



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
Vienna | Austria



## DIPLOMARBEIT

# Simulationsstudien zur Verbesserung der Gierwinkelschätzung bei der losen INS-GNSS- Kopplung

zur Erlangung des akademischen Grades

**Diplom-Ingenieur/in**

im Rahmen des Studiums

**Geodäsie und Geoinformation**

eingereicht von

**Gilles Teodori**

Matrikelnummer 01425011

ausgeführt am Department für Geodäsie und Geoinformation  
im Forschungsbereich Ingenieurgeodäsie der Technischen Universität Wien

Betreuung:

Betreuer/in: Univ.Prof. Dr.-Ing. Hans-Berndt Neuner

Mitwirkung: Univ.-Ass. Dipl.-Ing. Tomas Thalmann

Wien, 23.04.2019

---

(Unterschrift Verfasser/in)

---

(Unterschrift Betreuer/in)



# Kurzfassung

Durch den Einzug von unbemannten Luftfahrzeugen (sog. UAVs) haben sich neue Möglichkeiten im Bereich der Landvermessung ergeben. UAVs ermöglichen es, schwerzugängliche und großflächige Bereiche, wie beispielsweise Küsten, Flüsse, Brücken etc., zeit- und kostensparend zu erfassen. Georeferenzierte Punktwolken sind das Ergebnis solcher Befliegungen, die im nächsten Schritt zur Informationsextraktion bearbeitet werden. Die Georeferenzierung der Punktwolke erfolgt dabei über die Verknüpfung der rohen Punktwolke mit der Pose des UAVs.

Die Posenbestimmung des UAVs erfolgt üblicherweise durch eine INS/GNSS-Integration, wobei die GNSS-Beobachtungen den Drift der inertialen Navigationslösung abfangen und die inertiale Navigationslösung das GNSS-Beobachtungsrauschen glätten soll. Aus Publikationen geht hervor, dass sensorspezifische Fehler und Flugmanöver die Posenbestimmung maßgeblich beeinflussen. Die detaillierte Analyse dieser Einflüsse wird im Rahmen dieser Arbeit erläutert mit dem Ziel, Verbesserungsvorschläge im Hinblick auf die Gierwinkelschätzung zu erarbeiten. Hierzu wurde eigens eine Simulationsumgebung implementiert.

Anhand der Simulationen lässt sich die Problematik des Drifts der inertialen Navigationslösung und der Beobachtbarkeit des Gierwinkels reproduzieren. Des Weiteren zeigen die Simulationsergebnisse, dass horizontale Beschleunigungsänderungen die Beobachtbarkeit des Gierwinkel-Fehlerzustandes steigern und somit der Drift des Gierwinkels über die Dauer der Beschleunigungsänderungen entscheidend reduziert werden kann.

# Abstract

The arrival of drones (unmanned aerial vehicles, UAVs) have opened up new possibilities in mapping and land surveying industry. Due to UAVs abilities to access hard reachable and wide areas (e.g. coasts, rivers, bridges etc.), significant cost and time savings can be gained. The outcome of UAV surveys is a set of georeferenced, three dimensional point clouds. These point clouds are being georeferenced by associating the raw point clouds to the pose of the UAV.

The pose of UAVs is usually determined by INS/GNSS-Integration, whereby GNSS measurements account for the drifts of the inertial navigation solutions and the inertial navigation solutions are used to smoothen down the GNSS measurements. Reports have shown that pose determination is significantly affected by sensor specific errors (e.g. measurement noise) and flight maneuvers (e.g. accelerations). As part of this work, a detailed analysis of these influences is carried out with the aim of improving the yaw estimation. A simulation environment has been implemented for this purpose.

Based on the outcome of the conducted simulations, the known difficulties concerning the drift of inertial navigation solutions and the observability of yaw error states have been able to being reproduced. Furthermore, the simulation results indicate that the observability of the yaw error states increases with horizontal acceleration changes. Hence the drift of the yaw angle can be reduced significantly over the duration of the acceleration changes.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Ziele</b> .....	<b>3</b>
1.1	Gliederung der Arbeit.....	4
<b>2</b>	<b>Grundlagen für inertielle Navigationssysteme</b> .....	<b>5</b>
2.1	Rotationsmatrix und deren differentielle Betrachtung .....	5
2.2	Referenzrahmen.....	7
2.2.1	Inertialsystem.....	7
2.2.2	Erdfestes Koordinatensystem .....	7
2.2.3	Körperfestes Koordinatensystem.....	8
2.2.4	Lokales Navigationskoordinatensystem.....	8
2.3	Grundprinzip der inertialen Navigation .....	9
<b>3</b>	<b>Inertielle Messeinheit und inertielle Navigationssystem</b> .....	<b>11</b>
3.1	Kreisel und Beschleunigungsgeber.....	12
3.2	Navigationsgleichungen im lokalen Navigationskoordinatensystem .....	15
3.2.1	Nachführung der Orientierung.....	16
3.2.2	Nachführung der Geschwindigkeit.....	17
3.2.3	Nachführung der Position .....	18
<b>4</b>	<b>Erweiterte Kalman Filter</b> .....	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>INS/GNSS-Integration</b> .....	<b>23</b>
5.1	Systemmodell.....	25
5.2	Beobachtungsmodell.....	28
5.3	System- und Beobachtungsrauschen.....	29
<b>6</b>	<b>Simulationsumgebung</b> .....	<b>30</b>
6.1	Flugszenarien.....	31
6.1.1	Flugszenario Nr. 1: Statische Phase.....	31
6.1.2	Flugszenario Nr. 2: Gleichförmige Bewegung .....	31
6.1.3	Flugszenario Nr. 3: Beschleunigte Bewegung .....	31
6.2	Inverse Trägheitsnavigation .....	35
6.3	Verrauschen von IMU- und GNSS-Beobachtungszeitreihen .....	37
6.4	INS/GNSS-Simulation anhand der Monte-Carlo-Methode .....	39
<b>7</b>	<b>Simulationsergebnisse</b> .....	<b>41</b>
7.1	IN- und INS/GNSS-Lösung.....	43
7.2	Korrelationsstruktur und Korrelationsaufbau der prädierten Kovarianzmatrix.....	47

7.3	Auswirkung der Korrelationen in der Verstärkungsmatrix und auf die Fehlerzustandsschätzung .....	52
7.4	Standardabweichung des Gierwinkels .....	55
7.5	Auswirkung von Korrelationen und Varianzen in der Verstärkungsmatrix.....	56
7.6	Kopplung der Fehlerzustände .....	61
7.7	Variation von stochastischen und funktionalen Eigenschaften .....	64
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>67</b>
<b>9</b>	<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>69</b>
<b>10</b>	<b>Abbildungsverzeichnis .....</b>	<b>71</b>
<b>11</b>	<b>Anhang – Ergänzende Abbildungen .....</b>	<b>73</b>

# 1 Einleitung und Ziele

Das Aufkommen von sog. *mobile mapping* Systemen (Petrie, 2010) führte unter anderem dazu, dass der öffentliche Raum von ganzen Städten erfasst werden konnte. Das Projekt „Wien gibt Raum“ (Stadt Wien, 2019) zeigt, wie die Daten solcher Systeme dazu verwendet werden, den öffentlichen Raum neu zu gestalten. Ein *mobile mapping* System besteht grundsätzlich aus einer mit Sensoren ausgestatteten mobilen Trägerplattform und zählt somit zu den Multi-Sensor-Systemen (kurz MSS). Die auf die Plattform montierten Sensoren erfassen sowohl die Umwelt als auch die Bewegung des Trägers. Als Träger können z. B.

- Kraftfahrzeuge,
- Unterwasserfahrzeuge (engl. *Autonomous Underwater Vehicle*, kurz AUV) (Wang, Chen, & Hu, 2013),
- unbemannten Luftfahrzeuge (engl. *Unmanned Aerial Vehicle*, kurz UAV)
- etc.

dienen. An den Systemkomponenten ändert sich im Allgemeinen wenig. Zur Erfassung der Umgebung werden üblicherweise Kameras und/oder Laserscanner verwendet. Die Bestimmung der Trägerplattformbewegung erfolgt hauptsächlich über inertielle Navigationssysteme (kurz INS) und/oder globale Satellitennavigationssysteme (kurz GNSS). Die Bewegung der Trägerplattform wird durch Pose beschrieben, wobei der Begriff „Pose“ die Position, Geschwindigkeit und Orientierung zusammenfasst. Die genaue Posenbestimmung eines MSS ist von entscheidender Bedeutung, da die erfassten Daten (Punktwolken, Bilder etc.) zur Georeferenzierung an die Pose angehängt werden. Die georeferenzierten Daten bilden anschließend die Basis für die weitere Verarbeitung und Informationsextraktion.

Ähnlich der Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen (Heunecke, 2013) kann die Pose eines MSS anhand eines kinematischen Modells beschrieben werden, wodurch die Posenbestimmung als klassische ingenieurgeodätische Aufgabe aufgefasst werden kann. Durch den Einsatz simultaner Messtechnik (INS und GNSS) ist die Implementierung der Posenbestimmung im Kalman-Filter naheliegend.

Die komplexe Fehlerfortpflanzung von INS kann zu schwer interpretierbaren Ergebnissen führen. Einen sehr umfangreichen und theoretischen Überblick der INS-Fehlerfortpflanzung ist in (Groves, 2013, S. 203) gegeben. Eine eher praktische Vorgehensweise, sich an die Interpretation von inertialen Navigationslösungen (kurz IN-Lösung) zu wagen, ist die Implementierung einer Simulationsumgebung (Wen, Mounir, & Baolun, 2012). Der Vorteil einer Simulationsumgebung liegt darin, eine kontrollierte Umgebung zu schaffen, in der die zahlreichen Einflüsse (Messfehler, Flugmanöver, Zeitsynchronisierung etc.) vom Betrachter selbst modelliert werden können. Diese Vorgehensweise ermöglicht nach und nach ein Verständnis für die Fehlerfortpflanzung von INS zu gewinnen. Des Weiteren sind für die Beschaffung von INS-Daten keine zeitaufwändigen Messungen zu absolvieren, sondern diese können vom Computer aus generiert werden.

Im Forschungsbereich Ingenieurgeodäsie der TU Wien wurde auf Grundlage eines *error-state-space* Kalman-Filter (kurz ESS-KF) ein INS/GNSS-Integrationssoftwarepaket zur UAV-Posenbestimmung implementiert. INS/GNSS-Integrationsarchitekturen steigern im Vergleich zu INS die Komplexität bei der Interpretation der geschätzten Posen, weshalb im Forschungsbereich Ingenieurgeodäsie erste Schritte hin zur Erstellung einer Simulationsumgebung für den implementierten Integrationsalgorithmus unternommen wurden. Der programmiertechnische Schwerpunkt der hier vorliegenden Arbeit liegt auf der Weiterentwicklung dieser Simulationsumgebung.

Ein Ziel dieser Arbeit soll es sein, den Einfluss von IMU- und GNSS-Beobachtungsrauschen auf die Bestimmung der UAV-Pose zu untersuchen. Dabei soll die Posenbestimmung mittels INS und INS/GNSS-Integration erfolgen und anschließend verglichen werden. Aus veröffentlichten Publikationen [(Hong, Lee, Chun, Kwon, & Speyer, 2005), (Rhee, Abdel-Hafez, & Speyer, 2004)] geht hervor, dass die Schätzung vom Gierwinkel (Orientierungsparameter des UAVs) maßgeblich von Beschleunigungen des UAVs abhängig ist. Diese Abhängigkeit gilt es im Rahmen dieser Arbeit näher zu untersuchen und mögliche Verbesserungsvorschläge zu erarbeiten. Hierfür sollen in der Simulationsumgebung entsprechende Flugszenarien mit unterschiedlichen kinematischen Eigenschaften erstellt werden.

## 1.1 Gliederung der Arbeit

Zu Beginn der hier vorliegenden Arbeit werden die Grundlagen inertialer Navigationssysteme (INS) erläutert. Anschließend werden in Kapitel 3 die Beobachtungen inertialer Messeinheiten (IMU) und die Berechnung der inertialen Navigationslösung beschrieben. In Kapitel 4 wird ein kurzer Überblick über den in der INS/GNSS-Integration verwendeten Kalman-Filter gegeben. In Kapitel 5 wird aufbauend auf dem vorherigen Kapitel näher auf den INS/GNSS-Integrationsalgorithmus eingegangen. Die Schwerpunkte dieser Arbeit bilden die Kapitel 6 und 7, in denen die entwickelte Simulationsumgebung im Detail beschrieben und die Ergebnisse der Simulationsstudie präsentiert werden sollen. Abschließend werden in Kapitel 8 die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und ein kurzer Forschungsausblick skizziert.

## 2 Grundlagen für inertielle Navigationssysteme

In diesem Kapitel werden die Grundlagen erarbeitet, die zum Verständnis von inertialen Navigationssystemen benötigt werden - beginnend mit der Betrachtung von Rotationsmatrizen und deren differentiellen Schreibweise. Anschließend werden die bei Navigationssystemen anfallenden Referenzrahmen bzw. Referenzsysteme erläutert. Als letztes werden die benötigten Grundprinzipien der inertialen Navigation (auch Trägheitsnavigation genannt) präsentiert.

### 2.1 Rotationsmatrix und deren differentielle Betrachtung

Werden Eulerwinkel zur Darstellung einer dreidimensionalen Verdrehung zwischen zwei Koordinatensystemen verwendet, so erfolgt der Übergang vom System  $\beta$  zum System  $\alpha$  über die folgende orthogonale Rotationsmatrix  $\mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}$  (Groves, 2013, S. 38):

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\beta}^{\alpha} = \mathbf{C}_{\alpha}^{\beta,T} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_{\beta\alpha} & \sin \phi_{\beta\alpha} \\ 0 & -\sin \phi_{\beta\alpha} & \cos \phi_{\beta\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_{\beta\alpha} & 0 & -\sin \theta_{\beta\alpha} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_{\beta\alpha} & 0 & \cos \theta_{\beta\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi_{\beta\alpha} & \sin \psi_{\beta\alpha} & 0 \\ -\sin \psi_{\beta\alpha} & \cos \psi_{\beta\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_{\beta\alpha} c\psi_{\beta\alpha} & c\theta_{\beta\alpha} s\psi_{\beta\alpha} & -s\theta_{\beta\alpha} \\ -c\phi_{\beta\alpha} s\psi_{\beta\alpha} + s\phi_{\beta\alpha} s\theta_{\beta\alpha} c\psi_{\beta\alpha} & c\phi_{\beta\alpha} c\psi_{\beta\alpha} + s\phi_{\beta\alpha} s\theta_{\beta\alpha} s\psi_{\beta\alpha} & s\phi_{\beta\alpha} c\theta_{\beta\alpha} \\ s\phi_{\beta\alpha} s\psi_{\beta\alpha} + c\phi_{\beta\alpha} s\theta_{\beta\alpha} c\psi_{\beta\alpha} & -s\phi_{\beta\alpha} c\psi_{\beta\alpha} + c\phi_{\beta\alpha} s\theta_{\beta\alpha} s\psi_{\beta\alpha} & c\phi_{\beta\alpha} c\theta_{\beta\alpha} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

mit

- $\boldsymbol{\Psi}_{\beta\alpha} = [\phi_{\beta\alpha}, \theta_{\beta\alpha}, \psi_{\beta\alpha}]^T$  ... Roll-, Nick-, Gierwinkel,
- $cx = \cos x$  und  $sx = \sin x$ .

Umgekehrt berechnen sich die Eulerwinkel aus den Elementen der Rotationsmatrix mittels (Groves, 2013, S. 38):

$$\begin{aligned} \phi_{\beta\alpha} &= \arctan_2(\mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}(2,3), \mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}(3,3)) \\ \theta_{\beta\alpha} &= -\arcsin(\mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}(1,3)) \\ \psi_{\beta\alpha} &= \arctan_2(\mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}(1,2), \mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}(1,1)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

wobei die Nummern in den Klammern angeben, in welcher Zeile bzw. Spalte die Elemente der Rotationsmatrix zu finden sind.

Für infinitesimale Winkel können die Approximationen  $\cos x \approx 1$  und  $\sin x \approx x$  in die Rotationsmatrix (2.1) eingefügt werden. Produkte infinitesimaler Winkel können vernachlässigt werden, sodass die vereinfachte, nicht orthogonale Rotationsmatrix folgende Form annimmt (Groves, 2013, S. 39):

$$\mathbf{C}_{\beta}^{\alpha} \approx \begin{bmatrix} 1 & \psi_{\beta\alpha} & -\theta_{\beta\alpha} \\ -\psi_{\beta\alpha} & 1 & \phi_{\beta\alpha} \\ \theta_{\beta\alpha} & -\phi_{\beta\alpha} & 1 \end{bmatrix} = I_3 - [\Psi_{\beta\alpha} \wedge] \quad (2.3)$$

mit

- $[\Psi_{\beta\alpha} \wedge]$  ... Schiefsymmetrische Matrix der Eulerwinkel.

Die zeitliche Ableitung der Rotationsmatrix  $\dot{\mathbf{C}}_{\beta}^{\alpha}$  ist durch den Differentialquotienten definiert (Groves, 2013, S. 45):

$$\dot{\mathbf{C}}_{\beta}^{\alpha} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}(t + \delta t) - \mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}(t)}{\delta t} \quad (2.4)$$

Die Rotationsmatrix  $\mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}(t + \delta t)$  kann in zwei sukzessiven Rotationen aufgeteilt werden, wobei angenommen wird, dass sich das System  $\alpha$  rotiert und das System  $\beta$  stillsteht (Groves, 2013, S. 45):

$$\mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}(t + \delta t) = \mathbf{C}_{\alpha(t)}^{\alpha(t+\delta t)} \mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}(t) \quad (2.5)$$

Für ein infinitesimales Zeitintervall  $\delta t$  gilt die Approximation (2.3) und eingesetzt in (2.5) ergibt sich die Gleichung (2.4) zu (Groves, 2013, S. 46):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_{\beta}^{\alpha}(t) &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(I_3 - [\Psi_{\alpha(t),\alpha(t+\delta t)} \wedge]) \mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}(t) - \mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}(t)}{\delta t} \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{[\Psi_{\alpha(t),\alpha(t+\delta t)} \wedge]}{\delta t} \mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}(t) \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} -\frac{\delta t \mathbf{\Omega}_{\beta\alpha}^{\alpha}}{\delta t} \mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}(t) \\ &= -\mathbf{\Omega}_{\beta\alpha}^{\alpha} \mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}(t) \\ &= \mathbf{C}_{\beta}^{\alpha}(t) \mathbf{\Omega}_{\alpha\beta}^{\beta} \end{aligned} \quad (2.6)$$

mit

$$\mathbf{\Omega}_{\alpha\beta}^{\beta} = [\omega_{\alpha\beta}^{\beta} \wedge] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{\alpha\beta,z}^{\beta} & \omega_{\alpha\beta,y}^{\beta} \\ \omega_{\alpha\beta,z}^{\beta} & 0 & -\omega_{\alpha\beta,x}^{\beta} \\ -\omega_{\alpha\beta,y}^{\beta} & \omega_{\alpha\beta,x}^{\beta} & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Drehratenvektor  $\omega_{\alpha\beta}^{\beta}$  beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich System  $\beta$  im Bezug zu System  $\alpha$  dreht. Ausgedrückt werden die einzelnen Drehraten im auflösenden System  $\beta$  (oberer Index). Der Term  $\Omega_{\alpha\beta}^{\beta}$  entspricht der schiefsymmetrischen Matrix des Drehratenvektors.

## 2.2 Referenzrahmen

Referenzrahmen bzw. deren Realisierungen, die Koordinatensysteme, sind Konstrukte, die es ermöglichen Objekte innerhalb eines räumlichen Bezugs zu beschreiben. In den folgenden Unterkapiteln sind die in Navigationsaufgaben vorkommenden Koordinatensysteme zusammengefasst, wobei grundsätzlich zwischen groß- (die Erde umfassend) und kleinräumigen (lokalen) Koordinatensystemen unterschieden wird. Vereinbarungsgemäß gilt für die gesamte hier vorgestellte Arbeit, dass die verwendeten Koordinatensysteme rechtwinklige und rechtshändige Systeme sind.

### 2.2.1 Inertialsystem

Das Inertialsystem (i-System) beschreibt ein nicht-rotierendes und unbeschleunigtes Bezugssystem (Schödlbauer, 1999). Der Ursprung des Systems liegt im Massenschwerpunkt der Erde. Die  $z^i$ -Achse läuft entlang der Rotationsachse der Erde, die  $x^i$ - und  $y^i$ -Achsen liegen in der Äquatorebene und rotieren nicht mit der Erdrotation mit (siehe Abbildung 2.1). Im Inertialsystem gelten die newtonsche Gesetze, welche Aussagen über die Bewegung von Objekten/Körpern im Inertialsystem treffen.

### 2.2.2 Erdfestes Koordinatensystem

Das erdfeste Koordinatensystem (e-System) ist ein mit der Erde rotierendes System und ist, wie das Inertialsystem, im Massenschwerpunkt der Erde gelagert. Die  $z^e$ -Achse verläuft deckungsgleich mit der  $z^i$ -Achse, die  $x^e$ -Achse liegt in der Äquatorebene und schneidet den Bezugsmeridian ( $0^\circ$  Länge – mittlerer Greenwich Meridian). Die  $y^e$ -Achse steht senkrecht auf der  $x^e$ ,  $z^e$ -Ebene (siehe Abbildung 2.1). Aus den Definitionen des Inertial- und des erdfesten Systems ist ersichtlich, dass beide Systeme sich nur von der Erddrehung um die gemeinsame  $z$ -Achse unterscheiden. Dieser Zusammenhang kann mittels Rotationsmatrix angegeben werden (Groves, 2013, S. 73):

$$\mathbf{C}_i^e = \mathbf{C}_e^{i,T} = \begin{bmatrix} \cos \omega_{ie}(t - t_0) & \sin \omega_{ie}(t - t_0) & 0 \\ -\sin \omega_{ie}(t - t_0) & \cos \omega_{ie}(t - t_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

mit

- $\omega_{ie} = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$  ... Erdrotationsrate,
- $t_0$  ... Zeitpunkt, an dem die  $x^i$ - und  $x^e$ -Achse deckungsgleich sind.

### 2.2.3 Körperfestes Koordinatensystem

Die Achsen des körperfesten Koordinatensystems (b-System) sind, wie der Name verrät, fix am Körper/Objekt befestigt. Dabei zeigt die  $x^b$ -Achse in Hauptbewegungsrichtung des Objektes (Längsrichtung), die  $y^b$ -Achse nach rechts und die  $z^b$ -Achse nach unten (siehe Abbildung 2.1).

### 2.2.4 Lokales Navigationskoordinatensystem

Das lokale Navigationskoordinatensystem (n-System) ist ein topozentrisches Koordinatensystem, dessen Ursprung mit dem des körperfesten Koordinatensystems koinzidiert (siehe Abbildung 2.1). Die  $x^n$ -Achse zeigt in Nordrichtung (in Richtung der Rotationsachse) und die  $y^n$ -Achse in Ostrichtung. Die  $x^n$ ,  $y^n$ -Ebene definiert eine Tangentialebene an der Fläche des Referenzerdellipsoids, auf welcher die  $z^n$ -Achse senkrecht, in Nadirrichtung schauend, steht. In der englischsprachigen Literatur ist diese Anordnung der Achsen unter dem Namen „North-East-Down“ (kurz *NED*) bekannt. Die Verdrehung des körperfesten in Bezug zum lokalen Navigationskoordinatensystem ergibt die Orientierung des Objektes. Wird diese Orientierung mittels Eulerwinkel beschrieben, so erfolgt gemäß der Gleichung (2.1) der Übergang vom b- ins n-System über die Rotationsmatrix  $C_b^n$ .

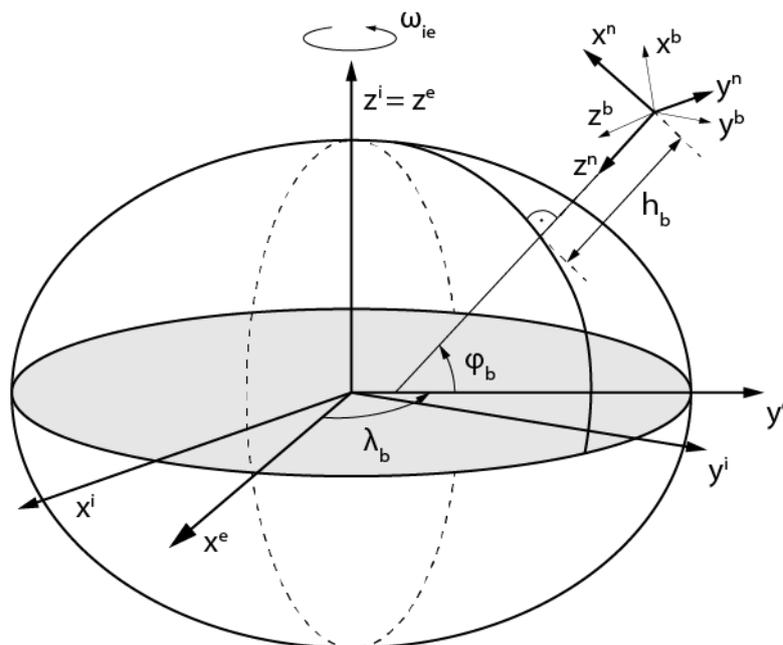


Abbildung 2.1: Referenzrahmen (nach Wendel, 2011)

## 2.3 Grundprinzip der inertialen Navigation

In der Kinematik ist die Beschleunigung  $\mathbf{a}$  als erste zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bzw. als zweite zeitliche Ableitung der Position  $\mathbf{r}$  definiert (Eller, 2016):

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \\ &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Im Inertialsystem kann die Beschleunigung eines Objektes nur durch eine von außen einwirkende Kraft entstehen. Durch die Integration dieser Beschleunigung, auch Trägheitsbeschleunigung genannt, kann auf die Geschwindigkeit bzw. auf die Position des Objektes geschlossen werden (Jekeli, 2001):

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t) \cdot dt + \mathbf{v}(t_0) = \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot dt + \dot{\mathbf{r}}(t_0) \\ \mathbf{r} &= \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t) \cdot dt + \mathbf{r}(t_0) = \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot dt + \mathbf{r}(t_0).\end{aligned}\quad (2.9)$$

Analog ergibt sich aus der Integration der Drehraten (siehe Gleichung (2.6)) die Orientierung (Jekeli, 2001):

$$\mathbf{C} = \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{C}}(t) dt + \mathbf{C}(t_0).\quad (2.10)$$

Die Integrationskonstanten der drei Integrale entsprechen der initialen Geschwindigkeit, Position und Orientierung. Um die absolute Geschwindigkeit, Position und Orientierung bestimmen zu können, müssen diese initialen Größen bekannt sein.

Wird die Objektbewegung in Bezug zu einem rotierenden System (z. B. dem erdfesten Koordinatensystem) beschrieben, so entstehen sog. Scheinkräfte bzw. Scheinbeschleunigungen, die vor der Integration der Trägheitsbeschleunigung berücksichtigt werden müssen. Die Transformation der Objektposition (Ursprung des körperfesten Koordinatensystems) vom erdfesten ins Inertialsystem erfolgt durch die transponierte Rotationsmatrix der Gleichung (2.7) (Groves, 2013, S. 47):

$$\mathbf{r}_{eb}^i = \mathbf{C}_e^i \mathbf{r}_{eb}^e.\quad (2.11)$$

Die Geschwindigkeit im Inertialsystem folgt aus der Ableitung der Gleichung (2.11):

$$\dot{\mathbf{r}}_{eb}^i = \dot{\mathbf{C}}_e^i \mathbf{r}_{eb}^e + \mathbf{C}_e^i \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e. \quad (2.12)$$

mittels Gleichung (2.6) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{eb}^i &= \mathbf{C}_e^i \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{r}_{eb}^e + \mathbf{C}_e^i \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e \\ &= \mathbf{C}_e^i (\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{r}_{eb}^e + \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Die Beschleunigung im Inertialsystem folgt aus der Ableitung der Gleichung (2.13):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{eb}^i &= \dot{\mathbf{C}}_e^i (\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{r}_{eb}^e + \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e) + \mathbf{C}_e^i \{ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^e \mathbf{r}_{eb}^e + \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e + \ddot{\mathbf{r}}_{eb}^e \} \\ &= \mathbf{C}_e^i \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e (\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{r}_{eb}^e + \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e) + \mathbf{C}_e^i \{ \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^e \mathbf{r}_{eb}^e + \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e + \ddot{\mathbf{r}}_{eb}^e \} \\ &= \mathbf{C}_e^i (\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{r}_{eb}^e + \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^e \mathbf{r}_{eb}^e + \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e + \ddot{\mathbf{r}}_{eb}^e) \\ &= \mathbf{C}_e^i (\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{r}_{eb}^e + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^e \mathbf{r}_{eb}^e + \ddot{\mathbf{r}}_{eb}^e) \end{aligned} \quad (2.14)$$

mit

- $\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \mathbf{r}_{eb}^e \dots$  Zentrifugalbeschleunigung,
- $2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^e \dot{\mathbf{r}}_{eb}^e \dots$  Coriolisbeschleunigung,
- $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^e \mathbf{r}_{eb}^e \dots$  Tangentialbeschleunigung (engl. *Euler acceleration*),
- $\ddot{\mathbf{r}}_{eb}^e \dots$  Objektbeschleunigung (Trägheitsbeschleunigung).

Die Zentrifugalbeschleunigung nimmt mit kleiner werdendem Abstand zur Erdrotationsachse ab. Die Coriolisbeschleunigung entsteht nur, wenn das Objekt eine Geschwindigkeit im Bezug zum erdfesten Koordinatensystem besitzt ( $\dot{\mathbf{r}}_{eb}^e > 0$ ). Die Tangentialbeschleunigung wird im allgemeinen vernachlässigt, da die Erdrotation als konstant angenommen wird ( $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^e = 0$ ). Obwohl diese Beschleunigungen als Scheinbeschleunigungen bezeichnet werden, werden diese von Messsystemen mit ausreichendem Auflösungsvermögen erfasst. Demzufolge muss die Trägheitsbeschleunigung ( $\ddot{\mathbf{r}}_{eb}^e$ ) vor der Integration isoliert werden, um auf die tatsächliche Geschwindigkeit bzw. Position des Objektes schließen zu können.

Abhängig vom ausgewählten Navigationsrahmen (auflösendes System), sind auch bei der Integration der gemessenen Drehraten Korrekturterme vor der Integration anzubringen. Eine nähere Beschreibung dieser Korrekturterme erfolgt im Abschnitt 3.2.1.

## 3 Inertiale Messeinheit und inertiales Navigationssystem

Eine inertielle Messeinheit (engl. *inertial measurement unit*, kurz *IMU*) ist ein elektronisches Messsystem bestehend aus Kreisel und Beschleunigungsgeber. Abgesehen von diesen Inertialsensoren werden unter dem Begriff der IMU noch weitere Elemente zur Messwertaufbereitung (Temperatursensor, Uhr, Kalibrierungsparameter etc.) hinzugezählt. Die von der IMU ausgegebenen Messwerte besitzen auch nach der Messwertaufbereitung immer noch sensorspezifische Fehler. Grund hierfür sind unter anderem nicht kalibrierbare (z. B. Messrauschen) und zeitlich nicht konstante Größen (z. B. *bias*). Kreisel und Beschleunigungsgeber sind eindimensionale Messwertgeber und somit nur entlang einer Achse sensitiv. Da Nutzer von Navigationssystemen im Allgemeinen an einer vierdimensionalen (3D-Raum- und 1D-Zeitangabe) Beschreibung des bewegten Objekts interessiert sind, werden entlang drei orthogonaler Achsen jeweils ein Kreisel und ein Beschleunigungsgeber angeordnet. Bei der Anordnung der Inertialsensoren wird grundsätzlich zwischen zwei Arten unterschieden: Der kardanischen Aufhängung (engl. *gimble*) und dem sog. *Strapdown*-System. Erstere behält bei Objektverdrehungen die Orientierung bezüglich des gewählten Navigationsrahmen bei. Letztere ist mit dem Objekt fest verbunden („festgeschnallt“ auf Englisch: *strapped down*) und führt die Bewegungen bzw. Verdrehungen des Objektes ebenfalls aus. *Strapdown*-Systeme sind heutzutage in fast allen modernen UAVs verbaut, weswegen in weiterer Folge diese Art der Anordnung vorausgesetzt wird.

In Abbildung 3.1 ist der Aufbau eines inertialen Navigationssystems (kurz INS) dargestellt. Ein INS besteht aus einem Hardware-Teil, der IMU und aus einem Software-Teil, dem Navigationsprozessor. Im Navigationsprozessor werden die IMU-Beobachtungen anhand der Navigationsgleichungen zu einer Positions-, Geschwindigkeits- und Orientierungslösung prozessiert. Zusammengefasst werden die einzelnen Lösungen unter dem Begriff der inertialen Navigationslösung (kurz IN-Lösung). Die grundlegende Vorgehensweise bei der Berechnung der IN-Lösung wurde bereits in Abschnitt 2.3 beschrieben und besteht aus der Integration der IMU-Beobachtungen. Auch erwähnt wurde, dass ohne initiale Position, Geschwindigkeit und Orientierung nur deren relative Änderung bestimmt werden kann. Die IMU-Beobachtungen werden mit einer gewissen Frequenz ausgegeben, weswegen die Integration nicht kontinuierlich, sondern zu diskreten Epochen stattfindet. Eine neue Epoche wird immer dann eingeleitet, wenn neue IMU-Beobachtungen ausgegeben werden. Nach der Initialisierungsphase des INS wird die Lösung der vorherigen Epoche verwendet, um die Lösung der nächsten Epoche zu berechnen. In diesem Zusammenhang wird von der Nachführung der IN-Lösung gesprochen. Der Einfluss der IMU-Fehler auf die Bestimmung der Position, Geschwindigkeit und Orientierung ist erheblich, da diese bei der Nachführung mitintegriert werden.

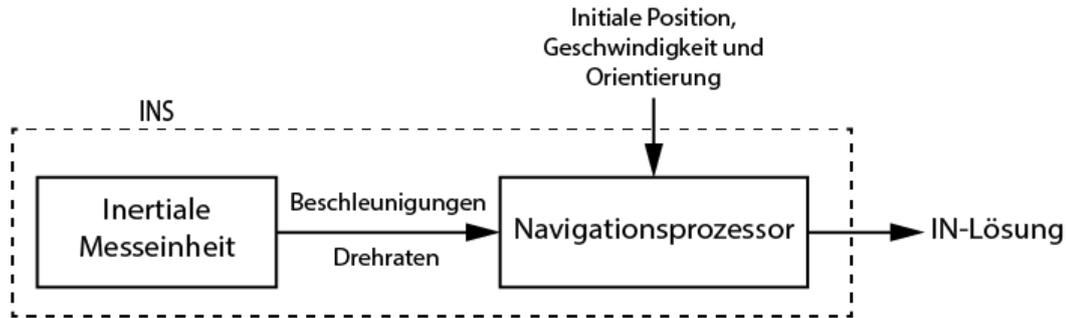


Abbildung 3.1: Aufbau eines inertialen Navigationssystems (nach Groves, 2013, S.163)

### 3.1 Kreisel und Beschleunigungsgeber

Ein Kreisel, oder auch Gyroskop genannt, misst die Drehrate  $\omega_{\alpha\beta}^{\gamma}$ , mit der sich das System  $\beta$  im Bezug zum System  $\alpha$  dreht, und gibt den Messwert anschließend im System  $\gamma$  aus. Im Falle eines *S trapdown*-Systems wird die Drehrate des körperfesten im Bezug zum inertialen System bestimmt. Mit der Ausgabe im körperfesten System nimmt der Drehratenvektor die folgende Gestalt an:  $\omega_{ib}^b$ .

Ein Beschleunigungsgeber misst die sog. *specific-force* in Bezug zum Inertialsystem:  $f_{ib}^b$ . Die *specific-force* beschreibt nicht eine Kraft, sondern eine Beschleunigung bezüglich des frei fallenden Inertialsystems. Zum besseren Verständnis sei eine kurze Herleitung der *specific-force* formuliert. Laut dem zweiten Gesetz von Newton wird im Inertialsystem eine Kraft  $\mathbf{F}$  benötigt, um einen Körper der trägen Masse  $m$  in Bewegung zu versetzen. Dieses Gesetz muss bei Systemen mit einem Kraftfeld, beispielsweise dem Gravitationsfeld, erweitert werden (Jekeli, 2001):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + m\bar{\mathbf{g}}. \quad (3.1)$$

Dividiert durch die Masse und umformen der Terme ergibt sich:

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} - \bar{\mathbf{g}} \quad (3.2)$$

mit

- $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}$  ... Objektbeschleunigung (entspricht der gesuchten Trägheitsbeschleunigung),
- $\bar{\mathbf{g}}$  ... Beschleunigungsvektor aufgrund der Gravitation,
- $\frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{f}$  ... *specific-force* (oder auch *non-gravitational force per unit mass* genannt).

Befindet sich der Beschleunigungsgeber statisch in einem zum Inertialsystem rotierenden System (z. B. e-System), wird zusätzlich zur Gravitationsbeschleunigung die Zentrifugalbeschleunigung gemessen (siehe Gleichung (2.14)) und die Summe dieser beiden Terme ergibt den Schwerebeschleunigungsvektor  $\mathbf{g}$ .

Liegt der Beschleunigungsgeber in Ruhe ( $\mathbf{a} = 0$ ) mit der sensitiven Achse parallel und in Richtung zum Schwerebeschleunigungsvektor, so zeigt der Messwert etwa  $9,8 \text{ ms}^{-2}$  an. Daran ist erkennbar, dass zur Isolierung der Trägheitsbeschleunigung unter anderem ein Schweremodell benötigt wird. Das Modell von Somigliana bietet im WGS 84 Koordinatensystem (NIMA, 1997) ein entsprechend triviales Modell zur Berechnung der Schwerebeschleunigung in Abhängigkeit der ellipsoidischen Breite (Torge, 2001):

$$g_0(\varphi) \approx g_{WGS\ 84} \frac{(1 + 0,001931853 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.3)$$

mit

- $g_{WGS\ 84} = 9,7803253359 \text{ ms}^{-2} \dots$  Theoretische Schwere am Äquator (an der Ellipsoidoberfläche),
- $e \approx 0,0818191908425 \dots$  Exzentrizität.

Die Vereinfachungen des Schweremodells von Somigliana (Schwerewert in der Höhe null und senkrecht zum Ellipsoid) können für präzise Navigationsaufgaben nicht ausreichend sein. Eine entsprechende Erweiterung der Gleichung (3.3) folgt aus der Berücksichtigung der Schwerevariation aufgrund der Höhe  $h$  (Groves, 2013, S.71):

$$g(\varphi, h) = g_0(\varphi) \left\{ 1 - \frac{2}{R_0} \left[ 1 + f(1 - 2 \sin^2 \varphi) + \frac{\omega_{ie}^2 R_0^2 R_p}{\mu} \right] h + \frac{3}{R_0^2} h^2 \right\} \quad (3.4)$$

mit

- $f = 1 / 298.257223563 \dots$  Abplattung,
- $\mu = GM = 3,986\ 004\ 418 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2} \dots$  Geozentrische Gravitationskonstante (Gravitationskonstante  $G$  mal Erdmasse  $M$ ),
- $R_0 = 6378137 \text{ m}; R_p = R_0 (1 - f) \dots$  große und kleine Halbachse.

Das Messprinzip der beiden Inertialsensoren beruht je nach Bauart auf unterschiedlichen physikalischen Prinzipien. Bei Kreiseln wird zwischen mechanischen und optischen Messprinzipien unterschieden. Das mechanische Messprinzip realisiert durch einen rotationssymmetrischen Körper ist beispielsweise in einem Vermessungskreisel anzutreffen (von Fabek, 1980).

Die optischen Messprinzipien sind wiederum in zwei Gruppen eingeteilt: den Ringlaserkreisel und den Faserkreisel (engl. *interferometric fiber-optic gyro*). Bei der Messung der Erdrotation im geodätischen Observatorium in Wettzell wird beispielsweise ein Ringlaser verwendet (Schlüter et al., 2007). Ein ähnliches Bild zeichnet sich bei den Messprinzipien der Beschleunigungsgeber ab, wo zwischen Beschleunigungsgeber mit pendelnder Prüfmasse oder mit schwingendem Balken unterschieden wird. Eine ausführliche Erläuterung von Inertialsensoren ist in (Titterton & Weston, 2004) zu finden.

Inertialsensoren werden hinsichtlich ihrer Qualitätsmerkmale – *bias stability*, *axis alignment*, *scale factor*, um nur einige zu nennen – in verschiedene Klassen eingeteilt, wobei einerseits die Klassen Schnittmengen aufweisen und andererseits verschiedene Autoren unterschiedliche Einteilungen und Bezeichnungen der Klassen vertreten.

In Abbildung 3.2 werden beispielsweise vier Kreiselklassen anhand ihrer *bias* Stabilität unterschieden. Der *bias* beschreibt im Allgemeinen ein Offset in den Beobachtungen (hier in den Kreiselbeobachtungen). Dieser hat sowohl eine zeitlich konstante (statische) als auch eine zeitlich variierende (dynamische) Komponente (Groves, 2013, S.152), wobei die *bias* Stabilität die dynamische Komponente beschreibt.

Eine höhere Stabilität verlangt den Einsatz von komplexeren Messprinzipien, wodurch der Preis ansteigt und sich die Anwendung von zivilen (Smartphones) über industriellen (UAVs) zu sicherheitsrelevanten Bereichen (Militär, Schifffahrtnavigation etc.) verlagert. Die Erdrotation beträgt näherungsweise 15 Grad pro Stunde ( $360^\circ / 24\text{h}$ ). Ist die *bias* Stabilität eines Kreisels höher als die Erdrotation, also links vom blauen Pfeil in Abbildung 3.2, dann kann die Erdrotation mittels dieses Kreisels erfasst werden. Kreisel mit einer geringeren *bias* Stabilität als die 15 Grad pro Stunde sind nicht in der Lage, die Erdrotation zu messen. Solche Kreisel sind beispielsweise in modernen Smartphones eingebaut und gehören den sog. MEMS-Sensoren (engl. *Micro-Electro-Mechanical Systems*) an. Ähnliche Abbildungen gibt es auch für Beschleunigungsgeber.

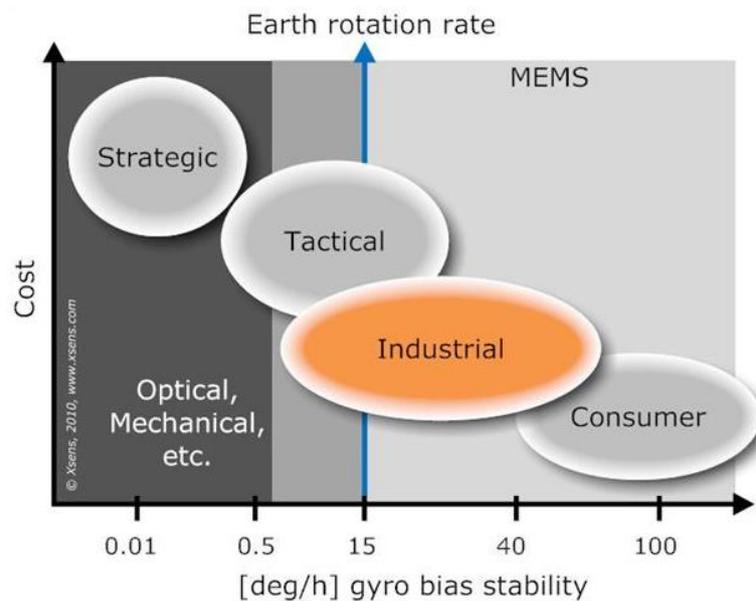


Abbildung 3.2: Bias Stabilität für verschiedene Qualitätsgruppen von Kreiseln (Xsens, 2019)

## 3.2 Navigationsgleichungen im lokalen Navigationskoordinatensystem

Die Navigationsgleichungen können in verschiedenen Referenzrahmen formuliert werden. Im Folgenden wird nur auf die Formulierung im lokalen Navigationskoordinatensystem eingegangen, da diese für das Verständnis der nachfolgenden Kapitel relevant ist. Die Orientierung in Form der Rotationsmatrix  $C_b^n$  gibt an, wie das körperfeste Koordinatensystem in Bezug zum lokalen Navigationskoordinatensystem verdreht ist. Der Geschwindigkeitsvektor  $v_{eb}^n$  beschreibt die Geschwindigkeit des körperfesten in Bezug zum erdfesten Koordinatensystem aufgelöst in den Achsen des lokalen Navigationskoordinatensystems. Die Position wird im erdfesten Ellipsoidkoordinatensystem durch die ellipsoidische Breite, Länge und Höhe beschrieben. Die Formulierung im lokalen Navigationskoordinatensystem bringt im Vergleich zu anderen Referenzrahmen zusätzliche Herausforderungen mit sich, die unter anderem bereits im Abschnitt 2.3 angedeutet wurden.

Wichtig bei der Berechnung der IN-Lösung ist die Reihenfolge, in der die Position, Geschwindigkeit und Orientierung nachgeführt werden. In Abbildung 3.3 ist die Reihenfolge der Nachführung anhand eines Blockschemas dargestellt. Als erstes wird die Orientierung nachgeführt, da die Rotationsmatrix für die anschließende Drehung der gemessenen Beschleunigungen vom körperfesten ins lokale Navigationskoordinatensystem benötigt wird. Gefolgt von der Orientierung, werden Geschwindigkeit und Position nachgeführt. Die in den Klammern stehenden Vorzeichen der Position, Geschwindigkeit und Orientierung geben an, ob sich diese vor (-) bzw. nach (+) der Nachführung befinden.

In den folgenden Kapiteln werden die Navigationsgleichungen im lokalen Navigationskoordinatensystem präsentiert. Eine ausführliche Herleitung dieser Gleichungen ist an dieser Stelle nicht vorgesehen, stattdessen wird auf entsprechende Literatur verwiesen: (Groves, 2013, S. 176 ff).

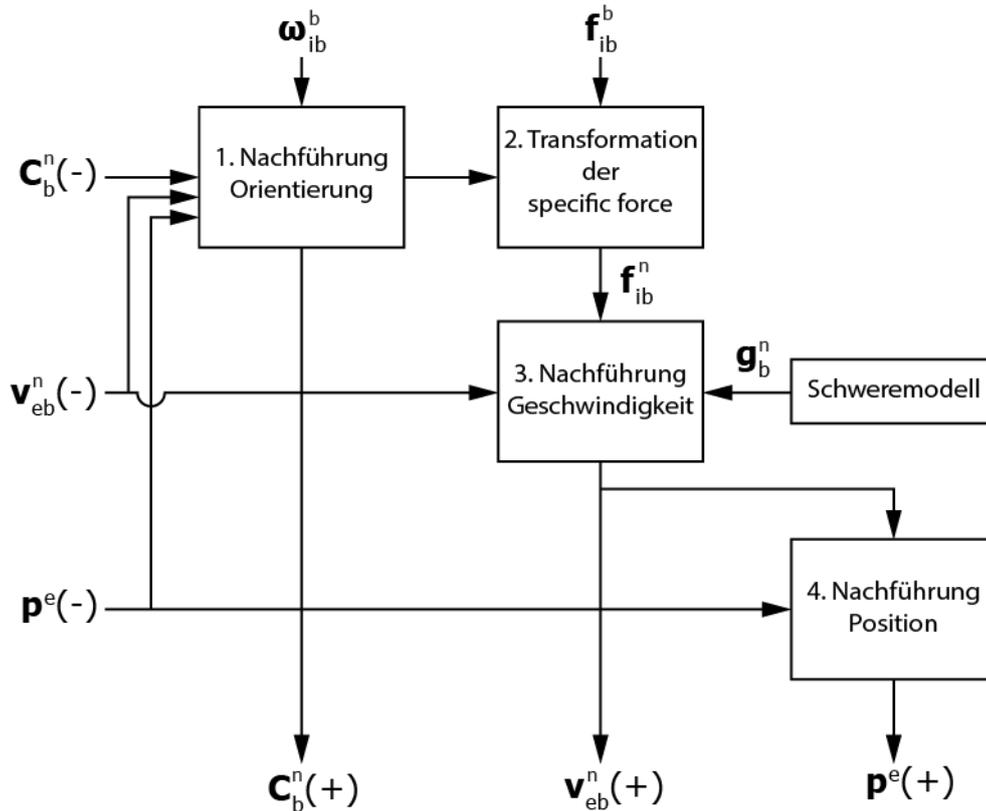


Abbildung 3.3: Nachführung der IN-Lösung (nach Groves, 2013, S. 176)

### 3.2.1 Nachführung der Orientierung

Ausgangspunkt bei der Nachführung der Orientierung ist die Gleichung (2.6) im lokalen Navigationskoordinatensystem. Der Term  $\Omega_{nb}^b$  lässt sich dabei wie folgt aufteilen (Groves, 2013, S. 177):

$$\begin{aligned} \dot{C}_b^n &= C_b^n \Omega_{nb}^b \\ &= C_b^n \Omega_{ib}^b - (\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n) C_b^n \end{aligned} \quad (3.5)$$

Der erste Term entspricht der schiefsymmetrischen Matrix der gemessenen Drehraten. Der Term  $\Omega_{ie}^n$  beschreibt die Verdrehung des erdfesten zum Inertialsystem aufgelöst im lokalen Navigationskoordinatensystem und ergibt sich aus der Erdrotation  $\omega_{ie}$  und der ellipsoidischen Breite des körperfesten Koordinatenursprungs  $\varphi_b$  (Groves, 2013, S. 177):

$$\Omega_{ie}^n = [\omega_{ie}^n \wedge] = \left[ \begin{array}{c} \omega_{ie} \cos \varphi_b \\ 0 \\ -\omega_{ie} \sin \varphi_b \end{array} \right] \wedge = \omega_{ie} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \sin \varphi_b & 0 \\ -\sin \varphi_b & 0 & -\cos \varphi_b \\ 0 & \cos \varphi_b & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Die sog. Transportrate, der Term  $\Omega_{en}^n$ , entspricht der Rotation des lokalen Navigationskoordinatensystems, wenn dieses sich entlang der Erdoberfläche bewegt. Die Rotation entsteht dadurch, dass sich bei Bewegung des lokalen Navigationskoordinatensystems die  $x^n$ ,  $y^n$ -

Ebene stets lotrecht bzw. tangential zur Fläche des Referenzerdellipsoids ausrichtet. Die entsprechende schiefsymmetrische Matrix lautet (Groves, 2013, S. 177):

$$\boldsymbol{\Omega}_{en}^n = [\boldsymbol{\omega}_{en}^n \wedge] = \left[ \begin{array}{c} \frac{v_{eb,E}^n}{R_E(\varphi_b) + h_b} \\ -v_{eb,N}^n \\ \frac{R_N(\varphi_b) + h_b}{-v_{eb,E}^n \cdot \tan \varphi_b} \\ \frac{R_E(\varphi_b) + h_b}{R_E(\varphi_b) + h_b} \end{array} \right] \wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{en,z}^n & \omega_{en,y}^n \\ \omega_{en,z}^n & 0 & -\omega_{en,x}^n \\ -\omega_{en,y}^n & \omega_{en,x}^n & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

mit

- $h_b$  ... ellipsoidische Höhe des körperfesten Koordinatenursprungs,
- $\mathbf{v}_{eb}^n = [v_{eb,N}^n, v_{eb,E}^n, v_{eb,D}^n] \dots$  Geschwindigkeit im lokalen Navigationskoordinatensystem,
- $R_N(\varphi_b) = \frac{R_0(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_b)^{3/2}} \dots$  Meridian- und
- $R_E(\varphi_b) = \frac{R_0}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi_b}} \dots$  Querkrümmungsradius in Abhängigkeit der ellipsoidischen Breite des körperfesten Koordinatenursprungs.

Die Position, Geschwindigkeit und Drehraten werden über das Integrationsintervall  $\tau_k$  (Zeitintervall zwischen zwei IMU-Epochen) als konstant angenommen. Die nachgeführte Rotationsmatrix ergibt sich aus der Integration der Gleichung (3.5) (Groves, 2013, S. 178):

$$\mathbf{C}_b^n(+)\approx\mathbf{C}_b^n(-)(I_3+\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b\tau_k)-(\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n(-)+\boldsymbol{\Omega}_{en}^n(-))\mathbf{C}_b^n(-)\tau_k. \quad (3.8)$$

Die Integration entspricht einer Approximation, da die Potenzreihe der Exponentialfunktion nach dem ersten Glied abgebrochen wurde.

### 3.2.2 Nachführung der Geschwindigkeit

Der gemessene Beschleunigungsvektor  $\mathbf{f}_{ib}^b$  muss als erstes vom körperfesten ins lokale Navigationskoordinatensystem transformiert werden (Groves, 2013, S. 178):

$$\mathbf{f}_{ib}^n \approx \frac{1}{2} (\mathbf{C}_b^n(-) + \mathbf{C}_b^n(+)) \mathbf{f}_{ib}^b. \quad (3.9)$$

Die vollständige Differentialgleichung der Geschwindigkeit lautet (Groves, 2013, S. 179):

$$\dot{\mathbf{v}}_{eb}^n = \mathbf{f}_{ib}^n + \mathbf{g}_b^n(\varphi_b, h_b) - (\boldsymbol{\Omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\Omega}_{ie}^n) \mathbf{v}_{eb}^n. \quad (3.10)$$

Der transformierte, gemessene Beschleunigungsvektor  $\mathbf{f}_{ib}^n$  wird mittels dem aus der Gleichung (3.4) berechneten Schwerebeschleunigungsvektor  $\mathbf{g}_b^n$ , der schiefsymmetrischen Erdrotationsmatrix  $\mathbf{\Omega}_{ie}^n$  und der Transportrate  $\mathbf{\Omega}_{en}^n$  korrigiert. Das Anbringen dieser Korrekturterme hat den Zweck, die Trägheitsbeschleunigung von den restlichen Störbeschleunigungen (Schwere- und Scheinbeschleunigung) zu isolieren. Werden die Terme der Gleichung (3.10) über das Integrationsintervall  $\tau_k$  als konstant angenommen, so ergibt die nachgeführte Geschwindigkeit Folgendes (Groves, 2013, S. 179):

$$\mathbf{v}_{eb}^n(+)=\mathbf{v}_{eb}^n(-)+\left[\mathbf{f}_{ib}^n+\mathbf{g}_b^n(\varphi_b(-),h_b(-))-\left(\mathbf{\Omega}_{en}^n(-)+2\mathbf{\Omega}_{ie}^n(-)\right)\mathbf{v}_{eb}^n(-)\right]\tau_k. \quad (3.11)$$

### 3.2.3 Nachführung der Position

Die Ableitung der ellipsoidischen Koordinaten vom Ursprung des körperfesten Koordinatensystem lautet (Groves, 2013, S. 61):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_b &= \frac{v_{eb,N}^n}{R_N(\varphi_b)+h_b} \\ \dot{\lambda}_b &= \frac{v_{eb,E}^n}{(R_E(\varphi_b)+h_b)\cos\varphi_b} \\ \dot{h}_b &= -v_{eb,D}^n. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Unter der Voraussetzung, dass über das Integrationsintervall  $\tau_k$  die Änderung der Krümmungsradien vernachlässigt und die Geschwindigkeitsänderung als linear angesehen wird, lässt sich die Position des körperfesten Koordinatenursprungs mittels (Groves, 2013, S. 180)

$$\begin{aligned} h_b(+)&=h_b(-)-\frac{\tau_k}{2}(v_{eb,D}^n(-)+v_{eb,D}^n(+)) \\ \varphi_b(+)&\approx\varphi_b(-)+\frac{\tau_k}{2}\left(\frac{v_{eb,N}^n(-)}{R_N(\varphi_b(-))+h_b(-)}+\frac{v_{eb,N}^n(+)}{R_N(\varphi_b(+))+h_b(+)}\right) \\ \lambda_b(+)&=\lambda_b(-)+\frac{\tau_k}{2}\left(\frac{v_{eb,E}^n(-)}{(R_E(\varphi_b(-))+h_b(-))\cos\varphi_b(-)}+\frac{v_{eb,E}^n(+)}{(R_E(\varphi_b(+))+h_b(+))\cos\varphi_b(+)}\right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

bestimmen. Die Reihenfolge bei der Nachführung der Position ist von besonderer Bedeutung, da zwischen den Koordinaten Abhängigkeiten bestehen. Für Breiten von  $\pm 90^\circ$  oder näherungsweise  $\pm 90^\circ$  kann die Nachführung der Länge zu numerischen Problemen oder sogar zum vollständigen Versagen führen. Die sog. *wander-azimut implementation* behebt diese Singularität. Da Flüge in Polregionen nicht vorgesehen sind, ist diese Art der Implementierung für diese Arbeit nicht weiter relevant und wird daher nicht näher erläutert, stattdessen soll auf die entsprechende Literatur hingewiesen werden (Groves, 2013, S. 180 ff).

## 4 Erweiterte Kalman Filter

Die zeitkontinuierliche Differentialgleichung zur Beschreibung eines linearen Systems lautet (Heunecke, 2013):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) \quad (4.1)$$

mit

- $\mathbf{F}(t)$  ... Systemmatrix,
- $\mathbf{x}(t)$  ... Zustandsvektor,
- $\mathbf{G}(t)$  ... Störeingangsmatrix,
- $\mathbf{w}(t)$  ... Störgrößenvektor,
- $t$  ... Zeit.

Die zeitkontinuierliche und zeitveränderliche Beschreibung eines nichtlinearen Systems erfolgt in Zustandsraumdarstellung mittels (Simon, 2006):

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t) \quad (4.2)$$

$$\mathbf{z} = h(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (4.3)$$

mit

- $\mathbf{z}$  ... Beobachtungsvektor,
- $\dot{\mathbf{x}}$  ... zeitliche Ableitung des Zustandsvektors,
- $\mathbf{v}$  ... Beobachtungsrauschen,

Die nichtlinearen Funktionen  $f()$  und  $h()$  beschreiben in Abhängigkeit ihrer (unabhängigen) Variablen, einerseits die zeitliche Änderung des Zustandsvektors, andererseits den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Zustands- und dem Beobachtungsvektor. Die Differentialgleichung (4.1) und (4.2) entsprechen einer kinematischen Beschreibung des Systems, da keine Stellgrößen in der Gleichung vorkommen. Das bedeutet, dass die Ursache der Zustandsveränderungen nicht berücksichtigt wird, was einer dynamischen Beschreibung gleichkäme. Bei normalverteiltem, unkorreliertem weißen Rauschen ( $\mathbf{w} \sim N(0, \mathbf{Q})$ ,  $\mathbf{v} \sim N(0, \mathbf{R})$ ) und zeitdiskreter Darstellung ( $t = t_k$ ) lassen sich die Gleichungen (4.2) und (4.3) umformen in:

$$\dot{\mathbf{x}}_k = f_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (4.4)$$

$$\mathbf{z}_k = h_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (4.5)$$

Die Linearisierung der Gleichungen (4.4) durch das Abbrechen der Taylorreihenentwicklung nach dem linearen Glied an der Stelle  $\mathbf{x}_{0,k}$  lautet (Farrell, 2008):

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}_k &\approx f_k(\mathbf{x}_{0,k}) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{0,k}} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{0,k}) + \mathbf{w}_k \\
 \dot{\mathbf{x}}_k &\approx \dot{\mathbf{x}}_{0,k} + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{0,k}} \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\
 \dot{\mathbf{x}}_{k+1} - \dot{\mathbf{x}}_{0,k} &\approx \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{0,k}} \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\
 \delta \dot{\mathbf{x}}_k &\approx \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{0,k}} \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\
 \delta \dot{\mathbf{x}}_k &\approx \mathbf{F}_k \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

mit

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Analog gilt für die Gleichung (4.5) ( $\delta \mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{z}_{0,k}$ ):

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{z}_k &\approx \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{0,k}} \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \\
 \delta \mathbf{z}_k &\approx \mathbf{H}_k \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

mit

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Die Matrizen  $\mathbf{F}_k$  und  $\mathbf{H}_k$  beinhalten die partiellen Ableitungen der Zustände und werden System- und Beobachtungsmatrix genannt. Wird die Linearisierung nicht an einer beliebigen Stelle  $\mathbf{x}_{0,k}$  durchgeführt, sondern an der Stelle eines geschätzten Zustandsvektors  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ , führt die Implementierung der Gleichungen (4.6) und (4.8) zum erweiterten Kalman-Filter (engl. *extended Kalman filter*, kurz EKF). Das hochgestellte Vorzeichen gibt an, ob sich der jeweilige Term vor (-) oder nach (+) dem Zeitpunkt der Aufdatierung befindet. Eine weitere Unterteilung des EKFs hinsichtlich des Darstellungsraums unterscheidet zwischen Fehlerzustandsraum (engl. *error state-space*, kurz ESS) und Zustandsraum (engl. *total state-space*). Im ESS-KF wird nicht direkt der Zustandsvektor geschätzt, sondern die Fehlerzustände des Systems. Die geschätzten Fehlerzustände  $\delta \hat{\mathbf{x}}_k$  werden anschließend an den prädierten Zustandsvektor  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  angebracht und ergeben den aufdatierten Zustandsvektor  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ . Erfolgt die Prädiktion auf Basis des aufdatierten Zustandsvektors, so spricht man von einer *closed-loop* Architektur des ESS-KF. Da die geschätzten

Fehlerzustände durch die *closed-loop* Architektur in die Prädiktion des Zustandsvektors mit einfließen, werden die Fehlerzustände nach der Aufdatierung zurückgesetzt:  $\delta\hat{\mathbf{x}}_{k-1} = \mathbf{0}$ . Hiermit entfällt auch die Prädiktion der Fehlerzustände:  $\delta\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{0}$ . Auf eine detailreiche Erläuterung der einzelnen Implementierungen des EKFs wird hier verzichtet, stattdessen soll auf die entsprechenden Darlegungen bei Jwo und Cho (2010) hingewiesen werden. Der Vollständigkeit halber werden die wichtigsten Schritte und Filtergleichungen präsentiert:

1. Berechnung der Transitionsmatrix  $\mathbf{T}_{k-1}$ .  
Die Transitionsmatrix beschreibt die Fortschreibung des (Fehler)Zustandes (Groves, 2013, S. 119):

$$\mathbf{T}_{k-1} \approx \exp(\mathbf{F}_{k-1}\tau) \quad (4.10)$$

mit

- $\exp()$  ... Exponentialmatrix,
- $\tau = t_k - t_{k-1}$  ... Zeitintervall.

2. Berechnung der Kovarianzfortpflanzung.  
Die Kovarianzmatrix der Fehlerzustände  $\mathbf{P}$  ist definiert als (Groves, 2013, S. 89):

$$\mathbf{P} = E(\delta\mathbf{x}\delta\mathbf{x}) \text{ mit } \mathbf{P}_{ii} = \sigma_i^2 \text{ und } \mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_{ji} = \sigma_i\sigma_j\rho_{i,j}. \quad (4.11)$$

Die Terme  $\sigma_i^2$  und  $\rho_{i,j}$  beschreiben die Varianz der Fehlerzustände bzw. die Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen. Die Fortschreibung der Kovarianzmatrix erfolgt durch (Groves, 2013, S. 93):

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{T}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{T}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (4.12)$$

3. Bestimmung der Innovation (bzw. des Innovationsvektors)  $\delta\mathbf{z}_k$  (Groves, 2013, S. 119):

$$\delta\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k^-. \quad (4.13)$$

4. Bestimmung der Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}_k$  (Groves, 2013, S. 94):

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (4.14)$$

wobei der Term  $(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$  der Kovarianzmatrix der Innovation entspricht

5. Aufdatierung des Fehlerzustandsvektors und dessen Kovarianzmatrix

$$\delta\hat{\mathbf{x}}_k = \delta\hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k\delta\mathbf{z}_k \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{0} + \mathbf{K}_k\delta\mathbf{z}_k \\ \mathbf{P}_k^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\mathbf{P}_k^- \end{aligned} \quad (4.16)$$

6. Aufdatierung des Zustandsvektors (Groves, 2013, S. 95):

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \delta \hat{\mathbf{x}}_k . \quad (4.17)$$

## 5 INS/GNSS-Integration

Bei der Bestimmung von Navigationslösungen hat sich in der Praxis besonders die Integration von INS und GNSS (Global Navigation Satellite System) durchsetzen können. Grund hierfür sind unter anderem die konträren Eigenschaften der beiden Navigationssysteme. Die Vorteile und Nachteile von GNSS gegenüber von INS sind (Groves, 2013, S. 559):

Vorteile:

- absolute Positions- und Geschwindigkeitsinformation,
- Genauigkeit nimmt nicht mit fortschreitender Zeit ab (sog. *long-term accuracy*).

Nachteile:

- Abhängigkeit von einer im Hintergrund stehenden kostenintensiven Infrastruktur (Satelliten, Kontrollstationen, Raketen etc.),
- geringere Messfrequenz,
- geringere *short-term accuracy* (zumindest für *code-based* Beobachtungen).

Bei Verwendung mehrere GNSS-Antennen ist eine Orientierungsinformation bestimmbar, die Genauigkeit ist hierbei proportional zur Basislänge zwischen den Antennen. Multi-Antennensysteme werden im Allgemeinen bei Objekten mit großer Ausdehnung, wie beispielsweise Schiffen (Lu, Cannon, & Lachapelle, 1993) oder Flugzeugen, verwendet. Die volle Orientierung lässt sich ab einer Konstellation von drei GNSS-Antennen bestimmen. Für UAVs ist die Bestimmung der Orientierung mittels Multi-Antennensystem von sehr geringer Bedeutung.

In der Literatur sind zahlreiche Integrationsarchitekturen beschrieben (Groves, 2013, S. 560 ff), wovon die trivialste die sog. lose Kopplung darstellt, welche auf Grundlage des im Kapitel 4 beschriebenen Filteransatzes (*ESS-KF*) agiert. Die hier betrachteten Zustände des Systems beschränken sich auf die Orientierung, Geschwindigkeit und Position.

Im *ESS-KF* werden nicht direkt die Zustände, sondern die Fehlerzustände des INS geschätzt. Die Fehlerzustände sind als Differenz zwischen der IN-Lösung („ $\sim$ “) und dessen wahren Größe definiert (Groves, 2013, S. 203):

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{C}_\beta^\alpha &= \tilde{\mathbf{C}}_\beta^\alpha \mathbf{C}_\alpha^\beta \\ \delta \mathbf{v}_{\beta\alpha}^\gamma &= \tilde{\mathbf{v}}_{\beta\alpha}^\gamma - \mathbf{v}_{\beta\alpha}^\gamma \\ \delta \mathbf{r}_{\beta\alpha}^\gamma &= \tilde{\mathbf{r}}_{\beta\alpha}^\gamma - \mathbf{r}_{\beta\alpha}^\gamma \text{ oder } \delta \mathbf{p}_b = \tilde{\mathbf{p}}_b - \mathbf{p}_b \end{aligned} \quad (5.1)$$

mit

- $\{\alpha, \beta, \gamma\} \in \{i, b, e, n\} \dots$  (siehe Abschnitt 2.2),
- $\delta \mathbf{r}_{\beta\alpha}^\gamma \dots$  Positionsfehler in kartesischen Koordinaten (Einheit: Meter),
- $\delta \mathbf{p}_b \dots$  Positionsfehler in ellipsoidischen Koordinaten (Einheit: Radiant und Meter).

Die Fehlerzustände des INS entstehen durch Fehler in den IMU-Beobachtungen, Initialisierungsfehler und getroffenen Vereinfachungen in den Navigationsgleichungen (Groves, 2013, S. 203). Die korrigierten (fehlerfreien) INS-Zustände ergeben sich durch die Addition der Fehlerzustände zu den INS-Zuständen. Da die wahren Zustände in Wirklichkeit nicht bekannt sind, müssen die Fehlerzustände geschätzt werden. Die Rückführung der geschätzten Fehlerzustände zu den INS-Zuständen führt zu den geschätzten Zuständen (Groves, 2013, S. 564):

$$\hat{\mathbf{C}}_\beta^\alpha = (\delta \hat{\mathbf{C}}_\beta^\alpha)^T \tilde{\mathbf{C}}_\beta^\alpha \quad (5.2)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_{\beta\alpha}^y = \tilde{\mathbf{v}}_{\beta\alpha}^y - \delta \hat{\mathbf{v}}_{\beta\alpha}^y \quad (5.3)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_b = \tilde{\mathbf{p}}_b - \delta \hat{\mathbf{p}}_b. \quad (5.4)$$

Die geschätzten Fehlerzustände werden nach der Aufdatierung der INS-Zustände zurück auf null gesetzt. Die Fehlerzustände erhalten durch die Schätzung die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}$ , die gleichzeitig auch die Kovarianzmatrix der geschätzten Zustände ist.

Der genaue Ablauf der INS/GNSS-Integration ist im Blockdiagramm der Abbildung 5.1 dargestellt. Die entsprechenden Gleichungen zur Berechnung wurden im Kapitel 4 präsentiert. Der Berechnungsablauf der Integration besteht aus den folgenden Schritten:

1. Nachführung der IN-Lösung  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  (siehe Abschnitt 3.2) und gleichzeitige Fortschreibung der Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_k^-$ .
2. Liegt zum Zeitpunkt  $t_k$  eine GNSS-Beobachtung vor, so folgt die Berechnung der Innovation  $\delta \mathbf{z}_k$ .  
Liegt zum Zeitpunkt  $t_k$  keine GNSS-Beobachtung vor, so entspricht die IN-Lösung der endgültigen Navigationslösung:  $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \hat{\mathbf{x}}_k^+$ . Analog gilt  $\mathbf{P}_k^- = \mathbf{P}_k^+$ . Die Schritte 3-4 werden anschließend übersprungen, hin zu Schritt 6.
3. Berechnung der Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}_k$ .
4. Aufdatierung des geschätzten Fehlerzustandes  $\delta \hat{\mathbf{x}}_k$  und der Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_k^+$ .
5. Aufdatierung des prädizierten Zustandes (IN-Lösung)  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$
6. Einführung des aufdatierten Zustandsvektors in das INS.

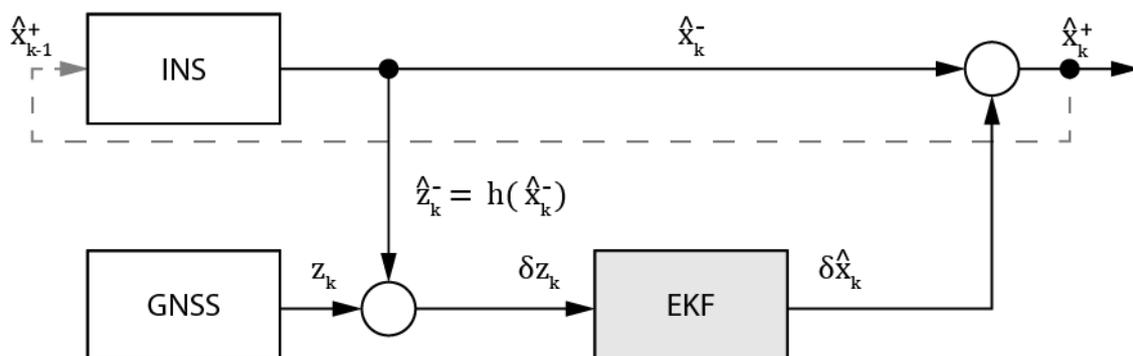


Abbildung 5.1: Closed loop INS/GNSS-Integrationsarchitektur (nach Jwo & Cho, 2010)

In den folgenden Abschnitten, werden das System-, Beobachtungsmodell, System- und Beobachtungsrauschen näher erläutert.

## 5.1 Systemmodell

Das Systemmodell beschreibt die zeitliche Änderung der INS-Fehler. Bei der Aufstellung des Systemmodells werden folgende Fehlerzustände im lokalen Navigationskoordinatensystem betrachtet (Groves, 2013, S. 584):

$$\mathbf{x}_{INS}^n = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\Psi}_{nb}^n \\ \delta\mathbf{v}_{eb}^n \\ \delta\mathbf{p}_b \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

mit

- $\delta\boldsymbol{\Psi}_{nb}^n = [\delta\phi_{nb}^n \quad \delta\theta_{nb}^n \quad \delta\psi_{nb}^n]^T \dots$  Orientierungsfehler,
- $\delta\mathbf{v}_{eb}^n = [\delta v_{eb,N}^n \quad \delta v_{eb,E}^n \quad \delta v_{eb,D}^n]^T \dots$  Geschwindigkeitsfehler,
- $\delta\mathbf{p}_b = [\delta\varphi_b \quad \delta\lambda_b \quad \delta h_b]^T \dots$  Positionsfehler.

Der Zustandsvektor  $\mathbf{x}_{INS}^n$  ist nicht auf die INS-Fehlerzustände beschränkt, sondern kann beispielsweise um Sensorfehler der IMU (z.B. *bias*) erweitert werden. Um die zeitliche Änderung der INS-Fehlerzustände im Systemmodell zu formulieren, sind die zeitlichen Ableitungen der Fehlerzustände zu bilden. Die Herleitung dieser Gleichungen wird an dieser Stelle nicht angeführt, da diese einerseits sehr aufwändig und andererseits in der Literatur zu finden ist (Wendel, 2011). Die Erwartungswerte der zeitlichen Ableitung der Fehlerzustände lauten (Groves, 2013, S. 584 ff):

$$\begin{aligned} E(\delta\dot{\boldsymbol{\Psi}}_{nb}^n) &\approx \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \delta\boldsymbol{\Psi}_{nb}^n - E(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n - \boldsymbol{\omega}_{ie}^n) + E(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n - \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \\ &\approx \boldsymbol{\Omega}_{in}^n \delta\boldsymbol{\Psi}_{nb}^n - \boldsymbol{\omega}_{ie} \begin{bmatrix} \sin \hat{\varphi}_b \\ 0 \\ \cos \hat{\varphi}_b \end{bmatrix} \delta\varphi_b - \begin{bmatrix} \frac{\delta v_{eb,E}^n}{R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} \\ -\frac{\delta v_{eb,N}^n}{R_N(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} \\ -\frac{\delta v_{eb,E}^n \tan \hat{\varphi}_b}{R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{v_{eb,E}^n}{(R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b) \cos^2 \hat{\varphi}_b} \delta\hat{\varphi}_b + \begin{bmatrix} -\frac{v_{eb,E}^n}{(R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b)^2} \\ \frac{v_{eb,N}^n}{(R_N(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b)^2} \\ \frac{v_{eb,E}^n \tan \hat{\varphi}_b}{(R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b)^2} \end{bmatrix} \delta\hat{h}_b \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} E(\delta\dot{\mathbf{v}}_{eb}^n) &\approx -(\hat{\mathbf{C}}_b^n \hat{\mathbf{f}}_{ib}^b) \wedge \delta\boldsymbol{\Psi}_{nb}^n - 2(\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{en}^n + 2\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^n) \delta\mathbf{v}_{eb}^n + \hat{\mathbf{v}}_{eb}^n \wedge E(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{en}^n - \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \\ &\quad + 2\hat{\mathbf{v}}_{eb}^n \wedge E(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^n - \boldsymbol{\omega}_{ie}^n) - 2 \frac{g_0(\hat{\varphi}_b)}{r_{eS}^e(\hat{\varphi}_b)} \hat{\mathbf{u}}_D^n \delta\hat{h}_b \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$E(\delta\hat{\phi}_b) = \frac{\delta v_{eb,N}^n}{R_N(\hat{\phi}_b) + \hat{h}_b} - \frac{\hat{v}_{eb,N}^n \delta h_b}{(R_N(\hat{\phi}_b) + \hat{h}_b)^2} \quad (5.8)$$

$$E(\delta\hat{\lambda}_b) = \frac{\delta v_{eb,E}^n}{(R_E(\hat{\phi}_b) + \hat{h}_b) \cos \hat{\phi}_b} + \frac{\hat{v}_{eb,E}^n \sin \hat{\phi}_b \delta \phi_b}{(R_E(\hat{\phi}_b) + \hat{h}_b) \cos^2 \hat{\phi}_b} - \frac{\hat{v}_{eb,E}^n \delta h_b}{(R_E(\hat{\phi}_b) + \hat{h}_b)^2 \cos \hat{\phi}_b} \quad (5.9)$$

$$E(\delta\hat{h}_b) \approx -\delta v_{eb,D}^n \quad (5.10)$$

mit

- $\hat{\mathbf{u}}_D^n$  ... Einheitsvektor des lokalen Navigationskoordinatensystems (Index D... Down, in Nadirrichtung schauend),
- $\mathbf{r}_{eS}^e(\hat{\phi}_b) = R_E(\hat{\phi}_b) \sqrt{\cos^2 \hat{\phi}_b + (1 - e^2)^2 \sin^2 \hat{\phi}_b}$  ...

Geozentrischer Radius an der Oberfläche (Index S ... Surface).

Einsetzen der Gleichungen (5.6) bis (5.10) in Gleichung (4.1) führt zur Systemmatrix  $\mathbf{F}_{INS}^n$ . Die unterschiedlichen Einheiten im Positionsfehler (Breite und Länge in Radiant; Höhe in Meter) können zu Rechenungenauigkeiten führen. Der Positionsfehler in kartesischen Koordinaten (Einheit: Meter) folgt aus der Transformation der Systemmatrix  $\mathbf{F}_{INS}^n$  (Groves, 2013, S. 587):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{INS}^{nC} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \hat{\mathbf{T}}_p^{r(n)} \end{bmatrix} \mathbf{F}_{INS}^n \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \hat{\mathbf{T}}_{r(n)}^p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \hat{\mathbf{T}}_p^{r(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11}^n & \mathbf{F}_{12}^n & \mathbf{F}_{13}^n \\ \mathbf{F}_{21}^n & \mathbf{F}_{22}^n & \mathbf{F}_{23}^n \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{F}_{32}^n & \mathbf{F}_{33}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \hat{\mathbf{T}}_{r(n)}^p \end{bmatrix} \quad (5.11) \end{aligned}$$

mit

$$\hat{\mathbf{T}}_p^{r(n)} = \begin{bmatrix} R_N(\hat{\phi}_b) + \hat{h}_b & 0 & 0 \\ 0 & (R_E(\hat{\phi}_b) + \hat{h}_b) \cos \hat{\phi}_b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{r(n)}^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_N(\hat{\phi}_b) + \hat{h}_b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_E(\hat{\phi}_b) + \hat{h}_b) \cos \hat{\phi}_b} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{11}^n = -[\boldsymbol{\omega}_{in}^n \wedge]$$

$$\mathbf{F}_{12}^n = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} & 0 \\ \frac{1}{R_N(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tan \hat{\varphi}_b}{R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{13}^n = \begin{bmatrix} \omega_{ie} \sin \hat{\varphi}_b & 0 & \frac{\hat{v}_{eb,E}^n}{(R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b)^2} \\ 0 & 0 & \frac{-\hat{v}_{eb,N}^n}{(R_N(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b)^2} \\ \omega_{ie} \cos \hat{\varphi}_b + \frac{\hat{v}_{eb,E}^n}{(R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b) \cos^2 \hat{\varphi}_b} & 0 & \frac{-\hat{v}_{eb,E}^n \tan \hat{\varphi}_b}{(R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b)^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{21}^n = -[(\hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{f}_{ib}^b) \wedge]$$

$$\mathbf{F}_{22}^n = \begin{bmatrix} \frac{\hat{v}_{eb,D}^n}{R_N(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} & -\frac{2\hat{v}_{eb,E}^n \tan \hat{\varphi}_b}{R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} - 2\omega_{ie} \sin \hat{\varphi}_b & \frac{\hat{v}_{eb,N}^n}{R_N(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} \\ \frac{\hat{v}_{eb,E}^n \tan \hat{\varphi}_b}{R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} + 2\omega_{ie} \sin \hat{\varphi}_b & \frac{\hat{v}_{eb,N}^n \tan \hat{\varphi}_b + \hat{v}_{eb,D}^n}{R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} & \frac{\hat{v}_{eb,E}^n \tan \hat{\varphi}_b}{R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} + 2\omega_{ie} \cos \hat{\varphi}_b \\ -\frac{2\hat{v}_{eb,N}^n}{R_N(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} & -\frac{2\hat{v}_{eb,E}^n}{R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} - 2\omega_{ie} \cos \hat{\varphi}_b & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{23}^{nC} = \begin{bmatrix} -\frac{(\hat{v}_{eb,E}^n)^2 \sec^2 \hat{\varphi}_b}{R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} - 2\hat{v}_{eb,E}^n \omega_{ie} \cos \hat{\varphi}_b & 0 & \frac{(\hat{v}_{eb,E}^n)^2 \tan \hat{\varphi}_b}{(R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b)^2} - \frac{\hat{v}_{eb,N}^n \hat{v}_{eb,D}^n}{(R_N(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b)^2} \\ \frac{\hat{v}_{eb,N}^n \hat{v}_{eb,E}^n \sec^2 \hat{\varphi}_b}{R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} + 2\hat{v}_{eb,N}^n \omega_{ie} \cos \hat{\varphi}_b - 2\hat{v}_{eb,D}^n \omega_{ie} \sin \hat{\varphi}_b & 0 & -\frac{\hat{v}_{eb,N}^n \hat{v}_{eb,E}^n \tan \hat{\varphi}_b + \hat{v}_{eb,E}^n \hat{v}_{eb,D}^n}{(R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b)^2} \\ 2\hat{v}_{eb,E}^n \omega_{ie} \sin \hat{\varphi}_b & 0 & \frac{(\hat{v}_{eb,E}^n)^2}{(R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b)^2} + \frac{(\hat{v}_{eb,N}^n)^2}{(R_N(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b)^2} - \frac{2g_0(\hat{\varphi}_b)}{r_{es}^e(\hat{\varphi}_b)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{32}^C = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_N(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b) \cos \hat{\varphi}_b} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{33}^C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\hat{v}_{eb,N}^n}{(R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b)^2} \\ \frac{\hat{v}_{eb,E}^n \sin \hat{\varphi}_b}{(R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b) \cos^2 \hat{\varphi}_b} & 0 & -\frac{\hat{v}_{eb,E}^n}{(R_E(\hat{\varphi}_b) + \hat{h}_b)^2 \cos \hat{\varphi}_b} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 5.2 Beobachtungsmodell

Der Innovationsvektor  $\delta \mathbf{z}_k$  ist definiert als Differenz zwischen der GNSS- und der IN-Lösung. Durch die räumliche Trennung der beiden Navigationssysteme wird die Positions- und Geschwindigkeitslösung an unterschiedlichen Referenzpunkten ausgegeben. Der Vektor zwischen dem Ursprung des b-Systems (Referenzpunkt des INS) und dem Referenzpunkt der GNSS-Antenne  $a$  (z. B. das Phasenzentrum) wird als *lever arm*  $\mathbf{l}_{ba}^b$  bezeichnet. Die Beobachtungsgleichung im lokalen Navigationskoordinatensystem lautet (Groves, 2013, S. 598):

$$\delta \mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_a - \hat{\mathbf{p}}_b - \hat{\mathbf{T}}_{r(n)}^p \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{l}_{ba}^b \\ \hat{\mathbf{v}}_{ea}^n - \hat{\mathbf{v}}_{eb}^n - \hat{\mathbf{C}}_b^n (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \wedge \mathbf{l}_{ba}^b) + \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^n \hat{\mathbf{C}}_b^n \mathbf{l}_{ba}^b \end{bmatrix}_k. \quad (5.12)$$

Die Matrix  $\hat{\mathbf{T}}_{r(n)}^p$  beschreibt die Transformation vom kartesischen zum ellipsoidischen Koordinatensystem (siehe Gleichung (5.11)). Die Beobachtungsmatrix ergibt sich aus der Ableitung der Gleichung (5.12) nach den prädierten Zuständen  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  (Groves, 2013, S. 598):

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{z}(x, t_k)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x=\hat{\mathbf{x}}_k^-}. \quad (5.13)$$

Die in der Rotationsmatrix  $\hat{\mathbf{C}}_b^n$  enthaltenen Orientierungsfehler verursachen, durch den als fehlerfrei angenommenen *lever arm* Geschwindigkeits- und Positionsfehler. Diese Kopplung ist im Allgemeinen sehr schwach und wird zusammen mit der Erdrotation  $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ie}^n$  vernachlässigt. Daraus ergibt sich die vereinfachte Beobachtungsmatrix (Groves, 2013, S. 601):

$$\mathbf{H}_k^n \approx \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

## 5.3 System- und Beobachtungsrauschen

System- und Beobachtungsmodelle können die Realität nur bis zu einem gewissen Grad abbilden, die restlichen Einflüssen werden durch das System- bzw. Beobachtungsrauschen berücksichtigt. Das Rauschen in den IMU-Beobachtungen stellt die Hauptfehlerquelle dar und ist im Gegensatz zu anderen IMU-Fehlerquellen aufgrund des zufälligen Charakters nicht kalibrierbar. Die Kovarianzmatrix des Systemrauschen folgt aus dem integrierten IMU-Beobachtungsrauschen (Groves, 2013, S. 590):

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{INS}^n &= \left( \mathbf{T}_{k-1} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{rg} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}_{ra} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{T}_{k-1}^T \right) \boldsymbol{\tau} \\ &= \left( \mathbf{T}_{k-1} \begin{bmatrix} \left( \sigma_{rg}^2 \frac{1}{f} \right) \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \left( \sigma_{ra}^2 \frac{1}{f} \right) \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{T}_{k-1}^T \right) \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (5.15)$$

mit

- $\mathbf{T}_{k-1}$  ... Transitionsmatrix (siehe Gleichung (4.10)),
- $\mathbf{S}_{rg}, \mathbf{S}_{ra}$  ... Rauschdichte der IMU-Beobachtungen, (g ... Drehraten und a ... Beschleunigungen),
- $\sigma_{rg}^2, \sigma_{ra}^2$  ... Varianz der IMU-Beobachtungen,
- $f$  ... Frequenz der IMU-Beobachtungen,
- $\tau$  ... Integrationsintervall.

Für Integrationsintervalle unter 0,02 Sekunden gilt die Vereinfachung (Groves, 2013, S. 592):

$$\mathbf{Q}_{INS}^n \approx \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{rg} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}_{ra} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau}. \quad (5.16)$$

Die Integration der verrauschten IMU-Beobachtungen verursacht ein sog. *random walk* (zufällige Schrittfolge) der Orientierungs- und der Geschwindigkeitsfehler. Die Kovarianzmatrix des Beobachtungsrauschen wird als konstant angenommen und beinhaltet nur Hauptdiagonalelemente (Groves, 2013, S. 91):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_p^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \sigma_v^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

mit

- $\sigma_p^2, \sigma_v^2$  ... Varianz der GNSS-Position und -Geschwindigkeit.

## 6 Simulationsumgebung

Die Implementierung des in Abbildung 5.1 dargestellten INS/GNSS-Integrationsalgorithmus, die im Forschungsbereich Ingenieurgeodäsie der TU Wien durchgeführt wurde, führte zur Entwicklung eines Softwarepaketes. Die primäre Aufgabe dieses Softwarepaketes ist die Schätzung von UAV-Posen anhand von IMU- und GNSS-Beobachtungen. Die Überprüfung der Implementierung und die Untersuchung der geschätzten Posen sprechen für die Entwicklung einer Simulationsumgebung innerhalb des Softwarepaketes. Diese ist zum Teil im Rahmen dieser Arbeit entstanden und umfasst folgende Aspekte:

- Erstellung von Flugszenarien,
- Berechnung/Ableitung von IMU- und GNSS-Beobachtungen aus Flugszenarien oder aus realen Flügen,
- Simulation von sensorspezifischen Beobachtungsfehlern,
- Durchführung von Monte-Carlo-Simulationen.

Im Zuge dieser Arbeit wurde nur das zufällige Rauschen der Beobachtungen implementiert. Unter dem Begriff Simulationsdurchlauf ist das Verrauschen der Beobachtungen und die darauffolgende Schätzung der Pose zu verstehen. Der Begriff Pose fasst hier die folgenden neun Parameter zusammen:

- Position (ellipsoidische Länge, Breite und Höhe),
- Geschwindigkeit (in Nord-, Ost- und Nadirrichtung),
- Orientierung (Roll-, Nick- und Gierwinkel).

Die Schätzung der Pose wird im lokalen Navigationskoordinatensystem anhand des im Kapitel 5 erwähnten Error-State-Space-Kalman-Filters (kurz ESS-KF) durchgeführt.

Als erstes werden in diesem Kapitel die Flugszenarien präsentiert. Anschließend wird anhand der inversen Trägheitsnavigation veranschaulicht, wie aus einer gegebenen Pose eines Flugszenarios oder eines realen Fluges IMU- und GNSS-Beobachtungen abgeleitet werden können. Nachfolgend wird näher auf die verwendete Monte-Carlo-Simulation eingegangen.

## 6.1 Flugszenarien

Die im Rahmen dieser Arbeit erstellten Flugszenarien beschreiben trivialste Flugmanöver oder Flugphasen eines UAVs und haben den Zweck, den Einfluss von Flugmanövern auf die Schätzung der Pose zu untersuchen. Zudem werden die Flugszenarien als Referenz-Pose bei der Untersuchung der Simulationsergebnisse verwendet. Die Diskussion der Simulationsergebnisse ist Bestandteil des 7. Kapitels. Die Flugszenarien sind in drei Kategorien unterteilt:

- statische Phase (in Ruhe am Boden oder in der Luft),
- geradlinige gleichförmige Bewegung (konstante Geschwindigkeit),
- beschleunigte Bewegung.

In den folgenden Abschnitten werden die verwendeten Flugszenarien detailliert beschrieben. Dabei ist die initiale Position für alle Flugszenarien gleich. Sowohl bei der gleichförmigen als auch bei der beschleunigten Bewegung ist keine Startphase vom Boden aus vorgesehen, sondern die Initialisierung findet bereits in der Luft statt. Eine finale Zusammenstellung aller Flugszenarien ist am Ende dieses Kapitels in Tabelle 6.1 dargestellt.

### 6.1.1 Flugszenario Nr. 1: Statische Phase

Dieses Szenario beschreibt keinen eigentlichen Flug. Die Pose des UAVs ist vielmehr durch eine andauernde statische Phase der initialen Zustände gekennzeichnet. Alle Orientierungsparameter sind mit  $0^\circ$  initialisiert, d. h., das körperfeste Koordinatensystem des UAVs weist keine Verdrehung in Bezug zum lokalen Navigationskoordinatensystem auf (die  $x^b$ - und die  $x^n$ -Achse sind parallel in Nordrichtung ausgerichtet). Die statische Phase dauert 30 Minuten.

### 6.1.2 Flugszenario Nr. 2: Gleichförmige Bewegung

In diesem Flugszenario ist die Bewegung des UAVs durch eine andauernde Phase konstanter Geschwindigkeit ( $5 \text{ ms}^{-1}$ ) in Nordrichtung vorgegeben. Das bedeutet, dass es während der siebenminütigen Flugzeit keine Veränderung der ellipsoidischen Länge und Höhe gibt. Die Orientierung des UAVs beträgt über die ganze Flugzeit in einem Flugszenario  $0^\circ$  und in einem anderen  $30^\circ$ . Durch die erhöhte Bewegungsfreiheit von UAVs im Vergleich zu anderen mobilen Plattformträger ist eine gleichzeitige Verdrehung des körperfesten Koordinatensystems zur Hauptbewegungsrichtung möglich. Bei bodengestützten Systemen gilt beispielsweise die Einschränkung, dass die Verdrehung zwischen Hauptbewegungsrichtung und dem körperfesten Koordinatensystem konstant ist. Roll- und Nickwinkel sind jeweils auf  $0^\circ$  fixiert.

### 6.1.3 Flugszenario Nr. 3: Beschleunigte Bewegung

Grundlage der beschleunigten Flugszenarien sind die vorgegebenen horizontalen Beschleunigungen. Davon ausgehend wird durch das einfache bzw. zweifache Integrieren auf die Geschwindigkeit bzw. auf die Position des UAVs geschlossen. Die Berechnung ist analog zu den Gleichungen (3.11) und (3.13).

Die Flugszenarien sind durch unterschiedliche horizontale Beschleunigungsmuster beschrieben, die sich durch den zeit- und winkelabhängigen Verlauf der Beschleunigungen unterscheiden. Die drei verwendeten Beschleunigungsmuster sind in Abbildung 6.1 dargestellt. Die hier vorgestellten Flugszenarien haben alle eine Flugzeit von 7 Minuten.

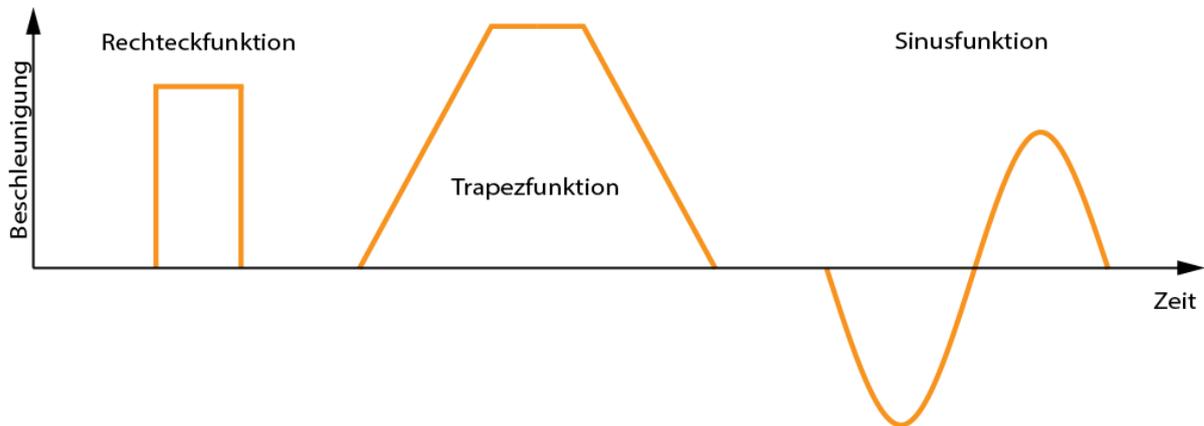


Abbildung 6.1: Horizontale Beschleunigungsmuster

Bei der Rechteckfunktion treten die Beschleunigungen schlagartig auf, halten eine gewisse Zeit an und bauen genauso schnell ab, wie sie eingesetzt haben. Die Beschleunigungsamplituden sind unterschiedlich und betragen zwischen  $0,2 \text{ ms}^{-2}$  und  $1 \text{ ms}^{-2}$ .

Die zweite Art von Beschleunigungsmustern (Trapezfunktion) unterscheidet sich von der Impulsfunktion nur durch den linearen An- und Abstieg der Beschleunigungen.

Bei den bisherigen Beschleunigungsmustern wurden die beschleunigten Bewegungen immer entlang der Nordrichtung mit einer Orientierung von  $0^\circ$  vollzogen.

Der sinusförmige Beschleunigungsverlauf wurde erzielt, indem das unbemannte Luftfahrzeug eine Kreistrajektorie mit konstanter Höhe flog. Durch die Bewegung entlang einer Kreistrajektorie verteilen sich die Beschleunigungen und die Geschwindigkeiten sinusförmig über die auflösenden  $x^n$ ,  $y^n$ -Achsen des lokalen Navigationskoordinatensystems. Die bei einer Kreisbewegung auftretenden Beschleunigungen können mithilfe der Theorie von rotierenden Starrkörpern berechnet werden. Bei der Bewegung eines Körpers um eine feste Achse wird ein Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a}$  erzeugt (Mahnken, 2012):

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= R\dot{\omega}\mathbf{e}_\varphi - R\omega^2\mathbf{e}_Z \\ &= \mathbf{a}_\varphi - \mathbf{a}_Z\end{aligned}\quad (6.1)$$

mit

- $R$  ... Radius,
- $\omega$  ... erste Ableitung des Winkels  $\varphi$  (Winkelgeschwindigkeit),
- $\dot{\omega}$  ... zweite Ableitung des Winkels  $\varphi$  (Winkelbeschleunigung),
- $\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_Z$  ... Einheitsvektoren.

Die Normalbeschleunigung  $a_z$  zeigt in Richtung des Zentrums und die Tangentialbeschleunigung  $a_\varphi$  steht senkrecht zum Radiusvektor (Abbildung 6.2). Vorausgesetzt wird hier eine konstante Winkelgeschwindigkeit, das bedeutet, dass die Winkelbeschleunigung und somit auch die Tangentialbeschleunigung entfallen. Der Radius der Kreistrajektorie ist auf zehn Meter fixiert und die Winkelgeschwindigkeit beträgt 3 Grad pro Sekunde.

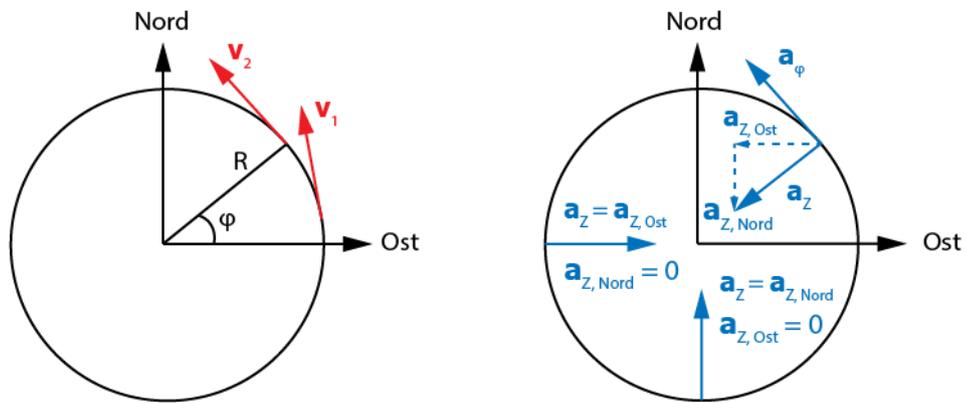


Abbildung 6.2: Parameter einer Kreisbewegung mit fester Drehachse

Tabelle 6.1 fasst die Eigenschaften der verwendeten Flugszenarien zusammen. Für die beschleunigten Flugszenarien gilt der Initialisierungszustand so lange, bis das Bewegungsmuster eingreift. Beispielsweise beträgt die Geschwindigkeit während des Flugszenarios Nr. 3.1 von Anfang bis zur ersten Minute  $5 \text{ ms}^{-1}$  in Nordrichtung. Anschließend erfolgt eine Beschleunigungsphase von 20 Sekunden in Nordrichtung, wodurch sich die Geschwindigkeit entsprechend ändert.

Tabelle 6.1: Eigenschaften der Flugszenarien

Flugszenario Nr.	Initialisierung		Bewegungsmuster	Flugzeit in Minuten
	Geschwindigkeit [Nord, Ost, Höhe] in [m/s]	Orientierung [Roll, Nick, Gier] in [°]		
1	[0, 0, 0]	[0, 0, 0]	Statisch	30
2.1	[5, 0, 0]	[0, 0, 0]	Konstante Geschwindigkeit	7
2.2		[0, 0, 30]		
3.1		[0, 0, 0]	1 $\text{m/s}^2 \rightarrow 01:00 - 01:20$ -1 $\text{m/s}^2 \rightarrow 02:20 - 02:40$	
3.2			0,2 $\text{m/s}^2 \rightarrow 03:00 - 04:00$	
3.3			1 $\text{m/s}^2 \rightarrow 02:00 - 02:05$ -1 $\text{m/s}^2 \rightarrow 02:15 - 02:20$ 1 $\text{m/s}^2 \rightarrow 02:30 - 02:35$ -1 $\text{m/s}^2 \rightarrow 02:45 - 02:50$  analog dazu 04:00 – 04:50	
			3.4	
3.5			3 $^\circ/\text{s} \rightarrow 02:00 - 04:00$	

## 6.2 Inverse Trägheitsnavigation

Den Schwerpunkt der Simulationsumgebung bildet die inverse Trägheitsnavigation, auch inverse inertielle Navigation genannt. Diese Invertierung ermöglicht es, anhand einer gegebenen Pose IMU- und GNSS-Beobachtungen durch Umkehrung der Navigationsgleichungen zu berechnen bzw. abzuleiten. Die hergeleiteten inversen Navigationsgleichungen im lokalen Navigationskoordinatensystem lauten:

$$\Omega_{ib}^b = \frac{\ln\left(\frac{\mathbf{C}_b^n(t+\tau) + \{\exp[(\Omega_{ie}^n + \Omega_{en}^n)\tau] - I_3\}\mathbf{C}_b^n(t)}{\mathbf{C}_b^n(t)}\right)}{\tau} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ib}^n &= \frac{\mathbf{v}_{eb}^n(t+\tau) - \mathbf{v}_{eb}^n(t)}{\tau} - \mathbf{g}_b^n + (\Omega_{en}^n(t) + 2\Omega_{ie}^n(t))\mathbf{v}_{eb}^n(t) \\ \mathbf{f}_{ib}^b &= 2[\mathbf{C}_b^n(t+\tau) + \mathbf{C}_b^n(t)]^{-1}\mathbf{f}_{ib}^n \end{aligned} \quad (6.3)$$

mit

- $\Omega_{ib}^b$  ... schiefsymmetrische Matrix der Drehraten,
- $\mathbf{f}_{ib}^n, \mathbf{f}_{ib}^b$  ... Vektoren der Beschleunigungen,
- $\mathbf{C}_b^n$  ... Rotationsmatrix,
- $\Omega_{ie}^n, \Omega_{en}^n$  ... Erdrotationsterm und Transportrate,
- $\mathbf{v}_{eb}^n$  ... Geschwindigkeitsvektor,
- $\mathbf{g}_b^n$  ... lokaler Schwerebeschleunigungsvektor.

Die Drehraten und die Beschleunigungen bilden zusammen die berechneten IMU-Beobachtungen und wurden als erstes zur Überprüfung der Implementierung von Algorithmen im Softwarepaket benutzt. Die IMU-Beobachtungen wurden als Eingabewerte in den IN-Algorithmus eingeführt und die dadurch bestimmte Pose wurde mit der gegebenen Pose verglichen. In Abbildung 6.3 ist das Ergebnis einer solchen Überprüfung anhand der Daten eines realen Fluges dargestellt. Die beiden Posen sind überlappend, d.h. die berechneten IMU-Beobachtungen stimmen mit der gegebenen Pose überein und die Algorithmen der IN-Rechnung sind richtig implementiert. Anschließend an diese Überprüfung wurden die GNSS-Beobachtungen (Position und Geschwindigkeit) aus der berechneten Pose abgeleitet.

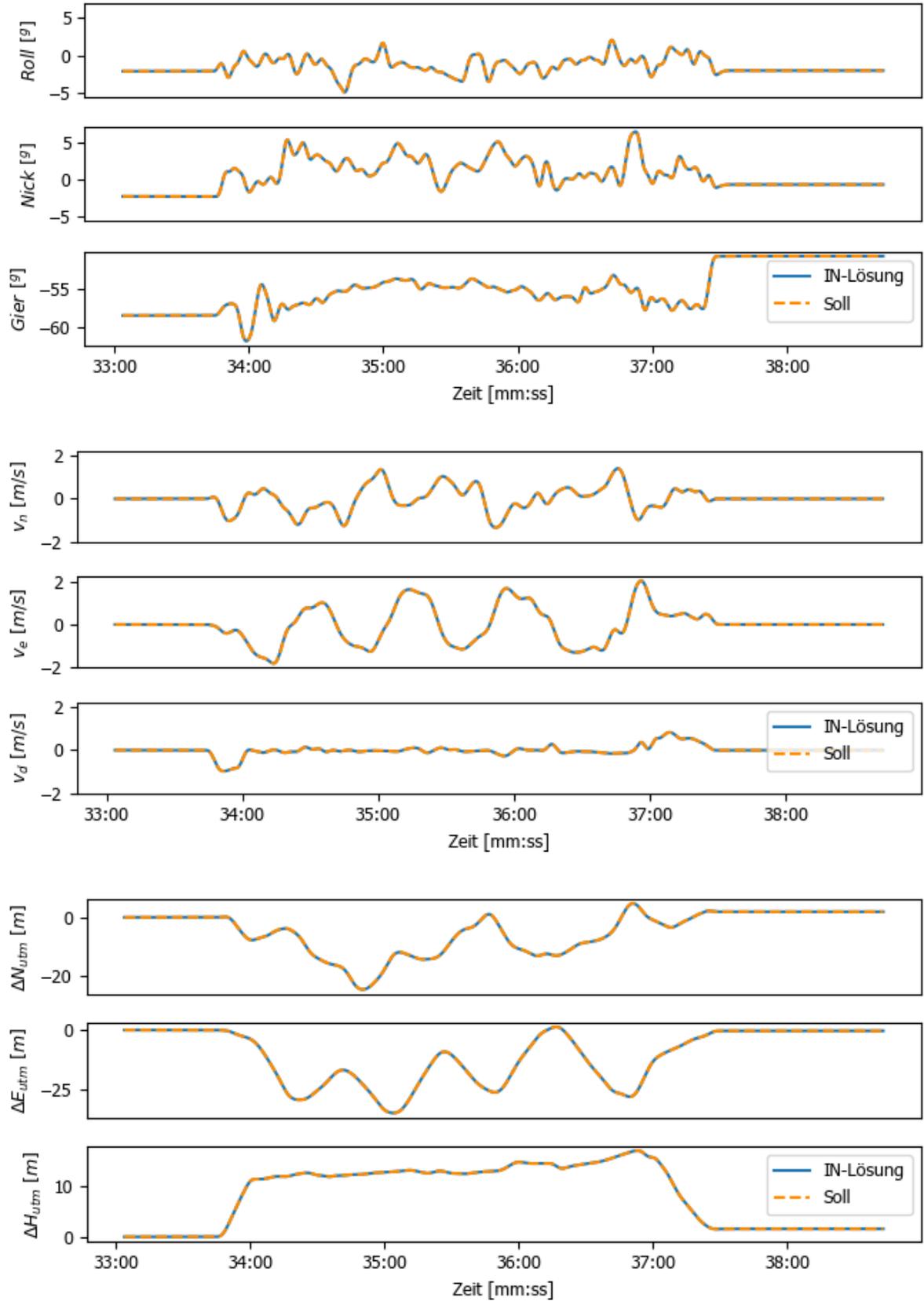


Abbildung 6.3: Vergleich der Soll-Pose mit der aus den berechneten IMU-Beobachtungen und dem IN-Algorithmus bestimmten Pose;  
Daten eines realen Fluges

## 6.3 Verrauschen von IMU- und GNSS-Beobachtungszeitreihen

Die berechneten bzw. abgeleiteten IMU- und GNSS-Beobachtungen wurden mit einem unvermeidbaren sensor-spezifischen Fehler, dem zufälligen Rauschen, verändert. Dessen Einfluss auf die Schätzung der Pose im ESS-KF wurde untersucht und evaluiert (siehe Kapitel 7). Das zufällige IMU-Rauschen wird üblicherweise nicht mittels einer Standardabweichung ausgedrückt, sondern mithilfe der spektralen Leistungsdichte des Rauschens (kurz Rauschdichte) oder deren Wurzel. In der englischsprachigen Literatur sind diese beiden Begriffe unter *power spektral density* (kurz *PSD*) bzw. *root PSD* bekannt. Die Umrechnung auf die Standardabweichung  $\sigma$  erfolgt mittels:

$$\begin{aligned}\sigma &= PSD \cdot f \\ \text{oder} \\ \sigma &= \text{root PSD} \cdot \sqrt{f}\end{aligned}\quad (6.4)$$

mit

- $f$  ... Frequenz in Hertz [Hz].

Als Orientierungsmaß für das Simulieren des zufälligen IMU-Rauschens wurden die Herstellerangaben der IMU „MTi-G-710“ der Firma Xsens verwendet (Tabelle 6.2). Der Grund hierfür liegt darin, dass diese IMU Bestandteil der Ausstattung des Forschungsbereichs Ingenieurgeodäsie der TU Wien ist (Abbildung 6.4). Das zufällige GNSS-Rauschen orientiert sich an der RTK-Genauigkeit. Die Messfrequenz der IMU- und der GNSS-Beobachtungen liegt bei 200 Hz bzw. 1 Hz.

Die Standardabweichung der Drehraten können direkt mittels der Gleichung (6.4) berechnet werden, während für die Standardabweichung der Beschleunigungen der Term  $\mu g$  noch in  $\text{ms}^{-2}$  umgewandelt werden muss:

$$1 \mu g = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (6.5)$$

Die verwendeten Standardabweichungen für die Simulation des zufälligen Beobachtungsrauschens sind für die drei Sensoren in Tabelle 6.2 zusammengefasst. In Abbildung 6.5 sind exemplarisch fehlerfreie und verrauschte Drehraten dargestellt.



Abbildung 6.4: Xsens MTi-G-710 (Xens Products, 2019)

Tabelle 6.2: IMU- und GNSS-Standardabweichung des zufälligen Beobachtungsrauschens (Datenblatt MTi-G-710, Xens Products, 2019)

Drehraten		Beschleunigungen		GNSS
root PSD in $\left[\frac{\circ}{\sqrt{\text{Hz}}}\right]$	$1\sigma$ in $\left[\frac{\circ}{\text{s}}\right]$ $1\sigma$ in $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$	root PSD in $\left[\frac{\mu\text{g}}{\sqrt{\text{Hz}}}\right]$	$1\sigma$ in $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$	Position: $1\sigma$ in $[\text{m}]$ Geschw.: $1\sigma$ in $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$
0,01	0,14142... 0,00247...	80	0,01109...	0,03 0,02

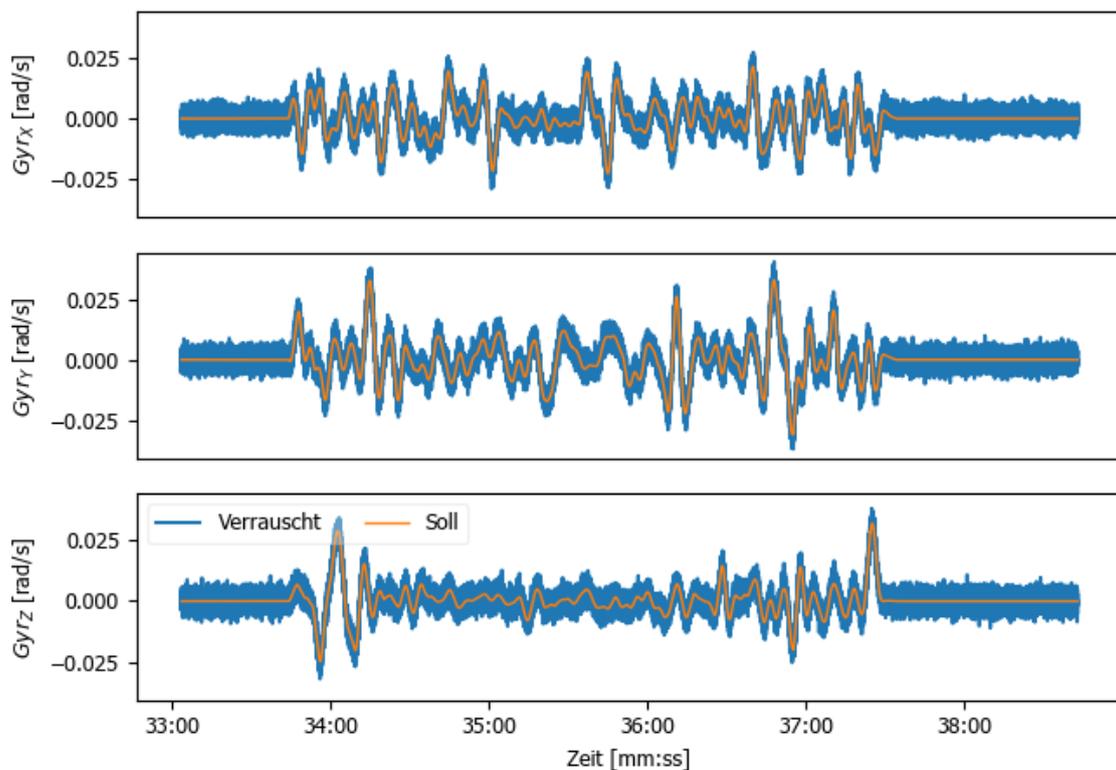


Abbildung 6.5: Soll-Drehraten und verrauschte Drehraten; Daten eines realen Fluges

## 6.4 INS/GNSS-Simulation anhand der Monte-Carlo-Methode

Im vorherigen Kapitel wurden bereits verrauschte IMU- und GNSS-Beobachtungen erwähnt. Dabei wurde pro Epoche zu den berechneten Soll-Beobachtungen die durch die Standardabweichung vorgegebene, standardnormalverteilte Größe (das Rauschen) addiert. Wahrscheinlicher sind dabei Werte aus der Mitte der Verteilung. Dieser Prozess (Verrauschen der Beobachtungen) ist in Abbildung 6.6 graphisch dargestellt und ergibt bei jeder Wiederholung unterschiedliche verrauschte Beobachtungen.

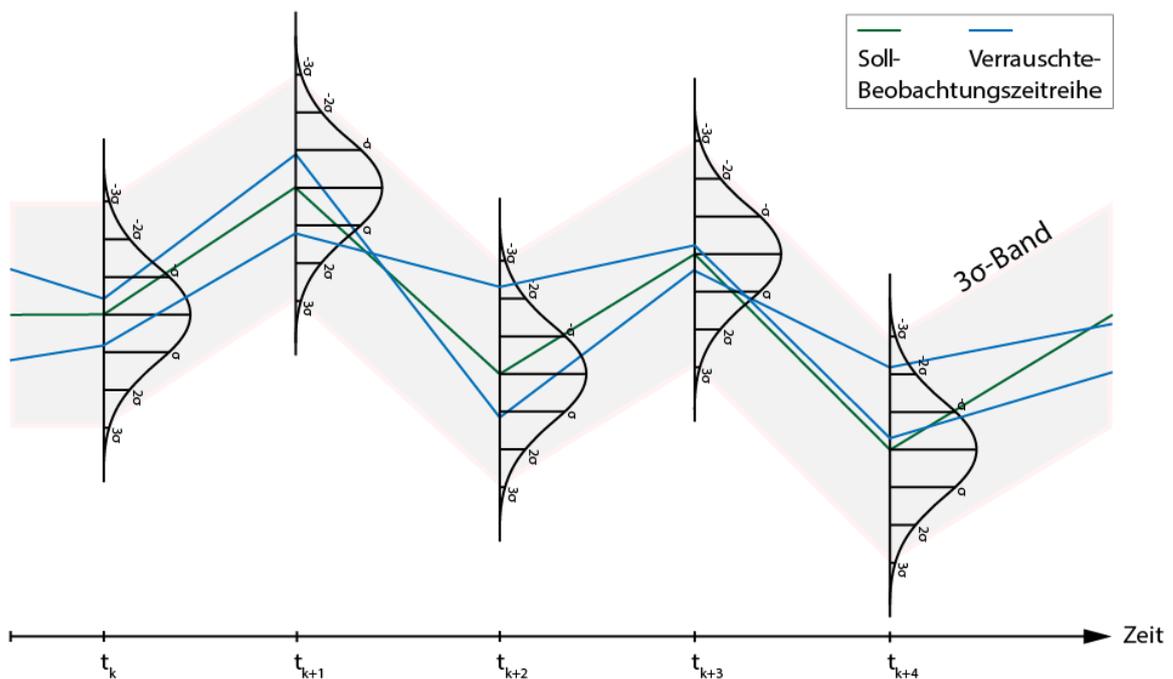


Abbildung 6.6: Verrauschen einer Beobachtungszeitreihe mittels Standardnormalverteilung

Die zentrale Frage, die sich bei der Interpretation der Simulationsergebnisse stellt, ist, wie sich die verrauschten Beobachtungen in der Zustandsschätzung auswirken (Brown & Hwang, 2012, S. 105). Anders ausgedrückt: Welche Verteilung nehmen die geschätzten Zustände an?

Da sich aus einem Simulationsdurchlauf die Verteilung der Zustände nicht bestimmen lässt, wird dieser  $N$  mal wiederholt. Erst bei einer großen Anzahl an Wiederholungen bilden die verrauschten Beobachtungen einen genügend großen Teil der Verteilung ab ( $3\sigma$ -Band in Abbildung 6.6). Die  $N$  durchgeführten Simulationsdurchläufe werden als Ensemble und die daraus (pro Epoche) bestimmte Standardabweichung (Streuungsparameter der Verteilung) als Ensemble-Standardabweichung bezeichnet. Bei einer geringen Anzahl von Wiederholungen kommt es zu einer zu optimistischen Bestimmung der Ensemble-Standardabweichung, da die Randbereiche der gewählten Verteilung nicht abgedeckt sind.

Diese Methode ist eine von vielen, die unter dem Namen Monte-Carlo-Methoden (kurz MC-Methoden) bekannt sind. Eine ausführliche Beschreibung dieser Methoden findet man beispielsweise in (Kalos & Whitlock, 1986). In vielen Disziplinen werden MC-Methoden verwendet,

da eine Formulierung des Kovarianzfortpflanzungsgesetzes zu komplex ist. Wie aus Kapitel 4 und 5 hervorgeht, ist dies hier nicht der Fall. Diese Methode wird hier verwendet, um die aus der INS/GNSS-Integration geschätzte Standardabweichung der (Fehler-)Zustände mit der Ensemble-Standardabweichung zu vergleichen. Des Weiteren kann die dreifache Standardabweichung eines (Fehler-)Zustandes mit dem entsprechenden Ensemble-Zustand dargestellt werden. In diesem Fall gilt für normalverteilte Größen, dass zirka 99 % der Realisierungen innerhalb der dreifachen Standardabweichung liegen müssen. Die Ensemble-Zustände sind keine normalverteilten Größen, da bereits die Navigationsgleichungen nichtlineare Gleichungen enthalten. Nichtsdestotrotz können somit Eigenschaften der Ensemble-Zustände analysiert und diskutiert werden.

Aufgrund der großen Anzahl an Simulationsdurchläufen, der hohen Messfrequenz (200 Hz) und der gleichzeitigen aufwändigen Berechnung sind MC-Methoden äußerst rechenintensiv. Daher wurde im Rahmen dieser Arbeit ein zusätzlicher Programmcode implementiert, welcher die Simulationen auf die vorhandenen Prozessoren verteilt (sog. *parallel computing*). Dadurch konnte die Rechenzeit auf ein Minimum reduziert werden.

## 7 Simulationsergebnisse

Inhalt dieses Kapitels ist die Präsentation der Simulationsergebnisse, wobei der Fokus auf den Orientierungsparametern liegt. Insbesondere ist der Gierwinkel von Interesse, da dieser sich im Vergleich zu den anderen beiden Orientierungsparametern (Roll- und Nickwinkel) schlecht bestimmen lässt. Die Ursache dafür ist verschiedenen Veröffentlichungen zufolge [(Hong, Lee, Chun, Kwon, & Speyer, 2005), (Rhee, Abdel-Hafez, & Speyer, 2004)] die fehlende Beobachtbarkeit des Gierwinkel-Fehlerzustandes. Die Analyse der Beobachtbarkeit wird üblicherweise anhand eines steuerungstheoretischen Ansatzes durchgeführt (Bar-Itzhack & Goshen-Meskin, 1992). Um den Gierwinkel-Fehlerzustand beobachten zu können, werden sog. „acceleration jerks“ (Du, Sun, & Gao, 2017), also ruckartige Beschleunigungen, vorgeschlagen.

Die Vorgehensweise dieser Arbeit stellt hingegen eine detaillierte Untersuchung ausgewählter Matrizen und Vektoren der INS/GNSS-Integration dar, um den Einfluss der verrauschten Beobachtungen und der Flugszenarien zu analysieren.

Vor der eigentlichen Präsentation der Simulationsergebnisse sollen noch einige wichtige Aspekte des ESS-KF erläutert werden. Die Zustandsschätzung im ESS-KF ist wie folgt formuliert (siehe Gleichung (4.17)):

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}_k^+ &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \delta \hat{\mathbf{x}}_k \\
 &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \delta \mathbf{z}_k \\
 &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{INS} - \mathbf{p}_{GNSS} \\ \mathbf{v}_{INS} - \mathbf{v}_{GNSS} \end{bmatrix}_k \right)
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

mit

- $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  ... aufdatierter Zustandsvektor (9x1),
- $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  ... prädizierter Zustandsvektor (9x1),
- $\delta \hat{\mathbf{x}}_k$  ... geschätzter Fehlerzustandsvektor (9x1) (auch Zuschläge genannt),
- $\mathbf{K}_k$  ... Verstärkungsmatrix (9x6),
- $\delta \mathbf{z}_k$  ... Innovation (6x1).

Die Innovation in Gleichung (7.1) enthält Informationen über Position und Geschwindigkeit, nicht aber über die Orientierung. Erst durch die Multiplikation mit der Verstärkungsmatrix ergeben sich auch für die Orientierung geschätzte Fehlerzustände. Bei näherer Betrachtung des Aufbaus der Verstärkungsmatrix (siehe Gleichung (4.14)) erschließt sich, dass die prädizierte Kovarianzmatrix der (Fehler-)Zustände maßgeblich involviert ist. Heunecke (1995) hat das Entstehen von Zuschlägen für nichtbeobachtbare Zustände wie folgt beschrieben:

Von entscheidender Bedeutung bei der Ermittelbarkeit beziehungsweise Identifizierbarkeit der im allgemeinen nichtbeobachtbaren und zumindest anfangs untereinander unkorrelierten Prozeßkoeffizienten  $\mathbf{x}_{k,k+1}$  ist die JACOBI-Matrix  $\mathbf{T}_{gp,k+1,k}$ . Diese Matrix

bestimmt das Entstehen von algebraischen Korrelationen zwischen der physikalischen und der geometrischen Partition des Zustandsvektors.

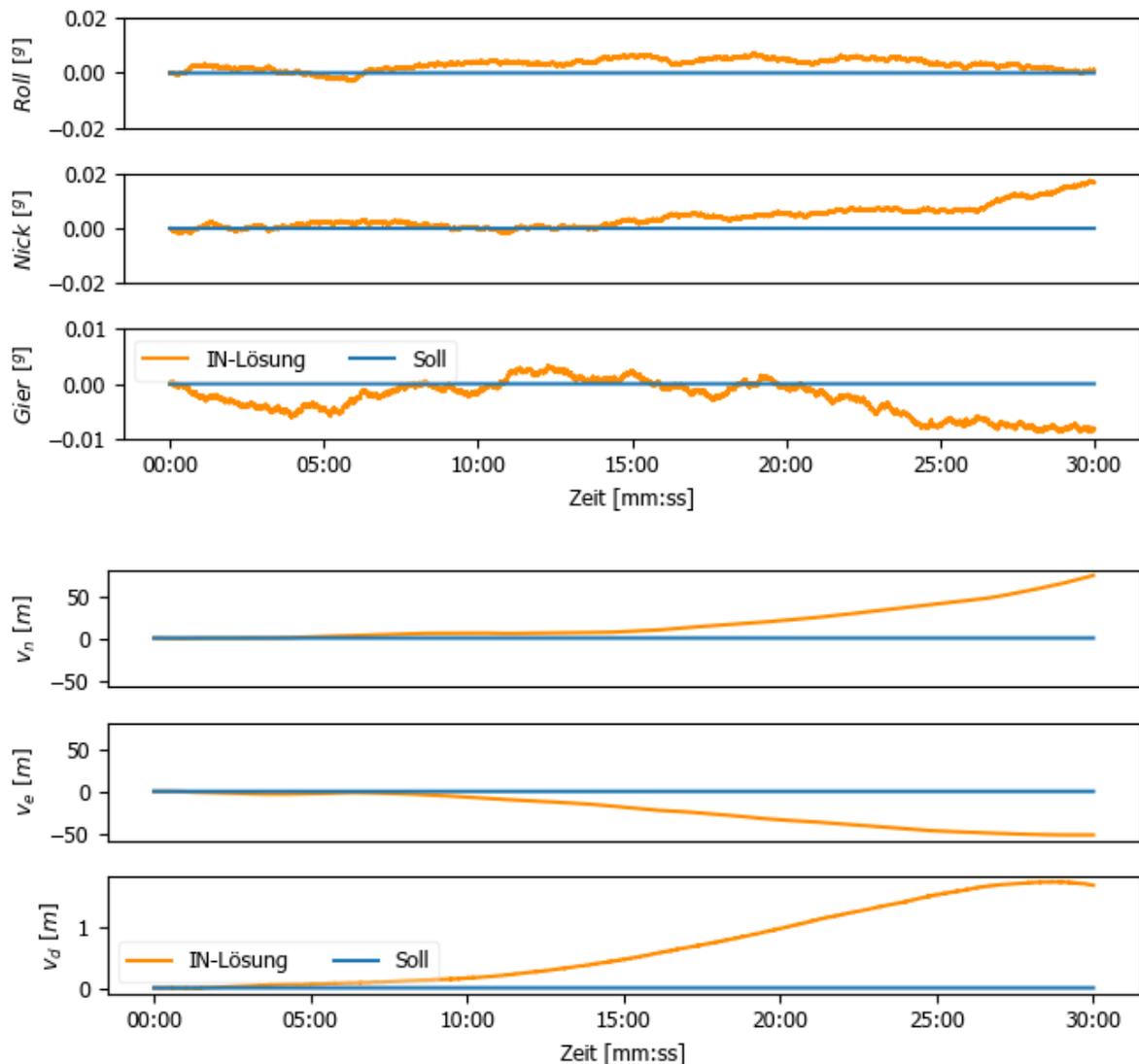
Das bedeutet, dass die Fortschreibung durch die Transitionsmatrix (auch JACOBI-Matrix genannt) zu Korrelationen in der prädizierten Kovarianzmatrix der (Fehler-)Zustände führt (siehe Gleichung (4.12)). Diese Korrelationen bilden sich anschließend in der Verstärkungsmatrix ab und stellen die Grundlage für die Zuschläge von nichtbeobachtbaren Zuständen dar.

Wie oft die Fehlerzustände geschätzt werden, hängt von der Messfrequenz der GNSS-Beobachtungen ab. Diese ist für alle hier durchgeführten Simulation auf 1 Hz festgelegt, womit der ESS-KF einmal pro Sekunde zum Einsatz kommt. Dazwischen erfolgt die Bestimmung der Pose ausschließlich durch die Fortführung der IN-Rechnung.

In Abschnitt 7.1 soll die Problematik bezüglich der IN-Lösung und des Gierwinkels aufgezeigt werden, während sich die Abschnitte 7.2 bis 7.5 mit der Untersuchung der Eigenschaften von Matrizen und Vektoren (Korrelations-, Verstärkungsmatrizen, geschätzte Fehlerzustände etc.) in Bezug auf die erstellten Flugszenarios befassen. Um weiterhin für einen guten Überblick zu sorgen, beschränkt sich die Diskussion weitgehend auf den Nick- und den Gierwinkel sowie die Geschwindigkeitskomponenten. Der Vollständigkeit halber sind weitere Abbildungen im Anhang hinterlegt. Die Erläuterung der Kopplung der Fehlerzustände bildet den Gegenstand des Abschnittes 7.6. Abschließend soll im letzten Abschnitt die geschätzten Gierwinkel-Standardabweichungen in Bezug auf die Variation der a priori stochastischen und funktionalen Eigenschaften der Beobachtungen diskutiert werden.

## 7.1 IN- und INS/GNSS-Lösung

In Abbildung 7.1 ist die Soll-Pose und die IN-Lösung eines Simulationsdurchlaufs für das Flugszenario Nr. 1 dargestellt, wobei die Position um die fehlerfreie initiale Position reduziert wurde. Im statischen Fall ist die IN-Lösung durch einen Drift aller Zustände gekennzeichnet. Die Driftrate ist allerdings nicht für alle Zustände gleich stark, sondern von der jeweiligen Fehlerfortpflanzung abhängig. Eine detaillierte Beschreibung der Fehlerfortpflanzung von IN-Systemen würde den Rahmen dieser Arbeit überschreiten. Bei Groves (2013, S. 203 ff.) findet man jedoch eine ausführliche Auseinandersetzung mit diesem Thema, weshalb an dieser Stelle auf seine Untersuchungen verwiesen werden soll. Das Abdriften der IN-Lösung ist durch die Integration der IMU-Beobachtungsfehler bedingt (hier zufälliges Rauschen). Das bedeutet, dass die IN-Lösungen immer einen Drift aufweisen, wenn Beobachtungsfehler vorhanden sind. Zusätzlich gilt, dass unabhängig von Flugmanövern, wie beispielsweise Beschleunigungen ohne Stützung von GNSS-Beobachtungen, die Größenordnung der Orientierungsabweichung zum Soll ident sind.



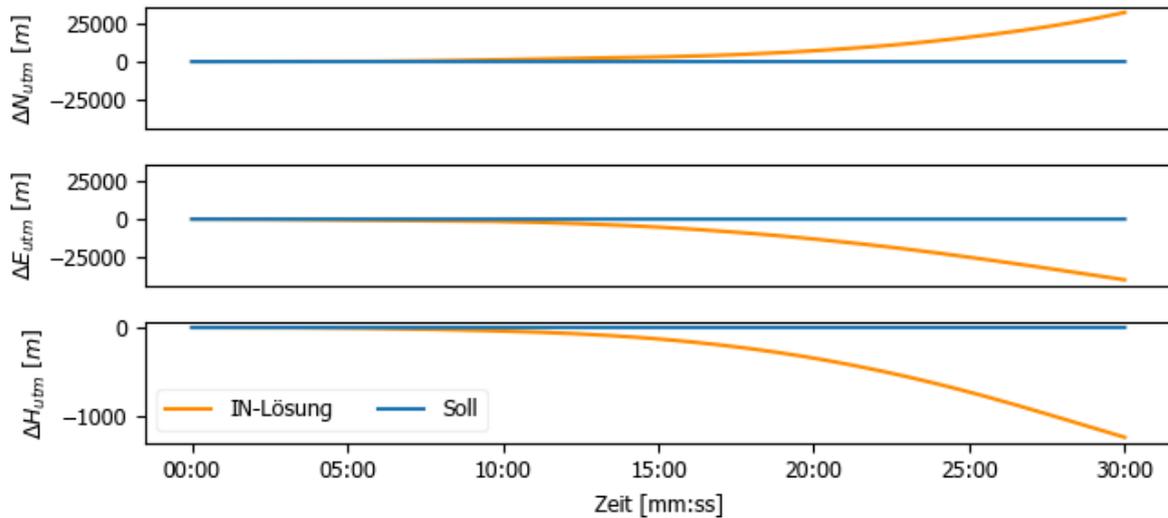


Abbildung 7.1: Vergleich der Soll-Pose mit der aus verrauschten IMU-Beobachtungen und dem IN-Algorithmus bestimmten Pose (IN-Lösung); Reduzierung der Positionen mittels initialer Position; Flugszenario Nr. 1

Wird die IN-Lösung durch GNSS-Beobachtungen (INS/GNSS-Integration) gestützt, so wird der Drift einiger geschätzter Zustände abgefangen (Abbildung 7.2). Problematisch ist jedoch weiterhin die Schätzung der folgenden Zustände: Gierwinkel, Nadirkomponente der Geschwindigkeit und Höhenkomponente der Position. Die Nadirkomponente der Geschwindigkeit und die Höhenkomponente der Position weisen über die dreißigminutige Flugzeit einen minimalen Drift auf. Da es sich bei diesen beiden um beobachteten Größen handelt, wird vermutlich deren Drift im Vergleich zu dem des Gierwinkels geringere Ausmaße annehmen. Unter dieser Annahme, wird der Fokus der folgenden Untersuchung auf die Schätzung des Gierwinkels gelegt. Wie bereits in der Einleitung zu diesem Kapitel angedeutet, kann der Drift im Gierwinkel erst durch Beschleunigungen abgefangen werden. Abbildung 7.3 zeigt Soll-Ist-Abweichungen des geschätzten Gierwinkels für das Flugszenario Nr. 3.1. Der Effekt der horizontalen Beschleunigungen auf die Abweichungen des Gierwinkels ist nicht eindeutig zu erkennen, jedoch werden entgegen der Erwartungen die Abweichungen während der Beschleunigungsphasen zeitweise größer. Ein ähnliches Verhalten der Soll-Ist-Abweichungen des Gierwinkels wurde auch für die restlichen Flugszenarien mit horizontalen Beschleunigungen beobachtet.

Um den Effekt der Beschleunigungen gezielter zu analysieren, erfolgte in einem ersten Schritt eine detaillierte Untersuchung der prädizierten Kovarianzmatrix der (Fehler-)Zustände.

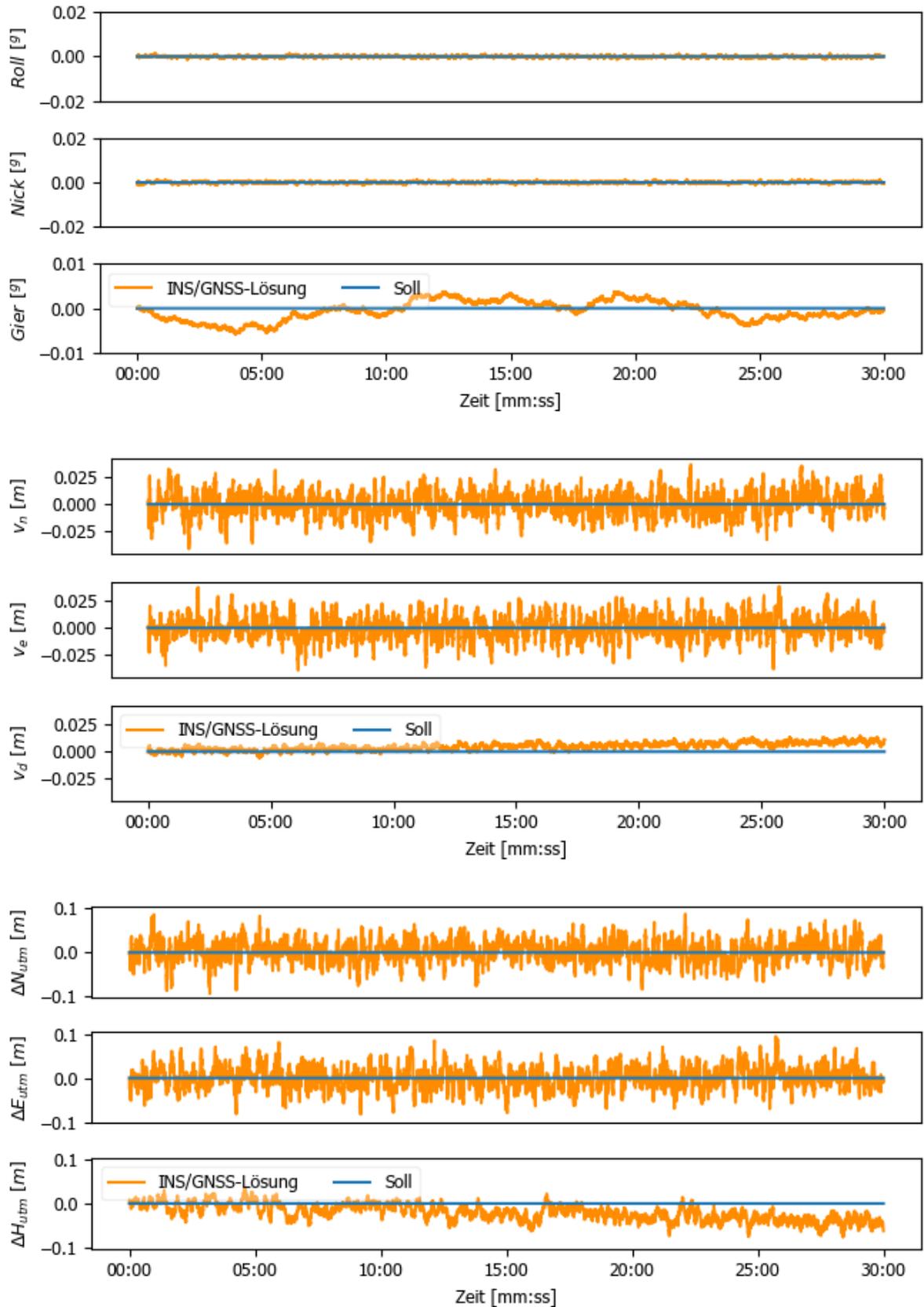


Abbildung 7.2: Vergleich der Soll-Pose mit der aus verrauschten IMU-Beobachtungen und dem IN-Algorithmus bestimmten Pose;  
 Reduzierung der Positionen mittels initialer Position;  
 Flugszenario Nr. 1

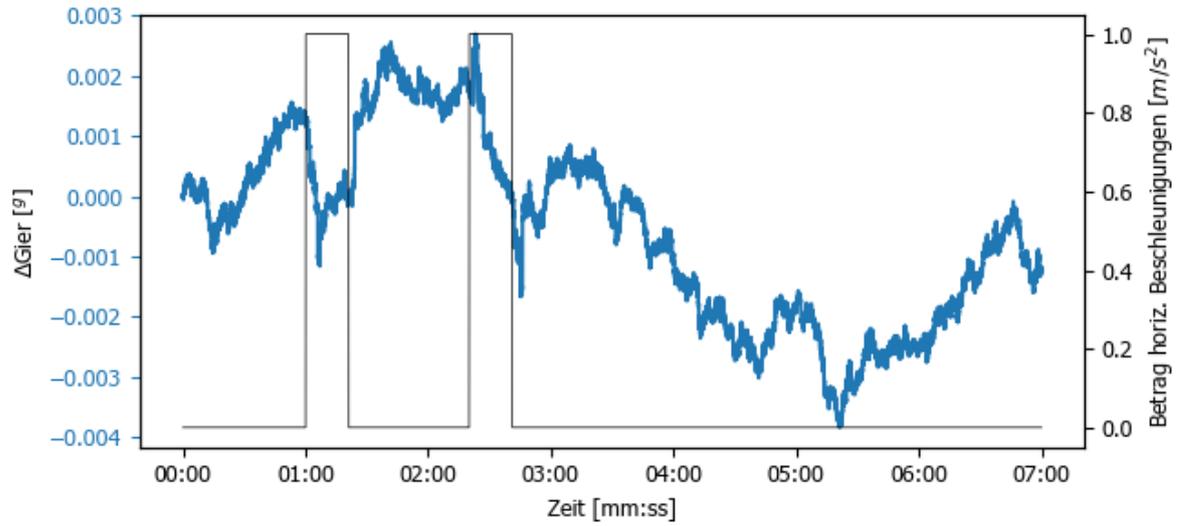


Abbildung 7.3: Links: Soll-Ist-Abweichungen des Gierwinkels (Ist: INS/GNSS-Lösung);  
Rechts: Betrag der horizontalen Beschleunigungen  
Flugszenario Nr. 3.1

## 7.2 Korrelationsstruktur und Korrelationsaufbau der prädizierten Kovarianzmatrix

Die prädizierte Kovarianzmatrix der (Fehler-)Zustände beinhaltet deren stochastische Information und spielt angesichts der Gleichung (4.14) eine wichtige Rolle bei der Bildung der Verstärkungsmatrix. Die Verstärkungsmatrix ist wiederum zuständig für die Skalierung der Innovationen. Genauer ausgedrückt, ist die Verstärkungsmatrix mal der Innovation gleich der geschätzten Fehlerzustände. Die endgültigen, aufdatierten Zustände ergeben sich schlussendlich aus der Addition der geschätzten Fehlerzustände und der IN-Lösung. Das bedeutet, dass die prädizierte Kovarianzmatrix einen wesentlichen Einfluss auf das Endergebnis hat.

Die Berechnung der Korrelationsmatrix aus der Kovarianzmatrix ermöglicht es, die Abhängigkeit der Fehlerzustände zu untersuchen. Die Kovarianzmatrix steht für jede Epoche der Zeitreihe zur Verfügung, wodurch die Korrelationsstruktur der Zeitreihe analysiert werden kann. Inhalt dieses Abschnittes ist die Betrachtung der Korrelationsstrukturen in Bezug auf die unterschiedlichen Flugmanöver. Auf die Erläuterung der Ursache der Korrelationen wird in Abschnitt 7.6 näher eingegangen.

Abbildung 7.4 gibt für den stationären Fall die Korrelationen zwischen Fehlern im Nickwinkel und Fehlern in den Geschwindigkeitskomponenten wieder. Die Korrelationen mit dem Fehler im Nickwinkel haben eine klare Struktur: Von der zweiten Epoche bis zum Schluss der Zeitreihe korreliert dieser Fehler stark mit dem Fehler der Nordkomponente der Geschwindigkeit (Korrelationskoeffizient nahezu 1). Der Korrelationskoeffizient der ersten Epoche ist 0, da die initiale Kovarianzmatrix nur mit Hauptdiagonalelementen besetzt ist. Nach der ersten Epoche entstehen durch die Transitionsmatrix erste Kovarianzen, wodurch erst ab der zweiten Epoche Korrelationen vorhanden sind. Die Vergrößerung in Abbildung 7.4 zeigt den Korrelationsaufbau während der Prädiktionsphase und den Korrelationsabbau beim Eintreten der GNSS-Beobachtungen. Die Korrelationen mit den anderen beiden Geschwindigkeitskomponenten sind gering. Die Korrelationen mit dem Fehler im Rollwinkel haben eine ähnliche Korrelationsstruktur, allerdings mit dem Unterschied, dass diese stark mit dem Fehler der Ostkomponente der Geschwindigkeit korrelieren (Abbildung 11.1 im Anhang). Im Vergleich zum Roll- und Nickwinkel korreliert der Fehler im Gierwinkel nur sehr schwach mit den Fehlern der Geschwindigkeitskomponenten (Abbildung 7.5). Für alle Orientierungsparameter gilt, dass die Schwankungsbreite der Korrelationen nicht besonders ausgeprägt ist und die Korrelationen zudem nicht um 0 zentriert sind.

Die Beobachtungen und Aussagen aus Abbildung 7.4 und Abbildung 7.5 gelten sowohl für die Flugszenarien mit konstanter Geschwindigkeit als auch für die Korrelationen mit den Fehlern in den Positionskomponenten (Abbildung 11.2 bis Abbildung 11.4 im Anhang).

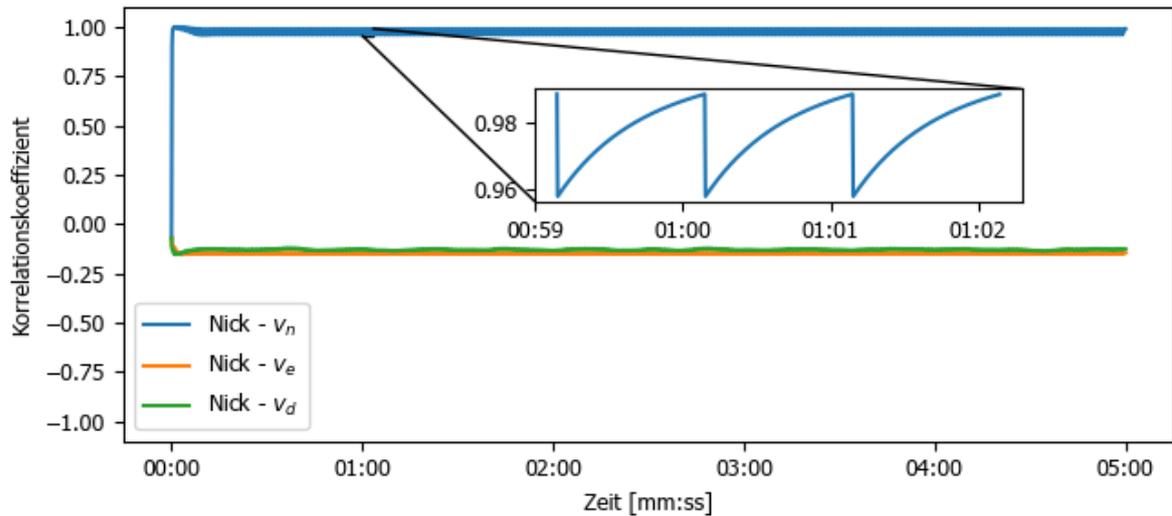


Abbildung 7.4: Korrelationskoeffizient zwischen den Fehlerzuständen: Nickwinkel und Geschwindigkeitskomponenten; Flugszenario Nr. 1 (Ausschnitt der ersten fünf Minuten)

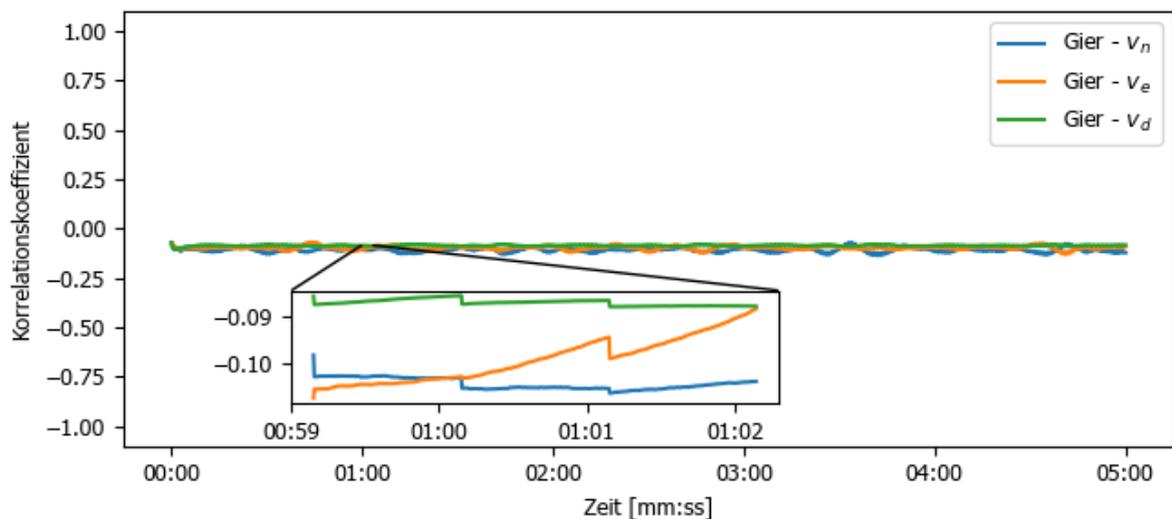


Abbildung 7.5: Korrelationskoeffizient zwischen den Fehlerzuständen: Gierwinkel und Geschwindigkeitskomponenten; Flugszenario Nr. 1 (Ausschnitt der ersten fünf Minuten)

Im folgenden Abschnitt erfolgt die Erläuterung der Untersuchung der Korrelationsstruktur des Flugszenarios Nr. 3.2 (horizontale Beschleunigungen als Rechteckfunktion). Dabei bildet der folgende Gedanke die Grundlage dieser Untersuchung: Falls Beschleunigungen einen Effekt auf die Beobachtbarkeit des Gierwinkel-Fehlerzustandes haben, muss dieser Effekt auch in den Korrelationen zu sehen sein.

Wie in Abbildung 7.6 zu erkennen ist, steigt die Korrelation zwischen dem Nickwinkelfehler und der Nadirkomponente des Geschwindigkeitsfehlers durch horizontale Beschleunigungen. Abgesehen

von dieser Veränderung bleibt die Korrelationsstruktur im Vergleich zum statischen und zum konstanten Geschwindigkeitsszenario jedoch unverändert.

In Abbildung 7.7 ist durch das Eintreten der horizontalen Beschleunigungen der Einfluss auf die Korrelationen zwischen den Fehlern im Gierwinkel und den Fehlern in den Geschwindigkeitskomponenten deutlich zu beobachten. Allerdings steigen die Korrelationen im Gegensatz zu der Beschleunigung nicht sprunghaft an, sondern bauen sich zeitverzögert über mehrere GNSS-Epochen auf. Ist hingegen die Beschleunigung konstant, dann entstehen nur sehr schwache Korrelationen. Das bedeutet, dass Beschleunigungsänderungen und nicht Beschleunigungen per se für den Korrelationsaufbau verantwortlich sind. Zudem lassen positive bzw. negative Beschleunigungsänderungen in Nordrichtung positive bzw. negative Korrelationen in den Fehlern der Ostkomponente der Geschwindigkeit entstehen. Der Verlauf der Korrelationen in der Nord- und Nadirkomponente der Geschwindigkeitsfehler ist bei Beschleunigungsänderungen annähernd identisch. Größere Beschleunigungsänderungen bewirken höhere Korrelationswerte, wie der Vergleich mit Abbildung 11.5 im Anhang zeigt.

Ähnliche Beobachtungen sind auch für die Korrelationen mit dem Positionsfehler und dem Fehler im Rollwinkel möglich (Abbildung 11.5 bis Abbildung 11.7 im Anhang).

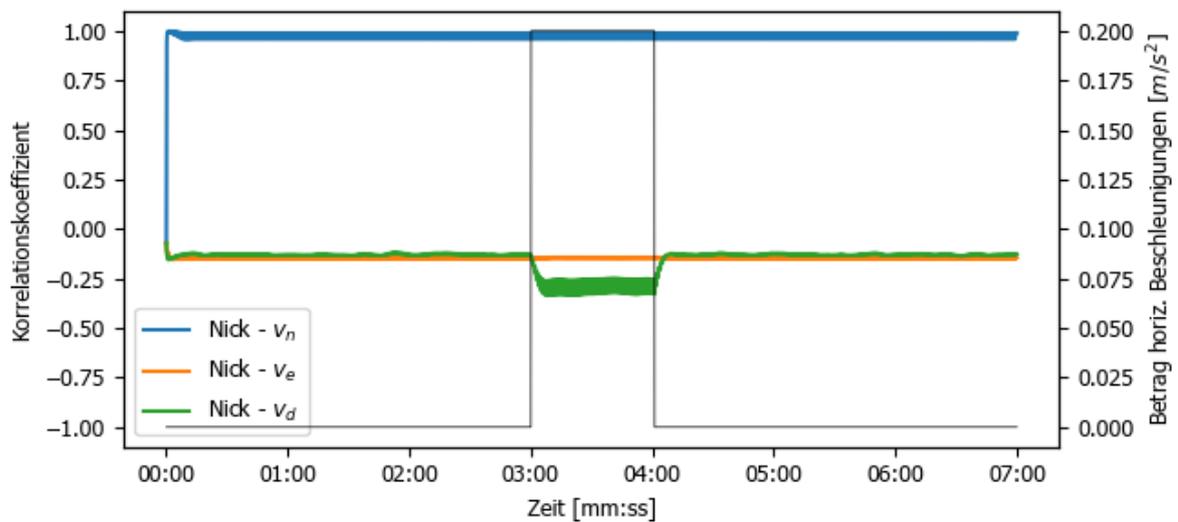


Abbildung 7.6: Links: Korrelationskoeffizient zwischen den Fehlerzuständen: Nickwinkel und Geschwindigkeitskomponenten;  
Rechts: Betrag der horizontalen Beschleunigungen;  
Flugszenario Nr. 3.2

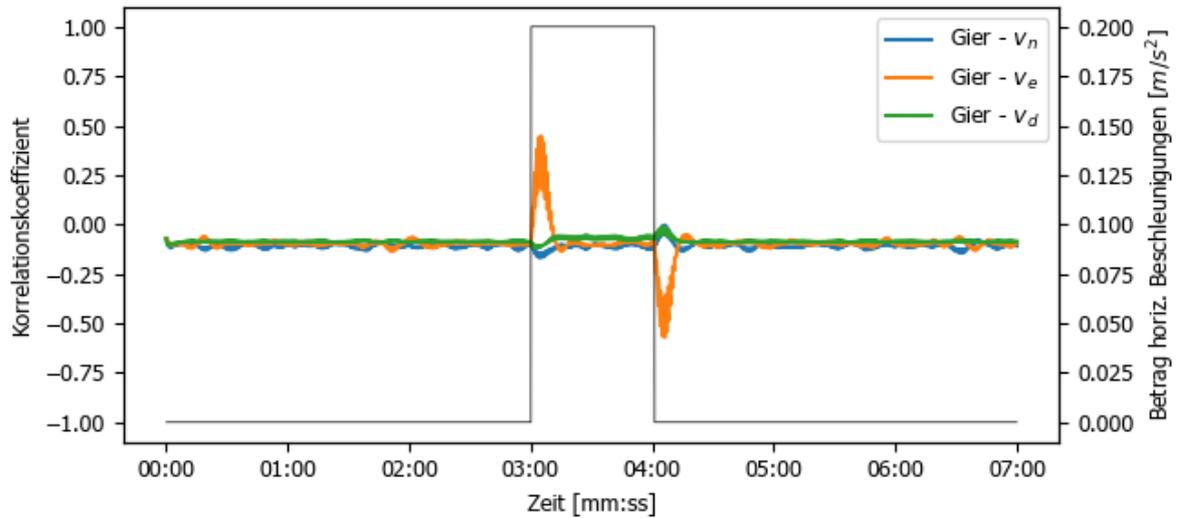


Abbildung 7.7: Links: Korrelationskoeffizient zwischen den Fehlerzuständen: Gierwinkel und Geschwindigkeitskomponenten;  
Rechts: Betrag der horizontalen Beschleunigungen;  
Flugszenario Nr. 3.2

Diese Untersuchung kann analog für die zwei restlichen horizontalen Beschleunigungsmuster in Abschnitt 6.1.3 durchgeführt werden. In Abbildung 7.8 und Abbildung 7.9 sind die Korrelationen zwischen Fehlern im Gierwinkel und Fehlern in den Geschwindigkeitskomponenten für das Flugszenario Nr. 3.4 (lineare Beschleunigungsänderung) und Nr. 3.5 (Kreistrajektorie) dargestellt. In Phasen linearer Beschleunigungsänderungen behalten die Korrelationen, ausgenommen vom Auf- und Abbau durch die Prädiktion bzw. den Filtereinsatz, ihre Größe bei. Die Kreisbewegung zeigt einige interessante Eigenschaften der Korrelationen auf. Erstens ist in Abbildung 7.9 erkennbar, dass der Ein- bzw. Austritt der Beschleunigungen einen Höchststand der Korrelationen, ähnlich zur Rechteckbeschleunigungsfunktion (siehe Abbildung 7.7), verursacht. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Betrag der horizontalen Beschleunigungskomponenten einer Kreisbewegung eine Rechteckfunktion darstellt. Zweitens bewirkt eine sinusförmige Beschleunigungsänderung einen entsprechenden sinusförmigen Korrelationsaufbau. Drittens entstehen durch Beschleunigungsänderungen in Ostrichtung Korrelationen zwischen Fehlern im Gierwinkel und Fehlern in der Nordkomponente der Geschwindigkeit. Zugleich gilt umgekehrt: Beschleunigungsänderungen in Nordrichtung lassen Korrelationen zwischen Fehlern im Gierwinkel und Fehlern in der Ostkomponente der Geschwindigkeit entstehen (siehe Abbildung 7.7 und Abbildung 7.8).

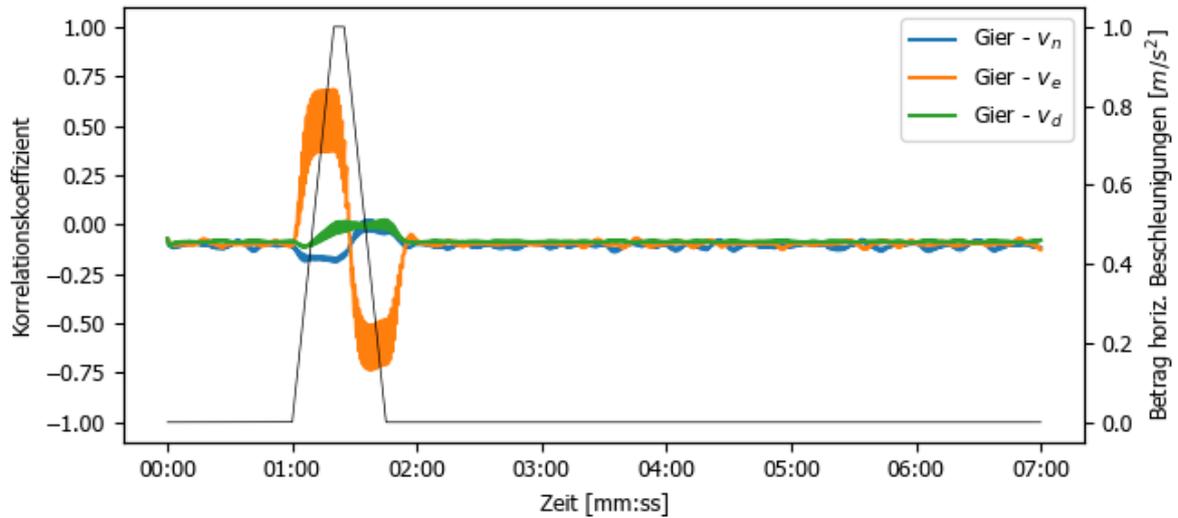


Abbildung 7.8: Links: Korrelationskoeffizient zwischen den Fehlerzuständen: Gierwinkel und Geschwindigkeitskomponenten;  
Rechts: Betrag der horizontalen Beschleunigungen;  
Flugszenario Nr. 3.4

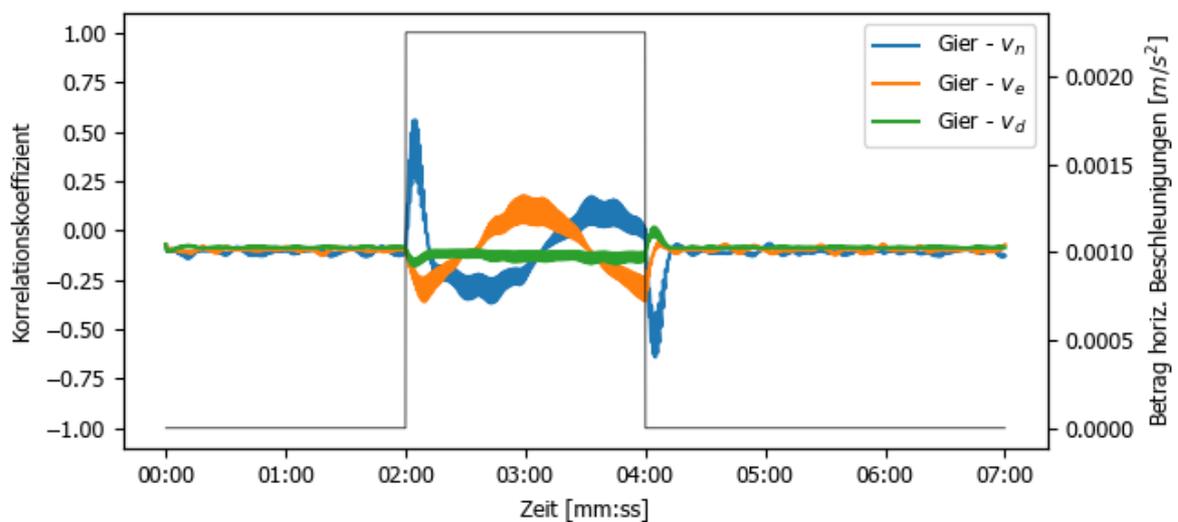


Abbildung 7.9: Links: Korrelationskoeffizient zwischen den Fehlerzuständen: Gierwinkel und Geschwindigkeitskomponenten;  
Rechts: Betrag der horizontalen Beschleunigungen;  
Flugszenario Nr. 3.5

## 7.3 Auswirkung der Korrelationen in der Verstärkungsmatrix und auf die Fehlerzustandsschätzung

Nach der Untersuchung der Korrelationsstruktur stellt sich einerseits die Frage, wie sich die Korrelationen in der Verstärkungsmatrix niederschlagen, und andererseits, wie sich schlussendlich die horizontalen Beschleunigungsänderungen auf die geschätzten Fehlerzustände des Gierwinkels und dessen Standardabweichung auswirken.

Die Verstärkungsmatrix hat die Dimension (9x6), wobei die neun Zeilen die zu schätzenden Fehlerzustände repräsentieren und die sechs Spalten für den Innovationsvektor stehen. Die geschätzten Fehlerzustände entstehen durch Multiplikation der Zeilen der Verstärkungsmatrix mit den Spalten des Innovationsvektors (siehe Gleichung (4.17)). Die Zeilenelemente der Verstärkungsmatrix sind unter anderem Gegenstand der folgenden Untersuchung.

Abbildung 7.10 zeigt die Zeilenelemente der Verstärkungsmatrix für das Flugszenario Nr. 3.2, die bei Multiplikation mit den Geschwindigkeitsinnovationen zu den geschätzten Fehlerzuständen des Gierwinkels führen (siehe Gleichung (7.1): Dritte Zeile der Submatrix  $\mathbf{K}_{12,k}$ ). Aus dem Vergleich mit Abbildung 7.7 ist offensichtlich, dass sich die Korrelationsstruktur faktisch eins zu eins in den entsprechenden Zeilenelementen der Verstärkungsmatrix wiederfindet. Außerdem ist ersichtlich, dass für Phasen konstanter Geschwindigkeit die Werte dieser Zeilenelemente sehr gering (praktisch 0) sind. Dies gilt auch für statische Phasen. Hieraus lässt sich schlussfolgern, dass die Korrelationen ein entscheidendes Maß für die Skalierungen der Innovationen darstellen und dass in diesem Fall das System- und Messrauschen im Vergleich zu den Korrelationen eine untergeordnete Rolle spielt. In Abbildung 7.11 sind für das gleiche Flugszenario die Zeilenelemente der Verstärkungsmatrix dargestellt, die bei Multiplikation mit den Geschwindigkeitsinnovationen zu den geschätzten Fehlerzuständen des Nickwinkels führen (siehe Gleichung (7.1): Zweite Zeile der Submatrix  $\mathbf{K}_{12,k}$ ). Die Werte sind aufgrund der hohen und andauernden Korrelationen ausgeprägter als in Abbildung 7.10, wodurch der Nickwinkel stärker in Richtung der GNSS-Beobachtung hingezogen wird bzw. die Innovation mehr Gewicht gewinnt.

Die Untersuchung wurde analog für die zweite und dritte Zeile der Submatrix  $\mathbf{K}_{11,k}$  durchgeführt (Abbildung 11.8 und Abbildung 11.9), wobei dieselben Schlüsse gezogen werden konnten.

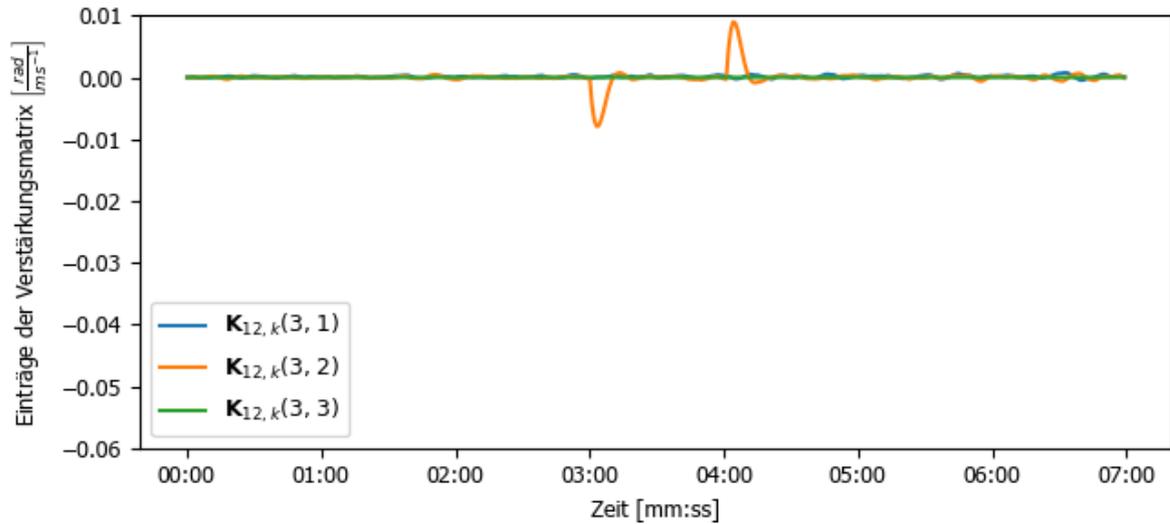


Abbildung 7.10: Einträge der Verstärkungsmatrix: 3. Zeile der Submatrix  $K_{12,k}$ ; Flugszenario Nr. 3.2

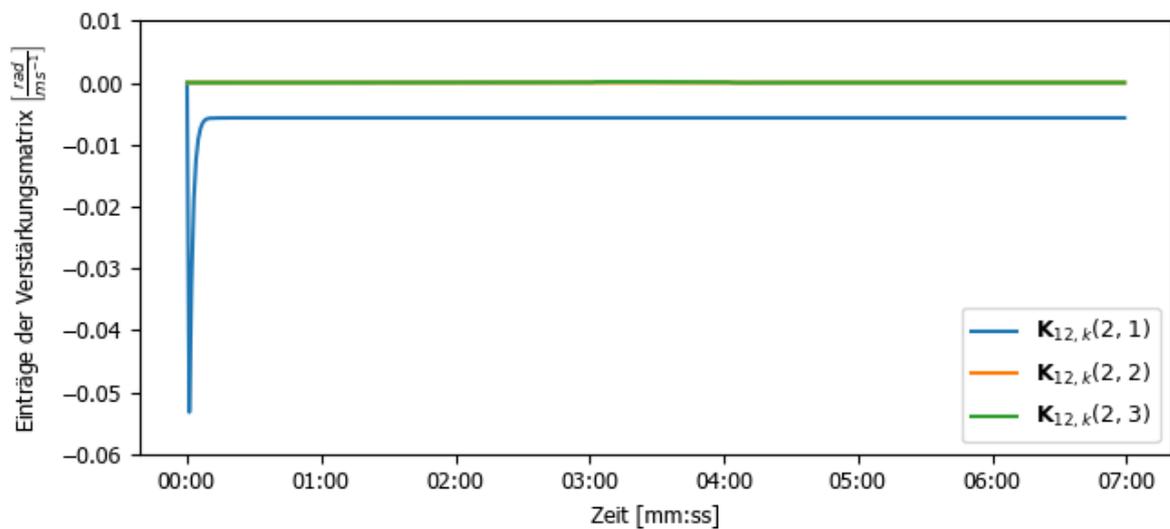


Abbildung 7.11: Einträge der Verstärkungsmatrix: 2. Zeile der Submatrix  $K_{12,k}$ ; Flugszenario Nr. 3.2

Aus Abbildung 7.12 wird deutlich, wie horizontale Beschleunigungsänderungen auf die Schätzung der Fehlerzustände des Gierwinkels wirken. Diese nehmen im Vergleich zu Phasen ohne Beschleunigungsänderungen erheblich zu. Das bedeutet, dass horizontale Beschleunigungsänderungen grundlegend für die Beobachtbarkeit des Gierwinkel-Fehlerzustandes sind. Die geschätzten Fehlerzustände des Nickwinkels sind zum Gierwinkel relativ anhaltend groß, wodurch der Drift des IN-Nickwinkels zu jeder GNSS-Epoche durch die INS/GNSS Integration abgefangen werden kann. Im Gegensatz dazu kann der Drift des IN-Gierwinkels nur durch horizontale Beschleunigungsänderungen unterbunden werden.

Die in diesem Kapitel beschriebenen Beobachtungen hinsichtlich der Verstärkungsmatrix und der Fehlerzustände stimmen mit den in der Einleitung zitierten Publikation und Aussagen von Heunecke überein.

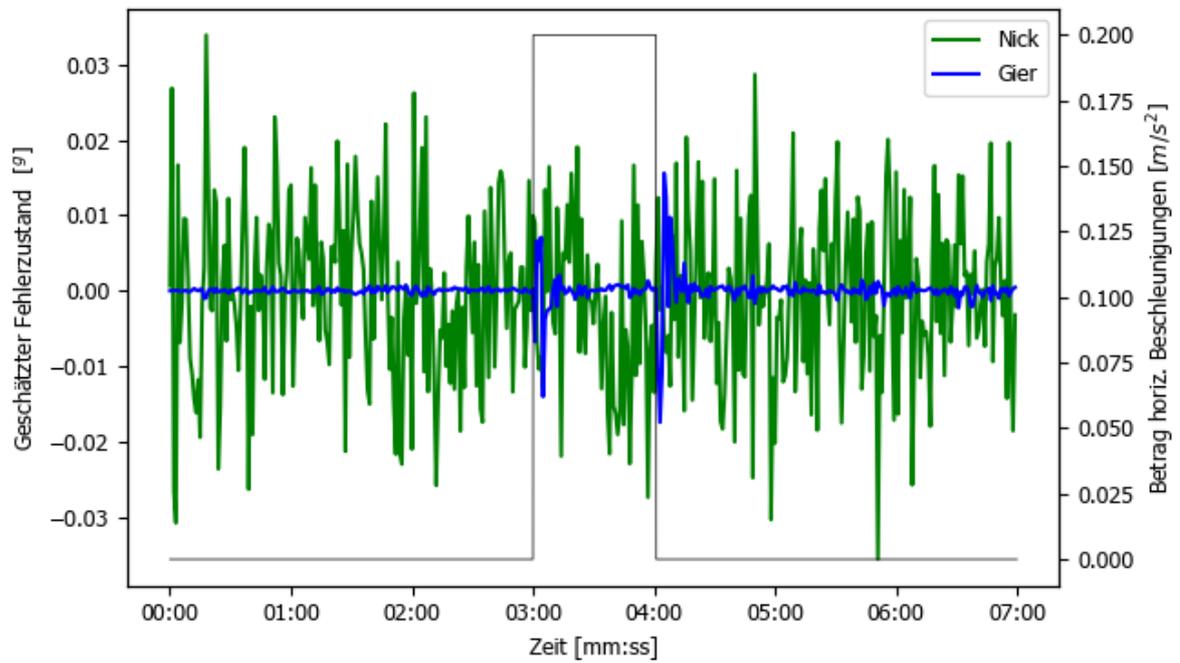


Abbildung 7.12: Links: Geschätzte Fehlerzustände des Nick- und Gierwinkels;  
Rechts: Betrag der horizontalen Beschleunigungen;  
Flugszenario Nr. 3.2

## 7.4 Standardabweichung des Gierwinkels

Die geschätzten Standardabweichungen der Orientierungsfehlerzustände bzw. der Orientierungszustände sind in Abbildung 7.13 dargestellt. Die Standardabweichung des Roll- und Nickwinkels konvergiert rasch zu einem Minimum. Anders verhält sich die Standardabweichung des Gierwinkels, welche außer bei horizontalen Beschleunigungsänderungen kontinuierlich zunimmt. Die Tatsache, dass eine Senkung der Standardabweichung des Gierwinkels durch horizontale Beschleunigungsänderungen möglich ist, lässt folgende Fragestellung zu: Wie groß müssen die horizontalen Beschleunigungsänderungen sein, damit ein bestimmtes Varianzniveau erreicht wird? Eine direkte Antwort auf diese Frage zu geben, ist problematisch, allerdings können einzelne Einflussfaktoren identifiziert werden. Abschnitt 7.5 befasst sich mit diesen Einflussfaktoren.

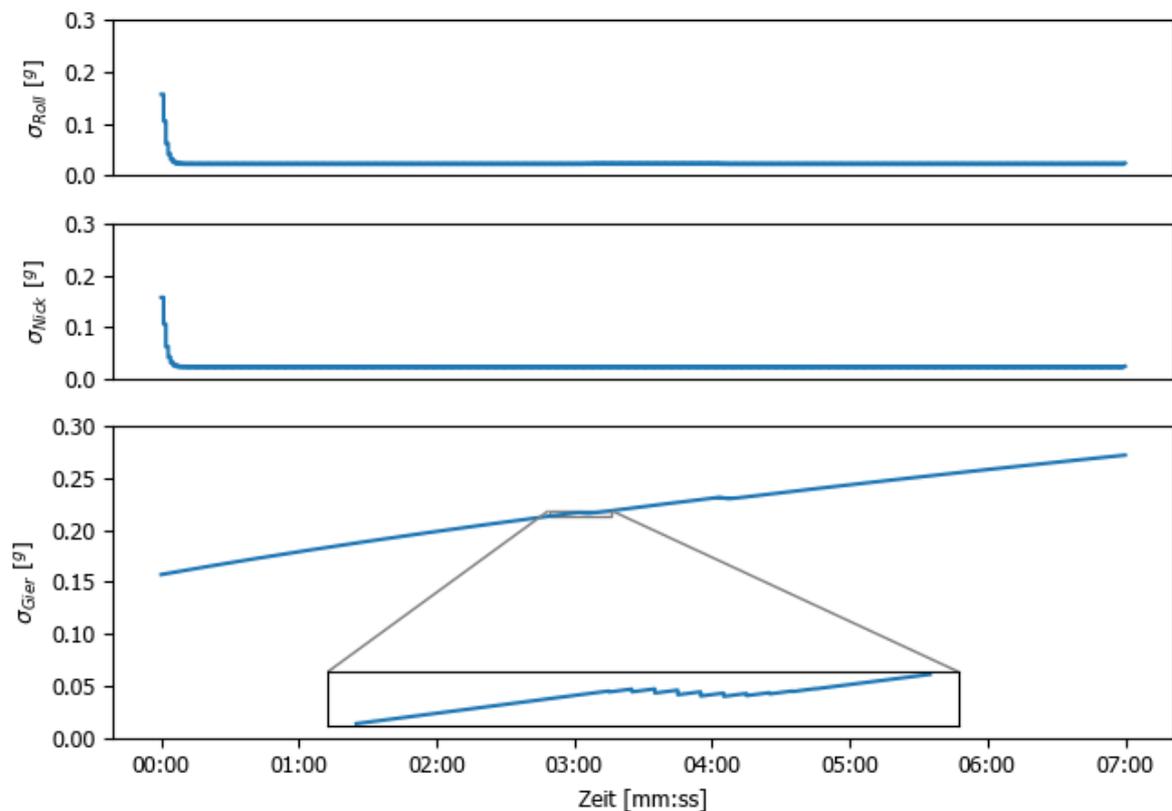


Abbildung 7.13: Standardabweichung der Orientierungszustände;  
Flugszenario Nr. 3.2

## 7.5 Auswirkung von Korrelationen und Varianzen in der Verstärkungsmatrix

Ein Überblick über das Zusammenspiel der einzelnen Einflussfaktoren auf die geschätzten Fehlerzustände ist in Abbildung 7.14 ersichtlich. Dabei sind die geschätzten Fehlerzustände das Ergebnis einer stochastischen (Verstärkungsmatrix) und einer funktionalen (Innovation) Größe. Ersteres besteht aus den folgenden zwei Anteilen:

- Systemrauschen: Prädizierte Kovarianzmatrix der (Fehler-)Zustände  
Die Varianz der (Fehler-)Zustände (Hauptdiagonalelemente) ist aufgrund der Simulationsaufgabe bekannt und ergibt sich aus dem Rauschniveau der IMU-Beobachtungen (siehe Gleichung (5.15)).  
Die Kovarianzen/Korrelationen (Nebendiagonalelemente) zwischen den Fehlerzuständen der Orientierungs- und der Geschwindigkeitsparameter wurden in Abschnitt 7.2 untersucht. Dabei hat sich herausgestellt, dass horizontale Beschleunigungsänderungen einen wesentlichen Einfluss auf die Korrelationsbildung zwischen den Fehlerzuständen des Gierwinkels und der Geschwindigkeit bzw. Position haben.
- Messrauschen: Kovarianzmatrix der GNSS-Beobachtungen  
Die Kovarianzmatrix der Beobachtungen wurde in dieser Arbeit ohne Kovarianzen (Nebendiagonalelemente) modelliert (siehe Gleichung (5.17)). Bedingt durch die Simulationsaufgabe sind die Beobachtungsvarianzen (Hauptdiagonalelemente) ebenfalls bekannt und zudem in jeder (GNSS-)Epoche konstant.

Die Ermittlung der Innovation erfolgt aus der Differenz zwischen der GNSS- und der IN-Lösung (siehe Gleichung (5.12)).

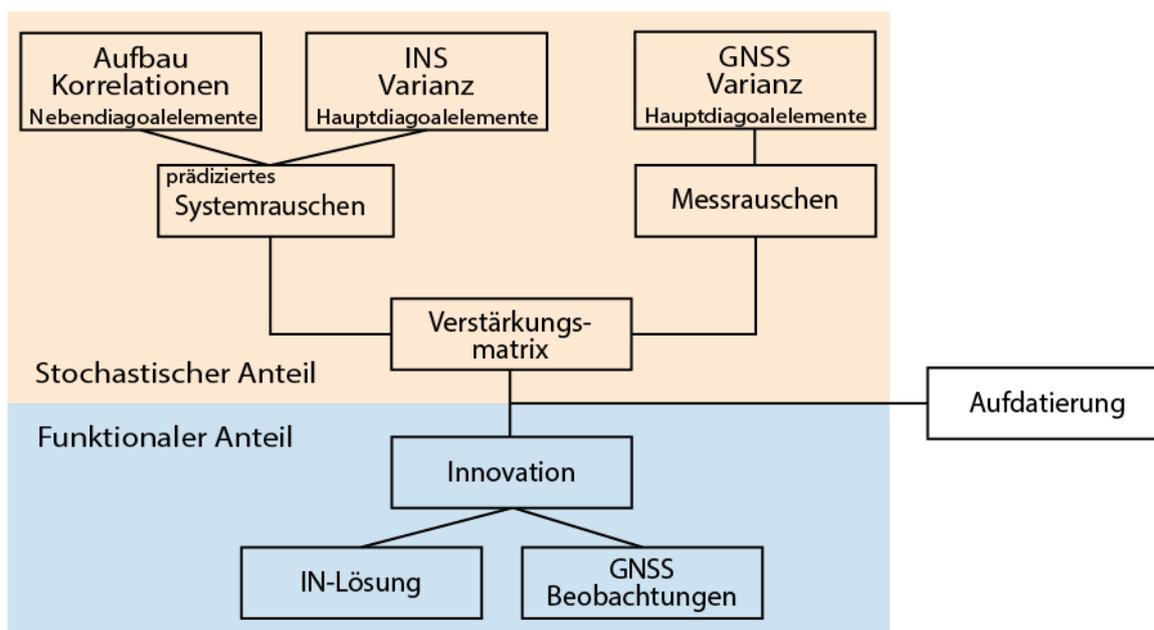


Abbildung 7.14: Einflussfaktoren auf die Genauigkeitsbetrachtung von Fehlerzuständen

Die Steuerung dieser Einflussfaktoren erfolgt einerseits durch die durchgeführten Flugmanöver des UAVs (z. B. Beschleunigungen) und andererseits durch die eingesetzte Hardware (IMU- und GNSS-Antenne). Dabei sind die beiden Steuerungselemente nicht getrennt zu behandeln, sondern müssen immer gleichzeitig betrachtet werden.

Die Diskussion des Flugszenario Nr. 3.3 soll das Zusammenspiel der stochastischen Einflussfaktoren näher beschreiben. Zusätzlich soll anhand der Monte-Carlo-Simulation überprüft werden, ob die geschätzte mit der tatsächlichen (Ensemble-) Standardabweichung des Gierwinkels übereinstimmt.

### Flugszenario Nr. 3.3

Das Flugszenario Nr. 3.3 beinhaltet zwei Beschleunigungsblöcke mit horizontalen Beschleunigungen gleicher Amplitude, aber alternierenden Vorzeichen (siehe Tabelle 6.1). Aus Abbildung 7.15 wird ersichtlich, wie dieses Flugmanöver Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Gierwinkels und der Geschwindigkeit aufbaut. Da die einzelnen Beschleunigungen bzw. Beschleunigungsänderungen abgesehen vom Vorzeichen ident sind, sind auch die Korrelationskoeffizienten gleich groß. Bedingt durch den Korrelationsaufbau steigen zu Beginn die entsprechenden Einträge in der Verstärkungsmatrix (Abbildung 7.16). Im Gegensatz zu den Korrelationskoeffizienten ist eine anschließende stetige Abnahme dieser Einträge zu beobachten, was wiederum eine Abnahme der Gewichtung der Innovation zur Folge hat. Verursacht wird dies durch die gleichzeitige Senkung der Standardabweichung des Gierwinkels (Abbildung 7.17). Diese Standardabweichung konvergiert, wie auch die Standardabweichung des Roll- und Nick-Fehlerzustandes, gegen ein Sättigungsniveau, allerdings nimmt diese nach den Beschleunigungsänderungen wieder zu.

Die folgende Hypothese ist mit allen Ergebnissen dieser Arbeit vereinbar, wobei auf ihre vertiefte Untersuchung an dieser Stelle aus zeitlichen Gründen verzichtet werden soll: Die in diesem Abschnitt gezeigten Abbildungen lassen vermuten, dass unter anderem die Korrelationen (Nebendiagonalelemente des prädizierten Systemrauschens) für den Verlauf sowie die Standardabweichung (Hauptdiagonalelemente) für die Skalierung der Zeilenelemente der Verstärkungsmatrix verantwortlich sind.

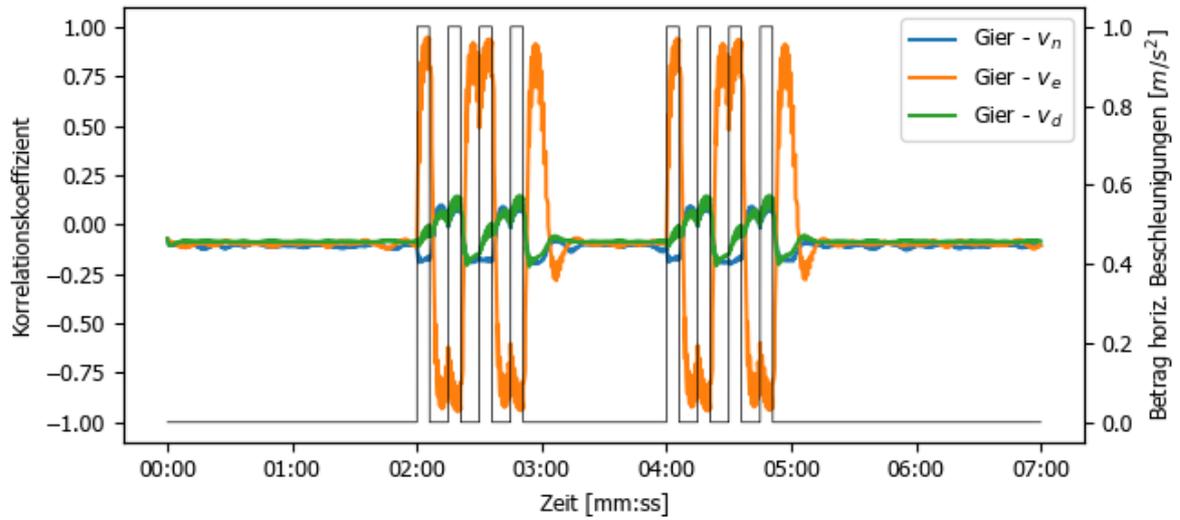


Abbildung 7.15: Links: Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Gierwinkels und der Geschwindigkeitskomponenten;  
Rechts: Betrag der horizontalen Beschleunigungen;  
Flugszenario Nr. 3.3

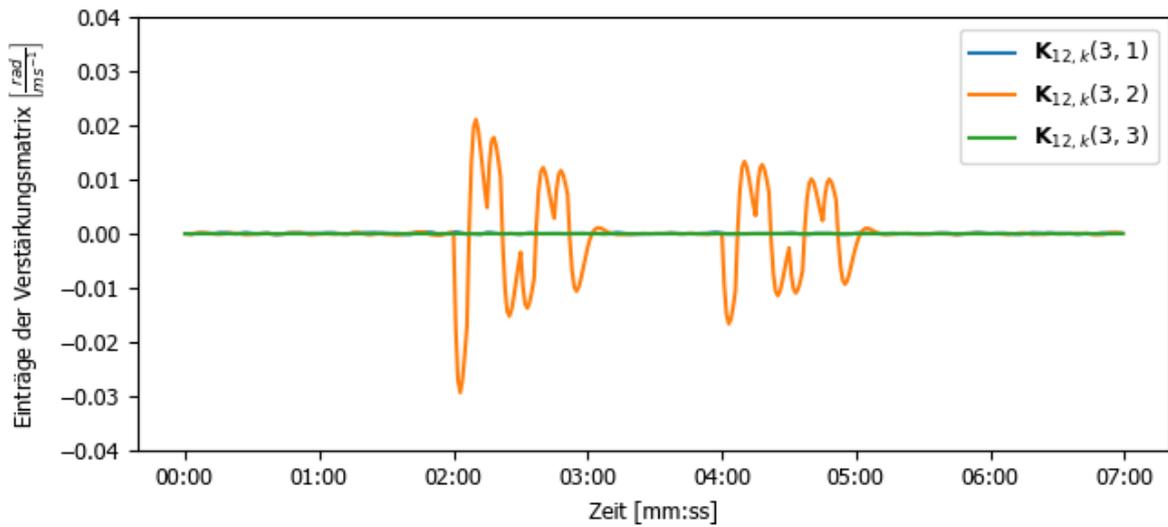


Abbildung 7.16: Einträge der Verstärkungsmatrix: 3. Zeile der Submatrix  $K_{12,k}$ ;  
Flugszenario Nr. 3.3

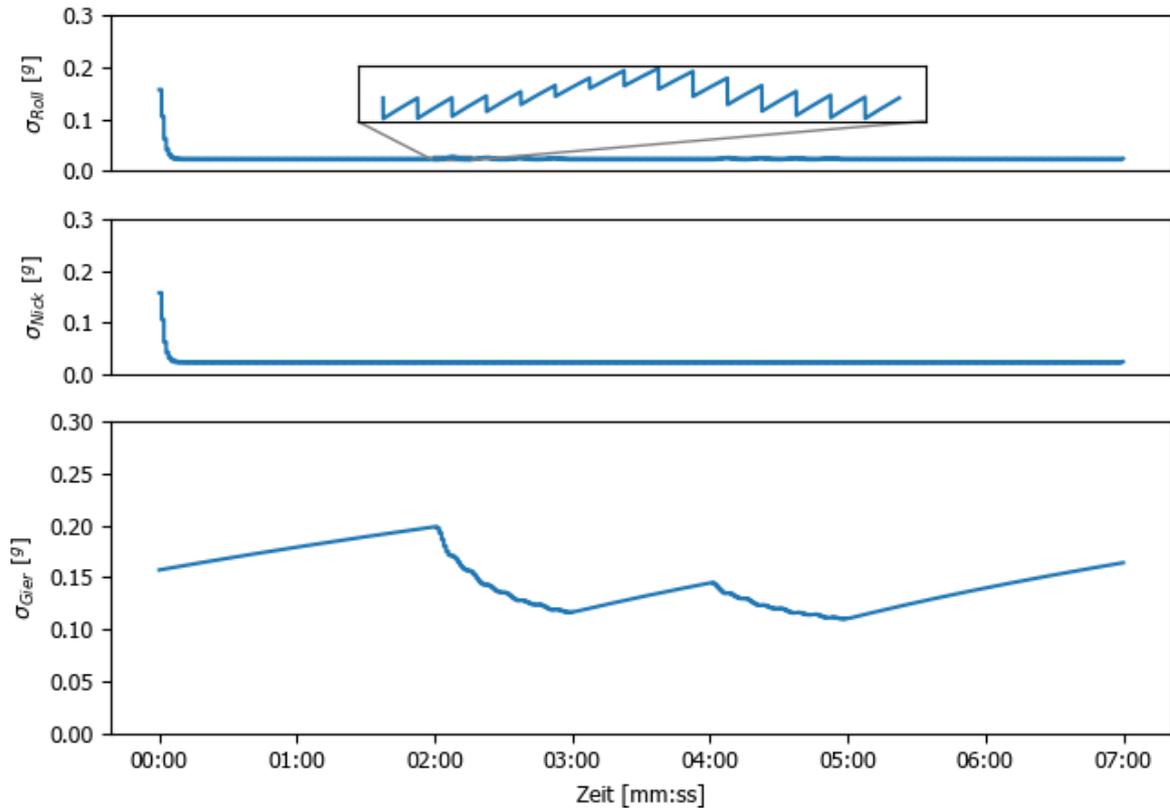


Abbildung 7.17: Standardabweichung der Orientierungsfehlerzustände;  
Flugszenario Nr. 3.3

Bisher erfolgte die Interpretation der Simulationsergebnisse immer anhand eines Simulationsdurchlaufes, dessen Vorteil darin besteht, dass die Handhabung und somit die systematische Analyse der Simulationsergebnisse zugänglich sind. Der Nachteil ist die geringe Aussagekraft der Soll-Ist-Abweichungen eines Simulationsdurchlaufes, weswegen zur Überprüfung der Gierwinkel und deren geschätzten Standardabweichung die in Abschnitt 6.4 erläuterte Monte-Carlo-Methode verwendet wird. Unter dem Ist-Gierwinkel ist hier der endgültige, aufdatierte Gierwinkel aus der INS/GNSS-Integration zu verstehen.

In Abbildung 7.18 sind die Soll-Ist-Abweichungen des Gierwinkels sowie die dreifache geschätzte Standardabweichung der Gierwinkel von 600 Simulationsdurchläufen abgebildet.

Ausgehend von den Soll-Ist-Gierwinkelabweichungen der 600 Simulationsdurchläufe wurden die Standardabweichung, der Mittelwert und der Median ermittelt. Diese (Ensemble-)Größen sind zusammen mit der geschätzten Standardabweichung des Gierwinkels in der Abbildung 7.19 dargelegt.

Anhand der beiden Abbildungen ist deutlich zu erkennen, dass die Aussagen aus Abschnitt 6.4 zutreffen. Darüber hinaus sind Mittelwert und Median näherungsweise deckungsgleich und um 0 zentriert, was auf eine unverzerrte Schätzung hindeutet.

Diese Untersuchung ist ein Beleg dafür, dass die aus der INS/GNSS-Integration geschätzte Standardabweichung des Gierwinkels repräsentativ für die tatsächliche Streuung des Gierwinkels ist.

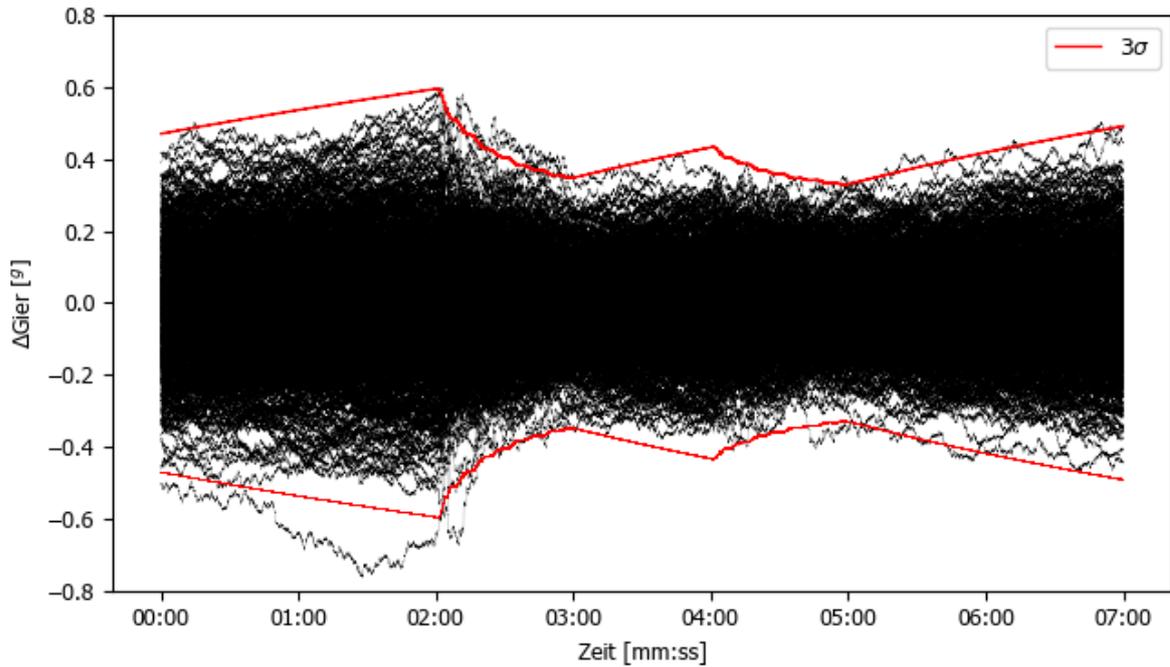


Abbildung 7.18: Schwarz: Soll-Ist-Gierwinkelabweichungen;  
 Rot: Dreifache geschätzte Standardabweichung des Gierwinkels;  
 600 INS/GNSS-Simulationsdurchläufe;  
 Flugszenario Nr. 3.3

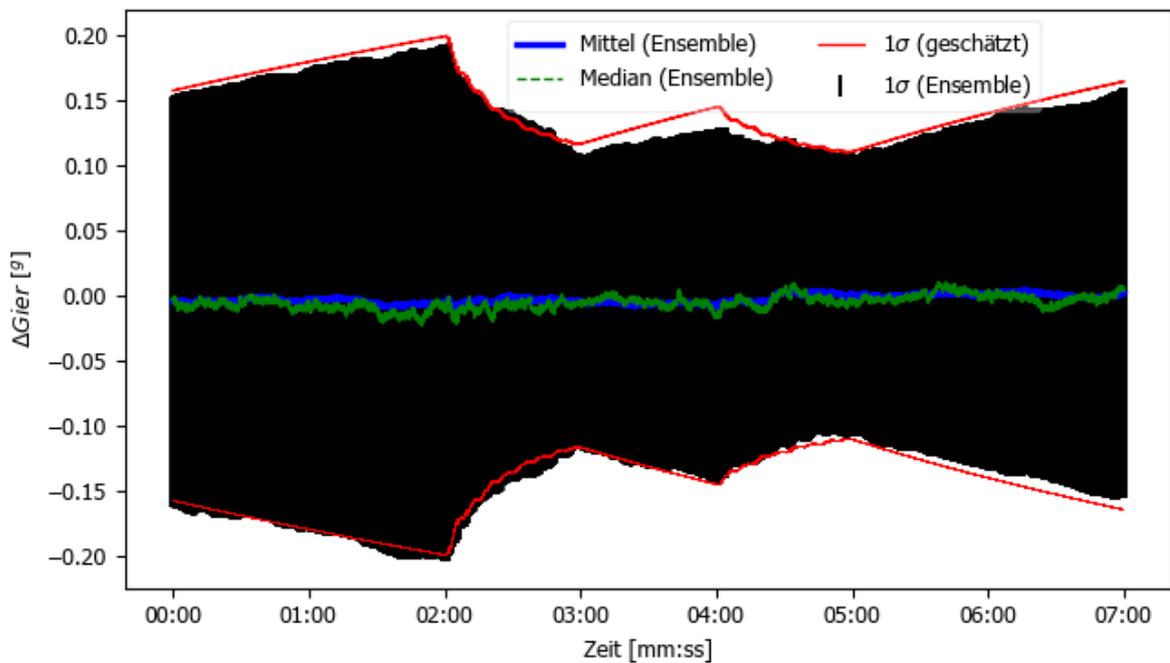


Abbildung 7.19: Rot: Geschätzte Standardabweichung des Gierwinkels;  
 Schwarze (vertikale) Balken: Ensemble-Standardabweichung der Soll-Ist-Gierwinkelabweichungen;  
 Ensemble-Mittelwert & -Median der Soll-Ist-Gierwinkelabweichungen;  
 600 INS/GNSS-Simulationsdurchläufe;  
 Flugszenario Nr. 3.3

## 7.6 Kopplung der Fehlerzustände

In der Einleitung des Kapitels 7 wurde darauf hingewiesen, dass die Transitionsmatrix die Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen herbeiführt. Zudem hat sich in den Abschnitten 7.2 und 7.3 herausgestellt, dass sich durch horizontale Beschleunigungsänderungen die Korrelationen, zumindest zwischen den Fehlerzuständen der Orientierung und der Geschwindigkeit bzw. der Position, maßgeblich beeinflussen lassen. Besonders für die Schätzung der Gierwinkel-Fehlerzustände sind horizontale Beschleunigungsänderungen unabdingbar.

In diesem Abschnitt wird ein funktionaler Zusammenhang präsentiert, der anhand von den gemessenen Beschleunigungen die Kopplung zwischen den Orientierungs- und Geschwindigkeits- bzw. Positionsfehlerzuständen erläutert. Dieser funktionale Zusammenhang ist logischerweise auch in der Transitionsmatrix implementiert. Der folgende Argumentationsgang ist an Groves (2013, S. 204 ff) angelehnt.

Die Bestimmung der Orientierung bzw. der Rotationsmatrix  $C_b^n$  aus fehlerbehafteten Drehraten hat zur Folge, dass die gemessenen Beschleunigungen  $\widetilde{f}_{ib}^b$  bei der Transformation in den lokalen Navigationskoordinatensystem direkt von diesem Orientierungsfehler  $\delta\Psi_{nb}^n$  betroffen sind (siehe Abbildung 7.20). Der Beschleunigungsfehler im lokalen Navigationskoordinatensystem, der sich dadurch ergibt, kann bei der Annahme kleiner Rotationswinkel wie folgt angeschrieben werden (Groves, 2013, S. 206):

$$\begin{aligned}\delta a_{ib}^n(t) &= \widetilde{f}_{ib}^{n'} - \widetilde{f}_{ib}^n \\ &= \widetilde{C}_b^n \cdot \widetilde{f}_{ib}^b - C_b^n \cdot \widetilde{f}_{ib}^b \\ &= (\widetilde{C}_b^n - C_b^n) \cdot \widetilde{f}_{ib}^b\end{aligned}\quad (7.2)$$

mit

- $\widetilde{f}_{ib}^n$  ... gemessene Beschleunigung im lokalen Navigationskoordinatensystem,
- $\widetilde{f}_{ib}^{n'}$  ... mit dem Orientierungsfehler behaftete gemessene Beschleunigung im lokalen Navigationskoordinatensystem,
- $\widetilde{C}_b^n, C_b^n$  ... fehlerbehaftete und fehlerfreie Rotationsmatrix.

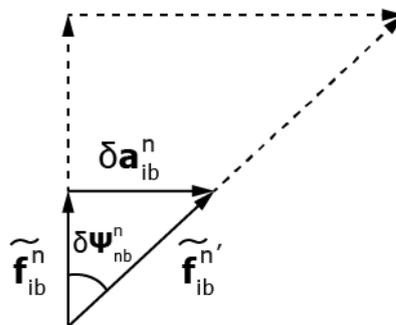


Abbildung 7.20: Beschleunigungsfehler verursacht durch Orientierungsfehler (nach Groves, 2013, S. 206); Gestrichelte Linie: Zunahme des Beschleunigungsfehler bei gleichbleibendem Orientierungsfehler

Mittels der Gleichungen (5.2), (5.3) und (Groves, 2013, S. 206):

$$[\delta\boldsymbol{\Psi}_{nb}^n \wedge] \approx \delta\mathbf{C}_b^n - \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (7.3)$$

folgt aus der Umformung der Gleichung (7.2):

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{a}_{ib}^n(t) &= [\delta\boldsymbol{\Psi}_{nb}^n \wedge] (\mathbf{C}_b^n \cdot \widetilde{\mathbf{f}}_{ib}^b) \\ &= [\delta\boldsymbol{\Psi}_{nb}^n \wedge] \widetilde{\mathbf{f}}_{ib}^n. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Bei der anschließenden Integration fließt der Orientierungsfehler indirekt durch die verfälschten Beschleunigungen in die Bestimmung der Geschwindigkeit bzw. Position ein. Dabei entstehen die folgenden Geschwindigkeits- bzw. Positionsfehler:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{v}_{eb}^n(t) &= ([\delta\boldsymbol{\Psi}_{nb}^n \wedge] \widetilde{\mathbf{f}}_{ib}^n) t \\ &= \left( \begin{bmatrix} 0 & \delta\psi_{nb} & -\delta\theta_{nb} \\ -\delta\psi_{nb} & 0 & \delta\phi_{nb} \\ \delta\theta_{nb} & -\delta\phi_{nb} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{f}_{ib, x}^n \\ \widetilde{f}_{ib, y}^n \\ \widetilde{f}_{ib, z}^n \end{bmatrix} \right) t \\ &= \begin{bmatrix} \delta\psi_{nb} \cdot \widetilde{f}_{ib, y}^n - \delta\theta_{nb} \cdot \widetilde{f}_{ib, z}^n \\ \delta\phi_{nb} \cdot \widetilde{f}_{ib, z}^n - \delta\psi_{nb} \cdot \widetilde{f}_{ib, x}^n \\ \delta\theta_{nb} \cdot \widetilde{f}_{ib, x}^n - \delta\phi_{nb} \cdot \widetilde{f}_{ib, y}^n \end{bmatrix} t \end{aligned} \quad (7.5)$$

bzw.

$$\delta\mathbf{r}_{eb}^n(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta\psi_{nb} \cdot \widetilde{f}_{ib, y}^n - \delta\theta_{nb} \cdot \widetilde{f}_{ib, z}^n \\ \delta\phi_{nb} \cdot \widetilde{f}_{ib, z}^n - \delta\psi_{nb} \cdot \widetilde{f}_{ib, x}^n \\ \delta\theta_{nb} \cdot \widetilde{f}_{ib, x}^n - \delta\phi_{nb} \cdot \widetilde{f}_{ib, y}^n \end{bmatrix} t^2. \quad (7.6)$$

Die Gleichungen (7.5) und (7.6) veranschaulichen, dass bei konstanter Geschwindigkeit oder während einer statischen Phase ( $\widetilde{f}_{ib, xy}^n \approx 0$  und  $\widetilde{f}_{ib, z}^n \approx -g$ ) der Fehler im Gierwinkel weder zum Geschwindigkeits- noch zum Positionsfehler beiträgt. Im Gegensatz dazu wirkt der Fehler im Nick- und Rollwinkel multipliziert mit der Schwerebeschleunigung auf die Nord- bzw. Ostkomponente des Geschwindigkeits- und Positionsfehlers. Die hohen und andauernden Korrelationen aus Abbildung 7.11 sind somit auf die gemessene Schwerebeschleunigung zurückzuführen. Diese ist sowohl vom Betrag als auch durch die ständige Messung (keine Abschattung hinsichtlich der Gravitationswirkung möglich) relativ zu den meisten realen horizontalen Beschleunigungen dominierend und trägt somit entscheidend zur Beobachtbarkeit der Roll- und Nickfehler bei.

Der Fehler im Gierwinkel verursacht erst bei horizontalen Beschleunigungen ( $\widetilde{f}_{ib, xy}^n > 0$ ) Geschwindigkeits- und Positionsfehler, die anschließend im Filter durch die GNSS-Beobachtungen kompensiert werden. Je größer die Beschleunigungen (bei gleichbleibendem Gierwinkelfehler) sind, desto größer fallen die Beschleunigungsfehler aus und somit auch die Geschwindigkeits- bzw. Positionsfehler (gestrichelte Linie in Abbildung 7.20). Beschleunigungen im körperfesten Koordinatensystem ( $\widetilde{f}_{ib, xy}^b$ ) können abgesehen von Flugmanövern auch durch Verkipfung der Plattform in den Messwerten des Beschleunigungsgebers erzeugt werden. Dabei wird der

Schwerevektor über die auflösenden Achsen der IMU verteilt. Diese Art der Beschleunigungen ist allerdings nicht ausreichend, da die Rotationsmatrix in den obigen Gleichungen diese Verkippung kompensiert und die Plattform „rechnerisch horizontalisiert“. Aus Gleichung (7.5) ist zudem erkennbar, dass Beschleunigungen in Nordrichtung Korrelationen zwischen Fehlern im Gierwinkel und Fehlern in der Nordkomponente der Geschwindigkeit entstehen lassen (siehe z. B. Abbildung 7.7). Daneben haben horizontale Beschleunigungen zur Folge, dass der Fehler im Nick- und Rollwinkel stärker mit der Höhekomponente des Geschwindigkeits- und Positionsfehlers korreliert.

Der in Abschnitt 7.2 beobachtete Korrelationsabbau nach der Aufdatierungsphase folgt aus der Reduzierung der Orientierungsfehler.

Die Kopplung zwischen den Fehlerzuständen entspricht den aus Abschnitt 7.2 gewonnenen Erkenntnissen und ist beispielsweise in der Gleichung (5.7) implementiert, die Teil der Transitionsmatrix ist. Schlussfolgernd gilt (Groves, 2013, S. 575):

Erst der Zuwachs der Geschwindigkeits- und Positionsfehler durch die Orientierungsfehler ermöglicht deren Beobachtbarkeit. Speziell für die Beobachtbarkeit des Gierwinkel-Fehlerzustandes sind hierzu spezielle Flugmanöver, beispielsweise in Form von horizontalen Beschleunigungen, notwendig.

Es ist abschließend darauf hinzuweisen, dass in Abschnitt 7.2 festgestellt wurde, dass die Ableitung der horizontalen Beschleunigungen (Beschleunigungsänderungen) und nicht, wie in diesem Teil der Arbeit aufgezeigt, die horizontalen Beschleunigungen für die Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Gierwinkels und der Geschwindigkeit bzw. der Position grundlegend sind. Diesbezüglich bedarf es weiterer Untersuchungen.

## 7.7 Variation von stochastischen und funktionalen Eigenschaften

Ziel dieses Abschnitts ist die Untersuchung der geschätzten Standardabweichung des Gierwinkels bei Variation der a priori stochastischen und funktionalen Eigenschaften der IMU- bzw. GNSS-Beobachtungen. Die Veränderung der geschätzten Standardabweichung wird dabei im Vergleich zu der geschätzten Standardabweichung der „Xsens & RTK“-Konfiguration (siehe Tabelle 6.2) interpretiert, die in den unteren Abbildungen blau markiert ist. Die Wahl der Standardabweichung als Vergleichsgrundlage ist zulässig, da diese als repräsentativ für die Simulationsergebnisse angesehen werden kann (siehe Abbildung 7.19). Alle Ergebnisse dieses Abschnittes werden auf Basis des Flugszenarios Nr. 3.3 analysiert.

In einem ersten Schritt wird das Rauschniveau der GNSS-Positionen von drei Zentimeter auf drei Millimeter gesenkt. Parallel erfolgt keine Veränderung des IMU- bzw. des Geschwindigkeitsrauschens, sodass das IMU-Rauschen den Spezifikationen der Xsens-Herstellerangabe bzw. die Geschwindigkeit der RTK-Genauigkeit entspricht. In den unteren Abbildungen ist die geschätzte Standardabweichung dieser Simulation mit dem Namen „Xsens & 3mm“ und in orangener Farbe gekennzeichnet.

In einem zweiten Schritt wird das Rauschniveau der IMU-Beobachtungen auf die Hälfte der Xsens-Spezifikationen gesenkt, ohne dabei die GNSS-Beobachtungen zu verändern. Die entsprechende Kennzeichnung in den folgenden Abbildungen ist „ $\frac{1}{2}$  Xsens & RTK“ und die Kurven sind grün gefärbt.

Die geschätzten Standardabweichungen des Gierwinkels dieser Variationen sind in Abbildung 7.21 dargestellt. Die blaue und die orangene Kurve (gleiches IMU-Rauschen) weisen beim Anstieg der Standardabweichung die gleiche Steigung auf, da die IMU-Genauigkeit während Phasen ohne Beschleunigungsänderungen für die Fortschreibung der Standardabweichung ausschlaggebend ist. Die grüne Kurve weist bei Phasen ohne Beschleunigungsänderungen aufgrund des geringeren IMU-Rauschens eine geringere Steigung der Standardabweichung auf.

Die im Vergleich zur „Xsens & RTK“-Konfiguration genauere GNSS-Position zieht die IN-Gierlösung stärker in Richtung der GNSS-Beobachtungen. Dies erschließt sich aus den veränderten Beiträgen im Messrauschen und in der Innovation. Demzufolge bricht auch die Standardabweichung des Gierwinkels der „Xsens & 3 mm“-Konfiguration stärker ein. Der Unterschied zwischen der blauen und der orangenen Kurve beträgt am Ende des ersten Beschleunigungsblocks zirka 0,04 Gon.

Weniger intuitiv ist das Verhalten der grünen Kurven bei Beschleunigungsänderungen. Die RTK-Genauigkeit der GNSS-Beobachtungen und die im Vergleich zur „Xsens & RTK“-Konfiguration genauere IMU hätten vermuten lassen, dass sich das Gefälle der Standardabweichung eher unter dem der blauen Kurve befinden würde. Diese Erwartungshaltung stammt aus dem folgenden Gedankenexperiment:

Die Verwendung einer fehlerfreien IMU in einer INS/GNSS-Integration hätte als Konsequenz, dass die GNSS-Beobachtung mit RTK-Genauigkeit keinen Einfluss auf die IN-Lösung hat (abgesehen davon, dass keine Integration notwendig wäre). Wird die Varianz der IMU stückweise angehoben, so gewinnt die GNSS-Beobachtung mit gleichbleibender Genauigkeit immer mehr an Gewicht. Das

bedeutet, dass bei Halbierung der IMU-Genauigkeit die GNSS-Beobachtung an Einfluss verliert und somit das Gefälle der Standardabweichung geringer ausfällt.

Die Interpretation der geschätzten Standardabweichungen sei nochmal anhand der aus den vorherigen Kapiteln gewonnenen Erkenntnisse erläutert. Hierzu wird in einem ersten Schritt die Verstärkungsmatrix (siehe Gleichung (4.14)) und in einem zweiten Schritt die Aufdatierung der Kovarianzmatrix der (Fehler-)Zustände (siehe Gleichung (4.16)) betrachtet. Mithilfe des Beobachtungsmodells (Gleichung (5.14)) und des Ausmultiplizierens der Matrizen ergibt sich für die Verstärkungsmatrix in (Sub-) Matrizen-Darstellung:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} \end{bmatrix}_k = - \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{13}^- & \mathbf{P}_{12}^- \\ \mathbf{P}_{23}^- & \mathbf{P}_{22}^- \\ \mathbf{P}_{33}^- & \mathbf{P}_{32}^- \end{bmatrix}_k \left( \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{33}^- & \mathbf{P}_{32}^- \\ \mathbf{P}_{23}^- & \mathbf{P}_{22}^- \end{bmatrix}_k + \mathbf{R}_k \right)^{-1}. \quad (7.7)$$

In Gleichung (7.7) kommt die prädierte Kovarianzmatrix der Orientierung (Submatrix:  $\mathbf{P}_{11,k}^-$ , beinhaltet unter anderem die Standardabweichung des Gierwinkels) nicht vor. Entscheidend für die Einträge  $\mathbf{K}_{11,k}$  und  $\mathbf{K}_{12,k}$  sind die Submatrizen  $\mathbf{P}_{12,k}^-$  und  $\mathbf{P}_{13,k}^-$  (Korrelationen zwischen den Orientierungsfehler und den Geschwindigkeits- bzw. Positionsfehler) und die Kovarianzmatrix der Innovation. Die Untersuchung der Submatrizen  $\mathbf{P}_{12,k}^-$  und  $\mathbf{P}_{13,k}^-$  wurde in Abschnitt 7.2 durchgeführt. Die (Sub-)Matrizen-Darstellung der aufdatierten Kovarianzmatrix der (Fehler-)Zustände lautet:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^+ & \mathbf{P}_{12}^+ & \mathbf{P}_{13}^+ \\ \mathbf{P}_{21}^+ & \mathbf{P}_{22}^+ & \mathbf{P}_{23}^+ \\ \mathbf{P}_{31}^+ & \mathbf{P}_{32}^+ & \mathbf{P}_{33}^+ \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^- & \mathbf{P}_{12}^- & \mathbf{P}_{13}^- \\ \mathbf{P}_{21}^- & \mathbf{P}_{22}^- & \mathbf{P}_{23}^- \\ \mathbf{P}_{31}^- & \mathbf{P}_{32}^- & \mathbf{P}_{33}^- \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_{31}^- & -\mathbf{P}_{32}^- & -\mathbf{P}_{33}^- \\ -\mathbf{P}_{21}^- & -\mathbf{P}_{22}^- & -\mathbf{P}_{23}^- \end{bmatrix}_k \quad (7.8)$$

wobei sich die aufdatierte Kovarianzmatrix der Orientierung ausfolgender Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{11,k}^+ &= \mathbf{P}_{11,k}^- - (-\mathbf{K}_{11}\mathbf{P}_{31}^- - \mathbf{K}_{12}\mathbf{P}_{21}^-)_k \\ &= \mathbf{P}_{11,k}^- + (\mathbf{K}_{11}\mathbf{P}_{31}^- + \mathbf{K}_{12}\mathbf{P}_{21}^-)_k. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Aus Abschnitt 7.3 geht hervor, dass während Phasen ohne horizontale Beschleunigungsänderungen die Einträge in der dritten Zeile der Submatrizen  $\mathbf{K}_{11,k}$  und  $\mathbf{K}_{12,k}$  nahe null sind. Somit ist die Standardabweichung des Gierwinkels durch die Fortschreibung der Kovarianzmatrix der (Fehler-)Zustände (Gleichung (4.12)) dominiert und nimmt während diesen Phasen (z.B. in den ersten zwei Minuten in Abbildung 7.21) kontinuierlich zu. Treten horizontale Beschleunigungsänderungen ein, so sind die entsprechenden Einträge in der Verstärkungsmatrix verschieden von null und die Standardabweichung des Gierwinkels sinkt (z.B. von der zweiten bis zur dritten Minute in Abbildung 7.21). Zusätzlich zu den horizontalen Beschleunigungsänderungen spielen die INS- und die GNSS-Varianzen (bzw. die Kovarianzmatrizen) bei der Bildung der Verstärkungsmatrix eine entscheidende Rolle (siehe Gleichung (7.7) und Abbildung 7.14).

Das starke Gefälle der grünen Kurve („ $\frac{1}{2}$  Xsens & RTK“-Konfiguration) in Abbildung 7.21 ist somit auf das reduzierte IMU-Rauschen zurückzuführen, welches gleichzeitig die INS-Varianzen und die

Varianz der Innovation senkt. Das bedeutet, dass die obige Erwartungshaltung prinzipiell nicht falsch ist, sondern die INS-Varianz bei der Bildung der Verstärkungsmatrix außer Acht lässt.

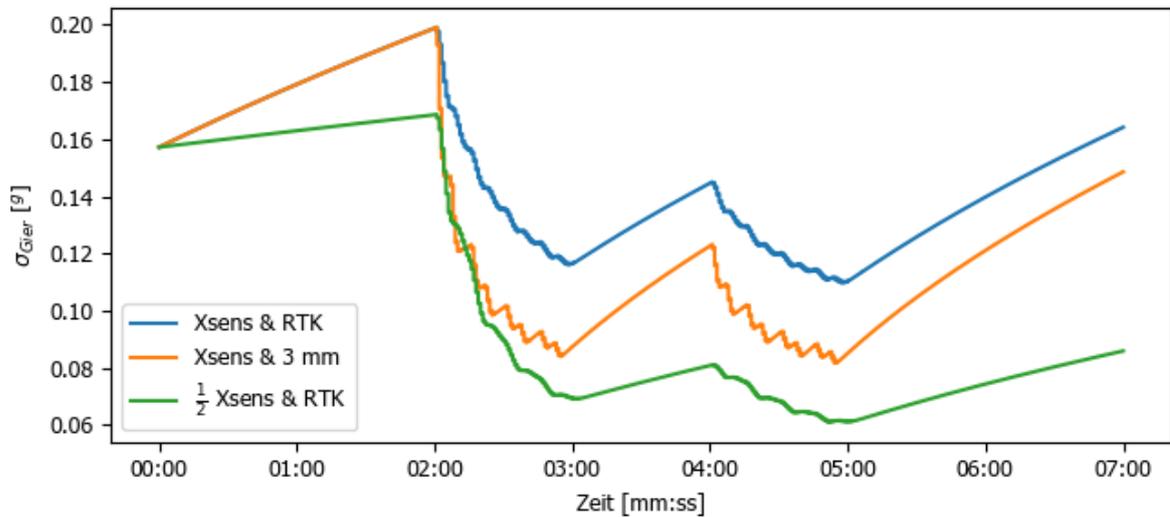


Abbildung 7.21: Gierwinkel-Standardabweichung verschiedener Simulationskonfigurationen; Flugszenario Nr. 3.3

Abschließend wird untersucht, wie sich die Standardabweichung des Gierwinkels verhält, wenn der Initialwert der Standardabweichung näher an das tatsächliche Genauigkeitsniveau verlegt wird. In Abbildung 7.22 ist dieser Versuch mit der Kennzeichnung „ $\frac{1}{2}$  Xsens & RTK (Init. angepasst)“ dargestellt. Das Gefälle der Standardabweichung ist deutlich zurückgegangen. Zusätzlich ist erkennbar, dass bei ausreichend lang andauernden horizontalen Beschleunigungsänderungen ein zu hoch angesetzter Initialwert der Standardabweichung zu seinem tatsächlichen Wert konvergiert.

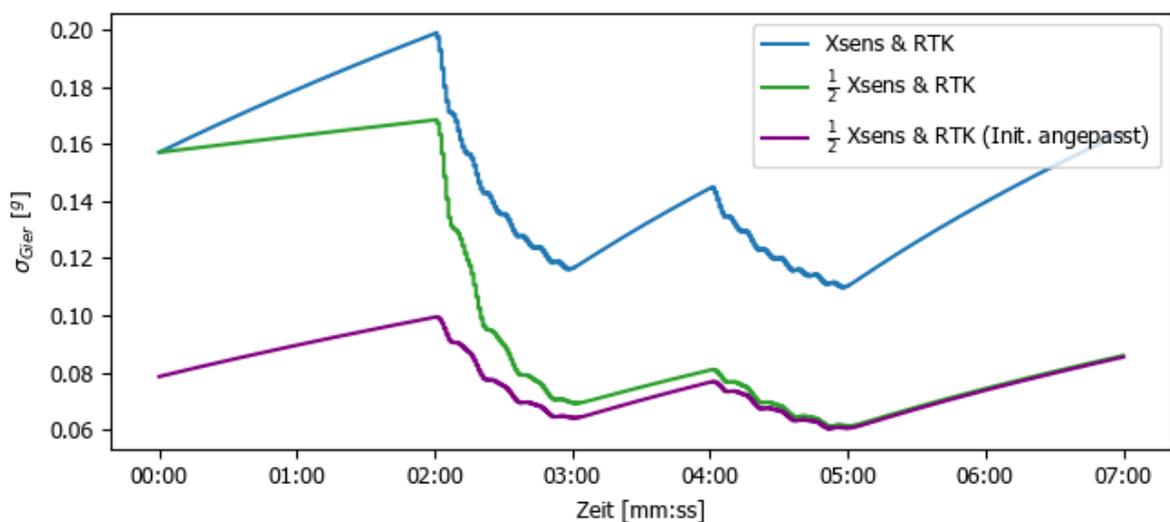


Abbildung 7.22: Gierwinkel-Standardabweichung verschiedener Simulationskonfigurationen; Spezielle Konfiguration mit angepasstem Initialwert; Flugszenario Nr. 3.3

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Im Zuge dieser Arbeit wurden Teile einer Simulationsumgebung implementiert, die anschließend zur Überprüfung und zu Simulationszwecken eines INS/GNSS-Integrationsalgorithmus verwendet wurden. Die Simulationsergebnisse wurden hinsichtlich der verrauschten Beobachtungen und der vordefinierten Flugmanöver untersucht.

Die durchgeführten Simulationen haben in erster Linie auf bekannte Problematiken hingewiesen, darunter der Drift der IN-Lösung und die unzureichende Schätzung des Gierwinkels im Vergleich zu den anderen untersuchten Zuständen.

Die Bestimmung des Gierwinkels stellt eine Herausforderung dar, da die Beobachtbarkeit dessen Fehlerzustandes von speziellen Manövern des UAVs abhängig ist. Ein wichtiger Aspekt dieser Arbeit ist die Erläuterung des Zusammenhangs zwischen Beobachtbarkeit des Gierwinkel-Fehlerzustandes und horizontalen Beschleunigungen. Dieser sei in gekürzter Version hier nochmal wiedergegeben: Für die Schätzung nicht-direkt beobachtbarer Zustände – hier die Orientierungszustände – sind Korrelationen erforderlich. Die Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen der Orientierung und der Geschwindigkeit bzw. der Position entstehen durch die Fortschreibung der Transitionsmatrix, die darin implementierte Kopplung der Fehlerzustände ist dabei von den gemessenen (horizontalen) Beschleunigungen abhängig. Der Gierwinkel-Fehlerzustand ist über die horizontalen Komponenten der gemessenen Beschleunigungen mit dem Geschwindigkeits- bzw. Positionsfehler gekoppelt. Bei horizontalen Beschleunigungen entstehen somit Korrelationen zwischen diesen Fehlerzuständen.

Zusammen mit den Varianzen der (Fehler-)Zustände bilden die Korrelationen das Systemrauschen. Bei der Bildung der Verstärkungsmatrix wird einerseits das Systemrauschen und andererseits das Beobachtungsrauschen benötigt. Die Untersuchungen des Kapitels 7 haben gezeigt, dass das Systemrauschen und somit die Korrelationen bei der Bildung der Verstärkungsmatrix maßgeblich mit einfließen. Die anschließende Multiplikation der Verstärkungsmatrix (stochastischen Anteil) mit der Innovation (funktionalen Anteil) führte schlussendlich zu größeren bzw. beobachtbaren Gierwinkel-Fehlerzuständen.

Die horizontalen Beschleunigungsänderungen sind zudem für die Senkung der geschätzten Standardabweichung des Gierwinkels verantwortlich. Anhand der Monte-Carlo-Simulation konnte nachgewiesen werden, dass die geschätzten und empirischen Standardabweichungen des Gierwinkels ident sind.

Abschließend wurden die stochastischen und funktionalen Eigenschaften der Beobachtungen variiert. Bei dieser Untersuchung wurde einerseits festgestellt, dass eine genauere Positionsinformation oder eine genauere IMU die Standardabweichung des Gierwinkels deutlich sinken lässt. Andererseits konnte gezeigt werden, dass auch bei fälschlicher Initialisierung der Standardabweichung des Gierwinkels mit ausreichend großen horizontalen Beschleunigungsänderungen die Standardabweichung zum tatsächlichen Wert konvergiert.

In weiterer Folge sollte an primärer Stelle die Beantwortung der hier noch offenen Fragen erfolgen, die da wären: Warum zeigen die Nadirkomponenten der Geschwindigkeit bzw. die Höhenkomponenten der Position einen minimalen Drift auf (siehe Abschnitt 7.1)? Warum haben

sich in Abschnitt 7.2 die Beschleunigungsänderungen und nicht – wie in Abschnitt 7.6 angedeutet – die Beschleunigungen als grundlegend für die Korrelationsbildung herausgestellt?

Anschließend bietet es sich an, weitere sensorspezifische Fehler zu simulieren. Der sog. bias ist aufgrund der Größenordnung und dessen möglichen Integrierung im Zustandsvektors eine Fehlerquelle, die für zukünftige Untersuchungen interessant erscheint. Zudem ist aus der Literatur (Groves, 2013, S. 575) bekannt, dass die *bias*-Schätzung ähnliche Probleme aufweist wie die Schätzung des Gierwinkel-Fehlerzustandes, sodass die hier gewonnenen Erkenntnisse möglicherweise zur Untersuchung der *bias*-Schätzung hinzugezogen werden könnten.

Im Hinblick auf zukünftige Anwendungen könnte die realisierte Simulationsumgebung für Planungszwecke eingesetzt werden. Den Ausgangspunkt bildet dabei die geplante Flugtrajektorie (samt Orientierungsinformation) des UAVs. Wie in Kapitel 6 beschrieben, können IMU- und GNSS-Beobachtungen generiert und sensorspezifische Beobachtungsfehler simuliert werden. Bei Simulationsdurchläufen kann anschließend der Einfluss der geplanten Trajektorie und der simulierten Beobachtungsfehler auf die geschätzten Zustände bestimmt werden. Durch die Gegendarstellung der geschätzten Zustände und deren vordefinierten Schwellwerte kann ein Maß für die Eignung einer Trajektorie zur Bestimmung von Zuständen definiert werden. Im konkreten Fall könnte sich beispielsweise herausstellen, dass der Gierwinkel bei längeren Flugperioden mit konstanter Geschwindigkeit den vordefinierten Schwellwert überschreitet. Gegensteuern ließe sich, indem Phasen horizontaler Beschleunigungsänderungen in die geplante Trajektorie eingebaut werden.

Eine weitere Fragestellung stellt sich im Hinblick auf die Verwendung der geplanten Trajektorie bei der Schätzung der Zustände. Der in dieser Arbeit vorgestellte Integrationsalgorithmus berücksichtigt diese Information nicht, obwohl diese zumindest für die Schätzung der Orientierung einen wertvollen Beitrag liefern könnte.

## 9 Literaturverzeichnis

- Kalos, M. H., & Whitlock, P. A. (1986). *Monte Carlo methods. Vol. 1: basics*. New York: Wiley & Sons.
- Bar-Itzhack, I. Y., & Goshen-Meskin, D. (1992). Observability analysis of piece-wise constant systems- part II: application to inertial navigation in-flight alignment. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 28(4), 1068-1075.
- Brown, R. G., & Hwang, P. Y. (2012). *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. John Wiley & Sons.
- Bryson, M., Kim, J., & Sukkarieh, S. (2005). Information and Observability Metrics of Inertial SLAM for On-line Path-planning on an Aerial Vehicle.
- Du, S., Sun, W., & Gao, Y. (2017). Improving Observability of an Inertial System by Rotary Motions of an IMU. *Sensors*, 698.
- Eller, C. (2016). *Technische Mechanik Kinematik und Kinetik*. Springer Vieweg.
- Farrell, J. (2008). *Aided Navigation: GPS with High Rate Sensors*. McGraw-Hill.
- Groves, P. (2013). *Principles of GNSS, Inertial And Multisensor Integrated Navigation Systems*. Artech House.
- Heunecke, O. (1995). *Zur Identifikation und Verifikation von Deformationsprozessen mittels adaptiver KALMAN-Filterung (Hannoversches Filter)*. Hannover: Universität Hannover.
- Heunecke, O. (2013). *Handbuch Ingenieurgeodäsie: Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen*. Heidelberg: Wichmann.
- Hong, S., Lee, M., Chun, H.-H., Kwon, S.-H., & Speyer, J. L. (2005). Observability of Error States in GPS/INS Integration. *IEEE TRANSACTIONS ON VEHICULAR TECHNOLOGY*, 54(2).
- Jekeli, C. (2001). *Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications*. Berlin: De Gruyter.
- Jwo, D.-J., & Cho, T.-S. (2010). Critical remarks on the linearised and extended Kalman filters with geodetic navigation examples. *Measurement*, 43(9), 1077-1089.
- Lu, G., Cannon, E., & Lachapelle, G. (1993). Attitude Determination in a Survey Launch Using Multi-Antenna GPS Technologies. *National Technical Meeting, ION*, 20-22.
- Mahnken, R. (2012). *Lehrbuch der Technischen Mechanik - Dynamik*. Berlin - Heidelberg: Springer.
- NIMA. (1997). *World Geodetic System 1984: Its Definition and Relationships With Local Geodetic Systems*. National Imagery And Mapping Agency (NIMA), Department of Defense.
- Petrie, G. (2010). Mobile Mapping Systems: An Introduction to the Technology. *GEOinformatics*, 13, 32-43.
- Rhee, I., Abdel-Hafez, M., & Speyer, J. (2004). Observability of an Integrated GPS/INS During Maneuvers. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 40, 526 - 535.
- Schlüter, W. (2007). Fundamentalstation Wettzell - ein geodätisches Observatorium. *Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*.

- Schödlbauer, A. (1999). *Geodätische Astronomie: Grundlagen und Konzepte*. Berlin: De Gruyter.
- Simon, D. (2006). *Optimal State Estimation: Kalman,  $H^\infty$  and Nonlinear Approaches*. John Wiley & Sons.
- Stadt Wien. (2019). Von Wien gibt Raum: <https://www.wiengibtraum.at/site/> abgerufen
- Titterton, D. H., & Weston, J. L. (2004). *Strapdown Inertial Navigation Technology*. The Institution of Electrical Engineers.
- Torge, W. (2001). *Geodesy*. Berlin: De Gruyter.
- von Fabeck, W. (1980). *Kreiselgeräte*. Würzburg: Vogel-Verlag.
- Wang, S., Chen, L., & Hu, H. (2013). Underwater Localization and Environment Mapping Using Wireless Robots. *Wireless Pers Commun*, 70, 1147-1170. Von <https://doi.org/10.1007/s11277-013-1106-z> abgerufen
- Wen, Z., Mounir, G., & Baolun, Y. (2012). Mathematical Model and Matlab Simulation of Strapdown Inertial Navigation System. *Modelling and Simulation in Engineering*. Hindawi.
- Wendel, J. (2011). *Integrierte Navigationssysteme: Sensordatenfusion, GPS und Inertiale Navigation*. München: Oldenbourg Verlag.
- Xsens Products. (2019). *Xsens Products MTi-G-710*. Von Xsens: <https://www.xsens.com/products/mti-g-710/> abgerufen
- Xsens. (2019). *Inertial sensors*. Von XSENS: <https://www.xsens.com/tags/inertial-sensors/> abgerufen

# 10 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1: Referenzrahmen (nach Wendel, 2011) .....	8
Abbildung 3.1: Aufbau eines inertialen Navigationssystems (nach Groves, 2013, S.163) .....	12
Abbildung 3.2: Bias Stabilität für verschiedene Qualitätsgruppen von Kreiseln (Xsens, 2019) .....	14
Abbildung 3.3: Nachführung der IN-Lösung (nach Groves, 2013, S. 176) .....	16
Abbildung 5.1: Closed loop INS/GNSS-Integrationsarchitektur (nach Jwo & Cho, 2010) .....	24
Abbildung 6.1: Horizontale Beschleunigungsmuster.....	32
Abbildung 6.2: Parameter einer Kreisbewegung mit fester Drehachse .....	33
Abbildung 6.3: Vergleich der Soll-Pose mit der aus den berechneten IMU-Beobachtungen und dem IN-Algorithmus bestimmten Pose; Daten eines realen Fluges .....	36
Abbildung 6.4: Xsens MTi-G-710 (Xens Products, 2019) .....	38
Abbildung 6.5: Soll-Drehraten und verrauschte Drehraten; Daten eines realen Fluges.....	38
Abbildung 6.6: Verrauschen einer Beobachtungszeitreihe mittels Standardnormalverteilung .....	39
Abbildung 7.1: Vergleich der Soll-Pose mit der aus verrauschten IMU-Beobachtungen und dem IN-Algorithmus bestimmten Pose (IN-Lösung); Reduzierung der Positionen mittels initialer Position; Flugszenario Nr. 1.....	44
Abbildung 7.2: Vergleich der Soll-Pose mit der aus verrauschten IMU-Beobachtungen und dem IN-Algorithmus bestimmten Pose; Reduzierung der Positionen mittels initialer Position; Flugszenario Nr. 1 .....	45
Abbildung 7.3: Links: Soll-Ist-Abweichungen des Gierwinkels (Ist: INS/GNSS-Lösung); Rechts: Betrag der horizontalen Beschleunigungen Flugszenario Nr. 3.1 .....	46
Abbildung 7.4: Korrelationskoeffizient zwischen den Fehlerzuständen: Nickwinkel und Geschwindigkeitskomponenten; Flugszenario Nr. 1 (Ausschnitt der ersten fünf Minuten) .....	48
Abbildung 7.5: Korrelationskoeffizient zwischen den Fehlerzuständen: Gierwinkel und Geschwindigkeitskomponenten; Flugszenario Nr. 1 (Ausschnitt der ersten fünf Minuten) .....	48
Abbildung 7.6: Links: Korrelationskoeffizient zwischen den Fehlerzuständen: Nickwinkel und Geschwindigkeitskomponenten; Rechts: Betrag der horizontalen Beschleunigungen; Flugszenario Nr. 3.2.....	49
Abbildung 7.7: Links: Korrelationskoeffizient zwischen den Fehlerzuständen: Gierwinkel und Geschwindigkeitskomponenten; Rechts: Betrag der horizontalen Beschleunigungen; Flugszenario Nr. 3.2.....	50
Abbildung 7.8: Links: Korrelationskoeffizient zwischen den Fehlerzuständen: Gierwinkel und Geschwindigkeitskomponenten; Rechts: Betrag der horizontalen Beschleunigungen; Flugszenario Nr. 3.4.....	51
Abbildung 7.9: Links: Korrelationskoeffizient zwischen den Fehlerzuständen: Gierwinkel und Geschwindigkeitskomponenten; Rechts: Betrag der horizontalen Beschleunigungen; Flugszenario Nr. 3.5.....	51
Abbildung 7.10: Einträge der Verstärkungsmatrix: 3. Zeile der Submatrix $\mathbf{K}_{12, k}$ ; Flugszenario Nr. 3.2 .....	53
Abbildung 7.11: Einträge der Verstärkungsmatrix: 2. Zeile der Submatrix $\mathbf{K}_{12, k}$ ; Flugszenario Nr. 3.2 .....	53
Abbildung 7.12: Links: Geschätzte Fehlerzustände des Nick- und Gierwinkels; Rechts: Betrag der horizontalen Beschleunigungen; Flugszenario Nr. 3.2 .....	54
Abbildung 7.13: Standardabweichung der Orientierungszustände; Flugszenario Nr. 3.2.....	55
Abbildung 7.14: Einflussfaktoren auf die Genauigkeitsbetrachtung von Fehlerzuständen.....	56
Abbildung 7.15: Links: Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Gierwinkels und der Geschwindigkeitskomponenten; Rechts: Betrag der horizontalen Beschleunigungen; Flugszenario Nr. 3.3.....	58
Abbildung 7.16: Einträge der Verstärkungsmatrix: 3. Zeile der Submatrix $\mathbf{K}_{12, k}$ ; Flugszenario Nr. 3.3.....	58
Abbildung 7.17: Standardabweichung der Orientierungsfehlerzustände; Flugszenario Nr. 3.3 .....	59
Abbildung 7.18: Schwarz: Soll-Ist-Gierwinkelabweichungen; Rot: Dreifache geschätzte Standardabweichung des Gierwinkels; 600 INS/GNSS-Simulationsdurchläufe; Flugszenario Nr. 3.3 .....	60
Abbildung 7.19: Rot: Geschätzte Standardabweichung des Gierwinkels; Schwarze (vertikale) Balken: Ensemble-Standardabweichung der Soll-Ist-Gierwinkelabweichungen; Ensemble-Mittelwert & -Median der Soll-Ist-Gierwinkelabweichungen; 600 INS/GNSS-Simulationsdurchläufe; Flugszenario Nr. 3.3 .....	60
Abbildung 7.20: Beschleunigungsfehler verursacht durch Orientierungsfehler (nach Groves, 2013, S. 206); Gestrichelte Linie: Zunahme des Beschleunigungsfehler bei gleichbleibendem Orientierungsfehler .....	61
Abbildung 7.21: Gierwinkel-Standardabweichung verschiedener Simulationskonfigurationen; Flugszenario Nr. 3.3 .....	66

Abbildung 7.22: Gierwinkel-Standardabweichung verschiedener Simulationskonfigurationen; Spezielle Konfiguration mit angepasstem Initialwert; Flugszenario Nr. 3.3 .....	66
Abbildung 11.1: Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Rollwinkels und der Geschwindigkeitskomponenten; Flugszenario Nr. 1 .....	73
Abbildung 11.2: Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Rollwinkels und der Positionskomponenten; Flugszenario Nr. 1 .....	73
Abbildung 11.3: Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Gierwinkels und der Geschwindigkeitskomponenten; Flugszenario Nr. 2.1 .....	74
Abbildung 11.4: Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Gierwinkels und der Positionskomponenten; Flugszenario Nr. 2.2 .....	74
Abbildung 11.5: Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Rollwinkels und der Geschwindigkeitskomponenten; Flugszenario Nr. 3.1 .....	75
Abbildung 11.6: Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Gierwinkels und der Positionskomponenten; Flugszenario Nr. 3.2 .....	75
Abbildung 11.7: Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Rollwinkels und der Geschwindigkeitskomponenten; Flugszenario Nr. 3.2 .....	76
Abbildung 11.8: Einträge der Verstärkungsmatrix: 3. Zeile der Submatrix $\mathbf{K}_{11, k}$ ; Flugszenario Nr. 3.2 .....	76
Abbildung 11.9: Einträge der Verstärkungsmatrix: 2. Zeile der Submatrix $\mathbf{K}_{11, k}$ ; Flugszenario Nr. 3.2 .....	77

# 11 Anhang – Ergänzende Abbildungen

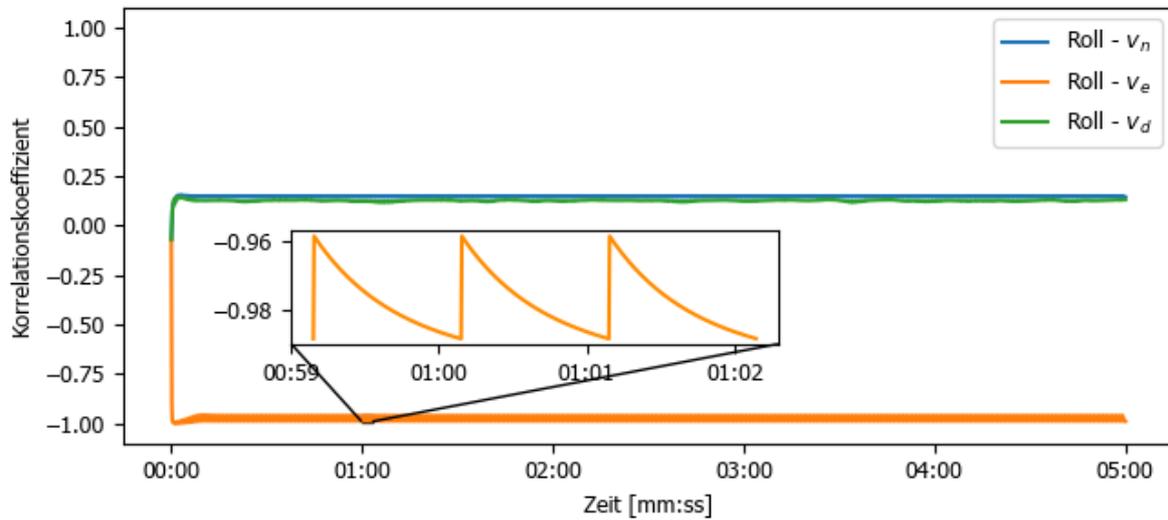


Abbildung 11.1: Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Rollwinkels und der Geschwindigkeitskomponenten; Flugszenario Nr. 1

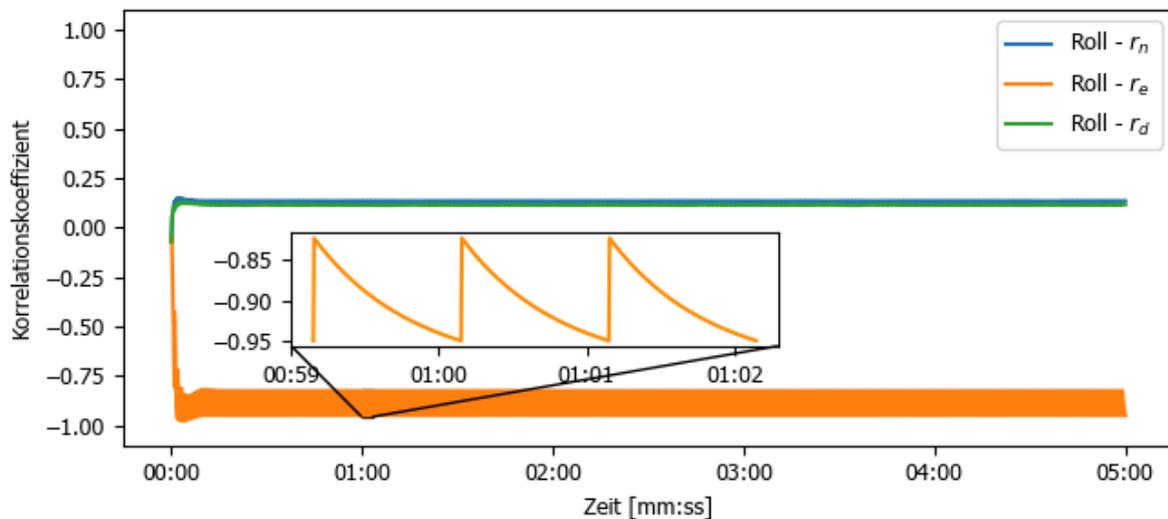


Abbildung 11.2: Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Rollwinkels und der Positionskomponenten; Flugszenario Nr. 1

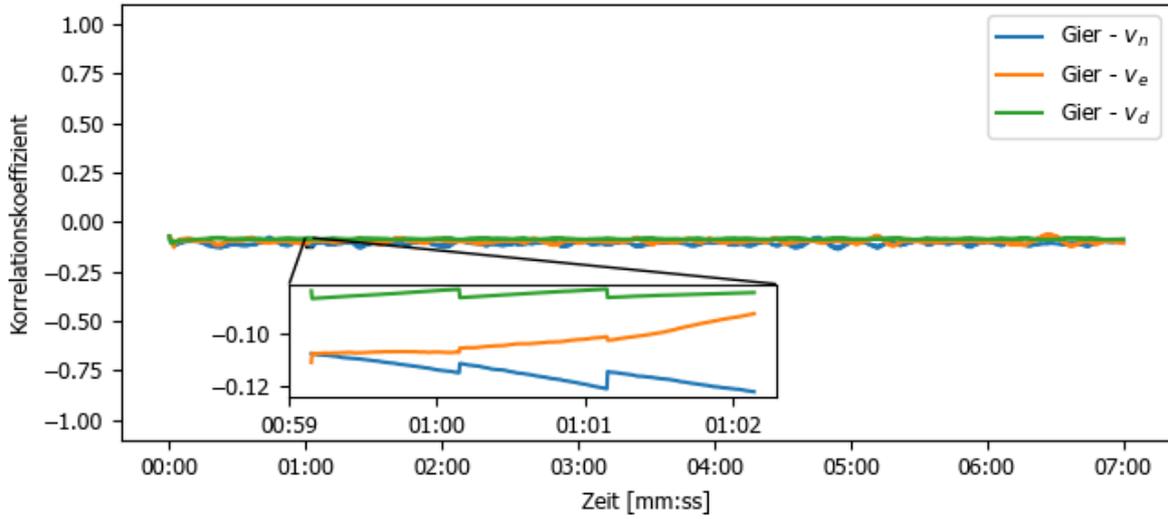


Abbildung 11.3: Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Gierwinkels und der Geschwindigkeitskomponenten; Flugszenario Nr. 2.1

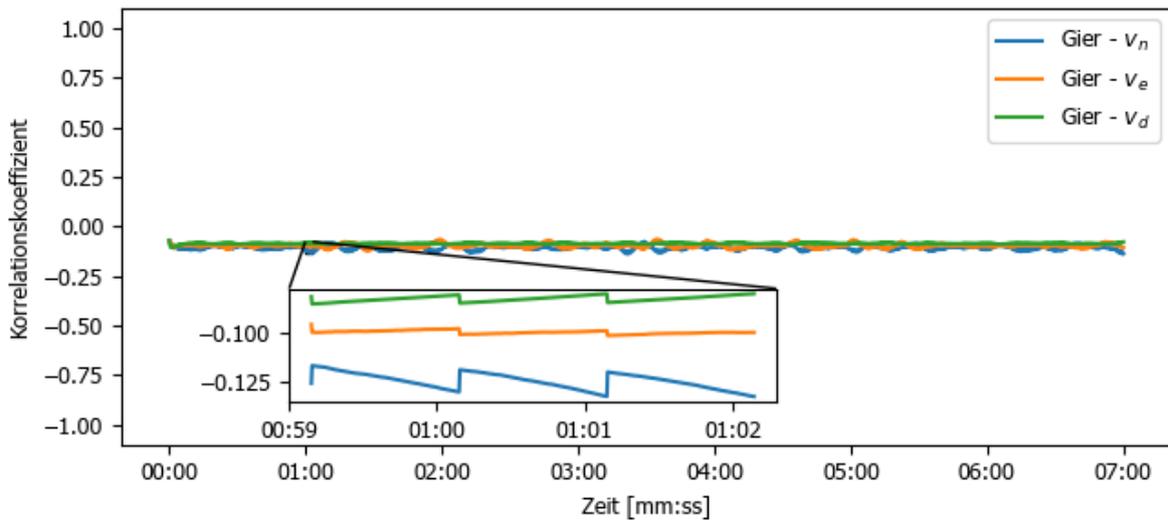


Abbildung 11.4: Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Gierwinkels und der Positionskomponenten; Flugszenario Nr. 2.2

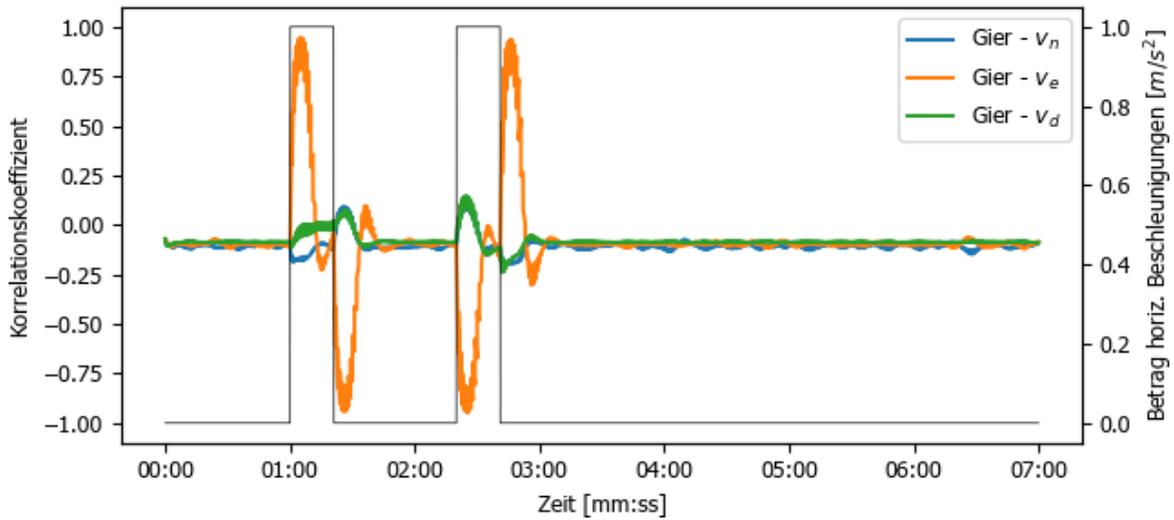


Abbildung 11.5: Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Rollwinkels und der Geschwindigkeitskomponenten;  
Flugszenario Nr. 3.1

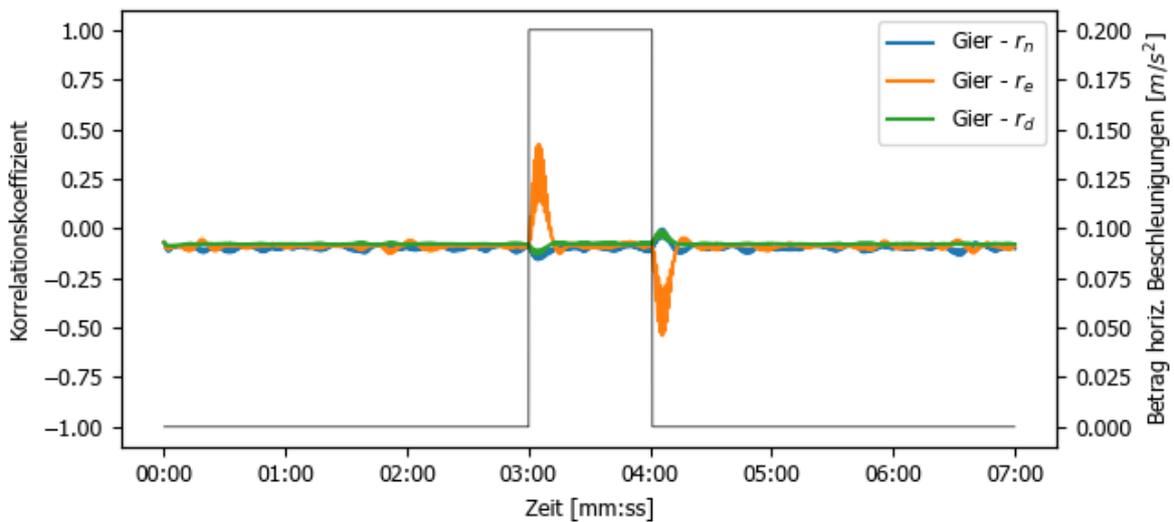


Abbildung 11.6: Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Gierwinkels und der Positionskomponenten;  
Flugszenario Nr. 3.2

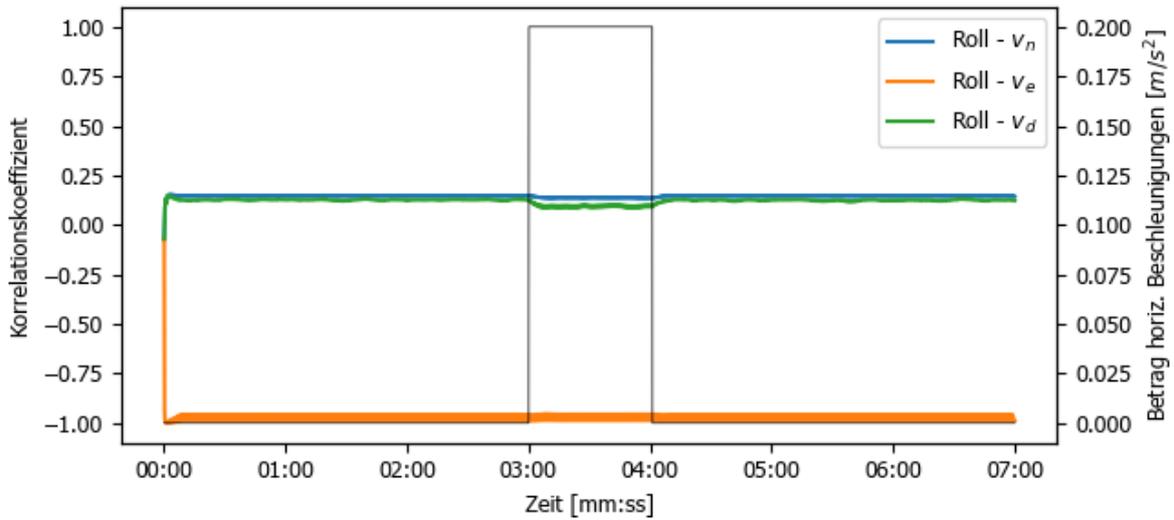


Abbildung 11.7: Korrelationen zwischen den Fehlerzuständen des Rollwinkels und der Geschwindigkeitskomponenten; Flugszenario Nr. 3.2

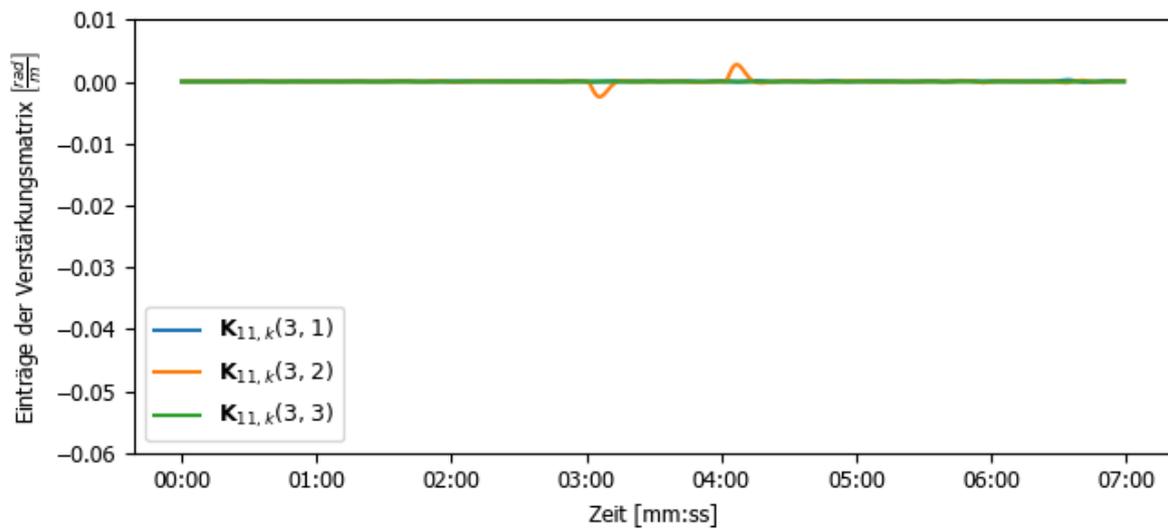


Abbildung 11.8: Einträge der Verstärkungsmatrix: 3. Zeile der Submatrix  $\mathbf{K}_{11,k}$ ; Flugszenario Nr. 3.2

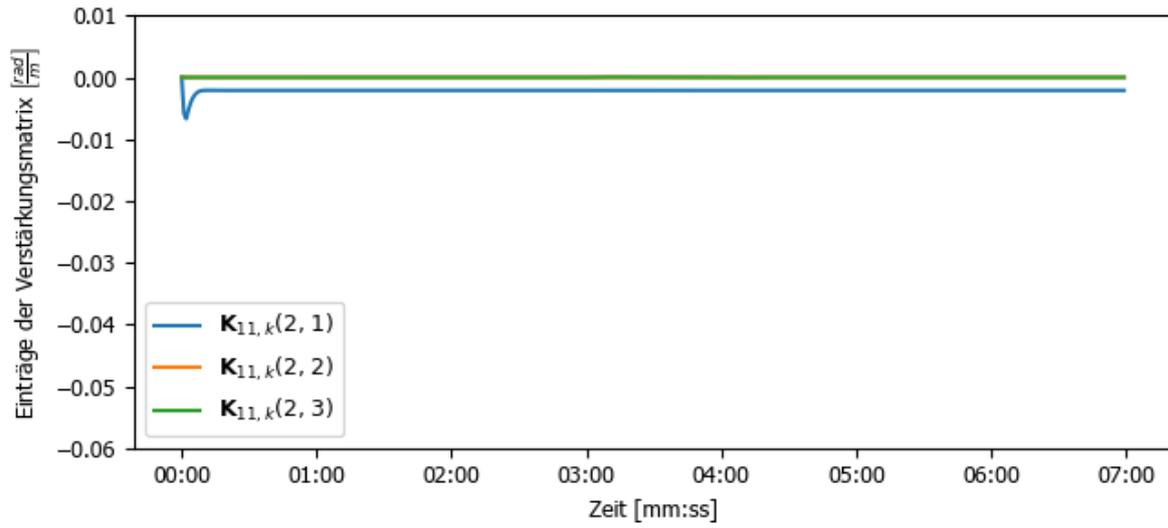


Abbildung 11.9: Einträge der Verstärkungsmatrix: 2. Zeile der Submatrix  $\mathbf{K}_{11,k}$ ; Flugszenario Nr. 3.2