TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Gegenbeispiele zu drei Vermutungen über Kategorizität

Ausgeführt am Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dr. Martin Goldstern

durch
Michael Kompatscher
Brünnlbadgasse 17/16
1090 Wien

Datum

Unterschrift

Abstract

The aim of this master thesis is to refute a conjecture about relative categoricity, which was stated by Hodges, Hodkinson and Macpherson in their paper "Omega-categoricity, relative categoricity and coordinatisation". We first introduce relatively categorical, coordinatised and coordinatisable theories after the terminology of Hodges ([13]). We show some basic properties, including that every coordinatisable theory is relatively categorical and natural. This leads to the conjecture that also the opposite direction holds.
In the second part of the master thesis we build a counterexample to this conjecture. Therefore we construct a profinite group G with a nontrivial finite normal subgroup F, which has a complement in G, but no closed complement. The canonical structure of this group is a strongly minimal structure, which is natural without being coordinatisable.
Using the group G we are even able to construct an ω-categorical counterexample to the conjecture. As an interesting side result we get two ω-categorical structures whose automorphism groups are abstractly isomorphic, but not topologically isomorphic.
All these results are based on the paper "Counterexamples to a conjecture on relative categoricity", written by Evans and Hewitt ([7]).

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist eine Ausarbeitung des Papers **„Counterexamples to a conjecture on relative categoricity“ von Evans und Hewitt** [**7**], wobei das Ziel war, die dort zum Teil nur angedeuteten Ideen genau auszuführen. Das Paper von Evans und Hewitt wurde als Anhang zu **„Omega-categoricity, relative categoricity and coordinatisation“ von Hodges, Hodkinson und Macpherson [13]** verfasst. Deshalb lag ein weiterer Schwerpunkt darauf, den theoretischen Rahmen, der dort eingeführt wird, wiederzugeben.

Die Notation und Namensgebung folgt der aus den Papers von Evans beziehungsweise Hodges. Dies sollte man sich stets vor Augen halten, da die Literatur nicht einheitlich ist. Pillay [16] oder Gaifman [9] etwa verwenden andere Bezeichnungen als „relative Kategorizität“.

1.1 Überblick über die vorliegende Arbeit

Zu Beginn der Masterarbeit beschäftigen wir uns mit verschiedenen Möglichkeiten, Strukturen über Unterstrukturen ihrer Redukte zu definieren. Diese Unterstrukturen sollen stets durch ein Prädikat P ausgewählt werden, deshalb sprechen wir von *P-Teilen.*
Eine Theorie heißt *relativ kategorisch*, wenn sie für einen festen P-Teil bis auf Isomorphie höchstens ein Modell hat. Relative Kategorizität stellt somit eine Art implizite Definierbarkeit jedes Modells über seinen P-Teil dar.
In einer *koordinatisierten* Struktur hingegen, lässt sich jedes Element mit Parametern aus dem P-Teil definieren. Dies stellt also eine explizite Definierbarkeit über den P-Teil dar. Wir werden untersuchen, wie diese Begriffe zusammenhängen und uns mit einer Abschwächung der Koordinatisiertheit,

der *Koordinatisierbarkeit* beschäftigen. Dabei werden wir Vermutungen dazu anstellen, was man zusätzlich zur relativen Kategorizität fordern muss, um auf Koordinatisierbarkeit schließen zu können.

Im **zweiten Kapitel** führen wir einige grundlegende Begriffe aus der Modelltheorie ein. Wir werden dabei insbesondere auf ω-kategorische Strukturen eingehen.
Wir werden aufzeigen, dass sich manche Eigenschaften ω-kategorischer Strukturen durch Eigenschaften ihrer (topologischen) Automorphismengruppen beschreiben lassen. Der *Satz von Ahlbrandt und Ziegler* sagt, dass zwei ω-kategorische Strukturen genau dann bi-interpretabel sind, wenn ihre Automorphismengruppen topologisch isomorph sind. Die erste Frage, die wir uns stellen, ist, ob die Topologie hier vernachlässigt werden kann.

Frage 1: Falls die Automorphismengruppen zweier ω-kategorischen Strukturen isomorph sind, sind sie dann auch topologisch isomorph?

Im **dritten Kapitel** führen wir relativ kategorische Theorien ein und erläutern anhand von Beispielen einige Eigenschaften. Wir werden uns dabei auf Eigenschaften konzentrieren, die im Verlauf der weiteren Arbeit noch wichtig sein werden. Als zusätzliches Ergebnis zeigen wir eine Verallgemeinerung des Satzes von Beth, die von Gaifman in [9] postuliert wurde.

Im **vierten Kapitel** gehen wir auf koordinatisierte und koordinatisierbare Strukturen bzw. Theorien ein.
Es zeigt sich sehr schnell, dass koordinatisierte Theorien relativ kategorisch sind, und, dass in jedem ihrer Modelle die Automorphismen des P-Teils in eindeutiger Weise auf die Automorphismen der ganzen Struktur fortgesetzt werden kann. Wir können sogar zeigen, dass die umgekehrte Richtung gilt.
Für koordinatisierbare Theorien erhalten wir ein ähnliches Resultat. Koordinatisierbare Theorien sind relativ kategorisch und jedes ihrer Modelle ist *natürlich* über seinem P-Teil. Damit meinen wir, dass es eine Einbettung der Automorphismengruppe des P-Teils in die Automorphismengruppe der ganzen Struktur gibt, die rechtsinvers zur Einschränkung ist. Es ist naheliegend, sich zu fragen, ob auch hier die Umkehrung gilt. Dies ist die zweite Frage, die uns interessiert.

Frage 2: Sei T eine relativ kategorische Theorie, sodass jedes Modell von T natürlich über seinem P-Teil ist. Ist T dann koordinatisierbar?

Durch Einführen der Topologie auf den Automorphismengruppen können wir weitere Aussagen machen. Wir sehen, dass die natürlichen Einbettungen aus obigem Absatz sogar stetig sind.
Zusätzlich erhalten wir eine Variante des Satzes von Ahlbrandt und Ziegler: Eine ω-kategorische Theorie ist genau dann koordinatisierbar, wenn sie relativ kategorisch ist und es für jedes Modell stetige natürliche Einbettungen gibt. Auch hier fragen wir uns wieder, ob die Stetigkeit vernachlässigt werden kann.

Frage 3: Sei T eine relativ kategorische und ω-kategorische Theorie. Jedes Modell von T sei natürlich über seinem P-Teil. Ist T dann koordinatisierbar?

Nachdem wir die theoretischen Grundlagen beleuchtet haben und die Fragestellungen konkretisiert haben, konstruieren wir in den folgenden Kapiteln unsere Gegenbeispiele. Diese Gegenbeispiele beruhen alle auf einer pathologischen proendlichen Gruppe G, die wir im **siebten Kapitel** konstruieren. In G gibt es einen endlichen Normalteiler F, sodass die Quotientenabbildung nach G/F zwar eine Retraktion besitzt, jedoch keine solche Retraktion stetig ist. Diese Eigenschaft wird Grundlage für unsere Gegenbeispiele.

Im **fünften Kapitel** konstruieren wir eine Struktur $\boldsymbol{B}$, deren Automorphismengruppe genau G ist. In dieser Konstruktion stellt die Quotientengruppe G/F die Automorphismengruppe des P-Teils dar. Aus den Eigenschaften von G können wir folgern, dass $\boldsymbol{B}$ nicht koordinatisierbar ist und $\mathrm{Th}(\boldsymbol{B})$ Frage 2 verneint.

Im **sechsten Kapitel** behandeln wir den ω-kategorischen Fall. Dazu zeigen wir, dass jede proendliche Gruppe mit abzählbarer Basis als Quotientengruppe der Automorphismengruppen zweier ω-kategorischer Strukturen angeschrieben werden kann. Dieses Lemma, zusammen mit den Eigenschaften von G und F wird uns das ω-kategorische Gegenbeispiel liefern.
Durch eine kurze zusätzliche Überlegung werden wir sehen, dass auch die Frage 1 verneint werden muss.

Kapitel 2

Modelltheoretische Grundlagen

2.1 ω-Kategorizität

Definition 2.1.1. Eine Theorie T heißt *ω-kategorisch*, falls sie bis auf Isomorphie genau ein abzählbares Modell besitzt. Eine Struktur A heißt ω-kategorisch, falls ihre Theorie $\mathrm{Th}(A)$ ω-kategorisch ist.

Beispiel 2.1.2. Sei L die Sprache, die nur aus dem zweistelligen Relationssymbol $<$ besteht. Die Theorie T der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte besteht aus den folgenden Sätzen:

- Die Relation $<$ ist eine strikte lineare Ordnung
- Dichtheit: $\forall x, y : \ x < y \to \exists z(x < z \land z < y)$
- Unbeschränktheit: $\forall x \exists y \ (y > x)$ und $\forall x \exists y \ (y < x)$

Wir zeigen, dass T eine ω-kategorische Theorie ist.
Offensichtlich sind die rationalen Zahlen mit der natürlichen Ordnung $(\mathbb{Q}, <)$ ein abzählbares Modell von T. Wir wollen nun zeigen, dass jedes andere abzählbare Modell $(A, <_A)$ von T isomorph zu $(\mathbb{Q}, <)$ ist.
Sei $\{a_1, a_2, ...\}$ eine Aufzählung der Elemente von A und $\{q_1, q_2, ...\}$ eine Aufzählung der Elemente von $\mathbb{Q}$. Aus diesen Aufzählungen konstruieren wir mittels der *back-and-forth-Methode* den gesuchten Isomorphismus. Wir indizieren dabei beiden Mengen so um, dass die Abbildung

$$A = \{a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, ...\} \to \mathbb{Q} = \{q_{\sigma(1)}, q_{\sigma(2)}, ...\}$$
$$a_{\pi(i)} \mapsto q_{\sigma(i)}$$

mit den Ordnungsrelationen verträglich ist und somit ein Isomorphismus ist.
Die Permutationen π und σ können induktiv definiert werden. Das erste Wertepaar wird mit $(a_{\pi(1)}, q_{\sigma(1)}) = (a_1, q_1)$ festgelegt.

Sei n ungerade. Im n-ten Induktionsschritt gehen wir von den Mengen $A_n = \{a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, ..., a_{\pi(n)}\}$ und $Q_n = \{q_{\sigma(1)}, q_{\sigma(2)}, ..., q_{\sigma(n)}\}$ aus. Wir wählen $\pi(n+1)$ so, dass $a_{\pi(n+1)}$ das erste Element der ursprünglichen Aufzählung ist, das nicht in A_n vorkommt.
Da $(A, <)$ eine lineare Ordnung ist, tritt einer der folgenden Fälle auf: $a_{\pi(n+1)}$ ist größer als alle Elemente von A_n, $a_{\pi(n+1)}$ ist kleiner als alle Elemente von A_n, oder $a_{\pi(n+1)}$ liegt zwischen zwei Elementen von A_n. Aufgrund der Unbeschränktheit beziehungsweise der Dichtheit wissen wir, dass es in $\mathbb{Q} \setminus Q_n$ ein Element gibt, welches sich genau so zu den Elementen von Q_n verhält. Dieses Element sei das neue $q_{\sigma(n+1)}$.
Ist n gerade, so gehen wir hingegen von dem ersten Element $q_{\sigma(n+1)}$ aus, welches nicht in Q_n vorkommt und suchen in gleicher Weise ein Urbild $a_{\pi(n+1)}$.
Wegen dieser alternierenden Vorgehensweise sind π und σ bijektiv. Laut Konstruktion ist

$$\forall i, j \in \mathbb{N} : a_{\pi(i)} < a_{\pi(j)} \Leftrightarrow q_{\sigma(i)} < q_{\sigma(j)}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $(A, <_A)$ und $(\mathbb{Q}, <)$ isomorph sind.

Beispiel 2.1.3. Die Peano-Arithmetik ist nicht ω-kategorisch, da sie abzählbare Modelle hat, die nicht isomorph zu $(\mathbb{N}, 0, S, +)$ sind. (siehe [10])

2.1.1 Der Satz von Ryll-Nardzewski

Der Satz von Ryll-Nardzewski ermöglicht es, die ω-Kategorizität einer Struktur durch leichter zu überprüfende Eigenschaften zu charakterisieren.
Einerseits führt er die ω-Kategorizität auf die vollständigen Typen in der Struktur zurück, andererseits auf Eigenschaften der Automorphismengruppen.

Definition 2.1.4. Ein *n-Typ* $t(\bar{x})$ ist eine widerspruchsfreie Menge von Formeln in einer Sprache L und in den freien Variablen $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$. Ein Typ heißt *vollständig*, falls für jede L-Formel $\phi(\bar{x})$ entweder die Formel selbst, oder ihre Negation im Typ enthalten sind.
Sei $\boldsymbol{B}$ eine Struktur in der Sprache L, $\bar{a}$ ein Tupel in $\boldsymbol{B}$ und X eine Teilmenge von B. Mit dem vollständigen Typen $\mathrm{tp}_{\boldsymbol{B}}(\bar{a}/X)$ von $\bar{a}$ über die Menge X in $\boldsymbol{B}$ bezeichnen wir die Menge aller Formeln mit Parametern in X, welche $\bar{a}$ erfüllt. Das heißt:

$$\mathrm{tp}_M(\bar{a}/X) = \{\phi(\bar{y}) \in L(X) : M \models \phi(\bar{a})\}.$$

Definition 2.1.5. Sei T eine Theorie und $t(\bar{x})$ ein in T vollständiger Typ. Wir sagen, dass $t(\bar{x})$ ein *Haupttyp* in T ist, falls es eine Formel $\theta(\bar{x})$ gibt mit

$$T \vdash \theta(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}) \Leftrightarrow \psi(\bar{x}) \in t(\bar{x}).$$

Wir bezeichnen $\theta(\bar{x})$ als *Support* von $t(\bar{x})$.

Definition 2.1.6. Sei G eine Permutationsgruppe, die auf einer Menge X agiert. Der *Orbit* eines n-Tupels $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in X^n$ ist definiert als die Menge aller Bilder $f(\bar{a}) = (f(a_1), ..., f(a_n))$ unter den Permutationen $f \in G$. Die Permutationsgruppe G heißt *oligomorph*, falls sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele Orbits auf X^n hat.

Satz 2.1.7 (Ryll-Nardzewski)**.** *Für eine abzählbare Struktur $\boldsymbol{B}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\boldsymbol{B}$ *ist ω-kategorisch.*

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es nur endlich viele vollständige n-Typen in Th($\boldsymbol{B}$). Diese sind alle Haupttypen.

(iii) Die Automorphismengruppe Aut($\boldsymbol{B}$) ist oligomorph.

(iv) Jede Menge von n-Tupeln, die unter Aut($\boldsymbol{B}$) erhalten bleibt, ist definierbar in $\boldsymbol{B}$.[1]

Beweis. Eine ausführliche Variante des Satzes inklusive Beweis steht im Anhang (Satz A.1.9). □

2.1.2 Fraïssé-Limes

Eine Methode ω-kategorische Strukturen zu konstruieren ist das Bilden von Fraïssé-Limiten. Dabei gehen wir von einer Menge $\mathcal{K}$ von endlich erzeugten Strukturen gleicher Sprache aus. Wir betrachten dabei nur Mengen mit folgenden Eigenschaften:

Definition 2.1.8. Sei $\mathcal{K}$ eine Menge von Strukturen in einer höchstens abzählbaren Sprache L. Dann hat $\mathcal{K}$ die

- *Hereditary property (HP)*, wenn für jedes $\boldsymbol{A} \in \mathcal{K}$ auch jede Unterstruktur $\boldsymbol{B} \leq \boldsymbol{A}$ in $\mathcal{K}$ liegt.
- *Joint embedding property (JEP)*, wenn es für je zwei Strukturen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{K}$ ein $\boldsymbol{C} \in \mathcal{K}$ gibt, in welches beide eingebettet werden können.

[1] Falls wir nicht ausdrücklich etwas anderes sagen, meinen wir mit „definierbaren Mengen" die durch parameterlose Formeln erster Ordnung definierbaren Mengen.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, dashed, "g"] \\ \boldsymbol{C} \arrow[r, dashed, "h"'] & \boldsymbol{D} \end{tikzcd}$$

Abbildung 2.1: Amalgamation property

- *Amalgamation property (AP)*, wenn es für Strukturen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathcal{K}$ und Einbettungen $e : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ und $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}$ ein $\boldsymbol{D} \in \mathcal{K}$ gibt, sowie Einbettungen $g : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{D}$ und $h : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ mit $g \circ e = h \circ f$. Das heißt, dass das Diagramm in Abbildung 2.1 kommutiert.

Der Fraïssé-Limes von $\mathcal{K}$ ist dann eine abzählbare Struktur, in die sich alle Strukturen aus $\mathcal{K}$ auf „schöne Weise“ einbetten lassen. Der Satz 2.1.10 formuliert dies aus und setzt Fraïssé-Limiten in Zusammenhang mit ω-Kategorizität und *Homogenität*.

Definition 2.1.9. Eine Struktur $\boldsymbol{A}$ heißt *homogen*, falls jeder partielle Isomorphismus zwischen zwei endlich erzeugten Unterstrukturen zu einem Automorphismus von $\boldsymbol{A}$ fortgesetzt werden kann.

Satz 2.1.10. *Sei $\mathcal{K}$ eine abzählbare Menge von endlich erzeugten L-Strukturen, welche die Bedingungen HP, JEP und AP erfüllt. Dann gibt es eine höchstens abzählbare L-Struktur $\boldsymbol{F}$, sodass $\boldsymbol{F}$ homogen ist und $\mathcal{K}$ genau aus allen endlich erzeugten Teilstrukturen von $\boldsymbol{F}$ besteht. $\boldsymbol{F}$ ist bis auf Isomorphie eindeutig und heißt Fraïssé-Limes von $\mathcal{K}$.*
Wenn L nur aus Relationssymbolen besteht und es für jedes $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele n-stellige Relationen gibt, dann ist $\boldsymbol{F}$ sogar ω-kategorisch.

Beweis. siehe [12, Abschnitt 6.1] □

Beispiel 2.1.11. Die Struktur $(\mathbb{Q}, <)$ ist der Fraïssé-Limes der endlichen linearen Ordnungen. Offensichtlich sind die endlichen Unterstrukturen von $(\mathbb{Q}, <)$ genau alle endlichen linearen Ordnungen. Außerdem ist $(\mathbb{Q}, <)$ homogen: Jeder partielle Isomorphismus zwischen endlichen Teilmengen kann zum Beispiel durch stückweise lineare Funktionen zu einem Automorphismus von $(\mathbb{Q}, <)$ fortgesetzt werden. Wie wir bereits in Beispiel 2.1.2 gesehen haben, ist $(\mathbb{Q}, <)$ ω-kategorisch.
Jede endliche lineare Ordnung kann klarerweise auch in die Strukturen $(\mathbb{N}, <)$ oder $(\mathbb{Z}, <)$ eingebettet werden. Diese Strukturen sind jedoch nicht homogen, da beispielsweise der partielle Isomorphismus $f(0) = 0, f(1) = 2$ weder in $\mathbb{N}$, noch in $\mathbb{Z}$ zu einem Automorphismus fortgesetzt werden kann.

Beispiel 2.1.12. Ein anderes bekanntes Beispiel ist der *Random Graph* (R, E). Der Random Graph ist der Fraïssé-Limes aller endlichen, ungerichteten Graphen. Er lässt sich auch als der abzählbare Graph mit der folgenden Eigenschaft beschreiben:

> Für je zwei endliche, disjunkte Mengen von Knoten U und V in R, gibt es einen Knoten in $R \setminus (U \cup V)$, der mit allen Elementen von U verbunden ist und mit keinem Element von V.

Ein explizites Modell des Random Graphs können wir konstruieren, indem wir als Knotenmenge die natürlichen Zahlen betrachten. Seien x, y zwei natürliche Zahlen mit $x < y$. Eine Kante soll nun x mit y genau dann verbinden, wenn die x-te Stelle in der Binärdarstellung von y gleich 1 ist. Dieser Graph ist ein Random-Graph, da für je zwei disjunkte Mengen U und V der Punkt

$$z = 2^{max(U \cup V)+1} + \sum_{u \in U} 2^u$$

mit allen Elementen von U verbunden ist, aber mit keinem von V.
Laut Satz 2.1.10 ist der Random Graph eine ω-kategorische Struktur.

2.2 Topologie auf Automorphismengruppen

Manchmal ist es hilfreich die Automorphismengruppe einer Struktur nicht nur als abstrakte Gruppe zu betrachten, sondern sie zu einer topologischen Gruppe zu machen. Eine Gruppe heißt *topologische Gruppe*, wenn sie mit einer Topologie versehen ist, in der die Gruppenoperation und das Invertieren stetige Abbildungen sind.
Wir nennen zwei Gruppen *topologisch isomorph*, wenn es einen Gruppenisomorphismus zwischen den beiden gibt, der auch ein Homöomorphismus ist.

Sei A eine Menge und $\mathrm{Sym}(A)$ ihre symmetrische Gruppe. Auf $\mathrm{Sym}(A)$ wollen wir eine Topologie einführen, sodass zwei Abbildungen „nahe“ beieinander liegen, wenn sie auf „vielen“ Stellen übereinstimmen.
Sei h ein Element von $\mathrm{Sym}(A)$ und $\bar{a}$ ein festes Tupel in A. Wir bilden dann eine Basisumgebung von $h \in \mathrm{Sym}(A)$ mit

$$\{f \in \mathrm{Sym}(A) |\ f(\bar{a}) = h(\bar{a})\},$$

also der Menge der Permutationen, die auf $\bar{a}$ das gleiche leisten wie h. Für den Spezialfall $h = id$ sind die offenen Basisumgebungen somit die Stabilisatoren von endlichen Mengen.

Wir versehen Sym(A) mit der Topologie, die von diesen Umgebungen erzeugt wird. Wie man leicht überprüfen kann, sind in dieser Topologie die Komposition und das Invertieren stetige Abbildungen. Somit ist Sym(A) eine topologische Gruppe.
Eine Automorphismengruppe auf A, versehen mit der Spurtopologie, ist klarerweise selbst eine topologische Gruppen.

2.2.1 Der Satz von Ahlbrandt und Ziegler

Die Topologie auf Automorphismengruppen kann genutzt werden, um Aussagen über Eigenschaften der Strukturen selbst zu treffen. Ein Ergebnis hierzu betrifft Interpretationen:

Definition 2.2.1. Seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zwei Strukturen, typischerweise mit verschiedenen Signaturen und $n \in \mathbb{N}$. Wir nennen eine partielle Funktion $I : A^n \to B$ eine *Interpretation* von $\boldsymbol{B}$ in $\boldsymbol{A}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- I ist surjektiv
- Die Definitionsmenge von I ist in $\boldsymbol{A}$ definierbar
- Jede Relation, die in $\boldsymbol{B}$ definierbar ist, hat unter I ein in $\boldsymbol{A}$ definierbares Urbild

Wir nennen $\boldsymbol{B}$ *interpretierbar* in $\boldsymbol{A}$, falls es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine Interpretation $I : A^n \to B$ gibt.
Wie man leicht nachrechnen kann, ist die Zusammensetzung zweier Interpretationen $I_1 : A^n \to B$ und $I_2 : B^k \to C$ wiederum eine Interpretation $I_2 \circ I_1 : A^{n \times k} \to C$.
Falls es Interpretationen von $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B}$ in $\boldsymbol{A}$ gibt, sodass deren Zusammensetzungen definierbare Relationen in $\boldsymbol{A}$ beziehungsweise $\boldsymbol{B}$ sind, so nennen wir $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ *bi-interpretierbar.*

Satz 2.2.2 (Ahlbrandt und Ziegler)**.** *Seien* $\boldsymbol{A}$ *und* $\boldsymbol{B}$ *zwei* ω*-kategorische Strukturen.*

(i) Die Struktur $\boldsymbol{A}$ *ist genau dann in* $\boldsymbol{B}$ *interpretierbar, wenn es einen stetigen Homomorphismus* $\phi : Aut(\boldsymbol{A}) \to Aut(\boldsymbol{B})$ *gibt.*

(ii) Die Strukturen $\boldsymbol{A}$ *und* $\boldsymbol{B}$ *sind genau dann bi-interpretierbar, wenn ihre Automorphismengruppen topologisch isomorph sind.*

Beweis. (i) Seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zwei ω-kategorische Strukturen und sei $I : A^n \to B$ eine Interpretation. Laut Voraussetzung ist $U = \mathrm{dom}(I)$ eine definierbare

Menge, also bleibt U unter Automorphismen von $\boldsymbol{A}$ erhalten. Sei nun $f \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$. Die Funktion g mit

$$g(I(\bar{a})) = I(f(\bar{a}))$$

ist wohldefiniert, da die Gleichheitsrelation ein definierbares Urbild unter I hat. Da I surjektiv ist, ist g bijektiv. Somit ist g die eindeutige Permutation, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "I"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ U \arrow[r, "I"'] & B \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Da I eine Interpretation ist, muss auch g mit den Relationen auf $\boldsymbol{B}$ verträglich sein. Somit ist g ein Automorphismus auf $\boldsymbol{B}$.
Betrachten wir die Abbildung $\phi : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$, die jedem f sein entsprechendes g zuweist, so folgt aus der Eindeutigkeit von g, dass ϕ ein Homomorphismus ist. Wenn $b = I(\bar{a})$ ist, so werden, laut Definition von ϕ, die Stabilisatoren von $\bar{a}$ in die Stabilisatoren von b abgebildet. Deshalb ist ϕ stetig.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass es einen stetigen Homomorphismus $\phi : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ gibt. Wir betrachten ein Element $b \in B$. Wegen der Stetigkeit der Abbildung ϕ gibt es ein Tupel $\bar{a}$ in A, sodass die Stabilisatoren $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})_{\bar{a}}$ nach $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})_b$ abgebildet werden. Es gibt nur endlich viele Orbits auf B. Wir wählen uns Repräsentanten $b_1, ..., b_k$ aus diesen Orbits aus. Es folgt, dass es Elemente $a_1, ..., a_m$ in A gibt, deren Stabilisatoren unter ϕ auf die Identität in $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ abgebildet werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $m > k$. Dann ist die Abbildung

$$I(f(a_i), f(a_1), f(a_2), ..., f(a_k)) = \phi(f)(b_i) \text{ für } i = 1, ..., k \text{ und } f \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$$

surjektiv. Die Urbilder von definierbaren Mengen sind invariant unter Automorphismen von $\boldsymbol{A}$. Wegen der ω-Kategorizität von $\boldsymbol{A}$ sind sie somit definierbar in $\boldsymbol{A}$. Damit ist I eine Interpretation.

(ii) Wenn $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ bi-interpretierbar sind, so folgt aus dem bereits gezeigten, dass es stetige Homomorphismen $\phi : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ und $\psi : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$ gibt. Wegen Voraussetzung der Bi-Interpretierbarkeit ist die Zusammensetzung $I_1 \circ I_2 : A^{k \times n} \to A$ der beiden Interpretationen in $\boldsymbol{A}$ definierbar.

Wir betrachten das folgende Diagramm mit $g = \phi(g)$ und $h = \psi(h)$.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A} \arrow[r, rightsquigarrow, "I_1"] \arrow[d, "f"'] & \boldsymbol{B} \arrow[r, rightsquigarrow, "I_2"] \arrow[d, "g"] & \boldsymbol{A} \arrow[d, "h"] \\
\boldsymbol{A} \arrow[r, rightsquigarrow, "I_1"] & \boldsymbol{B} \arrow[r, rightsquigarrow, "I_2"] & \boldsymbol{A}
\end{tikzcd}$$

Laut Definition von h gilt für alle Tupel $\bar{a}$ in A

$$h(I_2 I_1(\bar{a})) = I_2 I_1(f(\bar{a})).$$

Die Abbildung $I_2 \circ I_1$ ist laut Voraussetzung definierbar in $\boldsymbol{A}$. Somit bleibt sie unter Automorphismen invariant. Wenden wir auf obige Gleichung f^{-1} an, so folgt

$$f^{-1}h(I_2 I_1(\bar{a})) = I_2 I_1((\bar{a})),$$

und deshalb $h = f$. Also ist $\psi \circ \phi$ die Identität. Führen wir dasselbe Argument mit $\boldsymbol{B}$ durch, so erhalten wir, dass $\phi = \psi^{-1}$.

Für die Gegenrichtung betrachten wir stetige Isomorphismen $\phi : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ und $\psi = \phi^{-1}$. Wenn wir Interpretationen I_1 und I_2 wie in (i) definieren, so sehen wir, dass $I_1 \circ I_2$ und $I_2 \circ I_1$ unter den Automorphismen von $\boldsymbol{B}$ beziehungsweise $\boldsymbol{A}$ erhalten bleiben müssen. Laut dem Satz von Ryll-Nardzewski sind die beiden Interpretationen deshalb definierbare Mengen. Also sind $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ bi-interpretierbar. $\square$

Es wäre eine wesentliche Vereinfachung, wenn wir in Satz 2.2.2 nur überprüfen müssten, ob die Automorphismengruppen als abstrakte Gruppen isomorph sind. Somit stellt sich folgende Frage:

Frage 1: Falls die Automorphismengruppen zweier ω-kategorischen Strukturen isomorph sind, sind sie dann auch topologisch isomorph?

Kapitel 3

Relative Kategorizität

In diesem Kapitel definieren wir relativ kategorische Theorien und illustrieren anhand von Beispielen einige grundlegende Eigenschaften. Eine Theorie heißt, grob gesprochen, relativ kategorisch, wenn jedes Modell der Theorie bereits durch eine ausgezeichnete Unterstruktur eindeutig bestimmt ist. Dabei lassen wir aber auch Unterstrukturen in einer reduzierten Sprache zu. Wir werden also in den folgenden Kapiteln stets von folgenden Grundvoraussetzungen ausgehen:

Seien $L^- \subset L$ zwei höchstens abzählbare Sprachen und sei P ein einstelliges Relationssymbol, welches in L vorkommt, aber nicht in L^-. Sei T eine vollständige Theorie in L. Für jedes Modell $\boldsymbol{B}$ von T soll gelten, dass die Menge $P^{\boldsymbol{B}}$, die aus allen Elementen besteht, die $P(x)$ erfüllen, Trägermenge einer Unterstruktur des Redukts $\boldsymbol{B}|L^-$ ist.[1] Diese Unterstruktur nennen wir den *P-Teil* $P(\boldsymbol{B})$ von $\boldsymbol{B}$.

Definition 3.0.3. Eine Theorie T heißt *relativ kategorisch* (über P und L^-), wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

> Falls es für zwei Modelle $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B}'$ von T einen Isomorphismus $i : P(\boldsymbol{B}) \to P(\boldsymbol{B}')$ gibt, so hat dieser eine isomorphe Fortsetzung $I : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}'$.

Wir nennen eine Struktur relativ kategorisch, wenn ihre vollständige Theorie relativ kategorisch ist.

Beispiel 3.0.4. Wir betrachten die Theorie T des Körpers der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, 0, -, \cdot, 1, ^{-1}, P)$, wobei das einstellige Prädikat P die ganzen

[1] Wenn L^- nur Relationssymbole enthält ist diese Bedingung trivialerweise erfüllt.

Zahlen auswählt. Der P-Teil sei also der Ring der ganzen Zahlen $P(\boldsymbol{B}) = (\mathbb{Z}, +, 0, -, \cdot, 1)$. Wir behaupten, dass diese Theorie relativ kategorisch ist. Es gilt

$$T \models \forall x \exists a, b(P(a) \land P(b) \land b \neq 0 \land x = a \cdot b^{-1}), \tag{3.1}$$

da sich jede rationale Zahl als Quotient von zwei ganzen Zahlen anschreiben lässt.
Seien nun $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}'$ zwei Modelle von T und $i : P(\boldsymbol{B}) \to P(\boldsymbol{B}')$ ein Isomorphismus der P-Teile. Wir definieren folgendermaßen eine Fortsetzung I:

$$\begin{aligned} I : \boldsymbol{B} &\to \boldsymbol{B}' \\ x = a \cdot b^{-1} &\mapsto I(x) = i(a) \cdot i(b)^{-1}, \text{ mit } a, b \in P(\boldsymbol{B}) \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} \models a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1} \Leftrightarrow P(\boldsymbol{B}) \models a \cdot d = c \cdot b \\ \Leftrightarrow P(\boldsymbol{B}') \models i(a) \cdot i(d) = i(c) \cdot i(b) \Leftrightarrow \boldsymbol{B}' \models i(a) \cdot i(b)^{-1} = i(c) \cdot i(d)^{-1}. \end{aligned}$$

Die obige Äquivalenzkette zeigt zusätzlich, dass I injektiv ist. Die Surjektivität folgt direkt aus der Formel (3.1). Wie man leicht überprüfen kann, ist I ein Gruppenhomomorphismus. Damit ist die Abbildung I ein Isomorphismus zwischen $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B}'$, der die Abbildung i fortsetzt.
Dieselbe Argumentation funktioniert für beliebige Quotientenkörper. Also ist jeder Quotientenkörper relativ kategorisch über dem Integritätsring, der ihn erzeugt.

Beispiel 3.0.5. Wir betrachten die direkte Summe

$$G := \bigoplus_{n<\omega} C_4,$$

wobei C_4 die zyklische Gruppe mit vier Elementen ist. Das Prädikat P wähle den Sockel von G aus, also die Untergruppe aller Elemente von Ordnung kleiner gleich zwei. Wir werden zeigen, dass die Theorie von G relativ kategorisch über P ist.

In der Theorie von G sind folgende Sätze enthalten:

(i) Die Gruppenaxiome und das Kommutativgesetz

(ii) $\forall x : 4x = 0$

(iii) $\forall y : P(y) \leftrightarrow 2y = 0$

(iv) $\forall y : P(y) \leftrightarrow \exists x(y = 2x)$

(v) Aus (iii) und (iv) folgt $\forall x, y : (2x = 2y \leftrightarrow P(x - y))$

Für die relative Kategorizität betrachten wir zwei Modelle G und G' der Theorie, deren P-Teile isomorph unter der Abbildung i sind. Die beiden Gruppen G und G' sind gleich mächtig, da sowohl der Kern, als auch der Bildbereich der Abbildung $h(x) = 2x$ gleich $P(G)$ beziehungsweise $P(G')$ ist. Mit einem back-and-forth-Argument können wir einen Isomorphismus zwischen G und G' konstruieren, der i fortsetzt. Wir betrachten zunächst den Fall, dass G und G' abzählbar sind, also

$$G = \{g_1, g_2, g_3, ...\}, \quad G' = \{g'_1, g'_2, g'_3, ...\}.$$

Unser Ziel ist es, eine aufsteigende Folge von Untergruppen $G_n \leq G$ und $G'_n \leq G'$ zu definieren, sowie Isomorphismen $i_n : G_n \to G'_n$, die die Abbildung i fortsetzen. Als i_0 wählen wir die Abbildung i.
Sei n gerade. Wenn g_n in G_n liegt, dann sei $G_{n+1} = G_n$ und es ist nichts zu tun. Andernfalls sei G_{n+1} die Gruppe, die von den Elementen in G_n und g_n erzeugt wird. Jedes Element von G_{n+1} besitzt eine eindeutige Darstellung der Form $a + k \cdot g_n$ mit $a \in G_n$ und k in $\{0, 1\}$. Dies folgt aus (v).
Wir definieren nun $p_n = 2g_n$ und $p'_n = i(p'_n)$.
Die Gleichung $2x = p_n$ hat zwar eine Lösung in G, aber wegen (v) keine Lösung in G_n. Ebenso hat die Gleichung $2x = p'_n$ zwar keine Lösung in G'_n, aber wegen (iv) eine Lösung in G'. Sei y' eine Lösung der Gleichung in G'.
Wir definieren nun

$$\begin{aligned} G'_{n+1} &= G'_n \mathbin{\dot\cup} \{a + y' : a \in G_n\} \\ i_{n+1} : \ G_{n+1} &\to G'_{n+1}, \\ (a + k \cdot g_n) &\mapsto i_n(a) + k \cdot y' \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung der Elemente in G_{n+1} und G'_{n+1} ist i_{n+1} wohldefiniert und injektiv. Wie unschwer nachzurechnen ist, ist i_{n+1} ein Gruppenhomomorphismus.

Damit haben wir die Abbildung i_{n+1} für ein gerades n konstruiert. Für ein ungerades n gehen wir analog dazu vor, aber suchen für g'_n ein Urbild g_n. Diese back-and-forth-Vorgehensweise sichert, dass alle Elemente von G und G' „aufgebraucht“ werden. Deshalb ist die Vereinigung $f := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} i_n$ nicht nur ein injektiver, sondern sogar bijektiver Gruppenhomomorphismus von G nach G'.
Bei überabzählbaren Gruppen G und G' kann analog mit transfiniter Induktion vorgegangen werden.
Damit haben wir gezeigt, dass $\mathrm{Th}((G, +, 0, -, P))$ relativ kategorisch ist.

Bemerkung 3.0.6. Die isomorphe Fortsetzung, die wir im Beispiel mit den rationalen Zahlen konstruiert haben, war eindeutig. Dies lag daran, dass jedes Element aus $\mathbb{Q}$ sich über die ganzen Zahlen definieren ließ.
Anhand von Beispiel 3.0.5 sieht man jedoch, dass der Isomorphismus nicht immer eindeutig sein muss. In der back-and-forth-Konstruktion gab es in jedem Schritt sogar unendlich viele Möglichkeiten das Bild y' zu wählen.
Wir werden später noch näher darauf eingehen, welche Bedeutung die Eindeutigkeit der isomorphen Fortsetzung hat.

3.1 Eigenschaften relativ kategorischer Theorien

Wir können zeigen, dass für ein Modell $\boldsymbol{B}$ einer relativ kategorischen Theorie alle definierbaren Teilmengen von $P^{\boldsymbol{B}}$ bereits im P-Teil $P(\boldsymbol{B})$ definiert werden können. Diese Eigenschaft nennt man *Reduziertheit*.

Definition 3.1.1. Sei $\boldsymbol{B}$ eine Struktur in der Sprache L mit einem P-Teil in der Sprache L^-. Dann heißt $\boldsymbol{B}$ *reduziert über P und L^-*, falls es für jede Formel $\phi(\bar{x})$ in L eine Formel $\psi(\bar{x})$ in L^- gibt, sodass für alle Tupel $\bar{a}$ aus $P^{\boldsymbol{B}}$ gilt:

$$\boldsymbol{B} \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow P(\boldsymbol{B}) \models \psi(\bar{a}).$$

Die Abbildung $\phi \mapsto \psi$ nennen wir *Reduktionsabbildung* von $\boldsymbol{B}$.
Wenn T eine vollständige Theorie ist, die ein reduziertes Modell $\boldsymbol{B}$ besitzt, sind alle Modelle von T reduziert, da sich diese Eigenschaft in first-order-Formeln formulieren lässt ($T \vdash \forall \bar{x} \in P : \phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi^P(\bar{x})$). Also können wir die Reduziertheit als eine Eigenschaft von Theorien auffassen.

Um zu beweisen, dass alle relativ kategorischen Theorien reduziert sind, zeigen wir zunächst folgendes Lemma, welches besagt, dass die Typen von Elementen aus $P^{\boldsymbol{B}}$ bereits vollständig im P-Teil beschrieben werden.

Lemma 3.1.2. *Sei T eine relativ kategorische Theorie und $\boldsymbol{B}$ ein Modell von T. Wir betrachten zwei Tupel $\bar{a}$, $\bar{d}$ aus dem P-Teil $\boldsymbol{A} = P(\boldsymbol{B})$. Wenn die Typen von $\bar{a}$ und $\bar{d}$ in $\boldsymbol{A}$ übereinstimmen, dann sind auch ihre Typen in $\boldsymbol{B}$ gleich.*

Beweis. Wir zeigen das Lemma zunächst für abzählbare Strukturen $\boldsymbol{B}$.
Dazu wollen wir eine elementare Erweiterung $\boldsymbol{N}$ von $\boldsymbol{B}$ mit der Eigenschaft, dass $P(\boldsymbol{N})$ homogen ist, konstruieren. Wir bilden eine aufsteigende Kette

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 \prec \boldsymbol{B}_1 \prec \boldsymbol{B}_2 \prec ...$ von elementaren Erweiterungen. Diese elementaren Erweiterungen seien stets so, dass für alle Tupel $a_1, ..., a_{n+1}$ und $d_1, ..., d_n$ in $P(\boldsymbol{B}_i)$ mit

$$\mathrm{tp}_{P(\boldsymbol{B}_i)}(a_1, ..., a_n) \equiv \mathrm{tp}_{P(\boldsymbol{B}_i)}(d_1, ..., d_n)$$

es ein Element d_{n+1} in $P(\boldsymbol{B}_{i+1})$ gibt mit

$$\mathrm{tp}_{P(\boldsymbol{B}_{i+1})}(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) \equiv \mathrm{tp}_{P(\boldsymbol{B}_{i+1})}(d_1, ..., d_n, d_{n+1})$$

Wir zeigen die erste elementare Erweiterung $\boldsymbol{B} \prec \boldsymbol{B}_1$, alle anderen werden analog konstruiert.
Zunächst erweitern wir die Sprache L um Konstanten für alle Elemente in A, also $L(A) = L \cup \{c_a : a \in A\}$. Für je zwei Tupel $a_1, ..., a_n, a_{n+1}$ und $d_1, ..., d_n$ mit $\mathrm{tp}_{\boldsymbol{A}}(a_1, ..., a_n) \equiv \mathrm{tp}_{\boldsymbol{A}}(d_1, ..., d_n)$ definieren wir den Typen $\Sigma(c_{d_1}, ..., c_{d_n}, x)$. Eine Formel $\phi(c_{d_1}, ..., c_{d_n}, x)$ sei genau dann in Σ, wenn

$$\boldsymbol{A} \models \phi(a_1, ..., a_{n+1}).$$

Für jedes Σ führen wir eine neue Konstante c_Σ ein. Mit $\Sigma(c_\Sigma)$ bezeichnen wir die Menge aller Sätze $\Sigma(c_{d_1}, ..., c_{d_n}, c_\Sigma)$.

Wir betrachten die Theorie, die wir erhalten, wenn wir das Diagramm von $\boldsymbol{B}$ mit dem Diagramm von $\boldsymbol{A}$ und allen Typen $\Sigma(c_\Sigma)$ vereinigen:

$$\mathrm{Th}((\boldsymbol{B}, c'_b)_{b \in B}) \cup \mathrm{Th}((\boldsymbol{A}, c_a)_{a \in A})^P \cup \bigcup_{\Sigma \text{ wie oben}} (\Sigma^P(c_\Sigma))$$

Die Schreibweise ^{P} soll dabei verdeutlichen, dass in diesen Sätzen nur über P quantifiziert wird.
Es gibt nur abzählbar viele Tupel in A, also auch nur abzählbar viele Konstanten c_Σ. Damit ist die Sprache dieser neuen Theorie auch abzählbar. Außerdem ist die Theorie konsistent, da jede endliche Teilmenge ein Modell hat ($\boldsymbol{B}$ mit geeigneter Wahl der Konstanten).
Also gibt es laut Kompaktheitssatz ein abzählbares Modell $\boldsymbol{B}_1^+$. Das Redukt dieses Modells auf L nennen wir $\boldsymbol{B}_1$. Laut Konstruktion kann $\boldsymbol{B}$ nach $\boldsymbol{B}_1$ elementar eingebettet werden.

Wir wiederholen diese Vorgehensweise und erhalten eine aufsteigende Kette

$$\boldsymbol{B} \prec \boldsymbol{B}_1 \prec \boldsymbol{B}_2 \prec ...$$

Auch die Vereinigung $\boldsymbol{N} = \bigcup_{i<\omega} \boldsymbol{B}_i$ ist eine abzählbare elementare Erweiterung von $\boldsymbol{B}$. Wir betrachten nun Tupel $a_1, .., a_n, a_{n+1}$ und $d_1, ..., d_n$ aus $P(\boldsymbol{N})$

mit $(P(\boldsymbol{N}), a_1, .., a_n) \equiv (P(\boldsymbol{N}), d_1, ..., d_n)$. Es gibt einen Index i, sodass alle Elemente in $P(\boldsymbol{B}_i)$ liegen. Aus

$$\mathrm{tp}_{P(\boldsymbol{B}_i)}(a_1, ..., a_n) \equiv \mathrm{tp}_{P(\boldsymbol{B}_i)}(d_1, ..., d_n)$$

folgt, dass es ein d_{n+1} gibt, sodass

$$\mathrm{tp}_{P(\boldsymbol{B}_{i+1})}(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) \equiv \mathrm{tp}_{P(\boldsymbol{B}_{i+1})}(d_1, ..., d_n, d_{n+1}).$$

Also wissen wir, dass es ein $d_{n+1} \in P(\boldsymbol{N})$ gibt, sodass $(a_1, .., a_n, a_{n+1})$ und $(d_1, ..., d_n, d_{n+1})$ gleiche Typen in $P(\boldsymbol{N})$ haben.
Wenn wir dieses Argument mit back-and-forth-Methode fortsetzen, sehen wir, dass wir jeden partiellen Isomorphismus auf einen Automorphismus von $P(\boldsymbol{N})$ fortsetzen. Damit ist $P(\boldsymbol{N})$ homogen.

Da $\boldsymbol{N}$ eine elementare Erweiterung von $\boldsymbol{B}$ ist, ist auch $P(\boldsymbol{N})$ eine elementare Erweiterung von $P(\boldsymbol{B})$. Aus $\mathrm{tp}_{\boldsymbol{A}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\boldsymbol{A}}(\bar{d})$ folgt dann, dass $\mathrm{tp}_{P(\boldsymbol{N})}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{P(\boldsymbol{N})}(\bar{d})$ ist. Da $P(\boldsymbol{N})$ homogen ist, gibt es einen Automorphismus $f : P(\boldsymbol{N}) \to P(\boldsymbol{N})$, der $\bar{a}$ nach $\bar{d}$ abbildet. Wegen der relativen Kategorizität von T hat f eine Fortsetzung $f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$. Automorphismen erhalten Typen, also gilt $\mathrm{tp}_{\boldsymbol{N}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\boldsymbol{N}}(\bar{d})$. Daraus folgt schlussendlich, dass $\mathrm{tp}_{\boldsymbol{B}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\boldsymbol{B}}(\bar{d})$ gilt.

Auch für überabzählbare Modelle muss das Lemma gelten. Denn angenommen $\boldsymbol{B}$ ist ein überabzählbares Modell von T und es gibt zwei Tupel $\bar{a}$ und $\bar{d}$, die zwar in $P(\boldsymbol{B})$ gleichen Typ haben, aber nicht in $\boldsymbol{B}$. Die Theorie von $(\boldsymbol{B}, \bar{a}, \bar{d})$ hat aufgrund des Satzes von Löwenheim und Skolem ein abzählbares Modell, in dem wiederum gilt, dass die beiden Tupel zwar im P-Teil gleichen Typ haben, aber nicht im ganzen Modell. Dies ist aber ein Widerspruch. □

Lemma 3.1.3. *Sei T eine relativ kategorische Struktur. Dann ist T reduziert.*

Beweis. Wir betrachten eine beliebige L-Formel $\phi(\bar{x})$ und die durch sie gegebene L^--Formelmenge

$$t(\bar{x}) = \{\psi(\bar{x}) \in L^- : T \vdash \phi(\bar{x}) \wedge P(\bar{x}) \to \psi^P(\bar{x})\}.$$

Wir behaupten, dass

$$T \cup t(\bar{x}) \cup P(\bar{x}) \vdash \phi(\bar{x}).$$

Angenommen es gibt ein Modell $\boldsymbol{B}$ von T und ein Tupel $\bar{a}$ in $\boldsymbol{A} = P(\boldsymbol{B})$, welches zwar t erfüllt, aber nicht ϕ. Dann ist $T \cup \mathrm{tp}_{\boldsymbol{B}}(\bar{a}) \cup \phi(\bar{x})$ inkonsistent.

Wegen Lemma 3.1.2 muss aber bereits $T \cup \mathrm{tp}_{\boldsymbol{A}}(\bar{a})^P \cup \phi(\bar{x})$ inkonsistent sein. Also gilt

$$\begin{aligned} T \cup \mathrm{tp}_{\boldsymbol{A}}(\bar{a})^P \cup \phi(\bar{x}) \vdash \bot &\text{ und deshalb} \\ T \vdash \phi(\bar{x}) \to \neg\psi^P(\bar{x}) &\text{ für ein } \psi \text{ aus } \mathrm{tp}_{\boldsymbol{A}}(\bar{a}). \end{aligned}$$

Wegen der zweiten Zeile ist aber $\neg\psi(\bar{x}) \in t(\bar{x}) \subseteq \mathrm{tp}_{\boldsymbol{A}}(\bar{a})$. Dies ist ein Widerspruch zu $\psi \in \mathrm{tp}_{\boldsymbol{A}}(\bar{a})$.
Also gilt

$$T \cup t(\bar{x}) \cup P(\bar{x}) \vdash \phi(\bar{x}).$$

Es folgt die Existenz von einem $\psi(\bar{x}) \in t(\bar{x})$ mit

$$T \vdash \phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi^P(\bar{x}).$$

□

Eine weitere Eigenschaft relativ kategorischer Theorien ist, dass sie atomar über P sind. Diese Eigenschaft besagt, grob gesprochen, dass alle Eigenschaften eines Elements bereits vollständig durch eine Formel mit Parametern in P beschrieben werden.

Lemma 3.1.4. *Sei T eine relativ kategorische Theorie. Dann ist T atomar über P. Das heißt, dass für jedes Modell $\boldsymbol{B}$ und für jedes Tupel $\bar{b}$ von Elementen von $\boldsymbol{B}$ der Typ von $\bar{b}$ über $P^{\boldsymbol{B}}$ ein Haupttyp ist.*

Beweis. Sei $\boldsymbol{B}$ ein abzählbares Modell von T mit dem $P(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}$. Angenommen es gibt ein Tupel $\bar{b}$ in B, sodass $\mathrm{tp}_{\boldsymbol{B}}(\bar{b}/A)$ kein Haupttyp ist. Wir betrachten außerdem den Typ $t(x) = \{P(x)\} \cup \{x \neq a : a \in A\}$.
Aufgrund des Omitting type theorems hat $\mathrm{Th}((\boldsymbol{B}, a)_{a \in A})$ ein Modell $\boldsymbol{B}'$, welches die beiden Typen $\mathrm{tp}_{\boldsymbol{B}}(\bar{b}/A)$ und $t(x)$ nicht realisiert. Weil $\Gamma(x)$ nicht realisiert wird, müssen die P-Teile von $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B}'$ isomorph sein. Wegen der relativen Kategorizität sind $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B}'$ isomorph. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass $\mathrm{tp}_{\boldsymbol{B}}(\bar{b}/A)$ in $\boldsymbol{B}$ realisiert wird und in $\boldsymbol{B}'$ nicht. Damit haben wir den Satz für abzählbares $\boldsymbol{B}$ gezeigt.

Angenommen es gibt ein überabzählbares Modell $\boldsymbol{B}'$ von T, das nicht atomar über P ist. Das heißt, dass es ein Tupel $\bar{b}$ in $\boldsymbol{B}'$ gibt, dessen Typ kein Haupttyp über P ist. Wenn wir den Satz von Löwenheim-Skolem auf $\mathrm{Th}((\boldsymbol{B}', \bar{b}))$ anwenden, sehen wir, dass $\boldsymbol{B}'$ eine abzählbare, elementare Unterstruktur hat, die ebenfalls nicht atomar über P ist. Dies ist aber ein Widerspruch zu dem, was wir bereits gezeigt haben. □

Bemerkung 3.1.5. Anand Pillay hat in [16] gezeigt, dass Theorien *genau dann* reduziert und atomar über P sind, wenn sie (ω, ω)-*kategorisch* sind. Mit (ω, ω)-Kategorizität ist eine Abschwächung von relativer Kategorizität gemeint, bei der nur verlangt wird, dass *abzählbare* $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}'$ mit isomorphem P-Teil isomorph über P sind.
Ein Beispiel einer Theorie, die (ω, ω)-kategorisch ist, ist $\mathrm{Th}((A \cup C, P))$, wobei A und C zwei abzählbare Mengen sind und P die Menge A auswählt. Offensichtlich sind alle abzählbaren Modelle der Theorie isomorph. Jedoch ist die Theorie nicht relativ kategorisch, da sie auch Modelle hat, in denen der P-Teil abzählbar ist, aber das Komplement davon eine überabzählbare Menge ist.
Wie Shelah in [18] gezeigt hat, gilt selbst dann, wenn wir zusätzlich voraussetzen, dass in T nur abzählbare Modelle abzählbare P-Teile haben, nicht die Umkehrung.

3.1.1 Der Satz von Gaifman

Wir können relative Kategorizität als eine Verallgemeinerung der impliziten Definierbarkeit von Relationen in einer Theorie sehen: Wir fügen zu einem P-Teil *neue Elemente und neue Relationen* hinzu und die entstehende Struktur ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
In diesem Abschnitt behandeln wir diese Sichtweise und zeigen einen Satz, der von Gaifman in [9] veröffentlicht wurde und als eine Verallgemeinerung des Satzes von Beth gesehen werden kann.

Satz 3.1.6 (Craig'scher Interpolationssatz)**.** *Seien ϕ und ψ zwei Sätze, sodass $\phi \models \psi$. Dann gibt es einen Satz θ, sodass*

(i) $\phi \models \theta$ und $\theta \models \psi$

(ii) Jedes Relations-, Funktions-, oder Konstantensymbol, das in θ vorkommt, tritt sowohl in ϕ, als auch in ψ auf.

Beweis. siehe [4, Theorem 2.2.20] □

Definition 3.1.7. Sei L eine Sprache, $\mathfrak{R} = (R_i)_{i \in I}$ eine Familie von Relationssymbolen und $\mathfrak{R}' = (R_i')_{i \in I}$ eine weitere Familie von Relationssymbolen von jeweils gleicher Stelligkeit. Mit $\Sigma(\mathfrak{R})$ bezeichnen wir eine Formelmenge in der Sprache $L \cup \mathfrak{R}$. Mit $\Sigma(\mathfrak{R}')$ bezeichnen wir jene Formelmenge, die wir erhalten, wenn wir alle Symbole aus $\mathfrak{R}$ durch die entsprechenden Symbole aus $\mathfrak{R}'$ ersetzen. Wir sagen $\Sigma(\mathfrak{R})$ *definiert* $\mathfrak{R}$ *implizit*, wenn für alle Relationen R_i gilt, dass

$$\Sigma(\mathfrak{R}) \cup \Sigma(\mathfrak{R}') \models \forall \bar{x}(R_i(\bar{x}) \leftrightarrow R_i'(\bar{x})).$$

Wir sagen $\Sigma(\mathfrak{R})$ definiert $\mathfrak{R}$ *explizit*, wenn es für jedes R_i eine Formel ψ in L gibt, sodass

$$\Sigma(\mathfrak{R}) \models \forall \bar{x}(R_i(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$$

Satz 3.1.8 (Beth)**.** *$\Sigma(\mathfrak{R})$ definiert $\mathfrak{R}$ implizit, genau dann wenn es $\mathfrak{R}$ explizit definiert.*

Beweis. Wie man leicht einsieht, folgt aus expliziter Definierbarkeit die implizite Definierbarkeit. Wir beweisen also nur die „schwierige“ Richtung.
Sei $\Sigma(\mathfrak{R})$ eine Menge von Sätzen, wobei $\mathfrak{R}$ eine Familie von Relationssymbolen ist. Wir wollen zeigen, dass jede Relation R in $\mathfrak{R}$ sich explizit in L definieren lässt.
Da R implizit definierbar ist gilt, dass

$$\Sigma(\mathfrak{R}) \cup \Sigma(\mathfrak{R}') \models \forall \bar{x}(R(\bar{x}) \leftrightarrow R'(\bar{x})).$$

Sei nun $\bar{c}$ ein Tupel von neuen Konstanten. Dann gilt klarerweise

$$\Sigma(\mathfrak{R}) \cup \Sigma(\mathfrak{R}') \models R(\bar{c}) \leftrightarrow R'(\bar{c}).$$

Aus dem Kompaktheitssatz folgt, dass es endlich viele Relationen $R_{i_1}, R_{i_2}, ..., R_{i_n}$ und eine Formel $\sigma(R, R_{i_1}, R_{i_2}, ..., R_{i_n}) \in \Sigma(\mathfrak{R})$ gibt, mit

$$\sigma(R, R_{i_1}, R_{i_2}, ..., R_{i_n}) \wedge \sigma(R', R'_{i_1}, R'_{i_2}, ..., R'_{i_n}) \models R(\bar{c}) \leftrightarrow R'(\bar{c}).$$

Die Richtung „$\rightarrow$“ dieser Äquivalenz können wir umschreiben zu

$$\sigma(R, R_{i_1}, R_{i_2}, ..., R_{i_n}) \wedge R(\bar{c}) \models \sigma(R', R'_{i_1}, R'_{i_2}, ..., R'_{i_n}) \rightarrow R'(\bar{c}).$$

Aus dem Craig'schen Interpolationssatz folgt die Existenz einer Formel $\psi(\bar{c}) \in L \cup \{\bar{c}\}$, sodass

$$\begin{aligned} \sigma(R, R_{i_1}, R_{i_2}, ..., R_{i_n}) \wedge R(\bar{c}) &\models \psi(\bar{c}) \text{ und} \\ \psi(\bar{c}) &\models \sigma(R', R'_{i_1}, R'_{i_2}, ..., R'_{i_n}) \rightarrow R'(\bar{c}). \end{aligned}$$

Da in ψ nur Symbole aus L vorkommen, muss auch

$$\psi(\bar{c}) \models \sigma(R, R_{i_1}, R_{i_2}, ..., R_{i_n}) \rightarrow R(\bar{c}).$$

gelten. Insgesamt erhalten wir also

$$\sigma(R_1, R_2, R_3, ..., R_n) \models R(\bar{c}) \leftrightarrow \psi(\bar{c}).$$

Damit definiert $\Sigma(\mathfrak{R})$ die Relation R explizit. $\square$

Die relative Kategorizität kann als eine Verallgemeinerung der impliziten Definierbarkeit aufgefasst werden. Sei T eine Theorie, die relativ kategorisch über P und L^- ist. Wir betrachten ein Modell $\boldsymbol{B}$ von T mit dem P-Teil $\boldsymbol{A}$ und $C = B \setminus A$. Mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen wir alle Relationen auf $\boldsymbol{B}$, also insbesondere auch jene, die noch nicht auf $\boldsymbol{A}$ definiert waren.
Dann können wir $\boldsymbol{B}$ auffassen als das Tripel $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, C, \mathfrak{R})$, also als eine Erweiterung von $\boldsymbol{A}$ um die Elemente C und Relationen $\mathfrak{R}$. Wenn zwei Strukturen $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, C, \mathfrak{R})$ und $\boldsymbol{B}' = (\boldsymbol{A}, C', \mathfrak{R}')$ eine relativ kategorische Theorie $T = T(\mathfrak{R})$ erfüllen, dann heißt dies nichts anderes, als dass es einen Isomorphismus $i : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}'$ gibt, sodass

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, C, \mathfrak{R}) \models T(\mathfrak{R}) \\ \boldsymbol{B}' = (\boldsymbol{A}, C', \mathfrak{R}') \models T(\mathfrak{R}')\end{array}\right\} \Rightarrow (\boldsymbol{B} \models R(\bar{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{B}' \models R'(i(\bar{x})))$$

Im Vergleich zur impliziten Definierbarkeit, haben wir hier nicht nur neue Relationen $\mathfrak{R}$, sondern auch neue Elemente in C implizit definiert.
Satz 3.1.10 wird zeigen, in welchem Sinn sich die neuen Relationen, über den P-Teil explizit definieren lassen. Um den Satz beweisen zu können, benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 3.1.9. *Seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{C}$ zwei Strukturen mit disjunkter Signatur und sei $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ eine Formel in der Sprache der zweisortigen Struktur $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$. Wenn wir die Menge aller Paare $(\bar{a}, \bar{c}) \in A^m \times C^n$ betrachten, die θ erfüllen, so ist diese Menge eine endliche Vereinigung von karthesischen Produkten $A_i \times C_i$, wobei die Mengen A_i bzw. C_i sich in $\boldsymbol{A}$ bzw. $\boldsymbol{C}$ definieren lassen.*

Beweis. Sei $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ eine beliebige Formel in der Sprache von $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$. Wir wollen zeigen, dass es Formeln α_i und γ_i in der Sprache von $\boldsymbol{A}$ beziehungsweise $\boldsymbol{C}$ gibt, mit

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}) \models \theta(\bar{a}, \bar{c}) \wedge \bar{a} \in A \wedge \bar{c} \in C \Leftrightarrow (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}) \models \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i^A(\bar{a}) \wedge \gamma_i^C(\bar{c}).$$

Mit der Schreibweise α^A ist gemeint, dass alle Quantoren von α sich auf $\boldsymbol{A}$ beziehen.
Wir können uns die durch θ definierte Menge somit als eine endliche Vereinigung von „Rechtecken“ in $A^m \times C^n$ vorstellen, deren Seitenflächen jeweils in $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{C}$ definierbar sind (siehe Abbildung 3.1).
Wir zeigen das Lemma mit Induktion über den Formelaufbau. Da $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{C}$ disjunkte Signaturen haben, können wir annehmen, dass alle Quantoren, die

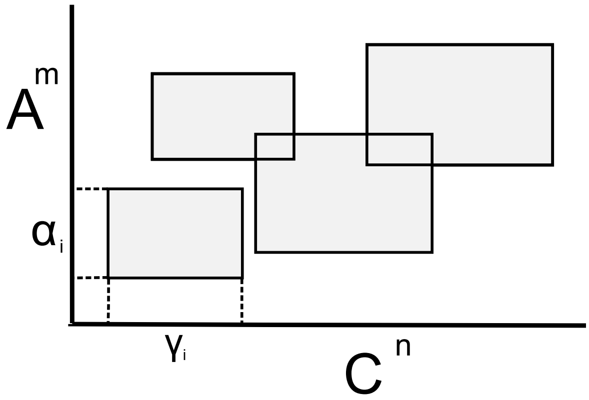

Abbildung 3.1: Die durch θ definierte Menge als eine endliche Vereinigung von „Rechtecken“

in θ vorkommen nur über $\boldsymbol{A}$ oder $\boldsymbol{C}$ quantifizieren.
Für Atomformeln ist die Behauptung klar.
Für Junktoren zeigt man den Induktionsschritt durch Umformen auf die disjunktive Normalform. In Abbildung 3.1 heißt das, dass das Komplement, die endliche Vereinigung und der endliche Schnitt von endlichen Vereinigungen von Rechtecken wieder eine endliche Vereinigung von Rechtecken ist.
Beim Einführen eines Existenzquantors auf $\boldsymbol{A}$ gilt

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}) \models (\exists x_1 \in A) \bigvee_{i=1}^{k} \alpha_i^A(\bar{a}, x_1) \wedge \gamma_i^C(\bar{c}) \\
\Leftrightarrow &(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}) \models \bigvee_{i=1}^{k} (\exists x_1 \in A)(\alpha_i^A(\bar{x}, x_1)) \wedge \gamma_i^C(\bar{y}).
\end{aligned}
$$

Die Implikation „$\Leftarrow$“ gilt, da die Signaturen von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{C}$ voneinander unabhängig sind. In Abbildung 3.1 entspricht die Einführung des Existenzquantors einer Projektion auf $A^{m-1} \times C^n$. $\square$

Satz 3.1.10 (Gaifman). *Sei $T = T(\mathfrak{R})$ eine relativ kategorische Theorie und $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ eine Formel in der Sprache von T. Dann gibt es endlich viele Formeln $\psi_1(\bar{x}, \bar{x}'), ..., \psi_n(\bar{x}, \bar{x}')$ in L^-, sodass es für jedes Modell $\boldsymbol{B}$ von T und zu jedem Tupel $\bar{b}$ in $\boldsymbol{B}$ ein $\bar{a}'$ in $\boldsymbol{A} = P(\boldsymbol{B})$ und einen Index i gibt, sodass für alle $\bar{x}$ in $\boldsymbol{A}$ gilt:*

$$\boldsymbol{B} \models \phi(\bar{x}, \bar{b}) \wedge P(\bar{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \models \psi_i(\bar{x}, \bar{a}')$$

In dem Fall, in dem $\phi(\bar{x})$ nur von $\bar{x}$ abhängig ist, gibt es eine einzige, parameterlose Formel ψ mit

$$\boldsymbol{B} \models \phi(\bar{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \models \psi(\bar{x}) \text{ (Reduziertheit)}$$

Beweis. Im ersten Schritt wollen wir den Satz von Beth anwenden, um in jedem Modell eine zu ϕ äquivalente Formel zu finden, die keine Relationssymbole aus $\mathfrak{R}$ verwendet.
Für ein festes Modell $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, C, \mathfrak{R})$ betrachten wir die um das Diagramm von $\boldsymbol{A}$ erweiterte Theorie $T_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{R}) = T(\mathfrak{R}) \cup \mathrm{Th}((\boldsymbol{A}, a)_{a\in A})^P$. Wegen der relativen Kategorizität ist jedes weitere Modell von $T_{\boldsymbol{A}}$ mit der gleichen Trägermenge, also $\boldsymbol{B}' = (\boldsymbol{A}, C, \mathfrak{R}')$ isomorph zu $\boldsymbol{B}$. Für jede Relationen $R \in \mathfrak{R}$ gilt somit:

$$(\boldsymbol{A}, C, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', a)_{a\in A} \models \forall \bar{z}(R(\bar{z}) \leftrightarrow R'(\bar{z})).$$

Angenommen es gibt ein Modell von $T_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{R}) \cup T_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{R}')$, für welches R und R' ungleich sind, also

$$(\boldsymbol{A}_1, C_1, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_1', a)_{a\in A} \models \neg\forall \bar{z}(R(\bar{z}) \leftrightarrow R'(\bar{z})).$$

Die Theorie $T_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{R}) \cup T_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{R}') \cup \{\neg\forall \bar{z}(R(\bar{z}) \leftrightarrow R'(\bar{z}))\}$ ist dann eine konsistente Theorie.
Der Typ $\{P(x)\} \cup \{x \neq a : a \in A\}$ ist in dieser Theorie kein Haupttyp. Wegen des Omitting type theorems besitzt die Theorie also ein Modell, in welchem der Typ $\{P(x)\} \cup \{x \neq a : a \in A\}$ nicht realisiert wird.
Wir erhalten also ein Modell von $T_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{R}) \cup T_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{R}')$, in welchem der P-Teil gleich $\boldsymbol{A}$ ist, aber die Relationen R und R' nicht übereinstimmen. Dies ist ein Widerspruch zur relativen Kategorizität von T.

Somit definiert die Theorie $T_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{R})$ für beliebiges $\boldsymbol{A}$ implizit die Relationen $\mathfrak{R}$. Aus dem Satz von Beth folgt nun, dass es für jede Formel $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ Parameter $\bar{a}'$ aus A und eine Formel $\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}')$ in der Sprache von $L^-(A) \cup \{P\}$ gibt, mit

$$\boldsymbol{B} \models \phi(\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow \boldsymbol{B} \models \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}') \Leftrightarrow (\boldsymbol{A}, C) \models \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}').$$

Wegen Lemma 3.1.9 wissen wir, dass $\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}')$ äquivalent ist zu einer Formel $\bigvee_{i=1}^k \alpha_i^{\boldsymbol{A}}(\bar{x}, \bar{a}') \wedge \gamma_i^C(\bar{y})$, wobei α_i Formeln in der Sprache von $\boldsymbol{A}$ sind und γ_i Formeln in der Sprache von C.

Die endliche Menge der $\psi_i(\bar{x}, \bar{x}')$ seien nun alle möglichen Konjunktionen von Formeln $\alpha_i(\bar{x}, \bar{x}')$. Für ein festes Tupel $\bar{b}$ in $\boldsymbol{B}$ betrachte man die Konjunktion all $\alpha_j(\bar{x}, \bar{a}')$ sodass $\bar{b}$ die Formel γ_j^C erfüllt.

Die Menge der ψ_i ist nicht abhängig von dem Modell $\boldsymbol{B}$. Wir haben nämlich bereits gezeigt, dass

$$T_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{R}) \models \forall \bar{x} \in P \; \forall \bar{y} \; \exists \bar{x}' \in P(\phi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i^P(\bar{x}, \bar{x}')).$$

In diesem Satz kommen keine Konstantensymbole vor, die Elementen aus $\boldsymbol{A}$ entsprechen. Wegen dem Interpolationssatz von Craig wissen wir also, dass bereits T den Satz erfüllt. □

3.2 Algebraische Theorien

In Bemerkung 3.1.5 haben wir gesehen, dass die Eigenschaften einer Theorie atomar und reduziert über P zu sein, zwar notwendige, aber keine hinreichenden Bedingungen für relative Kategorizität sind.
Ersetzen wir die Eigenschaft atomar zu sein aber durch die stärkere *Algebraizität*, so erhalten wir eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung.

Definition 3.2.1. Sei $\boldsymbol{B}$ eine Struktur in einer Sprache L und X eine Teilmenge ihrer Trägermenge B. Dann heißt ein Tupel $\bar{b}$ von Elementen aus B *algebraisch* über X, falls es eine Formel $\chi(\bar{x}, \bar{y})$ in L und ein Tupel $\bar{a}$ in X gibt, sodass $\boldsymbol{B} \models (\bar{b}, \bar{a})$ und es nur endlich viele andere Tupel $\bar{c}$ in B gibt, die ebenfalls $\boldsymbol{B} \models (\bar{c}, \bar{a})$ erfüllen.
Wir sagen, dass $\boldsymbol{B}$ *algebraisch über seinem P-Teil* ist, wenn jedes Element aus B algebraisch über die Menge $P^{\boldsymbol{B}}$ ist.
Eine Theorie T heißt *algebraisch über P*, falls jedes Modell $\boldsymbol{B}$ algebraisch über seinem P-Teil ist.

Satz 3.2.2. *Wenn T reduziert und algebraisch über P ist, dann ist T relativ kategorisch über P.*

Beweis. Seien $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B}'$ zwei Modelle von T mit isomorphem P-Teil. Dann folgt aus der Reduziertheit über P, dass die Isomorphie $i : P(\boldsymbol{B}) \to P(\boldsymbol{B}')$ elementar in L ist. Damit meinen wir, dass für jede Formel $\phi(\bar{x})$ in L und jedes Tupel $\bar{a}$ aus $P^{\boldsymbol{B}}$ gilt, dass

$$\boldsymbol{B} \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \boldsymbol{B}' \models \phi(i(\bar{a})).$$

Wir wollen i mit back-and-forth-Vorgehensweise zu einem Isomorphismus $I : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}'$ fortsetzen.
Wir zeigen nur den ersten Schritt. Sei b ein Element von B. Wir suchen ein Bild $i(b)$, sodass i immer noch eine elementare Abbildung ist.
Dazu wählen wir eine Formel $\phi(x, \bar{y})$ und ein Tupel $\bar{c}$ aus dem P-Teil, sodass $\boldsymbol{B} \models \phi(b, \bar{c})$ und die Menge $\{d \in B : \boldsymbol{B} \models \phi(d, \bar{c})\}$ so klein wie möglich ist. Da T algebraisch ist, besteht diese Menge nur aus endlich vielen Elementen. Außerdem gilt $\boldsymbol{B} \models \exists x \phi(x, \bar{c})$ und somit $\boldsymbol{B}' \models \exists x \phi(x, i(\bar{c}))$. Also ist es möglich ein Element $i(b)$ in B' zu wählen, sodass $\boldsymbol{B}' \models \phi(i(b), i(\bar{c}))$.
Da wir ϕ im obigen Sinn minimal gewählt haben, ist die so erweiterte Abbildung immer noch elementar. Denn angenommen es gibt eine Formel $\psi(x, \bar{y})$ und ein Tupel $\bar{c}'$ aus $P(\boldsymbol{B})$ mit

$$\boldsymbol{B} \models \psi(b, \bar{c}') \text{ aber } \boldsymbol{B}' \models \neg\psi(i(b), i(\bar{c}')).$$

Dann ist die Menge $\{d \in B : \boldsymbol{B} \models \phi(d, \bar{c}) \cap \psi(d, \bar{c}')\}$ eine echte Teilmenge von $\{d \in B : \boldsymbol{B} \models \phi(d, \bar{c})\}$, was ein Widerspruch zur Wahl von ϕ ist.
Wir können nun im back-and-forth-Schema fortfahren.
Mit transfiniter Induktion erhalten wir einen Isomorphismus $\bar{i} : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}'$, der $i : P(\boldsymbol{B}) \to P(\boldsymbol{B}')$ fortsetzt. Damit ist T relativ kategorisch. $\square$

Bemerkung 3.2.3. Wir können die Implikation von Satz 3.2.2 nicht umkehren.
Ein Gegenbeispiel ist die Theorie der Gruppe G aus Beispiel 3.0.5. Die Gruppe G ist nicht algebraisch über $P(G) = 2G$. Wir können sogar zeigen, dass kein Element aus $G \setminus P(G)$ algebraisch über $P(G)$ ist.
Dazu betrachten wir zwei Elemente b und d, sodass $2b = 2d \neq 0$. Wenn wir uns die back-and-forth-Konstruktion aus Beispiel 3.0.5 noch einmal anschauen, sehen wir, dass es für jede Wahl von b und d einen Automorphismus I gibt, der auf $P(G)$ die Identität ist und b auf d abbildet. Für alle Formeln $\chi(y, \bar{x})$ und Tupel $\bar{a} \in P(G)$ gilt deswegen

$$G \models \chi(b, \bar{a}) \Leftrightarrow G \models \chi(i(b), i(\bar{a})) \Leftrightarrow G \models \chi(d, \bar{a}).$$

Damit ist b nicht algebraisch über $P(G)$.
Wir haben damit außerdem gezeigt, dass der Typ von b über $P(G)$ mit dem Typ von d über $P(G)$ übereinstimmt. Für $a = 2b$ ist also $2x = a$ ein Support vom Typen $\mathrm{tp}_G(b/P(G))$ (siehe Abbildung 3.2).

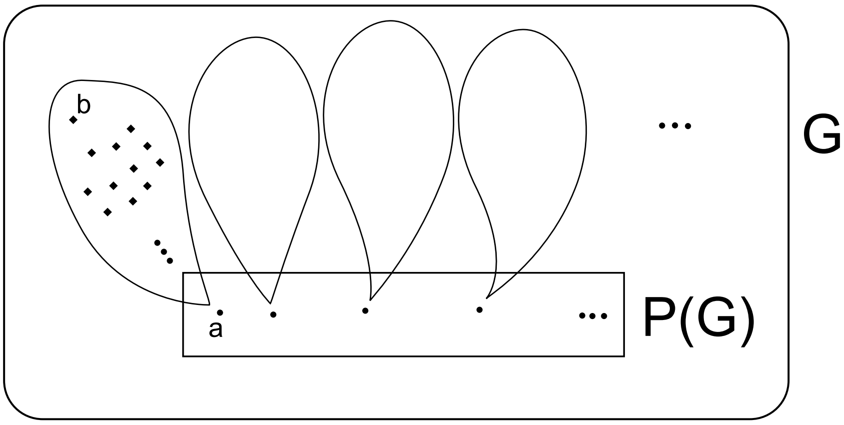

Abbildung 3.2: Alle „Hälften“ eines Elements aus $P(G)$ haben denselben Typ über $P(G)$

Kapitel 4

Koordinatisierung

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels führen wir koordinatisierte Strukturen und Theorien ein. In einer koordinatisierten Struktur kann jedes Element aus B mit Parametern („Koordinaten“) aus dem P-Teil definiert werden. Außerdem können in einem gewissen Sinn alle Eigenschaften des Elements auf Eigenschaften dieser Koordinaten zurückgeführt werden. Eine natürliche Frage, die auftaucht, ist, wie sich relative Kategorizität und Koordinatisiertheit zueinander verhalten. Wir werden sehen, dass eine Theorie genau dann koordinatisiert ist, wenn sie relativ kategorisch ist und jeder Isomorphismus zwischen P-Teilen eine *eindeutige* Fortsetzung zu einem Isomorphismus der ganzen Strukturen hat.

Im zweiten Abschnitt betrachten wir eine Verallgemeinerung von koordinatisierten Strukturen, die *koordinatisierbaren* Strukturen. Eine Struktur ist genau dann koordinatisierbar, wenn sie eine koordinatisierte Expansion besitzt.

Das zentrale Thema dieser Diplomarbeit ist, ob wir auch koordinatisierbare Theorien über relative Kategorizität und zusätzliche Eigenschaften charakterisieren können. Wir werden diese Fragestellung noch genauer ausführen und einige Spezialfälle betrachten, in denen die Frage positiv beantwortet werden kann. Das Einführen der Topologie auf den Automorphismengruppen wird hierbei eine wichtige Rolle spielen.

4.1 Koordinatisiertheit

Definition 4.1.1. Sei $\boldsymbol{B}$ eine Struktur in der Sprache L mit dem P-Teil $\boldsymbol{A} = P(\boldsymbol{B})$ in der Sprache L^-. Dann heißt $\boldsymbol{B}$ *koordinatisiert (über P und L^-)* wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

(i) $\boldsymbol{B}$ ist *reduziert* über P und L^-

(ii) B ist der *definierbare Abschluss* von A in $\boldsymbol{B}$ (abgekürzt $B = \mathrm{dcl}_{\boldsymbol{B}}(A)$). Das heißt, dass es für jedes Element b in B eine Formel $\psi(x, \bar{y})$ in L und ein Tupel $\bar{a}$ in A gibt, sodass

$$\boldsymbol{B} \models \psi(b, \bar{a}) \wedge \exists! x\ \psi(x, \bar{a})$$

Definition 4.1.2. Sei Ψ eine Menge von Formeln in der Sprache L. Dann bezeichnen wir $\boldsymbol{B}$ als Ψ-*koordinatisiert*, wenn jede Formel $\psi(x, \bar{y})$ in Punkt (ii) der obigen Definition aus Ψ gewählt werden kann. $\boldsymbol{B}$ heißt *endlich koordinatisiert*, falls es Ψ-koordinatisiert für eine endliche Formelmenge Ψ ist.

Definition 4.1.3. Wir nennen eine Theorie T (Ψ-)*koordinatisiert*, wenn jedes ihrer Modelle (Ψ-)koordinatisiert ist. Die Theorie T heißt *endlich koordinatisiert*, falls sie Ψ-koordinatisiert für eine endliche Menge Ψ ist.

Die Bezeichnung „koordinatisierte Struktur“ lässt sich wie folgt motivieren: Jede Formel $\psi(x, \bar{y})$ in der Sprache L definiert eine Funktion F_ψ auf der Menge $D_\psi = \{\bar{a} \in A : \exists! b \in B \text{ sodass } \boldsymbol{B} \models \psi(b, \bar{a})\}$, nämlich jene Funktion, die jedem Tupel, das durch ψ eindeutig definierte $b \in B$ zuordnet. Wenn $b = F_\psi(\bar{a})$, dann können wir das Tupel $\bar{a}$ als die „Koordinaten“ von b auffassen.
Aus Bedingung (ii) folgt, dass jedes Element von B Koordinaten in diesem Sinn hat. Die Bedingung (i) impliziert, dass alle Mengen D_ψ in $\boldsymbol{A}$ definierbar sind.
Unter Kenntnis der Reduktionsabbildung können wir $\boldsymbol{B}$ aus $\boldsymbol{A}$ „rekonstruieren“. Denn für ein Element $b \in B$ mit Koordinaten $\bar{a}$ und einer Formel $\phi(x) \in L$ gilt, dass

$$\boldsymbol{B} \models \phi(b) \Leftrightarrow \boldsymbol{B} \models \forall x(\psi(x, \bar{a}) \rightarrow \phi(x)) \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \models \theta(\bar{a}), \tag{4.1}$$

wobei ψ die Formel sei, die b definiert und θ die reduzierte Formel von $\forall x(\psi(x, \bar{a}) \rightarrow \phi(x))$ sei.

Eine weitere Beobachtung, die wir sofort machen können, ist, dass in koordinatisierten Theorien wegen Bedingung (ii) jedes Modell algebraisch über seinem P-Teil ist. Also folgt aus Satz 3.2.2, dass koordinatisierte Theorien relativ kategorisch sind.

An den folgenden Beispielen können wir ein paar weitere grundlegende Eigenschaften von koordinatisierten Theorien und Strukturen ablesen.

Beispiel 4.1.4. Sei V ein Vektorraum über einem höchstens abzählbaren Körper $\mathbb{K}$ und $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V. Wir beschreiben $\boldsymbol{V}$ als einsortige Struktur, indem wir für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ eine einstellige Funktion einführen, die der Skalarmultiplikation mit λ entspricht. Das Prädikat P wähle die reine Menge der Basisvektoren aus, also ist $\boldsymbol{V} = (V, +, 0, -, (\lambda\cdot)_{\lambda\in\mathbb{K}}, P)$ und $P(\boldsymbol{V}) = (\{v_i : i \in I\})$.
Offensichtlich ist $\boldsymbol{V}$ der definierbare Abschluss von $P(\boldsymbol{V})$, da sich jeder Vektor als Linearkombination von Basisvektoren anschreiben lässt. Für die Reduziertheit beobachten wir, dass die in $P(\boldsymbol{V})$ definierbaren Teilmengen trivial sind, also nur jene, die man durch die Gleichheitsrelation definieren kann. Die Automorphismen von $P(\boldsymbol{V})$ sind genau die Permutationen. Wegen dem Fortsetzungssatz für lineare Abbildungen gibt es eine eindeutige Fortsetzung zu einem Automorphismus von $\boldsymbol{V}$. Definierbare Mengen bleiben unter Automorphismen erhalten. Deshalb sind auch alle in in $\boldsymbol{V}$ definierbaren Teilmengen von $P(\boldsymbol{V})$ trivial.
Also ist $\boldsymbol{V}$ koordinatisiert über $P(\boldsymbol{V})$. Falls $\mathbb{K}$ und die Basis endlich sind, ist $\boldsymbol{V}$ endlich koordinatisiert.
Analog können wir zeigen, dass jedes freie Objekt koordinatisiert über seine Basis ist.

Beispiel 4.1.5. Wir betrachten die Struktur $\boldsymbol{B} = (B, P, c_b)_{b\in B}$, die aus einer abzählbaren Menge B besteht und Konstantensymbole für jedes Element in B hat. Das Prädikat P wähle zum Beispiel die Menge $\{b_1\}$ aus. Offensichtlich ist $\boldsymbol{B}$ koordinatisiert über P. Die Theorie von $\boldsymbol{B}$ ist jedoch nicht koordinatisiert, da jedes echte Obermodell von $\boldsymbol{B}$ nicht koordinatisiert sein kann. Des weiteren ist $\mathrm{Th}(\boldsymbol{B})$ nicht relativ kategorisch, da jedes Modell den gleichen P-Teil hat.
Somit folgt aus der Koordinatisiertheit einer Struktur $\boldsymbol{B}$ im Allgemeinen weder Koordinatisiertheit noch die relative Kategorizität ihrer Theorie $\mathrm{Th}(\boldsymbol{B})$.

Beispiel 4.1.6. Der Körper der rationalen Zahlen $\boldsymbol{B} = (\mathbb{Q}, +, 0, -, \cdot, 1, ^{-1}, P)$, wie wir ihn in Beispiel 3.0.4 betrachtet haben, ist endlich koordinatisiert über den Ring der ganzen Zahlen $P(\boldsymbol{B}) = (\mathbb{Z}, +, 0, -, \cdot, 1)$:
Dass $\boldsymbol{B}$ der definierbare Abschluss der ganzen Zahlen ist, ist klar, da sich jede rationale Zahl als Quotient zweier ganzer Zahlen definieren lässt.
Um zu zeigen, dass $\boldsymbol{B}$ reduziert über P ist, verwenden wir einerseits, dass

jede Formel eine äquivalente Darstellung hat, in der kein $^{-1}$ vorkommt, da

$$\boldsymbol{B} \models x \cdot y^{-1} = z \Leftrightarrow \boldsymbol{B} \models x = y \cdot z \wedge y \neq 0.$$

Andererseits gilt für Formeln, die Quantoren beinhalten, zum Beispiel $\forall y\ \phi(y, \bar{x})$:

$$\boldsymbol{B} \models \forall y\ \phi(y, \bar{a}) \Leftrightarrow \boldsymbol{B} \models \forall n, m(P(n) \wedge P(m) \wedge m \neq 0 \rightarrow \phi(n \cdot m^{-1}, \bar{a}))$$

Induktion über den Formelaufbau zeigt, dass $\boldsymbol{B}$ reduziert über P ist.
Somit ist $\boldsymbol{B}$ endlich koordinatisiert. Wir haben sogar gezeigt, dass die Theorie von $\boldsymbol{B}$ endlich koordinatisiert ist, da ja in der Theorie steht, dass sich jedes Element als Quotient zweier Elemente aus dem P-Teil anschreiben lässt.
Auf analogem Wege sieht man, dass jeder Quotientenkörper über den Integritätsring, der ihn erzeugt, endlich koordinatisiert ist.

Beispiel 4.1.7. Sei G die Gruppe aus Beispiel 3.0.5, also die direkte Summe von abzählbar vielen Kopien der zyklischen Gruppe C_4 und $P(G) = 2G$. Wir haben bereits in Bemerkung 3.2.3 gesehen, dass kein Element von $G \setminus P(G)$ algebraisch über $P(G)$ ist. Dies haben wir gezeigt, indem wir Automorphismen konstruiert haben, die auf $P(G)$ mit der Identität übereinstimmen, aber nicht auf ganz G. Insbesondere kann deswegen kein Element aus $G \setminus P(G)$ über $P(G)$ definiert werden.
Dieses Beispiel zeigt, dass es eine notwendige Voraussetzung ist, dass die Automorphismen des P-Teils in eindeutiger Weise auf die Automorphismen der ganzen Struktur fortgesetzt werden können. Wir werden diese Aussage in Lemma 4.1.9 noch verfeinern.

Das nächste Lemma behandelt einige weitere grundlegende Eigenschaften von koordinatisierten Theorien:

Lemma 4.1.8.

(i) Sind alle abzählbaren Modelle der Theorie T koordinatisiert, so ist T endlich koordinatisiert.

(ii) Wenn ein Modell von T endlich koordinatisiert ist, dann ist T endlich koordinatisiert.

(iii) Sei T koordinatisiert und $\boldsymbol{B}'$ ein Modell von T mit dem P-Teil $\boldsymbol{A}' = P(\boldsymbol{B}')$. Angenommen $\boldsymbol{A}$ ist eine elementare Unterstruktur von $\boldsymbol{A}'$. Wenn wir mit $\boldsymbol{B}$ den definierbaren Abschluss von $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}'$ bezeichnen, dann ist $\boldsymbol{B} \preccurlyeq \boldsymbol{B}'$ und $\boldsymbol{A} = P(\boldsymbol{B})$.

Beweis. (i): Wir zeigen (i) indirekt mit einem Kompaktheitsargument. Angenommen T ist nicht endlich koordinatisiert, aber Ψ-koordinatisiert für ein unendliches Ψ. Wir fügen zur Sprache eine neue Konstante c hinzu und erweitern T um Sätze, die aussagen, dass sich c nicht Ψ-koordinatisieren lässt:

$$T' = T \cup \{\forall \bar{x}(\neg\psi(c, \bar{x}) \vee \exists y(y \neq c \wedge \psi(y, \bar{x}))) : \psi \in \Psi\}$$

Jede endliche Teilmenge von T' hat laut Voraussetzung ein Modell. Aufgrund des Kompaktheitssatzes hat auch T' ein abzählbares Modell. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass alle abzählbaren Modelle koordinatisiert sind.

(ii): Die Tatsache, dass $\boldsymbol{B}$ endlich koordinatisiert ist, lässt sich in first-order Formeln beschreiben (Für die Reduziertheit haben wir dies bereits in der Definition 3.1.1 gesehen. Die Bedingung des definierbaren Abschlusses kann man in eine Formel fassen, da $\boldsymbol{B}$ *endlich* koordinatisiert ist).
Da T eine vollständige Theorie ist, enthält sie all diese Formeln und ist somit endlich koordinatisiert.

(iii) Um zu zeigen, dass $B = \mathrm{dcl}_{\boldsymbol{B}'}(A)$ ein elementares Untermodell von $\boldsymbol{B}'$ ist, verwenden wir das Tarski-Vaught-Kriterium (siehe A.1.2). Sei also $\phi(x, \bar{y})$ eine beliebige Formel in L und $\bar{b}$ ein Tupel aus $\boldsymbol{B}$, sodass $\boldsymbol{B}' \models \exists x\phi(x, \bar{b})$. Wir wollen zeigen, dass es ein Element d von $\boldsymbol{B}$ gibt mit $\boldsymbol{B}' \models \phi(d, \bar{b})$.
Dazu wählen wir zunächst ein Tupel $\bar{a}$ aus A, sodass $\bar{b}$ sich in $\boldsymbol{B}'$ durch $\bar{a}$ defininieren lässt. Sei d' ein Element von $\boldsymbol{B}'$ mit $\boldsymbol{B}' \models \phi(d', \bar{b})$ und $\bar{c}'$ ein Tupel aus $\boldsymbol{A}'$, welches d' definiert.
Durch die Reduktionsabbildung können wir wie in (4.1) beschrieben „$\boldsymbol{B}' \models \phi(d', \bar{b})$“ in „$\boldsymbol{A}' \models \psi(\bar{c}', \bar{a})$“ übersetzen. Da $\boldsymbol{A}$ ein elementares Untermodell von $\boldsymbol{A}'$ ist, gibt es ein Tupel $\bar{c}$ aus $\boldsymbol{A}$ mit $\boldsymbol{A} \models \psi(\bar{c}, \bar{a})$. Mit d, bezeichnen wir nun jenes Element, welches auf die gleiche Weise durch $\bar{c}$ definiert wird, wie d' durch $\bar{c}'$. Laut Definition ist d ein Element von $\boldsymbol{B}$ und erfüllt $\boldsymbol{B}' \models \psi(d, \bar{b})$.
Damit ist $\boldsymbol{B}$ ein elementares Untermodell von $\boldsymbol{B}'$. □

Lemma 4.1.9. *Wir betrachten zwei Modelle $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B}'$ einer reduzierten Theorie T mit den $P-$Teilen $\boldsymbol{A} = P(\boldsymbol{B})$ und $\boldsymbol{A}' = P(\boldsymbol{B}')$. Angenommen $\boldsymbol{B}$ ist koordinatisiert. Zu jeder elementaren Einbettung $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ gibt es dann eine eindeutige elementare Einbettung $f^* : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}'$, die f fortsetzt.*
In dem Spezialfall $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'$ ist die Abbildung $\sigma : f \mapsto f^*$ ein Gruppenisomorphismus von $Aut(\boldsymbol{A})$ nach $Aut(\boldsymbol{B})$.

Beweis. Sei $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ eine elementare Einbettung. Wegen der Reduziertheit ist f auch elementar in $\boldsymbol{B}$, im Sinne, dass

$$\boldsymbol{B} \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \boldsymbol{B}' \models \phi(f(\bar{a})).$$

Wir konstruieren die Fortsetzung f^* wie im Beweis von Satz 3.2.2:
Da $\boldsymbol{B}$ koordinatisiert ist, kann jedes Element b von $\boldsymbol{B}$ durch eine Formel $\psi(x,\bar{a})$ mit $\bar{a}$ in A definiert werden. Das Bild $f^*(b)$ sei dann jenes Element von $\boldsymbol{B}'$, welches die Formel $\psi(x, f(\bar{a}))$ erfüllt. Wie im Beweis von Satz 3.2.2 sieht man, dass die Abbildung f^* wohldefiniert und elementar ist.
Die Eindeutigkeit von f^* folgt ebenso aus der Reduziertheit, da:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{B} \models \exists!\psi(x,\bar{a}) \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \models \theta(\bar{a}) \\ \Leftrightarrow \boldsymbol{A}' \models \theta(f(\bar{a})) \Leftrightarrow \boldsymbol{B}' \models \exists!\psi(x, f(\bar{a}))\end{gathered}$$

Falls f ein Isomorphismus ist, muss auch f^* ein Isomorphismus sein: Die Abbildung $(f^{-1})^* \circ f^*$ ist eine elementare Einbettung von $\boldsymbol{B}$ nach $\boldsymbol{B}$, die die Identität fortsetzt. Wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung muss $(f^{-1})^* \circ f^* = (id_A)^* = id_B$ gelten.

Im Spezialfall $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\sigma : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) &\to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}) \\ f &\mapsto f^*\end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus: Die Verträglichkeit mit der Komposition und dem Invertieren folgt dabei aus der Eindeutigkeit der Fortsetzung. Aus der Eindeutigkeit folgt außerdem, dass $(g|_A)^* = g$. Damit ist σ bijektiv. $\square$

Das obige Lemma 4.1.9 zeigt, dass eine koordinatisierte Theorie relativ kategorisch ist und dass es für jedes Modell $\boldsymbol{B}$ einen eindeutigen Gruppenisomorphismus $\sigma : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ gibt, der invers zur Einschränkungsabbildung ist. Diese Eigenschaft nennen wir *Rigidity*.
Es gilt sogar die Umkehrung, wie der nächste Satz zeigt:

Satz 4.1.10. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *T ist koordinatisiert.*

(ii) *T ist relativ kategorisch und für jedes Modell $\boldsymbol{B}$ von T ist $\boldsymbol{B}$ „rigid“ über $P(\boldsymbol{B})$, das heißt der einzige Automorphismus von $\boldsymbol{B}$, der $P(\boldsymbol{B})$ punktweise festhält, ist die Identität.*

Beweis. Wir haben (i) $\to$ (ii) bereits in Lemma 4.1.9 gezeigt. Es bleibt also die Richtung (ii) $\to$ (i) zu zeigen.

Wegen Lemma 4.1.8(ii) reicht es zu zeigen, dass alle abzählbaren Modelle von T koordinatisiert sind. Sei $\boldsymbol{B}$ also ein abzählbares Modell von T. Das Lemma

3.1.3 liefert bereits die Reduziertheit, wir müssen also nur noch zeigen, dass $\boldsymbol{B}$ der definierbare Abschluss seines P-Teils $\boldsymbol{A}$ ist.
Wegen Lemma 3.1.4 ist $\boldsymbol{B}$ atomar über P. Das heißt, dass $(\boldsymbol{B}, a)_{a\in A}$ ein atomares Modell von $\mathrm{Th}((\boldsymbol{B}, a)_{a\in A})$ ist. Für ein beliebiges $b \in B$ hat der Typ $\mathrm{tp}_{\boldsymbol{B}}(b/A)$ also einen Support $\theta(x, \bar{a})$.

Wir wollen nun zeigen, dass dieser Support $\theta(x, \bar{a})$ *nur* von dem Element b erfüllt wird und somit b über A definiert.

Angenommen es gibt ein Element d in $\boldsymbol{B}$, welches auch $\theta(x, \bar{a})$ erfüllt, also über A den gleichen Typ wie b hat. Mittels back-and-forth-Methode können wir einen Isomorphismus konstruieren, der A festhält und b nach d überführt. Wir zeigen nur den ersten Schritt dieser Konstruktion. Sei b_1 das erste Element in der Aufzählung von von $B \setminus \{b\}$. Wir suchen ein Element d_1, sodass $\mathrm{tp}_{\boldsymbol{B}}((d, d_1)/A) = \mathrm{tp}_{\boldsymbol{B}}((b, b_1)/A)$. Da $\boldsymbol{B}$ atomar über P ist, hat $\mathrm{tp}_{\boldsymbol{B}}((b, b_1)/A)$ einen Support $\theta_1(x, x_1, \bar{a}_1)$. Die Formel $\exists x_1(\theta_1(x, x_1, \bar{a}_1))$ liegt im Typ von b, also gilt:

$$(\boldsymbol{B}, a)_{a\in A} \models \theta(x, \bar{a}) \to \exists x_1(\theta_1(x, x_1, \bar{a}_1))$$

Deshalb gibt es auch ein Element d_1, sodass $\mathrm{tp}_{\boldsymbol{B}}((b, b_1)/A) = \mathrm{tp}_{\boldsymbol{B}}((d, d_1)/A)$. Wir wiederholen das Argument in back-and-forth-Weise und erhalten einen Automorphismus $f : b_i \to d_i$ für $i \in \mathbb{N}$, der die Identität auf A fortsetzt und b auf d abbildet. Da $\boldsymbol{B}$ rigid ist, muss dieser Automorphismus bereits auf ganz $\boldsymbol{B}$ die Identität sein, also ist $b = d$. $\square$

Bemerkung 4.1.11. Wir haben im obigen Beweis nur verwendet, dass alle Modelle reduziert und atomar über den P-Teil sind. Dies ist laut Bemerkung 3.1.5 schon für (ω, ω)-kategorische Strukturen erfüllt. Somit ist auch (ω, ω)-Kategorizität und Rigidity äquivalent zu Koordinatisiertheit.

4.2 Koordinatisierbarkeit

Eine sinnvolle Verallgemeinerung von Koordinatisiertheit ist die Koordinatisierbarkeit:

Definition 4.2.1. Die Struktur $\boldsymbol{B}$ heißt *(endlich) koordinatisierbar*, falls sie eine Expansion $\boldsymbol{B}^+$ in einer Sprache $L^+ \supset L$ hat, die über P (endlich) koordinatisiert ist.
Eine Theorie T heißt *koordinatisierbar über* L^+, falls es eine vollständige Theorie T^+ in der Sprache L^+ gibt, sodass jedes Modell von T zu einem

Modell von T^+ erweitert werden kann, welches koordinatisiert über P ist. Eine Theorie T heißt *koordinatisierbar*, falls sie koordinatisierbar über eine Sprache L^+ ist.

Wie im koordinatisierten Fall können wir unter Kenntnis der Reduktionsabbildung eine koordinatisierbare Struktur aus ihrem P-Teil rekonstruieren. Wegen Lemma 4.1.8(i) müssen wir wiederum nicht zwischen koordinatisierbaren und endlich koordinatisierbaren Theorien unterscheiden.

Beispiel 4.2.2. Wenn A und C zwei disjunkte Mengen gleicher Kardinalität sind und $B = A \cup C$, dann ist B koordinatisierbar über $P(B) = A$.
Um dies zu sehen, betrachten wir die Expansion $\boldsymbol{B}^+ = (B, f, P)$ von B, wobei f eine bijektive Funktion von A nach C ist. Mit der Abbildung f lässt sich jedes Element aus C als Bild eines Elementes aus A definieren.
Außerdem ist $\boldsymbol{B}^+$ reduziert, mit f können keine neuen Teilmengen auf A definiert werden.
Falls A und C endliche Mengen sind, ist $\mathrm{Th}(B)$ offensichtlich eine koordinatisierbare Theorie.
Für unendliche Mengen gilt dies nicht, da ein überabzählbares C nicht über ein abzählbares A koordinatisiert werden kann.

Beispiel 4.2.3. Der Körper der komplexen Zahlen ist nicht koordinatisiert über dem Körper der reellen Zahlen, da die Konjugation einen Automorphismus darstellt, der eingeschränkt auf den reellen Zahlen die Identität ist. (vgl. Satz 3.1.10)
Die komplexen Zahlen sind aber sehr wohl koordinatisierbar über die reellen Zahlen. Die Expansion $(\mathbb{C}, i)$ ist nämlich der definierbare Abschluss von $\mathbb{R}$, da sich jede komplexe Zahl als $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ darstellen lässt.
Es bleibt die Reduziertheit zu zeigen. Da $\mathbb{C}$ Quantorenelimination besitzt (siehe zum Beispiel [12, Satz 7.1.4]), gibt es zu jeder Formel in $(\mathbb{C}, i)$ eine äquivalente, quantorenfreie Formel $\phi(\bar{x}, i)$. Die Atomformeln, aus denen ϕ aufgebaut ist, sind Gleichungen. Indem wir diese Gleichungen in ihren Realteil und Imaginärteil aufteilen, haben wir eine äquivalente Formulierung in $\mathbb{R}$ gefunden.

Wir haben bereits gesehen, dass es in koordinatisierten Strukturen stets einen natürlichen Isomorphismus gibt, der die Automorphismengruppe des P-Teils in die der ganzen Struktur abbildet (siehe Lemma 4.1.9). In Anlehnung an diesen Isomorphismus definieren wir natürliche Einbettungen:

Definition 4.2.4. Sei $\boldsymbol{B}$ eine Struktur mit dem P-Teil $\boldsymbol{A} = P(\boldsymbol{B})$. Ein injektiver Homomorphismus $\sigma : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ heißt *natürliche Einbettung*, wenn für jeden Automorphismus f von $\boldsymbol{A}$ gilt, dass $\sigma(f)|_A = f$. Die

Struktur $\boldsymbol{B}$ heißt *natürlich über* $\boldsymbol{A}$, wenn es eine natürliche Einbettung von $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$ nach $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ gibt.

Wir fragen uns wieder, wie Koordinatisierbarkeit, relative Kategorizität und Natürlichkeit zusammenhängen. Wie im letzten Abschnitt stellt man schnell fest, dass aus Koordinatisierbarkeit relative Kategorizität und Natürlichkeit folgen:

Satz 4.2.5. *Sei T eine koordinatisierbare Theorie. Dann gilt*

(i) T ist relativ kategorisch

(ii) Für jedes Modell $\boldsymbol{B}$ von T ist $\boldsymbol{B}$ natürlich über $P(\boldsymbol{B})$

Beweis. (i) Seien $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ Modelle von T mit demselben P-Teil $\boldsymbol{A}$. Da T koordinatisierbar ist, können $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ zu koordinatisierten Modellen $\boldsymbol{B}^+$ und $\boldsymbol{C}^+$ von T^+ erweitert werden. Wegen Lemma 4.1.9 sind dann $\boldsymbol{B}^+$ und $\boldsymbol{C}^+$ isomorph über $\boldsymbol{A}$. Es folgt, dass auch $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ isomorph über $\boldsymbol{A}$ sind.
(ii) Sei $\boldsymbol{B}$ ein beliebiges Modell von T und $\boldsymbol{B}^+$ seine Erweiterung in T^+. Laut Lemma 4.1.9 gibt es eine natürliche Einbettung $\sigma : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}^+)$. Da aber $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}^+) \subseteq \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ ist auch σ eine natürliche Einbettung nach $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$. $\square$

Satz 4.2.5 (ii) kann verwendet werden, um zu zeigen, dass es relativ kategorische Strukturen gibt, die nicht koordinatisierbar sind.

Beispiel 4.2.6. Wir betrachten eine Theorie T in der Sprache $L = \{R, S, P\}$, wobei R und S jeweils zweistellige Relationen bezeichnet. Jedes Modell der Theorie T bestehe aus genau sechs Elementen x, y, a, b, c, d, die wie in Abbildung 4.1 dargestellt zueinander in Relation stehen. Wir zeigen, dass T zwar

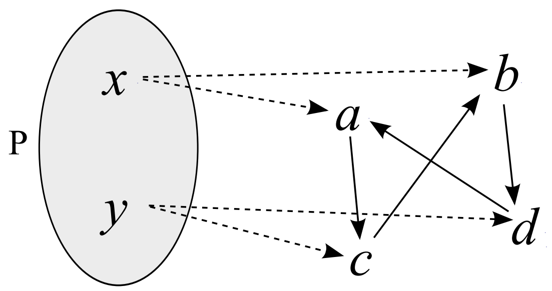

Abbildung 4.1: strichlierte Pfeile stehen für die Relation S, durchgezogene für R

relativ kategorisch ist, aber die Modelle von T nicht natürlich über P sind. Da T die vollständige Theorie einer endlichen Struktur ist, ist jedes Modell von T isomorph zu dem in der Abbildung 4.1 dargestellten. Sei $\boldsymbol{B}$ also ein Modell von T, dessen Elemente so bezeichnet sind wie in Abbildung 4.1. Betrachten wir nun den Automorphismus von $P(\boldsymbol{B})$, der x und y vertauscht, so hat er zwei mögliche Fortsetzungen zu einem Automorphismus von $\boldsymbol{B}$, nämlich:

$$f_1 : \begin{cases} x \mapsto y \\ y \mapsto x \\ a \mapsto c \\ b \mapsto d \\ c \mapsto b \\ d \mapsto a \end{cases} \quad \text{und } f_2 : \begin{cases} x \mapsto y \\ y \mapsto x \\ a \mapsto d \\ b \mapsto c \\ c \mapsto a \\ d \mapsto b \end{cases}$$

Für f gilt offensichtlich $f^2 = id$. Aber beide Fortsetzungen von f sind von Ordnung 4, also gibt es keine natürliche Einbettung von $\mathrm{Aut}(P(\boldsymbol{B}))$ nach $Aut(\boldsymbol{B})$. Laut Satz 4.2.5 ist $\boldsymbol{B}$ und somit auch T nicht koordinatisierbar.

Beispiel 4.2.7. Auch die Gruppe aus Beispiel 3.0.5 ist nicht koordinatisierbar, da sie nicht natürlich ist (siehe [8, 3.1]).

Anhand dieser Gegenbeispiele haben wir gesehen, dass relative Kategorizität schwächer ist als Koordinatisierbarkeit. Daher ist es von Interesse herauszuarbeiten, welche Bedingungen man zusätzlich zur relativen Kategorizität fordern muss, um Koordinatisierbarkeit zu erhalten.
Wir haben bereits gesehen, dass die Natürlichkeit jedes Modells von T eine notwendige Voraussetzung ist. In Anlehnung an den Satz 4.1.10 fragen wir uns, ob die Natürlichkeit auch hinreichend ist:

Frage 2: Sei T eine relativ kategorische Theorie, sodass jedes Modell von T natürlich über seinem P-Teil ist. Ist T dann koordinatisierbar?

4.2.1 Der ω-kategorische Fall

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass T ω-kategorisch ist, können wir weitere Aussagen treffen.
An dieser Stelle wird Topologie hilfreich. Wir versehen die Automorphismengruppe G einer Struktur $\boldsymbol{B}$ mit der Topologie, die in Abschnitt 2.2 eingeführt wird. Das heißt, eine Umgebungsbasis der Identität ist gegeben durch die Menge der Stabilisatoren $G_{\bar{a}}$.

Mit dem Satz von Ahlbrandt und Ziegler (Satz 2.2.2) haben wir gesehen, dass zwei ω-kategorische Strukturen genau dann bi-interpretierbar sind, wenn ihre Automorphismengruppen topologisch isomorph sind. Wir wollen auf ähnliche Weise koordinatisierbare Strukturen charakterisieren. Dies ist insofern ein sinnvoller Ansatz, da aus der endlichen Koordinatisierbarkeit einer Struktur folgt, dass sie in ihrem P-Teil interpretierbar ist:

Lemma 4.2.8. *Aus endlicher Koordinatisierbarkeit von $\boldsymbol{B}$ über $\boldsymbol{A} = P(\boldsymbol{B})$ folgt, dass $\boldsymbol{B}$ in $\boldsymbol{A}$ interpretierbar ist.*

Beweis. Sei $\boldsymbol{B}$ eine endlich koordinatisierbare Struktur. Die Identität auf $\boldsymbol{A}$ ist offensichtlich eine Interpretation von $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}$. Wir müssen also nur die umgekehrte Richtung überprüfen.
Da $\boldsymbol{B}$ koordinatisierbar ist, gibt es eine Expansion $\boldsymbol{B}^+$ in einer Sprache L^+, sodass $\boldsymbol{B}^+$ Ψ-koordinatisiert über $\boldsymbol{A}$ ist, wobei $\Psi = \{\psi_1(x, \bar{y}), ..., \psi_n(x, \bar{y})\}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien alle diese Formeln von der gleichen Stelligkeit. Wie zu Beginn des Kapitels bezeichnen wir mit F_{ψ_i} die Koordinatenfunktionen und mit D_{ψ_i} ihre Definitionsmengen.
Wie man sich leicht überzeugen kann, sind die Aussagen $x \in Im(F_{\psi_i})$ äquivalent zu Formeln erster Ordnung in L^+. Deshalb lässt sich $\boldsymbol{B}^+$ durch eine einzige Formel θ koordinatisieren, und zwar:

$$\begin{aligned}
\theta(x, \bar{y}) : \quad & [\psi_1(x, \bar{y}) \wedge x \in Im(F_{\psi_1})] \\
& \vee [\psi_2(x, \bar{y}) \wedge x \in Im(F_{\psi_2}) \wedge x \notin Im(F_{\psi_1})] \vee ... \\
& \vee [\psi_n(x, \bar{y}) \wedge x \in Im(F_{\psi_n}) \wedge x \notin Im(F_{\psi_1}) \wedge ... \wedge x \notin Im(F_{\psi_{n-1}})].
\end{aligned}$$

Als Interpretation wählen wir die Koordinatenfunktion $F_\theta : D_\theta \to B$. Diese ist klarerweise surjektiv. Wir müssen also noch überprüfen, ob jede in $\boldsymbol{B}$ definierbare Menge ein in $\boldsymbol{A}$ definierbares Urbild hat. Dies kann man mit der Reduziertheit zeigen. Sei zum Beispiel R eine einstellige Relation von $\boldsymbol{B}$ und b ein beliebiges Element von B mit Urbild $\bar{a}$. Dann gilt

$$\boldsymbol{B} \models R(b) \Leftrightarrow \boldsymbol{B}^+ \models \forall y : y = F_\theta(\bar{a}) \to R(y) \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \models \psi(\bar{a}),$$

wobei die Formel ψ über die Reduktionsabbildung gebildet wird. □

Wir können also den folgenden Satz als eine Variation des Satzes von Ahlbrandt und Ziegler lesen:

Satz 4.2.9. *Sei $\boldsymbol{B}$ eine L-Struktur mit $\boldsymbol{A} = P(\boldsymbol{B})$.*

(i) Falls $\boldsymbol{B}$ koordinatisierbar ist, dann gibt es eine stetige natürliche Einbettung $\phi : Aut(\boldsymbol{A}) \to Aut(\boldsymbol{B})$.

*(ii) Wenn $\boldsymbol{A}$ ω-kategorisch ist, dann ist $\boldsymbol{B}$ **genau dann** koordinatisierbar, wenn es eine stetige natürliche Einbettung $\sigma : Aut(\boldsymbol{A}) \to Aut(\boldsymbol{B})$ gibt.*

Beweis. (i) Sei $\boldsymbol{B}^+$ eine koordinatisierte Expansion von $\boldsymbol{B}$. Dann gibt es laut Lemma 4.1.9 eine natürliche Einbettung $\sigma : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}^+) \leq \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$. Um zu zeigen, dass σ stetig ist, betrachten wir ein Element b von B. Laut Voraussetzung ist b in $\boldsymbol{B}^+$ durch ein Tupel $\bar{a}$ in A definierbar. Deshalb muss jeder Automorphismus von $\boldsymbol{B}^+$ der $\bar{a}$ punktweise festhält auch b festhalten. Es folgt, dass das Urbild der offenen Umgebung $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})_b$ unter σ die offene Umgebung $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})_{\bar{a}}$ enthält. Damit ist σ stetig.

(ii) Angenommen $\sigma : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ ist eine stetige natürliche Einbettung. Sei H das Bild von σ in $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$. Wir expandieren $\boldsymbol{B}$, indem wir für jeden einstelligen Orbit von H auf B in der folgenden Weise ein Relationssymbol R einführen:
Sei Q ein Orbit und b ein Element von Q. Wegen der Stetigkeit von σ gibt es ein Tupel $\bar{a}$ in A, sodass $\sigma(\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})_{\bar{a}}) \leq \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})_b$. Wir definieren R folgendermaßen

$$R(\bar{a}', b') \Leftrightarrow b' = (\sigma(g))(b) \text{ und } \bar{a}' = g(\bar{a}) \text{ für ein } g \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$$

Die so entstandene L^+-Expansion von $\boldsymbol{B}$ nennen wir $\boldsymbol{B}^+$. Es ist klar, dass $H \leq \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}^+)$ ist.
Wenn $\psi(\bar{x})$ eine Formel in L^+ ist, dann ist die Menge

$$X = \{\bar{a} \in A : \boldsymbol{B}^+ \models \psi(\bar{a})\}$$

invariant unter H und deshalb auch unter $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$. Da $\boldsymbol{A}$ ω-kategorisch ist, folgt aus dem Satz von Ryll-Nardzewski, dass X auch in $\boldsymbol{A}$ definierbar ist. Deshalb ist $\boldsymbol{B}^+$ reduziert.
Außerdem ist $\boldsymbol{B}^+$ laut Konstruktion der definierbare Abschluss von $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}^+$. Damit ist $\boldsymbol{B}^+$ koordinatisiert, somit ist $\boldsymbol{B}$ koordinatisierbar. □

Korollar 4.2.10. *Sei $\boldsymbol{B}$ eine L-Struktur mit ω-kategorischem $\boldsymbol{A} = P(\boldsymbol{B})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\boldsymbol{B}$ ist endlich koordinatisierbar.

(ii) Es gibt eine stetige natürliche Einbettung $\sigma : Aut(\boldsymbol{A}) \to Aut(\boldsymbol{B})$, deren Bild endlich viele Orbits auf $\boldsymbol{B}$ hat.

In beiden Fällen ist $\boldsymbol{B}$ auch ω-kategorisch.

Beweis. (i) $\to$ (ii) Sei $\boldsymbol{B}$ endlich koordinatisierbar durch eine Expansion $\boldsymbol{B}^+$ und $\sigma : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}^+)$. Dass das Bild von σ (in jeder Stelligkeit) endlich viele Orbits auf B hat, folgt direkt aus der Definition von σ in Lemma 4.1.9.
(ii) $\to$ (i) Da es nur endlich viele Orbits im Bild von σ gibt, brauchen wir in der Konstruktion von $\boldsymbol{B}^+$ im Beweis von 4.2.9 (ii) auch nur endlich viele Relationen R. Damit ist $\boldsymbol{B}^+$ endlich koordinatisiert und somit $\boldsymbol{B}$ endlich koordinatisierbar.
Da wegen (ii) $\boldsymbol{B}^+$ ω-kategorisch ist, muss auch $\boldsymbol{B}$ als Redukt davon ω-kategorisch sein. □

Definition 4.2.11. Wir sagen, dass $\boldsymbol{B}$ *endlich natürlich über* $\boldsymbol{A}$ ist, wenn es eine *stetige* natürliche Einbettung $\sigma : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ gibt.

Wir versuchen nun mit Satz 4.2.9 ω-kategorische, koordinatisierbare Strukturen zu charakterisieren. Dazu zeigen wir zunächst folgendes Lemma:

Lemma 4.2.12. *Angenommen die Theorie T ist relativ kategorisch und hat ein koordinatierbares Modell $\boldsymbol{B}$, sodass sein P-Teil $P(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}$ ω-kategorisch ist. Dann ist T koordinatisierbar.*

Beweis. Da $\boldsymbol{B}$ ein koordinatisierbares Modell von T ist, gibt es eine koordinatisierte Expansion $\boldsymbol{B}^+$ von $\boldsymbol{B}$ in einer Sprache L^+. Der Satz von Löwenheim-Skolem liefert ein abzählbares elementares Untermodell von $\boldsymbol{B}$. Bilden wir den definierbaren Abschluss seines P-Teils in $\boldsymbol{B}^+$, so erhalten wir wegen Lemma 4.1.8 (iii) ein abzählbares, elementares Untermodell von $\boldsymbol{B}^+$, welches koordinatisiert ist. Also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\boldsymbol{B}$ und L^+ als abzählbar voraussetzen.
Sei $T = \mathrm{Th}(\boldsymbol{B}^+)$. Wir zeigen nun indirekt, dass jedes Modell $\boldsymbol{B}'$ von T^+ der definierbare Abschluss von $P(\boldsymbol{B}')$ ist.
Angenommen $\boldsymbol{B}'$ ist nicht der definierbare Abschluss seines P-Teils. Weil $\boldsymbol{A}$ laut Voraussetzung ω-kategorisch ist, gibt es einen Isomorphismus e von $\boldsymbol{A}$ nach $P(\boldsymbol{B}'|L)$. Wegen Lemma 4.1.9 kann e zu einer elementaren Einbettung e von $\boldsymbol{B}$ nach $\boldsymbol{B}'|L$ fortgesetzt werden. Laut dem „two-cardinal theorem" von Vaught (siehe Satz A.1.8) kann es keine echte elementare Unterstruktur von $\boldsymbol{B}'|L$ geben, die auch Modell von T ist. Also ist e ein Isomorphismus. Damit ist $\boldsymbol{B}'$ der definierbare Abschluss von $P(\boldsymbol{B}'|L)$. Aus Lemma 4.1.8 (i) folgt, dass T^+ endlich koordinatisiert ist. Außerdem sieht man, dass T^+ ω-kategorisch ist.
Sei nun $\boldsymbol{N}$ ein beliebiges Modell von T. Wir müssen zeigen, dass wir $\boldsymbol{N}$ zu einem Modell von T^+ erweitern können.
Dazu wählen wir als $\boldsymbol{M}^+$ ein $|\boldsymbol{N}|^+$-saturiertes Modell von T^+ (dieses gibt

es wegen Satz A.1.4). Also können wir $\boldsymbol{N}$ elementar in $\boldsymbol{M}^+|L$ einbetten. Mit $\boldsymbol{N}^+$ bezeichnen wir den definierbaren Abschluss von $P(\boldsymbol{N})$ in $\boldsymbol{M}^+$. Wegen Lemma 4.1.8 (iii) ist $\boldsymbol{N}^+$ ein elementares Untermodell von $\boldsymbol{M}^+$ und $P(\boldsymbol{N}) = P(\boldsymbol{N}^+)$.
Aus $\boldsymbol{N}^+|L \models T$ und der relativen Kategorizität von T folgt dann, dass es einen Isomorphismus von $\boldsymbol{N}$ nach $\boldsymbol{N}^+|L$ gibt, der $P(\boldsymbol{N})$ festhält. Mit diesem Isomorphismus kann man also $\boldsymbol{N}$ zu einem Modell von T^+ erweitern. □

Satz 4.2.13. *Sei T eine relativ kategorische Theorie, $\boldsymbol{B}$ ein abzählbares Modell von T und $\boldsymbol{A} = P(\boldsymbol{B})$. Angenommen $\boldsymbol{A}$ ist ω-kategorisch. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\boldsymbol{B}$ ist koordinatisierbar

(ii) T ist koordinatisierbar

(iii) Jedes Modell $\boldsymbol{B}'$ von T ist endlich natürlich über $P(\boldsymbol{B}')$

(iv) $\boldsymbol{B}$ ist endlich natürlich über $\boldsymbol{A}$

(v) Es gibt ein Modell von T, welches endlich koordinatisierbar ist

Beweis. (i) → (ii) Dies ist genau die Aussage von Lemma 4.2.12.
(ii) → (iii) Dies folgt aus Satz 4.2.9
(iii) → (iv) ist trivial
(iv) → (i) Dies folgt aus Korrolar 4.2.10
(ii) → (v) → (i) Die erste Implikation ist klar, da koordinatisierbare Strukturen genau die endlich koordinatisierbaren Strukturen sind (siehe Lemma 4.1.8(i)). Für die zweite Implikation wählen wir ein abzählbares Modell von T, das endlich koordinatisierbar ist (ein solches gibt es wegen dem Satz von Löwenheim-Skolem). Da $\boldsymbol{A}$ ω-kategorisch ist und T relativ kategorisch, muss auch T ω-kategorisch sein. Deshalb ist $\boldsymbol{B}$ isomorph zu diesem Modell, also auch koordinatisierbar. □

Indem wir eine Topologie auf den Automorphismengruppen eingeführt haben, haben wir bereits eine teilweise Antwort auf Frage 2 gefunden. Eine natürliche Frage, die wir uns stellen können ist, ob Satz 4.2.13 immer noch gilt, falls wir die Bedingung der Stetigkeit fallen lassen. Reicht die ω-Kategorizität von $\boldsymbol{A}$ aus, damit T koordinatisierbar ist?

Frage 3: Sei T eine relativ kategorische und ω-kategorische Theorie. Jedes Modell von T sei natürlich über seinem P-Teil. Ist T dann koordinatisierbar?

4.2.2 Die „small index property“

Frage 3 kann zumindest für eine bestimmte Klasse von Theorien positiv beantwortet werden.
Sei $\boldsymbol{A}$ eine abzählbare Struktur mit der Automorphismengruppe G. Für jedes Tupel $\bar{a}$ von Elementen in A hat der Stabilisator $G_{\bar{a}}$ höchstens abzählbar viele Nebenklassen (da es nur abzählbar viele Tupel gibt, auf die $\bar{a}$ abgebildet werden kann). Außerdem ist $G_{\bar{a}}$ laut Definition eine basisoffene Menge. Wir sagen, dass $\boldsymbol{A}$ die *small index property* hat, wenn auch die umgekehrte Richtung gilt:

Definition 4.2.14. Eine abzählbare Struktur $\boldsymbol{A}$ mit Automorphismengruppe G besitzt die *small index property*, wenn jede Untergruppe von G mit höchstens abzählbarem Index offen ist.

Wenn $\boldsymbol{A}$ die small index property hat, kann man die Topologie von G aus der abstrakten Gruppe G rekonstruieren: Die basisoffenen Mengen sind genau jene Mengen, die eine Nebenklasse einer Untergruppe von höchstens abzählbarem Index beinhalten.

Satz 4.2.15. *Sei $\boldsymbol{A}$ eine ω-kategorische Struktur mit der small index property. Sei T relativ kategorisch mit einem Modell $\boldsymbol{B}$, sodass $\boldsymbol{A} = P(\boldsymbol{B})$ und B natürlich über P ist. Dann ist T koordinatisierbar.*

Beweis. Laut Voraussetzung gibt es eine natürliche Einbettung $\sigma : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$. Wegen Satz 4.2.13 genügt es also zu zeigen, dass σ stetig ist. Sei H eine offene Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$. Dann ist der Index $[\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}) : H] \leq \omega$. Da σ injektiv ist, ist auch $[\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) : \sigma^{-1}(H)] \leq \omega$. Da $\boldsymbol{A}$ die small index property hat, ist $\sigma^{-1}(H)$ offen. Somit ist σ stetig. □

Eine Vielzahl von ω-kategorischen Strukturen hat die small index property, darunter auch die abzählbare Menge ([6]) die rationalen Zahlen als geordnete Menge ([19]) und der Random-Graph ([14]).
Wir wissen jedoch, dass es ω-kategorischen Strukturen ohne die small index property gibt: Hrushovski zeigte dies, indem er eine ω-kategorische Struktur konstruierte, deren Automorphismengruppe G die Gruppe $(\mathbb{Z}_2)^\omega$ als homomorphes Bild hat.
Wir werden in unserem Gegenbeispiel zu Frage 3 eine sehr ähnliche Konstruktion durchführen, (siehe Bemerkung 6.1.2).

4.3 Zusammenfassung

Folgende Implikationen gelten:

$$
\begin{tikzcd}
T \text{ koordinatisiert} \arrow[rr, Leftrightarrow, "4.1.10"] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] & & T \begin{array}{c}\text{relativ kategorisch} \\ + \text{ Modelle rigid}\end{array} \\
T \text{ koordinatisierbar} \arrow[d, Rightarrow, shift left, "4.2.5"] & & \\
T \begin{array}{c}\text{relativ kategorisch} \\ + \text{ Modelle natürlich}\end{array} \arrow[u, shift left, "Fr.2?"] \arrow[d, Rightarrow] & & T \text{ algebraisch + reduziert} \arrow[dll, Rightarrow, "3.2.2"] \\
T \text{ relativ kategorisch} \arrow[d, Rightarrow, "3.1.4,\ 3.1.3"] & & \\
T \begin{array}{c}\text{reduziert} \\ + \text{ atomar}\end{array} \arrow[rr, Leftrightarrow, "3.1.5"] & & T(\omega,\omega)\text{-kategorisch}
\end{tikzcd}
$$

Wie wir anhand von Beispielen gesehen haben, sind fast alle als „⇒“ eingezeichneten Implikationen nicht umkehrbar. Beispiel 4.2.6 ist eine Theorie, die algebraisch ist, aber deren Modelle nicht natürlich sind. In [13] wird außerdem gezeigt, dass koordinatisierbare Theorien nicht notwendigerweise algebraisch sind. Somit müssen wir nur mehr **Frage 2** beantworten, um das Diagramm zu vervollständigen.

Für ω-kategorisches T ist noch **Frage 3** offen:

$$
\begin{tikzcd}
T \begin{array}{c}\text{relativ kategorisch + natürlich} \\ + P \text{ hat small index property}\end{array} \arrow[d, Rightarrow, "4.2.15"] & \\
T \begin{array}{c}\text{relativ kategorisch} \\ + \text{ endlich natürlich}\end{array} \arrow[r, Leftrightarrow, "4.2.13"] \arrow[d, Rightarrow, shift left] & T \text{ koordinatisierbar} \\
T \begin{array}{c}\text{relativ kategorisch} \\ + \text{ natürlich}\end{array} \arrow[u, shift left, "Fr.3?"] &
\end{tikzcd}
$$

Kapitel 5

Ein stark minimales Gegenbeispiel

In diesem Kapitel suchen wir ein möglichst einfaches Gegenbeispiel, das Frage 2 aus dem Abschnitt zur Koordinatisierbarkeit verneint.

Frage 2: Sei T eine relativ kategorische Theorie, sodass jedes Modell von T natürlich über seinem P-Teil ist. Ist T dann koordinatisierbar?

Wir betrachten hierfür *kanonische Strukturen*. Ausgehend von einer Permutationsgruppe auf einer Menge bilden wir die kanonische Struktur, indem wir alle ihre Orbits zu Relationen auf der Menge erklären.
Wir werden uns insbesondere für Permutationsgruppen interessieren, deren Orbits alle nur endlich viele Elemente beinhalten. Jede proendliche Gruppe ist isomorph zu so einer Permutationsgruppe. Indem wir die Eigenschaften der proendlichen Gruppe G ausnutzen, die wir im Kapitel 7 konstruieren, erhalten wir das gesuchte Gegenbeispiel.

5.1 Kanonische Strukturen von proendlichen Gruppen

Definition 5.1.1. Als *kanonische Struktur* $\boldsymbol{B}$ einer Permutationsgruppe $G \leq \mathrm{Sym}(B)$ bezeichnen wie jene Struktur, die wir erhalten, wenn wir jeden G-Orbit jeder Stelligkeit als Relation auf B einführen. Die dazugehörige Sprache nennen wir die *kanonische Sprache*.

Lemma 5.1.2. *Eine Untergruppe G von $Sym(B)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie die Automorphismengruppe ihrer kanonischen Struktur ist. Es*

gilt sogar, dass G stets dicht in der Automorphismengruppe ihrer kanonischen Struktur ist.
Außerdem sind kanonische Strukturen homogen.

Beweis. Laut Definition ist die kanonische Struktur einer Gruppe $G \leq \mathrm{Sym}(B)$ gegeben durch

$$\boldsymbol{B} = (B, (R_{\bar{b}})_{\bar{b} \in B^{<\omega}}) \text{ mit } R_{\bar{b}} = \{g(\bar{b}), g \in G\}.$$

Jedes Element von G ist offensichtlich ein Automorphismus von $\boldsymbol{B}$.
Um die Dichtheit von G in $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ zu zeigen, betrachten wir ein $f \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$. Eine Basisumgebung von f ist von der Form

$$U = \{g \in \mathrm{Sym}(B) |\ g(\bar{b}) = f(\bar{b})\},$$

wobei $\bar{b}$ ein Tupel von Elementen aus B ist. Die Relation $R_{\bar{b}}$ ist der Orbit dieses Tupels. Da $f \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ ist, gilt

$$\bar{b} \in R_{\bar{b}} \Rightarrow f(\bar{b}) \in R_{\bar{b}} \Rightarrow \exists g \in G : g(\bar{b}) = f(\bar{b}).$$

Also gibt es in jeder Umgebung U ein $g \in G$. Damit ist G dicht in $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$. Bilden wir nun die kanonische Struktur von $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$, so ist ihre Automorphismengruppe wiederum $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$. Damit sind Automorphismengruppen von kanonischen Strukturen abgeschlossen.
Wir haben zusätzlich gesehen, dass wir einen endlichen, partiellen Isomorphismus $f : \bar{b} \to f(\bar{b})$ auf einen Automorphismus $g \in G$ der ganzen Struktur fortsetzen können. Damit ist $\boldsymbol{B}$ homogen. □

Im Folgenden betrachten wir abgeschlossene Permutationsgruppen $G \leq \mathrm{Sym}(B)$, deren Orbits endlich viele Elemente enthalten. Betrachten wir diese als topologische Gruppen, so sehen wir, dass es sich um *proendliche Gruppen* handelt.

Definition 5.1.3. Eine *proendliche Gruppe* ist eine abgeschlossene Untergruppe von einem (beliebig großen) Produkt $\Pi_{i \in I} G_i$ von endlichen Gruppen G_i, wobei alle G_i mit der diskreten Topologie versehen sind.

Wenn wir mit $\{O_i : i \in I\}$ die Orbits von G bezeichnen, so sehen wir, dass $G \leq \Pi_{i \in I} \mathrm{Sym}(O_i) \leq \mathrm{Sym}(B)$ ist. Falls G abgeschlossen ist und alle Orbits nur endlich viele Elemente beinhalten, ist klar, dass G eine proendliche Gruppe ist.
Es gilt auch die umgekehrte Richtung, wie das folgende Lemma zeigt:

Lemma 5.1.4. *Sei G eine proendliche Gruppe und $\{G_i : i \in I\}$ eine Menge offener Normalteiler von G mit trivialem Schnitt. Wenn $X = \dot{\bigcup}_{i\in I} G/G_i$ die disjunkte Vereinigung der Faktorgruppen ist, dann ist die Abbildung*

$$\mu : G \to Sym(X),$$
$$\mu(g)(hG_i) = ghG_i \text{ für } i \in I \text{ und } g, h \in G$$

eine stetige und offene Einbettung von G nach $Sym(X)$. Das heißt, dass G und $\mu(G)$ topologisch isomorph sind. Außerdem sind alle Orbits von $\mu(G)$ auf X endlich, da jedes G_i endlichen Index in G hat.

Beweis. Klarerweise ist μ ein Homomorphismus, da

$$\mu(gh)(jG_i) = ghjG_i = (\mu(g) \circ \mu(h))(jG_i) \text{ für alle } i \in I, g, h, j \in G.$$

Der Kern von μ besteht nur aus dem neutralen Element, denn für ein x aus dem Kern muss gelten:

$$xG_i = G_i \quad \forall i \in I$$
$$\Rightarrow \{x\} = x\bigcap_{i\in I} G_i \subseteq \bigcap_{i\in I} G_i = \{e\}$$

Also ist μ injektiv.
Um die Stetigkeit zu zeigen, betrachten wir eine offene Basisumgebung U der Identität in $\mathrm{Sym}(X)$. Damit ist

$$U = \{r \in \mathrm{Sym}(X) : r(g_sG_s) = g_sG_s \ \forall s \in S\},$$

wobei S eine endliche Indexmenge ist. Wie man leicht sieht, liegt der Schnitt der Mengen G_s im Urbild von U. Da S endlich ist, ist dieser Schnitt eine offene Menge. Somit ist μ stetig.
Als stetiges Bild einer kompakten Menge ist $\mu(G)$ kompakt. Da $\mathrm{Sym}(X)$ ein Hausdorff-Raum ist, ist $\mu(G)$ abgeschlossen. Analog sieht man, dass jede abgeschlossene Menge durch μ auf eine abgeschlossene Menge abgebildet wird. Da μ injektiv ist, folgt, dass μ eine offene Abbildung ist. Somit ist G topologisch isomorph zu $\mu(G)$.
Offensichtlich sind alle Orbits von $\mu(G)$ auf X endlich. □

In jeder proendlichen Gruppe gibt es eine Menge offener Normalteiler von G mit trivialem Schnitt (Wir können beispielsweise all jene Untergruppen wählen, die auf endlich vielen Komponenten des Produkts das neutrale Element sind.) Daher kann man jede proendliche Gruppe mit obigem Lemma zu einer abgeschlossenen Permutationsgruppe machen.

5.2 Das Gegenbeispiel

Mit Lemma 5.1.4 haben wir gesehen, dass die Klasse der proendlichen Gruppen mit der Klasse der abgeschlossenen Permutationsgruppen mit endlichen Orbits übereinstimmt. Für derartige Permutationsgruppen untersuchen wir nun die Eigenschaften ihrer kanonischen Strukturen.

Lemma 5.2.1. *Sei G eine Permutationsgruppe auf einer abzählbaren Menge B, sodass jeder Orbit nur endlich viele Elemente beinhaltet. Mit $\boldsymbol{B}$ bezeichnen wir die kanonische Struktur von G auf B. Sei $\boldsymbol{D}$ ein Modell von $Th(\boldsymbol{B})$. Dann gibt es ein abzählbares Untermodell $\boldsymbol{B}_1$ von $\boldsymbol{D}$, welches isomorph zu $\boldsymbol{B}$ ist, sodass*

$$Aut(\boldsymbol{D}) = Aut(\boldsymbol{B}_1) \times Sym(D \setminus B_1)$$

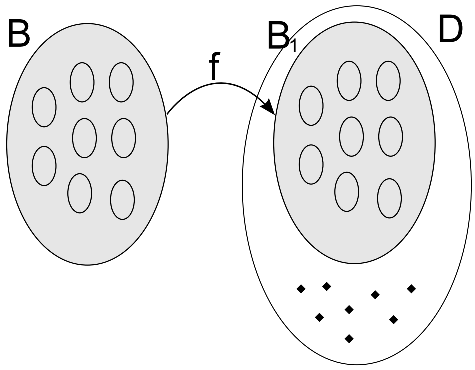

Abbildung 5.1: Die Struktur $\boldsymbol{B}$ ist isomorph zu einem Untermodell $\boldsymbol{B}_1$ von $\boldsymbol{D}$

Beweis. Sei $\boldsymbol{B}$ die kanonische Struktur von G. Für jedes Relationssymbol R in der kanonischen Sprache ist laut Voraussetzung die Menge $R^{\boldsymbol{B}}$ endlich. Deshalb ist auch $R^{\boldsymbol{D}}$ endlich und von gleicher Kardinalität wie $R^{\boldsymbol{B}}$.
Sei B_1 jene Untermenge von D, die alle Elemente enthält, welche irgendeine der Relationen erfüllen. Mit $\boldsymbol{B}_1$ bezeichnen wir die Unterstruktur von $\boldsymbol{D}$, die B_1 als Trägermenge hat. Auch $\boldsymbol{B}_1$ ist ein Modell von $\mathrm{Th}(\boldsymbol{B})$. Als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen ist B_1 abzählbar.
Mit einem back-and-forth-Argument konstruieren wir einen Isomorphismus f zwischen $\boldsymbol{B}_1$ und $\boldsymbol{B}$. Sei

$$B_1 = \{d_1, d_2, d_3, ...\}$$

eine Aufzählung der Menge B_1. Das erste Element d_1 liegt in einer einstelligen Relation R. Deshalb wissen wir, dass der Satz $\exists x R_1(x)$ in $\mathrm{Th}(\boldsymbol{B})$ liegt. Damit gibt es auch ein Element b_1 in B welches R_1 erfüllt - auf dieses Element bilden wir d_1 ab. Aufgrund der Eigenschaften der kanonischen Struktur ist R_1 die einzige einstellige Relation, die von b_1 erfüllt wird.
Angenommen wir haben bereits einen partiellen Isomorphismus gefunden, der das Tupel $(d_1, ..., d_n)$ in B_1 auf das Tupel $(b_1, ..., b_n)$ in B abbildet. Insbesondere muss dieser Isomorphismus die einzige n-stellige Relation R_n erhalten, die von $(b_1, ..., b_n)$ erfüllt wird. Die Relation R_{n+1} soll nun eine $n+1$-stellige Relation sein, die von $(d_1, ..., d_n, d_{n+1})$ erfüllt werden. Dann ist

$$\exists x_1, ..., \exists x_{n+1} R_n(x_1, ..., x_n) \wedge R_{n+1}(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathrm{Th}(\boldsymbol{B}).$$

Also gibt es auch ein Tupel $(b'_1, ..., b'_n, b'_{n+1})$ in B, welches die Formel erfüllt. Da $\boldsymbol{B}$ homogen ist (siehe Lemma 5.1.2), gibt es ein $g \in G$ das $(b'_1, ..., b'_n)$ nach $(b_1, ..., b_n)$ abbildet. Als b_{n+1} wählen wir $g(b'_{n+1})$.
Mit back-and-forth erhalten wir einen injektiven Homomorphismus von $\boldsymbol{B}$ nach $\boldsymbol{B}_1$. Da wir wissen, dass alle Relationen nur endlich viele Elemente beinhalten, muss dieser bereits ein Isomorphismus sein.
Für den zweiten Teil des Lemmas betrachten wir zwei Abbildungen $\theta_1 \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}_1)$ und $\theta_2 \in \mathrm{Sym}(D \setminus B_1)$. Wir müssen nachprüfen, ob die zusammengesetzte Abbildung θ mit $\theta|_{B_1} = \theta_1$ und $\theta|_{D \setminus B_1} = \theta_2$ ein Automorphismus von $\boldsymbol{D}$ ist.
Wenn $\bar{a}$ ein Tupel aus $\boldsymbol{D}$ ist, dann impliziert die Aussage $\boldsymbol{D} \models R(\bar{a})$, dass alle Einträge von $\bar{a}$ in B_1 liegen. Also gilt $\boldsymbol{B}_1 \models R(\bar{a})$ und somit $\boldsymbol{B}_1 \models R(\theta_1(\bar{a}))$. Daraus folgt $\boldsymbol{D} \models R(\theta(\bar{a}))$, also ist θ strukturerhaltend. Analog zeigt man, dass θ^{-1} strukturerhaltend ist. Daraus folgt, dass $\theta \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{D})$. □

Bemerkung 5.2.2. Aus dem obigen Lemma folgt, dass $\mathrm{Th}(\boldsymbol{B})$ *stark minimal (strongly minimal)* ist. Das heißt, dass in allen Modellen der Theorie die mit Parametern definierbaren Untermengen entweder endlich oder koendlich sind. Dies folgt aus dem obigem Lemma und den Eigenschaften von $\boldsymbol{B}$ als kanonische Struktur.

Wir entfernen nun einen Orbit von G aus der Grundmenge B und lassen G auf dieser eingeschränkten Menge A agieren. Die so entstehende Unterstruktur soll der P-Teil von B sein. Da wir nur endlich viele Elemente entfernt haben, liegt die Vermutung nahe, dass die Theorie von $\boldsymbol{B}$ relativ kategorisch über P ist. Das folgende Lemma untersucht die Situation:

Lemma 5.2.3. *Sei $G \leq Sym(B)$ abgeschlossen, wobei B abzählbar ist und alle Orbits von G endlich sind. Sei C ein fester, einstelliger Orbit und $A =$*

$B \setminus C$. Die Abbildung $\rho : G \to Sym(A)$ sei die Einschränkung auf A, F sei der Kern von ρ.
Mit $\boldsymbol{B}$ bezeichnen wir die kanonische Struktur von G, welche um die einstellige Relation P erweitert wird, die die Elemente von A auswählt. Mit $\boldsymbol{A}$ bezeichnen wir die kanonische Struktur von A bezüglich $\rho(G)$. Dann gilt:

(i) $\rho(G) = Aut(\boldsymbol{A})$

(ii) *$\boldsymbol{B}$ ist relativ kategorisch über $\boldsymbol{A}$.*

(iii) *$\boldsymbol{B}$ ist genau dann natürlich über $\boldsymbol{A}$, wenn F ein Komplement J in G hat. Damit meinen wir, dass $J \leq G$, $G = FJ$ und $F \cap J = \{e\}$.*

(iv) *Wenn $\boldsymbol{B}$ natürlich über $\boldsymbol{A}$ ist, dann ist jedes Modell von $Th(\boldsymbol{B})$ natürlich über seinem P-Teil*

(v) *Wenn $\boldsymbol{B}$ koordinatisierbar über $\boldsymbol{A}$ ist, dann hat F ein abgeschlossenes Komplement in G*

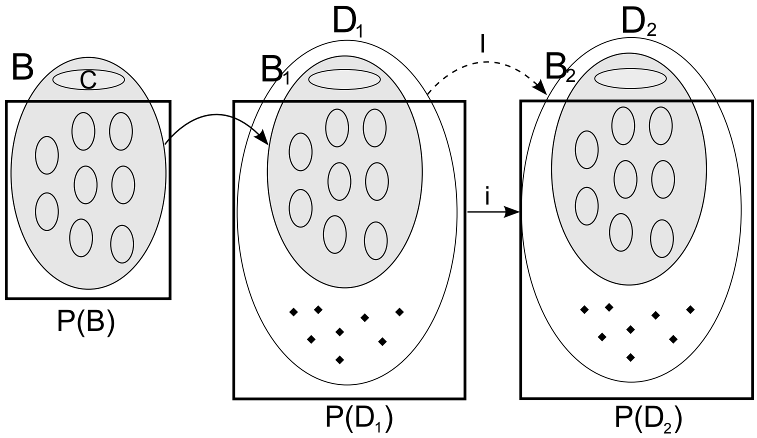

Abbildung 5.2: Der Isomorphismus $I : \boldsymbol{D}_1 \to \boldsymbol{D}_2$ setzt $i : P(\boldsymbol{D}_1) \to P(\boldsymbol{D}_2)$ fort

Beweis. (i) Wir zeigen, dass $\rho(G)$ abgeschlossen ist. Denn dann gilt wegen Lemma 5.1.2, dass $\rho(G) = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$.
Sei also $(\rho(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\rho(G)$, die gegen ein $f \in \mathrm{Sym}(A)$ konvergiert. Wir betrachten die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{Sym}(B)$. Da es nur endlich viele Elemente in C gibt, muss es eine Teilfolge $(g_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ geben, deren Elemente auf C stets das gleiche leisten. Diese Folge konvergiert gegen ein $g \in G$. Deshalb gilt $f = \rho(g) \in \rho(G)$, also ist $\rho(G)$ abgeschlossen. Daraus folgt auch, dass jeder

Automorphismus von $\boldsymbol{A}$ sich zu einem Automorphismus in $\boldsymbol{B}$ fortsetzen lässt.

(ii) Um relative Kategorizität zu zeigen, betrachten wir die in Abbildung 5.2 dargestellte Situation. Gegeben seien zwei Modelle $\boldsymbol{D}_1$ und $\boldsymbol{D}_2$ von $\mathrm{Th}(\boldsymbol{B})$, sowie ein Isomorphismus $i : P(\boldsymbol{D}_1) \to P(\boldsymbol{D}_2)$. Unser Ziel ist es, eine isomorphe Fortsetzung von $I : \boldsymbol{D}_1 \to \boldsymbol{D}_2$ zu konstruieren. Mit $\boldsymbol{B}_1$ und $\boldsymbol{B}_2$ bezeichnen wir die Unterstrukturen von $\boldsymbol{D}_1$ und $\boldsymbol{D}_2$, die isomorph zu $\boldsymbol{B}$ sind (siehe Lemma 5.2.1).
Die Mengen $D_1 \setminus B_1$ und $D_2 \setminus B_2$, also die Mengen jener Elemente, die in keiner Relation außer in P auftreten, müssen unter i aufeinander abgebildet werden, also sind sie von gleicher Kardinalität. Einen Isomorphismus von $\boldsymbol{B}_1$ nach $\boldsymbol{B}_2$ kann man daher durch eine beliebige bijektive Fortsetzung zu einen Isomorphismus $J : \boldsymbol{D}_1 \to \boldsymbol{D}_2$ erweitern.
Wir wissen also, dass es einen Isomorphismus $J : \boldsymbol{D}_1 \to \boldsymbol{D}_2$ gibt. Um einen Isomorphismus zu erhalten, der i fortsetzt, betrachten wir die Abbildung

$$J^{-1} \circ i : P(\boldsymbol{D}_1) \to P(\boldsymbol{D}_1).$$

Diese ist klarerweise ein Automorphismus von $P(\boldsymbol{D}_1)$. Wegen (i) lässt sie sich auf einen Automorphismus α von $\boldsymbol{D}_1$ fortsetzen. Die Abbildung $I = J \circ \alpha$ ist dann ein Isomorphismus von $\boldsymbol{D}_1$ nach $\boldsymbol{D}_2$, der i fortsetzt.

(iii) Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow F \xrightarrow{id} G = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}) \xrightarrow{\rho} \rho(G) = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) \longrightarrow 1$$

Dass $\boldsymbol{B}$ natürlich über $\boldsymbol{A}$ ist, heißt, dass ρ eine Retraktion σ besitzt. Laut Splitting-Lemma (siehe A.2.2) ist dies äquivalent dazu, dass G das semidirekte Produkt von F und $\sigma(\rho(G))$ ist, somit ist $\sigma(\rho(G))$ ein Komplement von F.

(iv) Sei $\boldsymbol{D}$ ein Modell von $\mathrm{Th}(\boldsymbol{B})$. Wegen Lemma 5.2.1 ist $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{D}) = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}_1) \times \mathrm{Sym}(D \setminus B_1)$, wobei $\boldsymbol{B}_1$ isomorph zu $\boldsymbol{B}$ ist. Wenn σ eine natürliche Abbildung von $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$ nach $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ ist, dann lässt sie mit der Identität auf $\mathrm{Sym}(D \setminus B_1)$ auf eine natürliche Abbildung von $\mathrm{Aut}(P(\boldsymbol{D}))$ nach $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{D})$ fortsetzen.

(v) Sei $\boldsymbol{B}^+$ eine Expansion von $\boldsymbol{B}$, die koordinatisiert über $\boldsymbol{A}$ ist. Die Gruppe $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}^+)$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$, da sie eine Automorphismengruppe ist. Außerdem gibt es wegen Lemma 4.1.9 einen Isomorphismus $\sigma : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}^+)$, der invers zur Einschränkung ist. Also ist G das semidirekte Produkt von F und der abgeschlossenen Gruppe $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}^+)$. $\square$

Ein Gegenbeispiel, das wir gemäß Lemma 5.2.3 konstruieren, müsste also eine proendliche Gruppe G mit einem endlichen Normalteiler F sein, sodass F ein Komplement in G besitzt und kein Komplement von F in G abgeschlossen ist.
In Abschnitt 7 konstruieren wir genau eine proendliche Gruppe mit diesen Eigenschaften.

Satz 7.0.2. *Es gibt eine proendliche Gruppe G (genauer gesagt: ein kartesisches Produkt von abzählbar vielen endlichen Gruppen) mit einem nichttrivialen endlichen Normalteiler F, sodass F ein Komplement in G besitzt und jedes Komplement von F in G dicht in G ist. Daraus folgt insbesondere, dass F kein abgeschlossenes Komplement in G besitzt.*

Falls wir es schaffen, G zu einer Permutationsgruppe zu machen, sodass $G = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ und $G/F = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$, dann haben wir ein Gegenbeispiel gefunden. Dazu benötigen wir eine geeignete Menge von Normalteilern von G (vgl. Lemma 5.1.4).
Da G das Produkt von abzählbar vielen endlichen Gruppen ist, gibt es auch eine abzählbare Familie von offenen Normalteilern $(G'_i)_{i<\omega}$, welche trivialen Schnitt haben. Als G'_i können wir beispielsweise die Menge all jener Elemente wählen, die auf die ersten i Komponenten des Produkts projiziert das neutrale Element ergeben.

Wenn wir jetzt $G_i = G'_i F$ setzen, dann sind die Gruppen G_i wiederum Normalteiler von endlichem Index. Als Produkt von zwei kompakten Mengen sind sie ebenfalls kompakt und somit abgeschlossen. Somit haben wir eine Familie von offenen Normalteilern. Wir wollen zeigen, dass

$$F = \bigcap_{i<\omega} G_i.$$

Die Inklusion $F \subseteq \bigcap_{i<\omega} G_i$ ist klar. Die umgekehrte Inklusion zeigen wir indirekt. Angenommen, es gibt ein Element $g \in (\bigcap_{i<\omega} G_i) \setminus F$. Dann gilt

$$(gF) \cap \{e\} = (gF) \cap \bigcap_{i<\omega} G'_i = \emptyset$$

Wegen der Kompaktheit von G gibt es einen endlichen Durchschnitt, sodass

$$(gF) \cap \bigcap_{k=1}^{n} G'_{i_k} = \emptyset. \tag{5.1}$$

Als endlicher Schnitt offener Normalteiler ist auch $\bigcap_{k=1}^{n} G'_{i_k}$ ein offener Normalteiler. Laut Voraussetzung ist

$$g \in \bigcap_{i<\omega} FG'_i \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} FG'_{i_k} = F \bigcap_{k=1}^{n} G'_{i_k}$$

Damit erhalten wir einen Widerspruch zu (5.1).

Außerdem gibt es einen offenen Normalteiler G_ω, der mit F trivialen Schnitt hat. Denn zu jedem Element von F gibt es einen offenen Normalteiler, der dieses Element nicht enthält. Der Schnitt dieser endlich vielen offenen Normalteiler ist wiederum ein offener Normalteiler.
Wir erhalten also eine Familie offener Normalteiler $(G_i)_{i\leq\omega}$ von G mit $\bigcap_{i<\omega} G_i = F$ und $\bigcap_{i\leq\omega} G_i = \{e\}$ (siehe Abbildung 5.3).

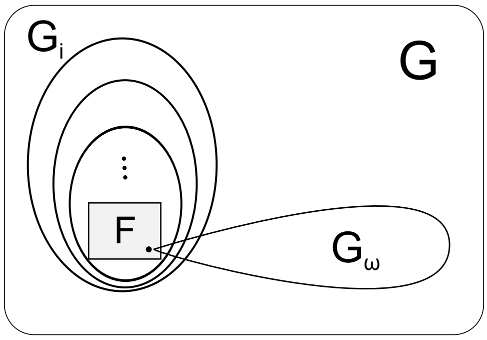

Abbildung 5.3: Die offenen Normalteiler G_i in G

Wir definieren $A = \dot{\bigcup}_{i<\omega} G/G_i$ und $C = G/G_\omega$ und $B = A \dot{\cup} C$. Dann kann G wegen Lemma 5.1.4 als abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{Sym}(B)$ betrachtet werden.

Wenn wir die Einschränkung $\rho : G \to \mathrm{Sym}(A)$ betrachten, so gilt

$$g \in \ker(\rho) \Leftrightarrow g \in \bigcap_{i<\omega} G_i = F.$$

Damit ist die Quotientengruppe topologisch isomorph zu

$$G/F \cong^t \rho(G) = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}). \tag{5.2}$$

Mit $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{A}$ bezeichnen wir die kanonischen Strukturen von G beziehungsweise $\rho(G)$. Aus Lemma 5.2.3 und den Eigenschaften von F und G folgt:

- $\boldsymbol{B}$ ist relativ kategorisch über $\boldsymbol{A}$
- Jedes Modell von $\mathrm{Th}(\boldsymbol{B})$ ist natürlich über seinem P-Teil
- $\boldsymbol{B}$ ist nicht koordinatisierbar über $\boldsymbol{A}$

Kapitel 6

Ein ω-kategorisches Gegenbeispiel

In diesem Kapitel werden wir uns mit der dritten Frage beschäftigen:

Frage 3: Sei T eine relativ kategorische und ω-kategorische Theorie. Jedes Modell von T sei natürlich über seinem P-Teil. Ist T dann koordinatisierbar?

Um ein Gegenbeispiel zu finden, werden wir wieder die proendliche Gruppe G verwenden, die wir in Kapitel 7 konstruieren.
Wir können den Beweis aus dem letzten Abschnitt nicht eins zu eins übernehmen: Klarerweise kann G als proendliche Gruppe nicht die Automorphismengruppe einer ω-kategorischen Struktur sein.
Jedoch werden wir sehen, dass es für jede proendliche Gruppe mit abzählbarer Basis stets oligomorphe Gruppen Σ und $\Phi \leq \Sigma$ gibt, sodass H topologisch isomorph zur Quotientengruppe Σ/Φ ist. Dieses zentrale Resultat zeigen wir im ersten Abschnitt dieses Kapitels.

Im zweiten Abschnitt werden wir diese Konstruktion und die Eigenschaften der Gruppe G verwenden, um Frage 3 zu verneinen.

6.1 Konstruktion von Hrushovski

Lemma 6.1.1 (Konstruktion von Hrushovski)**.** *Sei H eine proendliche Gruppe mit einer abzählbaren Basis von offenen Untergruppen. Dann gibt es eine oligomorphe Gruppe $\Sigma \leq Sym(A)$ mit einem abgeschlossenen Normalteiler Φ, sodass H topologisch isomorph zu Σ/Φ ist.*
Des weiteren besitzt Φ keine echte Untergruppe, die abgeschlossen und von endlichem Index in Φ ist.

Beweis. Sei H eine beliebige proendliche Gruppe mit einer abzählbaren Basis von offenen Untergruppen. Dann enthält sie auch eine abzählbare Familie von offenen Normalteilern und trivialem Schnitt. Also gibt es laut Satz 5.1.4 eine topologische Einbettung nach $\Pi_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Sym}(n)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir also annehmen, dass H eine abgeschlossene Untergruppe von $\Pi_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Sym}(n)$ ist.
Es reicht deshalb, wenn wir das Lemma für die proendliche Gruppe $H = \Pi_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Sym}(n)$ zeigen.

<u>1. Schritt:</u>

Zuerst konstruieren wir Φ als Automorphismengruppe einer ω-kategorischen Struktur $\boldsymbol{A}_1$.
Sei L_1 die Sprache, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-stelligen Relationssymbole $P_1^n, P_2^n, ..., P_n^n$ beinhaltet. In der Sprache L_1 sei T_1 die (nicht vollständige) Theorie, die aus folgenden Sätzen besteht:

- Für alle i, j: $\forall \bar{x}\ (P_i^j(\bar{x}) \rightarrow (x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge ... \wedge (x_{j-1} \neq x_j))$
- Für alle j: $\forall \bar{x}\ (((x_1 \neq x_2) \wedge ... \wedge (x_{j-1} \neq x_j)) \rightarrow P_1^j(\bar{x}) \vee ... \vee P_j^j(\bar{x}))$
- Für alle i, j, k mit $i \neq k$: $\neg(\exists \bar{x}(P_i^j(\bar{x}) \wedge P_k^j(\bar{x})))$

Das heißt, dass in einem Modell von T_1 für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Relationen $P_1^n, P_2^n, ..., P_n^n$ eine nummerierte Partition der injektiven n-Tupel beschreiben. Wir zeigen, dass die Menge aller endlichen Modelle von T_1 einen Fraïssé-Limes besitzt.
Dazu müssen wir überprüfen, ob die Menge der endlichen Modelle von T_1 die Eigenschaften aus Satz 2.1.10 erfüllt. Zu jedem Modell von T_1 ist klarerweise auch jede Unterstruktur ein Modell von T_1, also ist HP erfüllt.
Für JEP betrachten wir zwei endliche Modelle $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{D}$ von T_1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Trägermengen C und D disjunkt. Dann kann man beide Strukturen durch die Identität in ihre disjunkte Vereinigung einbetten. Auf der disjunkten Vereinigung legt man fest, dass alle Tupel aus C bzw. D sich verhalten wie in $\boldsymbol{C}$ bzw. $\boldsymbol{D}$ und alle „gemischten" injektiven Tupel in der ersten Partionsklasse P_1^n liegen. Die so konstruierte Struktur ist wieder ein Modell von T_1. Auf analoge Weise kann man auch AP zeigen.
Laut Satz 2.1.10 gibt es einen Fraïssé-Limes $\boldsymbol{A}_1$, der die Theorie T_1 erfüllt und ω-kategorisch ist.

2. Schritt:

Wir konstruieren nun eine Struktur $\boldsymbol{A}$, die die Nummerierung der einzelnen Partionsklassen von $\boldsymbol{A}_1$ „vergisst“.
Dazu betrachten wir für $n \in N$ die $2n$-stellige Relation E^n, die für je zwei n-Tupel sagt, ob sie in der gleichen Klasse der Partition liegen. Die Relation E^n ist in $\boldsymbol{A}_1$ definierbar und stellt eine Äquivalenzrelation dar, deren Klassen genau die Mengen P_i^n sind. Mit $\boldsymbol{A}$ bezeichnen wir das Redukt von $\boldsymbol{A}_1$ in der Sprache $L = (E^1, E^2, ...)$. Da $\Phi = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}_1)$ oligomorph ist, muss auch $\Sigma = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$ oligomorph sein.

3. Schritt:

Als Automorphismengruppe ist Φ eine abgeschlossene Untergruppe von Σ. Um zu zeigen, dass Φ sogar Normalteiler von Σ ist, stellen wir zunächst fest, dass jedes $f \in \Sigma$ die Äquivalenzklassen der Relationen E^n wieder auf Äquivalenzklassen abbildet. Also gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Permutation $\pi_n \in \mathrm{Sym}(n)$, sodass $f(P_i^n) = P_{\pi_n(i)}^n$. Diese Permutationen sind verträglich mit der Komposition, also ist die Abbildung

$$\begin{aligned} I' : \Sigma &\to H \\ f &\mapsto (\pi_1, \pi_2, ...), \end{aligned}$$

ein Homomorphismus.
Mit einem back-and-forth-Argument können wir zeigen, dass I' surjektiv ist: Sei $\pi = (\pi_1, \pi_2, ...)$ ein vorgegebenes Element aus H. Wir suchen einen Automorphismus aus Σ, der die Äquivalenzklassen P_i^j gemäß π permutiert.
Sei n ungerade. Angenommen es gibt eine Abbildung f, die bereits alle Tupel aus der endlichen Menge $\{a_1, ..., a_n\}$ in die durch π definierten Klassen abbildet. Für a_{n+1} suchen wir ein Bild $f(a_{n+1})$, sodass für alle Tupel $\bar{a}$ in $\{a_1, ..., a_n, a_{n+1}\}$ gilt:

$$\bar{a} \in P_i^j \Leftrightarrow f(\bar{a}) \in P_{\pi_j(i)}^j$$

Wir können ein endliches Modell $\boldsymbol{C}$ von T_1 definieren und eine Abbildung $f' : \{a_1, ..., a_n, a_{n+1}\} \to \boldsymbol{C}$, die das Gewünschte leistet. Da $\boldsymbol{A}_1$ Fraïssé-Limes ist, kann $\boldsymbol{C}$ in $\boldsymbol{A}_1$ eingebettet werden und zwar auf solche Weise, dass $(f(a_1), ..., f(a_n)) = (f'(a_1), ..., f'(a_n))$. Damit ist $f(a_{n+1}) := f'(a_{n+1})$ das gesuchte Element.
Für ein gerades n suchen wir in analoger Weise ein Urbild von f. Durch diese back-and-forth-Vorgehensweise erhalten wir eine bijektive Abbildung, die die

Mengen P_i^n wie gewünscht permutiert. Offensichtlich ist f ein Automorphismus von $\boldsymbol{A}$.

Also ist Φ als Kern der Abbildung I' ein Normalteiler. Der Homomorphisatz liefert uns den Isomorphismus

$$\begin{aligned} I : \Sigma/\Phi &\to H \\ \sigma\Phi &\mapsto (\pi_1, \pi_2, ...). \end{aligned}$$

<u>4. Schritt:</u>

Nun zeigen wir, dass I sogar ein topologischer Isomorphismus ist.
Um die Stetigkeit von I zu zeigen, reicht es (wegen der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie) zu zeigen, dass I' stetig ist. Da wir einen Homomorphismus zwischen topologischen Gruppen betrachten, genügt es, das Urbild offener Umgebungen der Identität in H zu betrachten.
Die Stabilisatoren endlicher Mengen bilden in H eine Umgebungsbasis der Identität. Sei also $U = \{\pi \in H : \pi|_W = id|_W\}$, wobei W eine endliche Menge ist. Im Urbild dieser Menge liegen alle $f \in \Sigma$, die die durch W bestimmten Äquivalenzklassen festhalten. Es gibt eine endliche Menge $C \subset A$, sodass alle diese Klassen darin einen Repräsentanten haben. Die Menge $\Sigma_{(C)}$ der Stabilisatoren von C ist eine offene Umgebung der Identität in Σ, welche nach U abgebildet wird. Damit ist I' stetig.
Für die Stetigkeit von I^{-1} betrachten wir eine Basisumgebung $\Sigma_{(C)}/\Phi$ des neutralen Elements in Σ/Φ. Mit W bezeichnen wir die Indizes aller Äquivalenzklassen P_i^j, die durch Tupel aus C repräsentiert werden. Dann liegt die Menge $U = \{\pi \in H : \pi|_W = id|_W\}$ ganz im Bild von I. Dies kann analog zum Beweis der Surjektivität mit einem back-and-forth-Argument gezeigt werden.
Damit ist $I : \Sigma/\Phi \to H$ bijektiv, stetig und offen, also eine topologische Einbettung.

<u>5. Schritt:</u>

Es bleibt zu zeigen, dass Φ keine echte abgeschlossene Untergruppe mit endlichem Index hat. Wir zeigen dies indirekt.
Angenommen Φ hat eine abgeschlossene Untergruppe Λ mit endlichem Index. Dann ist Λ, als Komplement seiner endlich vielen abgeschlossenen Nebenklassen, auch offen. Also besitzt die Identität eine offene Basisumgebung $\Phi_{(Y)}$ in Λ. Wir wählen Y minimal. Laut Voraussetzung ist Y nicht die leere Menge, denn sonst wäre Λ keine echte Untergruppe von Φ.

Wir wählen ein $y \in Y$ und setzen $Z = Y \setminus \{y\}$. Mit $\Phi_{(Z)}$ und $\Lambda_{(Z)}$ bezeichnen wir die punktweisen Stabilistatoren von Z in Φ und Λ.
Der Index $|\Phi_{(Z)} : \Lambda_{(Z)}|$ muss größer als Eins sein, da wir Y minimal gewählt haben. Es gilt

$$1 < |\Phi_{(Z)} : \Lambda_{(Z)}| = |(\Phi_{(Z)} \cap \Phi) : (\Phi_{(Z)} \cap \Lambda)| \leq |\Phi : \Lambda| < \infty \tag{6.1}$$

Damit ist der Index $|\Phi_{(Z)} : \Lambda_{(Z)}|$ eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist.

Wir definieren nun die Mengen $\Delta = \{gy : g \in \Phi_{(Z)}\}$ und $\Pi = \{hy : h \in \Lambda_{(Z)}\}$. Wir können Δ in Mengen der Gestalt $g\Pi$ mit $g \in \Phi_{(Z)}$ partitionieren. Wenn wir $\Phi_{(Z)}$ auf Δ agieren lassen bleibt diese Partition stets erhalten.
Ein Element $g(y)$ liegt in Π genau dann, wenn es ein $h \in \Lambda_{(Z)}$ gibt mit $g(y) = h(y)$. Daraus folgt

$$h \circ g^{-1} \in \Phi_{(Y)} = \Lambda_{(Y)} \Rightarrow g \in \Lambda_{(Z)}$$

Daraus folgt, dass die Anzahl der Partitionsklassen von Δ nach Π genau $|\Phi_{(Z)} : \Lambda_{(Z)}|$ ist.

Wir wollen nun zeigen, dass die Aktion von $\Phi_{(Z)}$ auf Δ nur triviale Partitionen erhält, um einen Widerspruch zu (6.1) zu erhalten.
Dazu müssen wir zunächst die folgenden Behauptung beweisen:

Für $a, b, c \in \Delta$ mit $c \neq a$ gibt es ein $d \in \Delta$ mit

$$\mathrm{tp}_{\boldsymbol{A}_1}((d,a)/Z) = \mathrm{tp}_{\boldsymbol{A}_1}((d,b)/Z) = \mathrm{tp}_{\boldsymbol{A}_1}((c,a)/Z). \tag{6.2}$$

Die Einschränkung von $\boldsymbol{A}_1$ auf $Z \cup \{a, b, c\}$ liefert uns ein endliches Modell von T_1. Es ist möglich dieses Modell um ein Element d zu erweitern, sodass in diesem Modell (6.2) erfüllt ist.[1] Da $\boldsymbol{A}_1$ Fraïssé-Limes ist, kann dieses endliche Modell nach $\boldsymbol{A}_1$ eingebettet werden. Wegen der Homogenität von $\boldsymbol{A}_1$ gibt es einen Automorphismus von $\boldsymbol{A}_1$, der Z festhält und c auf d abbildet. Deshalb gilt $d \in \Delta$.

Angenommen es gibt nun eine nicht-triviale Partition von Δ, die unter allen Abbildungen aus $\Phi_{(Z)}$ erhalten bleibt. Dann gibt es zwei Elemente $a \neq c$, die in demselben Block K der Partition liegen und ein b, welches in einem andern Block K' liegt (siehe Abbildung 6.1).

[1]Der Typ $\mathrm{tp}((c,a)/Z)$ liefert eine „Bauanleitung", die beschreibt, in welchen Relationen Tupel liegen sollen, die nur aus Z, d und a bzw. Z, d und b bestehen. Alle weiteren Tupel, die d enthalten, sollen zum Beispiel stets in P_1^n liegen.

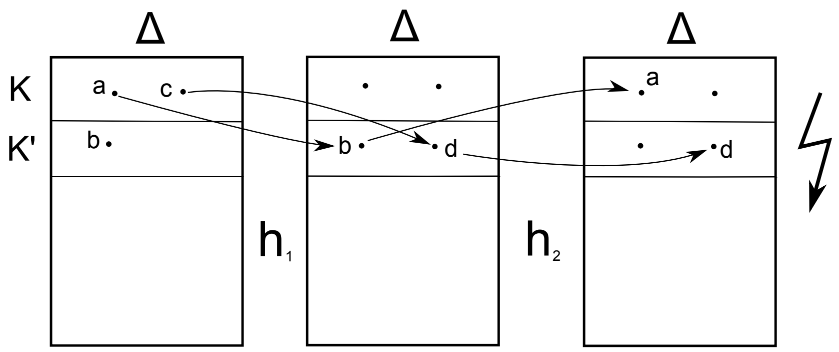

Abbildung 6.1: Die Abbildung $h_2 \circ h_1 \in \Phi_{(Z)}$ erhält nur triviale Partionen von Δ

Wegen $tp_{\boldsymbol{A}_1}((c,a)/Z) = tp_{\boldsymbol{A}_1}((d,b)/Z)$ und der Homogenität von $\boldsymbol{A}_1$ gibt es eine Abbildung $h_1 \in \Phi_{(Z)}$ mit $h_1(a) = b$ und $h_1(c) = d$. Laut Voraussetzung erhält h_1 die Partition, also muss d in K' liegen. Wegen (6.2) gibt es wiederum eine Abbildung $h_2 \in \Phi_{(Z)}$ mit $h_2(b) = a$ und $h_2(d) = d$. Die Zusammensetzung $h_2 \circ h_1 \in \Phi_{(Z)}$ bildet also a nach a ab und c nach d. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass die Partition unter Abbildungen aus $\Phi_{(Z)}$ erhalten bleibt.

Also ist die Partition von Δ nach Π trivial.
Wir haben festgestellt, dass die Anzahl der Partionsklassen gleich $|\Phi_{(Z)} : \Lambda_{(Z)}|$ sein muss. Es kann nicht nur einen Block geben, da dies ein Widerspruch zur Minimalität von Y wäre. Es kann aber auch nicht $\Pi = \{y\}$ gelten, da in diesem Fall $|\Phi_{(Z)} : \Lambda_{(Z)}| = |\Phi_{(Z)}| = \infty$ ist, was ein Widerspruch zu (6.1) ist.
Daraus folgt, dass es keine abgeschlossenen Untergruppen von Φ mit endlichem Index gibt. □

Bemerkung 6.1.2. Die Gruppe Σ aus Lemma 6.1.1 hat nicht die small index property.
Wir haben nämlich gezeigt, dass es einen surjektiven Homomorphismus von $\Sigma = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$ nach H gibt. Wir können H wiederum surjektiv nach $\Pi_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Sym}(2)$ abbilden. Diese Gruppe können wir als einen Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ von Dimension 2^ω betrachten. Also gibt es 2^{2^ω} Funktionale, die nach $\mathbb{F}_2$ abbilden. Betrachten wir alle Kerne dieser Funktionale, so erhalten wir 2^{2^ω} Untergruppen, die Index 2 haben. Auch ihre Urbilder in Σ haben Index 2.
Jedoch gibt es in Σ, laut Definition der Topologie, nur abzählbar viele offene Basismengen und damit höchstens 2^ω viele offene Mengen. Damit ist $\boldsymbol{A}$ eine ω-kategorische Struktur, welche nicht die small index property erfüllt.

6.2 Das Gegenbeispiel

Wir wollen nun mithilfe der Konstruktion von Hrushovski und der Gruppe G aus Kapitel 7 ein Gegenbeispiel finden. Zur Erinnerung:

Satz 7.0.2. *Die proendliche Gruppe G hat einen nicht-trivialen endlichen Normalteiler F, sodass F ein Komplement in G besitzt und jedes Komplement von F in G dicht in G ist. Daraus folgt insbesondere, dass F kein abgeschlossenes Komplement in G besitzt.*

In Kapitel 5 konnten wir Strukturen $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{A} = P(\boldsymbol{B})$ finden, sodass ihre Automorphismengruppen topologisch isomorph zu G beziehungsweise G/F waren. Aus den Eigenschaften von G folgte, dass $\boldsymbol{B}$ nicht koordinatisierbar ist.
In diesem Kapitel wollen wir mit Hilfe des Lemmas von Hrushovski ein ähnliches Resultat für Quotientengruppen erhalten. Unser Ziel ist also eine Struktur $\boldsymbol{B}$ und einen P-Teil $\boldsymbol{A}$ zu finden, sodass geeignete Quotientengruppen ihrer Automorphismengruppen topologisch isomorph zu G beziehungsweise G/F sind.
Eine technische Schwierigkeit hierbei ist, dass wir die Konstruktion von Hrushovski nicht auf G selbst anwenden können, da wir dann nicht wissen, wie der P-Teil zu wählen ist. Deswegen werden wir zunächst $\boldsymbol{A}$ konstruieren und dann auf $\boldsymbol{B}$ erweitern. Wir werden dabei folgende Konstruktion anwenden:

Sei $\boldsymbol{A}$ eine Struktur mit $\Sigma = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$ und sei Ψ ein endlicher Normalteiler von Σ mit endlichem Index. Mit C bezeichnen wir die endliche Quotientengruppe Σ/Ψ und $B = A\dot{\cup}C$. Wir lassen nun Σ in natürlicher Weise auf B agieren, das heißt, wir betrachten die natürliche Einbettung:

$$\begin{aligned} \sigma :& \Sigma \to \mathrm{Sym}(B), \\ & \sigma(f)|_A = f, \quad \sigma(f)|_C(g\Psi) = (fg)\Psi \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\sigma(\Sigma) \leq \Sigma \times \mathrm{Sym}(C)$. Mit $\boldsymbol{B}$ bezeichnen wir die kanonische Struktur von $\sigma(\Sigma)$, erweitert um das einstellige Prädikat P, das die Elemente von A auswählt. Mit Γ bezeichnen wir die Automorphismengruppe von $\boldsymbol{B}$. Aus den Eigenschaften der kanonischen Struktur (siehe Lemma 5.1.2) und der Abgeschlossenheit von Σ folgt, dass

$$\Gamma = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}) = \overline{\sigma(\Sigma)} \leq \Sigma \times \mathrm{Sym}(C). \tag{6.3}$$

Setzen wir zusätzlich voraus, dass $\boldsymbol{A}$ ω-kategorisch ist, lassen sich weitere Aussagen treffen.

Lemma 6.2.1. *Wenn in der obigen Konstruktion $\boldsymbol{A}$ abzählbar und ω-kategorisch ist, folgt:*

(i) $\boldsymbol{B}$ *ist ω-kategorisch*

(ii) $\boldsymbol{B}$ *ist relativ kategorisch über* $\boldsymbol{A}$.

(iii) $\boldsymbol{B}$ *ist natürlich über* $\boldsymbol{A}$ *und der Stabilisator* $\Gamma_{(A)}$ *besitzt ein Komplement in* Γ.

(iv) Wenn $\boldsymbol{B}$ *koordinatisierbar über* $\boldsymbol{A}$ *ist, dann besitzt* $\Gamma_{(A)}$ *ein abgeschlossenes Komplement.*

Beweis. (i) Da Σ oligomorph und C endlich ist, hat auch $\sigma(\Sigma)$ in jeder Stelligkeit jeweils endlich viele Orbits. Beim Bilden des topologischen Abschlusses in $\mathrm{Sym}(B)$ kann die Anzahl der Orbits nicht größer werden. Damit ist auch Γ oligomorph und somit ist $\boldsymbol{B}$ ω-kategorisch.

(ii) Laut dem Satz von Ryll-Nardzewski ist eine Untermenge von A^n genau dann in $\boldsymbol{A}$ definierbar, wenn sie eine Vereinigung von n-Orbits von $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$ ist. Ebenso ist eine Untermenge von A^n genau dann in $\boldsymbol{B}$ definierbar, wenn sie eine Vereinigung von Orbits von $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ ist.
Laut Konstruktion haben $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$ und $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ auf A^n die gleichen Orbits, also stimmen die definierbaren Teilmengen von A^n überein. Anders ausgedrückt heißt das, dass es zu jeder Formel $\phi(\bar{x})$ in der Sprache von $\boldsymbol{B}$ eine Formel $\psi(\bar{x})$ in der Sprache von $\boldsymbol{A}$ gibt mit $\boldsymbol{B} \models \phi(\bar{a}) \leftrightarrow \boldsymbol{B} \models \psi(\bar{a})$. Somit haben wir gezeigt, dass $\boldsymbol{B}$ reduziert über P ist.
Außerdem ist $\boldsymbol{B}$ algebraisch über $\boldsymbol{A}$, da $B \setminus A$ nur endlich viele Elemente enthält. Aus Satz 3.2.2 folgt, dass $\boldsymbol{B}$ relativ kategorisch über $\boldsymbol{A}$ ist.

(iii) Laut Definition ist $\sigma(f)|_A = f$ für alle $f \in \Sigma$, also ist σ eine natürliche Einbettung von Σ nach Γ. Aus dem Splitting-Lemma A.2.2 folgt, dass Γ das semidirekte Produkt $\Gamma_{(A)}$ und $\sigma(\Sigma)$ ist.

(iv) Sei $\boldsymbol{B}^+$ eine Expansion von $\boldsymbol{B}$, die koordinatisiert über $\boldsymbol{A}$ ist. Wegen Lemma 4.1.9 gibt es einen Isomorphismus $\sigma' : \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}^+)$, der invers zur Einschränkungsabbildung ρ ist. Also ist $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ das semidirekte Produkt von $\Gamma_{(A)}$ und der abgeschlossenen Gruppe $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B}^+)$. $\square$

Seien nun $F \leq G$ so wie in Satz 7.0.2. Mit $H = G/F$ bezeichnen wir die Quotientengruppe. Wir haben bereits im letzten Kapitel gesehen, dass H mit der Quotiententopologie auch eine proendliche Gruppe ist (vgl. (5.2)). Mit der

Konstruktion von Hrushovski sehen wir, dass H topologisch isomorph zu der Quotientengruppe Σ/Φ ist, wobei $\Sigma = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$ oligomorph ist. In den folgenden Absätzen werden wir ein $\Psi \leq \Sigma$ suchen, sodass die Konstruktion aus Lemma 6.2.1 nicht koordinatisierbar ist.

1. Schritt:

Sei $\nu : G \to H$ die Quotientenabbildung $\nu(g) = gF$. Aufgrund der Eigenschaften der Gruppe G hat die kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow F \xrightarrow{id} G \xrightarrow{\nu} H \longrightarrow 1$$

eine Retraktion τ, das heißt einen injektiven Homomorphismus $\tau : H \to G$ mit $\nu \circ \tau = id|_H$. Mit H_1 bezeichnen wir das Bild von H unter τ. Die Gruppe H_1 ist ein Komplement von F und somit dicht in G. Laut Definition der Quotiententopologie ist ν eine offene Abbildung. Jedoch ist τ unstetig, da es die kompakte Gruppe H auf die dichte Gruppe H_1 abbildet.

Wie wir in Kapitel 7 gesehen haben, gibt es eine Familie $\{G_i : i \leq \omega\}$ von offenen Normalteilern von G mit $F = \bigcap_{i<\omega} G_i$ und $\{e\} = F \cap G_\omega$. Mit X bezeichnen wir die disjunkte Vereinigung der Nebenklassen: $X = \dot{\bigcup}_{i<\omega} G/G_i$.

Wir haben bereits in (5.2) gezeigt, dass die Aktion von H auf X topologisch isomorph zu H selbst ist.
Diese Aktion entspricht genau der Aktion von H auf den Nebenklassen von H auf den offenen Normalteilern $\tau^{-1}(G_i) = \nu(G_i)$.

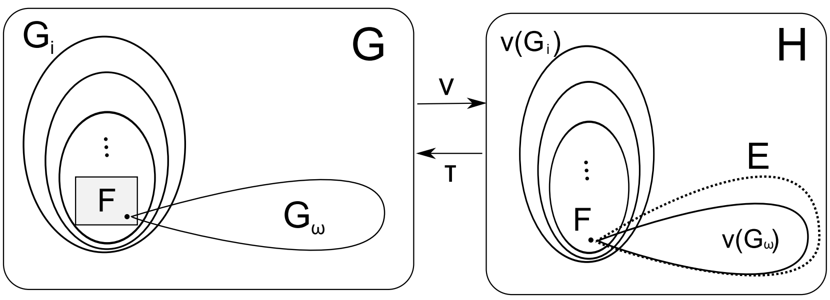

Abbildung 6.2: Die Normalteiler $\tau^{-1}(G_i)$ in H

Wir wollen nun aber H zu einer Permutationsgruppe erweitern, die das Verhalten von H_1 in G widerspiegelt. Dazu betrachten wir zusätzlich den Normalteiler $E = \tau^{-1}(G_\omega)$ von H (siehe Abbildung 6.2). Wir lassen nun H auf

$X \cup H/E$ agieren. Offensichtlich hat E den gleichen endlichen Index wie G_ω in G, jedoch muss E nicht notwendigerweise offen sein. Die Einbettung von H nach $\mathrm{Sym}(X) \times \mathrm{Sym}(H/E)$ ist somit nicht notwendigerweise eine topologische Einbettung.

Die Aktion von H auf der Menge $X \dot\cup (H/E)$ ist aber äquivalent zu der Aktion von H_1 auf der Menge $X \dot\cup (H_1/G_\omega)$. Damit meinen wir, dass die symmetrischen Gruppen topologisch isomorph sind und dass H unter diesem Isomorphismus auf H_1 abgebildet wird. Als Isomorphismus wählen wir:

$$\xi : \mathrm{Sym}(X) \times \mathrm{Sym}(H/E) \to \mathrm{Sym}(X) \times \mathrm{Sym}(H_1/G_\omega) \text{ mit}$$
$$\xi(\pi)|_X = \pi|_X \text{ und}$$
$$\xi(\pi)(hG_\omega) = \tau(\pi(\nu(h)E))$$

Da H_1 ein Komplement von F ist, liegt es dicht in G. Da die Nebenklassen von G/G_ω offen sind, müssen sie stets einen Repräsentanten aus H_1 enthalten. Also können wir die Nebenklassen H_1/G_ω durch G/G_ω ersetzen.

Daraus folgt, dass die Aktion von H auf der Menge $X \dot\cup (H/E)$ äquivalent zu der Aktion H_1 auf der Menge $X \dot\cup (G/G_\omega)$ ist. Bilden wir auf beiden Seiten den topologischen Abschluss, sehen wir, dass der Abschluss von H in $\mathrm{Sym}(X) \times \mathrm{Sym}(H/E)$ topologisch isomorph zu G ist.

$$\overline{H}^{\mathrm{Sym}(X)\times\mathrm{Sym}(H/E)} \cong^t G \tag{6.4}$$

Da $F = \bigcap_{i<\omega} G_i$ gilt, sind die Elemente von $\overline{H}$, die auf X die Identität sind, genau die Elemente von F.

2. Schritt:

Wir erinnern uns nun daran, dass H mit der Quotiententopologie (und somit auch mit der Topologie auf $\mathrm{Sym}(X)$) eine proendliche Gruppe mit einer abzählbaren Basis von offenen Untergruppen ist. Die Konstruktion von Hrushovski 6.1.1 lieferte uns eine ω-kategorische Struktur $\boldsymbol{A}$ und $\Phi \triangleleft \Sigma = \mathrm{Aut}(\boldsymbol{A})$ mit $\Sigma/\Phi = H$.

Zu dem Normalteiler E aus dem ersten Schritt gibt es also einen Normalteiler Ψ mit $\Phi \leq \Psi \leq \Sigma$ und $\Psi/\Phi = E$. Dieser hat endlichen Index, da auch E endlichen Index hat.

Also können wir die Konstruktion aus Lemma 6.2.1 mit $C = \Sigma/\Psi$ durchführen. Die Aktion von H auf $X \dot\cup H/E$ liefert uns eine nicht abgeschlossene Gruppe. Wir erwarten deshalb, dass die Aktion von Σ auf $A \dot\cup C$ ebenfalls nicht abgeschlossen ist.

Mit σ bezeichnen wir wie in Lemma 6.2.1 die natürliche Einbettung von Σ nach $\mathrm{Sym}(A\dot{\cup}C)$:

$$\begin{aligned}\sigma :&\Sigma \to \Sigma \times \mathrm{Sym}(C),\\ &\sigma(f)|_A = f, \quad \sigma(f)|_C(g\Psi) = (fg)\Psi\end{aligned}$$

Weiters sei $\Gamma = \overline{\sigma(\Sigma)}$ und $\boldsymbol{B}$ die kanonische Struktur von Γ.

Aus dem zweiten Isomorphiesatz (Satz A.2.1) folgt, dass

$$\Sigma/\Psi \cong (\Sigma/\Phi)/(\Psi/\Phi) \cong H/E. \tag{6.5}$$

Man sieht so auch leicht, dass die Aktion von H auf H/E äquivalent ist zu der Aktion von Σ auf Σ/Ψ.

<u>3. Schritt</u>

Wir wollen nun das Verhalten der Quotientengruppe $\sigma(\Sigma)/\sigma(\Phi)$ in $\Gamma/\sigma(\Phi)$ untersuchen.
Wegen $\Phi \leq \Psi$, ist $\sigma(\Phi) = \Phi \times \{id\}$. Daher ist

$$(\Sigma \times \mathrm{Sym}(\Sigma/\Psi))/\sigma(\Phi) \cong^t \Sigma/\Phi \times \mathrm{Sym}(\Sigma/\Psi)$$

Mit (6.5) erhalten wir einen topologischen Isomorphismus

$$\Sigma/\Phi \times \mathrm{Sym}(\Sigma/\Psi) \cong^t H \times \mathrm{Sym}(H/E).$$

Die Zusammensetzung liefert einen topologischen Isomorphismus

$$I : (\Sigma \times \mathrm{Sym}(\Sigma/\Psi))/\sigma(\Phi) \to H \times \mathrm{Sym}(H/E).$$

Dabei wird $\sigma(\Sigma)/\sigma(\Phi)$ unter I auf H, agierend auf $X\dot{\cup}H/E$, abgebildet.
Bilden wir das Bild des topologischen Abschlusses von $\sigma(\Sigma)/\sigma(\Phi)$, so ist:

$$I(\Gamma/\sigma(\Phi)) = \overline{I(\sigma(\Sigma)/\sigma(\Phi))} \cong^t \overline{H}^{\mathrm{Sym}(X)\times\mathrm{Sym}(H/E)} \cong^t G$$

<u>4. Schritt</u>

Wir zeigen nun, dass das Bild von $\Gamma_{(A)}/\sigma(\Phi)$ gleich F ist.
Laut Lemma 6.2.1 ist $\Gamma_{(A)}/\sigma(\Phi)$ ein Komplement von $\sigma(\Sigma)/\sigma(\Phi)$. Deshalb muss $I(\Gamma_{(A)}/\sigma(\Phi))$ ein Komplement von H_1 sein. Außerdem folgt aus der

Konstruktion des Isomorphismus, dass $I(\Gamma_{(A)}/\sigma(\Phi)) \subseteq G_{(X)} = F$. Also folgt, dass

$$I(\Gamma_{(A)}/\sigma(\Phi)) = F.$$

Damit haben wir alles was wir brauchen, um zu zeigen, dass $\boldsymbol{B}$ nicht koordinatisierbar ist.
Denn angenommen $\boldsymbol{B}$ ist koordinatisierbar. Dann hat $\Gamma_{(A)}$ laut Lemma 6.2.1 ein abgeschlossenes Komplement Δ in Γ. Die Gruppe Δ hat endlichen Index in Γ und somit ist $\Delta \cap \sigma(\Phi)$ abgeschlossen und von endlichem Index in $\sigma(\Phi)$. Laut Lemma 6.1.1 gilt $\Delta \geq \sigma(\Phi)$. Mit $I(\Delta/\sigma(\Phi))$ hat man also ein abgeschlossenes Komplement von F in G gefunden. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu den Eigenschaften von G!
Zusammenfassend gilt also:

Satz 6.2.2. *Die Struktur $\boldsymbol{B}$ ist ω-kategorisch, relativ kategorisch, und natürlich über $P(\boldsymbol{B})$. Jedoch ist sie nicht koordinatisierbar über ihren P-Teil. Außerdem ist jedes Modell von Th($\boldsymbol{B}$) natürlich über seinem P-Teil.*

Beweis. Wir müssen nur noch die letzte Aussage beweisen.
Sei $\boldsymbol{D}$ ein Modell von $\mathrm{Th}(\boldsymbol{B})$. Da $\boldsymbol{B}$ ω-kategorisch ist, können wir wegen dem Satz von Löwenheim-Skolem annehmen, dass $\boldsymbol{B}$ ein elementares Untermodell von $\boldsymbol{D}$ ist.
Sei $\bar{c}$ eine Aufzählung der endlich vielen Elemente in $C = B \setminus P^{\boldsymbol{B}} = D \setminus P^{\boldsymbol{D}}$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $E^i(\boldsymbol{D})$ die Menge der E^i-Äquivalenzklassen, wobei E^i wie in der Konstruktion von Hrushovski ist. Sei $E(\boldsymbol{D}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E^i(\boldsymbol{D})$.
In $\mathrm{Th}(\boldsymbol{B})$ steht, dass jedes E^i genau i Äquivalenzklassen hat. Deshalb hat jede Äquivalenzklasse stets auch einen Repräsentanten aus B, also können wir $E(\boldsymbol{D})$ mit $E(\boldsymbol{B})$ identifizieren.
Jedes $\alpha \in \mathrm{Aut}(P(\boldsymbol{D}))$ induziert eine Permutation auf $E(\boldsymbol{D})$. Jede solche Permutation kann aber auch von einem Element $\beta \in \mathrm{Aut}(P(\boldsymbol{B}))$ erzeugt werden, wie wir in der back-and-forth-Konstruktion im Beweis von Lemma 6.1.1 gesehen haben. Die Abbildung

$$\xi' : \mathrm{Aut}(P(\boldsymbol{B})) \to \mathrm{Sym}(C), \xi'(\beta)(c) = \beta c$$

hängt wegen der Definition von C nur von den Permutationen ab, die β auf $E(\boldsymbol{B})$ induziert. Deshalb gibt es auch einen Homomorphismus $\xi : \mathrm{Aut}(P(\boldsymbol{D})) \to \mathrm{Sym}(C)$ (siehe Abbildung 6.3).

Wir definieren nun

$$\zeta : \mathrm{Aut}(P(\boldsymbol{D})) \to \mathrm{Sym}(D),$$
$$\zeta(\alpha)|_{P(\boldsymbol{D})} = \alpha \text{ und } \zeta(\alpha)|_C = \xi(\alpha).$$

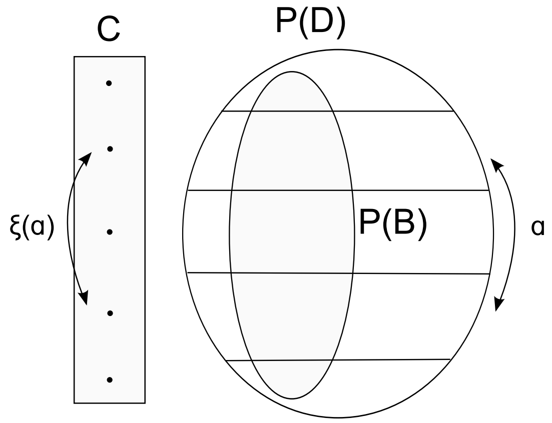

Abbildung 6.3: Die Fortsetzung des Automorphismus $\alpha \in P(\boldsymbol{D})$ auf C hängt nur von den Permutationen der Äquivalenzklassen der E^i ab.

Wie man nachrechnen kann, ist ζ ein injektiver Homomorphismus von $\mathrm{Aut}(P(\boldsymbol{D}))$ nach $\mathrm{Sym}(D)$. Falls wir zeigen können, dass für jedes $\alpha \in \mathrm{Aut}(P(\boldsymbol{D}))$ das Bild $\zeta(\alpha)$ ein Automorphismus in $\boldsymbol{D}$ ist, sind wir fertig.
Angenommen $\zeta(\alpha)$ ist kein Automorphismus. Dann gibt es eine Formel $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ in der Sprache von $\boldsymbol{D}$ und ein Tupel $\bar{a}$ in $P(\boldsymbol{D})$, sodass

$$\boldsymbol{D} \models \phi(\bar{a}, \bar{c}) \text{ und } \boldsymbol{D} \models \neg\phi(\zeta(\alpha)(\bar{a}), \zeta(\alpha)(\bar{c})).$$

Wegen der Konstruktion von $\boldsymbol{B}$ erfüllen zwei Tupel $\bar{b}, \bar{b}'$ aus $P(\boldsymbol{B})$, die in derselben Äquivalenzklasse liegen, stets

$$\boldsymbol{B} \models \phi(\bar{b}, \bar{c}) \leftrightarrow \phi(\bar{b}', \bar{c}).$$

Diese Eigenschaft lässt sich durch eine first-order-Formel beschreiben, also gilt sie auch in $\boldsymbol{D}$. Wir wissen, dass es zu jedem $\bar{a}$ in $\boldsymbol{D}$ ein Tupel $\bar{b}$ in $\boldsymbol{B}$ gibt, welches in derselben Äquivalenzklasse liegt. Außerdem gibt es ein $\beta \in \mathrm{Aut}(P(\boldsymbol{B}))$, welches auf den Äquivalenzklassen das gleiche leistet wie α. Also

$$\boldsymbol{D} \models \phi(\bar{a}, \bar{c}) \Leftrightarrow \boldsymbol{B} \models \phi(\bar{b}, \bar{c}) \Leftrightarrow \boldsymbol{D} \models \phi(\beta\bar{b}, \zeta(\alpha)(\bar{c})) \Leftrightarrow \boldsymbol{D} \models \phi(\alpha\bar{a}, \zeta(\alpha)(\bar{c})),$$

was einen Widerspruch liefert.
Damit ist ζ ein injektiver Homomorphismus von $\mathrm{Aut}(P(\boldsymbol{D}))$ nach $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{D})$ und eine Retraktion der Einschränkungsabbildung. Also ist $\boldsymbol{D}$ natürlich über $P(\boldsymbol{D})$. $\square$

6.3 Folgerungen

Satz 6.3.1. *Sei $\boldsymbol{B}$ unser Gegenbeispiel aus Satz 6.2.2. Dann gibt es eine abzählbare, ω-kategorische Struktur $\boldsymbol{C}$, sodass die Automorphismengruppen von $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ isomorph als Gruppen sind, aber nicht isomorph als topologische Gruppen. Also sind $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ nicht bi-interpretabel.*

Beweis. Wir bezeichnen wieder mit Γ die Automorphismengruppe von $\boldsymbol{B}$. Wir haben bereits gezeigt, dass Γ das semidirekte Produkt von $\Gamma_{(A)}$ und $\sigma(\Sigma)$ ist. Weil es den Homomorphismus $\gamma : \Gamma/\Phi \to G$ mit $h(\Gamma_{(A)}/\Phi) = F$ gibt und F ein Normalteiler von G ist, muss auch $\Gamma_{(A)}$ ein Normalteiler von Γ sein. Daraus folgt, dass Γ sogar das direkte Produkt von $\Gamma_{(A)}$ und $\sigma(\Sigma)$ ist. Außerdem ist $\Gamma_{(A)} \cap \Phi = \{e\}$. Damit erhalten wir

$$\Gamma \cong \Gamma_{(A)} \times \sigma(\Sigma) \cong \Gamma_{(A)}/\Phi \times \Sigma \cong F \times \Sigma,$$

wobei diese Isomorphie keine topologische ist.
Wir können nun $\Sigma \times F$ zu einer Automorphismengruppe machen, indem wir die Einbettung

$$\begin{gathered}\rho : \Sigma \times F \to \mathrm{Sym}(A \cup F) \text{ mit} \\ \rho(\sigma, f)|_A(a) = \sigma(a) \text{ und } \rho(\sigma, f)_F(g) = fg\end{gathered}$$

betrachten, für $\sigma \in \Sigma$, $a \in A$ und $f, g \in F$.
Da F endlich ist, ist das Bild $\Delta = \rho(\Sigma \times F)$ eine abgeschlossene und oligomorphe Untergruppe von $\mathrm{Sym}(A \cup F)$. Also ist die kanonische Struktur von Δ ω-kategorisch. Außerdem ist Δ laut Konstruktion isomorph zu Γ. Wir zeigen nun, dass Δ und Γ jedoch nicht topologisch isomorph sind.

Dazu erinnern wir uns, dass $\Phi \leq \Sigma$ die Eigenschaft hatte, dass es keine echten abgeschlossenen Untergruppen von endlichem Index hatte. Daraus folgt, dass der Schnitt aller abgeschlossenen Untergruppen von endlichem Index in Γ gleich Φ ist. Außerdem haben wir gezeigt, dass Γ/Φ topologisch isomorph zu G ist.

Betrachten wir den Schnitt abgeschlossener Untergruppen von endlichem Index in Δ, so ist dieser auch $\rho(\Phi \times \{e\})$. Jedoch ist die Quotientengruppe $\Delta/\rho(\Phi \times \{e\})$ isomorph zu $H \times F$ *mit der Produkttopologie*. Deshalb sind Γ und Δ zwar isomorph als Gruppen, aber nicht als topologische Gruppen. $\square$

Kapitel 7

Konstruktion der proendlichen Gruppe

In diesem Abschnitt konstruieren wir eine proendliche Gruppe, die folgenden Satz erfüllt:

Satz 7.0.2. *Es gibt eine proendliche Gruppe G (genauer gesagt: ein kartesisches Produkt von abzählbar vielen endlichen Gruppen) mit einem nichttrivialen endlichen Normalteiler F, sodass F ein Komplement in G besitzt und jedes Komplement von F in G dicht in G ist. Daraus folgt insbesondere, dass F kein abgeschlossenes Komplement in G besitzt.*

Die grundlegende Idee unserer Konstruktion ist, dass wir G als Produkt von endlichen Gruppen konstruieren, in denen jeweils Kommutatorgruppe und Zentrum übereinstimmen. In G aber soll die Kommutatorgruppe eine echte, dichte Untergruppe des Zentrums sein.
Wir führen folgende Notation ein:

Definition 7.0.3. Sei G eine Gruppe und $x, y \in G$. Wir bezeichnen mit $[x, y]$ den *Kommutator* $x^{-1}y^{-1}xy$ von x und y. Mit $G^{(1)}$ bezeichnen wir die *Kommutatorgruppe* von G, also jene Untergruppe von G, die von allen Kommutatoren erzeugt wird. Für $x \in G^{(1)}$ definieren wir die *Kommutatortiefe*

$$\|x\|_G = \min\{n \in \mathbb{N} : (\exists g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_n \in G : (x = [g_1, h_1] \cdots [g_n, h_n]\ ))\}$$

und

$$\|G\| = \sup\{\|x\|_G : x \in G^{(1)}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Für das Produkt von Gruppen gilt folgendes Lemma:

Lemma 7.0.4. *Für das direkte Produkt $G = \prod_{i\in I} G_i$ ergibt sich $\|G\| = \sup\{\|G_i\| : i \in I\}$*

Beweis. Die Projektion auf eine Komponente bildet Kommutatoren auf Kommutatoren ab. Deshalb ist $G^{(1)} \leq \prod_{i\in I} G_i^{(1)}$. Für alle $(x_i)_{i\in I} \in G^{(1)}$ und alle $j \in I$ gilt also

$$\|(x_i)_{i\in I}\|_G \geq \|x_j\|_{G_j}$$

und damit

$$\|G\| \geq \sup\{\|G_i\| : i \in I\}.$$

Es bleibt die umgekehrte Ungleichung zu zeigen. Für den Fall, dass die rechte Seite unendlich ist, gilt klarerweise Gleichheit. Deshalb genügt es, den Fall $\sup\{\|G_i\| : i \in I\} = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ zu betrachten. Sei also $(x_i)_{i\in I} \in G^{(1)}$. Da $\sup\{\|G_i\| : i \in I\} = n$ kann jedes x_i in G_i als Produkt von höchstens n Kommutatoren dargestellt werden. Daraus folgt $\|(x_i)_{i\in I}\|_G \leq n$ und damit $\|G\| \leq n$. □

Unser Ziel ist es, endliche Gruppen G_n zu konstruieren, sodass zwar alle Gruppen G_n endliche Kommutatortiefe haben, aber das Produkt der G_n unendliche Kommutatortiefe hat. Genauer gesagt, wollen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Gruppe G_n konstruieren, sodass

(i) G_n ist endlich

(ii) G_n ist nilpotent vom Grad 2

(iii) Das Zentrum und die abgeleitete Gruppe stimmen sogar überein: $Z(G_n) = G_n^{(1)}$

(iv) $\|G_n\| \to \infty$ für $n \to \infty$

Das Zentrum von $G = \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$ ist dann klarerweise das Produkt der Zentren und somit abgeschlossen. Aus $\|G\| = \infty$ folgt aber, dass die Kommutatorgruppe von G nicht abgeschlossen sein kann.

Eine naheliegende Wahl für G_n ist die von n Elementen frei erzeugte, nilpotente Gruppe von Grad 2. Das heißt, wir betrachten die von n Elementen frei erzeugte Gruppe und faktorisieren nach der Relation aus, die besagt, dass alle Kommutatoren von Basiselementen im Zentrum liegen.
Wir fordern zusätzlich, dass alle Elemente eine Ordnung kleiner gleich p haben, wobei p eine ungerade Primzahl ist. Wie sich zeigen wird, stellt diese Forderung die Endlichkeit von G_n sicher.

$$G_n = F(x_1, ..., x_n)/\{[x_k, [x_i, x_j]], x_i^p : i, j, k = 1, ..., n\}$$

Wir werden im Folgenden nachrechnen, dass G_n nicht trivial ist und die Eigenschaften (i)-(iv) erfüllt. Dazu zeigen wir zuerst zwei Lemmata.

Lemma 7.0.5. *Die Kommutatorgruppe $G_n^{(1)}$ ist eine Untergruppe des Zentrums und die Kommutatorklammer ist multiplikativ in beiden Argumenten.*

Beweis. Wir wollen für alle $a, b, c \in G_n$ zeigen, dass

$$\begin{aligned} [a,b] \in Z(G_n), \quad [a,bc] &= [a,b][a,c], \quad [a,b^{-1}] = [b,a] = [a,b]^{-1} \\ [ab,c] &= [a,c][b,c], \quad [a^{-1},b] = [b,a] = [a,b]^{-1}. \end{aligned}$$

Laut Definition liegen alle Kommutatoren von Basiselementen im Zentrum. Durch geschicktes Einfügen von Termen lässt sich auch die Multiplikativität für Basiselemente zeigen:

$$\begin{aligned} [x_i, x_j x_k] &= x_i^{-1} x_k^{-1} x_j^{-1} x_i x_j x_k \\ &= x_i^{-1} x_k^{-1} (x_i x_k x_k^{-1} x_i^{-1}) x_j^{-1} x_i x_j x_k \\ &= [x_i, x_k] x_k^{-1} [x_i, x_j] x_k = [x_i, x_k][x_i, x_j] \end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Gleichung, da ja alle Kommutatoren von Basiselementen im Zentrum liegen. Weiters gilt

$$\begin{aligned} [x_i, x_j^{-1}] &= x_i^{-1} x_j x_i x_j^{-1} = x_i^{-1} x_j x_i x_j^{-1} (x_i x_i^{-1}) \\ &= x_i^{-1} [x_j, x_i] x_i = [x_j, x_i]. \end{aligned}$$

Die Multiplikativität im ersten Argument kann analog gezeigt werden. Induktion über den Aufbau der Wörter in $F(x_1, ..., x_n)$ liefert das gewünschte Ergebnis. $\square$

Lemma 7.0.6. *(i) Jedes Element g aus G_n hat eine Darstellung*

$$g = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \right) \left(\prod_{1 \leq i,j \leq n} [x_i, x_j]^{\beta_{i,j}} \right), \tag{7.1}$$

wobei $\alpha_i, \beta_{i,j} \in \{0, .., p-1\}$ und $\beta_{i,j} = -\beta_{j,i}$.

(ii) Diese Darstellung ist eindeutig.

Beweis. (i) Wir zeigen durch Induktion über den Aufbau der Wörter in $F(x_1, ..., x_n)$, dass jedes Element aus G_n eine Darstellung wie in (7.1) besitzt.

Offensichtlich hat jedes Basiselement x_k eine solche Darstellung. In einem Induktionsschritt zeigen wir, dass das Produkt aus einem Element x_k und

$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \prod_{1\le i,j\le n}[x_i,x_j]^{\beta_{i,j}}$ auch die gewünschte Darstellung hat. Durch Anwenden der Rechenregel $ab = ba[a,b]$ können wir die einzelnen Faktoren x_i „in die richtige Reihenfolge“ bringen und die dabei anfallenden Kommutatoren ans Ende verschieben:

$$\begin{aligned} x_k \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i} &= \left(\prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i}\right) \cdot x_k \cdot \left[x_k, \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i}\right] \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} x_i^{\alpha_i} \cdot x_k^{\alpha_k+1} \cdot \left[x_k, \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i}\right] \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} x_i^{\alpha_i} \cdot x_k^{\alpha_k+1} \cdot \prod_{i=1}^{k-1}[x_k,x_i]^{\alpha_i} \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} x_i^{\alpha_i} \cdot x_k^{\alpha_k+1} \cdot \prod_{i=1}^{k-1}[x_k,x_i]^{\frac{\alpha_i}{2}}[x_i,x_k]^{-\frac{\alpha_i}{2}} \end{aligned}$$

Wir haben hierbei die Multiplikativität der Kommutatorklammer verwendet.

(ii) Um zu zeigen, dass diese Darstellung eindeutig ist, müssen wir uns klar machen, dass bereits die Menge der formalen Produkte

$$g = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \prod_{1\le i,j\le n} [x_i,x_j]^{\beta_{i,j}}$$

mit der Multiplikation $*$, die sich aus der Darstellung (7.1) ergibt, eine Gruppe ist. Wir definieren $*$ also wie oben, indem wir die einzelnen x_i „in die richtige Reihenfolge“ bringen und die dabei anfallenden Kommutatoren ans Ende verschieben:

$$\begin{aligned} &\left(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \prod_{1\le i,j\le n} [x_i,x_j]^{\beta_{i,j}}\right) * \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} \prod_{1\le i,j\le n} [x_i,x_j]^{\delta_{i,j}}\right) \\ &\qquad = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i+\gamma_i} \prod_{1\le i,j\le n} [x_i,x_j]^{(\beta_{i,j}+\delta_{i,j})+\frac{\gamma_i\alpha_j-\alpha_i\gamma_j}{2}}. \end{aligned}$$

Wir können diese formalen Produkte etwas abgekürzt darstellen, indem wir nur mehr mit den darin vorkommenden Exponenten rechnen.
Mit $\mathbb{F}$ bezeichnen wir den endlichen Körper, der aus p Elementen besteht. Die Exponenten $(\alpha_i)_{i=1,\dots,n}$ fassen wir zum Spaltenvektor $\bar{v} \in \mathbb{F}^n$ zusammen, die Exponenten $(\beta_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ bilden eine schiefsymmetrische Matrix M in $\mathbb{F}$.

Also sei G_n das kartesische Produkt von $\mathbb{F}^n$ und E_n, wobei E_n die Menge der schiefsymmetrischen $n \times n$ Matrizen bezeichnet. Die Multiplikation kann dann angeschrieben werden als

$$(\bar{v}, M) * (\bar{w}, N) = (\bar{v} + \bar{w}, M + N + \phi_n(\bar{v}, \bar{w})),$$

mit

$$\phi_n(\bar{v}, \bar{w}) = \frac{1}{2}(\bar{w}\bar{v}^t - \bar{v}\bar{w}^t)$$

Offensichtlich ist ϕ_n linear in beiden Argumenten. Daraus folgt die Assoziativität von $*$:

$$\begin{aligned}(\bar{u}, L) * ((\bar{v}, M) * (\bar{w}, N)) &= (\bar{u}, L) * (\bar{v} + \bar{w}, M + N + \phi_n(\bar{v}, \bar{w})) \\ &= (\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}, L + M + N + \phi_n(\bar{v}, \bar{w}) + \phi_n(\bar{u}, \bar{v}) + \phi_n(\bar{u}, \bar{w})) \\ &= (\bar{u} + \bar{v}, L + M + \phi_n(\bar{u}, \bar{v})) * (\bar{w}, N) \\ &= ((\bar{u}, L) * (\bar{v}, M)) * (\bar{w}, N)\end{aligned}$$

Wie man weiters leicht sieht, ist das Paar aus Nullvektor und Nullmatrix das neutrale Element. Das inverse Element zu $(\bar{v}, M)$ ist $(-\bar{v}, -M)$.
Damit haben wir das Gewünschte gezeigt.

$\square$

Wir haben im Beweis von obigem Lemma also zusätzlich gezeigt, dass die Gruppe G_n isomorph ist zu $(\mathbb{F}^n \times E_n, *)$, wobei E_n die schiefsymmetrischen $n \times n$ Matrizen bezeichnet und

$$(\bar{v}, M) * (\bar{w}, N) = (\bar{v} + \bar{w}, M + N + \phi_n(\bar{v}, \bar{w})), \tag{7.2}$$

mit

$$\phi_n(\bar{v}, \bar{w}) = \frac{\bar{w}\bar{v}^t - \bar{v}\bar{w}^t}{2}. \tag{7.3}$$

Somit ist G_n eine nicht triviale Gruppe mit $(n + \binom{n}{2})^p$ Elementen.
Eine Rechnung zeigt, dass ein Element $(\bar{v}, M)$ genau dann im Zentrum $Z(G_n)$ liegt, wenn $\bar{v}^t\bar{w} = \bar{w}^t\bar{v}$ für alle $\bar{w} \in V_n$ gilt. Setzt man für $\bar{w}$ die Einheitsvektoren ein, erhält man $\bar{v} = 0$. Damit ist $E_n = Z(G_n)$.
Für die Kommutatoren gilt in dieser Darstellung, dass

$$[(\bar{v}, M), (\bar{w}, N)] = [0, 2\phi_n(\bar{v}, \bar{w})].$$

Also sind die Kommutatoren genau die schiefsymmetrischen Matrizen der Form $\bar{w}\bar{v}^t - \bar{v}\bar{w}^t$. Die Kommutatorgruppe $G_n^{(1)}$ ist also die lineare Hülle aller schiefsymmetrischer Matrizen dieser Form. Das folgende Lemma zeigt, dass dies bereits alle schiefsymmetrischen Matrizen E_n sind.

Lemma 7.0.7. *In Körpern mit Charakteristik ungleich 2, hat jede schiefsymmetrische Matrix geraden Rang. Des weiteren lässt sich in solchen Körpern jede schiefsymmetrische Matrix von Rang $2r$ als Summe von r Matrizen der Form $\frac{1}{2}(\bar{v}^t\bar{w} - \bar{w}^t\bar{v})$ schreiben, wobei alle Vektoren $\bar{v}$ und $\bar{w}$ linear unabhängig sind.*

Beweis. Sei $A = -A^t \in \mathbb{K}^n$. Wir beweisen den Satz durch Induktion über die Hauptuntermatrizen $A_1, ..., A_n = A$, also jenen Matrizen, die wir erhalten, wenn wir nur die ersten i Zeilen und Spalten von A betrachten. Da die Charakteristik des Körpers ungleich 2 ist, stehen in der Hauptdiagonalen von A nur 0-Einträge.
Für $A_1 = (0)$ ist das Lemma trivialerweise erfüllt.
In dem Induktionschritt $i \to i+1$, wegen der Schiefsymmetrie von A

$$A_{i+1} = \left(\begin{array}{c|c} A_i & \bar{u} \\ \hline -\bar{u}^t & 0 \end{array}\right),$$

wobei $\bar{u}$ ein i-stelliger Vektor ist. Laut Voraussetzung ist A_i eine Matrix von Rang $2k \leq i$ mit der Darstellung:

$$A_i = \sum_{j=1}^{2k} \frac{\bar{v}_j\bar{w}_j^t - \bar{w}_j\bar{v}_j^t}{2}$$

Wir können nun zwei Fälle unterscheiden.
Im ersten Fall ist $\bar{u}$ linear unabhängig von den Spaltenvektoren in A_i. Dann ist der Rang von A_{i+1} gleich $rang(A_i|\bar{u}) + 1 = 2k + 2$. Wir können die Matrix darstellen durch

$$A_{i+1} = \left(\begin{array}{c|c} A_i & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) - \bar{e}_{i+1}\bar{u}^t + \bar{u}\bar{e}_{i+1}^t,$$

wobei $\bar{e}_{i+1}$ den $i+1$-ten Einheitsvektor bezeichnet.

Im zweiten Fall sei der Vektor $\bar{u}$ von den Spaltenvektoren in A_i linear abhängig, also $\bar{u} = A_i\bar{x}$. Er besitzt deshalb eine Darstellung als Linearkombination der Vektoren $\bar{v}_k$ und $\bar{w}_k$, da

$$\bar{u} = A_i\bar{x} = \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{2k} \bar{v}_j\bar{w}_j^t - \bar{w}_j\bar{v}_j^t)\bar{x} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2k}((\bar{w}_j \cdot \bar{x})\bar{v}_j - (\bar{v}_j \cdot \bar{x})\bar{w}_j).$$

Definieren wir $\lambda_j = (\bar{w}_j \cdot \bar{x})$ und $\mu_j = (\bar{v}_j \cdot \bar{x})$, so folgt

$$\begin{aligned} A_{i+1} &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2k} \begin{pmatrix} \bar{v}_j \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_j^t & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{w}_j \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_j^t & 0 \end{pmatrix} - \bar{e}_{i+1}\bar{u}^t + \bar{u}\bar{e}_{i+1}^t \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2k} \begin{pmatrix} \bar{v}_j \\ \mu_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_j^t & \lambda_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{w}_j \\ \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_j^t & \mu_j \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

womit wir die gewünschte Zerlegung gezeigt haben. □

Aus Lemma 7.0.7 folgt, dass $Z(G_n) = G_n^{(1)} = E_n$. Damit haben wir gesehen, dass G_n die Eigenschaften (i)-(iii) erfüllt.

Wir müssen noch bestimmen, von welcher Kommutatortiefe die Gruppen G_n sind. Wir wissen, dass es in E_{2n} schiefsymmetrische Matrizen von vollem Rang gibt, zum Beispiel die Matrix

$$\begin{pmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D \end{pmatrix} \text{ mit } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus Lemma 7.0.7 folgt, dass $\|G_{2n}\| = n$.

Damit haben wir gezeigt, dass die Gruppen G_n die Eigenschaften (i)-(iv) erfüllen.
Wir definieren das Produkt $G = \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Indem wir auf G die Produkttopologie einführen (wobei wir die G_n jeweils mit der diskreten Topologie betrachten), erhalten wir eine proendliche Gruppe. Weiters sei $E = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ das Produkt der Zentren und $E' = \{(x_1, x_2, ...) \in E : \sup \|x_n\|_{G_n} : n \in \mathbb{N} < \infty\}$.

Lemma 7.0.8. *(i) G hat Exponent p und ist nilpotent vom Grad 2.*

(ii) $E' = G^{(1)}$

(iii) E ist das Zentrum von G und der Abschluss von E'

Beweis. (i) Alle G_n haben Exponent p und sind nilpotent vom Grad 2. Diese beiden Eigenschaften bleiben beim Bilden von direkten Produkt erhalten.
(ii) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann ein Kommutator in G, wenn alle Einträge x_n Kommutatoren in G_n sind. Die Elemente von $G^{(1)}$ sind alle endlichen Produkte von Kommutatoren, daher ist $E' = G^{(1)}$.
(iii) Es ist klar, dass E, als Produkt der Zentren, das Zentrum von G ist. Um

ein Element $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ zu approximieren, betrachten wir beispielsweise jene Folge, die nach endlich vielen Einträgen nur mehr das neutrale Element enthalten. Diese haben endliche Kommutatortiefe und liegen somit in E', also ist E' dicht in E. $\square$

Wir können E als Vektorraum der Dimension 2^ω über $\mathbb{F}$ auffassen. Die Gruppenoperation $*$ ist, eingeschränkt auf E, genau die Vektorraumaddition. Da E' ein Unterraum von E ist, gibt es einen Komplementärraum E''. Somit ist das innere direkte Produkt von E' und E'' als Gruppen gleich E.

Mit K bezeichnen wir nun die Menge

$$K = \{((\bar{v}_1, m_1), (\bar{v}_2, m_2), ...) \in G : \sup\{rang(m_n)|n \in \mathbb{N}\} < \infty\}.$$

Lemma 7.0.9. *K hat folgende Eigenschaften:*

(i) K ist Gruppe mit $E' \leq K \leq G$

(ii) G ist inneres direktes Produkt von K und E''

Beweis. Für (i) müssen wir zeigen, dass K bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist. Dies ist aber klar, da das Produkt zweier Elemente mit endlicher Kommutatortiefe, immer noch endliche Kommutatortiefe hat.
(ii) Da E'' eine Untergruppe des Zentrums E ist, gilt $[K, E''] = \{e\}$ und $K \cap E'' = (K \cap E) \cap E'' = E' \cap E'' = \{e\}$. Deshalb erzeugen K und E'' ein inneres direktes Produkt in G. Wegen $E' \leq K$ ist $E = E' \cdot E'' \leq K \cdot E''$. Da aber das Produkt von K und E schon ganz G ist, muss das innere Produkt von K und E'' ganz G sein. $\square$

Korollar 7.0.10. *Sei F eine nicht-triviale, endliche Untergruppe von E'' (zum Beispiel eine zyklische Untergruppe). Dann gilt*

(i) F hat ein Komplement in G

(ii) Jedes Komplement von F ist dicht in G

Beweis. (i) Da E'' ein $\mathbb{F}$-Vektorraum ist, ist E'' das direkte Produkt von F und einem Unterraum R. Laut Lemma 7.0.9 (iii) gilt dann $G \cong K \times E'' \cong K \times R \times F$.
(ii) Sei H ein Komplement von F in G. Also gelte $G = H \cdot F$ und $H \cap F = \{e\}$. F ist Untergruppe von E'', also im Zentrum von G enthalten. Damit ist $G^{(1)} = H^{(1)}$ und deshalb ist $H \geq G^{(1)} = E'$. Bildet man den Abschluss, sieht man, dass der Abschluss von H ganz E und damit auch F enthalten muss. Also muss der Abschluss von H schon ganz G sein. $\square$

Bemerkung 7.0.11. Wir haben für die Gruppen G_n gezeigt, dass sie isomorph sind zu $(\mathbb{F}^n \times E_n, *)$. Die schiefsymmetrischen Matrizen E_n entsprechen genau dem Raum der schiefsymmetrischen Tensoren, also dem $\mathbb{F}$-Vektorraum

$$(\mathbb{F}^n)^* \wedge (\mathbb{F}^n)^* = \{\beta : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F} |\ \beta \text{ bilinear und } \beta(u,v) = -\beta(v,u)\}.$$

Analog können wir für jeden Vektorraum V über $\mathbb{F}$ eine Gruppe bilden, indem wir das Produkt aus Dualraum und schiefsymmetrischen Tensoren

$$G = V^* \times (V^* \wedge V^*)$$

mit der Operation

$$\begin{aligned} (x,a) * (y,b) &= (x+y, a+b+x \wedge y) \text{ mit} \\ (x \wedge y)(u,v) &= \frac{1}{2}(x(u)y(u) - x(v)y(v)) \end{aligned}$$

versehen. Wie man leicht nachrechnen kann, ist diese Konstruktion stets eine Gruppe mit Exponenten p, deren Kommutatorgruppe im Zentrum enthalten ist. (siehe [5]).
Sei $\mathcal{C}$ die Varietät aller Gruppen, deren Kommutatorgruppe im Zentrum liegt und deren Exponent p ist. In dieser Varietät können wir die von abzählbar vielen Elementen X frei erzeugte Struktur $F(X)$ betrachten. Diese besitzt eine *proendliche Vervollständigung*, welche wir die *freie pro-$\mathcal{C}$-Gruppe* $F_{\mathcal{C}}(X)$ nennen (vgl. [11]).
Es lässt sich zeigen, dass $F_{\mathcal{C}}(X) = V^* \times (V^* \wedge V^*)$ mit $V = \oplus_{i \in \omega} \mathbb{F}$. In $F_{\mathcal{C}}(X)$ ist die Kommutatorgruppe eine echte dichte Untergruppe des Zentrums ist. Somit kann auch $F_{\mathcal{C}}(X)$ als Grundlage unseres Gegenbeispiels dienen.

Anhang A

Anhang

A.1 Modelltheorie

Definition A.1.1. Sei $\boldsymbol{M}$ ein Untermodell der Struktur $\boldsymbol{N}$. Wir sagen, dass $\boldsymbol{M}$ ein *elementares Untermodell* von $\boldsymbol{M}$ ist, oder $\boldsymbol{M} \prec \boldsymbol{N}$, wenn für jede Formel $\phi(\bar{x})$ in der Sprache von $\boldsymbol{M}$ und für alle Tupel $\bar{a}$ in $\boldsymbol{M}$ gilt, dass

$$\boldsymbol{M} \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \boldsymbol{N} \models \phi(\bar{a})$$

Satz A.1.2 (Tarski-Vaught-Kriterium)**.** *Sei $\boldsymbol{M} \leq \boldsymbol{N}$. Dann gilt $\boldsymbol{M} \prec \boldsymbol{N}$ genau dann, wenn für jede Formel $\theta(x)$ in der Sprache von $\boldsymbol{M}$ gilt, dass*

> *Wann immer es ein Element $b \in \boldsymbol{N}$ gibt, mit $\boldsymbol{N} \models \theta(b)$, dann gibt es auch ein ein $a \in \boldsymbol{M}$ mit $\boldsymbol{N} \models \theta(a)$*

Beweis. [10, Lemma 3.1.12] □

Definition A.1.3. Sei α eine Kardinalzahl. Eine Struktur $\boldsymbol{M}$ heißt α-*saturiert*, wenn für jede Teilmenge $A \subseteq M$ mit kleinerer Kardinalität als α und für jeden Typen t in $\mathrm{Th}((\boldsymbol{M}, a)_{a \in A})$ gilt, dass $t(x)$ von $(\boldsymbol{M}, a)_{a \in A}$ realisiert wird. Wir sagen die Struktur $\boldsymbol{M}$ ist *saturiert*, wenn sie $|M|$-saturiert ist.

Satz A.1.4. *Sei L eine Sprache von Kardinalität kleiner gleich α und T eine Theorie in L mit unendlich vielen Modellen. Dann gibt es ein saturiertes Modell in jeder Kardinalität $\beta > \alpha$.*

Beweis. [4][Proposition 5.1.5] □

Definition A.1.5. Eine Struktur $\boldsymbol{M}$ heißt *atomar*, wenn für jede endliche Menge $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq M$ gilt, dass $\mathrm{tp}_{\boldsymbol{M}}(a_1, ..., a_n)$ ein Haupttyp ist.

Satz A.1.6 (Omitting type theorem). *Sei T eine konsistente Theorie in einer abzählbaren Sprache und sei $\Sigma(x_1, ..., x_n)$ ein Typ in dieser Sprache. Wenn $\Sigma(x_1, ..., x_n)$ kein Haupttyp in T ist, dann gibt es Modelle von T, welche Σ nicht realisieren.*

Beweis. [4, Theorem 2.2.9] □

Satz A.1.7 (Satz von Löwenheim und Skolem). *Für jede Struktur $\boldsymbol{N}$ in einer abzählbaren Sprache L gibt es eine abzählbare, elementare Unterstruktur $\boldsymbol{M} \prec \boldsymbol{N}$.*

Beweis. [4, Korrolar 2.1.4] □

Satz A.1.8 (Two cardinal theorem). *Sei T eine Theorie in einer abzählbaren Sprache L und einem einstelligem Relationssymbol P. Angenommen es gibt zwei Modelle $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}'$, sodass $\boldsymbol{B}$ ein echtes elementares Untermodell von $\boldsymbol{B}'$ ist, aber $P^{\boldsymbol{B}} = P^{\boldsymbol{B}'}$. Dann gibt es auch überabzählbare Modelle von T mit abzählbarer Menge P.*

Beweis. [4, Korrolar 3.2.13] □

Satz A.1.9 (Ryll-Nardzewski). *Sei T eine vollständige Theorie in einer abzählbaren Sprache L, welche unendliche Modelle hat. Die folgenden Aussagen sind dann äquivalent:*

(i) Die Theorie T ist ω-kategorisch

(ii) Die Automorphismengruppe jedes abzählbaren Modells der Theorie T ist oligomorph

(iii) Es gibt ein abzählbares Modell $\boldsymbol{B}$ von T mit oligomorpher Automorphismengruppe

(iv) Es gibt ein abzählbares Modell $\boldsymbol{B}$ von T, welches nur endlich viele vollständige n-Typen für jedes $n \in \mathbb{N}$ realisiert

(v) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $S_n(T)$ der vollständigen n-Typen in T endlich

(vi) Für jedes Tupel $\bar{x} = (x_1, ..x_n)$ gibt es in L nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente Formeln $\phi(\bar{x})$ modulo T.

(vii) Jedes abzählbare Modell von T ist ein atomares und saturiertes Modell

(viii) Jede Menge von n-Tupeln, die unter $Aut(\boldsymbol{B})$ erhalten bleibt, ist first-order-definierbar in $\boldsymbol{B}$.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist klar, da eine Theorie, welche ein unendliches Modell hat, laut dem Satz von Löwenheim-Skolem stets auch ein abzählbares Modell hat.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Automorphismen erhalten alle Formeln, in dem Sinn, dass für einen Automorphismus f und jede Formel $\phi(\bar{x})$ gilt

$$\boldsymbol{B} \models \ \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \boldsymbol{B} \models \ \phi(f(\bar{a})).$$

Also bleiben auch Typen unter f erhalten. Deshalb können in $\boldsymbol{B}$ nur so viele vollständige n-Typen realisiert werden, wie es n-Orbits gibt.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Sei $\boldsymbol{B}$ ein abzählbares Modell von T, welches für alle $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele n-Typen realisiert. Für ein festes n seien $p_0, ..., p_k$ die Typen aus $S_n(T)$, welche in A realisiert werden. Da die Typen paarweise disjunkt sind, gibt es in jedem p_i eine Formel $\phi_i(\bar{x})$, welche in p_i, aber in keinem anderem Typen vorkommt. Es gilt

$$\boldsymbol{B} \models \forall \bar{x} \bigvee_{i=0}^{k} \phi_i(\bar{x}).$$

Da T eine vollständige Theorie ist, gibt es einen Beweis von $\forall \bar{x} \bigvee_{i \leq k} \phi_i(\bar{x})$ aus T. Ist nun $\psi(\bar{x})$ eine Formel in L, dann ist $\boldsymbol{B}$ ein Modell von $\forall \bar{x}, \bar{y}(\phi_i(\bar{x}) \wedge \phi_i(\bar{y}) \rightarrow (\psi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{y}))$, für alle $i < k$ und diese Sätze müssen also auch aus T beweisbar sein. Es folgt, dass $p_1, ..., p_k$ die einzigen vollständigen Typen in $S_n(T)$ sind.

(v) $\Rightarrow$ (vi). Wenn zwei Formeln $\phi(\bar{x})$ und $\psi(\bar{x})$ in demselben Typ $p(\bar{x}) \in S_n(T)$ liegen, dann sind sie äquivalent modulo T. Da $S_n(T)$ von endlicher Kardinalität k ist, gibt es höchstens 2^k nicht-äquivalente Formeln $\phi(\bar{x})$ von L modulo T.

(vi) $\Rightarrow$ (vii). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ betrachten wir eine maximale Familie von paarweise nicht-äquivalenten Formeln $\phi(\bar{x})$ in L modulo T. Laut Voraussetzung ist diese Familie endlich. Sei p ein vollständiger Typ aus $S_n(T)$. Als θ definieren wir die Konjunktion aller Formeln der Familie, welche in p liegen. Dann ist θ_p ein Support von p, das heißt für alle Formeln $\phi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$ gilt $T \vdash \theta_p(\bar{x}) \rightarrow \phi(\bar{x})$. Damit ist jedes Modell von T atomar.

(i) $\Rightarrow$ (vii) Dies zeigen wir durch einen indirekten Beweis. Angenommen es gibt einen Typ $q \in S_n(T)$, welcher kein Haupttyp ist. Wegen dem Omitting type theorem gibt es ein Modell B von T, welches q nicht realisiert. Wegen der Definition von $S_n(T)$ gibt es aber auch ein Modell A von T, welches q realisiert. Die beiden Modelle können laut Löwenheim-Skolem abzählbar gewählt werden. Mit $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ haben wir also zwei abzählbare, nicht isomorphe Modelle von T gefunden. Laut Satz A.1.4 ist das einzige abzählbare Modell von T auch saturiert.

(vii) $\Rightarrow$ (i) Seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zwei abzählbare Modelle, die atomar sind. Mittels back-and-forth-Methode lässt sich dann ein Isomorphismus zwischen den beiden konstruieren (vgl. Beweis von Satz 4.1.10).

(vii) $\Rightarrow$ (ii) Seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ zwei abzählbare Modelle und $\bar{a}$ und $\bar{b}$ zwei n-Tupel gleichen Typs. Mit einem back-and-forth-Argument kann man einen Isomorphismus zwischen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ konstruieren, der $\bar{a}$ auf $\bar{b}$ abbilden. Dies gilt insbesondere für $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, das heißt für je zwei Tupel $\bar{a}$ auf $\bar{b}$ des atomaren Modells $\boldsymbol{A}$ gibt es einen Automorphismus, der $\bar{a}$ auf $\bar{b}$ abbildet. Somit liegen $\bar{a}$ und $\bar{b}$ im selben Orbit.
Wenn wir zeigen können, dass aus T atomar folgt, dass es nur endlich viele Typen in $S_n(T)$ gibt, dann sind wir fertig. Angenommen $S_n(T)$ ist unendlich und beinhaltet λ Haupttypen und seien $\theta_i(\bar{x})$, $i < \lambda$ die Supports von diesen Typen. Wir nehmen nun ein n-Tupel von neuen, paarweise verschiedenen Konstanten $\bar{c}$, und definieren

$$T' = T \cup \{\neg\theta_i(\bar{c}) : i < \lambda\}.$$

Ein Modell $(A, \bar{a})$ von T' ist auch ein Modell von T, in dem $\bar{a}$ einen Typ realisiert, der nicht Haupttyp ist. Also genügt es zu zeigen, dass T' ein Modell hat. Wenn $\Phi(\bar{x})$ eine endliche Teilmenge von $\{\theta_i(\bar{c}) : i < \lambda\}$ ist, dann gibt es - da $S_n(T)$ unendlich ist - einen Typ $p(\bar{x})$ in $S_n(T)$, der disjunkt zu allen Typen ist, die von den Formeln in $\Phi(\bar{x})$ erzeugt werden. Also hat jede endliche Teilmenge von T' ein Modell. Laut dem Kompaktheitssatz hat also auch T' ein Modell.

(i-vii) $\Rightarrow$ (viii) Sei $X \subseteq B^n$ eine Menge von Tupeln, die unter Automorphismen erhalten bleibt. Also ist X eine Vereinigung von n-Orbits. Diese entsprechen, wie wir bereits gezeigt haben, endlich vielen vollständigen Typen. Ein Tupel liegt also genau dann in X, wenn es die Konjunktion aller Supports dieser Typen erfüllt.

(viii) $\Rightarrow$ (i) Wir zeigen dies indirekt: Angenommen es gibt unendlich viele Orbits von $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{B})$ auf B^n. Alle Vereinigungsmengen von n-Orbits bleiben unter den Automorphismen erhalten. Es gibt überabzählbar viele solche Vereinigungen, jedoch nur abzählbar viele Formeln in der Sprache von $\boldsymbol{B}$. Also sind nicht alle unter Automorphismen invarianten Mengen definierbar. $\square$

A.2 Algebra

Satz A.2.1 (Zweiter Isomorphiesatz)**.** *Sei G eine Gruppe, und seien N_1,N_2 Normalteiler von G mit $N_1 \subseteq N_2$. Dann ist $N_1 \lhd N_2$, $N_2/N_1 = \{xN_1 : x \in N_2\}$ Normalteiler in G/N_1, und*

$$(G/N_1)/(N_2/N_1) \equiv N_2/N_1.$$

Beweis. siehe [20, Satz 2.3.7.5] $\square$

Lemma A.2.2 (Splitting-Lemma)**.** *Eine kurze exakte Sequenz ist ein Diagramm mit Gruppen A, B, C und Homomorphismen u, v,*

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \longrightarrow 1$$

sodass u injektiv ist, v surjektiv und $ker(v) = u(A)$. Das Splitting-Lemma sagt, dass $u(A)$ genau dann ein Komplement in B hat, wenn es eine Retraktion r gibt, also einen Homomorphismus $r : C \to B$ gibt mit $v \circ r = id_C$. Dabei ist $r(C)$ das Komplement von $u(A)$, das heißt, dass $r(C) \leq B$ mit $u(A) \cap r(C) = \{e\}$ und $B = u(A) \cdot r(c)$.

Beweis. Siehe [20, Abschnitt 7.3.1] $\square$

Literaturverzeichnis

[1] Gisela Ahlbrandt and Martin Ziegler. Quasi-finitely axiomatizable totally categorical theories. *Ann. Pure Appl. Logic*, 30(1):63–82, 1986. Stability in model theory (Trento, 1984).

[2] Manuel Bodirsky. Complexity classification in infinite-domain constraint satisfaction. *CoRR*, abs/1201.0856, 2012.

[3] Peter J. Cameron. *Oligomorphic permutation groups*, volume 152 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[4] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model theory*, volume 73 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, third edition, 1990.

[5] Paul Conrad. Skew tensor products and groups of class two. *Nagoya Math. J.*, 23:15–51, 1963.

[6] John D. Dixon, Peter M. Neumann, and Simon Thomas. Subgroups of small index in infinite symmetric groups. *Bull. London Math. Soc.*, 18(6):580–586, 1986.

[7] David M. Evans and P. R. Hewitt. Counterexamples to a conjecture on relative categoricity. *Ann. Pure Appl. Logic*, 46(2):201–209, 1990.

[8] David M. Evans, Wilfrid Hodges, and I. M. Hodkinson. Automorphisms of bounded abelian groups. *Forum Math.*, 3(6):523–541, 1991.

[9] Haim Gaifman. Operations on relational structures, functors and classes. I. In *Proceedings of the Tarski Symposium (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXV, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971)*, pages 21–39. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974.

[10] Martin Goldstern and Haim Judah. *The incompleteness phenomenon.* A K Peters, Ltd., Natick, MA, 1998. A new course in mathematical logic, With a foreword by Saharon Shelah, Reprint of the 1995 original.

[11] Wolfgang Herfort. Proendliche Gruppen. *http://www.asc.tuwien.ac.at/ herfort/essays/proendlich.pdf*, 2008.

[12] Wilfrid Hodges. *A shorter model theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[13] Wilfrid Hodges, I. M. Hodkinson, and Dugald Macpherson. Omega-categoricity, relative categoricity and coordinatisation. *Ann. Pure Appl. Logic*, 46(2):169–199, 1990.

[14] Wilfrid Hodges, Ian Hodkinson, Daniel Lascar, and Saharon Shelah. The small index property for ω-stable ω-categorical structures and for the random graph. *J. London Math. Soc. (2)*, 48(2):204–218, 1993.

[15] Brian Osserman. Inverse limits and profinite groups. *https://www.math.ucdavis.edu/ osserman/classes/250C/notes/profinite.pdf*, 2008.

[16] Anand Pillay. $\aleph_0$-categoricity over a predicate. *Notre Dame J. Formal Logic*, 24(4):527–536, 1983.

[17] Matatyahu Rubin. On the reconstruction of $\aleph_0$-categorical structures from their automorphism groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 69(2):225–249, 1994.

[18] Saharon Shelah and Bradd Hart. Categoricity over P for first order T or categoricity for $\phi \in L_{\omega_1\omega}$ can stop at $\aleph_k$ while holding for $\aleph_0, \cdots, \aleph_{k-1}$. *Israel J. Math.*, 70(2):219–235, 1990.

[19] J. K. Truss. Infinite permutation groups. II. Subgroups of small index. *J. Algebra*, 120(2):494–515, 1989.

[20] M. Goldstern und R. Winkler. *Skriptum zu den Vorlesungen Algebra I und II.* TU Wien, 2014.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all jenen danken, die durch ihre fachliche und persönliche Unterstützung zum Gelingen dieser Diplomarbeit beigetragen haben.

Ganz besonders gilt dieses Dank Prof. Martin Goldstern, der meine Arbeit und somit auch mich betreut hat. Er hat sich stets Zeit für meine Fragen genommen, wertvolle Hinweise gegeben und mir sogar ermöglicht als Projektmitarbeiter am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie zu arbeiten. Vielen Dank für die Geduld und Mühen.

Großer Dank gebührt auch Prof. Wolfgang Herfort für wertvolle Hinweise und Feedback zu der Konstruktion aus Kapitel 7.

Weiters möchte ich Matthias Gaderer, Ludwig Kampel und Tobias Schadauer danken, die in vielen Stunden Korrektur gelesen haben und mich auf zahlreiche Fehler aufmerksam gemacht haben.

Nicht zuletzt möchte ich meiner Familie danken, die mir mein Studium ermöglicht hat und mich währenddessen stets unterstützt hat.