

Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (<http://www.ub.tuwien.ac.at>).

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (<http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/>).

DIPLOMARBEIT

Perspektive - Ein Fernlehrkonzept für den Mathematikunterricht mit CAD - 3D[©]

ausgeführt am [©]Institut für Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao. Univ. Prof. Mag. Dr. Hans - Peter Paukowitsch

durch
Sandra Luef
St. Lorenzerstrasse 222, 2620 Ternitz - Raglitz
e-mail: s.m.l@gmx.net

Raglitz, im Mai 2003

Vorwort

Die vorliegende Diplomarbeit ist im Rahmen des vom Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur geförderten Projektes [bau@home](#) entstanden. Diese wurde auf Grund der Bildungsinitiative „Neue Medien in der Lehre auf Universitäten und Fachhochschulen“ entwickelt.

Unter Leitung von O. Univ. Prof. H. Stachel ist das Institut für Geometrie der Technischen Universität Wien als Projektpartner von [bau@home](#) eingebunden.

Der Kern dieses Projekts ist es, eine komplexe Internetseite zu errichten um der Allgemeinheit zu ermöglichen, sich Wissen durch Selbststudium anzueignen.

Meine Diplomarbeit liefert mit dem Einblick in die Perspektive einen Teil dieses Gesamtprojekts, wobei als Konstruktionsmedium die unter Leitung von Prof. Stachel am Institut für Geometrie der TU Wien entwickelte 3D - Software CAD - 3D[©] verwendet wird.

Um das Projekt im Detail zu betrachten, benötigt man ein etwas höheres Bildungsniveau. Voraussetzungen an die Studierenden sind die Lehrinhalte der Mathematik und Darstellenden Geometrie, sowie Konstruktionsroutinen des Zeichenpaketes CAD - 3D[©]. Die Grundbegriffe der Perspektive sowie die Modellierung unter Verwendung von CAD - 3D[©] sind auch bereits für den GZ - und Mathematikunterricht in der Unterstufe von höheren Schulen und Hauptschulen geeignet.

Der hier behandelte Bereich der Perspektive wird aus didaktischen Gründen in vier Teilgebiete gegliedert, wobei die Theorie durch praktische Aufgaben veranschaulicht wurde. Diese Beispiele sind sowohl für die Konstruktion am Zeichenblatt als auch für die Modellierung mit CAD - 3D[©] ausgearbeitet.

Die Konstruktion am Zeichenblatt wird mittels Flash - Objekten für den Lernenden aufbereitet. Diese Flash - Objekte sind Filme, die ähnlich wie Power - Point - Präsentationen per Mausklick zum nächsten Bild wechseln. So kann der Betrachter in der Serie der einzelnen Konstruktionsschritte blättern.

Das CAD - 3D[®] liefert dabei eine didaktisch sehr gut eingestellte Möglichkeit, Raumobjekte am Bildschirm zu modellieren und dann in dynamischer Weise Parallel - und Zentralriss anfertigen zu lassen. Mit Hilfe von VRML kann man durch das Simulieren eines räumlichen Umrundens des Objekts ein anschaulicher Überblick geboten werden.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
1. Einleitung.....	5
2. Maßaufgaben	9
2.1. Messen in einer Geraden.....	10
2.2. Messen in einer Ebene	13
2.3. Winkel zwischen zwei Geraden	16
2.4. Orthogonale Lage: Gerade - Ebene	17
2.5. Anwendungsbeispiel	18
3. Axonometrische Methode der Perspektive.....	21
3.1. Zentralriss eines kartesischen Rechtssystems.....	22
3.2. Horizontale Blickachse.....	24
3.3. Nichthorizontale Blickachse.....	30
3.4. Paralleldrehen einer Koordinatenebene.....	35
3.5. Beispiele zur axonometrischen Methode der Perspektive.....	36
Anhang zu Kapitel 3.....	57
1. Beispiel: Kirche	58
2. Beispiel: Kamin	80
4. Kreisdarstellung	109
4.1. Beispiele.....	110
1. Fall: Ellipse.....	113
2. Fall: Parabel.....	116
3. Fall: Hyperbel.....	118
4.2. Beispiele zur Kreisdarstellung.....	120

Anhang zu Kapitel 4.....	134
1. Beispiel: Durchlass.....	135
2. Beispiel: Triumphbogen.....	163
5. Entzerrung eines Zentralrisses.....	197
5.1. Wozu braucht man die Entzerrung?.....	198
5.2. Grundlagen der Entzerrung - Theorie	199
5.3. Entzerrung ebener Figuren - Möbius - Netz.....	201
5.4. Einbildfotogrammetrie	204
5.5. Rechnerische Entzerrung ebener Figuren.....	212
5.6. Beispiel zur Entzerrung.....	218
Literaturverzeichnis.....	222
Danksagung.....	224

1. Einleitung

Es soll nun ein kurzer Einblick in das fertige Internetprojekt, hier in den Teil der Perspektive, gegeben werden, welches dieser Diplomarbeit zu Grunde liegt. Zum Kapitel Perspektive wird man auf der Homepage des Projekts hingeleitet. Die Startseite sieht wie folgt aus:

<u>Perspektive</u>	
Maßaufgaben	<p>Alles was wir sehen, sehen wir in Perspektive!</p> <p>Hier einige Fotos von berühmten Bauwerken aus einer guten perspektivischen Sicht.</p> <div data-bbox="475 974 778 1205"></div> <p>Brooklyn Bridge</p> <div data-bbox="790 896 1375 1281"></div> <p>Wiener Staatsoper</p>
Axonometrische Methode der Perspektive	
Kreisdarstellung	
Entzerrung eines Zentralrisses	
zurück zur Startseite	

Die Internetseite über Perspektive besteht aus drei sogenannten „Frames“. Das erste, obere Frame beinhaltet die Überschrift „Perspektive“. Das zweite und linke Frame ist der Leitfaden durch das Kapitel. Es sind zunächst die vier Hauptkapitel angeführt, die mittels Hyperlinks zu diversen Unterkapitel führen, aus denen man wieder auswählen kann und zur gewünschten Information kommt, die dann im dritten und rechten Frame angezeigt wird.

Man kann zum Beispiel das Kapitel „Axonometrische Methode der Perspektive“ anklicken und hat nun folgende weitere Wahlmöglichkeiten:

[Maßaufgaben](#)

Axonometrische Methode der Perspektive:

- [Zentralriss eines kartesischen Rechtssystems](#)
- [horizontale Blickachse](#)
- [nicht horizontale Blickachse](#)
- [Paralldrehen einer Koordinatenebene](#)
- [Beispiele zur axonometrischen Methode der Perspektive](#)

[Kreisdarstellung](#)

[Entzerrung eines Zentralrisses](#)

[zurück zur Startseite](#)

Interessiert man sich zum Beispiel für den Unterpunkt „horizontale Blickachse“, klickt man den Hyperlink an und im rechten Fenster bekommt man die Information.

Perspektive

<p>Maßaufgaben</p> <p>Axonometrische Methode der Perspektive:</p> <ul style="list-style-type: none">• Zentralriss eines kartesischen Rechtssystems• horizontale Blickachse• nicht horizontale Blickachse• Paralldrehen einer Koordinatenebene• Beispiele zur axonometrischen Methode der Perspektive <p>Kreisdarstellung</p> <p>Entzerrung eines Zentralrisses</p> <p>zurück zur Startseite</p>	<p style="text-align: center;"><u>Horizontale Blickachse</u></p> <ol style="list-style-type: none">1. Horizontale Blickachse2. Angabe eines einfachen Beispiels3. Beispiel: Quader4. Sonderfälle <hr/> <p><u>1. Horizontale Blickachse:</u></p> <p>Falls das abzubildende Objekt oder der gewünschte Bildeindruck nicht eine andere</p>
--	--

Die einzelnen Unterkapitel sind mit Querverweisen innerhalb der Seite versehen, sodass man ganz oben sieht, welche weiteren Unterteilungen diese Unterkapitel beinhalten. Ein Mausklick auf einen solchen Querverweis und man hüpfert sofort zu diesem Abschnitt.

Die Nummerierung der Kapitel der Diplomarbeit stimmen nicht mit jener der Internetseite überein. Eine exakte Nummerierung ist im Internet nicht notwendig, wobei bei der Diplomarbeit eine chronologische Vorgangsweise von Vorteil ist.

Im Kapitel „Axonometrische Methoden der Perspektive“ und im Kapitel „Kreisdarstellung“ gibt es jeweils ein Unterkapitel „Beispiele“, wo je zwei Flash - Objekte eingebunden sind. Man kann sich so die einzelnen Konstruktionsschritte der Beispiele hintereinander ansehen und zugleich auf die Erklärung der Bilder klicken, die sich auf einer eigenen html - Seite befinden. In der Diplomarbeit sind die Bilder mit Erklärung im Anhang jedes Kapitels angeführt. Zu den Beispielen ist auch eine Anleitung gegeben, wie man die Objekte mit CAD - 3D[©] modelliert und diese können damit gezeichnet werden. Das Exportieren der Zeichnungen mit VRML liefert durch das Simulieren eines räumlichen Umrundens des Objekts einen anschaulichen Überblick.

In der Diplomarbeit muss man bei Verweisen auf andere Kapitel blättern um zur gewünschten Seite zu gelangen, im Projekt wurde dieser Nachteil durch Hyperlinks beseitigt.

Dieser Diplomarbeit liegt eine CD bei, welche das gesamte Internetprojekt beinhaltet und auch die Einzelzeichnungen der Beispiele. Die Startseite, die man anklicken muss um sich das Projekt ansehen zu können, heißt „perspektive.html“.

2. Maßaufgaben

2.1. Messen in einer Geraden

- a. g ist Hauptgerade h
 - b. g ist keine Hauptgerade
-

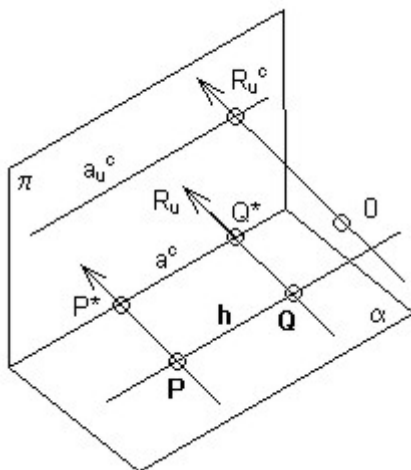
Gegeben ist das Bild einer Geraden g und die Punkte P^c und Q^c , die auf der Geraden g liegen.

Gesucht ist die wahre Länge der Strecke $[P,Q]$.

Hilfe zur Problemstellung:

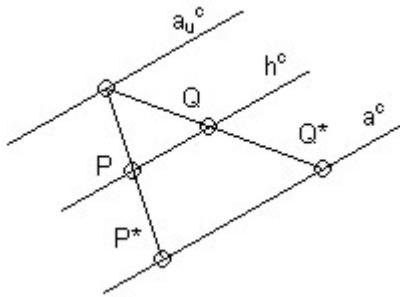
In der Perspektive wird eine Strecke dann unverkürzt abgebildet, wenn die Strecke in der Bildebene π liegt.

a. g ist Hauptgerade h:



Wir legen eine Ebene a , gegeben durch ihre Spurgerade a und ihre Fluchtgerade a_u^c , durch die Gerade h . Die Gerade h wird in die Spur verschoben. Die Schieberrichtung wird beliebig durch einen Fernpunkt R_u in der Ebene a angenommen. Die Punkte P und Q werden auf P^* und Q^* in die Spur a verschoben.

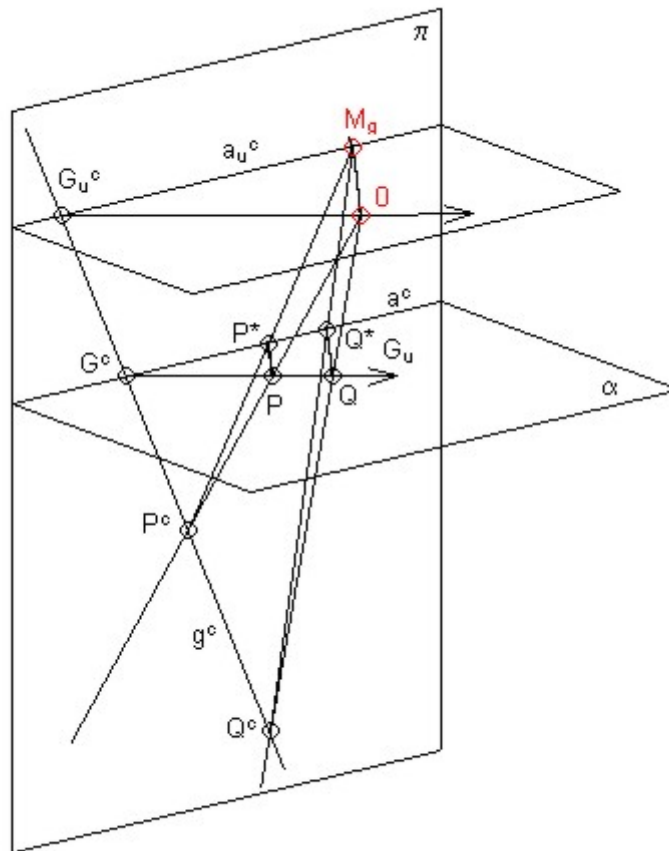
Konstruktion am Zeichenblatt:



Wir haben h^c und die Ebene α durch a^c und a_u^c gegeben.

R_u^c kann beliebig auf a_u^c gewählt werden. Dann wird die Strecke $\overline{P^cQ^c}$ aus R_u^c auf a^c projiziert und wir erhalten $\overline{P^{*c}Q^{*c}}$ mit der wahren Länge \overline{PQ} .

b. g ist keine Hauptgerade:



Wir wählen wieder eine beliebige Ebene a durch g , gegeben durch ihre Spurgerade a und ihre Fluchtgerade a_u^c . Da g in der Ebene a liegt, liegt der Fluchtpunkt G_u^c der Gerade g auf der Fluchtgeraden der Ebene und der Spurpunkt G^c der Gerade g liegt auf der Spurgeraden der Ebene.

Wir drehen die Gerade in der Ebene a um ihren Spurpunkt G^c in die Spur a der Ebene. Die neuen Punkte heißen P^* und Q^* .

Die Drehung ersetzen wir durch die Drehsehnenn, die zueinander parallel sind. Diese Drehsehnenn liegen in der Ebene a . Daraus folgt, dass auch der Drehsehnennfernnpunkt D_u in der Ebene a . Der Drehsehnennfluchtpunkt D_u^c liegt dann auf der Fluchtgeraden a_u^c .

$M_g := D_u^c$ wird Messpunkt von g bezüglich a genannt.

Wir sehen:

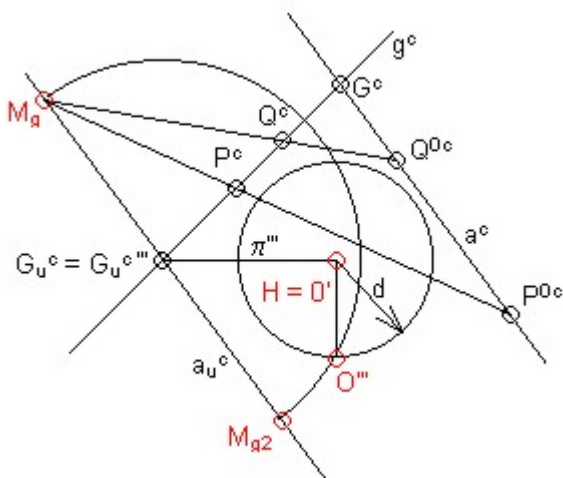
Die Dreiecke (G, P, P^*) und (G_u^c, O, M_g) sind ähnlich.

Durch die Drehung gilt: $\overline{G_u^c O} = \overline{G_u^c M_g}$.

Konstruktion am Zeichenblatt:

Gegeben: Die Gerade g in ihrem Zentralriss g^c ist festgelegt durch ihren Spur - und ihren Fluchtpunkt G^c und G_u^c und durch zwei weitere Punkte P^c und Q^c . Weiters ist gegeben der Hauptpunkt H und die Distanz d .

Gesucht: die wahre Länge der Strecke \overline{PQ} .



Wir wählen eine beliebige Ebene a durch ihre Spurgerade a^c und ihre Fluchtgerade a_u^c .

Wir suchen uns nun den Abstand von G_u^c nach O , denn diese Länge ist gleich der Länge von G_u^c zum Messpunkt M_g abgeschlagen auf a_u^c .

Durch Projektion von P^c und Q^c aus dem Messpunkt M_g erhalten wir P^{*c} und Q^{*c} . Wie wir schon wissen ist $\overline{P^{*c} Q^{*c}} = \overline{PQ}$.

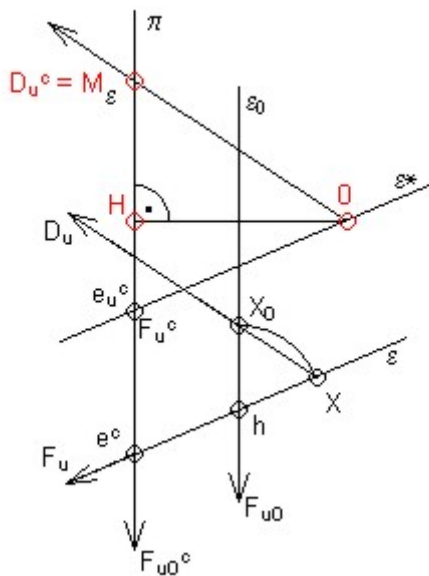
2.2. Messen in einer Ebene

- a. Drehen um eine Hauptgerade
 - b. Drehen der Ebene ε um ihre Spurgerade
-

Gegeben ist eine nicht projizierende Ebene ε .

a. Drehen um eine Hauptgerade

Wir drehen diese Ebene um eine ihrer Hauptgeraden h in die Ebene ε_0 (parallel zu π).



Wir ersetzen die Drehung durch die Drehsehnennetzen mit Drehsehnenfernnpunkt D_u und Drehsehnenfluchtpunkt D_u^c .

Bei der Drehung liegen die in der Skizze eingezeichneten Punkte X , X_0 und D_u auf einer Geraden.

Nach Zentralprojektion liegen X^c , X_0^c und D_u^c wieder auf einer Geraden. Das gilt für alle Punkte X aus ε .

Wir bekommen eine Abbildung in π , die folgendes leistet:

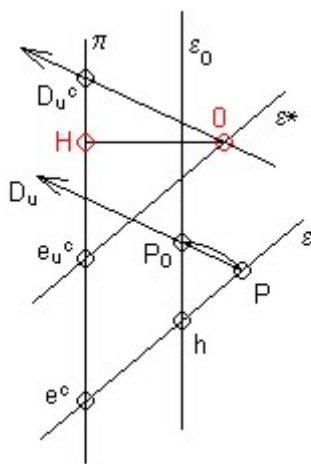
- X^c , X_0^c und D_u^c sind kollinear.
- Die Spurgerade h^c wird auf sich abgebildet.

Eine Figur F , die in ε liegt ist ähnlich zu der abgebildeten Figur F_0^c in π . Die Figur F_0^c entsteht durch zentrische Streckung mit Zentrum O nach der Drehung von ε in ε_0 (wobei F in F_0 übergeht).

Die Figur F_0^c ist perspektiv kollinear zu F^c .

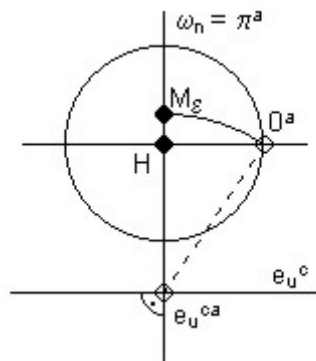
Wir erhalten eine perspektive Kollineation mit Zentrum D_u^c und Achse h^c . Der Drehsehnenfluchtpunkt D_u^c wird Messpunkt M_ε genannt.

Konstruktion am Zeichenblatt:



Wir erhalten die ähnlichen Dreiecke (h, P, P_0) und (e_u^c, O, D_u^c) . Aus $\overline{P_0h} = \overline{Ph}$ folgt $\overline{D_u^c e_u^c} = \overline{O e_u^c}$.

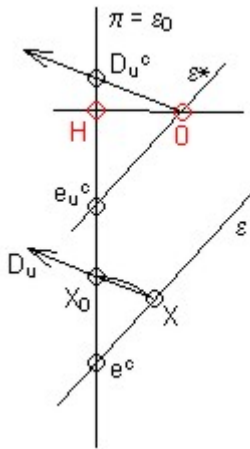
Die Konstruktion von $\overline{O e_u^c}$ funktioniert wie in der unten abgebildeten Skizze.



Daraus folgt der **Satz**:

Ein Messpunkt M_ε hat von e_u^c denselben Abstand wie der Augpunkt O .

b. Drehen der Ebene ε um ihre Spurgerade:



Hier erhalten wir analog zum [ersten Punkt](#) eine perspektive Kollineation mit Zentrum D_u^c und Achse e_u^c . e_u^c ist das Urbild der Ferngerade (=Verschwindungsgerade).

Auch die Konstruktion am Zeichenblatt ist analog zum ersten Punkt dieses Kapitels.

Beim Drehen um die Spurgerade von ε , entsteht in π eine kongruente Figur: $F_0 = F_0^c$.

2.3. Winkel zwischen zwei Geraden

Gegeben sind zwei Geraden a und b in der Ebene ε durch ihre Spurpunkte A^c und B^c und ihre Fluchtpunkte A_u^c und B_u^c .

Diese Punkte liegen auf der Spurgeraden $e^c = (A^c B^c)$ und der Fluchtgeraden $e_u^c = (A_u^c B_u^c)$ der Ebene ε .

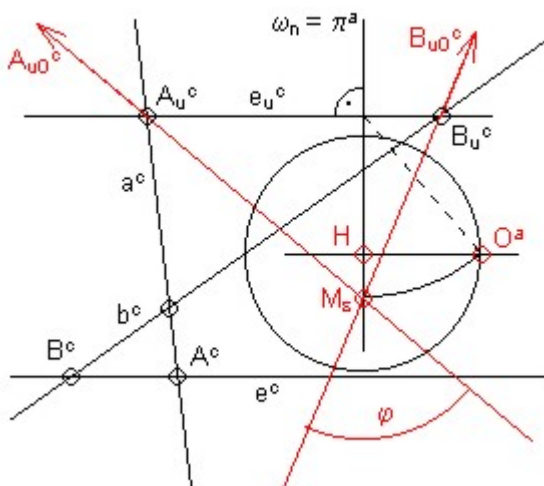
Gesucht ist der Winkel φ , den die beiden Geraden einschließen.

Wir drehen die Ebene ε parallel π . Aus dem Kapitel [Messen in einer Ebene](#) wissen wir, dass eine Figur F aus ε :

- in eine dazu ähnliche Figur F_0^c abgebildet wird (wenn um eine Hauptgerade gedreht wird)
- oder sogar auf eine kongruente Figur F_0^c abgebildet wird (wenn um die Spur e^c von ε gedreht wird).

Daraus können wir folgern, dass ein Winkel φ beim Paralleldrehen erhalten bleibt.

Konstruktion am Zeichenblatt:



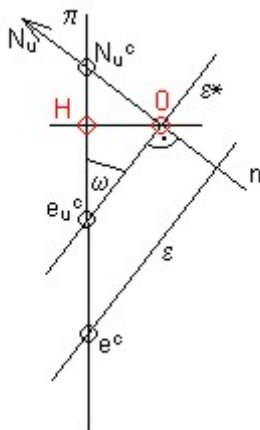
Die Geraden a und b sind durch ihre Spur- und Fluchtpunkte gegeben. Bei der perspektiven Kollineation gehen A_u^c und B_u^c in die Fernpunkte A_{u0}^c und B_{u0}^c mit der Richtung $(M_\varepsilon A_u^c)$ beziehungsweise $(M_\varepsilon B_u^c)$ über. Das heißt der Winkel φ scheint auch wieder als Winkel $\angle(A_u^c M_\varepsilon B_u^c)$ auf.

2.4. Orthogonale Lage: Gerade - Ebene

Gegeben ist eine Ebene ε .

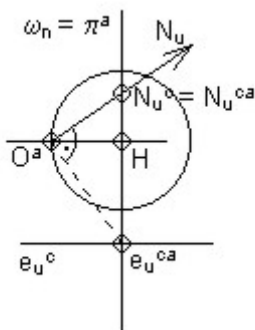
Gesucht sind die orthogonalen Geraden zu ε .

Alle zu einer ε normalen Geraden besitzen denselben Fernpunkt N_u . Sein Zentralriss N_u^c wird Normalenfluchtpunkt genannt. Er fällt in den Spurpunkt der Normalen n zu ε durch den Augpunkt O .



Die Normale n gehört der Achsenebene w an, die normal auf die Ebene ε steht. Das heißt w steht normal auf e_u^c .

Konstruktion am Zeichenblatt:



Wir sehen, dass der Normalenfluchtpunkt N_u^c als Antipol der Fluchtgeraden von ε bezüglich des Distanzkreises konstruiert wird.

2.5. Anwendungsbeispiel

Da das Kapitel der Maßaufgaben etwas trocken ist, wollen wir uns ansehen wo wir solche theoretischen Dinge in der Praxis finden. Gehen wir hinaus in die frische Luft und betrachten wir die Landschaft und die Häuser, so sehen wir alles in Perspektive. Viele Menschen fahren Tag täglich mit öffentlichen Verkehrsmittel zur Arbeit, jedoch betrachten die wenigsten Leute die Perspektive, die sie rund um sich sehen können.

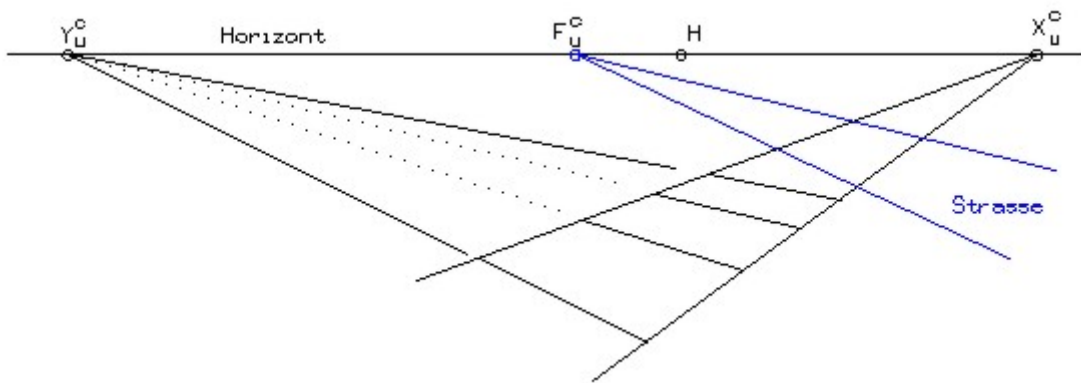
Ein Beispiel dafür sind Eisenbahnschienen. So ein Bild, wie das folgende, hat sicher schon jeder gesehen, doch dass wir dabei Perspektive sehen, wenn wir die Schienen ansehen, an das denkt selten jemand.



Eisenbahnschienen

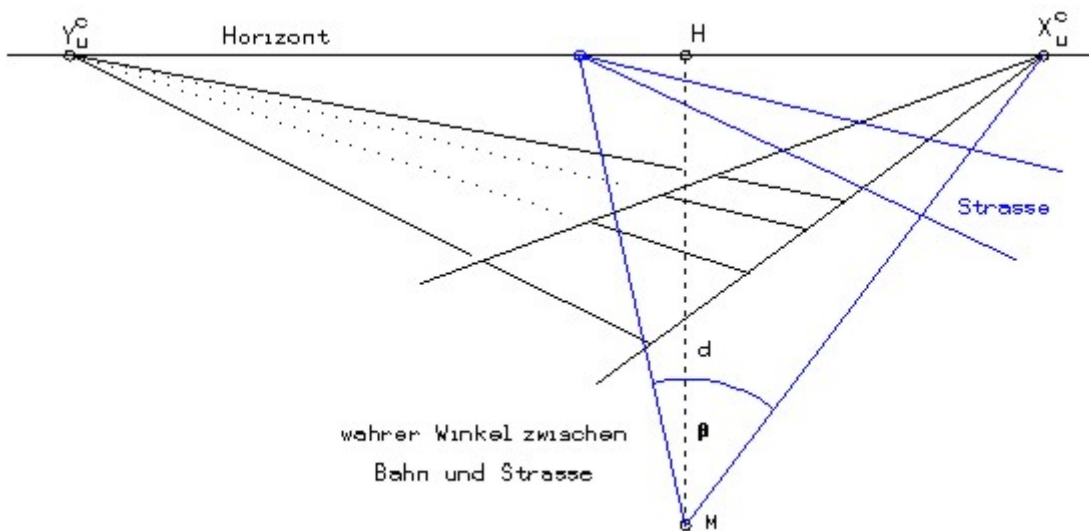
Nun was haben jetzt die Schienen mit unserer Theorie zu tun und wie können wir diese hier anwenden?

Wir können die Schienen vereinfacht als Striche darstellen. Die Schienen selbst fluchten in der perspektivischen Darstellung gegen einen Fluchtpunkt, nennen wir ihn X_u^c . Die quaderförmigen Schwellen, die sich unter den Schienen befinden fluchten gegen einen Fluchtpunkt, nennen wir ihn Y_u^c . Verbinden wir die beiden Fluchtpunkte so erhalten wir den Horizont, den wir mit freiem Auge auch erkennen können, denn er ist eben jene Linie wo die Objektkanten, die wir sehen, zusammenlaufen. Die beiden Linien, welche die Schienen kreuzen, stellen eine Strasse dar.



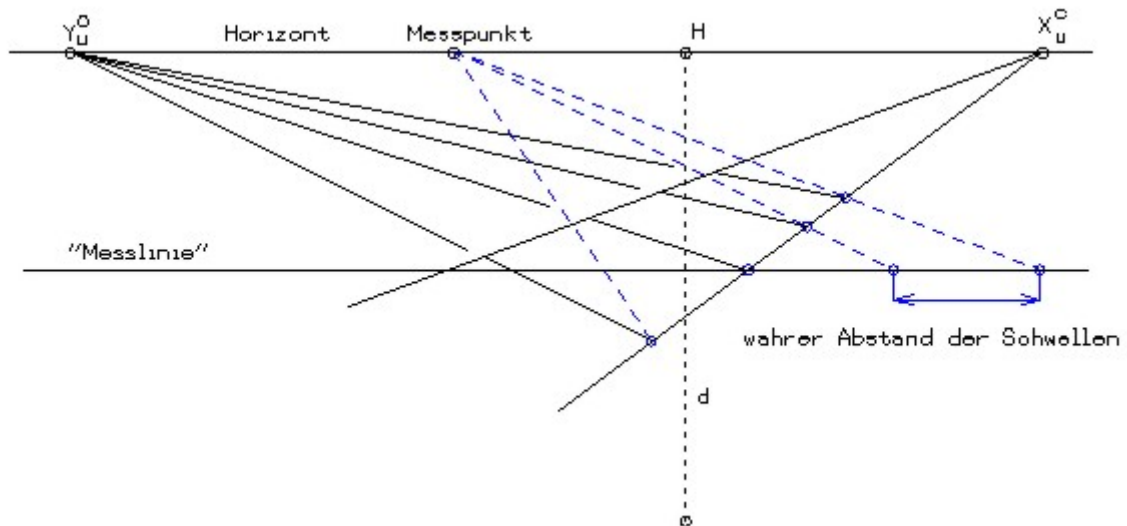
Welchen Winkel schließen die Schienen mit der Strasse ein?

Im nächsten Bild können Sie sehen wie wir den Winkel zwischen der Bahn und der Strasse ermitteln können. Die Theorie dazu finden Sie im Kapitel [Winkel zwischen zwei Geraden](#).



Wie weit sind die Schwellen voneinander entfernt?

Im folgenden Bild wird die Ermittlung des Schwellenabstandes gezeigt. Auf der "Messlinie" kann man den wahren Abstand ablesen. Die verzerrten Strecken werden aus dem Messpunkt auf die "Messlinie" projiziert.

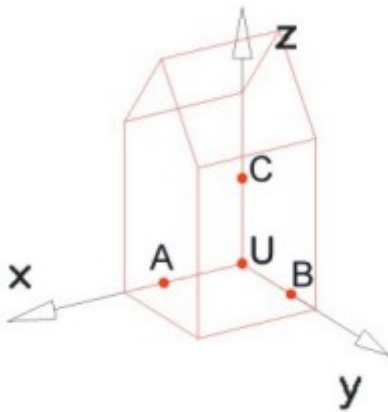


3. Axonometrische Methode der Perspektive

3.1. Zentralriss eines kartesischen Rechtssystems

- a. [Koordinatensystem und Achsen](#)
 - b. [Koordinaten von Punkten](#)
 - c. [Unterscheidungen](#)
-

a. Koordinatensystem und Achsen:



Wir verknüpfen mit dem Objekt ein kartesisches Rechtssystem $(U; A, B, C)$ mit $UA = UB = UC = e$ und mit lotrechter, nach oben orientierter z -Achse. Außerdem wählen wir die Grundrissebene π und die z -Achse nicht projizierend.

Wie sind die Achsen orientiert?

U, A, B, C gehören dem Sehraum an. Das geordnete Punktepaar (U^c, A^c) orientiert die x^c -Achse, genauso wie (U^c, B^c) die y^c -Achse orientiert und (U^c, C^c) die z^c -Achse.

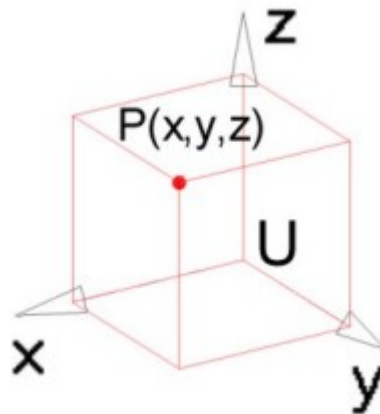
Die drei Koordinatenachsen sind paarweise orthogonal. Der Fluchtpunkt einer Koordinatenachse (z.B.: x -Achse, Fluchtpunkt X_u^c) ist deswegen der Normalenfluchtpunkt der Verbindungsebene der anderen beiden Achsen (y und z -Achse).

Auf der Fluchtgeraden einer solchen Verbindungsebene liegen die Fluchtpunkte der in der Ebene liegenden Koordinatenachsen.

b. Koordinaten von Punkten:

Jeder eigentliche Punkt P besitzt ein Koordinatentripel und wird als Endpunkt eines Koordinatenweges erfasst.

Da wir das Messen in einer Geraden schon im vorigen Kapitel gelernt haben, können wir den Zentralriss des Koordinatenweges mit Hilfe der Messpunkte der Koordinatenachsen zeichnen.



c. Unterscheidungen:

Die Grundrissebene π_1 des kartesischen Koordinatensystems ist horizontal. Die Blickachse kann horizontal, lotrecht oder schräg, also nicht horizontal gegen π_1 verlaufen, wobei für letzteres zwischen Vogelperspektive ("Militärperspektive") und Froschperspektive zu unterscheiden ist.

Im folgenden unterscheiden wir noch zwischen Untersicht und Obersicht, je nach Lage des Augpunktes O.

Der Unterschied zwischen Obersicht und Untersicht:

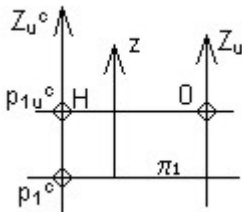
Obersicht:	Untersicht:
<p>O liegt über π_1 p_{1u}^c liegt über p_1^c</p>	<p>O liegt unter π_1 p_{1u}^c liegt unter p_1^c</p>
<p>Die kürzeste stetige Drehung, welche die orientierte x^c - Achse in die orientierte y^c - Achse bringt, ist bei Obersicht positiv.</p>	<p>Die kürzeste stetige Drehung, welche die orientierte x^c - Achse in die orientierte y^c - Achse bringt, ist bei Untersicht negativ.</p>

3.2. Horizontale Blickachse

- a. Horizontale Blickachse
 - b. Angabe eines einfachen Beispiels
 - c. Beispiel: Quader
 - d. Sonderfälle
-

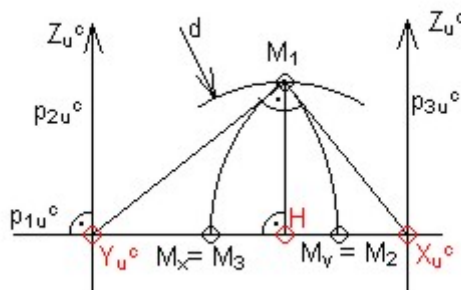
a. Horizontale Blickachse:

Falls das abzubildende Objekt oder der gewünschte Bildeindruck nicht eine andere Aufstellung erzwingen, wählt man die Blickachse stets horizontal.



Bei horizontaler Blickachse gilt:

H liegt auf dem Horizont p_{1u}^c . Der Abstand zwischen den parallelen Geraden p_1^c (Zentralriss der Spurgerade p_1) und p_{1u}^c ist gleich dem Abstand der Augenhöhe $O\pi_1$. Der Fluchtpunkt Z_u^c , der zur Bildebene π parallelen z -Achse, ist der zu p_{1u}^c orthogonale Fernpunkt. Der Abstand des Hauptpunktes von dem in der Normalen zu p_{1u}^c durch H liegenden Messpunkt M_1 ist gleich der Distanz.



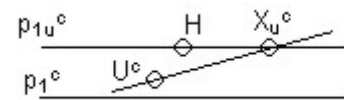
Ist die Aufrissebene π_2 keine Hauptebene, so ist der Messpunkt M_y der y -Achse in π_1 jener Punkt des Horizonts, der vom Fluchtpunkt Y_u^c denselben Abstand wie M_1 besitzt. M_y ist dann auch Messpunkt M_2 von π_2 .

Analog gilt: Ist die Kreuzrissebene π_3 keine Hauptebene, so ist der Messpunkt M_x der x - Achse in π_1 jener Punkt des Horizonts, der vom Fluchtpunkt X_u^c denselben Abstand wie M_1 besitzt. M_x ist dann auch Messpunkt M_3 von π_3 .

b. Angabe eines einfachen Beispiels:

Der Zentralriss eines kartesischen Rechtssystems, bei einer Perspektive mit horizontaler Blickachse und gegebener Distanz d , wobei die Grundrissebene π_1 nicht projizierend ist, wird wie folgt festgelegt:

Man wählt den Horizont p_{1u}^c und den Hauptpunkt H auf p_{1u}^c . Der Zentralriss p_1^c der Spurgeraden p_1 von π_1 ist parallel zum Horizont p_{1u}^c und je nach Übersicht oder Untersicht wird p_1^c über oder unter p_{1u}^c im Abstand der Aughöhe gezeichnet. Man benötigt noch das Bild einer Achse in π_1 , festgelegt durch ihren Fluchtpunkt X_u^c und den Zentralriss U^c des Ursprungs U , sowie ihre Orientierung.

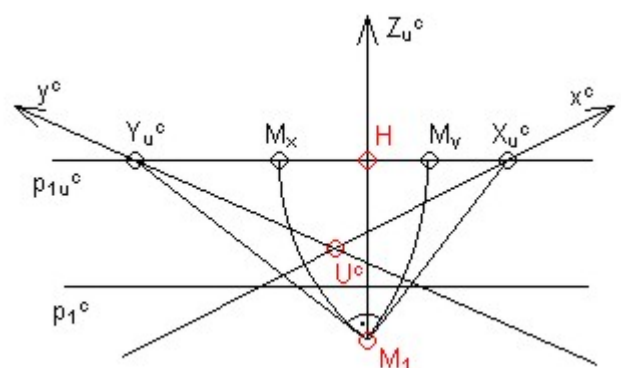


Vervollständigung der Angabe:

Für den Fluchtpunkt Y_u^c gilt: Der Winkel $(X_u^c M_1 Y_u^c) = 90^\circ$.

M_1 ist durch die Distanz festgelegt. Die orientierte z^c - Achse weist zum oberen Blattrand und wegen dem Rechtssystem ist die Orientierung von y^c somit festgelegt.

Zum Einmessen der Koordinatenwege verwendet man M_x , M_y und für die z - Koordinate wegen der Telegraphenstangenregel einen beliebigen Fluchtpunkt auf p_{1u}^c .



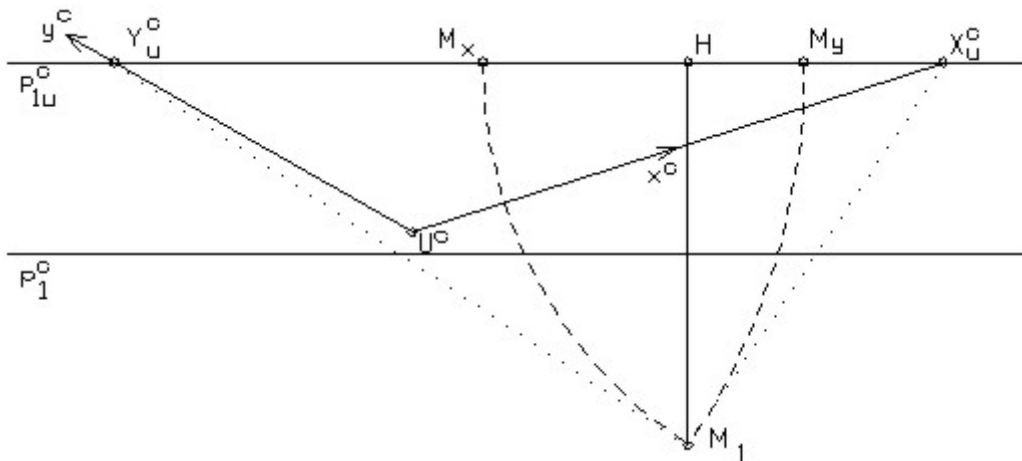
c. Beispiel: Koordinatenquader eines Punktes P

Wie wollen nun eine solche Angabe nehmen und einen Quader zeichnen, um zu sehen wie man die Theorie anwendet!

P hat die Koordinaten $(6, 6, 7)$ und $d = 9\text{cm}$.

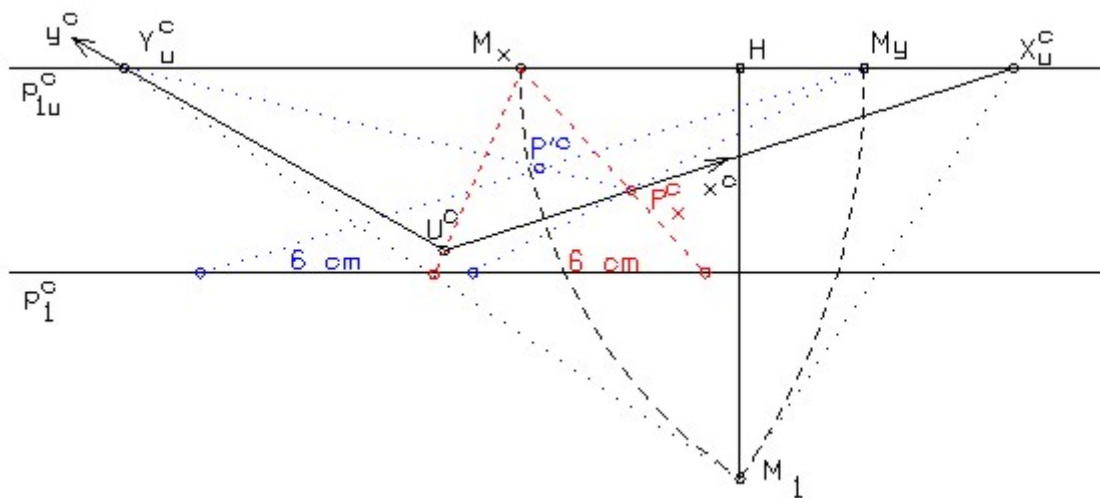
Angabe zum Ausdrucken

Zuerst wird die Angabe vervollständigt:

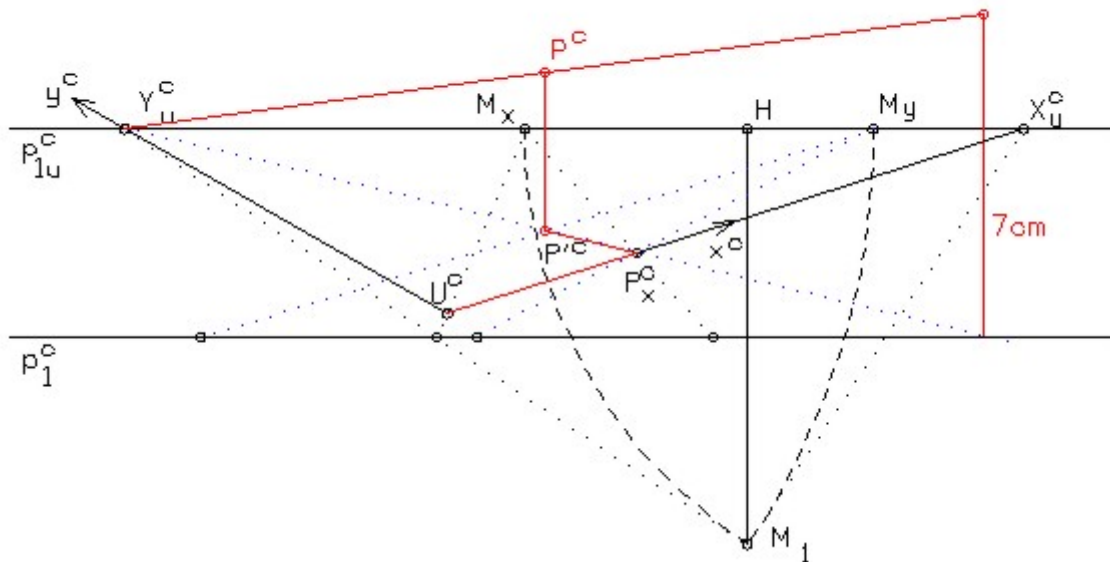


Längen werden auf p_1^c eingemessen. Die x - Koordinate des Punktes P kann vom Schnittpunkt M_xU^c mit p_1^c aus aufgetragen werden und mit M_x auf die x^c - Achse eingemessen werden. Somit erhalten wir den Punkt P_x^c .

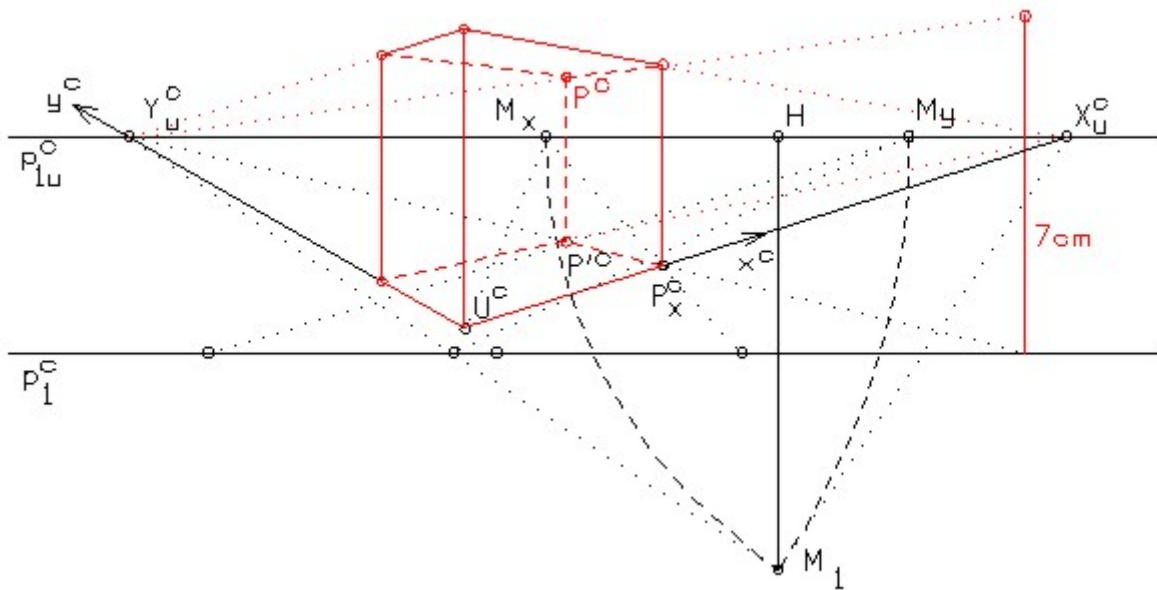
Die y - Koordinatenlänge wird mit Hilfe des Messpunktes M_y eingemessen. Vom Schnittpunkt $P_x^cM_y$ mit p_1^c aus werden $y = 6\text{cm}$ aufgetragen und wieder mit Hilfe des Messpunktes M_y auf die y - parallele Gerade $Y_U^cP_x^c$ eingemessen.



Jetzt wollen wir noch die Höhe einmessen. Wir suchen uns den Spurpunkt der Geraden $Y_u^c P^c$ auf p_1^c und tragen in z - Richtung 7cm ab. Der eingemessene Punkt wird wieder mit Y_u^c verbunden. Somit bekommt man den gesuchten Punkt P^c , der über dem Zentralgrundriss P^c liegt.



x - parallele Kanten fluchten nach X_u^c und y - parallele Kanten fluchten nach Y_u^c . Es werden normalerweise nur sichtbare Kanten in der Perspektive eingezeichnet. Manchmal ist es notwendig unsichtbare Kanten zum Weiterkonstruieren einzuzichnen. Wir wollen hier zur Illustration ausnahmsweise die Unsichtbaren strichliert darstellen.

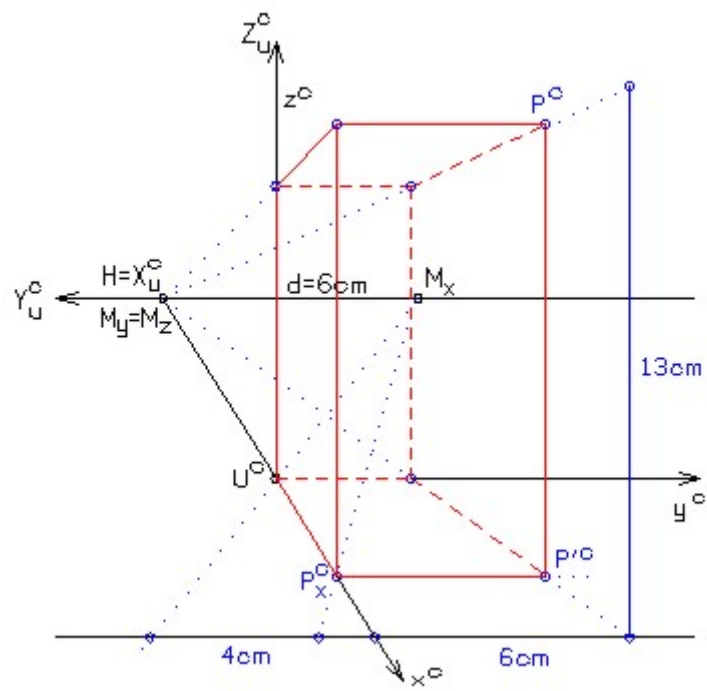


d. Sonderfälle:

- Frontalperspektive:

Ist die y - Achse Hauptgerade, so ist π_2 Hauptebene. Der Fluchtpunkt X_u^c fällt in den Hauptpunkt H und Y_u^c ist Fernpunkt des Horizonts. Jede ebene Figur in einer Hauptebene ist zu ihrem Zentralriss ähnlich. Die y - Koordinaten können durch Projektion auf p_1^c mittels eines Fluchtpunkts auf p_{1u}^c eingemessen werden. Für die z - Koordinate verwendet man wie gewohnt die Telegraphenstangenregel.

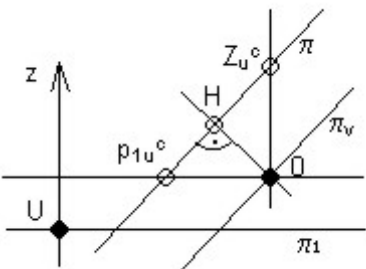
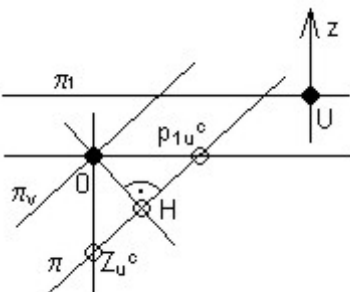
Im folgenden Bild sieht man eine Frontalperspektive, wo analog Punkt 3 der Koordinatenquader eines Punktes $P = (4, 6, 13)$ eingezeichnet wurde.



3.3. Nichthorizontale Blickachse oder geneigte Blickachse

- a. [Unterschied zwischen Frosch- und Vogelperspektive](#)
- b. [Fluchtdreieck](#)
- c. [Sonderfälle](#)
- d. [Beispiel: Koordinatenquader eines Punktes P](#)

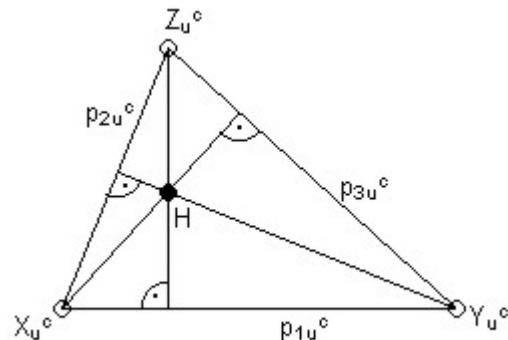
a. Wir unterscheiden zwischen Froschperspektive und Vogelperspektive (= Militärperspektive):

Froschperspektive:	Vogelperspektive:
	
<p>Der Zentralriss U^c des Ursprungs U liegt in der orientierten Geraden z^c vor dem Fluchtpunkt Z_u^c.</p>	<p>Der Fluchtpunkt Z_u^c liegt in der orientierten Geraden z^c vor dem Zentralriss U^c des Ursprungs U.</p>
<p>H liegt <u>über</u> p_{1u^c} und H liegt zwischen Z_u^c und p_{1u^c}</p>	<p>H liegt <u>unter</u> p_{1u^c} und H liegt zwischen Z_u^c und p_{1u^c}</p>

Wir wollen nun voraussetzen, dass keine Koordinatenachse in einer Hauptebene liegt und somit ist auch keine Koordinatenachse Hauptgerade (siehe Sonderfälle).

b. Fluchtdreieck:

Die drei Achsenfluchtpunkte X_u^c , Y_u^c , Z_u^c bilden dann stets ein spitzwinkeliges Dreieck, das Fluchtdreieck des Koordinatensystems, dessen Seiten die Fluchtgeraden der drei Koordinatenebenen sind. Der Höhenschnittpunkt des Fluchtdreiecks ist der Hauptpunkt H.



Kennt man eine Gerade des Fluchtdreiecks, etwa p_{1u}^c , und auf ihr den Fluchtpunkt einer Koordinatenachse, etwa X_u^c , bei der keine Koordinatenebene in einer Hauptebene liegt, ist bei einer Perspektive mit gegebener Distanz d der Zentralriss eines kartesischen Koordinatensystems festgelegt, wenn man in der Zeichenebene den Horizont p_{1u}^c und entsprechend dem Vorliegen einer Frosch - oder Vogelperspektive den Hauptpunkt H wählt.

Weiters wählt man, entsprechend dem Vorliegen von Ober - oder Untersicht, den Zentralriss p_1^c der Spurgeraden p_1 von der Grundrissebene π_1 parallel zum Horizont und den Fluchtpunkt X_u^c der x - Achse, sowie den Zentralriss U^c des Ursprungs U und die Orientierung der Achse.

Durch die Wahl von H und dem Horizont in der Zeichenebene ist der Zeichenmaßstab mitbestimmt, so dass der Distanzkreis und damit das Fluchtdreieck festgelegt ist. Zum Einmessen des Zentralrisses eines Koordinatenweges verwendet man Messpunkte der Koordinatenachsen.

c. Sonderfälle:

- Liegt eine Koordinatenachse in einer Hauptgeraden, was bei nicht horizontaler Blickachse nur die x - Achse oder die y - Achse sein kann, so liegt abgesehen von der Bezeichnung die Situation einer horizontalen Blickachse vor.
- Ist die Grundrissebene π_1 eine Hauptebene, so ist die Blickachse lotrecht und die Bildebene π horizontal ... Militärperspektive.

d. Beispiel: Koordinatenquader eines Punktes P

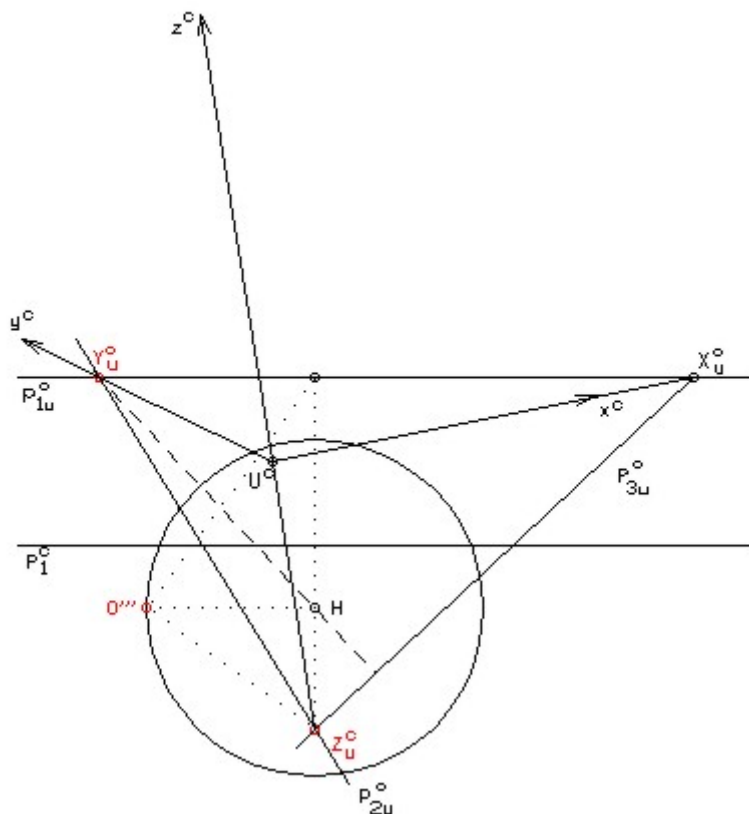
Gegeben ist der Zentralriss eines kartesischen Rechtssystems und der Punkt P durch seine Koordinaten (4,5, -7, 4).

Gesucht ist der Zentralriss P^c von P und sein Koordinatenquader.

Hier gibt es die [Angabe zum Downloaden und Ausdrucken](#).

Der Punkt Z_u^c ist der Normalenfluchtpunkt von π_1 . Die z^c - Achse ist noch oben hin orientiert und kann nun eingezeichnet werden. Die Gerade $X_u^c Z_u^c = p_{3u}^c$ ist die Fluchtgerade von π_3 . Da Z_u^c vor U^c liegt, haben wir den Fall einer Vogelperspektive. Der Punkt Y_u^c ergibt sich damit als Normalenfluchtpunkt von π_3 . Wir wissen, dass H der Höhenschnittpunkt im Fluchtpunktdreieck ist.

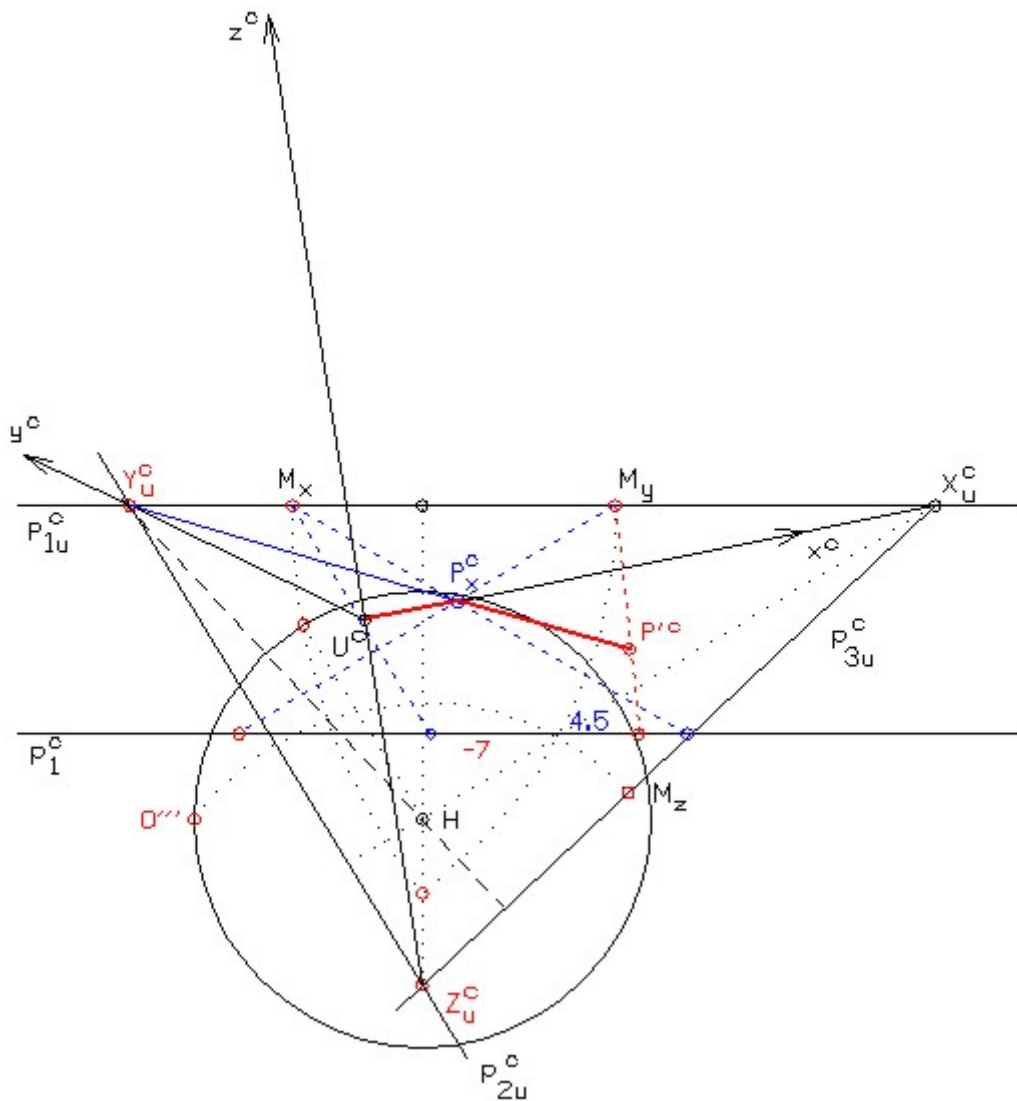
Die Orientierung der Geraden $y^c = U^c Y_u^c$ ergibt sich aus der Orientierung von x^c , da Übersicht gefordert ist: Die kürzeste Drehung des x^c - Pfeiles in den y^c - Pfeil ist eine Drehung gegen die Uhr.



Der Messpunkt M_x beziehungsweise M_y der x - Parallelen beziehungsweise y - Parallelen in π_1 liegt auf dem Horizont p_{1u}^c und hat vom Fluchtpunkt X_u^c beziehungsweise Y_u^c den Abstand $\overline{OX_u^c}$ beziehungsweise $\overline{OY_u^c}$. Diese Abstände können mit Hilfe von Achsenrissen (Achsebenen durch X_u^c beziehungsweise Y_u^c) ermittelt werden.

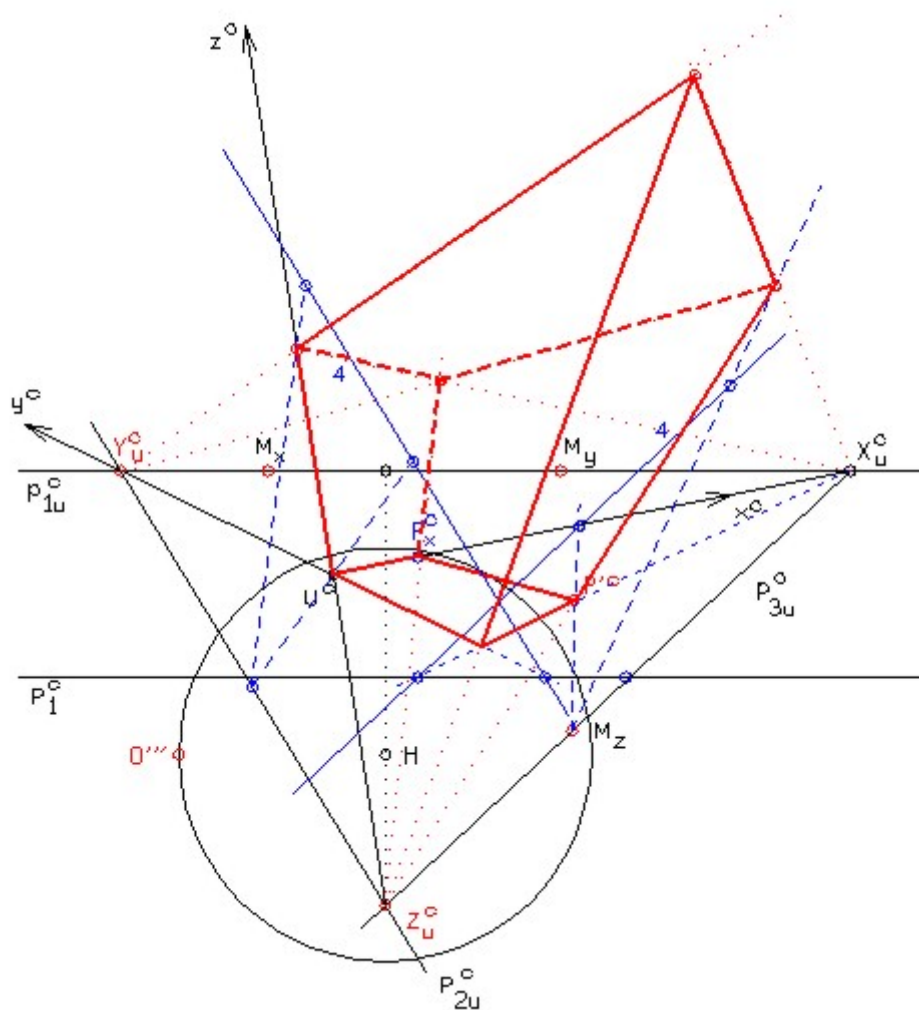
Der Messpunkt M_z der z - Parallelen (etwa bezüglich π_2) liegt auf der Fluchtgeraden p_{2u}^c der Aufrissebene und hat vom Fluchtpunkt Z_u^c den Abstand $\overline{OZ_u^c}$, der mit Hilfe eines Achsenrisses (Achsebenen durch Z_u^c) ermittelt werden kann.

Unter Verwendung von M_x wird über die Spur p_{1u}^c von π_1 zunächst die x -Koordinate ($x = 4.5$) eingemessen, was den Punkt P_x^c liefert. Durch Einmessen der y -Koordinate auf der y - parallelen y^* durch P_x , unter Verwendung von M_y und p_1^c , erhält man den Zentralgrundriss P'^c .



Die z - Koordinate von P wird auf der z - Parallelen durch P' eingemessen. Zu diesem Zweck ist eine Ebene durch diese z - Parallele erforderlich, von der Spur und Fluchtgerade bekannt sind. Es bietet sich an, eine Ebene π_2^* parallel zu π_2 zu verwenden. Die Fluchtgerade von π_2^* ist dann p_{2u}^c .

Die Ebene π_2^* schneidet π_1 nach der y - parallelen Geraden y^* durch P' , deren Spurpunkt auf der Spur p_1 von π_1 liegt. Die Spur p_2^* von π_2^* verläuft dann durch diesen Spurpunkt und ist zu p_{2u}^c parallel.



3.4. Paralleldrehen einer Koordinatenebene

Bei komplizierteren Objekten ist das Einmessen der Koordinaten aller Objektpunkte sehr zeitraubend. Es ist dann zweckmäßig etwa den Zentralgrundriss so zu ermitteln, dass man die Grundrissebene π_1 um eine Hauptgerade h von π_1 parallelgedreht. Unter Verwendung einer perspektiven Kollineation wird, aus dem Zentralriss der parallelgedrehten Lage des Grundrisses, der Zentralgrundriss konstruiert. Das Einmessen der z - Koordinatenstrecken liefert dann den Zentralriss des Objekts.

Zeigt dagegen der Aufriss (Kreuzriss) die Hauptansicht des Objekts (zum Beispiel einer Brücke), so wird π_2 (bzw. π_3 um die Spur p_2 (bzw. p_3) in die Bildebene π gedreht und zuerst der Zentralfufriss (Zentralkreuzriss) aus der gedrehten Lage ermittelt und dann mit Hilfe der x - (bzw. y -) Koordinate der Zentralriss des Objekts aufgebaut.

Oft ist es wünschenswert, dass der Zentralriss x_0^c, y_0^c der parallelgedrehten x - und y - Achse in der Zeichenebene ein Rechtssystem ist, also die Oberseite der parallelgedrehten Ebene π_1 ist vom Augpunkt O aus zu sehen. Wenn die Drehachse dem Sehraum angehört, muss dann der unter p_{1u}^c liegende Messpunkt von π_1 benützt werden.

3.5. Beispiele zur axonometrischen Methode der Perspektive

1. Beispiel: Kirche

2. Beispiel: Kamin

1. Beispiel: Kirche

- Zeichnen mit der Hand:

Das durch Grundriss und Aufriss gegebene Objekt (Maße in cm) ist in der Perspektive (gegeben durch $H, h_u^c, U^c \in h^c, y^c, z^c \perp h_u^c$) mit der Distanz $d = 9$ cm darzustellen.

[Angabe der Abmessungen des Objekts zum Downloaden und Ausdrucken](#)

[Angabeblatt zum Konstruieren](#)

Hier wurden die einzelnen Konstruktionsschritte zur Lösung des Beispiels in einem

[Flash - Objekt](#)

zusammengefasst.

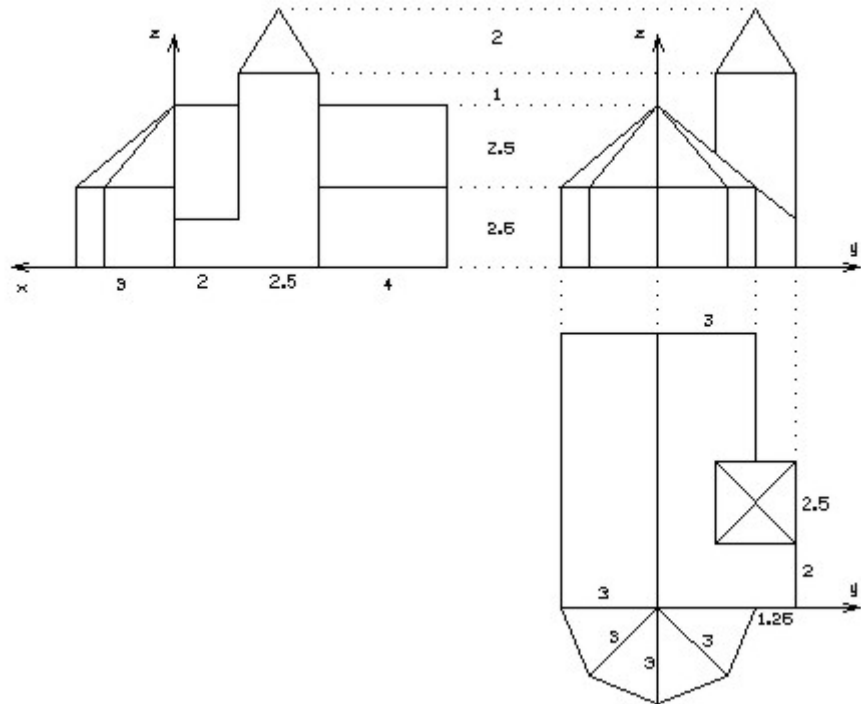
Hier gibt es dazu eine ausführliche Erklärung zu den einzelnen
Konstruktionsschritten:

[Bild 1](#) [Bild 2](#) [Bild 3](#) [Bild 4](#) [Bild 5](#) [Bild 6](#)
[Bild 7](#) [Bild 8](#) [Bild 9](#) [Bild 10](#) [Bild 11](#) [Bild 12](#)
[Bild 13](#) [Bild 14](#) [Bild 15](#) [Bild 16](#)

- Zeichnen mit CAD - 3D[®]

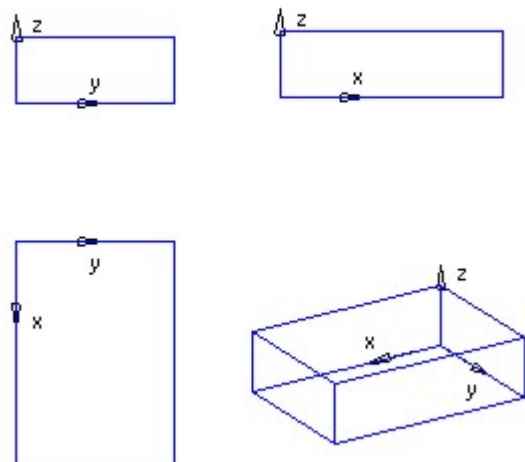
Eine andere Möglichkeit dieses Beispiel grafisch darzustellen, ohne es selbst mit der Hand zu zeichnen, wäre, es mit Hilfe des Zeichenpaketes CAD - 3D[®] zu konstruieren.

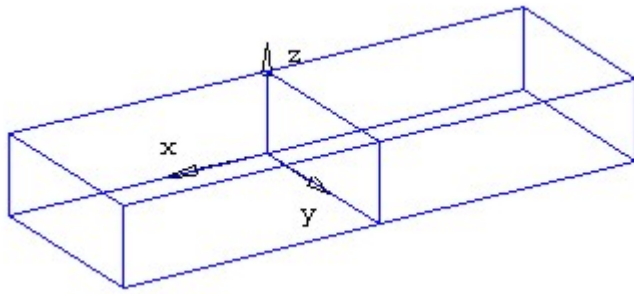
Stellen Sie das angegebene Objekt mit dem Zeichenpaket CAD - 3D[®], unter Zuhilfenahme der unten angeführten Konstruktionsanleitung, dar.



1. Schritt:

Öffnen Sie das Programm CAD - 3D[®] und erzeugen Sie einen Quader mit den Abmessungen (51, 36, 15). Das ist der Grundquader der Kirche. Die Abmessungen für die Kirche wurden mit dem Faktor 6 multipliziert, da sonst die CAD - Figur zu klein wird.





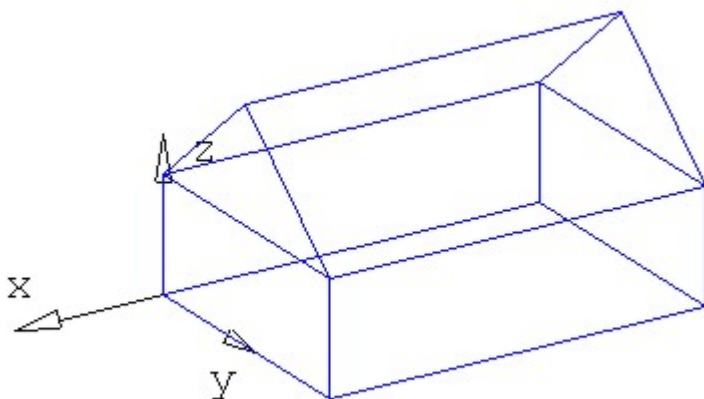
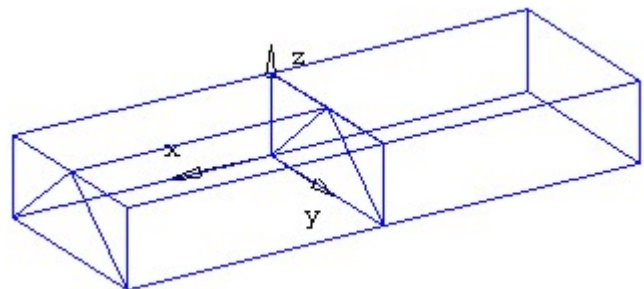
2. Schritt:

Der Quader der als Dach aufgesetzt wird, hat dieselben Abmessungen wie unser gerade erzeugter Quader.

Gehen Sie im Menüfeld *Verlagern* auf *COPY* und verschieben Sie den Quader so, dass die linke Kante mit der *y* - Achse zur Deckung kommt, um das Objekt in unser Koordinatensystem einzupassen. Die Funktion *COPY* hat den Vorteil, dass Sie ein schon vorhandenes Objekt, das an einem anderen Platz ein zweites Mal gebraucht wird, beim Verschieben automatisch kopiert.

3. Schritt:

Der vordere Quader, also derjenige, der sich noch nicht am richtigen Platz befindet, ist unser Dach, welches wir nun zusägen müssen. Schneiden Sie rechts und links von der Mitte aus jeweils ein Viertel des Quaders ab.



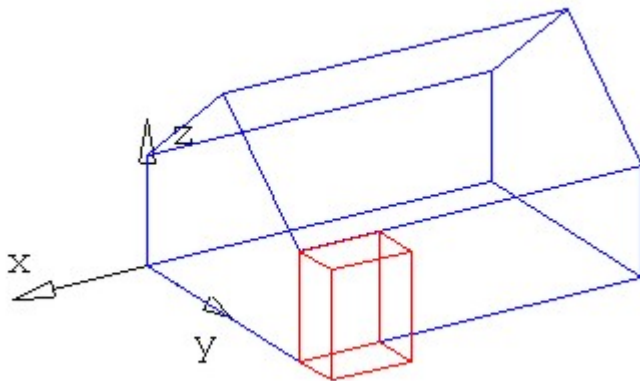
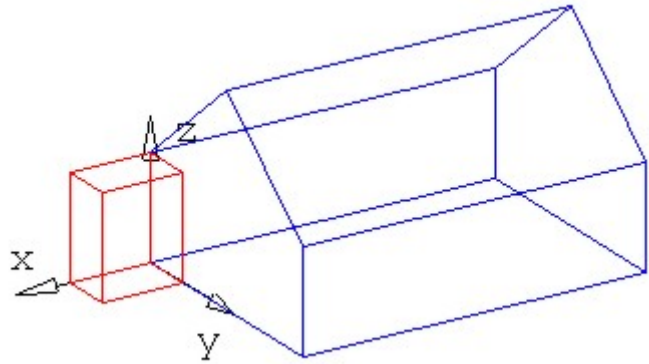
4. Schritt:

Die weggeschnittenen Teile können gelöscht werden. Das Dach soll nun auf den anderen Quader aufgesetzt werden.

5. Schritt:

Sie können nun die beide Objekte vereinigen.

Als nächstes konstruieren Sie einen Quader mit den Abmessungen (12, 7.5, 15).

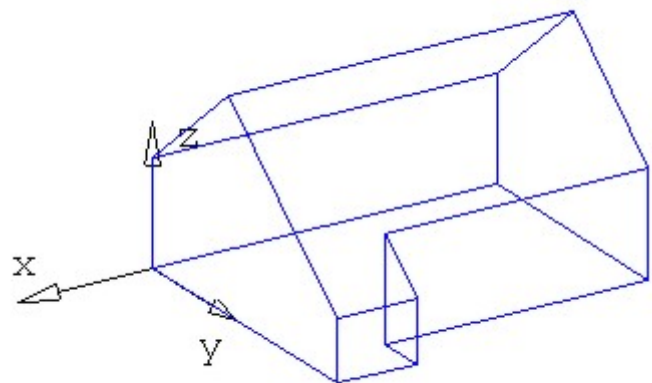


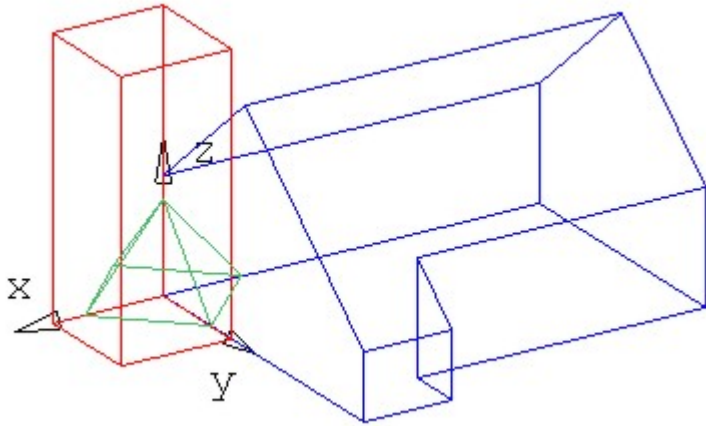
6. Schritt:

Nun verschieben Sie das neu konstruierte Objekt so, dass die linke Kante mit der y - Achse und der Quaderkante des Hauptteils der Kirche zur Deckung kommt.

7. Schritt:

Vereinigen Sie die beiden Objekte. Der kleine Quader hat dieselbe Dachneigung wie das Hauptschiff, das heißt, er soll so durchgesägt werden, dass er den Hauptteil der Kirche fortsetzt.



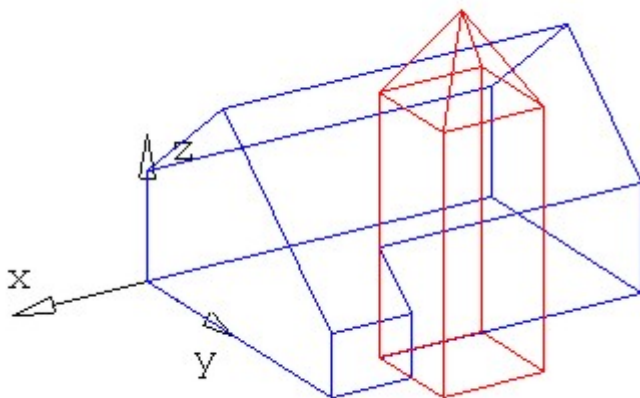
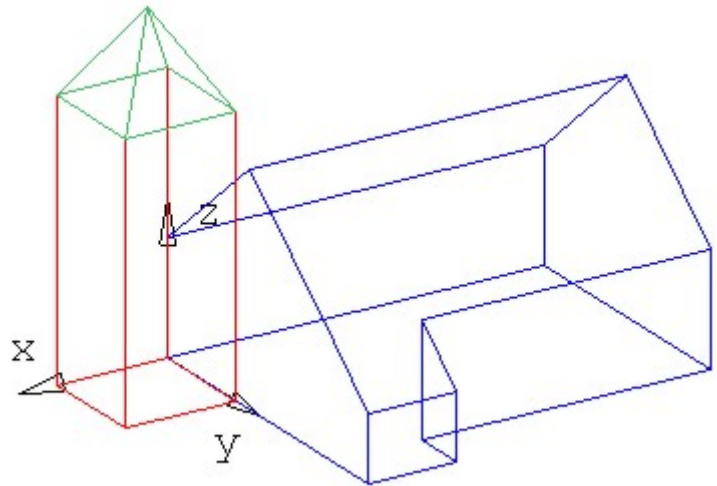


8. Schritt:

Löschen Sie den weggeschnittenen Teil des Objekts. Jetzt konstruieren Sie einen Quader mit den Abmessungen (15, 15, 36) und eine vierseitige Pyramide mit den folgenden Abmessungen: Kantenlänge = 15, Höhe = 12.

9. Schritt:

Drehen Sie die Pyramide so, dass die Kanten zu den Koordinatenachsen parallel sind, also um 45 Grad, und setzen Sie die Pyramide auf den Quader als sein Dach auf.



10. Schritt:

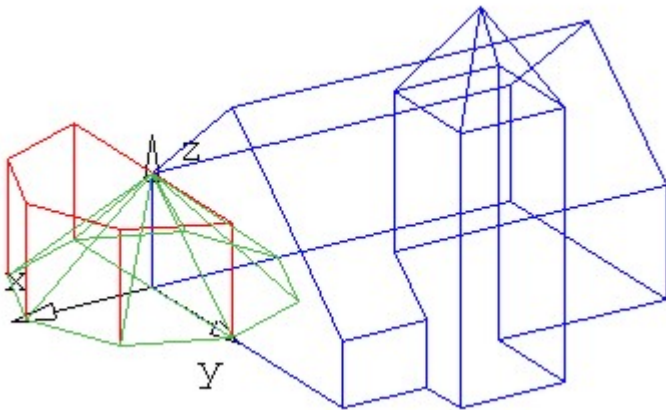
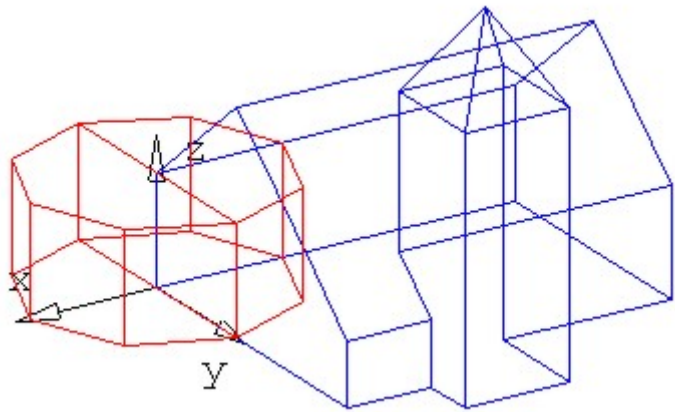
Vereinigen Sie den Quader mit der Pyramide und verschieben Sie den Turm in die Ecke des zuvor konstruierten Kirchenschiffes.

11. Schritt:

Nun können Sie abermals die Objekte vereinigen.

Erzeugen Sie ein achteckiges Prisma mit den folgenden Abmessungen:

Kante = 18, Höhe = 15 und Ecken = 8. sägen Sie die Pyramide mit einer yz - parallelen Ebene durch.

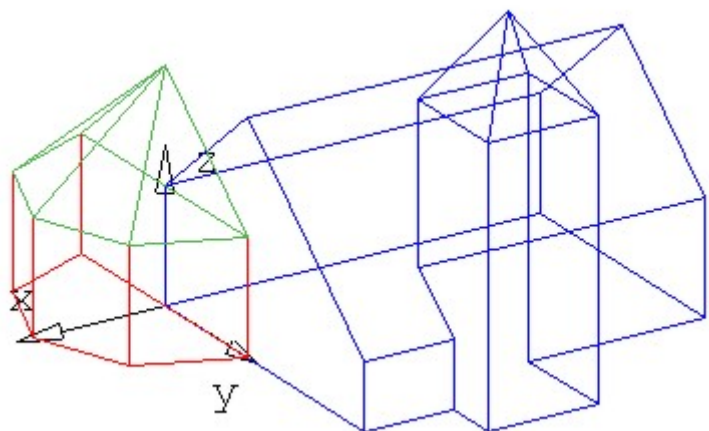


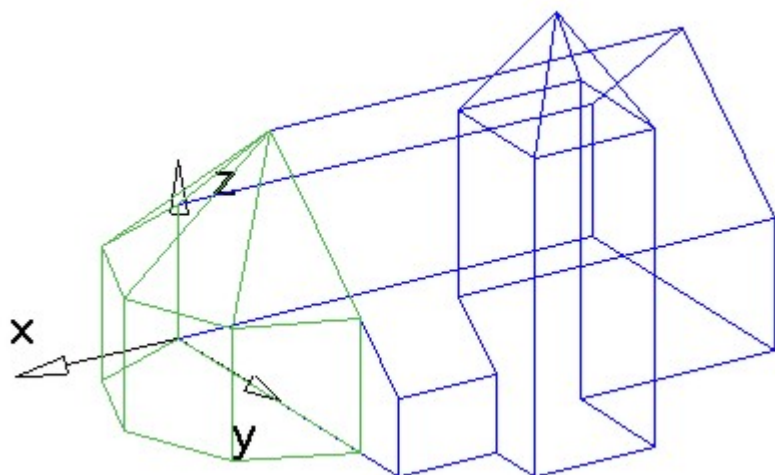
12. Schritt:

Löschen Sie den hinteren Teil des Prismas. Jetzt erzeugen Sie eine achteckige Pyramide mit den folgenden Abmessungen: Kantenlänge = 18, Höhe = 15 und sägen Sie auch die Pyramide mit einer yz - parallelen Ebene durch.

13. Schritt:

Löschen Sie nun auch den hinteren Teil der Pyramide. Verschieben Sie die Pyramide so, dass Sie das Dach für den achteckigen Quader bildet.



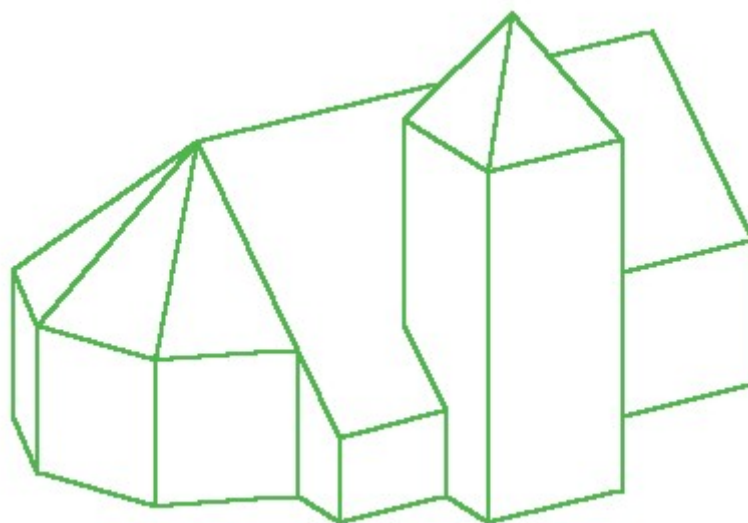


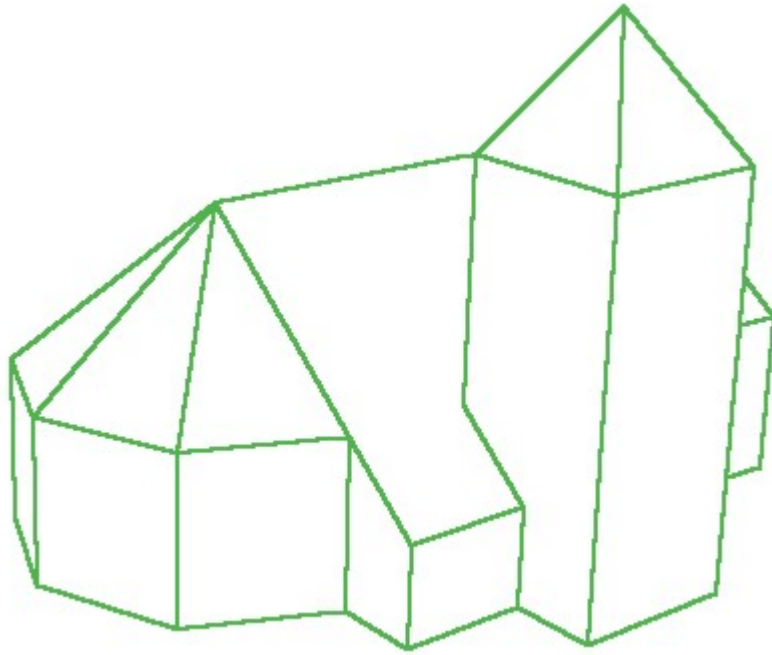
14. Schritt:

Vereinigen Sie die Prismahälfte mit der aufgesetzten Pyramidenhälfte und verschieben Sie das Objekt so, dass der obere Eckpunkt der Durchschnittsfläche im Ursprung zu liegen kommt.

15. Schritt:

Vereinigen Sie nun die beiden letzten Objekte und die Kirche ist fertig.



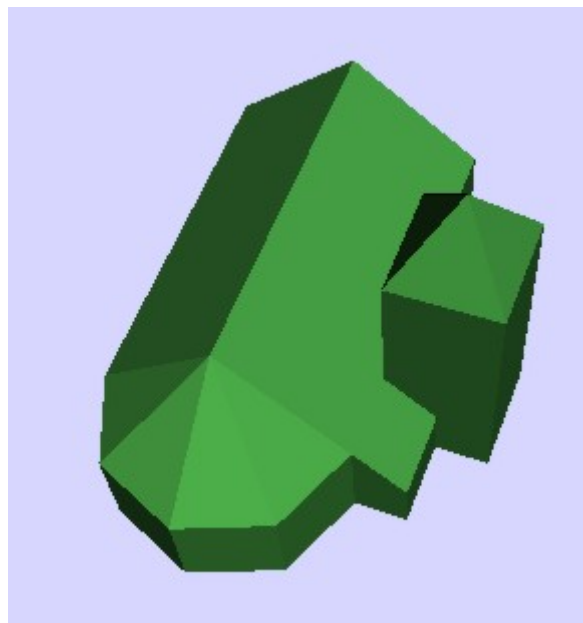


16. Schritt:

Als letztes können Sie nun unter dem Menüpunkt *Einstellungen, Perspektive*, festlegen Koordinaten für den Hauptpunkt und den Augpunkt eingeben und das Objekt in Perspektive betrachten. Für den Start können Sie etwa $O = (90, 142, 72)$ und $H = (40, 70, 45)$ wählen.

- VRML:

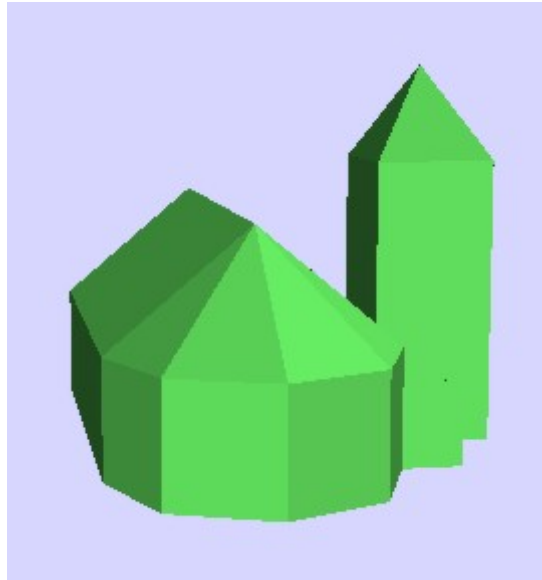
Durch das Exportieren des konstruierten Objekts als VRML kann die Kirche von allen Seiten betrachtet werden und sogar ein "Rundgang" gestartet werden.



Man kann sich so genaue Details des Objekts ansehen, indem man das Objekt entweder rotieren lässt, es schwenkt oder zoomt.

Gibt man beim Exportieren des Objekts noch sogenannte *Viewpoints* (durch snappen oder Koordinaten) an, kann man das Objekt auf gewünschte Weise darstellen.

Es können auch verschiedene *Lichtquellen* eingegeben werden. Zum Beispiel:



Um das VRML ansehen zu können, muss der [Cosmo Player](#) installiert werden.

2. Beispiel: Kamin

- Zeichnen mit der Hand:

Das durch Grundriss und Aufriss gegebene Objekt (Maße in cm) ist in der Perspektive (gegeben durch $H, h_u^c, U^c \in h^c, x^c, z^c \perp h_u^c$) mit der Distanz $d = 9$ cm darzustellen.

[Angabe der Abmessungen des Objekts zum Downloaden und Ausdrucken](#)

[Angabeblatt zum Konstruieren](#)

Hier wurden die einzelnen Konstruktionsschritte zur Lösung des Beispiels in einem

[Flash - Objekt](#)

zusammengefasst.

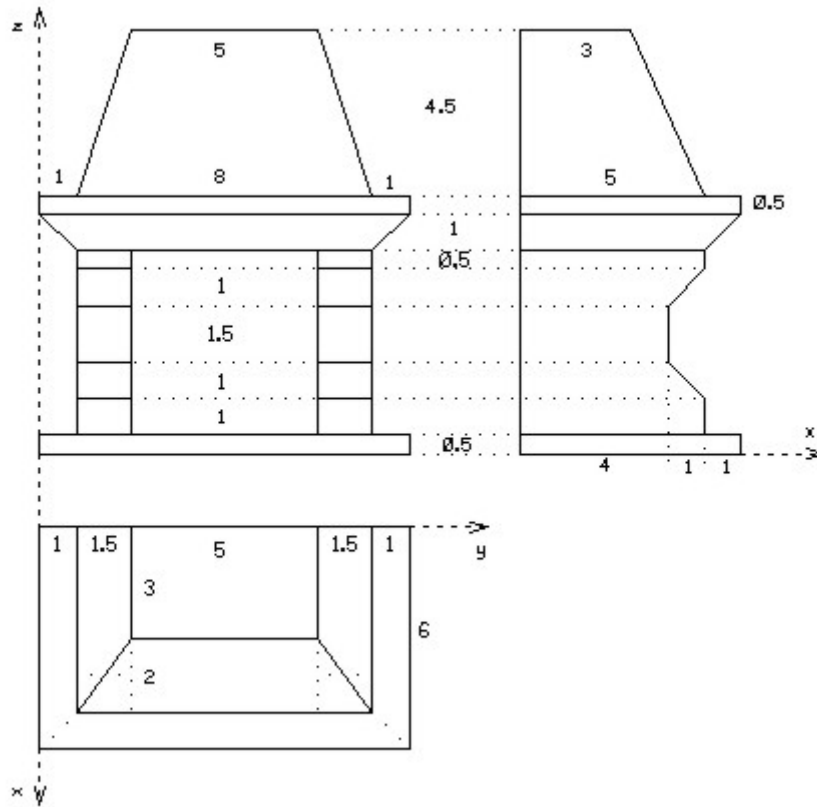
Hier gibt es dazu eine ausführliche Erklärung zu den einzelnen Konstruktionsschritten:

[Bild 1](#) [Bild 2](#) [Bild 3](#) [Bild 4](#) [Bild 5](#) [Bild 6](#) [Bild 7](#)
[Bild 8](#) [Bild 9](#) [Bild 10](#) [Bild 11](#) [Bild 12](#) [Bild 13](#) [Bild 14](#)
[Bild 15](#) [Bild 16](#) [Bild 17](#) [Bild 18](#) [Bild 19](#) [Bild 20](#) [Bild 21](#)
[Bild 22](#)

- Zeichnen mit CAD - 3D[®]

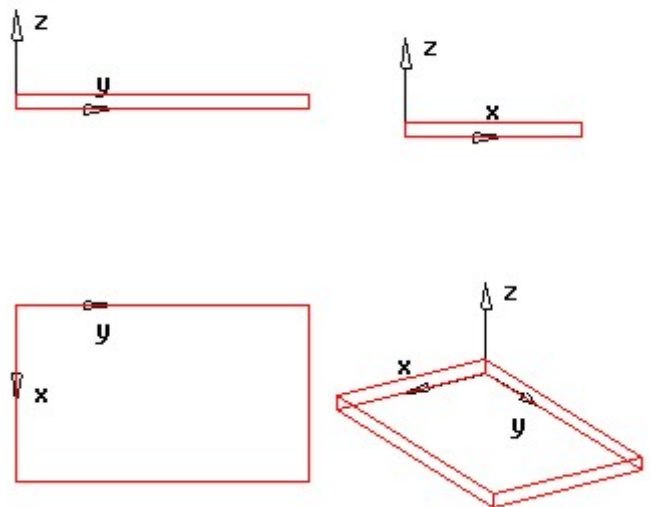
Eine andere Möglichkeit dieses Beispiel grafisch darzustellen, ohne es selbst mit der Hand zu zeichnen, wäre, es mit Hilfe des Zeichenpaketes CAD - 3D[®] zu konstruieren.

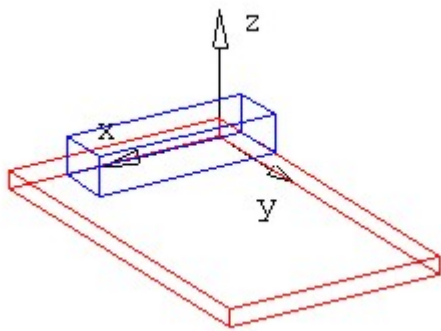
Stellen Sie das angegebene Objekt mit dem Zeichenpaket CAD - 3D[®], unter Zuhilfenahme der unten angeführten Konstruktionsanleitung, dar.



1. Schritt:

Öffnen Sie das Programm CAD - 3D[®] und erzeugen Sie einen Quader mit den Abmessungen (36, 60, 3). Das ist der Grundquader, der untere Sockel des Kamins. Die Abmessungen für den Kamin wurden mit dem Faktor 6 multipliziert, da sonst die CAD - Figur zu klein wird.





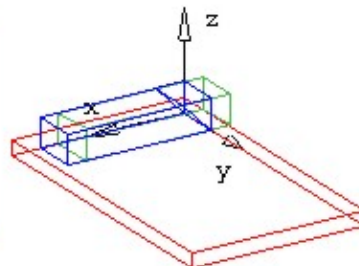
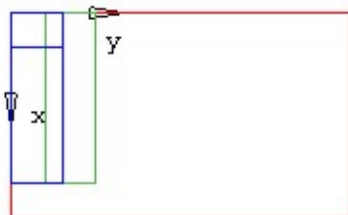
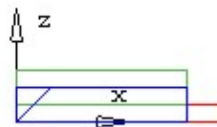
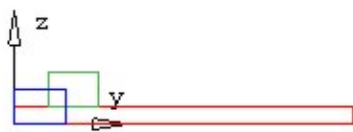
2. Schritt:

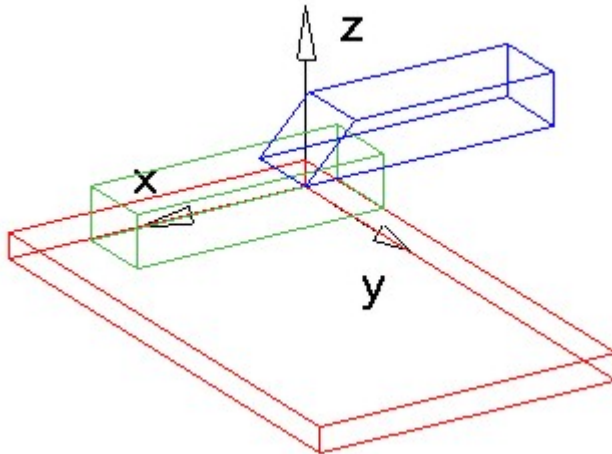
Wir wollen nun von den linken und rechten Teilmauern des Kamins, die Linke konstruieren, da die Andere durch eine Translation leicht erzeugt werden kann.

Erzeugen Sie nun einen Quader mit den Abmessungen (30, 9, 6), der einer der fünf Teilobjekte ist, welche die Seitenmauer bilden.

3. Schritt:

Der nächste Quader, mit der abgeschragten Vorderkante hat dieselben Abmessungen, wie der Quader den Sie im 2. Schritt erzeugt haben. Mit der Funktion *COPY - verschieben* im Menüpunkt *Verlagern* können Sie zugleich das Objekt kopieren und das neue Objekt an eine beliebige Stelle verlagern. Wir wollen den Quader vom Ursprung aus an seine richtige Stelle (0, 6, 3) bringen. Der andere Quader bleibt uns im Ursprung erhalten, wo wir ihn nun mit einer Ebene, die mit 45° geneigt ist, schneiden wollen. Geben Sie für die Ebene die Punkte (0, 0, 0), (0, 10, 0), (10, 0, 10) ein, wenn Sie das Objekt zersägt. Teilobjekte ist, welche die Seitenmauer bilden.



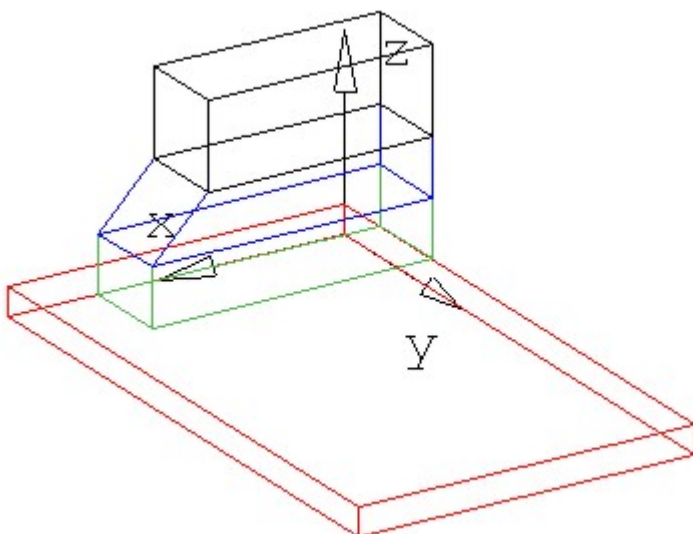
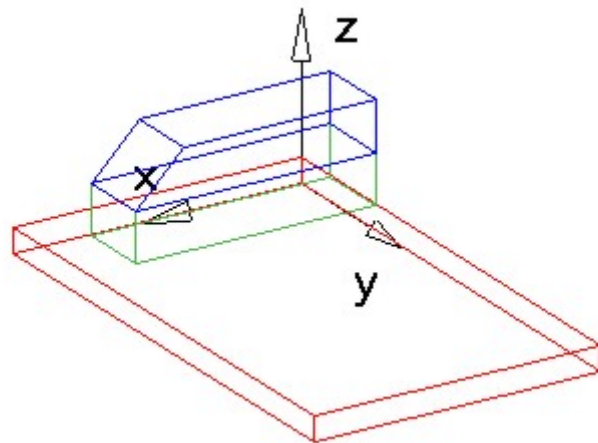


4. Schritt:

Löschen Sie nun das weggeschnittene Stück und drehen Sie den zersägten Quader um die z - Achse um 180° .

5. Schritt:

Schieben Sie nun den gedrehten Quader so, dass er dem im 2. Schritt konstruierten Quader aufgesetzt wird.

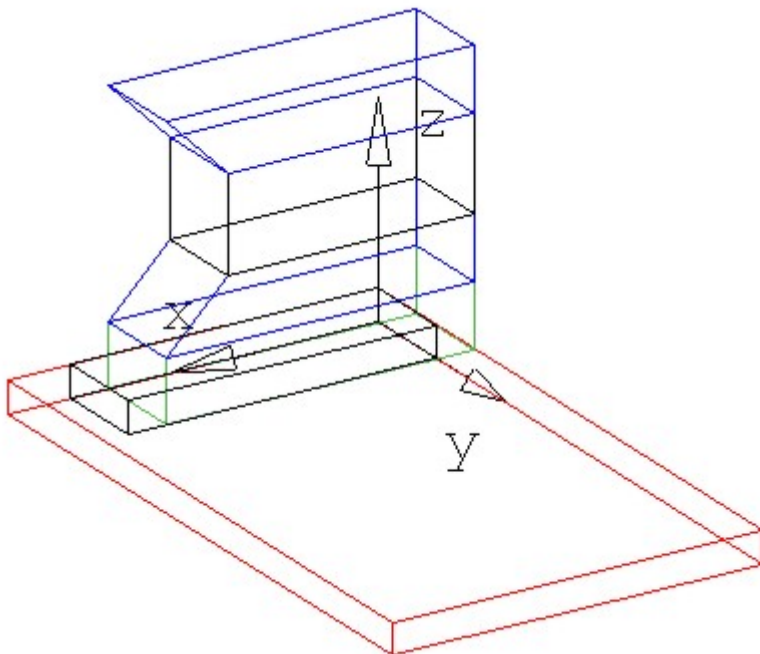
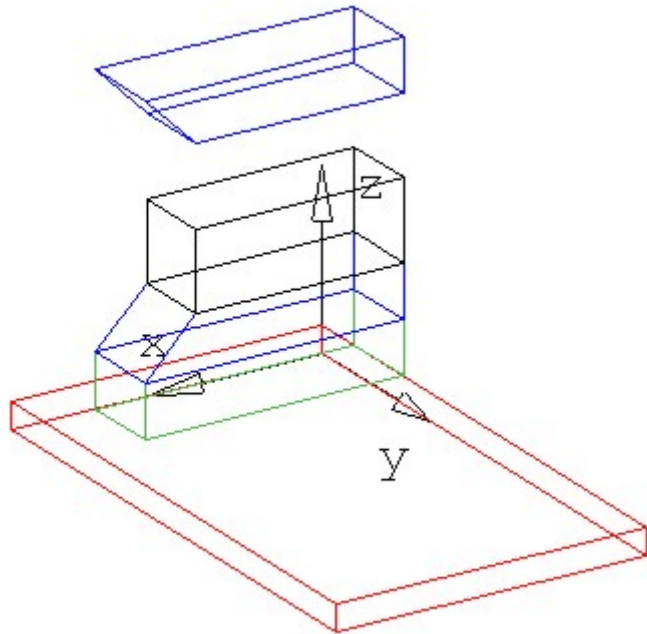


6. Schritt:

Erzeugen Sie einen weiteren Quader mit den Abmessungen (24, 9, 9) und verschieben Sie ihn analog dem letzten Schritt so, dass er auf die anderen Objekte aufgesetzt wird.

7. Schritt:

Spiegeln Sie nun den Quader mit der abgeschrägten Kante an der obersten xy - Ebene so, dass Sie das Objekt wieder gleichzeitig kopieren und spiegeln mit der *COPY* Funktion. Die Ebene kann gesnappt werden.



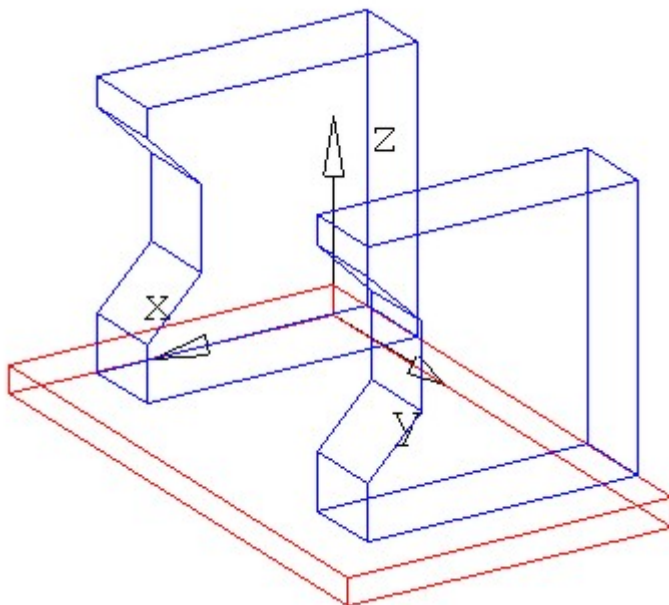
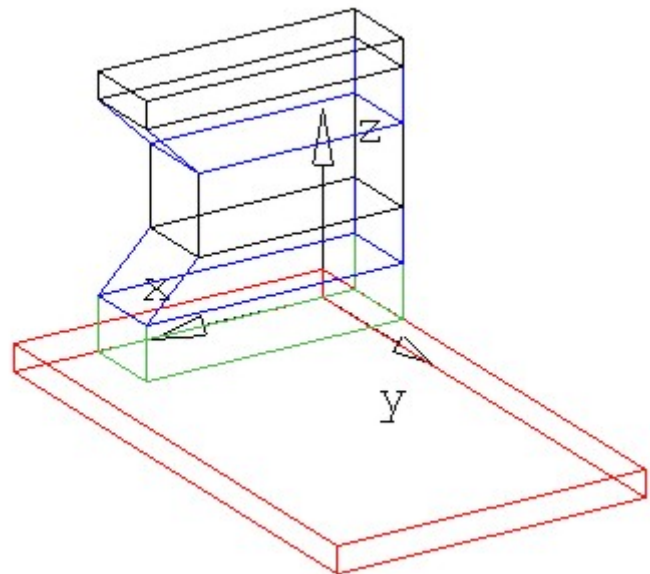
8. Schritt:

Verschieben Sie das gespiegelte Objekt wieder so, dass Sie es auf die übrigen aufsetzen.

Erzeugen Sie nun noch einen Quader mit den Abmessungen (30, 9, 3).

9. Schritt:

Verschieben Sie nun analog zu den vorhergehenden Schritten den Quader wieder so, dass der Quader auf die anderen Objekte aufgesetzt wird.

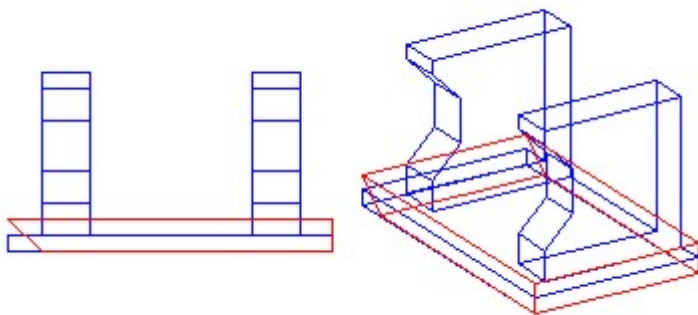
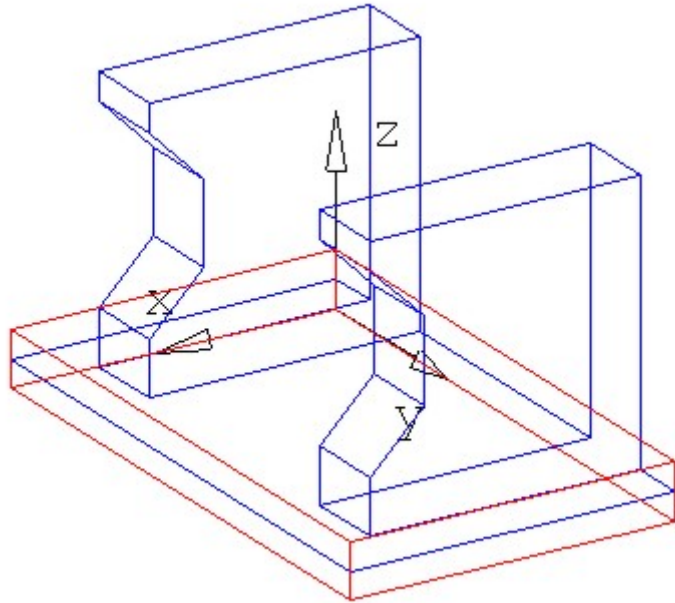


10. Schritt:

Vereinigen Sie nun die fünf Teilobjekte und wenden Sie die Funktion *COPY* an und verschieben Sie die Seitenmauer des Kamins. Der linke untere Eckpunkt (Derjenige, der dem Ursprung am nächsten ist.) wird nach $(0, 45, 3)$ verschoben und gleichzeitig kopiert.

11. Schritt:

Vereinigen Sie nun alle bisher gezeichneten Objekte.
Erzeugen Sie nun einen Quader mit den Abmessungen (36, 60, 6).



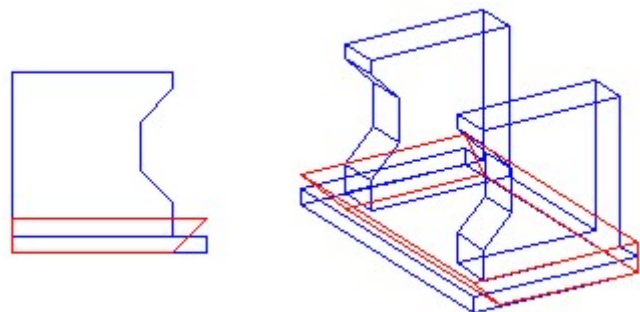
12. Schritt:

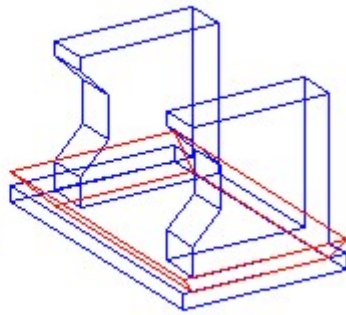
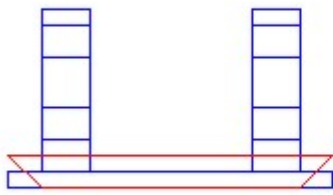
Sie müssen diesen Quader nun drei Mal mit 45° geneigten Ebenen zersägen.

Die linke x - parallele Wand wird mit einer Ebene zersägt, wobei man die Eckpunkte der oberen Kante dieser Wand snappen kann und den dritten Ebenenpunkt mit (0, 6, 0) Koordinatenweise eingibt. Löschen Sie das weggesägte Stück.

13. Schritt:

Die vordere y - parallele Wand wird mit einer Ebene zersägt, die wieder durch die Eckpunkte der oberen Kante und durch den Punkt (30, 0, 0) gehen. Löschen Sie das weggesägte Stück.



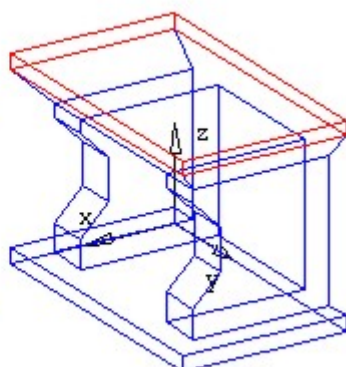
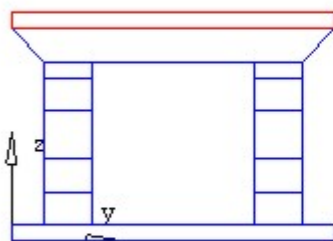
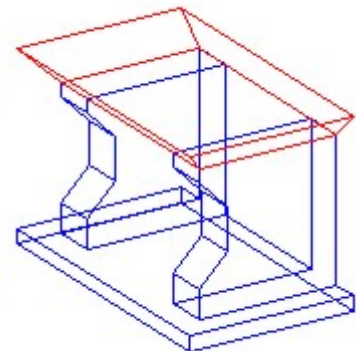
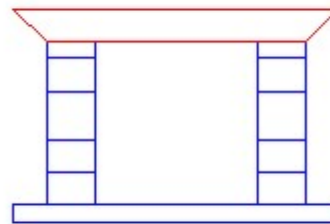


14. Schritt:

Sägen Sie nun zum dritten Mal das Objekt durch. Die rechte x -parallele Wand wird nun mit einer Ebene zersägt, wobei die Ebene analog durch die zwei oberen Kanteneckpunkte und durch den Punkt $(0, 54, 0)$ festgelegt ist. Löschen Sie das weggesägte Stück.

15. Schritt:

Verschieben Sie das neue Objekt so, dass Sie es dem übrigen Objekt aufsetzen.

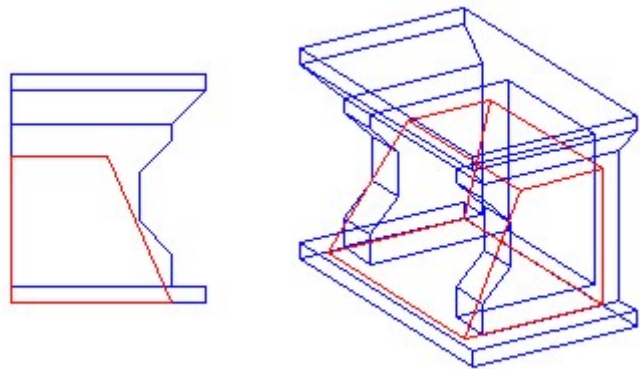


16. Schritt:

Vereinigen Sie die Objekte und erzeugen Sie einen Quader mit den Abmessungen $(36, 60, 3)$. Setzen Sie den Quader wieder auf die übrigen Objekte auf.

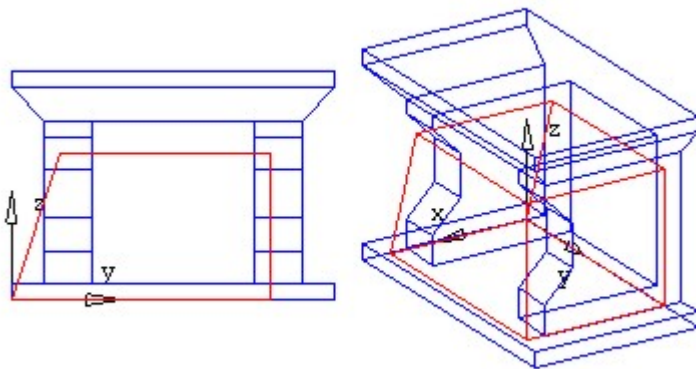
17. Schritt:

Vereinigen Sie die Objekte und erzeugen Sie einen Quader mit den Abmessungen (30, 48, 27). Sägen Sie die linke Wandseite des Quaders mit einer Ebene durch, die durch die unteren Kanteneckpunkte und den Punkt (0, 9, 27) festgelegt ist. Löschen Sie das weggesägte Stück.



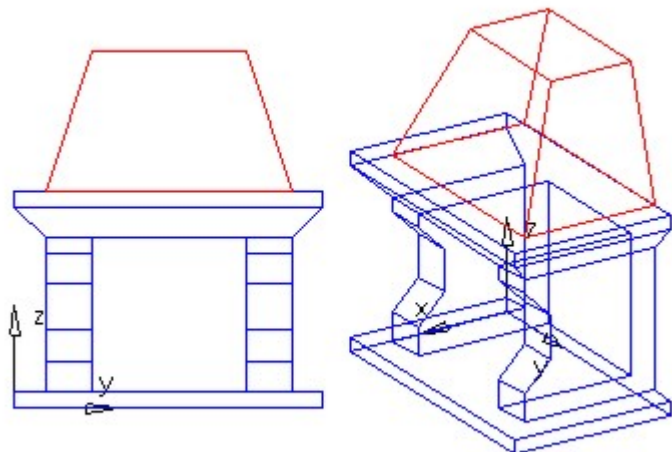
18. Schritt:

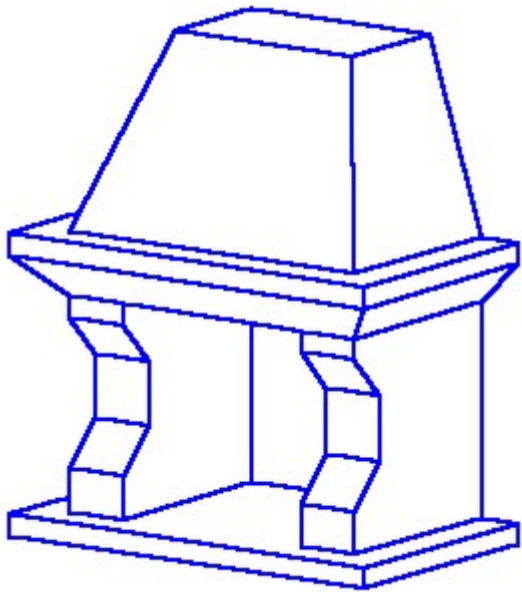
Sägen Sie nun die vordere, y - parallele Wandseite des Quaders mit einer Ebene, die analog zum letzten Schritt durch die unteren Kanteneckpunkte und den Punkt (18, 0, 27) festgelegt ist, durch. Löschen Sie das weggesägte Stück.



19. Schritt:

Mit einer durch die unteren Kanteneckpunkte der linken x - parallelen Wandseite und durch den Punkt (0, 39, 27) festgelegten Ebene muss diese Wand durchsägt werden. Löschen Sie das weggesägte Stück. Verschieben Sie das Objekt, dass Sie es dem übrigen Objekt wieder aufsetzen, nach (0, 6, 42).



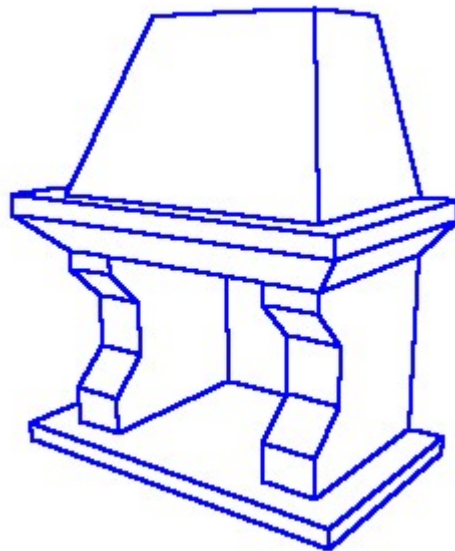


20. Schritt:

Vereinigen Sie die Objekte.

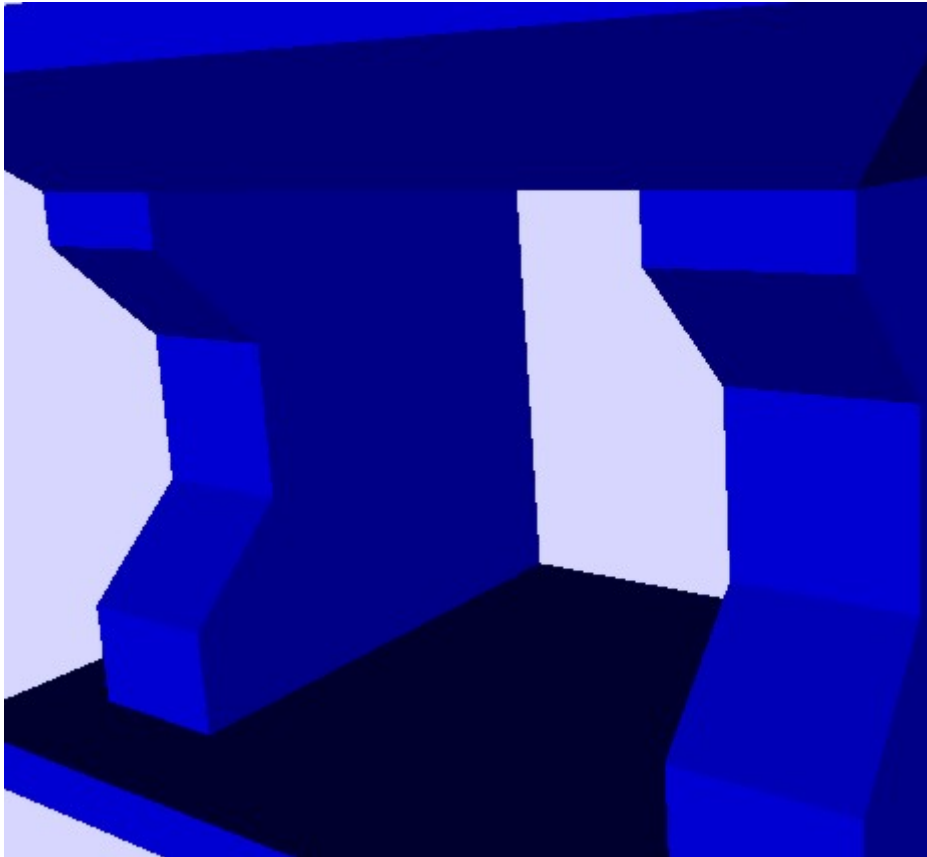
21. Schritt:

Als letztes können Sie nun unter dem Menüpunkt *Einstellungen, Perspektive*, festlegen Koordinaten für den Hauptpunkt und den Augpunkt eingeben und das Objekt in Perspektive betrachten. Für den Start können Sie etwa $O = (120, 110, 60)$ und $H = (50, 60, 35)$ wählen.



- [VRML:](#)

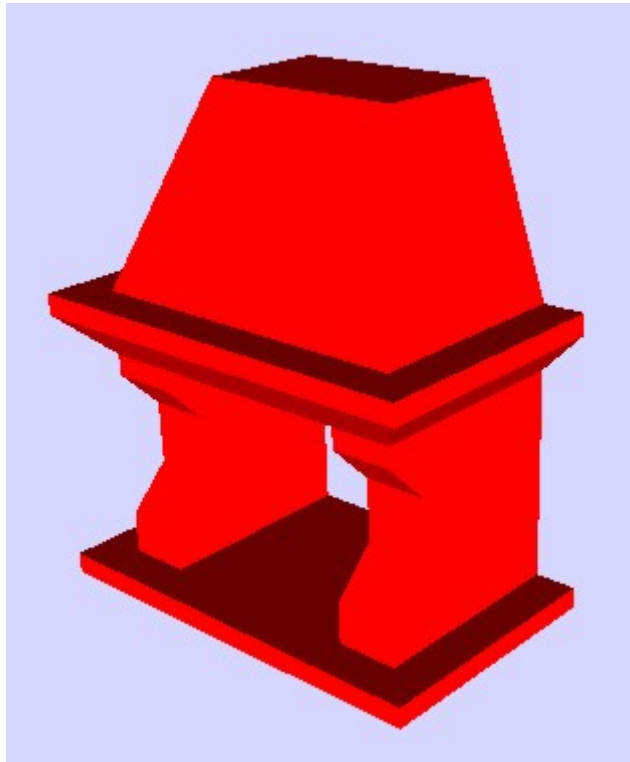
Durch das Exportieren des konstruierten Objekts als VRML kann der Kamin von allen Seiten betrachtet werden und sogar ein "Rundgang" gestartet werden.



Man kann sich so genaue Details des Objekts ansehen, indem man das Objekt entweder rotieren lässt, es schwenkt oder zoomt.

Gibt man beim Exportieren des Objekts noch sogenannte *Viewpoints* (durch snappen oder Koordinaten) an, kann man das Objekt auf gewünschte Weise darstellen.

Es können auch verschiedene *Lichtquellen* eingegeben werden. Zum Beispiel:



Um das VRML ansehen zu können, muss der [Cosmo Player](#) installiert werden.

Anhang zu Kapitel 3

Im Anhang zu Kapitel 3 befinden sich die Konstruktionsbeschreibungen der Beispiele zu den einzelnen Bildern und die einzelnen Bilder der Flash - Objekte selbst.

Im Projekt hat man einen Hyperlink, der zu den Beschreibungen oder den Flash - Objekten führt.

1. Beispiel: Kirche

Konstruktionsbeschreibung:

Bild 1:

Wir konstruieren zuerst den Messpunkt M_1 und den Fluchtpunkt X_u^c , da wir wissen, dass M_1 von H genau den Abstand d hat und M_1 auf dem Thaleskreis über $X_u^c Y_u^c$ liegt. Die x^c - Achse kann so eingezeichnet werden.

Bild 2:

Jetzt wird der Grundriss des Objekts eingezeichnet.

Bild 3:

Nun wollen wir zuerst den Zentralgrundriss des Objekts einzeichnen. Wir wissen, dass x - parallele Kanten nach X_u^c fluchten und y - parallele Kanten nach Y_u^c fluchten. Die vordere sichtbare x - parallele Kante, benennen wir sie mit AB soll nun konstruiert werden. Wir suchen uns den Fixpunkt der Kante AB und lassen ihn nach X_u^c fluchten. Die Punkte bekommen wir, indem wir die soeben konstruierte Gerade mit den Geraden durch A beziehungsweise B und M_1 schneiden. Der Eckpunkt A'^c liegt auch auf einer y - Parallelen und zwar genau auf der y - Achse.

Bild 4:

Nun wollen wir die nächste sichtbare x - parallele Kante einzeichnen, worauf die Punkte C und D liegen, aber auch der Punkt 1 liegt auf der Verlängerung der Kante CD . Wir suchen uns wieder den Fixpunkt und lassen ihn nach X_u^c fluchten. Die Punkte erhalten wir wieder indem wir sie mit M_1 verbinden und schneiden. Auch der Punkt 1^c liegt auf der x - Achse. Der Punkt C'^c ist unsichtbar.

Bild 5:

Nun suchen wir uns den Zentralgrundriss des Punktes 2. Da dieser Punkt auf Geraden liegt, die weder x - noch y - parallel sind, müssen wir eine solche finden. Wir zeichnen eine x - parallele Gerade ein. Analog können wir den Punkt 3 einzeichnen, aber wir wissen, dass 3 auf der x - Achse liegt, also muss 3^c auf x^c liegen.

Bild 6:

Wir wollen nun den Zentralriss konstruieren. Zuerst wollen wir die Höhe des Turmes über dem Punkt B^c einmessen. Das können wir im Fixpunkt machen der auf h^c liegt. Die Höhe beträgt 6 cm. Der Punkt B^c liegt knapp neben der eingemessenen Höhe über dem Fixpunkt. Der Punkt 4 soll ebenfalls abgebildet werden und liegt auf $X_u^c B^c$.

Bild 7:

Als Nächstes suchen wir den Punkt 5^c . Er liegt auf einer y -parallelen Geraden, das bedeutet 5^c liegt sicher auf $Y_u^c 4^c$. 5^c liegt auf $4^c Y_u^c$.

Bild 8:

Der Punkt 6^c ist die Spitze der aufgesetzten Pyramide des Turmes. Der Punkt 6 liegt auf der x - parallelen Kante 1D. Wir messen über den Fixpunkt die Höhe 8 cm ein. Die Linie zum Einmessen der Höhe ist sehr knapp bei jener Linie auf der 6^c liegt.

Bild 9:

Wir können die Spitze 6^c gleich mit den Eckpunkten B^c , 4^c und 5^c verbinden. Die Mittellinie des Kirchenschiffes liegt auf der x - Achse. Einen Punkt kennen wir schon im Zentralriss, nämlich 3^c . Genau über dem Ursprung liegt das eine Ende der Dachkante des Hauptschiffes. Da U^c auf h^c liegt können wir dort gleich die Höhe ($h = 5$ cm) einmessen. Verbinden wir den eingemessenen Punkt mit X_u^c , so haben wir schon die Dachkante.

Der hintere Punkt der Dachkante wird vom übrigen Objekt verdeckt, ist also unsichtbar. Aus Konstruktionsgründen wollen wir ihn aber einzeichnen.

Bild 10:

Als Nächstes wollen wir die Höhe über 1^c einmessen. Den Fixpunkt, wo wir messen dürfen, haben wir im [Bild 8](#) verwendet. Hier können wir die Höhe für 1^c , nämlich 2.5 cm einmessen. D^c liegt auf derselben Höhe wie 1^c .

Bild 11:

Nun wollen wir den hinteren Teil des Objekts vervollständigen und die sichtbaren Kanten einzeichnen um den Überblick nicht zu verlieren. Wir sehen, dass uns noch die Höhe über A fehlt. Da wir die exakte Höhe zum Einmessen nicht wissen, ziehen wir die Dachkante durch 1^c soweit hinunter bis sie die z - parallele Gerade durch A^c trifft. Der Turm schließt vorne an der Dachschräge an. A^c fluchtet also nach X_u^c und wir bekommen jenen Endpunkt der Dachschräge, welcher im Grundriss mit 4 zusammenfällt.

Bild 12:

Bevor wir den vorderen Anbau zeichnen, fehlt uns noch eine Dachkante. Es fehlt die Kante deren Punkte im Grundriss mit den Punkten 4 und 5 zusammenfallen und deren Zentralriss Schnittkante des Daches mit dem Turm ist. Wir verlängern die Gerade 45 und schneiden sie mit der x - Achse. Dieser Punkt liegt auf der Dachkante. Wir kennen aus dem letzten Schritt schon den Punkt über dem Punkt 4, den wir jetzt mit dem soeben konstruierten Punkt verbinden können und mit der z - Parallelen durch 5^c schneiden.

Bild 13:

Wir suchen uns nun den Punkt 2^c . Er liegt auf der, von uns bei der Konstruktion von 2^c ([siehe Bild 5](#)) eingezeichneten, x - parallelen Geraden. Über ihrem Fixpunkt können wir die Höhe 2.5 cm einmessen.

Bild 14:

Als Letztes suchen wir und den Punkt 3^c . Der Punkt 3 liegt auf der x - Achse. Die Höhe für Punkte, die auf der x - Achse liegen, haben wir über U^c abgetragen. Das können wir nun auch machen. 3^c liegt in einer Höhe von 2.5 cm.

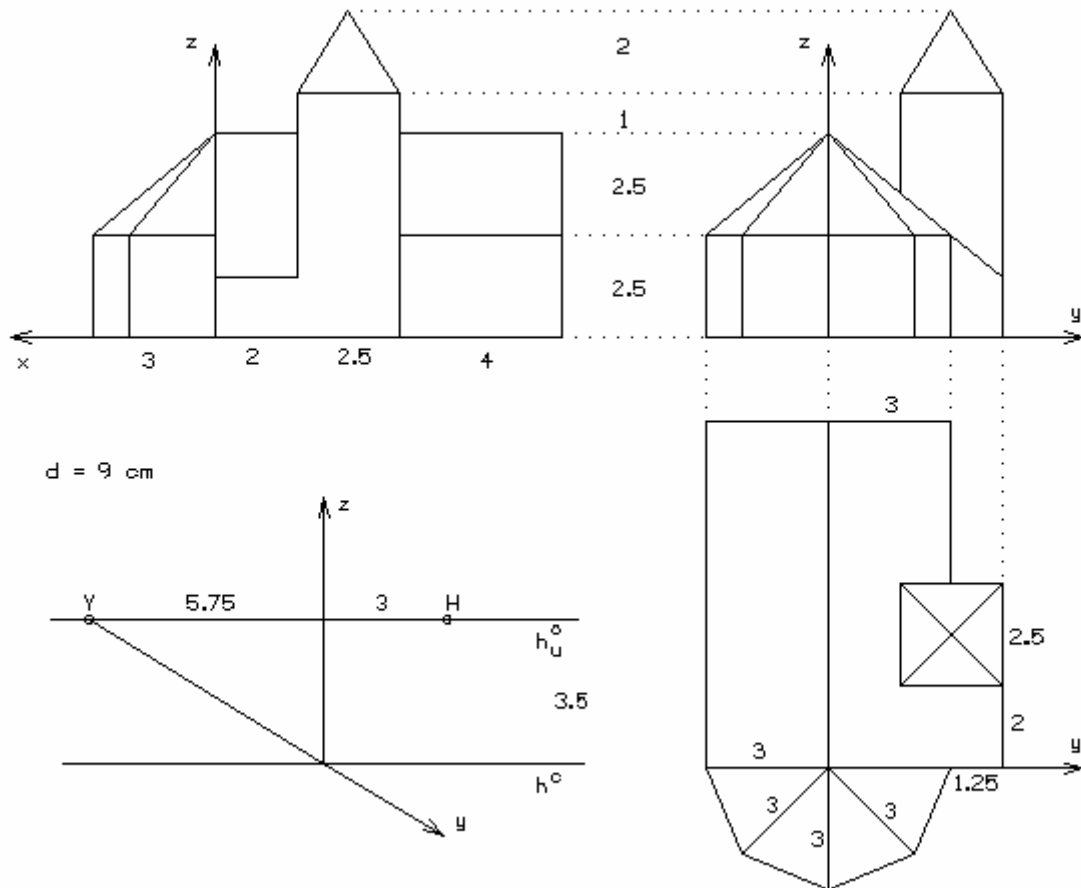
Bild 15:

Wir wollen nun noch die sichtbaren Kanten, die noch fehlen, einzeichnen.

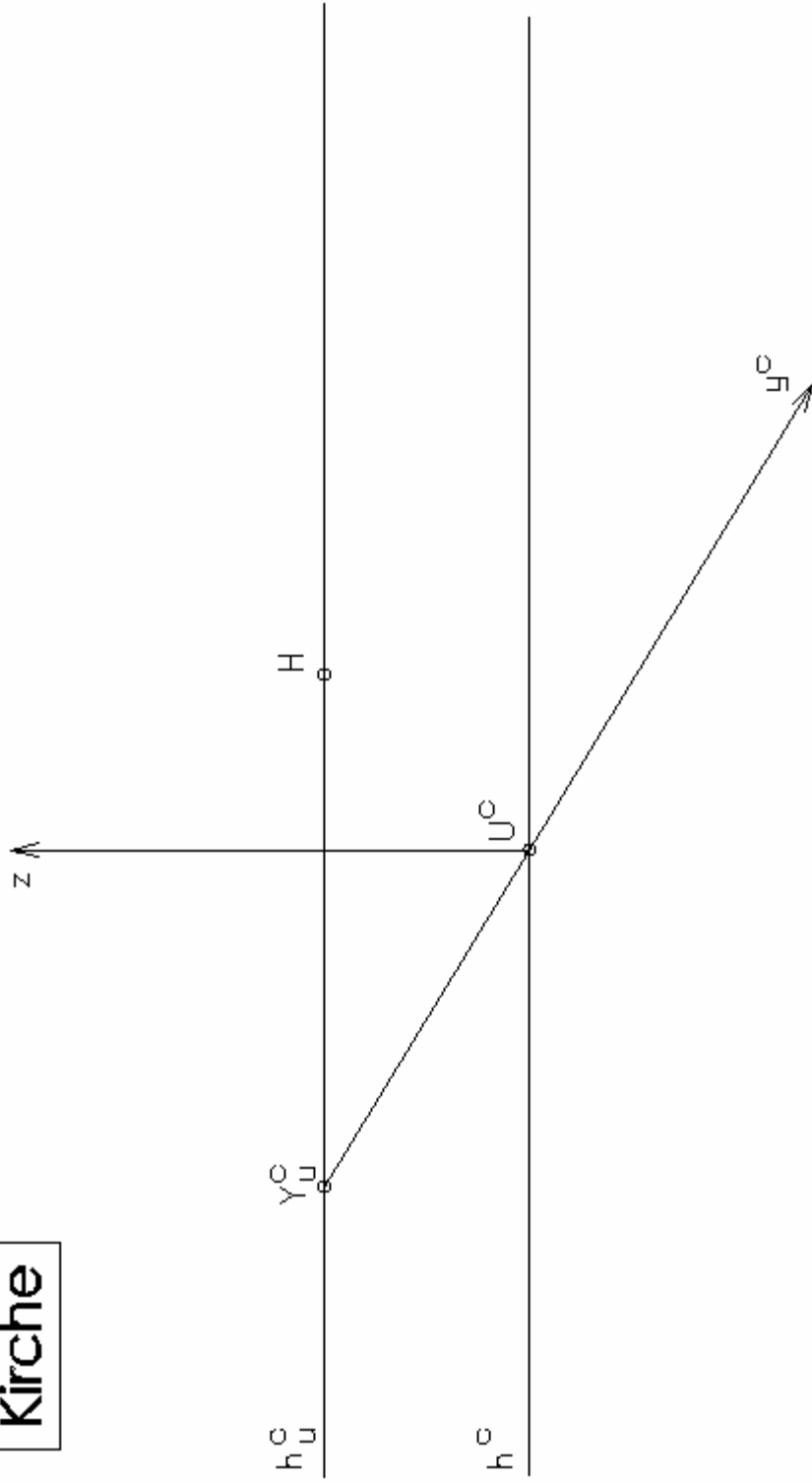
Bild 16:

Nun zeichnen wir alle sichtbaren Kanten dick nach. Unsichtbare Linien, die für die Konstruktion gebraucht wurden, sind wegen der Übersicht weggelöscht worden.

Angabe der Abmessungen des Objekts:

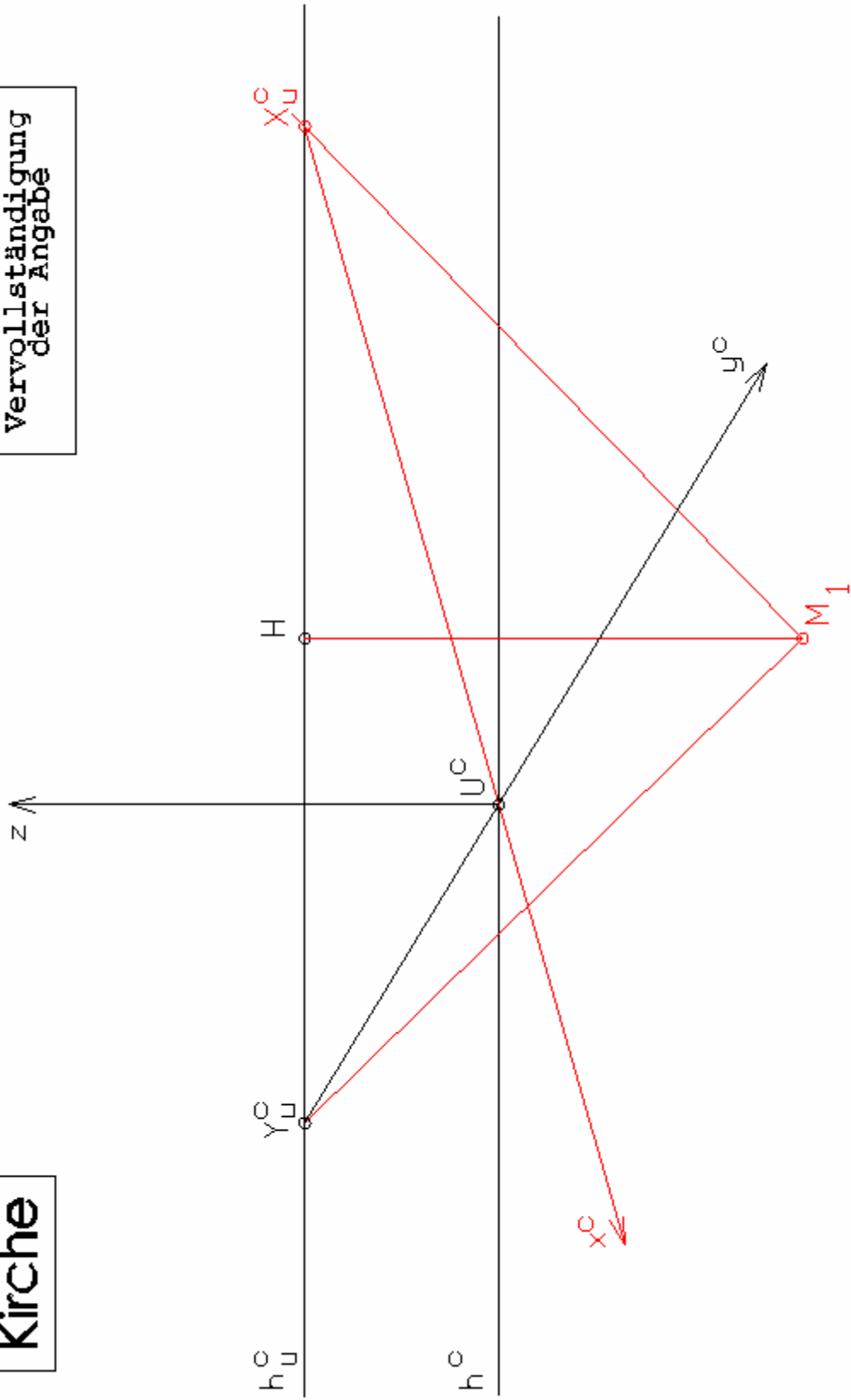


Kirche

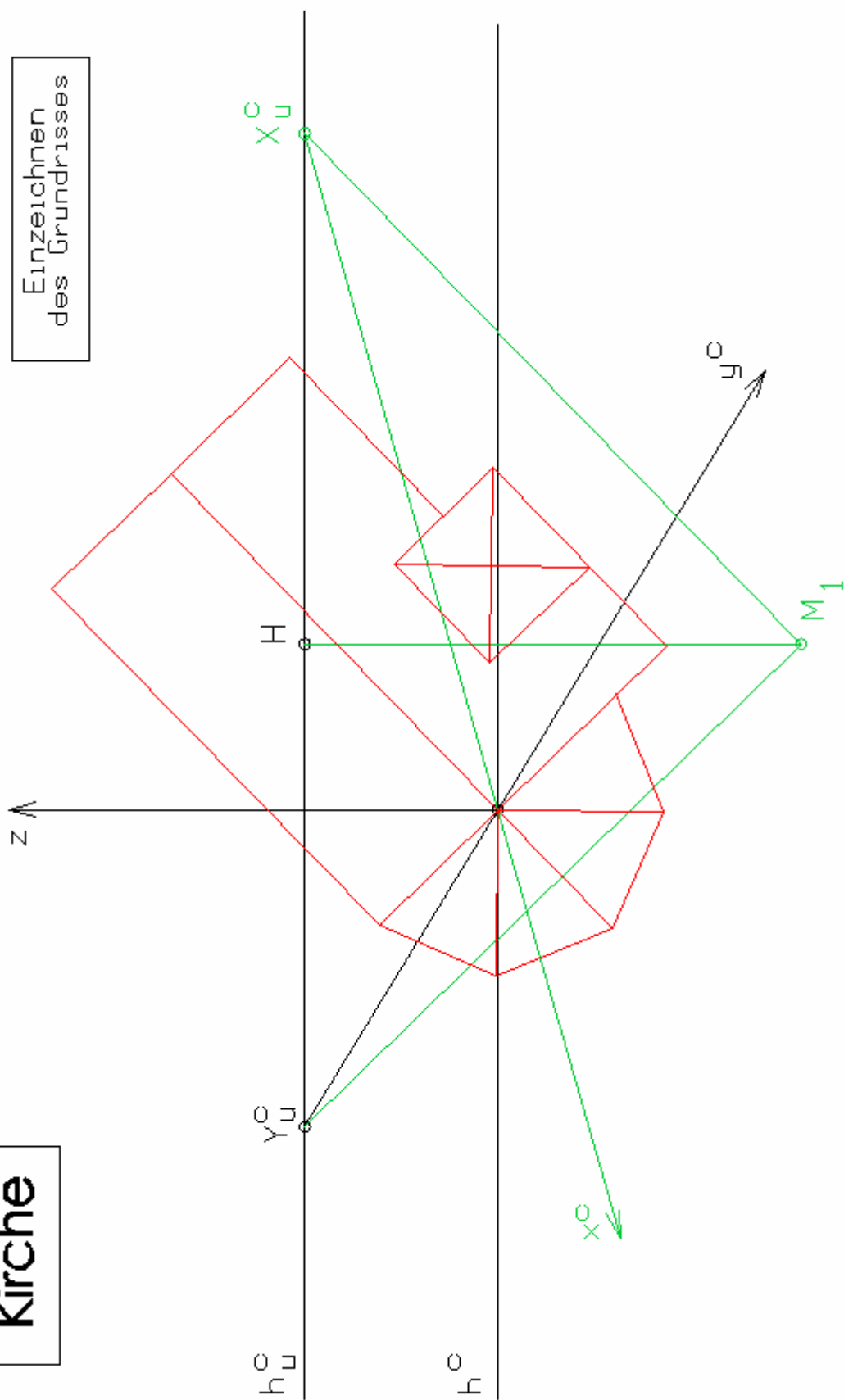


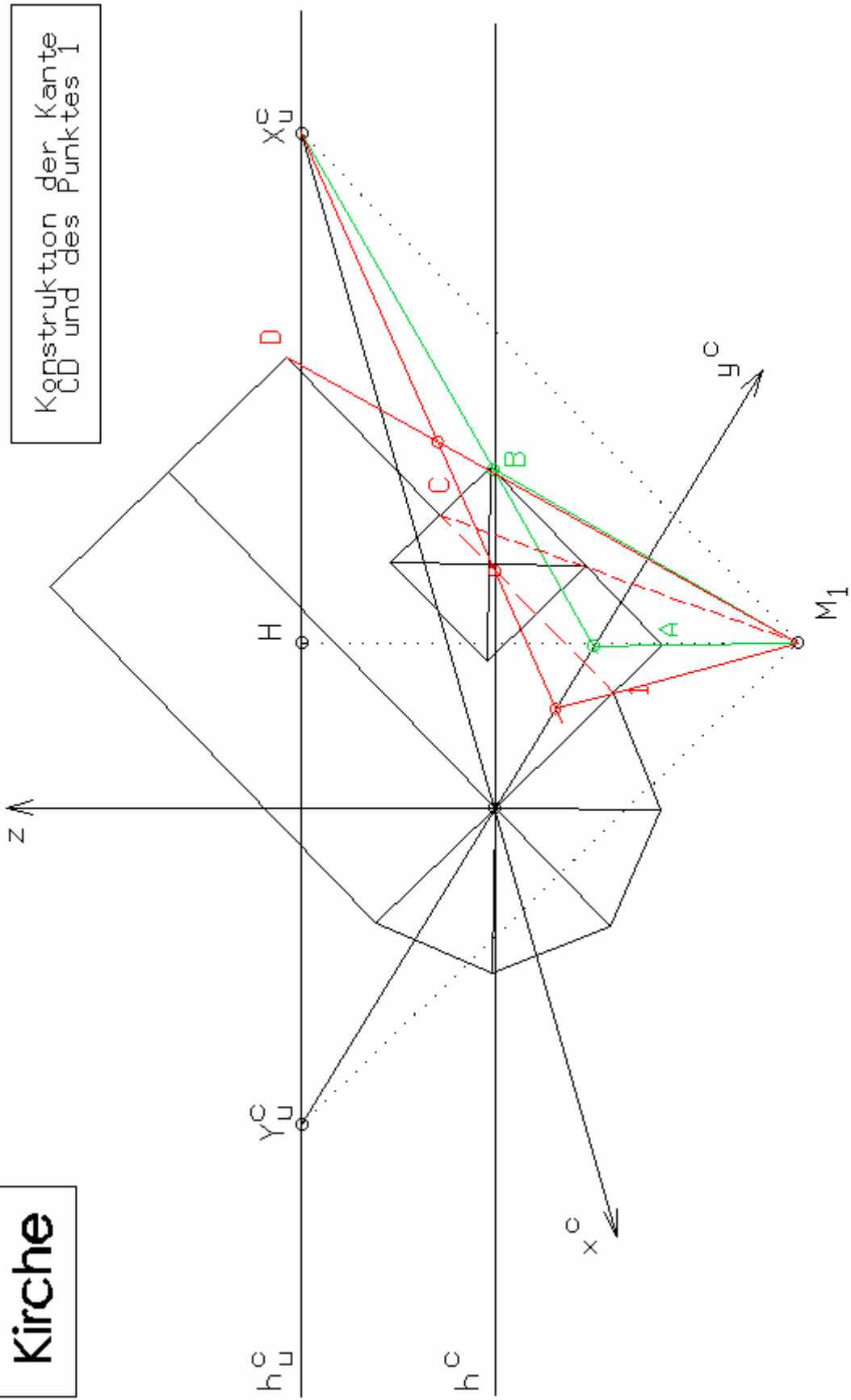
Kirche

Vervollständigung
der Angabe



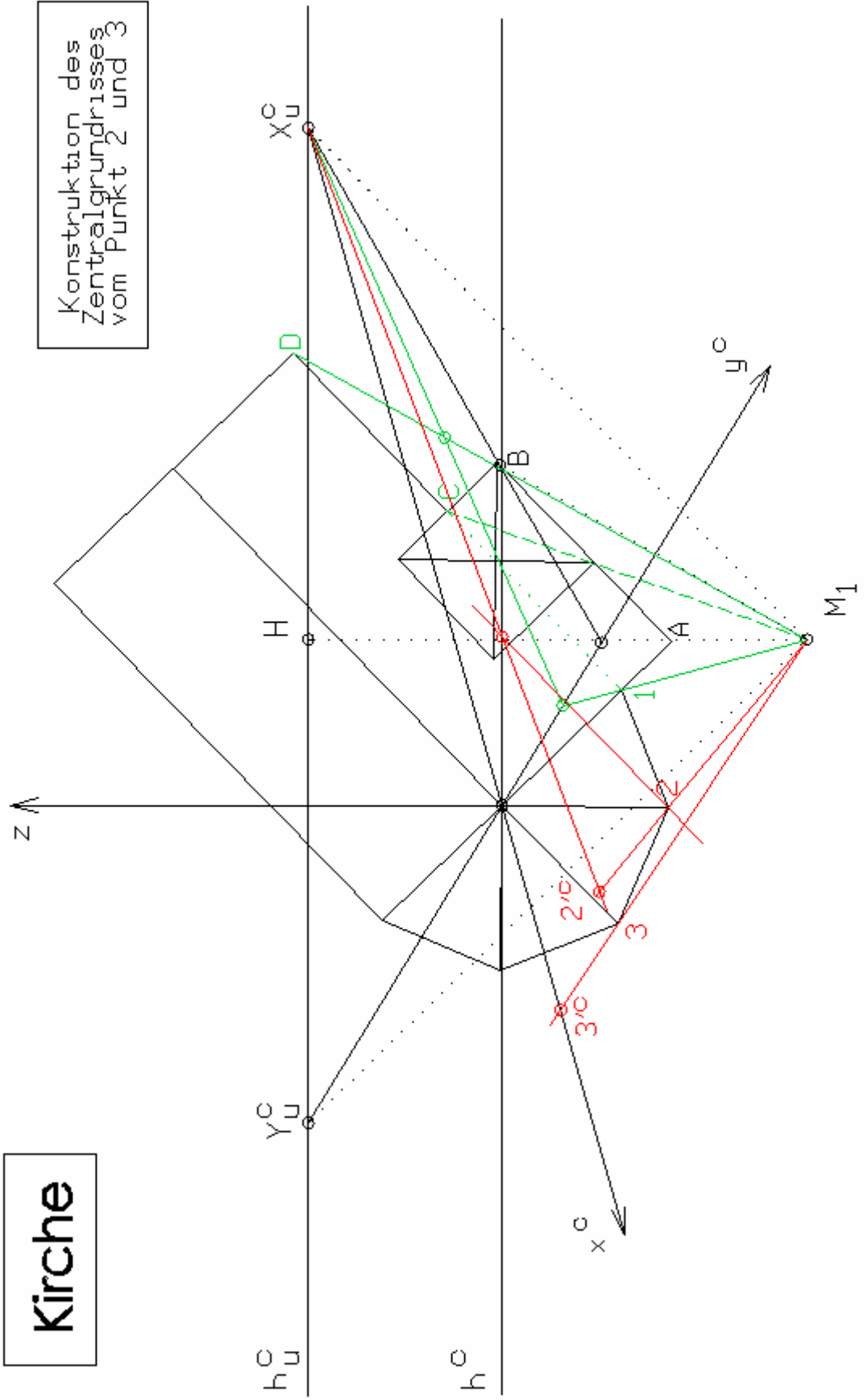
Kirche





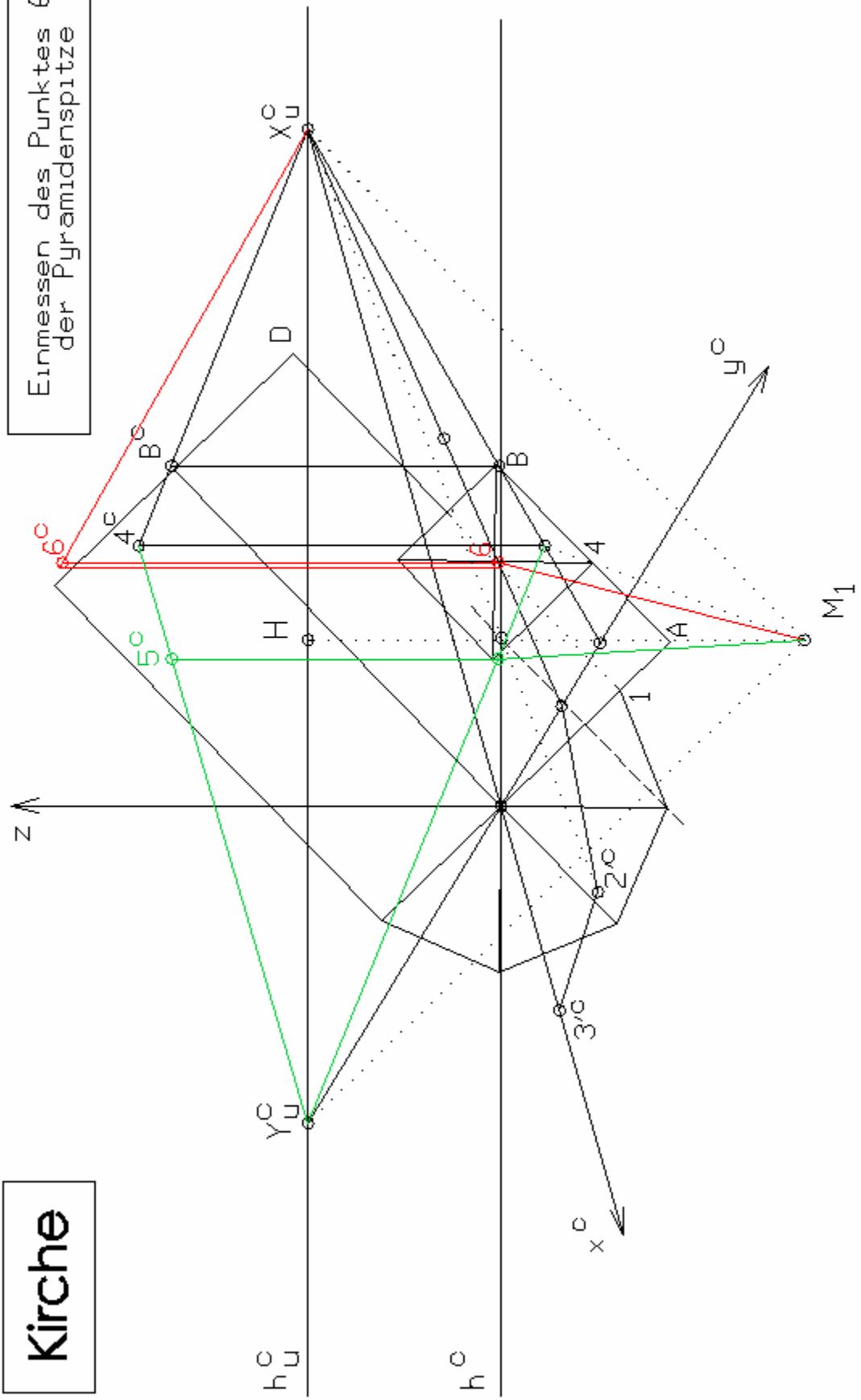
Konstruktion der Kante CD und des Punktes M_1

Kirche



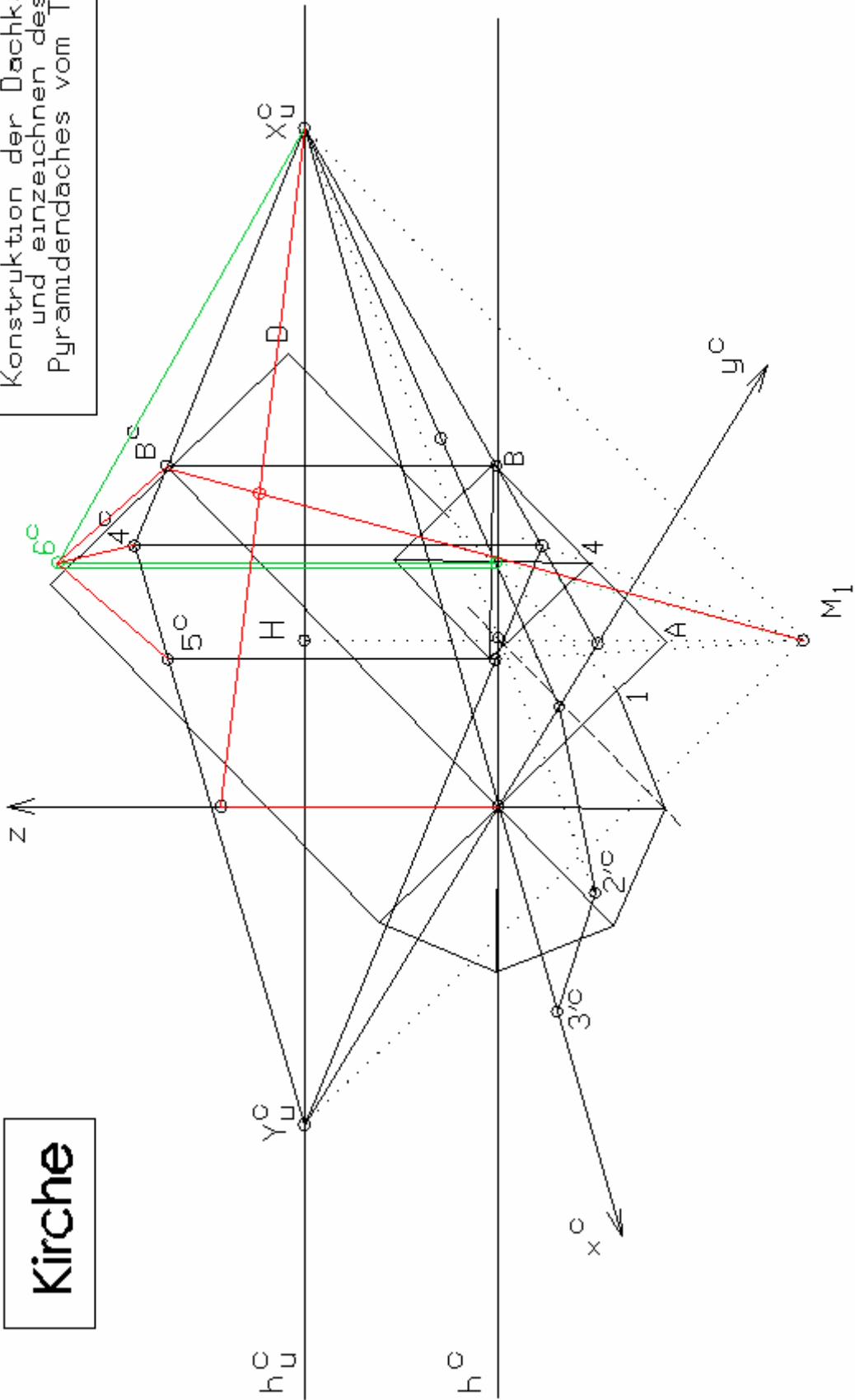
Kirche

Einmessen des Punktes 6,
der Pyramidenspitze



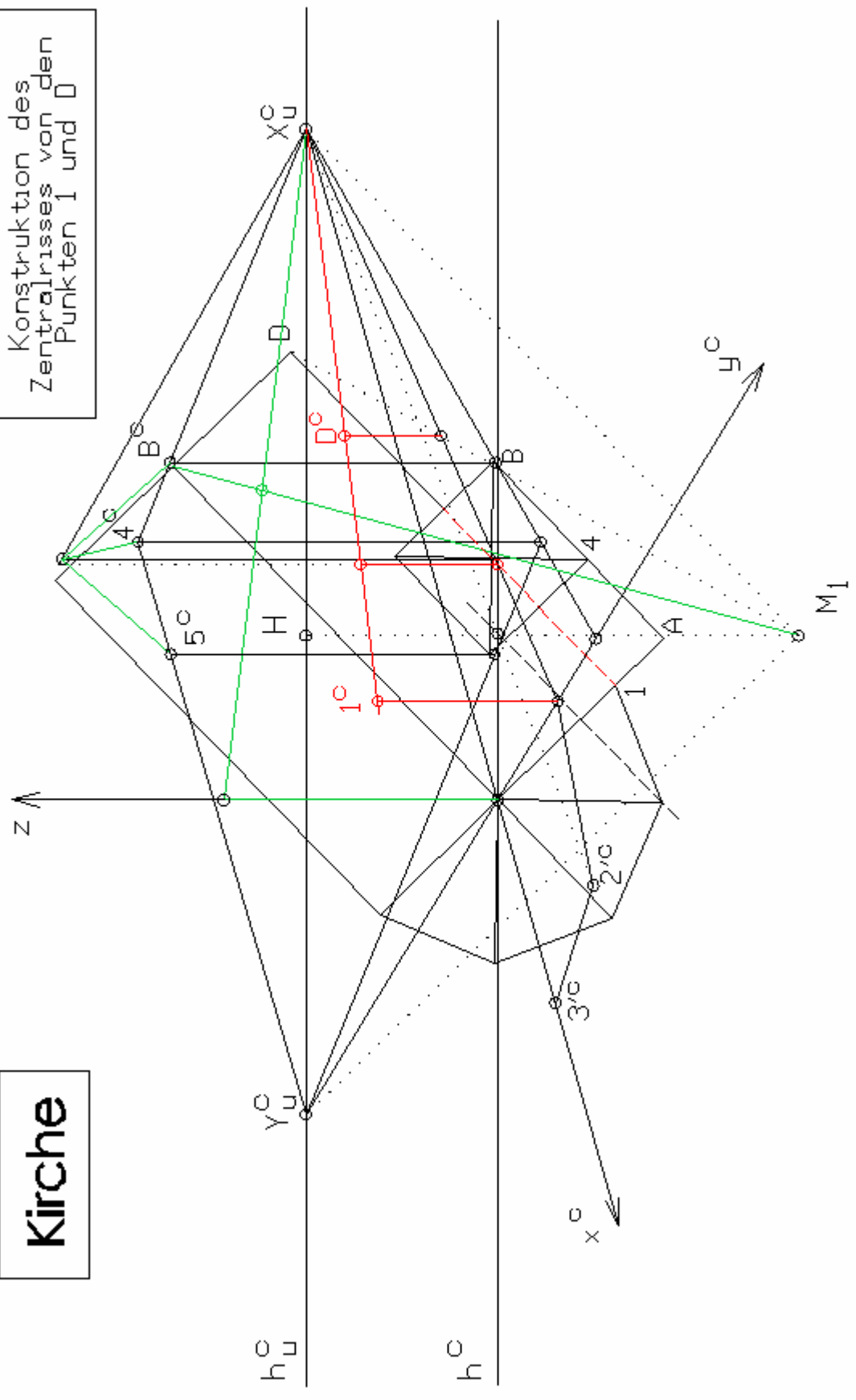
Kirche

Konstruktion der Dachkante
und einzeichnen des
Pyramidendaches vom Turm



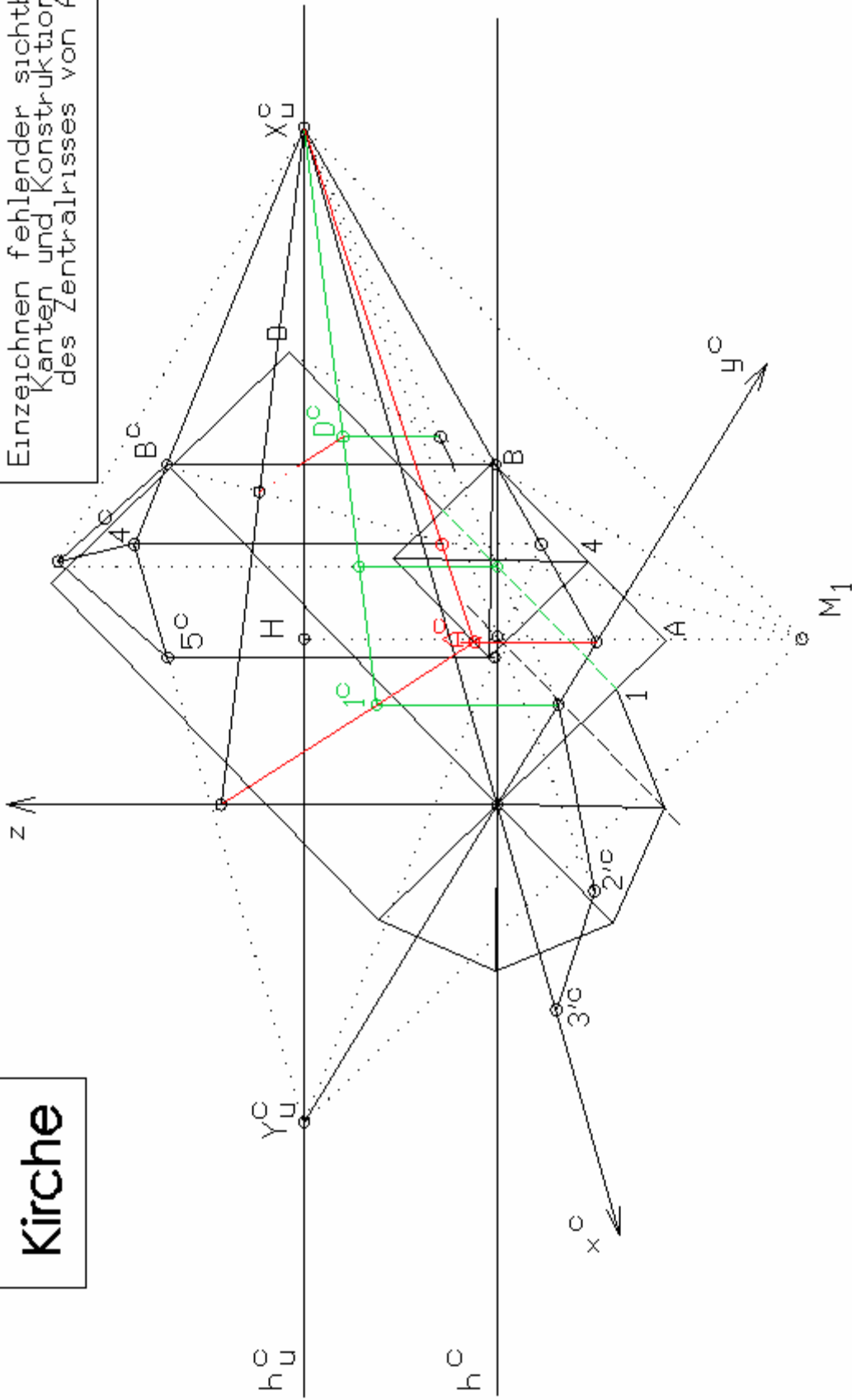
Kirche

Konstruktion des Zentralrisses von den Punkten 1 und D

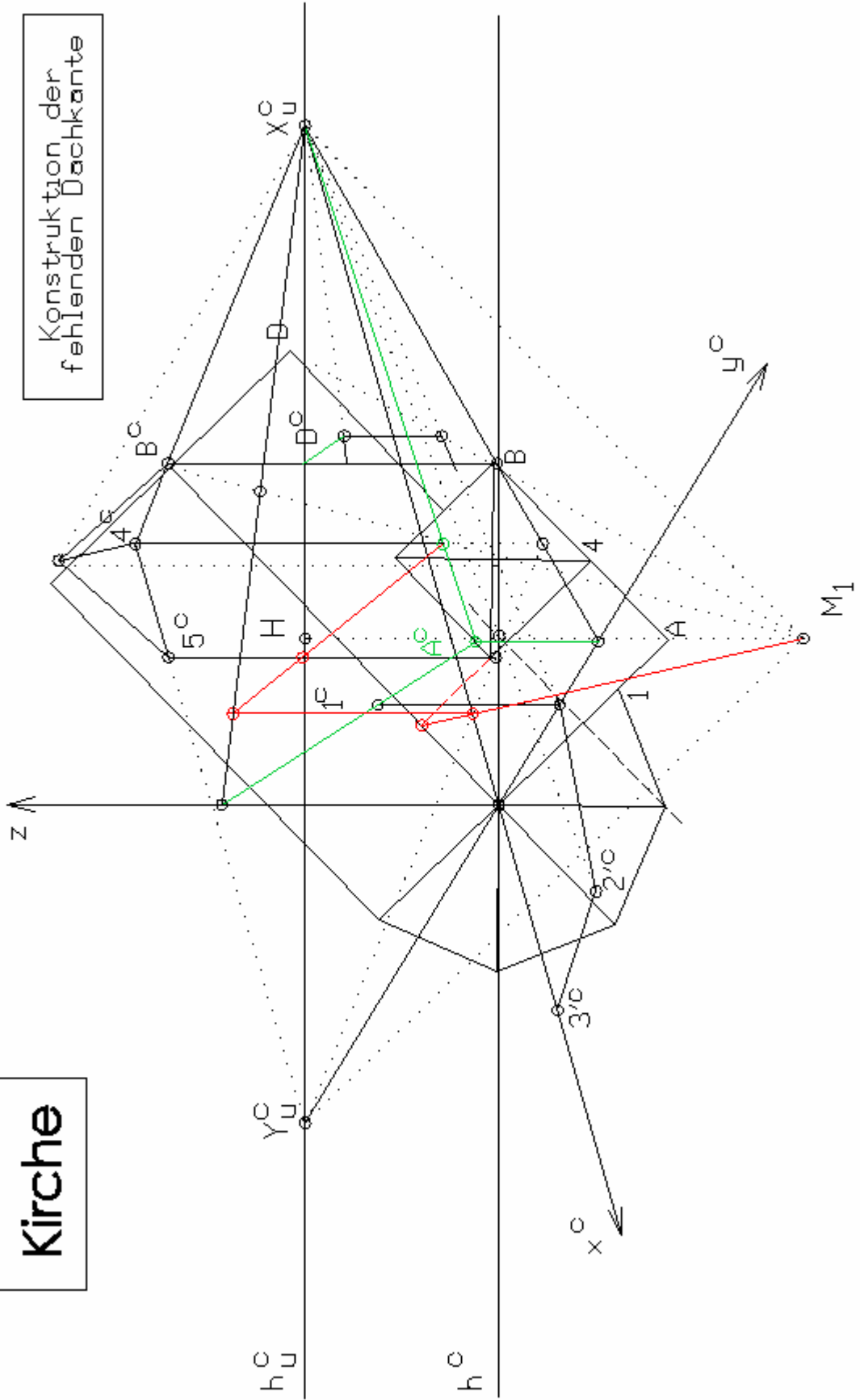


Kirche

Einzeichnen fehlender sichtbarer Kanten und Konstruktion des Zentralrisses von A

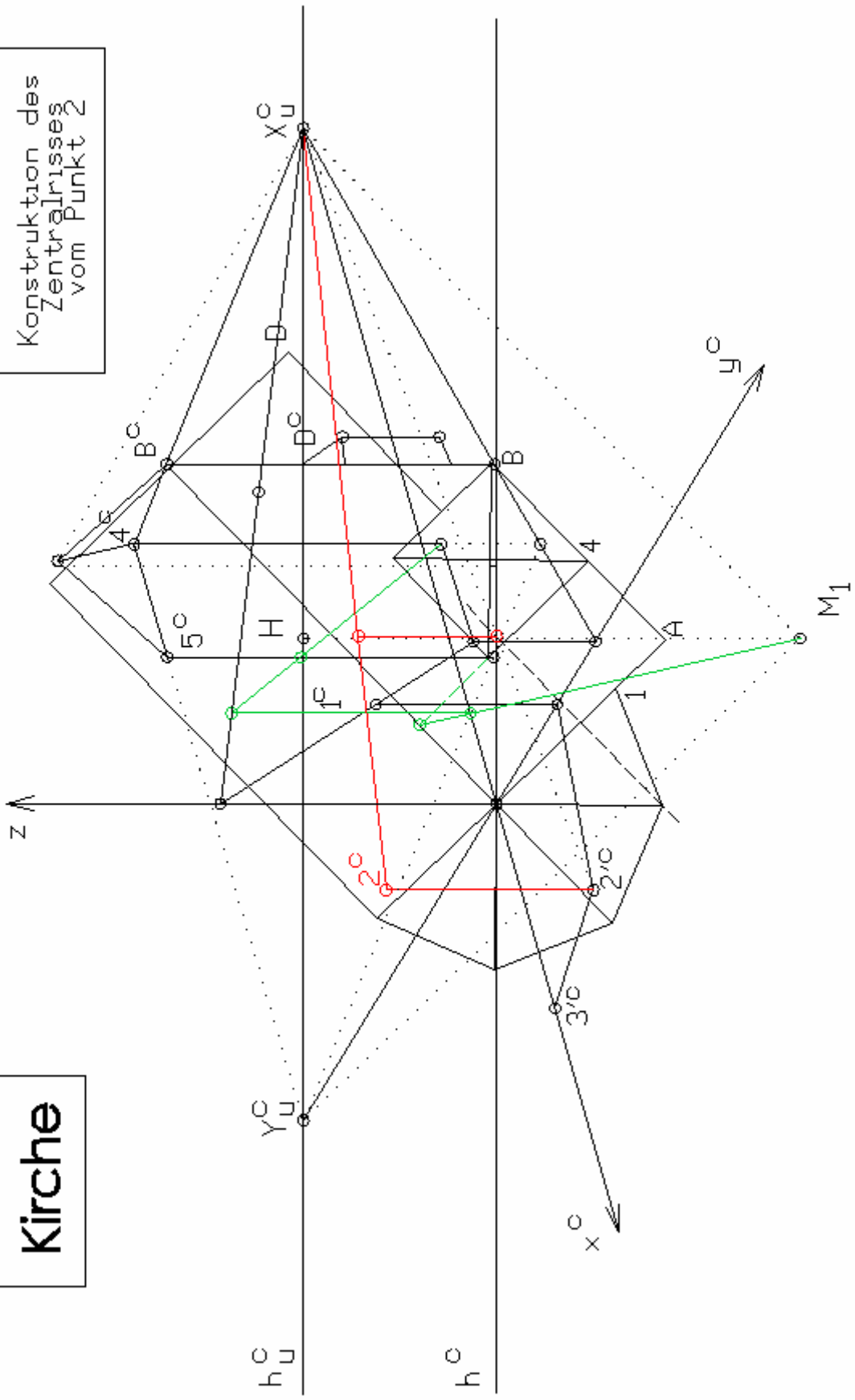


Kirche

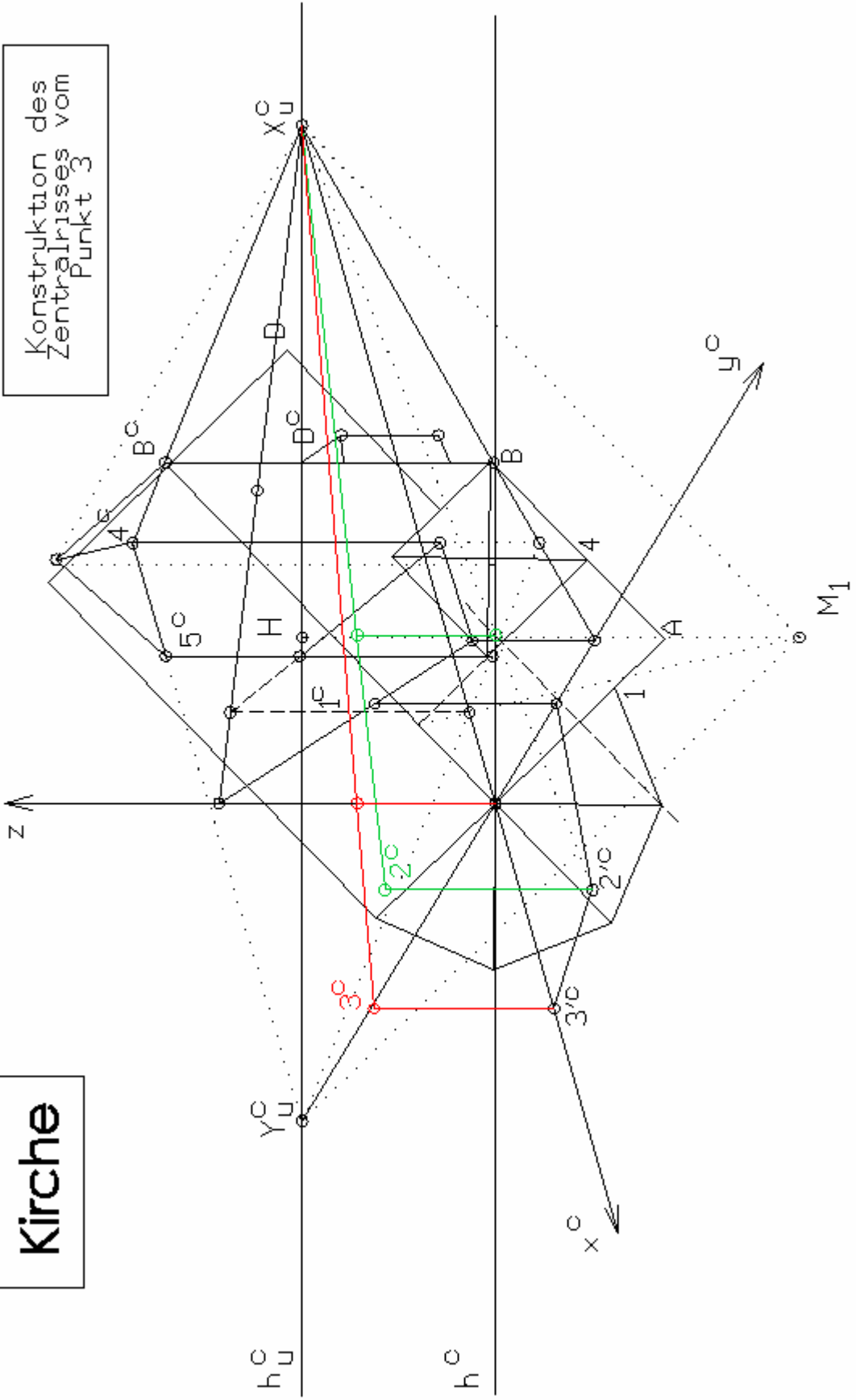


Konstruktion der fehlenden Dachkante

Kirche

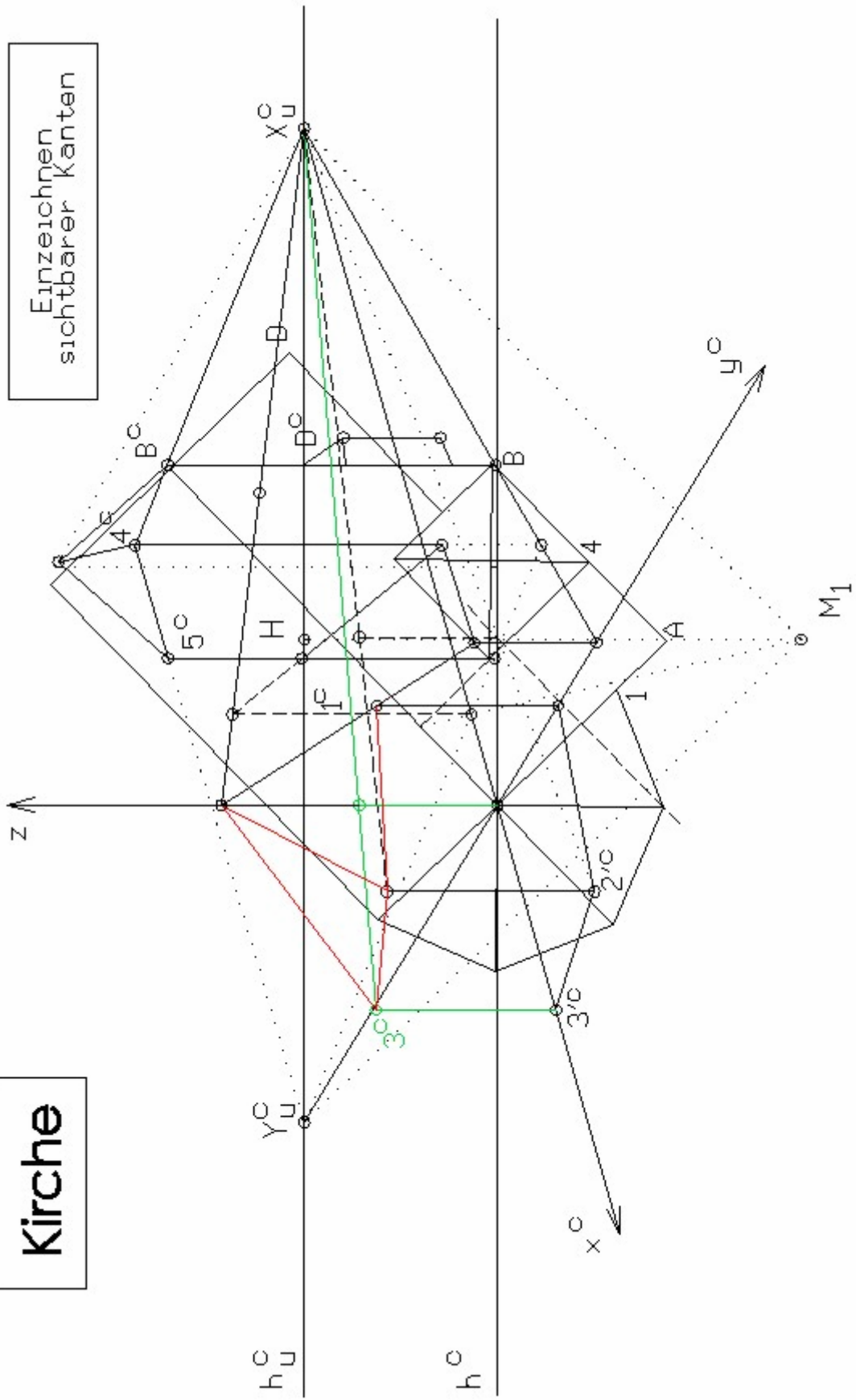


Kirche

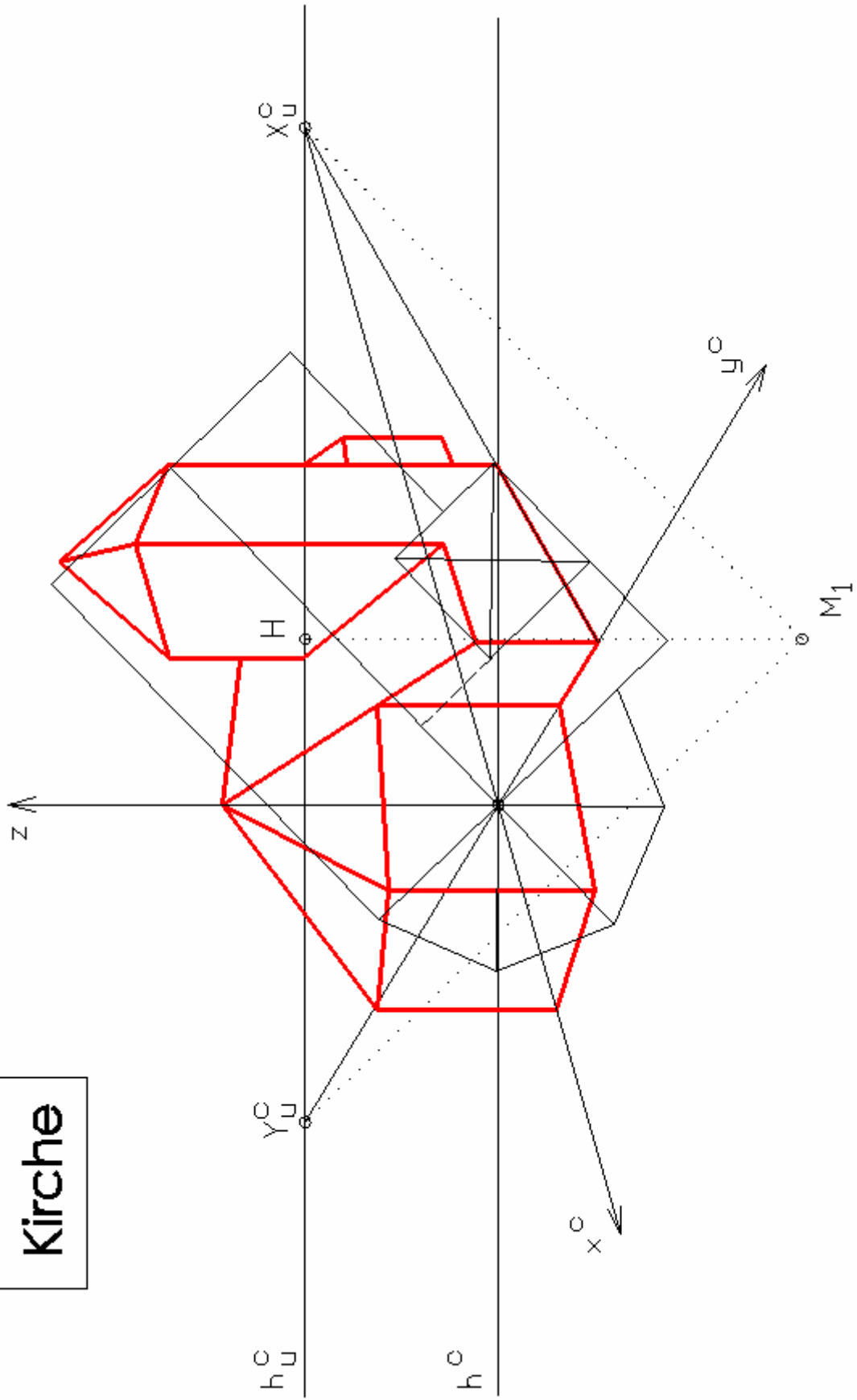


Kirche

Einzeichnen
sichtbarer Kanten



Kirche



2. Beispiel: Kamin

Konstruktionsbeschreibung:

Bild 1:

Man vervollständigt zuerst die Angabe, das heißt man zeichnet M_1 ein. M_1 liegt im Abstand $d = 9 \text{ cm}$ unter H . Y_u^c erhalten wir indem wir auf $X_u^c M_1$ einen rechten Winkel zeichnen.

Bild 2:

Wir zeichnen nun den Grundriss ein.

Bild 3:

Wir wollen nun die Kante AB im Zentralgrundriss konstruieren, das heißt wir suchen den Fixpunkt von AB auf h^c und verbinden ihn mit X_u^c , da AB eine x -parallele Kante ist. Die Punkte A'^c und B'^c bekommen wir, indem wir A und B mit M_1 verbinden und mit der fluchtenden Kante schneiden. Der Punkt A'^c liegt auf y^c , da er auch einer y -parallelen Kante angehört und zwar der y -Achse.

Bild 4:

Die y -parallele Kante AD liegt direkt auf der y -Achse und $D = D'^c$ ist der Ursprung. Somit haben wir diese Kante im Zentralgrundriss schon gefunden. Der untere Sockel des Kamins hat die Höhe 0.5 cm . Diese wollen wir im Fixpunkt von AB auf h^c einmessen. Den eingemessenen Punkt verbinden wir mit X_u^c und suchen uns die Punkte A^c und B^c auf einer z -parallelen Gerade über A'^c und B'^c . Die Höhe über D haben wir sofort indem wir A^c mit Y_u^c verbinden.

Bild 5:

Wir suchen uns nun den Zentralgrundriss der Seitenwände des Kamins. Zuerst suchen wir jenen der Punkte 1 und 2, indem wir ihren Fixpunkt mit X_u^c verbinden, und auch den Zentralgrundriss der Zwischenpunkte 3 und 4.

Bild 6:

Wir suchen uns nun auch den Zentralgrundriss vom Punkt 5, indem wir 1^c mit Y_u^c verbinden. Diese Gerade muss durch den Fixpunkt von 15 auf der Spur h^c gehen. 5^c liegt auf der y^c - Achse.

Bild 7:

Die ersten zwei Bausteine, das heißt der unterste linke und der unterste rechte Baustein, die auf dem Sockel liegen, befinden sich also in einer Höhe von 0.5 cm. Wir zeichnen nun die Punkte 1 bis 5 in dieser Höhe ein.

Bild 8:

Der erste Baustein selbst hat vom Sockel aus die Höhe 1 cm, welche wir nun einmessen wollen.

Bild 9:

Der zweite Baustein hat vorne eine Abschrägung. Wir suchen uns nun diese Punkte 6 und 7 und ihre Zwischenpunkte 8 und 9 im Zentralgrundriss.

Bild 10:

Der zweite Baustein hat wieder die Höhe 1 cm, also befinden sich unsere Punkte 6 bis 9 insgesamt bereits auf einer Höhe von 2.5 cm.

Bild 11:

Wir zeichnen nun die schrägen Kanten des zweiten Teils der Wand ein.

Bild 12:

Der dritte Teil hat die Höhe 1.5 cm und diese Höhe kann analog über dem Fixpunkt von der Kante 67 eingemessen werden. So kann nun auch der dritte Baustein gezeichnet werden. Man sieht, dass man die nach Y_u^c fluchtenden Kanten der Bausteine nicht einzeichnet, da ja alle fünf Bausteine eine Wand ohne Zwischenlinien bilden. Nur die erste Linie wurde einstweilen als Veranschaulichung des ersten Steines eingezeichnet.

Bild 13:

der nächste Baustein hat wieder eine schiefe Kante, genau in die andere Richtung abgeschrägt wie der zweite Baustein. Der vierte Baustein hat die Höhe 1 cm. Der am weitersten links liegende Endpunkt der schiefen Kante liegt über dem Punkt 1, insgesamt in einer Höhe von 5 cm.

Bild 14:

Wir verbinden nun wieder die schiefen Kanten.

Bild 15:

Wir zeichnen nun den fünften und letzten Baustein der Kaminwand. Er hat die Höhe 0.5 cm. Seine vordersten Kanten liegen über den Punkten 1^c bis 4^c. Die unteren Kanten sind die oberen Kanten des letzten Bausteins und diese haben wir im letzten Bild schon eingezeichnet. Hier können wir nun auch die y - parallele obere Kante einzeichnen.

Bild 16:

Der nächste Teil wird den beiden Wänden des Kamins aufgesetzt und hat wieder eine schräge Kante vorne und auf den Seiten. Die Größe der oberen Fläche dieses Teils ist genauso groß wie der Sockel des Kamins. Also suchen wir uns Punkte, die über A^c , B^c , D^c liegen und zwar in der Höhe 6 cm, da die Kaminwand 5 cm hoch ist und unser zu konstruierender Teil 1 cm. Der Punkt über D^c liegt natürlich auf der z - Achse.

Bild 17:

Wir können die schiefen Kanten wieder einzeichnen. Der 0.5 cm dicke quaderförmige Teil der nun noch aufgesetzt werden soll, kann analog vorher wieder eingemessen und eingezeichnet werden, also den eingemessenen Punkt mit X_u^c verbinden und mit den z - Parallelen über den gewollten Punkten schneiden.

Bild 18:

Als Letztes muss noch der oberste Aufsatz gezeichnet werden. Die untere Fläche dieses Aufsatzes hat dieselbe Größe wie der untere Teil des schrägen Teils, den wir in [Bild 16](#) konstruiert haben. Das heißt die Punkte der unteren Kante liegen über den Punkten 1^c bis 5^c in einer Höhe von insgesamt 7 cm.

Bild 19:

Die obere Fläche suchen wir uns aus dem Grundriss und zeichnen die benötigten Punkte E , F und G ein. E^c liegt auf der y - Achse.

Bild 20:

Im Fixpunkt kann die Gesamthöhe von 11.5 cm eingemessen werden. Der eingemessene Punkt, der oberen Kante des letzten Teils, wird mit X_u verbunden und mit der z - Parallelen durch den Zentralgrundriss von G und F geschnitten.

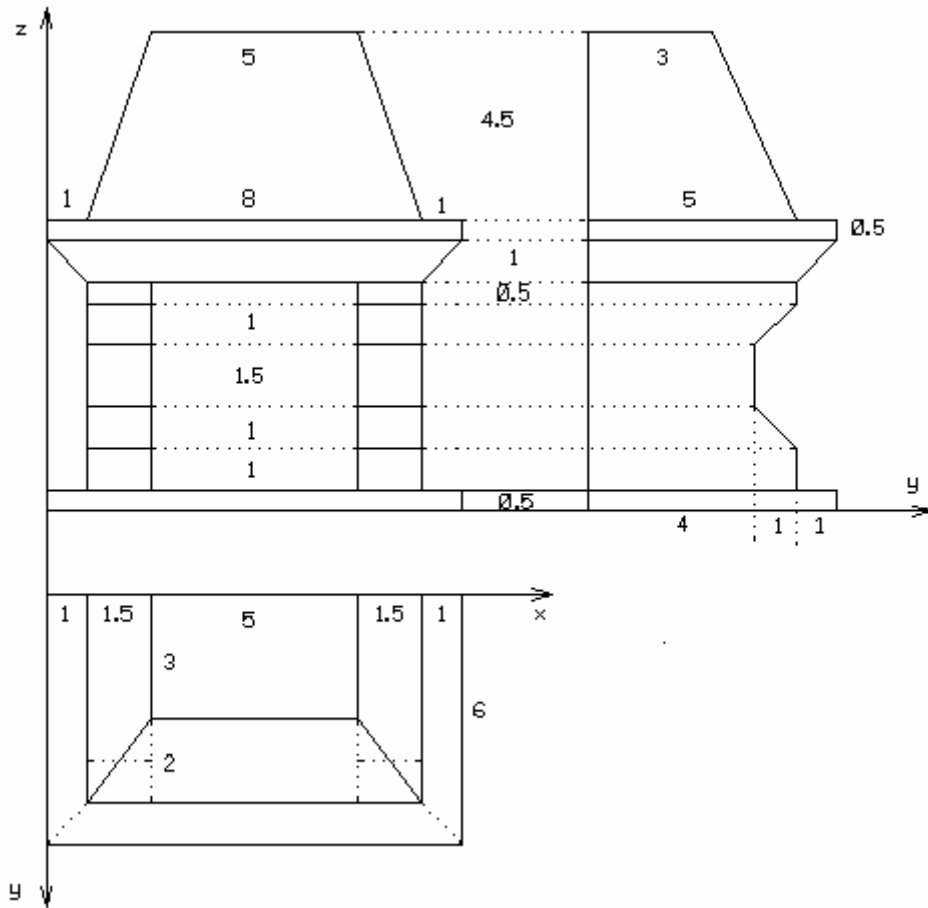
Bild 21:

Nun vervollständigen wir das Objekt mit noch nicht eingezeichneten sichtbaren Kanten.

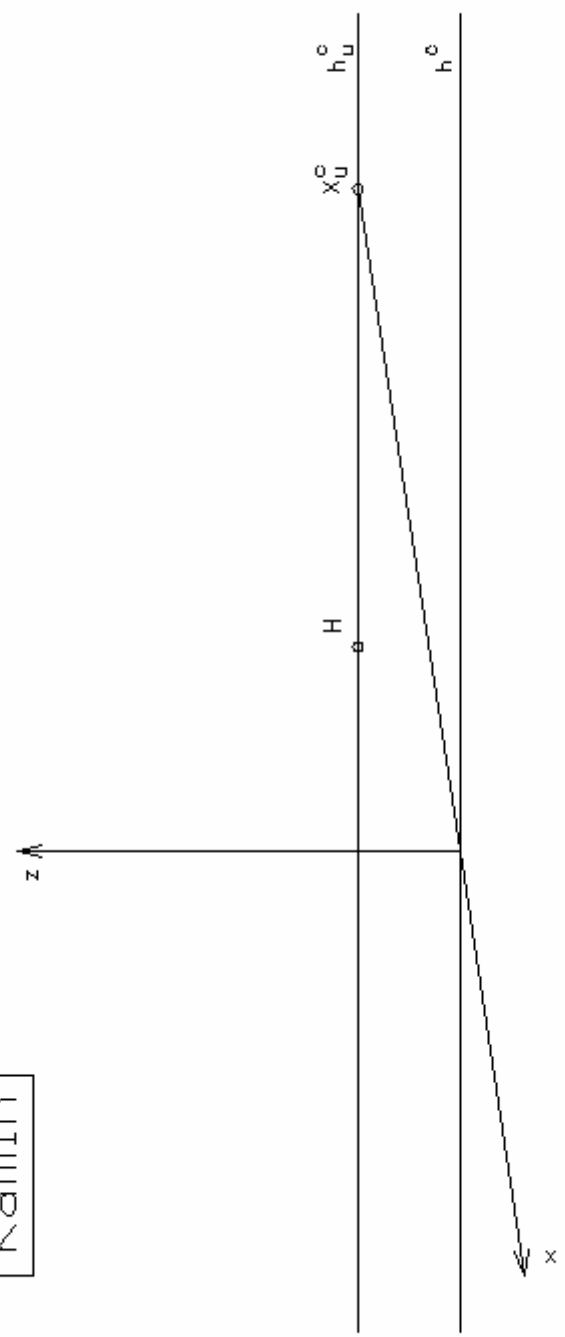
Bild 22:

Zur besseren Veranschaulichung wollen wir nun die sichtbaren Kanten des Objekts dick mit Farbe ausführen.

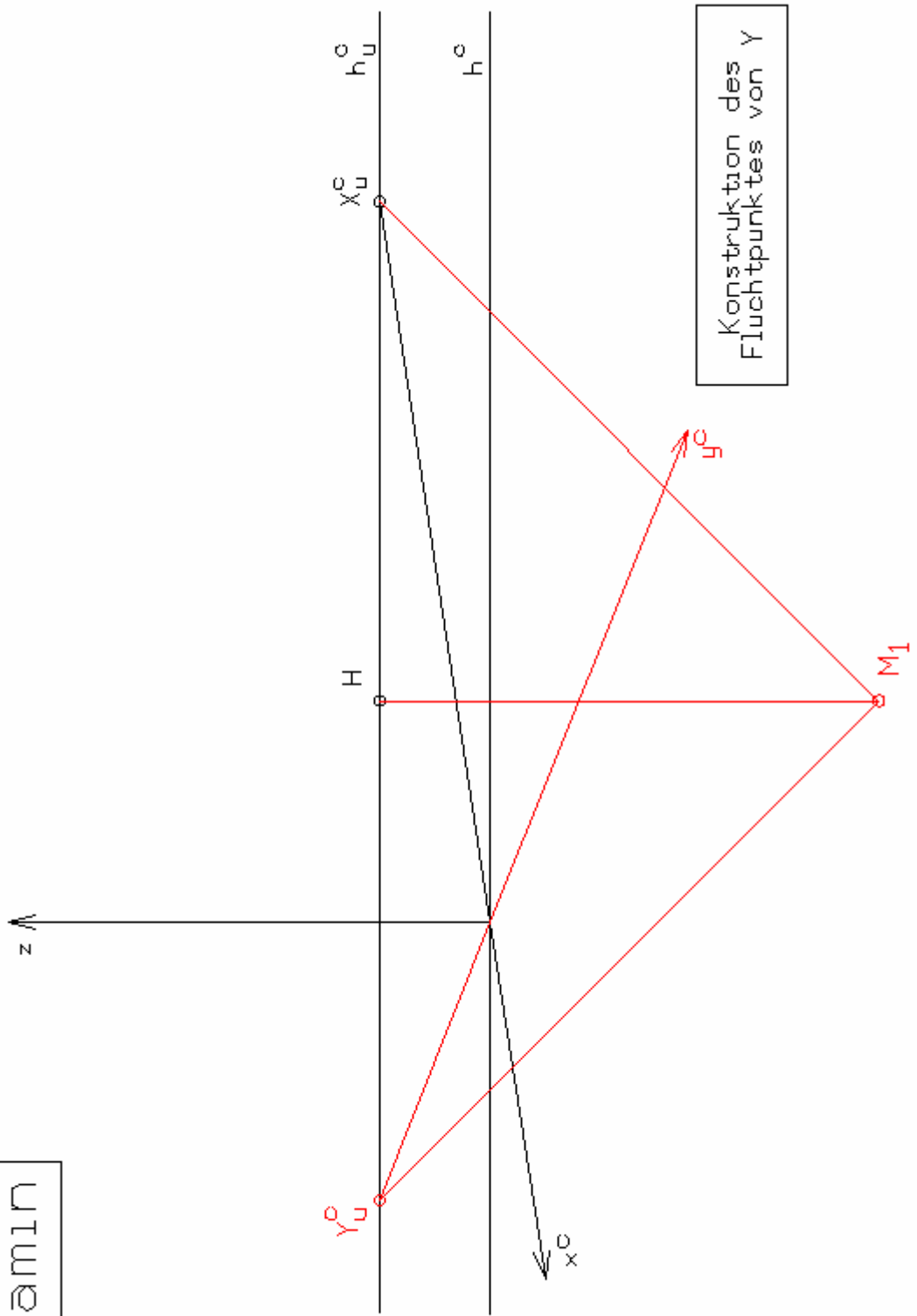
Angabe der Abmessungen des Objekts:

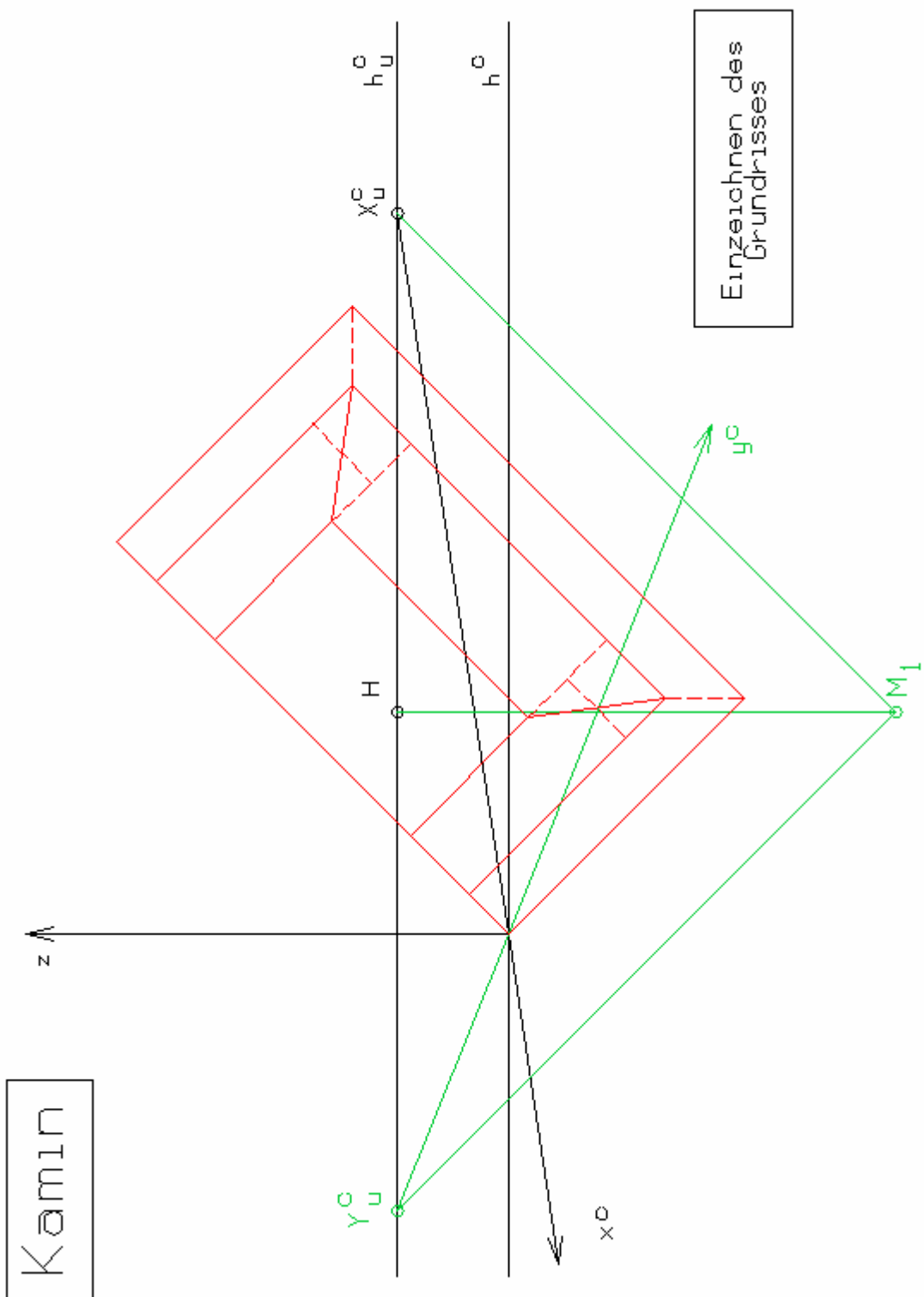


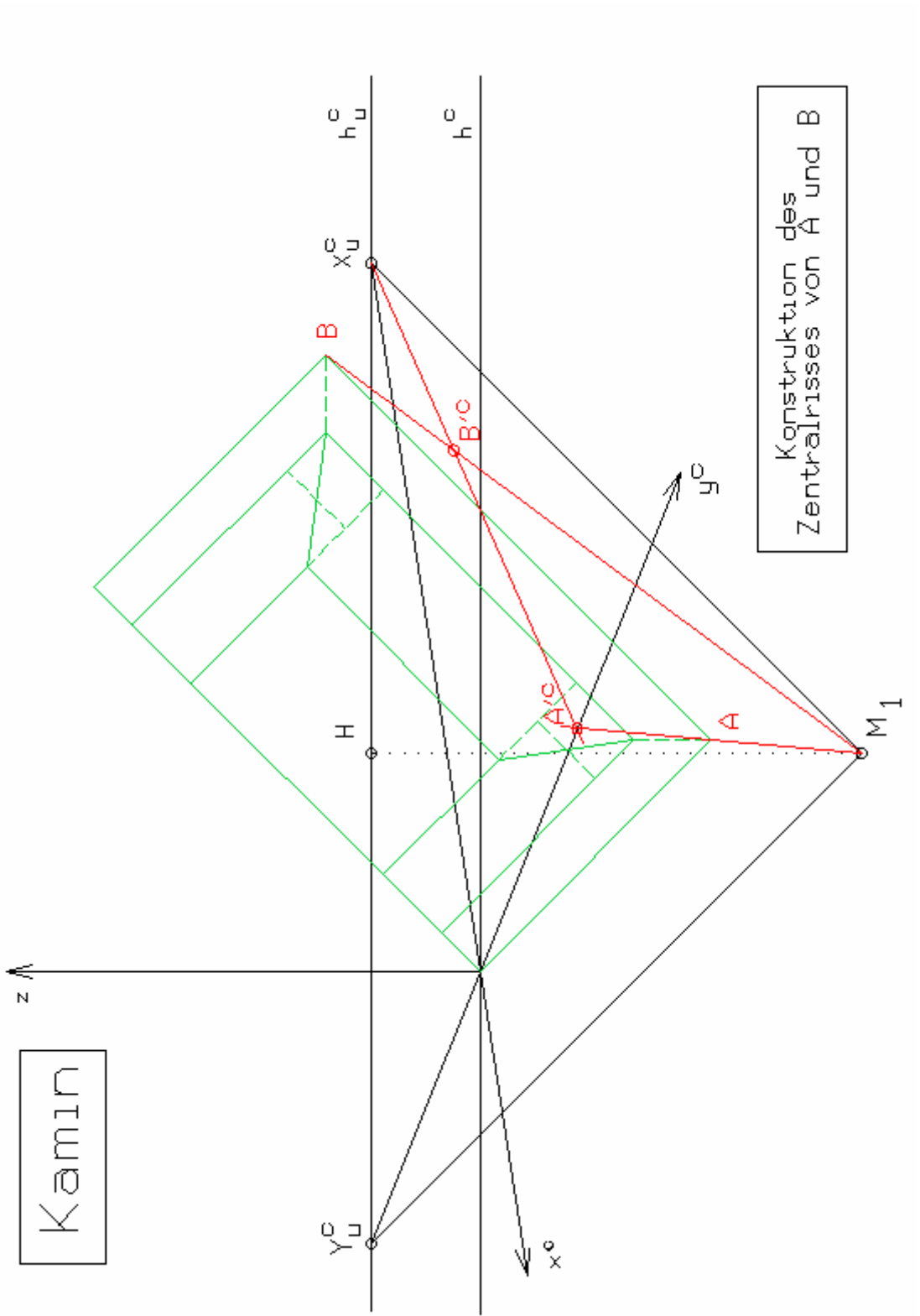
Kamın

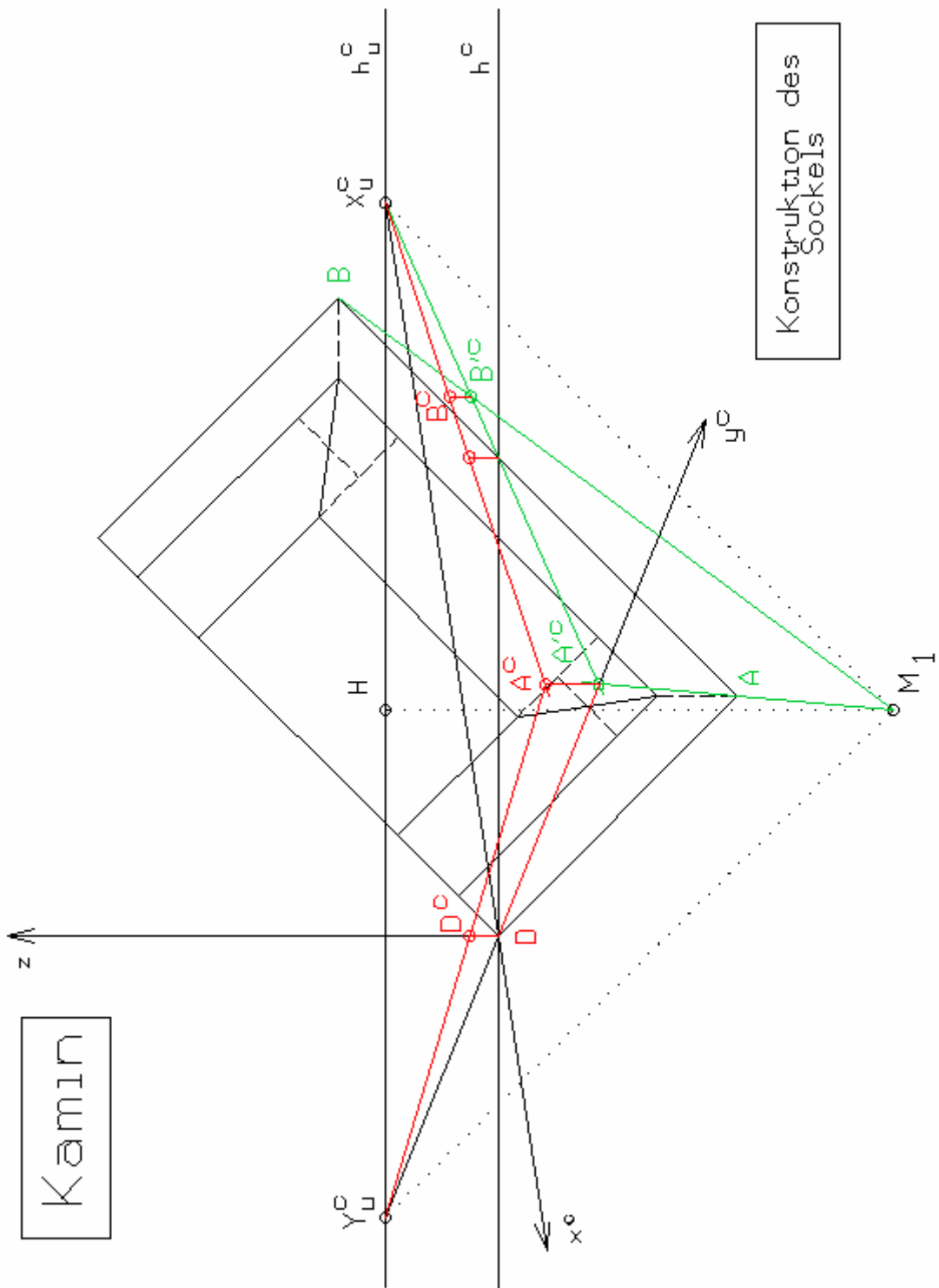


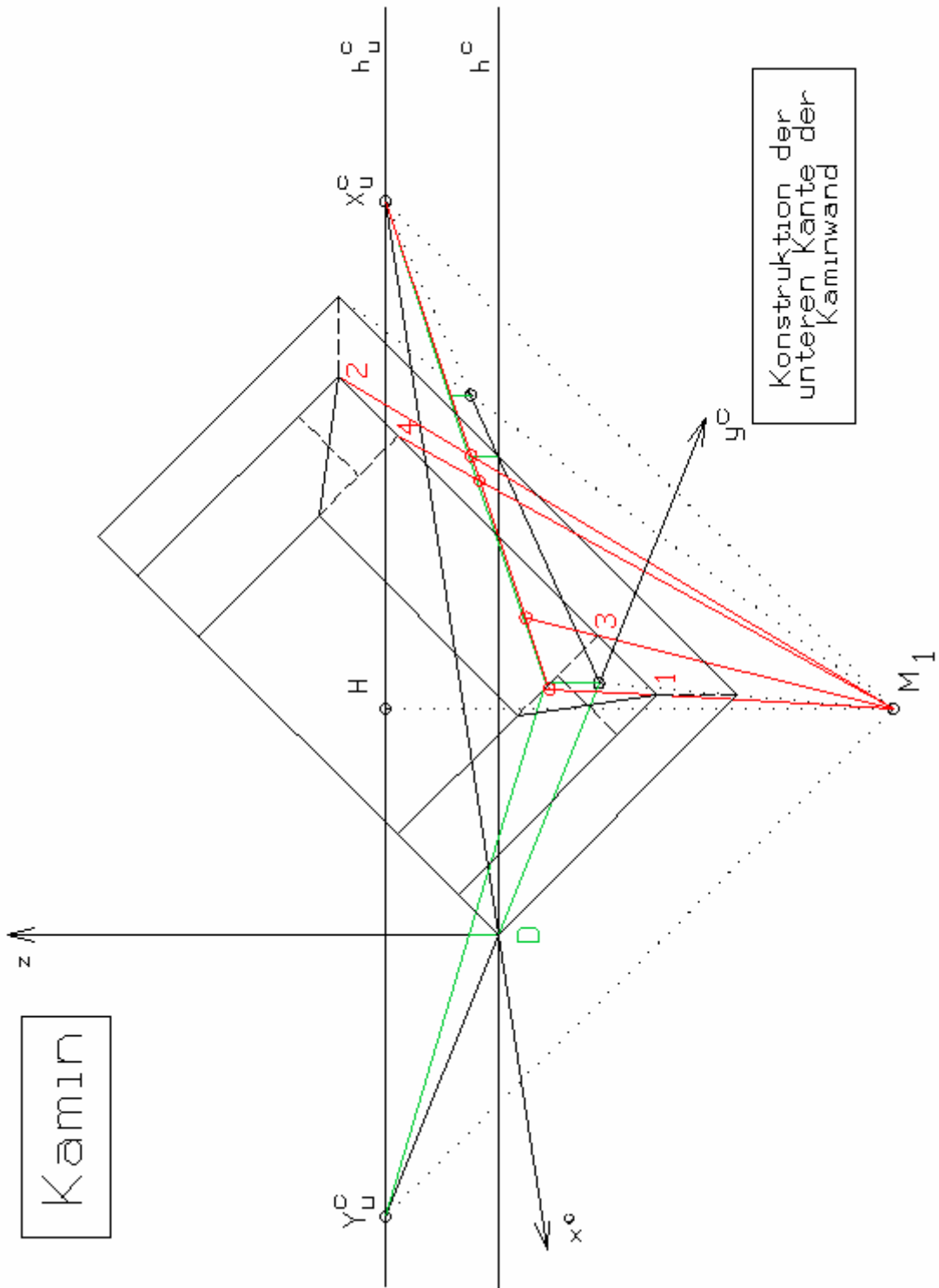
Kamin

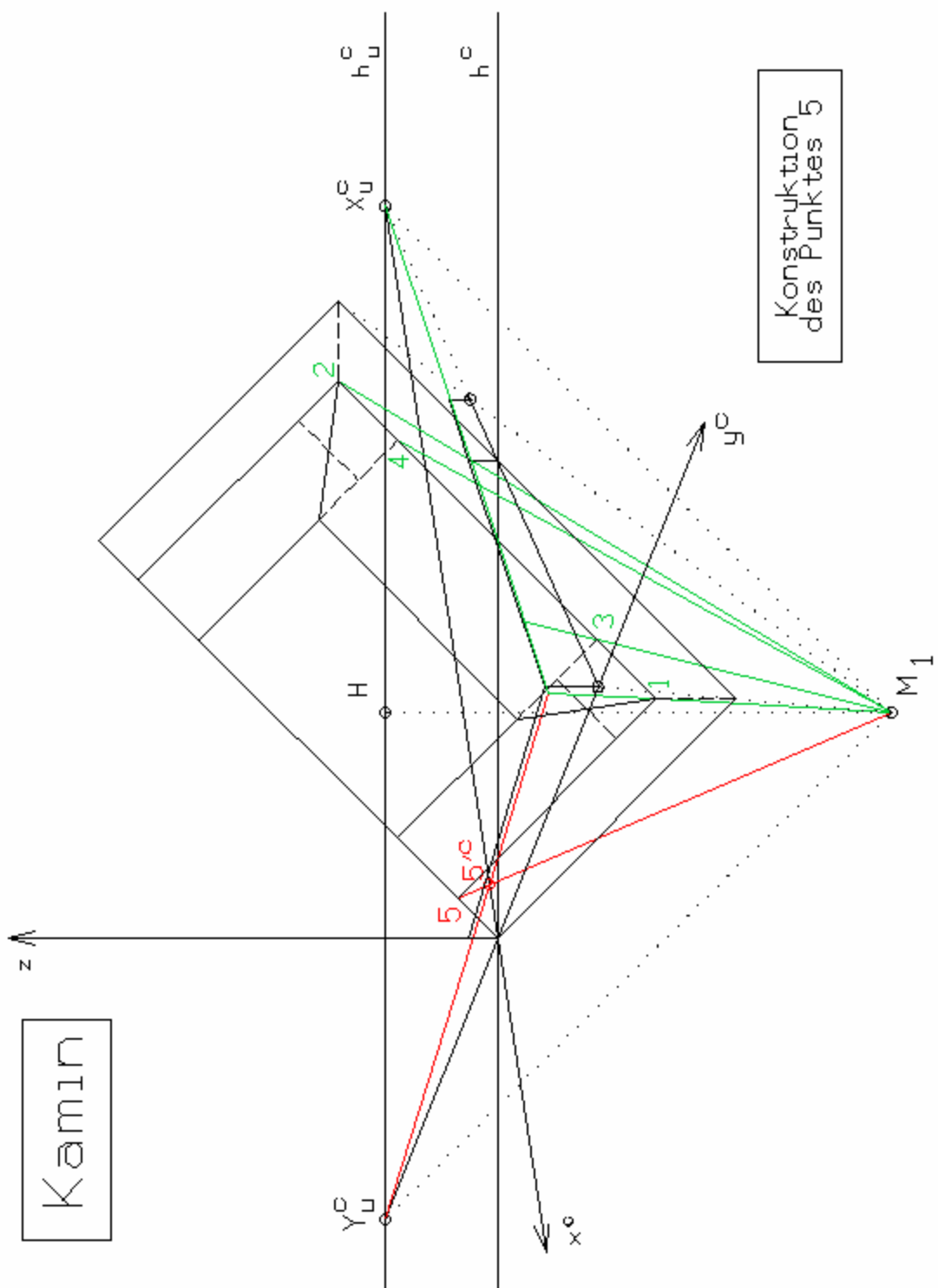


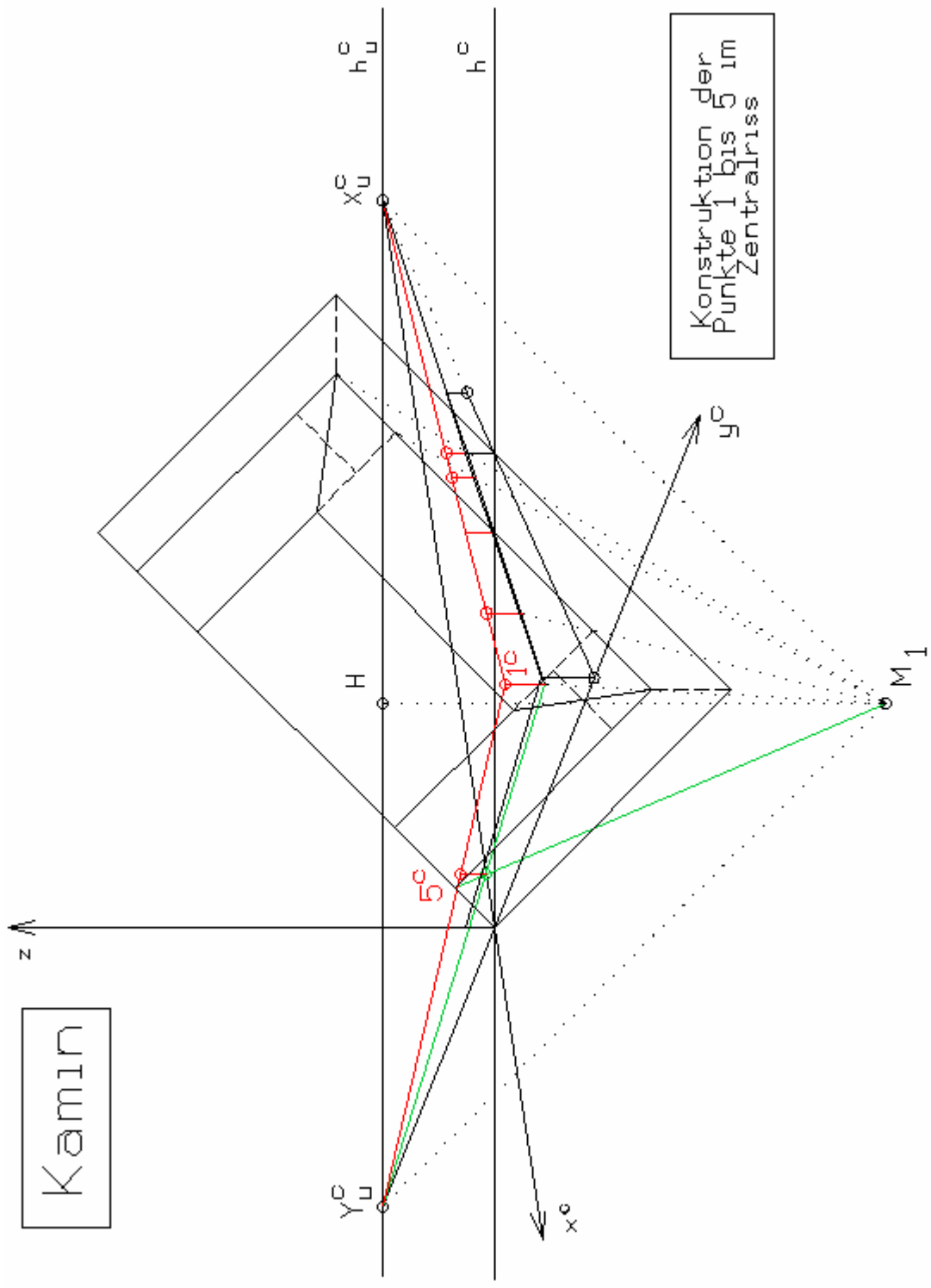


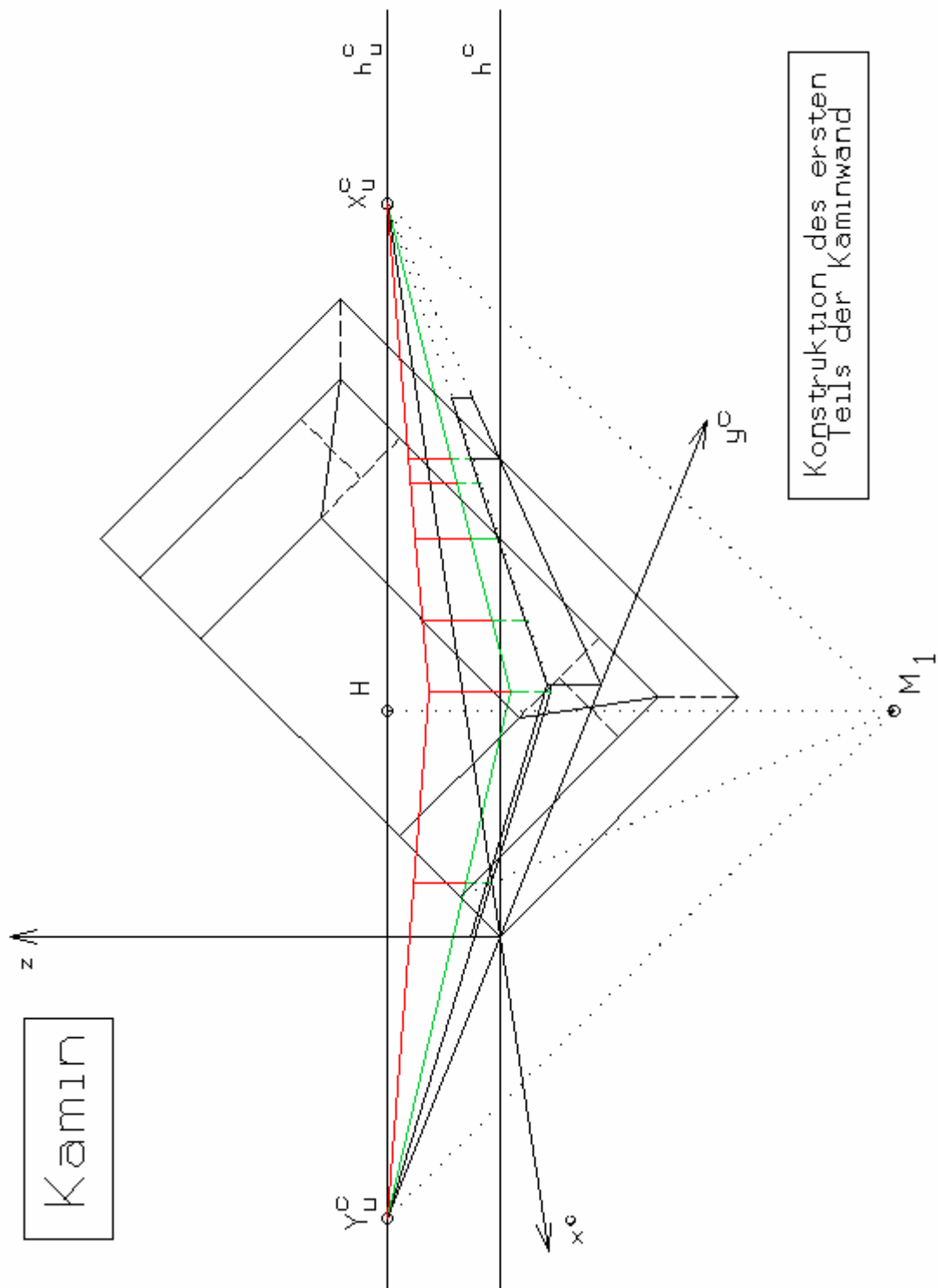


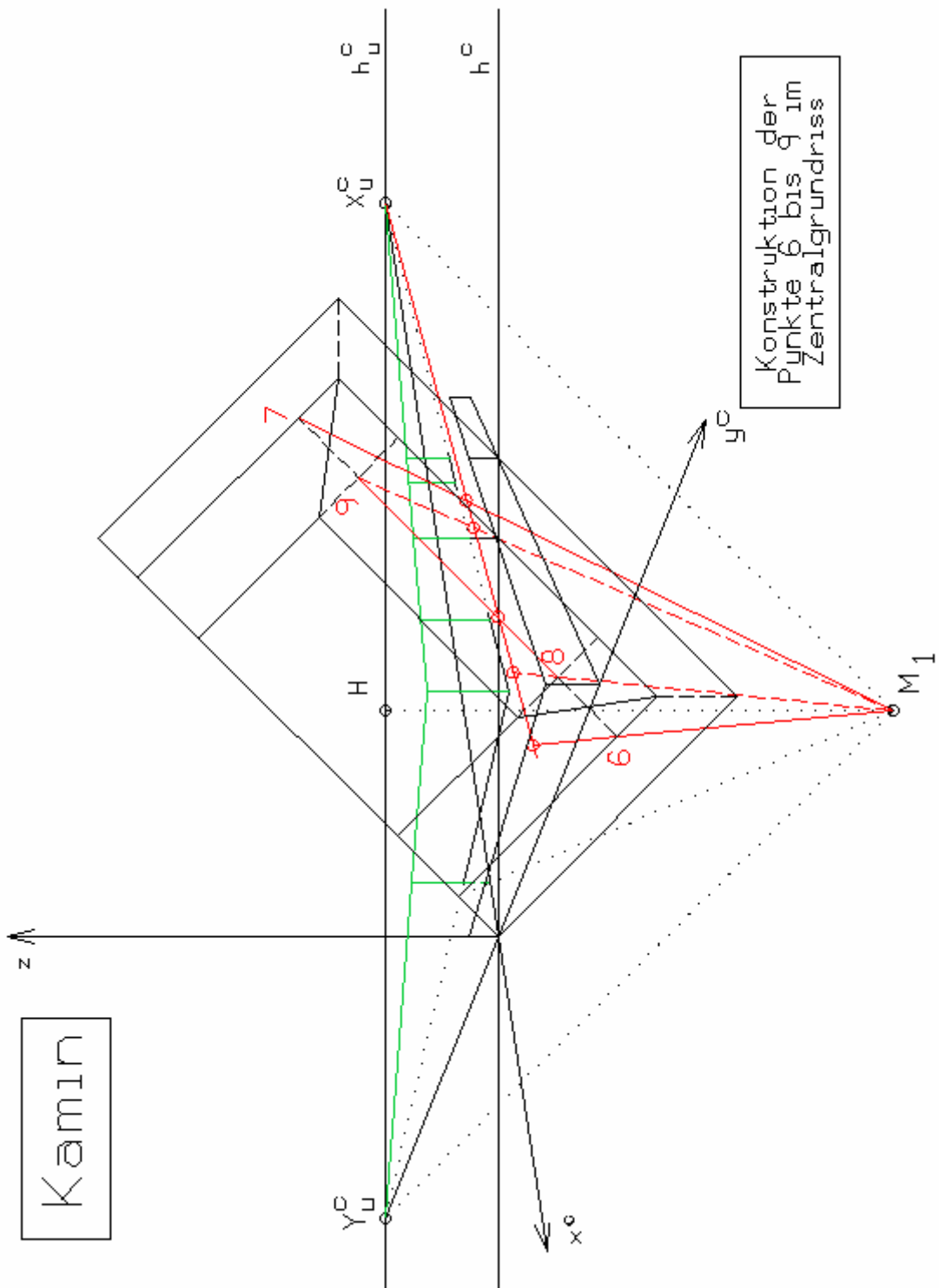


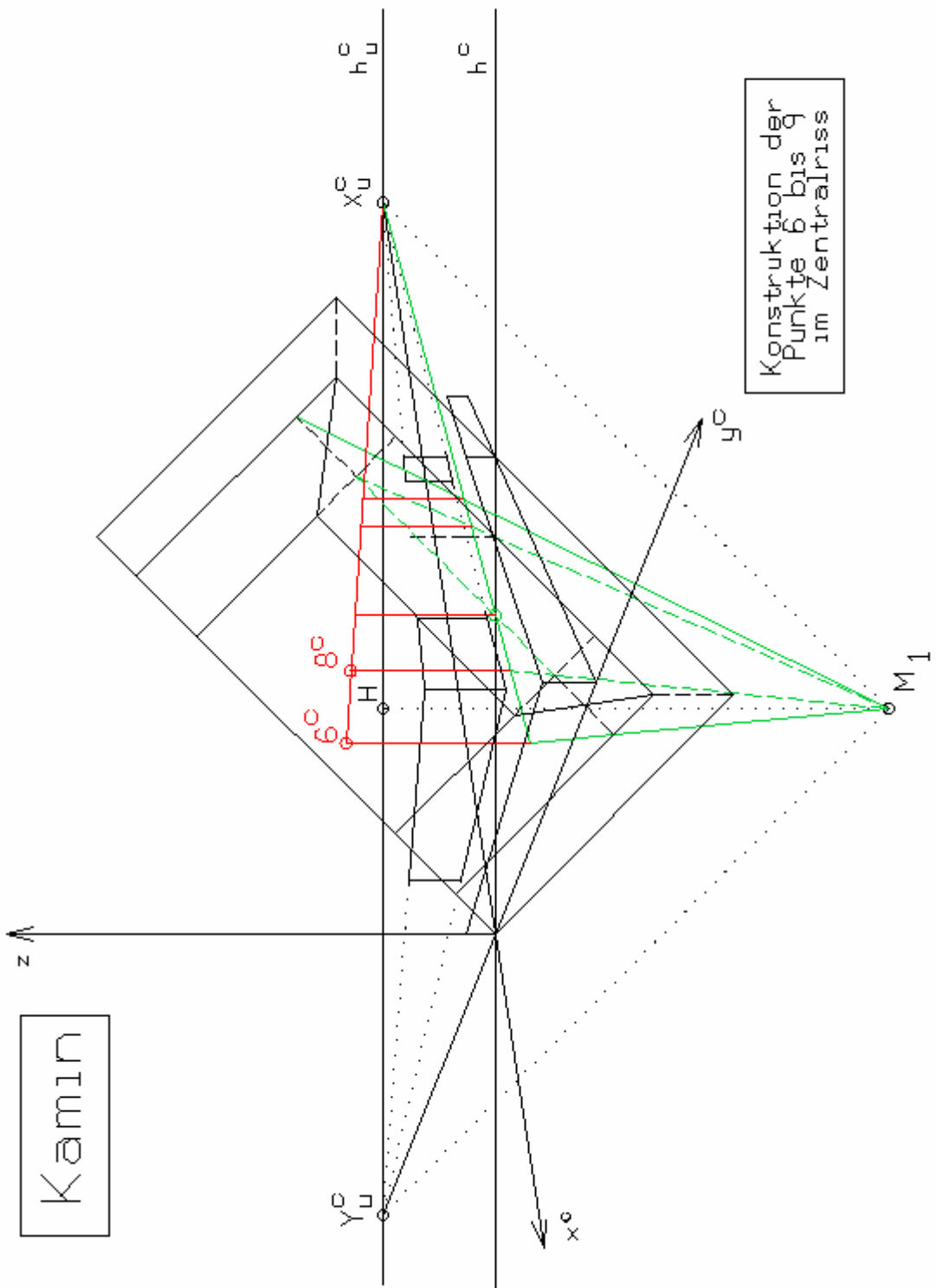


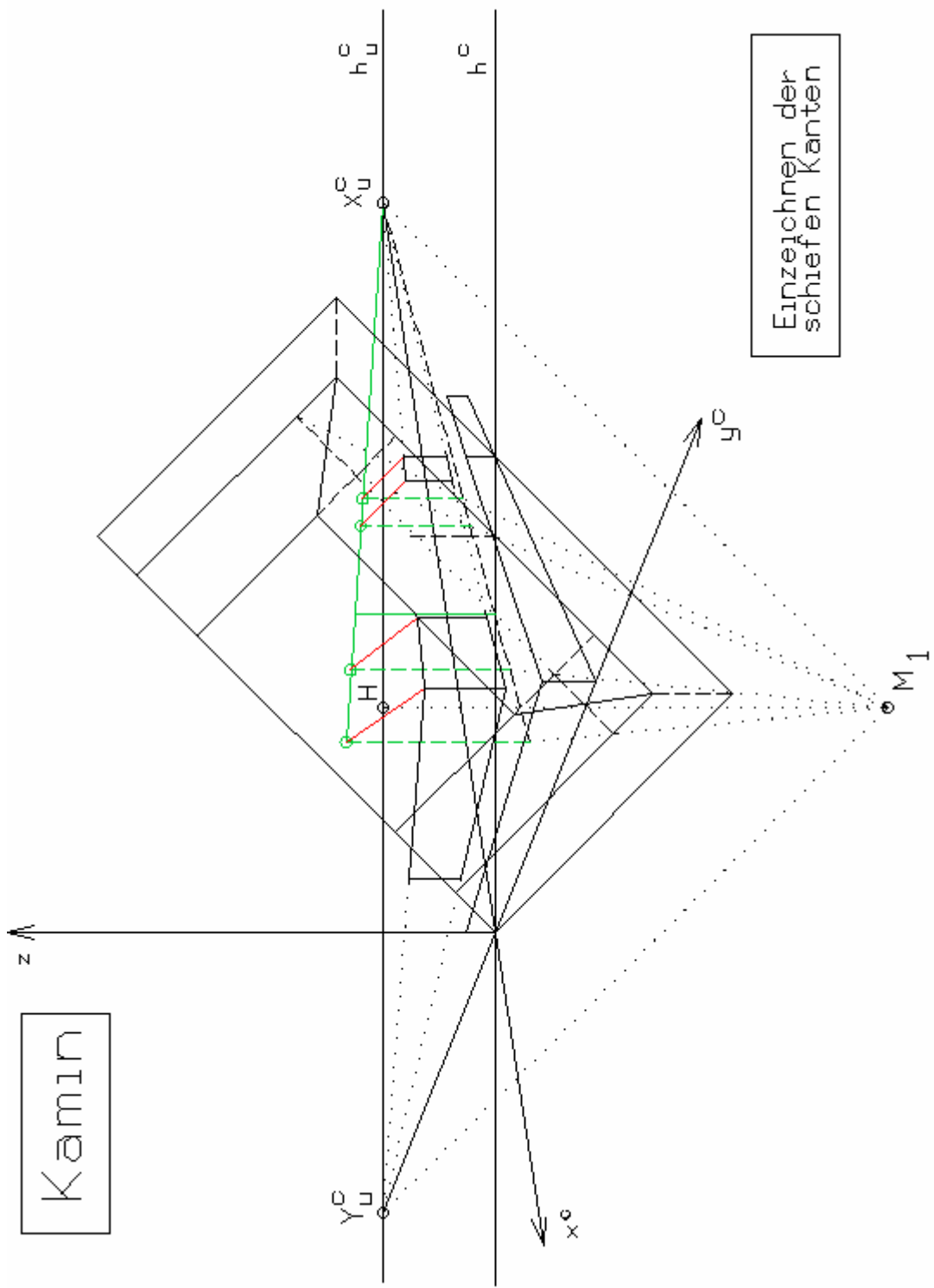


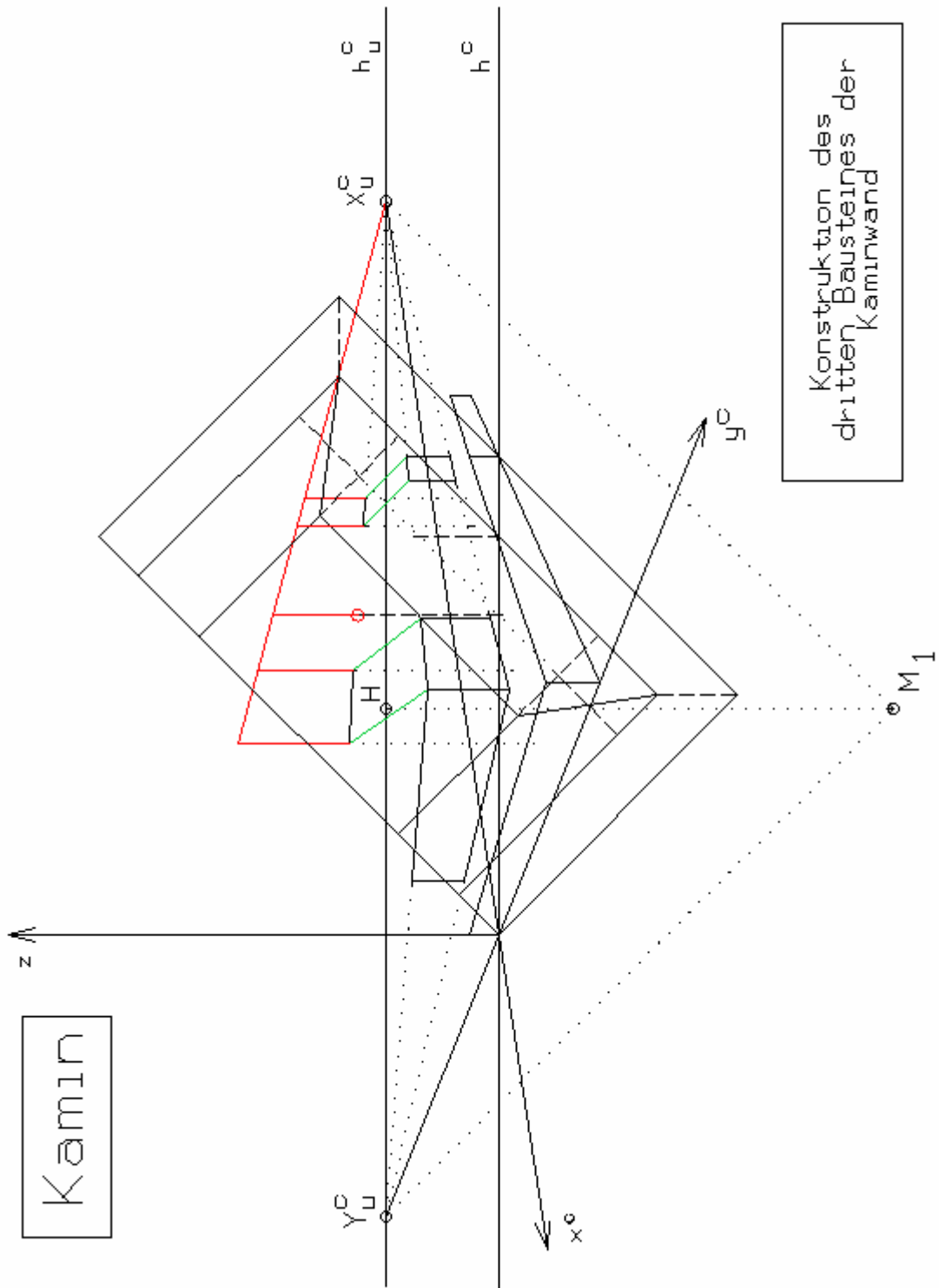


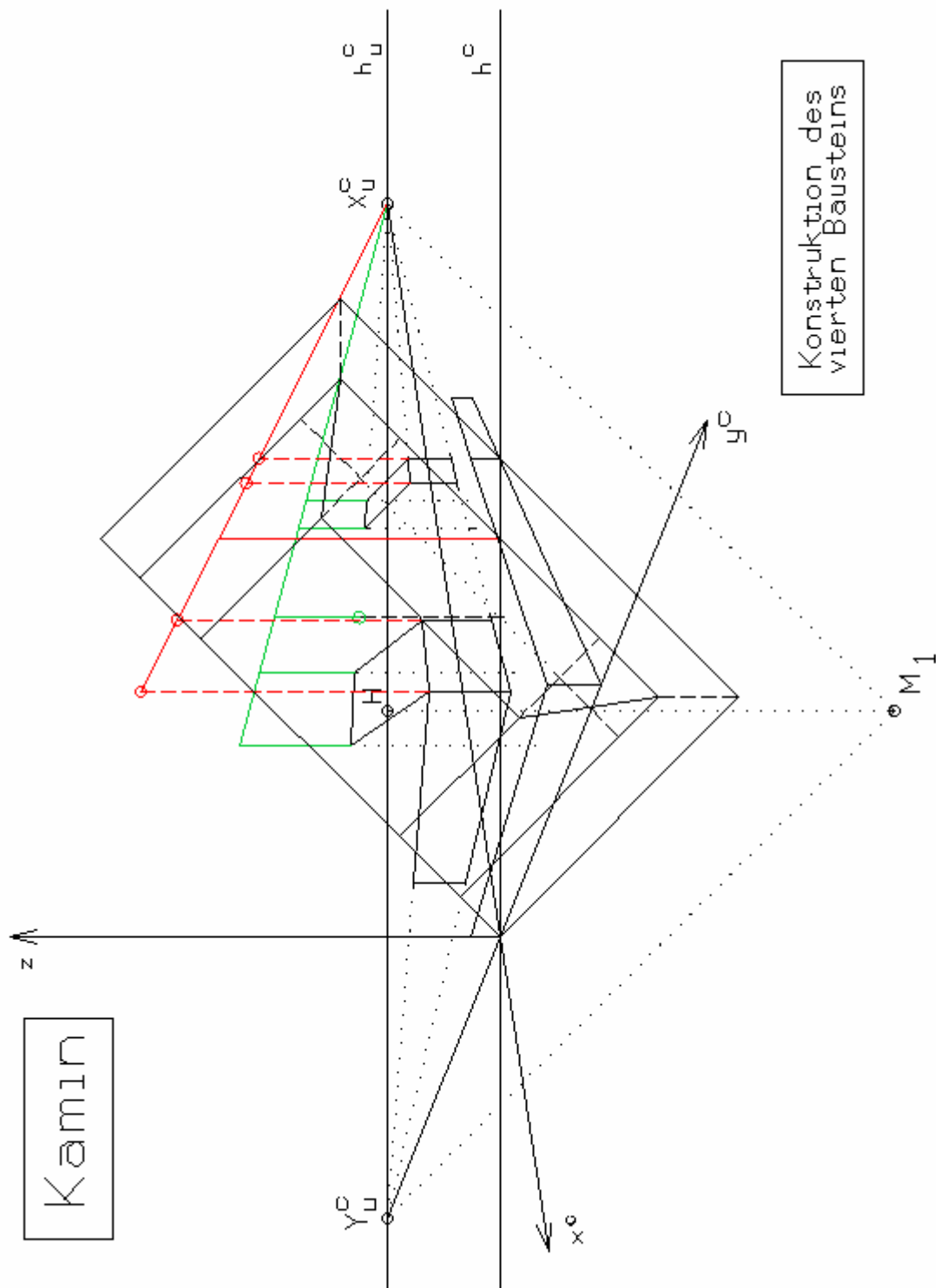


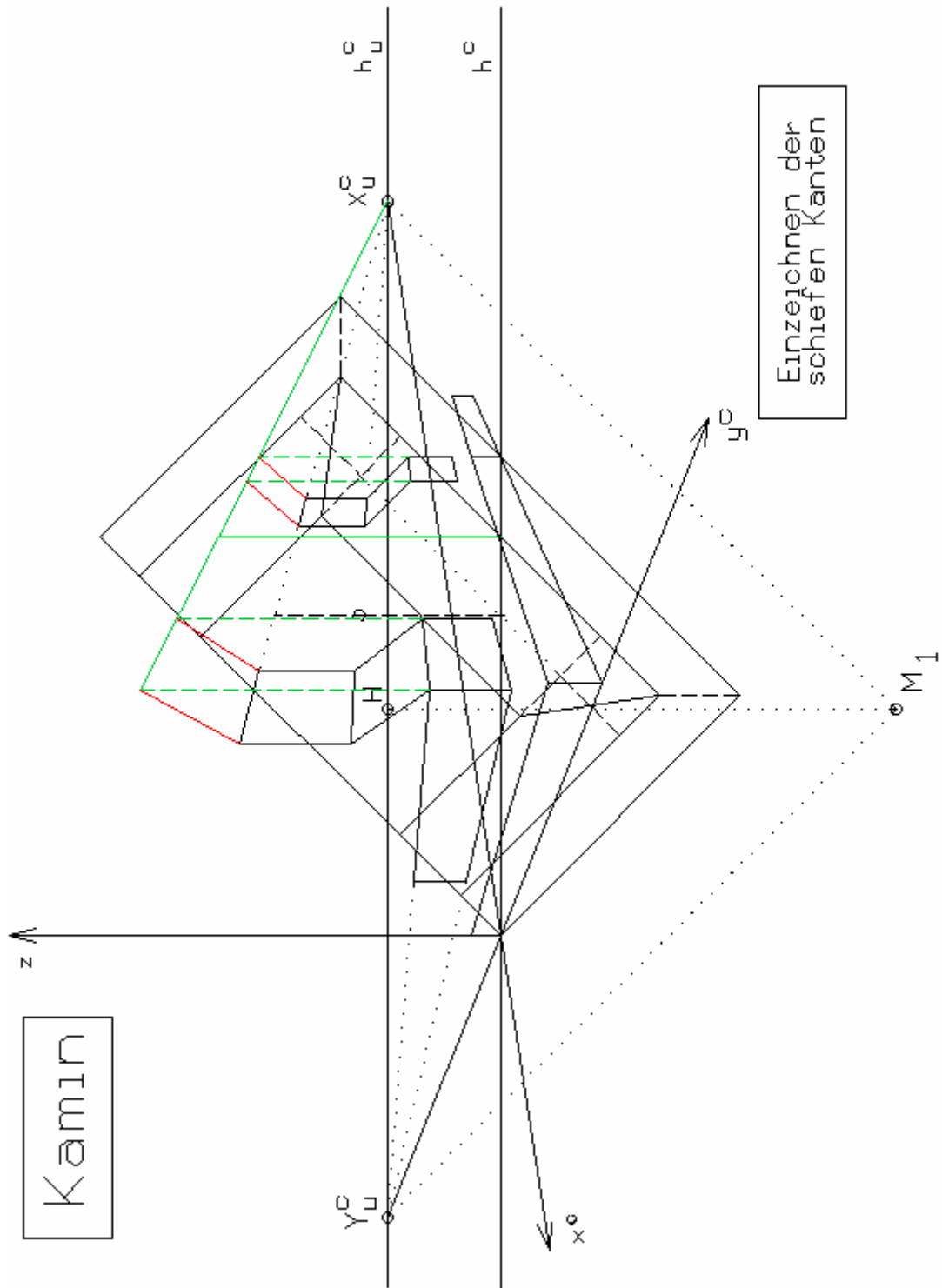


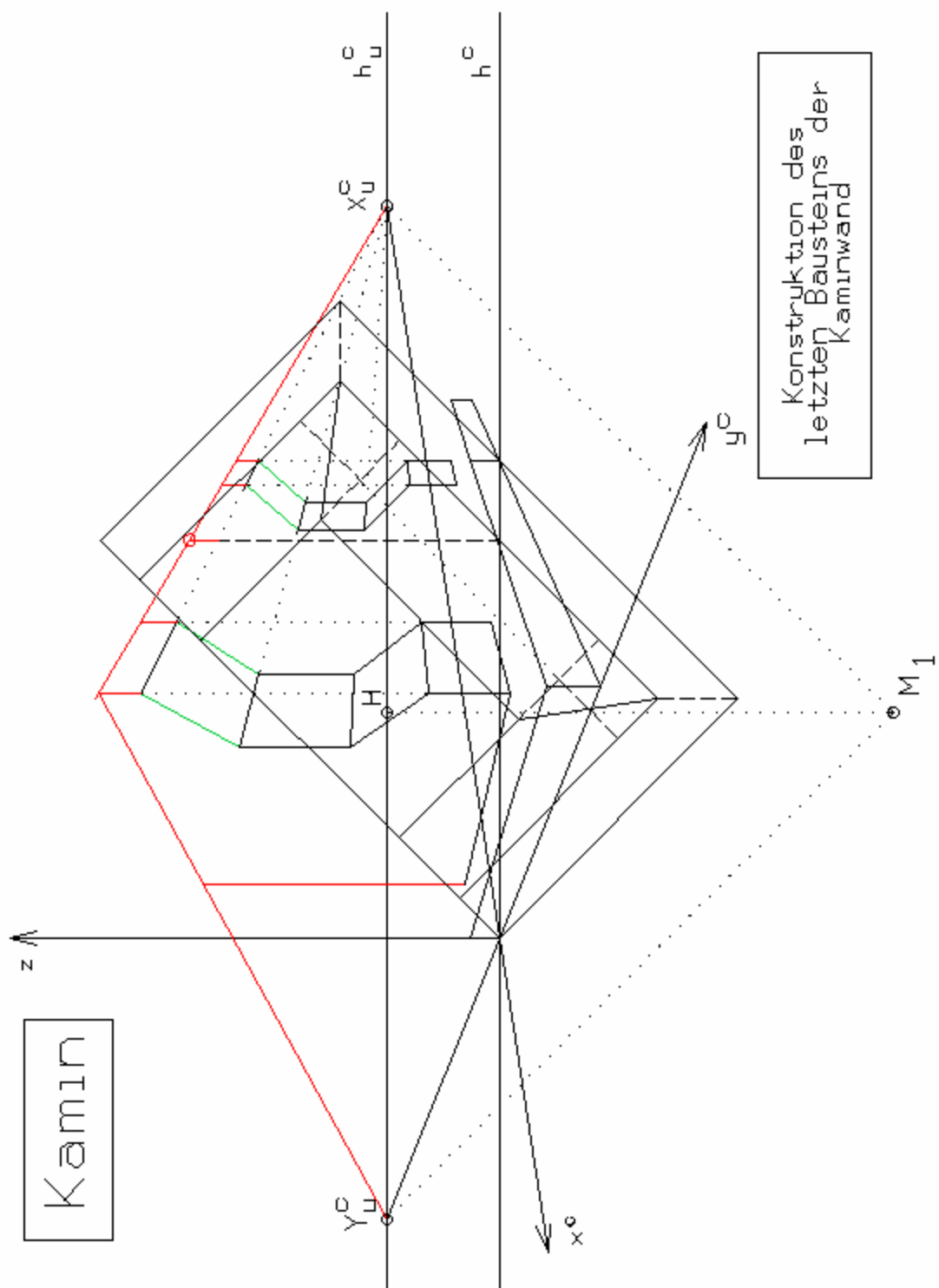


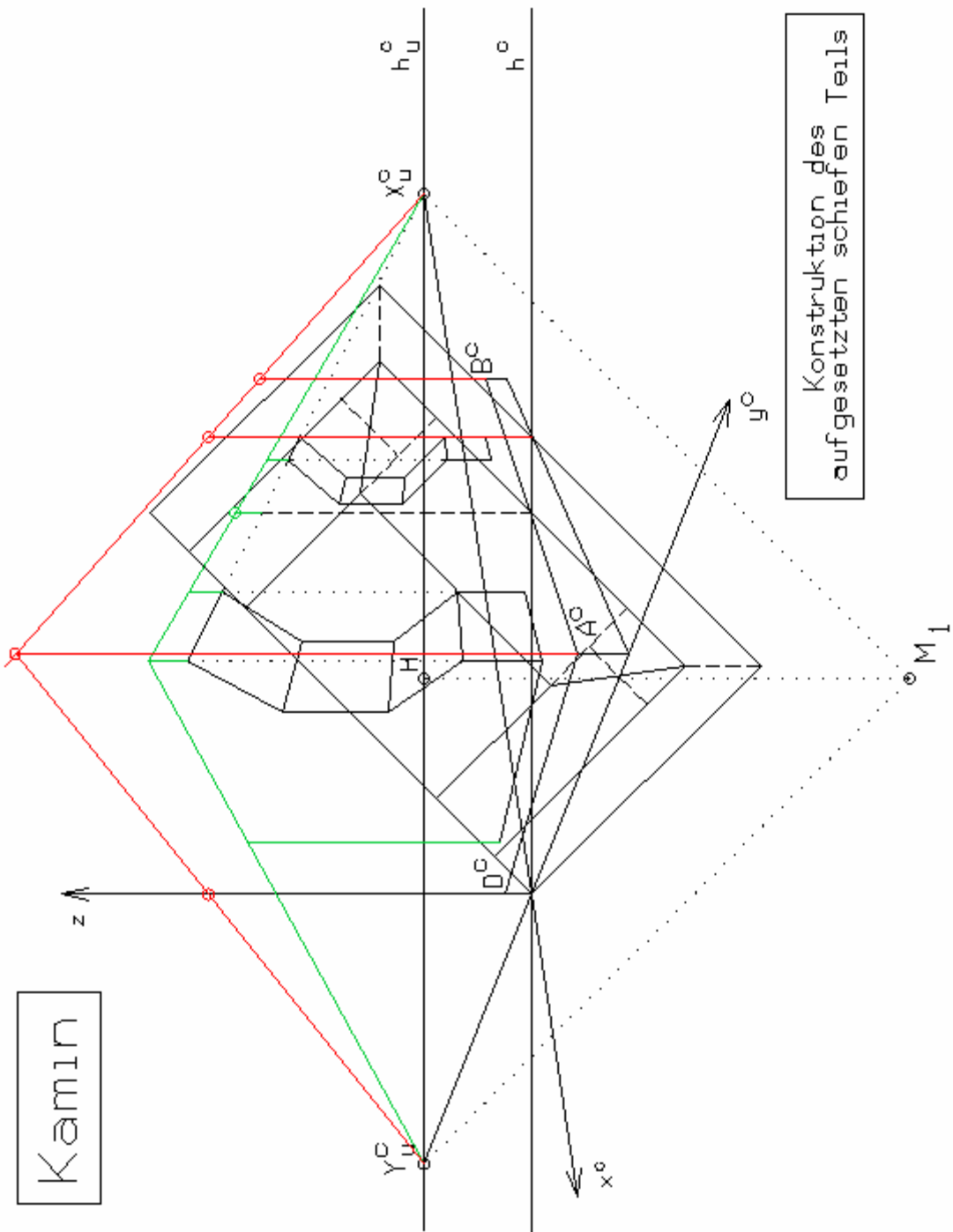


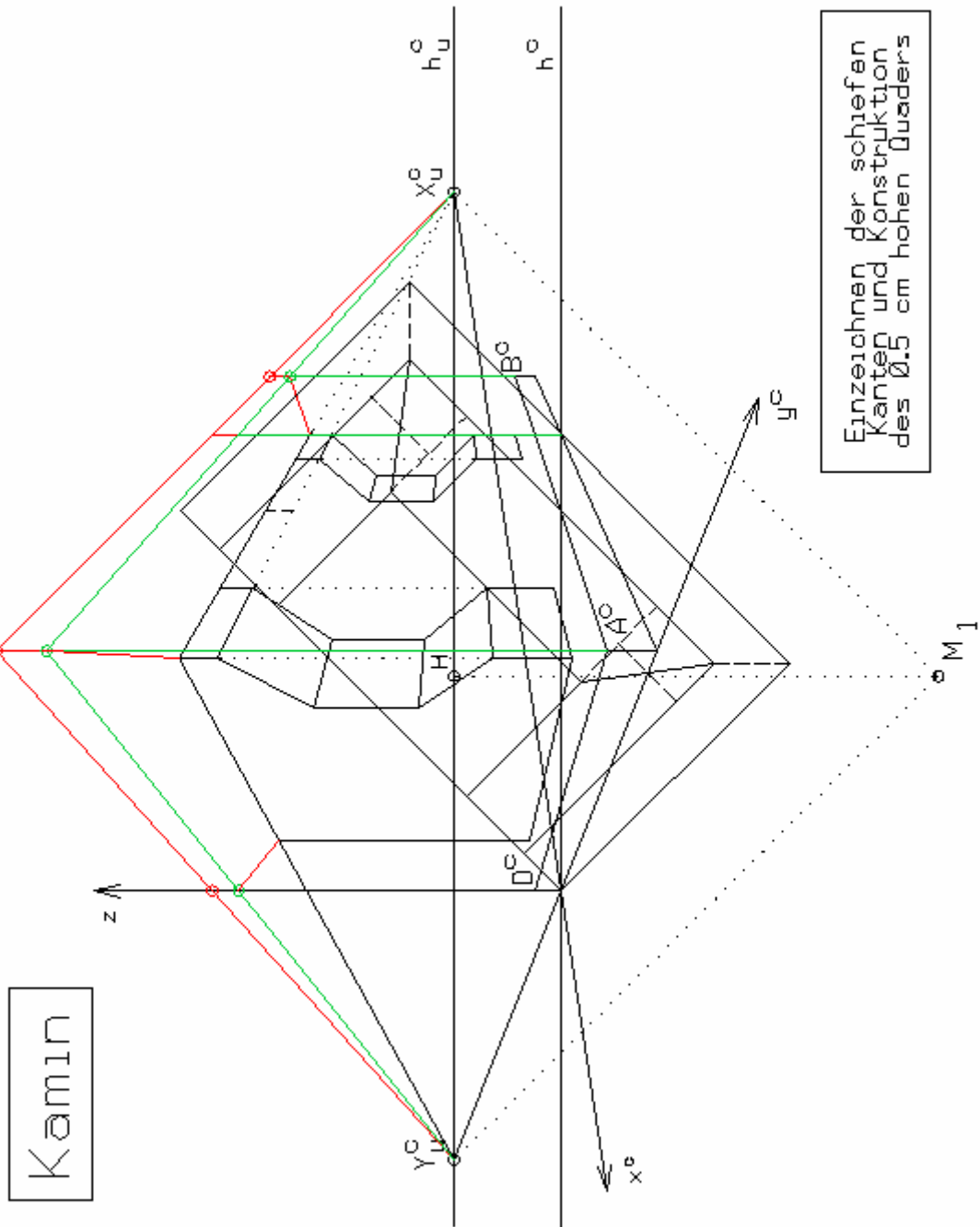


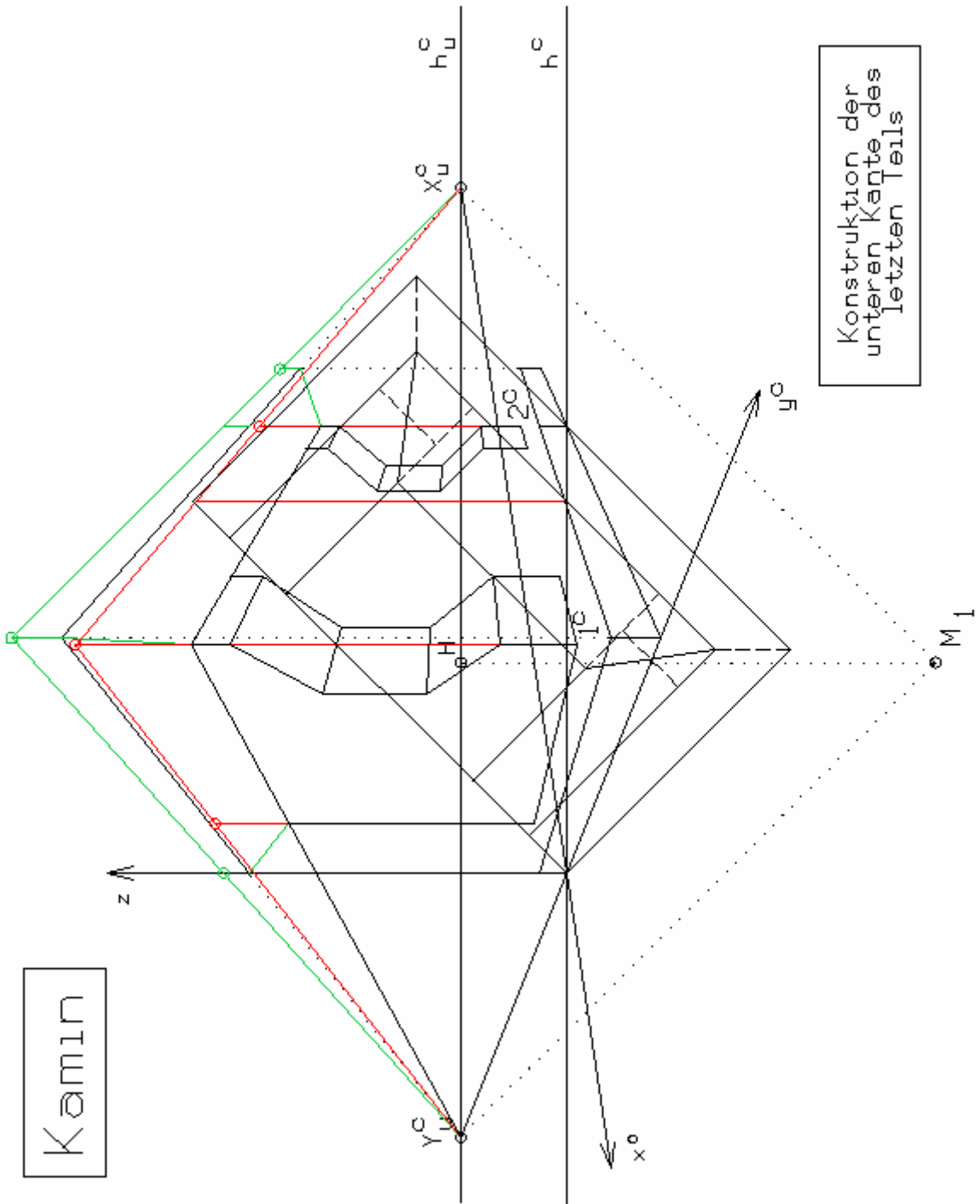


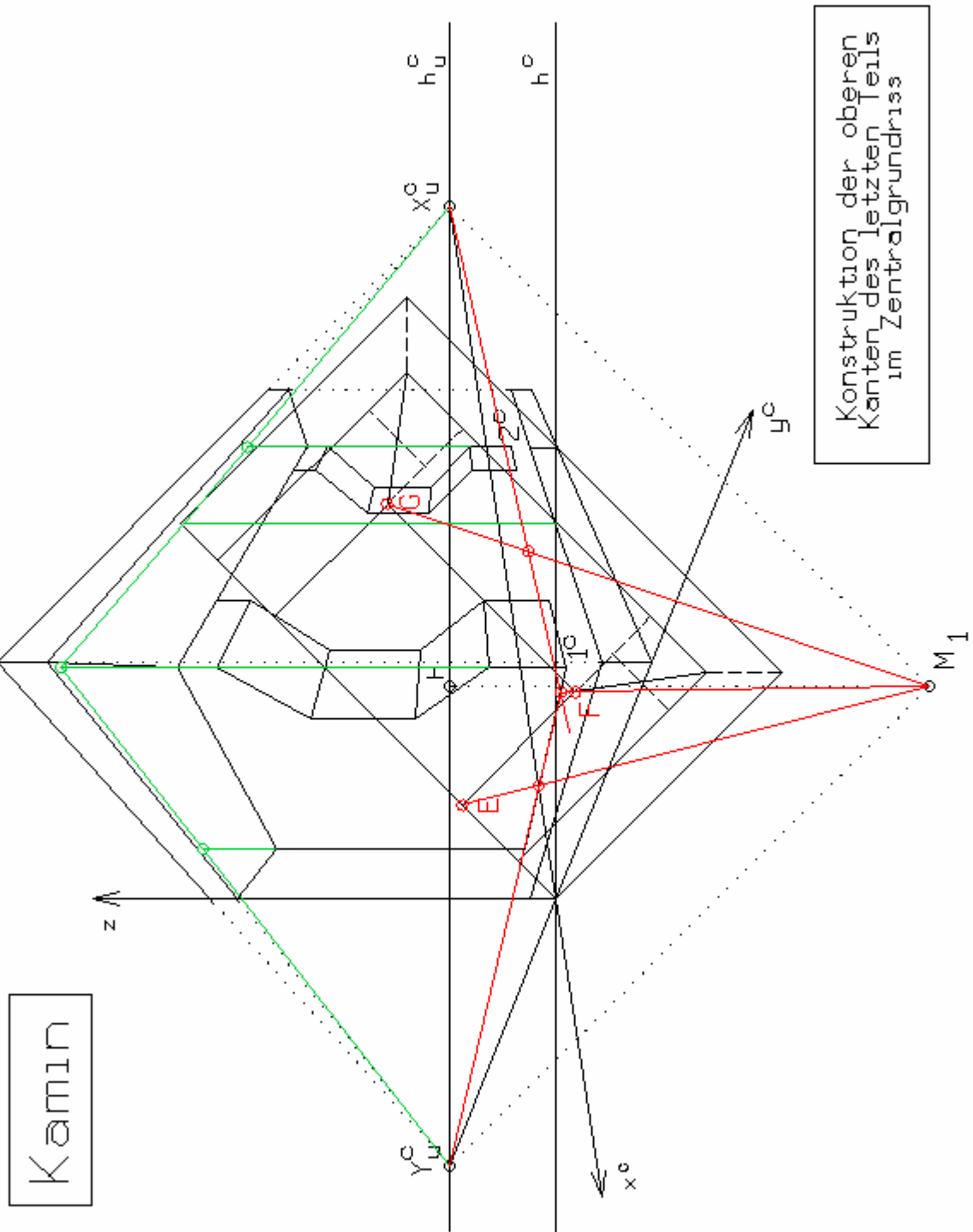


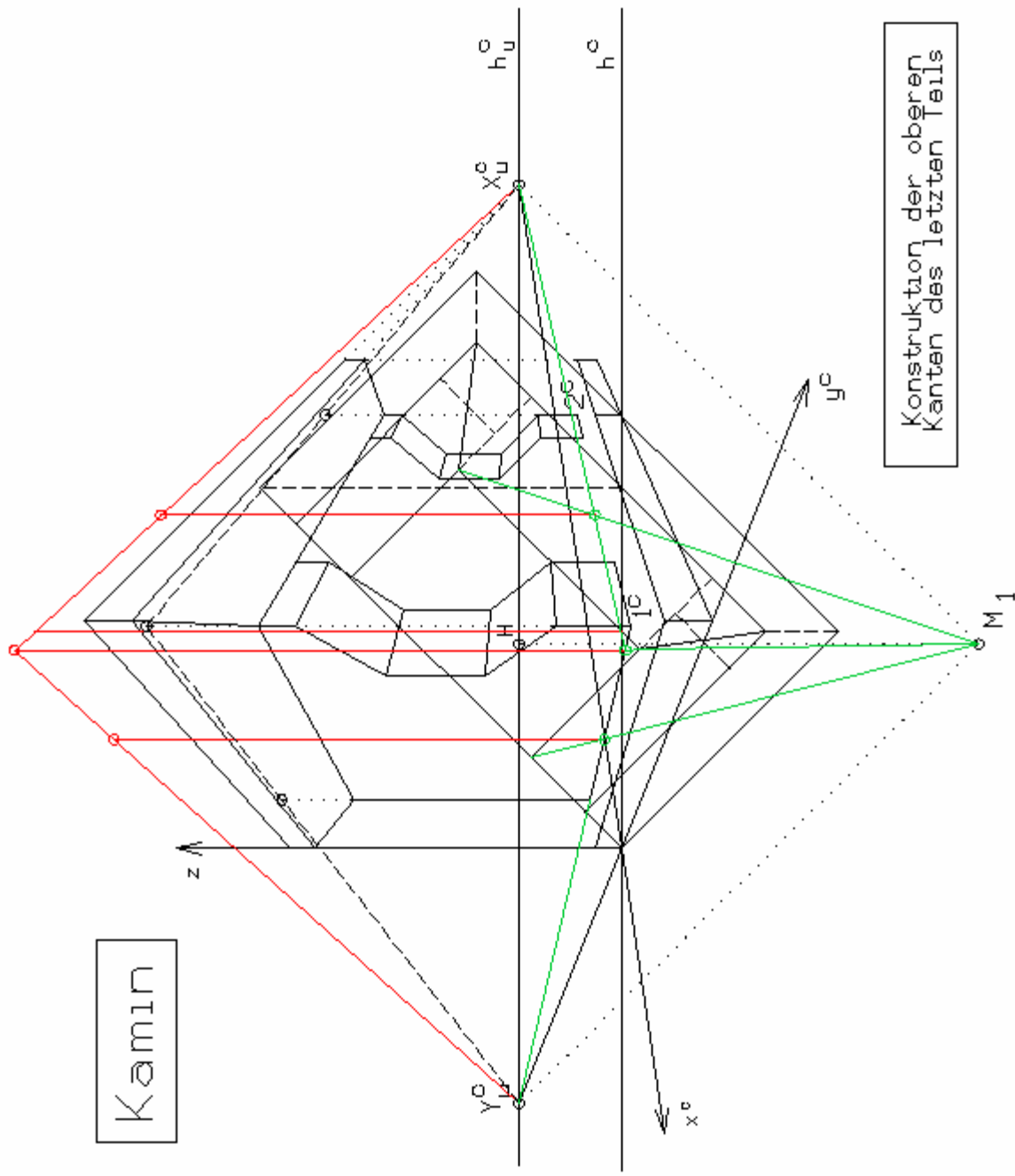


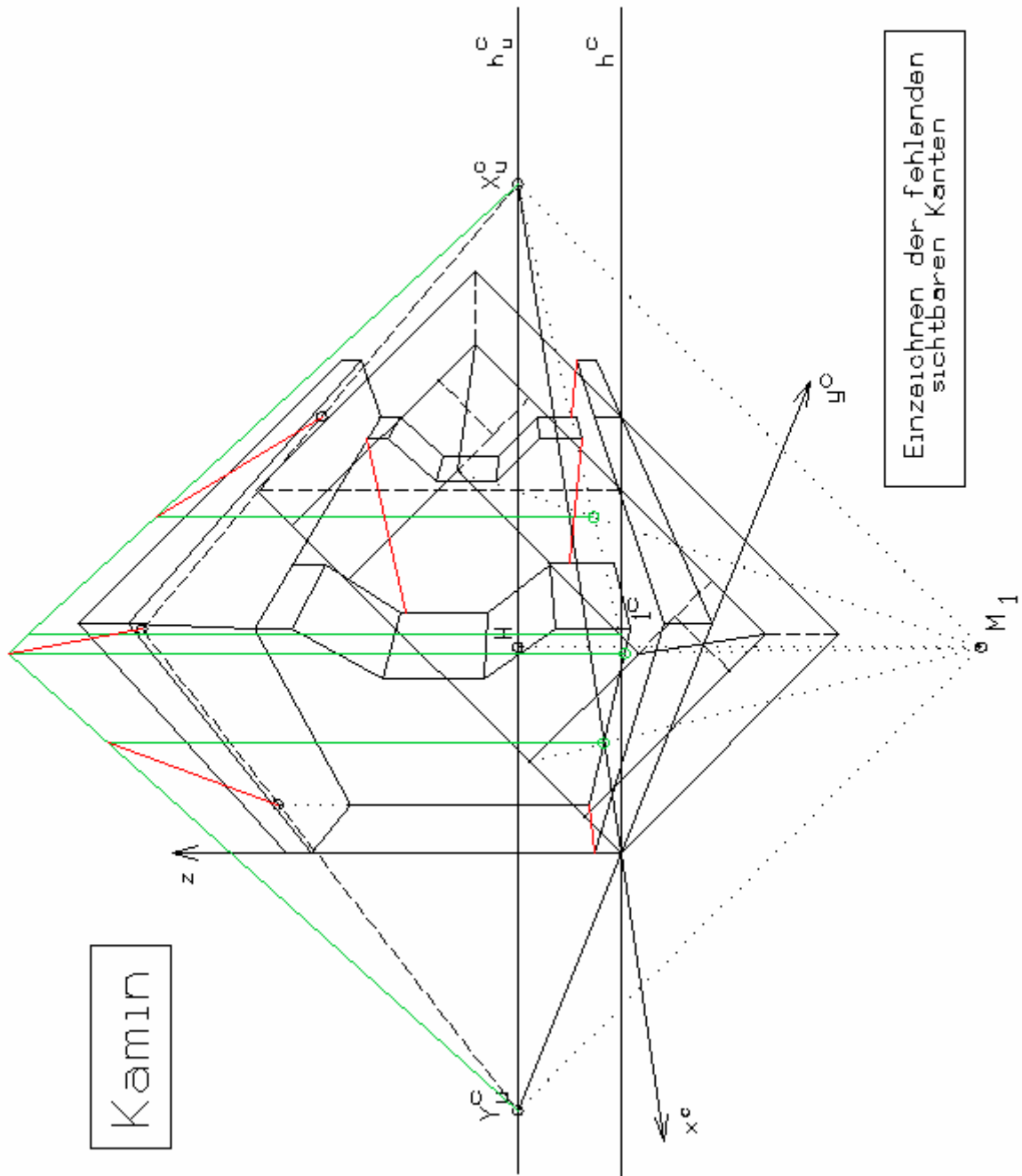


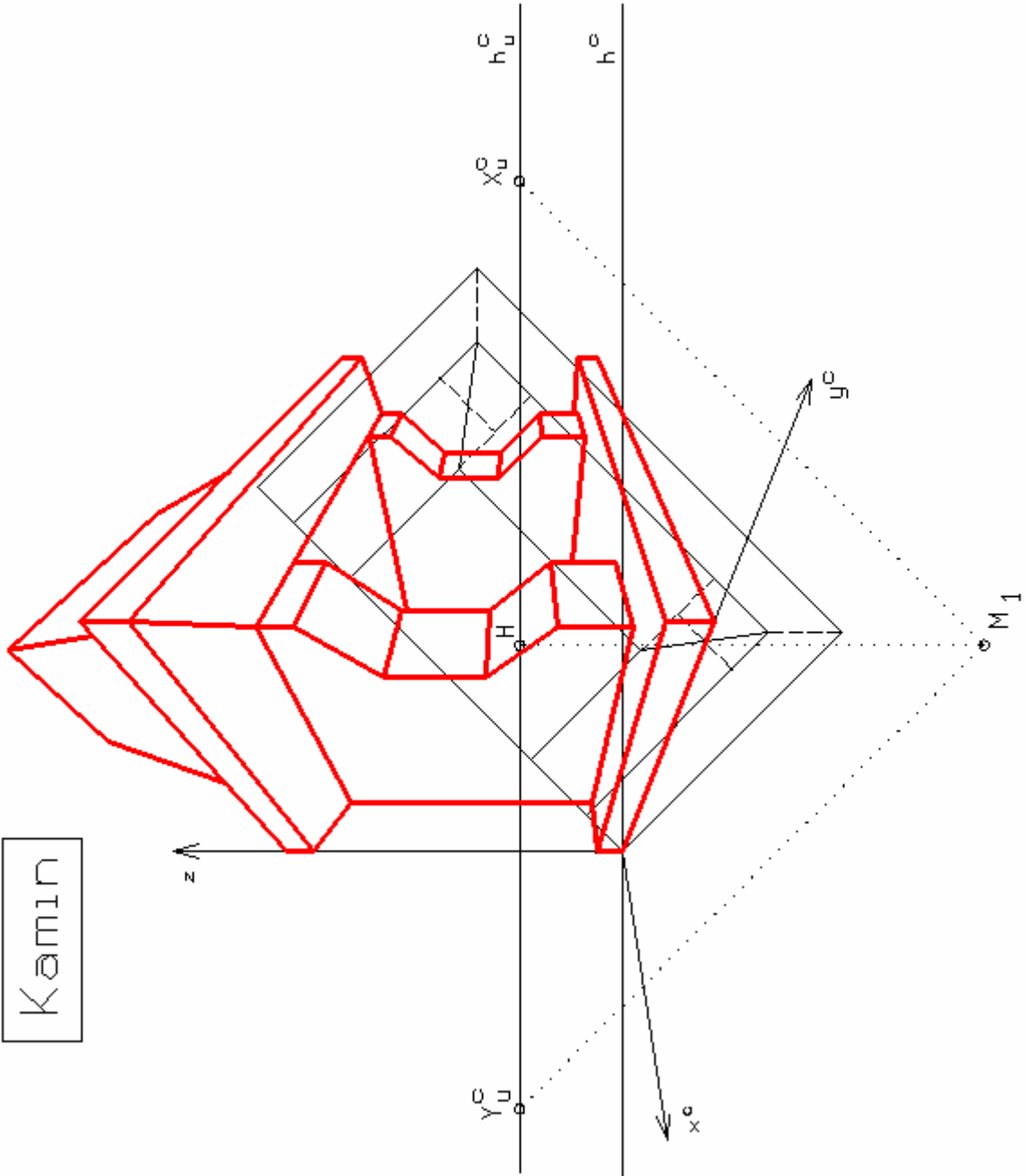












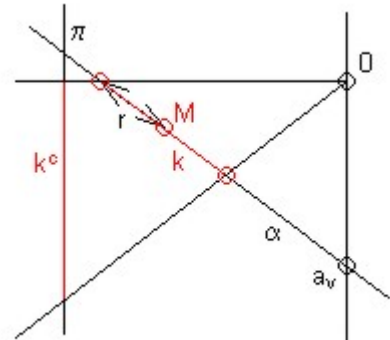
4. Kreisdarstellung

4.1. Zentralriss eines Kreises

Definition:

Ein Kreis k ist im Raum festgelegt durch seine Trägerebene a , den Mittelpunkt M und den Radius $r > 0$. a sei im folgenden nicht projizierend.

Der Zentralriss k^c entsteht aus k bei der Perspektivität $a \rightarrow \pi$ mit Zentrum O . Das Bild eines Kreises unter einer Perspektivität ist ein Kegelschnitt, dessen Typ durch die Anzahl seiner Fernpunkte bestimmt ist. Die Punkte von k , deren Zentralrisse Fernpunkte sind, liegen auf der Verschwindungsgeraden $a_v = a \cap \pi_v$ der Ebene a , sind also genau die Punkte $k \cap a_v$.



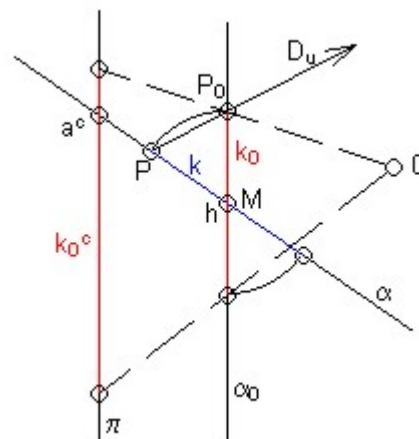
Konstruktion des Kegelschnitts:

In der Perspektive (H, d) ist a durch Spurgerade a^c und Fluchtgerade a_u^c gegeben. M ist durch den Punkt M^c der Zeichenebene festgelegt (wegen M aus a).

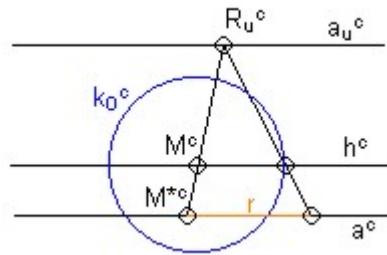
1. Schritt:

Ermittlung des Zentralrisses k_0^c des zur Bildebene π parallelgedrehten Kreises k_0 .

Dreht man die Kreisebene a um eine Hauptgerade h , die in a liegt und parallel zur Bildebene π ist, so entsteht aus k der gedrehte Kreis k_0 , der in der Ebene a_0 parallel π liegt. Meist wählt man die Hauptgerade h durch M als Drehachse. Der Zentralriss k_0^c ist zu k_0 ähnlich, also ein Kreis mit Mittelpunkt M_0^c .



In der Zeichenebene ist für M auf h dann M^c auf h^c . Zur Ermittlung des Radius von k_0^c kann auf der Hauptgeraden h ein Punkt P mit $\overline{MP} = r$ eingemessen werden. Wählt man als Drehachse speziell die Spur von a , so hat k_0^c den Radius r .



2. Schritt:

Bestimmung des Typs des Kegelschnitts K

Die Abbildung κ , welche $k_0^c \rightarrow k^c$ leistet, ist eine perspektive Kollineation. Zur Bestimmung des Kegelschnittstyps von k^c muss man sich die Anzahl seiner Fernpunkte überlegen, das heißt also die Verschwindungsgerade a_v von a mit dem Kreis k zu schneiden. In der gedrehten Lage sind demnach die Schnittpunkte von a_{v0} mit k_0 zu ermitteln, das bedeutet in der Zeichenebene, dass man a_{v0}^c mit k_0^c zu schneiden hat.

Folgende Fälle können eintreffen:

Fall 1: $k_0^c \cap a_{v0}^c = \{ \}$ $\Leftrightarrow k^c$ ist eine **Ellipse** (besitzt keinen Fernpunkt)

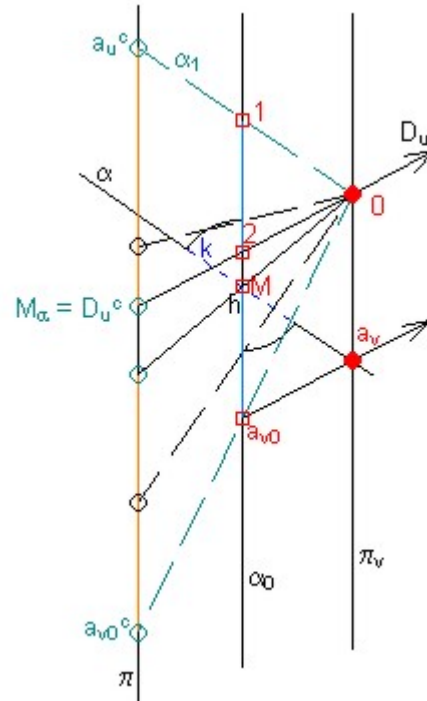
Fall 2: $k_0^c \cap a_{v0}^c = \{V_0^c\}$ $\Leftrightarrow k^c$ ist eine **Parabel** (berührt die Ferngerade u in V^c)

Fall 3: $k_0^c \cap a_{v0}^c = \{V_{10}^c, V_{20}^c\}$ $\Leftrightarrow k^c$ ist eine **Hyperbel** (schneidet die Ferngerade u in V_1^c, V_2^c)

Konstruktion von a_{v0}^c :

Die nebenstehende Figur zeigt die Raumsituation für die Drehung von a um die Hauptgerade h . Auf Grund kongruenter Dreiecke $(0, 1, 2)$ und (a_v, M, a_{v0}) sind zwei orientierte gerichtete Strecken in a_0 gleich lang. Weil a_0 parallel zu π ist, haben auch ihre Zentralrisse gleiche Länge. Damit gilt also:

$$\overline{a_u^c M_\alpha} = \overline{h^c a_{v0}^c} \quad \text{oder} \quad \overline{a_u^c h^c} = \overline{M_\alpha a_{v0}^c}$$



3. Schritt:

Konstruktion von k aus k_0^c

Die perspektive Kollineation κ der Zeichenebene, welche $k_0^c \rightarrow k^c$ leistet, ist festgelegt durch

- **Kollineationsachse:** Zentralriss h^c der Drehachse h
- **Kollineationszentrum:** Messpunkt $M_\alpha = D_u^c$
- **Zugeordnetes Punktepaar:** $F_{u0}^c \mapsto F_u^c$

1. Fall: Ellipse

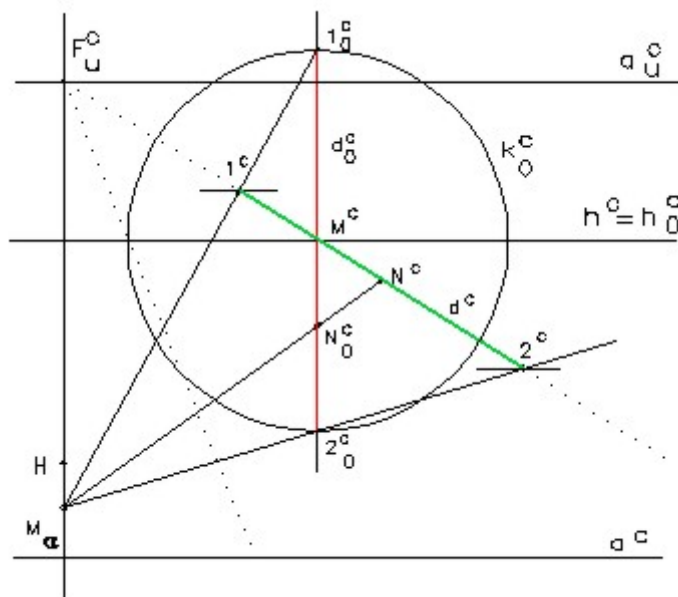
Im Überkapitel [Zentralriss eines Kreises](#) werden die allgemeinen Konstruktionsschritte erklärt. Der 1. Schritt sei bereits ausgeführt. Wir wollen uns hier dem 1. Fall des 2. Schrittes, dem einer Ellipse widmen.

$$\text{Es gilt: } k_0^c \cap a_{v_0}^c = \{ \}$$

Die gesuchte Ellipse k^c wird durch **konjugierte Durchmesser** festgelegt.

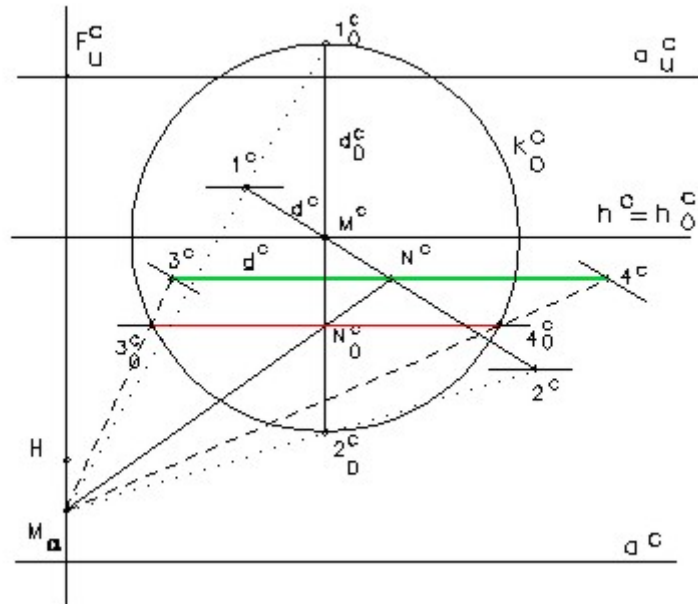
Im Folgenden wollen wir mittels eines ganz einfachen Beispiels den Zentralriss eines Kreises konstruieren um erste Schritte in Richtung eines etwas aufwendigeren Beispiels zu machen. Hier gibt es die [Angabe](#) zum Ausdrucken.

Da die perspektive Kollineation $\kappa (M_a; h^c; F_{u_0}^c \mapsto F_u^c)$ nicht mittelpunktstreu ist, wird einem Durchmesser des Kreises k_0^c im allgemeinen kein Durchmesser der Ellipse k^c zugeordnet. Einzige Ausnahme ist der Durchmesser d_0^c mit den Endpunkten $1_0^c, 2_0^c$, in denen die Kreistangenten parallel zur Kollineationsachse h^c sind. Diese werden auf Punkte $1^c, 2^c$ von k^c abgebildet, deren Tangenten ebenfalls zu h^c , also zueinander parallel sind. Demnach ist $d^c = 1^c 2^c$ ein **Durchmesser** von k^c . Der Halbierungspunkt N^c von $1^c 2^c$ ist also der Mittelpunkt der Ellipse k^c .

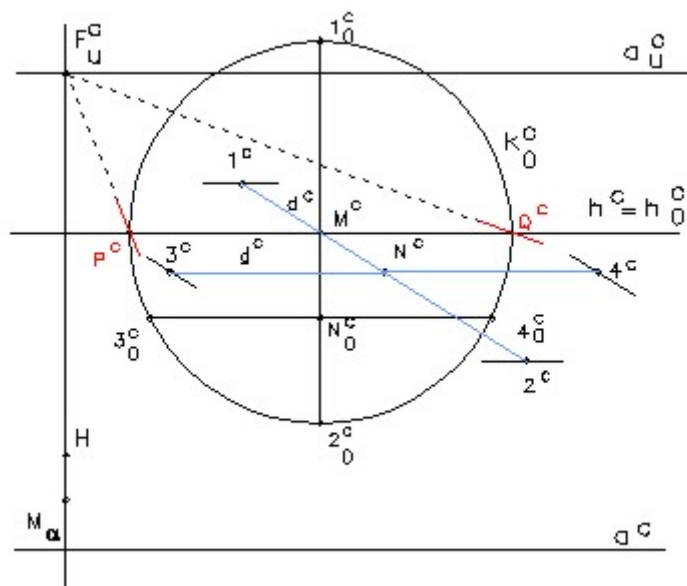


Der zu $d^c = 1^c 2^c$ konjugierte Durchmesser \underline{d}^c von k^c , ist zu h^c parallel. Die \underline{d}^c Endpunkte $3^c, 4^c$ von stammen bei κ von Punkten $3_0^c, 4_0^c$ auf \underline{d}_0^c . Dabei ist \underline{d}_0^c zu h^c parallel und geht durch den Punkt N_0^c auf $1_0^c 2_0^c$.

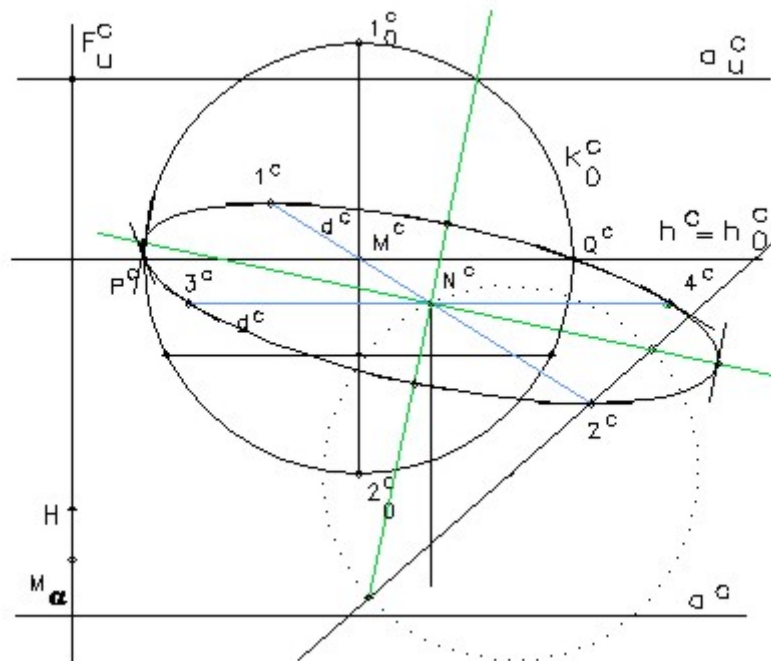
Die Ellipse k^c ist also durch die konjugierten Durchmesser ($N^c 1^c, N^c 3^c$) festgelegt.



Jeder Schnittpunkt $P^c = P_0^c$ von k_0^c mit $h^c (= h_0^c)$ ist ein Fixpunkt von κ . Da die Tangente p_0^c an k_0^c im Punkt P_0^c normal zu h^c ist (sie enthält den Fernpunkt F_{u0}^c), ist $P^c F_U^c$ die Tangente an k^c in P^c .



Nun haben wir konjugierte Durchmesser der Ellipse und 2 Fixpunkte und können damit die Achsen und die Haupt - und Nebenscheitel der Ellipse durch die RYTZsche Achsenkonstruktion ermitteln. Durch Scheitelkrümmungskreise kann die Ellipse angenähert werden.



2. Fall: Parabel

Im Überkapitel [Zentralriss eines Kreises](#) werden die allgemeinen Konstruktionsschritte erklärt. Der 1. Schritt sei bereits ausgeführt. Wir wollen uns hier dem 2. Fall des 2. Schrittes, den einer Parabel widmen.

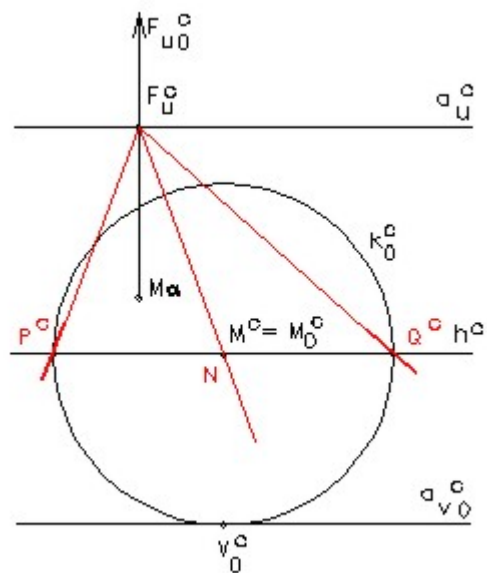
$$\text{Es gilt: } k_0^c \cap a_{v_0}^c = \{V_0^c\}$$

Das heißt, dass $a_{v_0}^c$ den Kreis k_0^c im Punkt V_0^c berührt. Die Parabel k^c wird durch **zwei Punkte samt Tangenten** festgelegt.

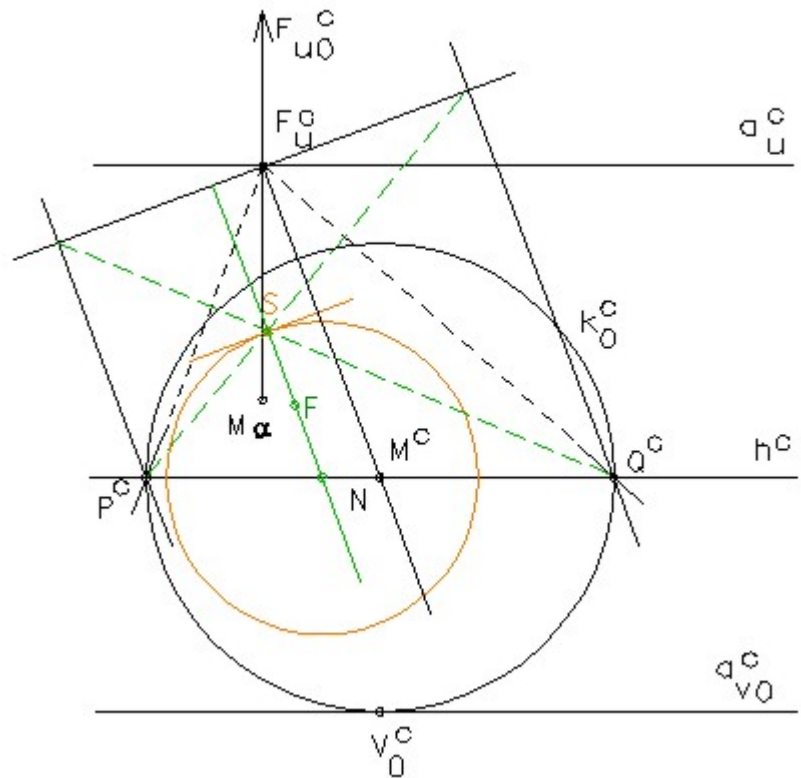
Im Folgenden wollen wir mittels eines ganz einfachen Beispiels den Zentralriss eines Kreises konstruieren um erste Schritte in Richtung eines etwas aufwendigeren Beispiels zu machen. Hier gibt es die [Angabe](#) zum Ausdrucken.

Ist die Hauptgerade h durch M die Drehachse, so bleiben die Schnittpunkte P und Q von k mit h bei der Drehung fest. Daraus folgt $P_0^c = P^c$ und $Q_0^c = Q^c$ sind Fixpunkte von κ ($M_a; h^c; F_{u_0}^c \mapsto F_u^c$).

Die Tangente p^c an die Parabel k^c in P^c stammt von der Kreistangente p_0^c an k_0^c in P_0^c . Da p_0^c normal zu h^c ist (durch $F_{u_0}^c$ geht), ist $P^c F_u^c$ die Tangente an k^c in P^c . Analoges gilt für den zweiten Schnittpunkt Q . Die Parabel k^c ist also durch (P^c, p^c) , (Q^c, q^c) , als zwei Paare (Punkt, Tangente) festgelegt.



Die Parabel wird nun durch eine elementargeometrische Konstruktion vervollständigt.



Bemerkung:

Der Schnittpunkt 1_0^c von p_0^c mit der Verschwindungsgeraden a_{v0}^c wird auf den Fernpunkt 1^c der Geraden $M_\alpha 1_0^c$ abgebildet, womit die Richtung von p^c und damit ebenfalls p^c bestimmt ist.

Wählt man als Drehachse die Spur a^c , so kann es sein, dass keine Punkte von k_0^c auf a^c existieren. In diesem Fall sind zwei Punkte von k_0^c samt Tangenten der perspektiven Kollineation $(M_\alpha; a^c, F_{u0}^c \mapsto F_u^c)$ zu unterwerfen.

3. Fall: Hyperbel

Im Überkapitel [Zentralriss eines Kreises](#) werden die allgemeinen Konstruktionsschritte erklärt. Der 1. Schritt sei bereits ausgeführt. Wir wollen uns hier dem 3. Fall des 2. Schrittes, den einer Hyperbel widmen.

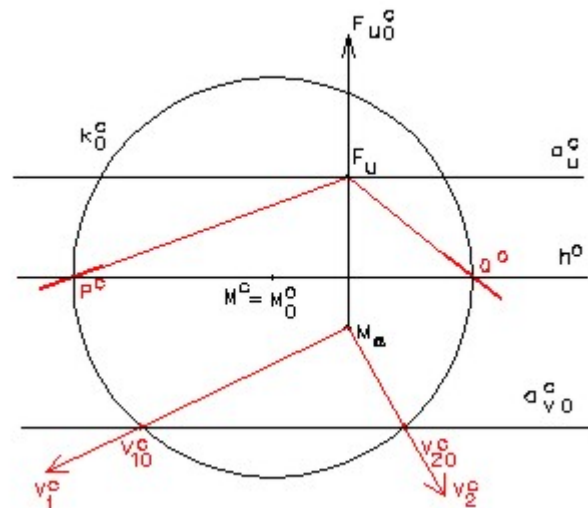
$$\text{Es gilt: } k_0^c \cap a_{v_0}^c = \{V_{10}^c, V_{20}^c\}$$

Das heißt es schneidet $a_{v_0}^c$ den Kreis k_0^c in den Punkten V_{10}^c, V_{20}^c . Die Hyperbel k^c wird durch die **Asymptoten** und **einen weiteren Punkt** festgelegt.

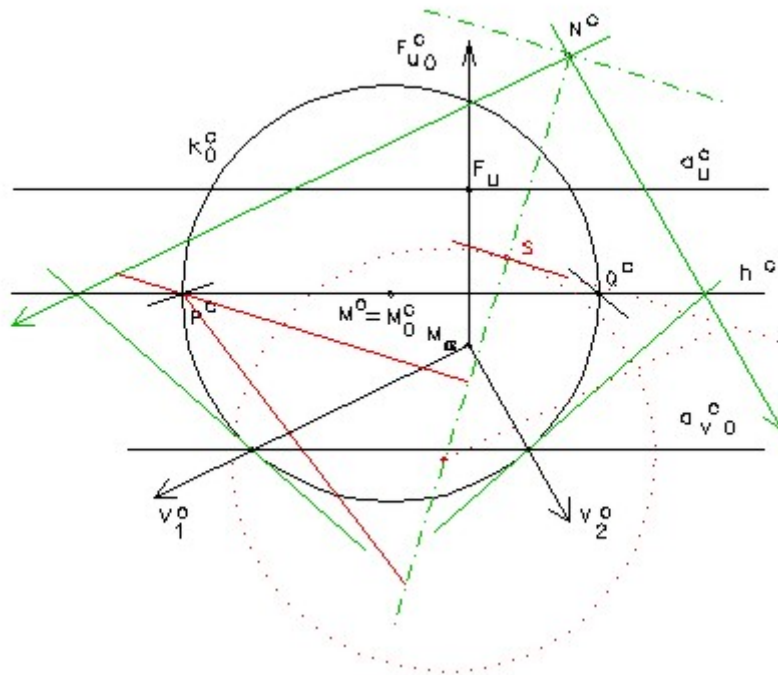
Im Folgenden wollen wir mittels eines ganz einfachen Beispiels den Zentralriss eines Kreises konstruieren um erste Schritte in Richtung eines etwas aufwendigeren Beispiels zu machen. Hier gibt es die [Angabe](#) zum Ausdrucken.

Ist die Hauptgerade h durch M die Drehachse, so bleiben die Schnittpunkte P und Q von k mit h bei der Drehung fest. Daraus folgt $P_0^c = P^c$ und $Q_0^c = Q^c$ sind Fixpunkte von $\kappa (M_a; h^c; F_{u_0}^c \mapsto F_u^c)$.

Die Schnittpunkte V_{10}^c, V_{20}^c von k_0^c mit $a_{v_0}^c$ werden auf die Fernpunkte V_1^c, V_2^c der Hyperbel k^c abgebildet. Die Tangenten v_{10}^c, v_{20}^c von k_0^c in V_{10}^c, V_{20}^c werden auf die Asymptoten v_1^c, v_2^c der Hyperbel k^c abgebildet.



Der Hyperbelmittelpunkt N^c stammt daher vom Schnittpunkt $N_0^c := v_{10}^c \cap v_{20}^c$. Damit erhält man auch die Asymptoten, indem man die vorher erhaltenen Asymptotenrichtung durch die Fixpunkte von v_{10}^c, v_{20}^c geschnitten mit h^c verschiebt. Die Achsen der Hyperbel sind die Winkelsymmetralen der Asymptoten. Nun zeichnen wir noch den Scheitel und den Scheitelkrümmungskreis ein.



4.2. Beispiele zur Kreisdarstellung

1. Beispiel: Durchlass

2. Beispiel: Triumphbogen

1. Beispiel: Durchlass (oder Aquädukt)

- Zeichnen mit der Hand:

Das durch Grundriss und Aufriss gegebene Objekt (Maße in m) ist in der Perspektive (gegeben durch $H, a_u^c, U^c \in a^c, x^c, z^c \perp a_u^c$) mit der Distanz $d = 9$ m im Maßstab $1 : 100$ darzustellen.

[Angabe zum Downloaden und Ausdrucken](#)

Hier wurden die einzelnen Konstruktionsschritte zur Lösung des Beispiels in einem

Flash - Objekt

zusammengefasst.

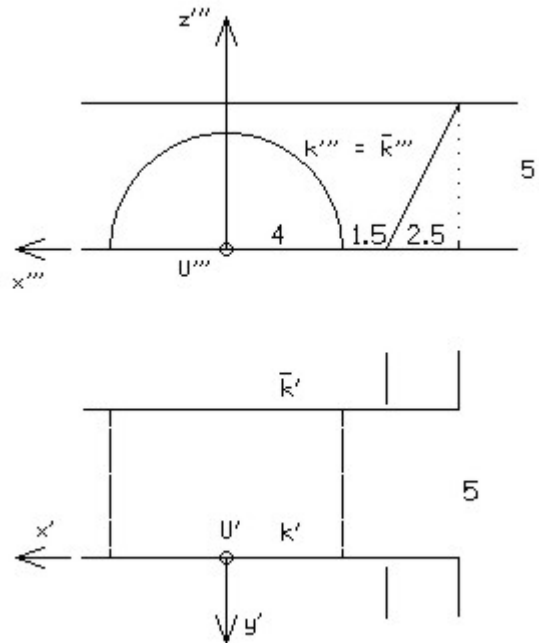
Hier gibt es dazu eine ausführliche Erklärung zu den einzelnen Konstruktionsschritten:

[Bild 1](#) [Bild 2](#) [Bild 3](#) [Bild 4](#) [Bild 5](#) [Bild 6](#) [Bild 7](#)
[Bild 8](#) [Bild 9](#) [Bild 10](#) [Bild 11](#) [Bild 12](#) [Bild 13](#) [Bild 14](#)
[Bild 15](#) [Bild 16](#) [Bild 17](#) [Bild 18](#) [Bild 19](#) [Bild 20](#) [Bild 21](#)
[Bild 22](#)

- Zeichnen mit CAD - 3D[®]

Eine andere Möglichkeit dieses Beispiel grafisch darzustellen, ohne es selbst mit der Hand zu zeichnen, wäre, es mit Hilfe des Zeichenpaketes CAD - 3D[®] zu konstruieren.

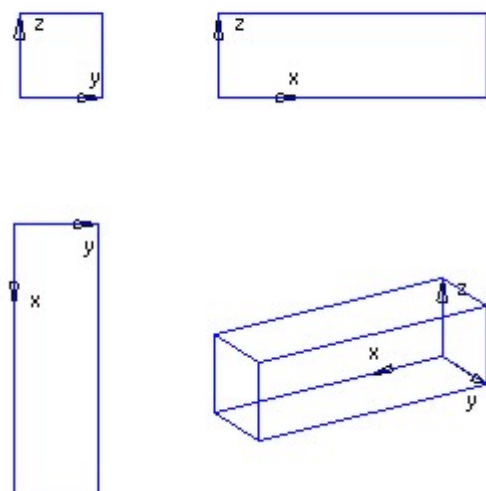
Stellen Sie das angegebene Objekt mit dem Zeichenpaket CAD - 3D[®], unter Zuhilfenahme der unten angeführten Konstruktionsanleitung, dar.

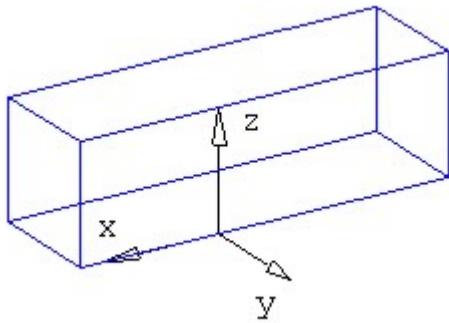


1. Schritt:

Öffnen Sie das Programm CAD - 3D[®] und zeichnen Sie einen Quader mit den Maßen (64, 20, 20).

Die eigentlichen Abmessungen, die mit dem Maßstab für die Handzeichnung umgerechnet wurden, wurden hier noch mit dem Faktor 4 multipliziert, da sonst die CAD Figur etwas zu klein wird.





2. Schritt:

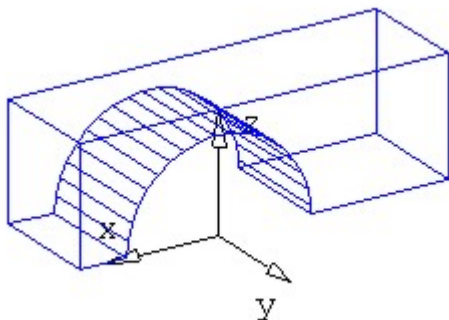
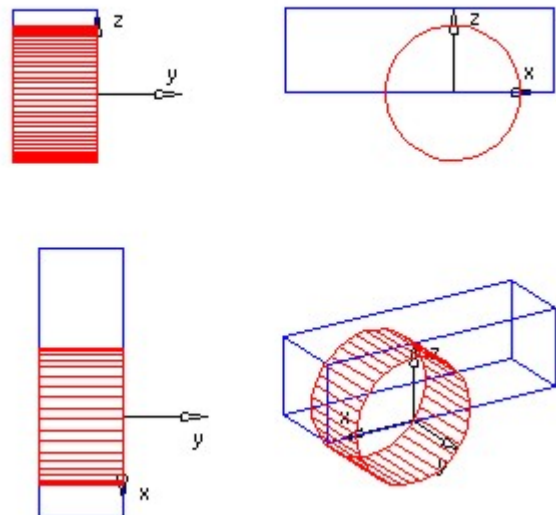
Verschieben Sie das Objekt so, dass die vordere untere Kante mit der x -Achse zur Deckung kommt, um unser Objekt in das vorgegebene Koordinatensystem einzupassen. Das Objekt soll vom Ursprung U aus in positiver x -Richtung 24 Einheiten (4×6 cm) lang sein.

Im nebenstehenden Bild wird jetzt nur mehr die Axonometrie gezeigt.

3. Schritt:

Erzeugen Sie einen Zylinder mit Radius 16 cm, Höhe 20 cm und der y -Achse als Drehachse.

Verschieben Sie nun den Zylinder so, dass die Deckkreise des Zylinders mit den Quaderseiten in gleichen Ebenen liegen.



4. Schritt:

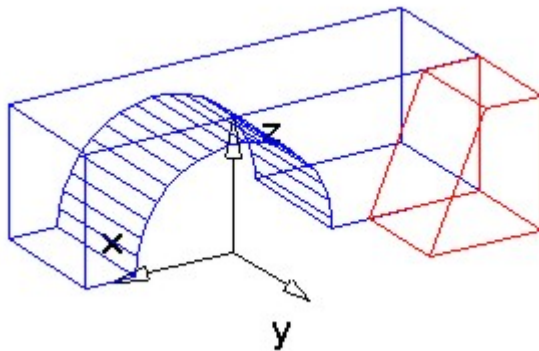
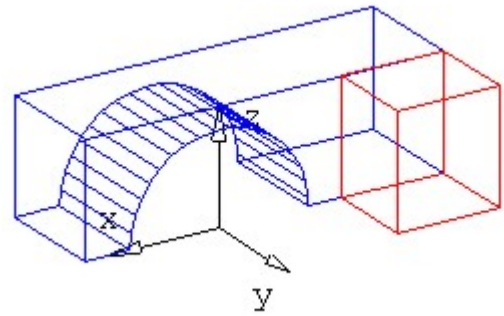
Bilden Sie nun die Differenz des Quaders mit dem Zylinder, wobei der Zylinder aus dem Quader ausgeschnitten wird.

Sie müssen zuerst den Quader anklicken, dann den Zylinder und dann dem Programm sagen, dass Sie die Differenz bilden wollen.

5. Schritt:

Um die schräge Wand in y -Richtung zu bekommen, müssen Sie nun einen Quader mit den Maßen $x = 18 \text{ cm}$, $y = 16 \text{ cm}$ (beliebig!), $z = 20 \text{ cm}$ erzeugen.

Verschieben Sie nun diesen Quader so, dass Sie nach den vorgegebenen Maßen von U den Abstand 22 cm haben. Um diesen Schritt durchzuführen, genügt es, den Quader mittels Snapfunktion an die richtige Stelle zu verschieben. **Achtung!** Alle Maße wurden mit dem Faktor 4 multipliziert.



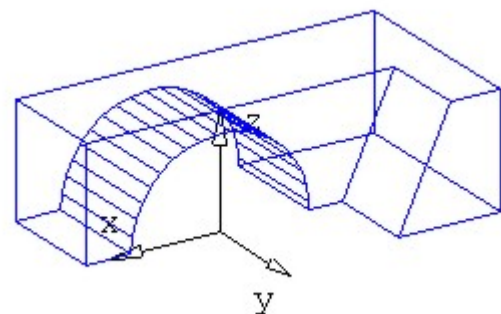
6. Schritt:

Sägen Sie dieses Objekt nun laut Angabe mit einer Ebene durch, die im Aufriss projizierende Lage und Steigung $k = 2$ hat.

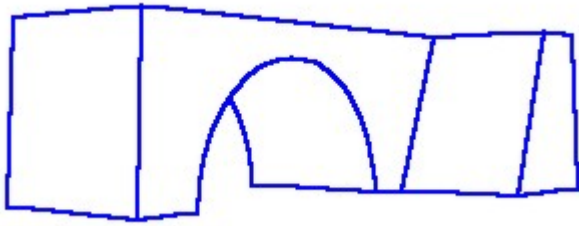
Sie können diesen Schritt wiederum mittels Snapfunktion machen, da Sie genauso wie Punkte, auch den Mittelpunkt einer Kante snappen können.

7. Schritt:

In diesem letzten Konstruktionsschritt vereinigen Sie Ihre Objekte.



8. Schritt:



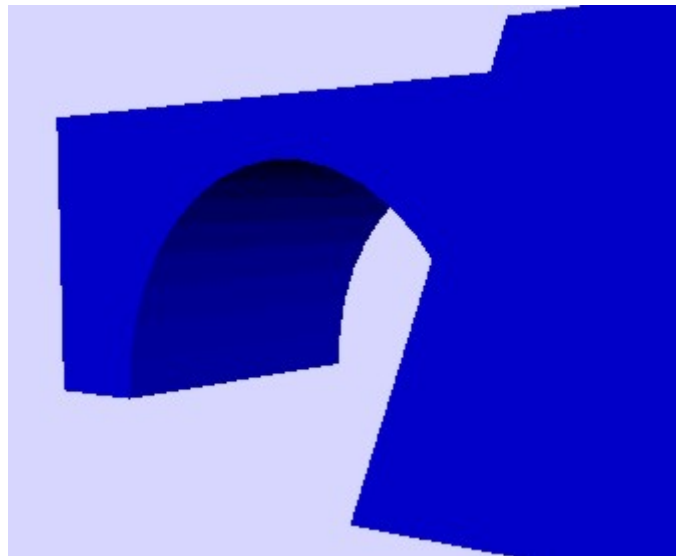
Nun können wir das fertige Objekt noch in Perspektive darstellen. Die perspektivische Ansicht erhalten Sie, wenn Sie im Menüpunkt Einstellungen auf Perspektive festlegen gehen. Sie müssen hier den Augpunkt und den Hauptpunkt mittels Koordinaten eingeben. Ein Vorschlag für den Anfang wäre:

O(90, 70, 10), H(30, 20, 20).

Diese Einstellungen können Sie natürlich im selben Menüpunkt wieder ändern.

- VRML:

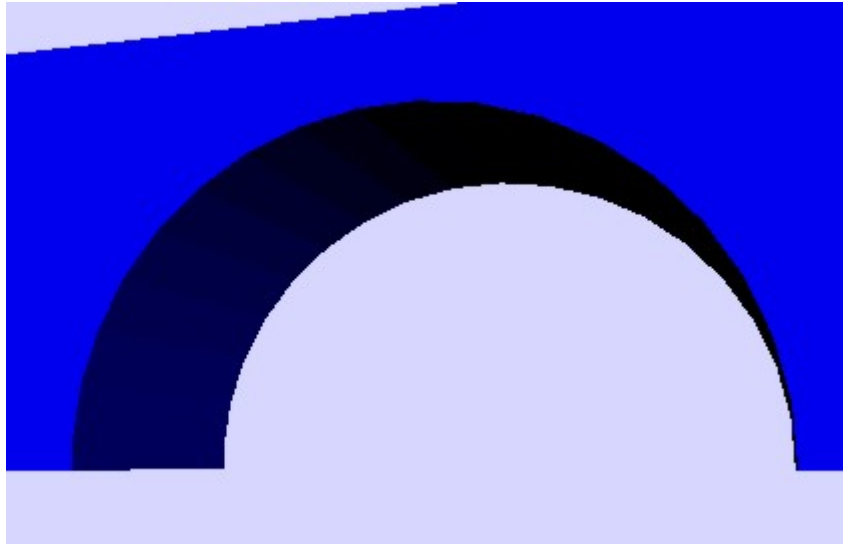
Durch das Exportieren des konstruierten Objekts als VRML kann der Durchlass von allen Seiten betrachtet werden und sogar ein "Rundgang" gestartet werden.



Man kann sich so genaue Details des Objekts ansehen, indem man das Objekt entweder rotieren lässt, es schwenkt oder zoomt.

Gibt man beim Exportieren des Objekts noch sogenannte *Viewpoints* (durch snappen oder Koordinaten) an, kann man das Objekt auf gewünschte Weise darstellen. Im nächsten Bild haben wir so einen Viewpoint eingegeben.

Man kann, wenn man sich etwas damit beschäftigt, einige interessante Lagen betrachten.



2. Beispiel: Triumphbogen

- Zeichnen mit der Hand:

Der durch seinen Grundriss, Aufriss und Kreuzriss gegebene Triumphbogen ist in Perspektive darzustellen. Die Distanz d ist 15 cm.

Die Angabe zum Zeichnen mit der Hand ist schon im Maßstab entsprechend umgerechnet. Will man jedoch nicht die vorgezeichnete Angabe ausdrucken, so sind die Maße für ein A3 Zeichenblatt gedacht, da so das Objekt in einer passenden Größe entsteht.

[Angabe der Abmessungen des Objekts zum Downloaden und Ausdrucken](#)

[Angabeblatt zum Konstruieren](#)

für ein A4 Zeichenblatt, wobei Sie in diesem Fall die Abmessungen des Objekts durch 2 dividieren müssen.

Hier wurden die einzelnen Konstruktionsschritte zur Lösung des Beispiels in einem

[Flash - Objekt](#)

zusammengefasst.

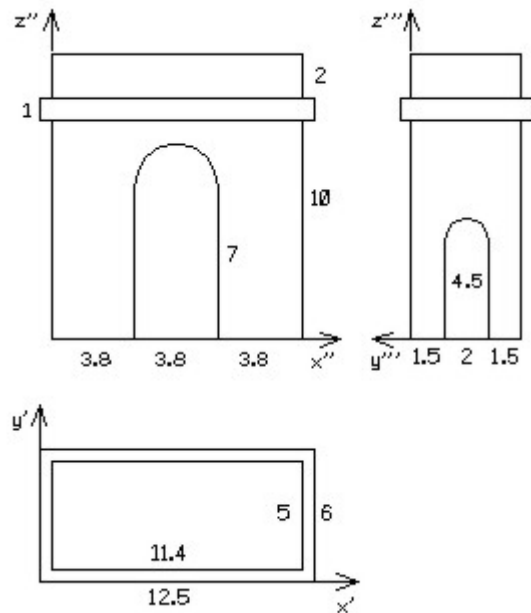
Hier gibt es dazu eine ausführliche Erklärung zu den einzelnen Konstruktionsschritten:

[Bild 1](#) [Bild 2](#) [Bild 3](#) [Bild 4](#) [Bild 5](#) [Bild 6](#) [Bild 7](#)
[Bild 8](#) [Bild 9](#) [Bild 10](#) [Bild 11](#) [Bild 12](#) [Bild 13](#) [Bild 14](#)
[Bild 15](#) [Bild 16](#) [Bild 17](#) [Bild 18](#) [Bild 19](#) [Bild 20](#) [Bild 21](#)
[Bild 22](#) [Bild 23](#) [Bild 24](#) [Bild 25](#)

- Zeichnen mit CAD - 3D[®]

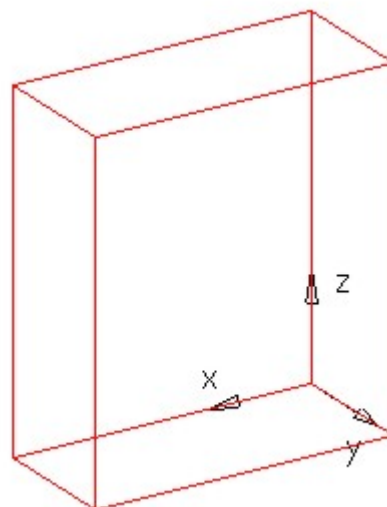
Eine andere Möglichkeit dieses Beispiel grafisch darzustellen, ohne es selbst mit der Hand zu zeichnen, wäre, es mit Hilfe des Zeichenpaketes CAD - 3D[®] zu konstruieren.

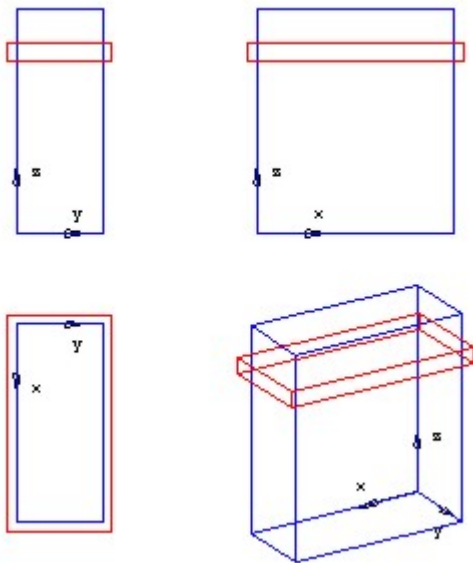
Stellen Sie das angegebene Objekt mit dem Zeichenpaket CAD - 3D[®], unter Zuhilfenahme der unten angeführten Konstruktionsanleitung, dar.



1. Schritt:

Für den Triumphbogen erzeugen Sie als Grundobjekt einen Quader mit den Abmessungen $x = 57$, $y = 25$, $z = 65$. Es wurden die Abmessungen für die Zeichnung mit der Hand mit dem Faktor 5 multipliziert um das CAD Objekt nicht zu klein werden zu lassen.





2. Schritt:

Nun konstruieren Sie den Quersims als einen Quader (62.5, 30, 5) und verschieben Sie ihn an die richtige Stelle.

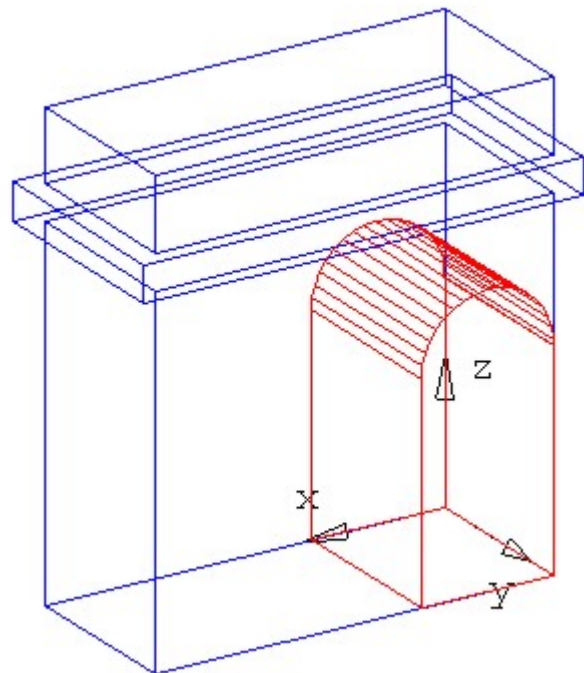
Der Schiebvektor wird angegeben mit dem Ausgangspunkt (0, 0, 0) und dem Endpunkt (-2.5, -2.5, 50).

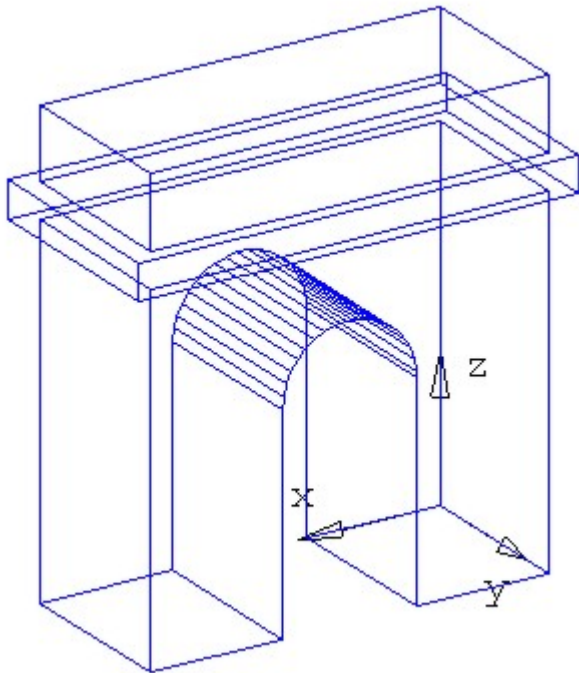
Danach vereinigen Sie Ihre Objekte.

3. Schritt:

Im nächsten Schritt erzeugen Sie einen Quader für den großen Durchgang mit den Abmessungen $x = 19$, $y = 25$ und $z = 30$. Nun fehlt noch ein halber Zylinder, der auf den Quader aufgesetzt wird. Er hat die Maße: $r = 9.5$, $h = 25$ und die y -Achse als Drehachse.

Schneiden Sie den Zylinder mit einer bodenparallelen Ebene in der Mitte durch und setzen Sie die Zylinderhälfte auf den Quader auf. Dann vereinigen Sie die beiden zuletzt konstruierten Objekte.



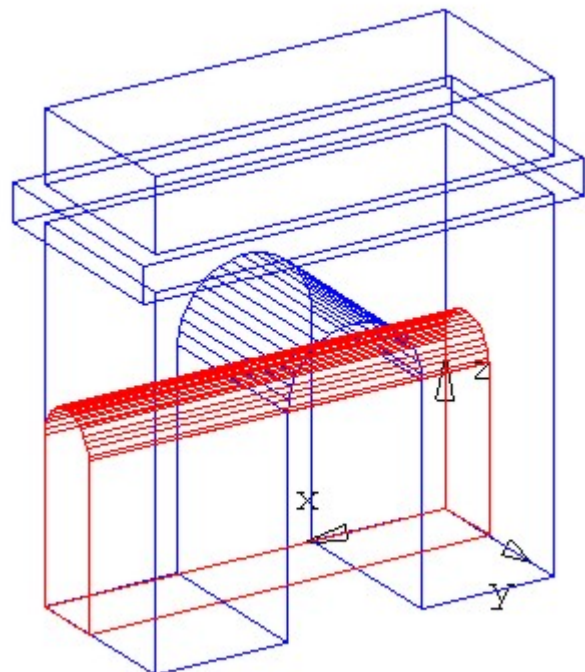


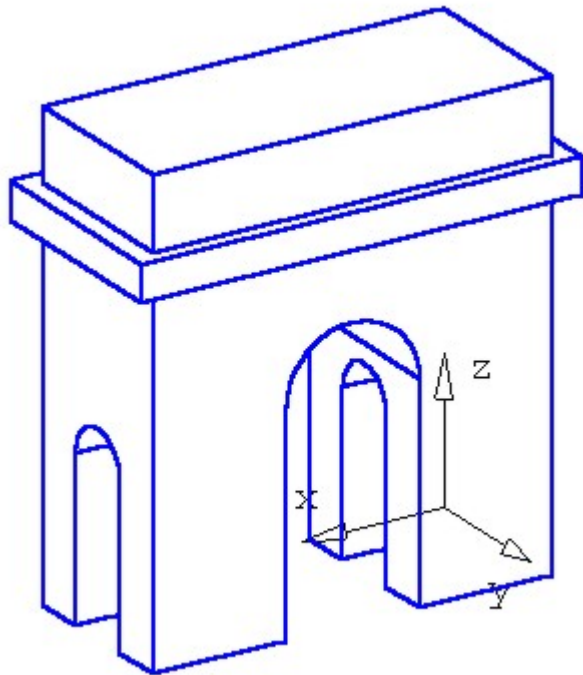
4. Schritt:

Verschieben Sie nun den fertig konstruierten Durchgang an die richtige Stelle, also in die Mitte des Objekts, und bilden Sie die Differenz der beiden Objekte.

5. Schritt:

Für den seitlichen Durchgang gehen Sie nun analog vor. Zuerst erzeugen Sie einen Quader mit den Abmessungen $x = 57$, $y = 10$, $z = 22.5$. Danach erzeugen Sie einen Drehzylinder mit dem Radius $r = 5$ und der Höhe $h = 57$ und die Drehachse ist die x -Achse. Der Zylinder muss wieder in der Mitte durchgesägt und auf den Quader aufgesetzt werden. Nun vereinigen Sie Ihre beiden neuen Objekte.





6. Schritt:

Verschieben Sie nun den fertigen Durchgang in die Mitte des Triumphbogens. Das können Sie mittels der Snapfunktion machen.

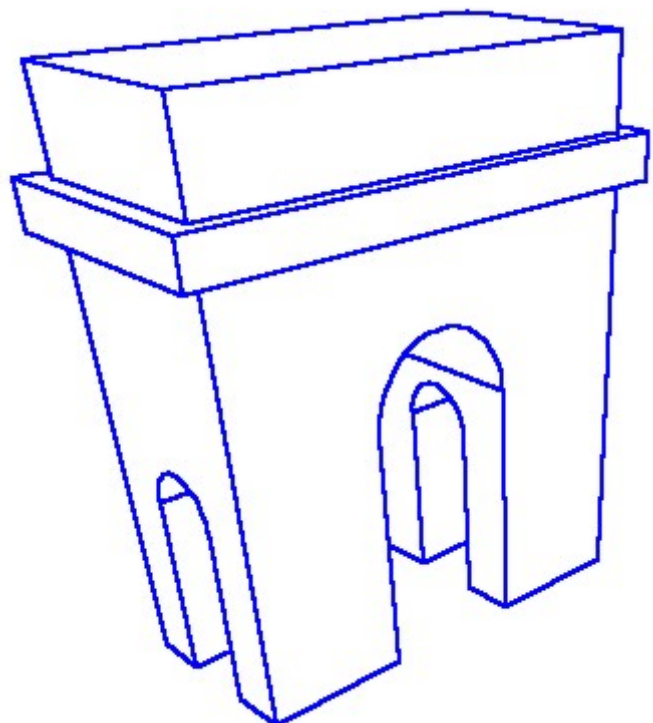
Nun bilden Sie noch die Differenz der beiden Objekte und der Triumphbogen ist in unserer einfachen Form fertig!

7. Schritt:

Jetzt können Sie sich natürlich das Objekt wieder in Perspektive darstellen.

Im Menü Einstellungen gehen Sie dafür auf Perspektive festlegen und geben den gewünschten Augpunkt O und den Hauptpunkt H ein. Ein Vorschlag für den Anfang wäre:

$O(110, 120, 80)$, $H(50, 60, 10)$.



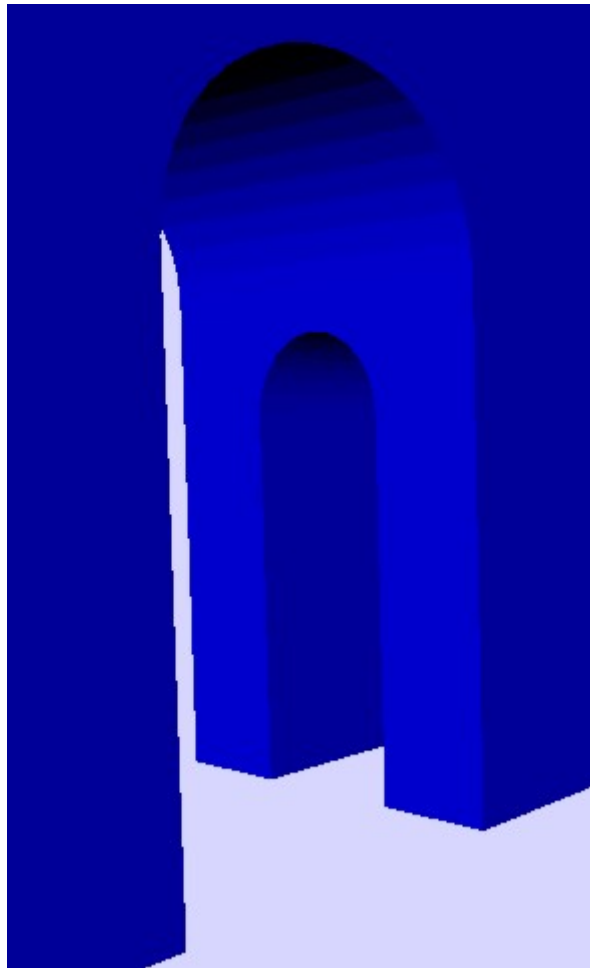


Und so sieht der echte Triumphbogen aus!

Sie können nun versuchen eine ähnliche perspektivische Ansicht mit dem Zeichenpaket CAD - 3D[®] zu finden, indem sie die Einstellungen für die Perspektive umändern.

- [VRML:](#)

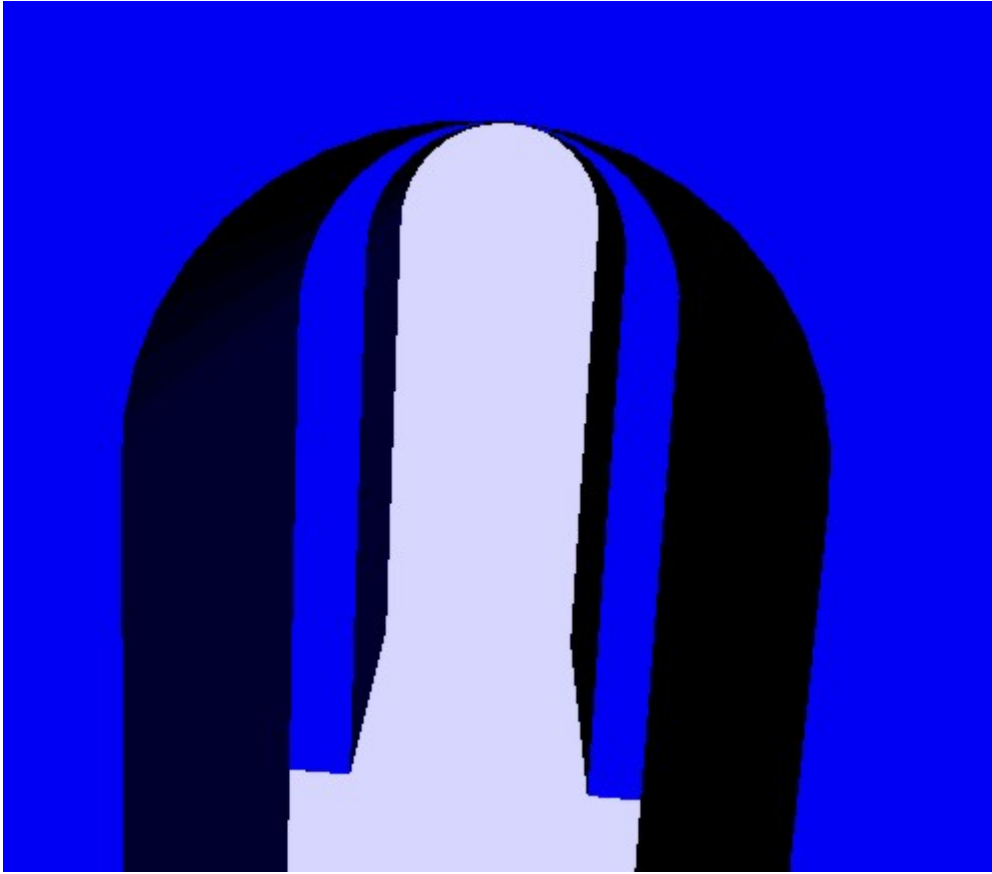
Durch das Exportieren des konstruierten Objekts als VRML kann der Triumphbogen von allen Seiten betrachtet werden und sogar ein virtueller "Rundgang" gestartet werden.



Man kann sich so genaue Details des Objekts ansehen, indem man das Objekt entweder rotieren lässt, es schwenkt oder zoomt.

Gibt man beim Exportieren des Objekts noch sogenannte *Viewpoints* (durch snappen oder Koordinaten) an, kann man das Objekt auf gewünschte Weise darstellen. Im nächsten Bild haben wir so einen Viewpoint eingegeben.

Man kann, wenn man sich etwas damit beschäftigt, einige interessante Lagen betrachten.



Anhang zu Kapitel 4

Im Anhang zu Kapitel 4 befinden sich die Konstruktionsbeschreibungen der Beispiele zu den einzelnen Bildern und die einzelnen Bilder der Flash - Objekte selbst.

Im Projekt hat man einen Hyperlink, der zu den Beschreibungen oder den Flash - Objekten führt.

1. Beispiel: Durchlass

Konstruktionsbeschreibung:

Bild 1:

Laut Angabe ist $z^c \perp a_u^c$, somit ist die Blickachse horizontal und Y_u^c liegt auf dem Horizont p_{1u}^c .

Der Messpunkt M_1 der Grundrissebene π_1 ergibt sich durch das Auftragen der Distanz $\perp p_1^c$ natürlich von H aus. Aus M_1 erscheinen die Fluchtpunkte X_u^c, Y_u^c (wegen $x \perp y$) unter rechtem Winkel, somit ergibt sich Y_u^c mittels rechtem Winkelhaken.

Bild 2:

Der Zentralriss p_1^c der Spur p_1 von π_1 liegt unterhalb des Horizonts, sodass Übersicht vorliegt.

Aus der gegebenen Orientierung von x^c erhält man damit jene von y^c .

Bild 3:

Verwendet man die Spur der Ebene π_3 , hier ist dies die z -Achse, als Drehachse, so erscheint die gedrehte Lage der in π_3 liegenden Schnittfigur F (Kreisbogen k und gewisse Objektkanten) im Zentralriss unverzerrt, sodass im Koordinatensystem $\{U_0^c = U^c, x_0^c, z_0^c\}$ der Schnitt mit π_3 gezeichnet werden kann.

Bild 4:

Die perspektive Kollineation, welche $F_0^c \rightarrow F^c$ leistet, hat $z^c = p_3^c$ als Kollineationsachse und den Messpunkt $M_3 = M_x$ als Kollineationszentrum. Weiters ist $X_{u0}^c \mapsto X_u^c$ ein zugeordnetes Punktepaar. Für spätere Konstruktionen zeichnen wir gleich den Messpunkt M_y ein. Die Messpunkte erhalten wir indem wir also M_1 um X_u^c (M_x) und Y_u^c (M_y) auf p_{1u}^c abschlägt.

Bild 5:

Die Fluchtgerade p_{3u}^c von π_3 verläuft durch X_u^c und ist normal zum Horizont p_{1u}^c . Der Zentralriss p_{3v0}^c der parallelgedrehten Verschwindungsgeraden p_{3v} von π_3 ist zur Fluchtgeraden p_{3u}^c parallel, wobei gilt: $\overline{p_{3u}^c p_3^c} = \overline{M_3 p_{3v0}^c}$ (mit $p_3^c = z^c$). Da p_{3v0}^c den Kreis k_0^c nicht schneidet, ist k^c eine Ellipse, die nach der Theorie im [Fall 1](#) durch konjugierte Durchmesser festgelegt werden kann.

Bild 6:

Die Zentralrisse der ebenen Objektkanten in π_3 erhält man durch Zurückdrehen, das heißt, man hat Fixpunkte auf z^c , die man mit X_u^c verbindet und so erhält man die Kanten im Zentralriss. Die Eckpunkte misst man mittels M_x ein. Die Sichtbarkeit kann hier noch nicht eingezeichnet werden, das heißt wir zeichnen also die konstruierten Kanten dünn ein.

Bild 7:

Nun wollen wir die Brückenbreite $b = 5\text{m}$ einmessen und dazu brauchen wir nun den Messpunkt M_y . Wir tragen den Abstand nun auf p_1^c ab und lassen den Punkt nach X_u^c fluchten, da die hintere Brückenseite auch zu π_3 parallel ist.

Bild 8:

Wir konstruieren nun den Kreisbogen k^c . Die Punkte 1^c und 2^c liegen auf der Achse x^c , da 1_0^c und 2_0^c auf x_0^c liegen. Wir können also, da wir die Lage der beiden Punkte kennen, 1_0^c und 2_0^c mit M_x verbinden und dort wo diese Verbindungslinien x_c schneiden, finden wir unsere gesuchten Punkte, die einen der konjugierten Durchmesser ergeben.

Bild 9:

Da die Perspektive im Allgemeinen nicht mittelpunktstreu ist, suchen wir uns den Mittelpunkt von $1^c 2^c$ und bilden ihn zurück ab auf N_0^c .

Bild 10:

Durch N_0^c normal auf $1_0^c 2_0^c$ schneidet der Kreisbogen in einem Punkt 3_0^c , der ein Punkt vom anderen konjugierten Durchmesser ist.

Bild 11:

Wir wissen, dass z - parallele Geraden wieder in z - parallele Geraden übergehen. Der zweite konjugierte Durchmesser ist so eine z - parallele Gerade. Da wir N_0^c und N^c schon kennen, müssen wir noch den Punkt 3^c konstruieren, der auf der Geraden $M_x 3_0^c$ liegt.

Nun können wir auch die Tangenten in den Punkten $1^c, 2^c, 3^c$ einzeichnen.

Bild 12:

Nun ermitteln wir mit der Rytzschen Achsenkonstruktion die Hauptachse und die Nebenachse der Ellipse und ihre Scheitel.

Bild 13:

Mit Hilfe der Scheitelkrümmungskreise kann man nun die Ellipse einzeichnen.

Bild 14:

Der Kreisbogen \bar{k} der hinteren Ebene des Objekts ist im Raum schiebungsgleich in y - Richtung, das heißt, jedes Paar Punkt und Tangente (P, t) von k geht bei Schiebung über in ein Paar Punkt und Tangente von $\bar{k}(\bar{P}, \bar{t})$. Wir nehmen einen beliebigen Punkt P_0^c an (hier ist aus Platzgründen günstig den Winkel $\angle(p_1^c, U^c P_0^c)$ mit 50° anzunehmen). Den Zentralriss P^c erhält man mittels einer perspektiven Kollineation mit M_x als Zentrum und $z_0^c = z^c$ als Achse. Die Verbindungsgerade $P_0^c 1_0^c$ hat einen Fixpunkt auf der Achse den wir mit 1^c verbinden. P^c erhält man nun, wenn man diese Gerade mit $M_x P_0^c$ schneidet.

Bild 15:

Die Tangente t_0^c in P_0^c ist sofort gefunden, da es eine Tangente an einen unverzerrten Kreis ist. Die Tangente t_0^c und die Tangente t^c besitzen einen gemeinsamen Fixpunkt bezüglich der perspektiven Kollineation auf $z^c = z_0^c$. Diese wollen wir einzeichnen.

Bild 16:

Nun haben wir die wichtigsten Voraussetzungen um den Punkt $\overline{P^c}$ von der schiebungsgleichen Ellipse $\overline{k^c}$ zu ermitteln. Zuerst suchen wir uns den Zentralgrundriss P'^c von P^c auf der z -parallelen Geraden durch P^c geschnitten mit $1^c 2^c = 1'^c 2'^c$. Wir wissen, dass alle y -parallelen Geraden nach Y_u^c fluchten, so liegt $\overline{P^c}$ auf $Y_u^c P'^c$. Weiters liegt der Punkt $\overline{P^c}$ auf der x -parallelen Kante, der π_3 -parallelen Durchlassfläche, die nach X_u^c fluchtet. (siehe Bild 7)

Bild 17:

$\overline{P^c}$ liegt nun auf einem z -parallelen Ordner und auf der Geraden $Y_u^c P^c$, da $\overline{P^c} P^c$ auch eine y -parallele Kante ist. Folgende Eigenschaft kann man nun ausnützen: t ist parallel zu \bar{t} (parallel zu π_3), demnach schneiden einander die Zentralrisse t^c und \bar{t}^c der Tangenten auf der Fluchtgerade p_{3u}^c im Fluchtpunkt T^c .

Bild 18:

Wir haben den beliebigen Punkt $\overline{P^c}$ von $\overline{k^c}$ im Griff, doch müssen wir noch $\overline{k^c}$, die schiebungsgleiche Ellipse einzeichnen. Die Kante auf der Brückenbreite zu sehen ist und die Verbindung $3^c, \overline{3^c}$ fluchten nach Y .

Bild 19:

Jetzt wollen wir noch die Kanten der schrägen Wand, die in y -Richtung verläuft, einzeichnen. Die Kanteneckpunkte, wo die x -parallele Wand diese schräge y -parallele Wand trifft, haben wir in Bild 6 schon konstruiert. Wir verbinden nun diese

Eckpunkte mit dem Fluchtpunkt Y_u^c und erhalten somit die gesuchten y - parallelen Kanten.

Bild 20:

Als letztes wird nun die Sichtbarkeit überlegt und das Objekt vervollständigt. Den Ellipsenbogen in π_3 sieht man ganz und auch den anschließenden vorderen Teil der schrägen Wand. Von der oberen Fläche des Objekts sieht man nur die vorderen Kanten.

Bild 21:

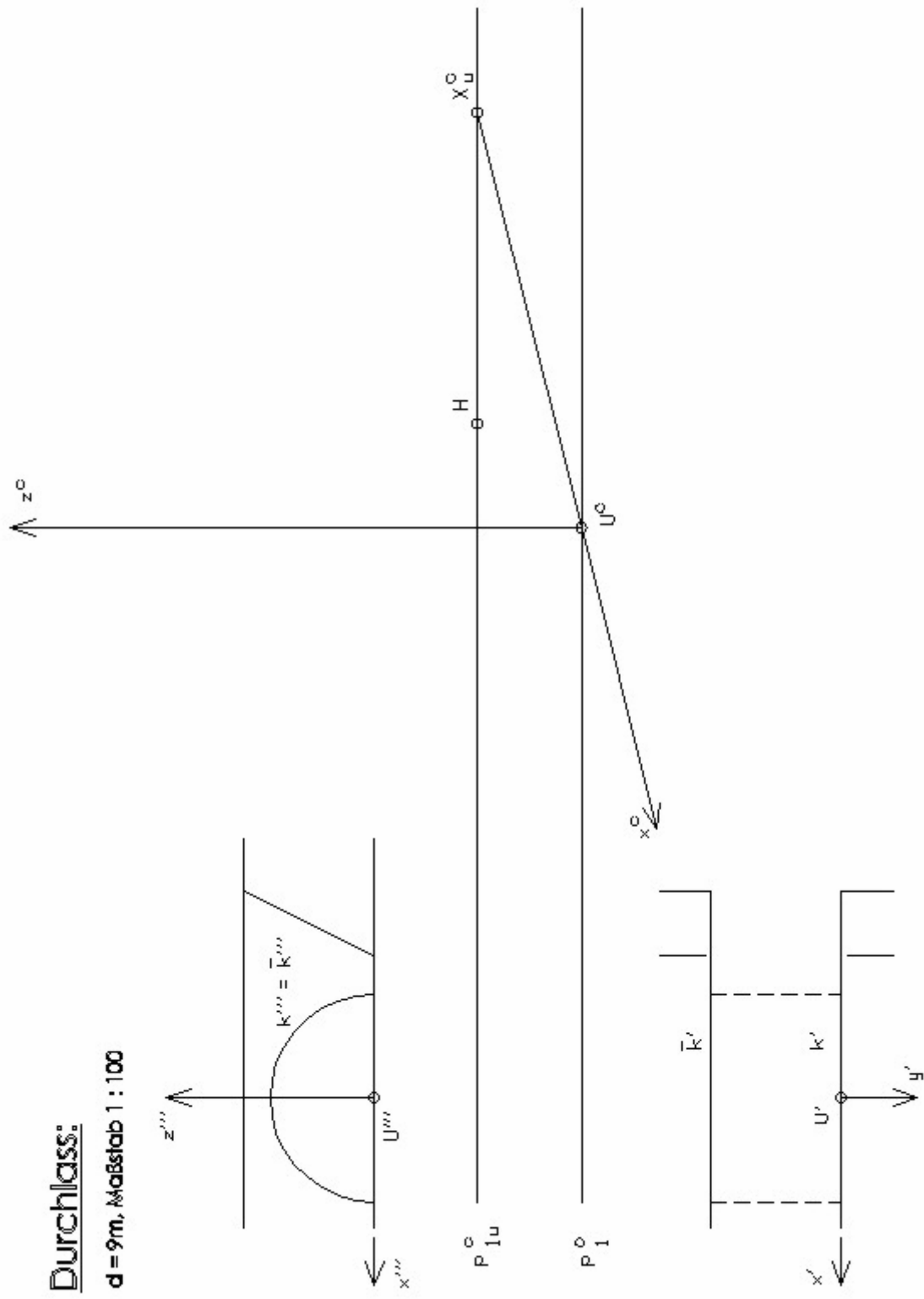
Vom Durchlass selbst sieht man die rechte Brückenbreite und einen kleinen Teil der hinteren Ellipse. Die hintere Ellipse benötigt noch Scheitel und Achsen, die wieder mit der Rytzschen Achsenkonstruktion ermittelt werden können (wie in Bild 12). Die Konstruktion ist hier nicht mehr explizit ausgeführt.

Bild 22:

Das letzte Bild zeigt das fertige Objekt mit seinen sichtbaren Kanten und Kurven. In der Perspektive ist es üblich nur sichtbare Kanten und Kurven anzugeben.

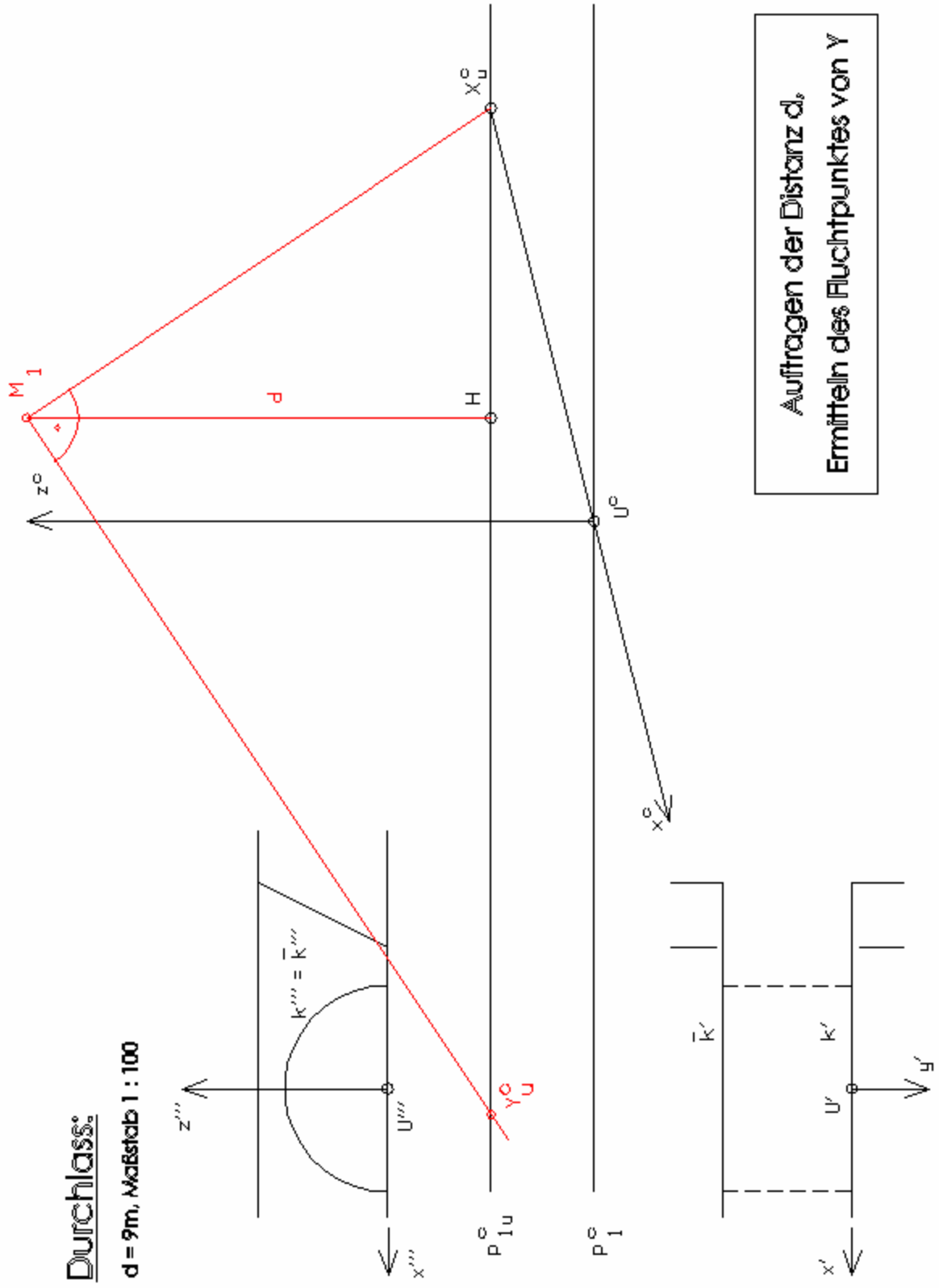
Durchlass:

$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



Durchlass:

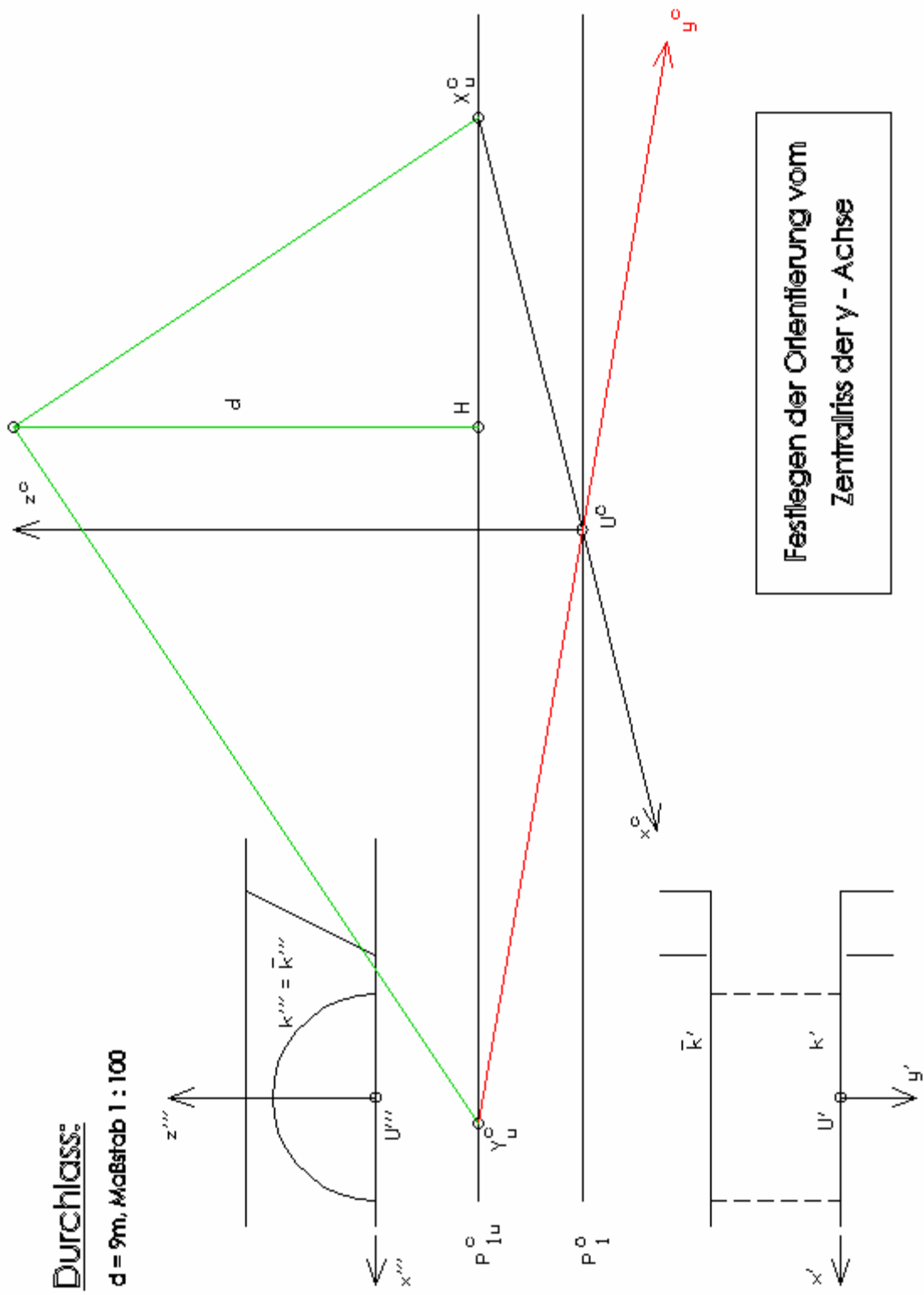
$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



Auftragen der Distanz d ,
Ermitteln des Fluchtpunktes von Y

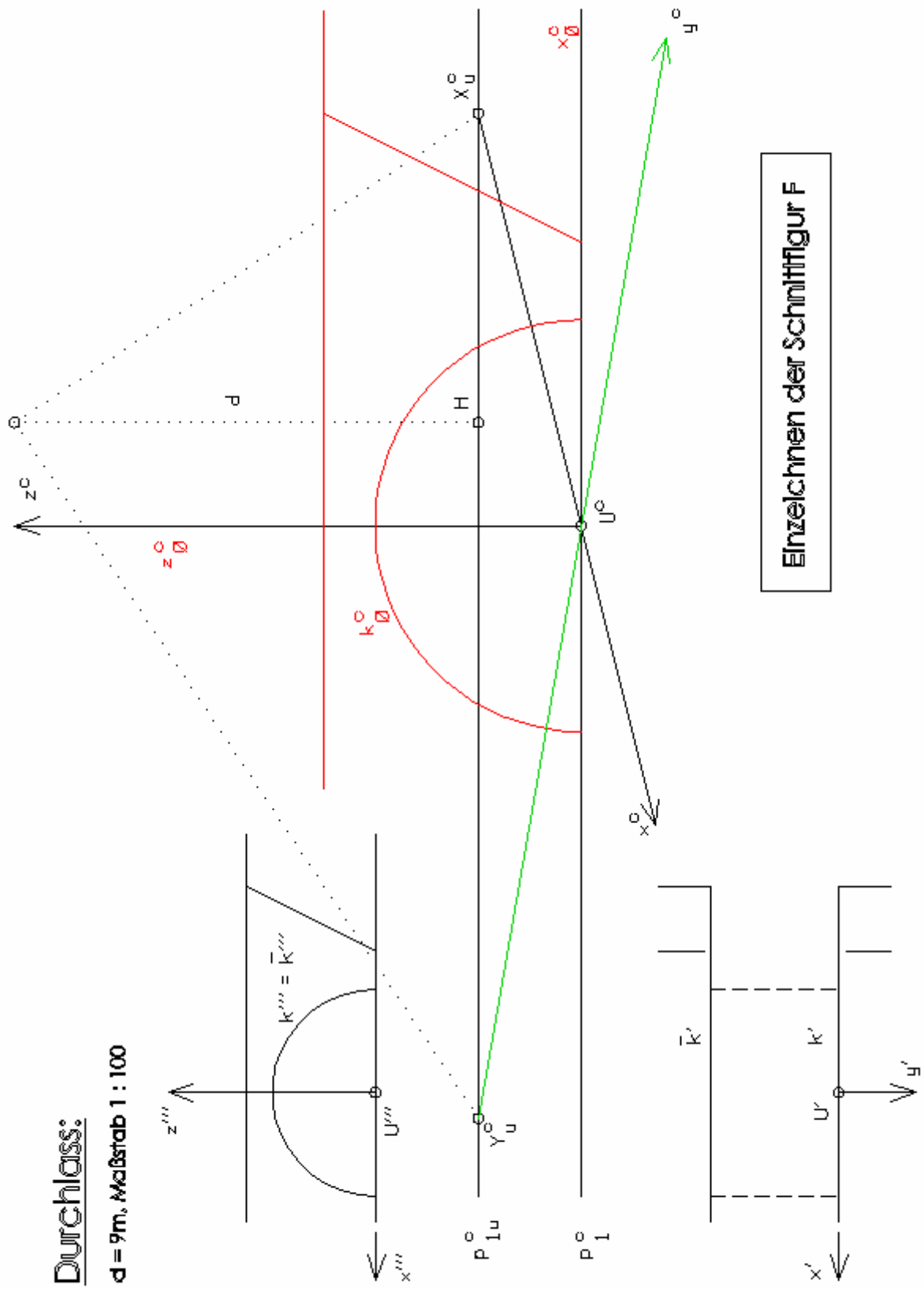
Durchlass:

$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



Durchlass:

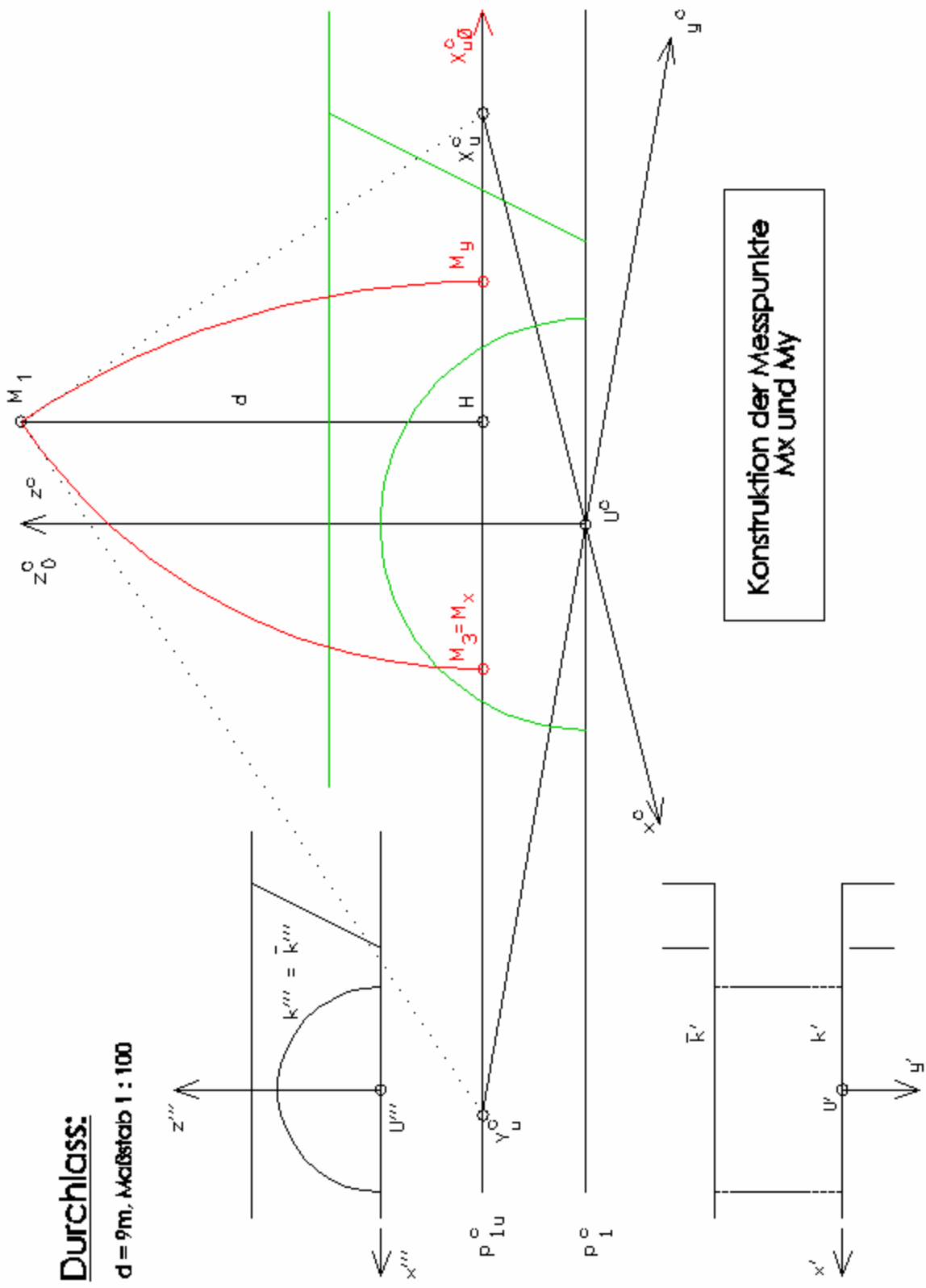
$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



Einzeichnen der Schnittfigur F

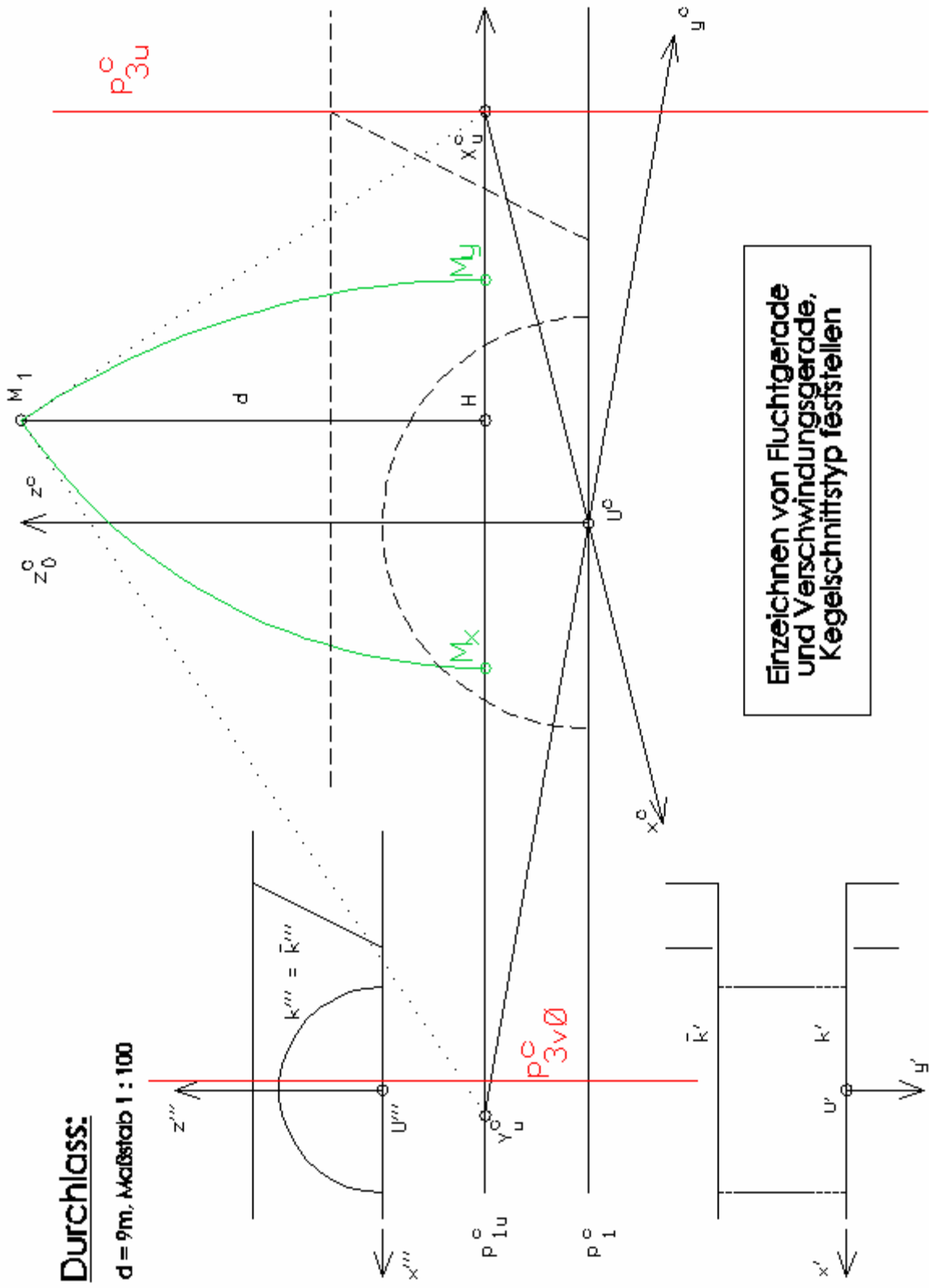
Durchlass:

$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



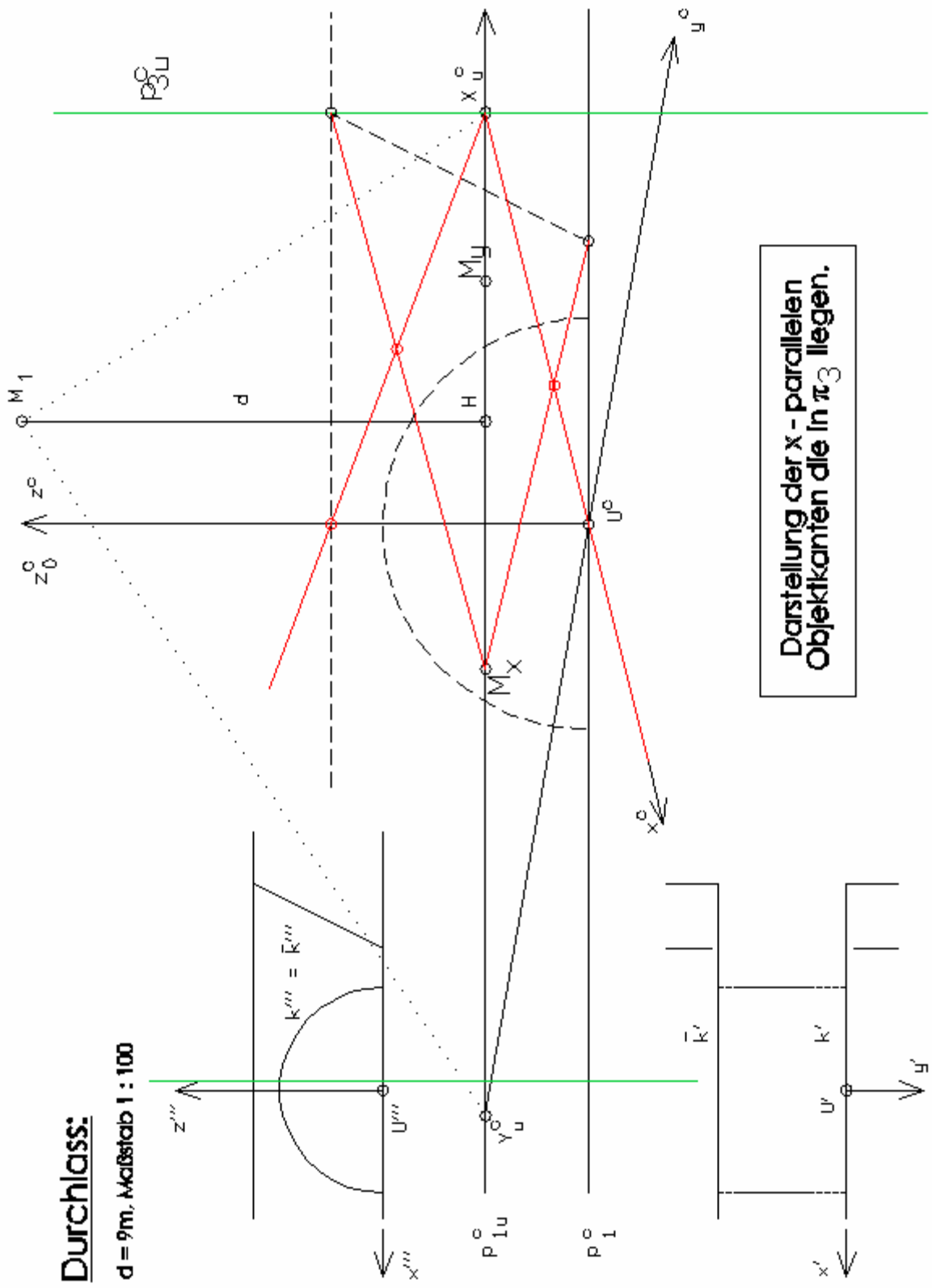
Durchlass:

$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



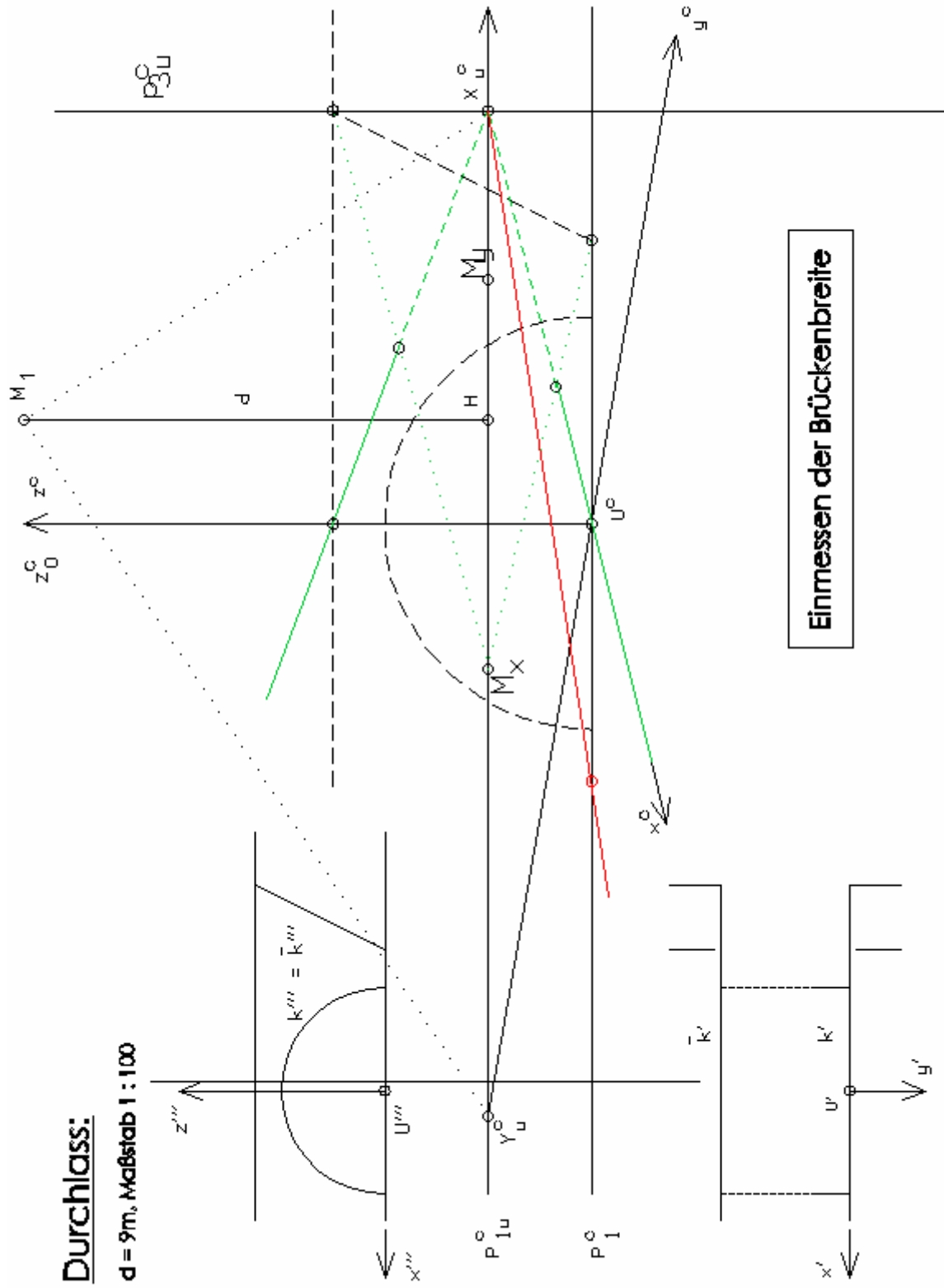
Durchlass:

$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



Durchlass:

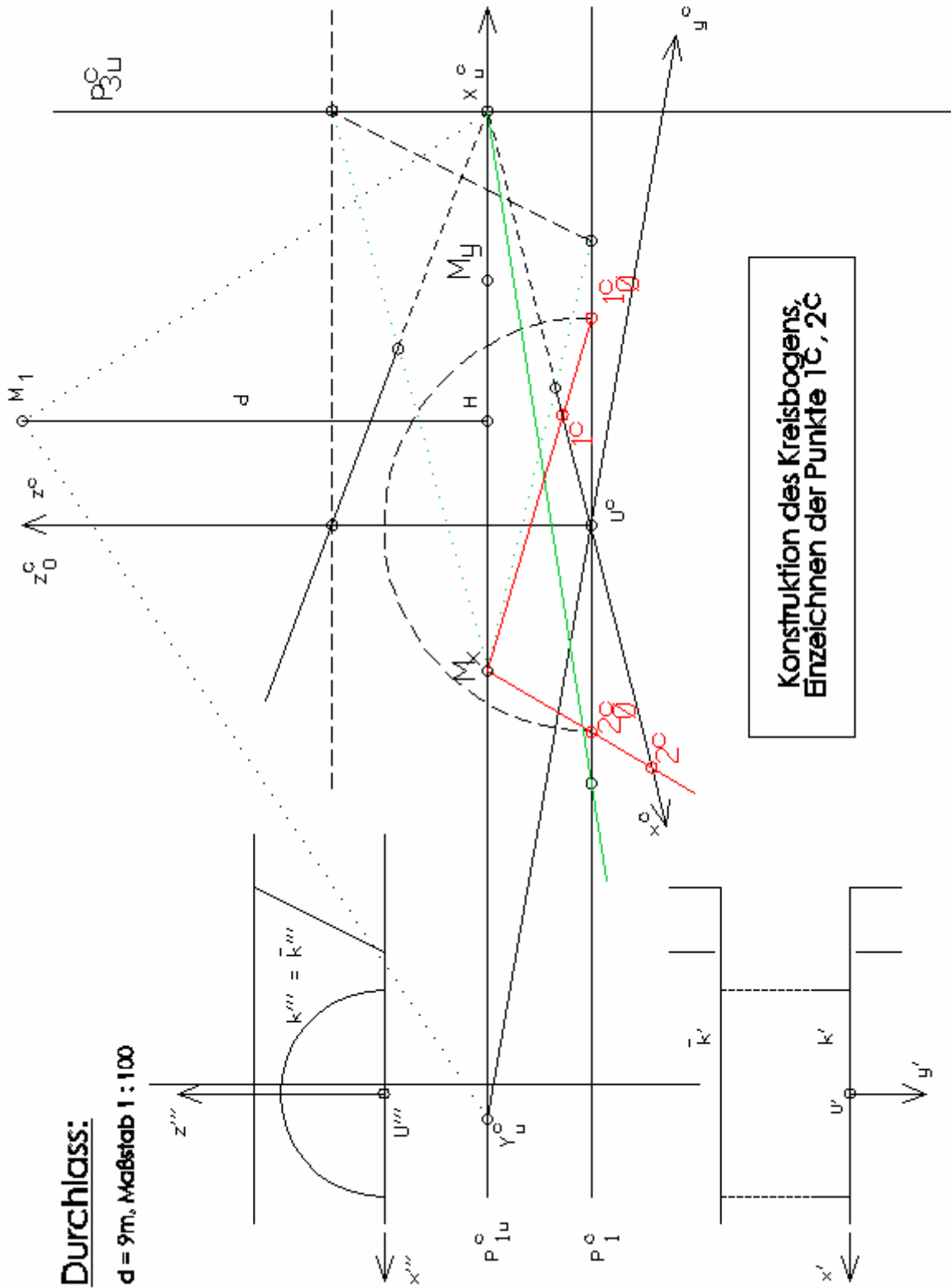
$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



Einmessen der Brückenbreite

Durchlass:

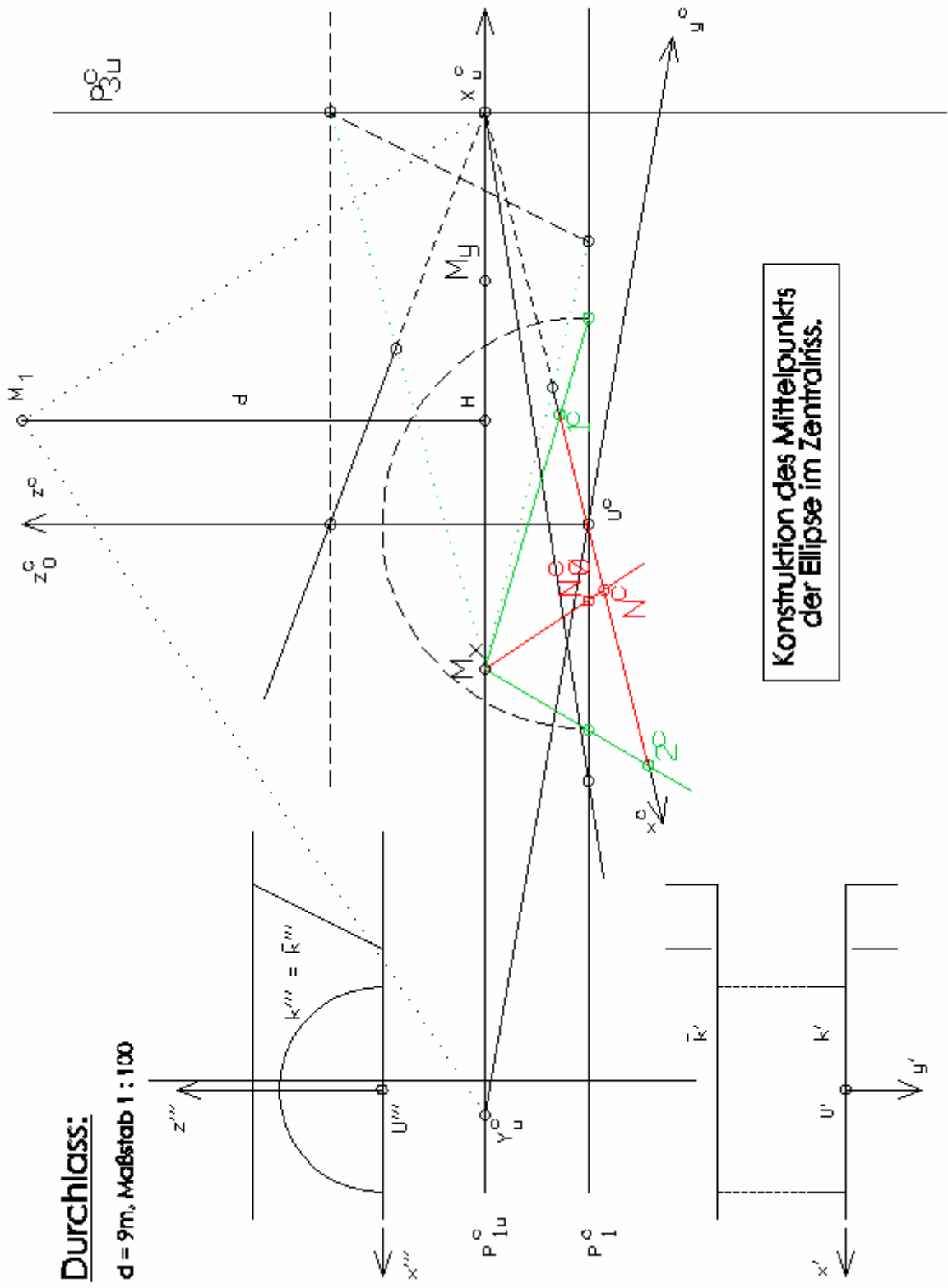
d = 9m, Maßstab 1 : 100



Konstruktion des Kreisbogens,
Einzeichnen der Punkte $1c, 2c$

Durchlass:

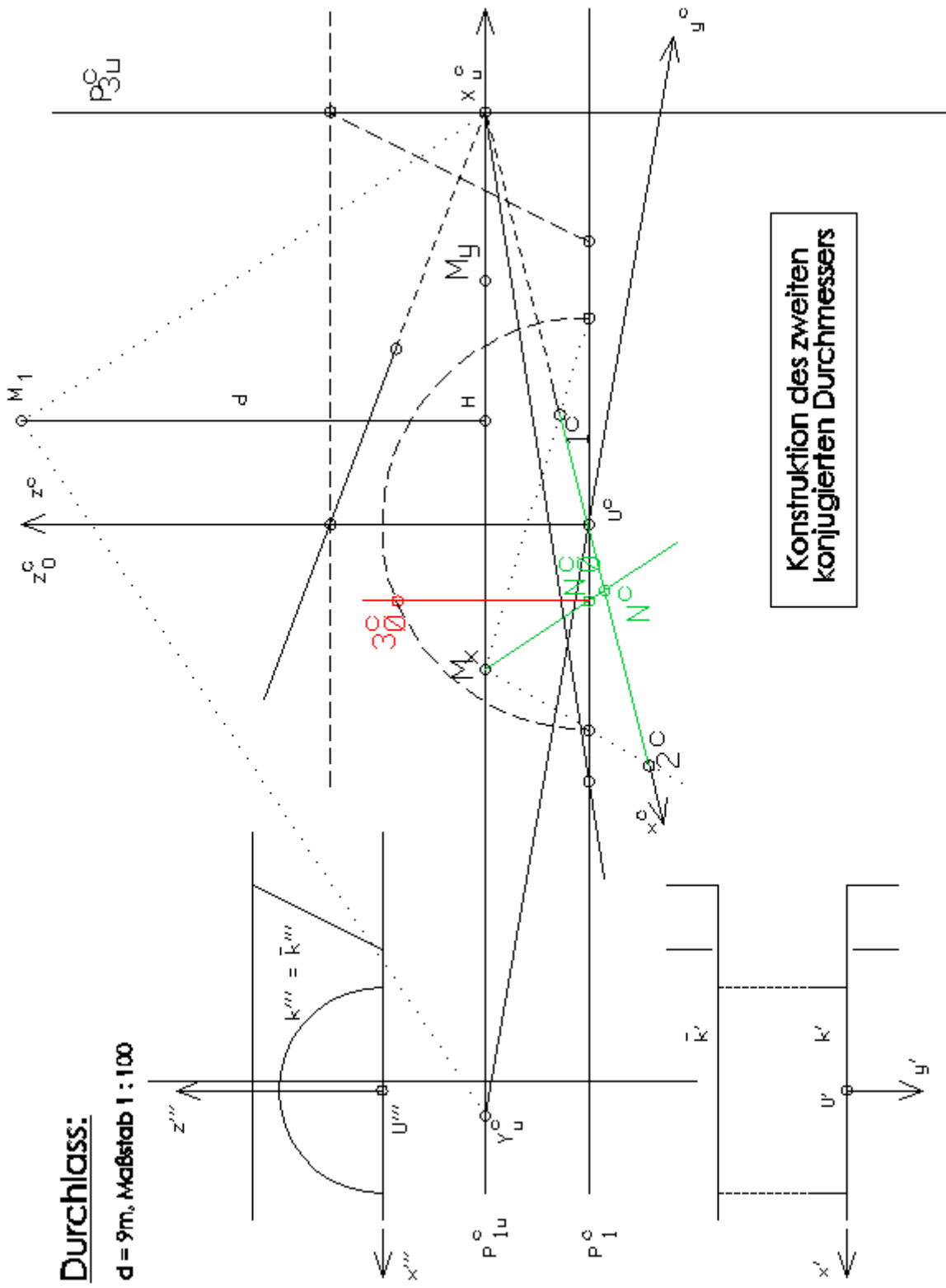
$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



Konstruktion des Mittelpunkts der Ellipse im Zentralriss.

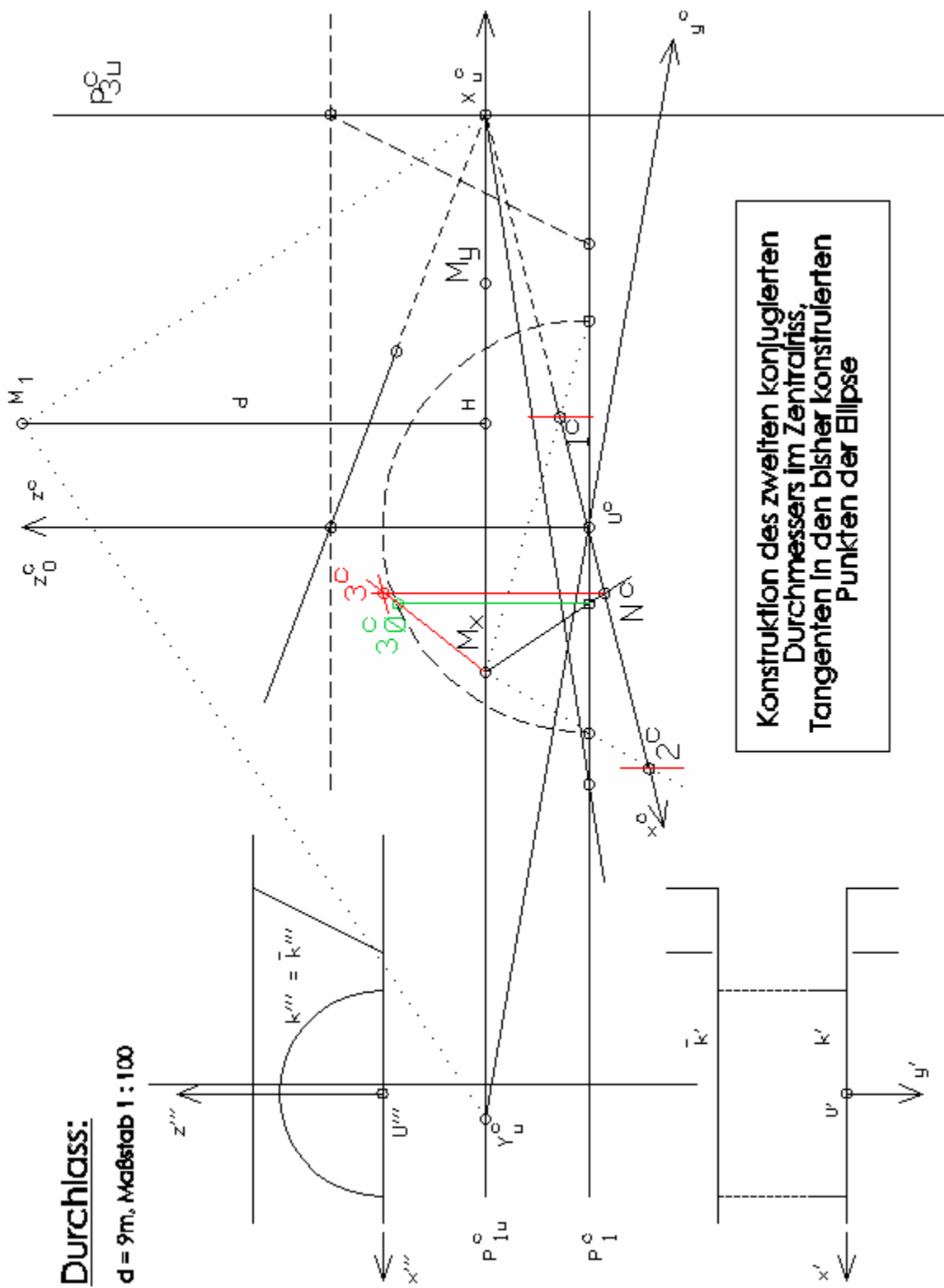
Durchlass:

$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



Durchlass:

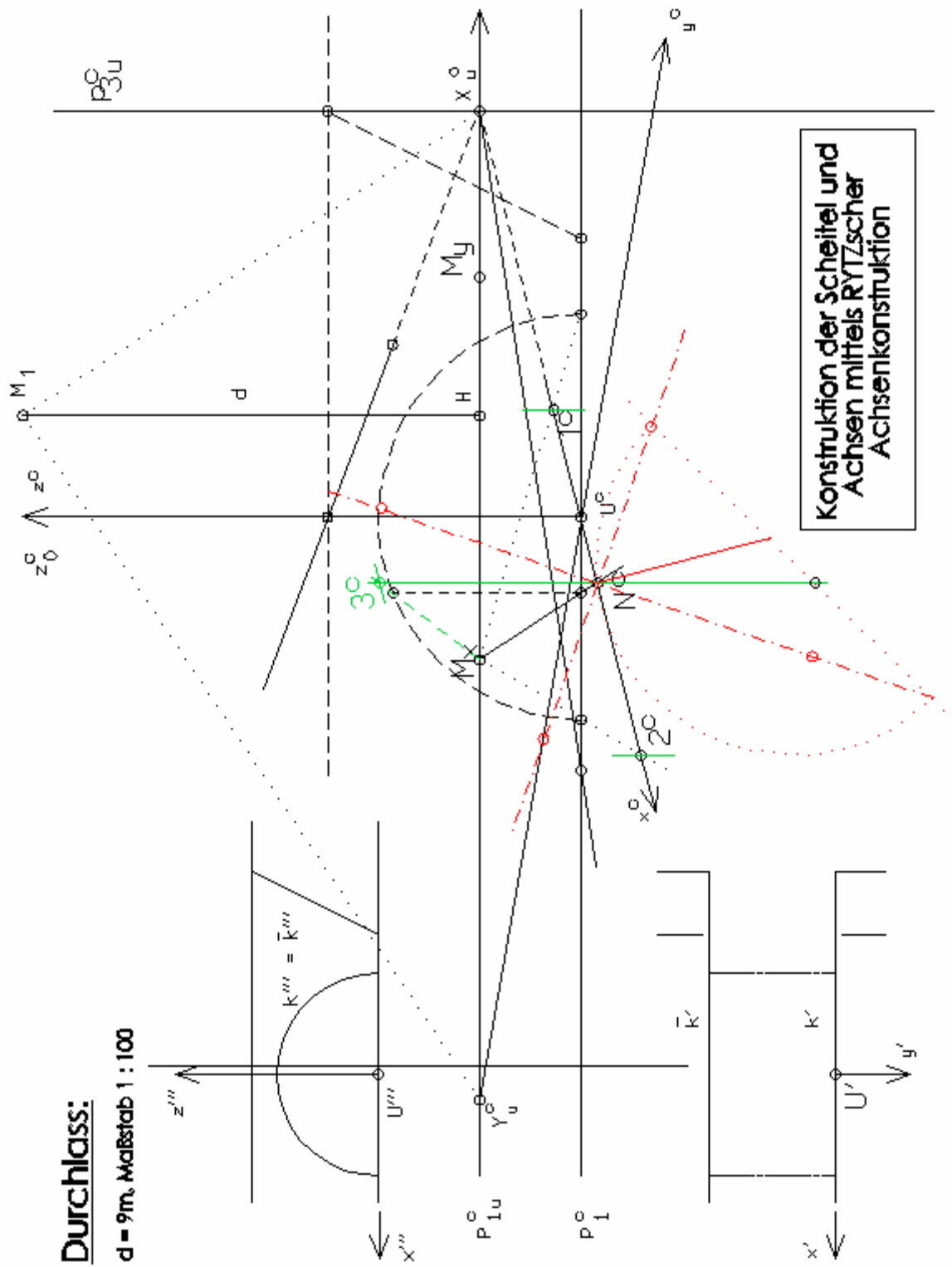
$d = 9m$, Maßstab 1 : 100



Konstruktion des zweiten konjugierten Durchmessers im Zentralriss, Tangenten in den bisher konstruierten Punkten der Ellipse

Durchlass:

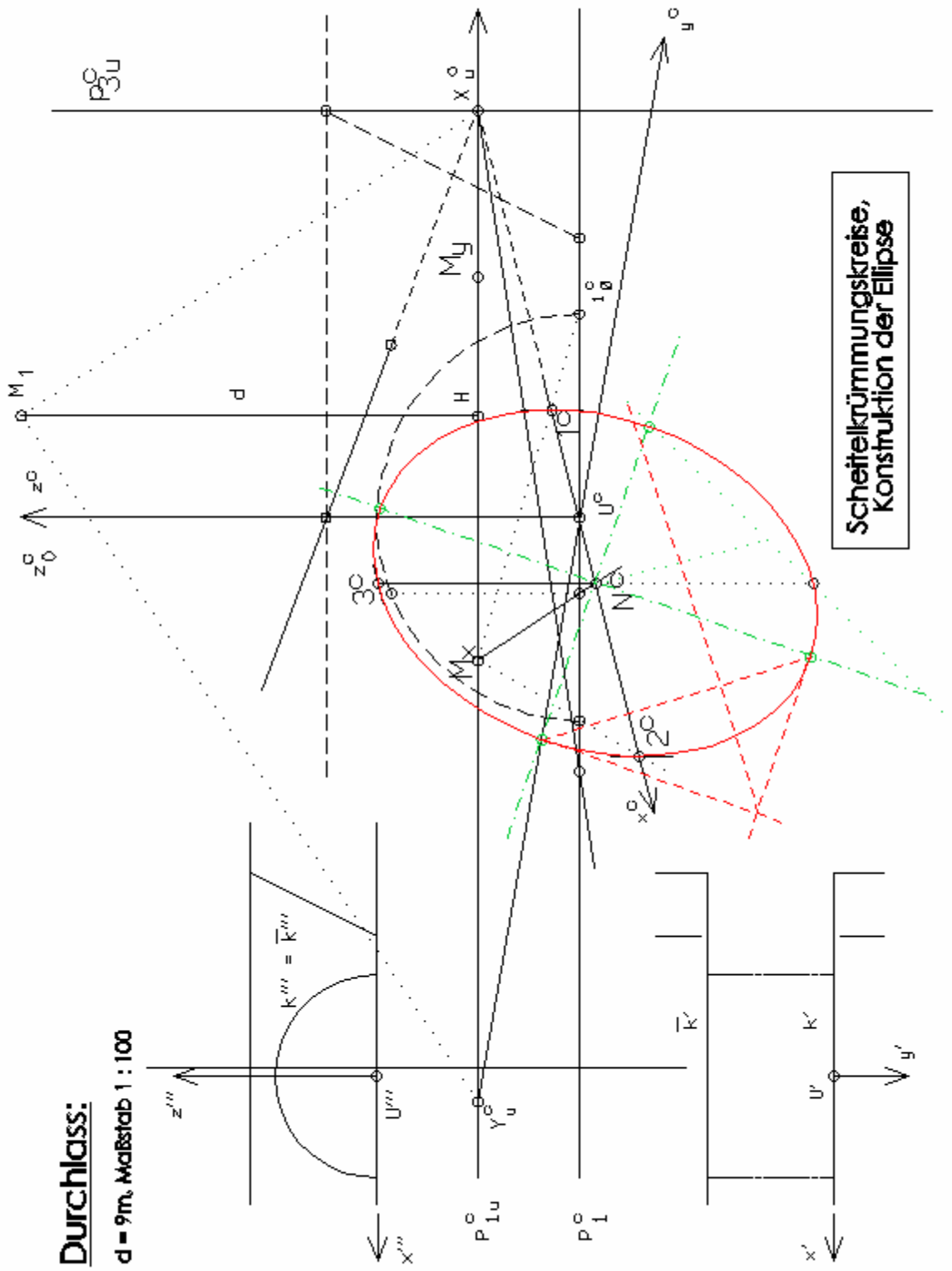
$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



Konstruktion der Scheitel und Achsen mittels RYTZscher Achsenkonstruktion

Durchlass:

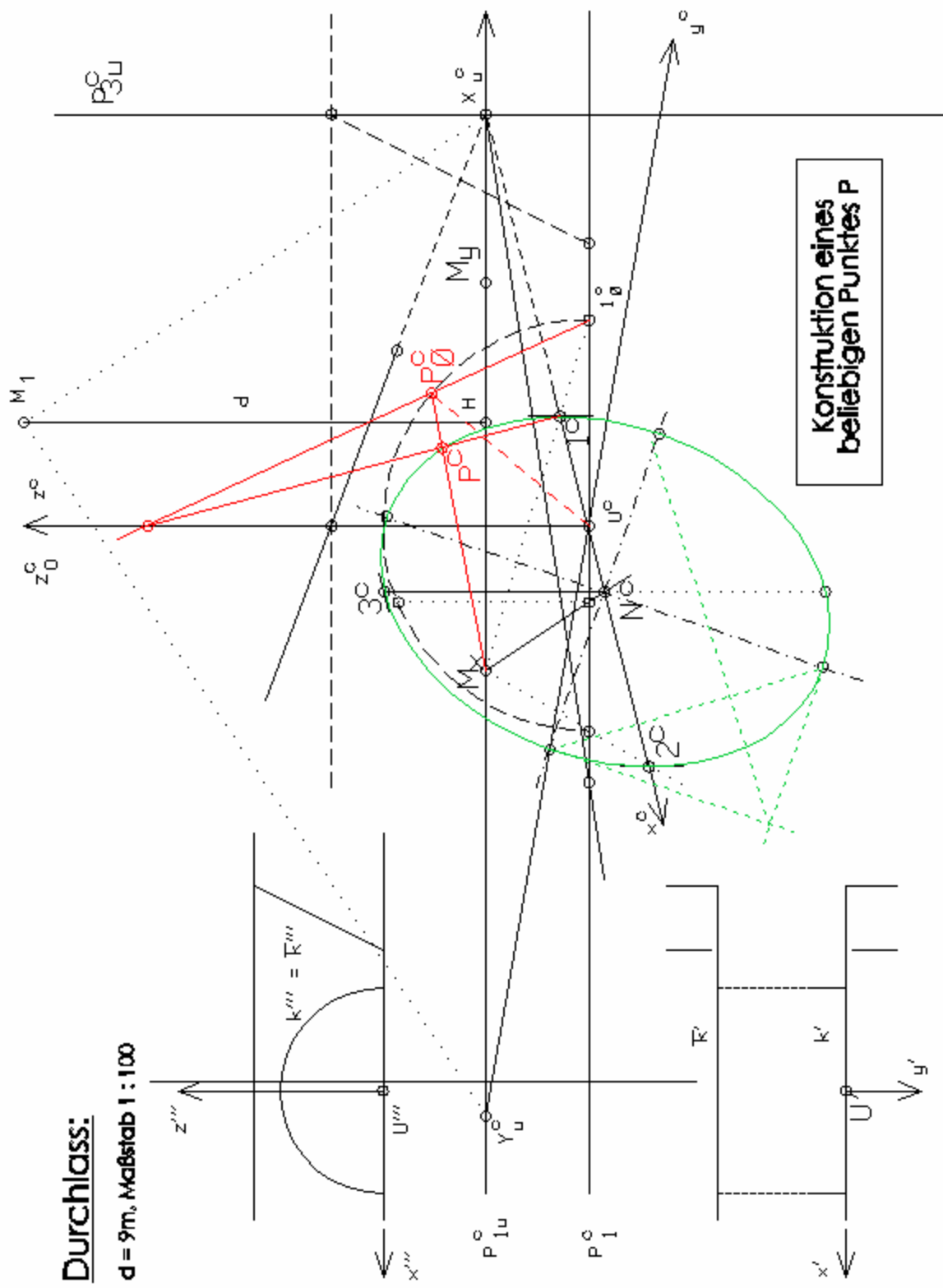
$d = 9m$, Maßstab 1 : 100



Scheitelkrümmungskreise,
Konstruktion der Ellipse

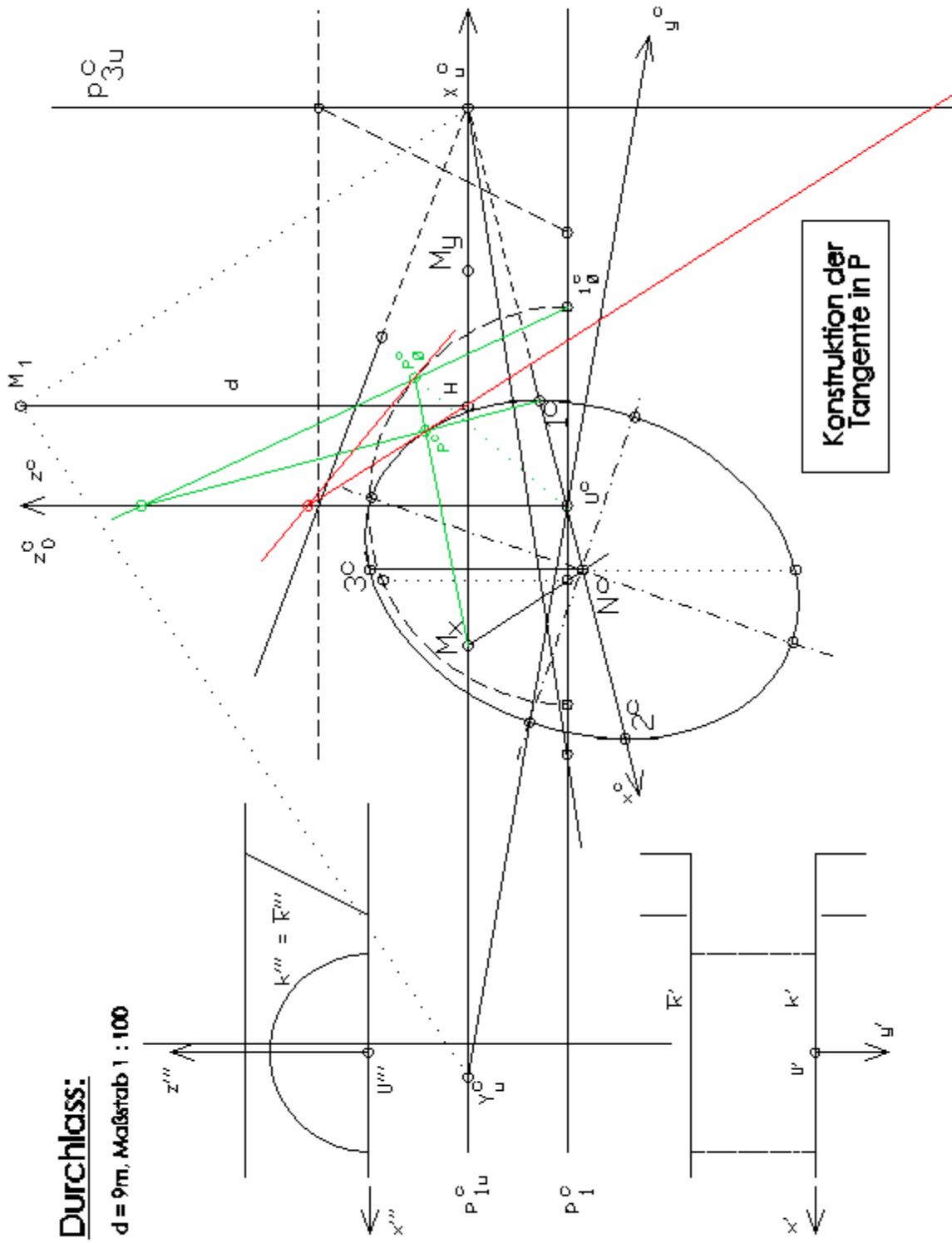
Durchlass:

$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



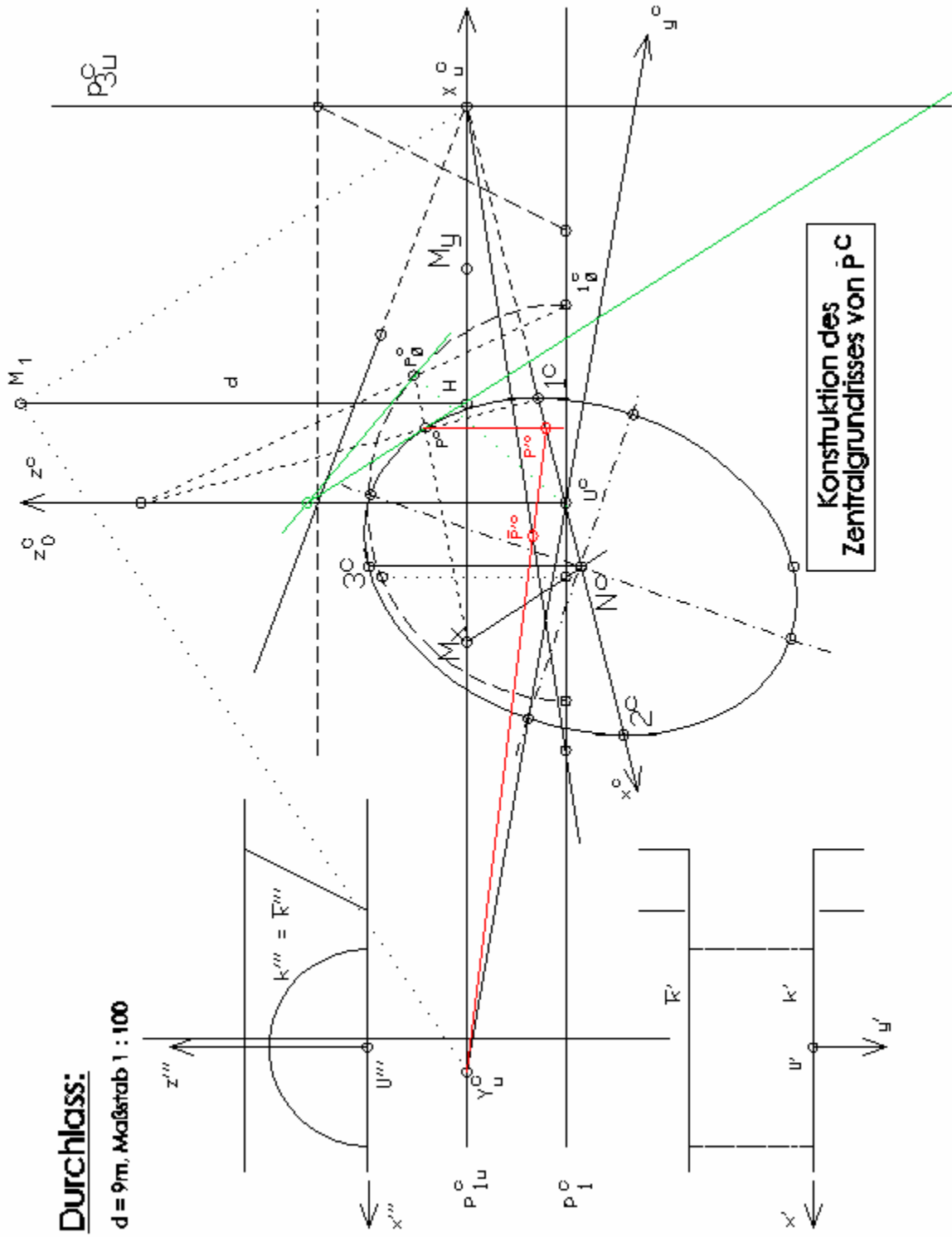
Durchlass:

$d = 9\text{m}$, Maßstab $1 : 100$



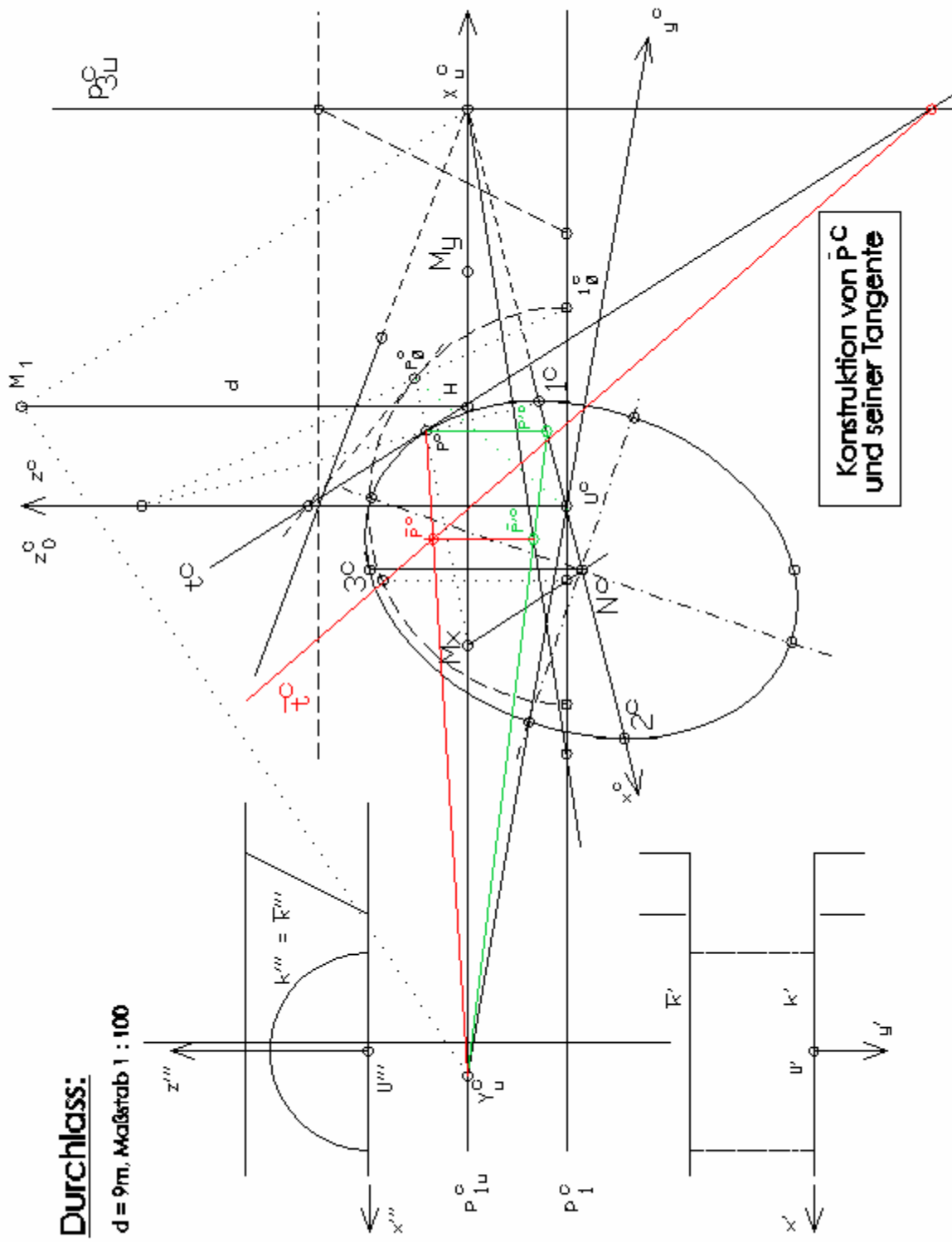
Durchlass:

$d = 9\text{m}$, Maßstab $1 : 100$



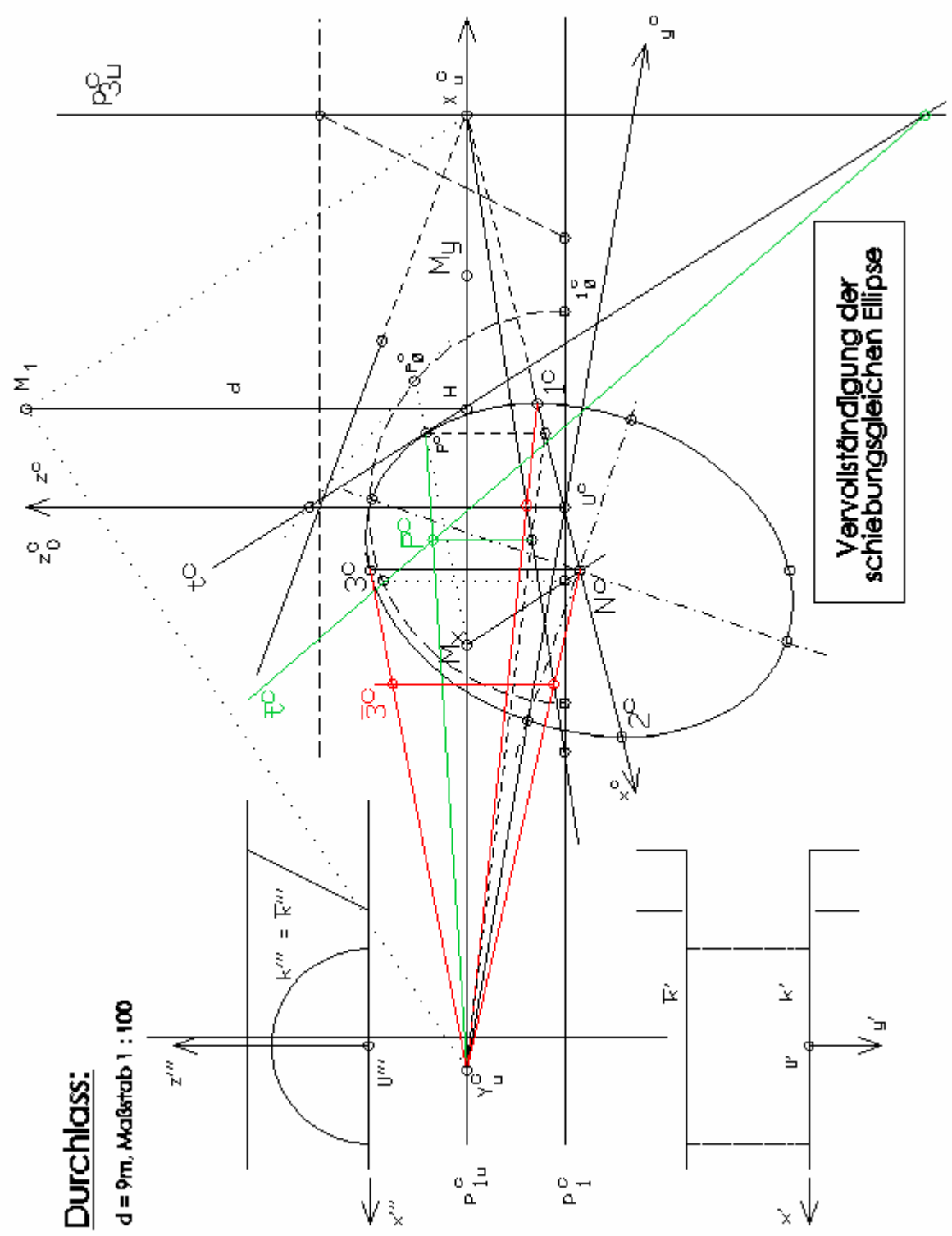
Durchlass:

$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



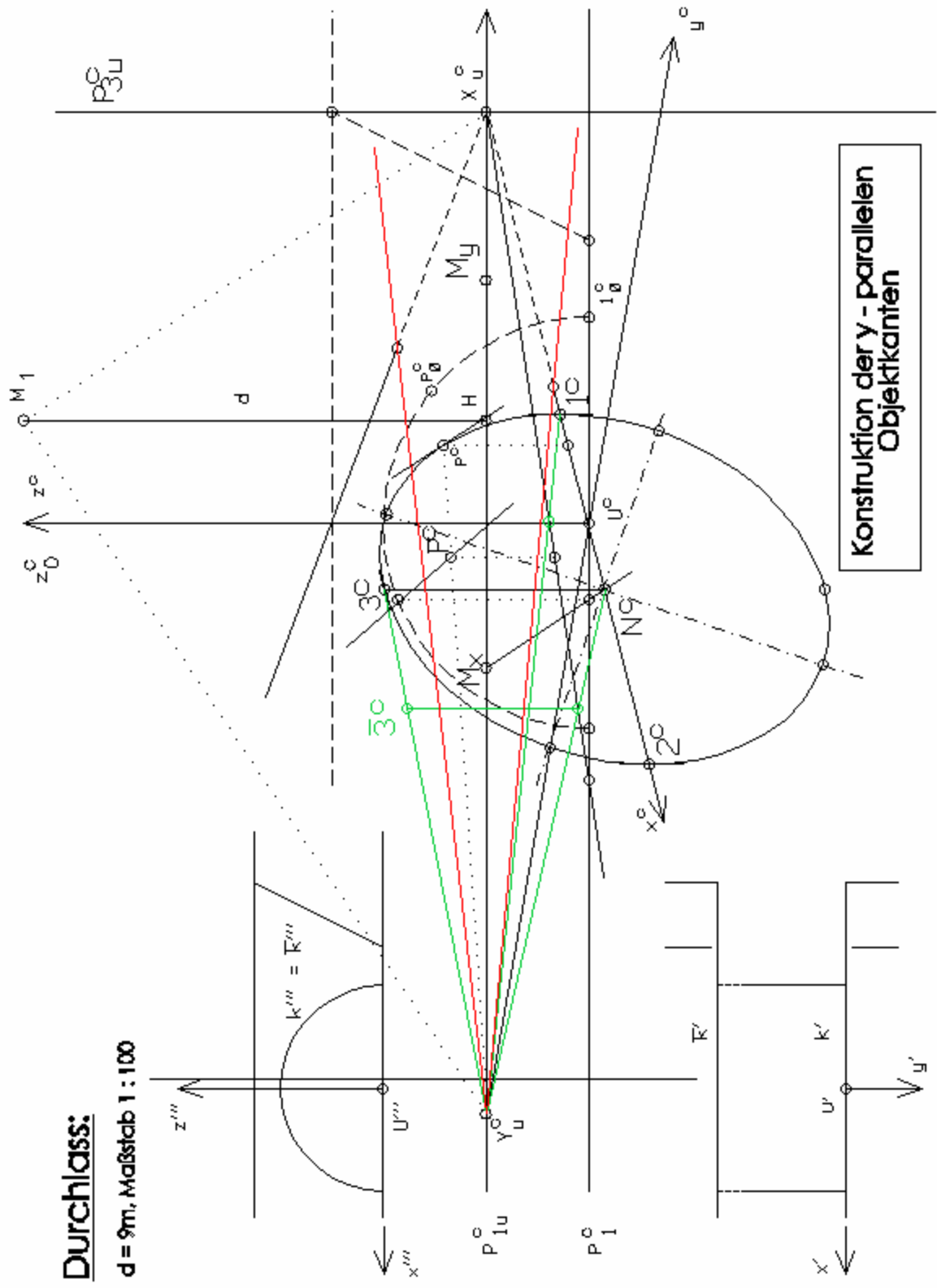
Durchlass:

$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



Durchlass:

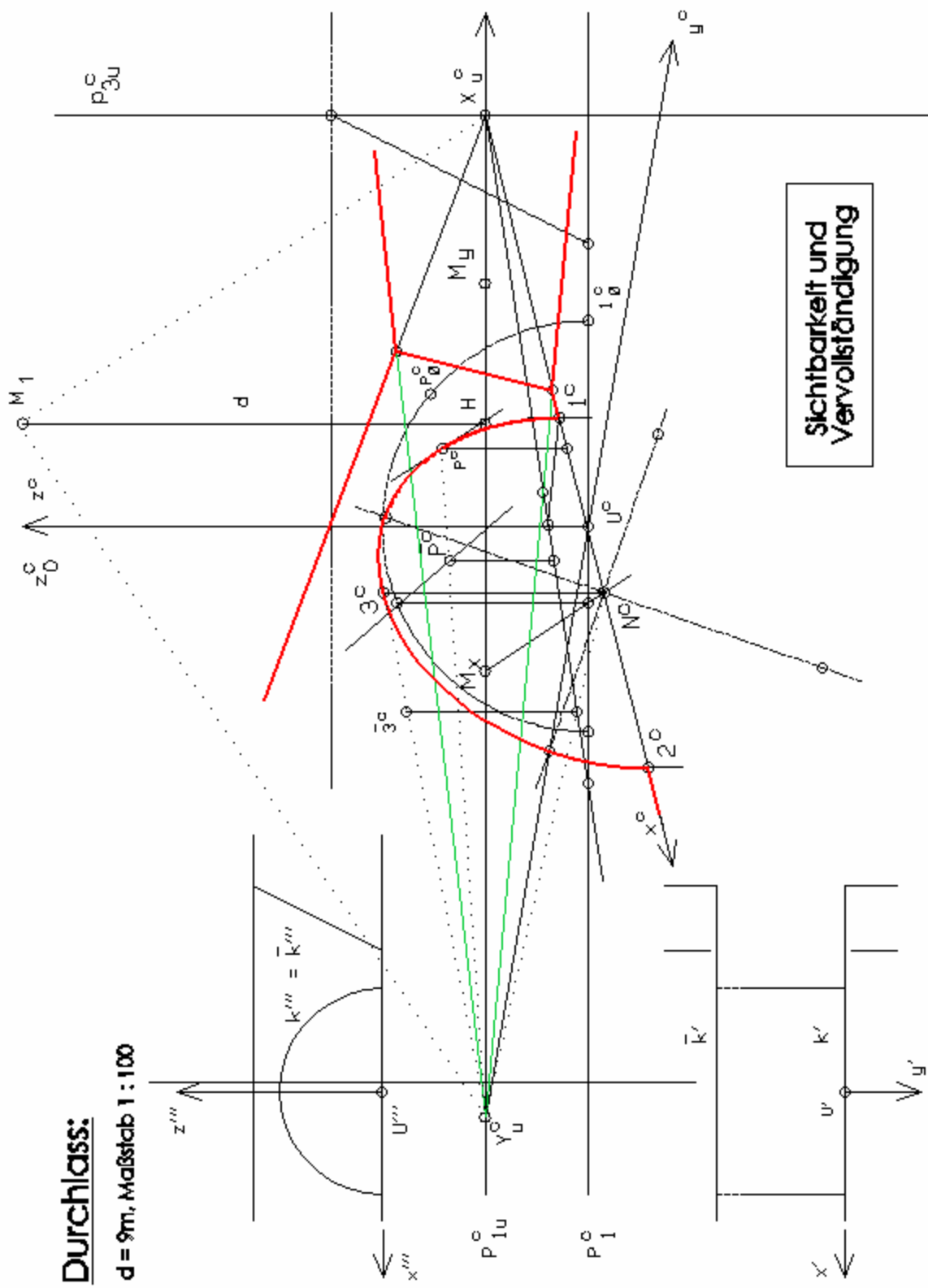
$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



Konstruktion der y - parallelen Objektkanten

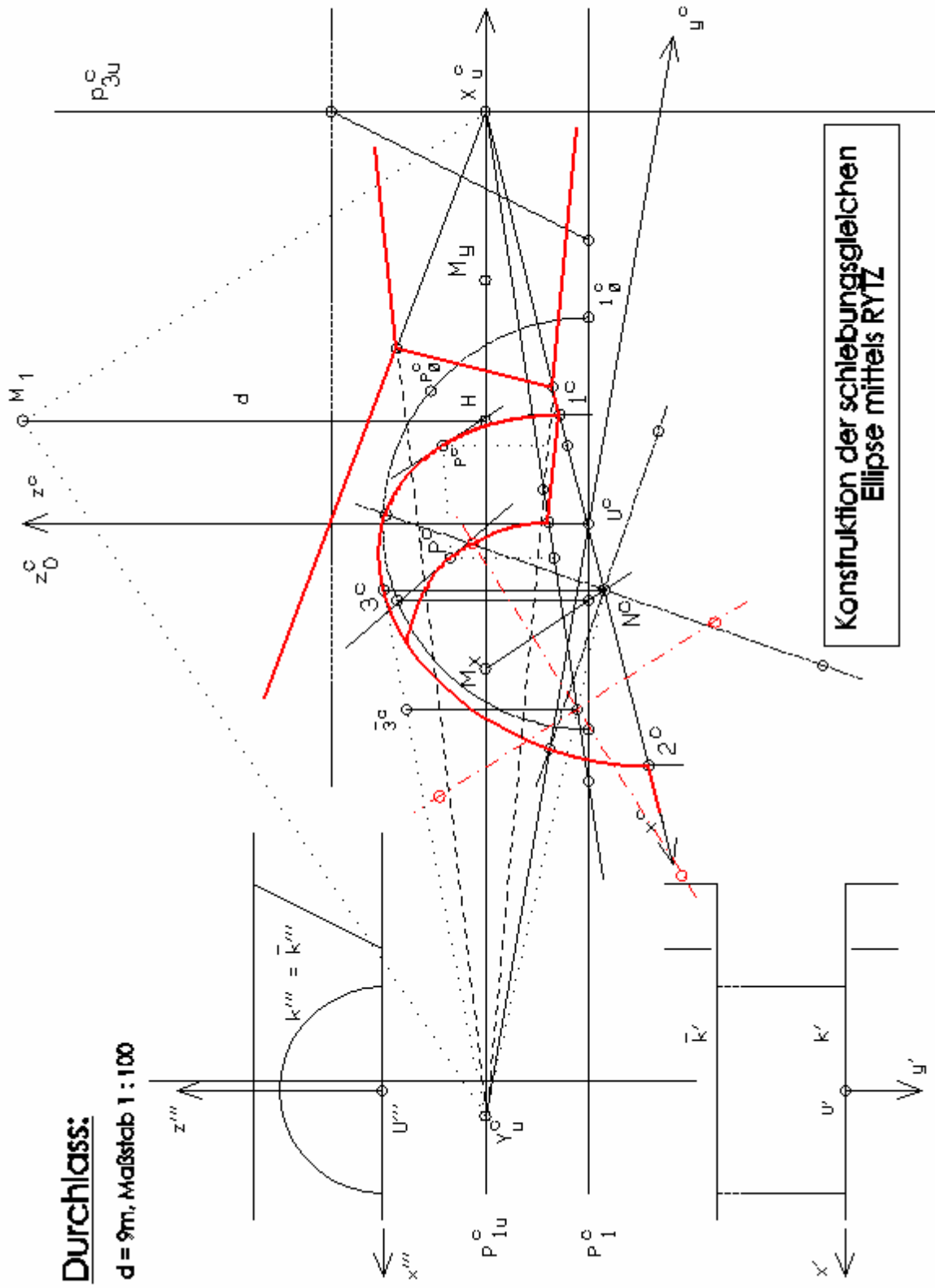
Durchlass:

$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



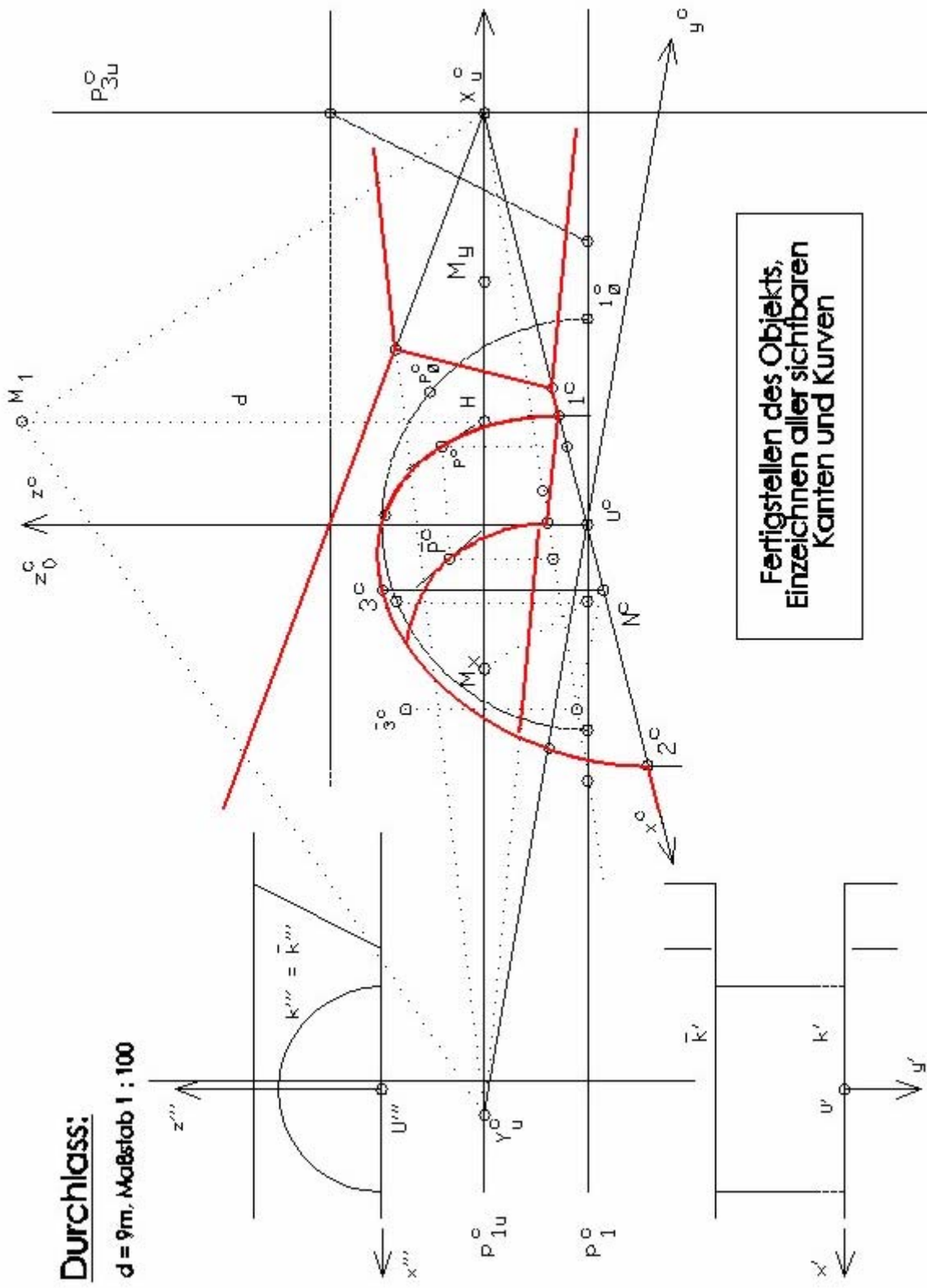
Durchlass:

d = 9m, Maßstab 1 : 100



Durchlass:

$d = 9\text{m}$, Maßstab 1 : 100



2. Beispiel: Triumphbogen

Konstruktionsbeschreibung:

Bild 1:

Für die Konstruktion des Triumphbogens wird der zweite Fluchtpunkt Y_u^c ermittelt. Dies geschieht durch einen rechten Winkelhaken, denn $X_u^c M_1$ ist orthogonal zu $Y_u^c M_1$. Die beiden Geraden $X_u^c M_1$ und $Y_u^c M_1$ liefern uns die Achsen für unseren Grundriss. Wir stellen fest: h^c liegt unter h_u^c , also liegt eine Übersicht vor.

Bild 2:

Man zeichne den Grundriss mit den angegebenen Maßen ein.

Bild 3:

Wir konstruieren die Messpunkte M_x und M_y indem wir M_1 auf h_u^c von X_u^c und Y_u^c aus abschlagen.

Bild 4:

Wir wollen uns zuerst den geradlinigen Objektkanten zuwenden. Die Objektkante a schneidet h^c genau in ihrem rechten Eckpunkt B , das heißt, dass dieser Schnittpunkt ein Fixpunkt ist, also $B = B^c$. Die Kante a ist x - parallel, das bedeutet, sie fluchtet nach X_u^c . Somit können wir eine Gerade durch den Fixpunkt B und X_u^c legen, welche unsere Quaderkante a^c enthält. Den linken Eckpunkt A^c erhält man indem man M_1 mit dem Grundriss von A verbindet und mit unserer gefundenen Geraden schneidet.

Bild 5:

Wir konstruieren in diesem Schritt die Kante AD, die auf einer y - parallelen Gerade liegt, also nach Y_u^c fluchtet. Der Punkt A^c liegt auch auf der Kante d , so können wir einfach A^c mit Y_u^c verbinden und bekommen die gesuchte Gerade, die d^c enthält, im Zentralriss. Zur Kontrolle kann man wie bei [Bild 4](#) mit einem Fixpunkt arbeiten. Verlängert man im Grundriss die Kante d , so hat diese einen Fixpunkt auf h^c , der auch auf der gefundenen Geraden durch A^c und Y_u^c liegen muss. Den Eckpunkt D^c erhalten wir wieder indem wir D mit M^1 verbinden und mit der Geraden $A^cY_u^c$ schneiden.

Bild 6:

Auf den Kanten AB und AD gibt es jeweils zwei Zwischenpunkte, die noch eingezeichnet werden müssen. Diese Zwischenpunkte sind jene Punkte, welche die Durchgänge durch den Triumphbogen ausschneiden. Auf der Kante AB sind es die Punkte 1 und 2, wobei der Durchgang genau die Verbindung 12 herausschneidet. Diese Punkte 1^c und 2^c erhält man indem man sie mit M_1 verbindet und mit A^cB^c schneidet, da sie auf dem Zentralriss von der Kante AB liegen.

Bild 7:

Analog dem [sechsten Bild](#) verfahren wir nun auf der Kante AD mit den Zwischenpunkten 3 und 4. Der einzige Unterschied ist, dass die Kante eine y - Parallele ist.

Bild 8:

Jetzt ist es an der Zeit dem Grundquader des Triumphbogens Volumen zu geben. Messen darf man genau in jenen Punkten die auf der Spur h^c liegen. Der Grund dafür ist, dass wir genau die Kanten in wahrer Größe sehen, die das Objekt aus der Bildebene ausschneidet. Im Grundriss sind das eben jene Punkte, die auf h^c liegen. Unsere senkrechten Kanten stehen normal auf h^c und h_u^c , da Z_u^c ein Fernpunkt ist. Da B ein Fixpunkt ist, der auf h^c liegt, können wir hier die Kante über B einmessen mit seiner wahren Länge. Also wir tragen jetzt 10cm (für das Papierformat A4, nur 5 cm) über B auf.

Die Kante, die im Grundriss mit AB deckungsgleich ist, kann jetzt eingezeichnet werden, indem man das Ende der eingemessenen Höhe mit X_u^c verbindet, da sie ebenfalls eine x - parallele Kante ist. Den Punkt $\overline{A^c}$ über A^c findet man leicht, indem man eine z - Parallele durch A^c mit der neu gefundenen Kante schneidet.

Bild 9:

Jetzt wollen wir die Kante, die zu AD deckungsgleich ist, in der Höhe 10 cm einmessen (A4: 5 cm). Der Punkt $\overline{A^c}$ ist ein Punkt dieser Kante. Verbinden wir ihn mit Y_u^c so ist auch die y - parallele Kante gleich gefunden, denn wir brauchen nur von D^c aus eine z - parallele Gerade einzeichnen und mit $Y_u^c \overline{A^c}$ schneiden. Hier gibt es wieder einen Kontrolle, wie schon im [Bild 5](#). Der Fixpunkt der verlängerten Kante AD auf h^c ist wieder ein Punkt wo wir messen dürfen. Schneidet man nun die z - Parallele durch den Fixpunkt mit der verlängerten Kante $\overline{A^c D^c}$, so muss der Abstand wieder 10 cm (A4: 5cm) ergeben.

Bild 10:

Nun wollen wir den Quersims konstruieren. Dabei wenden wir dieselbe Konstruktion an wie bei den Kanten AB und AD . Zuerst müssen die Punkte A_1^c , B_1^c und D_1^c des Zentralgrundrisses des Quersims, also in der gleichen Ebene konstruiert werden wie A^c , B^c und D^c , wobei diese Punkte des Quersims dort ja gar nicht existieren. Der Zentralgrundrisspunkt B_1 liegt wieder auf h^c und bleibt deswegen fix. Die Gerade auf der die Kante $A_1 B_1$ liegt, bekommen wir also indem wir B_1 mit X_u^c verbinden, da sie x - parallel ist. A_1^c liegt auf dem Schnitt von $M_1 A_1$ mit $X_u^c B_1^c$. Die y - parallele Kante des Quersims erhalten wir indem wir A_1^c mit Y_u^c verbinden. D_1^c liegt auf dieser Geraden und auf $D_1 M_1$.

Bild 11:

Die unteren Kanten des Quersims liegen ebenfalls auf Höhe 10 cm (A4: 5cm). Also können wir nun die Höhe wieder einmessen. Fixpunkt auf h^c von $A_1^c B_1^c$ ist $B_1 = B_1^c$ und von B_1 aus werden die 10 cm (A4: 5cm) abgetragen und mit X_u^c verbunden um diese Gerade, welche die Kante $\overline{A_1^c B_1^c}$ beinhaltet, zu bekommen. $\overline{A_1^c}$ mit Y_u^c liefert die y - parallele Gerade, welche die Kante $\overline{A_1^c D_1^c}$ beinhaltet. D_1^c liegt analog auf einer z -

Parallelen. Hier sieht man kleine Stücke der beiden hinteren Kanten, die man aber sofort einzeichnen kann indem man $\overline{B_1^c}$ nach Y_u^c und $\overline{D_1^c}$ nach X_u^c fluchten lässt.

Bild 12:

Die Höhe des Quersims beträgt 1 cm (A4: 0.5cm). Sie kann direkt anschließend an die Höhe 10 cm (A4: 5cm) eingemessen werden, die über B_1^c aufgetragen wurde um die untere Kante des Quersims zu konstruieren. Dieser eingemessenen Punkt wird mit X_u^c verbunden, da es sich wieder um eine x - parallele Gerade handelt. Den Punkt über A_1^c bekommt man wieder durch eine z - Parallele. Der gefundene Punkt ist auch ein Punkt der y - Parallelen über $\overline{A_1^c D_1^c}$, somit kann er mit Y_u^c verbunden werden. Den Punkt über $\overline{D_1^c}$ erhält man analog durch eine z - Parallele. Die hinteren Kanten sind nicht sichtbar und brauchen deswegen auch nicht gezeichnet werden.

Bild 13:

Der oberste auggesetzte Teil über dem Quersims schließt auch mit Höhe 1 (A4: 0.5cm) an den Basisquader an. Da man die Linien in der Höhe 1 (insgesamt 10 + 1 = 11, aber für A4: 5 + 0.5 = 5.5) nicht sieht, weil schon der Punkt über B^c in der Höhe 11 unter der oberen Quersimskante liegt, ist es nicht nötig die unteren Kanten einzuzichnen. Also messen wir gleich die Höhe des obersten Quaders ein, welche 2 cm (A4: 1 cm) beträgt. Die x - parallele Kante wird nun eingezeichnet indem wir unseren eingemessenen Punkt mit X_u^c verbinden und mit einer z - Parallelen über A^c schneiden. Somit erhalten wir den obersten Punkt über A^c . Dieser Punkt liegt auch auf der y - Parallelen, also verbinden wir ihn mit Y_u^c und schneiden die Geraden mit einer z - Parallelen über D^c .

Bild 14:

In diesem Schritt wollen wir beginnen den y - parallelen Durchgang zu konstruieren (den größeren Durchgang). Die Basispunkte 1 und 2 haben wir in [Bild 6](#) schon eingezeichnet.

Die Höhe dürfen wir über dem Fixpunkt der verlängerten Kante $1^c 2^c$ einzeichnen, also über B^c . Die Höhe beträgt 7 cm. Schneiden wir nun die Verbindungsgerade X_u^c mit dem eingemessenen Punkt und die z - parallelen Geraden von 1^c und 2^c , so bekommen

wir unsere gesuchten Punkte, die auch schon Punkte P^c , Q^c unseres Kreisbogens in Perspektive sind.

Bild 15:

Nach kurzer Überlegung ist klar, dass unser Kreisbogen in Perspektive eine Ellipse sein muss. Die Ellipse selbst hat x - parallele Lage (der Durchgang ist dagegen y - parallel). Um die Ellipse zeichnen zu können, brauchen wir den Aufriss. Wir drehen die Ebene vom Grundriss, in der die Ellipse liegt, um den Fixpunkt B in π_3 und können dort unseren Durchgang im Aufriss in wahrer Größe einzeichnen.

Bild 16:

Mit den Punkten P^c und Q^c haben wir schon einen konjugierten Durchmesser unserer Ellipse. Da die Kreisdarstellung in Perspektive nicht mittelpunktstreu ist, suchen wir uns den Mittelpunkt N^c von P^cQ^c und zeichnen ihn im Aufriss ein.

Bild 17:

Orthogonal auf den ersten konjugierten Durchmesser PQ durch N finden wir den zweiten konjugierten Durchmesser NR . R'' liegt auf einer z - Parallelen über N'' . Analog gilt dies für die Zentralrisse R^c und N^c . R^c findet man, indem man M_xR'' mit der z - Parallelen schneidet. Die Tangente in R^c ist parallel zu P^cQ^c .

Bild 18:

Nun kann man die Ellipsenhälfte durch die RYTZsche Achsenkonstruktion vervollständigen. Da wir noch einige Konstruktionsschritte zu machen haben, ist es übersichtlicher die Ellipse erst später auszuführen.

Bild 19:

Die Punkte 1^c und 2^c des Durchgangs liegen auf y - parallelen Geraden, also werden 1^c und 2^c mit Y_u verbunden. Dort wo der kleine Durchgang den Grossen trifft, werden die y - parallelen Kanten geteilt.

Diese Teilungspunkte erhalten wir indem wir die y - parallelen Kanten mit den x - parallelen Kanten durch 3^c und 4^c schneiden. Es wird nur der sichtbare Punkt Q_1^c eingezeichnet. Den Punkt Q_1^c erhalten wir indem wir den Punkt Q^c nach Y_u^c fluchten lassen. Für die Konstruktion der zweiten Ellipse, die in einer parallelen Ebene zur ersten Ellipse liegt, brauchen wir auch den unsichtbaren Punkt P_1^c , denn er ist ein Punkt des konjugierten Durchmessers $P_1^c Q_1^c$. Er wird genauso konstruiert wie die Punkte für den vorderen Ellipsenbogen ([Bild 14](#)).

Bild 20:

Nun wollen wir den zweiten konjugierten Durchmesser konstruieren. Da es sich um schiebungsgleiche Ellipsen handelt, können wir den Punkt R^c nach Y_u^c fluchten lassen. Auf dieser Geraden liegt der Punkt R_1^c genau über N_1^c , dem Mittelpunkt des konjugierten Durchmessers $P_1^c Q_1^c$. Man wendet wieder die RYTZsche Achsenkonstruktion an. Diese wird hier nicht mehr explizit ausgeführt.

Bild 21:

Der kleine Durchgang wird analog dem Grossen konstruiert. Die Punkte 3^c und 4^c sind die Basispunkte. Im Fixpunkt auf h^c der Geraden durch 3^c und 4^c können wir die Höhe 4.5 cm einmessen und den erhaltenen Punkt mit Y_u^c verbinden und mit der z - Parallelen durch 3^c und 4^c schneiden. Die erhaltenen Schnittpunkte bezeichnen wir mit 5^c und 6^c . Sie liefern uns einen konjugierten Durchmesser der Ellipse des kleinen Durchgangs.

Bild 22:

Analog dem [Bild 15](#) ermitteln wir uns den Aufriss indem wir die Ebene in der die gesuchte Ellipse liegt um den Fixpunkt der Geraden $3^c 4^c$ in π_3 drehen. Dort können wir unseren Durchgang im Aufriss in wahrer Größe einzeichnen.

Bild 23:

Wir suchen uns den Mittelpunkt N_2^c des konjugierten Durchmessers 5^c6^c im Aufriss. Orthogonal auf den einen konjugierten Durchmesser $5''6''$ durch N_2'' findet man den zweiten konjugierten Durchmesser $N_2''7''$, den wir mittels dem Messpunkt M_y , da die Ellipse in einer y - parallelen Ebene liegt, ermitteln.

Bild 24:

Analog zu den anderen beiden Ellipsen konstruieren wir wieder die Achsen und Scheitel der Ellipse durch die RYTZsche Achsenkonstruktion. Die untere Kante des Durchgangs ist als Nächstes zu konstruieren. Sie geht durch den Punkt 4^c und fluchtet nach X_u^c . Da die Kante jene y - parallele unsichtbare Kante durch 1^c in einem Punkt schneidet, der vom Objekt verdeckt wird, ist der schiebungsgleiche Ellipsenbogen hier nicht zu sehen. Man muss nur noch überprüfen, ob die hintersten Ellipsen des kleinen Durchgangs durch den großen Durchgang zu sehen sind. Schneiden Sie die Gerade durch 4^c und X_u^c mit der Verbindung $8M_1$. Die Geraden schneiden analog vorhin in einem Punkt, der vom restlichen Objekt verdeckt wird.

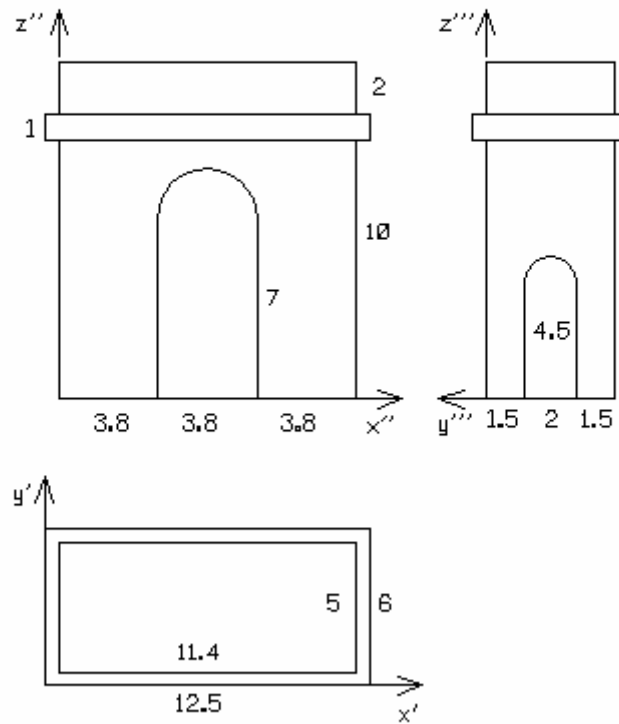
Bild 25:

Wir wollen nun, zur besseren Veranschaulichung des Objekts, die sichtbaren Kanten und Bögen dick nachzeichnen.

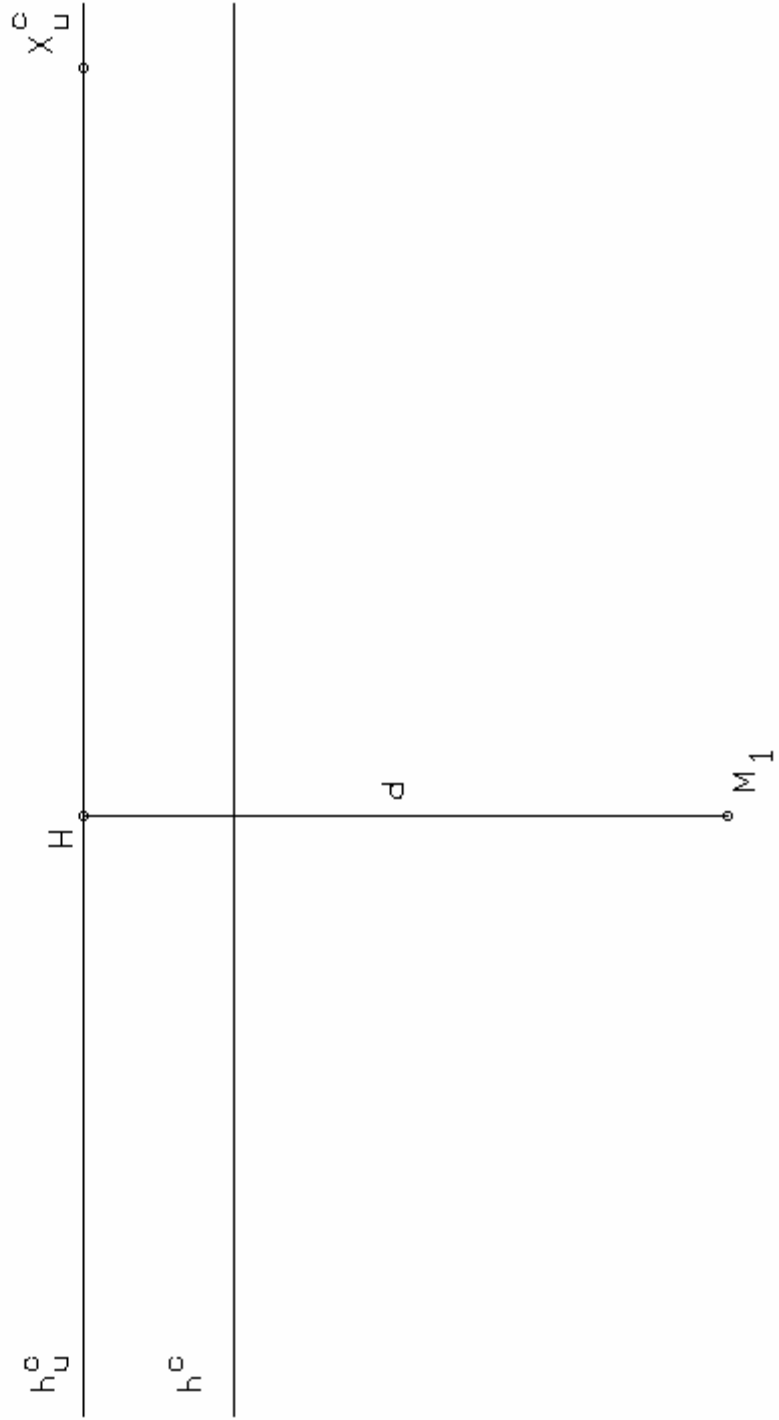
Angabe der Abmessungen des Objekts:

Triumphbogen

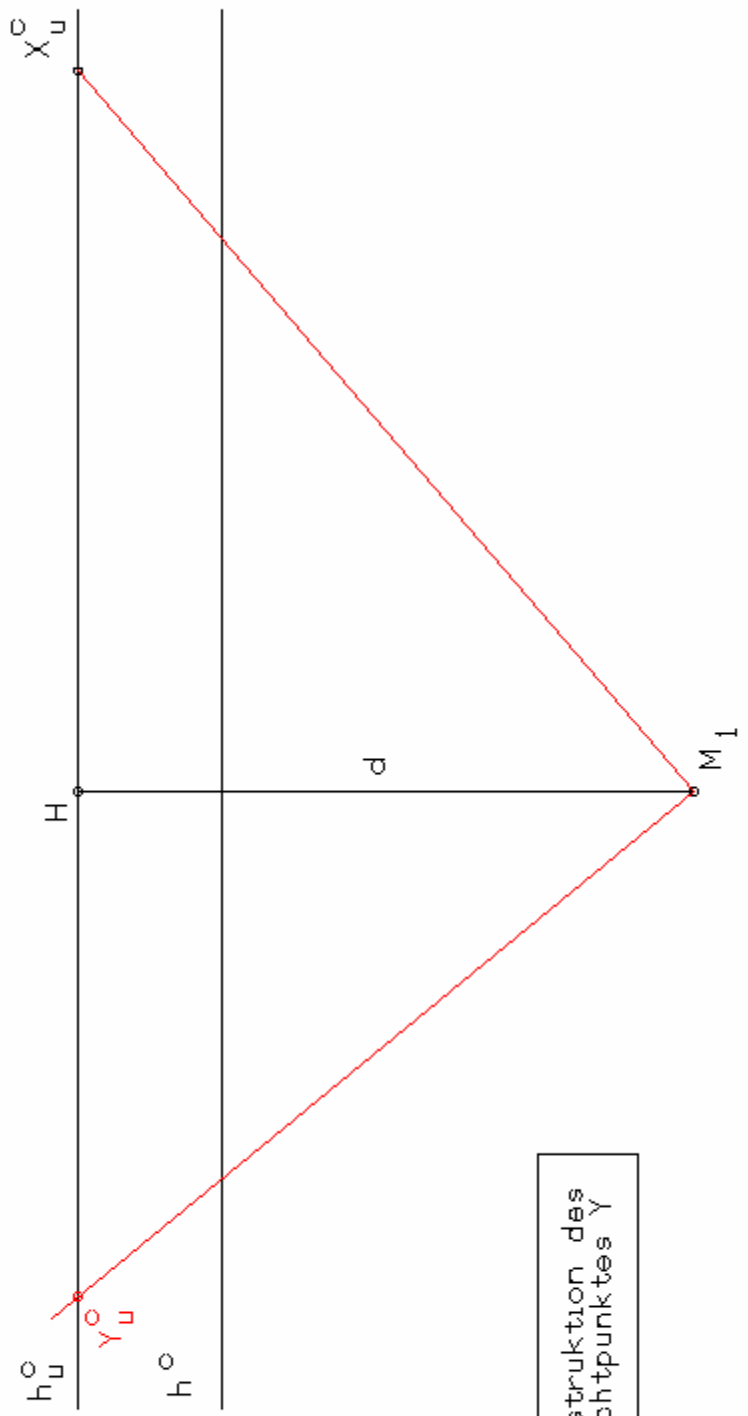
d = 15 cm



Triumphbogen

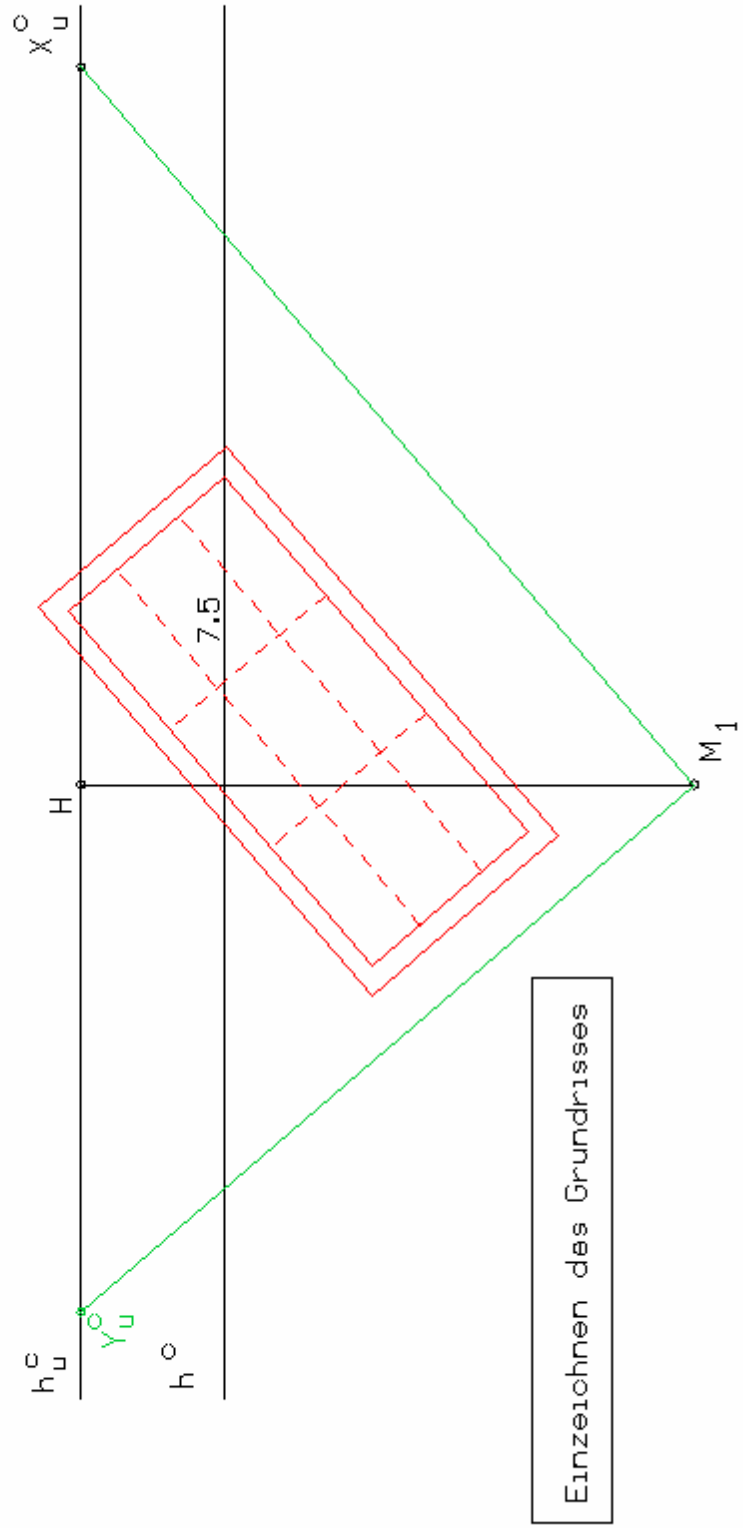


Triumphbogen

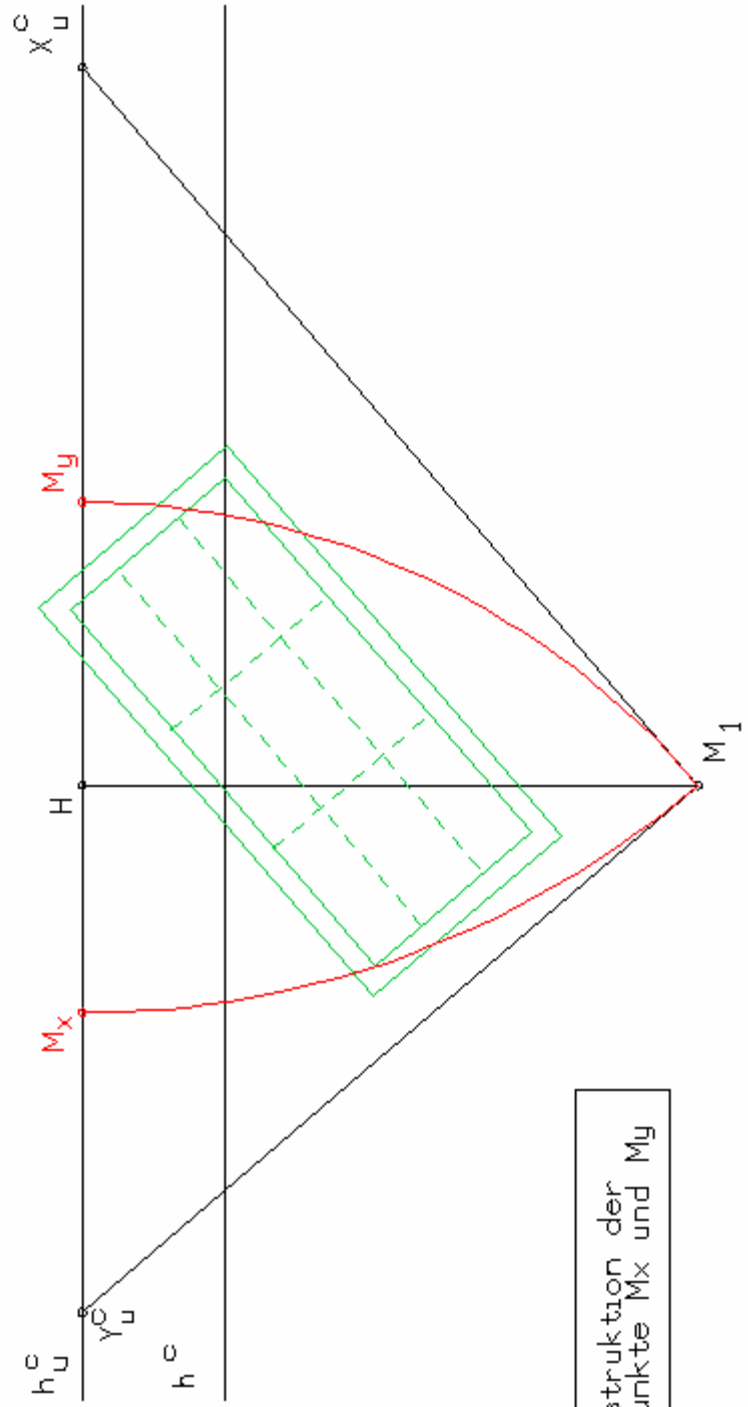


Konstruktion des
Fluchtpunktes Y

Triumphbogen

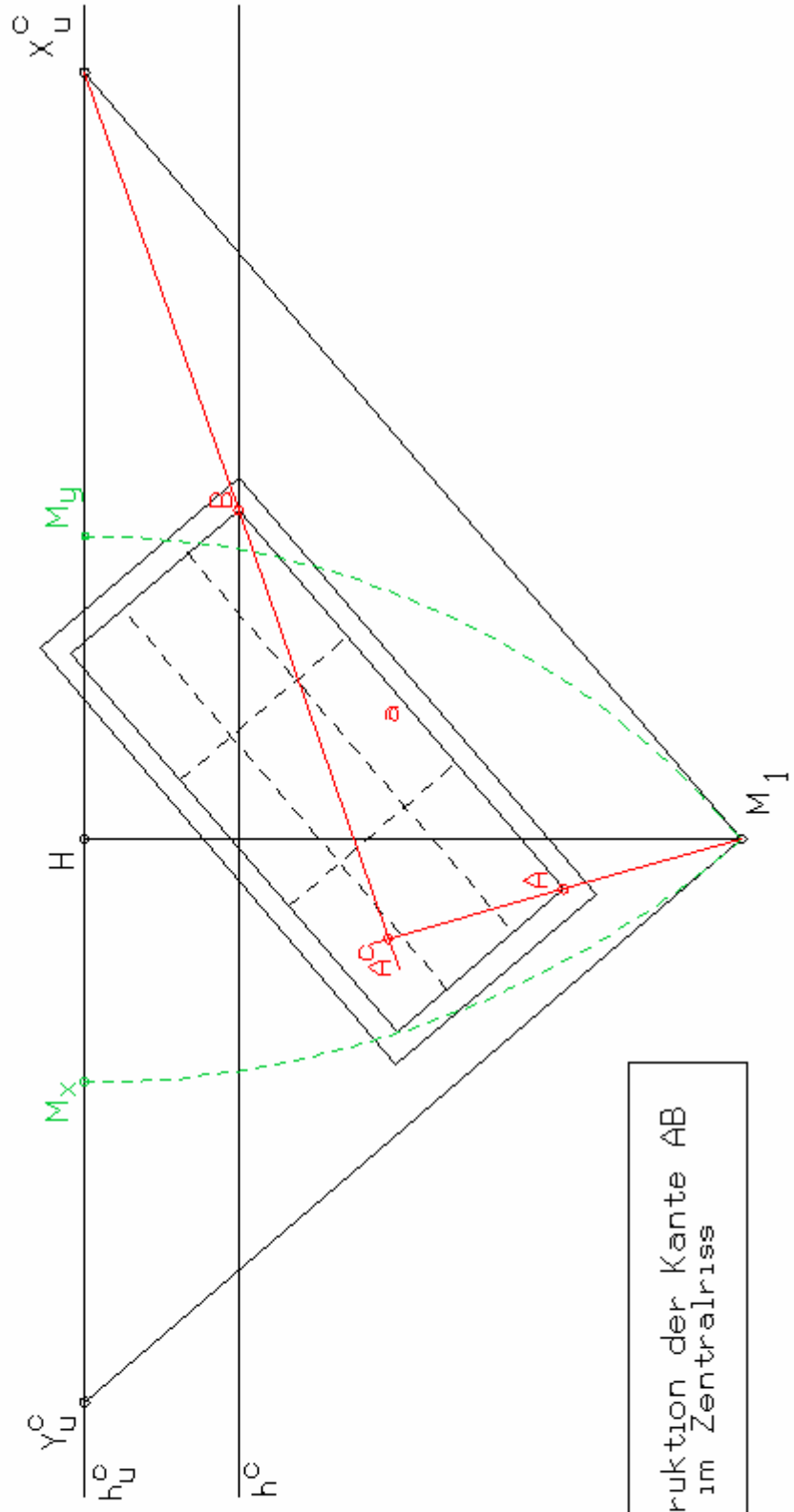


Triumphbogen

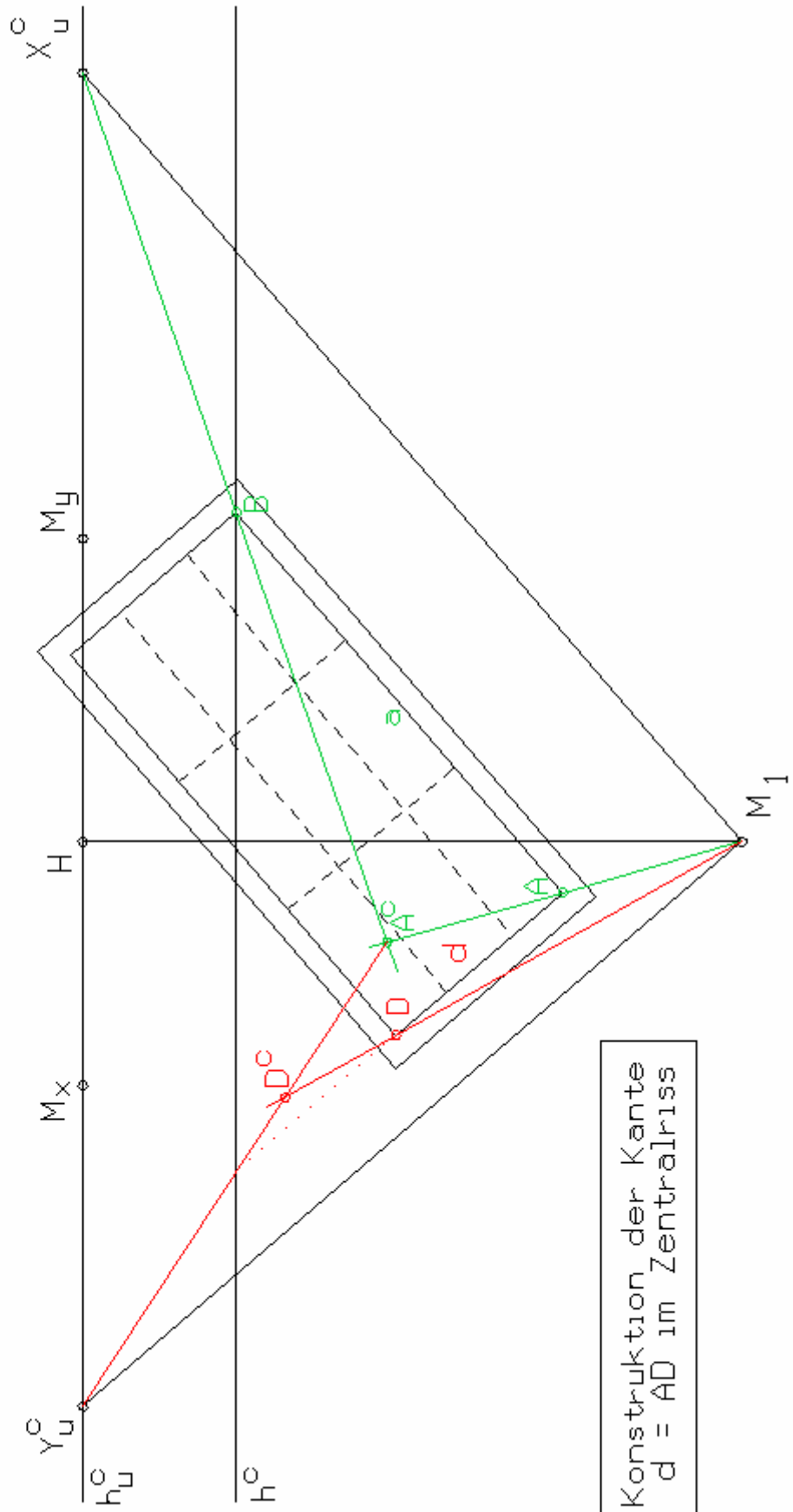


Konstruktion der
Messpunkte M_x und M_y

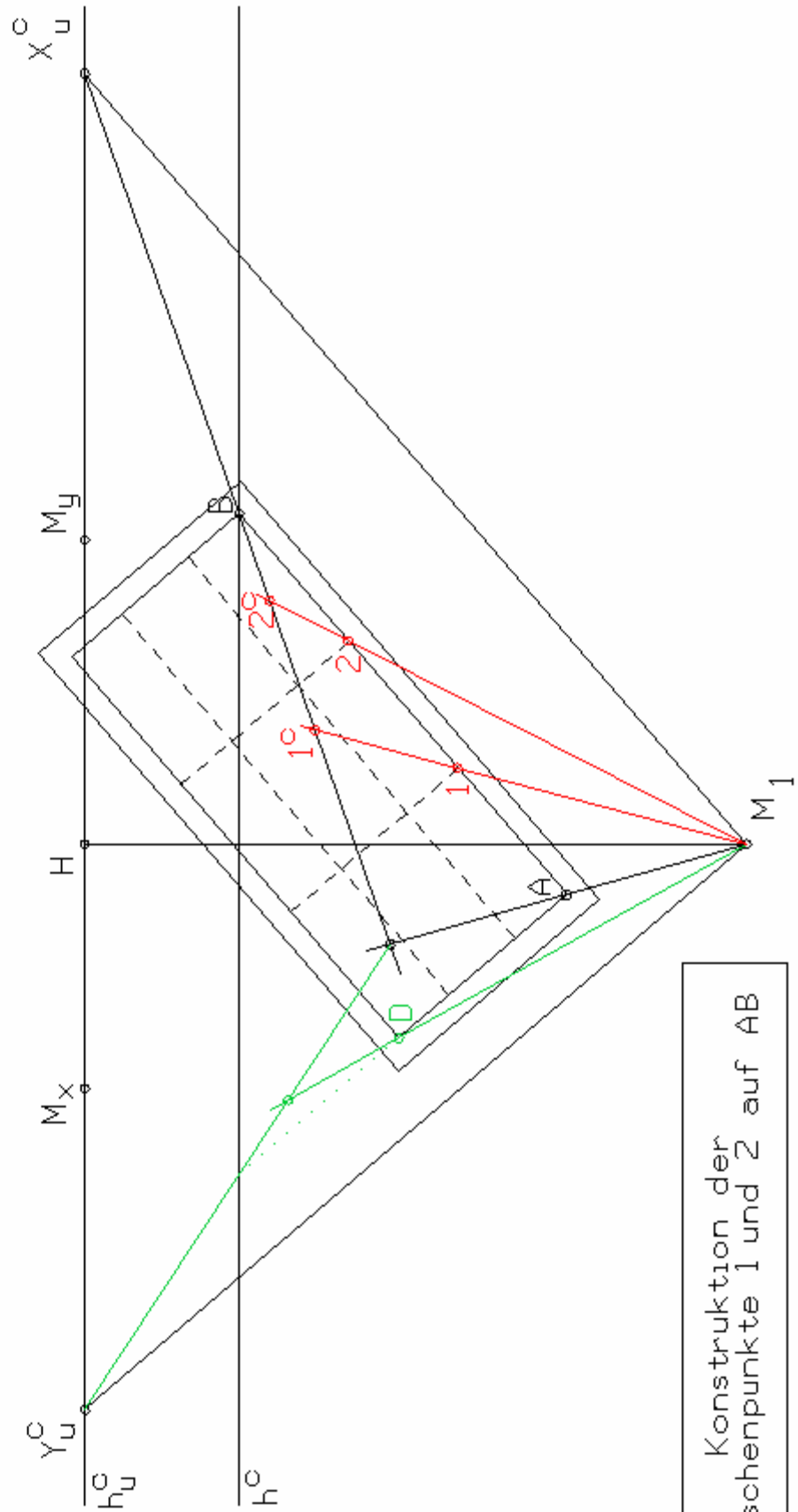
Triumphbogen



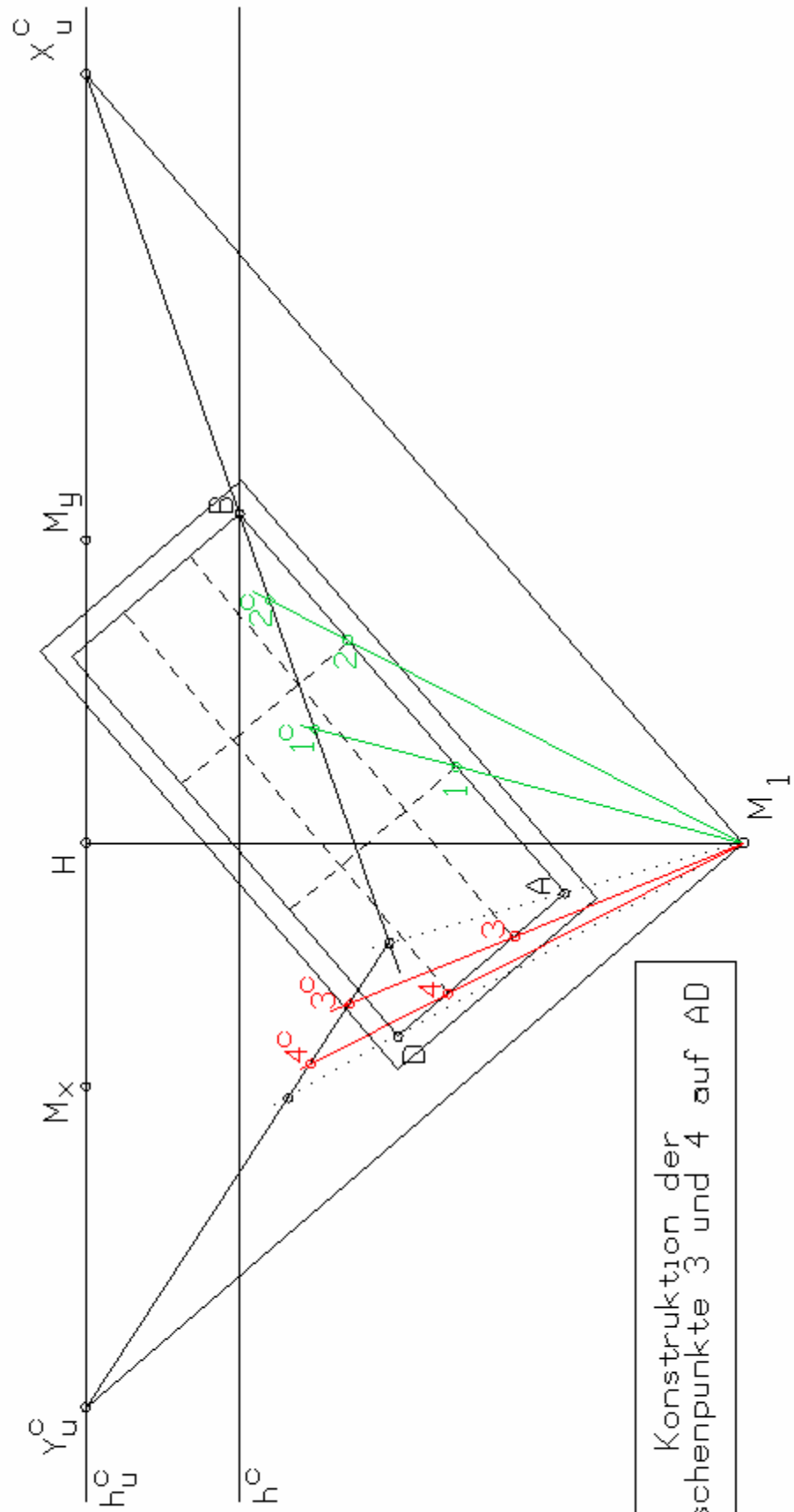
Triumphbogen



Triumphbogen

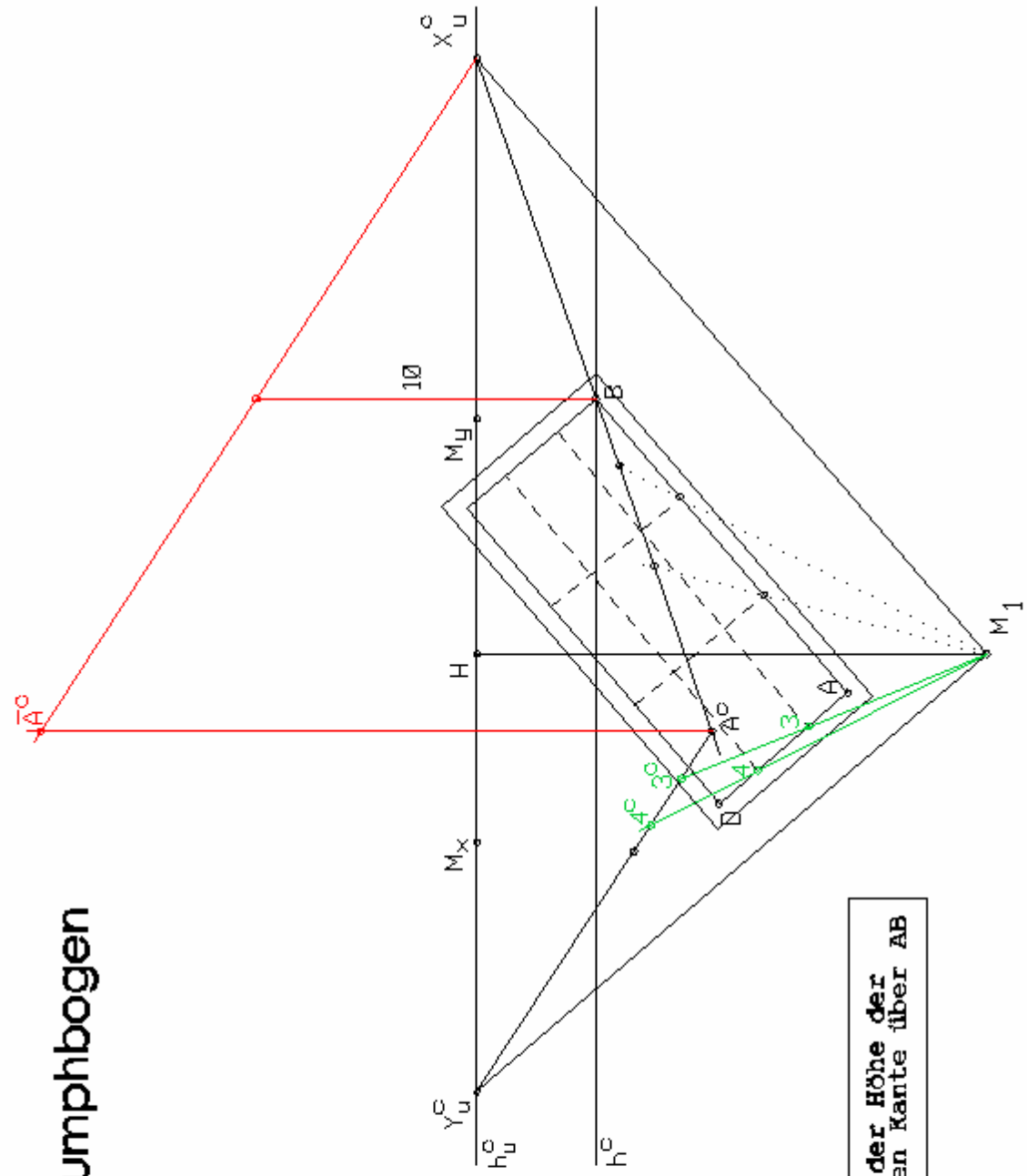


Triumphbogen



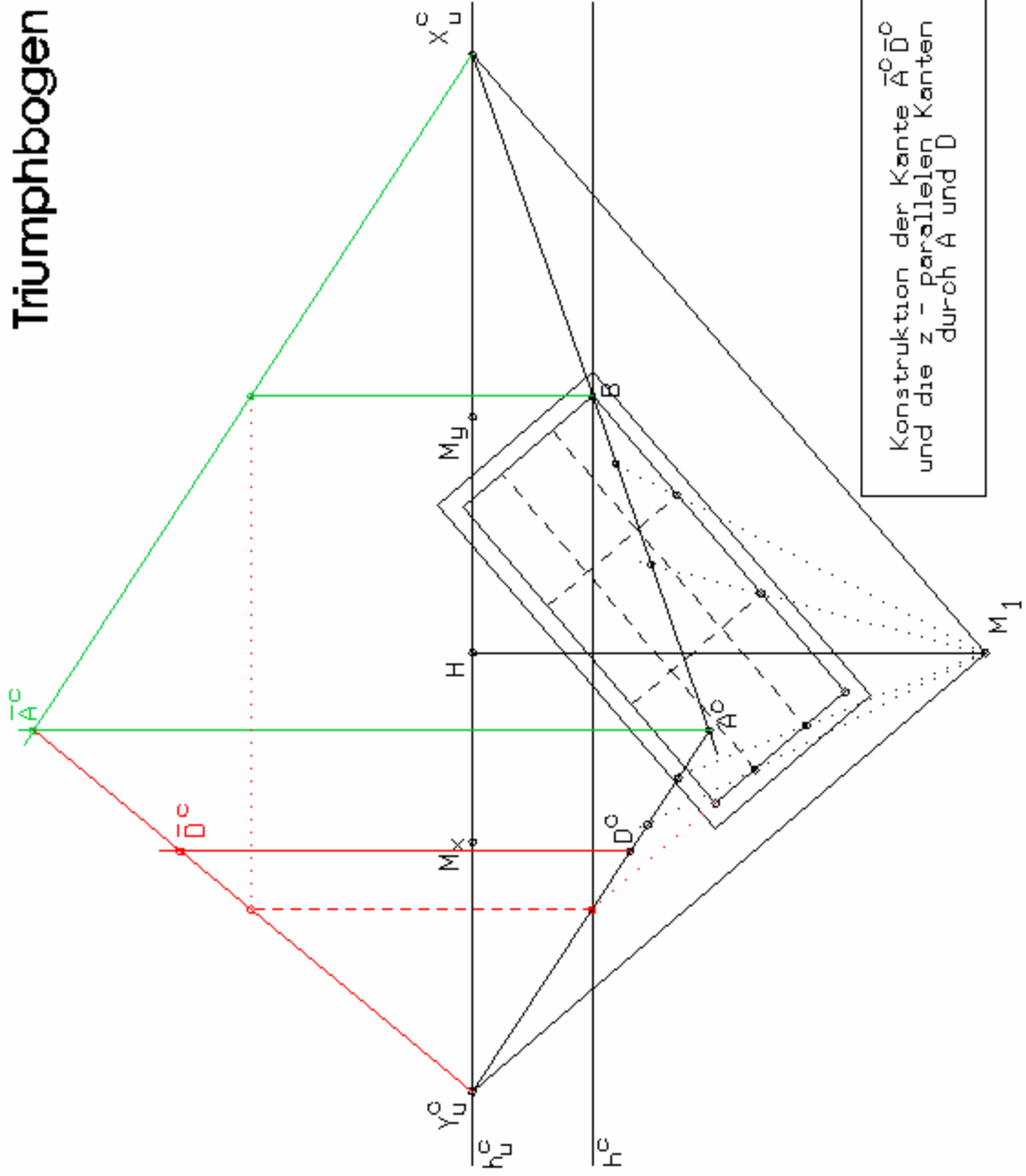
Konstruktion der Zwischenpunkte 3 und 4 auf AD

Triumphbogen



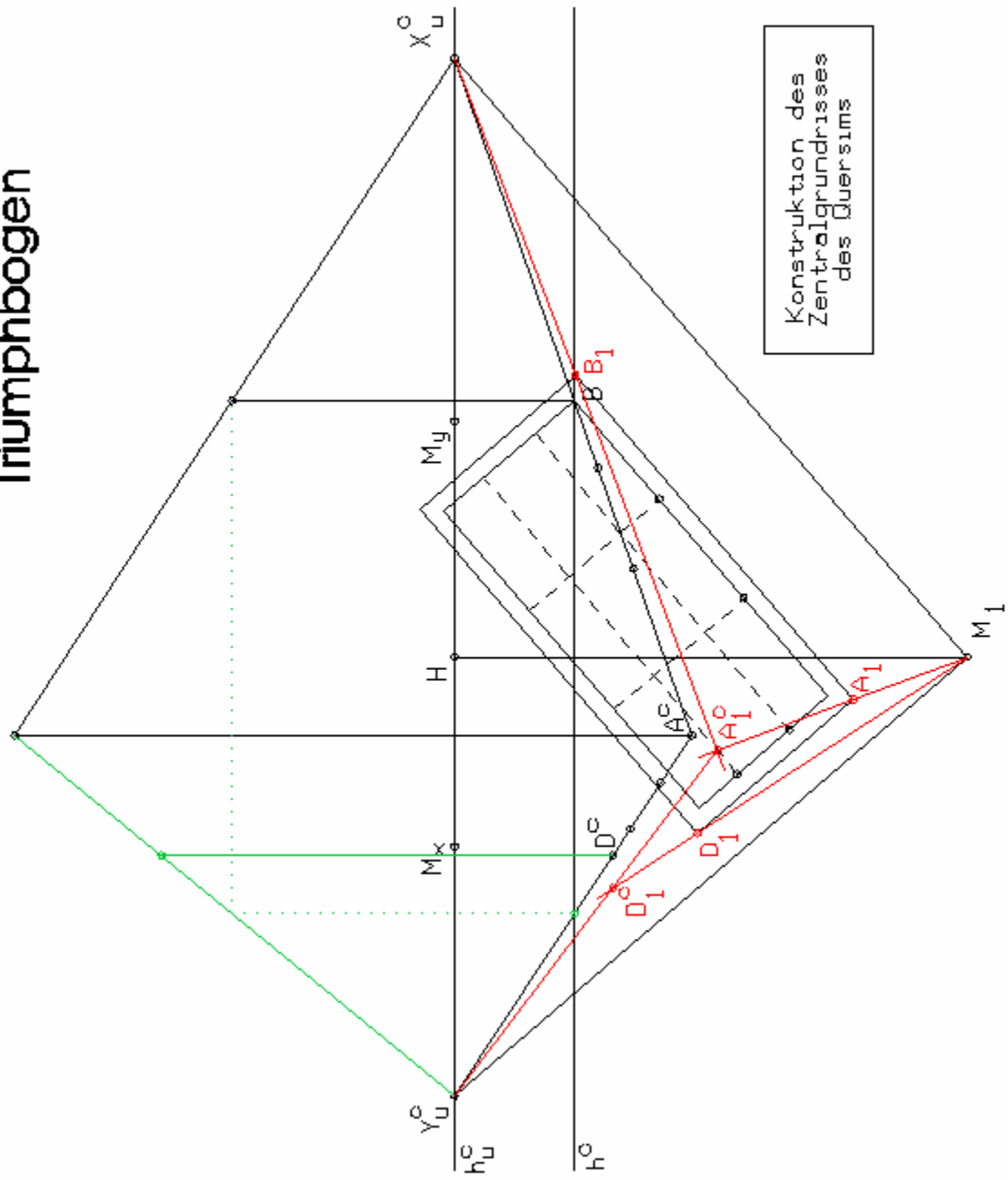
Einmessen der Höhe der x - parallelen Kante über AB

Triumphbogen

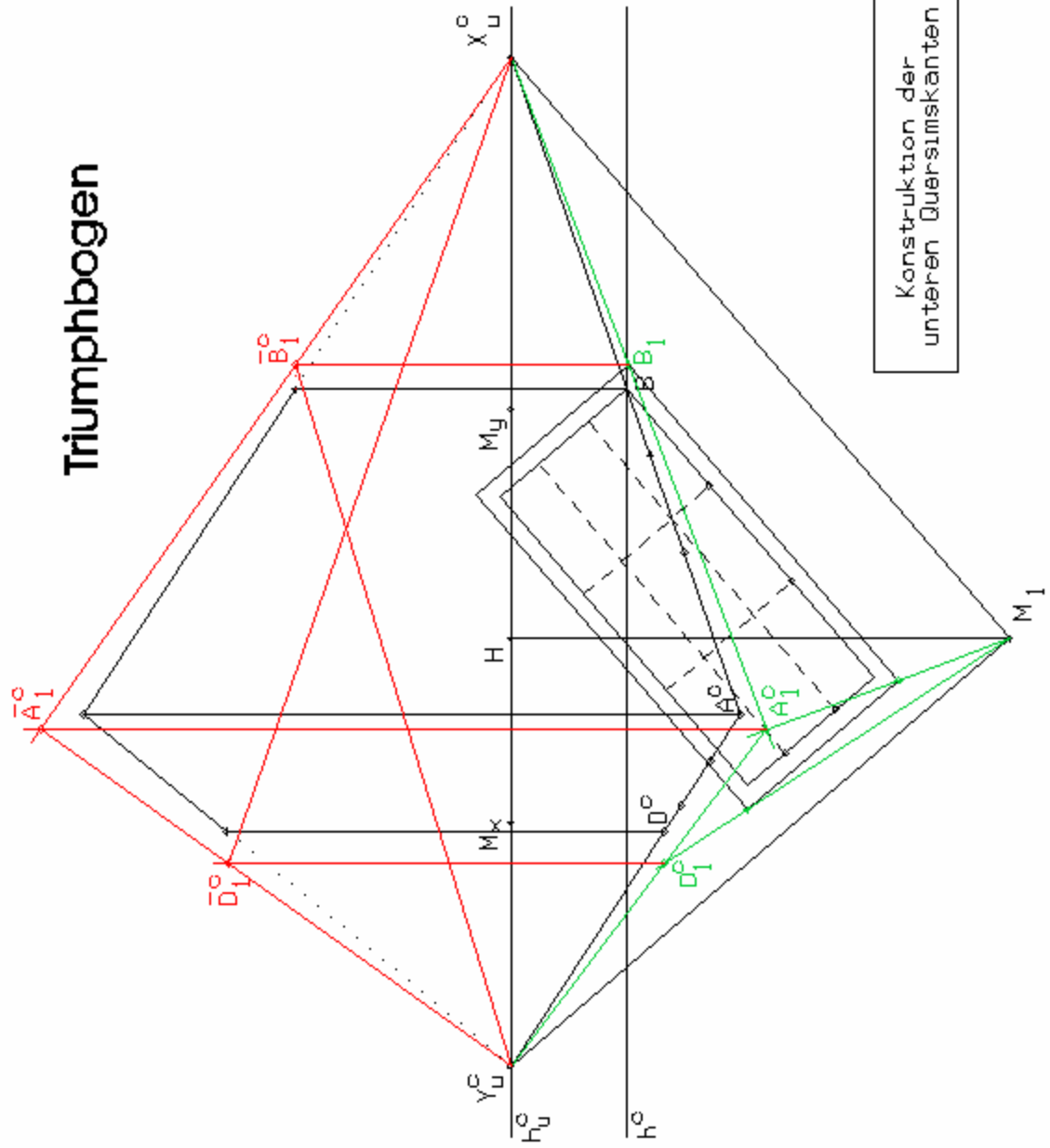


Konstruktion der Kante $\vec{A'D'}$ und die z - parallelen Kanten durch A und D

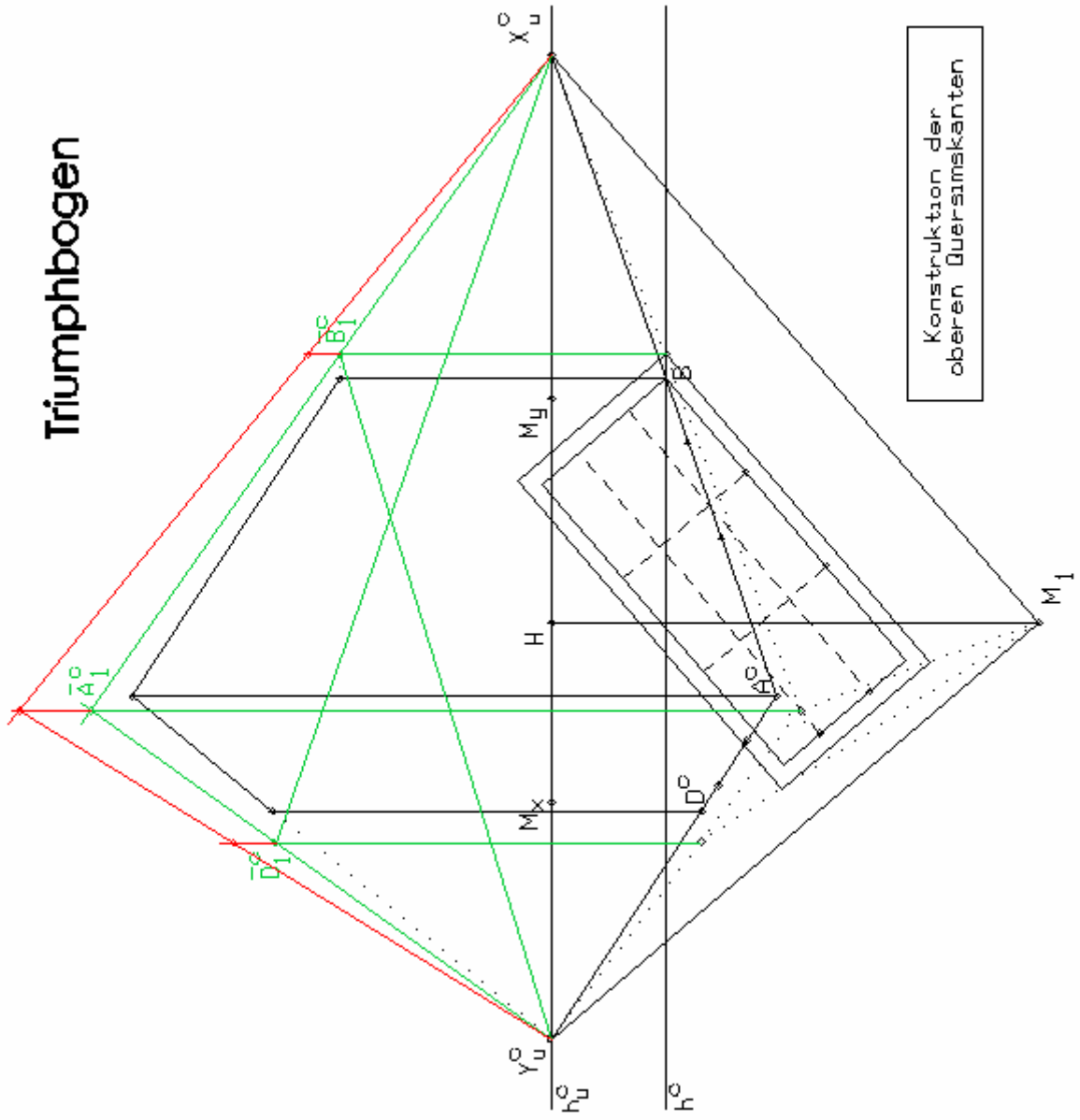
Triumphbogen



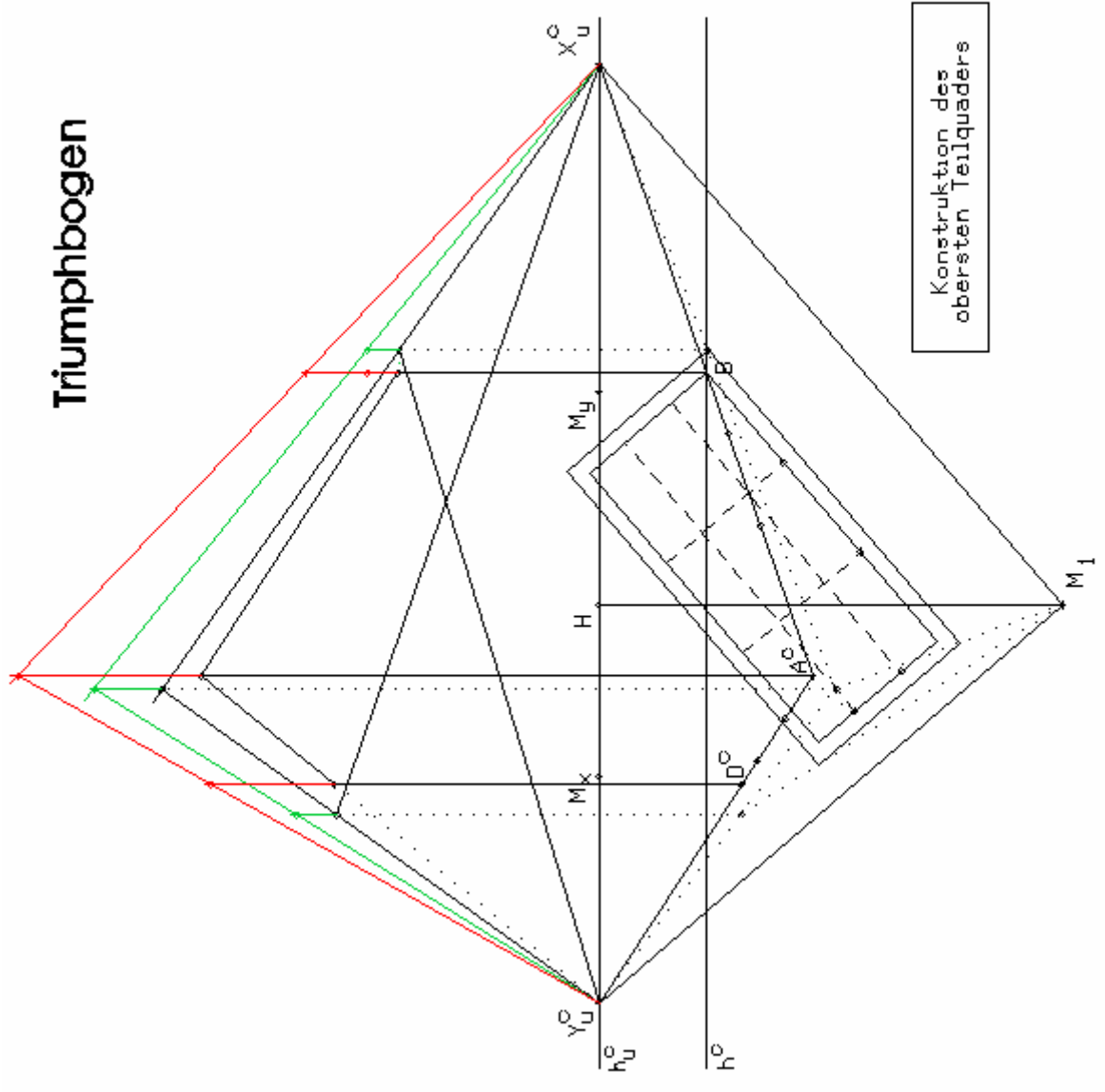
Triumphbogen



Triumphbogen

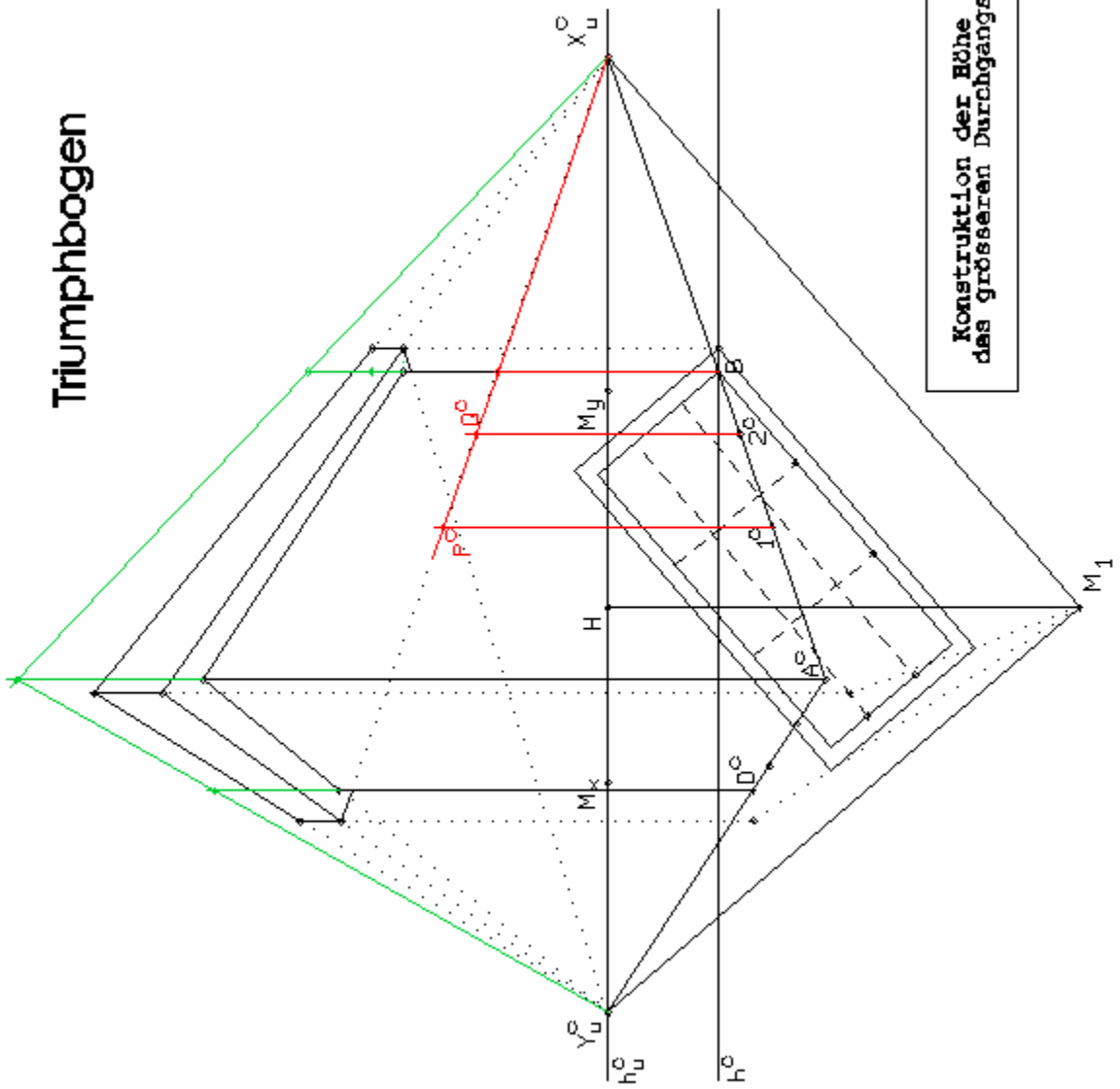


Triumphbogen



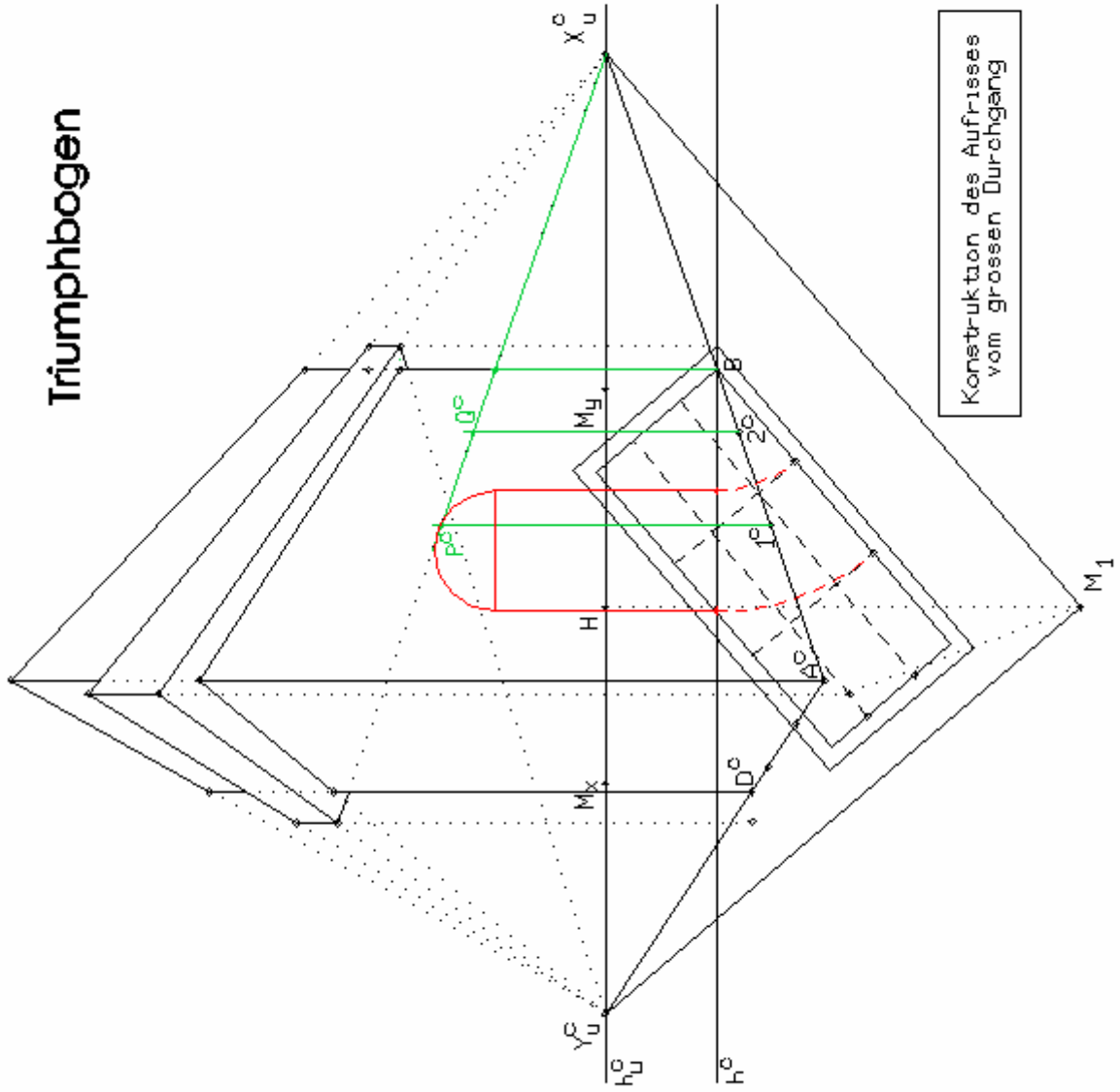
Konstruktion des obersten Teilquaders

Triumphbogen



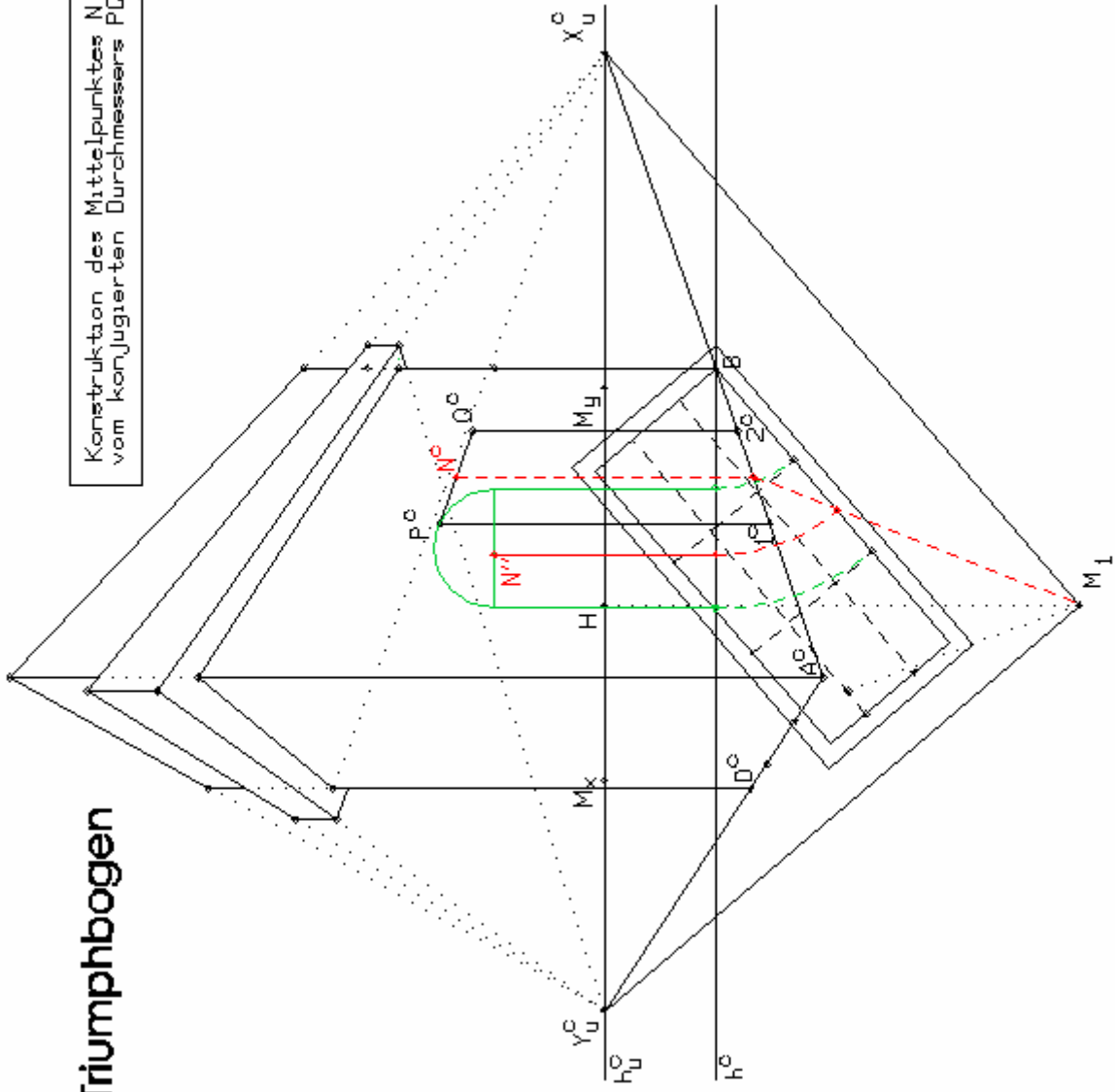
Konstruktion der Höhe
des grösseren Durchgangs

Triumphbogen



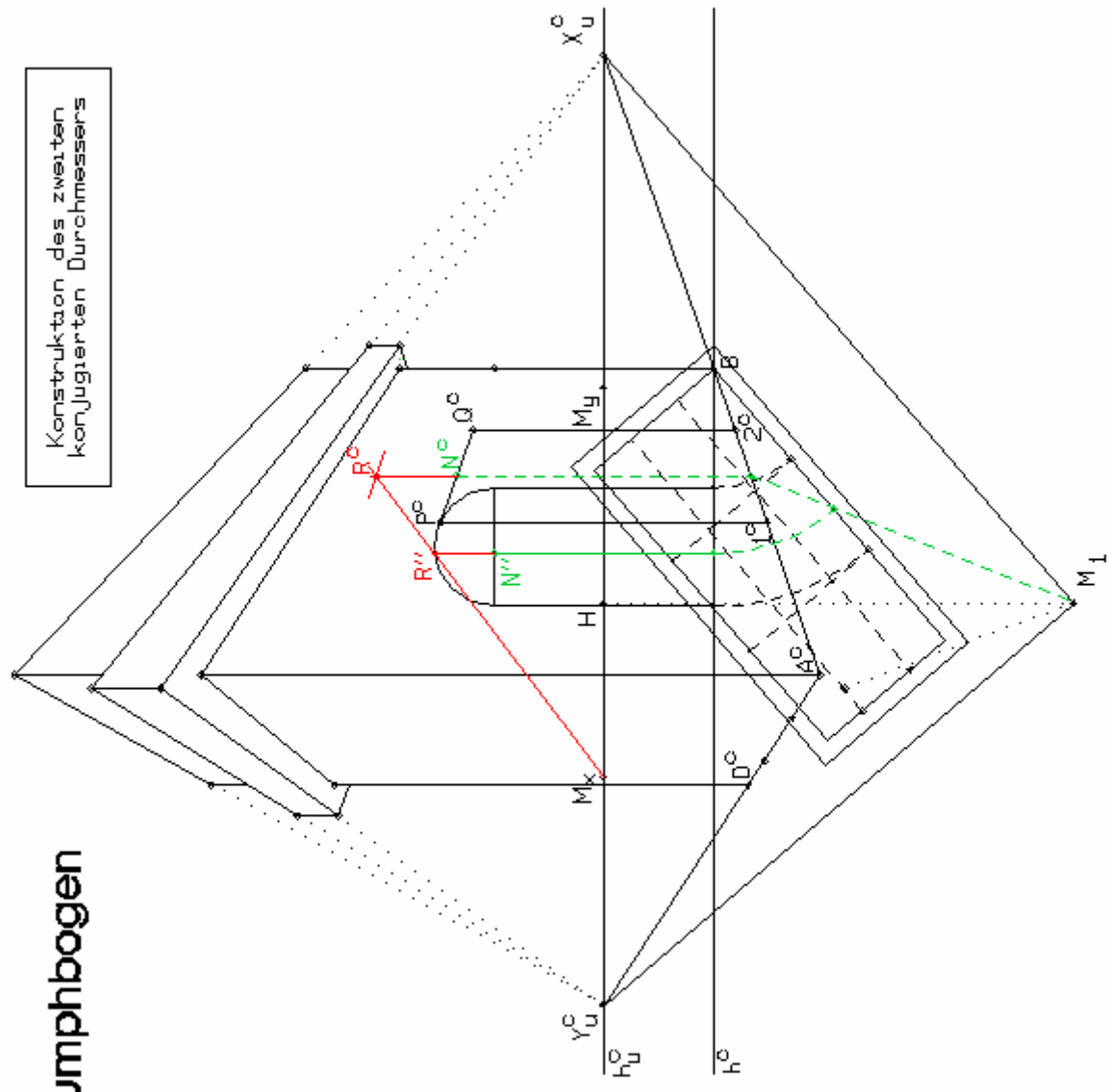
Triumphbogen

Konstruktion des Mittelpunktes N vom konjugierten Durchmessers PQ



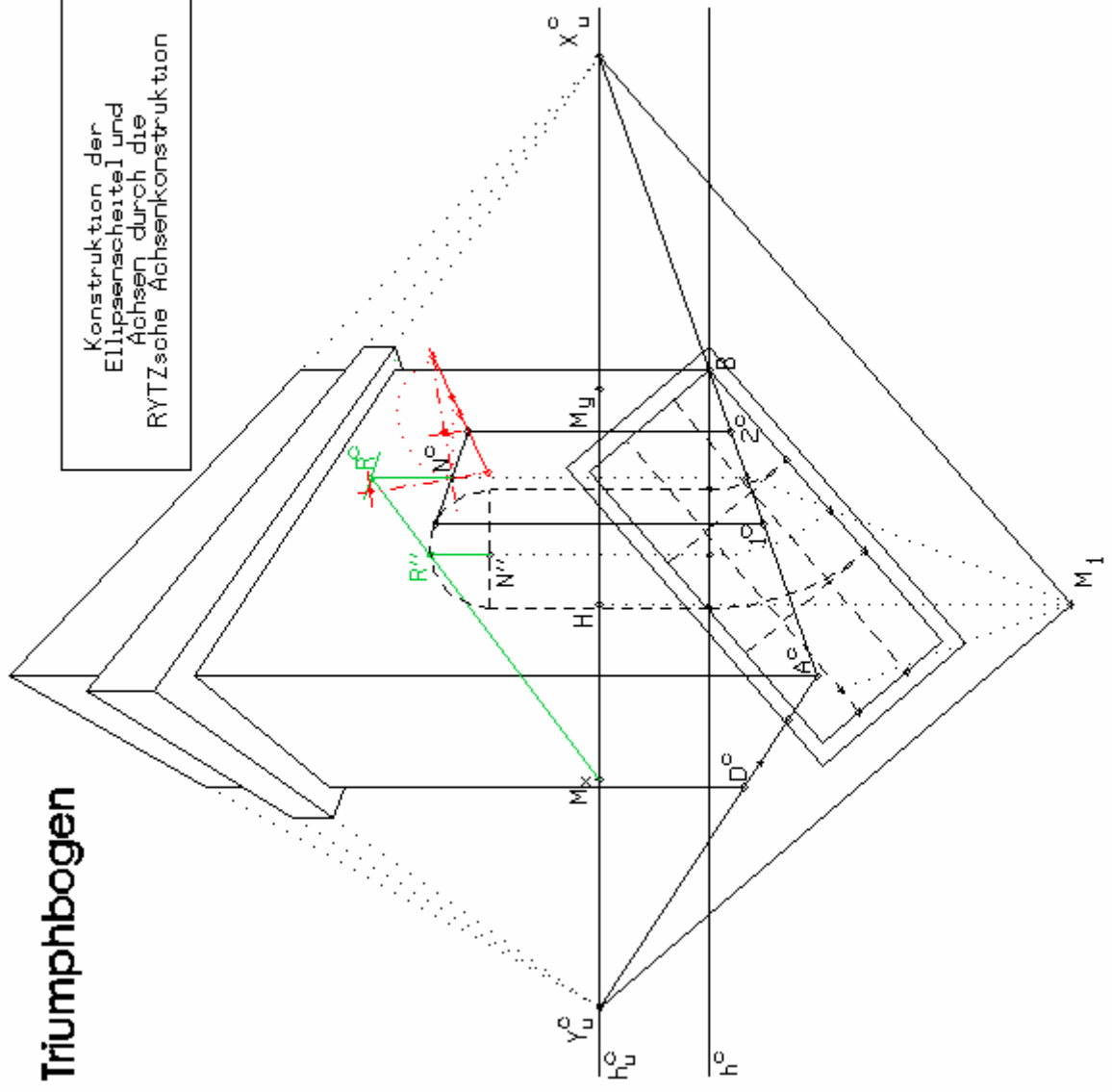
Triumphbogen

Konstruktion des zweiten konjugierten Durchmessers



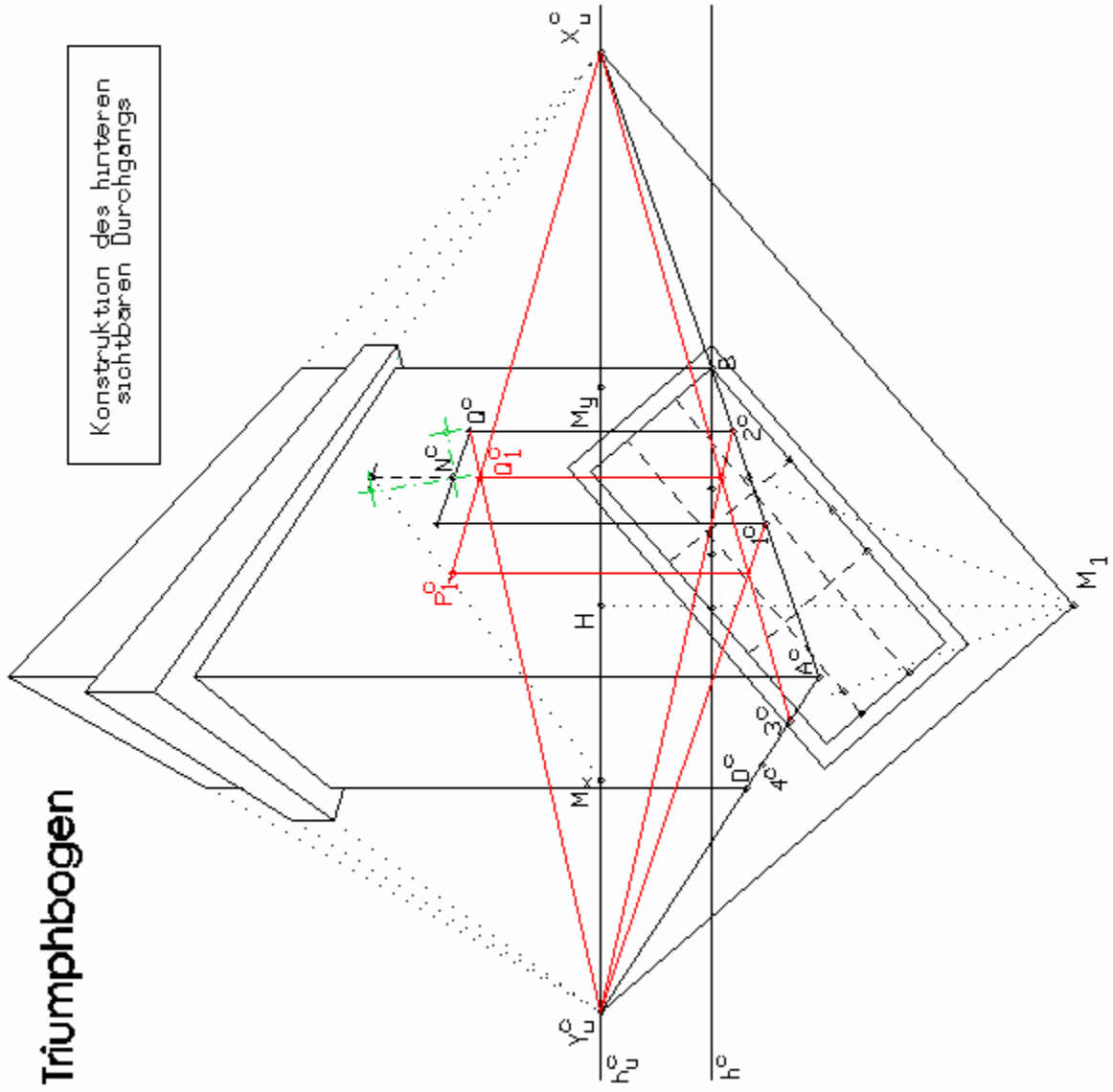
Triumphbogen

Konstruktion der
Ellipsenscheitel und
Achsen durch die
RYTZsche Achsenkonstruktion



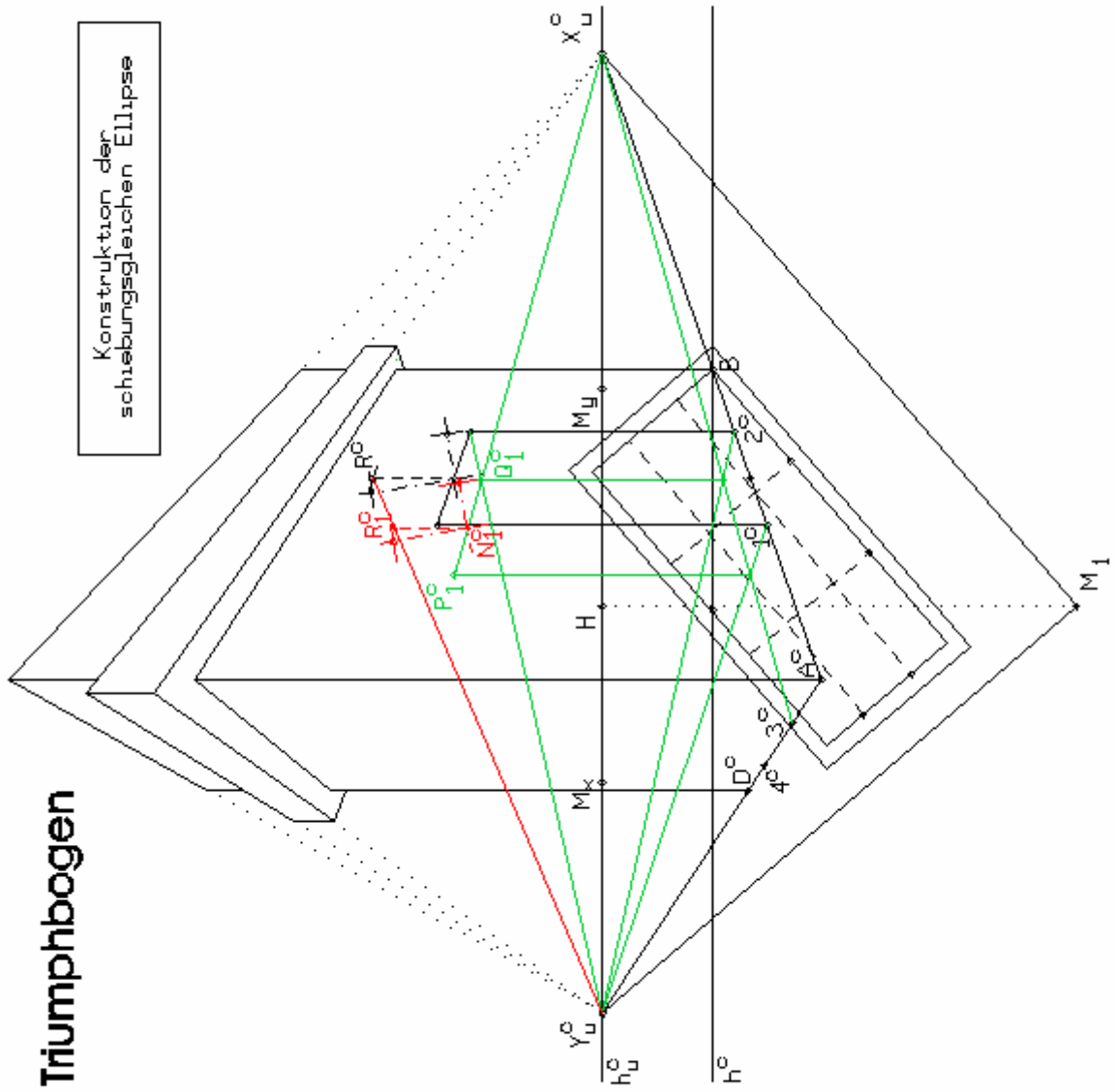
Triumphbogen

Konstruktion des hinteren sichtbaren Durchgangs



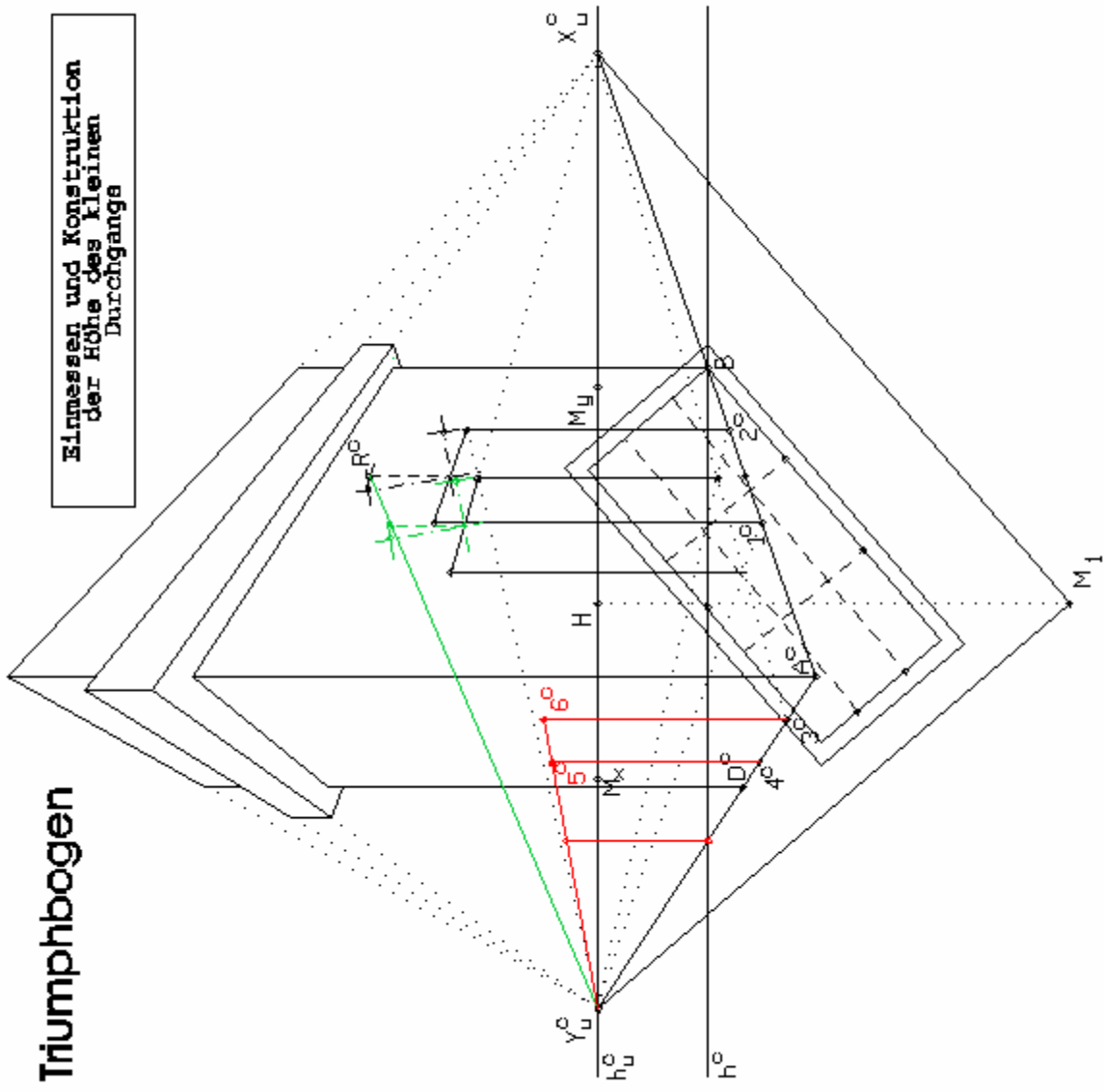
Triumphbogen

Konstruktion der
schiebungsgleichen Ellipse

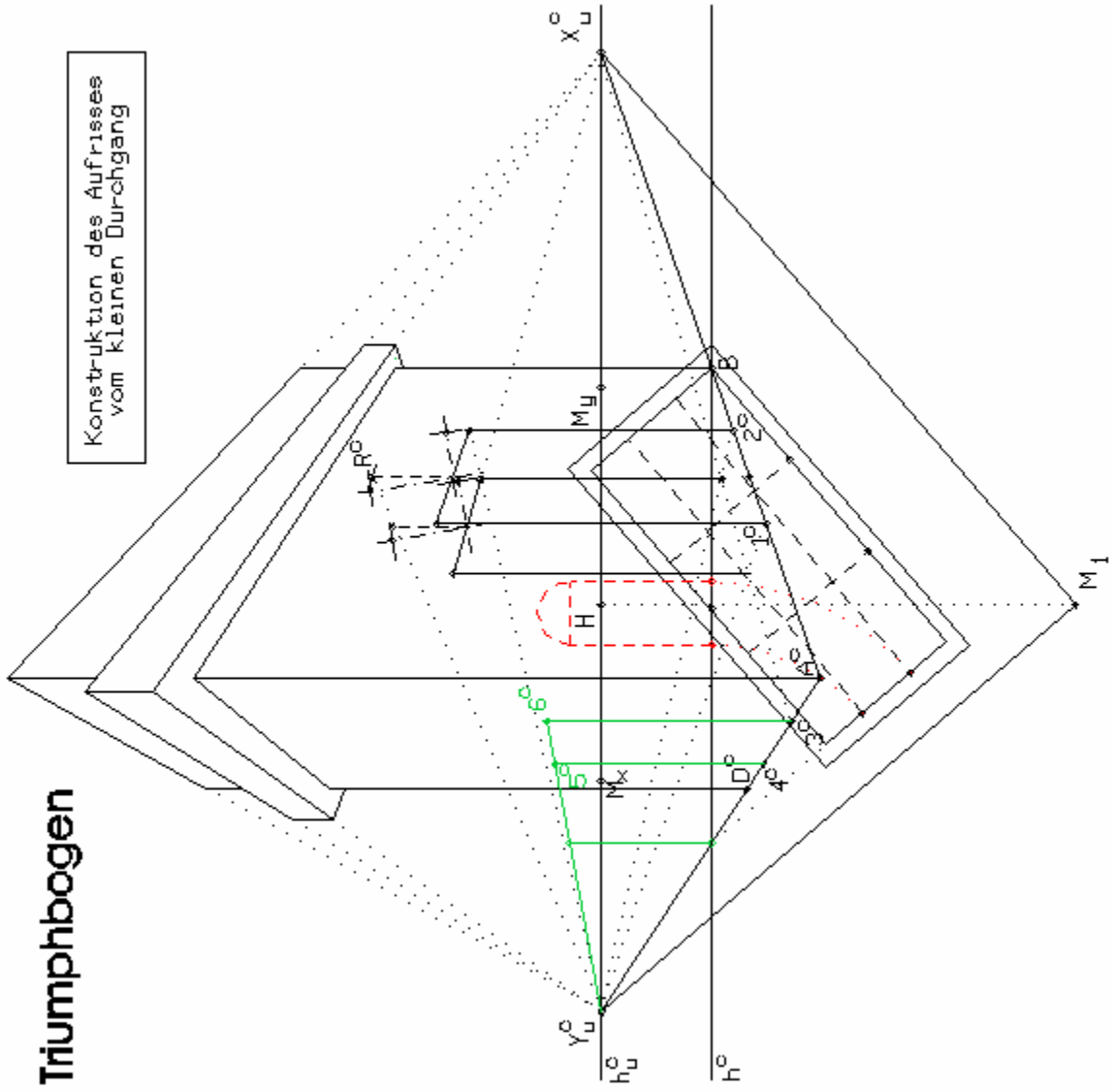


Triumphbogen

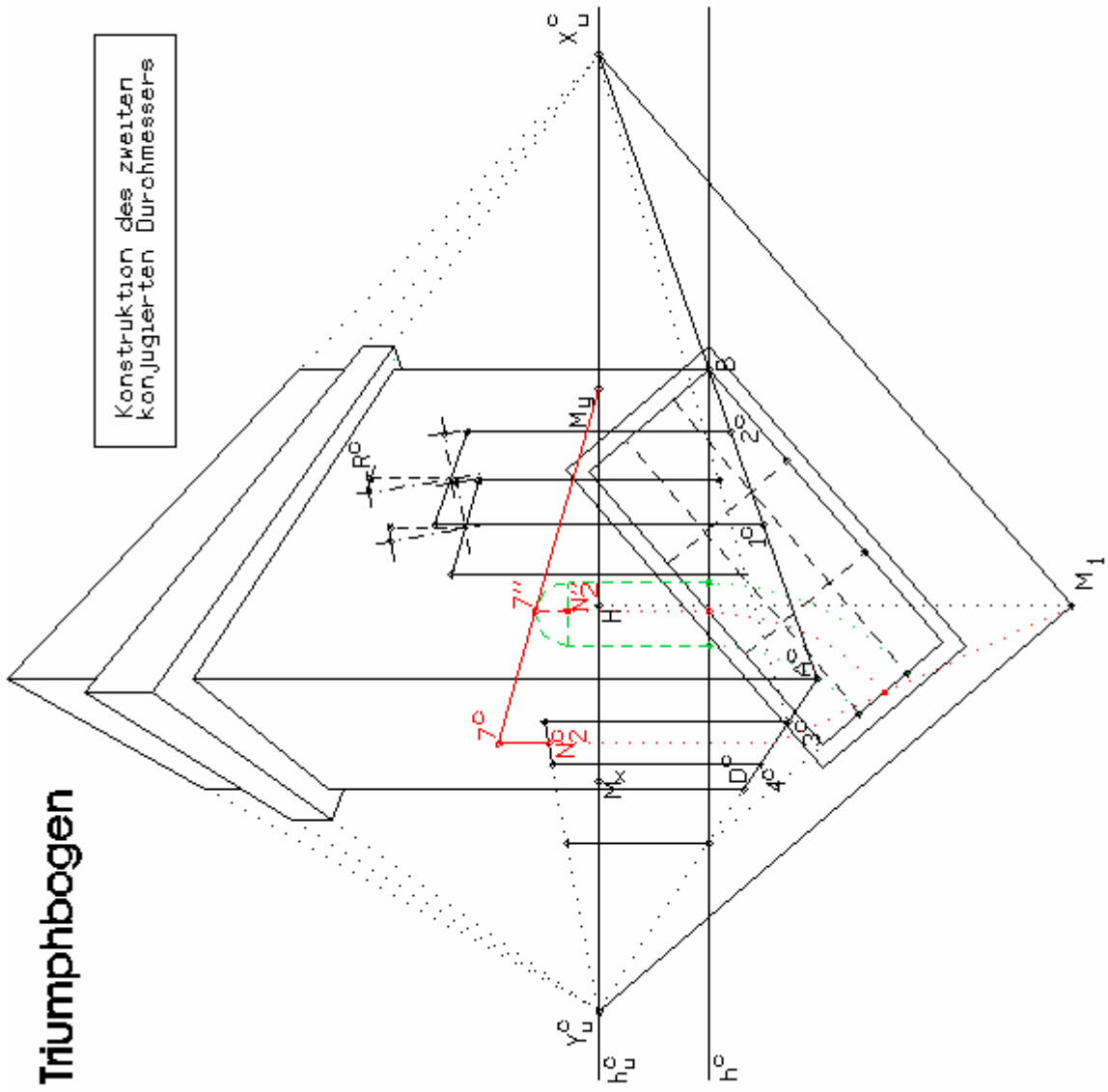
Einmessen und Konstruktion der Höhe des kleinen Durchgangs



Triumphbogen

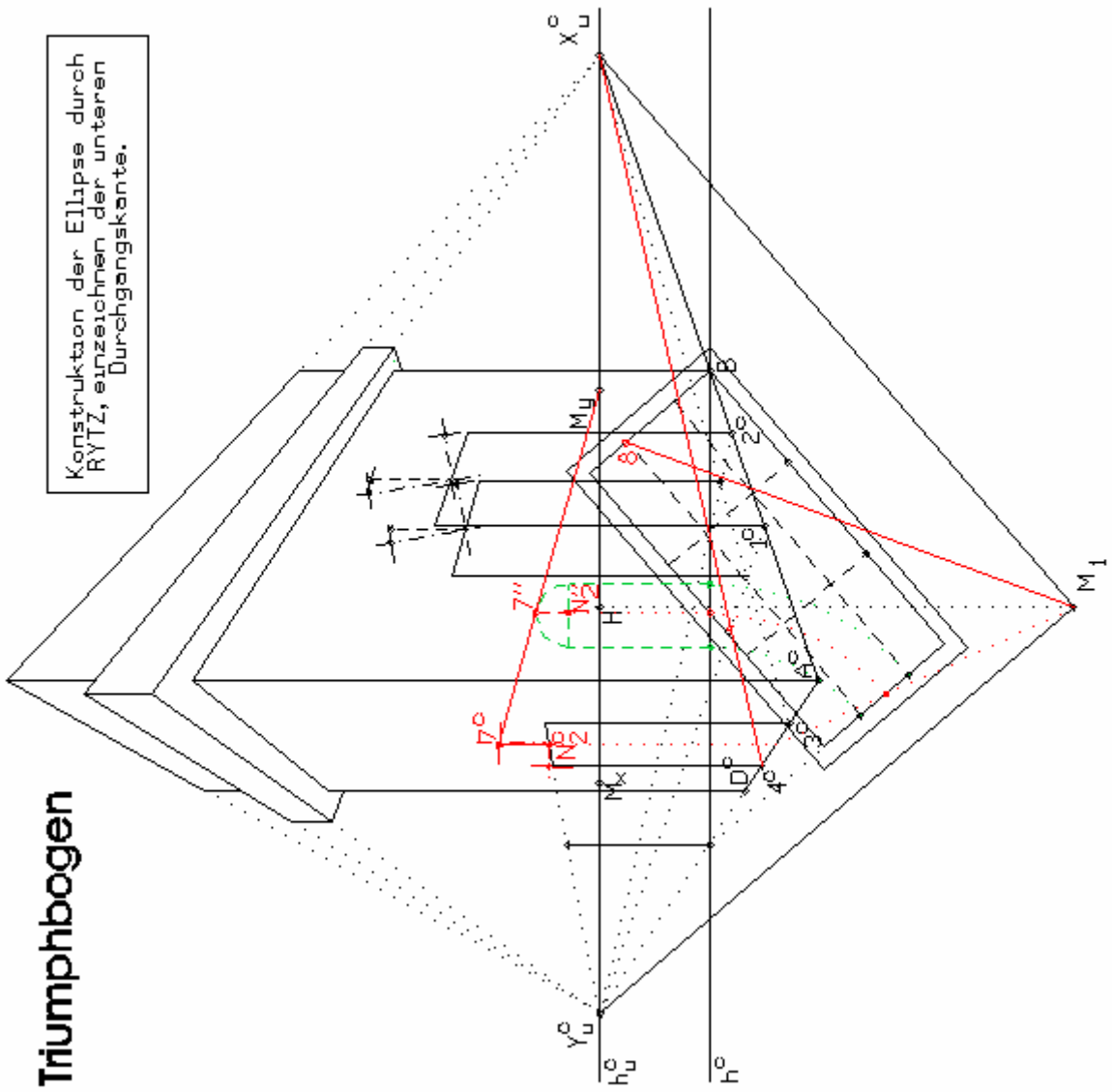


Triumphbogen

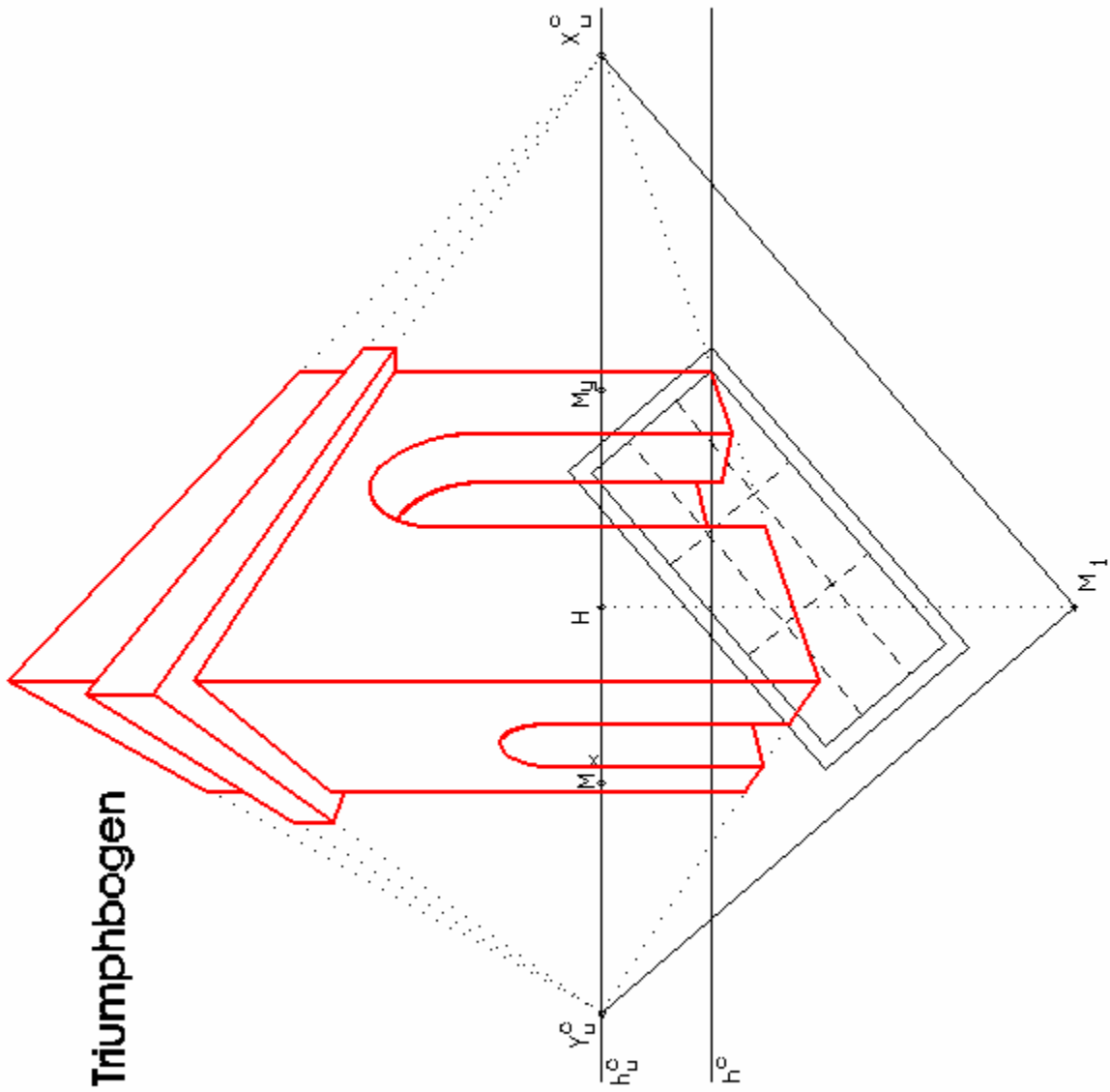


Triumphbogen

Konstruktion der Ellipse durch RYTZ, einzeichnen der unteren Durchgangskante.



Triumphbogen



5. Entzerrung

5.1. Wozu braucht man die Entzerrung?

Eine Fotografie ist der Zentralriss eines Objektes, das heißt ein fotografisches Bild entsteht durch die Zentralprojektion eines Objektes durch ein Projektionszentrum O auf eine Bildebene, zum Beispiel ein Foto. Ein solches Bild beinhaltet aber aufgrund von Bildneigungen und Unebenheiten des Objektes perspektive und projektive **Verzerrungen**.

Unter der **Entzerrung** von Zentralrissen, meist von Fotografien, versteht man die Rekonstruktion der Abmessungen eines Objektes. Mit diesem Problem beschäftigt sich die **Fotogrammetrie**.

Natürlich reicht ein Zentralriss allein zur eindeutigen Rekonstruktion nicht aus, da eine Zentralprojektion nicht injektiv ist. Nur bei gewissen Zusatzinformationen über die geometrische Form des fotografierten Objekts, genügt ein Zentralriss zur Entzerrung.

Die Entzerrung ist die in der fotogrammetrischen Praxis am häufigsten verwendete Methode. Die Entzerrung insbesondere einer ebenen Figur spielt eine wichtige Rolle bei der Rekonstruktion eines ebenen Geländes aus einem Luftbild oder etwa einer Hausfassade aus der Fotografie.

5.2. Grundlagen der Entzerrung - Theorie

a. Grundlagen

b. Doppelverhältnis

c. Entzerrung einer Geraden

a. Grundlagen:

Die Aufgabe einer Entzerrung ist es, aus dem Zentralriss F^c einer ebenen Figur F die Originalmessungen zu rekonstruieren. Wir setzen voraus, dass die Ebene ε von F nicht projizierend ist. In der Aufnahmesituation ist F zu F^c perspektiv mit dem Augpunkt O der Perspektive als Perspektivitätszentrum, sodass F und F^c in einer Kollineation gekoppelt sind. Dies gilt auch nach einer maßstäblichen Veränderung (Ähnlichkeit) beziehungsweise kongruenten Verlagerung des Projektionsergebnisses.

Legt man F und F^c in dieselbe Ebene π ... projektiv erweiterte Ebene = euklidische Ebene und Fernpunkte), so gibt es demnach eine Kollination κ , welche A^c aus F^c auf A aus F abbildet.

Kollineation:

Eine Kollineation $\kappa: \pi \rightarrow \pi$ ist eine bijektive Abbildung der Punkte der projektiven Ebene π , welche geradentreu ist. Ein Sonderfall ist eine perspektive Kollineation.

Die Rekonstruktion von F aus F^c besteht also in der Vervollständigung einer Kollineation entweder konstruktiv oder rechnerisch.

b. Doppelverhältnis

Das Teilverhältnis dreier (eigentlicher) Punkte einer Geraden bleibt bei der Anwendung einer Kollineation bzw. bei Zentralprojektion **nicht erhalten**.

Wir definieren:

Seien B, C, D , drei paarweise verschiedene eigentliche Punkte einer eigentlichen Geraden g . Dann heißt für jeden eigentlichen Punkt A aus g mit A verschieden von D

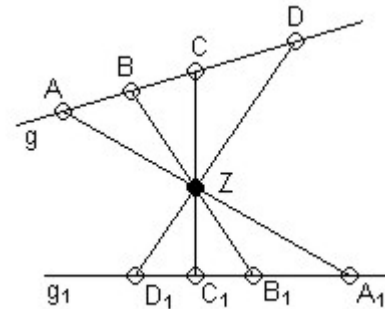
$$DV(A, B, C, D) := \frac{TV(A, B, C)}{TV(A, B, D)}$$

das Doppelverhältnis von A, B, C, D .

Wir wollen dies nun so erweitern, dass wir das Doppelverhältnis auch auf Fernpunkte anwenden können.

Eigentliche Punkte A, B, C, D auf einer Geraden g , eigentliche Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 auf einer Geraden g_1 und ein Punkt Z der nicht auf g oder g_1 liegt. Die Geraden AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 gehen durch Z . Es gilt:

$$DV(A, B, C, D) = DV(A_1, B_1, C_1, D_1).$$

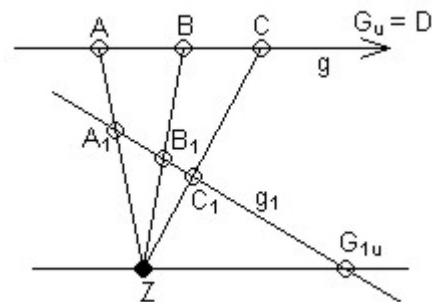


Sind nun A, B, C, D paarweise verschiedene Punkte einer eigentlichen Geraden g , wobei einer davon der Fernpunkt G_u ist. Dann sei analog zu oben:

$$DV(A, B, C, D) := DV(A_1, B_1, C_1, D_1).$$

Das heißt, dass ein Fernpunkt am Doppelverhältnis nichts ändert. Die Geraden ZA, ZB, ZC, ZD schneiden die Gerade g_1 in den vier Punkten A_1, B_1, C_1, D_1 . Jedoch gilt nun für z.B.: $D = G_u$:

$$DV(A, B, C, G_u) = TV(A, B, C)$$



c. Entzerrung einer Geraden:

Die uns bekannten Originalpunkte P, Q, R liegen auf einer nichtprojizierenden Geraden g , sie werden auch "Passpunkte" genannt, und deren Zentralrisse P^c, Q^c, R^c liegen auf g^c .

Dann ist zu X^c auf g^c der Originalpunkt X auf g mittels Doppelverhältnisübertragung eindeutig rekonstruierbar mittels "Papierstreifenkonstruktion".

Die Anwendung dieser Konstruktion kommt im nächsten Kapitel [Entzerrung ebener Figuren - Möbius - Netze](#) zum Tragen.

5.3. Entzerrung ebener Figuren - Möbius - Netz

- a. Vier - Punkt - Verfahren
 - b. Beispiel

 - c. Möbius - Netz
 - d. Skizze eines Möbius - Netzes
-

a. Vier - Punkt - Verfahren:

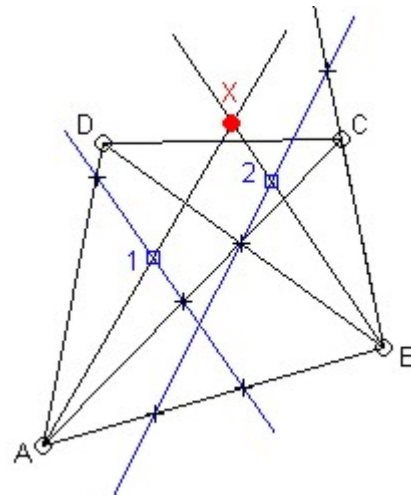
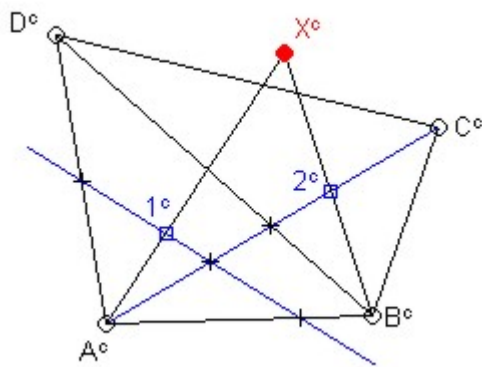
Der Zentralriss einer Figur F , die einer nicht projizierenden Ebene ε angehört, ist in der Aufnahmesituation zentralperspektiv. Es geht daher die Fotografie F^c von F unter einer Kollineation in F über.

Damit genügt es die gegenseitige Lage der Punkte eines Vierecks $\{A, B, C, D\}$ der Ebene ε von F , deren Zentralrisse A^c, B^c, C^c, D^c in der Fotografie erkennbar sind, zu kennen, um die Lage jedes Punktes X von ε aus seinem Zentralriss X^c rekonstruieren zu können.

Dieses **Vier - Punkt - Verfahren** beruht auf der Geradentreue und der Doppelverhältnistreue einer Kollineation. Praktisch wird die Rekonstruktion eines Punktes X in einem Plan der Ebene ε durchgeführt, der in einem geeigneten Maßstab gezeichnet ist und in dem die vier Punkte A, B, C, D gegeben sind.

b. Beispiel:

Man kann mittels Papierstreifen, hier in der Farbe Blau gezeichnet, die Verhältnisse aus dem Zentralriss in die Entzerrung übertragen und so jeden Punkt X rekonstruieren. Man legt den Papierstreifen und bekommt einen beliebigen Hilfspunkt 1^c auf der, in der Entzerrung, gesuchten Geraden A^cX^c . Dann passt man in der Entzerrung den Streifen so ein, dass die Abstände mit den Schnittpunkten des Vierecks übereinstimmen. Somit bekommen wir den Punkt 1 und können durch zweimaliges Anwenden dieser Konstruktion den gesuchten Punkt X konstruieren.



c. Möbius - Netz:

Müssen sehr viele Punkte aus der Fotografie rekonstruiert werden, wie das etwa bei Erstellung der Karte eines ebenen Geländes zutrifft, so kann man durch wiederholtes Unterteilen der Vierecke mit Hilfe von Diagonalen und unter Verwendung geeigneter Teilungsgeraden Raster konstruieren. Der Bildinhalt einer Rastermasche kann dann ohne zu große Fehler nach dem Augenmass von der Fotografie in die Karte übertragen werden.

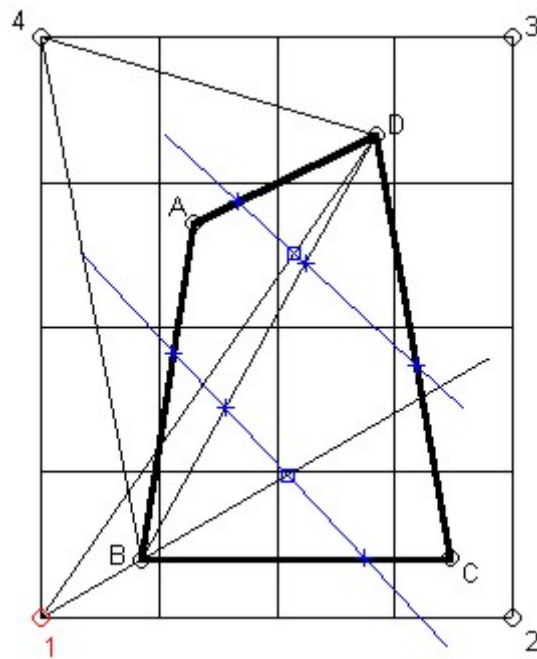
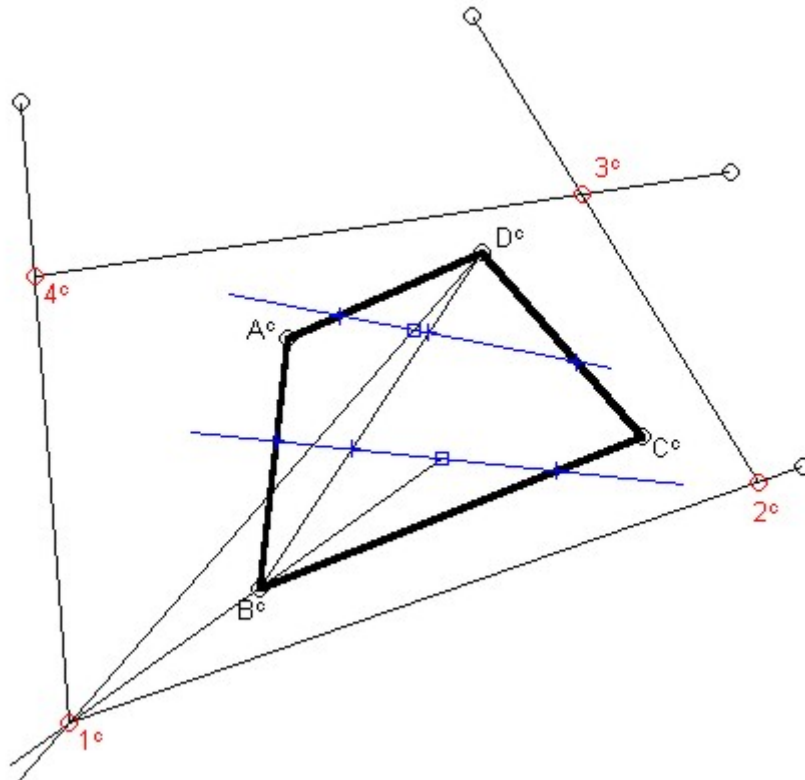
Dabei ist es üblich, zuerst in der Karte ein Rechteck $\{1, 2, 3, 4\}$ zu zeichnen, welches das Angabeviereck $\{A, B, C, D\}$ umfasst und dessen Seiten parallel zu den Achsen des (Landes-) Koordinatensystems sind. Dann werden die Punkte 1, 2, 3, 4 nach dem Vier - Punkt - Verfahren in die Fotografie übertragen. Die Raster werden nach Unterteilung der Vierecke $\{1, 2, 3, 4\}$ und $\{1^c, 2^c, 3^c, 4^c\}$ aufgebaut.

Ein Zentralriss eines kartesischen Koordinatennetzes heißt nach a. Möbius ein **Möbius - Netz**.

d. Skizze eines Möbius - Netzes:

Hier sieht man wie man ein Möbius - Netz legen kann. Die Geraden 12 und 34 sind parallel, sowie die Geraden 14 und 23. Somit gehen ihre Fluchtpunkte durch einen gemeinsamen Punkt (hier nur angedeutet: Hilfskonstruktion mittels ähnlichen Dreiecken).

Die Punkte des Möbiusnetzes 1, 2, 3, 4 konstruiert man mittels des Vier - Punkte - Verfahrens wie im [1. Punkt](#) erklärt und im [2. Punkt](#) gezeigt.



5.4. Einbildfotogrammetrie

a. Theorie

b. Anwendungen der Einbildfotogrammetrie

1. Fall

2. Fall

3. Fall

a. Theorie:

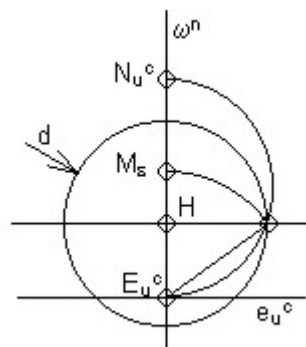
Im Verfahren zur Entzerrung ebener Figuren mittels Möbius - Netz wird der Distanzkreis nicht benützt und kann auch nicht ermittelt werden.

Hier aber gilt:

Kennt man die eigentliche Fluchtgerade e_u^c einer Ebene ε , ihren Messpunkt M_ε und ihren Normalenfluchtpunkt N_u^c , so ist der Distanzkreis mitbestimmt.

Kennt man zu dieser Angabe auch den Zentralriss e^c der Spurgeraden e von ε , so kann jede Figur F , die in der Ebene ε liegt, aus ihrem Zentralriss F^c eindeutig rekonstruiert werden.

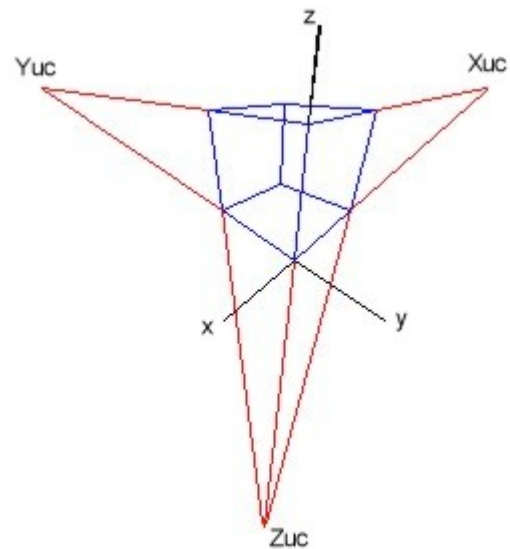
Gleiches gilt für eine Figur in einer beliebigen Ebene φ , falls man die entsprechenden Bestimmungsstücke kennt.



b. Anwendung:

Die graphisch wichtigste Anwendung der Theorie ist die Entzerrung eines Quaders aus seinem Zentralriss. Wir interpretieren eine Ecke des Quaders als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems und die von dieser Ecke ausgehenden Quaderseiten als Koordinatenachsen x, y, z .

Damit sind die Fluchtpunkte der Koordinatenachsen im Foto oder in der Zeichnung bekannt. Die im Raum parallelen Gegenkanten des Quaders schneiden sich in den Fernpunkten X_u bzw. Y_u bzw. Z_u und diese besitzen die Bilder X_u^c bzw. Y_u^c bzw. Z_u^c .



Es sind folgende drei Fälle zu unterscheiden:

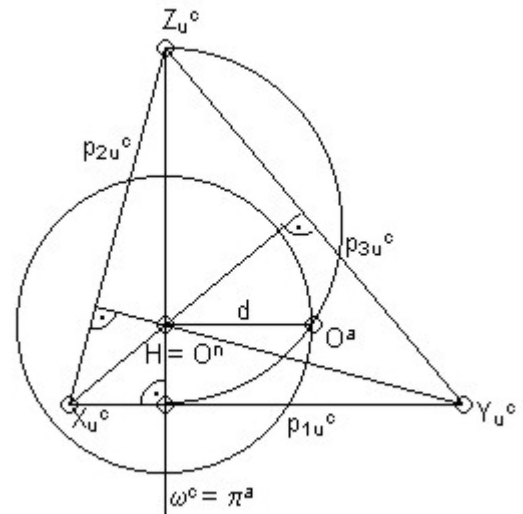
1. Fall:

X_u^c, Y_u^c, Z_u^c ist ein spitzwinkeliges Dreieck aus eigentlichen Punkten (Fluchtpunktdreieck). Ansonsten würde keine Fotografie vorliegen, sondern ein Foto eines Fotos.

Die Entzerrung ist durchführbar, wenn die Länge einer Quaderkante bekannt ist. Es kann dann die Raumlage aller Punkte festgestellt werden, die in bekannter Weise mit dem Quader zusammenhängen, das heißt es können die Koordinaten (x, y, z) eines durch P^c und P'^c gegebenen Punktes P konstruiert werden. Zu diesem Zweck ist es erforderlich, die Messpunkte M_x, M_y und M_z zu konstruieren. Ist nur P^c ohne Zusatzinformation gegeben, so ist die Lage von P zum Koordinatensystem unbestimmt und P kann nicht rekonstruiert werden.

Der Hauptpunkt ist der Höhenschnittpunkt des Fluchtpunktdreiecks. Z_u^c ist der Normalenfluchtpunkt von π_1 , so kann mittels Achsenriss die Distanz ermittelt werden (Achsenebene w durch Z_u^c).

Durch die Angabe des Fluchpunktdreiecks ist also die innere Orientierung festgelegt.

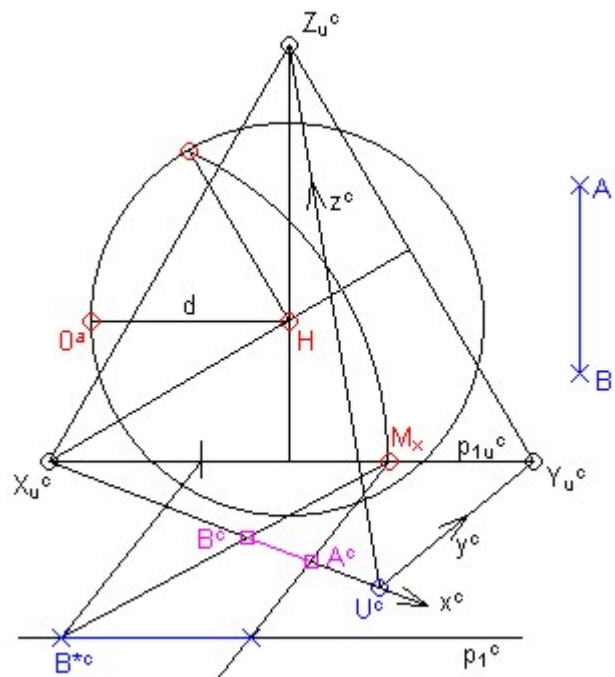


Die Länge \overline{AB} einer der x - Achse angehörenden Quaderkante ist bekannt.

Rekonstruktion x - paralleler Strecken:

Wir ermitteln die Spur p_1^c von π_1 . Zuerst wird jedoch der Messpunkt M_x der x - Achse konstruiert. Die Spur p_1^c von π_1 , ist parallel zu $p_{1u}^c = X_u^c Y_u^c$, ist so einzupassen, dass die "Messgeraden" $M_x A^c$ und $M_x B^c$ auf p_1^c die gegebene Strecke der Länge \overline{AB} ausschneiden.

Dafür tragen wir \overline{AB} von M_x aus etwa nach links auf p_{1u}^c ab und legen dadurch eine Parallele zur Geraden $M_x^c A^c$. Der Schnittpunkt dieser Parallelen mit $M_x B^c$ liefert den Punkt B^{*c} auf der gesuchten Spur p_1^c .



Rekonstruktion y - paralleler Strecken:

Dafür muss man $M_y \in p_{1u}^c$ konstruieren.

Rekonstruktion z - paralleler Strecken:

Man muss den Messpunkt $M_z \in p_{2u}^c$ konstruieren. Die Spur p_2^c von π_2 geht durch den Spurpunkt Y^c der y - Achse und ist parallel zu p_{2u}^c . Y^c ist Schnittpunkt von y^c mit p_1^c .

2. Fall:

Z_u^c , einer der Kantenfluchtpunkte, ist ein Fernpunkt und X_u^c, Y_u^c sind eigentliche Punkte.

Ist Z_u^c ein Fernpunkt, so liegt die Situation der "horizontalen Blickachse" vor. Die z - parallelen Geraden haben dann parallele Risse, die notwendig normal zum Horizont $p_{1u}^c = X_u^c Y_u^c$ verlaufen. Ist dies nicht der Fall, so haben wir wieder etwa ein Foto eines Fotos. X_u^c, Y_u^c sind eigentliche Punkte, sodass keine Quaderebene zur Bildebene parallel ist.

Es gilt:

Kennt man die Abmessungen eines Quaderrechtecks, so kann die Raumlage aller Punkte ermittelt werden, deren Lage zum Koordinatensystem bekannt ist, für die also der Zentralriss eines Koordinatenweges auf dem Bild ersichtlich ist.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

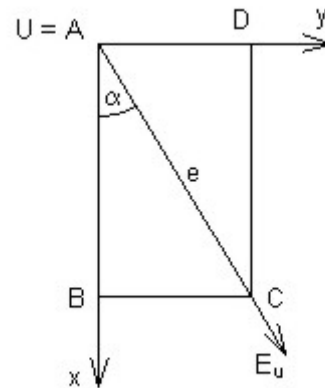
a) Das Quaderrechteck mit den bekannten Abmessungen liegt in π_1 .

Zuerst rekonstruieren wir den Messpunkt M_1 von π_1 :

Aus dem Messpunkt M_1 sieht man die Fluchtpunkte zweier in π_1 liegender Geraden unter dem Winkelmaß dieser Geraden:

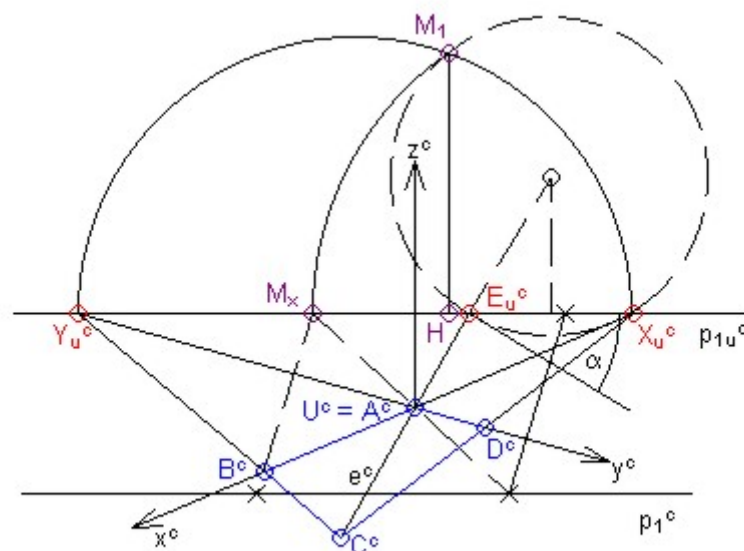
- x - und y - Achse sind zueinander normal $\Rightarrow \angle(X_u^c M_1 Y_u^c) = 90^\circ$, sodass M_1 auf dem Thaleskreis über der Strecke $(X_u^c Y_u^c)$ liegt.

- Die Rechteckdiagonale $e := AC$ bildet mit der x -Achse einen aus der Angabe bekannten Winkel α . Demnach gilt mit dem Fluchtpunkt E_u^c von e , dass der Winkel $\angle(X_u^c M_1 E_u^c) = \alpha$.

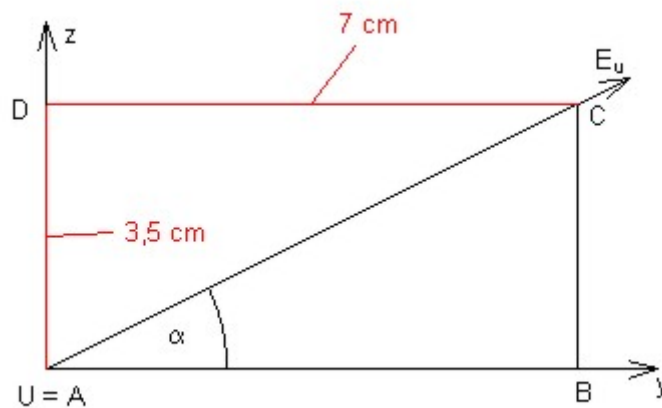


Damit liegt M_1 auf dem Peripheriewinkelkreis zum Winkel α über der Strecke $(X_u^c E_u^c)$. Da bekanntlich auch der Sehnentangentenwinkel das Maß α hat, ist der Peripheriewinkelkreis (zweideutig, symmetrisch zum Horizont) bestimmt. Damit ist aber auch M_1 (zweideutig) bestimmt.

Der Hauptpunkt H ist der Fußpunkt der Normalen aus M_1 auf p_{1c}^c . Mittels M_1 können die Messpunkte M_x und M_y konstruiert werden. Analog zur Rekonstruktion x-parallelere Strecken im 1. Fall wird die Spur p_1^c von π_1 ermittelt. Damit können dann x - und y -parallele Strecken entzerrt werden. Durch Kenntnis von p_1 ist auch die Entzerrung z -paralleler möglich.



b) Das Quaderrechteck mit den bekannten Abmessungen liegt in π_2 (oder π_3).

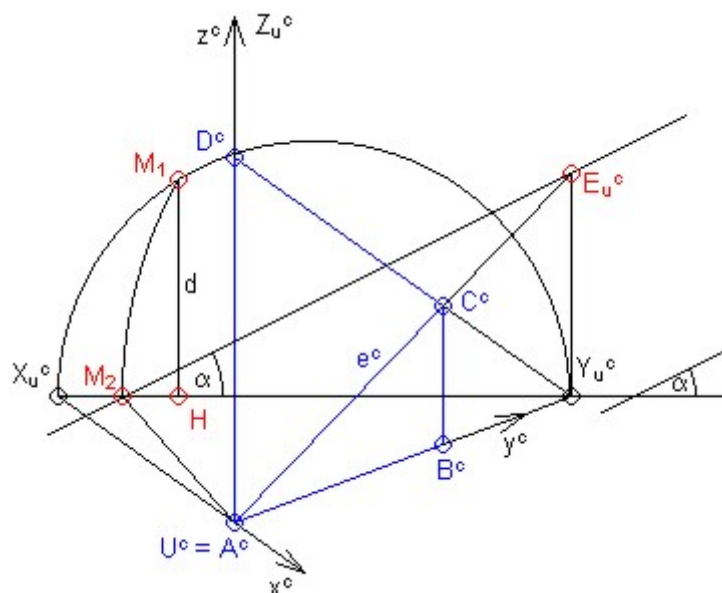


Zuerst rekonstruieren wir den Messpunkt M_2 von π_2 :

M_2 liegt auf dem Horizont p_{1u}^c . Aus M_2 erscheinen die Fluchtpunkte zweier in π_2 liegender Geraden unter dem Winkelmaß dieser Geraden.

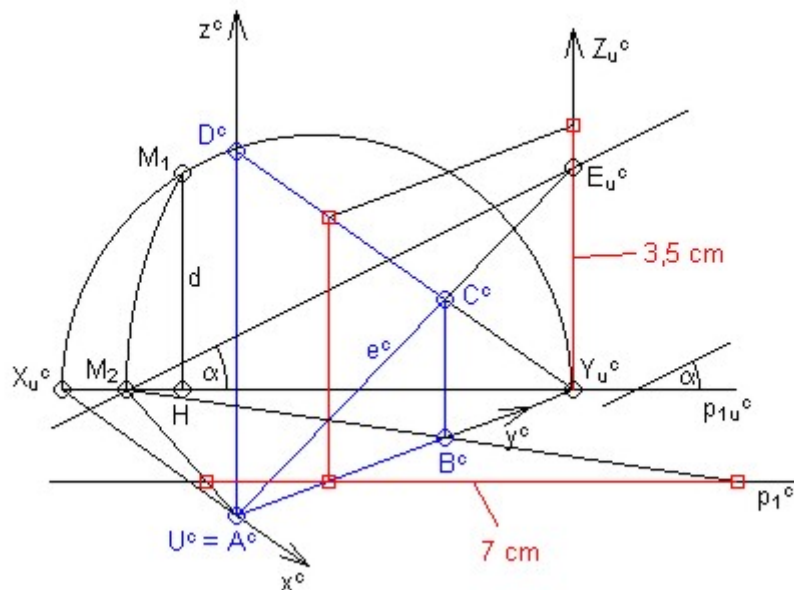
Die Rechteckdiagonale $e := AC$ schließt mit der y -Achse einen aus der Angabe ersichtlichen Winkel α ein. Demnach gilt mit dem Fluchtpunkt E_u^c von e : $\angle(Y_u^c M_2 E_u^c) = \alpha$.

Trägt man in einem beliebigen Punkt des Horizonts p_{1u}^c den Winkel α gegen p_{1u}^c ab und verschiebt man den so erhaltenen Winkelschenkel parallel durch E_u^c , so schneidet die verschobene Gerade den Horizont in einem Messpunkt M_2 von π_2 .



Bei horizontaler Blickachse ist $M_2 = M_y$. Da der Messpunkt M_1 von π_1 auf dem Thaleskreis über der Strecke $(X_u^c Y_u^c)$ liegt, kann M_1 durch Umkehrung der Konstruktion von M_y konstruiert werden.

Analog zur Rekonstruktion x - paralleler Strecken im 1. Fall wird die Spur p_1^c von π_1 ermittelt. Damit können dann x - und y - parallele Strecken entzerrt werden.



3. Fall:

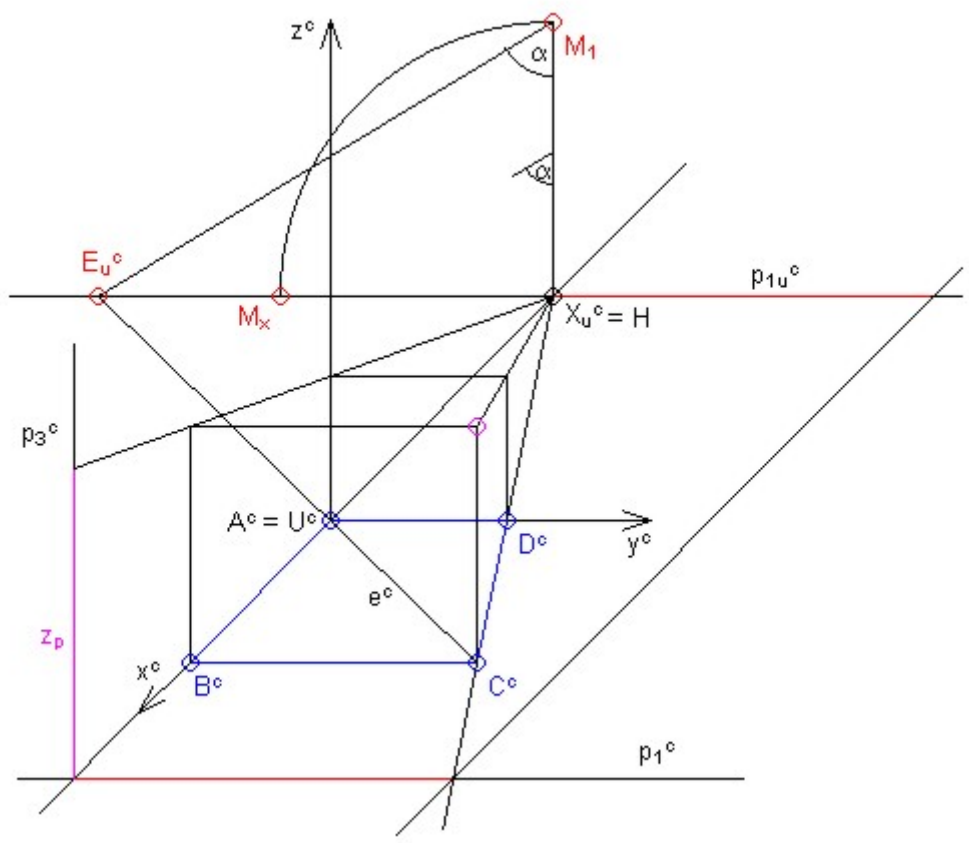
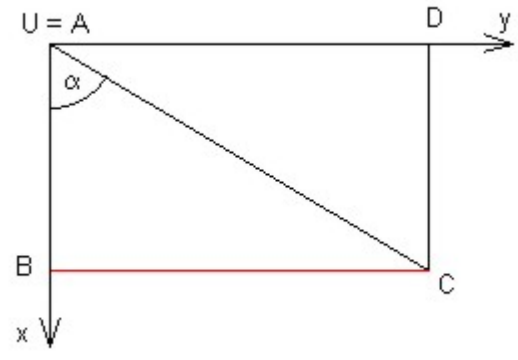
Z_u^c und Y_u^c , also zwei Kantenfluchtpunkte, sind Fernpunkte und X_u^c ist ein eigentlicher Punkt.

Die Koordinatenebene π_2 ist demnach Hauptebene und es liegt der Fotografie eine frontale Perspektive zugrunde. $X_u^c = H$ ist dann der Hauptpunkt der Perspektive.

Es gilt:

Kennt man die Abmessungen eines Quaderrechtecks, das nicht zur Bildebene π parallel liegt, so kann die Raumlage aller Punkte ermittelt werden, deren Lage zum Koordinatensystem bekannt ist, für die also der Zentralriss eines Koordinatenweges auf dem Bild ersichtlich ist.

Die Risse der y - und z - parallelen Geraden sind zueinander normal, während die x - parallelen Geraden im Hauptpunkt $X_u^c = H$ fluchten. Der Horizont verläuft durch H und ist zur Geraden z^c normal.



5.5. Rechnerische Entzerrung ebener Figuren

Homogene Darstellung

Inhomogene Darstellung

Homogene Darstellung

Die analytische Behandlung der Entzerrung beruht auf der koordinatenmäßigen Beschreibung einer Kollineation.

Wir wählen in der Ebene des Originals ein kartesisches Rechtskoordinatensystem $\{x,y\}$. Die zugehörigen homogenen Koordinaten haben die Form:

$$(x_0 : x_1 : x_2) = (1 : x : y), \text{ mit } x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}$$

Das Foto wird durch ein kartesisches Rechtskoordinatensystem $\{\xi, \eta\}$ erfasst. Die homogenen Koordinaten werden nun dargestellt durch:

$$(\xi_0 : \xi_1 : \xi_2) = (1 : \xi : \eta), \text{ mit } \xi = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \eta = \frac{\xi_2}{\xi_0}$$

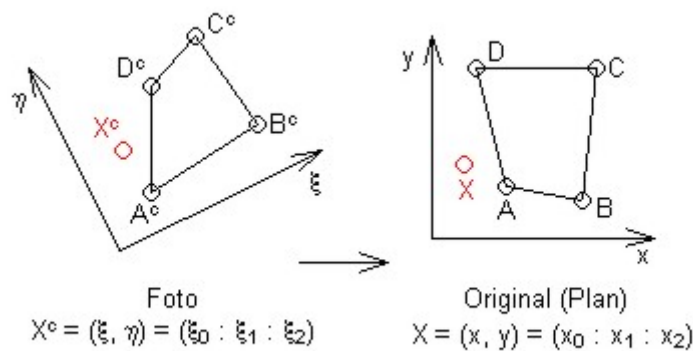
Ist F die ebene Originalfigur und F^c das Foto, so wird die Kollineation, die $F^c \rightarrow F$ leistet durch eine lineare Transformation der homogenen Koordinaten beschrieben:

$$X^c = (\xi_0 : \xi_1 : \xi_2) = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)\mathbf{R} \mapsto X = (x_0, x_1, x_2)\mathbf{R} = (x_0 : x_1 : x_2)$$

mit

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} x_0 &= a_{00}\xi_0 + a_{01}\xi_1 + a_{02}\xi_2 \\ x_1 &= a_{10}\xi_0 + a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 \\ x_2 &= a_{20}\xi_0 + a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 \end{aligned}$$

Die Elemente der Matrix können bestimmt werden, bis auf einen gemeinsamen, von Null verschiedenen Faktor, falls die homogenen Koordinaten zugeordneter Vierecke bekannt sind.



Beispiel:

Gegeben ist der Zentralriss $\{A^c, B^c, C^c, D^c\}$ des Vierecks $\{A, B, C, D\}$ (Hier ist der Sonderfall eines Quadrats gegeben, was jedoch für die Konstruktion unwesentlich ist.)

Man ermittle zum gegebenen Zentralriss X^c den Originalpunkt X .

Man wählt nun für das Foto und für das Original je ein kartesisches Koordinatensystem: $\{\xi, \eta\}$ (Einheitspunkt B^c) und $\{x, y\}$ (Einheitspunkt B). Man liest in der Figur für die homogenen Koordinaten der Angabepunkte ab:

$$\begin{aligned}
 A^c = (1:0:0) \mapsto A = (1:0:0), \quad B^c = (1:1:0) \mapsto B = (1:1:0), \quad C^c = (2:3:1) \mapsto C = (1:1:1), \\
 D^c = (2:1:3) \mapsto D = (1:0:1)
 \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_{00} &= \rho_A \\ a_{10} &= 0 \\ a_{20} &= 0 \end{aligned}$$

Damit bekommt man mit den restlichen drei Punktpaaren die folgenden Beziehungen:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_{00} + a_{01} &= \rho_B \\ a_{11} &= \rho_B \\ a_{21} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \rho_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 2a_{00} + 3a_{01} + a_{02} &= \rho_C \\ 3a_{11} + a_{12} &= \rho_C \\ a_{22} &= \rho_C \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \rho_D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 2a_{00} + a_{01} + 3a_{02} &= \rho_D \\ a_{11} + 3a_{12} &= 0 \\ 3a_{22} &= \rho_D \end{aligned}$$

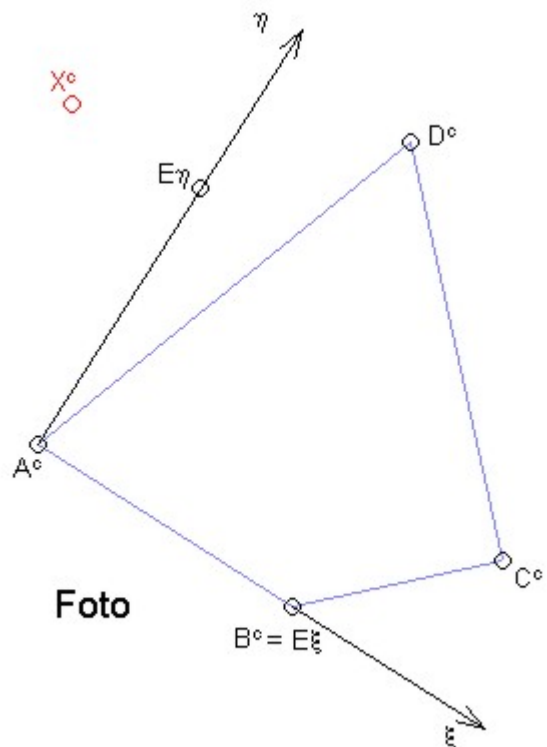
Setzt man etwa $\rho_A = 1$, so erhält man als Lösung dieses Gleichungssystems (insgesamt 12 Gleichungen in 12 Unbekannten) neben den Zahlen $\rho_B = 1/2$, $\rho_C = 4/3$, $\rho_D = 4$ die Elemente a_{jk} der Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{oder } A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Für den Punkt X^c liest man in der Figur folgende homogene Koordinaten ab:

$$X^c = \left(1 : -\frac{1}{2} : 1 \right) = (2 : -1 : 2)$$



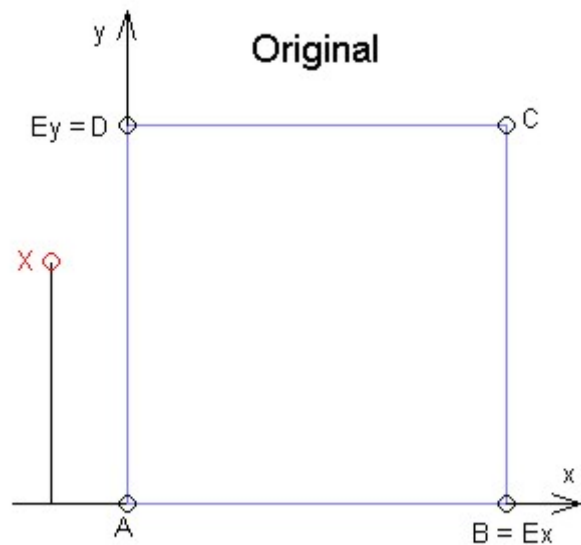
Damit berechnet man die Koordinaten für das Original:

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -5 \\ 16 \end{pmatrix}$$

also ist

$$X = (25 : -5 : 16) = \left(1 : -\frac{1}{5} : \frac{16}{25} \right) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{16}{25} \right)$$

Da die Einheitsstrecke im Original $e = \overline{AB} = 5\text{cm}$ ist $\Rightarrow X = (-1, 3.2)$.



Inhomogene Darstellung

Für eigentliche Originalpunkte X (also $x_0 \neq 0$), deren Zentralriss X^c ebenfalls eigentlich ist (also $\xi_0 \neq 0$), kann man die Kopplung der inhomogenen Koordinaten $\{\xi, \eta\}$ und $\{x, y\}$ angeben. Wir wissen:

$$x_0 = a_{00}\xi_0 + a_{01}\xi_1 + a_{02}\xi_2$$

$$x_1 = a_{10}\xi_0 + a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2$$

$$x_2 = a_{20}\xi_0 + a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2$$

Wegen $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \eta = \frac{\xi_2}{\xi_0}$ kann man für die obigen Formeln wie folgt schreiben:

$$x_0 = \xi_0 (a_{00} + a_{01}\xi + a_{02}\eta)$$

$$x_1 = \xi_1 (a_{10} + a_{11}\xi + a_{12}\eta)$$

$$x_2 = \xi_2 (a_{20} + a_{21}\xi + a_{22}\eta)$$

Bildet man nun $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}$, so folgt:

$$x = \frac{x_1}{x_0} = \left(\frac{a_{10} + a_{11}\xi + a_{12}\eta}{a_{00} + a_{01}\xi + a_{02}\eta} \right) \quad \text{und} \quad y = \frac{x_2}{x_0} = \left(\frac{a_{20} + a_{21}\xi + a_{22}\eta}{a_{00} + a_{01}\xi + a_{02}\eta} \right)$$

Der Ursprung F^c des (ξ, η) - Koordinatensystems in der Fotoebene hat die homogenen Koordinaten

$$F^c = (\xi_0 : \xi_1 : \xi_2) = (1 : 0 : 0)$$

Wir setzen voraus, dass der zugehörige Originalpunkt F kein Fernpunkt ist (also F^c kein Fluchtpunkt). Nach der ersten Zeile der 3 Gleichungen hat F die homogenen Koordinaten

$$F = (x_0 : x_1 : x_2) = (a_{00} : a_{10} : a_{20}).$$

Die Voraussetzung bedeutet also $a_{00} \neq 0$ (diese Voraussetzung ist durch die Wahl des (ξ, η) - Koordinatensystems natürlich stets erfüllbar).

Dividiert man unter dieser Voraussetzung also die Formeln für x und y durch $a_{00} \neq 0$, so erhält man mit

$$b_{jk} := \frac{a_{jk}}{a_{00}}$$

$$x = \frac{b_{10} + b_{11}\xi + b_{12}\eta}{1 + b_{01}\xi + b_{02}\eta} \quad \text{und} \quad y = \frac{b_{20} + b_{21}\xi + b_{22}\eta}{1 + b_{01}\xi + b_{02}\eta}$$

Setzt man in diese eben erhaltenen Gleichungen die inhomogenen Koordinaten der Passpunkte, die Punkte des Vierecks $\{A^c, B^c, C^c, D^c\}$ und des Vierecks $\{A, B, C, D\}$, ein, so erhält man acht lineare Gleichungen für die acht Parameter b_{10}, \dots, b_{22} .

Im [Beispiel](#) der homogenen Darstellung ist die Matrix

$$(a_{jk}) = A_h = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Mit $b_{jk} := \frac{a_{jk}}{a_{00}}$ erhält man als inhomogenen Darstellung entsprechend den Formeln für

x und y zunächst:

$$x = \frac{\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{6}\eta}{1 - \frac{1}{2}\xi + \frac{5}{6}\eta} \quad \text{und} \quad y = \frac{\frac{4}{3}\eta}{1 - \frac{1}{2}\xi + \frac{5}{6}\eta}$$

$$\text{oder } x = \frac{3\xi - \eta}{6 - 3\xi + 5\eta} \quad \text{und} \quad y = \frac{8\eta}{6 - 3\xi + 5\eta}$$

Durch $6 - 3\xi + 5\eta = 0$ wird in der Ebene des Fotos die Fluchtgerade festgelegt.

5.6. Beispiel zur Entzerrung

Beispiel: Gebäudekomplex

Der im Zentralriss gegebene Gebäudekomplex (zwei kantenparallele Quader) ist auf das kartesische Koordinatensystem $\{U; x, y, z\}$ bezogen. Es wurden durch Messungen am Objekt folgende Abmessungen ermittelt: $\overline{UA} = 5\text{m}$, $\overline{AB} = 6\text{m}$.

Das Objekt ist im Maßstab 1 : 100 zu entzerren und in Grund- und Aufriss im Maßstab 1 : 200 darzustellen. Um die grafische Genauigkeit zu erhöhen, ist ein Kellergrundriss mit dem gegebenen Ursprung \underline{U} zu verwenden.

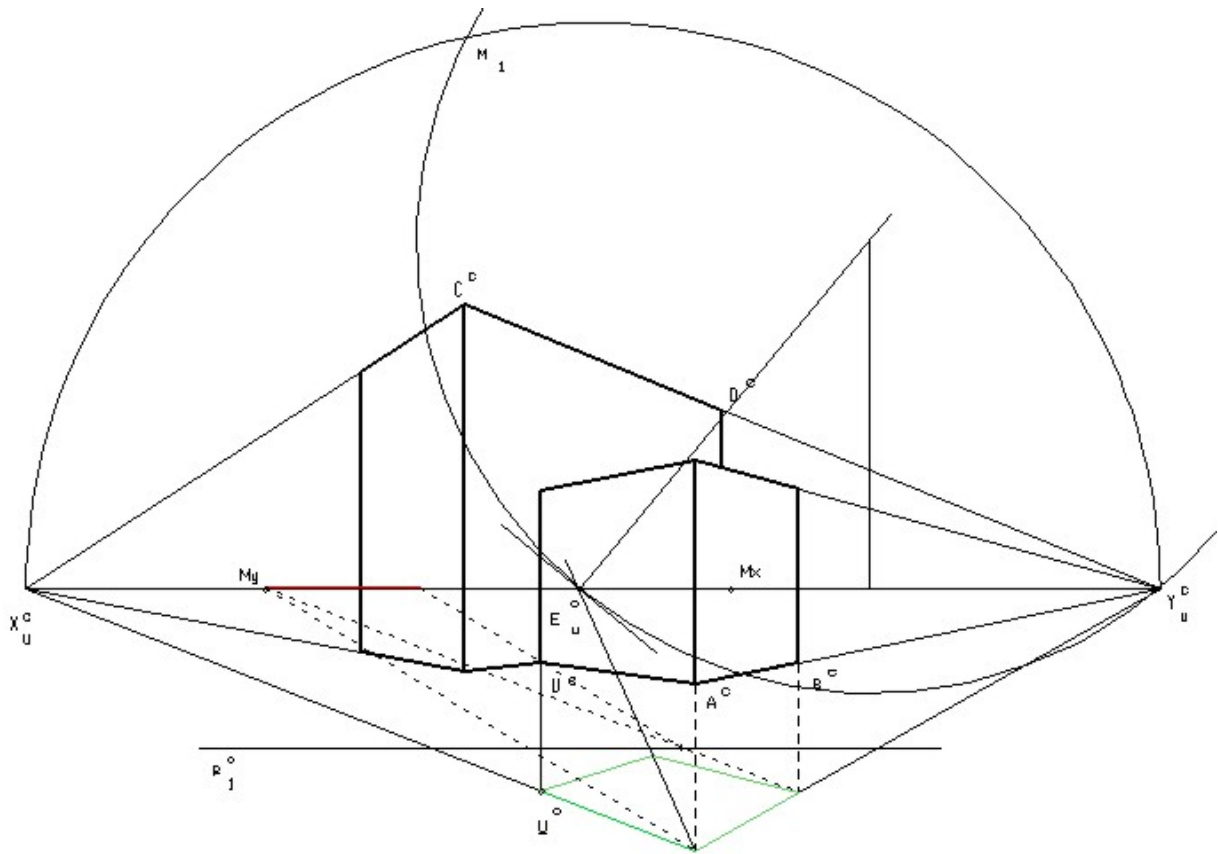
Hier gibt es die [Angabe zum Downloaden und Ausdrucken](#)

1. Schritt:

Der Schnitt der Zentralrisse x - beziehungsweise y - paralleler Quaderkanten ergibt X_u^c und Y_u^c und damit den Horizont p_{1u}^c . Die Zentralrisse der lotrechten Quaderkanten sind parallel und zu p_{1u}^c normal, sodass eine Perspektive mit horizontaler Blickachse vorliegt.

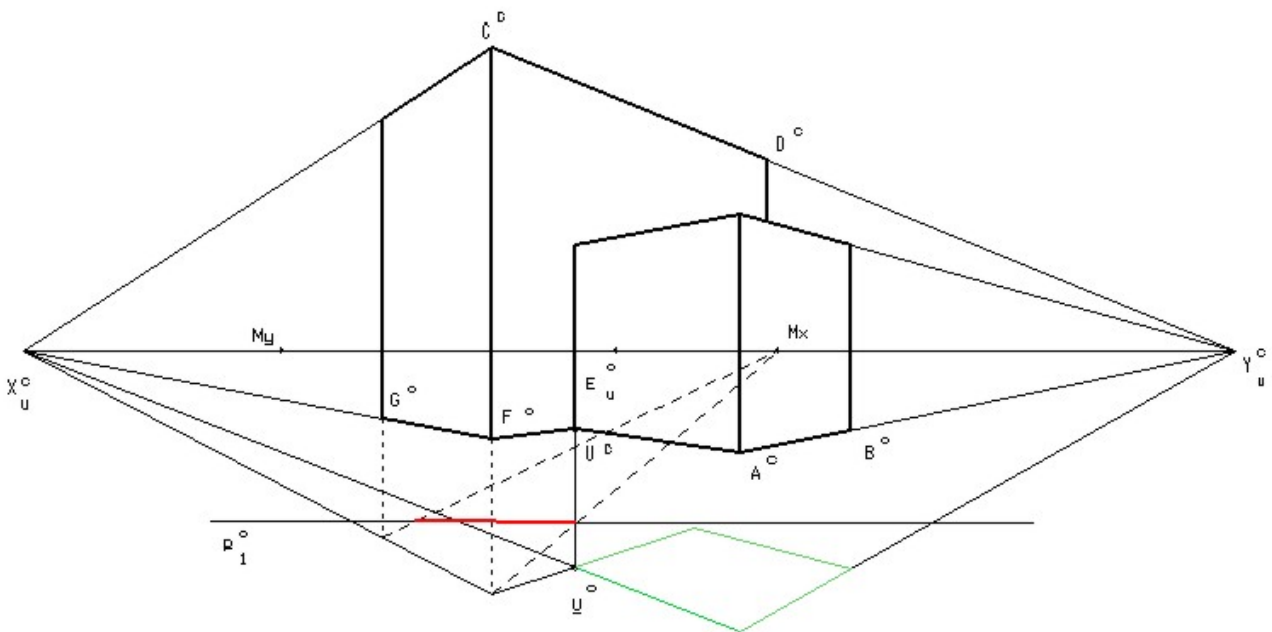
Die Zentralrisse \underline{x}^c beziehungsweise \underline{y}^c der Kellergrundriss der x - beziehungsweise y - Achse verlaufen durch \underline{U}^c und X_u^c beziehungsweise Y_u^c .

Wir rekonstruieren nun den Messpunkt M_1 von π_1 unter Benützung des bekannten Winkels der Rechtecksdiagonale durch A mit der y - Achse. Damit sind die Messpunkte M_x und M_y konstruierbar.



2. Schritt:

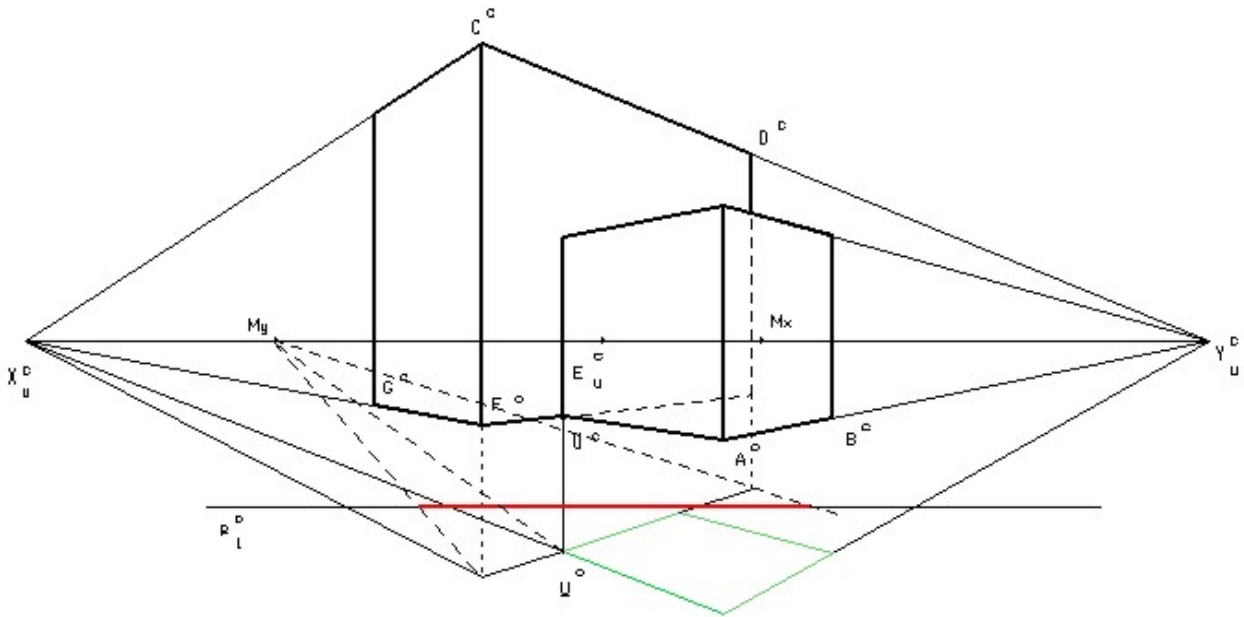
Die Strecke UA liegt auf der x - Achse. Die Strecke FG liegt auf einer Geraden parallel zur x - Achse. So können wir die Länge der Quaderkante auf p_1^c ablesen, wenn man die Enden der Quaderkante des Kellergrundrisses mit M_x verbindet und mit p_1^c schneidet. Die Länge wird abgemessen und mittels Maßstab umrechnet.



3. Schritt:

Die Länge der y - parallele Quaderkante kann nun so ermittelt werden:

Wir suchen uns den Kellergrundriss der Quaderkante und verbinden die Eckpunkte der Kante mit dem Messpunkt M_y . Die Länge der Strecke ist dann wieder auf p_1^c abzulesen.



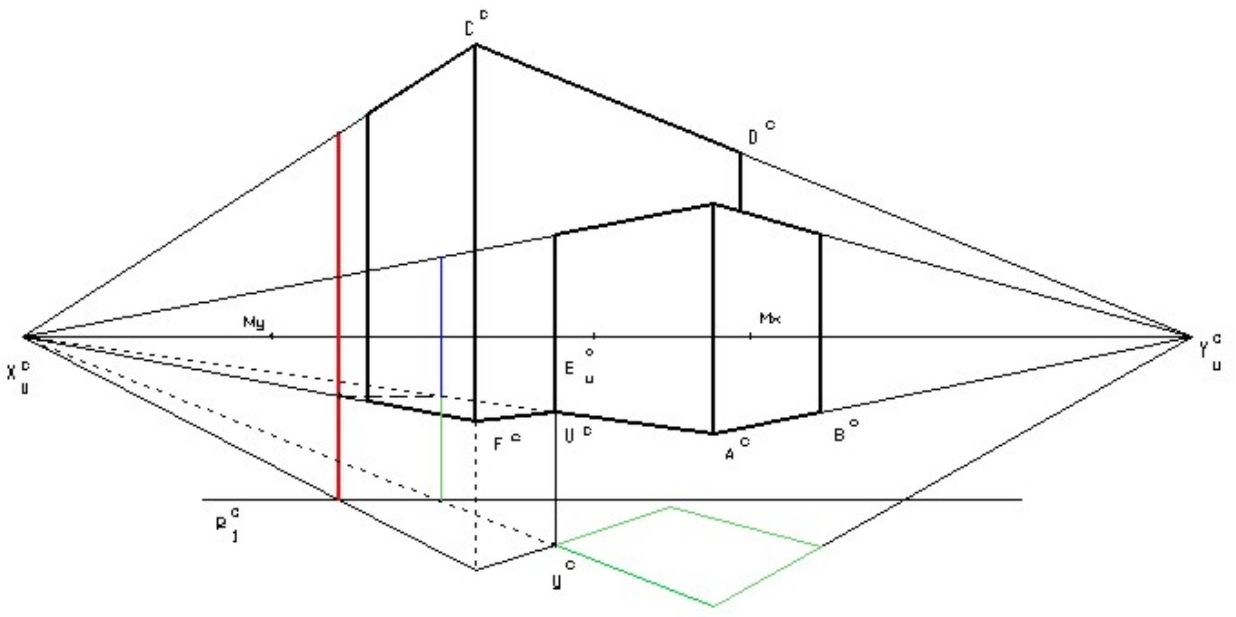
4. Schritt:

Nun wollen wir nun auch die z - parallelen Abmessungen rekonstruieren. Man benützt dazu einen beliebigen Messpunkt auf p_{1u}^c .

Die Länge der Kante CF ist zu ermitteln. Man lässt den Kellergrundriss vom Punkt F^c und C^c nach X_u^c fluchten und die Linie im Kellergrundriss wird mit dessen Horizont p_1^c geschnitten. Von diesem Punkt aus misst man die Quaderkantenlänge CF bis zur Geraden $C^cX_u^c$. Man darf jedoch nicht vergessen die Kellerhöhe wieder abzuziehen. Diese kann man analog konstruieren, indem man den Kellergrundriss von UA in Richtung X_u^c verlängert und mit dem Horizont des Kellergrundrisses schneidet.

Die Höhe geht dann bis zu der Geraden UAX_u^c .

Analog kann auch die Quaderhöhe des kleineren Quaders so ermittelt werden (blau).



Literaturverzeichnis:

- [1] Brauner, Heinrich. *Lehrbuch der konstruktiven Geometrie*. Springer Verlag. Wien, New York. 1986.
- [2] Grader, Ruth. *Axonometrische Methode der Perspektive*. Seminar aus DG. 2000.
- [3] Jank, Walther. *Ergänzungen aus DG*. Mitschrift zur Vorlesung und Übung. 1999/00.
- [4] Lichtensteiner, Karl. *Darstellende Geometrie*. Band 2. R. Oldenbourg Verlag Wien. 1992.
- [5] Magyar, Irmgard. *Maßaufgaben*. Seminar aus DG. 2000.
- [6] Manhart, Friedrich. *Geometrie für Vermessungswesen*. Skriptum. 2000.
- [7] Paukowitsch, Hans - Peter. *Darstellende Geometrie für LA Teil 1: DG 1 VO, DG 1 a + b UE*. Skriptum. 2001/2002.
- [8] Pillwein, Gerhard/Müller, Robert/Kollars, Kurt. *Darstellende Geometrie - DG 8*. Verlag Holder - Pichler - Tempsky. Wien. 1992.
- [9] Rehbock, F. *Geometrische Perspektive*. Springer Verlag. Berlin Heidelberg - New York. 1979.
- [10] Schmidt, Rudolf: *Perspektive Schritt für Schritt*. Augustus Verlag. Augsburg. 1995

[11] SAE: Et Cetera - About the site, Contact Info, and symbols

<http://www.dartmouth.edu/~sae/ETC/index.html>

[12] Stephansdom/Der Dom/Einführung

<http://www.stephansdom.at/data/dendom/einfuehrung/index.php>

[13] Technische Universität Wien - Institut für Geometrie

<http://www.geometrie.tuwien.ac.at>

[14] wien.at - Freizeit/Kultur/Tourismus - Sehenswürdigkeiten

<http://www.wien.gv.at/index/sehensw.htm>

Danksagung

Ich möchte auf dieser Seite allen Personen danken, die mich während meines Studiums und vor allem in der Zeit kurz vor der Diplomprüfung unterstützt und mir geholfen haben.

Zuallererst ein großer Dank an meine Eltern Erika und Franz Luef, dass sie mich während des Studiums vor allem finanziell unterstützt haben. Besonders möchte ich dafür danken, dass sie mir viel Arbeit abgenommen haben und dass meine Mutter meine Launen oft mit viel Geduld ertragen hat.

Ein großer Dank gilt auch meiner Studienkollegin Irmgard, die mir durch ihre tatkräftige Unterstützung in den 10 Semestern unseres Studiums immer beigestanden hat.

Auch allen anderen Studienkollegen, die mir mit dem Ausleihen von Skripten und der Übermittlung von Informationen geholfen haben mein Studium zu bewältigen, möchte ich Dank sagen.

All meinen guten Freunden möchte ich für die aufmunternden Worte, aber auch für das Verständnis meiner Abwesenheit danken, vor allem meinem Freund Christian, der meinen Stress am Ende des Studiums zu spüren bekam.

Last but not least gebührt all meinen Professoren der TU - Wien ein großes Dankeschön für die Unterstützung, vor allem Herrn Professor Paukowitz für die tolle Unterstützung, Hilfe und Geduld während des Verfassens dieser Arbeit.