparameter

$$t \geq 0$$

definiert.

Somit erhält man die folgenden stochastischen Prozesse:

- i) $(S_t : t \geq 0)$ Gesamtschadenprozess
- ii) $(N_t : t \geq 0)$ Schadenanzahlprozess

Der Gesamtschaden zum Zeitpunkt t wird somit mit der Zufallssumme

$$S_t := \sum_{n=1}^{N_t} X_n, \quad t \geq 0$$

dargestellt.

Infolge wird angenommen, dass N_t ein Poisson-Prozess mit Poisson-Parameter λ ist und daher S_t ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist.

Somit folgt, dass

$$\mathbb{E}[S_t] = \lambda \cdot t \cdot \mathbb{E}[X]$$

und

$$\mathbb{V}[S_t] = \lambda \cdot t \cdot \mathbb{E}[X^2], \quad t \geq 0.$$

Im ersten Schritt wurden die Ausgaben eines Versicherungsunternehmens betrachtet. Dem gegenüber stehen Einnahmen mittels Prämien.

Der Prämienprozess wird als

$$c_t = c \cdot t, \quad t \geq 0$$

mit einer Prämienrate $c > 0$ definiert und stellt somit die gesamten eingenommenen Prämien bis zum Zeitpunkt t dar. Daher wird der Prämienprozess als ein regelmäßiger und deterministischer Prämienfluss und somit stark vereinfacht dargestellt. Darüber hinaus wird die Prämienrate mithilfe von Prämienkalkulationsprinzipien festgelegt, worauf in dieser Arbeit jedoch nicht eingegangen wird.

Nachdem sowohl die Einnahmen als auch die Ausgaben eines Versicherungsunternehmens definiert wurden, lässt sich das Cramér-Lundberg Modell aufstellen:

R_t bezeichnet den Reserveprozess bzw. Risikoprozess. Dieser setzt sich aus dem Anfangskapital des Versicherungsunternehmens zuzüglich den bis zum Zeitpunkt t erhaltenen Prämien und abzüglich aller aufgetretenen und versicherten Schäden bis zum Zeitpunkt t zusammen.

Dabei ist $R_0 = x$ das Anfangskapital eines Versicherungsunternehmens und S_t und c wie zuvor definiert. Da die Reserve des Versicherungsunternehmens zum Zeitpunkt t unbekannt ist, betrachtet man den stetigen, stochastischen Prozess (R_t) mit

$$R_t = x + c \cdot t - S_t \text{ für } t \geq 0.$$

Da angenommen wurde, dass N_t mit Parameter λ poissonverteilt ist, folgt:

$$\mathbb{E}[S_t] = \mathbb{E}[N_t] \cdot \mathbb{E}[X] = \lambda \cdot t \cdot \mathbb{E}[X]$$

Mit der Annahme, dass die eingenommenen Prämien pro Zeiteinheit den erwarteten Gesamtschaden pro Zeiteinheit übersteigen, d.h.

$$c \cdot t > \mathbb{E}[S_t] = \lambda \cdot t \cdot \mathbb{E}[X]$$

folgt

$$c > \lambda \cdot \mathbb{E}[X].$$

Damit ergibt sich die sogenannte net profit condition:

$$c = (1 + \Lambda) \cdot \lambda \cdot \mathbb{E}[X],$$

wobei die Konstante Λ der relative Sicherheitszuschlag ist.

Dies ist äquivalent zu

$$\Lambda = \underbrace{\frac{c}{\lambda \cdot \mathbb{E}[X]}}_{>1} - 1 > 0.$$

Somit ist der relative Sicherheitszuschlag positiv.

$\psi(x)$ wird als Ruinwahrscheinlichkeit bezeichnet, also die Wahrscheinlichkeit, dass Ruin eintritt und somit R_t für ein $t \geq 0$ negativ ist. Dabei hängt die Ruinwahrscheinlichkeit vom Anfangskapital ab. Zu beachten ist jedoch, dass Ruin nicht mit der Insolvenz des Versicherungsunternehmens gleichzusetzen ist.

Allgemeiner bezeichnet $\psi(x, t)$ die Ruinwahrscheinlichkeit vor dem Zeitpunkt t .

Des Weiteren wird der Ruinzeitpunkt mit

$$\tau = \inf\{t | R_t < 0\}$$

bezeichnet, wobei

$$\tau = \infty, \text{ falls } R_t > 0 \text{ f\u00fcr alle } t.$$

Somit folgt:

$$\psi(x) = \mathbb{P}[\tau < \infty]$$

$$\psi(x, t) = \mathbb{P}[\tau < t].$$

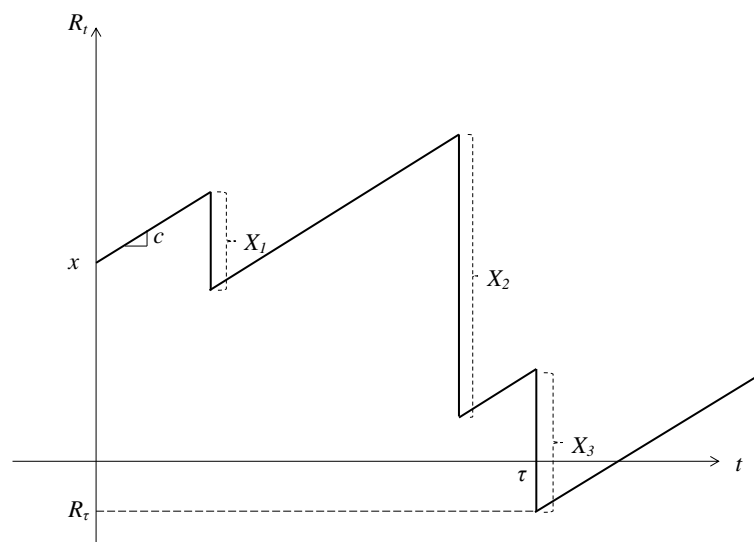


Abbildung 1: Beispiel Risikoprozess

Infolge wird die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(x)$ nur über einen unendlichen Zeithorizont betrachtet.

Man betrachte die implizite Gleichung für r :

$$\lambda + r \cdot c = \lambda \cdot M_X(r)$$

Die linke Seite der Gleichung ist eine lineare Funktion, während die rechte Seite eine konvexe Funktion von r ist. Somit gibt es maximal zwei Lösungen für diese Gleichung. Die erste Lösung $r = 0$ ist unmittelbar ersichtlich, da für die rechte Seite $\lambda \cdot M_X(0) = \lambda \cdot \mathbb{E}(e^{0 \cdot X}) = \lambda \cdot 1$ gilt.

Um die zweite Lösung zu finden, differenziere man beide Seiten nach r und setze $r = 0$. Somit erhält man:

$$c = \lambda M'_X(0) = \lambda \mathbb{E}[X].$$

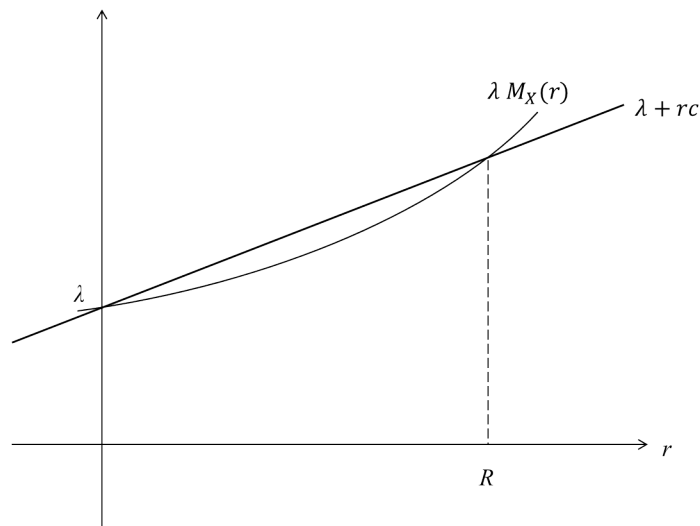


Abbildung 2: Anpassungskoeffizient

Aufgrund der net profit condition ist die linke Seite somit größer als die rechte Seite. Die rechte Seite konvergiert jedoch für $r \rightarrow \infty$ gegen unendlich. Somit hat die Gleichung eine zweite Lösung. Diese wird mit R bezeichnet und ist positiv. R heißt dabei Anpassungskoeffizient.

Der Anpassungskoeffizient spielt eine wichtige Rolle, da mit seiner Hilfe eine Abschätzung für die Ruinwahrscheinlichkeit dargestellt werden kann.

$$\psi(x) \leq e^{-Rx} \text{ für alle } x \geq 0$$

2.3 Post-Dividenden Risikoprozess

In diesem Abschnitt wird der Risikoprozess R_t erweitert. Die Versicherung ist fortan eine Aktiengesellschaft und zahlt Dividenden an die Aktionäre nach einer Dividendenstrategie. D_t bezeichnet die kumulierte Dividende zwischen 0 und t . Somit erhält man durch Abzug der Dividende die neue Reserve X_t zum Zeitpunkt t :

$$X_t = R_t - D_t, \text{ für alle } t \geq 0$$

Der Ruinzeitpunkt ist gegeben mit

$$\tau = \inf\{t \geq 0 | X_t < 0\}$$

und die abgezinste, kumulierte Dividende bis zum Ruinzeitpunkt T ist

$$D = \int_0^\tau e^{-\delta t} dD_t$$

mit Diskontierungsfaktor $\delta > 0$.

Ziel des Unternehmens ist D zu maximieren. Jedoch soll die Dividendenrate die Prämienrate nicht überschreiten. Somit wird ein $\alpha \in (0, c)$ definiert, sodass $dD_t \leq \alpha t$.

Eine Dividendenstrategie ist dabei optimal, wenn die erwartete Dividendenzahlung bis zum Ruin maximal ist.

3 Eindimensionale, optimale Dividendenstrategie

Nachdem bereits das Cramér-Lundberg Modell eingeführt und mit einer auszuzahlenden Dividende erweitert wurde, soll nun die optimale Dividende für ein Versicherungsunternehmen gefunden werden. Hierfür soll der erste Abschnitt als Motivation zur Fragestellung dienen. Im zweiten Teil wird das Dividendenproblem allgemein betrachtet, um es im folgenden Abschnitt für endliche und unendliche Dividendenobergrenzen genauer betrachten zu können. Als Literatur für dieses Kapitel dienen sowohl Asmussen und Taksar (1997) [1] also auch Vorlesungsunterlagen zur Vorlesung „Stochastische Kontrolltheorie“.

3.1 Motivation zur Kontrolltheorie

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit der optimalen Dividendenauszahlung. In dem Modell sollen die Dividenden in Abhängigkeit vom Vermögen dargestellt werden. Im ersten Schritt wird das Vermögen ohne Dividendenauszahlung mit der Notation $(X_t^{(0)})_{t \geq 0}$ betrachtet. Wie im Kapitel zuvor ist das Vermögen des Versicherungsunternehmens mittels des Cramér-Lundberg Modells

$$X_t^{(0)} = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

definiert.

Bei kleinen, häufigen Schäden lässt sich dieses Modell durch eine lineare Brownsche Bewegung ersetzen. Das Vermögen $(X_t^{(0)})_{t \geq 0}$ ist dabei eine Brownsche Bewegung mit Drift μ und Varianz σ^2 .

Hierfür muss der Begriff der stochastische Differentialgleichung eingeführt werden.

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \text{ mit}$$

$$b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$t \in [0, T]$$

Weiters heißt eine Lösung X_t der Gleichung starke Lösung, falls gilt:

- i) $X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$ gilt fast sicher (f.s.), wobei ξ die Anfangsbedingung ist
- ii) $\int_0^t b(s, X_s) ds < \infty$ und $\int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s < \infty$ f.s.
- iii) X_t ist adaptiert bezüglich der Filtration \mathbb{F}^W

Somit erhält man

$$dX_t^{(0)} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

wobei W_t eine standard Brownsche Bewegung ist.

Nun wird die stochastische Differentialgleichung für das Vermögen mit einer festen Dividendenrate d betrachtet:

$$dX_t^{(d)} = (\mu - d) dt + \sigma dW_t$$

Nun soll der Vermögensprozess X_t durch eine dynamische Dividende d , mit Dividendenzahlung d_t zum Zeitpunkt t , bestimmt werden. Im Gegensatz zum vorherigem Kapitel handelt es sich hier bei der Dividende d_t nicht um die im Zeitraum von Null bis t kumulierte, sondern lediglich um die Dividende zum Zeitpunkt t . d_t wird als Kontrollprozess bezeichnet.

Somit wird das Vermögen eines Versicherungsunternehmens X_t zum Zeitpunkt t durch die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = (\mu - d_t) dt + \sigma dW_t$$

beschrieben.

Für eine Entscheidung über die Auszahlung der Dividende zum Zeitpunkt t können somit nur die Informationen bis zu diesem Zeitpunkt in Betracht gezogen werden. Klarerweise kann die Dividende nicht vom zukünftigen Schadensprozess abhängen.

Das heißt, man betrachte einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei die Filtration \mathcal{F}_t , die Informationen bis zum Zeitpunkt t repräsentiert und der Prozess $(w(t))_{t \geq 0}$ eine standard Brownsche Bewegung bezüglich \mathcal{F}_t ist, d.h. $\sigma(w(s) : 0 \leq s \leq t) \subseteq \mathcal{F}_t$. Darüber hinaus soll die Dividende adaptiert sein, also $d_t \in \mathcal{F}_t$. d_t ist sogar progressiv messbar.

Eine Familie von Zufallszahlen die adaptiert ist wird Kontrollprozess genannt.

Das Zielfunktional wird mit

$$J(x, d_{(\cdot)})$$

definiert, wobei $x = X_0$ das Startkapital bezeichnet. Darüber hinaus gibt es eine Wertfunktion

$$V(x) = \sup_{d_{(\cdot)}} J(x, d_{(\cdot)}).$$

Ziel ist es, die optimale Strategie $d_{(\cdot)}^*$ zu finden, sodass

$$V(x) = J(x, d_{(\cdot)}^*).$$

Die Zielfunktion soll die gesamte, diskontierte Dividende darstellen, also

$$J_x = \int_0^\tau e^{-\delta t} d_t dt$$

mit Diskontierungsfaktor δ und Ruinzeitpunkt $\tau = \inf\{t > 0 | X_t = 0\}$.

In den folgenden Abschnitten werden verschiedene Fälle betrachtet: Zunächst wird unterschieden, ob es für die auszuzahlende Dividende eine Obergrenze D^0 gibt.

Die optimale Strategie für die Dividende zum Zeitpunkt t wird mit d_t^* bezeichnet und hängt nur vom Vermögen X_t bezüglich \mathcal{F}_t ab.

Zuerst soll der Fall betrachtet werden, dass eine Obergrenze existiert, also $D^0 < \infty$.

Es wird gezeigt, dass wenn die maximale Rate D^0 klein genug ist, damit

$$\alpha = \frac{D^0}{\delta} - \frac{1}{\theta_-} \leq 0,$$

dann ist die optimale Strategie immer, die maximale Dividende auszuzahlen. Die Konstante θ_- wird infolge genauer definiert.

Für den Fall, dass $D^0 < \infty$ groß genug ist, damit $\alpha > 0$ hält, dann ist die optimale Dividende Null, wenn das Vermögen unter ein optimales Level x_1 fällt und gleich der Obergrenze D^0 , wenn das Vermögen größer dem Level x_1 ist.

Also,

$$D^0 < \infty \quad \text{und} \quad \frac{D^0}{\delta} - \frac{1}{\theta_-} < 0 \quad \Rightarrow \quad d_t^* = D^0$$

$$D^0 < \infty \quad \text{und} \quad \frac{D^0}{\delta} - \frac{1}{\theta_-} > 0 \quad \Rightarrow \quad d_t^* = \begin{cases} 0, & \text{wenn } X_t < x_1, \\ D^0, & \text{wenn } X_t \geq x_1. \end{cases}$$

Im zweiten Fall ist die Dividendenrate unbeschränkt, also $D^0 = \infty$. Ist das Vermögen kleiner einer Barriere b^* , so wird keine Dividende ausgezahlt, andernfalls entspricht die Dividende dem über die Barriere hinausgehenden Betrag, also

$$D^0 = \infty \Rightarrow d_t^* = \begin{cases} 0, & \text{wenn } X_t < b^*, \\ (X_t - b^*), & \text{wenn } X_t \geq b^*. \end{cases}$$

Diese Ergebnisse zur optimalen Dividende sollen infolge bewiesen werden. Bevor jedoch das konkrete Problem angegangen wird, soll noch der allgemeinen Theorie ein Kapitel gewidmet werden.

3.2 Allgemeine Einführung in die Kontrolltheorie

Wie zuvor erläutert, lässt sich das in dieser Arbeit konkretisierte Problem auch verallgemeinern. Dieser Verallgemeinerung widmet sich dieser Abschnitt.

Man betrachte einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ mit den üblichen Bedingungen, wie Rechtsstetigkeit und Vollständigkeit.

W bezeichne dabei eine n -dimensionale **Brownsche Bewegung**.

Kontroll- bzw. Steuerungsprozess: $(u_t)_{t \in [0, T]}$ ist ein progressiv messbarer Prozess mit Werten in $U \subset \mathbb{R}^p$.

Zustandsprozess: $(X_t)_{t \in [0, T]}$ ist gegeben durch

$$dX_t = b(t, X_t, d_t) dt + \sigma(t, X_t, d_t) dW_t, \text{ wobei}$$

$$b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$t \in [0, T]$$

Zielfunktional: $J(t, x, u) = \mathbb{E}[\int_t^T \phi(s, X_s, u_s) ds + \psi(T, X_T) | X_t = x]$, wobei

$\phi(s, X_s, u_s)$ die laufenden Kosten bzw. Nutzen und
 $\psi(T, X_T)$ die Endkosten bzw. Nutzen bezeichnet.

Zulässige (admissible) Strategie: $\mathcal{A}(t, x)$ sind progressiv messbare Prozesse, so dass

$$dX_t = b(t, X_t, d_t) dt + \sigma(t, X_t, d_t) dW_t$$

eine eindeutige starke Lösung hat und das Zielfunktional wohldefiniert, also ungleich plus bzw. minus unendlich ist. Darüber hinaus können weitere Bedingungen hinzugezogen werden.

Wertfunktion: $V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} J(t, x, u)$

Ziel ist es, wie schon in dem konkreten Beispiel, eine optimale Strategie $u^* \in \mathcal{A}(0, x)$ zu finden, sodass $V(0, x) = J(0, x, u^*)$.

3.2.1 Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung

Um die Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung aufzustellen wird das **Bellman Prinzip** benötigt. Für dieses gilt:

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \mathbb{E}_{t, x} [\int_t^{t_1} \phi(s, X_s, u_s) ds + V(t_1, X_{t_1})] \text{ für } t_1 > t$$

Falls das Verhalten sowohl zwischen t und t_1 , für den Integral-Term, als auch nach t_1 , das heißt im zweiten Term, optimal ist, dann liegt ein globales Optimum vor.

Um die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung zu erhalten, wird die Annahme getroffen, dass V glatt genug ist um folgende Operationen durchzuführen. Nach der Itô-Formel auf $V(t_1, X_{t_1})$ angewandt erhält man:

$$V(t_1, X_{t_1}) = V(t, x) + \int_t^{t_1} [(V_{10}(s, X_s) + DV_s(s, X_s) \cdot b(s, X_s, u_s)) + \frac{1}{2} \text{spur}(a(s, X_s, u_s) \cdot D_{xx}V(s, X_s))] ds + \int_t^{t_1} DV_x(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s) dW_s$$

Für den Fall, dass V zeitunabhängig ist fällt der Term V_{10} weg.

Im nächsten Schritt wird $V(t_1, X_{t_1})$ in das Bellman-Prinzip eingesetzt.

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \mathbb{E}_{t, x} \left[\int_t^{t_1} \phi(s, X_s, u_s) ds + (V(t, x) + \int_t^{t_1} [(V_{10}(s, X_s) + DV_x(s, X_s) \cdot b(s, X_s, u_s)) + \frac{1}{2} \text{spur}(a(s, X_s, u_s) \cdot D_{xx}V(s, X_s))] ds + \underbrace{\int_t^{t_1} DV_x(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s) dW_s}_{=0}) \right]$$

Durch Kürzen von $V(t, x)$, dividieren durch $t_1 - t$ und bilden des $\lim_{t_1 \rightarrow t}$ erhält man:

$$0 = \sup_{u \in U \in \mathbb{R}^p} \left\{ \phi(t, x, u) + \underbrace{V_{10}(t, x) + DV_x(t, x) \cdot b(t, x, u) + \frac{1}{2} \text{spur}(a(t, x, u) \cdot D_{xx}V(t, x))}_{=: \mathcal{L}^u(V)} \right\}$$

$$\Rightarrow 0 = \sup_{u \in U} \{ \phi(t, x, u) + \mathcal{L}^u(V) \}$$

Diese Gleichung wird **Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung** genannt.

Somit wurde gezeigt, dass für

$$V \text{ ist eine Wertfunktion} \Rightarrow V \text{ ist Lösung der HJB-Gleichung.}$$

Infolge stellt sich die Frage, ob auch die Umkehrung gilt, also aus

V ist Lösung der HJB-Gleichung $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ V ist eine Wertfunktion.

Die Antwort hierauf ist mit Bedingungen aus der Verifikationstheorie verknüpft.

Die Herangehensweise zur Lösung eines Kontrollproblems lässt sich in folgende Schritte unterteilen.

- Lösen des Maximierungsproblems in der HJB-Gleichung, um, falls existiert, das Maximum $\hat{u}(t, x)$ zu erhalten.
- Einsetzen von dem Maximum in die HJB-Gleichung. Somit erhält man eine Differentialgleichung für V . Mit den Randbedingungen $V(T, x) = \psi(T, x)$ kann man versuchen diese zu lösen.

3.2.2 Verifikationssatz

Die Fragestellung des vorherigen Kapitels

V ist Lösung der HJB-Gleichung $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ V ist eine Wertfunktion

soll in Folge aufgegriffen werden. Dafür werde ein Verifikationssatz betrachtet.

Verifikationssatz für endlichen Zeithorizont

Für $T < \infty$ sei

$$dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t$$

$$J(t, x, u) = \mathbb{E}_{tx}[\int_t^T \phi(s, X_s, u_s)ds + \psi(T, X_T)] \rightarrow \max \text{ mit Startpunkt } X_{t_0} = x$$

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} J(t, x, u)$$

$A(t, x)$ wird so gewählt, dass folgendes gilt:

- (1) u ist progressiv messbar und $\mathbb{E}[\int_t^T \|u_s\|^2 ds] < \infty$
- (2) X_t ist eine eindeutige starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung mit $\mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} \|X_s\|^2] < \infty$
- (3) $J(t, x, u)$ ist wohldefiniert

Satz 3.1. Verifikationssatz

Sei:

- $\|\sigma(t, x, u)\|^2 \leq C_\sigma \cdot (1 + \|x\|^2 + \|u\|^2), \quad C_\sigma > 0$
- ϕ ist stetig mit $|\phi(t, x, u)| \leq C_\phi \cdot (1 + \|x\|^2 + \|u\|^2), \quad C_\phi > 0$
- $f \in C^{1,2}([0; T] \times \mathbb{R}^n)$ und $|f(t, x)| \leq C_f \cdot (1 + \|x\|^2), \quad C_f > 0$
- $\sup_{u \in U} \{\phi(t, x, u) + \mathcal{L}^u f(t, x)\} = 0$ mit $f(T, x) = \psi(T, x)$

Dann folgt:

(i) $f(t, x) \geq V(t, x)$ und

(ii) falls das Maximum \hat{u} existiert und $u_t^* = \hat{u}(t, X_t^*)$ und $u_t^* \in \mathcal{A}(t, x)$

$$\Rightarrow f(t, x) = V(t, x)$$

und

$$u_t^* \text{ ist optimale Strategie, also } J(t, x, u_t^*) = V(t, x),$$

wobei

$$dX_t^* = b(t, X_t^*, \hat{u}(t, X_t^*))dt + \sigma(t, X_t^*, \hat{u}(t, X_t^*))dW_t.$$

Beweis $u \in \mathcal{A}(t, x)$ sei beliebig.

Weiter ist

$$\tau_n := \inf\{s > t \mid \|X_s - x\| = n\}.$$

Da $f \in C^{1,2}$ lässt sich Itô anwenden und es folgt:

$$(I) \quad f(\tau_n, X_{\tau_n}) \stackrel{\text{Itô}}{=} f(t, x) + \int_t^{\tau_n} \mathcal{L}^u f(s, X_s) ds + \int_t^{\tau_n} Df(s \cdot X_s) \sigma(s, X_s, u_s) dW_s$$

X_s ist in $[t, \tau_n]$ beschränkt.

Betrachte:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\int_t^{\tau_n} \|Df(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s)\|^2 ds] &\leq && | \quad s < \tau_n, f \in C^{1,2} \\ (const > 0) \cdot \mathbb{E}[\int_t^{\tau_n} \|\sigma(s, X_s, u_s)\|^2 ds] &\leq && | \quad \text{Voraussetzung an } \sigma \\ const \cdot C_\sigma \cdot \mathbb{E}[\int_t^{\tau_n} 1 + \|X_s\|^2 + \|u_s\|^2] &< \infty && | \quad \text{laut Voraussetzung} \\ \Rightarrow \mathbb{E}[\int_t^{\tau_n} Df(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s) dW_s] &= 0 && (II) \end{aligned}$$

Betrachte:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{tx} \left[\underbrace{\int_t^{\tau_n} \phi(s, X_s, u_s) ds}_{\text{laufende Kosten bis } \tau_n} + f(\tau_n, X_{\tau_n}) \right] &= && | \quad (I)(II) \text{ einsetzen} \\ \mathbb{E}_{tx} \left[\int_t^{\tau_n} \phi(s, X_s, u_s) ds + f(t, x) + \int_t^{\tau_n} \mathcal{L}^u f(s, X_s) ds \right] &= && | \quad \text{Herausziehen von } f(t, x) \\ f(t, x) + \mathbb{E} \left[\underbrace{\int_t^{\tau_n} \phi(s, X_s, u_s) + \mathcal{L}^u f(s, X_s) ds}_{\text{nach HJB-Gleichung } \leq 0, \text{ da das Supremum } = 0} \right] &\leq && (III) \\ f(t, x) &&& \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty \Rightarrow \tau_n \xrightarrow{\text{f.s.}} T$

$$\begin{aligned} \left| \int_t^{\tau_n} \phi(s, X_s, u_s) ds + f(\tau_n, X_{\tau_n}) \right| &\leq \int_t^{\tau_n} |\phi(s, X_s, u_s)| ds + |f(\tau_n, X_{\tau_n})| \leq \\ &\leq \int_t^{\tau_n} C_\phi \cdot (1 + \|X_s\|^2 + \|u_s\|^2) ds + C_f (1 + \sup_{t \leq s \leq T} \|X_s\|^2) \in L^1 \text{ unabhängig von } n. \end{aligned}$$

So erhält man mit f stetig (sogar $C^{1,2}$) die Voraussetzungen für die dominierte Konvergenz in (III) und es folgt: $f(T, x) = \psi(T, x)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mathbb{E}[\int_t^T \phi(s, X_s, u_s) ds + \psi(T, X_t)] \leq f(t, x) \\ &\Rightarrow J(t, x, u) \leq f(t, x) \quad \forall u \in \mathcal{A}(t, x) \\ &\Rightarrow V(t, x) \leq f(t, x) \end{aligned}$$

Der Beweis für (ii) verläuft analog bis auf die Ungleichung (III). Diese wird mit der HJB-Gleichung für u^* zum Gleichheitszeichen. \square

Verifikationssatz für unendlichen Zeithorizont

Für $T = \infty$ sei

$$\begin{aligned} dX_t &= b(X_t, u_t)dt + \sigma(X_t, u_t)dW_t \\ J(x, u) &= \mathbb{E}_x[\int_0^\infty e^{-\delta t} \phi(X_t, u_t)dt] \rightarrow \max \\ V(t, x) &= \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} J(x, u) \end{aligned}$$

$\mathcal{A}(t, x)$ wird so gewählt, dass folgendes gilt:

- (1) u ist progressiv messbar und $\mathbb{E}[\int_0^\infty e^{-\delta t} \|u_s\|^2 ds] < \infty$
- (2) X_t ist eine eindeutige starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung mit $\mathbb{E}[\int_0^\infty e^{-\delta t} \|X_s\|^2] < \infty$
- (3) $J(x, u)$ ist wohldefiniert

Satz 3.2. Verifikationssatz für $T = \infty$

Sei:

- $\|\sigma(X_t, u_t)\|^2 \leq C_\sigma \cdot (1 + \|x\|^2 + \|u\|^2), \quad C_\sigma > 0$
- ϕ ist stetig mit $|\phi(X_t, u_t)| \leq C_\phi \cdot (1 + \|x\|^2 + \|u\|^2), \quad C_\phi > 0$
- $\exists f \in C^2(\mathbb{R})$ und $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e^{-\delta \tau} f(X_\tau)] = 0$
- $\sup_{u \in U} \{\phi(x, u) + \mathcal{L}^u f(x) - \delta f(x)\} = 0$

Dann folgt:

- (i) $f(x) \geq V(x)$ und
- (ii) falls das Maximum \hat{u} existiert und $u_t^* = \hat{u}(X_t^*)$ und $u_t^* \in \mathcal{A}(t, x)$

$$\Rightarrow f(x) = V(x)$$

und

u_t^* ist optimale Strategie.

3.3 Maximierung der erwarteten Dividende

Betrachtet man das konkrete Problem:

$$dX_t = (\mu - d_t) dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x$$

3.3.1 Endliche Obergrenze

In diesem Kapitel ist die Obergrenze D^0 endlich. So wie zuvor bezeichnet u_t den Kontrollprozess und damit die Dividendenrate, die das Versicherungsunternehmen auszahlt. Da D^0 endlich ist, wird der Kontrollprozess folgendermaßen beschränkt:

$$u_t \leq D^0, \quad D^0 > 0$$

$$J(x, u) = \mathbb{E}[\int_0^\tau e^{-\delta t} u_t dt] \rightarrow \max \tau = \inf\{t > 0 | X_t = 0\}$$

Mit $U = [0, D^0]$ folgt für die HJB-Gleichung:

$$\sup_{u \in U} \{u + V_x(\mu - u) + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} - \delta V\} = 0$$

Gesucht wird die Lösung der HJB-Gleichung. Mittels des Verifikationssatzes lässt sich infolge zeigen, dass diese eine Wertfunktion ist.

Randbedingungen:

- $V(0) = 0$. Bei einem Vermögen von 0 tritt der Ruin sofort ein.
- V ist beschränkt, da

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \mathbb{E}[\int_0^\tau e^{-\delta t} u_t dt] \leq \mathbb{E}[\int_0^\tau e^{-\delta t} D^0 dt] \\ &\leq \mathbb{E}[\int_0^\infty e^{-\delta t} D^0 dt] = \frac{e^{-\delta t} D^0 |_\infty}{-\delta} = \frac{D^0}{\delta} \end{aligned}$$

und $\sup_{u \in U} J(x, u) = V(x)$ folgt $V(x) \leq \frac{D^0}{\delta}$.

Um die HJB-Gleichung im ersten Schritt zu lösen, stellt sich die Frage:

Für welches u ist $u + V_x(\mu - u) + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} - \delta V$ maximal?

Das Supremum in der HJB-Gleichung hängt nur von zwei Summanden ab:

$$\sup_u \left\{ (u + V_x(\mu - u) + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} - \delta V) \right\} = \sup_u \left\{ (1 - V_x)u \right\} + \mu V_x + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} - \delta V$$

Im nächsten Schritt wird das Argument des Maximum gesucht:

$$\begin{aligned} \max_u \left\{ (1 - V'(x))u \right\} &= (1 - V'(x))u_{\max} \\ &\Leftrightarrow u_{\max} = \arg \max \left((1 - V'(x))u \right) = \begin{cases} 0, & \text{für } V'(x) > 1, & (A) \\ D^0, & \text{für } V'(x) \leq 1. & (B), \end{cases} \end{aligned}$$

denn $u \in [0, D^0]$ und für

- $V' > 1 \Rightarrow (1 - V'(x)) < 0$. Somit ist $(1 - V'(x)) \cdot u_{\max} \leq 0$ und multipliziert mit $u_{\max} = 0$ maximal.
- $0 < V' \leq 1 \Rightarrow (1 - V'(x)) \in [0, 1]$. Somit ist $(1 - V'(x)) \cdot u_{\max}$ positiv und multipliziert mit dem größtmöglichen (positiven) $u \in [0, D^0]$ maximal, also $u_{\max} = D^0$.

Es wird die Annahme getroffen, dass die Wertfunktion monoton wachsend und konkav ist. Daher folgt:

$\exists x_1 \in [0, \infty)$:

$$(A) \quad V'(x) > 1 \quad \forall x < x_1$$

$$(B) \quad V'(x) < 1 \quad \forall x > x_1$$

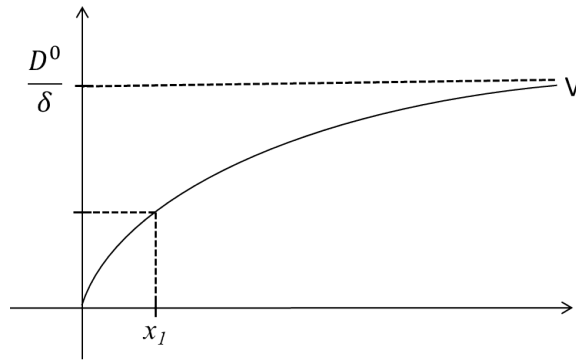


Abbildung 3: Wertfunktion

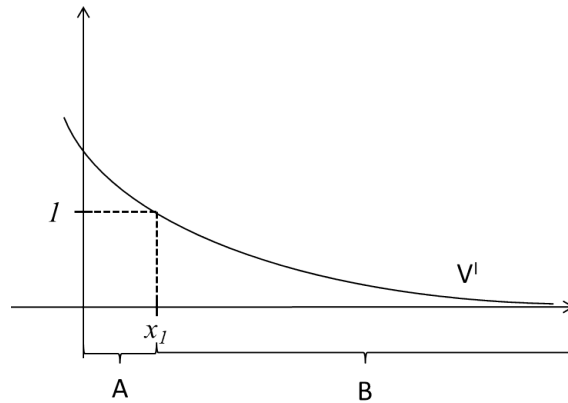


Abbildung 4: Abgeleitete Wertfunktion

Somit wird die HJB-Gleichung in zwei Intervalle für $V'(x)$ unterteilt:

$$(A) \quad V'(x) > 1 \Rightarrow \sup_{u \in U} \{u + V_x(\mu - u) + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} - \delta V\} \\ = 0 + \mu V_x + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} - \delta V \stackrel{!}{=} 0$$

$$(B) \quad V'(x) \leq 1 \Rightarrow \sup_{u \in U} \{u + V_x(\mu - u) + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} - \delta V\} \\ = D^0 + \mu V_x + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} - \delta V \stackrel{!}{=} 0$$

Im nächsten Schritt werden die beiden Differentialgleichungen gelöst:

(A): $0 + \frac{\sigma^2}{2}V'' + \mu V' - \delta V = 0$ ist eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung.

Das charakteristische Polynom ist daher:

$$\sigma^2 2\theta^2 + \mu\theta - \delta = 0 \Rightarrow \theta_{\pm} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2}$$

$$\Rightarrow V(x) = c_1 \cdot e^{\theta_+ x} + c_2 \cdot e^{\theta_- x} \stackrel{V(0)=0}{\Rightarrow} c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

Für $c_1 := c$ folgt, dass

$$V(x) = c \cdot e^{\theta_+ x} - c \cdot e^{\theta_- x} \quad \text{für } 0 \leq x < x_1.$$

(B): $D^0 + \frac{\sigma^2}{2} V'' + \mu V' - \delta V = 0$ ist eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Die partikuläre Lösung für ein konstantes V ist $V_{\text{part}} = \frac{D^0}{\delta}$.

Das charakteristische Polynom ist:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2} \theta^2 + (\mu - D^0) \theta - \delta = 0 &\Rightarrow \theta_{\pm} = \frac{(D^0 - \mu) \pm \sqrt{(D^0 - \mu)^2 + (2\delta\sigma^2)}}{\sigma^2} \\ \Rightarrow V(x) = \frac{D^0}{\delta} + \underbrace{B_1}_{B_1=0, \text{ da } V \text{ beschränkt}} \cdot e^{\theta_+ x} + B_2 \cdot e^{\theta_- x} &\Rightarrow B_2 = B \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{D^0}{\delta} + D \cdot e^{\theta_- x} \quad \text{für } x \geq x_1$$

Nun wird nach der C^2 Lösung gesucht: Der Funktionswert, seine erste und seine zweite Ableitung müssen übereinstimmen um von „smooth fit“ zu sprechen, das heißt für die Wertfunktion $V(x)$:

$$V(x_1^-) = V(x_1^+), \quad V'(x_1^-) = V'(x_1^+) = 1 \quad \text{und} \quad V''(x_1^-) = V''(x_1^+)$$

Diese werden im nächsten Schritt überprüfen:

$$(A) : \quad \frac{\sigma^2}{2} V''(x_1^-) + \underbrace{\mu V'(x_1^-)}_{=1} - \delta V(x_1^-) = 0 \Rightarrow \frac{\sigma^2}{2} V''(x_1^-) = \delta V(x_1^-) - \mu$$

$$(B) : \quad \frac{\sigma^2}{2} V''(x_1^+) + (\mu - D^0) \underbrace{V'(x_1^+)}_{=1} - \delta V(x_1^+) + D^0 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma^2}{2} V''(x_1^+) = -\mu + D^0 + \delta V(x_1^+) - D^0 = \delta V(x_1^+) - \mu$$

Somit ist für (A)=(B):

$$\delta V(x_1^-) - \mu = \delta V(x_1^+) - \mu$$

Somit ist die Bedingung für die zweite Ableitung erfüllt, wenn sie für die erste Ableitung und Stammfunktion erfüllt ist.

Für (A) war die Wertfunktion $V(x) = C(e^{\theta_+x} - e^{\theta_-x})$, somit ist die erste Ableitung:

$$V'(x) = C(\theta_+e^{\theta_+x} - \theta_-e^{\theta_-x})$$

Für (B) war die Wertfunktion $V(x) = B \cdot e^{\theta_-x} + \frac{D^0}{\delta}$, somit ist die erste Ableitung:

$$V'(x) = B \cdot \theta_-e^{\theta_-x}$$

Im nächsten Schritt sollen die Variablen C, B, x_1 gelöst werden:

$$V'(x_1) = C(\theta_+e^{\theta_+x_1} - \theta_-e^{\theta_-x_1}) = B \cdot \theta_-e^{\theta_-x_1} \Rightarrow B = \frac{1}{\theta_-} \cdot e^{-\theta_-x_1}$$

$$V(x_1) = C(e^{\theta_+x_1} - e^{\theta_-x_1}) = B \cdot e^{\theta_-x_1} + \frac{D^0}{\delta} \quad | \text{ } B \text{ einsetzen}$$

$$\Rightarrow C \cdot (e^{\theta_+x_1} - e^{\theta_-x_1}) = \frac{D^0}{\delta} + \frac{1}{\theta_-} =: \alpha$$

$$\alpha = C \cdot (e^{\theta_+x_1} - e^{\theta_-x_1}) \quad | \cdot V'(x_1^-) = 1$$

$$\alpha \cdot C(\theta_+e^{\theta_+x_1} - \theta_-e^{\theta_-x_1}) = C \cdot (e^{\theta_+x_1} - e^{\theta_-x_1}) \cdot 1 \quad | \text{ } C \text{ kürzen}$$

$$e^{\theta_+x_1}(\alpha\theta_+ - 1) = e^{\theta_-x_1}(-1 + \alpha \cdot \theta_-)$$

$$\Rightarrow e^{x_1(\theta_+ - \theta_-)} = \frac{\alpha\theta_- - 1}{\alpha\theta_+ - 1}$$

Da die Exponentialfunktion strikt positiv ist, muss es auch die rechte Seite der Gleichung sein.

Durch Anwenden des Logarithmus erhält man:

$$x_1(\theta_+ - \theta_-) = \ln \frac{\alpha\theta_- - 1}{\alpha\theta_+ - 1}$$

Dividert man durch $(\theta_+ - \theta_-)$, erhält man eine explizite Darstellung von x_1 :

$$x_1 = \frac{1}{(\theta_+ - \theta_-)} \cdot \ln \frac{\alpha \cdot \theta_- - 1}{\alpha \cdot \theta_+ - 1}$$

Aufgrund des Definitionsbereichs des Logarithmus muss $\frac{\alpha \cdot \theta_- - 1}{\alpha \cdot \theta_+ - 1} > 0$ sein.

Die Lösung der Differentialgleichung ist somit:

$$(A): V(x) = C(e^{\theta_+ \cdot x} - e^{\theta_- \cdot x}) \text{ für } x \leq x_1$$

$$(B): V(x) = \frac{D^0}{\delta} + B \cdot e^{\theta_- \cdot x} = \frac{D^0}{\delta} + \frac{1}{\theta_-} \cdot e^{-\theta_- \cdot x} \cdot e^{\theta_- \cdot x} = \frac{D^0}{\delta} + \frac{1}{\theta_-} \text{ für } x > x_1$$

Wegen

$$u_{\max} = \arg \max((1 - V'(x))u) = \begin{cases} 0, & \text{für } V'(x) > 1, & (A) \\ D^0, & \text{für } V'(x) \leq 1. & (B) \end{cases}$$

ist die optimale Strategie für $\alpha = \frac{D^0}{\delta} + \frac{1}{\theta_-} > 0$ $\hat{u} = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_1] \\ D^0, & x \in (x_1, \infty] \end{cases}$

Für $\alpha = \frac{D^0}{\delta} + \frac{1}{\theta_-} \leq 0$ folgt $\hat{u} \equiv D^0$.

Die Bedingungen des Verifikationstheorems sind erfüllt. Die Existenz einer Lösung der stochastischen Differentialgleichung hingegen bedarf weiterer Betrachtung, da \hat{u} nicht Lipschitz stetig ist. Hierfür wird auf das Yamada-Watanabe-Kriterium verwiesen.

3.3.2 Unendliche Obergrenze

Im diesem Abschnitt soll die optimale Strategie mit unbeschränkter Dividendenrate gefunden werden, d.h. $D^0 = \infty$.

Hierfür wird der neue Kontrollprozess

$$L_t = \int_0^t u_s ds,$$

also die gesamte bis zum Zeitpunkt t ausgezahlte Dividende, eingeführt. Der Totalvariationsprozess ist dabei $|L_t| = \int_0^t |u_s| ds$.

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 dX_t &= \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t - dL_t, \text{ mit } X_0 = x \\
 J(x, L) &= \mathbb{E}[\int_0^\infty e^{-\delta t} h(X_t) dt + c \int_0^\infty e^{-\delta t} d|L|_t] \rightarrow \min \\
 &\text{mit } h(X_t) \geq 0 \text{ und } c > 0 \text{ f\"ur alle } t \geq 0
 \end{aligned}$$

Gesucht wird die optimale Strategie L_t^* mit

- i) L_t^* ist adaptiert und
- ii) von beschränkter Totalvariation auf kompakten Intervallen.

Diese Bedingungen müssen darüber hinaus für den Kontrollprozess L_t gelten.

L_t^* muss so gewählt werden, dass

$$V(x) = \inf_L J(x, L) = J(x, L^*).$$

Satz 3.3. Falls $V \in C^2$, so erfüllt V die HJB-Gleichung

$$\min\left\{\frac{\sigma^2}{2}V''(x) + \mu V'(x) - \delta V(x) + h(x), c - |V'(x)|\right\} = 0$$

Da infolge das Problem konkretisiert wird, bleibt dieser Satz in seiner Verallgemeinerung hier unbewiesen.

Betrachte man die Dividendenoptimierung mit einer Auszahlung, der akkumulierten Dividendenzahlung. So sind $c = 1$ und $h \equiv 0$.

Weiters ist L_t

- i) adaptiert,

- ii) monoton nicht fallend und nicht negativ und
- iii) càdlàg, d.h. rechtsstetig und mit linken Limiten, jedoch im Allgemeinen nicht stetig.

Damit folgt

$$J(x, L) = \mathbb{E}[\int_0^\tau e^{-\delta s} dL_s] \rightarrow \max \text{ mit } \tau = \inf\{t \geq 0 | X_t = 0\}$$

und die HJB-Gleichung ergibt

$$\max\{\frac{\sigma^2}{2}V'' + \mu V' - \delta V, 1 - V'\} = 0.$$

Die Randbedingung ist hierbei wieder $V(0) = 0$.

$V(x)$ soll so konstruiert werden, dass der Definitionsbereich von x in zwei Intervalle C und D mittels der Grenze b^* geteilt werden kann.

$$C = \{x \mid \frac{\sigma^2}{2}V'' + \mu V' - \delta V = 0, 1 - V' \geq 0\}$$

$$D = \{x \mid \frac{\sigma^2}{2}V'' + \mu V' - \delta V \geq 0, 1 - V' = 0\}$$

Der optimale Prozess sei des Weiteren so definiert, dass

$$i) \ x + \int_0^t \mu(X_s^*) ds + \int_0^t \sigma(X_s^*) dW_s = X_t^* + L_t^*,$$

$$ii) \ \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{\{X_t^* \neq b^*\}} dL_s^* \text{ und}$$

$$iii) \ X_t^* \in C, t > 0.$$

X_t^* ist die an b^* reflektierte Diffusion.

Um zu gewährleisten, dass nach Lösen der HJB-Gleichung V die Wertfunktion ist, bedarf es eines weiteren Verifikationssatzes:

Satz 3.4. Verifikationssatz

X_t^* , V_t und L_t sind wie oben definiert.

Wenn $V \in C^2$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e^{-\delta t} V(X_t)] = 0$,
dann ist V Wertfunktion und L_t^* die optimale Strategie.

Als nächstes sollen die beiden Intervalle betrachtet werden. Für den Bereich C ergibt sich durch Lösen der Differentialgleichung:

$$\frac{\sigma^2}{2}\theta^2 + \mu\theta' - \delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{\pm} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2}$$

$$V(x) = c_1 \cdot e^{\theta_- \cdot x} + c_2 \cdot e^{\theta_+ \cdot x}$$

Durch einsetzen der Randbedingung erhält man $-c_1 = c_2 =: C$ und somit ist

$$V(x) = C \cdot (e^{\theta_+ \cdot x} - e^{\theta_- \cdot x}).$$

Für den Bereich D ist

$$V(x) = (x - b^*) + K.$$

Mittels „smooth fit“ lässt sich b^* und C berechnen.

$$V(b_-^*) = V(b_+^*) \quad \Rightarrow \quad C \cdot (e^{\theta_+ \cdot b^*} - e^{\theta_- \cdot b^*}) = b^* - b^* + K$$

$$V'(b_-^*) = V'(b_+^*) \quad \Rightarrow \quad C \cdot (\theta_+ e^{\theta_+ \cdot b^*} - \theta_- e^{\theta_- \cdot b^*}) = 1$$

$$V''(b_-^*) = V''(b_+^*) \quad \Rightarrow \quad C \cdot (\theta_+^2 e^{\theta_+ \cdot b^*} - \theta_-^2 e^{\theta_- \cdot b^*}) = 0$$

Für die zweite Ableitung folgt somit

$$\theta_+^2 e^{\theta_+ \cdot b^*} = \theta_-^2 e^{\theta_- \cdot b^*} \Rightarrow e^{(\theta_+ - \theta_-) \cdot b^*} = \frac{\theta_-^2}{\theta_+^2}$$

und

$$b^* = \frac{1}{(\theta_+ - \theta_-) \ln\left(\frac{\theta_-^2}{\theta_+^2}\right)}.$$

Mittels der ersten Ableitung erhält man:

$$C = \frac{1}{\theta_+ e^{\theta_+ \cdot b^*} - \theta_- e^{\theta_- \cdot b^*}}$$

Für $V(b^*)$ ist

$$K = C \cdot (e^{\theta_+ \cdot b^*} - e^{\theta_- \cdot b^*}).$$

Somit gilt es nur noch für den Verifikationssatz zu zeigen, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e^{-\delta t} V(X_t)] = 0.$$

Dies folgt, da für

$$V(x) = \begin{cases} C \cdot (e^{\theta_+ \cdot x} - e^{\theta_- \cdot x}), & \text{für } x \leq b^* & (C) \\ (x - b^*) + K, & \text{für } x > b^* & (D) \end{cases}$$

mit

$$V(x) = C \cdot (e^{\theta_+ \cdot x} - e^{\theta_- \cdot x}) \leq (x - b^*) + K \text{ für } x \leq b^*$$

eine Abschätzung gefunden werden kann:

$$V(X_t) \leq K - b^* + X_t \leq K + x + \mu t + \sigma W_t \quad \text{für alle } t \geq 0$$

Mit

$$\mathbb{E}[e^{-\delta t} (K + x + \mu t + \sigma W_t)] \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty$$

folgt die Voraussetzung des Satzes.

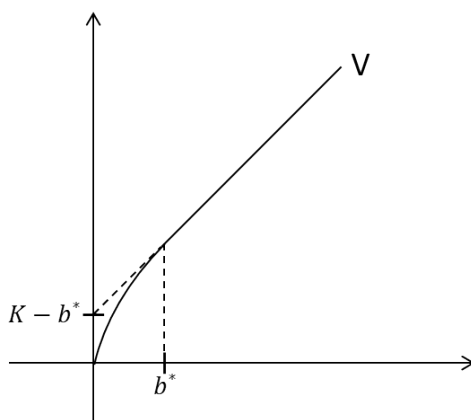


Abbildung 5: Abschätzung der Wertfunktion

4 Zweidimensionale, optimale Dividendenstrategie

Im folgenden Kapitel werden zwei Versicherungsunternehmen betrachtet. Diese zahlen wie zuvor ihren Aktionären Dividenden aus. Dabei werden die Dividenden bezüglich deren diskontierten Erwartungswert maximiert. Die Zahlungen werden getätigt bis das Unternehmen den Zustand des Ruins erreicht. Infolge wird verglichen, ob eine Fusionierung der Unternehmen und somit eine gemeinsame Auszahlung der Dividenden profitabel ist. Dieses Kapitel basiert auf den Erkenntnissen von Gerber und Shiu (2006) [5].

Es sei X_t wieder als das Vermögen ohne Dividendenauszahlung der einzelnen Unternehmen gegeben mit

$$X_t = x + \mu t + \sigma W_t,$$

wobei μ die positive Drift, σ^2 die Varianz pro Zeiteinheit und x das Startkapital bezeichnet und W_t eine Brownsche Bewegung ist.

Für die optimale Dividendenstrategie wird die Höhe der Barriere mit Parameter b bezeichnet. Wenn das Vermögen des Unternehmens kleiner als b ist, werden keine Dividenden ausgezahlt. Erreicht oder übersteigt das Vermögen des Unternehmens die Barriere b , so wird der Überschuss zum Level als Dividenden an die Aktionäre ausgezahlt. Falls das Startkapital x bereits größer b ist, wird deren Differenz bereits an die Aktionäre ausgezahlt.

$V(x, b)$ ist die erwartete diskontierte Dividende bis zum Ruin mit Startkapital x und der Barriere b .

Somit ist die Wertfunktion

$$V(x, b) = x - b + V(b, b) \text{ für } x > b$$

und

$$\frac{\sigma^2}{2}V''(x, b) + \mu V'(x, b) - \delta V(x, b) = 0 \text{ für } 0 < x < b,$$

wobei $\delta > 0$ wieder der Diskontierungsfaktor ist.

Die Randbedingungen der Differentialgleichung sind

$$V(0, b) = 0$$

und

$$V'(b, b) = 1.$$

Wie im vorherigem Kapitel lässt sich die Differentialgleichung für das erste Intervall $x \in [0, b]$ lösen:

$$\frac{\sigma^2}{2}\theta^2 + \mu\theta - \delta = 0$$

und

$$\theta_{\pm} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2}$$

Durch einsetzen in die Randbedingung erhält man C und somit ist

$$V(x, b) = \frac{e^{\theta_+x} - e^{\theta_-x}}{\theta_+e^{\theta_+b} - \theta_-e^{\theta_-b}} \text{ für } 0 \leq x \leq b.$$

b^* ist das optimale b , sodass der Nenner von $V(x, b^*)$ minimal und somit der Term insgesamt maximal ist.

Wird der Nenner von $V(x, b^*)$ nach b^* abgeleitet und Null gesetzt, erhält man

$$\theta_+^2 e^{\theta_+b^*} - \theta_-^2 e^{\theta_-b^*} = 0.$$

Durch Dividieren durch $e^{\theta_-b^*}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\theta_+^2 e^{\theta_+ b^* - \theta_- b^*} - \theta_-^2 \underbrace{e^{\theta_- b^* - \theta_- b^*}}_{=1} &= 0 \\
\theta_+^2 e^{b^*(\theta_+ - \theta_-)} - \theta_-^2 &= 0 \\
\theta_+^2 e^{b^*(\theta_+ - \theta_-)} &= \theta_-^2 \\
e^{b^*(\theta_+ - \theta_-)} &= \frac{\theta_-^2}{\theta_+^2} \\
b^*(\theta_+ - \theta_-) &= \ln\left(\frac{\theta_-^2}{\theta_+^2}\right)
\end{aligned}$$

Somit erhält man für b^*

$$b^* = \frac{1}{\theta_+ - \theta_-} \ln\left(\frac{\theta_-^2}{\theta_+^2}\right) = \frac{2}{\theta_+ - \theta_-} \ln\left(\frac{\theta_-}{\theta_+}\right)$$

Daher ist das optimale Level für die Dividendenbarriere b^* unabhängig vom Anfangskapital x .

Setzt man

$$V'(b^*, b^*) = 1 \text{ und } V''(b^*, b^*) = 0$$

in

$$\frac{\sigma^2}{2} V''(x, b) + \mu V'(x, b) - \delta V(x, b) = 0$$

ein, so erhält man

$$V(b^*, b^*) = \frac{\mu}{\delta}.$$

Dieses Ergebnis ist ein wichtiges Resultat zur Analyse der Fusionierung.

4.1 Wendepunkt der optimalen Barrierefunktion

Es sei $\zeta := \frac{\sigma}{\mu}$.

Somit ist

$$b^* = \mu f(\zeta)$$

mit

$$f(z) = \frac{z^2}{\sqrt{1+2\delta z^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1+2\delta z^2}+1}{\sqrt{1+2\delta z^2}-1}\right), \quad z \geq 0.$$

Für folgende Überlegung betrachtet man die Funktion

$$g(y) = \frac{y^2}{\sqrt{1+y^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1+y^2}+1}{\sqrt{1+y^2}-1}\right), \quad y \geq 0$$

Somit ist

$$f(z) = \frac{1}{2\delta} g(\sqrt{2\delta}z), \quad z \geq 0$$

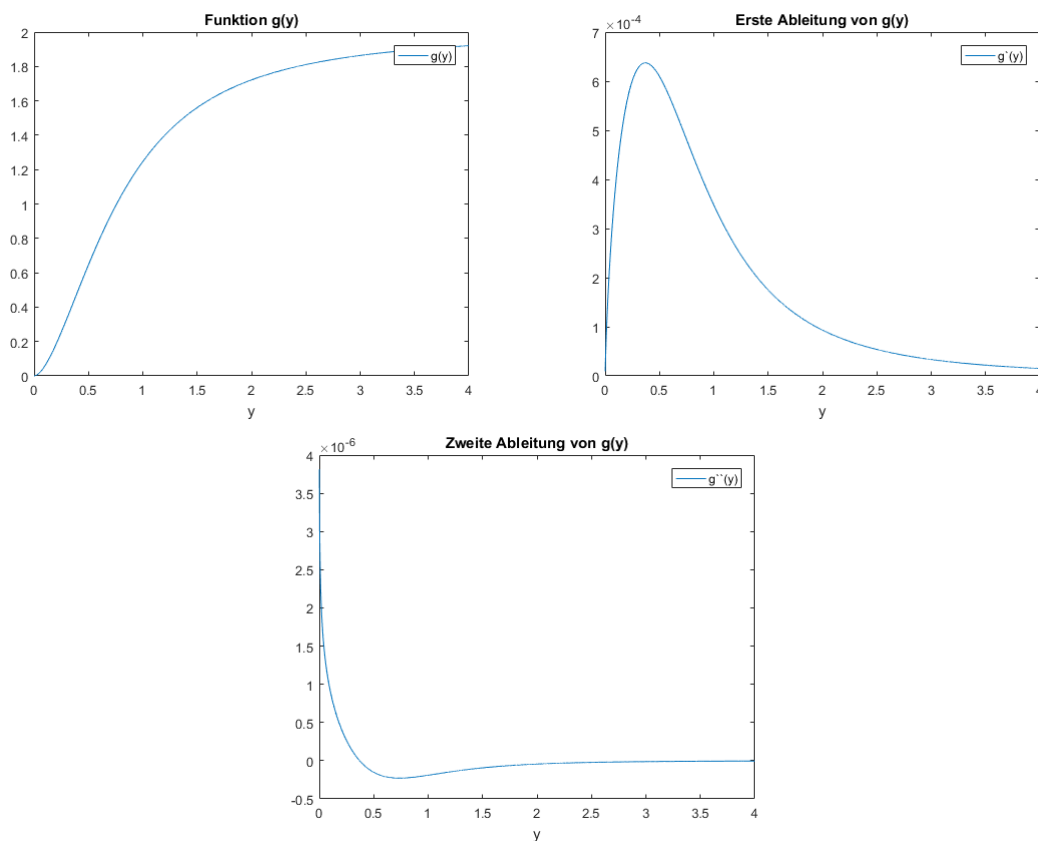


Abbildung 6: Funktion $g(y)$ und ihre erste und zweite Ableitung

Wie an der Grafik ersichtlich ist die Funktion $g(y)$ wachsend mit $g(0) = 0$ und $g(\infty) = 2$.

Die Darstellung der Funktion g erscheint im ersten Augenblick konkav. Dies stimmt jedoch nicht für den gesamten Definitionsbereich. Durch nähere Betrachtung lässt sich erkennen, dass die Funktion nahe der Null konvex ist. Somit hat die Funktion auch einen Wendepunkt.

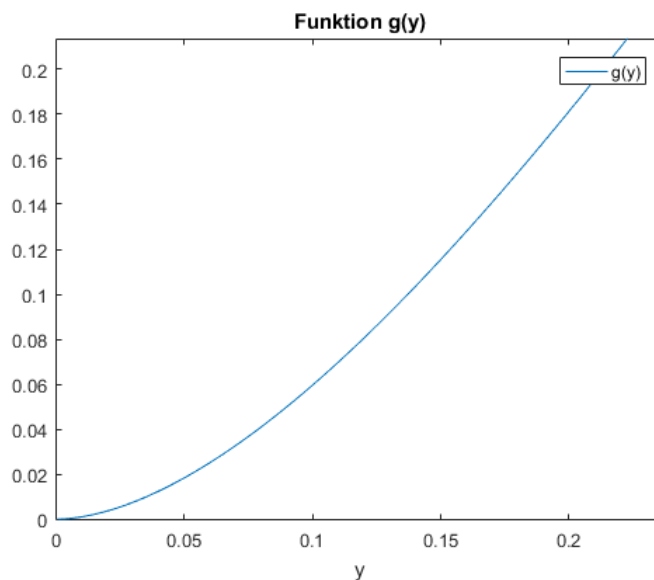


Abbildung 7: Funktion g nahe Null

Infolge wird die Konvexität von der Funktion f von Interesse sein und somit auch von der Funktion g . Mithilfe von Matlab lässt sich ein $\tilde{\zeta}$ finden, sodass

$$g''(y) > 0 \text{ für } 0 \leq y < \tilde{\zeta}$$

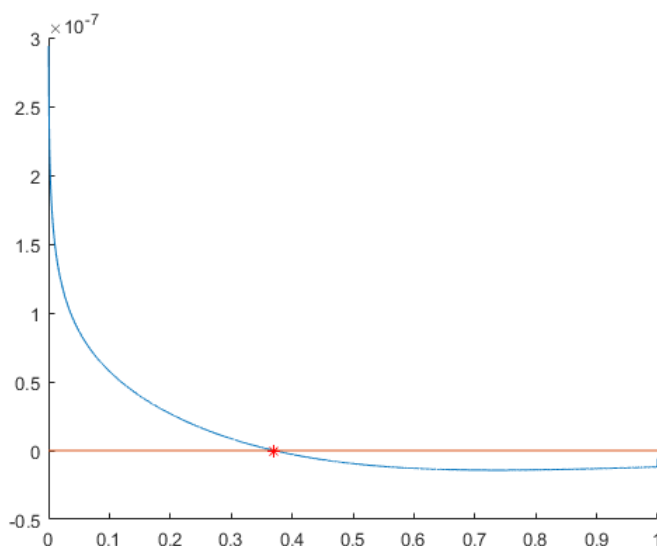
und

$$g''(y) < 0 \text{ für } \tilde{\zeta} < y < \alpha.$$

Der **Wendepunkt** hat den Wert

$$\tilde{\zeta} \approx 0,3708175089.$$

Der Matlab Code hierfür mittels Bisektion findet sich im Appendix, wobei sich eine erste Einschränkung schon durch die Darstellung der Funktion g erkennen lässt.

Abbildung 8: Zweite Ableitung Funktion g

4.2 Betrachtung zweier Unternehmen

Im nächsten Schritt werden zwei börsennotierte Unternehmen betrachtet. Diese werden mit $j = 1, 2$ bezeichnet. Das Vermögen ist ohne Dividendenauszahlung des Unternehmens j als Brownsche Bewegung mit positiver Drift μ_j und Varianz σ^2 pro Zeiteinheit gegeben. Die optimale Barriere für das Unternehmen j ist somit

$$b_j^* = \mu_j f(\zeta_j)$$

mit

$$\zeta_j = \frac{\sigma_j}{\mu_j}.$$

$V_j(x, b)$ ist die erwartete, diskontierte Dividende des Unternehmens j bis zum Ruin mit Anfangskapital x und Barriere b .

Des Weiteren ist das gemeinsame Vermögen der beiden Unternehmen ohne Dividendenzahlungen eine bivariate Brownsche Bewegung mit Korrelationskoeffizient ρ .

Somit ist das Vermögen der fusionierten Unternehmen ohne Dividendenauszahlung eine Brownsche Bewegung mit Drift

$$\mu_m = \mu_1 + \mu_2$$

und Varianz

$$\sigma_m^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2.$$

Daher ergibt sich die optimale Barriere b_m^* für die fusionierten Unternehmen mit

$$b_m^* = (\mu_1 + \mu_2)f(\zeta_m),$$

wobei

$$\zeta_m = \frac{\sigma_m}{\mu_m} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2}}{\mu_1 + \mu_2}.$$

$V_m(x, b)$ ist die erwartete, diskontierte Dividende der fusionierten Unternehmen bis zum Ruin. Dann ist der mögliche Zugewinn durch Fusionierung

$$V_m(x_1 + x_2, b_m^*) - (V_1(x_1, b_1^*) + V_2(x_2, b_2^*))$$

mit dem Kapital x_j der Unternehmen $j = 1, 2$ und dem Kapital $x_1 + x_2$ des fusionierten Unternehmens. Ist der mögliche Zugewinn durch Fusionierung positiv, also

$$V_m(x_1 + x_2, b_m^*) - (V_1(x_1, b_1^*) + V_2(x_2, b_2^*)) > 0,$$

so ist eine Fusionierung profitabel.

Mit $\mu_m = \mu_1 + \mu_2$ und $V(b^*, b^*) = \frac{\mu}{\delta}$ erhält man:

$$V_m(b^*, b^*) = V_1(b_1^*, b_1^*) + V_2(b_2^*, b_2^*)$$

Nimmt man an, dass das derzeitige Kapital der Unternehmen $j = 1, 2$ gleich b_j^* ist, so ist das Kapital des fusionierten Unternehmens $(b_1^* + b_2^*)$.

Es werden zwei Fälle betrachtet:

1.) Falls

$$b_m^* < b_1^* + b_2^*$$

ist der Gewinn durch die Fusionierung gleich

$$(b_1^* + b_2^* - b_m^*).$$

Dieses Resultat lässt sich leicht erkennen, da

$$\begin{aligned} V_m(b_1^* + b_2^*, b_m^*) &= (b_1^* + b_2^* - b_m^*) + V_m(b_m^*, b_m^*) \\ &= (b_1^* + b_2^* - b_m^*) + V_1(b_1^*, b_1^*) + V_2(b_2^*, b_2^*). \end{aligned}$$

2.) Falls

$$b_m^* > b_1^* + b_2^*$$

ist die Fusionierung nicht profitabel, da

$$V_m(b_1^* + b_2^*, b_m^*) < V_m(b_m^*, b_m^*) = V_1(b_1^*, b_1^*) + V_2(b_2^*, b_2^*).$$

4.3 Hinreichende Bedingung zur Fusionierung

Im folgenden Abschnitt soll eine hinreichende Bedingung zur Fusionierung von zwei Unternehmen gefunden werden.

Die zuvor ermittelte optimale Barriere für das fusionierte Unternehmen

$$b_m^* = (\mu_1 + \mu_2)f(\zeta_m)$$

als eine Funktion von ρ ist wachsend.

Dies ergibt sich da

$$\zeta_m = \frac{\sigma_m}{\mu_m} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2}}{\mu_1 + \mu_2}$$

wachsend ist und auch die Funktion f , so wie g , wachsend ist.

Falls für $\rho = 1$ $b_m^* < b_1^* + b_2^*$ gilt, dann gilt dies für alle $\rho \in [-1, 1]$. Für die hinreichende Bedingung wird damit $\rho = 1$ angenommen. Somit lässt sich von einer nicht profitablen Fusionierung für $\rho = 1$ nicht auf andere Korrelationen zurückschließen.

Für $\rho = 1$ folgt:

$$\zeta_m = \frac{\sigma_m}{\mu_m} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2}}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2}}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{\sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

Dies lässt sich als gewichteter Durchschnitt von ζ_1 und ζ_2 schreiben.

$$\zeta_m = \frac{\mu_1}{\mu_m} \zeta_1 + \frac{\mu_2}{\mu_m} \zeta_2$$

Falls $\zeta_1 = \zeta_2$, dann folgt dass auch ζ_m mit ihnen übereinstimmt, da

$$\zeta_m = \frac{\mu_1}{\mu_m} \zeta_1 + \frac{\mu_2}{\mu_m} \zeta_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu} \zeta_1 = \frac{\mu_m}{\mu} \zeta_1 = \zeta_1 = \zeta_2.$$

Für den Fall, dass ζ_1 ungleich ζ_2 ist, wird in die Profitabilitätsbedingung

$$b_m^* < b_1^* + b_2^*$$

die Definition von b_m^* und b_j^* eingesetzt, sodass

$$(\mu_1 + \mu_2)f(\zeta_m) < \mu_1 f(\zeta_1) + \mu_2 f(\zeta_2).$$

Durch Dividieren durch μ_m und Einsetzen des gewichteten Durchschnittes der einzelnen ζ erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_m} f\left(\frac{\mu_1}{\mu_m} \zeta_1 + \frac{\mu_2}{\mu_m} \zeta_2\right) &< \frac{\mu_1}{\mu_m} f(\zeta_1) + \frac{\mu_2}{\mu_m} f(\zeta_2) \\ f\left(\frac{\mu_1}{\mu_m} \zeta_1 + \frac{\mu_2}{\mu_m} \zeta_2\right) &< \frac{\mu_1}{\mu_m} f(\zeta_1) + \frac{\mu_2}{\mu_m} f(\zeta_2). \end{aligned}$$

Setzt man $t := \frac{\mu_1}{\mu_m}$, so folgt $1 - t = 1 - \frac{\mu_1}{\mu_m} = \frac{\mu_m - \mu_1}{\mu_m} = \frac{\mu_2}{\mu_m}$. Hinreichend dafür ist die Konvexität der Funktion f zwischen ζ_1 und ζ_2 . Der Wendepunkt für die Funktion g ist bereits bekannt.

Da

$$b^* = \mu_j f(z) = \mu_j \frac{1}{2\delta} g(\sqrt{2\delta}z), \quad z \geq 0 \text{ für } j = 1, 2$$

gilt, ist

$$\sqrt{2\delta}\zeta_j < \tilde{\zeta}$$

für $j = 1$ und für $j = 2$ für eine profitable Fusionierung hinreichend.

Wird eine Gerade durch $f(\zeta_1)$ und $f(\zeta_2)$ gezogen, so liegt die Funktion f in diesem Bereich unterhalb der Geraden.

Durch Umformen erhält man somit die Bedingungen:

$$\frac{\delta\sigma_j^2}{\mu_j^2} < \frac{\tilde{\zeta}^2}{2} \approx 0.0687528$$

für $j = 1$ und $j = 2$ für $\zeta_1 \neq \zeta_2$.

5 Darstellung der Fusionsentscheidung

In diesem Kapitel werden konkrete Werte angenommen und mit der hinreichenden Bedingung aus dem vorherigen Kapitel verglichen.

5.1 Eigenschaften und Einschränkungen im Modell

In den nächsten Abschnitten sollen nacheinander Änderungen der verschiedenen Variablen betrachtet werden:

- i) Drift
- ii) Standardabweichung
- iii) Korrelation
- iv) Diskontierungsfaktor

Um das Verhalten der Unternehmensstrategie in Abhängigkeit einer Variable zu verstehen, betrachte man den Stellenwert der Funktion g . Für die Standardabweichung, die Drift, und die Korrelation wird somit

$$\frac{\sigma_m}{\mu_m} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2}}{\mu_1 + \mu_2} \text{ bzw. } \frac{\sigma_j}{\mu_j} \text{ für } j = 1, 2$$

benötigt.

Aus den Formeln folgt, dass eine Abnahme der Korrelation und der Standardabweichung bzw. eine Zunahme der Drift zu einer Steigung des Stellenwerts der Funktion führt. Aufgrund der Eigenschaften der Funktion g geht damit für die Standardabweichung und die Korrelation eine Steigung der optimalen Barriere einher. Für Änderungen in der Drift muss man zusätzlich den Multiplikator der Funktion für die Barriere beachten. Diese Problematik wird im nächsten Abschnitt dargestellt.

Für den Diskontierungsfaktor ist ebenfalls eine genauere Betrachtung erforderlich, die später vorgenommen wird.

Analysiert man nun die hinreichende Bedingung genauer, fallen einige Einschränkungen auf:

- i) Eine Voraussetzung für die Ungleichung ist, dass $\zeta_1 \neq \zeta_2$ gelten muss. Somit lassen sich keine Rückschlüsse auf indifferente Fälle ziehen.
- ii) Die hinreichende Bedingung muss für beide Unternehmen gelten. Somit lässt sich nur eine Aussage über jene Bereiche tätigen, bei denen beide Ungleichungen zutreffen bzw. nicht zutreffen. Für die Bereiche, in denen nur eines der beiden Unternehmen die Bedingung erfüllt, ist kein Rückschluss möglich.
- iii) Es können ausschließlich bei einer Entscheidung für eine Fusion Ergebnisse von $\rho = 1$ für andere Korrelationen übernommen werden. Denn im Falle, dass

$$b_m^* > b_1^* + b_2^*,$$

also eine Separierung profitabel ist, kann sich durch eine Näherung der Korrelation an die Null b_m^* kleiner werden und das Ungleichheitszeichen bzw. die Strategie damit ändern.

Ferner wird somit bei gleichbleibendem ζ_1 und ζ_2 eine Fusion der beiden Unternehmen immer profitabler. Das heißt, dass je weniger die beiden Unternehmen miteinander korrelieren, desto eher sollten sie sich zusammenschließen.

In den Abbildungen der folgenden Abschnitte sind die Grenzen der hinreichenden Bedingung für die Variablen jeweils mit einer Linie gekennzeichnet. Diese teilen die Diagramme in 4 Teile.

Entlang der Diagonale befinden sich zwei Bereiche:

- i) Für beide Variablen ist die hinreichende Bedingung erfüllt. Eine Fusionierung ist für alle Korrelationen profitabel bzw. nicht ausschlaggebend.
- ii) Für beide Variablen ist die hinreichende Bedingung nicht erfüllt. Für $\rho = 1$ ist die Unternehmensstrategie immer eine Separation bzw. nicht relevant.

Für andere Korrelationen können keine Aussagen getroffen werden, wobei eine sinkende Korrelation zu einer Zunahme der Fusionen führt.

Im linken oberen und rechten unteren Bereich des Diagramms ist für eines der beiden Unternehmen die Bedingung nicht erfüllt. Somit bietet diese Methode keine Rückschlüsse.

Darüber hinaus gilt für die Berechnung der Unternehmensstrategie mit Hilfe der Funktion g bzw. f : Ist der Stellenwert der Funktion aufgrund der gewählten Variablen Null, so muss für die Berechnung der einzelnen Unternehmensentscheidungen durch Null dividiert werden. Eine Aussage ist somit nicht möglich.

Im folgenden Abschnitte werden Abbildungen mit Änderungen in der Drift betrachtet. Die Linien zeichnen dabei die Grenze anhand der hinreichenden Bedingung an. Mit einem Stern gekennzeichnete Werte bedeuten, dass eine Fusionierung profitabel ist. Ein Kreis hingegen zeigt an, dass die Unternehmen separiert werden sollten. Mit einem Punkt werden indifferente Szenarien bezeichnet.

5.2 Fusionsentscheidung in Abhängigkeit von der Drift

Betrachtet man die hinreichende Bedingung für $\sigma_{1,2} = 1$ und $\delta = 0,5$, so folgt für die Grenzen:

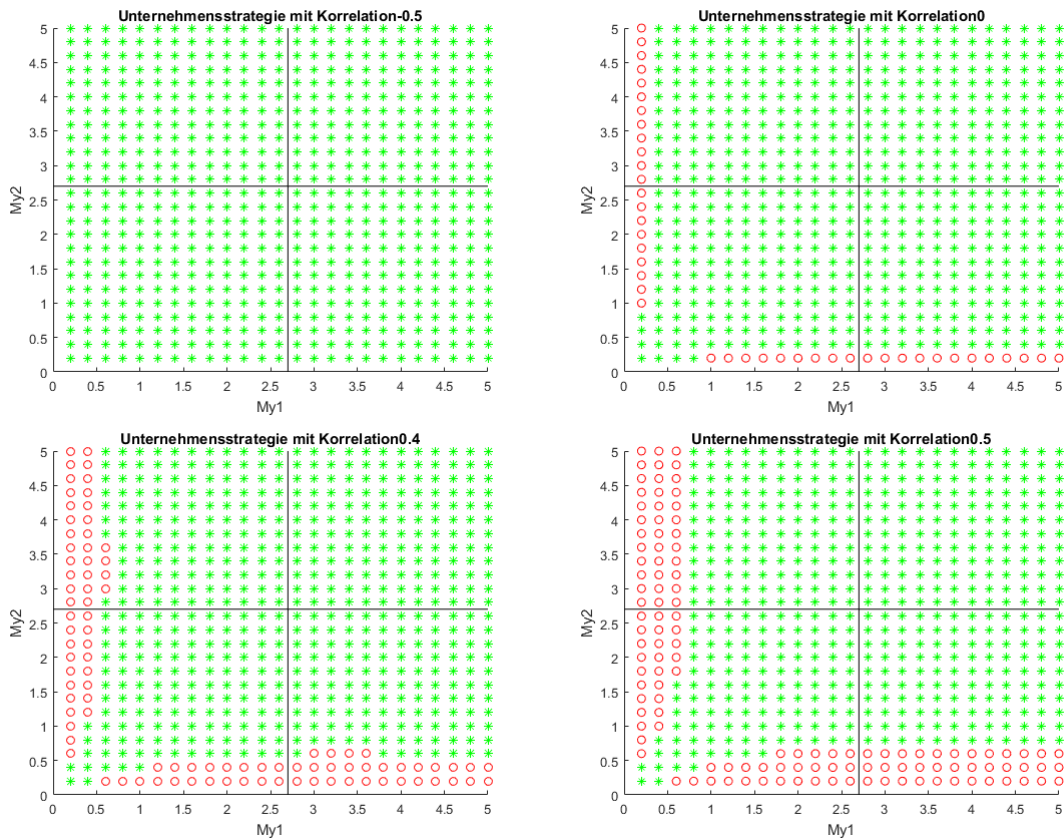
$$\begin{aligned} \frac{\delta\sigma_j^2}{\mu_j^2} &< 0,0687528 \text{ für } j = 1, 2 \\ \frac{\frac{1}{2}}{\mu_j^2} &= \frac{1}{2\mu_j^2} < 0,0687528 \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 0,0687528}} &< \mu_j \end{aligned}$$

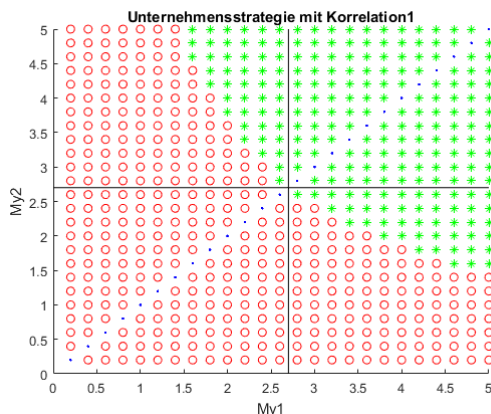
$$\Rightarrow \mu_j > 2,69674$$

Somit ist ein Unternehmenszusammenschluss für $\sigma_{1,2} = 1$ und $\delta = 0,5$ ab $\mu_{1,2} > 2,69674$ profitabel.

Infolge soll im Grafikverlauf die Entwicklung der Unternehmensentscheidung bei wachsender Korrelation veranschaulicht werden. Dabei ist – wie bereits oben mathematisch erläutert – ersichtlich, dass mit wachsender Korrelation der Bereich, bei dem die Unternehmen von einer Separation profitablen, steigt.

Für feste $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ und Korrelation gleich -1 lässt sich auf diese Methode die Fusionsentscheidung nicht treffen, da $\sigma_m = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2 \cdot (-1) \cdot \sigma_1 \sigma_2} = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 0$ und so der Nenner des logarithmischen Multiplikators der Funktion f gleich Null ist. Allgemeiner gilt das bei negativer Korrelation -1 für jedes $\sigma_1 = \sigma_2$. Darüber hinaus sind für $\sigma_1 = 0$ bzw. $\sigma_2 = 0$ oder $\mu_1 = 0$ bzw. $\mu_2 = 0$ keine Ergebnisse berechenbar.



Abbildung 9: Unternehmensentscheidung nach ρ und μ

Bei der letzten Grafik, also $\rho = 1$, wird – wie bereits beschrieben – deutlich, dass für $\mu_1 = \mu_2$, wegen $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_m$, die Voraussetzungen der hinreichenden Bedingung nicht erfüllt sind und somit auch oberhalb der Grenze indifferente Unternehmensentscheidungen vorkommen.

Betrachtet man den Verlauf der Driften μ_1 und μ_2 Richtung unendlich mit Standardabweichung $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, so erkennt man, dass ab einer Grenze keine profitablen Separationen mehr auftreten. Für μ_1 und μ_2 nahe der Null, finden sich jedoch wieder profitable Fusionierungen. Wie bereits in der Einleitung des Kapitels erwähnt, ist das auf den Multiplikator μ in

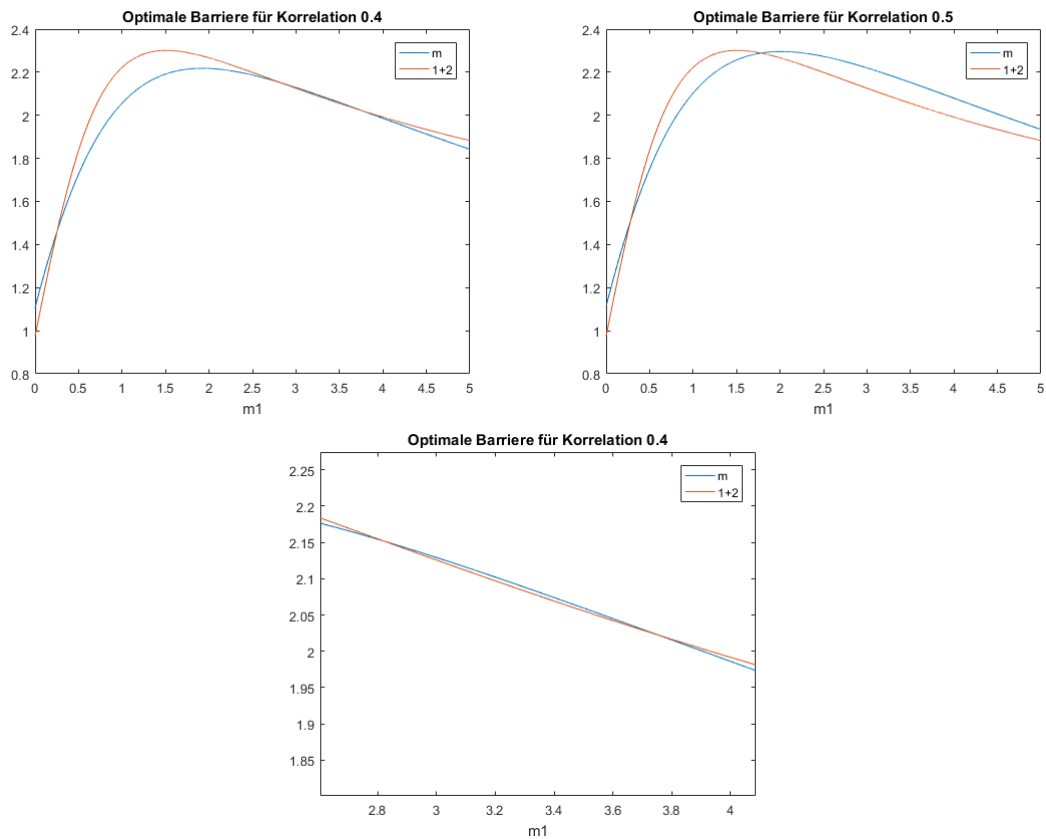
$$b^* = \mu \cdot f(\zeta)$$

zurückzuführen.

Die folgenden abgebildeten Funktionen sollen das Verhältnis von

$$b_m^*(\mu_1) = (\mu_1 + \mu_2) \cdot f(\zeta_m(\mu_1)) \quad \text{zu} \quad b_{1+2}^*(\mu_1) = \mu_1 \cdot f(\zeta_1(\mu_1)) + b_2^*$$

für $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\mu_2 = 0.6$ und $\delta = 0,5$ darstellen. Die Schnittstellen der beiden Funktionen zeigen dabei die Übergänge der Unternehmensstrategien auf.

Abbildung 10: Vergleich b_m^* und $b_1^* + b_2^*$

5.3 Fusionsentscheidung in Abhängigkeit von der Standardabweichung

Betrachtet man die hinreichende Bedingung für $\mu_{1,2} = 1$ und $\delta = 0,5$, so folgt für die Grenzen:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \sigma_j^2}{\mu_j^2} &< 0,0687528 \text{ für } j = 1, 2 \\ \sigma_j &< \sqrt{\frac{0,0687528 \cdot \mu_j^2}{\delta}} \\ \Rightarrow \sigma_j &< \sqrt{2 \cdot 0,0687528} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_j < 0,37082$$

Somit ist ein Unternehmenszusammenschluss für $\mu_{1,2} = 1$ und $\delta = 0,5$ ab $\sigma_{1,2} < 0,37082$ profitabel. Damit wird mit fallender Standardabweichung eine Fusionierung

immer profitabler.

Für $\sigma_1 = 0$ bzw. $\sigma_2 = 0$ und für $\rho = -1$ mit $\sigma_1 = \sigma_2$ sind aufgrund der Division durch Null wieder keine Werte erhältlich.

Änderungen in der Korrelation verhalten sich wie im vorherigen Abschnitt.

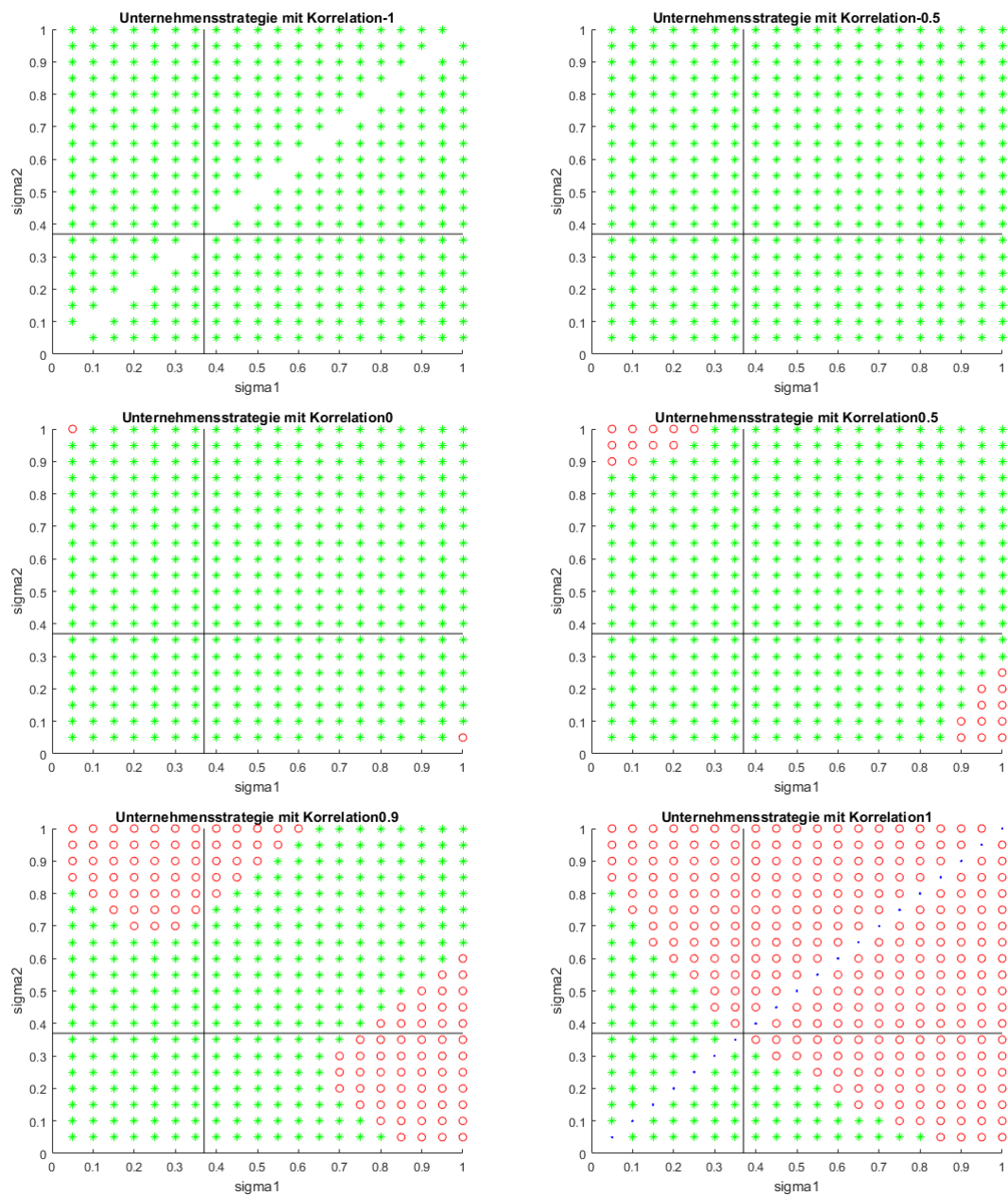


Abbildung 11: Unternehmensentscheidung nach ρ und σ

5.4 Fusionsentscheidung in Abhängigkeit von Diskontierungsfaktor und Korrelation

Setzt man den Diskontierungsfaktor $\delta = 0,5$ so stimmen die Funktionen f und g überein. Dementsprechend ist der Wendepunkt von f gleich $\tilde{\zeta}$.

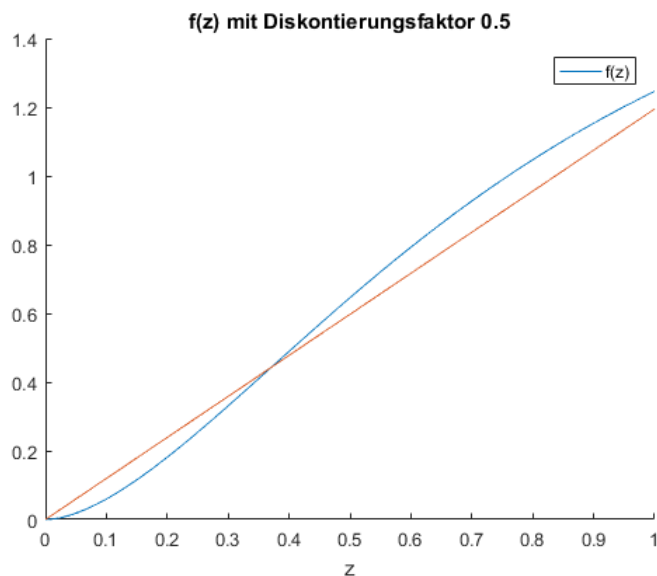


Abbildung 12: Wendepunkt Funktion f mit $\delta = 0,5$

Betrachtet man die Funktion f mit verschiedenen Werten für den Diskontierungsfaktor, so folgt: Für ein fallendes $0 < \delta \leq 1$ verschiebt sich die Nullstelle der zweiten Ableitung von der Funktion f , also ihr Wendepunkt, immer weiter auf der x-Achse nach rechts, d.h. für $0 < \delta \leq 1$:

$$\delta \searrow 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt } \zeta \nearrow \infty.$$

Da

$$f(z) = \frac{z^2}{\sqrt{1+2\delta z^2}} \ln\left(\frac{\sqrt{1+2\delta z^2}+1}{\sqrt{1+2\delta z^2}-1}\right), \quad z \geq 0$$

konvergiert für $\delta \rightarrow 0$ der Stellenwert des Logarithmus gegen unendlich und damit auch sein Logarithmus. Der Multiplikator konvergiert gegen unendlich, da sein Nenner gegen Null konvergiert. Insgesamt konvergiert die Funktion damit gegen unendlich.

Grafisch wird diese Implikation in den folgenden Darstellungen der Funktion f und ihrer zweiten Ableitung sichtbar.

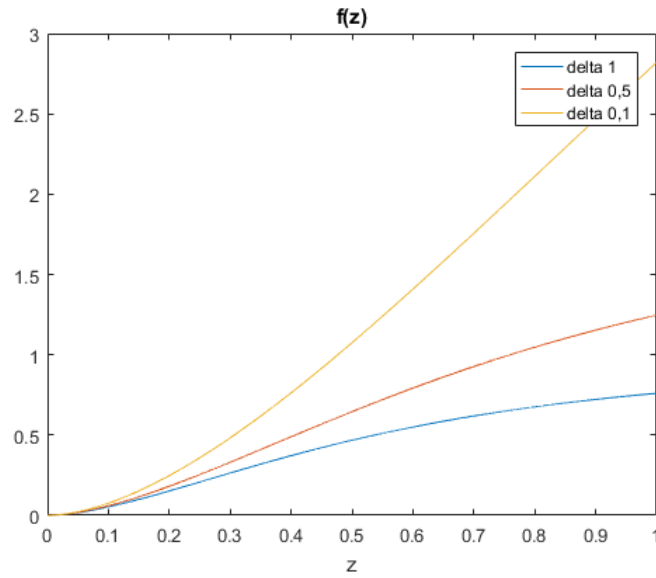


Abbildung 13: Vergleich Funktionen f

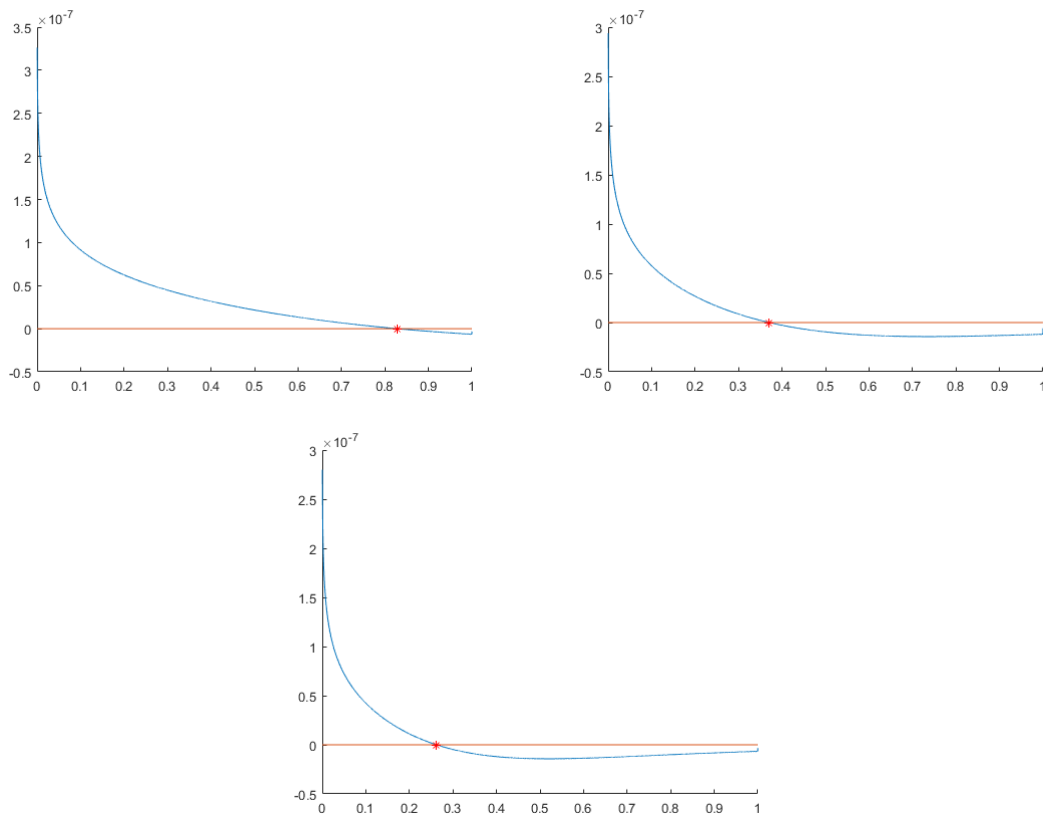


Abbildung 14: Zweite Ableitung Funktion f mit $\delta = 0, 1, 0, 5$ und 1

Für die hinreichende Bedingung ist die Schranke für den Diskontierungsfaktor gegeben als:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \sigma_j^2}{\mu_j^2} &< 0,0687528 \text{ für } j = 1, 2 \\ \Rightarrow \delta &< \frac{0,0687528 \cdot \mu_j^2}{\mu_j^2} \end{aligned}$$

Für $\sigma_{1,2} = 1$ und $\mu_{1,2} = 1$ folgt:

$$\Rightarrow \delta < 0,0687528$$

Aus den bisherigen Erkenntnissen folgend, erhält man, dass sowohl für einen wachsenden Diskontierungsfaktor also auch für eine steigende Korrelation eine Separierung der Unternehmen immer profitabler wird. Dies lässt sich auch anhand der folgenden Grafiken erkennen, bei denen sich Separationsempfehlungen am rechten oberen Rand befinden.

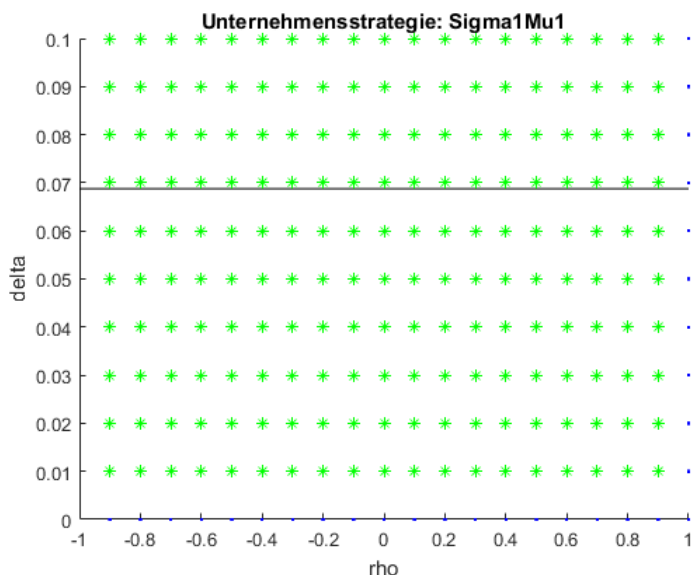


Abbildung 15: Unternehmensentscheidung nach δ und ρ

Wie in den vorherigen Darstellungen ist für $\rho = 1$ für gleiche Standardabweichung und gleiche Drift der beiden Unternehmen die Strategieentscheidung wieder indiffe-

rent.

Für Standardabweichungen und Driften gleich 1 ist der Zusammenhang zwischen der hinreichenden Bedingung und der punktuellen Auswertung nicht ersichtlich. Um Fälle der Separation zu erhalten, werden daher andere Werte angenommen:

Für die folgende Abbildungen seien $\sigma_2 = 0,1$, $\mu_1 = 0,5$ und $\mu_2 = 0,4$, wobei für eine wachsende Standardabweichung σ_1 die Profitabilität der Separierung wieder zunimmt.

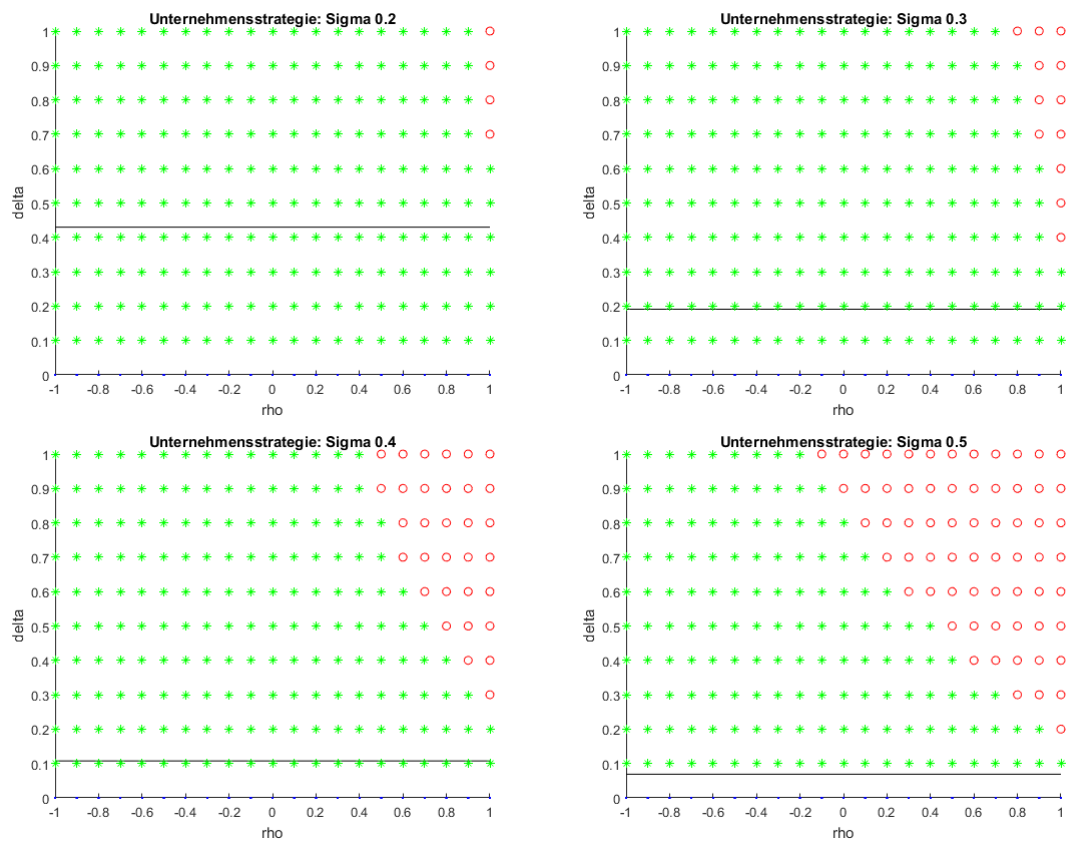


Abbildung 16: Unternehmensentscheidung nach δ , ρ und σ

6 Appendix

6.1 Abbildung: Funktion g und Ableitungen

```
1 clear all
2 format long
3
4 x=linspace(0,4,10000);
5 y1 = x.^2./sqrt(1+x.^2) .* log((sqrt(1+x.^2)+1)./(sqrt(1+x
   .^2)-1));
6 y2= gradient(x.^2./sqrt(1+x.^2) .* log((sqrt(1+x.^2)+1)./(
   sqrt(1+x.^2)-1)));
7 y3 = gradient(gradient(x.^2./sqrt(1+x.^2) .* log((sqrt(1+x
   .^2)+1)./(sqrt(1+x.^2)-1))));
8
9 figure
10 plot(x,y3);
11 title('Zweite Ableitung von g(y)')
12 xlabel('y')
13 legend('g''(y)')
14
15 figure
16 plot(x,y2);
17 title('Erste Ableitung von g(y)')
18 xlabel('y')
19 legend('g'(y)')
20
21 figure
22 plot(x,y1);
23 title('Funktion g(y)')
24 xlabel('y')
25 legend('g(y)')
```

6.2 Bisektionsverfahren für Nullstelle von Funktion g

```
1 clear all;
2 format long;
3
4 epsilon = 0.0000000000000001; %15 Nachkommastellen
5 j=0;
6 a = 0.2;
7 b = 0.4;
8 syms x
9
10 y3(x) = diff(diff(x.^2./sqrt(1+x.^2) .* log((sqrt(1+x.^2)+1)
    ./(sqrt(1+x.^2)-1)))));
11
12 if (y3(b)*y3(a)<0)
13     while (abs(b-a)>epsilon)
14         if (y3((a+b)/2)*y3(a)>0)
15             a=(a+b)/2;
16         else
17             b=(a+b)/2;
18         end
19         j=j+1;
20     end
21     zeta=(a+b)/2;
22 end
23
24 disp(zeta);
```

6.3 Abbildung: Wendepunkt Funktion f

```

1 clear all
2 format long
3
4 x=linspace(0,1,10000);
5
6 delta=0.5;
7 f = 1/(2*delta)* 2*delta*x.^2./sqrt(1+2*delta*x.^2) .* log((
      sqrt(1+2*delta*x.^2)+1)./(sqrt(1+2*delta*x.^2)-1));
8 f1= gradient(1/(2*delta)* 2*delta*x.^2./sqrt(1+2*delta*x.^2)
      .* log((sqrt(1+2*delta*x.^2)+1)./(sqrt(1+2*delta*x.^2)
      -1)));
9 f2= gradient(gradient(1/(2*delta)* 2*delta*x.^2./sqrt(1+2*
      delta*x.^2) .* log((sqrt(1+2*delta*x.^2)+1)./(sqrt(1+2*
      delta*x.^2)-1))));
10
11
12 y2 = gradient(gradient(x.^2./sqrt(1+x.^2) .* log((sqrt(1+x
      .^2)+1)./(sqrt(1+x.^2)-1))));
13
14 zeta=0.3708175088786;
15
16 figure
17 hold on
18 plot(x, f);
19 y=1/(2*delta)* 2*delta*zeta.^2./sqrt(1+2*delta*zeta.^2) .*
      log((sqrt(1+2*delta*zeta.^2)+1)./(sqrt(1+2*delta*zeta.^2)
      -1))/zeta*x;
20 plot(x, y);
21 title('f(z) mit Diskontierungsfaktor 0.5')
```



```
22 xlabel('z')
23 legend('f(z)')
24 hold off
25
26 figure
27 hold on
28 plot(x, f2);
29 plot(x, y2);
30 title('zweite Ableitung von f und g')
31 xlabel('z')
32 null= 0*x;
33 plot(x, null);
34 plot(0.3708175, 0, '*r')
35 hold off
```

6.4 Abbildung: Funktion f - Verschiedene Diskontierungsfaktoren

```
1 clear all
2 format long
3
4 x=linspace(0,4,10000);
5
6 y1 = x.^2./sqrt(1+x.^2) .* log((sqrt(1+x.^2)+1)./(sqrt(1+x
7     .^2)-1));
8
9 delta=1;
10 f = 1/(2*delta)* 2*delta*x.^2./sqrt(1+2*delta*x.^2) .* log((
11     sqrt(1+2*delta*x.^2)+1)./(sqrt(1+2*delta*x.^2)-1));
12
13 delta=0.5;
```

```
11 f2 = 1/(2*delta)* 2*delta*x.^2./sqrt(1+2*delta*x.^2) .* log
    ((sqrt(1+2*delta*x.^2)+1)./(sqrt(1+2*delta*x.^2)-1));
12 delta=0.1;
13 f3 = 1/(2*delta)* 2*delta*x.^2./sqrt(1+2*delta*x.^2) .* log
    ((sqrt(1+2*delta*x.^2)+1)./(sqrt(1+2*delta*x.^2)-1));
14
15 figure
16 plot(x,y1);
17 title('g(y)')
18 xlabel('y')
19 legend('g(y)')
20
21 figure
22 plot(x,f);
23 title('f(z) mit Diskontierungsfaktor 1')
24 xlabel('z')
25 legend('f(z)')
26
27 figure
28 plot(x,f2);
29 title('f(z) mit Diskontierungsfaktor 0,5')
30 xlabel('z')
31 legend('f(z)')
32
33 figure
34 plot(x,f3);
35 title('f(z) mit Diskontierungsfaktor 0,1')
36 xlabel('z')
37 legend('f(z)')
38
39 figure
```

```
40 plot(x, f, x, f2, x, f3);
41 title('f(z)')
42 xlabel('z')
43 legend('delta 1', 'delta 0,5', 'delta 0,1')
```

6.5 Abbildung: Nullstelle zweite Ableitung Funktion f - Verschiedene Diskontierungsfaktoren

```
1 clear all
2 format long;
3
4 for m = 0:10
5     epsilon = 0.0000000000000001;
6     j=0;
7     a = 0.1;
8     b = 1;
9     syms x
10    zeta =0;
11    delta=m/10;
12
13
14    f3(x) = diff(diff(1/(2*delta)* 2*delta*x.^2./sqrt(1+2*delta*
        x.^2) .* log((sqrt(1+2*delta*x.^2)+1)./(sqrt(1+2*delta*x
        .^2)-1)))));
15
16    if (f3(b)*f3(a)<0)
17        while(abs(b-a)>epsilon)
18            if (f3((a+b)/2)*f3(a)>0)
19                a=(a+b)/2;
20            else
21                b=(a+b)/2;
```

```
22         end
23         j=j+1;
24     end
25     zeta=(a+b)/2;
26 end
27
28
29 y=linspace(0,1,10000);
30 f3p= gradient(gradient(1/(2*delta)* 2*delta*y.^2./sqrt(1+2*
    delta*y.^2) .* log((sqrt(1+2*delta*y.^2)+1)./(sqrt(1+2*
    delta*y.^2)-1)))));
31
32 figure
33 hold on;
34 plot(y,f3p);
35 null= 0*y;
36 plot(y,null);
37 plot(zeta, 0, '*r')
38 hold off;
39 clear all
40 end
```

6.6 Fusionsentscheidung nach ρ und μ

```
1 clear all
2 format long
3 i=0;
4 dichte=5;
5 delta = 0.5;
6 s1=1;
7 s2=1;
```

```

8
9 for m = 0:10
10     rho=m/(2*dichte);
11
12 figure
13 hold on;
14 axis([0 5 0 5]);
15 line([0 5], [2.7 2.7], 'Color', 'black')
16 line([2.7 2.7], [0 5], 'Color', 'black')
17
18 for k = 0:25
19     m1 = k/dichte;
20     for l = 0:25
21         m2 = l/dichte;
22         z=sqrt(s1^2+s2^2+2*rho*s1*s2)/(m1+m2);
23         z1=s1/m1;
24         z2=s2/m2;
25         if z == 0
26             sub=s1-s2;
27             disp(sub);
28
29         else
30 merge=(m1+m2)*((z^2/sqrt(1+2*delta*z^2))* log((sqrt(1+2*
           delta*z^2)+1)/(sqrt(1+2*delta*z^2)-1)));
31 alone=m1*((z1^2/sqrt(1+2*delta*z1^2))* log((sqrt(1+2*delta*
           z1^2)+1)/(sqrt(1+2*delta*z1^2)-1)))+ m2*((z2^2/sqrt(1+2*
           delta*z2^2))* log((sqrt(1+2*delta*z2^2)+1)/(sqrt(1+2*
           delta*z2^2)-1)));
32
33         if merge > alone %separat
34             plot(k/dichte, l/dichte, 'or')

```

```

35         elseif merge < alone %mergen
36             plot(k/dichte , l/dichte , '*g')
37         elseif merge == alone
38             plot(k/dichte , l/dichte , '.b') %gleich
39         else
40             %dividieren durch null (bei s1 oder s2 = 0)
41         end
42     end
43 end
44 end
45
46 title(['Unternehmensstrategie mit Korrelation' num2str(rho)
47       ])
48 xlabel('My1')
49 ylabel('My2')
50 hold off;
end

```

6.7 Vergleich b_m^* und $b_1^* + b_2^*$

```

1 clear all
2 format long
3
4 m2=linspace(0,5,10000);
5 delta = 0.5;
6 rho= 0.5;
7 m1=0.6;
8 s1=1;
9 s2=1;
10
11 y = s1/m1;

```

```

12 fp = m1 * y^2/sqrt(1+2*delta*y^2) .* log((sqrt(1+2*delta*y
    ^2)+1)./(sqrt(1+2*delta*y^2)-1));
13
14 x= s2./m2;
15 fp1 = fp + m2 .* x.^2./sqrt(1+2*delta*x.^2) .* log((sqrt
    (1+2*delta*x.^2)+1)./(sqrt(1+2*delta*x.^2)-1));
16
17 x=sqrt(s1^2+s2^2+2*rho*s1*s2)./(m2+ m1);
18 fm = (m2+ m1) .* x.^2./sqrt(1+2*delta*x.^2) .* log((sqrt(1+2*
    delta*x.^2)+1)./(sqrt(1+2*delta*x.^2)-1));
19
20 figure
21 plot(m2, fm, m2, fp1);
22 title(['Optimale Barriere fuer Korrelation ' num2str(rho)])
23 xlabel('m1')
24 legend('m', '1+2')

```

6.8 Fusionsentscheidung nach ρ und σ

```

1 clear all
2 format long
3
4 dichte=20;
5 delta = 0.5;
6 m1=1;
7 m2=1;
8 for m = 0:20
9     rho=m/dichte;
10
11 figure
12 hold on;

```

```

13 axis([0 1 0 1]);
14 line([0 1], [0.37 0.37], 'Color', 'black')
15 line([0.37 .37], [0 1], 'Color', 'black')
16
17 for k = 0:20
18 s1 = k/dichte;
19     for l = 0:20
20         s2 = l/dichte;
21         z=sqrt(s1^2+s2^2+2*rho*s1*s2)/(m1+m2);
22         z1=s1/m1;
23         z2=s2/m2;
24
25 merge=(m1+m2)*((z^2/sqrt(1+2*delta*z^2))* log((sqrt(1+2*
        delta*z^2)+1)/(sqrt(1+2*delta*z^2)-1)));
26 alone=m1*((z1^2/sqrt(1+2*delta*z1^2))* log((sqrt(1+2*delta*
        z1^2)+1)/(sqrt(1+2*delta*z1^2)-1)))+ m2*((z2^2/sqrt(1+2*
        delta*z2^2))* log((sqrt(1+2*delta*z2^2)+1)/(sqrt(1+2*
        delta*z2^2)-1)));
27
28     if merge > alone %separat
29         plot(k/dichte, l/dichte, 'or')
30     elseif merge < alone %mergen
31         plot(k/dichte, l/dichte, '*g')
32     elseif merge == alone
33         plot(k/dichte, l/dichte, '.b') %gleich
34     else
35         %dividieren durch null (bei s1 oder s2 = 0)
36     end
37 end
38 end
39

```



```
40 title(['Unternehmensstrategie mit Korrelation' num2str(rho)
      ])
41 xlabel('sigma1')
42 ylabel('sigma2')
43 hold off;
44 end
```

6.9 Fusionsentscheidung nach ρ und δ

```
1 clear all
2 format long
3
4 dichte=10;
5 for j = 1:10
6     s1=j/10;
7     s2=0.1;
8     m1= 0.5;
9     m2=0.4;
10    z1=s1/m1;
11    z2=s2/m2;
12
13 figure
14 hold on;
15 axis([-1 1 0 1]);
16
17 schranke1=0.0687528 * m1^2/(s1^2);
18 schranke2=0.0687528 * m2^2/(s2^2);
19
20 line([-1 1], [schranke1 schranke1], 'Color', 'black')
21 line([-1 1], [schranke2 schranke2], 'Color', 'black')
22
```

```

23 for m = 0:10
24     rho=m/dichte;
25     rhon=m/dichte*(-1);
26
27 for k = 0:10
28     delta = k/dichte;
29
30 z=sqrt(s1^2+s2^2+2*rho*s1*s2)/(m1+m2);
31 zn=sqrt(s1^2+s2^2+2*rhon*s1*s2)/(m1+m2);
32
33
34 merge=(m1+m2)*((z^2/sqrt(1+2*delta*z^2))* log((sqrt(1+2*
    delta*z^2)+1)/(sqrt(1+2*delta*z^2)-1)));
35 mergen=(m1+m2)*((zn^2/sqrt(1+2*delta*zn^2))* log((sqrt(1+2*
    delta*zn^2)+1)/(sqrt(1+2*delta*zn^2)-1)));
36 alone=m1*((z1^2/sqrt(1+2*delta*z1^2))* log((sqrt(1+2*delta*
    z1^2)+1)/(sqrt(1+2*delta*z1^2)-1)))+ m2*((z2^2/sqrt(1+2*
    delta*z2^2))* log((sqrt(1+2*delta*z2^2)+1)/(sqrt(1+2*
    delta*z2^2)-1)));
37
38 if merge > alone %separat
39     plot(rho, delta, 'or')
40 elseif merge < alone %mergen
41     plot(rho, delta, '*g')
42 elseif merge == alone
43     plot(rho, delta, '.b') %gleich
44 else
45     %dividieren durch null (bei s1 oder s2 = 0)
46 end
47
48 if mergen > alone %separat

```

```
49     plot(rhon, delta, 'or')
50 elseif mergen < alone %mergen
51     plot(rhon, delta, '*g')
52 elseif mergen == alone
53     plot(rhon, delta, '.b') %gleich
54 else
55     %dividieren durch null (bei s1 oder s2 = 0)
56 end
57
58
59 title(['Unternehmensstrategie: Sigma ' num2str(s1)])
60 xlabel('rho')
61 ylabel('delta')
62 end
63 end
64 end
65 hold off;
```

Literatur

- [1] S. Asmussen and M. Taksar. Controlled diffusion models for optimal dividend pay-out. *Insurance: Mathematics and Economics*, 20(1):1 – 15, 1997.
- [2] N. L. Bowers, H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, and C. J. Nesbitt. *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries: Illinois, 2. edition, 1997.
- [3] H. U. Gerber. *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. S.S. Huebner Foundation monograph series, S. S. Huebner Foundation for Insurance Education, Wharton School, University of Pennsylvania: Philadelphia, 2. edition, 1979.
- [4] H. U. Gerber and E. S. W. Shiu. On optimal dividend strategies in the compound poisson model. *North American Actuarial Journal*, 10(2):76–93, 2006.
- [5] H. U. Gerber and E. S. W. Shiu. On the merger of two companies. *North American Actuarial Journal*, 10(3):60–67, 2006.
- [6] W. Heilmann and K. J. Schröter. *Grundbegriffe der Risikotheorie*. Verlag Versicherungswirtschaft GmbH: Karlsruhe, 2. edition, 2014.
- [7] T. Nowak. *Non-Life Insurance-Linked Securities: Risk and Pricing Analysis*. Verlag Versicherungswirtschaft GmbH: Karlsruhe, 1. edition, 2014.
- [8] M. Radtke and K. D. Schmidt. *Handbuch zur Schadenreservierung*. Verlag Versicherungswirtschaft GmbH: Karlsruhe, 2. edition, 2012.