Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Endogene Erklärungsansätze der Lebenserwartung und Wirtschaftswachstum

ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von
Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Alexia Fürnkranz-Prskawetz

durch

Marie Kletschka
Voltagasse 73
1210 Wien

Wien, am 21. Oktober 2014 _____

(Unterschrift)

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Stellen, die wörtlich oder inhaltlich den angegebenen Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Wien, am 21. Oktober 2014 _____

(Unterschrift)

Kurzfassung

Durch die Alterung der Gesellschaft ist die Frage, wie sich die steigende Lebenserwartung auf die Wirtschaft auswirkt, von großer Bedeutung. Die vorliegende Arbeit befasst sich daher mit der unterschiedlichen Modellierung von endogener Sterblichkeit und deren Auswirkungen auf das Spar- und Investitionsverhalten der Haushalte und somit auf das Wirtschaftswachstum. Nach einem allgemeinen Teil zur Theorie der steigenden Lebenserwartung wird das erste Modell vorgestellt, in dem die Überlebenswahrscheinlichkeit durch öffentliche Gesundheitsmaßnahmen, die durch Steuern auf Arbeit finanziert werden, beeinflusst wird. Nach einer allgemeinen Betrachtung des Modells werden auch Bildungsinvestitionen berücksichtigt. Dabei wird sich zeigen, dass durch die explizite Modellierung von endogener Lebenserwartung multiple Gleichgewichte auftreten können und Armutsfallen erklärbar werden. Im zweiten Modell hängt die Überlebenswahrscheinlichkeit von privaten Gesundheitsinvestitionen ab. Dadurch kann festgestellt werden, dass der Zeitpunkt, ab wann und wie viel in Bildung oder Gesundheit investiert wird, stark von der Risikobereitschaft der Individuen abhängig ist. Beim dritten Modell wird definitiv zwischen Überlebenswahrscheinlichkeit und der Länge des Lebens unterschieden. Hier wird unter der Berücksichtigung der Nutzenfunktion und der Risikoaversion analysiert, wann Individuen zu einer Rektangularisierung der Überlebenskurve neigen und wann zu einer Verschiebung nach rechts.

Abstract

The ageing of society requires an intensive deal with the repercussion of increasing life expectancy on economy. This master thesis presents different models of endogenous longevity and how these modifications affect economic growth through saving and investment decisions of households. After a general part about ageing itself the first model will be presented. In this model the survival expectancy endogenously determined through public investments in health, which are financed through a proportional tax on labor. First the model will be treated in general before human capital will be introduced. This model will show, that endogenous longevity leads to multiple equilibria and poverty-traps. The survival probability in the second model depends on private health investments. This proceeding shows that the moment at which investments in schooling and health initially occur highly depends on the degree of risk aversion. In the third model life expectancy distinguished from the length of life. Depending on the form of the utility function and the risk aversion of the individuals, agents will choose rectangularization of the survival function i.e. an increase in the survival probability or a shift to the right i.e. an extension of their length of life.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung **7**

2. Motivation **9**

2.1. Anstieg der Lebenserwartung 9

2.2. Zusammenhang von Gesundheitsmaßnahmen und Wirtschaftswachstum . 20

3. Chakraborty (2004) **23**

3.1. Das Modell mit Kapitalakkumulation 23

3.1.1. Haushalte 23

3.1.2. Firmen 25

3.1.3. Gleichgewicht 25

Zahlenbeispiel 36

Optimale Wahl der Einkommenssteuer 36

3.2. Das Modell mit Investition in Bildung 39

4. Finlay (2006) **48**

4.1. Das Modell im Allgemeinen 48

4.1.1. Haushalte 51

4.1.2. Humankapitalakkumulation 52

4.1.3. Produktionsfunktion 53

4.1.4. Bedingungen erster Ordnung 55

4.2. Schwellenwerte des Einkommens für ein positive Investition in Bildung . . 56

4.3. Schwellenwerte des Einkommens für eine positive Investition in Gesundheit 59

4.4. Optimale Wahl zwischen Gesundheit und Bildung 60

5. Eeckhoudt und Pestieau (2008) **65**

5.1. Das Modell im Allgemeinen 65

5.2. Vereinfachter Fall 67

5.3. Allgemeiner Fall 68

6. Schlussfolgerung **71**

Abbildungsverzeichnis **74**

Tabellenverzeichnis **76**

Literaturverzeichnis **77**

A. Anhang zu Kapitel 3 **80**
A.1. Herleitung der Eulergleichung und der optimalen Ersparnis 80
A.2. Beweis von Proposition 1 81
A.3. Herleitung der optimalen Ersparnis bei Bildungsinvestitionen über die Euler-Gleichung 87
A.4. Herleitung des Gleichgewichts ohne Bildungsinvestitionen 88
A.5. Herleitung des Gleichgewichts mit Bildungsinvestitionen 89

B. Anhang zu Kapitel 4 **91**
B.1. Herleitung der isoelastischen Nutzenfunktion 91
B.2. Beweis der Differenzengleichung 93
B.3. Herleitung der reduzierten Eulergleichung 94

C. Anhang zu Kapitel 5 **95**
C.1. Maximierung der zu erwartenden Lebenszeit 95
C.2. Investitionen in x steigen mit der Risikoaversion 95

1. Einleitung

Die Alterung der Bevölkerung ist kein neues Thema, doch noch immer aktuell und weiterhin mit wirtschaftlichen Konsequenzen und politischen Herausforderungen verbunden. Die Zusammensetzung der Bevölkerung hat sich in den letzten Jahrzehnten stark verändert. Durch den dramatischen Rückgang der Fertilität und die steigende Lebenserwartung hat sich das Verhältnis der über 65-Jährigen zu den 15-64-Jährigen in der EU innerhalb von 13 Jahren von 20.6 im Jahr 1990 auf 27.5 im Jahr 2013 erhöht [7]. Diese Veränderung wird in der Ökonomie anhand des demografischen Übergangs erklärt, wobei man sich anfänglich vermehrt mit dem Rückgang der Fertilität beschäftigt hat, da dieser komplexer zu erklären war. Doch der Rückgang der Mortalität setzt sich weiter fort und hat dadurch weitreichende Konsequenzen. Somit gewinnt das Thema der steigenden Lebenserwartung in den letzten Jahren in der Ökonomie zusehends an Bedeutung und auch bei einem Großteil der Bevölkerung nimmt das Thema Gesundheit einen immer höheren Stellenwert ein. Man will länger und gesünder leben, was dazu führt, dass sich diese neuen Lebensziele sowohl auf Bildungsentscheidungen als auch auf das Sparverhalten auswirken. Durch das explizite Modellieren von endogener Sterblichkeit kann man die Auswirkungen von unterschiedlichen Lebenserwartungen auf das Sparverhalten, Bildungsentscheidungen und den Kapitalstock analysieren. Dadurch lassen sich multiple Gleichgewichte und Armutsfallen erklären, und es ist möglich zu zeigen, wieso Länder, die sich anfänglich nur durch ihre Lebenserwartung unterscheiden, zu unterschiedlichen Gleichgewichten konvergieren.

In dieser Diplomarbeit überprüfe ich, wie endogene Sterblichkeit ökonomisch modelliert werden kann, und untersuche, wie sich dieser Aspekt auf das Wirtschaftswachstum auswirkt.
In Kapitel zwei gehe ich zunächst allgemein auf den historischen Rückgang der Mortalität ein. Dabei zeige ich, wie sich das Krankheitsbild über die Zeit verändert hat, und weise auf die unterschiedliche Entwicklung der Lebenserwartung in einigen europäischen Ländern hin. Am Ende dieses Kapitels werde ich noch erläutern, inwiefern die Lebenserwartung Auswirkungen auf das Wirtschaftswachstum haben kann.
Im dritten Kapitel stelle ich das erste Modell nach Chakraborty (2004) [5] vor. Dabei wird ein Modell überlappender Generationen angenommen, bei dem die zweite Periode nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit erreicht werden kann. Diese Überlebenswahrscheinlichkeit lässt sich durch öffentliche Gesundheitsinvestitionen, die durch eine Steuer auf Arbeit in der ersten Periode finanziert werden, erhöhen. Im zweiten Teil dieses Ka-

pitels wird das Modell mit der Möglichkeit Bildungsinvestitionen zu tätigen erweitert. Diese wirken sich positiv auf den Lohn in der zweiten Periode aus. Doch wird sich zeigen, dass auch hier Armutsfallen auftreten können.
Das vierte Kapitel zeigt ein überlappendes Generationenmodell nach Finlay (2006) [8]. Auch hier kann die zweite Periode nicht mit Sicherheit erreicht werden. Doch können die Individuen in diesem Modell, anders als bei Chakraborty, selbst in ihre Gesundheit investieren. Dabei wird großes Augenmerk auf die Risikobereitschaft der Individuen gelegt und untersucht, wie sich der Grad der Risikoaversion auf Bildungs- und Gesundheitsentscheidungen auswirkt.
In Kapitel fünf wird explizit zwischen der Überlebenswahrscheinlichkeit und der Länge des Lebens unterschieden. Dabei zeigt sich, dass sich abhängig von der Art der Nutzenfunktion und der Risikobereitschaft der Individuen die Entscheidungen über Konsum, Überlebenswahrscheinlichkeit und Länge des Lebens ändern.
Anhand des letzten Kapitels werden die verschiedenen Modelle noch einmal zusammengefasst, die unterschiedlichen Ansätze verglichen und die Resultate der Arbeit vorgestellt.

2. Motivation

2.1. Anstieg der Lebenserwartung

Der erste Teil dieses Kapitels richtet sich hauptsächlich nach der Arbeit von Pierre Pestieau und Gregory Ponthiere in ihrer Veröffentlichung „On the Policy Implications of Changing Longevity“ [18].
Die Alterung der Bevölkerung ist schon seit Langem ein viel diskutiertes und aktuelles Thema in der Ökonomie. Diese strukturelle Veränderung entsteht einerseits durch einen starken Rückgang der Mortalität und andererseits durch einen Fertilitätsrückgang, der somit den Anteil der Jungen in einer Bevölkerung sehr niedrig hält. Beschrieben wird dieses Szenario durch den demografischen Übergang, der sich kurz in drei Phasen zusammenfassen lässt:

Prätransformative Phase

Diese Phase zeichnet sich durch hohe Mortalitäts- und Fertilitätsraten aus, wobei sich die Geburten- und Sterbeziffern in einem hohen Gleichgewicht befinden. Fluktuationen entstehen durch Zufallsschwankungen der Mortalität.

Phase der Transformation

In dieser Phase sinkt zunächst die Mortalität und schließlich etwas zeitverzögert auch die Fertilität. Somit öffnet sich die Bevölkerungsschere und es kommt zu einer rasch wachsenden Bevölkerung.

Posttransformative Phase

Die Fertilität sink schließlich auf das selbe Niveau wie die Mortalität und die Bevölkerungsschere schließt sich wieder. Die Geburten- und Sterbeziffern pendeln sich auf einem neuen niedrigeren demografischen Gleichgewicht ein. In dieser Phase entstehen Fluktuationen durch Schwankungen in der Fertilität.

Sozusagen ein Übergang von einem prä-modernen Zustand (mit einfacher Technologie), mit hohen Fertilitäts- und Mortalitätsraten, hin zu einem post-modernen Zustand (mit fortgeschrittener Technologie), mit niedrigen Fertilitäts- und Mortalitätsraten. [2]
Der demografische Übergang ist unbestritten und hat bei vielen Ökonomen Interesse geweckt. Doch lange Zeit hat man sich ausschließlich auf den Rückgang der Fertilität, als Hauptursache für den demografischen Übergang konzentriert, da dieser wesentlich komplizierter, als der Rückgang der Mortalität zu beschreiben war. Beim Rückgang der Fertilität muss man verschiedene komplexe Ursachen berücksichtigen und auseinanderhalten. Diese beinhalten den Fortschritt der Medizin im Bereich der Verhütung, die

Reduktion der Kindersterblichkeit, steigende Opportunitätskosten für Kinder durch versäumte Arbeitszeit und den Qualitäts-Quantitäts Tradeoff bei dem lieber weniger aber dafür gebildetere Kinder gewünscht werden. Doch mit der Zeit gewann der Anstieg der Lebenserwartung als demografische Determinante immer mehr an Bedeutung.
Somit ging die Betrachtung von der Fertilität weg, hin zur Untersuchung der Mortalität. Wobei hier zwischen einem exogenen und einem endogenen Anstieg der Lebenserwartung zu unterscheiden ist. Doch zunächst soll der Anstieg im Allgemeinen betrachtet werden. Vergleicht man die Lebenserwartung bei der Geburt, sieht man sofort, dass diese im Laufe des letzten Jahrhunderts signifikant gestiegen ist. Abbildung 2.1 zeigt diesen Anstieg anhand einiger ausgewählter europäischer Länder. Lag die Lebenserwartung zum Beispiel in Frankreich 1900 noch bei nur 45 Jahren, ist sie bis zum Jahr 2000 bereits auf 79 Jahre angestiegen [11]. Anhand der Grafik lässt sich die historische Entwicklung der Lebenserwartung gut erkennen - ein stetiger Aufwärtstrend mit zwei Einbrüchen während der beiden Weltkriege in den mitteleuropäischen Staaten. In den nordischen Staaten, hier Schweden und Norwegen, ist zum Beispiel kein bzw. kaum ein Einbruch der Lebenserwartung während des zweiten Weltkriegs erkennbar, da sich Schweden in diesem Krieg neutral verhalten und Norwegen sich kaum beteiligt hat.

Zu Beginn des 20.Jahrhunderts weisen die Staaten noch wesentliche Unterschiede in den Lebenserwartungen auf. Diese Unterschiede lassen sich durch die verschiedensten Faktoren erklären, wie zum Beispiel die geografische Lage oder die politische Struktur des Landes. So führte allein das jeweilige Klima zu unterschiedlichen Anbaumöglichkeiten in der Landwirtschaft und somit zu unterschiedlichen Ernährungsformen. Anzumerken ist auch, dass zum Beispiel sowohl Spanien als auch Italien zu Beginn des 20. Jahrhunderts noch einer Autokratie angehörten und im Vergleich dazu Schweden bereits Ansätze einer Demokratie aufwies, was sich auch deutlich auf die Lebenserwartung ausgewirkt hat [12]. Trotz dieser starker Schwankungen und Differenzen, die im Jahr 1900 zwischen Norwegen und Italien bis zu zwölf Jahre ausmachen, sieht man deutlich, dass sich diese Differenzen in der Lebenserwartung nach dem Ende des zweiten Weltkrieges langsam zurückbilden, sich somit die Lebenserwartungen der einzelnen Länder angleichen, und sogar beginnen einem linearen Trend zu folgen. Somit hat sich die Differenz zwischen Norwegen und Italien im Jahr 2009 bereits auf ein knappes Jahr reduziert. Doch nicht nur zwischen den westlichen Staaten gab es starke Unterschiede in der Lebenserwartung - der Unterschied zwischen Ost- und Westeuropa war immer vorhanden und ist heute bei der Lebenserwartung der Männer größer als noch vor 40 Jahren [13]. Als Repräsentant Osteuropas wird hier Russland angeführt. Um diesen massiven Unterschied in der Le-

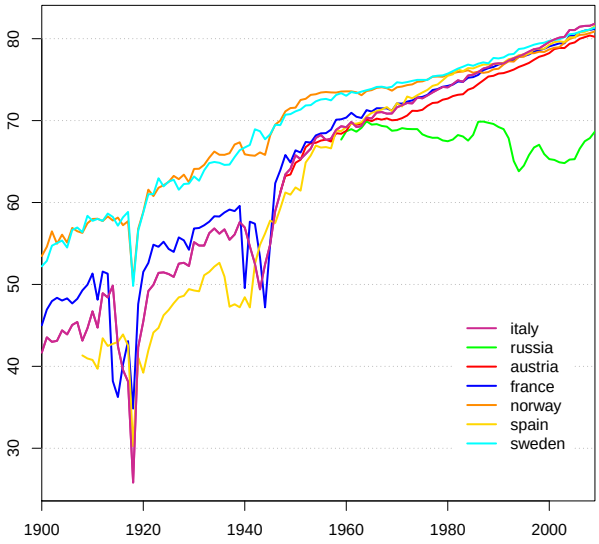

Abbildung 2.1: Lebenserwartung bei der Geburt

Quelle: eigene Berechnungen mit Daten aus The Human Mortality Database [11]: http://www.mortality.org/

benserwartung verstehen zu können wird zunächst auf die Entwicklung und die Gründe eingegangen, die zu einem Anstieg der Lebenserwartung geführt haben:
Dafür wird das Konzept des epidemiologischen Übergangs herangezogen, der stark von Omran geprägt wurde. Dieser Übergang läuft parallel zum demografischen und technologischen Übergang und beschreibt wie Pandemien und Infektionskrankheiten als Hauptursache für Tod und Krankheit durch degenerative und vom Menschen verursachte Krankheiten abgelöst worden sind [17].

„. . ., the theory of epidemiologic transition focuses on the complex change in patterns of health and diseases and on the interaction between these patterns and their demographic, economic and sociologic determinants and consequences.“ (OMRAN, 1971)

Omran unterteilt dazu den Übergang in drei Phasen:

1. Zeitalter der Seuchen und Hungersnöte

Diese Phase reicht bis Mitte des 18. Jahrhunderts und ist von einer sehr hohen, stark flukturierenden Mortalität geprägt, die somit die Lebenserwartung mit 20 bis 35 Jahren, sehr gering und schwankend ausfallen lässt. Daher ist während dieser Zeitspanne kein anhaltendes Wachstum der Bevölkerung möglich.
Die Gesamtbevölkerung ist vorwiegend sehr jung, mit einem geringen Altersabhängigkeitsquotienten. Die meisten Menschen leben in Großfamilien in ländlichen Regionen mit einer niedrigen Bevölkerungsdichte und einem sehr geringen Lebensstandard - die hygienische Bedingungen sind sowohl privat als auch öffentlich äußerst mangelhaft, das Essen der breiten Massen ist von sehr schlechter Qualität und es kommt oft zu akuten Knappheiten, unter denen besonders Kinder und junge Frauen leiden. Während dieser Phase ist die Kindersterblichkeit sehr hoch, ein Drittel aller Todesfälle treten bei Kindern zwischen 0-5 Jahren auf. Die Hauptkrankheiten in dieser Phase sind vor allem Epidemien, parasitäre Krankheiten und Mangelkrankheiten, darunter fallen zum Beispiel Tuberkulose, Diarrhoe, Lungenentzündung, Pocken und Unterernährung. Herzkrankheiten treten zu diesem Zeitpunkt noch kaum auf. Die starken gesundheitlichen Probleme werden durch Umweltprobleme, wie verunreinigtes Wasser und Essen, schlechte Wohnsituationen, Insekten, Nagetiere und durch die mangelnde persönliche Körperhygiene verstärkt. Auch gab es zu dieser Zeit noch keine medizinischen Einrichtungen und nur wenige ausschlaggebende Therapien [4].

2. Zeitalter der rückläufigen Epidemien

Während dieser Phase geht die Mortalität zunehmend zurück und die starken Schwankungen durch Epidemien werden kleiner, seltener oder verschwinden gänzlich. Die Lebenserwartung steigt von etwa 30 auf bis zu 50 Jahre und auch das Bevölkerungswachstum steigt nachhaltig an und beginnt einem exponentiellen Verlauf zu folgen.
Die Bevölkerung ist weiterhin noch jung, doch beginnt langsam der Anteil der älteren Menschen und somit der Altersabhängigkeitsquotient zu steigen. Die meisten Menschen leben weiterhin in Großfamilien in ländlichen Gebieten, doch ist langsam ein Zuzug in die Städte zu spüren, wobei sich dort das Bild einer kleineren Familie etabliert. Weiters kommt es zur Weiterentwicklung der Landwirtschaft durch neue Techniken, dem Fruchtwechselanbau und zu einem Ausbau der Transport- und Kommunikationsnetzwerke durch den Dampfschiff- und Eisenbahnbau. Dies fördert stark die Industrialisierung, sorgt für eine bessere Ernährung und bei Miss-

ernten für eine sichere Nahrungsmittelversorgung aus anderen Regionen. Der Lebensstandard bleibt weiterhin sehr niedrig und verbessert sich erst etwas zum Ende dieser Periode, mit Ausnahme der Slums in den Städten, wo sich die Bedingung noch weiter verschlechtern. Mit der Zeit sind Pandemien durch Infektionen, Unterernährung und die Pest verschwunden [4]. Durch die wachsende Verkehrs- und Kommunikationsdichte bekommen während des 18. und frühen 19. Jahrhunderts Infektionskrankheiten, wie zum Beispiel Pocken, Masern oder Keuchhusten einen altersspezifischen Charakter und werden zu klassischen Kinderkrankheiten, gegen die man immun war, sobald man diese überlebt hatte. So ging die Erwachsenensterblichkeit deutlich zurück [23]. Doch auch die Kindersterblichkeit ist durch ökologische Verbesserungen, wie die Filterung von Wasser, Müll- und Fäkalienbeseitigung, steigender persönlicher Hygiene und besserer Ernährung zurückgegangen. Die Säuglingssterblichkeit ist besonders durch Pasteurisierung der Milch rückläufig, da Mütter begonnen haben die Milch zu Hause aufzukochen. Doch ein wirklich auffallender Rückgang in der Säuglingssterblichkeit wird erst nach dem ersten Weltkrieg wahrgenommen. Auch werden in dieser Zeit bereits Gesundheitssysteme entwickelt, doch sind diese bei weitem noch nicht ausgereift und ausreichend. Führende Krankheiten in dieser Phase sind Pocken, ein Anstieg an Herzkrankheiten und auch noch weiterhin Infektionskrankheiten. Diese sind zwar noch vorhanden aber die nicht infektiösen Krankheiten werden signifikanter und Berufskrankheiten steigen [4].

3. Zeitalter der degenerativen und gesellschaftlich verursachten Krankheiten

In dieser Zeitspanne sinkt die Mortalität weiter und pendelt sich teilweise sogar auf einem stabilen niedrigen Niveau ein. Die Lebenserwartung steigt kontinuierlich an und überschreitet 50 Jahre. Während dieser Phase ist das Bevölkerungswachstum gering aber positiv.

Die Bevölkerungsstruktur hat sich zu dieser Zeit schon stark verändert, da die Fertilität weiter sinkt und die Menschen länger leben. So steigt der Altersabhängigkeitsquotient massiv an. Die Menschen leben jetzt vermehrt in Städten, was zu einem enormen Wachstum der Städte und Slumbildung führt. Die Familiengröße ist deutlich gesunken und die Lebensbedingungen haben sich für den Großteil der Bevölkerung massiv verbessert. Der steigenden Wohlstand lässt die Leute dann schnell dazu tendieren zu viel zu konsumieren, besonders zu fettes, ungesundes Essen. Dies steigert dann das Risiko einer Herz- oder Stoffwechselerkrankung. Auch Krankheiten wie Krebs oder Schlaganfälle nehmen in dieser Periode immer mehr zu

und werden zur Haupttodesursache. Lungenentzündung, Bronchitis, Grippe und einige Viruskrankheiten bleiben bestehende Krankheiten. Es beginnt ein Zeitalter in dem die Krankheit den Tod überschattet, da chronische und degenerative Probleme, mentale Krankheiten, Abhängigkeiten und Schadstoffbelastungen als Hauptproblem gelten [4].

Somit haben nicht nur mehr Hygiene, verbesserte medizinische Technik und bessere Lebensstandards die Lebenserwartung erhöht, sondern auch die Tatsache, dass sich im Gegensatz zu Infektionskrankheiten, die einem schon in jungen Jahren zum Verhängnis werden können, die degenerative Krankheiten erst im fortgeschrittenen Alter bemerkbar machen.
Viele Ökonomen haben diese drei Phasen von Omran bereits durch eine vierte Phase erweitert, die ihren Beginn um 1980 hat. Diese Phase zeichnet sich dadurch aus, dass sich nicht mehr das Krankheitsbild ändert sondern nur der Zeitpunkt des Eintretens und sich somit nur mehr die Lebenserwartung erhöht [15]:

4. Zeitalter der verzögerten degenerativen Krankheiten

Es wurde immer ein großes Augenmerk auf die Verringerung der Säuglings- und Kindersterblichkeit gelegt. Nach dem Rückgang der Kindersterblichkeit folgte dann auch der starke Rückgang der Säuglingssterblichkeit ab Mitte des 20. Jahrhunderts. Durch die so erzielten geringen Sterbewahrscheinlichkeiten in jungen Jahren wird nun damit begonnen sich mit den neuen Krankheiten und Problematiken im Jugend- und Erwachsenenalter zu beschäftigen [15]. Es wird durch Tabakgesetze, Verkehrssicherheit und Reduktion der Luftverschmutzung vermehrt auf Gesundheitsvorsorge und -förderung geachtet und das Gesundheitswesen durch Mutterschutz, Krebsvorsorge und Immunisierungen, verbessert. Die strengeren Tabakgesetze, die aus Preiserhöhungen, Rauchverboten in öffentlichen Einrichtungen und Werbeverboten bestehen, bewirken eine Reduktion an Todesfällen durch Lungenkrebs. Auch beim Konsum von Alkohol wird eingegriffen, wenn auch nicht so rigoros wie bei Tabak. Durch erhöhte Preise, Durchführungen von Marktkontrollen, Zugangsbeschränkungen und Verminderung von Trunkenheit am Steuer können die Fälle von chronischen Leberkrankheiten und Leberzirrhose eingeschränkt werden. Auch bei der Verkehrssicherheit kann in kurzer Zeit allein durch die Einführung des Gurtenzwangs, Geschwindigkeitsbegrenzungen und Helmen die Anzahl der Verkehrstoten massiv reduziert werden.

All diese Maßnahmen und natürlich auch der Fortschritt der Technik und Medizin haben dazu beigetragen, dass sich die Lebenserwartung erhöht und sich somit der Zeitpunkt an

dem die degenerativen Krankheiten relevant werden, weiter nach hinten verschoben hat. In Abbildung 2.2 wird anhand einiger europäischer Länder die Sterbewahrscheinlichkeit für Frauen im Alter von 80 Jahren dargestellt. Anhand dieser Grafik ist deutlich zu erkennen, dass sich die Wahrscheinlichkeit mit 80 Jahren zu sterben in den letzten 70 Jahren massiv verringert hat. Betrachtet man die Daten von Österreich, reduziert sich diese Wahrscheinlichkeit von etwa 13% im Jahr 1950 auf 3% im Jahr 2011 [11],[24].

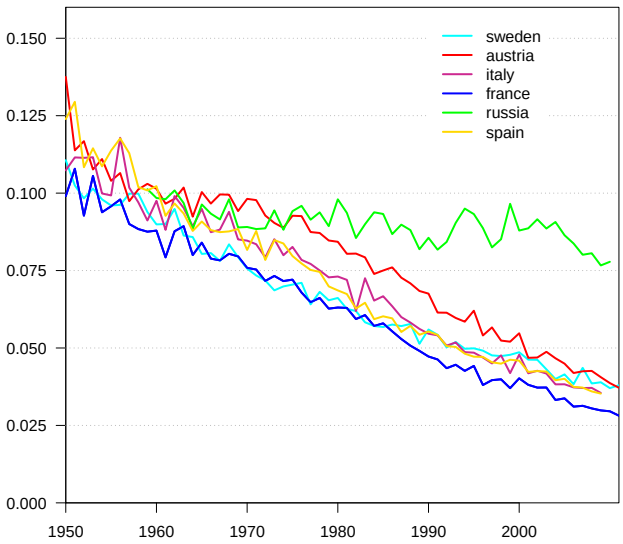

Abbildung 2.2: Sterbewahrscheinlichkeit für 80jährige Frauen von 1950-2011

Quelle: eigene Berechnungen mit Daten aus The Human Mortality Database [11]: http://www.mortality.org/ und Statistik Austria [24]: http://www.statistik.at/

Betrachtet man in dieser Grafik Russland, ist auch hier zu erkennen, dass es massive Unterschiede zu den westlichen Staaten gibt. Die Unterschiede in den Jahren zwischen 1960-1980 lassen sich teilweise darauf zurückführen, dass in den westlichen Staaten Europas in diesem Zeitraum ein großes Wirtschaftswachstum herrschte was in den meisten osteuropäischen Staaten nicht der Fall war. Das fehlende Wachstum in dieser Phase lässt sich durch das Versagen des kommunistischen Wirtschaftsmodells erklären. Mangelndes Wirtschaftswachstum kann in diesem Zusammenhang als Grund für schlechtere Lebenserwartungen herangezogen werden, da sich Wirtschaftswachstum auf verschiedene Faktoren, wie auf veränderte Lebensstile, bessere öffentliche Gesundheitssysteme und

Gesundheitsvorsorge auswirkt. Besonders das Fehlen einer zielführenden Gesundheitspolitik wirkte sich enorm negativ auf die Lebenserwartung aus. Zwar hatte die Sowjetunion alles was militärisch von Nutzen und international anerkannt war, wie Nuklearwaffen oder ein großes Raumfahrtprogramm, doch kein nachhaltiges Gesundheitssystem, da sie die Gesundheit ihrer Bevölkerung ignorierten [13]. Erst 2013 unterzeichnete Putin ein Anti-Tabak-Gesetz, das ein Rauchverbot an öffentlichen Orten, ein Werbeverbot und Altersbeschränkungen umfasste [26]. Auch der Alkohol spielt in Russland bis heute eine große Rolle - er ist leicht beschaffbar und billig. Der Alkoholkonsum ist besonders nach dem Kollaps der Sowjetunion 1990 enorm angestiegen und mit ihm auch die Gewalt. Die Anzahl der Morde war 2002 25 mal höher als in anderen europäischen Staaten [27]. Der massive Alkoholkonsum wirkt sich natürlich auf die Anzahl der Verkehrstoten aus, da auch im Bereich der Verkehrssicherheit ein großer Aufholbedarf besteht. Der starke Tabak- und Alkoholkonsum, kombiniert mit der hohen Gewaltbereitschaft und dem extrem langsamen Anlaufen der Gesundheitseinrichtungen und - politiken haben die Lebenserwartung in Russland sinken, bzw. auf einem niedrigen Niveau verharren lassen [13].

Wie sich die Struktur des Überlebens zwischen jungen und alten Individuen innerhalb des letzten Jahrhunderts verändert hat lässt sich gut anhand der Überlebenskurven verdeutlichen [15]. In Abbildung 2.3 sind die Überlebenskurven für Kohorten zwischen 1922 und 2009 in Großbritannien dargestellt. Auf der y-Achse wird die Anzahl der Individuen aufgetragen, in diesem Fall pro Kohorte 100.000 und auf der x-Achse die Lebensjahre. Die y-Achse spiegelt dann die Überlebenswahrscheinlichkeit der einzelnen Kohorten wider. Jede Überlebenskurve stellt den Anteil eine Kohorte dar, der die verschiedenen Altersstufen erreicht. Es wird angenommen, dass der Tod ein absorbierender Zustand ist. Die Überlebenskurven sind fallend und ihr Anstieg stellt die Stärke der Mortalität in dem jeweiligen Alter fest. Das bedeutet, dass eine flache, kaum abfallende Kurve eine niedrige Sterblichkeit mit sich bringt und ein starker Abfall auf eine hohe Sterblichkeit hinweist [18]. Die Kurven zeigen die enormen Veränderungen in den Überlebenswahrscheinlichkeiten über die Zeit. Vergleicht man die Kurven erkennt man sofort den enormen Rückgang in der Säuglingssterblichkeit. Dies ist in der linken oberen Ecke der Grafik abzulesen - die steil abfallende Kurve der 1922-Kohorte wird bereits bei der 1950-Kohorte durch eine flache Kurve ersetzt. Starben 1922 noch 6.6% der Säuglinge im ersten Lebensjahr, waren es 1950 nur mehr 2.6%, 1970 1.5%, 1990 unter 0.7% und 2009 hat sich dieser Anteil bereits auf weniger als 0.4% verringert. Aber auch in den höheren Altersklassen hat sich viel getan. Betrachtet man zum Beispiel den Anteil der Menschen die das 60. Lebensjahr erreichen, lag dieser 1922 noch bei nur 64% und stieg bis in das Jahr 1950

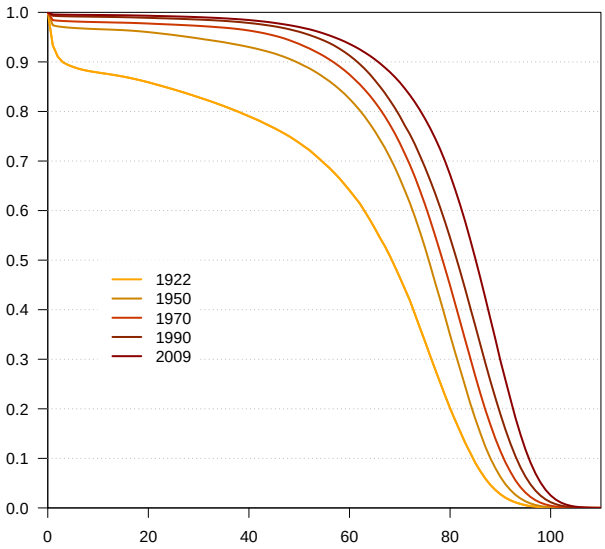

Abbildung 2.3: Überlebenskurven für Kohorten aus Großbritannien zwischen 1922 und 2009

Quelle: eigene Berechnungen mit Daten aus The Human Mortality Database [11]: http://www.mortality.org/

auf 82%, bis 1970 auf 87%, bis 1990 auf 91%, bis er schließlich im Jahr 2009 den Anteil von knapp 94% erreichte [11].

Allgemein kann man die Veränderungen der Überlebenskurve in zwei unterschiedliche Bewegungen zerlegen - in eine Verschiebung hinauf und eine Verschiebung nach rechts. Der deutliche Aufwärtstrend der Kurve zeigt, dass ein immer größer werdender Anteil der Individuen ein höheres Alter erreicht. Dieser Trend wird als Rektangularisierung der Überlebenskurve bezeichnet und bedeutet, dass sich die Zeitspanne in der die meisten Menschen sterben immer mehr konzentriert und ins höhere Alter verschiebt [18]. Untersucht man dieses Verhalten anhand der Daten, ist daraus abzulesen, dass in Großbritannien im Jahr 1922 50% der Menschen im Alter zwischen 68 und 107 Jahren verstorben sind. Dies entspricht einer Zeitspanne von $107 - 68 = 39$ Jahren. Diese Zeitspanne hat sich 1970 auf $110-78 = 32$ Jahre reduziert und ist 2009 auf $110-85 = 25$ Jahre gesunken [11]. Die nicht zu erreichende Idealkurve wäre ein rechter Winkel, möglichst weit rechts im hohen Alter. Dies würde allerdings bedeuten, dass alle Menschen die komplett idente Lebenszeit hätten, somit keine Unterschiede mehr auftreten würden, und das Leben

risikofrei wäre, also kein vorzeitiger Tod eintreten könnte, was natürlich nie der Fall sein wird.
Bei der zweiten Verschiebung rückt die Überlebenskurve immer weiter nach rechts. Diese Verschiebung bedeutet, dass die Lebenserwartung der Menschen über die Jahre hinweg stetig ansteigt und immer mehr Individuen ein höheres Alter erreichen. Um zu zeigen, dass immer mehr Menschen ein höheres Alter erreichen, betrachtet man den Anteil der Kohorte, der bis zu seinem 100sten Lebensjahr überlebt hat [18]. 1922 lag dieser Anteil bei schlichten 0.051%. Dieser Anteil stieg von 0.139% im Jahr 1950 auf 0.444% in 1970. Im Jahr 1990 erreichte er bereits 1.156% und erhöhte sich bis 2009 abermals auf stolze 2.523% [11]. Diese Veränderung entspricht einer Multiplikation von 50 in den letzten nicht einmal 100 Jahren. Im Gegensatz zu der Rektangularisierung der Kurve, bei der die Verschiebung der Kurve eine Verringerung der Ungleichheiten in der Langlebigkeit zwischen den Individuen mit sich bringt, kann die Verschiebung nach rechts sogar eine Vergrößerung dieser Ungleichheiten bewirken [18].
Unterschiede in der Lebenserwartung zwischen Individuen im selben Land können sogar die Unterschiede zwischen den Ländern, die bereits erwähnt wurden, überschreiten. Diese Unterschiede sind teilweise vom Individuum selbst bestimmbar und andere wiederum nicht. Faktoren die nicht persönlich beeinflussbar sind, sind zum Beispiel die genetischen Grundlagen, ein anderer Faktor auf den das Individuum zwar keinen Einfluss hat aber der sozial bestimmbar ist wäre die Umweltverschmutzung, sowie teilweise der Wohnort. Andere Faktoren, die vom Individuum selbst bestimmbar und somit endogen sind, sind Alkohol, Zigaretten, Ernährung und Bildung, wobei die Bildung meist stark von den Eltern abhängt. Wie sich solche Unterschiede auswirken können soll in Abbildung 2.4 verdeutlicht werden. Hier werden zum Vergleich die Lebenserwartungen für Männer und Frauen in Schweden von 1750 bis 2011 abgebildet.
Wie man erkennt folgen beide Kurven der Lebenserwartung zwar dem selben Trend und sind auch den gleichen Schwankungen ausgesetzt aber die Lebenserwartung der Frauen liegt dauerhaft über der der Männer. So kommt es zu einem Abstand zwischen den beiden Kurven und einem Unterschied in der Lebenserwartung. Meistens lag der Abstand immer um die drei Jahre, doch hatte er sich bis 1980 enorm ausgebaut und es entstand eine enorme Differenz von 6 Jahren. Über die Zeit hat sich dieser Unterschied verringert und lag 2011 nur mehr bei 4 Jahren und ein weiteres Annähern der Kurven ist zu erkennen [11].
Wie man auch an dieser Grafik sieht hat die Lebenserwartung noch kein konstantes Niveau erreicht. Einige Ökonomen haben somit auch schon die 5. Stufe des epidemiologischen Übergangs ausgerufen:

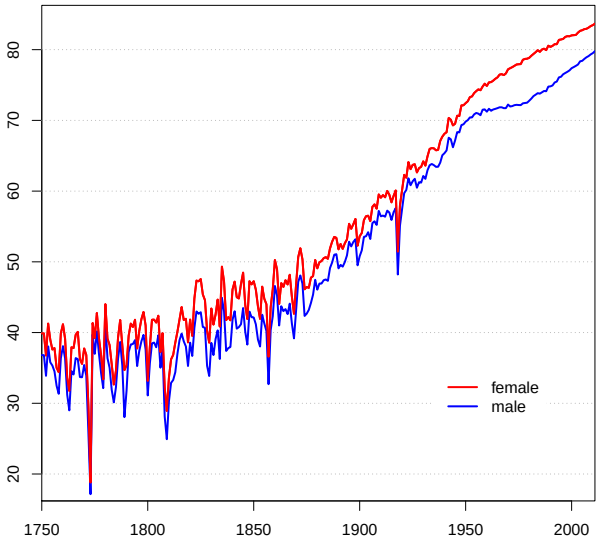

Abbildung 2.4: Lebenserwartung von Männern und Frauen in Schweden von 1750 bis 2011

Quelle: eigene Berechnungen mit Daten aus The Human Mortality Database [11]: http://www.mortality.org/

5. Zeitalter der neu auftauchenden und wiederkehrenden Infektionskrankheiten

Die Krankheitsbilder dieser Phase werden steigende Infektionskrankheiten wie HIV und Aids sein. Auch wird davor gewarnt, dass alte Infektionskrankheiten, wie Tuberkulose oder Malaria wieder stark auftreten werden. Infektionskrankheiten werden in diesem Zeitalter vor allem durch die wachsende Urbanisierung, dem Überkonsum von Antibiotika und veränderte Umwelteinflüsse gefördert. Die Umwelteinflüsse auf Krankheiten machen sich dadurch bemerkbar, dass zum Beispiel durch die Veränderung des Klimas wieder andere Überlebenschancen für Erreger bestehen oder durch vermehrte Flutkatastrophen das Trinkwasser stark verunreinigt wird [16]. In dieser Phase wird aber auch die Lebenserwartung weiter ansteigen. Dies könnte unter anderem durch weitere gesundheitspolitische Maßnahmen erreicht werden, wie zum Beispiel die Bekämpfung von Übergewicht. Wie auch Zigaretten und Alkohol hat der Konsum von zu fettem Essen seinen Beginn nach dem zweiten Weltkrieg, als der Lebensstandard wieder anstieg. Dies führte

zu einem Überkonsum. Durch Steuererhöhungen auf ungesunde Nahrung, weitere Präventionsmaßnahmen, wie Präsenz des Problems in den Medien, und verbesserte und reizvolle Sportprogramme könnten hier noch weitere wertvolle Lebensjahre gewonnen werden. Weitere Verbesserung des Lebensstils, technologischen und medizinischen Fortschritt und Bekämpfung der Umweltverschmutzung können zu einer weiteren Erhöhung der Lebenserwartung in der Zukunft beitragen.

Die Lebenserwartung hat sich in den letzten 160 Jahren jährlich um 3 Monate gesteigert und sie steigt auch jetzt noch weiter an. Bis heute sind noch keine Anzeichen sichtbar, die dieses Wachstum widerlegen könnten. Für ein Anhalten der Lebenserwartung müsste sich zumindest die Wachstumsgeschwindigkeit verringern, die aber weiterhin auf einem konstanten Niveau verharrt. Berechnungen zufolge würde somit in den nächsten sechs Jahrzehnten die Lebenserwartung auf ein Rekordhoch von 100 Jahren ansteigen. In der Öffentlichkeit verschließt man sich noch diesen Berechnungen und glaubt an ein bevorstehendes Limit im Alter, doch dieses Verhalten hat fatale Folgen auf das Gesundheitssystem, zukünftige Pensionen und andere soziale Dienstleistungen. Die Bevölkerung wird noch mehr altern und sowohl die Politik als auch die einzelnen Individuen, die ihr Pensionsalter und Sparverhalten diesen Veränderungen anpassen sollten, sollten darauf vorbereitet sein [14]. Somit ist das Bevölkerungswachstum beides: ein Ergebnis und eine Herausforderung für das Gesundheitssystem [20].

2.2. Zusammenhang von Gesundheitsmaßnahmen und Wirtschaftswachstum

Unter den Ökonomen ist man sich einig, dass technologischer Fortschritt, Kapitalakkumulation, Arbeitskraft und Humankapital Wirtschaftswachstum erzeugen können [1]. Gesundheitsinvestitionen wurden jedoch lange Zeit als treibende Kraft vernachlässigt.
Gesundheit ist nicht nur eine Konsequenz, sondern auch ein Grund für höheres Einkommen. Sie verbessert die Arbeitsproduktivität, da gesunde Mitarbeiter leistungsfähiger sind. Gleichzeitig wird die Anzahl der Krankenstands- und Pflegetage verringert, da Arbeitnehmer auf Grund ihrer eigenen Gesundheit und der ihrer Familienmitglieder weniger oft fehlen. Weiters wirkt sich die Gesundheit auf das Spar- und Investitionsverhalten und somit auf den Wohlstand der Individuen aus. Ein längeres, gesünderes Leben bietet mehr Anreiz zu sparen oder Geschäftsinvestitionen zu tätigen. Im Fall häufiger oder chronischer Krankheit entstehen Kosten. Diese Kosten kommen sowohl durch die medizinische Betreuung, als auch durch entgangenen Lohn zustande. Dadurch verringert sich die Möglichkeit des Sparens, da weniger oder gar kein Geld überbleibt [22].
Ein besonderes Augenmerk ist auf die Bildung von Humankapital zu legen. Durch hö-

here Bildung verbessert man seine Fähigkeiten, treibt den technologischen Fortschritt voran und generiert Wissen. Doch nun kann es sein, dass die Lebenserwartung diese Bildungsinvestitionen beeinflusst [5]. Wobei die Lebenserwartung der Hauptindikator für die Gesundheit der Bevölkerung ist [10]. Bessere Gesundheit in jungen Jahren hat positive Auswirkungen auf die kognitiven Fähigkeiten der Kinder und führt zu größeren Lernerfolgen. Im Erwachsenenalter führt eine bessere Gesundheit zu einer höheren Lebenserwartung. Dadurch werden wiederum Bildungsausgaben in der Jugend rentabler, da sich nun deren Erträge, die sich in Form von höheren Löhnen widerspiegelen, auf einen längeren Zeitraum erstrecken [22]. Somit führt eine geringere Lebenserwartung dazu, dass die Menschen die Zukunft stärker abdiskontieren und weder zu sparen gewillt sind, noch in ihre Gesundheit oder in ihre Bildung investieren. Dadurch kann es sein, dass Länder, die sich ausschließlich in der Gesundheit ihrer Bevölkerung unterscheiden, zu unterschiedlichen Lebensstandards neigen [5].
In Abbildung 2.5 ist der Zusammenhang von Wirtschaftswachstum und Lebenserwartung gut zu erkennen.

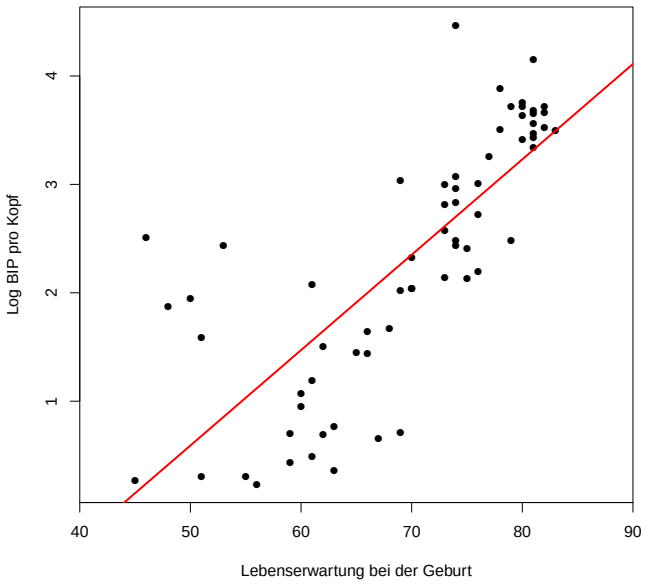

Abbildung 2.5: Lebenserwartung bei der Geburt und BIP pro Kopf im Jahr 2009

Quelle: eigene Berechnungen mit Daten aus WorldBank [25]: http://data.worldbank.org

In dieser Abbildung werden 66 Länder der Welt betrachtet. Auf der x-Achse wird die durchschnittliche Lebenserwartung der Länder im Jahr 2009 aufgetragen und auf der y-Achse die logarithmierten Werte des BIP pro Kopf (gemessen in Kaufkraftparität) des selben Jahres. Es ist ein positiver Zusammenhang zwischen der Lebenserwartung und dem BIP zu erkennen.
Somit führt die weitere Verbesserung der Gesundheit, der Lebenserwartung und daraus folgend eine Reduktion der Mortalität zu Wirtschaftswachtum und weiteren Entwicklungen.

3. Chakraborty (2004)

3.1. Das Modell mit Kapitalakkumulation

3.1.1. Haushalte

Shankha Chakraborty entwickelte in seiner 2004 erschienenen Veröffentlichung „Endogenous lifetime and economic growth“ [5] ein allgemeines Gleichgewichtsmodell, in dem sich die Gesundheit und das pro Kopf Einkommen gleichzeitig entwickeln können. Dies schaffte er indem er endogene Sterblichkeit in ein 2 Perioden OLG-Modell von Diamond mit exogener Fertilität einbaute. Das heißt, dass in jeder Periode Individuen geboren werden und zwei Perioden lang leben. In der ersten Periode verfügt jedes Individuum über eine Zeiteinheit. Diese Einheit bietet es in der ersten Periode am Arbeitsmarkt an und erhält dafür einen Lohn w_t.
Die erste Periode überleben die jungen Individuen mit Wahrscheinlichkeit eins, während sie in die zweite Periode nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ϕ_t gelangen. Bei diesem Modell ist diese Wahrscheinlichkeit ϕ_t abhängig von öffentlichen Gesundheitsinvestitionen h_t, die durch eine proportionale Steuer $\tau_t \in (0, 1)$ auf das Arbeitseinkommen w_t in der ersten Periode finanziert werden. Somit entspricht die Gesundheitsinvestition einer Person in der ersten Lebensphase mit der vorhandenen Technologie einem proportionalem Anteil seines Einkommens, wobei bei dieser Technologie zusätzlich konstante Skalenerträge angenommen werden:

$$h_t = g(\tau_t w_t) = \tau_t w_t \tag{1}$$

Diese Gesundheitsmaßnahmen beinhalten etwa die Verbesserung von medizinischen und sanitären Einrichtungen, Impfungen oder Krankheitsbekämpfungen und beeinflussen somit den Gesundheitszustand der Individuen. Die Überlebenswahrscheinlichkeit ist eine nicht fallende, konkave Funktion dieser Gesundheitsausgaben:

$$\phi_t = \phi(h_t) \tag{2}$$

Diese Funktion erfüllt weiters folgende Bedingungen:

1. $\phi(0) = 0$
2. $lim_{h\to\infty}\phi(h) = \beta \leqslant 1$
3. $lim_{h\to 0}\phi^{'}(h) = \gamma < \infty$

Die erste Bedingung besagt, dass Gesundheitsinvestitionen essenziell sind und somit keine Überlebenschancen für ein Individuum bestehen, wenn keine Investitionen in die Gesundheit getätigt werden. Bedingung zwei drückt aus, dass eine obere Grenze für die Überlebenswahrscheinlichkeit exisitiert. Auch wenn überdurchschnittlich viel oder alles in die Gesundheit investiert wird, kann die obere Grenze, die hier mit eins festgelegt worden ist, nicht überschritten werden. Mit Bedingung drei wird verdeutlicht, dass Randgleichgewichte nicht ausgeschlossen werden.
Weiters werden in diesem Modell perfekte Annuitätenmärkte angenommen. Dabei werden alle Ersparnisse der jungen Individuen am Ende der Periode t in einem gemeinsamen Fonds zwischengelagert. Der gemeinsame Fonds investiert diese Ersparnisse in Kapital und erhält dafür einen Bruttoertrag R_{t+1} in Periode $t+1$. Dieser garantiert den Überlebenden in Periode $t+1$ einen Bruttoertrag von $\hat{R}_{t+1} = \frac{R_{t+1}}{\phi_t}$. Somit sinkt der Ertrag des Einzelnen mit höherer Überlebenswahrscheinlichkeit.
Die Nutzenmaximierung eines in t geborenen Individuums entspricht

$$U_t = \ln c_t^t + \phi_t \ \ln c_{t+1}^t$$

wobei mit c_t^t und c_{t+1}^t der Konsum beschrieben wird. Die tiefgestellten Indizes geben Auskunft über die jeweilige Periode t oder $t+1$, in der konsumiert wird und das hochgestellte t beschreibt, die in t geborene Kohorte.
Diese Nutzenmaximierung ist folgenden Budgetbeschränkungen unterworfen:

$$\begin{aligned} c_t^t &\leq (1-\tau_t)w_t - z_t \\ c_{t+1}^t &\leq \hat{R}_{t+1} z_t \end{aligned}$$

z_t entspricht hier den Ersparnissen in der Jugend.
Die optimalen Ersparnisse entsprechen:

$$z_t = (1-\tau_t)\sigma_t w_t$$

wobei

$$\sigma_t = \frac{\phi_t}{1+\phi_t}.$$

Beweis: Siehe Appendix A

Mit σ_t wird die Sparintensität bezeichnet. Sie ist eine steigende Funktion der Überle-

benswahrscheinlichkeit ϕ_t. Somit hängen die Ersparnisse direkt mit der Überlebenswahrscheinlichkeit zusammen. In einer Ökonomie mit einer hohen Überlebenswahrscheinlichkeit wird demnach mehr gespart als in einer Ökonomie mit einer hohen Mortalität.

3.1.2. Firmen

Firmen produzieren mittels einer Cobb-Douglas Produktionsfunktion, $F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, wobei $\alpha \in (0, 1)$ und $A > 0$. Somit entspricht der Output pro Arbeiter

$$f(k) = Ak^{\alpha} \tag{3}$$

mit k als pro Kopf Kapital.
Die Firmen lösen folgendes Profitmaximierungsproblem

$$\max_{K,L} \Pi(K, L) = F(K, L) - w_t L - \tilde{r_t} K. \tag{4}$$

Auf dem Gütermarkt herrscht vollkommener Wettbewerb, was dazu führt, dass sowohl Arbeit, als auch Kapital entsprechend ihrem Grenzprodukt bezahlt werden:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} - w_t = 0 \qquad \Rightarrow w_t = (1 - \alpha)Ak_t^{\alpha} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} - \tilde{r_t} = 0 \qquad \Rightarrow \tilde{r_t} = \alpha Ak_t^{\alpha-1} \tag{6}$$

In der restlichen Arbeit wird der Zins wie folgt definiert:

$$R_t = 1 + \tilde{r_t} - \delta = 1 + \alpha Ak_t^{\alpha-1} - \delta$$

wobei mit δ die Abschreibungsrate des physischen Kapitals bezeichnet wird.

3.1.3. Gleichgewicht

Hier wird angenommen, dass die Gesundheitssteuer konstant und exogen gegeben ist, $\tau_t = \tau$ für alle t. Das Wettbewerbsgleichgewicht wird durch (1), (2), (5), (6), einem anfänglichen pro Kopf Verhältnis k_0 und einer Abfolge von $\{(k_t, h_t)\}$ bestimmt, die folgende zwei Gleichungen erfüllt:

$$k_{t+1} = (1 - \tau)\sigma(\phi_t)w_t \tag{7}$$

$$\hat{R}_{t+1} = \frac{R_{t+1}}{\phi_t} \tag{8}$$

Das Kapital in Periode $t+1$ entspricht in diesem Modell genau den Ersparnissen in Periode t, $k_{t+1} = z_t$. Aus dieser Bedingung wird deutlich, dass auch die Kapitalentwicklung direkt von der Überlebenswahrscheinlichkeit abhängt. Was dies für Auswirkungen für die Ökonomie hat wird nun besprochen.
Durch Einsetzen der Gleichgewichtspreise und Gesundheitsinvestitionen in Gleichung (7) ist es möglich das Gleichgewicht in einer einzigen Gleichung erster Ordnung anzuschreiben

$$k_{t+1} = (1-\tau)(1-\alpha)\sigma(k_t)Ak_t^{\alpha} \tag{9}$$

mit gegebenen k_0 und

$$\sigma(k) \equiv \frac{\phi(\tau(1-\alpha)Ak^{\alpha})}{1+\phi(\tau(1-\alpha)Ak^{\alpha})}.$$

Proposition 1. *(i) Das dynamische System, das durch Gleichung (9) beschrieben wird, besitzt im Fall $\alpha < 1/2$ zwei stationäre Gleichgewichte $\{0, \bar{k}\}$ von denen nur das positive asymptotisch stabil ist. Im Fall $\alpha > 1/2$ können zwei unterschiedliche Szenarien auftreten. Im ersten Szenario tritt nur ein stationäres Gleichgewicht $\{0\}$ auf und im zweiten Szenario können bis zu drei Gleichgewichte $\{0, \bar{k}_1, \bar{k}_2\}$ existieren, wobei $\bar{k}_2 > \bar{k}_1$. Die zwei Randgleichgewichte sind in diesem Fall asymptotisch stabil, während das dazwischenliegende Gleichgewicht nicht stabil ist. Ob nun ein oder drei Gleichgewichte auftreten kommt auf die Größe der totalen Faktorproduktivität A an [3]. Gilt*

$$\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}} (1-\alpha)^{\frac{1}{2\alpha-1}} A^{\frac{1}{2\alpha-1}} ((1-\tau)\beta\tau)^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}} \left(\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}\right) > \tau(1+\beta) \tag{10}$$

,dann existieren drei Gleichgewichte.
(ii) Endogene Sterblichkeit führt zu einem Multiplikatoreffekt, bei dem Unterschiede im Technologieparameter A, durch die Sparrate verstärkt werden. Dies führt zu dauerhaften Unterschieden des Kapital-Output Verhältnisses, größeren Differenzen in der Mortalität und Ungleichheiten im Output pro Arbeiter.

Beweis: Siehe Appendix A

Der erste Teil dieser Proposition besagt, wenn nur ein Gleichgewichtspunkt existiert, ist dieser asymptotisch stabil und somit wirken sich anfängliche Unterschiede im Kapitalstock k_0 auf lange Sicht nicht auf das Gleichgewicht aus, da alle Ökonomien zu einem

eindeutigen Punkt $\bar{k}$ konvergieren. In dem Fall, bei dem sich die Ökonomien jedoch durch ihre Gesundheitsinvestitionen unterscheiden, konvergieren beide zu unterschiedlichen Einkommensniveaus und dies auch in unterschiedlicher Geschwindigkeit.
Allgemein gilt für die Wachstumsrate:

$$\gamma_k = \frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} - 1 = (1-\tau)(1-\alpha)\sigma(k_t)Ak_t^{\alpha-1} - 1$$

Da $\sigma(k_t)$ eine steigende Funktion der Überlebenswahrscheinlichkeit ist, nimmt auch die Wachstumsrate mit wachsender Überlebenswahrscheinlichkeit zu. Somit konvergiert eine Ökonomie mit niedriger Sterblichkeit schneller zu ihrem langfristigen Gleichgewicht, als eine Ökonomie mit einer hohen Sterblichkeit.
In Abbildung 3.1 wird dieses Szenario für zwei Ökonomien mit unterschiedlich großen Gesundheitsinvestitionen grafisch dargestellt. Für die Modellierung wurden die Parameter wie folgt gewählt: $A = 8$, $\tau = 0.2$, $\delta = 0.02$, $\alpha = 0.4$, einmal $\beta = 0.7$ und einmal $\beta = 0.9$. In dieser Grafik, so wie in allen folgenden Modellierungen wird die Überlebenswahrscheinlichkeit $\phi(h_t)$ mit folgender Funktion beschrieben:

$$\phi(h_t) = \frac{\beta h_t}{1 + h_t}$$

wobei $\gamma = \beta$ gilt, damit alle Eigenschaften der Überlebensfunktion erfüllt sind. β beschreibt, wie viel Gesunheitsinvestitionen h_t schlussendlich direkt zur Überlebenswahrscheinlichkeit $\phi(h_t)$ beitragen und hat daher eine enorme Bedeutung in der Modellierung. Unterschiede in β und somit in der Überlebenswahrscheinlichkeit, lassen sich, wie bereits in der Motivation besprochen, sowohl historisch, als auch geografisch erklären.

Aus Abbildung 3.1 ist gut ersichtlich, dass eine Ökonomie mit einer größeren Überlebenswahrscheinlichkeit $\beta = 0.9$ einen höheren Steady State erreichen kann als eine Ökonomie mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit $\beta = 0.7$.

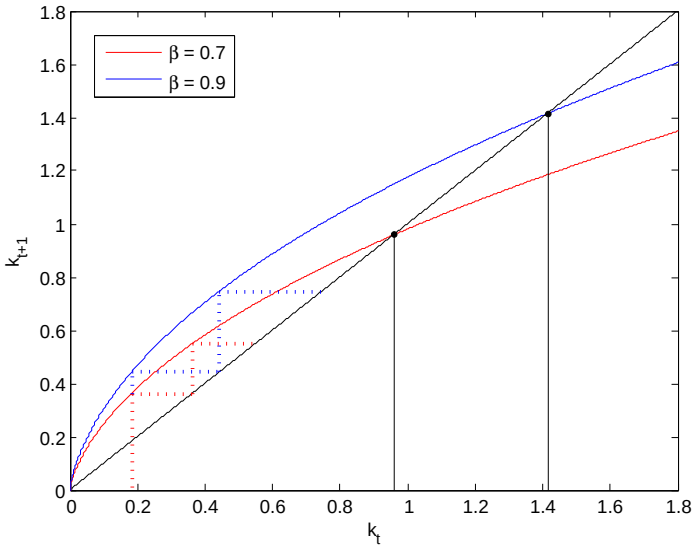

Abbildung 3.1: Konvergenz bei zwei Steady States

Quelle: eigene Berechnungen

In Abbildung 3.2 wird gezeigt, wie sich der Steady State im Fall $\alpha < 1/2$ mit steigendem β verändert. Dabei wurden die selben Parameterwerte wie vorher angenommen. Es ist eindeutig, dass mit steigender Überlebenswahrscheinlichkeit, auch das langfristige Gleichgewicht dauerhaft ansteigt. Das Gleichgewicht steigt von anfänglichen $k^* = 0.04$ bei $\beta = 0.1$ fast linear zu $k^* = 1.639$ bei $\beta = 1$.

Im Fall $\alpha > 1/2$ müssen drei mögliche Szenarien unterschieden werden. Im ersten Szenario existiert nur ein Steady State, bei dem die Ökonomie im Ursprung verharrt. Dieser Fall tritt bei niedrigen Werten der totalen Faktorproduktivität A ein und wird in Abbildung 3.3 mit den Parameter $A = 8$, $\tau = 0.2$, $\delta = 0.02$, $\alpha = 0.55$ und $\beta = 0.5$ grafisch dargestellt. Da dieser Fall ökonomisch recht uninteressant ist, wird nicht weiter auf ihn eingegangen.

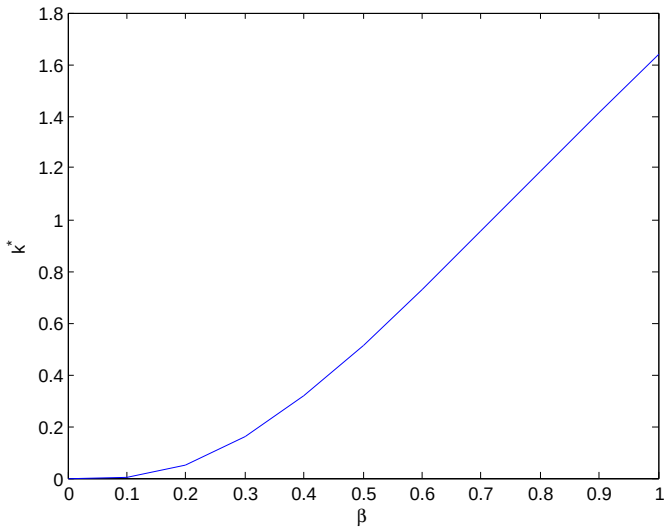

Abbildung 3.2: Sensitivitätsanalyse des Steady States in Bezug auf β

Quelle: eigene Berechnungen

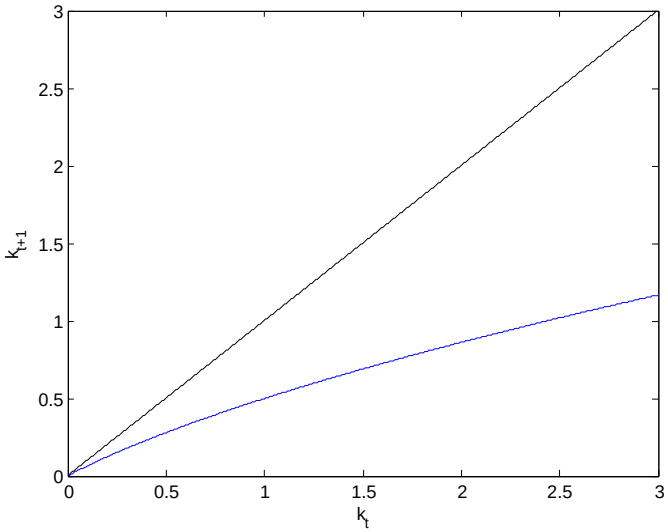

Abbildung 3.3: Konvergenz bei nur einem Steady State

Quelle: eigene Berechnungen

In den beiden anderen Szenarien können mit hinreichend großer Faktorproduktivität A entweder drei oder zwei Steady States auftreten. Dies ist abhängig von der Höhe der Mortalität. In einer Ökonomie mit niedriger Mortalität existieren zwei Steady States $\{0, \overline{k_2}\}$, wobei $\overline{k_2}$ stabil ist. Dieses Szenario ist ein Spezialfall des nächsten Falls:
In einer Ökonomie mit einer hohen Mortalität existieren zwei stabile Gleichgewichte $\{0, \overline{k_2}\}$ und ein instabiles $\{\overline{k_1}\}$. Somit kann es sein, dass eine Ökonomie mit einer hohen Mortalität in eine Armutsfalle gerät, wenn ihr Kapitalstock nicht über einem gewissen Schwellenwert $\overline{k_1}$ liegt. In diesem Fall wird sie es nicht schaffen dem Teufelskreis der Armut und Krankheit zu entfliehen. Die letzten beiden Szenarien werden allgemein in Abbildung 3.4 dargestellt.

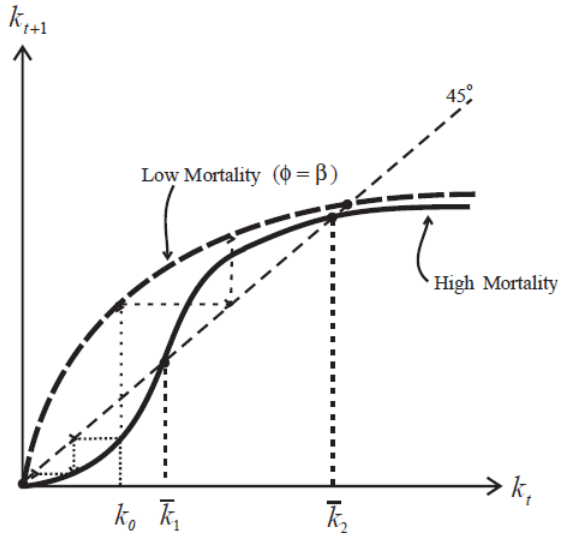

Abbildung 3.4: Konvergenz bei drei Steady States
Quelle: Chakraborty (2004)[5],S. 125, Fig.3

Für die grafische Modellierung des letzten Falls mit bestimmten Parameterwerten wird auf Abbildung 3.5 und Abbildung 3.6 hingewiesen. Dabei wurden die Parameter $\alpha = 0.55$, $\tau = 0.2$, $\delta = 0.02$ und unterschiedliche Werte für β verwendet. Einmal $\beta = 0.5$ und einmal $\beta = 0.55$. Setzt man nun diese Parameter und $\beta = 0.5$ in Bedingung (10) ein, erhält man als Ergebnis, dass $A > 10.26$ sein muss um drei Steady States zu erhalten. Somit wird bei dieser Modellierung $A = 15$ gewählt. Abbildung 3.6 zeigt den mittleren Steady State k_1 und entspricht einem vergrößerten Ausschnitt aus Abbildung 3.5, da der mittlere Steady State im Fall $\beta = 0.5$ mit 2.456×10^{-6} wesentlich kleiner ist als der hohe Steady State mit 1.90.

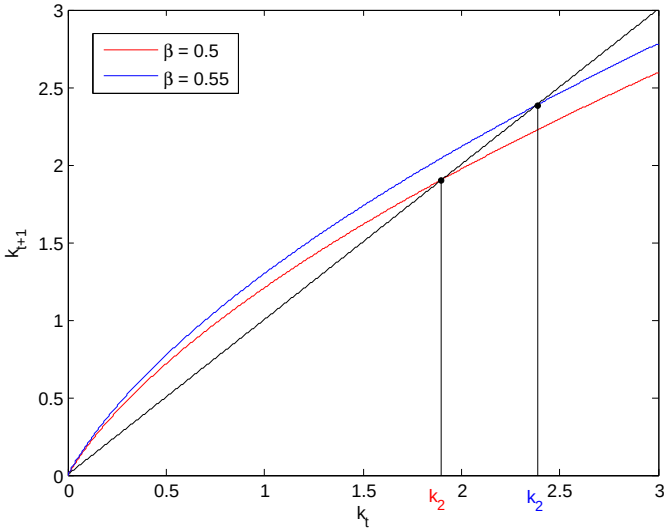

Abbildung 3.5: Konvergenz bei drei Steady States, Steady State k_2

Quelle: eigene Berechnungen

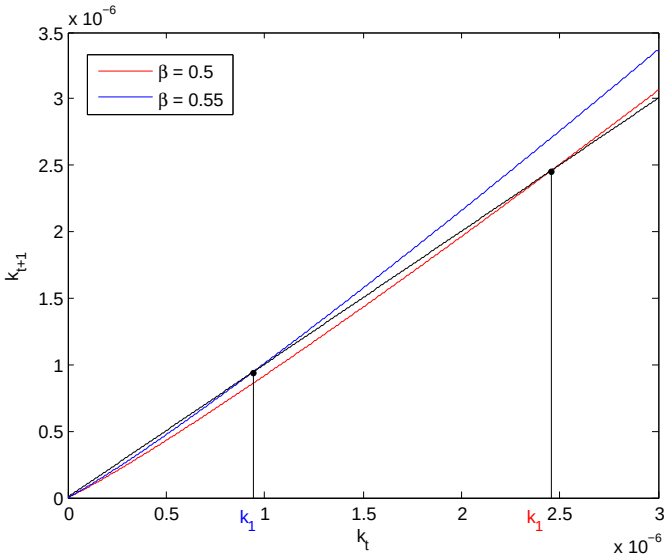

Abbildung 3.6: Konvergenz bei drei Steady States, Steady State k_1

Quelle: eigene Berechnungen

Anhand dieser beiden Grafiken ist deutlich zu erkennen, dass auch hier die Höhe der Steady States stark von der Überlebenswahrscheinlichkeit abhängt. Während der höhere, stabile Steady State k_2 mit β steigt (Abbildung 3.7), sinkt der instabile Steady State k_1 mit steigender Überlebenswahrscheinlichkeit, bis er schließlich mit dem Nullpunkt übereinstimmt (Abbildung 3.8). In diesem Fall ergibt sich dann der Spezialfall mit nur einem hohen stabilen Steady State, da die Ökonomie nun eine hohe Überlebenswahrscheinlichkeit besitzt.

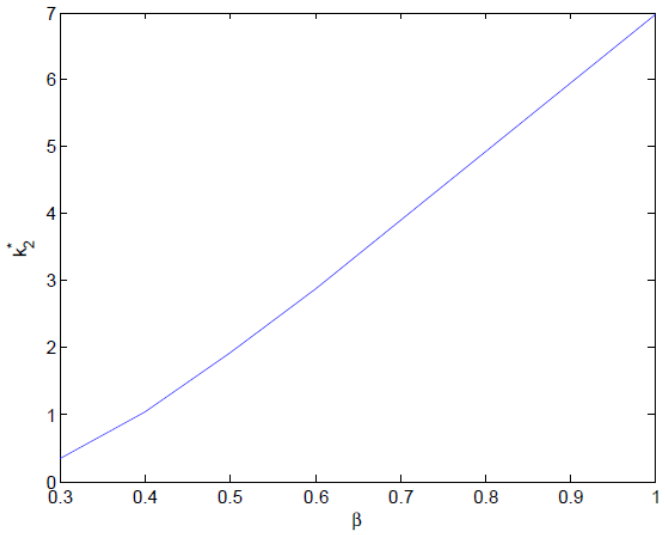

Abbildung 3.7: Sensitivitätsanalyse des Steady State k_2 in Bezug auf β

Quelle: eigene Berechnungen

Zusammenfassend lässt sich der erste Teil der Proposition mit den selben Parametern $\tau = 0.2$, $\delta = 0.02$, $\beta = 0.5$ und $A = 15$, in Abbildung 3.9 darstellen. Für Werte von $\alpha < 1/2$ existiert ein hohes, stabiles Gleichgewicht und ein instabiles Gleichgewicht im Nullpunkt. Ab $\alpha > 1/2$ wird das Gleichgewicht im Nullpunkt stabil und es entstehen zwei weitere Gleichgewichte - ein hohes, stabiles Gleichgewicht und ein mittleres, instabiles Gleichgewicht. In Abbildung 3.10 wird der Bereich von $[0.521, 0.53]$ nocheinmal vergrößert dargestellt, um dies zu verdeutlichen. Ab dem Wert $\alpha = 0.633$ existiert schlussendlich nur noch ein stabiles Gleichgewicht im Nullpunkt. Dies hängt mit der totalen Faktorproduktivität A zusammen, da wie vorher schon erwähnt, für einen bestimmten Wert von α ein hinreichend hohes A existieren muss, damit es zu drei Steady States kommen kann. Setzt man diese Parameter und $\alpha = 0.633$ in (10) ein erhält man die Bedingung, dass ab hier für drei Steady States $A > 15.05$ gelten müsste.

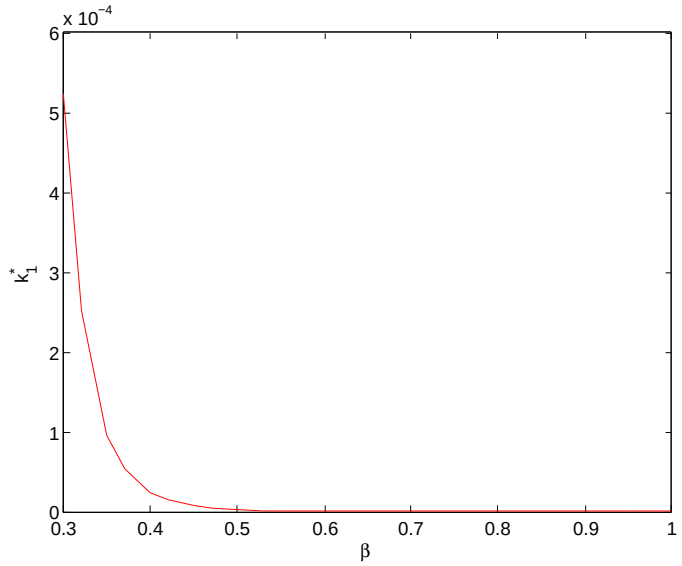

Abbildung 3.8: Sensitivitätsanalyse des Steady State k_1 in Bezug auf β

Quelle: eigene Berechnungen

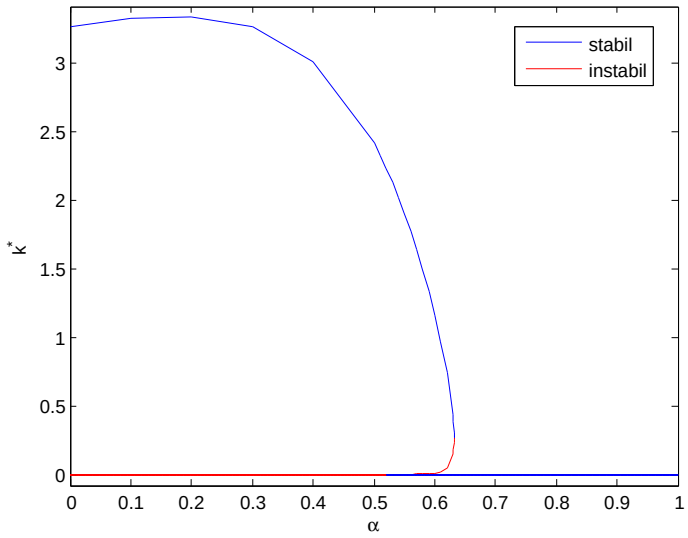

Abbildung 3.9: Sensitivitätsanalyse der Steady States in Bezug auf α

Quelle: eigene Berechnungen

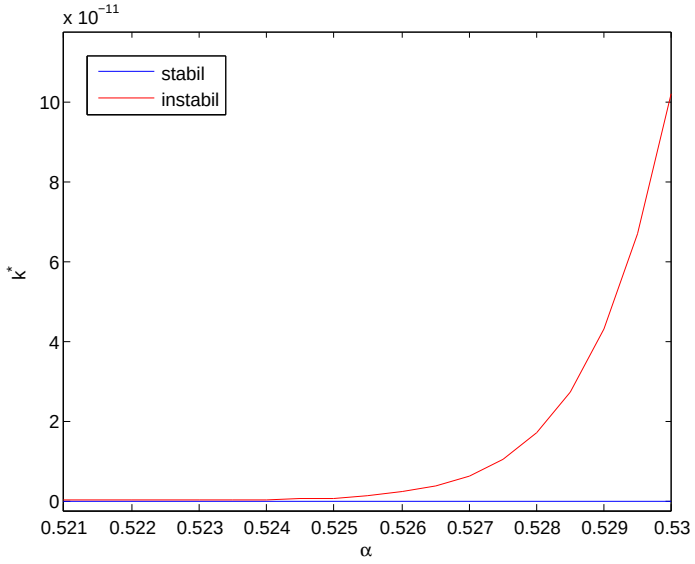

Abbildung 3.10: Sensitivitätsanalyse der Steady States in Bezug auf α im Bereich $[0.521, 0.53]$
Quelle: eigene Berechnungen

Im zweiten Teil der Proposition wird Augenmerk auf den Technologieparameter A gelegt. Nimmt man an, dass sich die Einkommen der Ländern nur durch den Parameter A unterscheiden, werden sich in diesem Fall für $\alpha < 1/2$ keine ähnlichen Lebensstandards realisieren, da sich Unterschiede in A im gleichgewichtigen Output pro Arbeiter bemerkbar machen. Betrachtet man im Gleichgewicht das Verhältnis von Kapital zu Output

$$\frac{\bar{k}}{\bar{y}} = \frac{(1-\tau)(1-\alpha)\sigma(k)A\bar{k}^{\alpha}}{A\bar{k}^{\alpha}} = (1-\tau)(1-\alpha)\sigma(\tau(1-\alpha)A\bar{k}^{\alpha})$$

erkennt man, dass sich die technologischen Unterschiede auf dieses Verhältnis gleich mehrfach auswirken. Erstens wird bei einem gegebenen Kapitalstock durch ein geringeres A ein geringerer Lohn erwirtschaftet, womit auch geringere Gesundheitsausgaben einhergehen und somit die Langlebigkeit negativ beeinflusst wird. Zweitens ist der Kapitalstock im Gleichgewicht geringer. Der Schlüssel zu diesem Ergebnis ist die Abhängigkeit der Überlebenswahrscheinlichkeit von den Gesundheitsausgaben h.
Diese beiden Effekte werden bei einer Umformung des Outputs pro Arbeiter im Gleichgewicht noch offensichtlicher:

$$\bar{y} = A\bar{k}^{\alpha}$$
$$\frac{\bar{y}}{\bar{y}^{\alpha}} = A\frac{\bar{k}^{\alpha}}{\bar{y}^{\alpha}}$$
$$\bar{y}^{1-\alpha} = A\left(\frac{\bar{k}}{\bar{y}}\right)^{\alpha}$$
$$\bar{y} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\bar{k}}{\bar{y}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Die Unterschiede in A beeinflussen den Output einerseits direkt und andererseits indirekt indem sie durch die Gesundheitsinvestitionen dauerhafte Unterschiede im Kapital-Output Verhältnis verursachen.
Somit können Ökonomien, die sich anfänglich nur durch ihren Technologieparameter A unterscheiden, zu komplett unterschiedlichen Gleichgewichten konvergieren, wie Abbildung 3.11 für den Fall $\alpha < 1/2$ verdeutlicht (Parameter wie zuvor: $\alpha = 0.4$, $\tau = 0.2$, $\delta = 0.02$ und $\beta = 0.7$).

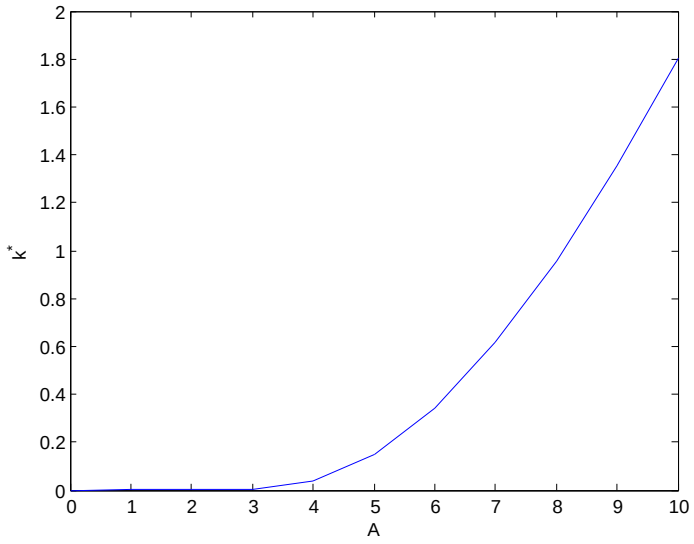

Abbildung 3.11: Sensitivitätsanalyse des Steady States in Bezug auf A
Quelle: eigene Berechnungen

Zahlenbeispiel

Ein praktisches Zahlenbeispiel unterstreicht diesen zweifachen Effekt.
Es werden folgende Parameterwerte für α und τ angenommen:

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{1}{3} \quad &\Rightarrow \quad 1 - \alpha = \frac{2}{3} \\ \tau = 0.05 \quad &\Rightarrow \quad 1 - \tau = 0.95 \end{aligned}$$

Nun werden zwei Ökonomien unterschieden, die sich ausschließlich durch ihre A´s unterscheiden: $A_i = 50$ und $A_j = 25$. Es werden folgende Mortalitäten angenommen 0.08 für Ökonomie i und 0.32 für Ökonomie j. Dies führt zu folgenden Überlebenswahrscheinlichkeiten $\phi_i = 1 - 0.08 = 0.92$ und $\phi_j = 1 - 0.32 = 0.68$ und Sparneigungen:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{\phi_i}{1 + \phi_i} = 0.479166667 \\ \sigma_j &= \frac{\phi_j}{1 + \phi_j} = 0.404761905 \end{aligned}$$

Setzt man nun diese Zahlenwerte in

$$\bar{y} = A\bar{k}^{\alpha} = A[(1 - \tau)(1 - \alpha)\sigma A]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

ein, erhält man folgende Ergebnisse für den pro Kopf Output:

$$\begin{aligned} \bar{y} = 194.7665923 \quad &\text{für} \quad A_i = 50 \\ \bar{y} = 63.28867475 \quad &\text{für} \quad A_j = 25 \end{aligned}$$

Somit führt ein zweimal so großer Unterschied in der Produktivität, durch Unterschiede in der Mortalität zu einem dreimal so großen Unterschied im pro Kopf Output. Wählt man $A_i = 75$, führt dieser dreimal so große Unterschied im Produktivitätsparameter sogar zu einem fünfmalso großen Unterschied im pro Kopf Output:

$$\bar{y} = 357.8090855 \quad \text{für} \quad A_i = 75.$$

Optimale Wahl der Einkommenssteuer

Allgemein wurde eine konstante Gesundheitssteuer $\tau = 0.2$ angenommen. Abbildung 3.12 zeigt, dass im Fall $\alpha = 0.4$, $\delta = 0.02$, $A = 8$ und $\beta = 0.7$ der Steady State auf die Wahl der Einkommenssteuer reagiert.

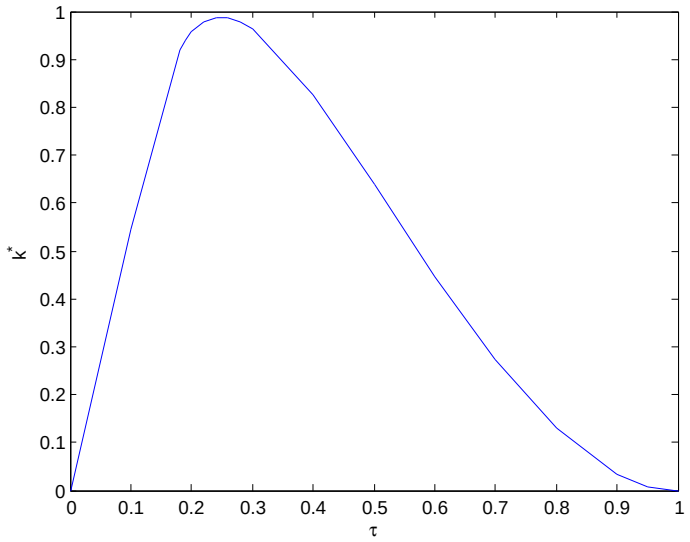

Abbildung 3.12: Sensitivitätsanalyse des Steady State in Bezug auf τ

Quelle: eigene Berechnungen

Die optimale Wahl der Einkommenssteuer lässt sich an folgendem Optimierungsproblem zeigen:

$$\max_{z_t,\tau_t} \quad \log[(1-\tau)w_t - z_t] + \phi(\tau_t w_t)\log[\hat{R}_{t+1}z_t]$$

$$L = \log[(1-\tau)w_t - z_t] + \phi(\tau_t w_t)\log[\hat{R}_{t+1}z_t]$$

Die Bedingung erster Ordnung für z_t erhält man durch einmaliges Ableiten von L:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial z_t} = \frac{1}{(1-\tau_t)w_t - z_t}(-1) + \frac{1}{\hat{R}_{t+1}z_t}\phi(\tau_t w_t)\hat{R}_{t+1} &= 0 \\
\frac{1}{(1-\tau_t)w_t - z_t} &= \frac{\phi(\tau_t w_t)}{z_t} \\
\phi(\tau_t w_t)(1-\tau_t)w_t - \phi(\tau_t w_t)z_t &= z_t \\
(1+\phi(\tau_t w_t))z_t &= (1-\tau_t)\phi(\tau_t w_t)w_t \\
z_t &= (1-\tau_t)\frac{\phi(\tau_t w_t)}{1+\phi(\tau_t w_t)}w_t \qquad (11)
\end{aligned}$$

Bei der Bedingung erster Ordnung von τ_t erhält man eine Gleichung, bei der die marginalen Kosten einer höheren Überlebenswahrscheinlichkeit, den daraus resultierenden marginalen Nutzengewinn gleichgesetzt werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \tau_t} = \frac{1}{(1-\tau_t)w_t - z_t}(-w_t) + \phi^{'}(\tau_t w_t) w_t \log[\hat{R}_{t+1} z_t] &= 0 \\
\frac{w_t}{(1-\tau_t)w_t - z_t} &= \phi^{'}(\tau_t w_t) w_t \log[\hat{R}_{t+1} z_t] \\
\frac{w_t}{c_t} &= \phi^{'}(\tau_t w_t) w_t \log[\hat{R}_{t+1} z_t] \qquad (12)
\end{aligned}$$

Um eine Gleichung in τ_t zu erhalten, setzt man Gleichung (11) in Gleichung (12) ein und erhält:

$$\begin{aligned}
\phi^{'}(\tau_t w_t) w_t \log\left(\hat{R}_{t+1}(1-\tau_t) w_t \frac{\phi(\tau_t w_t)}{1+\phi(\tau_t w_t)}\right) &= \frac{w_t}{(1-\tau_t)w_t - (1-\tau_t)\frac{\phi(\tau_t w_t)}{1+\phi(\tau_t w_t)} w_t} \\
\phi^{'}(\tau_t w_t) w_t \log\left(\hat{R}_{t+1}(1-\tau_t) w_t \frac{\phi(\tau_t w_t)}{1+\phi(\tau_t w_t)}\right) &= \frac{w_t}{\left(1 - \frac{\phi(\tau_t w_t)}{1+\phi(\tau_t w_t)}\right)(1-\tau_t) w_t} \\
\phi^{'}(\tau_t w_t) w_t \log\left(\hat{R}_{t+1}(1-\tau_t) w_t \frac{\phi(\tau_t w_t)}{1+\phi(\tau_t w_t)}\right) &= \frac{1}{\frac{1+\phi(\tau_t w_t)-\phi(\tau_t w_t)}{1+\phi(\tau_t w_t)}(1-\tau_t)} \\
\Omega(\tau_t) \equiv \phi^{'}(\tau_t w_t) w_t \log\left(\hat{R}_{t+1}(1-\tau_t) w_t \frac{\phi(\tau_t w_t)}{1+\phi(\tau_t w_t)}\right) &= \frac{1+\phi(\tau_t w_t)}{1-\tau_t} \qquad (13)
\end{aligned}$$

Die rechte Seite von Gleichung (13) ist eine monoton wachsende Funktion in τ_t, während die linke Seite dieser Gleichung die Form eines umgekehrten Us hat und

$$\lim_{\tau_t \to 0} \Omega(\tau_t) = -\infty = \lim_{\tau_t \to 1} \Omega(\tau_t)$$

erfüllt, da in beiden Fällen das Argument des Logarithmus gegen 0 geht. Beide Funktionen schneiden sich zweimal, wobei der optimale Steuersatz τ^* beim höheren Schnittpunkt abgelesen werden kann, da in diesem Fall der höhere Nutzen erzielt wird. Abbildung 3.13 spiegelt dieses Ergebnis wieder. Wird immer der höhere Wert von τ gewählt, kann in jeder Periode ein höherer Nutzen erzielt werden.
Weiters hängt τ^* positiv von w_t ab und somit ist zu erkennen, dass in einer Gesellschaft mit einem niedrigen Einkommen w_t ein niedrigerer Steuersatz gewählt werden würde, da eine höhere Steuer zu einem größeren Nutzenverlust in der ersten Periode des Lebens führt, als sie an Gewinn in der nächsten Periode bringt.

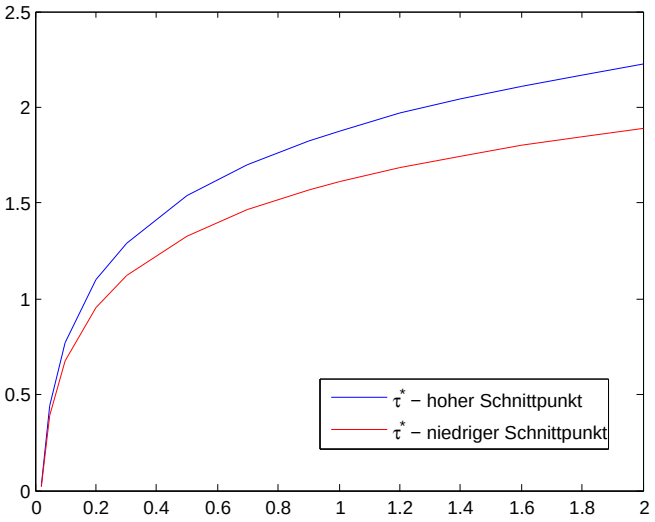

Abbildung 3.13: Nutzenfunktion bei Wahl der optimalen Steuerhöhe
Quelle: eigene Berechnungen

3.2. Das Modell mit Investition in Bildung

Auch in diesem Kapitel werden perfekte Annuitätenmärkte angenommen, doch bleibt bei manchen Investitionen, wie zum Beispiel in Humankapital ein gewisses Restrisiko. Investitionen in Humankapital sind allerdings unverzichtbar, besonders wenn angenommen wird, dass Bildung die treibende Kraft des Wirtschaftswachstums ist. Es wird sich zeigen, dass auch hier ein enger Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Bildung existiert. Durch eine kleine Modifikation des vorigen Modells lassen sich derartige Überlegungen überprüfen.
In diesem Abschnitt stehen den Individuen nun in beiden Perioden jeweils eine Einheit an Arbeitszeit zur Verfügung. Mit x_t werden sowohl die erworbenen Fähigkeiten der Generation $t-1$ bezeichnet, als auch das Können, das die jungen Generationen t von ihren Eltern geerbt haben. Erhöhungen in x bestehen aus technologischem Fortschritt, der die geleistete Arbeit verbessert. Dazu muss erwähnt werden, dass einmal erworbene Fähigkeiten nicht mehr verloren gehen können.
Eine in t geborene Person kann ihre Produktivität x_t verbessern, indem sie einen Anteil ihrer Zeit s_t in jungen Jahren in Bildung investiert. Ihre zukünftige Produktivität würde

sich dann auf diesen Anteil beziehen:

$$x_{t+1} = x_t \mu(s_t) \tag{14}$$

μ ist in diesem Fall eine steigende und konkave Funktion, die $\mu(0) = 1$ erfüllt. Diese Bedingung besagt, dass wenn in jungen Jahren nicht in Bildung investiert wird, sich die Produktivität x_t weder verbessert noch verschlechtert und die zukünftige Produktivität auf diesem Niveau verharren wird, sodass $x_{t+1} = x_t$ gilt.
Da die Überlebenswahrscheinlichkeit in diesem Modell auch von den Bildungsinvestitionen abhängt nimmt sie in diesem Abschnitt folgende Form an:

$$\phi(k_t, s_t) = \phi(\tau w_t x_{t+1}) = \frac{\beta\tau(1-\alpha)Ak_t^\alpha x_{t+1}}{1+\tau(1-\alpha)Ak_t^\alpha x_{t+1}}$$

Da durch mehr Bildung, mehr Wissen und auch Fähigkeiten generiert werden, steigen mit ihr auch die Gesundheitsausgaben. Somit steigt, wie auch aus der Funktion ersichtlich, mit wachsender Bildung auch die Überlebenswahrscheinlichkeit.
Die Wahl von s_t ist abhängig von der Maximierung des Lebenszeiteinkommens,

$$Z = (1-\tau)(1-s_t)w_t x_t + \frac{w_{t+1}x_{t+1}}{\hat{R}_{t+1}} = (1-\tau)(1-s_t)w_t x_t + \frac{w_{t+1}x_t\mu(s_t)}{\hat{R}_{t+1}} \tag{15}$$

Leitet man nun (15) nach s_t ab, erhält man die Bedingung erster Ordnung für eine innere Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial s_t} = -(1-\tau)w_t x_t + \frac{w_{t+1}x_t\mu^{'}(s_t)}{\hat{R}_{t+1}} &= 0 \\
\mu^{'}(s_t)\frac{w_{t+1}x_t}{\hat{R}_{t+1}} &= (1-\tau)w_t x_t \\
\mu^{'}(s_t) &= \frac{(1-\tau)w_t x_t}{w_{t+1}x_t}\hat{R}_{t+1} \\
\mu^{'}(s_t) &= \frac{(1-\tau)w_t\hat{R}_{t+1}}{w_{t+1}} \\
\mu^{'}(s_t) &= \frac{\frac{(1-\tau)w_t R_{t+1}}{\phi_t}}{w_{t+1}} \\
\mu^{'}(s_t) &= \frac{(1-\tau)w_t R_{t+1}}{\phi_t w_{t+1}}
\end{aligned} \tag{16}$$

Da angenommen wurde, dass μ eine wachsende Funktion ist, würde für ein strikt konkaves μ gelten, dass $\mu^{'}(s_t) > 0$ und $\mu^{'}(s_t)$ mit wachsendem s_t sinkt. Daraus folgt, dass der Kehrwert der rechten Seite von (16) mit steigendem s_t auch steigen würde. Somit wäre für ein strikt konkaves μ die optimale Bildung eine steigende Funktion ihres Arguments:

$$s_t^* = s\left(\frac{\phi_t w_{t+1}}{(1-\tau)w_t R_{t+1}}\right) \tag{17}$$

Aus (17) ist gut zu erkennen, dass mit höherer Überlebenswahrscheinlichkeit ϕ_t auch die Investitionen in Bildung attraktiver werden. Somit wirken sich Rückgänge in der Sterblichkeit nicht nur, wie im vorigen Abschnitt erwähnt, positiv auf die Kapitalakkumulation aus, sondern steigern auch die Prämie für Bildungsausgaben, durch höhere zukünftige Löhne.
Das Problem der Haushalte nimmt im Fall mit Bildungsinvestitionen folgende Form an:

$$U_t = \ln c_t + \phi_t \ln c_{t+1}$$

unter den Budgetbeschränkungen

$$\begin{aligned} c_t &\leq (1-\tau)(1-s_t)w_t x_t - z_t \\ c_{t+1} &\leq w_{t+1}x_{t+1} + z_t \hat{R}_{t+1}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die optimale Ersparnis:

$$z_t = \sigma_t\left[(1-\tau)(1-s_t)w_t x_t - \frac{w_{t+1}x_{t+1}}{R_{t+1}}\right] \tag{18}$$

Beweis: Siehe Appendix A

Auch in diesem Modell mit Bildungsausgaben hängt die Ersparnis durch σ_t positiv von der Überlebenswahrscheinlichkeit ab.

Proposition 2. *Die Wachstumsrate der Produktivität (14) reagiert sukzessive auf Bildung. Ein höherer Bildungsstand führt zu einem größeren Bestand an Fähigkeiten, was wiederrum zu höheren Gesundheitsausgaben und somit zu einer Verringerung der Sterblichkeit führt. Im Fall eines kaum konkaven μ, treten deutliche Wachstumsanstiege bei bereits geringen Veränderungen des Humankapitals auf.*

Ob in diesem Modell eindeutige oder mehrere Wachstumspfade auftreten, hängt somit von der Form der Humankapitaltechnologie $\mu(s_t)$ ab.
Zunächst wird eine Ökonomie mit konstanten Löhnen $w_t = w_{t+1} = \bar{w}$ und Zinsraten $\bar{R}$ angenommen und eine Funktion des Humankapitals betrachtet, die folgende Form annimmt $\mu(s) = 1 + s^\theta$, $\theta \in (0, 1)$. Durch Einsetzen von $\mu(s)$ in (16) und anschließendem Umformen, erhält man die optimale Bildungsinvestition s_t^*:

$$\begin{aligned}
\theta s^{\theta-1} &= \frac{(1-\tau)\bar{w}\bar{R}}{\phi\bar{w}} \\
s_t^{\theta-1} &= \frac{(1-\tau)\bar{R}}{\phi\theta} \\
s_t^{1-\theta} &= \frac{\theta\phi}{(1-\tau)\bar{R}} \\
s_t^* &= \left(\frac{\theta\phi(\tau\bar{w}x_t)}{(1-\tau)\bar{R}}\right)^{\frac{1}{(1-\theta)}}
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\mu(s^*) = 1 + \left(\frac{\theta\phi(\tau\bar{w}x_t)}{(1-\tau)\bar{R}}\right)^{\frac{\theta}{(1-\theta)}}$$

Betrachtet man nun die Wachstumsrate des pro Kopf Einkommens

$$g_t = \frac{x_{t+1} - x_t}{x_t} = \frac{x_t\mu(s_t)}{x_t} - 1 = \mu(s_t) - 1$$

ist gut zu erkennen, dass die Wachstumsrate eine wachsende Funktion des Humankapitals $\mu(s_t)$ ist.
Setzt man nun $\mu(s_t^*)$ ein, erhält man folgende eindeutige Wachstumsrate der Produktivität:

$$(\delta\phi(\tau\bar{w}x_t))^{\frac{\theta}{1-\theta}} \quad \text{mit} \quad \delta \equiv \frac{\theta}{(1-\tau)\bar{R}}$$

Daraus ist ersichtlich, dass das Wachstum bei endogener Sterblichkeit stark von der Überlebensfunktion abhängt. Abbildung 3.14 illustiert diese Wachstumsrate für die Parameter $\tau = 0.2$, $\beta = 0.7$, $\theta = 0.84$, $\bar{w} = 11.0275$ und $\bar{R} = 1.8990$.
Zunächst ist das Wachstum sehr gering, doch beschleunigt es anschließend relativ rasch und das schon bei kleinen Werten des Humankapitals. Für die Überlebenswahrscheinlichkeit $\phi(h)$ gilt nach Bedingung 2: $\lim_{h\to\infty} \phi(h) = \beta \leq 1$. Somit konvergiert die Wirtschaft

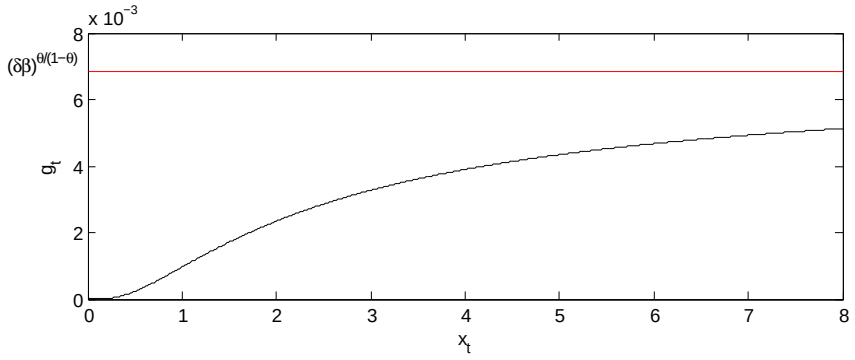

Abbildung 3.14: Schwelleneffekt bei endogener Sterblichkeit

Quelle: eigene Berechnungen

langfristig, mittels dieser Bedingung zu einer eindeutigen steady-state Wachstumsrate:

$$\lim_{x_t \to \infty} (\delta\phi(\tau\bar{w}x_t))^{\frac{\theta}{1-\theta}} = (\delta\beta)^{\frac{\theta}{1-\theta}}$$

Nimmt man jedoch eine lineare Humankapitaltechnologie $\mu(s) = 1+\theta s, \theta > 0$ an, können zwei verschiedene Wachstumspfade existieren. Abhängig vom anfänglichen Kapitalstock x_0, werden bei einem Wachstumspfad keine Bildungsausgaben gemacht, während beim anderen Pfad Investitionen in Schulbildung optimal sind. Setzt man $\mu(s_t)$ in (16) ein, erhält man die Bedingung bei der in Bildung investiert wird:

$$\theta = \frac{(1-\tau)w_t R_{t+1}}{\phi_t w_{t+1}} \tag{19}$$

Sollte jedoch

$$\theta \leq (1-\tau)\frac{w_t R_{t+1}}{\phi_t w_{t+1}} \tag{20}$$

gelten, wären Investitionen in Bildung nicht rentabler als Investitionen in Kapital. In diesem Fall würde eine Ecklösung ohne Bildung auftreten, somit $s_t = 0$ gelten. Daraus folgt, dass die Produktivität auf einem konstanten Niveau x_0 verweilt

$$x_{t+1} = x_t\mu(0) = x_t(1 + 0 \times \theta) = x_t = x_0 \quad \forall t$$

und dadurch kein Wachstum zu Stande kommen kann:

$$g_t = \frac{x_{t+1} - x_t}{x_t} = 1 - 1 = 0$$

Somit würde im Fall der Ecklösung ohne Bildungsinvestitionen für das Arbeitsangebot $N_t = (1 + \phi_{t-1})x_0$ gelten. Daraus ergibt sich folgendes Gleichgewicht:

$$k_{t+1} = (1 - \tau)(1 - \alpha) \left(\frac{1}{1/[\sigma(k_t)(1 - \sigma(k_t))] + (1 - \alpha)/\alpha} \right) A k_t^{\alpha}$$

Beweis: Siehe Appendix A

In diesem Fall ergeben sich die selben Schlussfolgerungen, wie für das vorige Modell ohne Bildungsinvestitionen. Für $\alpha < 1/2$ konvergiert die Ökonomie monoton zu einem eindeutigen Gleichgewicht und im Fall $\alpha > 1/2$ können, abhängig von der totalen Faktorproduktivität, entweder ein oder drei Gleichgewichte auftreten.

Sollte sich jedoch Bedingung (19) realisieren, liegt eine Lösung mit Bildungsinvestitionen vor. In diesem Fall ergeben sich folgende zwei Differenzengleichungen:

$$k_{t+1} = \frac{\alpha(1 - \tau)A}{\theta} \frac{k_t^{\alpha}}{\phi(k_t, s_t)} \tag{21}$$

$$\left(1 + \phi(k_t, s_t) - s_{t+1} + \frac{1 - \alpha}{\alpha}\sigma(k_t)\right) k_{t+1} = (1 - \tau)(1 - \alpha)A \left(\frac{1 - s_t}{1 + \theta s_t}\right) \sigma(k_t) k_t^{\alpha} \tag{22}$$

Beweis: Siehe Appendix A

In Abbildung 3.15 wird k_{t+1} und somit Gleichung (21) grafisch dargestellt. Abbildung 3.16 zeigt die Entwicklung von s_{t+1} in Abhängigkeit von k_t und s_t, wie durch Gleichung (22) beschrieben. Für beide Modellierungen wurden die Parameter $A = 8$, $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.8$, $\tau = 0.2$ und $\theta = 30$ verwendet.
Für den Steady State muss für Gleichung (21) gelten

$$k_{t+1} = k_t = k^{\circ} \quad \forall s_t \tag{23}$$

Dadurch erhält man eine Ebene im 45° Winkel, mit Ursprung auf der y-Achse, also bei $k_t = 0$. Durch den Schnitt dieser Ebene mit der Fläche k_{t+1} erhält man eine Funktion, die alle k° enthält, die Bedingung (23) und Gleichung (21) erfüllen.

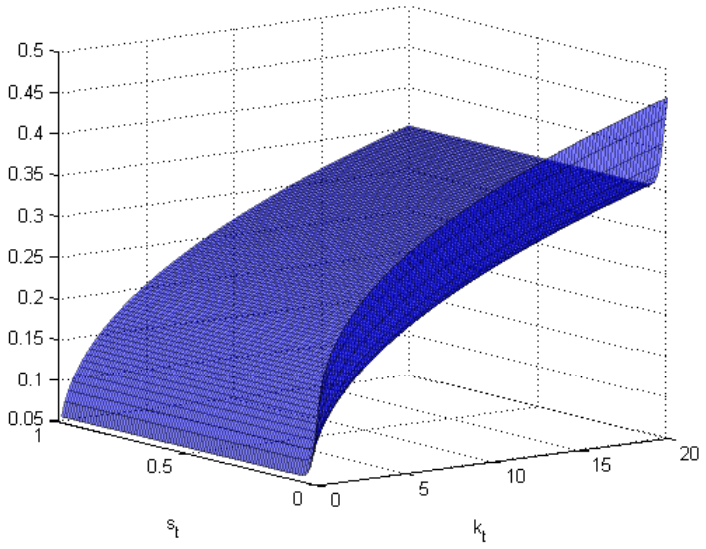

Abbildung 3.15: Entwicklung des Kapitals in Abhängigkeit von k_t und s_t

Quelle: eigene Berechnungen

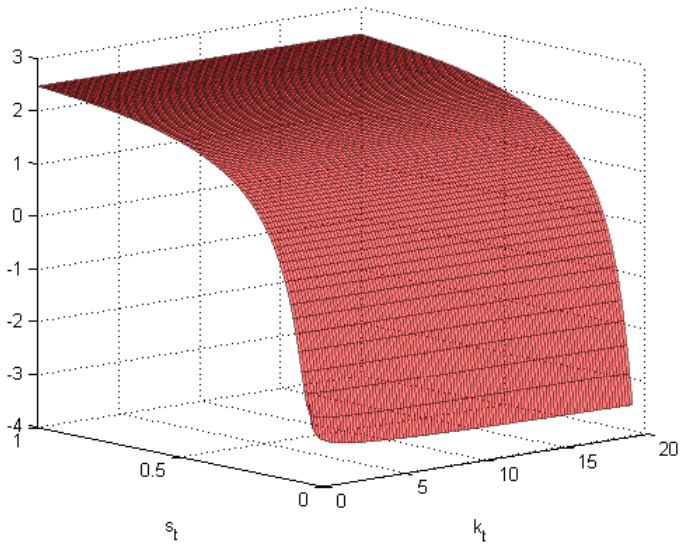

Abbildung 3.16: Entwicklung der Bildung in Abhängigkeit von k_t und s_t

Quelle: eigene Berechnungen

Das selbe gilt für Gleichung (22). Es muss gelten:

$$s_{t+1} = s_t = s^\circ \quad \forall k_t \tag{24}$$

So entsteht auch eine Ebene im 45° Winkel. Doch hier ist der Ursprung auf der x-Achse, bei $s_t = 0$. In diesem Fall enthält die Funktion, die durch den Schnitt der Fläche mit der Ebene erhalten wurde, alle s°, die Bedingung (24) und Gleichung (22) erfüllen.
Für den Steady State, müssen sowohl die beiden Gleichungen (21) und (22) erfüllt sein, als auch die Bedingungen (23) und (24). Um dies zu gewährleisten müssen die beiden Funktionen, die man gerade aus den Schnitten der jeweiligen Flächen mit den Ebenen erhalten hat, einen gemeinsamen Schnittpunkt aufweisen. In diesem Schnittpunkt befindet sich dann der Steady State (s^*, k^*). Abbildung 3.17 zeigt den Verlauf der beiden Funktionen.

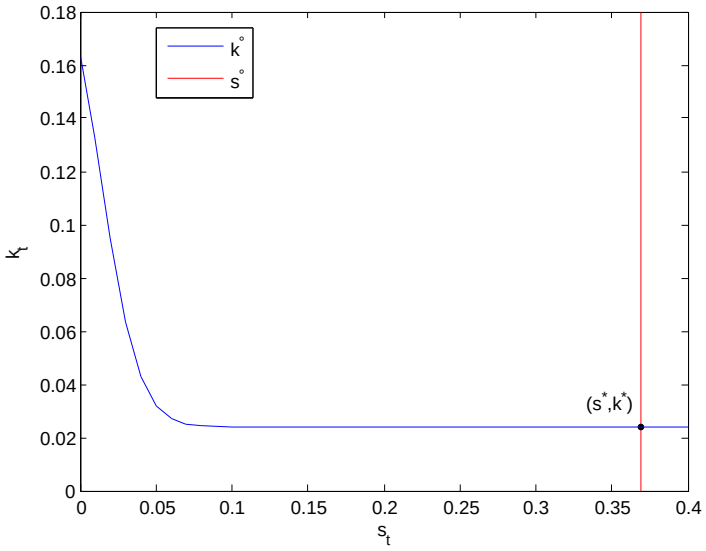

Abbildung 3.17: Verlauf der Funktionen mit den Werten k° und s°
Quelle: eigene Berechnungen

Für eine Folge von (s_t, k_t) ergibt sich somit eine monotone Wachstumsrate:

$$g_t = \frac{x_{t+1} - x_t}{x_t} = \mu(s_t^*) - 1 = 1 + s^*\theta - 1 = s^*\theta$$

Auch in diesem Fall mit Bildungsinvestitionen können Armutsfallen auftreten. Betrachtet man Bedingung (19) bzw. (20) genauer, ist zu erkennen, dass die rechte Seite eine

fallende Funktion in ϕ_t ist. Somit kann es sein, dass ein Ökonomie mit hoher Mortalität, die zwar genau die gleichen Anfangswerte (x_0, k_0) aufweist, wie eine Ökonomie mit geringerer Mortalität, aufgrund ihrer unterschiedlichen Überlebenswahrscheinlichkeit in ein niedrigeres Gleichgewicht ohne Bildungsinvestitionen stagniert und die andere Ökonomie nicht.

4. Finlay (2006)

4.1. Das Modell im Allgemeinen

Jocelyn Finlay hat sich in ihrer Arbeit „Endogenous Longevity and Economic Growth“ 2006 [8] für ein 2 Perioden OLG-Modell mit endogener Überlebenswahrscheinlichkeit entschieden.
In diesem Modell werden in jeder Periode Individuen geboren, die zwei Perioden lang leben. Die erste Periode wird mit Wahrscheinlichkeit eins durchlebt, $\pi_t = 1$, während die zweite Periode nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit $\pi_{t+1} = \pi(h_t, \bar{z})$ erreicht werden kann.
$\bar{z}$ entspricht in diesem Modell einer Grundwahrscheinlichkeit zu überleben und ist exogen durch öffentliche Gesundheitsmaßnahmen, wie zum Beispiel durch Investitionen in die Trinkwasserversorgung oder Spitäler, gegeben.

Im Gegensatz zu Chakraborty können die Individuen hier selbst in die Gesundheit investieren, um die Überlebenswahrscheinlichkeit zu erhöhen. Diese Möglichkeit ist durch die Entscheidungsvariable h_t in der ersten Periode gegeben. Für h_t wird eine Nichtnegativitätsbedingung

$$h_t \geq 0 \tag{25}$$

angenommen. Investitionen in h_t bestehen zum Beispiel aus Krankenversicherungen, mehr Sport oder einer gesunden Ernährung. Die Überlebensfunktion hat daher folgende Eigenschaften:

1. $\pi_{t+1} \in (0, 1)$
2. $\pi_{t+1}(0, \bar{z}) > 0$
3. $\pi_{t+1}(\infty, \infty) \leq 1$
4. $\pi_h(h_t, \bar{z}) > 0$
5. $\pi_z(h_t, \bar{z}) > 0$
6. $\pi_{hh}(h_t, \bar{z}) < 0$
7. $\pi_h(0, \bar{z}) \in (0, \infty)$
8. $\pi_h(0, 0) = \infty$

Eigenschaft eins beschränkt die Überlebenswahrscheinlichkeit auf ein Intervall zwischen Null und Eins, während Bedingung zwei die Grundüberlebenswahrscheinlichkeit sichert. Auch wenn ein Individuum nicht aktiv in seine Gesundheit investiert und somit $h_t = 0$ gilt, wird es dank öffentlicher Gesundheitsmaßnahmen $\bar{z}$ trotzdem überleben. Mit Eigenschaft drei wird verdeutlicht, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit nicht beliebig gesteigert werden kann. Sie ist auch noch in dem Fall, in dem übermäßig viel in die

Gesundheit investiert wird, nach oben hin durch eins beschränkt. Eigenschaften vier und fünf zeigen, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit sowohl in h_t, als auch in $\bar{z}$ eine wachsende Funktion ist. Kombiniert mit Eigenschaft sechs, ergibt sich, dass π_{t+1} eine wachsende, konkave Funktion ist. Somit tragen anfängliche, kleine Investitionen h_t zunächst viel zur Überlebenswahrscheinlichkeit bei aber dieser Nutzenzuwachs nimmt schließlich mit steigenden Investionen immer mehr ab. Das Randgleichgewicht, bei dem Individuen nicht aktiv in ihre Gesundheit investieren, aber der Staat schon, wird in diesem Modell mit Bedingung sieben, nicht ausgeschlossen. Das Randgleichgewicht bei dem weder das Individuum selbst, noch der Staat in die Gesundheit investieren jedoch schon. Dies wird mit Eigenschaft acht verdeutlicht.
Eine Funktion, die diese Eigenschaft erfüllt und auch später in der Modellierung verwendet wird ist:

$$\pi_{t+1}(h_t, \bar{z}) = \frac{\bar{z} + \overline{\pi}\psi(h_t)^{\phi}}{1 + \psi(h_t)^{\phi}} \tag{26}$$

wobei, wie schon erwähnt $\bar{z}$ die exogen gegebene Grundüberlebenswahrscheinlichkeit ist und $\overline{\pi}$ die maximal erreichbare Wahrscheinlichkeit zu Überleben angibt.
Somit entspricht der zu maximierende Nutzen über die gesamte Lebenszeit der Individuen zum Zeitpunkt t:

$$U_t = u(c_t) + \pi_{t+1} u(c_{t+1}) \tag{27}$$

wobei c_t den Konsum in der ersten Periode beschreibt und c_{t+1} den Konsum in der zweiten Periode. Die tiefgestellten Indizes t und $t+1$ entsprechen den Zeitindizes.
In diesem Modell soll besonders auf die Risikoaversion der Individuen Rücksicht genommen werden, um zu analysieren wie sich der Grad der Risikoaversion auf die Entscheidungen der Individuen auswirkt. Als Maß für die relative Risikoaversion wird in diesem Modell das Arrow-Pratt-Maß verwendet [19]:

$$r_R(c_{t+i}, u) = -\frac{u^{''}(c_{t+i})c_{t+i}}{u^{'}(c_{t+i})}$$

Dies entspricht genau der Nutzenelastizität

$$-\frac{d\, u^{'}(c_{t+i})}{d\, c_{t+i}} \cdot \frac{c_{t+i}}{u^{'}(c_{t+i})}$$

die besagt wie sich die Risikobereitschaft mit dem Wert von c_{t+i} verändert. In diesem

Modell wird jedoch eine konstante relative Risikoaversion, also

$$r_R(c_{t+i}, u) = -\frac{u''(c_{t+i})c_{t+i}}{u'(c_{t+i})} = \gamma \quad \text{für} \quad \gamma \in (0,1) \tag{28}$$

angenommen. Dabei haben die Individuen keinen Anreiz ihre Entscheidungen abhängig von ihrem Vermögenswert zu treffen. Sie werden daher bei einem Anstieg des Wohlstandes nicht risikobereiter werden als zuvor und haben somit über die Zeit den selben Grad der Risikoaversion.
Um eine Nutzenfunktion zu erhalten, die diese Eigenschaft erfüllt, werden beide Seiten von (28) zweimal integriert und die verschiedenen Fälle für $\gamma \in (0,1)$ unterschieden. Daraus ergibt sich:

$$u(c_t) = \begin{cases} \frac{(c_t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{für} \quad \gamma \geq 0, \gamma \neq 1 \\ \ln(c_t) & \text{für} \quad \gamma = 1 \end{cases} \tag{29}$$

Beweis: Siehe Appendix B

In diesem Modell wird angenommen, dass $\gamma \in (0,1)$ gilt, da im Fall $\gamma > 1$ Konsum negative Auswirkungen auf den Nutzen hätte. In diesem Fall würden keine Investitionen in Gesundheit oder Bildung getätigt werden, da der Tod einen Nutzen von Null hat und somit der Tod für die Individuen rentabler wäre.
Gilt nun $\gamma \in (0,1)$, hat Konsum immer eine positive Auswirkung auf den Nutzen und das auch schon bei sehr kleinen Werten. Im Fall $\gamma = 0$ gilt die Risikoneutralität der Individuen und es entsteht eine lineare Nutzenfunktion. Für $\gamma > 0$ steigt der Grad der Risikoaversion. Hierbei gilt, dass die Individuen umso risikoaverser sind, umso größer die relative Risikoaversion γ ist. Demzufolge steigt mit dem Grad der Risikoaversion auch der Grad der Konkavität der Nutzenfunktion und es ist zu erkennen, dass risikoaversere Individuen stärker zu einer Konsumglättung über die Zeit neigen. Mit einer höheren Risikoaversion steigt bei den Individuen somit auch die Risikoprämie, die sie benötigen, um in das unsichere Asset, also in den Konsum der zweiten Periode, zu investieren. Der Verlauf der Nutzenfunktionen für die unterschiedlichen Risikoaversionen wird für den eindimensionalen Fall aus Gleichung (29) in Abbildung 4.1 dargestellt. Hierbei wird auf der x-Achse der Konsum aufgetragen und auf der y-Achse der daraus resultierende Nutzen.

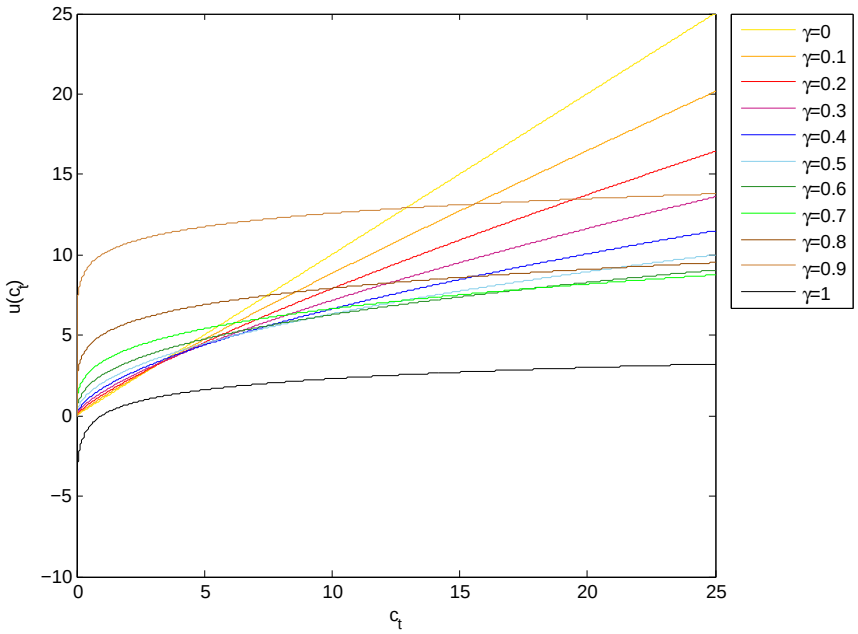

Abbildung 4.1: Nutzenfunktionen für $\gamma \in (0, 1)$
Quelle: eigene Berechnungen

Überträgt man nun diese Ergebnisse in die bereits vorher besprochene Nutzenfunktion (27) erhält man:

$$U_t = \begin{cases} \frac{(c_t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \pi_{t+1}(h_t, \bar{z}) \frac{(c_{t+1})^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{für} \quad \gamma \geq 0, \gamma \neq 1 \\ \ln(c_t) + \pi_{t+1}(h_t, \bar{z}) \ln(c_{t+1}) & \text{für} \quad \gamma = 1 \end{cases} \tag{30}$$

Für die weitere Analyse wird der allgemeine Fall ($\gamma \geq 0, \gamma \neq 1$) betrachtet und bei der Interpretation der Gleichungen zwischen den einzelnen Fällen unterschieden.

4.1.1. Haushalte

Den Individuen steht in der ersten Periode ihres Lebens eine Einheit an Zeit zur Verfügung. Diese Zeit können sie zwischen Pflichtschule $\bar{s}$, freiwilliger Schulbildung s_t und Arbeitszeit l_t aufteilen:

$$l_t + \bar{s} + s_t \leq 1 \tag{31}$$

Wobei die Nichtnegativitätsbedingung

$$s_t \geq 0 \tag{32}$$

der Schuldbildung zu beachten ist. Die Zeit, die in die Pflichtschule $\bar{s}$ investiert wird, wird exogen gegeben.
Sowohl die Pflichtschule als auch die freiwillige Schulbildung vergrößert das bereits bestehende Humankapital, während die Arbeitszeit das Einkommen in der ersten Periode vergrößert. Durch die Einführung der Pflichtschule, können Ecklösungen ohne freiwillige Schulbildung auftreten.

4.1.2. Humankapitalakkumulation

Eine in Periode t geborene Person tritt in die zweite Lebensphase mit e_{t+1} Humankapital ein. Dieses setzt sich wie folgt zusammen:

$$e_{t+1} = Be_t(s_t + \bar{s}), \quad B > 1 \tag{33}$$

B entspricht einem konstanten Produktivitätsparameter bei der Humankapitalakkumulation.
Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass Schulbildung umso effektiver ist, umso größer das aus der vorigen Periode eingebrachte Humankapital ist. Bei diesem Humankapital e_t wird angenommen, dass Humankapital über Generationen miteinander verknüpft ist. Dadurch besteht e_t nicht nur aus einem angeborenen Level von Humankapital $\bar{e}$ der exogen gegeben ist, sondern auch aus einer vererbten Komponente e_t^{t-1}. Das tiefgestellte t entspricht hierbei der laufenden Periode und das hochgestellte $t-1$ zeigt, dass diese Komponente in der Vorperiode erzeugt wurde. Demzufolge gilt

$$e_t = e_t^{t-1} + \bar{e} \tag{34}$$

Setzt man nun (34) in (33) ein, erhält man eine Differenzengleichung erster Ordnung, die die Entwicklung des Humankapitals beschreibt.

$$e_{t+1} = B(s_t + \bar{s})e_t^{t-1} + B(s_t + \bar{s})\bar{e} \tag{35}$$

Somit hängt der Humankapitalstock in der zweiten Periode sowohl von den Bildungsinvestitionen, als auch vom vorhanden Humankapital in der ersten Periode ab. Das zukünftige Humankapital, wird daher umso schneller wachsen, umso mehr in Bildung investiert wird. Wie effektiv diese Bildungsinvestitionen tatsächlich sind, hängt von der vererbten Komponente e_t^{t-1} und dem angeborenen Level $\bar{e}$ ab. Umso größer diese beiden Faktoren sind, umso mehr rentieren sich die Bildungsausgaben in der ersten Periode.

Gleichung (35) kann nun als lineare autonome Differenzengleichung betrachtet werden, aus der man folgende Lösung erhält:

$$e_t = \bar{e}\left(\frac{1-2B(s_t+\bar{s})}{1-B(s_t+\bar{s})}\right)(B(s_t+\bar{s}))^t + \frac{B\bar{e}(s_t+\bar{s})}{1-B(s_t+\bar{s})} \tag{36}$$

Beweis: Siehe Appendix B

Um Wachstum zu erzeugen, muss in diesem Modell das Humankapital wachsen. Aus Gleichung (36) ist ersichtlich, dass $B(s_t+\bar{s})^t$ jene Komponente ist, die Wachstum erzeugen kann. Jedoch sind dafür einige Überlegungen nötig.
Wäre $B(s_t+\bar{s}) < 1$ würde gelten:

$$\lim_{t\to\infty}(B(s_t+\bar{s}))^t = 0$$

In diesem Fall würde das Humankapital zu einem Steady State konvergieren und kein Wirtschaftswachstum erzeugen.
Deshalb muss für endogenes Wachstum

$$B(s_t+\bar{s}) > 1 \tag{37}$$

gelten. Daraus folgt auch, dass

$$\bar{e}\left(\frac{1-2B(s_t+\bar{s})}{1-B(s_t+\bar{s})}\right) > 0$$

gilt und somit unter dieser Parameterbeschränkung positives Wachstum für das Humankapital erzeugt werden kann.
Aus Bedingung (37) ist auch die Relevanz des Produktivitätsparameters B in der Humankapitalproduktion abzulesen. Umso größer dieser Parameterwert ist umso größeres Wachstum kann auch schon mit kleinen Bildungsinvestitionen erzeugt werden.

4.1.3. Produktionsfunktion

In diesem Modell wird eine Ökonomie ohne Kapital angenommen. Somit ergibt sich für das pro Kopf Einkommen in der ersten Periode:

$$y_t = Ae_t l_t \tag{38}$$

Der Output in der ersten Periode setzt sich multiplikativ aus Humankapital e_t, dem persönlichen Arbeitsangebot l_t und einem Produktivitätsparameter A zusammen. Da in diesem Modell kein Kapital vorkommt wird anhand von Investitionen in Bildung gespart, die das Einkommen von einer Periode in die nächste transferrieren. Dadurch ergibt sich in der zweiten Periode ein Output, der ausschließlich aus der Entwicklung des Humankapitals und dem Produktivitätsparameter A besteht, da in dieser Periode auch nicht mehr gearbeitet wird.

$$y_{t+1} = Ae_{t+1} = ABe_t(s_t + \bar{s}) \tag{39}$$

Eine Erhöhung der Schulbildung wirkt sich aufgrund der Zeitbeschränkung (31) zunächst negativ auf den Output in der ersten Periode y_t aus, da sich dadurch die Arbeitszeit verringert:

$$\begin{aligned} l_t + \bar{s} + s_t &\leq 1 \\ l_t &\leq 1 - \bar{s} - s_t \end{aligned} \tag{40}$$

Doch steigert diese erhöhte Schulbildung den Output in der zweiten Periode y_{t+1}.
Der resultierende Output wird in der ersten Periode zwischen Konsum c_t und Gesundheitsinvestitionen h_t aufgeteilt und in der zweiten Periode vollständig konsumiert c_{t+1}, da in dieser Periode keine weiteren Ausgabemöglichkeiten zur Verfügung stehen:

$$c_t \leq y_t - h_t \tag{41}$$

$$c_{t+1} \leq y_{t+1} \tag{42}$$

Weiters wird in diesem Modell angenommen, dass die Individuen in der ersten Periode ihre ganze zur Verfügung stehende Zeit aktiv nutzen werden. Freizeit wird daher nicht explizit modelliert und somit die gesamte Zeit zwischen Arbeit und Schulbildung restlos aufgeteilt. Zusätzlich wird von der Sättigung des Nutzens abstrahiert. Das bedeutet, dass die Individuen in der zweiten Periode immer den ganzen Output konsumieren werden. Aus diesen Annahmen und Überlegungen folgt, dass die oberen beiden Ungleichungen in Gleichheit erfüllt sind.

4.1.4. Bedingungen erster Ordnung

Da die Gleichungen (40), (41) und (42) alle in Gleichheit erfüllt sind, kann man diese leicht, zusammen mit (38) und (39) verbinden und erhält:

$$c_t = Ae_t(1 - \bar{s} - s_t) - h_t$$
$$c_{t+1} = ABe_t(\bar{s} + s_t)$$

Für die Bildungsinvestitionen gilt $s_t \in (0, 1)$. Dieses Ergebnis ist leicht aus der Nichtnegativitätsbedingung (32) und der Zeitbeschränkung in der ersten Periode (31) nachzuvollziehen. Durch diese Überlegung erhält man mittels Gleichung (41) und der Nichtnegativitätsbedingung (25) von h_t auch eine Beschränkung für die Gesundheitsinvestitionen, $h_t \in (0, y_t)$.
Nach diesen Überlegungen und Umformungen kann das Problem der Nutzenmaximierung der Individuen als Problem über (s_t, h_t) mit Nebenbedingungen, die in Ungleichheit erfüllt sind, aufgestellt werden:

$$\max_{s_t, h_t} \quad U_t(s_t, h_t) = u(Ae_t(1 - \bar{s} - s_t) - h_t) + \pi(h_t, \bar{z})u(ABe_t(\bar{s} + s_t))$$
$$s.t. \quad s_t \geq 0 \Leftrightarrow -s_t \leq 0 \tag{43}$$
$$h_t \geq 0 \Leftrightarrow -h_t \leq 0 \tag{44}$$

Zunächst stellt man die Lagrangefunktion für das Problem auf:

$$L(s_t, h_t, \lambda, \mu) = u(Ae_t(1 - \bar{s} - s_t) - h_t) + \pi(h_t, \bar{z})u(ABe_t(\bar{s} + s_t)) + \lambda s_t + \mu h_t \tag{45}$$

Für das Optimum muss gelten, dass die partiellen Ableitungen dieser Funktion nach den beiden Kontrollvariablen Null ergeben und durch die Ungleichheitsnebenbedingungen müssen zusätzlich noch Bedingung (48) und (49) erfüllt sein:

$$\frac{\partial L}{\partial s_t} = -u'(c_t)Ae_t + \pi(h_t, \bar{z})u'(c_{t+1})ABe_t + \lambda = 0 \tag{46}$$
$$\frac{\partial L}{\partial h_t} = -u'(c_t) + \pi_h(h_t, \bar{z})u(c_{t+1}) + \mu = 0 \tag{47}$$
$$\lambda s_t = 0; \quad s_t \geq 0; \quad \lambda \geq 0 \tag{48}$$
$$\mu h_t = 0; \quad h_t \geq 0; \quad \mu \geq 0 \tag{49}$$

Durch einfache Umformungen erhält man:

$$u^{'}(c_t)Ae_t = \pi(h_t, \bar{z})u^{'}(c_{t+1})ABe_t + \lambda \tag{50}$$

$$u^{'}(c_t) = \pi_h(h_t, \bar{z})u(c_{t+1}) + \mu \tag{51}$$

$$\lambda s_t = 0; \quad s_t \geq 0; \quad \lambda \geq 0 \tag{52}$$

$$\mu h_t = 0; \quad h_t \geq 0; \quad \mu \geq 0 \tag{53}$$

In diese Gleichungen kann man nun, die zu Beginn des Kapitels eingeführte Nutzenfunktion einsetzen und erhält mittels

$$u^{'}(c_t) = (c_t)^{-\gamma} = (Ae_t(1 - s_t - \bar{s}) - h_t)^{-\gamma}$$
$$u^{'}(c_{t+1}) = \pi(h_t, \bar{z})(c_{t+1})^{-\gamma} = \pi(h_t, \bar{z})(ABe_t(s_t + \bar{s}))^{-\gamma}$$

folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{\pi(h_t, \bar{z})ABe_t}{(ABe_t(s_t + \bar{s}))^{\gamma}} + \lambda = \frac{Ae_t}{(Ae_t(1 - s_t - \bar{s}) - h_t)^{\gamma}} \tag{54}$$

$$\pi_h(h_t, \bar{z})\frac{(ABe_t(\bar{s} + s_t))^{1-\gamma}}{1 - \gamma} + \mu = (Ae_t(1 - s_t - \bar{s}) - h_t)^{-\gamma} \tag{55}$$

Die ökonomische Bedeutung dieser zwei Gleichungen wird in den nächsten Abschnitten dieses Kapitels, anhand einiger Fallunterscheidungen bezüglich der Nebenbedingungen erläutert.

4.2. Schwellenwerte des Einkommens für ein positive Investition in Bildung

Um sich den Schwellenwert des Einkommens zu berechnen, ab dem es sich für die Individuen rendiert in Bildung zu investieren, nimmt man an, dass Nebenbedingung (43) bindend ist, also $s_t = 0$ gilt. Dadurch ist Bedingung (48) auf jeden Fall erfüllt und es muss nur noch überlegt werden, ob $\lambda > 0$ oder $\lambda = 0$ gilt. Betrachtet man die vorgegebene Nutzenfunktion wird klar, dass diese im Fall $s_t = 0$ immer die bindende Nebenbedingung tangiert und das Optimum immer im eingeschränkten Bereich liegt. Somit muss gelten $\frac{\partial U_t}{\partial s_t} = 0$, was nach Bedingung (46) nur mit $\lambda = 0$ möglich ist [21].
Setzt man nun die Annahmen $s_t = 0$ und $\lambda = 0$ in (54) ein, erhält man nach ein paar einfachen Umformungsschritten den Schwellenwert des Einkommens, ab dem die Individuen bereit sind in Bildung zu investieren:

$$\frac{\pi(h_t,\bar{z})ABe_t}{(ABe_t\bar{s})^\gamma} = \frac{Ae_t}{(Ae_t(1-\bar{s})-h_t)^\gamma}$$
$$(Ae_t(1-\bar{s})-h_t)^\gamma = \frac{Ae_t(ABe_t\bar{s})^\gamma}{\pi(h_t,\bar{z})ABe_t}$$
$$Ae_t(1-\bar{s})-h_t = \frac{ABe_t\bar{s}}{\pi(h_t,\bar{z})^{\frac{1}{\gamma}}B^{\frac{1}{\gamma}}}$$
$$Ae_t(1-\bar{s}) = \frac{ABe_t\bar{s}}{\pi(h_t,\bar{z})^{\frac{1}{\gamma}}B^{\frac{1}{\gamma}}} + h_t \tag{56}$$

Dies ist nun der Wert des Einkommens ab dem sich die Individuen bewusst für Bildungsinvestitionen entscheiden. Jedoch ist hier zu beachten, dass Investitionen in Humankapital risikoreiche Investitionen sind, da die Individuen nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in die zweite Periode ihres Lebens gelangen und somit den höheren Nutzen durch den gesteigerten Konsum nicht mit vollkommener Sicherheit erreichen. Durch dieses Risiko entsteht die Annahme, dass jene Individuen, die eine höhere Risikoaversion besitzen auch einen höheren Schwellenwert des Einkommens benötigen, ab dem sie bereit sind in das risikoreiche Asset Bildung zu investieren. Um diese Annahme zu überprüfen, wird Gleichung (56) nach γ abgeleitet. Da das Maß für die Risikobereitschaft im Exponenten dieser Gleichung steht, werden zunächst beide Seiten logarithmiert und anschließend nach γ abgeleitet.
Zunächst wird der Logarithmus angewandt

$$\ln(Ae_t(1-\bar{s})-h_t) = \ln(ABe_t\bar{s}) - \frac{1}{\gamma}\ln(\pi(h_t,\bar{z})B)$$

und anschließend abgeleitet

$$\frac{\partial \ln(Ae_t(1-\bar{s})-h_t)}{\partial\gamma} = \frac{1}{\gamma^2}\ln(\pi(h_t,\bar{z})B)$$

Diese Ableitung wird genau dann positiv sein, wenn

$$\pi(h_t,\bar{z})B > 1$$
$$\pi(h_t,\bar{z}) > \frac{1}{B} \tag{57}$$

gilt, da der Logarithmus ab einem Wert von 1 positiv wird. Somit hängt der Schwellenwert des Einkommens ab dem in Bildung investiert wird, positiv von der Risikoaversion γ ab, wenn die Parameterrestriktion (57) erfüllt ist. Umso risikoscheuer ein Individuum

ist, benötigt es einen umso größeren Einkommenslevel bevor es in Bildung zu investieren beginnt.
Um diesen Zusammenhang zu verdeutlichen werden die drei unterschiedlichen Fälle von γ betrachtet:

Fall 1: $\gamma = 1$ höchste Grad der Risikoaversion

$$Ae_t(1-\bar{s}) = \frac{ABe_t\bar{s}}{\pi(h_t,\bar{z})B} + h_t \tag{58}$$

Fall 2: $\gamma \in (0,1)$ risikoavers

$$Ae_t(1-\bar{s}) = \frac{ABe_t\bar{s}}{\pi(h_t,\bar{z})^{\frac{1}{\gamma}}B^{\frac{1}{\gamma}}} + h_t \tag{59}$$

Fall 3: $\gamma = 0$ risikoneutral

$$Ae_t(1-\bar{s}) = \frac{ABe_t\bar{s}}{\pi(h_t,\bar{z})^{\frac{1}{0}}B^{\frac{1}{0}}} + h_t = h_t \tag{60}$$

Aus diesen drei Fällen ist leicht zu erkennen, dass für den Schwellenwert des Einkommens (58) > (59) > (60) gilt, also:

$$h_t < \frac{ABe_t\bar{s}}{\pi(h_t,\bar{z})^{\frac{1}{\gamma}}B^{\frac{1}{\gamma}}} + h_t < \frac{ABe_t\bar{s}}{\pi(h_t,\bar{z})B} + h_t$$

Für die Gültigkeit dieser Aussage muss gelten:

$$\begin{aligned}
\pi(h_t,\bar{z})^{\frac{1}{\gamma}}B^{\frac{1}{\gamma}} &> \pi(h_t,\bar{z})B \\
\pi(h_t,\bar{z})^{\frac{1}{\gamma}-1} &> B^{1-\frac{1}{\gamma}} \\
\pi(h_t,\bar{z})^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} &> \frac{1}{B^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \\
\pi(h_t,\bar{z}) &> \frac{1}{B}
\end{aligned}$$

wobei diese Bedingung an die Parameter mit Bedingung (57) übereinstimmt, die bereits für den positiven Zusammenhang von Risikoaversion und Schwellenwert benötigt wurde.

4.3. Schwellenwerte des Einkommens für eine positive Investition in Gesundheit

Nun möchte man sich den Schwellenwert des Einkommens berechnen, ab dem die Individuen in ihre Gesundheit zu investieren beginnen. Dazu nimmt man Nebenbedingung (44) in Gleichheit und somit bindend an, daher $h_t = 0$. Dadurch ist in diesem Fall Gleichung (49) erfüllt und es bleibt zu überlegen ob $\mu > 0$ oder $\mu = 0$ gilt. Wie im vorigen Abschnitt zeigt sich, dass die Nutzenfunktion die bindende Nebenbedingung tangiert und das Optimum im eingeschränkten Bereich liegt. Dadurch muss $\frac{\partial U_t}{\partial h_t} = 0$ gelten. Aus Gleichung (47) wird daher ersichtlich, dass $\mu = 0$ gelten muss, um diese Bedingung zu erfüllen. Setzt man nun $h_t = 0$ und $\mu = 0$ in Gleichung (55) ein, erhält man nach einigen Umformungsschritten das Einkommen ab dem Investitionen in Gesundheit positiv werden:

$$\begin{aligned}(Ae_t(1-\bar{s}-s_t))^{-\gamma} &= \pi_h(0,\bar{z})\frac{(ABe_t(\bar{s}+s_t))^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\ Ae_t(1-\bar{s}-s_t) &= \left(\frac{1-\gamma}{\pi_h(0,\bar{z})(ABe_t(\bar{s}+s_t))^{1-\gamma}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \end{aligned} \tag{61}$$

Um zu verstehen wie sich die unterschiedliche Risikobereitschaft der Individuen auf den Schwellenwert des Einkommens auswirkt, wird Gleichung (61) zunächst auf Grund der im Exponenten enthaltenen Risikobereitschaft γ, logarithmiert und anschließend nach γ abgeleitet.

$$\ln(Ae_t(1-\bar{s}-s_t)) = \frac{1}{\gamma}\ln(1-\gamma) - \frac{1}{\gamma}\ln(\pi_h(0,\bar{z})) - \frac{1-\gamma}{\gamma}\ln(ABe_t(\bar{s}+s_t)) \tag{62}$$

Leitet man Gleichung (62) schließlich nach γ ab, erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln(Ae_t(1-\bar{s}-s_t))}{\partial\gamma} &= -\frac{1}{\gamma^2}\ln(1-\gamma) - \frac{1}{\gamma(1-\gamma)} + \frac{1}{\gamma^2}\ln(\pi_h(0,\bar{z})) + \frac{1}{\gamma^2}\ln(ABe_t(\bar{s}+s_t)) \\ &= -\frac{1}{\gamma(1-\gamma)} + \frac{1}{\gamma^2}\ln\left(\frac{\pi_h(0,\bar{z})ABe_t(\bar{s}+s_t)}{1-\gamma}\right)\end{aligned}$$

Damit $\frac{\partial \ln(Ae_t(1-\bar{s}-s_t))}{\partial \gamma} > 0$ gilt, müssen folgende Bedingungen gelten:

$$\frac{\pi_h(0,\bar{z})ABe_t(\bar{s}+s_t)}{1-\gamma} > 1$$

$$\text{bzw.} \quad \pi_h(0,\bar{z})ABe_t(\bar{s}+s_t) > 1-\gamma$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{\gamma^2}\ln\left(\frac{\pi_h(0,\bar{z})ABe_t(\bar{s}+s_t)}{1-\gamma}\right) > \frac{1}{\gamma(1-\gamma)}$$

In diesem Fall würde dann das Einkommen, das benötigt wird bevor in Gesundheit investiert wird, mit dem Grad der Risikoaversion steigen. Um dies besser verstehen zu können werden die unterschiedlichen Grade der Risikoaversion betrachtet:

Fall 1: $\gamma = 1$ höchste Grad der Risikoaversion

$$Ae_t(1-\bar{s}-s_t) = \frac{1-\gamma}{\pi_h(0,\bar{z})(1-\gamma)\ln(ABe_t(s_t+\bar{s}))} = \frac{1}{\pi_h(0,\bar{z})\ln(ABe_t(s_t+\bar{s}))} \tag{63}$$

Fall 2: $\gamma \in (0,1)$ risikoavers

$$Ae_t(1-\bar{s}-s_t) = \left(\frac{1-\gamma}{\pi_h(0,\bar{z})(ABe_t(\bar{s}+s_t))^{1-\gamma}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{64}$$

Fall 3: $\gamma = 0$ risikoneutral

$$Ae_t(1-\bar{s}-s_t) = \left(\frac{1}{\pi_h(0,\bar{z})ABe_t(\bar{s}+s_t)}\right)^{\infty}$$

Somit

$$Ae_t(1-\bar{s}-s_t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad 1 < \pi_h(0,\bar{z})ABe_t(\bar{s}+s_t) \\ \infty & \text{wenn} \quad 1 > \pi_h(0,\bar{z})ABe_t(\bar{s}+s_t) \end{cases}$$

4.4. Optimale Wahl zwischen Gesundheit und Bildung

Nimmt man an, dass sich eine innere Lösung realisieren wird, werden die Nebenbedingungen (43) und (44) mit strikter Ungleichheit angenommen, also $s_t > 0$ und $h_t > 0$. Dies führt zu der Schlussfolgerung, dass $\lambda = 0$ und $\mu = 0$ gelten muss, um die Bedingungen (48) und (49) zu erfüllen. Unter diesen Annahmen und Überlegungen können die

Bedingungen erster Ordnung wie folgt angeschrieben werden:

$$\frac{\pi(h_t, \bar{z})ABe_t}{(ABe_t(s_t + \bar{s}))^{\gamma}} = \frac{Ae_t}{(Ae_t(1 - s_t - \bar{s}) - h_t)^{\gamma}} \tag{65}$$

$$\pi_h(h_t, \bar{z})\frac{(ABe_t(\bar{s} + s_t))^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \frac{1}{(Ae_t(1 - s_t - \bar{s}) - h_t)^{\gamma}} \tag{66}$$

Nun kann die Eulergleichung auf folgende Form reduziert werden:

$$\frac{1-\gamma}{Ae_t(s_t + \bar{s})} = \frac{\pi_h(h_t, \bar{z})}{\pi(h_t, \bar{z})} \tag{67}$$

Beweis: Siehe Appendix B

Wie die Eulergleichung auf Bildungs- und Gesundheitsinvestitionen reagiert lässt sich leicht mittels Ableitung von Gleichung (67) nach der jeweiligen Variablen untersuchen.

$$\frac{\partial(67)}{\partial s_t} = \frac{-(1-\gamma)Ae_t}{(Ae_t(s_t + \bar{s}))^2}$$

$$\frac{\partial(67)}{\partial h_t} = \frac{\pi_{hh}(h_t, \bar{z}) - \pi_h(h_t, \bar{z})^2}{\pi(h_t, \bar{z})^2}$$

Da $\pi_{hh}(h_t, \bar{z}) < 0$ und $\pi_h(h_t, \bar{z}) > 0$ gilt, ist zu erkennen, dass beide Ableitungen negativ sind und sich Gesundheit als auch Bildung in die selbe Richtung entwickeln. Somit zeigt sich, dass ein Individuum, das mehr in Bildung investiert auch gleichzeitig die Investitionen in Gesundheit steigert. Dadurch erhöht das Individuum gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit, den durch Bildung vergrößerten Konsum der zweiten Periode genießen zu können. Umgekehrt gilt, dass ein Individuum, das seine Gesundheit und damit die Überlebenswahrscheinlichkeit erhöht, auch die Bildungsinvestitionen steigert, da die Wahrscheinlichkeit, den Ertrag dieser Investitionen zu erhalten, gestiegen ist.
Formt man Gleichung (67) auf

$$\frac{\pi(h_t, \bar{z})}{Ae_t(s_t + \bar{s})\pi_h(h_t, \bar{z})} = \frac{1}{1-\gamma}$$

um, kann überlegt werden wie sich Bildungs- und Gesundheitsinvestitionen mit dem Grad der Risikoaversion ändern. Es zeigt sich, dass die rechte Seite mit höheren Graden der Risikoaversion steigt. Dadurch muss auch die linke Seite bei einem Anstieg der Risikoaversion steigen, was durch vermehrte Investitionen in Gesundheit oder eine geringere Investition in Bildung möglich ist. Dies lässt den Schluss zu, dass die Bildungsinvestitio-

nen mit dem Grad der Risikoaversion zurückgehen werden.
Wie genau sich Bildungs- und Gesundheitsinvestitionen über die Zeit entwickeln wird nun anhand einer numerischen Modellierung gezeigt. Bei der Parameterwahl müssen die Parameterrestriktionen (37) und (57), die im Laufe des Kapitels aufgestellt wurden, berücksichtigt werden.
Für die Überlebenswahrscheinlichkeit (26) werden die Parameter $\overline{z} = 0.3$, $\overline{\pi} = 0.95$, $\psi = 0.01$ und $\phi = 0.5$ angenommen. Die restlichen Parameter sind $A = 1$, $B = 9$, $\overline{s} = 0.3$ und $\overline{e} = 0.1$.
Für Bedingung (37) muss gelten:

$$s_t + \overline{s} > \frac{1}{B}$$

Selbst im Fall $s_t = 0$ gilt mit der obrigen Parameterwahl $0.3 > \frac{1}{9}$. Und auch die zweite Bedingung (57) ist mit den gewählten Parametern erfüllt, denn es muss

$$\pi_{t+1}(h_t, \overline{z}) > \frac{1}{B}$$

gelten, was auch bei einer Wahl von $h_t = 0$ erfüllt ist: $0.3 > \frac{1}{9}$. In Abbildung 4.2 wird der Verlauf der Bildungsinvestitionen über 30 Generationen für die unterschiedlichen Risikoaversionen γ grafisch dargestellt. Dabei werden auf der x-Achse die Generationen aufgetragen und auf der y-Achse der Anteil der Zeit, der in Bildung investiert wird.
Anhand dieser Grafik ist ersichtlich, dass die Investitionen in Bildung mit dem Grad der Risikoaversion sinken und sich der Zeitpunkt, ab dem das erste Mal in Bildung investiert wird bei hohen Graden der Risikoaversion nach hinten verschiebt. Dies liegt daran, dass Individuen mit einer hohen Risikoaversion ein höheres Einkommen benötigen bevor sie das erste Mal in Bildung investieren. Somit stimmen in diesem Fall die Ergebnisse der Modellierung mit den vorangegangenen Überlegungen in diesem Kapitel überein.
Auch bei den Investitionen in Gesundheit ist aus Abbildung 4.3 zu erkennen, dass diese mit dem Grad der Risikoaversion sinken. Dabei werden auf der x-Achse die Generationen aufgetragen und auf der y-Achse die Gesundheitsinvestitionen die getätigt werden. Dafür wurde bei der y-Achse eine logarithmische Skala verwendet, da die Gesundheitsinvestitionen über die Zeit von sehr unterschiedlicher Größe sind. Höhere Gesundheitsinvestitionen steigern zwar die Wahrscheinlichkeit in die zweite Periode zu gelangen. Ist ein Individuum jedoch risikoavers senkt es nicht nur die Bildungsausgaben, sondern auch die Gesundheitsinvestitionen, da bei einem vorzeitigen Tod nach der ersten Periode auch diese Investitionen verloren gehen würden.

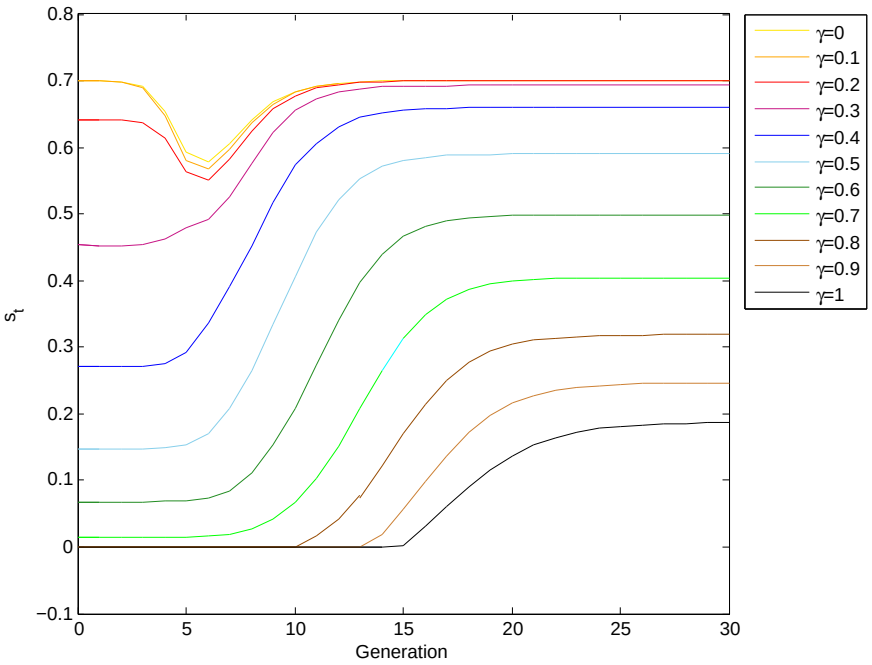

Abbildung 4.2: Bildungsinvestitionen mit unterschiedlichen Graden der Risikoaversion

Quelle: eigene Berechnungen

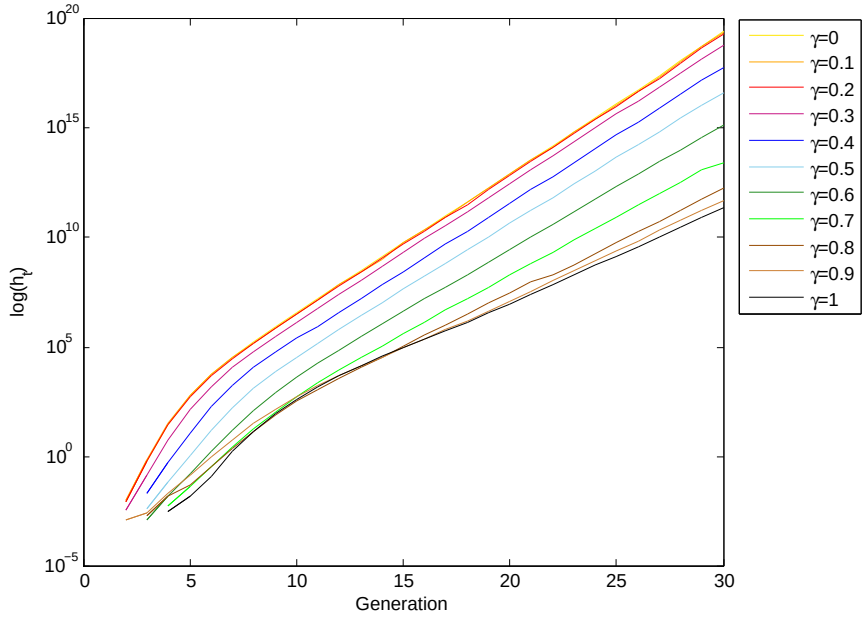

Abbildung 4.3: Gesundheitsinvestitionen mit unterschiedlichen Graden der Risikoaversion

Quelle: eigene Berechnungen

In Tabelle 1 werden die Ergebnisse noch einmal zusammengefasst und zusätzlich die Schwellenwerte des Einkommens aufgelistet, ab denen das erste Mal in Bildung und Gesundheit investiert wird. Die erste Spalte gibt den Grad der Risikoaversion γ an. In der zweiten Spalten werden die Schwellenwerte ab denen das erste Mal in Bildung investiert wird y_t^s aufgelistet und in der dritte Spalte die Schwellenwert für Gesundheitsinvestitionen y_t^h. Die letzten beiden Spalten geben jeweils die Generation an, in der die Schwellenwerte der jeweiligen Investition erreicht werden und somit das erste Mal in Bildung t^s oder Gesundheit t^h investiert wird. Somit entspricht jede Zeile einem Grad der Risikoaversion und gibt für diesen Grad an, wie hoch der Schwellenwert für Bildung y_t^s und Gesundheit y_t^h ist und in welcher Generation dieser erreicht wird: t^s und t^h.
In dieser Tabelle ist nun zu erkennen, dass der Schwellenwert des Einkommens, ab dem in Bildung investiert wird kontinuierlich mit dem Grad der Risikoaversion steigt, während der Schwellenwert des Einkommens für Gesundheitsinvestitionen schwankt. Bis $\gamma = 0.7$ investieren die Individuen immer zuerst in Bildung, bevor sie sich der Gesundheit widmen. Erst ab diesem Grad der Risikoaversion sind die Individuen so vorsichtig, dass sie zunächst die Wahrscheinlichkeit erhöhen wollen in die nächste Period zu gelangen und somit zuerst in Gesundheit investieren bevor sie ihre Bildungsinvestitionen steigern.

γ	y_t^s	y_t^t	t^s	t^h
0	0	0.008	1	2
0.1	0	0.013	1	2
0.2	0.016	0.427	1	2
0.3	0.067	1.135	1	2
0.4	0.116	5.811	1	3
0.5	0.149	3.608	1	3
0.6	0.171	2.291	1	3
0.7	0.185	4.410	1	4
0.8	2505.562	1.378	11	3
0.9	36892.227	0.510	14	2
1	112263.791	3.720	15	4

Tabelle 1: Schwellenwert des Einkommens ab dem in Bildung oder Gesundheit investiert wird (y_t^s, y_t^h) und ab welcher Generation diese jeweils erste Investition stattfindet (t^s, t^h)
Quelle: eigene Berechnungen

5. Eeckhoudt und Pestieau (2008)

5.1. Das Modell im Allgemeinen

Das in diesem Kapitel vorgestellte Modell richtet sich nach der Arbeit von Louis Eeckhoudt und Pierre Pestieau „A note on longevity enhancing investment“ [6]. Hier wird einen Schritt weiter gegangen und zwischen der Überlebenswahrscheinlichkeit und der Länge des Lebens unterschieden. Dazu wird ein OLG-Modell mit zwei Perioden konstruiert, anhand dessen man analysiert wie sich private Entscheidungen der Individuen auf die Überlebenskurve auswirken. Da die Überlebenskurve bereits zu Beginn der Arbeit erläutert wurde, wird für die nähere Erklärung auf Kapitel 2 verwiesen (Abb.: 2.3). Für die Analyse ob es zu einer Rektangularisierung der Überlebenskurve kommt oder zu einer einfachen Verschiebung der Überlebenskurve nach rechts werden zwei verschiedene Parameter eingeführt: h als die Obergrenze der menschlichen Lebensdauer und π als die Wahrscheinlichkeit diese Obergrenze nach einem gewissen Alter zu erreichen. Diese beiden Parameter können durch Entscheidungen zu Beginn der ersten Periode beeinflusst werden. Investitionen x erhöhen die Wahrscheinlichkeit π in die zweite Periode zu gelangen und führen somit zu einer Rektangularisierung der Überlebenskurve. Solche Investitionen umfassen zum Beispiel eine Mitgliedschaft in einem Fitnessstudio oder eine gesunde und teure Ernährung. Um die Länge seines Lebens h zu beeinflussen, können die Individuen Einsätze y leisten, die die Überlebenskurve nach rechts verschieben. Diese Einsätze beinhalten zum Beispiel häufigere Gesundheitsvorsorgen, wie Mammografien. Dadurch können früher Diagnosen erstellt und somit schneller effiziente Therapien eingeleitet werden, die das Leben verlängern.
Beide Funktionen sind steigend und konkav in x bzw. in y:

$$\pi^{'}(x) > 0 \qquad \pi^{''}(x) < 0$$

$$h^{'}(y) > 0 \qquad h^{''}(y) \leq 0$$

Die Individuen leben, wie oben bereits erwähnt zwei Perioden lang. Die erste Periode umfasst keine Unsicherheiten und wird auf jeden Fall überlebt, wobei die Länge auf eins normiert wird. In dieser Periode arbeiten die Individuen und erhalten dadurch einen Lohn w. Da sowohl durch Ausgaben für x als auch für y in der ersten Periode des Modells Kosten entstehen, kann der Konsum c in dieser Periode, nach Abzug der Ersparnisse s,

wie folgt dargestellt werden:

$$c = w - s - x - y$$

Der Konsum in der zweiten Periode d ergibt sich aus dem Ertrag der Ersparnisse, die an einem Annuitäten-Markt angelegt worden sind. Dieser Markt ist mehr oder weniger fair. Der Ertrag entspricht $R = \frac{1+r}{(\pi h)^\alpha}$, wobei r den Zinssatz bezeichnet und $\alpha \in (0, 1)$ die Fairness. Im Fall $\alpha = 0$ wird die Lebenslänge der Individuen in der Berechnung nicht berücksichtigt während im Fall $\alpha = 1$ der Markt versicherungsmathematisch gesehen gerecht ist, da mit $\alpha = 1$ die Länge des Lebens vollkommen in die Berechnung der Ertragsrate miteinbezogen wird. Somit würde die Ertragsrate, im Fall $\alpha > 0$ mit steigender Lebenserwartung sinken. Dies lässt die Frage aufkommen, ob die Individuen bei der Wahl ihrer Lebenslänge $\pi(x)h(y)$ berücksichtigen, dass ihre Entscheidungen auch einen Einfluss auf die Ertragsrate haben können. In diesem Modell wird jedoch von dieser Fragestellung Abstand genommen und R als gegeben betrachtet. Dadurch wird R nicht mehr von x und y beeinflusst und die Individuen können ihre Entscheidungen über x und y unabhängig von deren Einfluss auf die Rendite wählen.
Die Nutzenfunktion u besteht in jeder Periode aus jeweils zwei Argumenten: das erste Argument gibt den Konsum in dieser Periode an und im zweiten Argument wird die zeitliche Länge der jeweiligen Periode festgehalten. Der Nutzen in der ersten Periode entspricht daher $u(c, 1)$, da diese Periode mit Sicherheit durchlebt wird, der Konsum c genossen wird und die Länge dieser Periode auf Eins normiert wurde. In der zweiten Periode ist der Nutzen durch $u(d, h(y))$ gegeben, wobei diese Periode nur mit Wahrscheinlichkeit $\pi(x)$ erreicht werden kann. Hier entspricht d dem Konsum und $h(y)$ der Länge dieser Periode, die diesmal durch Investitionen y in der vorherigen Periode beeinflusst werden kann.
Der zu erwartende Nutzen U aus beiden Perioden ist somit gegeben durch:

$$U = u(w - s - x - y, 1) + \pi(x)u(sR, h(y)) \tag{68}$$

Sollte ein Individuum zu Beginn der zweiten Periode sterben, also $\pi(x) = 0$ gelten, wird sein ganzer zu erwartender Nutzen U auf 0 gesetzt, da kein Vererbungsmotiv in diesem Modell berücksichtigt wird. Das Gleiche gilt für den Fall bei dem die Lebenszeit der zweiten Periode gegen Null geht, also $h(y) = 0$ gilt. In diesem Fall kann kein Nutzen aus dieser Periode gezogen werden, daher $u(d, 0) = 0$. Somit entspricht auch dies dem Tod zu Beginn der zweiten Periode und der gesamte Nutzen U wird auf 0 gesetzt.
Allgemein wird angenommen, dass die erste Ableitung der Nutzenfunktion u in bei-

den Argumenten positiv ist und die zweite Ableitung jeweils negativ. Leitet man nun Gleichung (68) nach s, x und y ab, erhält man folgende Bedingungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -u_1(c,1) + \pi(x)Ru_1(d,h(y)) = 0 \tag{69}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -u_1(c,1) + \pi^{'}(x)u(d,h(y)) = 0 \tag{70}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -u_1(c,1) + \pi(x)h^{'}(y)u_2(d,h(y)) = 0 \tag{71}$$

Da es in dieser Arbeit primär um den Zusammenhang von x und y geht, wird s als gegeben betrachtet.

5.2. Vereinfachter Fall

In diesem Fall wird angenommen, dass die Nutzenfunktion u eine multiplikativ separable Funktion ist und somit

$$u(d,h(y)) = u(d) \cdot h(y)$$

erfüllt. In diesem Spezialfall entspricht die zweite Ableitung der Nutzenfunktion im Bezug auf h = Null, also $u_{22} = 0$.
Mit dieser Annahme und unter der Berücksichtigung, dass

$$u_2(d,h(y)) = \frac{\partial(u(d) \cdot h(y))}{\partial h(y)} = u(d)$$

gilt, lassen sich Gleichung (70) und (71) wie folgt anschreiben:

$$-u_1(c,1) + \pi^{'}(x)u(d)h(y) = 0 \tag{72}$$

$$-u_1(c,1) + \pi(x)h^{'}(y)u(d) = 0 \tag{73}$$

Fasst man diese beiden Gleichungen zusammen, erhält man nach nur wenigen Umformungsschritten eine Optimalitätsbedingung:

$$\pi^{'}(x)u(d)h(y) = \pi(x)h^{'}(y)u(d)$$

$$\frac{\pi^{'}(x)}{\pi(x)} = \frac{h^{'}(y)}{h(y)} \tag{74}$$

Es ist schnell zu erkennen, dass diese Optimalitätsbedingung genau dem Optimum entspricht, das ein Individuum erhält, wenn es versucht seine zu erwartende Lebenszeit

unter einem vorgegebenen Budget $(w - s)$ zu maximieren. Die zu erwartende Lebenszeit in diesem Modell ist dabei durch $\pi(x)h(y)$ definiert. $h(y)$ allein entspricht zwar der Länge des Lebens, kann jedoch nur mit der Wahrscheinlichkeit $\pi(x)$ erreicht werden.

Beweis: Siehe Appendix C

Somit führt eine multiplikativ separable Nutzenfunktion, die linear in h ist dazu, dass sich die Individuen in diesem Fall ausschließlich auf ihre zu erwartende Lebenszeit konzentrieren.

5.3. Allgemeiner Fall

In diesem Fall ist die Nutzenfunktion nicht mehr multiplikativ separabel. Somit erhält man aus Gleichung (70) und (71) folgende Bedingung:

$$\frac{\pi^{'}(x)}{\pi(x)} = \frac{h^{'}(y)u_2(d,h(y))}{u(d,h(y))} = \frac{h^{'}(y)}{h(y)} \cdot \frac{u_2(d,h(y)) \cdot h(y)}{u(d,h(y))} \tag{75}$$

Wobei

$$\frac{\pi^{'}(x)}{\pi(x)} \lessgtr \frac{h^{'}(y)}{h(y)} \quad \text{wenn} \quad \frac{u_2 \cdot h}{u} \lessgtr 1 \tag{76}$$

gilt.
Im vorigen Kapitel wurde die Risikoaversion der Individuen über das Arrow-Pratt-Maß definiert. Jetzt wird ein schwächeres Maß eingeführt, das jedoch die selben Ergebnisse, wie das Arrow-Pratt-Maß liefert - die Angst vor dem Ruin [9].

$$\text{Angst vor dem Ruin} = \frac{u(w) - u(0)}{u^{'}(w)}$$

Betrachtet man dies nun für $w = h(y)$ und mit dem Wissen, dass $u(d,0) = 0$ gilt, erhält man für dieses Modell:

$$\text{Angst vor dem Ruin} = \frac{u(d,h(y))}{u_2(d,h(y))}$$

Somit entspricht $\frac{u_2}{u}$ der Inversen der Risikoaversion in Bezug auf $h(y)$. Dies bedeutet, dass die Risikoaversion steigt, wenn $\frac{u_2}{u}$ sinkt.

Um nun herauszufinden ob bei Formel (76) $\frac{u_2 \cdot h}{u} < 1$ oder $\frac{u_2 \cdot h}{u} > 1$ gilt, wird Abbildung 5.1 betrachtet.

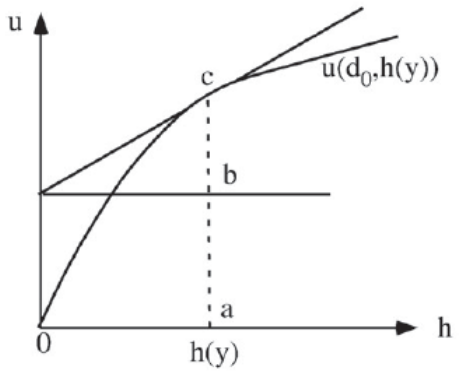

Abbildung 5.1: Nutzenfunktion für gegebenes d_0
(Quelle: Eeckhoudt und Pestieau (2008)[6], S.58, Fig.1)

In dieser Abbildung wird ein vorgegebener Wert d_0 für den Konsum d angenommen. Zu Beginn des Kapitels wurde vorgegeben, dass der Nutzen konkav in $h(y)$ sein muss und gezeigt, dass $u(d, 0) = 0$ gilt. Durch diese Überlegungen erhält man eine konkave Nutzenfunktion $u(d_0, h(y))$ im Ursprung. Die Strecke $\overline{ac}$ entspricht somit einem Nutzen u, $u = \overline{ac}$. Den Anstieg u_2 erhält man durch die einfache Überlegung:

$$u_2 = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{\overline{bc}}{h} \Rightarrow u_2 \cdot h = \overline{bc}$$

Somit ergibt sich, wenn der Nutzen konkav in $h(y)$ ist und die Bedingung $u(d, 0) = 0$ erfüllt ist, die Aussage $\frac{u_2 h}{u} < 1$, da dann $\overline{bc} < \overline{ac}$ gilt. Dadurch erhält man bei Formel (76) folgende Ungleichung:

$$\frac{\pi^{'}(x)}{\pi(x)} < \frac{h^{'}(y)}{h(y)}$$

Dieses Ergebnis führt bei Gleichung (75) dazu, dass ein Anstieg der Risikoaversion mit einem Anstieg in x und einem Sinken in y einhergehen muss um diese Gleichung erfüllen zu können.

Beweis: Siehe Appendix C

Somit kann mit diesem Modell gezeigt werden, dass risikoaverse Individuen dazu tendieren erhöhte Investitionen in x zu leisten, um die Wahrscheinlichkeit des Überlebens zu steigern. Daraus folgt, dass die Individuen in diesem Fall zu einer Rektangularisierung der Überlebenskurve neigen.

6. Schlussfolgerung

In dieser Arbeit wurden verschiedene Erklärungsansätze vorgestellt, wie endogene Sterblichkeit in ein ökonomisches Modell eingebaut werden kann und wie sich diese Modellerweiterung auf das Wirtschaftswachstum auswirkt. Dazu wurden drei unterschiedliche Modelle analysiert, anhand derer man Schlüsse auf die Entwicklung der Ökonomie ziehen kann.

Im ersten Teil wurde ein Modell überlappender Generationen angenommen, wobei die zweite Periode nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit erreicht werden kann. Die Überlebenswahrscheinlichkeit ist abhängig von öffentlichen Gesundheitsmaßnahmen, die durch eine Steuer auf Arbeit in der ersten Periode finanziert werden. Mit Hilfe dieses Modells konnte gezeigt werden, dass die Lebenserwartung einen direkten Effekt auf das Sparverhalten der Individuen hat. Durch eine steigende Lebenserwartung haben die Individuen mehr Anreiz zu sparen, was wiederum die Kapitalakkumulation fördert und somit das Wirtschaftswachstum steigert. Im Gegensatz dazu bremst eine niedrige Lebenserwartung die Kapitalakkumulation und das Wachstum, da ein niedrigeres Einkommen die Lebenserwartung senkt und somit die Spar- und Investitionsentscheidungen negativ beeinflusst. Weiters konnte gezeigt werden, dass unter bestimmten Parameterwerten Armutsfallen möglich sind. Jedoch kann durch eine gesteigerte Lebenserwartung der Schwellenwert, ab dem man in diese Situation gerät, gesenkt und mit einer genügend hohen Lebenserwartung sogar eliminiert werden. Das Ganze ist abhängig von der totalen Faktorproduktivität der Ökonomie, die genügend hoch sein muss, da die Wirtschaft sonst stagniert und immer in eine Armutsfalle gerät. In diesem Modell mit endogener Sterblichkeit war es auch möglich anhand des Technologieparameters zu erklären, wieso Länder, die sich ausschließlich in diesem Parameter unterscheiden, zu unterschiedlichen Gleichgewichten konvergieren.

Im zweiten Teil wurde dieses Modell um die Möglichkeit, in Bildung zu investieren und somit den Lohn in der zweiten Periode zu erhöhen erweitert. Dabei war besonders zu beachten, dass in diesem Fall Bildung direkten Einfluss auf die Lebenserwartung hatte und durch steigende Bildungsinvestitionen die Überlebenswahrscheinlichkeit zusätzlich erhöht werden konnte. Auch bei dieser Modifikation wurde das Sparverhalten der Individuen positiv von der Lebenserwartung beeinflusst. Dabei stellte sich heraus, dass abhängig von der Humankapitaltechnologie Ecklösungen ohne Bildung auftreten können, bei denen es zu einer Armutsfalle kommt.

Im vierten Kapitel der Arbeit wurde ein Modell aufgestellt, bei dem die Individuen selbst über die Höhe der Gesundheitsinvestitionen entscheiden konnten und somit private Ent-

scheidungen die Überlebenswahrscheinlichkeit beeinflussten. In diesem Modell konnten sich die Individuen zwischen Bildungs- und Gesundheitsausgaben entscheiden, wobei auf die explizite Modellierung von Kapital verzichtet wurde. Daher war es den Individuen in diesem Modell möglich, nur in Form von Bildung zu sparen und so ihr Vermögen in die nächste Periode zu transferieren. Somit steigerten Bildungsinvestitionen in diesem Modell die Akkumulation von Humankapital, was wiederum zu Wirtschaftswachstum führte. Gleichzeitig waren Bildungsinvestitionen risikoreich, da ihr Ertrag in der nächsten Periode nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit erreicht werden konnte. In diesem Modell wurde anhand verschiedener Grade der Risikoaversion überprüft, in welches der beiden Assets die Individuen zuerst investieren und ab wann diese Investitionen das erste Mal stattfinden. Dabei hat sich ergeben, dass sich der Zeitpunkt, ab dem die Individuen in Bildung investieren, mit dem Grad der Risikoaversion nach hinten verschiebt, da sich mit dem Grad der Risikoaversion auch der Schwellenwert erhöht, ab dem in Bildung investiert wird. Somit wird ein immer höhreres Einkommen benötigt bevor das erste Mal in Bildung investiert wird, und auch die Höhe dieser Investitionen nimmt mit der Risikoaversion ab. Wird bei geringer Risikoaversion zuerst in Bildung investiert und erst später mit steigendem Einkommen in Gesundheit, ändert sich dieses Verhalten bei hohen Graden der Risikoaversion, da die Individuen in diesen Fällen zuerst die Wahrscheinlichkeit erhöhen wollen das risikoreiche Asset zu erhalten, bevor sie in dieses investieren. Somit zeigt sich in diesem Kapitel, dass es suboptimal sein kann Individuen zu Investitionen in die Gesundheit zu drängen, wenn das Einkommen noch unter einem gewissen Schwellenwert liegt.

Im letzten Kapitel wurde explizit zwischen Überlebenswahrscheinlichkeit und der Länge des Lebens unterschieden. Dabei wurde allgemein zwischen einer multiplikativ separablen und einer nicht multiplikativ separablen Nutzenfunktion unterschieden. Im Fall der multiplikativ separablen Nutzenfunktion erhielt man das Ergebnis, dass sich in diesem Fall die Individuen um eine Erhöhung der maximalen Lebenszeit bemühten und somit gleichermaßen in die Überlebenswahrscheinlichkeit als auch in die Lebenslänge investierten. Dies unterscheidet sich von dem Ergebnis, das man unter der nicht multiplikativ separablen Nutzenfunktion erhält. In diesem Fall muss man die Risikoaversion der Individuen berücksichtigen, da sich abhängig davon die Investitionen unterscheiden. Mit Hilfe des Modells ließ sich schließlich zeigen, dass risikoaverse Individuen zu einer erhöhten Investition in die Überlebenswahrscheinlichkeit neigen. Dies ist der Fall, da die Länge des Lebens in diesem Modell das risikoreiche Asset ist und sich bei risikoaversen Individuen zunächst die Wahrscheinlichkeit erhöhen muss dieses Asset überhaupt zu erhalten, bevor darin investiert wird.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass sich durch das Einbeziehen von endogener Sterblichkeit in ein Wachstumsmodell zeigen lässt, wie mit einer besseren Gesundheit, die mit einer Erhöhung der Lebenserwartung und der Überlebenswahrscheinlichkeit einhergeht, Wirtschaftswachstum generiert werden kann. Es hat sich herausgestellt, dass in Ökonomien mit einer hohen Sterblichkeit weniger gespart und investiert wird, da die Individuen durch die niedrige Überlebenswahrscheinlichkeit die Zukunft stärker abdiskontieren und zu weniger risikoreichen Investitionen neigen.

Abbildungsverzeichnis

2.1. Lebenserwartung bei der Geburt (Quelle: eigene Berechnungen mit Daten aus The Human Mortality Database [11]: http://www.mortality.org/) . . 11
2.2. Sterbewahrscheinlichkeit für 80jährige Frauen von 1950-2011 (Quelle: eigene Berechnungen mit Daten aus The Human Mortality Database [11]: http:// www.mortality.org/ und Statistik Austria [24]: http://www.statistik.at/) 15
2.3. Überlebenskurven für Kohorten aus Großbritannien zwischen 1922 und 2009 (Quelle: eigene Berechnungen mit Daten aus The Human Mortality Database [11]: http://www.mortality.org/) 17
2.4. Lebenserwartung von Männern und Frauen in Schweden von 1750 bis 2011 (Quelle: eigene Berechnungen mit Daten aus The Human Mortality Database [11]: http://www.mortality.org/) 19
2.5. Lebenserwartung bei der Geburt und BIP pro Kopf im Jahr 2009 (Quelle: eigene Berechnungen mit Daten aus WorldBank [25]: http://data.worldbank.org) 21
3.1. Konvergenz bei zwei Steady States (Quelle: eigene Berechnungen) 28
3.2. Sensitivitätsanalyse des stabilen Steady States in Bezug auf β (Quelle: eigene Berechnungen) 29
3.3. Konvergenz bei nur einem Steady State (Quelle: eigene Berechnungen) . . 29
3.4. Konvergenz bei drei Steady States (Quelle: Chakraborty (2004)[5], S.125, Fig.3) 30
3.5. Konvergenz bei drei Steady States, Steady State k_2 (Quelle: eigene Berechnungen) 31
3.6. Konvergenz bei drei Steady States, Steady State k_1 (Quelle: eigene Berechnungen) 31
3.7. Sensitivitätsanalyse des Steady State k_2 in Bezug auf β (Quelle: eigene Berechnungen) 32
3.8. Sensitivitätsanalyse des Steady State k_1 in Bezug auf β (Quelle: eigene Berechnungen) 33
3.9. Sensitivitätsanalyse der Steady States in Bezug auf α (Quelle: eigene Berechnungen) 33
3.10. Sensitivitätsanalyse der Steady States in Bezug auf α im Bereich (0.521,0.53) (Quelle: eigene Berechnungen) 34

3.11. Sensitivitätsanalyse des Steady States in Bezug auf A (Quelle: eigene Berechnungen) . . . 35
3.12. Sensitivitätsanalyse des Steady State in Bezug auf τ (Quelle: eigene Berechnungen) . . . 37
3.13. Nutzenfunktion bei Wahl der optimalen Steuerhöhe (Quelle: eigene Berechnungen) . . . 39
3.14. Schwelleneffekt bei endogener Sterblichkeit (Quelle: eigene Berechnungen) 43
3.15. Entwicklung des Kapitals in Abhängigkeit von k_t und s_t (Quelle: eigene Berechnungen) . . . 45
3.16. Entwicklung der Bildung in Abhängigkeit von k_t und s_t (Quelle: eigene Berechnungen) . . . 45
3.17. Verlauf der Funktionen mit den Werten k° und s° (Quelle: eigene Berechnungen) . . . 46
4.1. Nutzenfunktionen für $\gamma \in (0, 1)$ (Quelle: eigene Berechnungen) . . . 51
4.2. Bildungsinvestitionen mit unterschiedlichen Graden der Risikoaversion (Quelle: eigene Berechnungen) . . . 63
4.3. Gesundheitsinvestitionen mit unterschiedlichen Graden der Risikoaversion (Quelle: eigene Berechnungen) . . . 63
5.1. Nutzenfunktion für gegebenes d_0 (Quelle: Eeckhoudt und Pestieau (2008)[6], S.58, Fig.1) . . . 69

Tabellenverzeichnis

1. Schwellenwert des Einkommens ab dem in Bildung oder Gesundheit investiert wird (y_t^s, y_t^h) und ab welcher Generation diese jeweils erste Investition stattfindet (t^s, t^h)

Quelle: eigene Berechnungen 64

Literaturverzeichnis

[1] D. Acemoglu. *Introduction to modern economic growth*. Princeton University Press, 2009.

[2] K. Blackburn and G. P. Cipriani. Intergenerational transfers and demographic transition. *Journal of Development Economics*, 78(1):191 – 214, 2005.

[3] H. Bunzel and X. Qiao. Endogenous lifetime and economic growth revisited. Staff general research papers, Iowa State University, Department of Economics, 2004.

[4] J. C. Caldwell. Population health in transition. *Bulletin of the World Health Organisation: The International Journal of Public Health*, 79(2):159–160, 2001.

[5] S. Chakraborty. Endogenous lifetime and economic growth. *Journal of Economic Theory*, 116(1):119 – 137, 2004.

[6] L. Eeckhoudt and P. Pestieau. A note on longevity enhancing investment. *Economics Letters*, 101(1):57 – 59, 2008.

[7] Eurostat. Altenquotient. http://epp.eurostat.ec.europa.eu/. (data downloaded on October 2014).

[8] J. E. Finlay. Endogenous Longevity and Economic Growth. PGDA Working Papers 0706, Program on the Global Demography of Aging, Sep 2006.

[9] J. Foncel and N. Treich. Fear of ruin. *Journal of Risk and Uncertainty*, 31(3):289–300, 2005.

[10] J. A. T. Granados. Economic growth and health progress in england and wales: 160 years of a changing relation. *Social Science & Medicine*, 74(5):688 – 695, 2012.

[11] Human Mortality Database. University of California, Berkeley (USA) and Max Planck Institute of Demographic Research (Germany). www.mortality.org. (data downloaded on May 2014).

[12] J. P. Mackenbach. Political conditions and life expectancy in Europe, 1900-2008. *Social Science & Medicine*, 82:134 – 146, 2013.

[13] J. P. Mackenbach, M. Karanikolos, and M. McKee. The unequal health of Europeans: successes and failures of policies. *The Lancet*, 381(9872):1125 – 1134, 2013.

[14] J. Oeppen and J. W. Vaupel. Broken Limits to Life Expectancy. *Science*, 296(5570):1029–1031, 2002.

[15] S. J. Olshansky and A. B. Ault. The Fourth Stage of the Epidemiologic Transition: The Age of Delayed Degenerative Diseases. *The Milbank Quarterly*, 64(3):355–391, 1986.

[16] S.Jay Olshansky. Infectious diseases: new and ancient threats to world health. *Population bulletin : a publication of the Population Reference Bureau*, 52(2), July 1997.

[17] A. R. Omran. The Epidemiologic Transition: A Theory of the Epidemiology of Population Change. *The Milbank Quarterly: A Multidisciplinary Journal of Population Health and Health Policy*, 49(4):509–538, Oct. 1971.

[18] P. Pestieau and G. Ponthiere. On the Policy Implications of Changing Longevity. CESifo Working Paper Series 3926, CESifo Group Munich, 2012.

[19] J. W. Pratt. Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*, 32(1/2):122 – 136, Jan. - Apr. 1964.

[20] B. Rechel, E. Grundy, J. Robine, J. Cylus, J. P. Mackenbach, C. Knai, and M. McKee. Ageing in the European Union. *The Lancet*, 381(9874):1312 – 1322, 2013.

[21] C.P. Simon and L. Blume. *Mathematics for Economists*. W.W. Norton & Company, 1994.

[22] M. Spence and M. Lewis. *Health and Growth : Commission on Growth and Development*. World Bank, 2009.

[23] R. Spree. Der Rückzug des Todes : Der epidemiologische Übergang in Deutschland während des 19. und 20. Jahrhunderts. *Historical Social Research*, 23(1/2):4–43, 1998.

[24] Statistics Austria. Jährliche Sterbetafeln 1947 bis 2012 für Österreich. Vienna. (data downloaded on May 2014).

[25] The World Bank. 2014. World Development Indicators. http://data.worldbank.org. (data downloaded on August 2014).

[26] World Health Organisation (2013). Putin signs law banning smoking in public in the Russian Federation. http://www.euro.who.int/en/countries/russian-federation/news/news/2013/03/putin-signs-law-banning-smoking-in-public-in-the-russian-federation. (23.05.2014).

[27] World Health Organisation. European Centre for Environment and Health. Interpersonal violence and alcohol in the russian federation: policy briefing. *Violence and Injury Prevention Programme*, 2006.

A. Anhang zu Kapitel 3

A.1. Herleitung der Eulergleichung und der optimalen Ersparnis

Die optimale Ersparnis erhält man mittels der Eulergleichung.

$$\max_{c_t, c_{t+1}} \ln c_t + \phi_t \ \ln c_{t+1}$$
$$s.t. \quad c_t + \frac{c_{t+1}}{\hat{R}_{t+1}} = (1 - \tau_t) w_t$$

Um die Euler-Gleichung zu erhalten stellt man zunächst die Lagrangefunktion für das obige Maximierungsproblem auf:

$$L(\lambda, c_t, c_{t+1}) = \ln c_t + \phi_t \ \ln c_{t+1} + \lambda \left[(1 - \tau_t) w_t - c_t - \frac{c_{t+1}}{\hat{R}_{t+1}} \right]$$

Durch partielle Ableitung der Lagrangefunktion nach ihren Kontrollvariablen erhält man die Bedingungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t} - \lambda = 0 \tag{77}$$
$$\frac{\partial L}{\partial c_{t+1}} = \frac{\phi_t}{c_{t+1}} - \frac{\lambda}{\hat{R}_{t+1}} = 0 \tag{78}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = (1 - \tau_t) w_t - c_t - \frac{c_{t+1}}{\hat{R}_{t+1}} = 0 \tag{79}$$

Durch Umformung von Gleichung (77) erhält man

$$\lambda = \frac{1}{c_t} \tag{80}$$

Setzt man nun (80) in Gleichung (78) ein und formt passend um, ergibt sich bereits die Euler-Gleichung unter der Nebenbedingung (79):

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \phi_t \hat{R}_{t+1} \tag{81}$$
$$s.t. \quad c_{t+1} = \hat{R}_{t+1}((1 - \tau_t) w_t - c_t) \tag{82}$$

Die Euler-Gleichung entspricht allgemein dem Verhältnis der beiden Grenznutzen des Konsums und somit dem Anstieg der Budgetgeraden. Im OLG Modell kann man von ihr die Abfolge des Konsums in diesen zwei Perioden ablesen.
Setzt man weiter die Nebenbedingung (82) in die Eulergleichung (81) ein, erhält man

nach einigen Umformungsschritten den Konsum zum Zeitpunkt t:

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{R}_{t+1}((1-\tau_t)w_t - c_t)}{c_t} &= \phi_t \hat{R}_{t+1} \\
\frac{(1-\tau_t)w_t}{c_t} - 1 &= \phi_t \\
\frac{(1-\tau_t)w_t}{c_t} &= \phi_t + 1 \\
\frac{(1-\tau_t)w_t}{1+\phi_t} &= c_t
\end{aligned} \tag{83}$$

Aus Gleichung (83) ist leicht zu erkennen, dass der Konsum in der ersten Periode proportional zum Lohn ist. Steigt der Lohn in Periode t, so steigt auch der Konsum in dieser Periode. Steigt jedoch die Überlebenswahrscheinlichkeit ϕ_t, so wird sich der Kosum in der ersten Periode verringern.
Durch das Einsetzen des optimalen Konsums (83) in die Gleichung der Ersparnisse, erhält man nun schlussendlich die optimalen Ersparnisse (84):

$$\begin{aligned}
z_t &= (1-\tau_t)w_t - c_t \\
z_t &= (1-\tau_t)w_t - \frac{(1-\tau_t)w_t}{1+\phi_t} \\
z_t &= \frac{\phi_t}{1+\phi_t}(1-\tau_t)w_t
\end{aligned} \tag{84}$$

wobei $\sigma_t \equiv \frac{\phi_t}{1+\phi_t}$ als die Sparneigung bezeichnet wird und eine steigende Funktion der Überlebenswahrscheinlichkeit ist. Somit entspricht die optimale Ersparnis:

$$z_t = (1-\tau_t)\sigma_t w_t$$

A.2. Beweis von Proposition 1

Zunächst wird folgendes Lemma bewiesen:

Lemma
Die rechte Seite von Gleichung (9) wird mit J(k) bezeichnet. Somit $J(k) = (1-\tau)(1-\alpha)\sigma(k_t)Ak_t^{\alpha}$. *Sie erfüllt folgende Eigenschaften: (i)* $J(0) = 0$, *(ii)* $J^{'}(k) \geq \forall k \geq 0$, *(iii)* $\lim_{k\to\infty} J(k)/k = 0$ *und (iv)* $\lim_{k\to 0} J(k)/k = \infty$ *wenn* $\alpha < 1/2$.

Beweis
Eigenschaft (i):

$$J(k) = (1-\tau)(1-\alpha)\sigma(k_t)Ak_t^{\alpha}$$

$$J(0) = 0$$

Eigenschaft (ii):

$$J^{'}(k) = (1-\tau)(1-\alpha)\sigma_k Ak^{\alpha} + (1-\tau)(1-\alpha)\sigma\alpha Ak^{\alpha-1}$$

Da jeder der einzelnen Ausdrücke > 0 ist, ist auch die Multiplikation und die Addition der Ausdrücke positiv.
Eigenschaft (iii):
Aus den Eigenschaften $\lim_{h\to\infty}\phi(h) = \beta$ der Überlebenswahrscheinlichkeit ϕ_t folgt:

$$\lim_{h\to\infty}\sigma = \lim_{h\to\infty}\frac{\phi(h)}{1+\phi(h)} = \frac{\beta}{1+\beta}$$

Somit gilt mit folgender Überlegung $\phi(h) = \phi(\tau w) = \phi(\tau(1-\alpha)Ak^{\alpha}) = \phi(k) \Rightarrow \sigma(k)$ und $\lim_{k\to\infty}\phi(k) = \beta$:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{J(k)}{k} = C\lim_{k\to\infty}\frac{\sigma(k)k^{\alpha}}{k} = C\lim_{k\to\infty}\frac{\sigma(k)}{k^{1-\alpha}} = C\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^{1-\alpha}} = 0$$

wobei $C \equiv (1-\tau)(1-\alpha)A$.
Eigenschaft (iv):

$$J^{'}(k) = C(\sigma_k k^{\alpha} + \alpha\sigma k^{\alpha-1})$$

C entspricht der selben Konstanten wie bei Eigenschaft (iii). Die Ableitung von σ erhält man durch die Quotientenregel:

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \frac{\phi(\tau(1-\alpha)Ak^{\alpha})}{1+\phi(\tau(1-\alpha)Ak^{\alpha})} \\
\sigma_k &= \frac{\phi^{'}\tau(1-\alpha)\alpha Ak^{\alpha-1}(1+\phi)-\phi\phi^{'}\tau(1-\alpha)\alpha Ak^{\alpha-1}}{(1+\phi)^2} \\
&= \frac{\tau(1-\alpha)\alpha Ak^{\alpha-1}(\phi^{'}+\phi\phi^{'}-\phi\phi^{'})}{(1+\phi)^2} \\
&= \frac{\tau(1-\alpha)\alpha Ak^{\alpha-1}\phi^{'}}{(1+\phi)^2}
\end{aligned}
$$

Weiters muss noch berücksichtigt werden, dass aufgrund der Eigenschaften der Überlebenswahrscheinlichkeit folgendes gilt:

$$
\left.\begin{array}{c} \lim_{k\to 0}\phi^{'}(\tau(1-\alpha)Ak^{\alpha})=\gamma \\ \lim_{k\to 0}\phi(k)=0 \end{array}\right\} \quad \lim_{k\to 0}\frac{\phi^{'}}{(1+\phi)^2}=\gamma
$$

Somit erhält man unter Berücksichtigung von $\lim_{k\to 0}\frac{\phi(k)}{1+\phi(k)}=0$ und zweimaliger Anwendung von L'Hospital das erwünschte Resultat:

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to 0}\frac{J(k)}{k} &= \lim_{k\to 0}J^{'}(k)=\lim_{k\to 0}C(\sigma_k k^{\alpha}+\alpha\sigma(k)k^{\alpha-1}) \\
&= C\lim_{k\to 0}\alpha\sigma(k)k^{\alpha-1}=\alpha C\lim_{k\to 0}\frac{\sigma(k)}{k^{1-\alpha}}=\alpha C\lim_{k\to 0}\frac{\sigma_k}{(1-\alpha)k^{-\alpha}} \\
&= \frac{\alpha}{1-\alpha}C\lim_{k\to 0}\alpha\tau(1-\alpha)A\left[\frac{\phi^{'}}{(1+\phi)^2}\right]k^{\alpha-1}k^{\alpha} \\
&= \alpha^2 C\tau A\gamma\lim_{k\to 0}k^{2\alpha-1}=\infty \quad if \quad \alpha<\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

□

Der Beweis von Proposition 1 (i) für $\alpha < 1/2$ folgt sofort aus dem obigen Lemma. Durch Punkt (i) des Lemmas ist sofort ersichtlich, dass Null immer ein Steady State von Gleichung (9) ist. Formt man Gleichung (9) auf $\frac{J(k)}{k}=1$ um, erhält man eine notwendige Bedingung für das Gleichgewicht. Mittels der restlichen drei Punkten aus dem Lemma und dem Zwischenwertsatz ist zu erkennen, dass für $\alpha < 1/2$ ein k^* existieren muss, sodass $\frac{J(k^*)}{k^*}=1$ erfüllt ist. Somit ist gezeigt, dass in diesem Fall der Gleichgewichtspfad monoton steigend ist und unter die 45° Linie fallen kann, sodass ein positiver steady state existiert.
Für den Beweis von Proposition 1 (i) für $\alpha > 1/2$ muss sich überlegt werden wann drei Gleichgewichte existieren.

Lemma
Wenn $k^* = \arg\max(J(k) - k)$ ist, dann existieren drei Gleichgewichte, wenn $J(k^*) > k^*$ gilt. Im Fall $J(k^*) = k^*$ existiert nur der Nullpunkt als Steady State.

Beweis
$J(k) = (1-\tau)\sigma(k)w(k)$. Wie bereits bekannt, sind die Steady States Fixpunkte der Gleichung $J(k) = k$ und wie aus dem vorigen Lemma schon ersichtlich ist Null ein solcher Fixpunkt. Für $\phi(h) = \beta h/(1+h)$ gilt:

$$\sigma(k) = \frac{\beta\tau w(k)}{1 + \tau w(k)(1+\beta)}$$

Dann folgt aus $J(k) = k$:

$$\begin{aligned}
(1-\tau)\sigma(k)w(k) &= k \\
(1-\tau)\frac{\beta\tau w(k)}{1+\tau w(k)(1+\beta)}w(k) &= k \\
(1-\tau)\beta\tau w(k)^2 &= k(1+\tau w(k)(1+\beta)) \\
(1-\tau)\beta\tau w(k) &= k\left(\frac{1}{w(k)} + \tau(1+\beta)\right)
\end{aligned}$$

Weiter Umformungen führen zu:

$$\begin{aligned}
(1-\tau)\beta\tau(1-\alpha)Ak^{\alpha} &= k\left(\frac{1}{(1-\alpha)Ak^{\alpha}} + \tau(1+\beta)\right) \\
(1-\tau)\beta\tau(1-\alpha)Ak^{\alpha-1} &= \frac{1}{(1-\alpha)Ak^{\alpha}} + \tau(1+\beta) \\
H(k) \equiv (1-\tau)\beta\tau(1-\alpha)Ak^{\alpha-1} - \frac{1}{A(1-\alpha)}k^{-\alpha} &= \tau(1+\beta) \equiv c
\end{aligned}$$

Somit $H(k) = c$.
Das Optimum $H'(\hat{k}) = 0$ dieser Gleichung liegt bei

$$\hat{k} = \left(\frac{\alpha}{A^2\beta(1-\alpha)^3(1-\tau)\tau}\right)^{\frac{1}{2\alpha-1}}$$

Weiters gilt $\lim_{k\to 0} H(k) = -\infty$ und $\lim_{k\to\infty} H(k) = 0$. Somit muss $H(k)/c > 1$ zumindest zweimal den Wert 1 überschreiten. Daraus folgt, dass in diesem Fall $J(k)$ die 45° Linie einmal von unten und einmal von oben schneidet und somit drei Gleichgewichts-

punkte entstehen.
Nun muss noch die Bedingung hergeleitet werden für die $H(\hat{k}) > c$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& c < H(\hat{k}) \\
\tau(1+\beta) &< (1-\tau)\beta\tau(1-\alpha)A\left(\frac{\alpha}{A^2\beta(1-\alpha)^3(1-\tau)\tau}\right)^{\frac{\alpha-1}{2\alpha-1}} - \frac{1}{A(1-\alpha)}\left(\frac{\alpha}{A^2\beta(1-\alpha)^3(1-\tau)\tau}\right)^{\frac{-\alpha}{2\alpha-1}} \\
\tau(1+\beta) &< A^{\frac{1}{2\alpha-1}}((1-\tau)\beta\tau)^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}\left((1-\alpha)^{\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}}\alpha^{\frac{\alpha-1}{2\alpha-1}} - (1-\alpha)^{\frac{\alpha+1}{2\alpha-1}}\alpha^{\frac{-\alpha}{2\alpha-1}}\right) \\
\tau(1+\beta) &< \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}(1-\alpha)^{\frac{1}{2\alpha-1}}A^{\frac{1}{2\alpha-1}}((1-\tau)\beta\tau)^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}\left(\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

□

Zur Stabilität der Steady States:
Für die Stabilität eines Steady States muss gezeigt werden, dass die Ableitung $\frac{\partial J(k)}{\partial k}$ im Steady State, also $k = k^*$, < 1 ist. Somit

$$
\begin{aligned}
J^{'}(k) &= (1-\tau)(1-\alpha)A\left(\sigma_k k^{\alpha} + \sigma(k)\alpha\frac{1}{k^{1-\alpha}}\right) \\
J^{'}(k) &= (1-\tau)(1-\alpha)A\left(\frac{(1-\alpha)\tau\alpha A k^{2\alpha-1}\phi^{'}}{(1+\phi)^2} + \frac{\sigma(k)\alpha}{k^{1-\alpha}}\right)
\end{aligned}
$$

Fall $\alpha < 1/2$:
Für $\alpha < \frac{1}{2}$ gilt, dass $2\alpha - 1 < 0$ ist und somit der erste Term der Ableitung an der Stelle $k^* = 0$ gegen Unendlich geht, da gilt:

$$
\lim_{k\to 0}\frac{(1-\alpha)\tau\alpha A\phi^{'}}{(1+\phi)^2 k^{1-2\alpha}} = \frac{(1-\alpha)\tau\alpha A\gamma}{0} = \infty
$$

Der zweite Teil der Ableitung geht nach einmaliger Anwendung von L'Hospital auch gegen Unendlich, da gilt:

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to 0}\frac{\sigma(k)\alpha}{k^{1-\alpha}} &= \lim_{k\to 0}\frac{\sigma_k\alpha}{(1-\alpha)k^{-\alpha}} = \\
&= \lim_{k\to 0}\frac{\alpha^2\tau A\phi^{'}}{(1+\phi)^2 k^{1-2\alpha}} = \frac{\alpha^2\tau A\gamma}{0} = \infty
\end{aligned}
$$

Somit folgt in diesem Fall, dass die Ableitung in $k^* = 0$ nicht < 1 ist und somit hier keine Stabilität vorliegt.
Im Fall $k^* > 0$ liegt ein stabiler Gleichgewichtspunkt vor, da sowohl der erste, als auch der zweite Teil der Ableitung gegen 0 gehen, da σ für $k \to \infty$ konstant wird und ϕ eine konkave Funktion ist:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(1-\alpha)\tau\alpha A\phi^{'}}{(1+\phi)^2k^{1-2\alpha}}+\frac{\sigma(k)\alpha}{k^{1-\alpha}}\right)=0+0=0<1$$

Fall $\alpha > 1/2$**:**
Für $\alpha > \frac{1}{2}$ gilt, dass $2\alpha - 1 > 0$ ist und somit der erste Term der Ableitung an der Stelle $k^* = 0$ gegen Null geht, da gilt:

$$\lim_{k\to 0}\frac{(1-\alpha)\tau\alpha Ak^{2\alpha-1}\phi^{'}}{(1+\phi)^2}=0$$

Und auch der zweite Teil geht, nach einmaliger Anwendung von L'Hospital gegen 0:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0}\frac{\sigma(k)\alpha}{k^{1-\alpha}}&=\lim_{k\to 0}\frac{\sigma_k\alpha}{(1-\alpha)k^{-\alpha}}=\\&=\lim_{k\to 0}\frac{\alpha^2\tau A\phi^{'}k^{2\alpha-1}}{(1+\phi)^2}=\alpha^2\tau A\gamma*0=0\end{aligned}$$

Somit gilt für die Ableitung in diesem Fall:

$$(1-\tau)(1-\alpha)A\,(0+0)=0<1$$

woraus die Stabilität von $k^* = 0$ folgt.
Im Fall $k^*_{1,2} > 0$ kommt es auf die Größe von k an ob Stabilität vorliegt oder nicht. Zwar geht der zweite Ausdruck der Ableitung für $k \to \infty$ immer gegen Null, doch muss beim ersten Ausdruck darauf geachtet werden, dass die Konkavität von ϕ erst ab einer gewissen Größe von k ausschlaggebend ist und den Ausdruck gegen Null gehen lässt. Somit kann im Fall von drei Gleichgewichten nur das größere der beiden positiven Gleichgewichte stabil sein. □

A.3. Herleitung der optimalen Ersparnis bei Bildungsinvestitionen über die Euler-Gleichung

$$U_t = \ln c_t + \phi_t \ln c_{t+1}$$

unter den Budgetbeschränkungen

$$\begin{aligned} c_t &\leq (1-\tau)(1-s_t)w_t x_t - z_t \\ c_{t+1} &\leq w_{t+1}x_{t+1} + z_t \hat{R}_{t+1}. \end{aligned}$$

Aufstellen der Lagrangefunktion:

$$L = \ln c_t + \phi_t \ln c_{t+1} + \lambda \left[(1-\tau)(1-s_t)w_t x_t - c_t - \frac{c_{t+1} - w_{t+1}x_{t+1}}{\hat{R}_{t+1}} \right]$$

Ableiten der Lagrangefunktion:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial c_t} &= \frac{1}{c_t} - \lambda = 0 & \Rightarrow \quad \lambda &= \frac{1}{c_t} \\ \frac{\partial L}{\partial c_{t+1}} &= \frac{\phi_t}{c_{t+1}} - \frac{\lambda}{\hat{R}_{t+1}} = 0 & \Rightarrow \frac{\phi_t}{c_{t+1}} &= \frac{\lambda}{\hat{R}_{t+1}} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhält man die Euler-Gleichung:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \phi_t \hat{R}_{t+1}$$

Einsetzen in die Budgetbeschränkung:

$$\begin{aligned} c_t + \frac{c_t \phi_t \hat{R}_{t+1}}{\hat{R}_{t+1}} - \frac{w_{t+1}x_{t+1}}{\hat{R}_{t+1}} &= (1-\tau)(1-s_t)w_t x_t \\ c_t(1+\phi_t) &= (1-\tau)(1-s_t)w_t x_t + \frac{w_{t+1}x_{t+1}}{\hat{R}_{t+1}} \\ c_t &= \frac{1}{1+\phi_t}\left[(1-\tau)(1-s_t)w_t x_t + \frac{w_{t+1}x_{t+1}}{\hat{R}_{t+1}} \right] \end{aligned}$$

Einsetzen des otimalen Konsums in die Gleichung des Sparens, ergibt das optimale Sparverhalten:

$$
\begin{aligned}
z_t &= (1-\tau)(1-s_t)w_t x_t - c_t \\
z_t &= (1-\tau)(1-s_t)w_t x_t - \frac{1}{1+\phi_t}(1-\tau)(1-s_t)w_t x_t - \frac{1}{1+\phi_t}\frac{w_{t+1}x_{t+1}}{\hat{R}_{t+1}} \\
z_t &= \frac{\phi_t}{1+\phi_t}(1-\tau)(1-s_t)w_t x_t - \frac{\phi_t}{1+\phi_t}\frac{w_{t+1}x_{t+1}}{R_{t+1}} \\
z_t &= \sigma_t\left[(1-\tau)(1-s_t)w_t x_t - \frac{w_{t+1}x_{t+1}}{R_{t+1}}\right]
\end{aligned}
$$

A.4. Herleitung des Gleichgewichts ohne Bildungsinvestitionen

Überlegungen vorab:

$$
\begin{aligned}
\sigma(k_t) &= \frac{\phi(k_t)}{1+\phi(k_t)} \\
1-\sigma(k_t) &= \frac{1}{1+\phi(k_t)} \\
\sigma(k_t)(1-\sigma(k_t)) &= \frac{\phi(k_t)}{(1+\phi(k_t))^2} \\
\Rightarrow \frac{1}{\sigma(k_t)(1-\sigma(k_t))} &= \frac{(1+\phi(k_t))^2}{\phi(k_t)} \qquad (85)
\end{aligned}
$$

Später wird benötigt:

$$
\frac{1+\phi(k_t)}{\sigma(k_t)} = \frac{(1+\phi(k_t))^2}{\phi(k_t)} \qquad (86)
$$

$\Rightarrow (85) = (86)$

Herleitung des Gleichgewichts

In diesem Fall wird angenommen, dass eine Ecklösung auftritt, bei der nicht in Schulbildung investiert wird. Somit gilt

$$
\begin{aligned}
s_t &= 0 \\
x_{t+1} &= x_t = x_0
\end{aligned}
$$

Daraus folgt für das effiziente Arbeitsangebot:

$$
N_t = (1+\phi_{t-1})x_0 \quad \Rightarrow \quad N_{t+1} = (1+\phi_t)x_0
$$

mit

$$\phi(k_t) = \phi(\tau(1-\alpha)x_0 A k_t^{\alpha});$$

Markträumung erfordert:

$$N_{t+1}k_{t+1} = z_t$$

wobei in diesem Fall für z_t gilt:

$$z_t = \sigma(k_t)\left((1-\tau)w_t x_0 - \frac{w_{t+1}x_0}{R_{t+1}}\right)$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(1+\phi(k_t))x_0 k_{t+1} &= \sigma(k_t)\left((1-\tau)w_t x_0 - \frac{w_{t+1}x_0}{R_{t+1}}\right) \\
\frac{1+\phi(k_t)}{\sigma(k_t)}k_{t+1} &= (1-\tau)w_t - \frac{w_{t+1}}{R_{t+1}} \\
\frac{1}{\sigma(k_t)(1-\sigma(k_t))}k_{t+1} &= (1-\tau)(1-\alpha)Ak_t^{\alpha} - \frac{(1-\alpha)Ak_{t+1}^{\alpha}}{\alpha Ak_{t+1}^{\alpha-1}} \\
\frac{1}{\sigma(k_t)(1-\sigma(k_t))}k_{t+1} &= (1-\tau)(1-\alpha)Ak_t^{\alpha} - \frac{1-\alpha}{\alpha}k_{t+1} \\
\frac{1}{\sigma(k_t)(1-\sigma(k_t))}k_{t+1} + \frac{1-\alpha}{\alpha}k_{t+1} &= (1-\tau)(1-\alpha)Ak_t^{\alpha} \\
\left(\frac{1}{\sigma(k_t)(1-\sigma(k_t))} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)k_{t+1} &= (1-\tau)(1-\alpha)Ak_t^{\alpha} \\
k_{t+1} &= (1-\tau)(1-\alpha)\left(\frac{1}{1/[\sigma(k_t)(1-\sigma(k_t))] + (1-\alpha)/\alpha}\right)Ak_t^{\alpha}
\end{aligned}$$

A.5. Herleitung des Gleichgewichts mit Bildungsinvestitionen

In diesem Fall wird eine innere Lösung angenommen bei der gilt:

$$\begin{aligned}
\theta &= (1-\tau)\frac{w_t R_{t+1}}{\phi(k_t, s_t)w_{t+1}} \\
\theta &= \frac{(1-\tau)(1-\alpha)Ak_t^{\alpha}\alpha Ak_{t+1}^{\alpha-1}}{\phi(k_t, s_t)(1-\alpha)Ak_{t+1}^{\alpha}} \\
\theta &= \frac{(1-\tau)\alpha Ak_t^{\alpha}}{\phi(k_t, s_t)k_{t+1}}
\end{aligned}$$

Durch eine einfache Umformung erhält man die erste Gleichung:

$$k_{t+1} = \frac{\alpha(1-\tau)A}{\theta} \frac{k_t^\alpha}{\phi(k_t, s_t)}$$

mit

$$\phi(k_t, s_t) = \phi(\tau(1-\alpha)x_t A k_t^\alpha)$$

Für die zweite Gleichung gilt:

$$N_t = (1 - s_t + \phi_{t-1})x_t \quad \Rightarrow \quad N_{t+1} = (1 - s_{t+1} + \phi_t)x_{t+1} \tag{87}$$

Markträumung erfordert:

$$N_{t+1}k_{t+1} = z_t$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
(1 + \phi(k_t, s_t) - s_{t+1})x_{t+1}k_{t+1} &= \sigma(k_t)(1-\tau)(1-s_t)w_t x_t - \frac{\sigma(k_t)w_{t+1}x_{t+1}}{R_{t+1}} \\
(1 + \phi(k_t, s_t) - s_{t+1})k_{t+1} &= \sigma(k_t)(1-\tau)(1-s_t)w_t \frac{x_t}{x_{t+1}} - \frac{\sigma(k_t)w_{t+1}}{R_{t+1}} \\
(1 + \phi(k_t, s_t) - s_{t+1})k_{t+1} &= \sigma(k_t)(1-\tau)(1-s_t)w_t \frac{x_t}{x_t(1+\theta s_t)} - \frac{\sigma(k_t)w_{t+1}}{R_{t+1}} \\
(1 + \phi(k_t, s_t) - s_{t+1})k_{t+1} &= (1-\tau)(1-\alpha)A\left(\frac{1-s_t}{1+\theta s_t}\right)\sigma(k_t)k_t^\alpha - \sigma(k_t)\frac{(1-\alpha)Ak_{t+1}^\alpha}{\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}} \\
(1 + \phi(k_t, s_t) - s_{t+1})k_{t+1} &= (1-\tau)(1-\alpha)A\left(\frac{1-s_t}{1+\theta s_t}\right)\sigma(k_t)k_t^\alpha - \frac{1-\alpha}{\alpha}\sigma(k_t)k_{t+1} \\
(1 + \phi(k_t, s_t) - s_{t+1})k_{t+1} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\sigma(k_t)k_{t+1} &= (1-\tau)(1-\alpha)A\left(\frac{1-s_t}{1+\theta s_t}\right)\sigma(k_t)k_t^\alpha \\
\left(1 + \phi(k_t, s_t) - s_{t+1} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\sigma(k_t)\right)k_{t+1} &= (1-\tau)(1-\alpha)A\left(\frac{1-s_t}{1+\theta s_t}\right)\sigma(k_t)k_t^\alpha
\end{aligned}$$

B. Anhang zu Kapitel 4

B.1. Herleitung der isoelastischen Nutzenfunktion

Aus Gleichung (28) folgt:

$$\frac{u''(c)}{u'(c)} = -\frac{\gamma}{c}$$

Nun werden drei Fälle unterschieden ($\gamma = 0$), ($\gamma > 0, \gamma \neq 1$) und ($\gamma = 1$).
Zunächst wird der allgemeine Fall ($\gamma > 0, \gamma \neq 1$) betrachtet:
Für die Integration der Gleichung nach c, muss substituiert werden:

$$y = u'(c) \quad dy = u''(c)dc$$

Somit:

$$\begin{aligned} \int \frac{u''(c)}{u'(c)} dc &= -\int \frac{\gamma}{c} dc \\ \int \frac{1}{y} dy &= -\gamma \ln(c) \\ \ln(y) &= \ln(c^{-\gamma}) \\ \ln(u'(c)) &= \ln(c^{-\gamma}) \end{aligned}$$

Nach Anwendung der Exponentialfunktion auf beiden Seiten erhält man:

$$u'(c) = c^{-\gamma}$$

Durch eine weitere Integration ergibt sich schlussendlich das Ergebnis für diesen Fall:

$$\begin{aligned} \int u'(c)dc &= \int c^{-\gamma} dc \\ u(c) &= \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} \end{aligned}$$

Fall $\gamma = 0$:
In diesem Fall gilt:

$$\int \frac{u''(c)}{u'(c)} dc = 0$$

Mit der selben Substitution wie beim vorigen Fall erhält man:

$$\ln(u^{'}(c)) = 0$$

Wendet man wieder die Exponentialfunktion auf beiden Seiten an, ergibt sich:

$$u^{'}(c) = 1$$

Integriert man diese Funktion noch einmal, erhält man das Ergebnis:

$$\int u^{'}(c)dc = \int 1dc$$
$$u(c) = c$$

Hier ist zu erkennen, dass dieser Fall als ein Spezialfall vom allgemeinen Fall $(\gamma > 0, \gamma \neq 1)$ gesehen werden kann. Somit können diese beiden Fälle in einen Fall $(\gamma \geq 0, \gamma \neq 1)$ zusammengefasst werden.

Fall $\gamma = 1$:
Mit der selben Substitution wie vorher erhält man in diesem Fall:

$$\int \frac{u^{''}(c)}{u^{'}(c)}dc = -\int 1dc$$
$$\int \frac{1}{y}dy = -\ln(c)$$
$$\ln(y) = \ln(c^{-1})$$
$$\ln(u^{'}(c)) = \ln(c^{-1})$$

Wendet man wieder auf beiden Seiten die Exponentialfunktion an resultiert daraus:

$$u^{'}(c) = \frac{1}{c}$$

Integriert man dieses Ergebnis nun nocheinmal, erhält man das gewünschte Resultat:

$$\int u^{'}(c)dc = \int \frac{1}{c}dc$$
$$u(c) = \ln c$$

B.2. Beweis der Differenzengleichung

Differenzengleichung erster Ordnung:

$$x(t+1) = g(x(t), t)$$

wobei $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Lineare Differenzenordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$x(t+1) = ax(t) + b$$

mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$.
Für die Lösung berechnet man zunächst die ersten Schritte:

$$\begin{aligned}
x(1) &= ax_0 + b \\
x(2) &= ax(1) + b = a(ax_0 + b) + b = a^2x_0 + ab + b \\
x(3) &= a(a^2x_0 + ab + b) + b = a^3x_0 + a^2b + ab + b \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dadurch erhält man mittels Induktion eine allgemeine Lösung:
Fall $a = 1$:

$$x(t) = x_0 + bt$$

Fall $a \neq 1$:

$$\begin{aligned}
x(t) = a^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} a^k b = a^t x_0 + b\frac{1-a^t}{1-a} = \\
= a^t x_0 + \frac{b}{1-a} - \frac{ba^t}{1-a} = a^t\left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}
\end{aligned}$$

Somit gilt:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + bt & \text{wenn} \quad a = 1 \\ a^t \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} & \text{wenn} \quad a \neq 1 \end{cases}$$

Legt man nun diese Ergebnisse auf das aktuelle Beispiel mit Humankapital um, erhält man:

$$\begin{aligned} x_0 &= e_0 = \bar{e} \\ a &= B(s_t + \bar{s}) \\ b &= B(s_t + \bar{s})\bar{e} \end{aligned}$$

Setzt man nun in die allgemeine Lösung der Differenzengleichung ein, erhält man nach nur einem Umformungsschritt das gewünschte Resultat:

$$\begin{aligned} e_t &= \left(e_0 - \frac{B(s_t + \bar{s})\bar{e}}{1 - B(s_t + \bar{s})} \right) (B(s_t + \bar{s}))^t + \frac{B\bar{e}(s_t + \bar{s})}{1 - B(s_t + \bar{s})} \\ &= \bar{e} \left(\frac{1 - 2B(s_t + \bar{s})}{1 - B(s_t + \bar{s})} \right) (B(s_t + \bar{s}))^t + \frac{B\bar{e}(s_t + \bar{s})}{1 - B(s_t + \bar{s})} \end{aligned}$$

B.3. Herleitung der reduzierten Eulergleichung

Aus Gleichung (65) erhält man durch eine einfache Umformung:

$$\frac{\pi(h_t, \bar{z}) ABe_t}{(ABe_t(s_t + \bar{s}))^\gamma Ae_t} = \frac{1}{(Ae_t(1 - s_t - \bar{s}) - h_t)^\gamma}$$

Nun kann man die geänderte Gleichung (65) leicht mit Gleichung (66) gleichsetzen und erhält nach einigen Umformungschritten das gewünschte Ergebnis:

$$\begin{aligned} \frac{\pi(h_t, \bar{z}) ABe_t}{(ABe_t(s_t + \bar{s}))^\gamma Ae_t} &= \pi_h(h_t, \bar{z}) \frac{(ABe_t(\bar{s} + s_t))^{1-\gamma}}{1 - \gamma} \\ \frac{\pi_h(h_t, \bar{z})}{\pi(h_t, \bar{z})} &= \frac{(1 - \gamma) ABe_t}{(ABe_t(s_t + \bar{s}))^\gamma (ABe_t(s_t + \bar{s}))^{1-\gamma} Ae_t} \\ \frac{\pi_h(h_t, \bar{z})}{\pi(h_t, \bar{z})} &= \frac{(1 - \gamma) ABe_t}{ABe_t(s_t + \bar{s}) Ae_t} \\ \frac{\pi_h(h_t, \bar{z})}{\pi(h_t, \bar{z})} &= \frac{1 - \gamma}{Ae_t(s_t + \bar{s})} \end{aligned}$$

C. Anhang zu Kapitel 5

C.1. Maximierung der zu erwartenden Lebenszeit

$$\begin{aligned} \max \quad & \pi(x)h(y) \\ \text{s.t.} \quad & x + y \leq w - s \end{aligned}$$

Aufstellen der Lagrangefunktion:

$$L = \pi(x)h(y) + \lambda(w - s - x - y)$$

Ableiten der Lagrangefunktion nach ihren Zustandsvariablen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \pi^{'}(x)h(y) - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \pi(x)h^{'}(y) - \lambda = 0 \end{aligned}$$

Zusammen ergeben die beiden Gleichungen folgende Optimalitätsbedingung:

$$\frac{\pi^{'}(x)}{\pi(x)} = \frac{h^{'}(y)}{h(y)}$$

C.2. Investitionen in x steigen mit der Risikoaversion

$\pi(x)$ und $h(y)$ sind wachsende, konkave Funktion in x bzw y. Somit gelten folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi^{'}(x)}{\pi(x)}\right) &= \frac{\pi\pi^{''} - (\pi^{'})^2}{\pi^2} < 0 \\ \frac{d}{dy}\left(\frac{h^{'}(y)}{h(y)}\right) &= \frac{hh^{''} - (h^{'})^2}{h^2} < 0 \end{aligned}$$

Sollten die Individuen risikoneutral sein, muss $\frac{\pi^{'}(x)}{\pi(x)} = \frac{h^{'}(y)}{h(y)}$ gelten. Mittels der Budgetbeschränkung $x + y = w - s$ ist ersichtlich, dass ein Anstieg in x mit einem Sinken in y einhergehen muss um diese Gleichung, für ein vorgegebenes Budget $(w - s)$ erfüllen zu können. Im Fall der Risikoaversion muss nun $\frac{\pi^{'}(x)}{\pi(x)}$ relativ zu $\frac{h^{'}(y)}{h(y)}$ sinken, da $\frac{u_2 h}{u} < 1$ gilt und Gleichung (75) erfüllt sein muss. Dies ist aufgrund der obigen Überlegungen mit einer Erhöhung von x und einer Reduktion von y möglich.