Die approbierte Originalversion dieser Dissertation ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (http://www.ub.tuwien.ac.at).

The approved original version of this thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/).

Dissertation

Analysis, Numerik und Simulation eines relaxierten Modellproblems zum Mikromagnetismus

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der technischen Wissenschaften
unter der Leitung von

Univ.Prof. Dr.rer.nat. Dipl.-Math. Dipl.-Ing. Carsten Carstensen
E 115
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Technische Naturwissenschaften und Informatik

von

Dipl.-Math. Dirk Praetorius
Matr. Nr. 0127344
Diehlgasse 8/1
A-1050 Wien

Wien, am 11. März 2003

Kurzfassung

Das Verständnis mikromagnetischer Phänomene und Prozesse gewinnt zunehmend an Bedeutung als Schlüsseltechnologie in unserer Informationsgesellschaft. Ferromagnetische Materialien sind wichtiger Bestandteil in vielfältigen modernen Anwendungen, u.a. in magnetischen Sensoren oder Speichermedien. Mit dem technischen Fortschritt geht auch ein Interesse und Bedarf an zuverlässigen Simulationen mikromagnetischer Phänomene einher.

Allgemein anerkannte Grundlage aller quantitativen numerischen Simulationen ist das Modell von Landau und Lifshitz, bei dem die Gesamtenergie

$$E(\mathbf{m}) := \alpha \int_\Omega |\nabla \mathbf{m}(x)|^2 \, dx + \int_\Omega \phi\big(\mathbf{m}(x)\big) \, dx - \int_\Omega \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{m}(x) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{H}(x)|^2 \, dx \tag{1}$$

über Magnetisierungen $\mathbf{m} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ zu minimieren ist, die die nicht-konvexe Nebenbedingung $|\mathbf{m}| = 1$ fast überall erfüllen. Die Gesamtenergie ist die Summe von vier Gebietsintegralen, die als *Austauschenergie*, *anisotrope Energie*, *äußere Energie* und *Streufeldenergie* bezeichnet werden. Die Anisotropiedichte $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ modelliert Materialeigenschaften auf kristalliner Ebene, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ beschreibt ein angelegtes äußeres Feld, und das *Streufeld* $\mathbf{H} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ist mit $\mathbf{m}$ über die *Maxwellschen Gleichungen* gekoppelt.

Aufgrund der beschränkten Rechnerkapazitäten – auch bei modernen Rechnern – muß man bei der Simulation eines makroskopischen Körpers Ω zunächst den singulären Limesfall $\alpha = 0$ betrachten und dann aus dieser Kenntnis heraus robuste Verfahren konstruieren. Das Modell bedarf einer Relaxierung, um die Lösbarkeit zu garantieren. Eine Relaxierung durch Konvexifizierung führt auf das folgende Problem: Man finde eine Magnetisierung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ und einen Lagrange-Multiplikator $\lambda \in L^2(\Omega)$ derart, daß fast überall in Ω gilt

$$\begin{aligned} &\nabla u + D\phi^{**}(\mathbf{m}) + \lambda \mathbf{m} = \mathbf{f}, \\ &|\mathbf{m}| \leq 1, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda(1 - |\mathbf{m}|) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei ist ϕ^{**} die Konvexifizierung von ϕ, und das Streufeld $-\nabla u = \mathbf{H} \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ ist Lösung von

$$\langle -\nabla u + \mathbf{m} \, ; \nabla v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)} = 0 \quad \text{für alle } v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d). \tag{3}$$

Die numerische Simulation steht vor drei Schwierigkeiten: Zum einen ist die Magnetisierung $\mathbf{m}$ *geeignet* zu diskretisieren, zweitens ist die konvexe Nebenbedingung $|\mathbf{m}(x)| \leq 1$ numerisch zu realisieren, und drittens ist für jedes diskrete $\mathbf{m}_h$ die Gleichung (3) im *Vollraum* zu lösen, und dies involviert einen nicht-lokalen Integraloperator $\mathcal{L}$. In der vorliegenden Arbeit werden zunächst die analytischen Eigenschaften dieses Operators untersucht und diese Kenntnis bei der Diskretisierung von $\mathbf{m}$ eingebracht: Es wird vorgeschlagen, die Magnetisierung $\mathbf{m}_h$ in einem L^2-Galerkin-Verfahren stückweise konstant anzusetzen und die Nebenbedingung durch Penalisierung zu berücksichtigen. Dieses Vorgehen wird durch die entsprechende a priori Analysis gerechtfertigt. Die Lösung ∇u_h von (3) kann für gegebenes diskretes $\mathbf{m}_h$ exakt berechnet werden. Adaptive Algorithmen zur numerischen Simulation des konvexifizierten Modells werden vorgestellt und durch a posteriori Fehleranalysis mathematisch fundiert. Dies erlaubt eine durch Indikatoren gesteuerte adaptive Netzverfeinerung. Der Aufbau der benötigten Daten – im wesentlichen zur Berechnung von ∇u_h sowie der Verfeinerungsindikatoren – wird durch hierarchische Matrizen und *panel clustering* effizient realisiert. Schließlich werden die erzielten Resultate anhand von numerischen Experimenten für $d = 2, 3$ bestätigt. Dabei werden uniachsiale Materialien wie z.B. Kobalt betrachtet, die besonders in Speichermedien ihre Anwendung finden, weil ihre Magnetisierung „stark“, d.h. gegenüber wechselnden äußeren Feldern relativ stabil ist.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **i**

1 Newton-Potential und Maxwell-Gleichung **1**
1.1 Die Banach-Räume $W_1^p(\Omega)$ . . . 2
1.2 Eigenschaften von Faltungen . . . 6
1.3 Maxwell-Gleichungen und der Satz von Stokes . . . 9
1.4 Definition des Newton-Potentials . . . 11
1.5 Klassische Abbildungseigenschaften des Newton-Potentials . . . 13
1.6 Verallgemeinerte Faltungen . . . 19
1.7 Eindeutige Lösbarkeit der Maxwell-Gleichung . . . 28

2 Das konvexifizierte Modell **33**
2.1 Das kontinuierliche Modell (RP) . . . 34
2.2 Die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ . . . 37
2.3 Ein Modellfall . . . 39
2.4 Das penalisierte Modell $(RP_{\varepsilon,\mathcal{A}})$ . . . 43
2.5 Das diskrete penalisierte Modell $(RP_{\varepsilon,h})$ . . . 49
2.6 A priori Abschätzungen für $(RP_{\varepsilon,h})$ . . . 52
2.7 A posteriori Abschätzungen für $(RP_{\varepsilon,h})$ . . . 57
2.8 Fastreguläre Triangulierungen und Kantensprünge . . . 60
2.9 Das stabilisierte diskrete Problem $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ . . . 62
2.10 A priori Abschätzungen für $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ . . . 65
2.11 A posteriori Abschätzungen für $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ . . . 68
2.12 Konvergenz der Stabilisierungsterme . . . 72

3 Algorithmen zur Implementierung von $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ **75**
3.1 Datenstrukturen und Newton-Verfahren . . . 76
3.2 Berechnung der Daten für das Newton-Verfahren . . . 78
3.2.1 Berechnung von $\mathbf{D}$ und $\mathbf{F}$ im Fall $d = 2$ . . . 78
3.2.2 Berechnung von $\mathbf{D}$ und $\mathbf{F}$ im Fall $d = 3$ . . . 83
3.3 Adaptive Netzverfeinerung für isotrope Netze . . . 85
3.4 Adaptive Netzverfeinerung zur Generierung anisotroper Netze . . . 91
3.5 Implementierung eines Glättungsfehlerschätzers . . . 97
3.6 Effizientere Berechnung von A und η mittels *panel clustering* . . . 100
3.6.1 Idee des *panel clustering* am Beispiel der Berechnung der Matrix $\mathbf{A}$ . . . 100
3.6.2 Cluster-Bäume . . . 101

3.6.3 Effiziente Berechnung von $\mathbf{A}$ . . . 103
3.6.4 Effiziente Berechnung von η . . . 105
3.7 Visualisierung des magnetischen Potentials u_h . . . 107

4 Numerische Experimente zu $(RP_{\varepsilon,h})$ 109
4.1 Zielsetzungen der experimentellen Untersuchungen . . . 110
4.2 Akademische Beispiele mit bekannter Magnetisierung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; B_2^d)$ . . . 113
4.2.1 Ein akademisches Beispiel mit Lösung $\mathbf{m} \in W^{1,\infty}(\Omega; B_2^2)$ . . . 115
4.2.2 Ein akademisches Beispiel mit Lösung $\mathbf{m} \notin H^1(\Omega; B_2^2)$ . . . 135
4.3 Beispiele für $d = 2$ mit unbekannter exakter Lösung . . . 151
4.3.1 Beispiele aus Carstensen-Prohl . . . 151
4.3.2 Einfluß nicht-konvexer Gebiete . . . 167
4.3.3 Einfluß eines unstetigen äußeren Feldes $\mathbf{f}$ . . . 172
4.4 Experimentelle Resultate zu $(RP_{\varepsilon,h})$ für $d = 2$ . . . 173
4.5 Numerische Experimente zu $(RP_{\varepsilon,h})$ für $d = 3$ . . . 178
4.5.1 Ein Beispiel analog zu Abschnitt 4.3.1 . . . 178
4.5.2 Einfluß eines unstetigen äußeren Feldes $\mathbf{f}$ für $d = 3$ . . . 179
4.6 Das stabilisierte Problem . . . 182
4.7 Problem (P) versus konvexifiziertes Problem (RP) . . . 185

Anhänge 188

A Berechnung der Randintegrale für $d = 2$ 189
A.1 Integrale vom Typus des Doppelschichtpotentials . . . 189
A.2 Integrale vom Typus des Einfachschichtpotentials . . . 195
A.3 Galerkin-Elemente für die Symmsche Integralgleichung . . . 197

B Berechnung der Randintegrale für $d = 3$ 201
B.1 Integrale vom Typus des Doppelschichtpotentials . . . 201
B.2 Integrale vom Typus des Einfachschichtpotentials . . . 203
B.3 Galerkin-Elemente für die Symmsche Integralgleichung . . . 204

Literaturverzeichnis 207

Curriculum Vitae 211

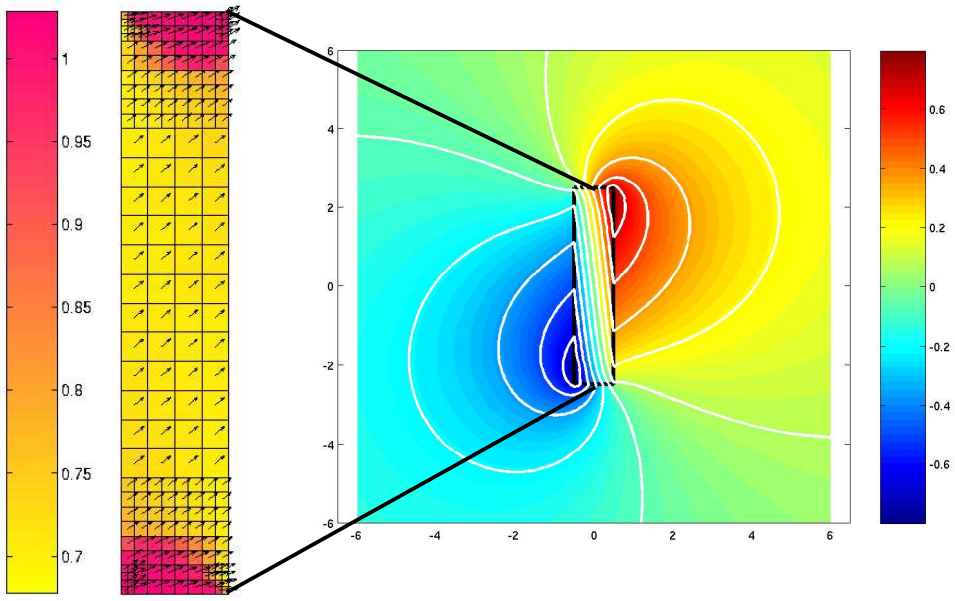


Abbildung 1: *Diskrete Magnetisierung* $\mathbf{m}_h$ *als Lösung des konvexifizierten diskreten penalisierten Modells (links) und zugehöriges magnetischen Potential* $u_h = \mathcal{L}\mathbf{m}_h$ *(rechts) auf einem adaptiv generierten Netz mit* $N = 206$ *Elementen im uniaxialen Fall mit* $\mathbf{e} = (1, 0)$ *und konstantem äußeren Feld* $\mathbf{f} = (.5, .5)$. *Die Länge* $|\mathbf{m}_h|$ *des Vektorfeldes sowie der Funktionswert des Potentials* u_h *sind farbig dargestellt. In der rechten Abbildung sind einige Potentiallinien weiß eingezeichnet.*

Einleitung

Zielsetzung. Das Verständnis mikromagnetischer Phänomene und Prozesse gewinnt zunehmend an Bedeutung als Schlüsseltechnologie in unserer Informationsgesellschaft. Ferromagnetische Materialien sind wichtiger Bestandteil in vielfältigen modernen Anwendungen, u.a. in magnetischen Sensoren oder Speichermedien. Mit dem technischen Fortschritt geht auch ein Interesse und Bedarf an zuverlässigen Simulationen mikromagnetischer Phänomene einher.

Mathematisches Modell. Allgemein anerkannte Grundlage aller quantitativen numerischen Simulationen ist das Modell von Landau und Lifshitz, bei dem die Gesamtenergie

$$E(\mathbf{m}) := \alpha \int_\Omega |\nabla \mathbf{m}(x)|^2 \, dx + \int_\Omega \phi\big(\mathbf{m}(x)\big) \, dx - \int_\Omega \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{m}(x) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{H}(x)|^2 \, dx \tag{1}$$

über Magnetisierungen $\mathbf{m} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ zu minimieren ist, die die nicht-konvexe Nebenbedingung $|\mathbf{m}| = 1$ fast überall erfüllen. Magnetisierung $\mathbf{m}$ und *Streufeld* $\mathbf{H}$ sind dabei über die Maxwellschen Gleichungen gekoppelt.

Eine Grundannahme jeder stationären mikromagnetischen Simulation ist, daß der Körper Ω magnetisch gesättigt ist, d.h. die Länge der Magnetisierung $|\mathbf{m}|$ auf Ω wird durch eine Funktion f beschrieben, die nur noch von der Temperatur θ abhängt,

$$|\mathbf{m}(x)| = f(\theta) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Liegt die Temperatur θ oberhalb des *Curie-Punktes* θ_0, so ist $f(\theta) = 0$. Im folgenden wird eine konstante Temperatur $\theta < \theta_0$ vorausgesetzt und deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit $|\mathbf{m}(x)| = 1$ für fast alle $x \in \Omega$ angenommen. Das Problem (P) besteht also darin, eine Minimalstelle

$$\mathbf{m} \in \mathcal{A} := \left\{ \widetilde{\mathbf{m}} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d) \,\middle|\, |\widetilde{\mathbf{m}}| = 1 \text{ fast überall in } \Omega \right\} \tag{2}$$

von E in $\mathcal{A}$ zu finden, d.h.

$$E(\mathbf{m}) = \min_{\widetilde{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}} E(\widetilde{\mathbf{m}}). \tag{3}$$

Hierbei ist für $\alpha > 0$ der Term $|\nabla \mathbf{m}|$ geeignet zu interpretieren bzw. die Menge der zulässigen Funktionen $\mathcal{A}$ weiter einzuschränken. Die Maxwellschen Gleichungen involvieren im stationären Fall lediglich das Streufeld $\mathbf{H}$ und die *magnetische Induktion* $\mathbf{B}(x) = \mathbf{H}(x) + \mathbf{m}(x)$ und lauten dann

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(x) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{curl} \mathbf{H}(x) = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^d. \tag{4}$$

Mit Hilfe des Satzes von Stokes kann $\mathbf{H} = -\nabla u$ geschrieben werden mit einer Funktion $u \in H^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$. Gleichung (4) vereinfacht sich damit zu

$$\operatorname{div}(-\nabla u + \mathbf{m}) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d. \tag{5}$$

Die Gesamtenergie $E(\mathbf{m})$ besteht nach (1) aus vier Anteilen. Der erste Summand ist die sogenannte *Austauschenergie*, die skaliert mit einem Faktor $\alpha > 0$ zur Gesamtenergie beiträgt. Die Austauschenergie bevorzugt offensichtlich Magnetisierungen $\mathbf{m}$, die in möglichst großen Bereichen von Ω konstant sind oder zumindest wenig oszillieren. Der Austauschparameter α ist in praxi sehr klein, und der Anteil der Austauschenergie an der Gesamtenergie ist bei Betrachtung eines größeren Körpers Ω verschwindend, vgl. DeSimone [26] und Hubert-Schäfer [36], so daß er häufig bei den Energiebetrachtungen weggelassen wird. Dies wird auch dadurch bedingt, daß die derzeitigen Rechnerkapazitäten nicht ausreichen, um die Magnetisierung makroskopischer Körper zu berechnen. Auf elementarer Ebene sorgt der Austauschenergieterm aber dafür, daß sich Teilgebiete von Ω herausbilden, in denen die Magnetisierung $\mathbf{m}$ quasi konstant ist. Man bezeichnet diese als *Weiss-Gebiete*. Sie werden durch sogenannte *Bloch-Wände* getrennt, an denen $\mathbf{m}$ rapide die Richtung wechselt.

Im zweiten Integral ist die *Anisotropiedichte* $\phi : S_2^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben, von der im Modell gefordert wird, daß sie eine glatte gerade Funktion ist, d.h. $\phi(-x) = \phi(x)$ für alle $x \in S_2^d$. Die *anisotrope Energie* beschreibt Materialeigenschaften des Körpers auf kristalliner Ebene. Man unterscheidet zwischen *uniachsialen* und *multiachsialen* Materialien. Bei uniachsialen Materialien wie z.B. Kobalt existiert eine sogenannte *easy axis* $\mathbf{e} \in S_2^d$ mit $\phi(\pm\mathbf{e}) = 0$ und $\phi(x) > 0$ für alle $x \in S_2^d$ mit $x \neq \pm\mathbf{e}$. Die Anisotropiedichte von Kobalt ist z.B. durch

$$\phi_{(Co)}(x) = C\left(1 - (x \cdot \mathbf{e})^2\right) \tag{6}$$

gegeben, Schrefl [56]. Bei multiachsialen Materialien existieren demgegenüber mehrere Richtungen $\mathbf{e}^{(1)}, \ldots, \mathbf{e}^{(n)} \in S_2^d$, die von der anisotropen Energie favorisiert werden, d.h. $\phi(\pm\mathbf{e}_j) = 0$. Zu den multiachsialen Materialien gehört zum Beispiel Eisen mit $n = d$. Die anisotrope Energie begünstigt also bestimmte Richtungen für Magnetisierungen, die besonders energiearm sind.

Der dritte Summand, die sogenannte *äußere Energie*, favorisiert Magnetisierungen, die in Richtung des äußeren Feldes $\mathbf{f}$ liegen. Die *magnetostatische Energie* (oder *Streufeldenergie*) schließlich verschwindet, wenn die Magnetisierung $\mathbf{m}$ divergenzfrei ist.

Young-Maß-Lösungen. Für $\alpha > 0$ kann man zeigen, daß das Minimierungsproblem zu $E(\mathbf{m})$ eine Lösung besitzt. Geht man aber mit DeSimone [26] zur makroskopischen Betrachtung über, d.h. zu $\alpha = 0$, so wird das Infimum im uniachsialen Fall in der Regel *nicht* mehr angenommen, vgl. James-Kinderlehrer [37, 38], da die anisotrope Energie nicht schwach folgenunterhalbstetig ist. Die Funktionen aus einer Infimalfolge haben immer feiner werdende Oszillationen, und schwache Limites von Teilfolgen nehmen die infimale Energie nicht an. Außerdem erfüllen die schwachen Limites nicht notwendig die Nebenbedingung $|\mathbf{m}| = 1$ fast überall. Wie üblich existieren Lösungen dann in generalisierter Form, und die beobachteten Mikrostrukturen werden durch Young-Maße charakterisiert, vgl. Tartar [59], Pedregal [49], Roubíček [53]. Eine Form der Relaxierung, die im folgenden mit $(P^{(YM)})$ bezeichnet wird, besteht darin, zu einem verallgemeinerten Energiefunktional

$$E^{(YM)}(\nu) := \int_\Omega \int_{S_2^d} \phi(y)\, d\nu_x(y)\, dx - \int_\Omega \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{m}(x)\, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{H}|^2\, dx \tag{7}$$

überzugehen mit $\mathbf{m}(x) := \int_{S_2^d} y\, d\nu_x(y)$ für fast alle $x \in \Omega$ und dem Streufeld $\mathbf{H}$ wie oben, vgl. DeSimone [26], Pedregal [49]. Dieses Funktional nimmt dann auf

$$\mathcal{A}^{(YM)} := \big\{ \nu = (\nu_x)_{x\in\Omega} \,\big|\, \nu \text{ Young-Maß} \big\} \tag{8}$$

sein Minimum an, und es gilt $\min\limits_{\nu\in\mathcal{A}^{(YM)}} E^{(YM)}(\nu) = \inf\limits_{\mathbf{m}\in\mathcal{A}} E(\mathbf{m})$. Diskretisierung und numerische Experimente zur Young-Maß-Relaxierung finden sich zum Beispiel in Kružík-Prohl [40], Kružík-Roubíček [41, 42] und Prohl [51]. In dieser Arbeit wird der effizientere Zugang über die Konvexifizierungen bevorzugt.

Relaxierung durch Konvexifizierung. Eine andere Möglichkeit zur Relaxierung im Fall $\alpha = 0$ wird nach DeSimone [26] dadurch gegeben, daß man die Anisotropiedichte ϕ durch ihre konvexe Hülle

$$\phi^{**}(x) := \sup_{\varphi\in\Phi} \varphi(x) \quad \text{für } x \in B_2^d \quad \text{mit } \Phi := \big\{ \varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \text{ konvex} \,\big|\, \varphi \le \phi|_{S_2^d} \big\} \tag{9}$$

ersetzt,

$$E^{(C)}(\mathbf{m}) := \int_\Omega \phi^{**}\big(\mathbf{m}(x)\big)\, dx - \int_\Omega \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{m}(x)\, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{H}|^2\, dx, \tag{10}$$

und die Menge der zulässigen Magnetisierungen konvexifiziert,

$$\mathcal{A}^{(C)} := \big\{ \mathbf{m} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d) \,\big|\, |\mathbf{m}| \le 1 \text{ fast überall} \big\}. \tag{11}$$

Dieses konvexe Minimierungsproblem wird im folgenden mit $(P^{(C)})$ bezeichnet. Die *Direkte Methode der Variationsrechnung* liefert die Existenz von Lösungen $\mathbf{m} \in \mathcal{A}^{(C)}$ mit

$$E^{(C)}(\mathbf{m}) = \min_{\widetilde{\mathbf{m}}\in\mathcal{A}^{(C)}} E^{(C)}(\widetilde{\mathbf{m}}).$$

DeSimone [26] zeigt, daß einerseits zu jeder Infimalfolge $(\mathbf{m}_k)$ in $\mathcal{A}$ zu E ein $\mathbf{m} \in \mathcal{A}^{(C)}$ existiert, so daß $\mathbf{m}$ der schwache Limes einer Teilfolge von $(\mathbf{m}_k)$ ist und umgekehrt auch jede Minimalstelle $\mathbf{m} \in \mathcal{A}^{(C)}$ von $E^{(C)}$ die Existenz einer Folge $(\mathbf{m}_k)$ in $\mathcal{A}$ nach sich zieht, die E infimiert und schwach gegen $\mathbf{m}$ konvergiert. Der schwache Grenzwert beschreibt statistische Mittelwerte, und die

Oszillationen einer Infimalfolge $(\mathbf{m}_k)$ zum Ursprungsproblem treten bei einer Minimalstelle $\mathbf{m}$ von $E^{(C)}$ nicht auf. Das zugehörige Young-Maß ν kann aber aus der Kenntnis von $\mathbf{m}$ gewonnen werden und stimmt dann mit einer Lösung des Problems $(P^{(YM)})$ überein.

Ein Vorteil bei der Betrachtung des konvexifizierten Problems $(P^{(C)})$ ist, daß dieses äquivalent durch die zugehörigen *Euler-Lagrange-Gleichungen*

$$\begin{aligned} &\nabla u + D\phi^{**}(\mathbf{m}) + \lambda \mathbf{m} = \mathbf{f}, \\ &|\mathbf{m}| \leq 1, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda(1 - |\mathbf{m}|) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

beschrieben werden kann. DeSimone [26] zeigt, daß für alle Lösungen $\mathbf{m}$ von (12) die magnetischen Potentiale u übereinstimmen, auch wenn die Magnetisierung $\mathbf{m}$ im allgemeinen nicht eindeutig zu sein braucht. Im uniachsialen Fall (6) ist aber auch die energieminimierende Magnetisierung $\mathbf{m}$ eindeutig, vgl. Carstensen-Prohl [24] für $d = 2$ bzw. Kapitel 2 für $d = 3$. Der Beweis in Carstensen-Prohl basiert im wesentlichen auf der Helmholtz-Zerlegung für $d = 2$ und überträgt sich daher nicht direkt auf den dreidimensionalen Fall. Der hier gegebene Beweis ist elementarerer Art und beruht lediglich auf Glättungstechniken, die dann die Eindeutigkeit für $d = 2, 3$ beweisen lassen.

Diskretisierung des konvexifizierten Problems. Bei der numerischen Simulation wird die Magnetisierung $\mathbf{m}$ regelmäßig als $\mathcal{T}$-stückweise konstant angesetzt, wobei $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von Ω sei. Die nicht-konvexe Nebenbedingung $|\mathbf{m}| \leq 1$ wird dabei durch einen Penalisierungsansatz berücksichtigt. Das diskrete Problem $(RP_{\varepsilon,h})$ lautet damit zunächst wie folgt: Zu gegebenen Daten Ω, ϕ, $\mathbf{f}$, einer Triangulierung $\mathcal{T}$ und einem Penalisierungsparameter $\varepsilon > 0$ finde man $\mathbf{m}_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^d)$ mit

$$\langle \nabla u_h + D\phi^{**}(\mathbf{m}_h) + \lambda_h \mathbf{m}_h \,;\, \widetilde{\mathbf{m}}_h \rangle = \langle \mathbf{f} \,;\, \widetilde{\mathbf{m}}_h \rangle \quad \text{für alle } \widetilde{\mathbf{m}}_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^d), \tag{13}$$

wobei u_h das magnetische Potential von $\mathbf{m}_h$ sei (bzw. eine Approximation davon),

$$\lambda_h := \varepsilon^{-1} \frac{\max\{|\mathbf{m}_h| - 1, 0\}}{|\mathbf{m}_h|} \tag{14}$$

und die duale Klammer $\langle \cdot \,;\, \cdot \rangle$ das L^2-Skalarprodukt bezeichne. Eine erste mathematische Rechtfertigung für diesen Ansatz in Form von a priori und a posteriori Analysis findet sich in Carstensen-Prohl [24] für $d = 2$ und eine reguläre Triangulierung von Ω in Dreiecke sowie – in unmittelbarer zeitlicher Folge jener Arbeit – in Funken-Prohl [29] für $d = 2, 3$. In diesen Arbeiten betrachten die Autoren anstelle des Vollraums $\mathbb{R}^d$ in (12) ein beschränktes Lipschitz-Gebiet $\widehat{\Omega} \Supset \Omega$ und fordern $u \in H_0^1(\widehat{\Omega})$ anstelle der korrekten Ausstrahlungsbedingungen. Dabei tritt natürlich ein weder meß- noch kontrollierbarer Fehler auf, der bereits bei der Visualisierung des Streufelds $\mathbf{H}_h$ zu einer diskreten ($\mathcal{T}$-stückweise konstanten) Magnetisierung $\mathbf{m}_h$ in der Verzerrung der Feldlinien sichtbar wird, vgl. Carstensen-Funken [17]. Erstmalige Beachtung bei der numerischen Behandlung von $(P^{(C)})$ findet der Vollraum für $d = 2$ bei Carstensen-Funken [17], die eine FEM-BEM-Kopplung vorschlagen und die a priori und a posteriori Analysis dazu geben. In allen drei Arbeiten werden dabei sowohl die Magnetisierung als auch das zugehörige Potential diskretisiert.

Aufbau der Arbeit und zentrale Resultate. In der vorliegenden Arbeit wird der Vollraum $\mathbb{R}^d$ bei den Maxwellschen Gleichungen betrachtet. Zu gegebener diskreter, $\mathcal{T}$-stückweise konstanter Magnetisierung $\mathbf{m}_h$ wird das zugehörige, bis auf eine additive Konstante eindeutige magnetische Potential u_h als Lösung von

$$\langle -\nabla u + \mathbf{m}_h \,;\, \nabla v \rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d). \tag{15}$$

exakt berechnet. Zu einer glatten Magnetisierung $\mathbf{m} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ ist nämlich mit dem Newton-Kern $G : \mathbb{R}^d\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$u = \mathcal{L}\mathbf{m} := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial G}{\partial x_j} * m_j \tag{16}$$

die bis auf Konstante eindeutige Lösung von (15), und der Operator kann mit Hilfe der Theorie von Calderón und Zygmund zu einem stetigen linearen Operator $\mathcal{L}$ von $L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ in einen geeigneten Banach-Raum $W_1^2(\mathbb{R}^d)$ fortgesetzt werden. Hier bezeichnet $W_1^2(\mathbb{R}^d)$ den Raum aller $H^1_{\ell oc}$-Funktionen, deren Gradient in $L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ liegt, welcher modulo der konstanten Funktionen und versehen mit der H^1-Halbnorm zu einem Banach-Raum wird. Räume dieser Art treten auch bei der analytischen Untersuchung der Navier-Stokes-Gleichungen auf, vgl. Galdi [30].

Kapitel 1 studiert den Operator $\mathcal{L}$. Es zeigt sich, daß für $d = 2$ im allgemeinen nur $u \in H^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^2)$ mit $u \notin L^2(\mathbb{R}^2)$, aber $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ gilt. Für $d = 3$ gilt hingegen $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, sofern der Körper Ω beschränkt ist. Die letzte Aussage für $d = 3$ ist in der Literatur hinreichend gewürdigt, aber offenbar nirgendwo explizit bewiesen worden, vgl. James-Kinderlehrer [37, 38], Luskin-Ma [43], DeSimone [26]. Das Resultat wird in der Literatur mehrfach falsch zitiert, und es wird behauptet, daß das Potential auch für $d = 2$ in $H^1(\mathbb{R}^2)$ liege. Ma [44] untersucht zwar den Operator $\mathcal{L}$, sein Beweis scheint aber unvollständig zu sein und zeigt auch nicht, daß das magnetische Potential für $d = 3$ bereits in $H^1(\mathbb{R}^3)$ liegt und nicht nur in $H^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^3)$.

Ausgehend von diesem mathematischen Resultat wird in Kapitel 2 ein Galerkin-Verfahren zur Diskretisierung von (12) vorgestellt, das für die Magnetisierung ebenfalls einen $\mathcal{T}$-stückweise konstanten Ansatz vorschlägt, dann aber zu gegebenem $\mathbf{m}_h$ das Potential u_h mittels (16) exakt berechnet. Das diskrete Modell $(RP_{\varepsilon,h})$ lautet also wie in (13) nur, daß das magnetische Potential u_h zusammen mit der diskreten Magnetisierung $\mathbf{m}_h$ die Gleichung (15) erfüllt. Die Galerkin-Elemente $\langle \nabla u_h \,;\, \widetilde{\mathbf{m}}_h \rangle$ werden analytisch berechnet. Dies involviert Randintegrale vom Typus des Einfachschichtpotentials, die in der Literatur zur Randelementmethode wohlbekannt sind und exakt berechnet werden können, vgl. Maischak [47, 48], Carstensen-Praetorius [23], Hackbusch [34]. Analog zum kontinuierlichen Fall läßt sich beweisen, daß das diskrete Problem eine Lösung besitzt, das magnetische Potential u_h für alle diskreten Lösungen $\mathbf{m}_h$ übereinstimmt und die Lösung $\mathbf{m}_h$ im uniachsialen Fall (6) eindeutig ist.

Die Analysis für die nachfolgenden a priori Abschätzungen orientiert sich an der Arbeit von Carstensen-Prohl [24]. Studiert wird im wesentlichen der uniachsiale Fall (6). Im Fall $\mathbf{m}, \lambda\mathbf{m} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ gilt die a priori Fehlerabschätzung

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)} + \|D\phi^{**}(\mathbf{m}) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon + h)$$

und damit lineare Konvergenz für glatte Daten und $\varepsilon = h \to 0$. Für die hier vorgeschlagene Diskretisierung gilt also dasselbe a priori Resultat wie für die diskreten Modelle aus Carstensen-Prohl [24], Funken-Prohl [29] und Prohl [51]. Ferner wird in Kapitel 2 die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} &\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)} + \|D\phi^{**}(\mathbf{m}) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \lesssim \|(|\mathbf{m}_h| - 1)_+\|_{L^2(\Omega)} + \|(|\mathbf{m}_h| - 1)_+\{(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\}\|^{1/2}_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad + \langle (\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}) \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_{\mathcal{T}} \rangle^{1/2} \end{aligned} \tag{17}$$

bewiesen. Hierbei bezeichnet der Index $(\cdot)_{\mathcal{T}}$ für eine Funktion $\mathbf{g} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ das elementweise Integralmittel $\mathbf{g}_{\mathcal{T}}|_T := \fint_T \mathbf{g}\, dx$. Das L^2-Skalarprodukt im letzten Term der rechten Seite von (17)

kann stets durch $2\,\|(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}$ majorisiert bzw. für glattes $\mathbf{m}$ elementweise mit einer Poincaré-Ungleichung abgeschätzt werden, so daß man a posteriori Abschätzungen erhält. Durch diese Abschätzungen werden lokalisierbare *zuverlässige* Fehlerschätzer μ bzw. η bereitgestellt, die dann eine indikatorgesteuerte adaptive Netzverfeinerung motivieren.

Die Degeneriertheit des Problems führt dazu, daß man a priori nur Konvergenz von $D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)$ gegen $D\phi^{**}(\mathbf{m})$ beweisen, aber keine Konvergenzaussagen über $\|\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}$ machen kann. Im uniachsialen Fall (6) für $d=2$ zeigt Prohl [51] erstmalig, daß man bei Betrachtung des Problems nach Carstensen-Prohl [24] – d.h. Betrachtung von $\widehat{\Omega}$ anstelle des Vollraums $\mathbb{R}^2$ in (15) – und unter Hinzunahme geeigneter Stabilisierungsterme für Diskretisierungen höherer Ordnung das a priori Resultat $\|\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}=O(h^{1/2})$ erhält. Ein analoges Resultat konnte für die vorgeschlagene Diskretisierung leider nicht verifiziert werden – auch wenn die numerischen Beispiele zumindest für $d=2$ zeigen, daß sowohl in z-Richtung als auch in Richtung der *easy axis* die L^2-Konvergenz vorliegt.

In Kapitel 3 wird die Implementierung für die nachfolgenden numerischen Experimente erläutert. Das diskrete Modell führt aufgrund der nicht-linearen Nebenbedingung auf eine nicht-lineare Gleichung, deren Lösung mit Hilfe des Newton-Verfahrens berechnet wird. Ein adaptiver Algorithmus, basierend auf den a posteriori Abschätzungen aus Kapitel 2, wird vorgestellt. Die Berechnung der Fehlerindikatoren erfolgt durch numerische Integration. Dies erfordert den Nachweis, daß die involvierten Integranden stetig sind und damit punktweise ausgewertet werden können. Sowohl das Bereitstellen der Daten für das Newton-Verfahren als auch die punktweise Auswertung des Streufelds $\nabla u_h(x)$ zur diskreten Magnetisierung $\mathbf{m}_h$ involviert vollbesetzte Matrizen, in deren Aufbau der wesentliche Anteil der Rechenzeit liegt. Es empfiehlt sich daher, diese Matrizen *nicht* vollständig exakt zu berechnen, sondern geeignet zu approximieren. Auf experimenteller Basis wird nachgewiesen, daß der Aufbau dieser Matrizen durch *panel clustering* effizient und gleichzeitig hinreichend exakt durchgeführt werden kann, vgl. Sauter [55], Börm-Grasedyck-Hackbusch [10], Hackbusch-Melenk [35]. Schließlich werden noch zwei Ansätze aus der Finite-Elemente-Literatur auf das konvexifizierte Problem zum Mikromagnetismus übertragen und empirisch getestet: Im Kontext der Finite Elemente Methoden gilt als gesichert, daß mit anisotropen Netzen gearbeitet werden muß, um für diskrete Lösungen die optimale Konvergenzrate zu erhalten. Deshalb wird ein weiterer Algorithmus vorgeschlagen, der die Triangulierung adaptiv anisotrop verfeinert. Schließlich wird noch ein Glättungsschätzer ζ auf Basis des *ZZ-Schätzers* vorgestellt. Glättungsschätzer bewähren sich im Finite-Elemente-Kontext bei vielfältigen Problemen und zeichnen sich insbesondere dadurch aus, daß sie bei Modellbeispielen den Fehler regelmäßig äußerst akkurat schätzen: Oft koinzidieren die entsprechenden Kurven von exaktem Fehler und Glättungsschätzer, vgl. Alberty-Carstensen [2], Bartels-Carstensen [6, 7, 8], Carstensen-Funken [18, 19, 20], Verfürth [60], Zienkiewicz-Zhu [63].

Im abschließenden Kapitel 4 werden die vorgestellten Verfahren für $d=2,3$ numerisch getestet. Das Hauptaugenmerk liegt zunächst auf der experimentellen Verifikation der a priori Ergebnisse zu $(RP_{\varepsilon,h})$ aus Kapitel 2 und der Diskussion über die optimale Wahl des Penalisierungsparameters $\varepsilon=h^s$ mit einer Konstante $s>0$. Die a priori Analysis empfiehlt die Wahl von $s\geq 1$. In den numerischen Beispielen wird der uniachsiale Modellfall (6) betrachtet. Es zeigt sich, daß eine Wahl $s>1$ angebracht scheint, falls der Lagrange-Multiplikator λ aus den Euler-Lagrange-Gleichungen (12) zum konvexifizierten Problem (RP) unstetig ist. Der Aufwand zur Berechnung einer diskreten Lösung hängt *nicht* kritisch von der Wahl von s ab, sondern wächst lediglich moderat mit s. Ferner zeigen die Beispiele erwartungsgemäß, daß sich bei uniformer Netzverfeinerung im allgemeinen nicht die optimale Konvergenzordnung $O(h)$ für die a priori Terme einstellt. Die-

ser Defekt läßt sich aber durch η- bzw. μ-gesteuerte Netzadaption beheben. Jede dieser adaptiven Strategien führt experimentell auf optimales Konvergenzverhalten. Ferner zeigt sich in den Experimenten, daß im uniachsialen Fall für $d = 2$ sogar *volle* L^2-Konvergenz von $\mathbf{m}_h$ gegen $\mathbf{m}$ vorliegt, und diese zumindest bei adaptiver Netzverfeinerung auch von optimaler Ordnung ist.

Danksagung. Mein erster Dank gebührt Professor Dr. Carsten Carstensen für die Vergabe und die Betreuung dieser Arbeit und Professor Dr. Ronald Hoppe für seine Bereitschaft, das Zweitgutachten anzufertigen. Die Anfänge meiner Arbeit wurden freundlicherweise durch das Graduiertenkolleg 357 „Effiziente Algorithmen und Mehrskalenmethoden“ an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel unterstützt. Von meinen zahlreichen Diskussionspartnern in den vergangenen Jahren seien Dr. Stefan Funken, der mir bei den anfänglichen Schwierigkeiten, die Integraloperatoren der Randelementmethode stabil zu implementieren, zur Seite gestanden ist, und Dr. Thomas Schrefl, der sich angeboten hat, mir den physikalischen Hintergrund meiner Arbeit näherzubringen, genannt. Schließlich gilt mein aufrichtigster Dank natürlich meinen Eltern, die mir das Studium der Mathematik erst ermöglicht haben.

Kapitel 1

Newton-Potential und Maxwell-Gleichung

In der Aufgabenstellung des Mikromagnetismus ist ein Energiefunktional $E(\mathbf{m})$ für gewisse, später behandelte Magnetisierungen $\mathbf{m} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ zu minimieren. Dabei tritt als Teilproblem die Lösung der Maxwellschen Gleichungen

$$\operatorname{div}(\mathbf{H} + \mathbf{m}) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{curl} \mathbf{H} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d \tag{1.1}$$

auf, um den magnetostatischen Anteil an der Gesamtenergie auszurechnen. Das erste Kapitel widmet sich dem Studium dieser Gleichungen. Im ersten Abschnitt erfolgt die Definition der involvierten Hilbert-Räume $W_n^2(\mathbb{R}^d)$. Dabei handelt es sich um Sobolev-Räume, die dadurch gekennzeichnet sind, daß man zu $u \in W_n^2(\mathbb{R}^d)$ nur noch die Ableitungen der Ordnungen 1 bis n in der L^2-Norm kontrollieren kann, u selbst aber nur noch lokal eine L^2-Funktion ist. Gleichung (1.1) kann im schwachen Sinn im Hilbert-Raum $W_1^2(\mathbb{R}^d)$ wie folgt äquivalent formuliert werden: Zu vorgegebener Magnetisierung $\mathbf{m} \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ ist eine Funktion $u \in W_1^2(\mathbb{R}^d)$ gesucht, so daß

$$\operatorname{div}(-\nabla u + \mathbf{m}) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \tag{1.2}$$

gilt. Der Hilbert-Raum $W_1^2(\mathbb{R}^2)$ garantiert eindeutige Lösbarkeit von (1.2) in $W_1^2(\mathbb{R}^2)$. Soweit basiert das Ergebnis nur auf abstrakter Hilbert-Raum-Theorie. In den folgenden Abschnitten erfolgt die Herleitung einer analytischen Darstellung des Lösungsoperators $\mathcal{L} : L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \to W_1^2(\mathbb{R}^d)$, der einer Magnetisierung $\mathbf{m}$ das zugehörige magnetische Potential $u = \mathcal{L}\mathbf{m}$ zuordnet. Gleichung (1.2) schreibt sich nämlich für eine hinreichend glatte Magnetisierung $\mathbf{m}$ in starker Form als

$$\Delta u = \operatorname{div} \mathbf{m} \quad \text{in } \mathbb{R}^d. \tag{1.3}$$

Bezeichnet G den Newton-Kern, so läßt sich für solch glattes $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_d)$ das magnetische Potential u also direkt als Summe gewisser Faltungen schreiben,

$$\mathcal{L}\mathbf{m} = G * \operatorname{div} \mathbf{m} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial G}{\partial x_j} * m_j, \tag{1.4}$$

und diese Darstellung bleibt auch für $\mathbf{m} \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ bestehen. Abschnitt 1.1 definiert die involvierten Banach-Räume $W_n^p(\Omega)$ und untersucht deren elementare Eigenschaften. Im Anschluß daran wiederholt Abschnitt 1.2 die Eigenschaften von Faltungen, so daß in Abschnitt 1.3 die Äquivalenz von (1.1) und (1.2) bewiesen werden kann. Abschnitt 1.4 wiederholt den Begriff des Newton-Potentials. Im fünften Abschnitt werden die klassischen Abbildungseigenschaften des Newton-Potentials hergeleitet, um später bei der Implementierung u und ∇u für stückweise konstantes $\mathbf{m}$ *exakt* berechnen

zu können. Außerdem wird gezeigt, daß (1.4) für glattes $\mathbf{m}$ tatsächlich eine Lösung von (1.3) definiert. Der Abschnitt 1.6 behandelt einen Ausschnitt aus der Theorie von Calderón und Zygmund und zeigt, daß sich Faltungsoperatoren, wie sie in Gleichung (1.4) auftreten, von den Testfunktionen $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ auf $L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ fortsetzen lassen. Dadurch kann dann schließlich in Abschnitt 1.7 eine analytische Darstellung des Operators $\mathcal{L}$ aus (1.4) bewiesen werden. Dabei wird ferner verifiziert, daß (1.2) für beliebiges $1 < p < \infty$ und $\mathbf{m} \in L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ eine eindeutige Lösung $u \in W_1^p(\Omega)$ besitzt.

1.1 Die Banach-Räume $W_1^p(\Omega)$

Für ein (möglicherweise) unbeschränktes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und $1 \le p < \infty$ sei

$$L^p_\nabla(\Omega;\mathbb{R}^d) := \left\{\mathbf{f} \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^d) \,\middle|\, \exists u \in W^{1,p}_{\ell oc}(\Omega) \quad \nabla u = \mathbf{f}\right\}$$

der Unterraum aller Funktionen $\mathbf{f}$ in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$, die sich als schwacher Gradient einer $W^{1,p}_{\ell oc}$-Funktion darstellen lassen.

Lemma 1.1. *$L^p_\nabla(\Omega;\mathbb{R}^d)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Für $1 < p < \infty$ ist der Banach-Raum $L^p_\nabla(\Omega;\mathbb{R}^d)$ reflexiv, $L^2_\nabla(\Omega;\mathbb{R}^d)$ ist ein Hilbert-Raum.*

Beweis. Sei $(\mathbf{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p_\nabla(\Omega;\mathbb{R}^d)$, die gegen ein $\mathbf{f} \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ konvergiert. Nach Definition ist die Existenz eines $u \in W^{1,p}_{\ell oc}(\Omega)$ mit $\mathbf{f} = \nabla u$ zu zeigen. Zunächst sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $W^{1,p}_{\ell oc}(\Omega)$ mit $\mathbf{f}_n = \nabla u_n$.
Sei $x_0 \in \Omega$ ein beliebiges Element. Für $j \in \mathbb{N}$ bezeichne Ω_j die Zusammenhangskomponente von $\Omega \cap U(x_0, j)$, die x_0 enthält. Für fixiertes $j \in \mathbb{N}$ definiere nun $v_n := u_n - \fint_{\Omega_j} u_n\,dx$. Nach Poincaré-Ungleichung konvergiert $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $W^{1,p}(\Omega_j)$ gegen eine Funktion $v \in W^{1,p}(\Omega_j)$. Insbesondere konvergieren die Gradienten in L^p, und damit folgt $\mathbf{f}|_{\Omega_j} = \nabla v$. Durch die Definition

$$u^{(j)} := v - \fint_{\Omega_1} v\,dx$$

erhält man eine Funktion $u^{(j)} \in W^{1,p}(\Omega_j)$ mit $\nabla u^{(j)} = \mathbf{f}|_{\Omega_j}$ und $\fint_{\Omega_1} u^{(j)}\,dx = 0$. Wegen

$$\nabla u^{(j-1)} = \mathbf{f}|_{\Omega_{j-1}} = \nabla u^{(j)}|_{\Omega_{j-1}}$$

existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $u^{(j-1)} = u^{(j)}|_{\Omega_{j-1}} + c$. Diese verschwindet aber wegen der Normierung auf Ω_1,

$$c = \int_{\Omega_1} \left(u^{(j-1)}(x) - u^{(j)}(x)\right) dx = \int_{\Omega_1} u^{(j-1)}(x)\,dx - \int_{\Omega_1} u^{(j)}(x)\,dx = 0.$$

Insgesamt wird also wegen $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$ durch

$$u(x) := u^{(j)}(x) \quad \text{für } x \in \Omega_j \text{ und } j \in \mathbb{N}$$

eine Funktion $u \in W^{1,p}_{\ell oc}(\Omega)$ wohldefiniert, und diese erfüllt $\nabla u = \mathbf{f}$. Damit ist gezeigt, daß $L^p_\nabla(\Omega;\mathbb{R}^d)$ ein abgeschlossener Teilraum von $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ ist. Für $1 < p < \infty$ ist $L^p_\nabla(\Omega;\mathbb{R}^d)$ insbesondere reflexiv, da sich Reflexivität auf abgeschlossene Teilräume vererbt. ■

Für ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und $1 \le p < \infty$ bezeichne

$$\mathcal{W}_1^p(\Omega) := \left\{u \in W^{1,p}_{\ell oc}(\Omega) \,\middle|\, \nabla u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)\right\}.$$

Die folgende Bemerkung ist die Wiedergabe eines Standardresultats über schwache Ableitungen, welches sich unmittelbar auf die Räume $\mathcal{W}_1^p(\Omega)$ überträgt.

Bemerkung. Für $u, v \in \mathcal{W}_1^p(\Omega)$ gilt genau dann $\nabla u = \nabla v$, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $u = v + c$. □

Also erhält man durch die Definition

$$\|u\|_{W_1^p(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)} \tag{1.5}$$

und durch Herausfaktorisieren

$$W_1^p(\Omega) := \mathcal{W}_1^p(\Omega)/\mathbb{R} \tag{1.6}$$

der konstanten Funktionen einen Banach-Raum.

Lemma 1.2. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $1 \leq p < \infty$. Durch (1.5) wird eine Norm $\|\cdot\|_{W_1^p(\Omega)}$ auf dem Faktorraum $W_1^p(\Omega)$ definiert, die $W_1^p(\Omega)$ zu einem Banach-Raum macht. Für $1 < p < \infty$ ist $W_1^p(\Omega)$ reflexiv und für $p = 2$ sogar Hilbert-Raum. Des weiteren definiert der Gradient $\nabla : W_1^p(\Omega) \to L_\nabla^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ einen isometrischen Isomorphismus.*

Beweis. Der Beweis folgt sofort durch die Feststellung, daß $\nabla : W_1^p(\Omega) \to L_\nabla^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ gerade nach Definition isometrisch und bijektiv ist. ■

Die Testfunktionen $\mathcal{D}(\Omega)$ und die klassischen Sobolev-Räume $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ sind auf natürliche Weise in den Raum $W_1^p(\mathbb{R}^d)$ eingebettet, indem jeder Funktion ihre Äquivalenzklasse zugeordnet wird. Als Schreibweise wird dafür vereinfachend $id_{\mathcal{D}(\Omega)} : \mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow W_1^p(\Omega)$ bzw. $id_{W^{1,p}(\Omega)} : W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W_1^p(\Omega)$ verwendet.

Bemerkungen. (a) $\mathcal{D}(\Omega)$ kann als Unterraum von $W_1^p(\Omega)$ aufgefaßt werden, denn die Einbettung $id_{\mathcal{D}(\Omega)}$ ist stets injektiv.

(b) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein (insb. unbeschränktes) Gebiet mit Lebesgue-Maß $|\Omega| = \infty$, so ist die Einbettung $id_{W^{1,p}(\Omega)} : W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W_1^p(\Omega)$ injektiv und stetig. □

Bei der klassischen Untersuchung der Räume $W_1^p(\Omega)$ tritt natürlich unmittelbar die Frage auf, ob und welche Dichtigkeitseigenschaften die eingeführten Räume besitzen. Im (später wesentlichen) Spezialfall $W_1^2(\mathbb{R}^d)$ kann die Dichtigkeit der Testfunktionen mit Hilfe der Fourier-Transformation leicht gezeigt werden.

Lemma 1.3. *Die Testfunktionen $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ liegen in $W_1^2(\mathbb{R}^d)$ dicht.*

Beweis. Es sei $H := \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}^{W_1^2(\mathbb{R}^d)}$ der Abschluß der Testfunktionen in $W_1^2(\mathbb{R}^d)$. Dann ist H ein abgeschlossener Teilraum des Hilbert-Raums $W_1^2(\mathbb{R}^d)$. Also gilt die Orthogonalzerlegung $W_1^2(\mathbb{R}^d) = H \oplus H^\perp$, und es ist nur noch $H^\perp = \{0\}$ zu zeigen. Für $u \in H^\perp$ gilt nach Definition

$$0 = \langle u\,;\,v\rangle_{W_1^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{für alle } v \in H \supseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^d),$$

d.h. u (bzw. jeder Repräsentant) ist harmonisch. Insbesondere ist $f := \partial u/\partial x_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$ harmonisch. Wegen $L^p(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ für alle $1 \leq p < \infty$ kann f als temperierte Distribution verstanden werden, siehe Werner [61, Seite 356f.]. Die Fourier-Transformation

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

ist linear und bijektiv und erfüllt in Multiindex-Notation

$$\mathcal{F}(D^\alpha v) = (-i)^{|\alpha|} x^\alpha \mathcal{F} v \quad \text{für alle } v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \text{ und alle Multiindices } \alpha \in \mathbb{N}_0^d.$$

Wegen $\Delta f = 0$ ergibt sich

$$0 = \mathcal{F}(\Delta f) = \sum_{j=1}^d \mathcal{F}\big(\partial^2 f / \partial^2 x_j\big) = \sum_{j=1}^d x_j^2 \mathcal{F} f = |x|^2 \mathcal{F} f, \quad \text{also} \quad \mathcal{F} f = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

Andererseits ist nach Satz von Plancherel $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ ein (isometrischer) Isomorphismus. Es gilt also $0 = \mathcal{F} f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und damit schließlich $f = 0$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$. ■

Daß sich das Ergebnis nicht so einfach auf den allgemeinen Fall überträgt, zeigen die folgenden elementaren Beispiele.

Beispiel. Für $p = 1 = d$ liegt $u := \arctan \in W_1^1(\mathbb{R})$ nicht im Abschluß der Testfunktionen, d.h. $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist *nicht* dicht in $W_1^1(\mathbb{R})$.

Beweis. Auf $W_1^1(\mathbb{R})$ wird durch

$$\Phi(v) := \int_{\mathbb{R}} v'(x)\, dx \quad \text{für } v \in W_1^1(\mathbb{R})$$

ein lineares, stetiges Funktional $\Phi \in W_1^1(\mathbb{R})^*$ gegeben. Für jede Testfunktion $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt $\Phi(v) = 0$. Andererseits folgt aus $u'(x) = 1/(1 + x^2)$ sofort

$$u \in W_1^1(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \Phi(u) > 0.$$

Aus Stetigkeitsgründen kann u damit nicht im Abschluß der Testfunktionen liegen. ■

Beispiel. Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ und $1 \le p < \infty$ ist $\mathcal{D}(\Omega)$ *nicht* dicht in $W_1^p(\Omega)$, denn der Abschluß von $\mathcal{D}(\Omega)$ bezüglich der Gradientennorm $\|\nabla(\cdot)\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)}$ ist nach Definition (bzw. Friedrichs-Ungleichung) gerade $W_0^{1,p}(\Omega)$. Schließlich folgt Wegen $W_0^{1,p}(\Omega) \subsetneqq W^{1,p}(\Omega) \subset W_1^p(\Omega)$ die Behauptung.

Beweis. Wegen $L^p(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ gilt definiert die Abbildung Φ aus dem vorausgegangenen Beispiel ein lineares, stetiges Funktional $\Phi \in W_1^p(\Omega)^*$, und $\Phi(u)$ verschwindet für jede Testfunktion $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Da aber für die Identität auf Ω trivialerweise $id \in W_1^p(\Omega)$ gilt, folgt die Behauptung. ■

Die Betrachtung der Banach-Räume $W_1^p(\Omega)$ wird durch den folgenden Satz motiviert, der für $p = 2$ die eindeutige Lösbarkeit der Maxwell-Gleichung in $W_1^2(\mathbb{R}^d)$ garantiert. In diesem Sinn ist also $W_1^2(\mathbb{R}^d)$ der *richtige* Raum.

Satz 1.4. *Zu $\mathbf{m} \in L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ existiert ein eindeutiges $u = u_{\mathbf{m}} \in W_1^2(\mathbb{R}^d)$ mit*

$$\operatorname{div}(-\nabla u + \mathbf{m}) = 0 \quad \textit{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d). \tag{1.7}$$

Der Operator $\mathcal{L} : L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \to W_1^2(\mathbb{R}^d), \mathbf{m} \mapsto u_{\mathbf{m}}$ ist linear und stetig mit Operatornorm $\|\mathcal{L}\| = 1$. Die Komposition

$$\nabla \circ \mathcal{L} : L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \to L^2_\nabla(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \subseteq L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$$

ist die L^2-Orthogonalprojektion auf $L^2_\nabla(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, und es gilt

$$L^2_\nabla(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)^\perp = \big\{\mathbf{m} \in H(\operatorname{div};\mathbb{R}^d) \,\big|\, \operatorname{div} \mathbf{m} = 0 \textit{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)\big\}.$$

Beweis. Nach Hölder-Ungleichung definiert

$$\Phi(v) := \langle \mathbf{m} \,;\, \nabla v\rangle \quad \text{für } v \in W_1^2(\mathbb{R}^d)$$

ein lineares, stetiges Funktional $\Phi \in W_1^2(\mathbb{R}^d)^*$ mit Norm $\|\Phi\| \le \|\mathbf{m}\|_{L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)}$, und (1.7) lautet umformuliert

$$\langle u \,;\, v\rangle_{W_1^2(\mathbb{R}^d)} = \Phi(v) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Wegen Lemma 1.3 und der Stetigkeit von Φ kann $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dabei durch den vollen Raum $W_1^2(\mathbb{R}^d)$ ersetzt werden. Der Darstellungssatz von Riesz liefert die eindeutige Existenz einer Lösung $u = \mathcal{L}\mathbf{m}$. Die Linearität des Operators $\mathcal{L}$ ist offensichtlich. Mit Hölder-Ungleichung folgt

$$\|u\|^2_{W_1^2(\mathbb{R}^d)} = \Phi(u) = \langle \nabla u \,;\, \mathbf{m}\rangle \le \|\mathbf{m}\|_{L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)}\|u\|_{W_1^2(\mathbb{R}^d)}$$

und deshalb $\|\mathcal{L}\mathbf{m}\|_{W_1^2(\mathbb{R}^d)} \le \|\mathbf{m}\|_{L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)}$. Die Operatornorm erfüllt also $\|\mathcal{L}\| \le 1$. Nun seien $\mathbf{m} \in L^2_\nabla(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ und $u \in W_1^2(\mathbb{R}^d)$ mit $\nabla u = \mathbf{m}$. Nach Definition von $\mathcal{L}\mathbf{m}$ gilt

$$\langle \mathcal{L}\mathbf{m} \,;\, v\rangle_{W_1^2(\mathbb{R}^d)} \overset{!}{=} \langle \mathbf{m} \,;\, \nabla v\rangle = \langle \nabla u \,;\, \nabla v\rangle = \langle u \,;\, v\rangle_{W_1^2(\mathbb{R}^d)} \quad \text{für alle } v \in W_1^2(\mathbb{R}^d).$$

Insbesondere folgt also $\mathcal{L}\mathbf{m} = u$ in $W_1^2(\mathbb{R}^d)$ und damit $\nabla(\mathcal{L}\mathbf{m}) = \nabla u = \mathbf{m}$. Also wirkt $\nabla \circ \mathcal{L}$ auf $L^2_\nabla(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ als Identität und ist damit eine Projektion. Nach Definition der Normen gilt

$$1 \le \|\nabla \circ \mathcal{L} : L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)\| = \|\mathcal{L} : L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \to W_1^2(\mathbb{R}^d)\| \le 1.$$

Folglich ist $\nabla \circ \mathcal{L}$ eine Projektion mit Operatornorm 1 und Bild $L^2_\nabla(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$. Also muß $\nabla \circ \mathcal{L}$ die Orthogonalprojektion auf diesen Raum sein. Die Charakterisierung des Orthogonalraums von $L^2_\nabla(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ folgt unmittelbar aus der Definition von $H(\mathrm{div};\mathbb{R}^d)$ und Lemma 1.3.

$$\begin{aligned} L^2_\nabla(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)^\perp &= \big\{\mathbf{f} \in L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \,\big|\, \forall u \in W_1^2(\mathbb{R}^d) \quad \langle \mathbf{f} \,;\, \nabla u\rangle = 0\big\} \\ &= \big\{\mathbf{f} \in L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \,\big|\, \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \quad \langle \mathbf{f} \,;\, \nabla u\rangle = 0\big\} \\ &= \big\{\mathbf{f} \in H(\mathrm{div};\mathbb{R}^d) \,\big|\, \operatorname{div}\mathbf{f} = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)\big\}. \end{aligned}$$

■

Bemerkung. Da die Einbettung $id : H^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W_1^2(\mathbb{R}^d)$ injektiv ist, gibt es höchstens eine Lösung $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ von (1.7). In den nächsten Abschnitten wird sich zeigen, wann für $d \ge 3$ die eindeutige Lösung $u \in W_1^2(\mathbb{R}^d)$ bereits durch eine H^1-Funktion repräsentiert wird. □

Für die Untersuchung der Regularität von u definiert man analog zu den gewöhnlichen Sobolev-Räumen die Räume $W_m^p(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Dazu wird zunächst wieder für ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ der Vektorraum

$$\mathcal{W}_m^p(\Omega) := \big\{u \in W^{m,p}_{\ell oc}(\Omega) \,\big|\, \nabla u \in W^{m-1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)\big\}$$

eingeführt und dann zum Quotientenraum

$$W_m^p(\Omega) := \mathcal{W}_m^p(\Omega)/\mathbb{R}$$

übergegangen, indem man nach den konstanten Funktionen faktorisiert. Induktiv erhält man aus dem bereits bewiesenen Lemma für $m = 1$ die Vollständigkeit von $W_m^p(\Omega)$ unter der Norm

$$\|u\|_{W_m^p(\Omega)} := \|\nabla u\|_{W^{m-1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)}. \tag{1.8}$$

Lemma 1.5. *Für jedes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und $1 \le p < \infty$ ist $W_m^p(\Omega)$ ein Banach-Raum. Dieser ist für $1 < p < \infty$ reflexiv und für $p = 2$ ein Hilbert-Raum. Der Gradient $\nabla : W_m^p(\Omega) \to W_\nabla^{m,p-1}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ definiert einen isometrischen Isomorphismus zwischen $W_m^p(\Omega)$ und*

$$W_\nabla^{m-1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d) := \big\{f \in W^{m-1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d) \,\big|\, \exists u \in W^{m,p}_{\ell oc}(\Omega) \quad \nabla u = f\big\}.$$

■

1.2 Eigenschaften von Faltungen

Für hinreichend glatte Funktionen $u, v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ist die Faltung $u * v$ durch

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)v(y)\,dy \tag{1.9}$$

definiert. Eine Substitution der Integrationsvariable zeigt die Kommutativität

$$u * v = v * u,$$

wobei die linke Seite genau dann wohldefiniert ist, wenn es die rechte ist.

Satz 1.6 (McLean [45, Seite 59f.]). *Für $1 \le p, q, r \le \infty$ mit $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $v \in L^q(\mathbb{R}^d)$ existiert die Faltung $u * v$ in $L^r(\mathbb{R}^d)$, und es gelten*

$$\|u * v\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \quad \textit{und} \quad \operatorname{supp}(u * v) \subseteq \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(v). \tag{1.10}$$

Für $q = p'$ ist $u * v \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ gleichmäßig stetig, d.h. insbesondere gilt

$$u * v \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d). \tag{1.11}$$

Im Fall $q = p'$ für $1 < p < \infty$ gilt sogar $u * v \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. ■

Bemerkung. Für $1 \le r \le \infty$ im vorausgegangenen Satz gilt stets $r \ge \max\{p, q\}$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\min\{p, q\} = 1$ gilt, denn triviale Abschätzung liefert $1/r = 1/p + 1/q - 1 \le 1/p$, also $r \ge p$ mit Gleichheit genau dann, wenn $q = 1$ gilt. □

Korollar 1.7. *Für $1 \le p \le \infty$, $u \in L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ und $v \in L^{p'}_c(\mathbb{R}^d)$ ist die Faltung wohldefiniert, und es gilt $u * v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis. Es sei $R > 0$ mit $\operatorname{supp}(v) \subseteq B(0, R)$. Für $x \in B(0, R)$ und $y \in \mathbb{R}^d$ mit $|y| > 2R$ gilt nach Dreiecksungleichung $|x - y| \ge |y| - |x| > R$ und damit insbesondere $v(x - y) = 0$. Mit $\widetilde{u} := u\chi_{B(0,2R)} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ gilt dann

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} v(x-y)u(y)\,dy = \int_{B(0,2R)} v(x-y)u(y)\,dy = (\widetilde{u} * v)(x) \text{ für alle } x \in B(0, R).$$

Nach Satz 1.6 ist die Faltung $\widetilde{u} * v$ global gleichmäßig stetig. Insbesondere ist $u * v$ stetig in $B(0, R)$. Für $R \to \infty$ folgt die Behauptung. ■

Satz 1.8 (McLean [45, Seite 62]). *Für $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \le p \le \infty$, $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $v \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^d)$ gilt*

$$u * v \in \mathcal{C}^k_b(\mathbb{R}^d) \textit{ mit } \partial^\alpha(u * v) = u * (\partial^\alpha v), \tag{1.12}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex ist mit $|\alpha| \le k$. Für $1 < p < \infty$ ist $u * v \in \mathcal{C}^k_0(\mathbb{R}^d)$. ■

Korollar 1.9. *Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$. Gelten entweder*

(i) *$u \in L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ und $v \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^d)$ oder*

(ii) $u \in L^p_c(\mathbb{R}^d)$ *und* $v \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$,

so folgt für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ *mit* $|\alpha| \leq k$

$$u * v \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d) \text{ mit } \partial^\alpha(u * v) = u * (\partial^\alpha v). \tag{1.13}$$

Beweis. Nach Hölder-Ungleichung ist $u * v$ in beiden Fällen punktweise wohldefiniert. (i) Es sei $R > 0$ beliebig mit $\operatorname{supp}(v) \subseteq B(0,R)$. Für $x \in B(0,R)$ und beliebiges $y \in \mathbb{R}^d$ mit $|y| > 2R$ folgt $|x-y| \geq |y| - |x| > R$, also $x - y \notin B(0,R)$ und insbesondere $v(x-y) = 0$. Es folgt

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} v(x-y)u(y)\,dy = \int_{B(0,2R)} v(x-y)u(y)\,dy = (\widetilde{u} * v)(x) \quad \text{für alle } x \in B(0,R)$$

mit $\widetilde{u} := u\chi_{B(0,2R)} \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Auf $\widetilde{u} * v$ läßt sich Satz 1.8 anwenden und liefert die Behauptung zunächst nur innerhalb der Kugel $B(0,R)$. Für $R \to \infty$ folgt aber (1.13). (ii) Ein analoges Vorgehen liefert in diesem Fall $(u * v)(x) = (u * \widetilde{v})(x)$ für $x \in B(0,R) \supseteq \operatorname{supp}(v)$, wobei $\widetilde{v} \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^d)$ eine Fortsetzung von $v|_{B(0,2R)}$ sei. Die Existenz einer solchen folgt aus der Existenz einer Zerlegung der Eins, siehe Forster [28, Seite 23]. Dieselben Argumente wie oben liefern das Ergebnis. ■

Satz 1.10. *Ist* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *offen und beschränkt und* $u \in L^1(\Omega)$, *so erfüllt für* $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ *die Faltung* $u * v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d \backslash \overline{\Omega})$.

Beweis. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^d \backslash \overline{\Omega}$ und $\mu := \operatorname{dist}(x_0, \Omega) > 0$. Für $x \in B(x_0, \mu/2)$ und $y \in \overline{\Omega}$ gilt dann

$$|x-y| \geq |x_0 - y| - |x - x_0| \geq \mu/2.$$

Deshalb ist mit $\omega := \overline{\Omega} \times B(x_0, \mu/2)$ die Funktion

$$i : \omega \to \mathbb{R}^d \backslash U(0, \mu/2), (y,x) \mapsto x - y$$

wohldefiniert. Also ist die stetige Komposition $w := v \circ i$ auf dem Kompaktum ω gleichmäßig stetig. Damit existiert zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $|w(y,x) - w(y',x')| \leq \varepsilon / \|u\|_{L^1(\Omega)}$ für alle $(y,x), (y',x') \in \omega$ mit $|(y,x) - (y',x')| \leq \delta$ gilt. Für $x \in B(x_0, \delta)$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned} |(u * v)(x_0) - (u * v)(x)| &= \Big| \int_\Omega u(y)\big\{v(x_0 - y) - v(x-y)\big\}\,dy \Big| \\ &= \Big| \int_\Omega u(y)\big\{w(y,x_0) - w(y,x)\big\}\,dy \Big| \\ &\leq \|u\|_{L^1(\Omega)} \sup_{y \in \Omega} |w(y,x_0) - w(y,x)| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

denn für $y \in \Omega$ gilt $|(y,x_0) - (y,x)| = |x_0 - x| \leq \delta$. ■

Satz 1.11. *Es seien* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *offen und beschränkt,* $u \in L^1(\Omega)$ *und* $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$. *Dann erfüllt die Faltung* $u * v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d \backslash \overline{\Omega})$, *und für die partiellen Ableitungen gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(u * v)(x) = \Big(u * \frac{\partial v}{\partial x_j}\Big)(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d \backslash \overline{\Omega}.$$

Beweis. Für $1 \le j \le d$ und $x \in \mathbb{R}^d \backslash \overline{\Omega}$ wird zunächst gezeigt, daß die partielle Ableitung in $\mathbf{e}_j$-Richtung existiert. Dazu sei $\mu := \operatorname{dist}(x, \Omega) > 0$ und $\omega := \Omega \times (-\mu/2, \mu/2)$. Definiere

$$i : \omega \to \mathbb{R}^d, (y, \lambda) \mapsto x - y + \lambda \mathbf{e}_j.$$

Dann gilt wegen

$$|x - y + \lambda \mathbf{e}_j| \ge |x - y| - |\lambda| \ge \mu/2 \quad \text{für } (y, \lambda) \in \omega$$

sofort $w := v \circ i \in \mathcal{C}^1(\bar{\omega})$, und damit sind alle partiellen von w gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum $\overline{\omega}$. Die Kettenregel für partielle Ableitungen liefert

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda}(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial v}{\partial x_k}\big(i(y, \lambda)\big) \underbrace{\frac{\partial i_k}{\partial \lambda}(y, \lambda)}_{=\delta_{jk}} = \frac{\partial v}{\partial x_j}\big(i(y, \lambda)\big)$$

und insbesondere

$$\frac{\partial v}{\partial x_j}(x - y) = \frac{\partial w}{\partial \lambda}(y, 0) \quad \text{für } y \in \Omega.$$

Da $w_\lambda := \partial w / \partial \lambda$ gleichmäßig stetig ist auf ω, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|w_\lambda(y, \lambda) - w_\lambda(y', \lambda')| \le \varepsilon / \|u\|_{L^1(\Omega)}$ für alle $(y, \lambda), (y', \lambda') \in \omega$ mit $|(y, \lambda) - (y', \lambda')| \le \delta$. Nun sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| \le \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\Big| \frac{(u * v)(x + \lambda \mathbf{e}_j) - (u * v)(x)}{\lambda} - \Big(u * \frac{\partial v}{\partial x_j}\Big)(x) \Big| \\
&\quad = \Big| \int_\Omega u(y) \Big\{ \frac{v(x - y + \lambda \mathbf{e}_j) - v(x - y)}{\lambda} - \frac{\partial v}{\partial x_j}(x - y) \Big\} \, dy \Big| \\
&\quad = \Big| \int_\Omega u(y) \Big\{ \frac{w(y, \lambda) - w(y, 0)}{\lambda} - w_\lambda(y, 0) \Big\} \, dy \Big| \\
&\quad \le \|u\|_{L^1(\Omega)} \sup_{y \in \Omega} \Big| \frac{w(y, \lambda) - w(y, 0)}{\lambda} - w_\lambda(y, 0) \Big|.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Fixiere ein beliebiges $y \in \Omega$. Nach Mittelwertsatz in $1D$ existiert ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| \le |\lambda| \le \delta$ und

$$w_\lambda(y, \xi) = \frac{\partial w}{\partial \lambda}(y, \xi) = \frac{w(y, \lambda) - w(y, 0)}{\lambda}.$$

Deshalb ergibt sich

$$\Big| \frac{w(y, \lambda) - w(y, 0)}{\lambda} - w_\lambda(y, 0) \Big| = |w_\lambda(y, \xi) - w_\lambda(y, 0)| \le \varepsilon / \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Zusammen mit (1.14) ist damit gezeigt, daß $u * v$ in x_j-Richtung auf $\mathbb{R}^d \backslash \overline{\Omega}$ partiell differenzierbar ist, und es gilt $\partial(u * v)/\partial x_j = u * (\partial v / \partial x_j)$. Mit dem vorausgegangenen Satz ist diese partielle Ableitung wegen $\partial v / \partial x_j \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d \backslash \overline{\Omega})$ sogar stetig, und, da j beliebig war, folgt $u * v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d \backslash \overline{\Omega})$.■

Der folgende Satz benötigt die Existenz von sog. Mollifier-Funktionen: Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ sind dies Funktionen $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\psi_\varepsilon \ge 0, \quad \operatorname{supp} \psi_\varepsilon = B(0, \varepsilon) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon \, dx = 1. \tag{1.15}$$

Die Existenz solcher Funktionen wird im wesentlichen auf

$$\Psi_\varepsilon(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|-\varepsilon}\right) & \text{für } |x| < \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zurückgeführt.

Satz 1.12 (McLean [45, Seite 63]). *Für $1 \le p < \infty$ und $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ gelten die Abschätzungen*

$$\|\psi_\varepsilon * u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \text{und} \quad \|\psi_\varepsilon * u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \omega_p(u,\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \tag{1.16}$$

mit

$$\omega_p(u,\varepsilon) = \sup_{x\in B(0,\varepsilon)} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u(y-x) - u(y)|^p \, dy \Big)^{1/p}. \qquad \blacksquare$$

Korollar 1.13. *Definiert man $u_j := u\chi_{B(0,j)}$ und $u_{j,\varepsilon} := \psi_\varepsilon * u_j$, so zeigt Satz 1.12, daß $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dicht ist in $L^p(\mathbb{R}^d)$ für $1 \le p < \infty$.* $\blacksquare$

1.3 Maxwell-Gleichungen und der Satz von Stokes

Die schwache Formulierung der Maxwell Gleichungen in $L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ für einen Magneten Ω und $1 \le p < \infty$ lautet wie folgt. Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet für $d = 2,3$ und $\mathbf{m} \in L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ eine Magnetisierung mit

$$|\mathbf{m}(x)| = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \Omega, \\ 1 & \text{für } x \in \Omega. \end{cases}$$

Gesucht ist ein magnetisches Feld $\mathbf{H} \in L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ mit

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}\mathbf{H} &= 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \text{ bzw. } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3), \\ \operatorname{div}(\mathbf{H}+\mathbf{m}) &= 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Hierbei ist die Distribution $\operatorname{curl}\mathbf{H}$ durch

$$\operatorname{curl}\mathbf{H} := \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_2} & \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \quad \text{für } d = 2, \\ \left(\frac{\partial \mathbf{H}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathbf{H}_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x_2}\right) & \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3) \quad \text{für } d = 3 \end{cases} \tag{1.18}$$

definiert, vgl. Carstensen-Bartels-Jansche [5], Girault-Raviart [31]. Die erste wesentliche Feststellung ist, daß $\mathbf{H} \in L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{curl}\mathbf{H} = 0$ dank des Satzes von Stokes als Potential geschrieben werden kann, $\mathbf{H} = -\nabla u$ für eine geeignete Funktion $u \in W^{1,p}_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$.

Lemma 1.14 (Satz von Stokes auf $\mathbb{R}^d$, $d = 2,3$). *Für $d = 2,3$ und $1 \le p < \infty$ gilt die Gleichheit*

$$L^p_\nabla(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) = \big\{\mathbf{f} \in L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \,\big|\, \operatorname{curl}\mathbf{f} = 0\big\},$$

d.h. $\mathbf{f} \in L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ erfüllt genau dann im distributionellen Sinn $\operatorname{curl}\mathbf{f} = 0$, wenn es eine Funktion $u \in W^{1,p}_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ mit $\mathbf{f} = \nabla u$ gibt. Das Potential u ist bis auf konstante Verschiebung eindeutig.

Der Beweis wird mit Hilfe des klassischen Satzes von Stokes für einfachzusammenhängende beschränkte $\mathcal{C}^1$-Gebiete erbracht.

Satz 1.15 (Satz von Stokes, Königsberger [39, Seite 193f.]). *Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, ein sternförmiges, beschränktes $\mathcal{C}^1$-Gebiet und $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{curl} \mathbf{f} = 0$ punktweise in Ω. Dann existiert eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ mit $\mathbf{f} = \nabla u$. Das Potential u ist bis auf konstante Verschiebung eindeutig.* ■

Des weiteren bedarf der Beweis der folgenden Notation. Für eine skalarwertige Distribution $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bezeichne ferner

$$\operatorname{curl} f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}, -\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big) \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^2).$$

Mit dieser Notation zeigt elementares Rechnen mit Distributionen für $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^d$

$$\langle \operatorname{curl} \mathbf{f} \,;\, v\rangle = \langle \mathbf{f} \,;\, \operatorname{curl} v\rangle$$

für alle Testfunktionen $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ im Fall $d = 2$ bzw. $v \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ im Fall $d = 3$.

Beweis von Lemma 1.14. Zunächst gelte $\mathbf{f} = \nabla u$ für eine Funktion $u \in W^{1,p}_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$, und es ist $\operatorname{curl} \mathbf{f} = 0$ zu zeigen. Ohne Einschränkung wird nur der Fall $d = 2$ betrachtet, $d = 3$ folgt analog durch vektorweises Vorgehen. Für eine beliebige Testfunktion $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ gilt nach Definition der distributionellen Ableitung

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{curl} \nabla u \,;\, v\rangle &= \langle \operatorname{curl}(u_{,1}, u_{,2}) \,;\, v\rangle = \langle u_{,21} - u_{,12} \,;\, v\rangle = \langle u_{,21} \,;\, v\rangle - \langle u_{,12} \,;\, v\rangle \\ &= \langle u \,;\, v_{,21}\rangle - \langle u \,;\, v_{,12}\rangle = 0\end{aligned}$$

wegen $v_{,21} = v_{,12}$. Nun gelte umgekehrt $\operatorname{curl} \mathbf{f} = 0$ in $\mathbb{R}^d$ im distributionellen Sinn. Es bezeichnen ψ_ε für $\varepsilon > 0$ die Mollifier-Funktionen, die in Abschnitt 1.2 eingeführt worden sind. Nach Satz 1.8 gilt $\psi_\varepsilon * \mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty_b(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, und mit Satz 1.12 konvergiert $\psi_\varepsilon * \mathbf{f}$ gegen $\mathbf{f}$ in $L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$.

Nun sei $j \in \mathbb{N}$. Im ersten Schritt zeigt man, daß auf $\Omega := U(0, j)$ die distributionelle Gleichheit $\operatorname{curl}(\psi_\varepsilon * \mathbf{f}) = 0$ gilt. Sei $v \in \mathcal{D}(\Omega)^k$ mit $k = 1$ für $d = 2$ bzw. $k = 3$ für $d = 3$. Dann gilt für die Translation trivialerweise $v(\cdot + y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$. Es folgt

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{curl}(\psi_\varepsilon * \mathbf{f}) \,;\, v\rangle = \langle \psi_\varepsilon * \mathbf{f} \,;\, \operatorname{curl} v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} (\psi_\varepsilon * \mathbf{f})(x) \cdot \operatorname{curl} v(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(y) \mathbf{f}(x-y) \cdot \operatorname{curl} v(x)\, dy\, dx.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\psi_\varepsilon(y)\mathbf{f}(x-y) \cdot \operatorname{curl} v(x)|\, dy\, dx &\le \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\psi_\varepsilon(y)|\, |\mathbf{f}(x-y)|\, |\operatorname{curl} v(x)|\, dy\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (|\psi_\varepsilon| * |\mathbf{f}|)(x) |\operatorname{curl} v|(x)\, dx \\ &\le \||\psi_\varepsilon| * |\mathbf{f}|\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|\operatorname{curl} v\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} < \infty,\end{aligned}$$

und deshalb kann im folgenden der Satz von Tonelli-Fubini angewandt werden. Damit folgt aus Gleichung (1.19) unter Anwendung der Translationsinvarianz des inneren Integrals

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{curl}(\psi_\varepsilon * \mathbf{f}) \,;\, v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(y) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{f}(x-y)\cdot \operatorname{curl} v(x)\,dx\,dy \\ &= \int_{B(0,\varepsilon)} \psi_\varepsilon(y) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{f}(x-y)\cdot \operatorname{curl} v(x)\,dx\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(y) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{f}(x)\cdot \operatorname{curl} v(x+y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Für fixiertes $y \in \mathbb{R}^d$ ist $v(\cdot + y)$, wie oben erwähnt, eine Testfunktion mit Träger in $\mathbb{R}^d$ (anstelle von $\Omega = U(0,j)$). Das innere Integral verschwindet daher,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{f}(x)\cdot \operatorname{curl} v(x+y)\,dx = \langle \mathbf{f} \,;\, \operatorname{curl} v(\cdot + y)\rangle = \langle \operatorname{curl} \mathbf{f} \,;\, v(\cdot + y)\rangle = 0.$$

Insgesamt folgt wie behauptet $\operatorname{curl}(\psi_\varepsilon * \mathbf{f}) = 0$ in $\mathcal{D}'(U(0,j))$. Wegen $\psi_\varepsilon * f \in \mathcal{C}(U(0,j))$ erhält man damit aber auch $\operatorname{curl}(\psi_\varepsilon * \mathbf{f}) = 0$ *punktweise* in $U(0,j)$ aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung. Nach dem klassischen Satz von Stokes 1.15 existiert auf $U(0,j)$ ein eindeutiges glattes Potential $u_{j,\varepsilon}$ mit $\psi_\varepsilon * \mathbf{f}|_{U(0,j)} = \nabla u_{j,\varepsilon}$ und $\int_{U(0,1)} u_{j,\varepsilon} = 0$. Es gilt $\nabla u_{j,\varepsilon} = \psi_\varepsilon * \mathbf{f}|_{U(0,j)} \to \mathbf{f}|_{U(0,j)}$ in $L^p(\Omega_j;\mathbb{R}^d)$ für $\varepsilon \to 0$. Insbesondere ist $(\nabla u_{j,\varepsilon})_\varepsilon$ eine Cauchy-Folge in $L^p(U(0,j);\mathbb{R}^d)$, und nach Poincaré-Ungleichung ist $(u_{j,\varepsilon})_\varepsilon$ damit eine Cauchy-Folge in $W^{1,p}(U(0,j))$. Also existiert ein $u_j \in W^{1,p}(U(0,j))$ mit $u_j = \lim_{\varepsilon\to 0} u_{j,\varepsilon}$ in $W^{1,p}(U(0,j))$. Es gelten zum einen $\nabla u_j = \mathbf{f}|_{U(0,j)}$ und zum anderen $\int_{U(0,1)} u_j\,dx = 0$ aus Stetigkeitsgründen.

Wegen $\nabla u_j = f|_{U(0,j)} = \nabla u_{j+1}|_{U(0,j)}$ ist $u_{j+1} - u_j$ auf $U(0,j)$ konstant, und die Normierung $\int_{U(0,1)} u_j\,dx = 0 = \int_{U(0,1)} u_{j+1}\,dx$ impliziert $u_j = u_{j+1}|_{U(0,j)}$. Insgesamt definiert

$$u(x) := u_j(x) \quad \text{für } x \in U(0,j) \text{ und } j \in \mathbb{N}$$

eine Funktion $u \in W^{1,p}_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ mit $\nabla u = \mathbf{f}$ in $\mathbb{R}^d$. ■

Bemerkung. In Korollar 1.33 kann des weiteren gezeigt werden, daß für $d = 3$ und $\mathbf{f} \in L^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{curl} \mathbf{f} = 0$ sogar ein eindeutiges $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\mathbf{f} = \nabla u$ existiert. □

1.4 Definition des Newton-Potentials

Definiere den Newton-Kern $G : \mathbb{R}^d \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x) := \begin{cases} -\frac{1}{|S_2^d|}\,\log|x| & \text{für } d = 2, \\ \frac{1}{(d-2)|S_2^d|}\,\frac{1}{|x|^{d-2}} & \text{für } d > 2, \end{cases} \tag{1.20}$$

wobei $|S_2^d|$ das Oberflächenmaß der euklidischen Einheitskugel $B_2^d = B(0,1)$ in $\mathbb{R}^d$ bezeichne,

$$|S_2^d| = d|B_2^d| \text{ mit } |B_2^d| = \frac{2\pi^{d/2}}{d\,\Gamma(d/2)}, \tag{1.21}$$

siehe FORSTER [28, Seite 145]. Hier ist Γ die Gauß-Funktion, d.h. insbesondere gelten $|B_2^d| = \pi$ für $d = 2$ und $|B_2^d| = 4\pi/3$ für $d = 3$ wegen $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Für die beiden später interessanten Fälle gilt also $|S_2^2| = 2\pi$ sowie $|S_2^3| = 4\pi$ und damit

$$G(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x| & \text{für } d = 2, \\ +\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|} & \text{für } d = 3. \end{cases}$$

Der Kern G ist außerhalb der 0 beliebig glatt, d.h. $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$, und elementares Ableiten liefert für $x \neq 0$ und $1 \leq j, k \leq d$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} G(x) = -\frac{1}{|S_2^d|} \frac{x_j}{|x|^d} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} G(x) = \frac{1}{|S_2^d|} \frac{\delta_{jk}|x|^2 - d x_j x_k}{|x|^{d+2}}, \tag{1.22}$$

wobei δ_{jk} das Kronecker-Symbol bezeichne. Insbesondere ist der Newton-Kern G also harmonisch, d.h. $\Delta G = 0$ in $\mathbb{R}^d$. Des weiteren bestehen die trivialen Abschätzungen

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x_j} G(x)\Big| \leq \frac{1}{|S_2^d|} |x|^{1-d} \quad \text{und} \quad \Big|\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} G(x)\Big| \leq \frac{d}{|S_2^d|} |x|^{-d}. \tag{1.23}$$

Eine elementare Rechnung mit Polarkoordinaten liefert das folgende Lemma.

Lemma 1.16. *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und die Funktion $u : \mathbb{R}^d \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|^\alpha$ gelten die beiden folgenden Aussagen*

(i) *Es gilt genau dann $u \in L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$, wenn $\alpha + d > 0$ ist. In diesem Fall erhält man*

$$\int_{B(0,\varepsilon)} |x|^\alpha \, dx = \frac{|S_2^d|}{\alpha + d} \varepsilon^{\alpha+d} \quad \textit{für alle } \varepsilon > 0.$$

(ii) *Für $\varepsilon > 0$ gilt genau dann $u \in L^1(\mathbb{R}^d \backslash B(0,\varepsilon))$, wenn $\alpha + d < 0$ ist. In diesem Fall ergibt sich*

$$\int_{\mathbb{R}^d \backslash B(0,\varepsilon)} |x|^\alpha \, dx = -\frac{|S_2^d|}{\alpha + d} \varepsilon^{\alpha+d} \quad \textit{für alle } \varepsilon > 0.$$

Für $\alpha > 0$ erfüllt die Funktion $u(x) := (\log|x|)^\alpha$

$$u \in L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^d) \textit{ mit } \int_{B(0,\varepsilon)} (\log|x|)^\alpha \, dx = |S_2^d| \frac{\varepsilon^d}{d} \big(\log(\varepsilon\alpha) - 1\big). \qquad \blacksquare$$

Die Anwendung des vorausgegangenen Lemmas auf den Newton-Kern zeigt für $1 \leq p \leq \infty$

$$\begin{aligned} G &\in L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^d) \quad \text{für } d < 2\,\frac{p}{p-1}, \\ \frac{\partial}{\partial x_j} G &\in L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^d) \quad \text{für } d < \frac{p}{p-1}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} G &\notin L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Ferner gelten

$$\begin{aligned} \int_{B(0,\varepsilon)} |G(x)|\,dx &= \begin{cases} \frac{1}{2}\big(\log(\varepsilon)-1\big)\,\varepsilon^2 & \text{für } d=2, \\ \frac{1}{2(2-d)}\,\varepsilon^2 & \text{für } d>2, \end{cases} \\ \int_{B(0,\varepsilon)} \Big|\frac{\partial}{\partial x_j}\,G(x)\Big|\,dx &\le \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine hinreichend glatte Dichte $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert

$$w(x) := \int_\Omega G(x-y)f(y)\,dy \qquad (x \in \mathbb{R}^d) \tag{1.25}$$

formal das Newton-Potential. Die Abbildungseigenschaften von $f \mapsto w$ werden in den folgenden Abschnitten untersucht. Das Newton-Potential w einer Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ist nach Definition gerade deren Faltung mit dem Newton-Kern, $w = G * f$.

1.5 Klassische Abbildungseigenschaften des Newton-Potentials

Um das Newton-Potential strukturell besser zu verstehen, werden im folgenden allgemeiner Funktionen betrachtet, die homogen von einem Grad $\alpha \in \mathbb{R}$ sind.

Definition. Eine Funktion $h : \mathbb{R}^d\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ ist *homogen vom Grad* $\alpha \in \mathbb{R}$, falls gilt

$$h(\lambda x) = \lambda^\alpha h(x) \quad \text{für alle } \lambda > 0, x \neq 0. \qquad \square$$

Mit den Gleichungen (1.22) ist bereits gezeigt worden, daß die ersten partiellen Ableitungen des Newton-Kerns homogen vom Grad $(1-d)$ und die zweiten partiellen Ableitungen homogen vom Grad $-d$ sind.

Lemma 1.17. (i) *Ist $h : \mathbb{R}^d\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ meßbar und homogen vom Grad $\alpha > -d$, so ist $h \in L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$.*

(ii) *Ist $h : \mathbb{R}^d\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, und existiert die partielle Ableitung $\kappa := \partial h/\partial x_j$, so ist κ homogen vom Grad $\alpha - 1$.*

(iii) *Ist $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$ homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{Z}$, so gilt*

$$|h(x)| \le c_1|x|^\alpha \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$$

mit der Konstante $c_1 = \max_{y \in S_2^d} |h(y)| \ge 0$.

Beweis. Die Aussage (i) folgt unmittelbar aus Lemma 1.16, und Behauptung (ii) folgt durch Hinschreiben des Grenzwertes. Für $x \neq 0$ und $\lambda > 0$ gelten

$$\begin{aligned} \kappa(\lambda x) &= \lim_{t\to 0} \frac{h(\lambda x + t\mathbf{e}_j) - h(\lambda x)}{t} \\ &= \lambda^\alpha \lim_{t\to 0} \frac{h(x + t/\lambda\,\mathbf{e}_j) - h(x)}{t} \\ &= \lambda^{\alpha-1} \lim_{t\to 0} \frac{h(x + t/\lambda\,\mathbf{e}_j) - h(x)}{t/\lambda} \\ &= \lambda^{\alpha-1}\kappa(x). \end{aligned}$$

(iii) Für $x \neq 0$ gilt $h(x)| = |x|^\alpha |h(x/|x|)| \leq |x|^\alpha \max_{y \in S_2^d} |h(y)|$. ■

Die beiden folgenden Sätze seien zunächst nur wiedergegeben und im Anschluß daran durch die Anwendung auf das Newton-Potential motiviert. Die Beweise finden sich am Ende dieses Abschnitts.

Satz 1.18. *Es seien $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d \backslash \{0\}) \cap L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$. Die partiellen Ableitungen $h_j := \partial g / \partial x_j$ seien homogen vom Grad $1-d$, und es gelte*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{B(0,\varepsilon)} |g(x)| \, dx = 0. \tag{1.26}$$

Dann folgt

$$g * f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_j}(g * f) = h_j * f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d). \tag{1.27}$$

Satz 1.19. *Es seien $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ homogen vom Grad $1-d$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $f \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ für $0 < \alpha < 1$. Dann gilt für die Faltung $h * f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d \backslash \partial\Omega) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$. Für die partiellen Ableitungen gilt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^d \backslash \overline{\Omega}$*

$$\frac{\partial (h * f)}{\partial x_j}(x) = \Big(\frac{\partial h}{\partial x_j} * f \Big)(x) = \int_\Omega f(x) \frac{\partial h}{\partial x_j}(x-y) \, dy. \tag{1.28}$$

Ist $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit $\Omega \subseteq \Omega_0$, so gilt für alle $x \in \Omega$

$$\frac{\partial (h * f)}{\partial x_j}(x) = \int_{\Omega_0} \big(f(y) - f(x) \big) \frac{\partial h}{\partial x_j}(x-y) \, dy - f(x) \int_{\partial\Omega_0} h(x-y) n_j(y) \, ds_y. \tag{1.29}$$

Induktiv erhält man aus den vorausgegangenen Ergebnissen das folgende Korollar.

Korollar 1.20. *Es sei $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ eine Funktion, deren partiellen Ableitungen $\partial g / \partial x_j$ homogen vom Grad $1-d$ seien, und es gelte (1.26). Für $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq \alpha < 1$ und $f \in \mathcal{C}_c^{k+\alpha}(\mathbb{R}^d)$ folgt dann*

$$g * f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad g * f \in \mathcal{C}^{k+2}(\mathbb{R}^d) \quad \text{für } \alpha > 0.$$ ■

Vor den Beweisen von Satz 1.18 und 1.19 sei die Anwendung auf das Newton-Potential diskutiert. Da $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \backslash \{0\}) \cap L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ ist und die partiellen Ableitungen des Newton-Kerns homogen vom Grad $1-d$ sind, lassen sich die beiden vorausgegangenen Sätze anwenden. Insbesondere zeigt die Anwendung von Satz 1.19, daß G die Fundamentallösung des Laplace-Operators ist, d.h. es gilt der folgende Satz.

Satz 1.21 (Gilbarg-Trudinger [32, Seite 54f.]). *Für eine beschränkte offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine Funktion $f \in L^\infty(\Omega)$ erfüllt das Newton-Potential $w := G * f$*

$$w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial x_j} = \frac{\partial G}{\partial x_j} * f.$$

Unter der stärkeren Voraussetzung $f \in L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ mit $0 < \alpha < 1$ gilt sogar

$$w \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad \Delta w = f \quad \text{in } \Omega. \tag{1.30}$$

Beweis. Die ersten Aussagen des Satzes folgen unmittelbar für $g = G$ und $h = \partial G/\partial x_j$ aus den vorausgegangenen Sätzen, und es ist nur noch die Gleichheit in (1.30) zu zeigen. Aus Gleichung (1.29) folgt für $x \in \Omega$ und $\Omega_0 := B(x, R)$ mit hinreichend großem Radius R

$$\begin{aligned}
\Delta w(x) &= \int_{B(x,R)} \big(f(y) - f(x)\big) \underbrace{\Delta G(x-y)}_{=0}\, dy + f(x) \frac{1}{|S_2^d|} \sum_{j=1}^d \int_{\partial B(x,R)} n_j(y) \frac{x_j - y_j}{|x-y|^d}\, ds_y \\
&= f(x) \frac{1}{|S_2^d|} \sum_{j=1}^d \int_{\partial B(0,R)} n_j(y) \frac{y_j}{|y|^d}\, ds_y = f(x) \frac{1}{|S_2^d| R^{d-1}} \sum_{j=1}^d \int_{\partial B(0,R)} n_j(y) \frac{y_j}{|y|}\, ds_y \\
&= f(x) \frac{1}{|S_2^d| R^{d-1}} \int_{\partial B(0,R)} \underbrace{\sum_{j=1}^d |n_j(y)|^2}_{=1}\, ds_y = f(x) \underbrace{\frac{|\partial B(0,R)|}{|S_2^d| R^{d-1}}}_{=1}.
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $S_2^d = \partial B(0,1)$ wieder die euklidische Einheitssphäre. ■

Korollar 1.22. *Für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ gelten $w := G * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\Delta w = f$ in $\mathbb{R}^d$.* ■

Die hergeleiteten Resultate werden nun auf das Ausgangsproblem angewendet: Zu gegebener Magnetisierung $\mathbf{m} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ist ein Potential u gesucht, daß die Maxwell-Gleichung

$$\operatorname{div}(-\nabla u + \mathbf{m}) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \tag{1.31}$$

löst.

Satz 1.23. *Für eine Magnetisierung $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ löst*

$$u = \mathcal{L}\mathbf{m} := \sum_{j=1}^d \frac{\partial G}{\partial x_j} * m_j \tag{1.32}$$

die Maxwell-Gleichung (1.31) *in starker Formulierung, d.h. punktweise in $\mathbb{R}^d$.*

Beweis. Gleichung (1.31) lautet in äquivalenter Formulierung

$$\Delta u = \operatorname{div} \mathbf{m} \quad \text{in } \mathbb{R}^d.$$

Nach Korollar 1.22 löst $u := G * (\operatorname{div} \mathbf{m})$ diese Gleichung, und mit Satz 1.8 und Satz 1.18 gilt

$$u = \operatorname{div}(G * \mathbf{m}) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j}(G * m_j) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial G}{\partial x_j} * m_j. \qquad ■$$

Die Beweise der Sätze 1.18 und 1.19 erfordern das folgende elementare Lemma.

Lemma 1.24. *Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $1 \le j \le d$, $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}^1(U)$ und $v, w : U \to \mathbb{R}$ derart, daß*

(i) *die Folge (w_k) punktweise gegen w auf U konvergiert,*

(ii) *die partiellen Ableitungen $\partial w_k/\partial x_j$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existieren und stetig sind,*

(iii) *die Folge* $(\partial w_k/\partial x_j)_{k\in\mathbb{N}}$ *der partiellen Ableitungen gleichmäßig gegen* v *konvergiert auf allen Kompakta* $K \subseteq U$.

Dann ist w *partiell differenzierbar nach* x_j, *und* $v = \partial w/\partial x_j$ *ist stetig.*

Beweis. Da für alle $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen $\partial w_k/\partial x_j$ stetig sind, ist v als (lokal) gleichmäßiger Limes ebenfalls stetig. Da nun nur noch die partielle Differenzierbarkeit von w nachgewiesen werden muß, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $d = 1$ angenommen werden. Damit gilt $w_k' = \partial w_k/\partial x_j$. Seien $x, y \in U$ mit $y < x$. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zeigt

$$w_k(x) - w_k(y) = \int_y^x w_k'(t)\,dt.$$

Da x und y fixiert sind, konvergiert die linke Seite gegen $w(x) - w(y)$, und weil die Integranden w_k' auf $[y, x] \subseteq U$ gleichmäßig gegen v konvergieren, konvergiert die rechte Seite gegen $\int_y^x v(t)\,dt$. Insgesamt folgt nach Umstellung

$$v(x) = v(y) + \int_y^x v(t)\,dt.$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beweist nun die Differenzierbarkeit von w mit $w'(x) = v(x)$. ■

Beweis von Satz 1.18. Wegen $h_j \in L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ und $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ ist die Faltung

$$v := h_j * f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$$

nach Korollar 1.7 wohldefiniert. Es sei $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ eine Abschneidefunktion mit

$$0 \le \eta \le 1, \quad 0 \le \eta' \le 2, \quad \eta(x) = 0 \text{ für } x \le 1 \quad \text{und} \quad \eta(x) = 1 \text{ für } x \ge 2.$$

Für $\varepsilon > 0$ sei die Funktion $g_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ vermöge

$$g_\varepsilon(x) := g(x)\eta(|x|/\varepsilon) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d$$

definiert. Setze $w_\varepsilon := g_\varepsilon * f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ mit Korollar 1.9. Die Funktionen (w_ε) konvergieren auf $\mathbb{R}^d$ gleichmäßig gegen $w := g * f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$. Um dies zu zeigen, nutzt man, daß $|g_\varepsilon| \le |g|$ punktweise auf $\mathbb{R}^d$ und $g(y) - g_\varepsilon(y) = 0$ für $|y| \ge 2\varepsilon$ gelten. Daraus folgt für $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} |w(x) - w_\varepsilon(x)| = |(g - g_\varepsilon) * f(x)| &\le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y) - g_\varepsilon(y)|\,dy \\ &= \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{B(0,2\varepsilon)} |g(y) - g_\varepsilon(y)|\,dy \\ &\le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{B(0,2\varepsilon)} |g(y)|\,dy, \end{aligned} \tag{1.33}$$

und die obere Schranke konvergiert wegen $g \in L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ unabhängig von x mit ε gegen null, d.h. $w \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ ist gleichmäßiger Limes der (w_ε). Als Nächstes zeigt man, daß auch $\partial w_\varepsilon/\partial x_j$ gleichmäßig

auf $\mathbb{R}^d$ gegen v konvergiert. Nach Lemma 1.24 folgt dann, daß w als punktweiser Limes von (w_ε) stetig nach x_j differenzierbar ist mit $\partial w/\partial x_j = v$. Es sei $x \in \mathbb{R}^d$ beliebig. Dann gilt mit Korollar 1.9

$$\begin{aligned}
\Big|v(x) - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j}\Big| &= \Big|\Big(\frac{\partial g}{\partial x_j} * f\Big)(x) - \Big(\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x_j} * f\Big)(x)\Big| \\
&= \Big|\Big(\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x_j}\Big) * f(x)\Big| \\
&\le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\partial}{\partial x_j}(g - g_\varepsilon)(y)\Big|\, dy \\
&= \|f\|_{L^\infty(B(0,2\varepsilon))} \int_{\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\partial}{\partial x_j}(g - g_\varepsilon)(y)\Big|\, dy \\
&= \|f\|_{L^\infty(B(0,2\varepsilon))} \int_{\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\big\{1 - \eta(|y|/\varepsilon)\big\} g(y)\Big)\Big|\, dy.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Mit Produktregel und Dreiecksungleichung folgt weiter

$$\begin{aligned}
&\le \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{B(0,2\varepsilon)} \underbrace{\Big|\frac{\partial}{\partial x_j}\eta(|y|/\varepsilon)\Big|}_{\le 2/\varepsilon} |g(y)| + \underbrace{\big|1 - \eta(|y|/\varepsilon)\big|}_{\le 1} \Big|\frac{\partial}{\partial x_j} g(y)\Big|\, dy \\
&\le \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{B(0,2\varepsilon)} \frac{2}{\varepsilon}|g(y)| + |h_j(y)|\, dy.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Also konvergiert das Integral wegen (1.26) und $h_j \in L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ (unabhängig von $x \in \mathbb{R}^d$) mit ε gegen null. ■

Beweis von Satz 1.19. Mit Satz 1.11 folgen sofort $u * v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d \backslash \overline{\Omega})$ und (1.28). Damit ist nur noch die Behauptung in Ω zu zeigen, da beide Teile offen sind. Für $x \in \Omega$ sei die rechte Seite $u(x)$ in (1.29) in die folgenden drei Integralanteile zerlegt,

$$\begin{aligned}
u(x) = -f(x) \int_{\Omega_0 \backslash \Omega} \frac{\partial h}{\partial x_j}(x - y)\, dy + \int_\Omega \big(f(y) - f(x)\big) \frac{\partial h}{\partial x_j}(x - y)\, dy \\
- f(x) \int_{\partial\Omega_0} h(x - y) n_j(y)\, ds_y.
\end{aligned}$$

Das erste und das letzte Integral existieren wegen $|x - y| \ge \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > 0$. Da f Hölder-stetig ist, folgt aus (1.25), daß auch der Integrand des mittleren Integrals in $L^1(\Omega)$ ist. Insgesamt folgt die Wohldefiniertheit von $u(x)$. Sei $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ wieder eine Funktion wie im vorausgegangenen Beweis. Definiere für $\varepsilon > 0$ und $h_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$, gegeben durch $h_\varepsilon(x) := h(x)\eta(|x|/\varepsilon)$, die Funktionen

$$v := h * f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad v_\varepsilon := h_\varepsilon * f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d).$$

Mit Korollar 1.9 gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}(x) = \Big(\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x_j} * f\Big)(x) &= \int_{\Omega_0} f(y) \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x_j}(x - y)\, dy \\
&= \int_{\Omega_0} \big(f(y) - f(x)\big) \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x_j}(x - y)\, dy + f(x) \int_{\Omega_0} \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x_j}(x - y)\, dy.
\end{aligned}$$

Eine partielle Integration zeigt abschließend

$$= \int_{\Omega_0} \big(f(y) - f(x)\big) \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x_j}(x-y)\, dy - f(x) \int_{\partial\Omega_0} h_\varepsilon(x-y) n_j(y)\, ds_y.$$

Als Nächstes wird gezeigt, daß $\partial v_\varepsilon / \partial x_j$ auf allen Kompakta $K \subseteq \Omega$ gleichmäßig gegen u konvergiert, um Lemma 1.24 anwenden zu können. Für eine kompakte Menge $K \subseteq \Omega$ und $x \in K$ sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so daß $B(x, 2\varepsilon) \subseteq \Omega$ und $2\varepsilon < \min\big\{ \operatorname{dist}(\tilde{x}, \partial\Omega) \,\big|\, \tilde{x} \in K \big\}$ gelten. Für $y \in \partial\Omega$ gilt dann $|x-y|/\varepsilon > 2$, also $\eta(|x-y|/\varepsilon) = 1$, und es folgt mit Blick auf das Randintegral

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}(x) = \int_{\Omega_0} \big(f(y) - f(x)\big) \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x_j}(x-y)\, dy - f(x) \int_{\partial\Omega_0} h(x-y) n_j(y)\, dy.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\Big| u(x) - \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}(x) \Big| &= \Big| \int_{\Omega_0} \big(f(y) - f(x)\big) \Big[\frac{\partial h}{\partial x_j}(x-y) - \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x_j}(x-y) \Big]\, dy \Big| \\
&= \Big| \int_{\Omega_0} \big(f(y) - f(x)\big) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\big\{ 1 - \eta(|x-y|/\varepsilon) \big\} h(x-y) \Big)\, dy \Big|.
\end{aligned}$$

Wegen $\eta(|x-y|/\varepsilon) = 1$ für $|x-y| \geq 2\varepsilon$ folgt weiter

$$= \Big| \int_{\Omega_0 \cap B(x,2\varepsilon)} \big(f(y) - f(x)\big) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\big\{ 1 - \eta(|x-y|/\varepsilon) \big\} h(x-y) \Big)\, dy \Big|.$$

Ausnutzung von $B(x, 2\varepsilon) \subseteq \Omega$ ergibt

$$\begin{aligned}
&= \Big| \int_{B(x,2\varepsilon)} \big(f(y) - f(x)\big) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\big\{ 1 - \eta(|x-y|/\varepsilon) \big\} h(x-y) \Big)\, dy \Big| \\
&\leq \int_{B(x,2\varepsilon)} \big| f(y) - f(x) \big| \Big| \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\big\{ 1 - \eta(|x-y|/\varepsilon) \big\} h(x-y) \Big) \Big|\, dy \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{C}^\alpha(\Omega)} \int_{B(x,2\varepsilon)} |x-y|^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\big\{ 1 - \eta(|x-y|/\varepsilon) \big\} h(x-y) \Big) \Big|\, dy \\
&= \|f\|_{\mathcal{C}^\alpha(\Omega)} \int_{B(0,2\varepsilon)} |y|^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\big\{ 1 - \eta(|y|/\varepsilon) \big\} h(y) \Big) \Big|\, dy.
\end{aligned}$$

Mit Produktregel und Dreiecksungleichung folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\leq \|f\|_{\mathcal{C}^\alpha(\Omega)} \Big\{ &\int_{B(0,2\varepsilon)} |y|^\alpha \underbrace{\Big| \frac{\partial}{\partial x_j} \eta(|y|/\varepsilon) \Big|}_{\leq 2/\varepsilon} \underbrace{|h(y)|}_{\leq c|y|^{1-d}}\, dy \\
&+ \int_{B(0,2\varepsilon)} |y|^\alpha \underbrace{\big\{ 1 - \eta(|y|/\varepsilon) \big\}}_{\leq 1} \underbrace{\Big| \frac{\partial h}{\partial x_j}(y) \Big|}_{\leq c|y|^{-d}}\, dy \Big\}.
\end{aligned}$$

Die obere Schranke verschwindet nach Lemma 1.16 für ε gegen null. Damit ist gezeigt, daß $\partial v_\varepsilon / \partial x_j$ auf allen Kompakta in Ω gleichmäßig gegen u konvergiert. Mit Lemma 1.24 folgen $v \in \mathcal{C}(\Omega)$, d.h. $w \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, und die Gültigkeit von (1.29) denn v_ε konvergiert gleichmäßig gegen v. Der Beweis hiervon verläuft wörtlich wie oben. ■

1.6 Verallgemeinerte Faltungen

Die zunächst kurz referierte Theorie geht auf Calderón und Zygmund zurück. Sie beschäftigt sich mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen an einen Kern $\kappa : \mathbb{R}^d\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $|\kappa(x)| \lesssim |x|^{-d}$ durch die Faltung ein stetiger Operator

$$T \in L(L^p(\mathbb{R}^d); L^p(\mathbb{R}^d)), \quad Tf := \kappa * f$$

definiert wird. Dazu wird ein verallgemeinerter Satz von Stein [58] zitiert, um diesen im Anschluß daran auf den Newton-Kern anzuwenden. Zunächst werden abstrakt die sog. Calderón-Zygmund-Kerne definiert. Beispiele für solche werden gerade durch die zweiten partiellen Ableitungen

$$\kappa := \frac{\partial^2 G}{\partial x_j \partial x_k}$$

des Newton-Kerns gegeben.

Definition . Eine Funktion $\kappa : \mathbb{R}^d\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ heißt *Calderón-Zygmund-Kern*, falls sie meßbar ist und eine Konstante $c_2 > 0$ existiert, so daß die folgenden Aussagen gelten:

$$|\kappa(x)| \le c_2|x|^{-d} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}, \tag{1.36}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d\backslash B(0,2|x|)} |\kappa(y-x) - \kappa(y)|\, dy \le c_2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}, \tag{1.37}$$

$$\int_{B(0,r_2)\backslash B(0,r_1)} \kappa(x)\, dx = 0 \quad \text{für alle } 0 < r_1 < r_2 < \infty. \tag{1.38}$$

Für einen Calderón-Zygmund-Kern κ definiert $\tilde{\kappa} : \mathbb{R}^d\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{\kappa}(x) := \kappa(-x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\} \tag{1.39}$$

einen weiteren Calderón-Zygmund-Kern. Des weiteren verwendet man für κ die Schreibweise

$$\kappa_\varepsilon := \kappa\chi_{\mathbb{R}^d\backslash B(0,\varepsilon)} \quad \text{für } \varepsilon > 0 \tag{1.40}$$

und erhält $\kappa_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^d)$ für alle $1 < p \le \infty$.

Erste Beispiele für solche Kerne erhält man, wie oben bereits angemerkt, als partielle Ableitungen des Newton-Kerns, allgemeiner als partielle Ableitungen von Funktionen, die homogen vom Grad $(1-d)$ sind.

Lemma 1.25. *Ist $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$ homogen vom Grad $(1-d)$, so sind die partiellen Ableitungen $\kappa_j := \partial h/\partial x_j$ Calderón-Zygmund-Kerne, und es gilt mit der Einheitssphäre $S_2^d = \partial B(0,1)$*

$$\int_{S_2^d} \kappa(x)\, ds_x = 0. \tag{1.41}$$

Beweis. $\kappa := \kappa_j$ ist homogen vom Grad $-d$, und damit gilt insbesondere (1.36). Die partiellen Ableitungen von κ sind vom Grad $-(d+1)$, und es existiert ein Konstante $c_3 > 0$, die nur von κ und d abhängt, mit

$$|\nabla\kappa(x)| \le c_3 \frac{1}{|x|^{d+1}} \qquad (x \in \mathbb{R}^d(\{0\}).$$

Wegen $\kappa \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$ gilt die Mittelwertungleichung

$$|\kappa(z) - \kappa(z')| \leq \sqrt{d} \max_{\zeta \in K} |\nabla\kappa(\zeta)|\, |z - z'|$$

für jedes konvexe Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ und Vektoren $z, z' \in K$. Für $x \neq 0$ und $y \in \mathbb{R}^d\backslash B(0, 2|x|)$ folgt dann mit $K = B(y, |x|)$

$$|\kappa(y - x) - \kappa(y)| \leq \sqrt{d} \max_{\zeta \in B(y,|x|)} |\nabla\kappa(\zeta)|\, |x| \leq c_3\sqrt{d} \max_{\zeta \in B(y,|x|)} \frac{|x|}{|\zeta|^{d+1}} = c_3\sqrt{d}\frac{|x|}{(|y| - |x|)^{d+1}}.$$

Nun folgt (1.37) mittels Transformation auf Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d\backslash B(0,2|x|)} |\kappa(y - x) - \kappa(y)|\, dy &\leq c_3\sqrt{d} \int_{\mathbb{R}^d\backslash B(0,2|x|)} \frac{|x|}{(|y| - |x|)^{d+1}}\, dy \\
&= c_3\sqrt{d}|x| \int_{2|x|}^{\infty} r^{d-1} \int_{S_2^d} \frac{1}{(r - |x|)^{d+1}}\, ds_z dr \\
&= c_3\sqrt{d}|S_2^d||x| \int_{2|x|}^{\infty} \frac{r^{d-1}}{(r - |x|)^{d+1}}\, dr \\
&= c_3\sqrt{d}|S_2^d||x| \int_{|x|}^{\infty} \frac{(r + |x|)^{d-1}}{r^{d+1}}\, dr.
\end{aligned}$$

Wegen $|x| \leq r$ im Integrationsbereich liefert triviale Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\leq c_3\sqrt{d}|S_2^d||x| \int_{|x|}^{\infty} \frac{(2r)^{d-1}}{r^{d+1}}\, dr \\
&= c_3\sqrt{d}|S_2^d|2^{d-1} \underbrace{|x| \int_{|x|}^{\infty} \frac{1}{r^2}\, dr}_{=1} \\
&= c_3\sqrt{d}|S_2^d|2^{d-1}.
\end{aligned}$$

Um abschließend (1.38) zu zeigen, beweist man zunächst (1.41). Dazu sei $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ eine Funktion mit $\eta \geq 0$, $\operatorname{supp}(\eta) = [1, 2]$ und $\int_{\mathbb{R}} \eta(t)\, dt = 1$. Als Nächstes definiert man $\rho \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ durch $\rho(t) := t\eta(t)$. Dann gelten

$$\rho \geq 0, \quad \operatorname{supp}(\rho) = [1, 2], \quad \int_0^{\infty} \frac{\rho(r)}{r}\, dr = 1, \quad \int_0^{\infty} \rho'(r)\, dr = \rho(2) - \rho(1) = 0.$$

Mit partieller Integration und Polarkoordinaten folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \kappa(x)\rho(|x|)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial h}{\partial x_j}(x)\rho(|x|)\, dx &= -\int_{\mathbb{R}^d} h(x)\rho'(|x|)\frac{x_j}{|x|}\, dx \\
&= -\int_0^{\infty} r^{d-1} \int_{S_2^d} h(rx)\rho'(r)\frac{rx_j}{r}\, ds_x\, dr \\
&= -\int_0^{\infty} r^{d-1} \int_{S_2^d} r^{1-d}h(x)\rho'(r)x_j\, ds_x\, dr \\
&= -\underbrace{\Big(\int_0^{\infty} \rho'(r)\, dr\Big)}_{=0} \underbrace{\Big(\int_{S_2^d} h(x)x_j\, ds_x\Big)}_{\in\mathbb{R}} = 0.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Andererseits zeigt sofortige Überführung in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \kappa(x)\rho(|x|)\,dx = \int_0^\infty r^{d-1} \int_{S_2^d} \kappa(rx)\rho(r)\,ds_x\,dr &= \int_0^\infty r^{d-1} \int_{S_2^d} r^{-d}\kappa(x)\rho(r)\,ds_x\,dr \\ &= \underbrace{\Big(\int_0^\infty \frac{\rho(r)}{r}\,dr\Big)}_{=1} \Big(\int_{S_2^d} \kappa(x)\,ds_x\Big),\end{aligned} \tag{1.43}$$

und (1.41) folgt aus der Kombination von (1.42) und (1.43). Nun folgt (1.38) ebenfalls aus der Einführung von Polarkoordinaten,

$$\int_{B(0,r_2)\setminus B(0,r_1)} \kappa(x)\,dx = \int_{r^1}^{r_2} r^{d-1} \int_{S_2^d} \kappa(rx)\,ds_x\,dr = \Big(\int_{r^1}^{r_2} r^{-1}\,dr\Big)\Big(\int_{S_2^d} \kappa(x)\,ds_x\Big) = 0. \qquad \blacksquare$$

Satz 1.26 (Calderón-Zygmund, Stein [58, Seite 35ff.]). *Für einen Calderón-Zygmund-Kern κ und jede Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ mit $1 < p < \infty$ ist die Faltung $\kappa_\varepsilon * f$ wohldefiniert, und es gilt*

$$\|\kappa_\varepsilon * f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le c_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \tag{1.44}$$

mit einer Konstante c_p, die unabhängig ist von ε und f. Ferner existiert der Limes

$$Sf := \lim_{\varepsilon\to 0}(\kappa_\varepsilon * f) \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d), \tag{1.45}$$

und damit wird ein stetiger linearer Operator

$$S \in L\big(L^p(\mathbb{R}^d); L^p(\mathbb{R}^d)\big) \tag{1.46}$$

mit Operatornorm $\|S\| \le c_p$ wohldefiniert. Da S in diesem Sinn die (i.a. nicht-existente) Faltung von κ mit L^p-Funktionen beschreibt, benutzt man die Schreibweise

$$\kappa \mathbin{\tilde{*}} f := Sf = \lim_{\varepsilon\to 0}(\kappa_\varepsilon * f) \quad \text{für alle } f \in L^p(\mathbb{R}^d). \qquad \blacksquare$$

Bemerkung. Die Schreibweise $\kappa \mathbin{\tilde{*}} f$ ist unabhängig von p im folgenden Sinn: Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$ für $1 < p, q < \infty$, und bezeichnen $S_p \in L(L^p(\mathbb{R}^d); L^p(\mathbb{R}^d))$ und $S_q \in L(L^q(\mathbb{R}^d); L^q(\mathbb{R}^d))$ die Operatoren aus Satz 1.26 bezüglich p bzw. q, so folgt $S_p f = S_q f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Es gelten

$$\begin{aligned} S_p f &= \lim_{\varepsilon\to 0}(\kappa_\varepsilon * f) \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d), \\ S_q f &= \lim_{\varepsilon\to 0}(\kappa_\varepsilon * f) \quad \text{in } L^q(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Da für alle $1 \le r \le \infty$ Funktionenkonvergenz in L^r insbesondere für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ die punktweise Konvergenz impliziert, siehe Rudin [54, Kapitel 3], und die konvergente Funktionenfamilie auf der rechten Seite beider Gleichungen identisch ist, stimmen also $S_p f$ und $S_q f$ punktweise fast überall überein. $\blacksquare$

In dem funktionalanalytischen Rahmen, der mit Lemma 1.2 und Satz 1.26 geschaffen wurde, kann mit dem folgenden Satz das mathematische Hauptresultat dieses Abschnitts formuliert werden. Hierbei handelt es sich um die Verallgemeinerung eines Resultats aus Ma [46, Seite 21f.]. bzw. Agmon [1, Seite 154ff.]. Der Satz wird später die Existenz von Lösungen der Maxwell-Gleichung liefern.

Satz 1.27. *Gegeben seien eine Funktion $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$, die homogen ist vom Grad $1-d$, und $1 < p < \infty$. Dann existiert ein eindeutiger Operator $T \in L(L^p(\mathbb{R}^d); W_1^p(\mathbb{R}^d))$ mit*

$$Tf = h * f \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tag{1.47}$$

wobei die Gleichheit so zu verstehen ist, daß $h * f \in \mathcal{W}_1^p(\mathbb{R}^d)$ ist und $Tf \in W_1^p(\mathbb{R}^d)$ repräsentiert. Mit der Schreibweise $h \tilde{*} f := Tf$ für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ sowie

$$\kappa_j := \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad \text{und} \quad \lambda_j := \int_{S_2^d} h(x) x_j \, ds_x \tag{1.48}$$

gilt im schwachen Sinn

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(h \tilde{*} f) = \kappa_j \tilde{*} f + \lambda_j f. \tag{1.49}$$

Insbesondere existiert eine Konstante $c_4 > 0$, die nur von h (sowie dessen Ableitungen) und p abhängt, mit

$$\|\nabla(h \tilde{*} f)\|_{L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)} \le c_4 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.50}$$

Ferner gelten

(a) $h * f = h \tilde{*} f$ *für* $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$,

(b) $h * f = h \tilde{*} f$ *für* $f \in L^q(\mathbb{R}^d) \cap L^r(\mathbb{R}^d)$ *mit* $1 \le q < d < r \le \infty$ *und* $q \le p \le r$,

(c) $h * f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ *für* $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ *und* $pd > p + d$.

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $n \in \mathbb{N}$, so erfüllt die Restriktion von T auf $W_0^{n-1,p}(\Omega)$

(d) $T \in L(W_0^{n-1,p}(\Omega); W_n^p(\mathbb{R}^d))$ *und deshalb insbesondere* $T \in L(W^{n-1,p}(\mathbb{R}^d); W_n^p(\mathbb{R}^d))$

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ des weiteren beschränkt, so gelten für die Restriktionen auf $L^p(\Omega)$ und $W_0^{n-1,p}(\Omega)$ sogar

(e) $T \in L(L^p(\Omega); W^{1,p}(\mathbb{R}^d))$ *und* $T \in L(W_0^{n-1,p}(\Omega); W^{n,p}(\mathbb{R}^d))$, *sofern* $pd > p + d$ *ist.*

Bemerkungen. (a) Die ersten partiellen Ableitungen $h := \partial G / \partial x_k$ des Newton-Kerns erfüllen nach (1.22) die Voraussetzung von Satz 1.27. Es gilt in diesem Fall

$$\lambda_j = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k, \\ -1/d & \text{für } j = k, \end{cases} \tag{1.51}$$

denn aus Symmetriegründen gelten $\lambda_j = -(1/|S_2^d|) \int_{S_2^d} x_j x_k \, ds_x = 0$ für $k \neq j$ und $|S_2^d| = \sum_{j=1}^d \int_{S_2^d} x_j^2 \, ds_x = d \int_{S_2^d} x_k^2 \, ds_x$.

(b) Die Voraussetzungen können so abgeschwächt werden, daß h homogen ist vom Grad $(1-d)$ und die partiellen Ableitungen von h als Calderón-Zygmund-Kerne existieren.

(c) Die Schreibweise $h \tilde{*} f$ ist wieder unabhängig von p im folgenden Sinn: Für $1 < p, q < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$ gilt $T_p f = T_q f \in W_1^p(\mathbb{R}^d) \cap W_1^q(\mathbb{R}^d)$, wobei $T_p \in L(L^p(\mathbb{R}^d); W_1^p(\mathbb{R}^d))$ und $T_q \in L(L^q(\mathbb{R}^d); W_1^q(\mathbb{R}^d))$ die Operatoren gemäß Satz 1.27 bezeichnen.

Beweis von Bemerkung (c). Nach der Bemerkung zu Satz 1.26 gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(T_p f) = \kappa_j \tilde{*} f + \lambda_j f = \frac{\partial}{\partial x_j}(T_q f) \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d).$$

Es folgt $\|\nabla(T_p f) - \nabla(T_q f)\|_{L^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)} = 0$ für $r \in \{p, q\}$. Nun seien $g_p \in W^{1,p}_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ und $g_q \in W^{1,q}_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ Repräsentanten von $T_p f$ bzw. $T_q f$. Dann gilt $g_p, g_q \in W^{1,1}_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ mit $\nabla g_p = \nabla(T_p f) = \nabla(T_q f) = \nabla g_q$ fast überall. Also existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $g_p = g_q + c$, und damit folgt $g_p, g_q \in W^{1,r}_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$, also $T_p f = T_q f \in W^r_1(\mathbb{R}^d)$ für beide $r \in \{p, q\}$. □

Der Beweis von Satz 1.27 benötigt wiederholt das folgende kleine Lemma.

Lemma 1.28. *Für $h : \mathbb{R}^d \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ meßbar und homogen vom Grad $1 - d$ seien $h_1 := h\chi_{\mathbb{R}^d \backslash B^d_2}$ und $\tilde{h}$ durch $\tilde{h}(x) := h(-x)$ definiert.*

(i) *Für $1 \le s < d/(d-1) < t \le \infty$ gelten $h_1 \in L^t(\mathbb{R}^d)$ und $h - h_1 \in L^s(\mathbb{R}^d)$.*

(ii) *Für $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$ mit $1 \le p \le \infty$ und $1 \le q < d$ ist $h * f \in L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$.*

(iii) *Für $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$ mit $1 \le q < d < p \le \infty$ ist $h * f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

(iv) *Für $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$ mit $1 \le q < d < p \le \infty$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist $\langle h * f \,;\, g\rangle = \langle f \,;\, \tilde{h} * g\rangle$.*

Beweis. Die Aussage (i) folgt sofort aus Lemma 1.16. (ii) Wegen $h - h_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ folgt $(h - h_1) * f \in L^p(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ nach Satz 1.6. Aus $q < d$ ergibt sich $q' > d' = d/(d-1)$, und mit (i) folgt $h_1 \in L^{q'}(\mathbb{R}^d)$, also $h_1 * f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$. Da $L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ ein Vektorraum ist, liefert Summation die Behauptung

$$h * f = h_1 * f + (h - h_1) * f \in L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^d).$$

(iii) $d < p$ impliziert $d/(d-1) = d' > p'$, also $h - h_1 \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, und es folgt $(h - h_1) * f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Wegen $h_1 * f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ folgt insgesamt $h * f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. (iv) $|h|$ ist ebenfalls homogen vom Grad $1 - d$, und damit folgt $|h| * |f| \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ nach (iii). Nun folgt mit Hölder-Ungleichung

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |h(x-y)f(y)g(x)|\, dydx = \langle |g| \,;\, |h| * |f|\rangle \le \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \||h| * |f|\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < \infty.$$

Also kann der Satz von Tonelli-Fubini angewendet werden, siehe z.B. Königsberger [39, Seite 285], und liefert

$$\begin{aligned}\langle h * f \,;\, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} h(x-y)f(y)g(x)\, dydx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{h}(y-x)g(x)f(y)\, dydx = \langle f \,;\, \tilde{h} * g\rangle.\end{aligned}$$ ■

Beweis von Satz 1.27. Nach dem vorausgegangenen Lemma gilt $h * f \in L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ für jede Testfunktion $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Nun wird gezeigt, daß $h * f$ schwach differenzierbar ist und (1.49) gilt. Dazu sei zunächst festgehalten, daß mit Lemma 1.25 auch Satz 1.26 angewandt werden kann. Für $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ist nach Definition

$$\langle \kappa_j \tilde{*} f + \lambda_j f \,;\, v\rangle = -\langle h * f \,;\, \partial v/\partial x_j\rangle$$

zu zeigen. Es sei $R > 0$ groß genug, so daß $\operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(v) \Subset B(0,R)$ gilt. Wegen $h * f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\partial v/\partial x_j \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle h * f \,;\, \partial v/\partial x_j \rangle &= \langle f \,;\, \tilde{h} * \partial v/\partial x_j \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_{\mathbb{R}^d} h(x-y) \frac{\partial}{\partial x_j} v(x)\, dx\, dy \\
&= \int_{\operatorname{supp}(f)} f(y) \int_{B(0,R)} h(x-y) \frac{\partial}{\partial x_j} v(x)\, dx\, dy \\
&= \int_{\operatorname{supp}(f)} f(y) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B(0,R)\setminus B(y,\varepsilon)} h(x-y) \frac{\partial}{\partial x_j} v(x)\, dx\, dy,
\end{aligned} \tag{1.52}$$

und die letzte Gleichheit folgt aus dem Satz von Lebesgue.

Nun seien $y \in \operatorname{supp}(f)$ und $\varepsilon > 0$ fixiert. Nach Wahl von $B(0,R)$ kann angenommen werden, daß $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist, so daß $B(y,\varepsilon) \subseteq B(0,R)$ gilt. Partielle Integration mit Randtermen liefert

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,R)\setminus B(y,\varepsilon)} h(x-y) \frac{\partial}{\partial x_j} v(x)\, dx \\
&\quad = -\int_{B(0,R)\setminus B(y,\varepsilon)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} h(x-y)}_{=\tilde{\kappa}_j(y-x)} v(x)\, dx + \int_{\partial(B(0,R)\setminus B(y,\varepsilon))} h(x-y) v(x) n_j(x)\, ds_x \\
&\quad = -\int_{B(0,R)} \tilde{\kappa}_{j,\varepsilon}(y-x) v(x)\, dx - \int_{S(y,\varepsilon)} h(x-y) v(x) \frac{x_j - y_j}{\varepsilon}\, ds_x \\
&\quad = -(\tilde{\kappa}_{j,\varepsilon} * v)(y) - \int_{S(y,\varepsilon)} h(x-y) v(x) \frac{x_j - y_j}{\varepsilon}\, ds_x.
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichheit ist $\tilde{\kappa}_{j,\varepsilon}$ wie in (1.40) definiert, und man beachte, daß der *äußere* Normalenvektor auf $S(y,\varepsilon)$ durch

$$\frac{x-y}{|x-y|} = \frac{x-y}{\varepsilon}$$

gegeben ist. Das negative Vorzeichen des zweiten Integrals wird dadurch hervorgerufen, daß der Normalenvektor von $B(0,R)\setminus B(y,\varepsilon)$ aber zur Null hin gerichtet ist. Das zweite Randintegral über den „Außenrand“ von $B(0,R)\setminus B(y,\varepsilon)$, d.h. über $S(0,R)$, entfällt, da v dort verschwindet.

Der erste Summand konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen $\tilde{\kappa}_j \mathbin{\tilde{*}} v$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Für das hintere Integral folgt mit Transformationen

$$\begin{aligned}
\int_{S(y,\varepsilon)} h(x-y) v(x) \frac{x_j - y_j}{\varepsilon}\, ds_x &= \int_{S(0,\varepsilon)} h(z) v(y+z) \frac{z_j}{\varepsilon}\, ds_z \\
&= \int_{S_2^d} \varepsilon^{d-1} h(\varepsilon x) v(y + \varepsilon x) x_j\, ds_x \\
&= \int_{S_2^d} h(x) v(y + \varepsilon x) x_j\, ds_x \\
&= v(y) \underbrace{\int_{S_2^d} h(x) x_j\, ds_x}_{=\lambda_j} + \int_{S_2^d} h(x) x_j \big\{ v(y+\varepsilon x) - v(y) \big\}\, ds_x.
\end{aligned}$$

Da Dv beschränkt ist, konvergiert $v(y+\varepsilon x)$ nach Mittelwertungleichung gleichmäßig gegen $v(y)$ für $x \in S$ und $\varepsilon \to 0$, also verschwindet das hintere Integral für $\varepsilon \to 0$.
Insgesamt ist damit damit gezeigt, daß die Gleichheit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B(0,R)\setminus B(y,\varepsilon)} h(x-y)\frac{\partial}{\partial x_j} v(x)\,dx = -(\tilde{\kappa}_j \tilde{*} v)(y) - \lambda_j v(y)$$

gilt, und Einsetzen in (1.52) liefert mit Satz 1.26

$$\begin{aligned}\langle h * f\ ;\ \partial v/\partial x_j\rangle = -\langle f\ ;\ \tilde{\kappa}_j \tilde{*} v + \lambda_j v\rangle &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\langle f\ ;\ \tilde{\kappa}_{j,\varepsilon} * v\rangle - \langle f\ ;\ \lambda_j v\rangle \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\langle \kappa_{j,\varepsilon} * f\ ;\ v\rangle - \langle \lambda_j f\ ;\ v\rangle \\ &= -\langle \kappa_j \tilde{*} f + \lambda_j f\ ;\ v\rangle.\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $h*f$ schwach differenzierbar ist und (1.49) gilt. Aus der Dreiecksungleichung folgt zunächst

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial x_j}(h*f)\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \|\kappa_j \tilde{*} f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + |\lambda_j|\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

und mit Satz 1.26 ergibt sich

$$\le (c_p + |\lambda_j|)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Summation liefert schließlich

$$\|\nabla(h*f)\|_{L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)} = \Big(\sum_{j=1}^d \Big\|\frac{\partial}{\partial x_j}(h*f)\Big\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)}\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{j=1}^d (c_p+|\lambda_j|)^p\Big)^{1/p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Wegen $\|h \tilde{*} f\|_{W_1^p(\mathbb{R}^d)} = \|\nabla(h*f)\|_{L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)}$ ist damit auch gezeigt, daß T einen stetigen, linearen Operator $T \in L(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d); W_1^p(\mathbb{R}^d))$ definiert, wenn man $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ versieht. Da $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ein dichter Teilraum von $L^p(\mathbb{R}^d)$ ist, existiert eine eindeutige Fortsetzung

$$T \in L(L^p(\mathbb{R}^d); W_1^p(\mathbb{R}^d))$$

mit gleicher Norm. Dabei geht ein, daß $W_1^p(\mathbb{R}^d)$ als Banach-Raum mit seiner Vervollständigung übereinstimmt. Die Ungleichung (1.50) folgt im allgemeinen Fall unmittelbar aus der Stetigkeit der Fortsetzung:

$$\|\nabla(h \tilde{*} f)\|_{L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)} = \|h \tilde{*} f\|_{W_1^p(\mathbb{R}^d)} = \|Tf\|_{W_1^p(\mathbb{R}^d)} \le \|T\|\ \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \text{für alle } f \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

Damit ist nur noch (1.49) für allgemeines $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ zu zeigen. Definiere den Operator

$$A : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d); f \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j}(h \tilde{*} f) - \big(\kappa_j \tilde{*} f + \lambda_j f\big).$$

Dann gilt $Af = (\pi_j \circ \nabla \circ T - S - \lambda_j id)f$ mit den stetigen Operatoren

$\pi_j : L^p(\Omega;\mathbb{R}^d) \to L^p(\Omega); f \mapsto f_j,$
$\nabla : W_1^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\Omega;\mathbb{R}^d), u \mapsto \nabla u;$
$S : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ gemäß Satz 1.26 für κ_j,
$id : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ identische Abbildung.

Insbesondere ist A wohldefiniert, linear und stetig. Da (1.49) für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ bereits gezeigt ist, folgt $A = 0$ auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Wegen der Dichtigkeit von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ folgt daraus $A = 0$, was den Beweis des Hauptteils beschließt. Nacheinander werden nun auch die Aussagen (a)-(e) gezeigt. ■

Beweis von Satz 1.27.(a). Nach Korollar 1.13 existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Testfunktionen $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit $f = \lim_n f_n$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ und $L^p(\mathbb{R}^d)$. Nun gilt nach Hölder-Ungleichung und Lemma 1.28 für beliebiges $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$|\langle h * (f - f_n) \,;\, w\rangle| = |\langle f - f_n \,;\, \tilde{h} * w\rangle| \le \|f - f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|\tilde{h} * w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

mit anderen Worten $\lim_n \langle h * f_n \,;\, w\rangle = \langle h * f \,;\, w\rangle$. Es bezeichne $S_j \in L(L^p(\mathbb{R}^d); L^p(\mathbb{R}^d))$ den Operator (1.46) zu $\kappa_j := \partial h/\partial x_j$ gemäß Satz 1.26, und λ_j sei wie oben definiert. Für $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ und $w := \partial v/\partial x_j$ folgt mit Satz 1.27

$$\langle h * f \,;\, w\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle h * f_n \,;\, w\rangle = -\lim_{n\to\infty} \langle (S_j + \lambda_j) f_n \,;\, v\rangle,$$

und die Stetigkeit von S_j liefert schließlich

$$= -\langle (S_j + \lambda_j) f \,;\, v\rangle.$$

Nach Definition ist $h * f$ also schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(h * f) = (S_j + \lambda_j) f = \kappa_j \,\tilde{*}\, f + \lambda_j f,$$

d.h. $h * f$ ist Repräsentant von $h \,\tilde{*}\, f$, denn nach Lemma 1.28 gilt bereits $h * f \in L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$. ■

Beweis von Satz 1.27.(b). Nach Lemma 1.28 gilt $h * f \in L^p_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$. Zunächst sei vorausgesetzt, daß $f \ge 0$ gilt. Definiere

$$f_n := \min(f, n)\chi_{B(0,n)} \in L^\infty_c(\mathbb{R}^d) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Definition gelten $f - f_n \ge 0$ und $\lim_n (f - f_n) = 0$ punktweise in $\mathbb{R}^d$. Wegen $|f - f_n| \le 2|f|$ folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d),\ L^q(\mathbb{R}^d) \text{ und } L^r(\mathbb{R}^d).$$

Mit Satz 1.6 kann nun gezeigt werden, daß die Faltungen $h * f_n$ in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ konvergieren. Wegen $q < d < r$ gilt $r' < d/(d-1) < q'$ und deshalb $h_1 \in L^{q'}(\mathbb{R}^d)$ und $h - h_1 \in L^{r'}(\mathbb{R}^d)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\|h * (f - f_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\le \|h_1 * (f - f_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \|(h - h_1) * (f - f_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ &\le \|h_1\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)} \|(f - f_n)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} + \|h - h_1\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^d)} \|(f - f_n)\|_{L^r(\mathbb{R}^d)},\end{aligned}$$

und die rechte Seite verschwindet für $n \to \infty$. Insbesondere folgt für jede Testfunktion $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |\langle h * f \,;\, w\rangle - \langle h * f_n \,;\, w\rangle| &= \lim_{n\to\infty} |\langle h * (f - f_n) \,;\, w\rangle| \\ &\le \lim_{n\to\infty} \|h * (f - f_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|w\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0.\end{aligned}$$

Für $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ und $w := \partial v/\partial x_j$ ist damit

$$\langle h * f \,;\, w\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle h * f_n \,;\, w\rangle$$

gezeigt, und mit Anwendung von Satz 1.27.(a) für $f_n \in L_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ folgt weiter

$$= -\lim_{n\to\infty} \langle \kappa_j \,\tilde{*}\, f_n + \lambda_j f_n \,;\, v\rangle = \langle \kappa_j \,\tilde{*}\, f + \lambda_j f \,;\, v\rangle$$

mit κ_j und λ_j aus (1.49). Damit ist $h * f = h \,\tilde{*}\, f$ für $f \geq 0$ gezeigt. Die Behauptung für beliebiges f folgt nun durch Aufspaltung $f = f^+ - f^-$ mit $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- := \max(-f, 0)$:

$$\begin{aligned}\langle h * f \,;\, w\rangle &= \langle h * f^+ \,;\, w\rangle - \langle h * f^- \,;\, w\rangle \\ &= \langle \kappa_j \,\tilde{*}\, f^+ + \lambda_j f^+ \,;\, v\rangle - \langle \kappa_j \,\tilde{*}\, f^- + \lambda_j f^- \,;\, v\rangle \\ &= \langle \kappa_j \,\tilde{*}\, f + \lambda_j f \,;\, v\rangle. \end{aligned}$$

■

Beweis von Satz 1.27.(c). Nach Satz 1.27.(a) ist nur noch $h * f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ zu zeigen. Mit Lemma 1.28 gelten $h - h_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $h_1 \in L^p(\mathbb{R}^d)$ wegen $p > d'$. Nach Satz 1.6 folgen damit $h_1 * f, (h - h_1) * f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und Summation liefert $h * f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. ■

Beweis von Satz 1.27.(d). Für $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ und jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ gilt

$$D^\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}(h * f)\Big) = \frac{\partial}{\partial x_j}\big(h * (D^\alpha f)\big).$$

Nun liefert die Anwendung des bereits Bewiesenen für $D^\alpha f \in L^p(\Omega) \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$

$$\|h * f\|_{W_n^p(\mathbb{R}^d)} \leq c_5 \|f\|_{W^{n-1,p}(\Omega)}$$

mit einer Konstante c_5, die nur von c_4 und n abhängt. Da die Testfunktionen nach Definition in $W_0^{n-1,p}(\Omega)$ dicht liegen, existiert ein eindeutiger stetiger, linearer Operator

$$T' \in L(W_0^{n-1,p}(\Omega); W_n^p(\mathbb{R}^d))$$

mit $T'f = h * f$ für alle Testfunktionen $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. Da die formale Identität $id : W_n^p(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W_1^p(\mathbb{R}^d)$ linear, stetig und injektiv ist, folgt aus der Eindeutigkeit von T und T' bereits $Tf = T'f$ für alle $f \in W_0^{n-1,p}(\Omega) \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$. ■

Teil (e) von Satz 1.27 ist eine Anwendung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen, der mit dem folgenden Einbettungslemma in den Beweis eingeht.

Lemma 1.29. *Es seien X und Y Banach-Räume und Z ein Hausdorff-Raum, $T : X \to Y$ linear und $i : Y \hookrightarrow Z$ stetig und injektiv. Ist die Komposition $i \circ T : X \to Z$ stetig, so folgt bereits $T \in L(X; Y)$.*

Beweis. Der Beweis basiert im wesentlichen auf Banachs Satz vom abgeschlossenen Graphen. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, so daß beide Grenzwert $x := \lim_n x_n \in X$ und $y := \lim_n Tx_n \in Y$ existieren. Um die Stetigkeit von T zu zeigen, reicht es, $y = Tx$ zu beweisen.

Da $i \circ T$ stetig ist, gilt $\lim_n (i \circ T)(x_n) = (i \circ T)(x) \in Z$. Ferner liefert die Stetigkeit von i noch $\lim_n i(Tx_n) = iy$. Da Grenzwerte konvergenter Folgen in Hausdorff-Räumen eindeutig sind, ergibt sich

$$i(Tx) = (i \circ T)(x) = \lim_{n\to\infty} (i \circ T)(x_n) = \lim_{n\to\infty} i(Tx_n) = i(y),$$

und die Injektivität von i liefert $Tx = y$. ■

Beweis von Satz 1.27.(e). Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt und offen, so gilt $L^p(\Omega) \subseteq L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$, also $h * f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ nach Satz 1.27.(c), d.h. die Restriktion von $T \in L(L^p(\mathbb{R}^d); W_1^p(\mathbb{R}^d))$ auf $L^p(\Omega)$ bildet $X := L^p(\Omega)$ linear nach $Y := W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ab. Mit $Z = W_1^p(\mathbb{R}^d)$ und $i = id_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} : Y \hookrightarrow Z$ wird der abstrakte Rahmen des vorausgegangenen Lemmas anwendbar, und die Restriktion erfüllt

$$T \in L(L^p(\Omega); W^{1,p}(\mathbb{R}^d)).$$ ■

1.7 Eindeutige Lösbarkeit der Maxwell-Gleichung

Der folgende Abschnitt schließt das Studium des Operators $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ im wesentlichen ab, der zu Beginn dieses Kapitels eingeführt worden ist,

$$\mathcal{L}_0 \mathbf{m} = \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial G}{\partial x_j}\right) * m_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \text{für } \mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d). \tag{1.53}$$

Mit Satz 1.23 wurde schon gezeigt, daß $u = \mathcal{L}_0 \mathbf{m}$ die Maxwell-Gleichung in starker Form

$$\operatorname{div}(-\nabla u + \mathbf{m}) = 0 \quad \text{punktweise in } \mathbb{R}^d$$

löst. Insbesondere löst u damit auch die Maxwell-Gleichung in schwacher Form (bzw. im Distributionensinn)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{m} \cdot \nabla v \, dx \quad \text{für alle } v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d). \tag{1.54}$$

Die Anwendung der abstrakten Vorarbeit liefert nun den folgenden Satz, der insbesondere für $\mathbf{m} \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ die eindeutige Lösbarkeit der Maxwell-Gleichung (1.54) in $W_1^p(\mathbb{R}^d)$ zeigt und verifiziert, daß deren Lösung als Bild $u = \mathcal{L}_p \mathbf{m}$ von $\mathbf{m}$ unter einem stetigen linearen Operator $\mathcal{L}_p$ gegeben wird. Des weiteren liefert er insbesondere für Magnetisierungen mit kompaktem Träger die klassische Darstellung von $\mathcal{L}_p$ als Faltungsoperator $\mathcal{L}_0$.

Satz 1.30. *Für $1 \le p < \infty$ besitzt die Maxwell-Gleichung (1.54) höchstens eine Lösung $u \in W_1^p(\mathbb{R}^d)$. Für $1 < p < \infty$ existiert ein eindeutiger stetiger Operator*

$$\mathcal{L}_p \in L(L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d); W_1^p(\mathbb{R}^d)),$$

der $\mathcal{L}_0$ von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ auf $L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ fortsetzt, und für $\mathbf{m} \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ löst $u := \mathcal{L}_p \mathbf{m}$ die Maxwell-Gleichung (1.54). Für die Darstellung von $\mathcal{L}_p \mathbf{m} \in W_1^p(\mathbb{R}^d)$ gilt im repräsentativen Sinn

(a) $\mathcal{L}_p \mathbf{m} = \mathcal{L}_0 \mathbf{m}$ *für* $\mathbf{m} \in L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$,

(b) $\mathcal{L}_p \mathbf{m} = \mathcal{L}_0 \mathbf{m}$ *für* $\mathbf{m} \in L^q(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \cap L^r(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ *mit* $1 \le q < d < r \le \infty$ *und* $q \le p \le r$,

(c) $\mathcal{L}_p\mathbf{m} = \mathcal{L}_0\mathbf{m} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ *für* $\mathbf{m} \in L^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ *und* $pd > p + d$,

wobei die Gleichheit $\mathcal{L}_p\mathbf{m} = \mathcal{L}_0\mathbf{m}$ *bedeutet, daß die klassische Faltung* $\mathcal{L}_0\mathbf{m}$ *in* $\mathcal{W}_1^p(\mathbb{R}^d)$ *existiert und* $\mathcal{L}_p\mathbf{m}$ *repräsentiert. Betrachtet man eine beschränkte, offene Menge* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, *so erfüllt die Restriktion von* $\mathcal{L}_p$ *auf* $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$

(d) $\mathcal{L}_p \in L(L^p(\Omega;\mathbb{R}^d); W^{1,p}(\mathbb{R}^d))$ *für* $pd > p + d$.

(e) *Für* $1 < p, q < \infty$ *und* $\mathbf{m} \in L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ *gilt schließlich* $\mathcal{L}_p\mathbf{m} = \mathcal{L}_q\mathbf{m}$.

Der Beweis, daß (1.54) höchstens eine Lösung in $W_1^p(\mathbb{R}^d)$ besitzt, benötigt das folgende elementare Lemma, das allein auf Faltungseigenschaften basiert.

Lemma 1.31. *Für* $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$ *und* $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *derart, daß* $\Delta u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *im schwachen Sinn existiert, erfüllt die Faltung* $\psi * u \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ *mit* $\Delta(\psi * u) = \psi * \Delta u \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Die Aussagen $\psi * u, \psi * \Delta u \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ folgen aus allgemeinen Glättungseigenschaften der Faltung, siehe Satz 1.6 und Satz 1.8. Gemäß Definition des (schwachen) Laplace-Operators ist also nur noch

$$\langle \psi * \Delta u \,;\, v\rangle = \langle \psi * u \,;\, \Delta v\rangle \quad \text{für alle } v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

zu zeigen. Diese Gleichheit folgt leicht mit Hilfe des Satzes von Tonelli-Fubini und der Translationsinvarianz des Lebesgue-Integrals. Für $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \psi * \Delta u \,;\, v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} v(x) \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y)\Delta u(x-y)\,dy\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) \int_{\mathbb{R}^d} v(x)\Delta u(x-y)\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) \int_{\mathbb{R}^d} v(x+y)\Delta u(x)\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Für festes $y \in \mathbb{R}^d$ gilt $v(\cdot + y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, und wegen der Existenz von $\Delta u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ folgt weiter

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) \int_{\mathbb{R}^d} \Delta v(x+y)u(x)\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) \int_{\mathbb{R}^d} \Delta v(x)u(x-y)\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \Delta v(x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \psi(y)u(x-y)\,dy}_{=(\psi*u)(x)}\,dx,
\end{aligned}$$

was den Beweis beschließt. ■

Beweis von Satz 1.30. Zunächst seien $u_1, u_2 \in W_1^p(\mathbb{R}^d)$ zwei Lösungen von (1.54). Nach Definition ist lediglich zu zeigen, daß die Differenz $e = u_2 - u_1 \in W_1^p(\mathbb{R}^d)$ verschwindenden Gradienten hat. Zunächst gilt

$$\langle \nabla e \,;\, \nabla v\rangle = 0 \quad \text{für alle } v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d),$$

und deshalb gilt (für jeden Repräsentanten) $e \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\Delta e = 0$. Betrachtet man eine partielle Ableitung $f := \partial e/\partial x_j \in L^p(\mathbb{R}^d)$, so ist es nach Satz 1.12 wegen $1 \le p < \infty$ hinreichend zu zeigen, daß $\psi * f = 0$ gilt für alle Testfunktionen $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Dies folgt aber unmittelbar, denn $\Delta f = 0$ impliziert dem vorausgegangenen Lemma zufolge $\Delta(\psi * f) = 0$ und $\psi * f \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$. Nach dem Satz von Liouville ist die beschränkte harmonische Funktion $\psi * f$ konstant, und wegen $\psi * f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ folgt $\psi * f = 0$. Also besitzt (1.54) höchstens eine Lösung in $W_1^p(\mathbb{R}^d)$.

Nun sei $1 < p < \infty$, und zur Abkürzung seien $h_j := \partial G/\partial x_j$ und

$$\mathcal{L}_0 \mathbf{m} = \sum_{j=1}^d h_j * m_j \quad \text{für } \mathbf{m} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d). \tag{1.55}$$

Die Faltungskerne $h_j \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ erfüllen die Voraussetzungen von Satz 1.27, und damit läßt sich $\mathcal{L}_0$ eindeutig zu einem stetigen Operator $\mathcal{L}_p \in L(L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d); W_1^p(\mathbb{R}^d))$ fortsetzen. Mit Blick auf (1.55) ist klar, daß diese Fortsetzung durch

$$\mathcal{L}_p \mathbf{m} := \sum_{j=1}^d h_j \mathbin{\tilde{*}} m_j \quad \text{für } \mathbf{m} \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$$

gegeben wird. Also ist mit Blick auf die Hauptaussage nur noch zu zeigen, daß $u := \mathcal{L}_p \mathbf{m}$ für gegebene Magnetisierung $\mathbf{m} \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ die Maxwell-Gleichung (1.54) löst.
Da $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ in $L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ dicht liegt, existiert eine Folge $(\mathbf{m}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, die gegen $\mathbf{m}$ konvergiert. Gleichung (1.54) gilt bereits für $u_k := \mathcal{L}_p \mathbf{m}_k = \mathcal{L}_0 \mathbf{m}_k$, wie oben angemerkt. Deshalb folgt mit Hölder-Ungleichung und Definition von $\|\cdot\|_{W_1^p(\mathbb{R}^d)}$

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{\mathbb{R}^d} (-\nabla u - \mathbf{m}) \cdot \nabla v \, dx \Big| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^d} (-\nabla u - \mathbf{m}) \cdot \nabla v \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} (-\nabla u_k - \mathbf{m}_k) \cdot \nabla v \, dx \Big| \\
&\le \Big| \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla u - \nabla u_k) \cdot \nabla v \, dx \Big| + \Big| \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_k) \cdot \nabla v \, dx \Big| \\
&\le \|\nabla v\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \big\{ \|\nabla(u - u_k)\|_{L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)} \big\} \\
&= \|\nabla v\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \big\{ \|\mathcal{L}_p(\mathbf{m} - \mathbf{m}_k)\|_{W_1^p(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)} \big\} \\
&\le \|\nabla v\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \big\{ \|\mathcal{L}_p\| + 1 \big\} \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)},
\end{aligned}$$

und die rechte Seite verschwindet für $k \to \infty$. Damit ist (1.54) für $\mathbf{m} \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ und $u := \mathcal{L}_p \mathbf{m}$ gezeigt. Die weiteren Aussagen (a)-(d) folgen unmittelbar aus den analogen Aussagen in Satz 1.27, und (e) ergibt sich aus der zugehörigen Bemerkung auf Seite 22. ■

Abschließend sei nun konkret der Fall $p = 2$ betrachtet. Durch Kombination von Satz 1.4 und Satz 1.30 ergibt sich das folgende Korollar.

Korollar 1.32. *Es gibt einen eindeutigen stetigen Operator $\mathcal{L}_2 \in L(L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d); W_1^2(\mathbb{R}^d))$, der $\mathcal{L}_0$ von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ auf $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ fortsetzt. Die Operatornorm ist $\|\mathcal{L}_2\| = 1$, und $u := \mathcal{L}_2 \mathbf{m}$ ist für gegebene Magnetisierung $\mathbf{m} \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ die eindeutige Lösung der Maxwell-Gleichung* (1.54) *in schwacher Form. Insbesondere stimmen der Operator $\mathcal{L}_2$ und der Operator $\mathcal{L}$ aus Satz 1.30 überein, d.h. $\nabla \circ \mathcal{L}_2$ ist die L^2-Orthogonalprojektion auf $L^2_\nabla(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, und $\mathcal{L}_2$ besitzt die folgenden Abbildungseigenschaften.*

(a) $\mathcal{L}_2 \mathbf{m} = \mathcal{L}_0 \mathbf{m}$ *für* $\mathbf{m} \in L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$,

(b) $\mathcal{L}_2\mathbf{m} = \mathcal{L}_0\mathbf{m}$ *für* $\mathbf{m} \in L^q(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \cap L^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ *mit* $1 \le q < d < r \le \infty$ *und* $q \le 2 \le r$,

(c) $\mathcal{L}_2\mathbf{m} = \mathcal{L}_0\mathbf{m} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *für* $\mathbf{m} \in L^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ *und* $d \ge 3$,

(d) $\mathcal{L}_2 \in L(L^2(\Omega;\mathbb{R}^d); H^1(\mathbb{R}^d))$, *falls* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *eine beschränkte offene Menge und* $d \ge 3$ *ist.* ■

Korollar 1.33 (Satz von Stokes auf $\mathbb{R}^3$ für $p = 2$). (i) *Eine Funktion* $\mathbf{f} \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ *erfüllt genau dann* $\operatorname{curl}\mathbf{f} = 0$, *wenn es eine Funktion* $u \in H^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^3)$ *mit* $\mathbf{f} = \nabla u$ *gibt, d.h.* $L^2_\nabla(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3) = \big\{\mathbf{f} \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3) \,\big|\, \operatorname{curl}\mathbf{f} = 0\big\}$. *Das Potential* u *ist in diesem Fall bis auf konstante Verschiebung eindeutig.*

(ii) *Ist* $\mathbf{f} \in L^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ *mit* $\operatorname{curl}\mathbf{f} = 0$, *so existiert ein eindeutiges Potential* $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ *mit* $\mathbf{f} = \nabla u$.

Beweis. Mit Lemma 1.14 ist nur noch (ii) zu zeigen. Mit dem Operator $\mathcal{L}_2$ aus Korollar 1.32 definiere $u := \mathcal{L}_2\mathbf{f} = \mathcal{L}_0\mathbf{f} \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Wegen $\operatorname{curl}\mathbf{f} = 0$ gilt $\mathbf{f} \in L^2_\nabla(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ nach (i). Da $\nabla \circ \mathcal{L}_2$ die Orthogonalprojektion auf $L^2_\nabla(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ ist, folgt $\mathbf{f} = \nabla(\mathcal{L}_2\mathbf{f}) = \nabla u$. Damit ist die Existenz von u gezeigt. Die Eindeutigkeit ist trivial. ■

In den folgenden Abschnitten wird abkürzend die Schreibweise $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2$ verwandt, da für die numerische Realisation im wesentlichen der Hilbert-Raum-Fall interessant ist.

Kapitel 2

Das konvexifizierte Modell

Der Fokus dieses Kapitels liegt auf dem in Abschnitt 2.1 definierten konvexifizierten Problem des Mikromagnetismus (RMP), wie es bei DeSimone [26] vorgeschlagen wird. Im gesamten Kapitel ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet für $d = 2$ oder $d = 3$. Die präsentierte Theorie verallgemeinert die Ergebnisse von Carstensen-Prohl [24] und überträgt sie von dem vereinfachenden Ansatz $u \in H_0^1(\widehat{\Omega})$ mit $\Omega \Subset \widehat{\Omega} \Subset \mathbb{R}^d$ auf das eigentliche Problem, bei dem $u \in W_1^2(\mathbb{R}^2)$ bzw. $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ gilt. Abschnitt 2.1 rekapituliert die wesentlichen Ergebnisse aus DeSimone [26]. Bei der Formulierung der Euler-Lagrangeschen-Differentialgleichungen (RP) zum relaxierten Minimierungsproblem (RMP) tritt die Bilinearform

$$a(\mathbf{m}, \widetilde{\mathbf{m}}) := \langle \nabla \mathcal{L}\mathbf{m} \,;\, \widetilde{\mathbf{m}} \rangle \quad \text{für } \mathbf{m}, \widetilde{\mathbf{m}} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$$

auf. Diese wird im Abschnitt 2.2 studiert. Insbesondere wird gezeigt, daß $a(\mathbf{m}, \widetilde{\mathbf{m}})$ für stückweise konstante Magnetisierungen als Doppelrandintegral berechnet werden kann. Abschnitt 2.3 studiert einen ersten einfachen Modellfall aus Carstensen-Prohl [24] für eine anisotrope Energiedichte, deren Konvexifizierung durch

$$\phi^{**}(x) = \begin{cases} (x \cdot z_1)^2/2 & \text{für } d = 2, \\ (x \cdot z_1)^2/2 + (x \cdot z_2)^2/2 & \text{für } d = 3 \end{cases}$$

mit fixierten orthonormalen Vektoren $z_j \in \mathbb{R}^d$ gegeben wird. Für diesen einfachen, aber in der angewandten Physik interessanten Modellfall läßt sich für $d = 2, 3$ die eindeutige Existenz einer Lösung von (RMP) zeigen.

Beim Übergang vom ursprünglichen Minimierungsproblem (MP) zum konvexifizierten Problem wird unter anderem die Nebenbedingung $|\mathbf{m}| = 1$ durch die konvexifizierte Bedingung $|\mathbf{m}| \leq 1$ ersetzt. Diese geht in Form eines Lagrangeschen Multiplikators λ in die zugehörige Differentialgleichung (RP) ein. Bei der Diskretisierung wird λ durch eine Penalisierungsstrategie numerisch berücksichtigt. Abschnitt 2.4 erläutert dieses Vorgehen und zeigt die Lösbarkeit des penalisierten Problems $(RP_{\varepsilon,\mathcal{A}})$. Abschnitt 2.5 führt die notwendigen Notationen für die Diskretisierung ein, die zusammen mit der Triangulierung $\mathcal{T}$ von Ω stets verwandt werden, und untersucht dann im Anschluß das penalisierte diskrete Problem $(RP_{\varepsilon,h})$. Für den Modellfall kann wieder die eindeutige Existenz einer Lösung gezeigt werden. In den folgenden beiden Abschnitten 2.6 und 2.7 folgen die a priori und a posteriori Analysis zur vorgeschlagenen Diskretisierung. Leider involviert die a posteriori Abschätzung (2.46) auf der rechten Seite einen a priori Term $\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\mathcal{T}}$, wobei $\mathbf{m}$ die exakte Lösung und $\mathbf{m}_{\mathcal{T}}$ das $\mathcal{T}$-stückweise Integralmittel bezeichnet. Abgesehen von der rohen punktweisen Abschätzung $|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\mathcal{T}}| \leq 2$, kann dieser Term nur unter höheren Regularitätsannahmen effizient weiter nach oben abgeschätzt werden, siehe (2.50).

Zusätzlich steht man bei der numerischen Realisierung vor dem Problem, daß das konvexifizierte Problem (abgesehen vom Modellfall) nicht notwendig eine eindeutige Lösung besitzt. Die Eindeutigkeit der diskreten Lösung kann aber zum einen durch die Wahl eines Netzes aus achsenparallelen Rechtecken bzw. Quadern erzwungen werden, siehe Abschnitt 2.5. Zum anderen kann die Eindeutigkeit aber auch durch Hinzufügen eines Stabilisierungsterms erreicht werden. Die involvierten Kantensprünge werden in Abschnitt 2.8 zusammen mit der im weiteren benutzten Notation eingeführt. Abschnitt 2.9 untersucht einen Stabilisierungsvorschlag zum diskreten Verfahren, der für den vereinfachten Ansatz von Carstensen-Prohl [24] in Funken-Prohl [29] gegeben wird. Dabei wird zunächst gezeigt, daß die Stabilisierung die eindeutige Existenz einer diskreten Lösung impliziert. In den beiden anschließenden Beispielen folgen dann wieder die a priori und a posteriori Analysis, und Abschnitt 2.12 beschließt das zweite Kapitel mit der Konvergenzuntersuchung zu den Stabilisierungstermen.

2.1 Das kontinuierliche Modell (*RP*)

Im folgenden bezeichnet $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 : L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \to W_1^2(\mathbb{R}^d)$ den Lösungsoperator zur Maxwell-Gleichung, der in Kapitel 1 eingeführt worden ist, und es sei $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}_{\geq 0})$ eine gerade Funktion, d.h. $\Phi(\pm x) = \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$, und $\phi := \Phi|_{S_2^d}$ sei die betrachtete Anisotropiedichte, vgl. DeSimone [26].

Minimierungsproblem (*MP*). Man finde eine Minimalstelle $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; S_2^d)$ des Energiefunktionals

$$E(\mathbf{m}) := \int_\Omega \phi\big(\mathbf{m}(x)\big)\,dx - \int_\Omega \mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{m}(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2\,dx, \tag{2.1}$$

wobei $u := \mathcal{L}\mathbf{m}$ das magnetische Potential zu gegebener Magnetisierung $\mathbf{m}$ bezeichne. □

Es ist wohlbekannt, daß in einigen Fällen das Funktional E sein Infimum auf $L^2(\Omega; S_2^d)$ nicht annimmt, vgl. James-Kinderlehrer [38]. Aus diesem Grund hat DeSimone [26] vorgeschlagen, ein relaxiertes Energiefunktional zu betrachten,

$$\mathbf{m} \mapsto \inf\big\{\liminf_{k\to\infty} E(\mathbf{m}_k)\,\big|\,(\mathbf{m}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } L^2(\Omega; S_2^d) \text{ mit } \mathbf{m}_k \rightharpoonup \mathbf{m}\big\}.$$

Dieses ist nach Definition gerade schwach unterhalbstetig, und deshalb wird das Infimum auf jeder schwach abgeschlossenen Menge als Minimum angenommen.

Relaxiertes Minimierungsproblem (*RMP*). Man finde eine Minimalstelle $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; B_2^d)$ des relaxierten Energiefunktionals

$$E^{**}(\mathbf{m}) := \int_\Omega \phi^{**}\big(\mathbf{m}(x)\big)\,dx - \int_\Omega \mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{m}(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2\,dx \tag{2.2}$$

mit $u := \mathcal{L}\mathbf{m}$ und der konvexen Hülle ϕ^{**} von ϕ, definiert vermöge

$$\phi^{**}(x) := \sup\big\{\varphi(x)\,\big|\,\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \text{ konvex mit } \varphi|_{S_2^d} \leq \phi\big\}. \qquad \square \tag{2.3}$$

Lemma 2.1 (DeSimone [26, Proposition 3.1]). *Die konvexe Hülle ϕ^{**} erfüllt folgende Aussagen.*

(i) $\phi^{**} : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ *ist konvex.*

(ii) *Für* $x \in \mathbb{R}^d$ *gilt* $\phi^{**}(x) < \infty$ *genau dann, wenn* $x \in B_2^d$ *gilt.*

(iii) *Es gelten* $\phi^{**} \in \mathcal{C}^1(B_2^d)$ *und* $\phi^{**}|_{S_2^d} = \phi$.

(iv) $\phi^{**}(x) = \min\left\{ \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j \phi(y_j) \,\middle|\, \lambda_j \geq 0, y_j \in S_2^d \text{ mit } \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j = 1 \text{ und } x = \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j y_j \right\}$ *für alle* $x \in B_2^d$. ■

Die beiden folgenden Lemmata werden unten benötigt, um im konkreten Beispiel zu gegebener Anisotropiedichte ϕ die Konvexifizierung ϕ^{**} zu berechnen.

Lemma 2.2. *Es bezeichne* $\mathcal{G} := \left\{ Q \in O(d) \,\middle|\, \phi \circ Q = \phi \right\}$ *die Menge aller orthogalen Matrizen, die Symmetrieeigenschaften von* ϕ *kennzeichnen. Dann ist* $\mathcal{G}$ *(bezüglich der Komposition) eine Gruppe, und es gilt* $\phi^{**} \circ Q = \phi^{**}$ *für alle* $Q \in \mathcal{G}$.

Beweis. Die Aussage, daß $\mathcal{G}$ eine Gruppe ist, ist offensichtlich, und damit ist nur die zweite Aussage zu zeigen. Da ϕ^{**} konvex und differenzierbar ist auf B_2^d, gilt nach konvexer Analysis

$$\phi^{**}(x) + (y - x) \cdot D\phi^{**}(x) \leq \phi^{**}(y) \quad \text{für alle } x, y \in B_2^d, \tag{2.4}$$

siehe Dacorogna [25]. Für fixierte $Q \in \mathcal{G}$ und $x \in B_2^d$ definiere man die affine Funktion

$$\varphi(y) := \phi^{**}(x) + (Q^{-1}y - x) \cdot D\phi^{**}(x).$$

Für $y \in S_2^d$ gilt nach (2.4) und Definition $\varphi(y) \leq \phi^{**}(Q^{-1}y) = \phi(Q^{-1}y) = \phi(y)$, also $\varphi \in \Phi := \left\{ \varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \text{ konvex } \,\middle|\, \varphi|_{S_2^d} \leq \phi \right\}$. Es folgt $\varphi \leq \phi^{**} := \sup_{\tilde{\varphi} \in \Phi} \tilde{\varphi}$. Für $y = Qx \in B_2^d$ ergibt sich damit $\phi^{**}(x) = \varphi(Qx) \leq \phi^{**}(Qx)$. Also ist insgesamt die punktweise Ungleichung

$$\phi^{**} \leq \phi^{**} \circ Q \quad \text{für alle } Q \in \mathcal{G}$$

gezeigt. Nutzt man diese Ungleichung für $Q^{-1} \in \mathcal{G}$, so folgt die Gleichheit, denn

$$\phi^{**} \circ Q \leq (\underbrace{\phi^{**} \circ Q^{-1}}_{\geq \phi^{**}}) \circ Q = \phi^{**}.$$ ■

Lemma 2.3. *Ist* $A \in O(d)$ *eine orthogonale Matrix und* $\psi := \phi \circ A$, *so gilt* $\psi^{**} = \phi^{**} \circ A$.

Beweis. Es seien wieder

$$\Phi := \left\{ \varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \text{ konvex } \,\middle|\, \varphi|_{S_2^d} \leq \phi \right\} \quad \text{und} \quad \Psi := \left\{ \tilde{\varphi} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \text{ konvex } \,\middle|\, \tilde{\varphi}|_{S_2^d} \leq \psi \right\}.$$

Für $\varphi \in \Phi$ ist $\phi \circ A \in \Psi$, und damit gilt punktweise

$$\psi^{**} = \sup_{\tilde{\varphi} \in \Psi} \tilde{\varphi} \geq \sup_{\varphi \in \Phi} \varphi \circ A = \phi^{**} \circ A.$$

Wegen $A^{-1} \in O(d)$ zeigt dasselbe Argument $\phi^{**} \leq \psi^{**} \circ A^{-1}$ und damit insgesamt $\psi^{**} = \phi^{**} \circ A$. ■

***Definition*.** Im folgenden bezeichne $a(\cdot,\cdot)$ die durch

$$a(\mathbf{m},\widetilde{\mathbf{m}}) := \langle \nabla(\mathcal{L}\mathbf{m}) \,;\, \widetilde{\mathbf{m}}\rangle \quad \text{für } \mathbf{m},\widetilde{\mathbf{m}} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \tag{2.5}$$

auf $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ gegebene Bilinearform. Diese ist wegen $\mathcal{L}\mathbf{m} \in W_1^2(\mathbb{R}^d)$ wohldefiniert. □

(Relaxiertes) Problem (*RP*). Man finde Funktionen $\mathbf{m} \in L^2(\Omega;B_2^d)$ und $\lambda \in L^2(\Omega;\mathbb{R}_{\geq 0})$ mit

$$a(\mathbf{m},\cdot) + \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}) + \lambda\mathbf{m} \,;\, \cdot\rangle = \langle \mathbf{f} \,;\, \cdot\rangle \qquad \text{in } L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)^*, \tag{2.6}$$

$$\lambda(1-|\mathbf{m}|) = 0 \qquad \text{f.ü. in } \Omega. \tag{2.7}$$

Insbesondere ist $\lambda = 0$ für fast alle $x \in \Omega$ mit $|\mathbf{m}(x)| < 1$. □

***Bemerkung*.** (a) Ist $(\lambda,\mathbf{m})$ eine Lösung von (RP), so gilt wegen $a(\mathbf{m},\cdot) = \langle \nabla u \,;\, \cdot\rangle$ mit $u := \mathcal{L}\mathbf{m}$

$$\nabla u + D\phi^{**}(\mathbf{m}) + \lambda\mathbf{m} = \mathbf{f} \qquad \text{in } L^2(\Omega;\mathbb{R}^d), \tag{2.8}$$

und insbesondere gilt die Gleichheit damit fast überall in Ω.
(b) Nach (2.7) folgt $\lambda = 0$ punktweise fast überall in $\omega := \big\{x \in \Omega \,\big|\, |\mathbf{m}(x)| = 1\big\}$, und mit (2.6) gilt $\lambda\mathbf{m} = \mathbf{f} - D\phi^{**}(\mathbf{m}) - \nabla u$ fast überall in Ω. Somit ist λ eindeutig durch $(\mathbf{f},\mathbf{m})$ festgelegt.
(c) Ferner besagt (2.7) gerade, daß fast überall in Ω die Gleichheit $\lambda = \lambda|\mathbf{m}|$ gilt. Insbesondere gilt also $\|\lambda\|_{L^2(\Omega)} = \|\lambda\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}$. □

***Definition*.** Eine Folge $(\mathbf{m}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $\mathbf{m}_k \in L^2(\Omega;S_2^d)$ heißt *Infimalfolge von E*, falls $\lim\limits_{k\to\infty} E(\mathbf{m}_k) = \inf\big\{E(\mathbf{m}) \,\big|\, \mathbf{m} \in L^2(\Omega;S_2^d)\big\}$ gilt. □

Satz 2.4 (Lösbarkeit und Äquivalenz von (*RMP*) und (*RP*) [26, Prop. 3.2, Theorem 4.2]).

(i) *Die Probleme (RMP) und (RP) besitzen Lösungen und sind in folgendem Sinn äquivalent: Eine Magnetisierung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega;B_2^d)$ ist genau dann eine Lösung von (RMP), wenn ein Lagrange-Multiplikator $\lambda \in L^2(\Omega;\mathbb{R}_{\geq 0})$ existiert, so daß $(\lambda,\mathbf{m})$ das Problem (RP) löst.*

(ii) *Es gilt* $\min\big\{E^{**}(\mathbf{m}) \,\big|\, \mathbf{m} \in L^2(\Omega;B_2^d)\big\} = \inf\big\{E(\mathbf{m}) \,\big|\, \mathbf{m} \in L^2(\Omega;S_2^d)\big\}$.

(iii) *Für jede Lösung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega;B_2^d)$ von (RMP) existiert eine Infimalfolge $(\mathbf{m}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von E, die in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ schwach gegen $\mathbf{m}$ konvergiert.*

(iv) *Ist $(\mathbf{m}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Infimalfolge von E, so existiert eine schwach konvergente Teilfolge $(\mathbf{m}_{k_\ell})$, deren schwacher Grenzwert (RMP) löst.*

(v) *Insbesondere gilt $E^{**}(\mathbf{m}) = \inf\big\{\liminf\limits_{k\to\infty} E(\mathbf{m}_k) \,\big|\, (\mathbf{m}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $L^2(\Omega;S_2^d)$ mit $\mathbf{m}_k \rightharpoonup \mathbf{m}\big\}$ für alle $\mathbf{m} \in L^2(\Omega;B_2^d)$.* ■

Satz 2.5 (Eindeutigkeit des magnetischen Potentials DeSimone [26, Prop. 4.3, Prop. 4.5.]).

(i) *Sind $\mathbf{m},\widetilde{\mathbf{m}} \in L^2(\Omega;B_2^d)$ Lösungen von (RMP), so gelten $\mathcal{L}\mathbf{m} = \mathcal{L}\widetilde{\mathbf{m}}$ und $\int_\Omega \mathbf{m}\,dx = \int_\Omega \widetilde{\mathbf{m}}\,dx$.*

(ii) *Ist $\mathbf{m} \in L^2(\Omega;B_2^d)$ eine Lösung von (RMP) und $(\mathbf{m}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Infimalfolge von E, so gelten $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{L}\mathbf{m}_k = \mathcal{L}\mathbf{m}$ in $W_1^2(\mathbb{R}^d)$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \int_\Omega \mathbf{m}_k\,dx = \int_\Omega \mathbf{m}\,dx$.* ■

2.2 Die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$

Lemma 2.6. *Die Abbildungsvorschrift*

$$a(\mathbf{m},\widetilde{\mathbf{m}}) := \langle \nabla(\mathcal{L}\mathbf{m})\,;\,\widetilde{\mathbf{m}}\rangle \quad \textit{für } \mathbf{m},\widetilde{\mathbf{m}} \in L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \tag{2.9}$$

definiert eine stetige, symmetrische Bilinearform auf $L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, und es gelten die Abschätzung

$$|a(\mathbf{m},\widetilde{\mathbf{m}})| \le \|\mathcal{L}\mathbf{m}\|_{W^2_1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{m}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)} \le \|\mathbf{m}\|_{L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{m}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)} \tag{2.10}$$

und die elementare Identität

$$a(\mathbf{m},\mathbf{m}) = \|\mathcal{L}\mathbf{m}\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} = \|\nabla(\mathcal{L}\mathbf{m})\|_{L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)}. \tag{2.11}$$

Insbesondere ist $a(\mathbf{m},\mathbf{m}) = 0$ dazu äquivalent, daß $\mathbf{m} \in H(\operatorname{div};\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{div}\mathbf{m} = 0$ gilt. Ist $a(\mathbf{m},\mathbf{m}) = 0$ und $\operatorname{supp}(\mathbf{m}) \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt, so gilt insbesondere $\int_\Omega \mathbf{m}\,dx = 0$.

Beweis. Dem zusammenfassenden Korollar 1.32 zufolge ist $\nabla\circ\mathcal{L} : L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d) \to L^2_\nabla(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ die L^2-Orthogonalprojektion auf $L^2_\nabla(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$. Da Orthogonalprojektionen symmetrisch sind, vgl. Werner [61, Seite 193], ist

$$a(\mathbf{m},\widetilde{\mathbf{m}}) = \langle \nabla(\mathcal{L}\mathbf{m})\,;\,\widetilde{\mathbf{m}}\rangle = \langle \mathbf{m}\,;\,\nabla(\mathcal{L}\widetilde{\mathbf{m}})\rangle = a(\widetilde{\mathbf{m}},\mathbf{m}) \quad \text{für alle } \mathbf{m},\widetilde{\mathbf{m}} \in L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d).$$

Bilinearität und Stetigkeit von $a(\cdot,\cdot)$ folgen unmittelbar aus Linearität und Stetigkeit von $\nabla\circ\mathcal{L}$. Die Abschätzung folgt mit einer Hölder-Ungleichung und $\|\nabla\circ\mathcal{L}\| = 1$. Für $\mathbf{m} \in L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ gilt

$$a(\mathbf{m},\mathbf{m}) = \langle \nabla(\mathcal{L}\mathbf{m})\,;\,\mathbf{m}\rangle = \langle \nabla(\mathcal{L}\mathbf{m})\,;\,\nabla(\mathcal{L}\mathbf{m})\rangle = \|\nabla(\mathcal{L}\mathbf{m})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)} = \|\mathcal{L}\mathbf{m}\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)}.$$

Gilt also $a(\mathbf{m},\mathbf{m}) = 0$, so folgt $\nabla(\mathcal{L}\mathbf{m}) = 0$ und damit $\mathbf{m} \in \ker(\nabla\circ\mathcal{L}) = L^2_\nabla(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)^\perp = \big\{\mathbf{f} \in H(\mathbb{R}^d;\operatorname{div}) \,\big|\, \operatorname{div}\mathbf{f} = 0\big\}$. Nun sei abschließend angenommen, daß $\Omega := \operatorname{supp}(\mathbf{m})$ beschränkt ist. Um zu zeigen, daß $w := \int_\Omega \mathbf{m}\,dx = 0 \in \mathbb{R}^d$ gilt, reicht es $v\cdot w = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^d$ zu zeigen. Zu $v \in \mathbb{R}^d$ existiert ein $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit $\nabla\phi|_\Omega \equiv v$. Damit folgt wegen $\mathbf{m}|_{\mathbb{R}^d\setminus\Omega} \equiv 0$ und $\operatorname{div}\mathbf{m} = 0$ sofort

$$v\cdot w = \int_\Omega v\cdot\mathbf{e}\,dx = \int_\Omega \nabla\phi\cdot\mathbf{m}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla\phi\cdot\mathbf{m}\,dx = 0. \qquad \blacksquare$$

Die Formel (2.12) aus dem folgenden Lemma ermöglicht die exakte Berechnung von $a(\mathbf{m},\widetilde{\mathbf{m}})$ für Funktionen $\mathbf{m},\widetilde{\mathbf{m}}$, die zu gegebener Triangulierung $\mathcal{T}$ stückweise konstant sind. Formel (2.12) findet sich für $d = 3$ bei Hackbusch-Melenk [35]. Obwohl der Beweis dort den Satz von Calderón-Zygmund umgeht, stimmt die Idee mit dem hier gegebenen Beweis überein, da die Autoren die Fourier-Transformation verwenden, um die Stetigkeit der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ zu zeigen. Des weiteren erlaubt der hier gegebene abstraktere Zugang die leichte Verifikation der zusätzlichen Symmetrieeigenschaft (2.13).

Lemma 2.7. *Für beschränkte Lipschitz-Gebiete $\omega,\widetilde{\omega} \subseteq \mathbb{R}^d$ und Vektoren $\mathbf{m},\widetilde{\mathbf{m}} \in \mathbb{R}^d$ gilt*

$$a(\chi_\omega\mathbf{m},\chi_{\widetilde{\omega}}\widetilde{\mathbf{m}}) = -\int_{\partial\omega}\int_{\partial\widetilde{\omega}} G(x-y)\,(\mathbf{n}(x)\cdot\mathbf{m})\,(\widetilde{\mathbf{n}}(y)\cdot\widetilde{\mathbf{m}})\,ds_y ds_x. \tag{2.12}$$

Dabei bezeichnen $\mathbf{n}$ und $\widetilde{\mathbf{n}}$ die äußeren Normalenvektoren auf $\partial\omega$ bzw. $\partial\widetilde{\omega}$. Ferner gilt stets

$$a(\chi_\omega\widetilde{\mathbf{m}},\chi_{\widetilde{\omega}}\mathbf{m}) = a(\chi_\omega\mathbf{m},\chi_{\widetilde{\omega}}\widetilde{\mathbf{m}}), \tag{2.13}$$

d.h. insbesondere definiert $B_{jk} := a(\chi_\omega \mathbf{e}_j, \chi_{\widetilde{\omega}} \mathbf{e}_k)$ *eine symmetrische Matrix* $B \in \mathbb{R}^{d\times d}_{\mathrm{sym}}$ *mit*

$$a(\chi_\omega \mathbf{m}, \chi_{\widetilde{\omega}} \widetilde{\mathbf{m}}) = \mathbf{m} \cdot B\widetilde{\mathbf{m}}. \tag{2.14}$$

Im Fall $\operatorname{dist}(\omega, \widetilde{\omega}) > 0$ *können die Koeffizienten* B_{jk} *auch vermöge*

$$B_{jk} = \int_\omega \int_{\widetilde{\omega}} \frac{\partial^2 G}{\partial x_j \partial x_k}(x-y)\, dy\, dx \tag{2.15}$$

berechnet werden.

Beweis. Zunächst einmal gilt trivialerweise

$$a(\chi_\omega \mathbf{m}, \chi_{\widetilde{\omega}} \widetilde{\mathbf{m}}) = \sum_{j,k=1}^{d} m_j \widetilde{m}_k \underbrace{a(\chi_\omega \mathbf{e}_j, \chi_{\widetilde{\omega}} \mathbf{e}_k)}_{=B_{jk}} = \mathbf{m} \cdot B\widetilde{\mathbf{m}},$$

und damit müssen die Gleichungen (2.12) und (2.13) nur für $\mathbf{m} = \mathbf{e}_j$ und $\widetilde{\mathbf{m}} = \mathbf{e}_k$ gezeigt werden. Zur Abkürzung der Schreibweise definiere im folgenden Kerne $h_\ell := \partial G/\partial x_\ell$. Diese erfüllen die Voraussetzungen von Satz 1.27. Ferner bezeichne $\kappa_{jk} := \frac{\partial^2 G}{\partial x_j \partial x_k}$ die zweiten partiellen Ableitungen des Newton-Kerns, die gerade Beispiele für Calderón-Zygmund-Kerne sind. Wegen $\kappa_{jk} = \kappa_{kj}$ gilt nach Satz 1.27 und Gleichung (1.51)

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_k} = \kappa_{jk} \mathbin{\tilde{*}} \chi_\omega + \lambda_{jk}\chi_\omega = \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \quad \text{mit} \quad \lambda_{jk} := -\delta_{jk}/d.$$

Nach Definition von $\mathcal{L}$ gilt $\mathcal{L}(\chi_\omega \mathbf{e}_j) = h_j * \chi_\omega$, und mit der Definition von $\kappa_{jk} \mathbin{\tilde{*}} \chi_\omega$ ergibt sich

$$\begin{aligned} B_{jk} &= \langle \nabla \circ \mathcal{L}(\chi_\omega \mathbf{e}_j)\, ;\, \chi_{\widetilde{\omega}} \mathbf{e}_k \rangle = \int_{\widetilde{\omega}} \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(y)\, dy = \int_{\widetilde{\omega}} \big\{ \big(\kappa_{jk} \mathbin{\tilde{*}} \chi_\omega\big)(y) + \lambda_{jk}\chi_\omega(y) \big\}\, dy \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\widetilde{\omega}} \int_\omega \kappa_{jk}(y-x) \chi_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)}(y-x)\, dx\, dy - \delta_{jk} |\overline{\omega} \cap \omega|/d. \end{aligned}$$

Dasselbe Vorgehen für B_{kj} zeigt dann die behauptete Symmetrie $B_{jk} = B_{kj}$ wegen $\kappa_{jk} = \kappa_{kj}$. Um (2.12) zu verifizieren, beachte zunächst, daß wegen Satz 1.27 auch $h_k * \chi_{\widetilde{\omega}} \in W^{1,p}_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ gilt. Eine partielle Integration auf dem beschränkten Lipschitz-Gebiet ω liefert dann

$$\int_\omega \frac{\partial}{\partial x_j}(h_k * \chi_{\widetilde{\omega}})\, dx = \int_{\partial\omega} (h_k * \chi_{\widetilde{\omega}})(x) n_j(x)\, ds_x$$

mit der Notation $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d)$. Für fixiertes $x \in \partial\omega$ erhält man durch partielle Integration

$$(h_k * \chi_{\widetilde{\omega}})(x) = \int_{\widetilde{\omega}} \frac{\partial G}{\partial x_k}(x-y)\, dy = -\int_{\widetilde{\omega}} \frac{\partial G}{\partial y_k}(x-y)\, dy = -\int_{\partial\widetilde{\omega}} G(x-y) \widetilde{n}_k(y)\, ds_y,$$

wobei $G \in W^{1,1}_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ ausgenutzt wurde. In Kombination mit $\mathcal{L}(\chi_{\widetilde{\omega}} \mathbf{e}_k) = h_k * \chi_{\widetilde{\omega}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} B_{jk} = a(\chi_\omega \mathbf{e}_j, \chi_{\widetilde{\omega}} \mathbf{e}_k) = a(\chi_{\widetilde{\omega}} \mathbf{e}_k, \chi_\omega \mathbf{e}_j) &= \int_\omega \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\mathcal{L}(\chi_{\widetilde{\omega}} \mathbf{e}_k)\big)\, dx = \int_\omega \frac{\partial}{\partial x_j}(h_k * \chi_{\widetilde{\omega}})\, dx \\ &= -\int_{\partial\omega} \int_{\partial\widetilde{\omega}} G(x-y) n_j(x) \widetilde{n}_k(y)\, ds_y ds_x. \end{aligned}$$

Damit ist nur noch die letzte Aussage zu zeigen. Diese folgt umgehend aus Satz 1.11, denn $h_k * \chi_{\widetilde{\omega}}$ ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^d \backslash \overline{\widetilde{\omega}}$ mit $\partial(h_k * \chi_{\widetilde{\omega}})/\partial x_j = (\partial h_k/\partial x_j) * \chi_{\widetilde{\omega}}$. Es ergibt sich wieder mit $\mathcal{L}(\chi_{\widetilde{\omega}}\mathbf{e}_k) = h_k * \chi_{\widetilde{\omega}}$

$$B_{jk} = \int_\omega \frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{L}(\chi_{\widetilde{\omega}}\mathbf{e}_k)\,dx = \int_\omega \Big(\frac{\partial h_k}{\partial x_j} * \chi_{\widetilde{\omega}}\Big)(x)\,dx = \int_\omega \int_{\widetilde{\omega}} \frac{\partial^2 G}{\partial x_j x_k}(x-y). \qquad \blacksquare$$

Korollar 2.8. *Es seien $\omega, \widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^d$ beschränkte Lipschitz-Gebiete mit affinem Rand, d.h. $\partial\omega$ und $\partial\widetilde{\omega}$ sind endliche Vereinigungen von bis auf Nullmengen paarweise disjunkten, affinen Randstücken $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\ell$ bzw. $\widetilde{\Gamma}_1, \ldots, \widetilde{\Gamma}_{\widetilde{\ell}}$. Mit*

$$S_{jk} := -\int_{\Gamma_j}\int_{\widetilde{\Gamma}_k} G(x-y)\,ds_y ds_x$$

und $\mathbf{n}^{(j)}$, $\widetilde{\mathbf{n}}^{(k)}$ den äußeren Normalenvektoren von ω und $\widetilde{\omega}$ auf Γ_j bzw. $\widetilde{\Gamma}_k$ gilt dann

$$a(\chi_\omega \mathbf{m}, \chi_{\widetilde{\omega}}\widetilde{\mathbf{m}}) = \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{\widetilde{\ell}} (\mathbf{n}^{(j)} \cdot \mathbf{m})(\widetilde{\mathbf{n}}^{(k)} \cdot \widetilde{\mathbf{m}}) S_{jk}. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung. Matrizen der Gestalt $\mathbf{S} = (S_{jk})$ sind im Kontext der Randelementmethode wohlbekannt. Sie treten bei der Galerkin-Diskretisierung der Symmschen Integralgleichung mit stückweise konstantem Ansatz- und Testraum auf, vgl. Maischak [47, 48], Carstensen-Praetorius [23]. Die einzelnen Einträge S_{jk} können für $d = 2$ exakt berechnet werden. Die detaillierte Darstellung findet sich in Anhang A. Für $d = 3$ können die Einträge der Matrix $\mathbf{S}$ exakt berechnet werden, wenn $\omega, \widetilde{\omega}$ achsenparallele beschränkte Quader sind, siehe Maischak [48] bzw. Hackbusch [34]. Die Berechnung dieser ist im Anhang B dargestellt. $\square$

2.3 Ein Modellfall

Lemma 2.9 (Carstensen-Prohl [24, Beweis von Theorem 2.1]). *Erfüllen $(\lambda_1, \mathbf{m}_1), (\lambda_2, \mathbf{m}_2) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\geq 0}) \times L^2(\Omega; B_2^d)$ die Bedingung (2.7) des relaxierten Problems (RP), so gilt $\langle \lambda_2\mathbf{m}_2 - \lambda_1\mathbf{m}_1 \,;\, \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1\rangle \geq 0$.* $\blacksquare$

Bemerkung. Es ist ein Standardresultat der konvexen Analysis, daß die Ableitung $D\phi^{**}$ einer konvexen Funktion ϕ^{**} monoton ist, d.h. es gilt punktweise

$$(D\phi^{**}(x) - D\phi^{**}(y)) \cdot (x-y) \geq 0 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^d,$$

siehe Dacorogna [25, Seite 39]. Insbesondere folgt für beliebige Funktionen $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 : \Omega \to \mathbb{R}^d$

$$\langle D\phi^{**}(\mathbf{m}_1) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_2) \,;\, \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2\rangle \geq 0. \qquad \square \tag{2.16}$$

Die Anwendung des vorausgegangenen Lemmas liefert nun den folgenden Satz, dessen Aussage bereits oben in Satz 2.5 gegeben worden ist. Der Beweis hier ist alternativ zu dem in DeSimone [26] publizierten und überträgt sich im folgenden auch auf die Diskretisierungen von (RP).

Satz 2.10. *Sind* $(\lambda_1, \mathbf{m}_1), (\lambda_2, \mathbf{m}_2)$ *zwei Lösungen des kontinuierlichen Problems* (RP)*, so stimmen die magnetischen Potentiale* $u_j = \mathcal{L}\mathbf{m}_j$ *beider Lösungen überein, d.h.* $u_1 = u_2$*. Insbesondere ist der Fehler* $\mathbf{e} := \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1 \in H(\mathrm{div}; \mathbb{R}^d)$ *divergenzfrei mit* $\int_\Omega \mathbf{e}\, dx = 0$*.*

Beweis. Wie in Gleichung (2.11) bemerkt, gilt für die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$

$$a(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \|\mathcal{L}\mathbf{e}\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)}.$$

Nutzt man (2.6), so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= a(\mathbf{m}_2, \mathbf{e}) + \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}_2)\ ;\ \mathbf{e}\rangle + \langle \lambda_2 \mathbf{m}_2\ ;\ \mathbf{e}\rangle \\ &\quad - \Big\{ a(\mathbf{m}_1, \mathbf{e}) + \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}_1)\ ;\ \mathbf{e}\rangle + \langle \lambda_1 \mathbf{m}_1\ ;\ \mathbf{e}\rangle \Big\} \\ &= a(\mathbf{e}, \mathbf{e}) + \underbrace{\langle D\phi^{**}(\mathbf{m}_2) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_1)\ ;\ \mathbf{e}\rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\langle \lambda_2 \mathbf{m}_2 - \lambda_1 \mathbf{m}_1\ ;\ \mathbf{e}\rangle}_{\geq 0}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Die Nichtnegativität des vorletzten Terms ist ein Standardresultat der konvexen Analysis und die des letzten Terms die Anwendung von Lemma 2.9. Also verschwinden alle Terme, und mit $a(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = 0$ folgt die Behauptung aus Lemma 2.6. ■

Im allgemeinen ist die Lösung $(\lambda, \mathbf{m})$ von (RP) jedoch nicht eindeutig. Hat man aber Kenntnis von $D\phi^{**}$, so kann in manchen Fällen die Eindeutigkeit bewiesen werden. Ein Beispiel hierfür ist der folgende Modellfall. In der Betrachtung von Mikromagnetismus in der angewandten Physik wird im uniachsialen Fall in der Regel die Anisotropiedichte

$$\phi(x) = C\left(1 - (x \cdot \mathbf{e})^2\right) \quad \text{für } x \in S^d_2$$

betrachtet, wobei C eine Konstante ist, die nur vom Material abhängt, und $\mathbf{e} \in S^d_2$ ist die sogenannte *easy axis*, eine kristalline Vorzugsrichtung für die Magnetisierung, Schrefl [56]. Ergänzt man $\mathbf{e}$ zu einer Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}, z_1, \ldots, z_{d-1}\}$ des $\mathbb{R}^d$, so gilt nach Parsevalscher Gleichheit

$$|x|^2 = (x \cdot \mathbf{e})^2 + \sum_{j=1}^{d-1} (x \cdot z_j)^2.$$

Zusammen mit $1 = |x|^2$ ergibt sich also

$$\phi(x) = C \sum_{j=1}^{d-1} (x \cdot z_j)^2 \quad \text{für } x \in S^d_2. \tag{2.18}$$

Lemma 2.11. *Es bezeichne* ϕ^{**} *die Konvexifizierung der Anisotropiedichte aus* (2.18) *gemäß* (2.3)*. Dann gilt* $\phi^{**}(x) = \begin{cases} C \sum_{j=1}^{d-1} (x \cdot z_j)^2 & \text{für } x \in B^d_2, \\ \infty & \text{anderenfalls.} \end{cases}$

Beweis. Mit Lemma 2.3 gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_j = \mathbf{e}_j$, denn es existiert eine orthogonale Matrix $A \in O(d)$ mit $Az_j = \mathbf{e}_j$ für alle $1 \leq j \leq d-1$. Es gilt also

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{d-1} |x_j|^2 \quad \text{für } x \in S^d_2$$

Zu $x \in B_2^d$ existieren $y^{(1)}, y^{(2)} \in S_2^d$ mit $x_j = y_j^{(\ell)}$ für alle $1 \le j \le d-1$. Insbesondere existiert ein $0 \le \lambda \le 1$ mit $x = \lambda y^{(1)} + (1-\lambda) y^{(2)}$. Hiermit und mit $\phi^{**}|_{S_2^d} = \phi$ folgt

$$\phi^{**}(x) \le \lambda \phi^{**}(y^{(1)}) + (1-\lambda)\phi^{**}(y^{(2)}) = \lambda \phi(y^{(1)}) + (1-\lambda)\phi(y^{(2)}) = \phi(x) \le \phi^{**}(x)$$

und damit die Gleichheit von ϕ^{**} und ϕ auf B_2^d. ■

Definition. Im folgenden wird wiederholt ein Modellfall betrachtet, bei dem vorausgesetzt wird, daß die konvexifizierte Energiedichte ϕ^{**} durch paarweise orthonormale Vektoren $z_1, \dots, z_{d-1} \in \mathbb{R}^d$ und

$$\phi^{**}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d-1} (x \cdot z_j)^2 & \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.19}$$

gegeben sei. Für die Ableitung gilt in diesem Fall $D\phi^{**}(x) = \sum_{j=1}^{d-1} (x \cdot z_j) z_j$ für $|x| \le 1$. □

Der folgende Satz, der für den Modellfall (2.19) die Eindeutigkeit der Lösung von (RMP) bzw. (RP) gibt, stammt für $d = 2$ aus Carstensen-Prohl [24]. Der dort gegebene Beweis basiert auf der Helmholtz-Zerlegung für $d = 2$. Der folgende Beweis ist elementarer Art und basiert nur auf den standartisierten Glättungstechniken, die dann das Resultat auch für $d = 3$ beweisen lassen.

Satz 2.12. *Im Modellfall* (2.19) *existiert eine eindeutige Lösung von* (RP) *und* (RMP).

Lemma 2.13. *Für* $\mathbf{g} \in H(\mathrm{div}; \mathbb{R}^d)$ *und* $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *gilt* $\psi * \mathbf{g} \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \cap H(\mathrm{div}; \mathbb{R}^d)$ *mit* $\mathrm{div}(\psi * \mathbf{g}) = \psi * \mathrm{div}\, \mathbf{g} \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d)$

Beweis. Die Aussagen $\psi * \mathbf{g} \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ und $\psi * \mathrm{div}\, \mathbf{g} \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ folgen aus allgemeinen Glättungseigeschaften der Faltung, siehe Satz 1.6 und Satz 1.8. Damit ist nur noch

$$\langle \psi * \mathrm{div}\, \mathbf{g} \,;\, \phi \rangle = -\langle \psi * \mathbf{g} \,;\, \nabla \phi \rangle \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

zu zeigen. Für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \psi * \mathrm{div}\, \mathbf{g} \,;\, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y)\, \mathrm{div}\, \mathbf{g}(x-y)\, dy\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\, \mathrm{div}\, \mathbf{g}(x-y)\, dx\, dy, \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Gleichheit der Satz von Tonelli-Fubini angewandt wurde. Mit der Translationsinvarianz des Integrals folgt weiter

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x+y)\, \mathrm{div}\, \mathbf{g}(x)\, dx\, dy.$$

Da $\phi(\cdot + y)$ für festes $y \in \mathbb{R}^d$ ebenfalls eine Testfunktion ist, ergibt sich für das innere Integral

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x+y)\, \mathrm{div}\, \mathbf{g}(x)\, dx = \langle \mathrm{div}\, \mathbf{g} \,;\, \phi(\cdot + y) \rangle &= -\langle \mathbf{g} \,;\, \nabla \phi(\cdot + y) \rangle \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla \phi(x+y) \cdot \mathbf{g}(x)\, dx. \end{aligned}$$

Erneutes Ausnutzen von Translationsinvarianz und Satz von Tonelli-Fubini zeigen

$$\begin{aligned}\langle \psi * \operatorname{div} \mathbf{g} \,;\, \phi\rangle &= -\int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) \int_{\mathbb{R}^d} \nabla\phi(x+y)\cdot \mathbf{g}(x)\,dx\,dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) \int_{\mathbb{R}^d} \nabla\phi(x)\cdot \mathbf{g}(x-y)\,dx\,dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla\phi(x)\cdot \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \psi(y)\mathbf{g}(x-y)\,dy\Big)\,dx \\ &= -\langle \psi * \mathbf{g} \,;\, \nabla\phi\rangle. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Lemma 2.14. *Ist $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ eine Testfunktion mit $\partial\phi/\partial x_j \equiv 0$, so gilt bereits $\phi \equiv 0$.*

Beweis. Zu $x \in \mathbb{R}^d$ betrachte die Funktion $\phi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \phi(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_d)$. Dann gelten $\phi_x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und $\phi_x' = \partial\phi/\partial x_j \equiv 0$, also $\phi_x \equiv 0$. Insbesondere folgt $\phi(x) = \phi_x(x_j) = 0$. $\blacksquare$

Beweis von Satz 2.12. Mit Lemma 2.3 gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\phi^{**}(x) = \sum_{j=1}^{d-1} |x_j|^2 \quad \text{für } x \in B_2^d.$$

Nach Satz 2.4 ist nur zu zeigen, daß (RP) höchstens eine Lösung besitzt. Zur Abkürzung der Schreibweise definiere $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_d) := \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1$. Mit Satz 2.10 gelten $\mathbf{e} \in H(\operatorname{div}; \mathbb{R}^d)$ und $\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$. Elementares Ableiten von ϕ^{**} liefert punktweise

$$\big(D\phi^{**}(\mathbf{m}_2) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_1)\big)\cdot \mathbf{e} = \begin{cases} |e_1|^2 & \text{für } d = 2, \\ |e_1|^2 + |e_2|^2 & \text{für } d = 3. \end{cases}$$

Ausnutzen von (2.6) ergibt

$$a(\mathbf{e}, \cdot) + \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}_2) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_1) \,;\, \cdot\rangle + \langle \lambda_2\mathbf{m}_2 - \lambda_1\mathbf{m}_1 \,;\, \cdot\rangle = 0 \quad \text{in } L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)^*,$$

und Einsetzen von $\mathbf{e} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ zeigt mit $a(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = 0$

$$0 = \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}_2) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_1) \,;\, \mathbf{e}\rangle + \underbrace{\langle \lambda_2\mathbf{m}_2 - \lambda_1\mathbf{m}_1 \,;\, \mathbf{e}\rangle}_{\geq 0}. \tag{2.20}$$

Hieraus folgt

$$0 \geq \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}_2) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_1) \,;\, \mathbf{e}\rangle = \begin{cases} \|e_1\|^2_{L^2(\Omega)} & \text{für } d = 2, \\ \|e_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e_2\|^2_{L^2(\Omega)} & \text{für } d = 3 \end{cases}$$

und damit $e_j = 0$ fast überall für $1 \leq j < d$. Wegen $\mathbf{e} \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ gilt nach nach Satz 1.12

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon * \mathbf{e} = \mathbf{e} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d),$$

wobei $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ die Mollifier-Funktionen gemäß (1.15) sind. Um $\mathbf{e} = 0$ zu zeigen, reicht es also zu zeigen, daß $\psi * \mathbf{e} = 0$ gilt für alle Testfunktionen $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ gilt $\psi * \mathbf{e} \in$

$H(\mathrm{div};\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ mit $\mathrm{div}(\psi * \mathbf{e}) = 0$ nach Lemma 2.13, und wegen $\mathrm{supp}(\mathbf{e}) \subseteq \overline{\Omega} \Subset \mathbb{R}^d$ gilt sogar $\psi * \mathbf{e} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Ferner folgt aus

$$\psi * \mathbf{e} = \begin{cases} (0, \psi * e_2) & \text{für } d = 2, \\ (0, 0, \psi * e_3) & \text{für } d = 3, \end{cases}$$

daß die partielle Ableitung in x_d-Richtung verschwindet: $0 = \mathrm{div}(\psi * \mathbf{e}) = \partial(\psi * e_d)/\partial x_d$. Mit Lemma 2.14 ergibt sich deshalb $\psi * \mathbf{e} = 0$ und insgesamt $\mathbf{e} = 0$, d.h. $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2$. Abschließend folgt damit auch $\lambda_1 = \lambda_2$ (fast überall). ■

2.4 Das penalisierte Modell ($RP_{\varepsilon,\mathcal{A}}$)

Von nun sei $\phi^{**} : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ eine konvexe, stetig differenzierbare Funktion, d.h. es wird vorausgesetzt, daß sich die konvexe Hülle $\phi^{**}|_{B_2^d}$ von ϕ von der euklidischen Einheitskugel B_2^d konvex und glatt zu einer Funktion auf $\mathbb{R}^d$ fortsetzen läßt. Die Nebenbedingung $|\mathbf{m}| \leq 1$ fast überall in Ω aus (RMP) wird nun mit der Idee der Yosida-Regularisierung durch einen Penalisierungsterm ersetzt.

Penalisiertes Minimierungsproblem ($RMP_{\varepsilon,\mathcal{A}}$). Es sei $\mathcal{A} \subseteq L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ konvex und schwach abgeschlossen. Für fixiertes $\varepsilon > 0$ finde man eine Minimalstelle $\mathbf{m} \in \mathcal{A}$ des penalisierten Energiefunktionals

$$\begin{aligned} E_\varepsilon^{**}(\mathbf{m}) := \int_\Omega \phi^{**}\big(\mathbf{m}(x)\big)\,dx - \int_\Omega \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{m}(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2\,dx \\ + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega \big(|\mathbf{m}(x)| - 1\big)_+^2\,dx, \end{aligned} \tag{2.21}$$

d.h. $E_\varepsilon^{**}(\mathbf{m}) = \inf_{\widetilde{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}} E_\varepsilon^{**}(\widetilde{\mathbf{m}})$. Hierbei bezeichne wieder $u := \mathcal{L}\mathbf{m}$ das magnetische Potential zur Magnetisierung $\mathbf{m}$.

Die folgenden drei Lemmata sind Standardresultate der Variationsrechnung bzw. der konvexen Analysis. Das erste Lemma beschreibt ein standartisiertes Vorgehen in der Variationsrechnung, um zu zeigen, daß ein Infimierungsproblem Lösungen besitzt, die sogenannte *Direkte Methode der Variationsrechnung*. Das zweite Lemma ist nur ein technisches Hilfsmittel, um die abstrakten Voraussetzungen von Lemma 2.15 auf gängigere Voraussetzungen zu konkretisieren, das dritte Lemma klärt abstrakt den Zusammenhang vom Infimierungsproblem und den zugehörigen Euler-Langrange-Gleichungen.

Lemma 2.15 (Direkte Methode der Variationsrechnung). *Es seien X ein reflexiver Banach-Raum, $\mathcal{A}$ eine schwach folgenabgeschlossene Menge und $E : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein schwach folgenunterhalbstetiges Energiefunktional, das auf $\mathcal{A}$ koerziv ist, d.h. für jede Folge (x_n) in $\mathcal{A}$ mit $\lim_n \|x_n\|_X = \infty$ existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) mit $\lim_k E(x_{n_k}) = \infty$. Dann gibt es ein $x_0 \in \mathcal{A}$ mit*

$$E(x_0) = \inf_{x \in \mathcal{A}} E(x). \tag{M}$$

Beweis. Es sei (x_n) eine E-infimierende Folge in $\mathcal{A}$, d.h. $\lim_n E(x_n) = \inf_{x \in \mathcal{A}} E(x) =: M \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $M < \infty$, da E ansonsten trivial ist. Wegen der Koerzivität von E, ist (x_n) dann beschränkt, und die Reflexivität erlaubt es, ohne Beschränkung der Allgemeinheit die schwache Konvergenz von (x_n) vorauszusetzen. Der schwache

Limes $x_0 \in X$ von (x_n) liegt wegen der schwachen Folgenabgeschlossenheit von $\mathcal{A}$ ebenfalls in $\mathcal{A}$. Da E als schwach folgenunterhalbstetig vorausgesetzt ist, ergibt sich schließlich $M \leq E(x_0) \leq \liminf_n E(x_n) = \lim_n E(x_n) = M$. ■

Das folgende Lemma folgt auf elementare Weise aus dem Trennungssatz von Hahn-Banach. Der klassische Beweis findet sich in jedem Buch zur Funktionalanalysis, z.B. Werner [61, Kapitel III].

Lemma 2.16. *Es sei X ein normierter Raum. Dann gelten*

(i) *Eine konvexe Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn sie schwach abgeschlossen bzw. schwach folgenabgeschlossen ist.*

(ii) *Ist $\mathcal{A} \subseteq X$ konvex und abgeschlossen und $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex und folgenunterhalbstetig bzw. sogar stetig, so ist f auch schwach folgenunterhalbstetig.* ■

Lemma 2.17 (Euler-Lagrangesche Differentialgleichungen [25, Section 3.1]). *Es sei X ein normierter Raum und $E : X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-differenzierbar*

(i) *Ist $x_0 \in X$ Lösung von (M), so ist x_0 auch Lösung der Differentialgleichung*

$$DE(x) = 0 \in X^* \tag{P}$$

(ii) *Ist E konvex, so löst $x_0 \in X$ genau dann (M), wenn es auch (P) löst.* ■

Die Anwendung der drei vorgestellten Lemmata auf das Infimierungsproblem $(RMP_{\varepsilon,\mathcal{A}})$ wird durch den folgenden Satz ermöglicht, der gerade die notwendigen Eigenschaften von E_ε^{**} verifiziert.

Satz 2.18. *Es bezeichnen E_1, E_2, E_3, E_4 die vier Summanden von $E_\varepsilon^{**} : L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gemäß (2.21). Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) *$E_1 : L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ ist konvex, und die Restriktion auf $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$ erfüllt $E_1 : L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d) \to [0,\infty)$ und ist Gâteaux-differenzierbar bezüglich $\|\cdot\|_{L^2}$ mit*

$$\big(DE_1(\mathbf{m})\big)(\widetilde{\mathbf{m}}) = \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}) \,;\, \widetilde{\mathbf{m}}\rangle. \tag{2.22}$$

(ii) *E_1 ist gleichmäßig stetig bezüglich $\|\cdot\|_{L^2}$ auf allen $\|\cdot\|_{L^\infty}$-beschränkten Teilmengen von $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ und insbesondere stetig auf allen endlichdimensionalen Teilräumen von $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$.*

(iii) *$E_2 : L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ ist linear und stetig und insbesondere global Fréchet-differenzierbar mit*

$$\big(DE_2(\mathbf{m})\big)(\widetilde{\mathbf{m}}) = -\langle \mathbf{f} \,;\, \widetilde{\mathbf{m}}\rangle. \tag{2.23}$$

(iv) *$E_3 : L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \to [0,\infty)$ ist konvex, stetig und global Fréchet-differenzierbar mit*

$$\big(DE_3(\mathbf{m})\big)(\widetilde{\mathbf{m}}) = a(\mathbf{m}, \widetilde{\mathbf{m}}). \tag{2.24}$$

(v) *$E_4 : L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \to [0,\infty)$ ist konvex, stetig und global Gâteaux-differenzierbar mit*

$$\big(DE_4(\mathbf{m})\big)(\widetilde{\mathbf{m}}) = \langle \lambda_\varepsilon \mathbf{m} \,;\, \mathbf{m}\rangle, \tag{2.25}$$

wobei die Funktion $\lambda_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ durch

$$\lambda_\varepsilon := \varepsilon^{-1} \frac{(|\mathbf{m}| - 1)_+}{|\mathbf{m}|} \tag{2.26}$$

definiert sei.

(vi) $E_\varepsilon^{**} : L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *ist konvex und koerziv auf* $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ *und restringiert auf einen endlichdimensionalen Teilraum von* $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$ *ferner reellwertig, stetig und Gâteaux-differenzierbar mit*

$$DE_\varepsilon^{**}(\mathbf{m}) = a(\mathbf{m},\cdot) + \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}) + \lambda_\varepsilon \mathbf{m} - \mathbf{f}\ ;\ \cdot\rangle \quad \text{in } L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)^*, \tag{2.27}$$

wobei $\lambda_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ *wieder durch* (2.26) *gegeben sei.*

Korollar 2.19. *Auf jedem endlich-dimensionalen Teilraum* $\mathcal{A}$ *von* $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$ *besitzt das Problem* ($RMP_{\varepsilon,\mathcal{A}}$) *Lösungen. Ferner sind für* $\mathbf{m} \in \mathcal{A}$ *die folgenden beiden Aussagen äquivalent.*

(i) $\mathbf{m}$ *ist Lösung von* ($RMP_{\varepsilon,\mathcal{A}}$).

(ii) $\mathbf{m}$ *löst die Variationsformulierung* ($RP_{\varepsilon,\mathcal{A}}$), *die durch*

$$a(\mathbf{m},\cdot) + \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}) + \lambda_\varepsilon \mathbf{m}\ ;\ \cdot\rangle = \langle \mathbf{f}\ ;\ \cdot\rangle \quad \text{in } \mathcal{A}^*,$$

wobei $\lambda_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ *wieder durch* (2.26) *gegeben wird.*

Beweis. Der endlich-dimensionale Raum $\mathcal{A}$ ist insbesondere reflexiv. E_ε^{**} ist stetig und konvex auf $\mathcal{A}$ und deshalb schwach folgenunterhalbstetig. Mit der Koerzivität von E_ε^{**} liefert die Direkte Methode der Variationsrechnung die Lösbarkeit von ($RMP_{\varepsilon,\mathcal{A}}$). Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt schließlich direkt mit Lemma 2.17. ■

Der Beweis der Gâteaux-Differenzierbarkeit von E_1 und E_4 benötigt das folgende Kriterium zur Vertauschung von Differential und Integral.

Lemma 2.20 (Königsberger [39, Abschnitt 8.4]). *Es seien* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine offene und* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *eine meßbare Menge und* $f : \Omega \times U \to \mathbb{R}$ *habe die folgenden Eigenschaften:*

(a) $f(\cdot, y) \in L^1(\Omega)$ *für alle* $y \in U$,

(b) $f(x,\cdot) \in \mathcal{C}^1(U)$ *für alle* $x \in \Omega$,

(c) *es existiert* $g \in L^1(\Omega)$ *derart, daß für alle* $y \in U$ *und* $1 \le j \le n$ *gilt*

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial y_j}(\cdot, y)\Big| \le g \quad \text{auf } \Omega.$$

Dann folgt $\frac{\partial f}{\partial y_j}(\cdot, y) \in L^1(\Omega)$ *für alle* $y \in U$, *und* $F(y) := \int_\Omega f(x,y)\,dx$ *definiert eine Funktion* $F \in \mathcal{C}^1(U)$ *mit* $\frac{\partial F}{\partial y_j} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial y_j}(x,\cdot)\,dx$. ■

Beweis von Satz 2.18 (i). Die Konvexität von E_1 folgt unmittelbar aus der Konvexität des Integranden. Da $\phi^{**} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}_{\ge 0})$ ist, ist für $\mathbf{m} \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$ auch $\phi^{**} \circ \mathbf{m} \in L^\infty(\Omega)$, und wegen $|\Omega| < \infty$ folgt $E_1(\mathbf{m}) < \infty$. Um die Gâteaux-Differenzierbarkeit von E_1 auf $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$ und (2.22) zu verifizieren, ist zu zeigen, daß für fixierte $\mathbf{m}, \widetilde{\mathbf{m}} \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$ die Funktion

$$F(t) := \int_\Omega \phi^{**}\big(\mathbf{m}(x) + t\widetilde{\mathbf{m}}(x)\big)\,dx \quad \text{für } t \in (-1,1)$$

differenzierbar ist in 0 mit $F'(0) = \int_\Omega D\phi^{**}\big(\mathbf{m}(x)\big) \cdot \widetilde{\mathbf{m}}(x)\,dx$. Man definiere

$$f(x,t) := \phi^{**}\big(\mathbf{m}(x) + t\widetilde{\mathbf{m}}(x)\big) \quad \text{für } x \in \Omega,\ -1 \le t \le 1.$$

Dann gilt zunächst $|\mathbf{m}(x) + t\widetilde{\mathbf{m}}(x)| \le \|\mathbf{m}\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\widetilde{\mathbf{m}}\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)} =: c$, d.h. $\mathbf{m}(x) + t\widetilde{\mathbf{m}}(x) \in B := \big\{y \in \mathbb{R}^d \,\big|\, |y| \le c\big\}$. Da die stetige Funktion ϕ^{**} auf dem Kompaktum B ihr Maximum annimmt, folgt $f(\cdot,t) \in L^\infty(\Omega)$. Ferner gelten offensichtlich $f(x,\cdot) \in \mathcal{C}^1(-1,1)$ und $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = D\phi^{**}\big(\mathbf{m}(x) + t\widetilde{\mathbf{m}}(x)\big) \cdot \widetilde{\mathbf{m}}(x)$. Schließlich existiert wegen $D\phi^{**} \in \mathcal{C}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ mit demselben Argument wie oben eine Konstante $C > 0$ mit

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\Big| \le \big|\widetilde{\mathbf{m}}(x)\big|\,\big|D\phi^{**}\big(\mathbf{m}(x) + t\widetilde{\mathbf{m}}(x)\big)\big| \le C.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 2.20 erfüllt, und es folgen $F \in \mathcal{C}(-1,1)$ und

$$F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx = \int_\Omega D\phi^{**}\big(\mathbf{m}(x) + t\widetilde{\mathbf{m}}(x)\big) \cdot \widetilde{\mathbf{m}}(x).$$

Einsetzen von $t = 0$ zeigt die Behauptung. ■

Beweis von Satz 2.18 (ii). Es seien $\mathcal{A} \subseteq L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ eine bezüglich $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)}$ beschränkte Menge und $c := \sup_{\mathbf{m}\in\mathcal{A}} \|\mathbf{m}\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)}$. Zunächst wird gezeigt, daß dann die Restriktion $E_1|_{\mathcal{A}}$ gleichmäßig stetig ist bezüglich $\|\cdot\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}$. Zunächst einmal ist ϕ^{**} auf der kompakten Menge $B := \big\{x \in \mathbb{R}^d \,\big|\, |x| \le c\big\}$ gleichmäßig stetig. Deshalb existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ mit

$$\forall x, y \in B \quad \Big(|x - y| \le \eta \implies |\phi^{**}(x) - \phi^{**}(y)| \le \frac{\varepsilon}{2|\Omega|}\Big).$$

Ferner nimmt die Funktion ϕ^{**} auf dem Kompaktum B ihr Maximum an,

$$M := \max_{x\in B} \phi^{**}(x),$$

und ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $M > 0$ vorausgesetzt werden. Man wähle $\delta := \min\{\varepsilon, \frac{\eta^2}{4M}\}$, also insbesondere $\sqrt{4M\delta} \le \eta$. Es seien nun $\mathbf{m}, \widetilde{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}$ mit $\|\mathbf{m} - \widetilde{\mathbf{m}}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \le \delta$. Definiere die meßbare Menge $\omega := \big\{x \in \Omega \,\big|\, |\mathbf{m}(x) - \widetilde{\mathbf{m}}(x)| \le \sqrt{4M\delta}\big\}$. Dann gilt

$$\delta^2 \ge \|\mathbf{m} - \widetilde{\mathbf{m}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \ge \|\mathbf{m} - \widetilde{\mathbf{m}}\|^2_{L^2(\Omega\setminus\omega;\mathbb{R}^d)} = \int_{\Omega\setminus\omega} \underbrace{|\mathbf{m}(x) - \widetilde{\mathbf{m}}(x)|^2}_{>4M\delta}\,dx > 4M\delta|\Omega\setminus\omega|$$

und deshalb $|\Omega\setminus\omega| < \frac{\delta}{4M}$. Damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}
|E_1(\mathbf{m}) - E_1(\widetilde{\mathbf{m}})| &\le \int_\Omega \big|\phi^{**}\big(\mathbf{m}(x)\big) - \phi^{**}\big(\widetilde{\mathbf{m}}(x)\big)\big|\,dx \\
&= \int_\omega \underbrace{\big|\phi^{**}\big(\mathbf{m}(x)\big) - \phi^{**}\big(\widetilde{\mathbf{m}}(x)\big)\big|}_{\le \frac{\varepsilon}{2|\Omega|}}\,dx + \int_{\Omega\setminus\omega} \underbrace{\big|\phi^{**}\big(\mathbf{m}(x)\big) - \phi^{**}\big(\widetilde{\mathbf{m}}(x)\big)\big|}_{\le 2M}\,dx \\
&\le \frac{|\omega|}{|\Omega|}\,\frac{\varepsilon}{2} + 2M|\Omega\setminus\omega| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{2} \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nun sei X_h ein endlichdimensionaler Unterraum von $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Da auf X_h alle Normen äquivalent sind, reicht es zu zeigen, daß die Restriktion $E_1|_{X_h}$ stetig ist bezüglich $\|\cdot\|_{L^\infty}$. Es seien $\varepsilon > 0$,

$\mathbf{m} \in X_h$, $c := 2\|\mathbf{m}\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)}$ und $\mathcal{A} := \big\{\widetilde{\mathbf{m}} \in X_h \,\big|\, \|\widetilde{\mathbf{m}}\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)} \le c\big\}$. Dann gilt $\mathbf{m} \in \mathcal{A}$, und nach dem bereits Bewiesenen existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\forall \widetilde{\mathbf{m}} \in \mathcal{A} \quad \big(\|\mathbf{m} - \widetilde{\mathbf{m}}\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)} \le \delta \implies |E_1(\mathbf{m}) - E_1(\widetilde{\mathbf{m}})| \le \varepsilon\big),$$

wobei die Äquivalenz der Normen auf X_h ausgenutzt wurde. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\delta \le \|\mathbf{m}\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)}$ angenommen werden. Dann folgt für $\widetilde{\mathbf{m}} \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$ mit $\|\mathbf{m}-\widetilde{\mathbf{m}}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \le \delta$ wegen $\|\widetilde{\mathbf{m}}\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)} \le \delta + \|\mathbf{m}\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)} \le c$ zunächst $\widetilde{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}$ und daraus die Behauptung. ■

Beweis von Satz 2.18 (iii). Die Linearität von E_2 ist offensichtlich, und die Stetigkeit folgt unmittelbar aus der Hölder-Ungleichung. ■

Der Beweis von Satz 2.18 (iv) ist ebenfalls eine direkte Folgerung aus einem wesentlich abstrakteren, aber elementaren Resultat.

Bemerkung. Es seien X ein Vektorraum und $K \subseteq \mathbb{R}$ konvex. Ist $f : X \to K$ konvex *und monoton wachsend* und $g : K \to \mathbb{R}$ konvex, so ist $f \circ g : X \to \mathbb{R}$ konvex. □

Lemma 2.21. *Es seien X, Y reelle Hilbert-Räume, $T \in L(X;Y)$ und $\varphi(x) := \|Tx\|_Y^2$. Dann ist die Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ konvex, stetig und global Fréchet-differenzierbar mit $\big(D\varphi(x)\big)(\widetilde{x}) = 2\langle Tx\,;\,T\widetilde{x}\rangle_Y$ für alle $x, \widetilde{x} \in X$.* ■

Beweis von Satz 2.18 (iv). Nach Definition gilt $E_3(\mathbf{m}) = \frac{1}{2}\|(\nabla \circ \mathcal{L})\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}$, und $\nabla \circ \mathcal{L}$ ist die (stetige) Orthogonalprojektion von $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ auf $L^2_\nabla(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Lemma 2.21 impliziert Stetigkeit, Konvexität und globale Fréchet-Differenzierbarkeit von $E_3 : L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \to [0,\infty)$ mit

$$\big(DE_3(\mathbf{m})\big)(\widetilde{\mathbf{m}}) = \langle(\nabla \circ \mathcal{L})\mathbf{m}\,;\,(\nabla \circ \mathcal{L})\widetilde{\mathbf{m}}\rangle = a(\mathbf{m}, \widetilde{\mathbf{m}}),$$

wobei die letzte Gleichheit mit Lemma 2.6 folgt. ■

Beweis von Satz 2.18 (v). Zunächst einmal ist die Abbildung $L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), g \mapsto g_+$ stetig, denn es gilt $g_+ = (g + |g|)/2$, und ferner konvex. Folglich ist auch E_4 wegen

$$\begin{array}{llllllllll} E_4: & L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) & \to & L^2(\Omega) & \to & L^2(\Omega) & \to & L^2(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & \mathbf{m} & \mapsto & |\mathbf{m}| & \mapsto & |\mathbf{m}| - \mathbb{1} & \mapsto & (|\mathbf{m}| - \mathbb{1})_+ & \mapsto & \|(|\mathbf{m}| - \mathbb{1})_+\|^2_{L^2(\Omega)} \end{array}$$

stetig und konvex, denn $\mathbf{m} \mapsto \|(|\mathbf{m}| - \mathbb{1})_+\|_{L^2(\Omega)}$ ist konvex, und $t \mapsto t^2$ ist konvex und monoton wachsend auf $\mathbb{R}_{\ge 0}$. Damit ist nur noch die globale Gâteaux-Differenzierbarkeit von E_4 zu zeigen. Zunächst einmal ist die Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0}, t \mapsto t_+^2$ stetig differenzierbar mit $\psi'(t) = 2t_+$. Mit der Kettenregel ist dann auch die Funktion $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\ge 0}, y \mapsto \frac{1}{2}(|y| - 1)_+^2$ stetig differenzierbar, und es gilt $\nabla\Psi(y) = \frac{(|y|-1)_+}{|y|}\, y$ mit $\nabla\Psi(0) := 0$. Für fixierte $\mathbf{m}, \widetilde{\mathbf{m}} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ definiere man die Funktion

$$f(x,t) := \frac{1}{2}\left(|\mathbf{m}(x) + t\widetilde{\mathbf{m}}(x)| - 1\right)_+^2 \quad \text{für } x \in \Omega \text{ und } -1 \le t \le 1.$$

Dann gelten $f(x,\cdot) \in \mathcal{C}^1(-1,1)$ sowie $f(\cdot,t) \in L^1(\Omega)$ für alle $x \in \Omega$ und $-1 \le t \le 1$, und mit Kettenregel folgt

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{(|\mathbf{m}(x) + t\widetilde{\mathbf{m}}(x)| - 1)_+}{|\mathbf{m}(x) + t\widetilde{\mathbf{m}}(x)|}\,\big(\mathbf{m}(x) + t\widetilde{\mathbf{m}}(x)\big) \cdot \widetilde{\mathbf{m}}(x).$$

Also zeigt eine elementare Abschätzung für $-1 \le t \le 1$

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\Big| \le \big||\mathbf{m}(x) + t\widetilde{\mathbf{m}}(x)| - 1\big|\,\big|\widetilde{\mathbf{m}}(x)\big| \le (|\mathbf{m}(x)| + |\widetilde{\mathbf{m}}(x)| + 1)\,|\widetilde{\mathbf{m}}(x)| := g(x).$$

Mit Lemma 2.20 folgt wegen $g \in L^1(\Omega)$ für $F(t) := \int_\Omega f(x,t)\,dx$ wieder $F \in \mathcal{C}^1(-1,1)$ mit

$$F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt, \quad \text{also} \quad F'(0) = \int_\Omega \frac{(|\mathbf{m}(x)| - 1)_+}{|\mathbf{m}(x)|}\,\mathbf{m}(x)\cdot\widetilde{\mathbf{m}}(x)\,dx.$$

Dies zeigt die Gâteaux-Differenzierbarkeit von E_4 und die Gültigkeit von (2.25). ■

Beweis von Satz 2.18 (vi). Mit den vorausgegangenen Aussagen ist nur noch die Koerzivität von E_ε^{**} auf $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ zu zeigen. Dazu sei zunächst $\mathbf{m} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ mit $\|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} > 1$ und $\omega_\mathbf{m} := \big\{x \in \Omega \,\big|\, |\mathbf{m}(x)| > 1\big\}$. Mit Hölder-Ungleichung gilt zum einen

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{m}\,dx = \int_{\omega_\mathbf{m}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{m}\,dx + \int_{\Omega\setminus\omega_\mathbf{m}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{m}\,dx &\le \|\mathbf{f}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)}\|\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)} + \int_{\Omega\setminus\omega_\mathbf{m}} |\mathbf{f}|\,dx \\ &\le \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\|\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{f}\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)},\end{aligned}$$

und zum anderen zeigt triviale Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|\mathbf{m}| - 1)_+^2\,dx = \int_{\omega_\mathbf{m}} (|\mathbf{m}| - 1)^2\,dx &= \||\mathbf{m}| - \mathbb{1}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m})}^2 \\ &\ge \big(\|\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)} - |\omega_\mathbf{m}|^{1/2}\big)^2 \\ &= \|\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)}^2 - 2|\omega_\mathbf{m}|^{1/2}\|\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)} + |\omega_\mathbf{m}| \\ &\ge \|\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)}^2 - 2|\Omega|^{1/2}\|\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Mit $c_6 := 2|\Omega|^{1/2} + 2\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}$ und $c_7 := 2\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned}E_\varepsilon^{**}(\mathbf{m}) &\ge \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega (|\mathbf{m}| - 1)_+^2\,dx - \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{m}\,dx \\ &\ge \frac{1}{2\varepsilon}\big\{\|\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)}^2 - 2|\Omega|^{1/2}\|\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)}\big\} - \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\|\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{f}\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon}\big\{\|\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)}^2 - c_6\|\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)} + c_7\big\}. \qquad (2.28)\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}\|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \le \|\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega\setminus\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)} &\le \|\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)} + |\Omega\setminus\omega_\mathbf{m}|^{1/2} \\ &\le \|\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)} + |\Omega|^{1/2},\end{aligned}$$

d.h. für $\|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \to \infty$ folgt $\|\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_\mathbf{m};\mathbb{R}^d)} \to \infty$ und deshalb $E_\varepsilon^{**}(\mathbf{m}) \to \infty$ aus (2.28). ■

Betrachtet man den Modellfall (2.19), so kann Aussage (i) und damit auch Aussage (v) von Satz 2.18 verstärkt werden.

Satz 2.22. *Im Modellfall* (2.19) *ist* $E_1 : L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ *sogar reellwertig und global stetig und Fréchet-differenzierbar. Als Konsequenz hieraus ist* $E_\varepsilon^{**} : L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ *reellwertig, konvex, koerziv, stetig und Gâteaux-differenzierbar.*

Beweis. Im Modellfall gilt

$$E_1(\mathbf{m}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{m}(x)\cdot z_1|^2\,dx = \frac{1}{2}\|\mathbf{m}\cdot z_1\|^2_{L^2(\Omega)} & \text{für } d=2, \\ \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{m}(x)\cdot z_1|^2 + |\mathbf{m}(x)\cdot z_2|^2\,dx = \frac{1}{2}\|(\mathbf{m}\cdot z_1, \mathbf{m}\cdot z_2)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} & \text{für } d=3. \end{cases}$$

Da $T\mathbf{m} := \mathbf{m}\cdot z_1$ bzw. $T\mathbf{m} := (\mathbf{m}\cdot z_1, \mathbf{m}\cdot z_2)$ nach Cauchy-Schwarz-Ungleichung einen stetigen linearen Operator

$$T \in L(L^2(\Omega;\mathbb{R}^2); L^2(\Omega)) \quad \text{bzw.} \quad T \in L(L^2(\Omega;\mathbb{R}^3); L^2(\Omega;\mathbb{R}^2))$$

definiert, folgt die Behauptung für E_1 aus Lemma 2.21. Die Eigenschaften von E_ε^{**} folgen jetzt analog zu Satz 2.18. ■

Korollar 2.23. *Im Modellfall* (2.19) *besitzt das Problem* ($RMP_{\varepsilon,\mathcal{A}}$) *für jeden abgeschlossenen Unterraum* $\mathcal{A}$ *von* $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ *Lösungen. Ferner sind für* $\mathbf{m} \in \mathcal{A}$ *die beiden Aussagen (i) und (ii) äquivalent.*

(i) $\mathbf{m}$ *ist Lösung von* ($RMP_{\varepsilon,\mathcal{A}}$).

(ii) $\mathbf{m}$ *löst die Variationsformulierung* ($RP_{\varepsilon,\mathcal{A}}$)

$$a(\mathbf{m},\cdot) + \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}) + \lambda_\varepsilon \mathbf{m}\,;\,\cdot\rangle = \langle \mathbf{f}\,;\,\cdot\rangle \quad \textit{in } \mathcal{A}^*,$$

wobei $\lambda_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ *durch* (2.26) *gegeben wird.* ■

2.5 Das diskrete penalisierte Modell ($RP_{\varepsilon,h}$)

Für das restliche Kapitel sei $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_N\}$ eine Triangulierung von Ω. Für die Resultate der folgenden drei Abschnitte 2.5 - 2.7 wird dabei nur benötigt, daß die Elemente $T \in \mathcal{T}$ offene, paarweise disjunkte Mengen sind, deren vereinigter Abschluß den Abschluß $\overline{\Omega}$ von Ω überdeckt, d.h. $\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^N \overline{T}$.

Bemerkung. Die häufig geforderte Bedingung der *Regularität einer Triangulierung* kann bei der vorgestellten Analysis entfallen. Hängende Knoten sind damit ausdrücklich zugelassen. Tatsächlich reicht für die Analysis der Abschnitte 2.5 - 2.7 zunächst, daß $\mathcal{T}$ eine Partition von Ω ist. □

Zur gegebenen Triangulierung $\mathcal{T}$ bezeichne $\mathcal{L}^0(\mathcal{T})$ den Raum aller $\mathcal{T}$-stückweise konstanten Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$. Für eine Funktion $g \in L^2(\Omega)$ definiere man eine Projektion $\mathbf{g}_\mathcal{T}$ auf $\mathcal{L}^0(\mathcal{T})$ durch

$$g_\mathcal{T}(x) := \fint_T g(y)\,dy \quad \text{für alle } x \in T \in \mathcal{T}.$$

Da $\mathcal{T}$ als Triangulierung von Ω vorausgesetzt ist, ist $g_\mathcal{T}$ fast überall eindeutig definiert und damit im L^2-Sinn eine Funktion in $\mathcal{L}^0(\mathcal{T})$. Der Operator

$$(\cdot)_\mathcal{T} : L^2(\Omega) \to \mathcal{L}^0(\mathcal{T})$$

ist die Orthogonalprojektion von $L^2(\Omega)$ auf $\mathcal{L}^0(\mathcal{T})$. Dieselbe Notation sei auch für $\mathbb{R}^d$-wertige Funktionen $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_d)$ durch komponentenweises Vorgehen erklärt, z.B. $\mathbf{g}_\mathcal{T} := \big((g_1)_\mathcal{T}, \ldots, (g_d)_\mathcal{T}\big)$.

Für $T \in \mathcal{T}$ definiert $h_T := \operatorname{diam}(T)$ die Elementgröße, und $h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T})$ bezeichnet die dazugehörige Funktion mit $h(x) := h_T$ für $x \in T \subseteq \Omega$.

Diskretes penalisiertes (relaxiertes) Problem ($RP_{\varepsilon,h}$). Zu fixiertem $\varepsilon > 0$ finde Funktionen $\mathbf{m}_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ und $\lambda_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}_{\geq 0})$ mit

$$a(\mathbf{m}_h, \cdot) + \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}_h) + \lambda_h \mathbf{m}_h \,;\, \cdot\rangle = \langle \mathbf{f} \,;\, \cdot\rangle \qquad \text{in } \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)^*, \tag{2.29}$$

$$\lambda_h = \varepsilon^{-1} \frac{(|\mathbf{m}_h| - 1)_+}{|\mathbf{m}_h|} \qquad \text{f.ü. in } \Omega. \tag{2.30}$$

Mit Korollar 2.19 besitzt das Problem ($RP_{\varepsilon,h}$) Lösungen. Analog zu Abschnitt 2.3 läßt sich wieder zeigen, daß das magnetische Potential $u_h = \mathcal{L}\mathbf{m}_h$ für alle Lösungen $\mathbf{m}_h$ von ($RP_{\varepsilon,h}$) übereinstimmt. Im Modellfall (2.19) ist auch die Lösung $\mathbf{m}_h$ eindeutig. Der Beweis dieser Resultate erfordert das folgende Lemma, das leicht durch Fallunterscheidungen und diverse Cauchy-Schwarz-Ungleichungen bewiesen wird.

Lemma 2.24 (Carstensen-Prohl [24, Beweis von Theorem 3.1]). *Gegeben seien Tupel* $(\lambda_1, \mathbf{m}_1), (\lambda_2, \mathbf{m}_2) \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}_{\geq 0}) \times \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$, *die für* $\varepsilon > 0$ *jeweils die Bedingung* (2.30) *erfüllen. Dann gilt punktweise die Ungleichung*

$$(\lambda_2 \mathbf{m}_2 - \lambda_1 \mathbf{m}_1) \cdot (\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1) \geq 0 \quad \textit{fast überall in } \Omega. \tag{2.31}$$

Die Gleichheit tritt in einem Punkt $x \in \Omega$ *genau dann ein, wenn die Vektoren* $\mathbf{m}_1(x)$ *und* $\mathbf{m}_2(x)$ *linear abhängig sind. Insbesondere gilt für das* L^2*-Skalarprodukt*

$$\langle \lambda_2 \mathbf{m}_2 - \lambda_1 \mathbf{m}_1 \,;\, \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1 \rangle \geq 0, \tag{2.32}$$

und es gilt Gleichheit, wenn die $\mathcal{T}$*-stückweise konstanten Funktionen* $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ *auf allen Elementen* $T \in \mathcal{T}$ *linear abhängig sind.* ■

Satz 2.25. *Sind* $(\lambda_1, \mathbf{m}_1), (\lambda_2, \mathbf{m}_2)$ *Lösungen von* ($RP_{\varepsilon,h}$), *so gilt für den Fehler* $\mathbf{e} := \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1 \in H(\operatorname{div};\mathbb{R}^d)$ *mit* $\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$ *und* $\int_\Omega \mathbf{e}\, dx = 0$. *Insbesondere stimmen die zugehörigen magnetischen Potentiale* $u_j := \mathcal{L}\mathbf{m}_j$ *überein, d.h.* $u_1 = u_2$.

Beweis. Die Differenz von (2.29) liefert

$$0 = a(\mathbf{e}, \mathbf{e}) + \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}_2) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_1) \,;\, \mathbf{e}\rangle + \langle \lambda_2 \mathbf{m}_2 - \lambda_1 \mathbf{m}_1 \,;\, \mathbf{e}\rangle.$$

Da alle drei Terme nicht negativ sind, folgt insbesondere $a(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = 0$ und damit $\mathcal{L}\mathbf{e} = 0$. Die Behauptung folgt nun wieder mit Lemma 2.6. ■

Satz 2.26. *Im Modellfall* (2.19) *existiert für gegebenes* $\varepsilon > 0$ *eine eindeutige Lösung von* ($RP_{\varepsilon,h}$).

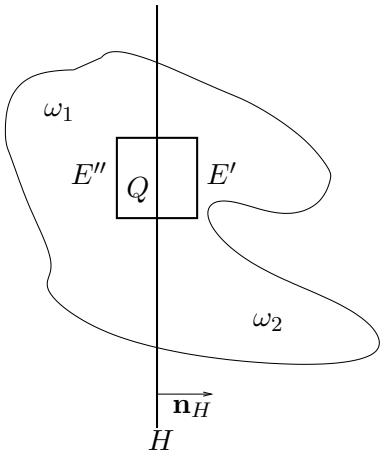
Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, daß es höchstens eine Lösung von ($RP_{\varepsilon,h}$) gibt. Dazu seien Lösungen $(\lambda_1, \mathbf{m}_1), (\lambda_2, \mathbf{m}_2)$ von ($RP_{\varepsilon,h}$) gegeben, und es sei $\mathbf{e} := \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1$. Nach Satz 2.25 induzieren beide Magnetisierungen $\mathbf{m}_j$ dasselbe magnetische Potential $u = \mathcal{L}\mathbf{m}_j$. Die Differenz von (2.29) liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}_2) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_1) \,;\, \mathbf{e}\rangle + \langle \lambda_2 \mathbf{m}_2 - \lambda_1 \mathbf{m}_1 \,;\, \mathbf{e}\rangle \\ &= \|\mathbf{e} \cdot z\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \langle \lambda_2 \mathbf{m}_2 - \lambda_1 \mathbf{m}_1 \,;\, \mathbf{e}\rangle. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Somit verschwinden beide Terme. Mit derselben Argumentation wie im Beweis von Satz 2.12 (dort ausgehend von (2.20)) folgt wieder $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2$. Damit ergibt sich aber auch umgehend $\lambda_1 = \lambda_2$ aus (2.30). ■

Im folgenden wird gezeigt, daß die diskrete Lösung unter gewissen Voraussetzungen an das Netz stets eindeutig ist, indem ausgenutzt wird, daß der Fehler $\mathbf{e} := \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1$ divergenzfrei ist. Außer dieser Tatsache geht nichts weiter in den Beweis ein. Es müssen also keine weiteren Voraussetzungen an ϕ^{**} gestellt werden wie z.B. in Satz 2.26.

Lemma 2.27. *Es sei $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet und H eine Hyperebene mit Normalenvektor $\mathbf{n}_H$, die ω in zwei nichtleere Lipschitz-Gebiete ω_1, ω_2 teilt. Ist $\mathbf{m} \in H(\mathrm{div};\omega)$ eine Funktion mit $\operatorname{div}\mathbf{m} = 0$ und $\mathbf{m}|_{\omega_j} \equiv \mathbf{m}_j \in \mathbb{R}^d$, so folgt $\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1 \perp \mathbf{n}_H$.*



Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $H = \{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ angenommen werden. Es sei $x_0 \in \omega \cap H$. Da ω offen ist, existiert ein achsenparalleler Quader Q, der durch H halbiert wird und noch ganz in ω enthalten ist. Wegen $H(\mathrm{div};\omega) \subseteq H(\mathrm{div};Q)$ liefert der Gaußsche Integralsatz

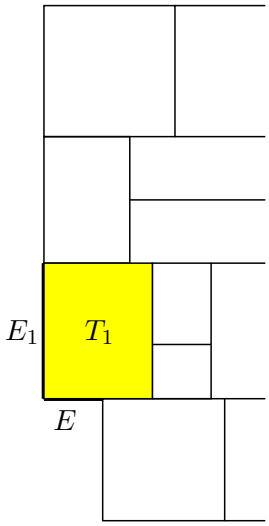
$$0 = \int_Q \operatorname{div}\mathbf{m}\,dx = \int_{\partial Q} \mathbf{m}\cdot\mathbf{n}\,ds_x.$$

Die Werte auf gegenüberliegenden Seiten $E \subseteq \partial Q$ heben sich mit Ausnahme der Seiten E' und E'', die parallel zu H liegen, gegenseitig weg, da die Normalen auf diesen Seiten entgegengesetztes Vorzeichen haben. Es verbleibt wegen $|E'| = |E''| > 0$

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial Q} \mathbf{m}\cdot\mathbf{n}\,ds_x &= \int_{E'\cup E''} \mathbf{m}\cdot\mathbf{n}\,ds_x \\ &= \int_{E'} \mathbf{m}\cdot\mathbf{n}_H\,ds_x - \int_{E''} \mathbf{m}\cdot\mathbf{n}_H\,ds_x \\ &= |E'|(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1)\cdot\mathbf{n}_H. \end{aligned}$$

Nun ergibt sich mit $(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1)\cdot\mathbf{n}_H = 0$ die Behauptung. ■

Satz 2.28. *Es seien $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von Ω in lauter Rechtecke ($d = 2$) bzw. Quader ($d = 3$) und $\mathbf{m} \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{div}\mathbf{m} = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Dann folgt bereits $\mathbf{m} = 0$. Insbesondere ist die Lösung $(\lambda_h, \mathbf{m}_h)$ von $(RP_{\varepsilon,h})$ eindeutig.*



Beweis. Es bezeiche $\mathcal{T}^* := \{T \in \mathcal{T} \,|\, \mathbf{m}|_T \neq 0\}$ die Menge aller Elemente, auf denen $\mathbf{m}$ nicht verschwindet, und es sei angenommen, daß $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_N\} \neq \emptyset$ gilt. Zunächst wird der Fall $d = 2$ betrachtet. Der Fall $d = 3$ folgt aber durch analoges Vorgehen. Nach Voraussetzung an $\mathcal{T}$ existieren Skalare $a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, b_1^{(j)}, b_2^{(j)} \in \mathbb{R}$ mit $T_j = (a_1^{(j)}, b_1^{(j)}) \times (a_2^{(j)}, b_2^{(j)})$. Es seien $T_1, \ldots T_n \in \mathcal{T}^*$ alle Elemente mit $a_1^{(k)} = \min_{1\le j\le N} a_j^{(k)}$ für alle $1 \le k \le n$, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei T_1 von diesen Elementen wiederum das eindeutige

Element mit $a_2^{(1)} = \min_{1\le j\le n} a_2^{(j)}$. Nach Wahl erfüllt die *linke* Kante von $T_1 = (a_1^{(1)}, b_1^{(1)}) \times (a_2^{(1)}, b_2^{(1)})$

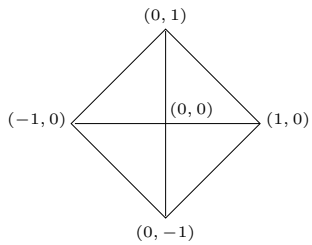
$$E_1 := \{a_1^{(1)}\} \times [a_2^{(1)}, b_2^{(1)}] \subseteq \partial\Omega.$$

Mit $\mathbf{m}|_{T_1} = \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ gilt nach Lemma 2.27 $\mathbf{c} \perp \mathbf{n}_{E_1} = (-1, 0)$ und damit $c_1 = 0$. Für die *untere* Kante $E_2 := [a_1^{(1)}, b_1^{(1)}] \times \{a_2^{(1)}\}$ von T_1 existiert zumindest ein $\varepsilon > 0$ mit

$$E := [a_1^{(1)}, a_1^{(1)} + \varepsilon] \times \{a_2^{(1)}\} \subseteq \partial\Omega$$

und deshalb analog $\mathbf{c} \perp \mathbf{n}_E = \mathbf{n}_{E_2} = (0, -1)$. Es folgt $c_2 = 0$, und mit $\mathbf{m}|_{T_1} = \mathbf{c} = 0$ ergibt sich ein Widerspruch zu $T_1 \in \mathcal{T}^*$. Insgesamt folgt daher mit $\mathcal{T}^* = \emptyset$ der wesentliche Teil der Behauptung. Nach Satz 2.25 ist der Fehler $\mathbf{e} := \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1 \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^d)$ zweier Lösungen $(\lambda_j, \mathbf{m}_j)$ von $(RP_{\varepsilon,h})$ divergenzfrei (im schwachen Sinn). Damit folgt $\mathbf{e} = 0$. ■

Satz 2.28 überträgt sich nicht auf beliebige Triangulierungen, auch wenn der Beweis zeigt, daß das Resultat im konkreten Beispiel auf viele weitere Arten von Netzen übertragen werden kann. Ein Gegenbeispiel läßt sich aber bereits für $d = 2$ und ein einfaches Dreiecksnetz konstruieren.



Beispiel. Es sei $\Omega := \operatorname{conv}\{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$ die ℓ_1^2-Einheitskugel. Es werde die folgende (reguläre) Triangulierung $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ von Ω betrachtet, wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt, und η sei die zum Knoten $(0,0)$ gehörige P^1-Hutfunktion, die auf allen Elementen $T \in \mathcal{T}$ affin ist, außerhalb Ω verschwindet und die Knotenwerte $\eta(0,0) = 1$, $\eta(\pm 1, 0) = 0 = \eta(0, \pm 1)$ hat. Dann ist $\eta \in H^1(\mathbb{R}^d)$, und damit ist $\mathbf{m} := \operatorname{curl} \eta \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. Da jeder curl verschwindende Divergenz hat, folgt $\mathbf{m} \in H(\operatorname{div}; \mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{div} \mathbf{m} = 0$, obwohl $\mathbf{m}$ *nicht* global auf $\mathbb{R}^d$ verschwindet. □

2.6 A priori Abschätzungen für $(RP_{\varepsilon,h})$

Lemma 2.29 (Carstensen-Prohl [24, Beweis von Theorem 4.3]). *Sind $(\lambda, \mathbf{m})$ und $(\lambda_h, \mathbf{m}_h)$ Lösungen von (RP) bzw. $(RP_{\varepsilon,h})$ mit $\varepsilon > 0$ fixiert, so gelten die beiden folgenden Abschätzungen*

$$-\langle \lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_h \rangle \le \int_{\Omega_h} \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h| \,(\lambda|\mathbf{m}| - \lambda_h|\mathbf{m}_h|)\, dx, \tag{2.34}$$

$$-\langle \lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_h \rangle \le \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} - \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)}. \tag{2.35}$$

Dabei bezeichnet Ω_h die Menge $\Omega_h = \{x \in \Omega \,|\, \lambda_h(x) \neq 0\}$. ■

Bemerkung. Der Beweis von Lemma 2.29 benötigt lediglich die Gleichungen (2.7) und (2.30), durch die λ bzw. λ_h bestimmt sind, sowie die Nebenbedingung $|\mathbf{m}| \le 1$. Insofern läßt sich das Lemma später auch für das diskrete stabilisierte Problem anwenden. Abschätzung (2.35) wird für die folgenden a priori Abschätzungen benötigt, (2.34) findet ihre Anwendung in Abschnitt 2.7 bei der Herleitung von a posteriori Resultaten. □

Satz 2.30. *Es seien $\varepsilon > 0$ und $(\lambda, \mathbf{m})$ sowie $(\lambda_h, \mathbf{m}_h)$ Lösungen von (RP) bzw. $(RP_{\varepsilon,h})$. Dann gilt mit $u := \mathcal{L}\mathbf{m}$, $u_h := \mathcal{L}\mathbf{m}_h$ und $\Omega_h := \{x \in \Omega \,|\, \lambda_h(x) \neq 0\}$ die a priori Abschätzung*

$$\begin{aligned}
&\|u - u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + 2\langle D\phi^{**}(\mathbf{m}) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_h) \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_h\rangle + \varepsilon\|\lambda_h \mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + 2\langle D\phi^{**}(\mathbf{m}) \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\rangle + 2\langle \lambda\mathbf{m} \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\rangle + \varepsilon\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} \\
&\leq 3\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|D\phi^{**}(\mathbf{m}) - (D\phi^{**}(\mathbf{m}))_\mathcal{T}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\lambda\mathbf{m} - (\lambda\mathbf{m})_\mathcal{T}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad + \varepsilon\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Beweis. Zur Abkürzung definiere die Funktionen $\mathbf{d}, \mathbf{d}_h : \Omega \to \mathbb{R}^d$ durch $\mathbf{d} := D\phi^{**}(\mathbf{m})$, $\mathbf{d}_h := -D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)$. Mit Hölder- und Young-Ungleichung erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} &= a(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h, \mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \\
&= a(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h, \mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}) + a(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h, \mathbf{m}_\mathcal{T} - \mathbf{m}_h) \\
&\leq \|u - u_h\|_{W^2_1(\mathbb{R}^d)}\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + a(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h, \mathbf{m}_\mathcal{T} - \mathbf{m}_h) \\
&\leq \frac{1}{2}\|u - u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + a(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h, \mathbf{m}_\mathcal{T} - \mathbf{m}_h).
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Der letzte Term auf der rechten Seiten läßt sich mit der Orthogonalität

$$a(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h, \cdot) + \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_h) \,;\, \cdot\rangle + \langle \lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h \,;\, \cdot\rangle = 0 \qquad \text{in } \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)^*, \tag{2.37}$$

die unmittelbar aus (2.6) und (2.29) folgt, umschreiben. Mit Gleichung (2.37) und Abschätzung (2.35) ergibt sich für den hinteren Term

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h, \mathbf{m}_\mathcal{T} - \mathbf{m}_h) &= -\langle \mathbf{d} - \mathbf{d}_h \,;\, \mathbf{m}_\mathcal{T} - \mathbf{m}_h\rangle - \langle \lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h \,;\, \mathbf{m}_\mathcal{T} - \mathbf{m}_h\rangle \\
&= -\langle \mathbf{d} - \mathbf{d}_h \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_h\rangle - \langle \lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_h\rangle \\
&\qquad + \langle \mathbf{d} - \mathbf{d}_h \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\rangle + \langle \lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\rangle \\
&\leq -\langle \mathbf{d} - \mathbf{d}_h \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_h\rangle + \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} - \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad + \langle \mathbf{d} - \mathbf{d}_h \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\rangle + \langle \lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\rangle.
\end{aligned}$$

Die Kombination beider Abschätzungen liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u - u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \langle \mathbf{d} - \mathbf{d}_h \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_h\rangle + \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad + \langle \mathbf{d} - \mathbf{d}_h \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\rangle + \langle \lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\rangle.
\end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{d}_h, \lambda_h\mathbf{m}_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ folgt mit der Orthogonalprojektion $(\cdot)_\mathcal{T}$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \langle \mathbf{d} \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\rangle + \langle \lambda\mathbf{m} \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\rangle.$$

Dasselbe Argument zeigt die Gleichheit zu

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\quad + \langle \mathbf{d} - \mathbf{d}_\mathcal{T} \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\rangle + \langle \lambda\mathbf{m} - (\lambda\mathbf{m})_\mathcal{T} \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\rangle.
\end{aligned}$$

Mit Hölder- und Young-Ungleichung folgt schließlich auch die letzte Abschätzung. ■

Definition. Für die folgende Abschätzung wird zusätzlich benötigt, daß die Ableitung der konvexifizierten anisotropen Energiedichte ϕ^{**} monoton ist, d.h. es gilt

$$c_8|D\phi^{**}(x) - D\phi^{**}(\hat{x})|^2 \leq \big(D\phi^{**}(x) - D\phi^{**}(\hat{x})\big) \cdot \big(x - \hat{x}\big) \qquad (x, \hat{x} \in \mathbb{R}^d) \tag{2.38}$$

mit einer Konstanten $c_8 > 0$, die nur von ϕ abhängt. Insbesondere gilt dann

$$c_8\|D\phi^{**}(\mathbf{m}) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \leq \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\ ;\ \mathbf{m} - \mathbf{m}_h\rangle \tag{2.39}$$

für Funktionen $\mathbf{m}, \mathbf{m}_h : \Omega \to \mathbb{R}$. □

Bemerkung. Im Modellfall (2.19) ist die Monotoniebedingung (2.38) stets erfüllt mit $c_8 = 1$ und Gleichheit. Es gilt nämlich zunächst für $d = 2$ die Gleichheit $D\phi^{**}(x) = (x \cdot z)z$ und damit

$$\begin{aligned}\big(D\phi^{**}(x) - D\phi^{**}(\hat{x})\big) \cdot \big(x - \hat{x}\big) &= \big((x \cdot z)z - (\hat{x} \cdot z)z\big) \cdot \big(x - \hat{x}\big) = \big((x \cdot z) - (\hat{x} \cdot z)\big)^2 \\ &= \big|\big\{(x \cdot z) - (\hat{x} \cdot z)\big\}z\big|^2 = \big|D\phi^{**}(x) - D\phi^{**}(\hat{x})\big|^2,\end{aligned}$$

In der vorletzten Gleichhung wurde $|z| = 1$ ausgenutzt. Für $d > 2$ ergibt sich mit der Orthogonalität der z_j

$$\begin{aligned}\big(D\phi^{**}(x) - D\phi^{**}(\hat{x})\big) \cdot \big(x - \hat{x}\big) &= \sum_{j=1}^{d-1} \big((x \cdot z_j)z_j - (\hat{x} \cdot z_j)z_j\big) \cdot \big(x - \hat{x}\big) \\ &= \sum_{j=1}^{d-1} \big|\big\{(x \cdot z_j) - (\hat{x} \cdot z_j)\big\}z_j\big|^2 \\ &= \Big|\sum_{j=1}^{d-1} \big\{(x \cdot z_j) - (\hat{x} \cdot z_j)\big\}z_j\Big|^2 \\ &= \big|D\phi^{**}(x) - D\phi^{**}(\hat{x})\big|^2.\end{aligned}$$

□

Satz 2.31. *Die Energiedichte ϕ^{**} erfülle die Monotoniebedingung* (2.38)*. Es seien $\varepsilon > 0$ und $(\lambda, \mathbf{m})$ sowie $(\lambda_h, \mathbf{m}_h)$ Lösungen von (RP) bzw. $(RP_{\varepsilon,h})$. Dann existiert eine Konstante $c_9 > 0$, die nur von c_8 und damit von ϕ^{**} abhängt, so daß mit $u := \mathcal{L}\mathbf{m}$, $u_h := \mathcal{L}\mathbf{m}_h$ und $\Omega_h := \big\{x \in \Omega \,\big|\, \lambda_h(x) \neq 0\big\}$ gilt*

$$\begin{aligned}&\|u - u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \|D\phi^{**}(\mathbf{m}) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leq c_9\Big(\varepsilon^2\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} + (1+\varepsilon)\big\{\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|D\phi^{**}(\mathbf{m}) - (D\phi^{**}(\mathbf{m}))_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad\qquad + \|\lambda\mathbf{m} - (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\big\}\Big).\end{aligned}$$

Bemerkung. Falls die Daten $\mathbf{m}$, $\lambda\mathbf{m}$ und $D\phi^{**}(\mathbf{m})$ hinreichend glatt sind, können die drei letzten Terme auf der rechten Seite mit Poincaré-Ungleichungen elementweise abgeschätzt werden. Satz 2.31 gibt dann eine Abschätzung der Güte $O(\varepsilon + h)$. Dies legt für die numerische Realisation des penalisierten Modells die Wahl von $\varepsilon = h^\alpha$ mit $\alpha = 1$ bzw. $\alpha \geq 1$ nahe. □

Die wesentliche Idee zur Verbesserung der Konvergenzordnung liegt in dem folgenden Argument, das dem Beweis vorangestellt sei.

Lemma 2.32. *Für Funktionen $f, g \in L^2(\omega;\mathbb{R}^n)$ auf einer meßbaren Menge $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und Konstanten $c, \varepsilon > 0$ gilt*

$$c\Big\{\varepsilon\|f\|^2_{L^2(\omega;\mathbb{R}^n)} - \varepsilon\|g\|^2_{L^2(\omega;\mathbb{R}^n)}\Big\} \le c^2\Big\{\varepsilon^2\|f\|^2_{L^2(\omega;\mathbb{R}^n)} + \varepsilon^2\|g\|^2_{L^2(\omega;\mathbb{R}^n)}\Big\} + \frac{1}{2}\|f-g\|^2_{L^2(\omega;\mathbb{R}^n)}.$$

Beweis. Aus der punktweisen Abschätzung

$$|f|^2 - |g|^2 = (|f|+|g|)(|f|-|g|) \le (|f|+|g|)\,|f-g| \le \sqrt{2}(|f|^2+|g|^2)^{1/2}|f-g|$$

erhält man durch Integration über ω und Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2(\omega;\mathbb{R}^n)} - \|g\|^2_{L^2(\omega;\mathbb{R}^n)} &= \int_\omega |f|^2 - |g|^2 dx \\
&\le \sqrt{2}\int_\omega (|f|^2+|g|^2)^{1/2}|f-g|\,dx \\
&\le \sqrt{2}\Big(\int_\omega |f|^2+|g|^2\,dx\Big)^{1/2}\|f-g\|_{L^2(\omega)} \\
&= \sqrt{2}\big(\|f\|^2_{L^2(\omega;\mathbb{R}^n)} + \|g\|^2_{L^2(\omega;\mathbb{R}^n)}\big)^{1/2}\|f-g\|_{L^2(\omega;\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt mit einer Young-Ungleichung im letzten Schritt

$$\begin{aligned}
c\left(\varepsilon\|f\|^2_{L^2(\omega;\mathbb{R}^d)} - \varepsilon\|g\|^2_{L^2(\omega;\mathbb{R}^d)}\right) &\le c\sqrt{2}\left(\varepsilon^2\|f\|^2_{L^2(\omega;\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^2\|g\|^2_{L^2(\omega;\mathbb{R}^d)}\right)^{1/2}\|f-g\|_{L^2(\omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\le c^2\left(\varepsilon^2\|f\|^2_{L^2(\omega;\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^2\|g\|^2_{L^2(\omega;\mathbb{R}^d)}\right) + \frac{1}{2}\|f-g\|^2_{L^2(\omega;\mathbb{R}^d)}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Beweis von Satz 2.31. Mit der Orthogonalprojektion $(\cdot)_{\mathcal{T}}$ gilt zunächst

$$\begin{aligned}
\|\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} &= \langle \lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\,;\,(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}} - \lambda_h\mathbf{m}_h\rangle + \langle \lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\,;\,\lambda\mathbf{m} - (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\rangle \\
&= \langle \lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\,;\,(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}} - \lambda_h\mathbf{m}_h\rangle + \|\lambda\mathbf{m} - (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}. \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

Und mit $\mathbf{d} := D\phi^{**}(\mathbf{m})$ und $\mathbf{d}_h := D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)$ liefert die Orthogonalität (2.37) für das Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
&\langle \lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\,;\,(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}} - \lambda_h\mathbf{m}_h\rangle \\
&\quad = -a\big(\mathbf{m}-\mathbf{m}_h, (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}} - \lambda_h\mathbf{m}_h\big) - \langle \mathbf{d}-\mathbf{d}_h\,;\,(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}} - \lambda_h\mathbf{m}_h\rangle \\
&\quad = -\langle \nabla(u-u_h) + \mathbf{d} - \mathbf{d}_h\,;\,(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}} - \lambda_h\mathbf{m}_h\rangle \qquad (2.41) \\
&\quad = -\langle \nabla(u-u_h) + \mathbf{d} - \mathbf{d}_h\,;\,\lambda\mathbf{m} - (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\rangle \\
&\qquad + \langle \nabla(u-u_h) + \mathbf{d} - \mathbf{d}_h\,;\,\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\rangle.
\end{aligned}$$

Nun folgt mit Hölder- und Young-Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\le \|\nabla(u-u_h) + \mathbf{d} - \mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\|\lambda\mathbf{m} - (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\|\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

In Verbindung mit der vorausgegangenen Gleichung (2.40) ergibt sich

$$\frac{1}{2}\|\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \le \frac{3}{2}\|\lambda\mathbf{m} - (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\nabla(u-u_h) + \mathbf{d} - \mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)},$$

und mit Dreiecksungleichung und $(|a|+|b|)^2 \le 2(|a|^2+|b|^2)$ folgt

$$\begin{aligned} &\le \frac{3}{2}\|\lambda\mathbf{m}-(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + 2\|\nabla(u-u_h)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad + 2\|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\|\lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \le 4\big(\|\lambda\mathbf{m}-(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\big)$$

gezeigt, und es folgt

$$\begin{aligned} &\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \le 5\big(\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\lambda\mathbf{m}-(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\big). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung (2.38) existiert eine Konstante $c_{10}>0$, die nur von ϕ abhängt, mit

$$\le c_{10}\Big(\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + 2\langle \mathbf{d}-\mathbf{d}_h\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle + \|\lambda\mathbf{m}-(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Der Satz 2.30 liefert

$$\begin{aligned} &\le c_{10}\Big(3\|\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{d}-\mathbf{d}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + 2\|\lambda\mathbf{m}-(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad + \varepsilon\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} - \varepsilon\|\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)}\Big). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Der Term $c_{10}\big(\varepsilon\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} - \varepsilon\|\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)}\big)$ kann mit Lemma 2.32 genauer betrachtet werden und liefert für $f=\lambda\mathbf{m}$, $g=\lambda_h\mathbf{m}_h$ und $\omega=\Omega_h$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &c_{10}\Big(\varepsilon\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} - \varepsilon\|\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)}\Big) \\ &\quad \le c_{10}^2\Big(\varepsilon^2\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^2\|\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)}\Big) + \frac{1}{2}\|\lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Um die Summe auf der rechten Seiten abzuschätzen, wird erneut Satz 2.30 angewandt. Dies zeigt

$$\begin{aligned} \varepsilon\|\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} &\le 3\|\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{d}-\mathbf{d}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\lambda\mathbf{m}-(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad + \varepsilon\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die vorausgegangene Abschätzung ergibt

$$\begin{aligned} &c_{10}\Big(\varepsilon\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} - \varepsilon\|\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)}\Big) \\ &\quad \le c_{10}^2\Big(2\varepsilon^2\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} + \varepsilon\Big\{3\|\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{d}-\mathbf{d}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad\qquad + \|\lambda\mathbf{m}-(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\Big\}\Big) + \frac{1}{2}\|\lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Die Kombination von (2.42) und (2.44) liefert insgesamt

$$\begin{aligned}
&\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\|\lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\quad\le c_{10}\Big(3\|\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{d}-\mathbf{d}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + 2\|\lambda\mathbf{m}-(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\Big) \\
&\qquad + c_{10}^2\Big(2\varepsilon^2\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} + \varepsilon\Big\{3\|\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{d}-\mathbf{d}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad\qquad + \|\lambda\mathbf{m}-(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\Big\}\Big).
\end{aligned}$$

Eine grobe Abschätzung der Konstanten zeigt dann die Behauptung. ■

2.7 A posteriori Abschätzungen für $(RP_{\varepsilon,h})$

Lemma 2.33. *Ist $(\lambda_h, \mathbf{m}_h)$ eine Lösung von $(RP_{\varepsilon,h})$, so gilt mit $u_h := \mathcal{L}\mathbf{m}_h$*

$$(\nabla u_h)_{\mathcal{T}} + D\phi^{**}(\mathbf{m}_h) + \lambda_h\mathbf{m}_h = \mathbf{f}_{\mathcal{T}} \qquad \textit{punktweise in } \Omega. \tag{2.45}$$

Beweis. Es seien $x \in \Omega$ und $T \in \mathcal{T}$ mit $x \in T$. Angewendet auf $\chi_T\mathbf{e}_j \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ liefert (2.29)

$$\begin{aligned}
&(\nabla u_h)_{\mathcal{T}}(x)\cdot\mathbf{e}_j + D\phi^{**}\big(\mathbf{m}_h(x)\big)\cdot\mathbf{e}_j + \lambda_h(x)\mathbf{m}_h(x)\cdot\mathbf{e}_j \\
&\quad= \fint_T \nabla u_h\cdot\mathbf{e}_j\,dx + \fint_T D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\cdot\mathbf{e}_j\,dx + \fint_T \lambda_h\mathbf{m}_h\cdot\mathbf{e}_j\,dx \\
&\quad= \frac{1}{|T|}\big(\langle\nabla u_h\,;\,\chi_T\mathbf{e}_j\rangle + \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\,;\,\chi_T\mathbf{e}_j\rangle + \langle\lambda_h\mathbf{m}_h\,;\,\chi_T\mathbf{e}_j\rangle\big) \\
&\quad= \frac{1}{|T|}\langle\mathbf{f}\,;\,\chi_T\mathbf{e}_j\rangle = \mathbf{f}_{\mathcal{T}}(x)\cdot\mathbf{e}_j.
\end{aligned}$$

In der ersten Gleichheit geht ein, daß λ_h, $\mathbf{m}_h$ und $D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)$ $\mathcal{T}$-elementweise konstant sind. ■

Satz 2.34. *Die Energiedichte ϕ^{**} erfülle wieder die Monotoniebedingung* (2.38)*, und zu $\varepsilon > 0$ seien $(\lambda, \mathbf{m})$ sowie $(\lambda_h, \mathbf{m}_h)$ Lösungen von (RP) bzw. $(RP_{\varepsilon,h})$. Dann gilt die a posteriori Abschätzung*

$$\begin{aligned}
&\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + c_8\|D\phi^{**}(\mathbf{m}) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\quad\le 2\,\langle(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\rangle + (1+1/c_8)\,\|(|\mathbf{m}_h|-1)_+\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad + 2\,\|(|\mathbf{m}_h|-1)_+\{(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\}\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Beweis. Zur Abkürzung werden wieder die Schreibweisen $\mathbf{d} := D\phi^{**}(\mathbf{m})$ und $\mathbf{d}_h := D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)$ verwandt. Mit (2.8) und (2.45) gilt fast überall in Ω

$$\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}} = \big(\nabla u - \nabla u_h\big) + \big(\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\big) + \big(\lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h\big) + \big(\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}\big). \tag{2.47}$$

Durch Multiplikation mit $\mathbf{m}-\mathbf{m}_h$ folgt hieraus mit Hilfe von Lemma 2.29 und Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
&\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + c_8\|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\\
&\quad\le \|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \langle \mathbf{d}-\mathbf{d}_h\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle\\
&\quad= \langle (\nabla u-\nabla u_h)+(\mathbf{d}-\mathbf{d}_h)\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle\\
&\quad= \langle (\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle - \langle \lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle\\
&\quad\le \langle (\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle + \int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,(\lambda|\mathbf{m}|-\lambda_h|\mathbf{m}_h|)\,dx\\
&\quad\le \langle (\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\rangle + \int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,|\lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h|\,dx.
\end{aligned}$$

Für die Umformulierung des vorderen Terms wurde die Orthogonalitatseigenschaft von $(\cdot)_{\mathcal{T}}$ verwandt. Im hinteren Term folgt mit (2.47) und Hölder-Young-Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,|\lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h|\,dx\\
&\quad= \int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,\big|\big(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}\big)-\big(\nabla u-\nabla u_h\big)-\big(\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\big)-\big(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}}\big)\big|\,dx\\
&\quad\le \int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,\big|\big(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}\big)-\big(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}}\big)\big|\,dx\\
&\qquad+ \int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,\big|\big(\nabla u-\nabla u_h\big)\big|\,dx + \int_\Omega \frac{\varepsilon}{\sqrt{c_8}}\lambda_h|\mathbf{m}_h|\sqrt{c_8}\big|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\big|\,dx\\
&\quad\le \int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,\big|\big(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}\big)-\big(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}}\big)\big|\,dx\\
&\quad+ \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2c_8}\Big)\,\|\varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla u-\nabla u_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \frac{c_8}{2}\|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Umsortieren der letzten beiden Summanden auf die linke Seite liefert

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \frac{c_8}{2}\|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\\
&\quad\le \langle (\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\rangle\\
&\qquad+ \int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,\big|\big(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}\big)-\big(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}}\big)\big|\,dx + \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{c_8}\Big)\,\|\varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

wobei $\|\nabla u-\nabla u_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \le \|\nabla u-\nabla u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)} = \|u-u_h\|_{W^2_1(\mathbb{R}^d)}$ ausgenutzt wurde. Die Behauptung folgt nun aus der punktweisen Gleichheit $\varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h| = (|\mathbf{m}_h|-1)_+$. ■

Bemerkung. (a) Die Abschätzung (2.46) von Satz 2.34 ist eigentlich keine a posteriori Abschätzung, da der erste Term auf der rechten Seite von (2.46) die im allgemeinen unbekannte exakte Lösung $\mathbf{m}$ involviert. In den Korollaren 2.35 und 2.36 wird dieser Term aber weiter nach oben abgeschätzt.

(b) Mit einer Konstanten $c_{11} > 0$, die nur von der Monotoniekonstante c_8 abhängt, gilt

$$\begin{aligned}
&\|u-u_h\|_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \|D\phi^{**}(\mathbf{m})-D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\\
&\quad\le c_{11}\big(\langle (\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\rangle^{1/2} + \|(|\mathbf{m}_h|-1)_+\|_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad+ \|(|\mathbf{m}_h|-1)_+\{(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\}\|^{1/2}_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}\big)
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite dieser Abschätzung ist von höherer a priori Ordnung, denn mit Satz 2.30 gilt

$$\|(|\mathbf{m}_h|-1)_+\|_{L^2(\Omega)} = \varepsilon\|\lambda_h\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} = \varepsilon^{1/2}\,O(h+\varepsilon^{1/2}).$$

Der letzte Term auf der rechten Seite von (2.48) ist von optimaler a priori Ordnung $O(h+\varepsilon)$, denn mit Hölder-Young-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}&\|(|\mathbf{m}_h|-1)_+\{(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\}\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}\\ &\qquad\le \frac{1}{2}\|(|\mathbf{m}_h|-1)_+\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)},\end{aligned}$$

also

$$\|(|\mathbf{m}_h|-1)_+\{(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\}\|^{1/2}_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} = O(h+\varepsilon). \qquad \square$$

Korollar 2.35. *Die Energiedichte ϕ^{**} erfülle die Monotoniebedingung* (2.38)*, und zu $\varepsilon>0$ seien $(\lambda,\mathbf{m})$ sowie $(\lambda_h,\mathbf{m}_h)$ Lösungen von (RP) bzw. ($RP_{\varepsilon,h}$). Dann existiert eine Konstante $c_{12}>0$, die nur von c_8 abhängt, so daß gilt*

$$\begin{aligned}&\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)}+\|D\phi^{**}(\mathbf{m})-D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\\ &\qquad\le c_{12}\big(\|(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}+\|(|\mathbf{m}_h|-1)_+\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\\ &\qquad\qquad+\|(|\mathbf{m}_h|-1)_+\{(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\}\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}\big).\end{aligned} \tag{2.49}$$

Beweis. Aufgrund der Nebenbedingung (2.7) gilt fast überall $|\mathbf{m}|\le 1$ und damit auch $|\mathbf{m}_{\mathcal{T}}|\le 1$ fast überall. Insbesondere folgt $\|\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|_{L^\infty(\Omega)}\le 2$. Zusammen mit der Tatsache, daß $\mathbf{m}$ und $\mathbf{m}_{\mathcal{T}}$ ihren Träger in Ω haben, liefert eine Hölder-Ungleichung für den letzten Term in (2.46)

$$\langle(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\rangle \le 2\|(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}.$$

Damit folgt (2.49) mittels grober Abschätzung der Konstanten. ■

***Bemerkung*.** Die Fehlerabschätzung in Korollar 2.35 ist *zuverlässig*, denn sie gibt unter minimalen Voraussetzungen eine obere Schranke für die beiden unbekannten Fehlerkomponenten $\|u-u_h\|_{W^2_1(\mathbb{R}^d)}$ und $\|D\phi^{**}(\mathbf{m})-D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}$. Es ist jedoch nicht zu erwarten, daß diese Fehlerabschätzung auch *effizient* ist, d.h. bis auf Konstante eine untere Schranke für den Fehler. Denn der erste Term auf der rechten Seite von (2.49) führt dazu, daß diese höchstens von der Größenordnung $O(h^{1/2})$ ist, wogegen die a priori Analysis für die linke Seite eine Konvergenz der Ordnung $O(\varepsilon+h)$ verspricht. $\square$

Korollar 2.36. *Die Energiedichte ϕ^{**} erfülle die Monotoniebedingung* (2.38)*, und zu $\varepsilon>0$ seien $(\lambda,\mathbf{m})$ sowie $(\lambda_h,\mathbf{m}_h)$ Lösungen von (RP) bzw. ($RP_{\varepsilon,h}$). Zusätzlich gelte $\mathbf{m}\in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Dann existiert eine Konstante $c_{13}>0$, die nur von c_8 und $\nabla\mathbf{m}$ abhängt, so daß gilt*

$$\begin{aligned}&\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)}+\|D\phi^{**}(\mathbf{m})-D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\\ &\qquad\le c_{13}\big(\|h\{(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\}\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}+\|(|\mathbf{m}_h|-1)_+\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\\ &\qquad\qquad+\|(|\mathbf{m}_h|-1)_+\{(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\}\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}\big).\end{aligned} \tag{2.50}$$

Hierbei bezeichnet $h\in\mathcal{L}^0(\mathcal{T})$ die elementweise konstante Netzweite $h|_T=h_T:=\operatorname{diam}(T)$.

Beweis. Die zusätzliche Glattheitsannahme an die exakte Lösung $\mathbf{m}$ impliziert auf jedem Element $T \in \mathcal{T}$ die Poincaré-Abschätzung

$$\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|_{L^\infty(T;\mathbb{R}^d)} \leq C\, h_T \|\nabla \mathbf{m}\|_{L^\infty(T;\mathbb{R}^{d\times d})}$$

mit einer unabhängigen Konstante $C > 0$. Wie im vorausgegangenen Beweis folgt mit Hölder-Ungleichung die Behauptung. ■

Bemerkung. Die Fehlerabschätzung (2.50) ist unter der schärferen Glattheitsannahme an $\mathbf{m}$ zuverlässig. Des weiteren ist sie in diesem Fall auch *effizient* in dem Sinne, daß sie die richtige Konvergenzordnung zu besitzen scheint. Dies zeigt sich auch im numerischen Experiment mit glatter Lösung $\mathbf{m} \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, das in Kapitel 4 vorgestellt wird. Es ist aber darauf hinzuweisen, daß beim aktuellen Stand der Forschung keinerlei Aussagen über die Glattheit der exakten Lösung $\mathbf{m}$ von (RP) getroffen werden können. □

2.8 Fastreguläre Triangulierungen und Kantensprünge

Für die im folgenden dargestellte Stabilisierung von $(RP_{\varepsilon,h})$ müssen weitere Voraussetzungen an die Triangulierung $\mathcal{T}$ gestellt werden. Bisher war lediglich vorausgesetzt, daß $\mathcal{T}$ eine endliche Menge von paarweise disjunkten, einfach-zusammenhängenden, beschränkten Lipschitz-Gebieten $T \in \mathcal{T}$ ist, so daß $\overline{\Omega} = \bigcup \{\overline{T} \,|\, T \in \mathcal{T}\}$ gilt. Von nun an sei angenommen, daß die Elemente $T \in \mathcal{T}$ (und damit auch Ω) stückweise polygonalen Rand haben. Die Menge aller Elementseiten sei $\mathcal{E}$, und die Menge $\mathcal{S} := \bigcup \mathcal{E}$ bezeichne das Skelett der Triangulierung $\mathcal{T}$.

Für eine Elementseite $E \in \mathcal{E}$ bezeichnet $h_E := \operatorname{diam}(E)$ die Länge von E.

Die folgende Definition restringiert des weiteren das Auftreten hängender Knoten in $\mathcal{T}$.

Definition. Es sei $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von Ω, und die Elemente $T \in \mathcal{T}$ seien polygonal berandet. Eine Seite $E \in \mathcal{E}$ ist *elementar*, falls auf ihr keine hängenden Knoten liegen. Die Triangulierung $\mathcal{T}$ heißt *fastregulär*, falls jede nicht-elementare Seite $E \in \mathcal{E}$ die Vereinigung von Elementarseiten ist. Ist $n \in \mathbb{N}_0$ die kleinste natürlich Zahl, so daß alle Seiten $E \in \mathcal{E}$ die Vereinigung von maximal $n+1$ Elementarseiten sind, so bezeichnet man n als *Ordnung* der fastregulären Triangulierung $\mathcal{T}$.

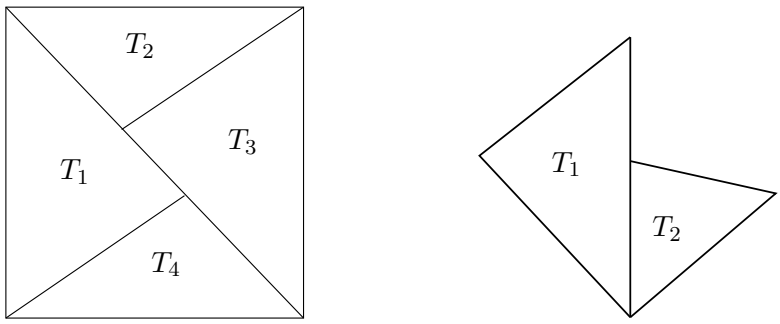


Abbildung 2.1: *Zwei einfache Triangulierungen, die beide* nicht *fastregulär sind.*

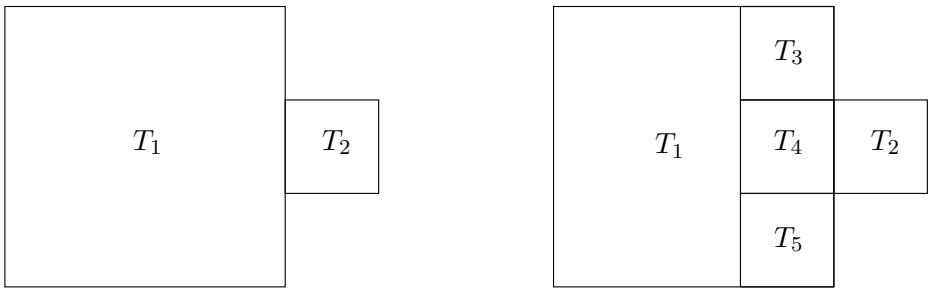


Abbildung 2.2: *Eine* nicht *fastreguläre Triangulierung und eine mögliche Verfeinerung, um die Fastregularität sicherzustellen.*

Bemerkungen. (i) Nach Definition sind die fastregulären Triangulierungen der Ordnung 0 genau die regulären Triangulierungen.

(ii) Die Seiten $E \in \mathcal{E}$ mit $E \subseteq \partial\Omega$ sind stets elementar.

(iii) Ist $\mathcal{T}$ fastregulär zur Ordnung n und $d = 2$, so liegen auf jeder Kante $E \in \mathcal{E}$ höchstens n hängende Knoten. □

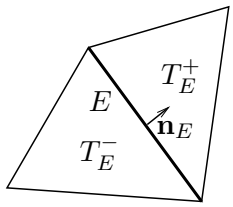
In den weiteren Abschnitten sei $\mathcal{T}$ als fastreguläre Triangulierung vorausgesetzt. Es bezeichnet

$$\mathcal{E}^* := \left\{ E \in \mathcal{E} \,\middle|\, E \text{ elementar mit } E \not\subseteq \partial\Omega \right\}$$

die Menge aller elementaren inneren Seiten. Es sei $H^1_{\mathcal{T}}(\Omega) := \left\{ g \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \forall T \in \mathcal{T} \quad g|_T \in H^1(T) \right\}$ der Vektorraum aller $\mathcal{T}$-stückweisen H^1-Funktionen $g : \Omega \to \mathbb{R}$, und $H^1_{\mathcal{T}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ bezeichne wieder die vektorvertige Variante. Für solche Funktionen wird im folgenden der *Sprung* auf den Seiten $E \in \mathcal{E}^*$ erklärt, der in den weiteren Abschnitten zur Stabilisierung des diskreten Verfahrens herangezogen wird.

Bemerkung. Ist $\mathcal{T}$ eine reguläre Triangulierung, so bezeichnet $\mathcal{E}^*$ die Menge aller inneren Seiten, d.h. die Menge aller Seiten, die nicht auf dem Rand von Ω liegen, $E \not\subseteq \partial\Omega$. □

Vor der Definition der Sprünge sind zunächst sind für alle Elementseiten $E \in \mathcal{E}^*$ Normalenvektoren $\mathbf{n}_E$ wie folgt zu fixieren. Es treten zwei Fälle auf:
Entweder existieren zwei Elemente $T_E^-, T_E^+ \in \mathcal{T}$ mit $E = \overline{T_E^+} \cap \overline{T_E^-}$, so daß E sowohl Seite von T_E^+ als auch T_E^- ist.In diesem Fall ist (für die spätere Analysis) das Vorzeichen von $\mathbf{n}_E$ unerheblich und es wird dadurch fixiert, daß $\mathbf{n}_E$ vom Element T_E^- zum Element T_E^+ zeigt.



Im zweiten Fall existiert eine nicht-elementare Seite $\widehat{E} \in \mathcal{E}$ mit $E \subseteq \widehat{E}$. Dann gibt es eindeutige Elemente $T_E^-, T_E^+ \in \mathcal{T}$, so daß E eine Seite von T_E^- und $\widehat{E}$ eine Seite von T_E^+ ist. Als Normalenvektor $\mathbf{n}_E$ auf E sei wieder derjenige gewählt, der vom Element T_E^- zum Element T_E^+ zeigt.

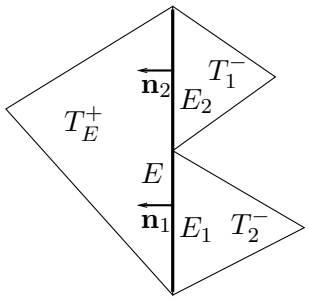


Abbildung 2.3: *Wahl der Normalen* $\mathbf{n}_1$ *und* $\mathbf{n}_2$ *im Fall von hängenden Knoten.*

Bemerkung. Ist $E \in \mathcal{E}$ eine Seite, die nicht auf dem Rand von Ω liegt, d.h. $E \not\subseteq \partial\Omega$, und sind $E_1, \ldots, E_n$ Elementarseiten mit $E = \bigcup_{j=1}^n E_n$, so existieren eindeutige Elemente $T_E^+, T_j^- \in \mathcal{T}$ mit

$$E_j = \overline{T_E^+} \cap \overline{T_j^-} \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n.$$

Die gewählten Normalenvektoren $\mathbf{n}_{E_j}$ stimmen dann überein und zeigen alle zum *„großen“* Element T_E^+. Abbildung 2.3 skizziert einen Modellfall für $n = 2$ und erläutert diese Wahl noch einmal anschaulich. □

Für $E \in \mathcal{E}^*$ sei $T_E^- \in \mathcal{T}$ das Element, aus dem $\mathbf{n}_E$ hinauszeigt und $T_E^+ \in \mathcal{T}$ das Element, in das $\mathbf{n}_E$ hineinzeigt. Für eine $\mathcal{T}$-elementweise H^1-Funktion $g \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)$, z.B. $g \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T})$, bezeichnet $[g]$ den *Sprung von* g, der punktweise durch

$$[g](x) := g|_{T_E^+}(x) - g|_{T_E^-}(x) \quad \text{für } x \in E$$

definiert ist. Hierbei bezeichnet $g|_T(x)$ die Spur der Sobolev-Funktion $g \in H^1(T)$ im Randpunkt $x \in E \subseteq \partial T$. Der Sprung $[g]$ ist im Fall $d = 2$ damit für alle $x \in \mathcal{S}$, die nicht Knoten von $\mathcal{T}$ sind, d.h. $x \notin \mathcal{K}$, eindeutig definiert. Für $d = 3$ ist er für alle $x \in \mathcal{S}$, die nicht auf einer Kante liegen, ebenfalls eindeutig definiert. Für vektorwertige Funktionen $\mathbf{g} \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^d)$ wird der Sprung komponentenweise verstanden.

Bemerkung. Für $f, g \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega)$ ist das Produkt der Sprünge $[f][g]$ unabhängig von der konkreten Wahl der Normalen $\mathbf{n}_E$ auf Seiten $E \in \mathcal{E}$. □

2.9 Das stabilisierte diskrete Problem ($RP^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{h}}$)

Von nun an sei $\mathcal{T}$ als fastreguläre Triangulierung von Ω vorausgesetzt. Zur Stabilisierung des diskreten Verfahrens wird der folgende Stabilisierungsterm verwandt. Zunächst seien für alle inneren Elementseiten $E \in \mathcal{E}^*$ Skalare $\beta_E \geq 0$ fixiert. Für zwei $\mathcal{T}$-elementweise H^1-Funktionen $\mathbf{m}, \widetilde{\mathbf{m}} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ definiere

$$\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}, \widetilde{\mathbf{m}}) := \sum_{E \in \mathcal{E}^*} \beta_E h_E \int_E [\mathbf{m}] \cdot [\widetilde{\mathbf{m}}] \, ds. \tag{2.51}$$

Die Notation $[\cdot]$ bezeichnet hierbei den im vorherigen Abschnitt eingeführten Sprung.

Bemerkung. Für eine H^1-Funktion $\mathbf{m} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ verschwindet der Stabilisierungsterm $\sigma_{\mathrm{A}}(\cdot,\cdot)$, da jede H^1-Funktion in achsenparalleler Richtung absolutstetig ist, d.h. $[\mathbf{m}]|_E = 0$ für jede innere Seite $E \in \mathcal{E}^*$ und damit

$$\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m},\widetilde{\mathbf{m}}) = 0 \quad \text{für alle } \mathcal{T}\text{-stückweise } H^1\text{-Funktionen } \widetilde{\mathbf{m}} \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega;\mathbb{R}^d). \qquad \square$$

Stabilisiertes diskretes penalisiertes (relaxiertes) Problem $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$. Zu fixierten $\beta_E \geq 0$ und $\varepsilon > 0$ finde Funktionen $\mathbf{m}_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ und $\lambda_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}_{\geq 0})$ mit

$$a(\mathbf{m}_h,\cdot) + \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}_h) + \lambda_h\mathbf{m}_h\ ;\ \cdot\rangle + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h,\cdot) = \langle \mathbf{f}\ ;\ \cdot\rangle \qquad \text{in } \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)^*, \tag{2.52}$$

$$\lambda_h = \varepsilon^{-1}\,\frac{(|\mathbf{m}_h|-1)_+}{|\mathbf{m}_h|} \qquad \text{f.ü. in } \Omega. \tag{2.53}$$

Bemerkung. Die *Galerkin-Orthogonalität* für $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ schreibt sich in $\mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)^*$

$$a(\mathbf{m}-\mathbf{m}_h,\cdot) = -\langle D\phi^{**}(\mathbf{m}) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\ ;\ \cdot\rangle - \langle \lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\ ;\ \cdot\rangle + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h,\cdot), \tag{2.54}$$

wobei $(\lambda,\mathbf{m})$ und $(\lambda_h,\mathbf{m}_h)$ Lösungen von (RP) bzw. $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ seien. Für $\mathbf{m} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ gilt ferner $\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h,\cdot) = -\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}-\mathbf{m}_h,\cdot)$ in $\mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)^*$. $\square$

Bemerkung. Gilt $\beta_E = 0$ für alle $E \in \mathcal{E}^*$, so stimmen $(RP_{\varepsilon,h})$ und $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ überein. Bei der mathematischen Behandlung von $(RP_{\varepsilon,h})$ konnte $\mathcal{T}$ aber als beliebige Triangulierung bzw. sogar *Partition* von Ω gegeben sein. Die Analysis zu $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ verläuft im folgenden wie oben. Lediglich der letzte Term auf der rechten Seite tritt hinzu. Insbesondere ist auch nicht verwunderlich, daß die a priori Ergebnisse von derselben Güte sind. $\square$

Der folgende Satz ist das Analogon zu Satz 2.26, wobei nun für die Dichte ϕ^{**} nicht mehr der Modellfall vorausgesetzt werden muß.

Satz 2.37. *Das stabilisierte Problem $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ besitzt im Fall $\beta_E > 0$ für alle $E \in \mathcal{E}^*$ eine eindeutige Lösung.*

Die Existenz einer Lösung von $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ wird analog zu $(RP_{\varepsilon,h})$ durch die Betrachtung des zugehörigen Minimierungsproblems bewiesen.

Lemma 2.38. *Es sei $b : X \times X \to \mathbb{R}$ eine stetige, symmetrische, positiv semidefinite Bilinearform auf einem reellen normierten Raum X. Dann ist die zugehörige Abbildung $B : X \to \mathbb{R}, x \mapsto b(x,x)$ nicht-negativ, konvex, stetig und Fréchet-differenzierbar mit $DB(x) = 2b(x,\cdot)$.* ■

Lemma 2.39. *Der Stabilisierungsterm $\sigma_{\mathrm{A}}(\cdot,\cdot)$ definiert eine stetige, symmetrische, positiv semidefinite Bilinearform auf $\mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$.*

Beweis. Es ist nur die Stetigkeit von $\sigma_{\mathrm{A}}(\cdot,\cdot)$ zu zeigen. Da $\mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ ein endlichdimensionaler Raum ist, sind alle Normen auf $\mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ äquivalent. Der Einfachheit halber betrachte $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)}$. Ist $x \in Inn(T)$ ein innerer Punkt eines Elements $T \in \mathcal{T}$ der Triangulierung, so ist das Punktauswertungsfunktional $\delta_x : \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d, \mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}(x)$ stetig und linear mit Operatornorm $\|\delta_x\| \leq 1$.

Nun wähle zu allen $E \in \mathcal{E}^*$ Auswertungspunkte $x_E^+ \in Inn(T_E^+)$ und $x_E^- \in Inn(T_E^-)$. Da $\mathcal{E}^*$ endliche Kardinalität besitzt, ist

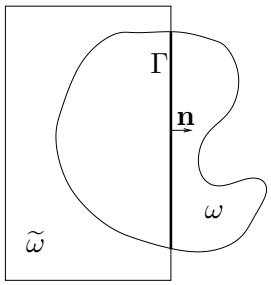
$$\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}, \widetilde{\mathbf{m}}) = \sum_{E \in \mathcal{E}^*} \beta_E h_E |E| \big(\mathbf{m}(x_E^+) - \mathbf{m}(x_E^-)\big) \cdot \big(\widetilde{\mathbf{m}}(x_E^+) - \widetilde{\mathbf{m}}(x_E^-)\big)$$

eine stetige Bilinearform mit Norm $\|\sigma_{\mathrm{A}}(\cdot,\cdot)\| \leq 4 \sum_{E \in \mathcal{E}^*} \beta_E h_E |E|$. ■

Der Beweis der Eindeutigkeit der Lösung von $(RP_{\varepsilon,h}^{\beta})$ wird im wesentlichen durch die folgende Feststellung erbracht.

Lemma 2.40. *Sind $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^d$ und $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, so daß im distributionellen Sinn* $\operatorname{div} \chi_\omega \mathbf{m} = 0$ *in $\mathbb{R}^d$ gilt, so folgt $\mathbf{m} = 0$.*

Beweis. Zunächst wird ein beschränktes Lipschitz-Gebiet $\widetilde{\omega}$, wie im Bild gezeigt, konstruiert. Dazu seien $x \in \omega$ ein beliebiges Element und $\varepsilon > 0$ mit $B(x,\varepsilon) \subseteq \omega$. Das Gebiet ω ist in dem offenen Quader $Q := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d)$ enthalten, wobei $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ durch $a_j := \inf\{y_j \mid y \in \omega\}$, $b_j := \sup\{y_j \mid y \in \omega\}$ definiert seien. Nun definiere den offenen Quader



$$\widetilde{\omega} := (a_1 - 1, x_1) \times (a_2 - 1, b_2 + 1) \times \cdots \times (a_d - 1, b_d + 1).$$

Nach Definition gilt einerseits

$$\Gamma := \partial\widetilde{\omega} \cap \omega \subseteq \{x_1\} \times (a_2 - 1, b_2 + 1) \times \cdots \times (a_d - 1, b_d + 1)$$

und ferner

$$\emptyset \neq B(x,\varepsilon) \cap \partial\widetilde{\omega} \subseteq \Gamma.$$

Also hat das Randstück Γ positives Oberflächenmaß, und die Normale auf Γ ist durch $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ gegeben. Da $\widetilde{\omega} \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist und $\chi_\omega \in H(\mathbb{R}^d; \operatorname{div})$, kann der Gaußsche Integralsatz im Gebiet $\widetilde{\omega}$ angewandt werden (Girault-Raviart [31, Seite 27ff.]) und liefert

$$0 = \int_{\widetilde{\omega}} \operatorname{div}(\chi_\omega \mathbf{m})\, dx = \int_{\partial\widetilde{\omega}} \chi_\omega\, \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}\, ds_x = \int_\Gamma \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}\, ds_x = |\Gamma|\, \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_1 = |\Gamma|\, m_1.$$

Damit verschwindet die erste Komponente von $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^d$. Analoges Vorgehen für die übrigen Komponenten verifiziert $\mathbf{m} = 0$. ■

Beweis von Satz 2.37. Zunächst wird gezeigt, daß $(RP_{\varepsilon,h}^{\beta})$ höchstens eine Lösung besitzt. Gegeben seien zwei Lösungen $(\lambda_1, \mathbf{m}_1), (\lambda_2, \mathbf{m}_2)$ von $(RP_{\varepsilon,h}^{\beta})$ und $\mathbf{e} := \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1 \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^d)$. Bildet man die Differenz in Gleichung (2.52), so erhält man

$$a(\mathbf{e}, \mathbf{e}) + \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}_2) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_1)\, ; \mathbf{e}\rangle + \langle \lambda_2 \mathbf{m}_2 - \lambda_1 \mathbf{m}_1\, ; \mathbf{e}\rangle + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = 0. \tag{2.55}$$

Nach (2.11), (2.32) und (2.16) sind die ersten drei Terme in der vorausgegangenen Gleichung nichtnegativ, und dasselbe gilt für

$$\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \sum_{E \in \mathcal{E}^*} \beta_E h_E \int_E |[\mathbf{e}]|^2\, ds.$$

Also verschwinden alle vier Summanden in (2.55), und wegen $\beta_E h_E > 0$ für alle Elementseiten E, verschwindet der Sprung $[\mathbf{e}]$ auf allen Seiten $E \in \mathcal{E}^*$. Da sich Seite $E \in \mathcal{E}$ mit $E \notin \partial\Omega$ als Vereinigung von Elementarseiten schreiben läßt, verschwindet der Sprung damit auf allen inneren Seiten. Nach Definition des Sprunges ist $\mathbf{e} \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ damit konstant in Ω. Da $\mathbf{m}_1$ und $\mathbf{m}_2$ außerhalb Ω verschwinden, existiert also ein Vektor $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^d$ mit $\mathbf{e} = \chi_\Omega \mathbf{m}$. Ferner gilt nach Lemma 2.6 $\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$ wegen $a(\mathbf{e},\mathbf{e}) = 0$. Mit dem vorausgegangenen Lemma folgt daher $\mathbf{m} = 0$ und damit $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2$. Abschließend impliziert (2.53) damit aber auch $\lambda_1 = \lambda_2$, und es ist nur noch zu zeigen, daß $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ lösbar ist. Betrachte das Energiefunktional

$$\begin{aligned} E^{**}_{\varepsilon,\beta}(\mathbf{m}) &:= \int_\Omega \phi^{**}\big(\mathbf{m}(x)\big)\,dx - \int_\Omega \mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{m}(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2\,dx \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega \big(|\mathbf{m}(x)|-1\big)_+^2\,dx + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m},\mathbf{m}) \\ &= E^{**}_{\varepsilon}(\mathbf{m}) + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m},\mathbf{m}) \end{aligned}$$

auf $\mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$. Nach Satz 2.18 ist E^{**}_ε stetig, konvex, koerziv und Gâteaux-differenzierbar auf $\mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$. Nach Lemma 2.39 ist $\mathbf{m} \mapsto \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m},\mathbf{m})$ stetig, konvex, nicht-negativ und Fréchet-differenzierbar. Insbesondere ist also $E^{**}_{\varepsilon,\beta}$ ebenfalls stetig, konvex, koerziv und Gâteaux-differenzierbar auf $\mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$, und die Direkte Methode der Varationsrechnung liefert die Existenz eines $\mathbf{m} \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ mit

$$E^{**}_{\varepsilon,\beta}(\mathbf{m}) = \inf_{\widetilde{\mathbf{m}}\in\mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)} E^{**}_{\varepsilon,\beta}(\widetilde{\mathbf{m}}).$$

Aufgrund der Gâteaux-Differenzierbarkeit folgt $DE^{**}_{\varepsilon,\beta}(\mathbf{m}) = 0 \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)^*$, aber dies ist gerade dazu äquivalent, daß $\mathbf{m}$ das Problem $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ löst. ■

2.10 A priori Abschätzungen für $(RP^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{h}})$

Der Stabilisierungsterm $\sigma_{\mathrm{A}}(\cdot,\cdot)$ ist symmetrisch und positiv semidefinit. Damit gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $\sigma_{\mathrm{A}}(\cdot,\cdot)$, und mit einer Young-Ungleichung folgt dann

Lemma 2.41. *Für $\mathbf{m},\widetilde{\mathbf{m}} \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ gilt $\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m},\widetilde{\mathbf{m}}) \le \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m},\mathbf{m}) + \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{A}}(\widetilde{\mathbf{m}},\widetilde{\mathbf{m}})$.* ■

Satz 2.42. *Zu gegebenen Parametern $\varepsilon > 0$ und $\beta_E \ge 0$ für $E \in \mathcal{E}^*$ sei $(\lambda,\mathbf{m}) \in L^2(\Omega;\mathbb{R}_{\ge 0}) \times L^2(\Omega;B^d_2)$ eine Lösung des kontinuierlichen Problems (RP), und $(\lambda_h,\mathbf{m}_h) \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}_{\ge 0})\times\mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ sei eine Lösung des stabilisierten Problems $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$. Dann gilt die a priori Abschätzung*

$$\begin{aligned} &\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + 2\langle D\phi^{**}(\mathbf{m}) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h,\mathbf{m}_h) + \varepsilon\|\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\ &\quad\le 3\|\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|D\phi^{**}(\mathbf{m}) - (D\phi^{**}(\mathbf{m}))_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\lambda\mathbf{m} - (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_{\mathcal{T}},\mathbf{m}_{\mathcal{T}}) + \varepsilon\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Die Terme auf der linken Seite von (2.56) sind alle nicht-negativ.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Satz 2.30. Mit der Galerkin-Orthogonalität (2.54) und $\mathbf{m} \in H^1(\Omega)$ gilt für die Testfunktion $\mathbf{m}_h - \mathbf{m}_{\mathcal{T}} \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ zunächst

$$\begin{aligned}
&a(\mathbf{m}-\mathbf{m}_h, \mathbf{m}_{\mathcal{T}}-\mathbf{m}_h)\\
&= -\langle \mathbf{d}-\mathbf{d}_h \,;\, \mathbf{m}_{\mathcal{T}}-\mathbf{m}_h\rangle - \langle \lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h \,;\, \mathbf{m}_{\mathcal{T}}-\mathbf{m}_h\rangle + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{m}_{\mathcal{T}}-\mathbf{m}_h)\\
&= +\langle \mathbf{d}-\mathbf{d}_h \,;\, \mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\rangle + \langle \lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h \,;\, \mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\rangle + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{m}_{\mathcal{T}})\\
&\quad - \langle \mathbf{d}-\mathbf{d}_h \,;\, \mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle - \langle \lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h \,;\, \mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle - \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{m}_h).
\end{aligned}$$

hier wurde wieder die abkürzende Schreibweise $\mathbf{d} := D\phi^{**}(\mathbf{m})$, $\mathbf{d}_h := D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)$ verwendet. Nach Gleichung (2.36) gilt

$$\frac{1}{2}\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} \le \frac{1}{2}\|\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + a(\mathbf{m}-\mathbf{m}_h, \mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}).$$

Unter Verwendung von (2.35) folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \langle \mathbf{d}-\mathbf{d}_h \,;\, \mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{m}_h)\\
&\quad \le \frac{1}{2}\|\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \langle \mathbf{d}-\mathbf{d}_h \,;\, \mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\rangle + \langle \lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h \,;\, \mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\rangle\\
&\qquad + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{m}_{\mathcal{T}}) - \langle \lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h \,;\, \mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle\\
&\quad = \frac{1}{2}\|\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \langle \mathbf{d}-\mathbf{d}_{\mathcal{T}} \,;\, \mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\rangle + \langle \lambda\mathbf{m}-(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}} \,;\, \mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\rangle\\
&\qquad + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{m}_{\mathcal{T}}) + \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} - \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Anwendung der Hölder- und Young-Ungleichung auf den zweiten und dritten Term zeigt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \langle \mathbf{d}-\mathbf{d}_h \,;\, \mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{m}_h) + \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\\
&\quad \le \frac{3}{2}\|\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\|\mathbf{d}-\mathbf{d}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\|\lambda\mathbf{m}-(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\\
&\qquad + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{m}_{\mathcal{T}}) + \frac{\varepsilon}{2}\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Der Stabilisierungsterm auf der rechten Seite wird mit Lemma 2.41 abgeschätzt. Umsortieren der Terme liefert dann die Behauptung. ■

Lemma 2.43. *Ist* $(\lambda_h, \mathbf{m}_h) \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}_{\ge 0}) \times \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ *eine Lösung von* $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$*, so gilt*

$$\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \lambda_h\mathbf{m}_h) \ge 0.$$

Beweis. Es bezeichnen $[\mathbf{m}_h]_E, [\lambda_h\mathbf{m}_h]_E \in \mathbb{R}^3$ die *konstanten* Sprünge von $\mathbf{m}_h$ und $\lambda_h\mathbf{m}_h$ auf einer inneren Seite $E \in \mathcal{E}^*$. Dann gilt

$$\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \lambda_h\mathbf{m}_h) = \sum_{E\in\mathcal{E}^*} \beta_E h_E \int_E [\mathbf{m}_h]\cdot[\lambda_h\mathbf{m}_h]\,ds_x = \sum_{E\in\mathcal{E}^*} \underbrace{\beta_E h_E |E|}_{\ge 0}[\mathbf{m}_h]_E\cdot[\lambda_h\mathbf{m}_h]_E.$$

Zu einer fixierten Seite $E \in \mathcal{E}^*$ und Elementen T_E^+ und T_E^- wie in der Definition der Sprünge seien $\lambda^\pm \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\mathbf{m}^\pm \in \mathbb{R}^d$ die Werte von λ_h und $\mathbf{m}_h$ auf $T_E^\pm$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
[\mathbf{m}_h]_E \cdot [\lambda_h \mathbf{m}_h]_E &= \sum_{j=1}^d (m_j^+ - m_j^-)(\lambda^+ m_j^+ - \lambda^- m_j^-) \\
&= \sum_{j=1}^d \big\{ \lambda^+ |m_j^+|^2 + \lambda^- |m_j^-|^2 - (\lambda^+ + \lambda^-) m_j^+ m_j^- \big\} \\
&= \lambda^+ |\mathbf{m}^+|^2 + \lambda^- |\mathbf{m}^-|^2 - (\lambda^+ + \lambda^-) \underbrace{\mathbf{m}^+ \cdot \mathbf{m}^-}_{\leq |\mathbf{m}^+||\mathbf{m}^-|} \\
&\geq \lambda^+ |\mathbf{m}^+|^2 + \lambda^- |\mathbf{m}^-|^2 - \lambda^+ |\mathbf{m}^+||\mathbf{m}^-| - \lambda^- |\mathbf{m}^+||\mathbf{m}^-| \\
&= (\lambda^+ |\mathbf{m}^+| - \lambda^- |\mathbf{m}^-|)(|\mathbf{m}^+| - |\mathbf{m}^-|).
\end{aligned}$$

Einsetzen von $\lambda^\pm = \varepsilon^{-1} \frac{(|\mathbf{m}|^\pm - 1)_+}{|\mathbf{m}^\pm|}$ gemäß (2.53) liefert

$$[\mathbf{m}_h]_E \cdot [\lambda_h \mathbf{m}_h]_E \geq \varepsilon^{-1} \big\{ (|\mathbf{m}^+| - 1)_+ - (|\mathbf{m}^-| - 1)_+ \big\} \big\{ |\mathbf{m}^+| - |\mathbf{m}^-| \big\}$$

Sowohl im Fall $|\mathbf{m}^+| \geq |\mathbf{m}^-|$ als auch im Fall $|\mathbf{m}^+| \leq |\mathbf{m}^-|$ ist die rechte Seite der vorausgegangenen Ungleichung nicht negativ. ■

Satz 2.44. *Die Energiedichte ϕ^{**} erfülle die Monotoniebedingung* (2.38)*, und $(\lambda_h, \mathbf{m}_h)$ und $(\lambda, \mathbf{m})$ seien Lösungen von $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ bzw. (RP). Dann gilt mit $\Omega_h := \big\{ x \in \Omega \,\big|\, \lambda_h(x) \neq 0 \big\}$ die a priori Abschätzung*

$$\begin{aligned}
&\|u - u_h\|^2_{W_1^2(\mathbb{R}^d)} + \|D\phi^{**}(\mathbf{m}) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\lambda \mathbf{m} - \lambda_h \mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\quad + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{m}_h) + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \lambda_h \mathbf{m}_h) \\
&\leq c_{14} \Big(\varepsilon^2 \|\lambda \mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} + \sigma_{\mathrm{A}}((\lambda \mathbf{m})_{\mathcal{T}}, (\lambda \mathbf{m})_{\mathcal{T}}) \\
&\qquad + (1+\varepsilon) \big\{ \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|D\phi^{**}(\mathbf{m}) - (D\phi^{**}(\mathbf{m}))_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad\qquad + \|\lambda \mathbf{m} - (\lambda \mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_{\mathcal{T}}, \mathbf{m}_{\mathcal{T}}) \big\} \Big)
\end{aligned}$$

mit einer Konstante $c_{14} > 0$, die nur von c_8 abhängt. Alle auftretenden Terme sind nicht negativ.

Beweis. Es wird wieder die abkürzende Schreibweise $\mathbf{d} := D\phi^{**}(\mathbf{m})$, $\mathbf{d}_h := D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)$ verwendet. Analog zu (2.41) auf Seite 55 folgt mit der Galerkin-Orthogonalität (2.54) für $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$

$$\begin{aligned}
&\langle \lambda \mathbf{m} - \lambda_h \mathbf{m}_h \,;\, (\lambda \mathbf{m})_{\mathcal{T}} - \lambda_h \mathbf{m}_h \rangle \\
&\quad \leq 2\|u - u_h\|^2_{W_1^2(\mathbb{R}^d)} + 2\|\mathbf{d} - \mathbf{d}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\|\lambda \mathbf{m} - (\lambda \mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\|\lambda \mathbf{m} - \lambda_h \mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, (\lambda \mathbf{m})_{\mathcal{T}} - \lambda_h \mathbf{m}_h),
\end{aligned}$$

wobei auf der rechten Seite der Stabilisierungterm hinzukommt. Nach (2.40) gilt stets

$$\|\lambda \mathbf{m} - \lambda_h \mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} = \langle \lambda \mathbf{m} - \lambda_h \mathbf{m}_h \,;\, (\lambda \mathbf{m})_{\mathcal{T}} - \lambda_h \mathbf{m}_h \rangle + \|\lambda \mathbf{m} - (\lambda \mathbf{m})\mathcal{T}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\|\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\quad \le 4\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + 4\|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + 4\|\lambda\mathbf{m} - (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad + 2\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}} - \lambda_h\mathbf{m}_h). \\
&\quad = 4\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + 4\|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + 4\|\lambda\mathbf{m} - (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad + 2\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}) - 2\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \lambda_h\mathbf{m}_h) \\
&\quad \le 4\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + 4\|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + 4\|\lambda\mathbf{m} - (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{m}_h) + \sigma_{\mathrm{A}}((\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}, (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}) - 2\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \lambda_h\mathbf{m}_h),
\end{aligned}$$

In der letzten Ungleichung wurde Lemma 2.41 ausgenutzt. Eine elementare Abschätzung liefert

$$\begin{aligned}
&\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{m}_h) + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \lambda_h\mathbf{m}_h) \\
&\quad \le 5\big\{\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{m}_h) \\
&\qquad + \|\lambda\mathbf{m} - (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \sigma_{\mathrm{A}}((\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}, (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}})\big\}.
\end{aligned}$$

Wegen $c_8\|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \le \langle \mathbf{d}-\mathbf{d}_h\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle$ existiert eine Konstante $c_{14} > 0$ mit

$$\begin{aligned}
&\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{m}_h) + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \lambda_h\mathbf{m}_h) \\
&\quad \le c_{14}\big\{\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + 2\langle \mathbf{d}-\mathbf{d}_h\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{m}_h) \\
&\qquad + \|\lambda\mathbf{m} - (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \sigma_{\mathrm{A}}((\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}, (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}})\big\}.
\end{aligned}$$

Satz 2.42 zeigt dann die obere Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\le c_{14}\big\{3\|\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + 2\|\lambda\mathbf{m} - (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad\qquad + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_{\mathcal{T}}, \mathbf{m}_{\mathcal{T}}) + \sigma_{\mathrm{A}}((\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}}, (\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}})\big\} \\
&\quad + c_{14}\big\{\varepsilon\|\lambda\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)} - \varepsilon\|\lambda_h\mathbf{m}_h\|^2_{L^2(\Omega_h;\mathbb{R}^d)}\big\}.
\end{aligned}$$

Das Argument aus (2.43) kann nun wörtlich übernommen werden, um den zweiten Klammerausdruck abzuschätzen. Dies zeigt dann die Behauptung. ■

Bemerkung. Die Konvergenz der Stabilisierungsterme wird im Anschluß an die a priori und a posteriori Analysis zu $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ in Abschnitt 2.12 untersucht. □

2.11 A posteriori Abschätzungen für $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$

Gegeben seien ein Element $T \in \mathcal{T}$ und eine Funktion $\mathbf{m} \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Zu einem Punkt $x \in \partial T$, der kein Knoten ($d = 2$) sei bzw. auf keiner Kante liege ($d = 3$), fixiere man die Elementseite $E \in \mathcal{E}^*$

mit $x \in E$ und die Elemente $T^+, T^- \in \mathcal{T}$ gemäß Definition des Sprungterms $[\mathbf{m}(x)]$. Nun definiert man den Sprung *relativ zu* T durch

$$[\![\mathbf{m}(x)]\!]_T := \begin{cases} +[\mathbf{m}(x)], & \text{falls } T = T^-, \\ -[\mathbf{m}(x)], & \text{falls } T = T^+. \end{cases}$$

Bemerkung. Für $\mathbf{m}, \widetilde{\mathbf{m}} \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ gilt $[\mathbf{m}(x)] \cdot [\widetilde{\mathbf{m}}(x)] = [\![\mathbf{m}(x)]\!]_T \cdot [\![\mathbf{m}(x)]\!]_T$ punktweise für (fast) alle $x \in \partial T$. □

Bemerkung. Es sei $\mathbf{m} \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Ist $E \in \mathcal{E}^*$ eine Kante und $T, \widetilde{T} \in \mathcal{T}$ Elemente mit $E \subseteq \partial T \cap \partial \widetilde{T}$, so gilt für $x \in E$ die Gleichheit

$$[\![\mathbf{m}(x)]\!]_T = \mathbf{m}|_{\widetilde{T}}(x) - \mathbf{m}|_T(x).$$

Dabei bezeichnen $\mathbf{m}|_T$ und $\mathbf{m}|_{\widetilde{T}}$ die Spuren von $\mathbf{m} \in H^1(T; \mathbb{R}^d)$ bzw. $\mathbf{m} \in H^1(\widetilde{T}; \mathbb{R}^d)$. Diese explizit geschriebene Definition wird später bei der numerischen Implementierung benötigt. Insbesondere zeigt sich im folgenden, daß das Programm die gewählten Normalen *nicht* speichern muß, da lediglich Produkte von Sprungtermen auftreten, die dann durch relative Sprungterme $[\![\cdot]\!]_T$ ersetzt werden können. □

Lemma 2.45. *Es seien $(\lambda_h, \mathbf{m}_h)$ eine Lösung von $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ und $u_h := \mathcal{L}\mathbf{m}_h$ das magnetische Potential zu $\mathbf{m}_h$. Mit der $\mathcal{T}$-stückweise konstanten Funktion $\mathbf{s}_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^d)$,*

$$\mathbf{s}_h|_T := -\frac{1}{|T|} \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}^* \\ E \subseteq \partial T}} \beta_E h_E \int_E [\![\mathbf{m}_h]\!]_T \, ds_x, \tag{2.57}$$

gilt

$$\mathbf{f}_{\mathcal{T}} = (\nabla u_h)_{\mathcal{T}} + D\phi^{**}(\mathbf{m}_h) + \lambda_h \mathbf{m}_h + \mathbf{s}_h \quad \textit{punktweise in } \Omega. \tag{2.58}$$

Ferner gilt für jede Funktion $\mathbf{g} \in H^1_{\mathcal{T}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ die Gleichheit $\langle \mathbf{s}_h \, ; \mathbf{g} \rangle = \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{g}_{\mathcal{T}})$.

Beweis. Es seien $T \in \mathcal{T}$ und $x \in T$. Mit der Abkürzung $\mathbf{d}_h := D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)$ gilt dann für alle $1 \le j \le d$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\mathcal{T}}(x) \cdot \mathbf{e}_j &= \frac{1}{|T|} \langle \mathbf{f} \, ; \chi_T \mathbf{e}_j \rangle \\ &= \frac{1}{|T|} \big\{ \langle \nabla u_h \, ; \chi_T \mathbf{e}_j \rangle + \langle \underbrace{\mathbf{d}_h}_{\text{konst.}} \, ; \chi_T \mathbf{e}_j \rangle + \langle \underbrace{\lambda_h \mathbf{m}_h}_{\text{konst.}} \, ; \chi_T \mathbf{e}_j \rangle + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \chi_T \mathbf{e}_j) \big\} \\ &= (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}(x) \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{d}_h(x) \cdot \mathbf{e}_j + \lambda_h(x) \mathbf{m}_h(x) \cdot \mathbf{e}_j + \frac{1}{|T|} \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \chi_T \mathbf{e}_j). \end{aligned}$$

Der letzte Term berechnet sich dann wie folgt

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \chi_T \mathbf{e}_j) &= \sum_{E \in \mathcal{E}^*} \beta_E h_E \int_E [\mathbf{m}_h] \cdot [\chi_T \mathbf{e}_j] \, ds_x = \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}^* \\ E \subseteq \partial T}} \beta_E h_E \int_E [\mathbf{m}_h] \cdot [\chi_T \mathbf{e}_j] \, ds_x \\ &= \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}^* \\ E \subseteq \partial T}} \beta_E h_E \int_E [\![\mathbf{m}_h]\!]_T \cdot [\![\chi_T \mathbf{e}_j]\!]_T \, ds_x \end{aligned}$$

und für $x \in E \subseteq \partial T$ gilt $[\![\chi_T \mathbf{e}_j]\!]_T(x) = -\mathbf{e}_j$. Damit ergibt sich

$$\frac{1}{|T|}\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \chi_T \mathbf{e}_j) = -\frac{1}{|T|} \sum_{\substack{E\in\mathcal{E}^* \\ E\subseteq\partial T}} \beta_E h_E \int_E [\![\mathbf{m}_h]\!]_T \cdot \mathbf{e}_j \, ds_x = \mathbf{s}_h(x) \cdot \mathbf{e}_j.$$

Um die zweite Behauptung zu zeigen, definiere zunächst für gegebene $T \in \mathcal{T}$ und $E \in \mathcal{E}^*$ mit $E \subseteq \partial T$ den Skalar $\delta_{T,E} \in \{\pm 1\}$ durch $[\![\mathbf{m}_h]\!]_T|_E = \delta_{T,E}[\mathbf{m}_h]|_E$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{s}_h \,;\, \mathbf{g}\rangle = \sum_{T\in\mathcal{T}} \mathbf{s}_h|_T \int_T \mathbf{g}\, dx &= -\sum_{T\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{E\in\mathcal{E}^* \\ E\subseteq\partial T}} \beta_E h_E \Big(\int_E [\![\mathbf{m}_h]\!]_T \, ds_x \Big) \cdot \underbrace{\Big(\fint_T \mathbf{g}\, dx \Big)}_{=\mathbf{g}_{\mathcal{T}}|_T} \\
&= -\sum_{T\in\mathcal{T}} \sum_{\substack{E\in\mathcal{E}^* \\ E\subseteq\partial T}} \beta_E h_E \delta_{T,E} \Big(\int_E [\mathbf{m}_h] \, ds_x \Big) \cdot \mathbf{g}_{\mathcal{T}}|_T \\
&= -\sum_{E\in\mathcal{E}^*} \sum_{\substack{T\in\mathcal{T} \\ E\subseteq\partial T}} \beta_E h_E \delta_{T,E} \Big(\int_E [\mathbf{m}_h] \, ds_x \Big) \cdot \mathbf{g}_{\mathcal{T}}|_T \\
&= -\sum_{E\in\mathcal{E}^*} \beta_E h_E \Big(\int_E [\mathbf{m}_h] \, ds_x \Big) \cdot \underbrace{(\mathbf{g}_{\mathcal{T}}|_{T_E^-} - \mathbf{g}_{\mathcal{T}}|_{T_E^+})}_{=-[\mathbf{g}_{\mathcal{T}}]|_E} \\
&= +\sum_{E\in\mathcal{E}^*} \beta_E h_E \int_E [\mathbf{m}_h] \cdot [\mathbf{g}_{\mathcal{T}}] \, ds_x = \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{g}).
\end{aligned}$$

■

Bemerkung. Der Beweis von Lemma 2.45 zeigt insbesondere

$$\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \chi_T \mathbf{e}_n) = -\sum_{\substack{E\in\mathcal{E}^* \\ E\subseteq\partial T}} \beta_E h_E \int_E [\![\mathbf{m}_h]\!]_T \cdot \mathbf{e}_n \, ds_x. \tag{2.59}$$

Diese Identität wird später für die numerische Realisierung von $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ verwandt. □

Satz 2.46. *Die Energiedichte ϕ^{**} erfülle wieder die Monotoniebedingung* (2.38)*, und zu $\varepsilon > 0$ seien $(\lambda, \mathbf{m})$ sowie $(\lambda_h, \mathbf{m}_h)$ Lösungen von (RP) bzw. $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$. Dann gilt mit der Funktion $\mathbf{s}_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^d)$ aus* (2.57) *die a posteriori Abschätzung*

$$\begin{aligned}
&\|u - u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + c_8 \|D\phi^{**}(\mathbf{m}) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \mathbf{m}_h) \\
&\quad \le 2\langle (\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}) \,;\, \mathbf{m} - \mathbf{m}_{\mathcal{T}} \rangle + (1 + 1/c_8) \|(|\mathbf{m}_h| - 1)_+\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad + 2\|(|\mathbf{m}_h| - 1)_+ \{(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}) + \mathbf{s}_h\}\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_{\mathcal{T}}, \mathbf{m}_{\mathcal{T}}).
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Beweis. Zur Abkürzung werden wieder die Schreibweisen $\mathbf{d} := D\phi^{**}(\mathbf{m})$ und $\mathbf{d}_h := D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)$ verwendet. Mit (2.8) und Lemma 2.45 gilt fast überall in Ω

$$\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\mathcal{T}} = \big(\nabla u - \nabla u_h\big) + \big(\mathbf{d} - \mathbf{d}_h\big) + \big(\lambda \mathbf{m} - \lambda_h \mathbf{m}_h\big) + \big(\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}\big) - \mathbf{s}_h. \tag{2.61}$$

Hieraus folgt zunächst durch Multiplikation mit $\mathbf{m}-\mathbf{m}_h$

$$\begin{aligned}
&\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + c_8\|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \\
&\quad\le \|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \langle \mathbf{d}-\mathbf{d}_h\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle \\
&\quad= \langle (\nabla u-\nabla u_h)+(\mathbf{d}-\mathbf{d}_h)\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle \\
&\quad= \langle (\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle \\
&\qquad\quad - \langle \lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle + \langle \mathbf{s}_h\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle \\
&\quad= \langle (\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\rangle \\
&\qquad\quad - \langle \lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle + \langle \mathbf{s}_h\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Für den letzten Term gilt mit Lemma 2.45 und Lemma 2.41

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{s}_h\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle = \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h,(\mathbf{m}-\mathbf{m}_h)_{\mathcal{T}}) &= \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h,\mathbf{m}_{\mathcal{T}}-\mathbf{m}_h) \\
&= \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h,\mathbf{m}_{\mathcal{T}}) - \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h,\mathbf{m}_h) \\
&\le \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_{\mathcal{T}},\mathbf{m}_{\mathcal{T}}) - \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h,\mathbf{m}_h).
\end{aligned}$$

Der vorletzte Term in (2.62) läßt sich mit Lemma 2.29 und Dreiecksungleichung abschätzen und liefert

$$\begin{aligned}
-\langle \lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\rangle &\le \int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,(\lambda|\mathbf{m}|-\lambda_h|\mathbf{m}_h|)\,dx \\
&\le \int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,|\lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h|\,dx.
\end{aligned}$$

Dies zeigt zunächst einmal zusammenfassend

$$\begin{aligned}
&\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + c_8\|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h,\mathbf{m}_h) \\
&\quad\le \langle (\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\rangle + \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_{\mathcal{T}},\mathbf{m}_{\mathcal{T}}) \\
&\qquad + \int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,|\lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h|\,dx.
\end{aligned}$$

Im hinteren Term folgt mit (2.61) und Dreiecksungleichungen

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,|\lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h|\,dx \\
&\quad= \int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,\big|(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-\big(\nabla u-\nabla u_h\big)-\big(\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\big)-\big(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}}\big)+\mathbf{s}_h\big|\,dx \\
&\quad\le \int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,\big|(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})+\mathbf{s}_h\big|\,dx \\
&\qquad + \int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,|\nabla u-\nabla u_h|\,dx + \int_\Omega \frac{\varepsilon}{\sqrt{c_8}}\lambda_h|\mathbf{m}_h|\sqrt{c_8}\big|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\big|\,dx.
\end{aligned}$$

Nun liefern Hölder-Young-Ungleichungen für die beiden letzten Integrale

$$\begin{aligned}
&\le \int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,\big|(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}})-(\nabla u_h-(\nabla u_h)_{\mathcal{T}})+\mathbf{s}_h\big|\,dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{c_8}\Big)\,\|\varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla u-\nabla u_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \frac{c_8}{2}\|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Einsetzen und Umsortieren der Summanden ergibt also abschließend

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \frac{c_8}{2}\|\mathbf{d}-\mathbf{d}_h\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h,\mathbf{m}_h)\\
&\quad\le \langle(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\,;\,\mathbf{m}-\mathbf{m}_{\mathcal{T}}\rangle + \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{c_8}\Big)\,\|\varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad + \int_\Omega \varepsilon\lambda_h|\mathbf{m}_h|\,\big|(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}) + \mathbf{s}_h\big|\,dx + \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_{\mathcal{T}},\mathbf{m}_{\mathcal{T}}). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Mit denselben Argumenten wie in Abschnitt 2.7, lassen sich aus der a posteriori Fehlerabschätzung (2.60) *zuverlässige* Fehlerabschätzungen gewinnen, die die unbekannte exakte Lösung $\mathbf{m}$ mit Ausnahme des Sprungterms nicht mehr involvieren. Im nachfolgenden Abschnitt 2.12 wird gezeigt, daß $\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_{\mathcal{T}},\mathbf{m}_{\mathcal{T}})$ für $\mathbf{m}\in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ unter moderaten Voraussetzungen an die Stabilisierungsparameter β_E ein Term höherer Ordnung ist.

Korollar 2.47. *Die Energiedichte ϕ^{**} erfülle die Monotoniebedingung* (2.38)*, und zu $\varepsilon>0$ seien $(\lambda,\mathbf{m})$ sowie $(\lambda_h,\mathbf{m}_h)$ Lösungen von (RP) bzw. $(RP_{\varepsilon,h})$. Dann existiert eine Konstante $c_{15}>0$, die nur von c_8 abhängt, so daß mit $\mathbf{s}_h\in\mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ aus* (2.57) *gilt*

$$\begin{aligned}
&\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \|D\phi^{**}(\mathbf{m}) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h,\mathbf{m}_h)\\
&\quad\le c_{15}\big\{\|(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|(|\mathbf{m}_h|-1)_+\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad + \|(|\mathbf{m}_h|-1)_+\{(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}) + \mathbf{s}_h\}\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}\\
&\qquad + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_{\mathcal{T}},\mathbf{m}_{\mathcal{T}})\big\}. \qquad \blacksquare
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Korollar 2.48. *Die Energiedichte ϕ^{**} erfülle die Monotoniebedingung* (2.38)*, und zu $\varepsilon>0$ seien $(\lambda,\mathbf{m})$ sowie $(\lambda_h,\mathbf{m}_h)$ Lösungen von (RP) bzw. $(RP_{\varepsilon,h})$. Zusätzlich gelte $\mathbf{m}\in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Dann existiert eine Konstante $c_{16}>0$, die nur von c_8 und $\nabla\mathbf{m}$ abhängt, so daß mit $\mathbf{s}_h\in\mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ aus* (2.57) *gilt*

$$\begin{aligned}
&\|u-u_h\|^2_{W^2_1(\mathbb{R}^d)} + \|D\phi^{**}(\mathbf{m}) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h,\mathbf{m}_h)\\
&\quad\le c_{16}\big\{\|h\{(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\}\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|(|\mathbf{m}_h|-1)_+\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad + \|(|\mathbf{m}_h|-1)_+\{(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}) + \mathbf{s}_h\}\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)}\\
&\qquad + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_{\mathcal{T}},\mathbf{m}_{\mathcal{T}})\big\}. \qquad \blacksquare
\end{aligned} \tag{2.64}$$

2.12 Konvergenz der Stabilisierungsterme

Damit bleibt noch zu zeigen, daß die Stabilisierungsterme $\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_{\mathcal{T}},\mathbf{m}_{\mathcal{T}})$ und $\sigma_{\mathrm{A}}((\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}},(\lambda\mathbf{m})_{\mathcal{T}})$ für glatte Funktionen $\mathbf{m},\lambda\mathbf{m}:\Omega\to\mathbb{R}^d$ mit der Netzweite h verschwinden.

Satz 2.49 (Spurgleichung für Rechtecke und Quader, Carstensen [15]). *Es seien $T\subseteq\mathbb{R}^d$ ein Quader, E eine Seite von T und $f\in W^{1,1}(T)$. Dann gilt*

$$\fint_T f(x)\,dx = \fint_E f(x)\,ds_x - \fint_T \mathbf{n}_E\cdot(P-x)\,\mathbf{n}_E\cdot\nabla f(x)\,dx,$$

wobei $\mathbf{n}_E$ den (äußeren) Normalenvektor von ∂T auf E bezeichne und $P\in\mathbb{R}^d$ ein Eckpunkt von T sei, der nicht auf E liegt. $\blacksquare$

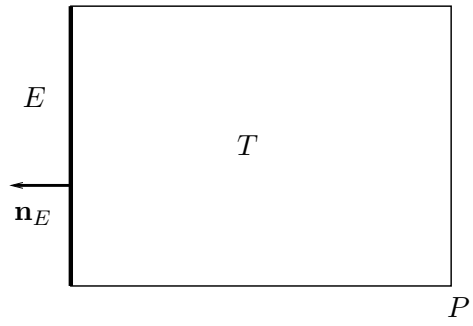


Abbildung 2.4: *Veranschaulichung der Voraussetzungen zu Satz 2.49.*

Bemerkung. Im folgenden definiere zu einer Triangulierung $\mathcal{T}$ von Ω die Konstante

$$C_{\mathcal{T}} := \max_{T\in\mathcal{T}} \frac{h_T^d}{|T|}.$$

Mit der dimensionsabhängigen Konstante

$$C_d := |B(0,1)|$$

kann man dann $|T|$ und h_T wie folgt gegeneinander abschätzen,

$$C_d^{-1}|T| \le h_T^d \le C_{\mathcal{T}}|T| \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}, \tag{2.65}$$

denn für $x \in T$ gilt wegen $h_T = \operatorname{diam}(T) = \sup_{x',x''\in T} |x' - x''|$ sofort $T \subseteq B(x, h_T)$ und deshalb $|T| \le |B(x, h_T)| = h_T^d |B(0,1)|$. □

Korollar 2.50. *Es sei $\mathcal{T}$ eine reguläre Triangulierung von Ω. Die Elemente von $\mathcal{T}$ seien Rechtecke ($d = 2$) bzw. Quader ($d = 3$). Dann gilt für $\mathbf{m} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ die Abschätzung*

$$\int_E |[\mathbf{m}_{\mathcal{T}}]|^2\, ds_x \le 2C_{\mathcal{T}}^2 \|\nabla \mathbf{m}\|^2_{L^2(\omega_E;\mathbb{R}^{d\times d})} |E| \big(h_{T_E^-}^{2-d} + h_{T_E^+}^{2-d}\big) \tag{2.66}$$

für alle inneren Seiten $E \in \mathcal{E}^*$ und $\omega_E := \bigcup \big\{T \in \mathcal{T} \,\big|\, E \subseteq \partial T\big\}$.

Beweis. Betrachte zunächst $f \in H^1(\Omega)$. Mit der vorausgegangenen Spurgleichung folgt für den Sprung $[f_{\mathcal{T}}]|_E$ von $f_{\mathcal{T}}$ auf E

$$\begin{aligned}
|[f_{\mathcal{T}}]_E| &= \Big| \fint_{T^+} f\, dx - \fint_{T^-} f\, dx \Big| \\
&= \Big| \fint_{T^-} \mathbf{n}_E \cdot (P^- - y)\, \mathbf{n}_E \cdot \nabla f(y)\, dy - \fint_{T^+} \mathbf{n}_E \cdot (P^+ - y)\, \mathbf{n}_E \cdot \nabla f(y)\, dy \Big| \\
&\le \frac{1}{|T^-|} \int_{T^-} |P^- - y| |\nabla f(y)|\, dy + \frac{1}{|T^+|} \int_{T^+} |P^+ - y| |\nabla f(y)|\, dy \\
&\le \|\nabla f\|_{L^2(\omega_E;\mathbb{R}^d)} \Big\{ \frac{1}{|T^-|} \Big(\int_{T^-} |P^- - y|^2\, dy \Big)^{1/2} + \frac{1}{|T^+|} \Big(\int_{T^+} |P^+ - y|^2\, dy \Big)^{1/2} \Big\} \\
&\le \|\nabla f\|_{L^2(\omega_E;\mathbb{R}^d)} \Big\{ \frac{h_{T^-}}{|T^-|} + \frac{h_{T^+}}{|T^+|} \Big\} \\
&\le C_{\mathcal{T}} \|\nabla f\|_{L^2(\omega_E;\mathbb{R}^d)} \big\{ h_{T^-}^{1-d/2} + h_{T^+}^{1-d/2} \big\}.
\end{aligned}$$

Damit folgt für $\mathbf{m} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_E |[\mathbf{m}_\mathcal{T}]|^2\,ds_x = |E|\sum_{j=1}^d |[(\mathbf{m}_\mathcal{T})_j]|^2 &\le |E|\sum_{j=1}^d \|\nabla \mathbf{m}_j\|^2_{L^2(\omega_E;\mathbb{R}^d)} C_\mathcal{T}^2\big(h_{T^-}^{1-d/2}+h_{T^+}^{1-d/2}\big)^2\\ &\le 2C_\mathcal{T}^2\|\nabla\mathbf{m}\|^2_{L^2(\omega_E;\mathbb{R}^{d\times d})}|E|\big(h_{T^-}^{2-d}+h_{T^+}^{2-d}\big).\end{aligned}$$ ■

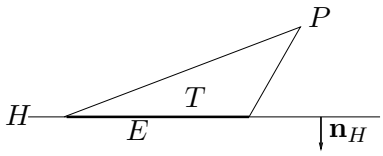


Abbildung 2.5: *Veranschaulichung der Voraussetzungen zu Satz 2.51.*

Satz 2.51 (Spurgleichung für Dreiecke Tetraeder, Carstensen [15]). *Es seien $T \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, H eine Hyperebene in $\mathbb{R}^d$ und $E := \partial T \cap H$. Ferner existiere ein Punkt $P \in \mathbb{R}^d\backslash H$ mit $T = \operatorname{conv}(E \cup \{P\})$. Dann gilt für alle $f \in W^{1,1}(T)$ die Spuridentität*

$$\fint_T f(x)\,dx = \fint_E f(x)\,ds_x - \frac{1}{d}\fint_T (x-P)\cdot\nabla f(x)\,dx.$$ ■

Wörtlich zum Beweis von Korollar 2.50 zeigt man nun die folgende Abschätzung auf regulären Dreiecks- bzw. Tetraeder-Netzen.

Korollar 2.52. *Es sei $\mathcal{T}$ eine reguläre Triangulierung von Ω. Die Elemente von $\mathcal{T}$ seien Dreiecke ($d=2$) bzw. Tetraeder ($d=3$). Dann gilt für $\mathbf{m} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ die Abschätzung*

$$\int_E |[\mathbf{m}_\mathcal{T}]|^2\,ds_x \le \frac{2}{d^2}\,C_\mathcal{T}^2\|\nabla\mathbf{m}\|^2_{L^2(\omega_E;\mathbb{R}^{d\times d})}|E|\big(h_{T_E^-}^{2-d}+h_{T_E^+}^{2-d}\big) \tag{2.67}$$

für alle inneren Seiten $E \in \mathcal{E}^*$ und $\omega_E := \bigcup\big\{T \in \mathcal{T}\,\big|\,E \subseteq \partial T\big\}$. ■

Damit ist für reguläre Triangulierungen, die nur aus Rechtecken bzw. Quader oder nur aus Dreiecken bzw. Tetraedern bestehen, die Abschätzung

$$\int_E |[\mathbf{m}_\mathcal{T}]|^2\,ds_x \le 2C_\mathcal{T}^2\|\nabla\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_E;\mathbb{R}^{d\times d})}\,|E|(h_{T_E^-}^{2-d}+h_{T_E^+}^{2-d})$$

gezeigt, sofern $\mathbf{m} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ ist. Ist die Triangulierung $\mathcal{T}$ uniform, so sind sind die Größen $h := h_T \sim h_E \sim |T|^{1/d}$ proportional. Ferner gilt für die Anzahl an Elementen $N := \#\mathcal{T} = |\Omega|/|T| \sim h^{-d}$, und trivialerweise gilt ebenfalls $\#\mathcal{E}^* \sim \#\mathcal{E} \sim \#\mathcal{T} \sim h^{-d}$. Mit $\beta_E = h^\beta$ und $\beta \in \mathbb{R}$ folgt

$$\sigma_\mathrm{A}(\mathbf{m}_\mathcal{T},\mathbf{m}_\mathcal{T}) = \sum_{E\in\mathcal{E}^*}\beta_E h_E\int_E |[\mathbf{m}_\mathcal{T}]|^2\,ds_x \lesssim \sum_{E\in\mathcal{E}^*}\|\nabla\mathbf{m}\|_{L^2(\omega_E;\mathbb{R}^{d\times d})}\beta_E\underbrace{h_E|E|}_{\sim h^d}\underbrace{(h_{T_E^-}^{2-d}+h_{T_E^+}^{2-d})}_{\sim h^{2-d}}.$$

Bemerkung. Insgesamt zeigt die bewiesene Analysis für $\mathbf{m} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ und reguläre Netze die Abschätzung $\sigma_\mathrm{A}(\mathbf{m}_\mathcal{T},\mathbf{m}_\mathcal{T}) \le c_{17}h^\beta h^2$, und damit ist der Sprungterm mit Blick auf die übrigen a priori Terme in den Abschätzungen zum stabilisierten Problem $(RP^\beta_{\varepsilon,h})$ für $\beta > -1$ von höherer Ordnung. Die Konstante c_{17} hängt nur von $\|\nabla\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}$, $C_\mathcal{T}$ und der Art der Elemente ab (explizit von der Anzahl an Kanten bzw. Seiten jedes einzelnen Elements). □

Kapitel 3

Algorithmen zur Implementierung von $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$

Das folgende Kapitel befaßt sich mit der Implementierung des penalisierten diskreten Modells $(RP_{\varepsilon,h})$ in MATLAB und beschreibt, wie die analytischen Ergebnisse aus Kapitel 1 und 2 numerisch realisiert worden sind.

Die Nebenbedingung (2.30) in $(RP_{\varepsilon,h})$ bzw. $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ führt auf eine nicht-lineare partielle Differentialgleichung. Die Lösung dieser erfolgt mit Hilfe des Newton-Verfahrens. In Abschnitt 3.1 werden die grundlegenden Datenstrukturen des Programms und die Implementierung des Newton-Verfahrens (inkl. Abbruchkriterium) motiviert und in entsprechenden Algorithmen festgehalten. Die elementare Berechnung der beteiligten Vektoren und Matrizen ist in Abschnitt 3.2 gezeigt, und es wird gezeigt, daß der Algorithmus zum Aufbau der Daten nahezu lineare Komplexität besitzt.

Abschnitt 3.3 beschreibt die Umsetzung der a posteriori Fehlerabschätzung aus Abschnitt 2.7 bzw. 2.11. Es wird eine indikatorgesteuerte adaptive Netzverfeinerungsstrategie vorgestellt, die zu einer isotropen Netzverfeinerung führt. Die Diskretisierung der involvierten Integralausdrücke erfordert die punktweise Auswertung von $\nabla u_h(x)$ für das magnetische Potential $u_h = \mathcal{L}\mathbf{m}_h$ einer diskreten Magnetisierung $\mathbf{m}_h \in \mathcal{L}^(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$. Aufbauend auf der in Kapitel 1 und 2 bereitgestellten Analysis kann man leicht nachweisen, daß u_h elementweise stetig ist und die Berechnung von $u_h(x)$ für fixiertes $x \in \mathbb{R}^d$ auf Integrale vom Typus des Doppelschichtpotentials führt. Die exakte Berechnung dieser Integrale ist im Kontext der Randelementmethode wohlbekannt, findet sich aber im Anhang A für $d = 2$ bzw. Anhang B für $d = 3$.

Im Kontext der Finite Elemente Methode gilt als gesichert, daß adaptive Netzverfeinerung nur dann zur optimalen Konvergenzrate führt, wenn bei der Netzverfeinerung anisotrope Elemente zugelassen werden. Abschnitt 3.4 stellt einen indikatorgesteuerten adaptiven Algorithmus vor, der das Netz anisotrop verfeinert. Dieser Algorithmus arbeitet mit der Idee von Glättungstechniken und Netzvergröberung – zwei Konzepten, die sich im Rahmen allgemeiner Finite Elemente Methoden bewährt haben. Die mathematische Rechtfertigung dieses Algorithmus kann für glatte Lösungen $\mathbf{m} \in H^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ erbracht werden.

Der folgende Abschnitt behandelt die Implementierung eines auf Glättungstechniken basierten Fehlerschätzers, der bei anderen numerischen Simulationen und insbesondere in den Ingenieurwissenschaften erfolgreich seine Anwendung findet. Es wird eine Möglichkeit vorgestellt, einen solchen auf Netzen mit hängenden Knoten zu realisieren. In der Praxis erweisen sich die auf Glättungseigenschaften basierten Fehlerschätzer bei adaptiver Netzverfeinerung als effiziente und zuverlässige Hilfmittel auch bei nicht-glatten Lösungen. Dies ist beim Modell (RP) insofern von Interesse, als daß keine exakte Lösung bekannt ist. Auf diese Schwierigkeit wird aber in Kapitel 4 weitergehend eingegangen.

Abschnitt 3.6 behandelt die effiziente Diskretisierung des Integraloperators $\nabla \circ \mathcal{L}$, der sowohl im Newton-Verfahren als auch bei der Berechnung der residualen Fehlerschätzer η, μ involviert wird. Die Diskretierung führt auf *vollbesetzte* Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{dN \times dN}$, so daß die Praktikabilität des Verfahrens wesentlich an der numerischen Behandlung dieser Matrizen hängt. Wie üblich können Matrizen, die zu diskretisierten Integraloperatoren gehören, durch *panel clustering* effizient berechnet und gespeichert werden. Da die effiziente Speicherung und schnelle Matrix-Vektor-Multiplikation von hierarchischen Matrizen durch MATLAB nicht unterstützt wird, beschränkt sich die Darstellung auf den effizienten Aufbau der beteiligten Matrizen. Bei den numerischen Experimenten in Kapitel 4 zeigt sich experimentell, daß sich allein durch den effizienten Aufbau der Matrizen besonders bei großer Anzahl an Elementen ein wesentlicher zeitlicher Gewinn ergibt. Bei exaktem Aufbau der Matrizen steigt der zeitliche Aufwand des vorgestellten Algorithmus um einen Faktor 10 bis 20.

Für das gesamte Kapitel seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von Ω gemäß Abschnitt 2.8. Da der stückweise konstante Ansatz keinerlei Nebenbedingungen an die Elemente T der Triangulierung $\mathcal{T}$ stellt, sind bei der Implementierung hängende Knoten erlaubt. Das Problem $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ erfordert wegen der involvierten Kantensprünge lediglich die Fastregularität von $\mathcal{T}$ gemäß Abschnitt 2.8.

3.1 Datenstrukturen und Newton-Verfahren

Gegeben seien mit $d = 2, 3$ die äußere Magnetisierung $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^d$, die Konvexifizierung der anisotropen Energiedichte $\phi^{**} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und der Penalisierungsparameter $\varepsilon > 0$. Im Problem $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ ist eine diskrete Magnetisierung $\mathbf{m}_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^d)$ gesucht mit $\lambda_h := \varepsilon^{-1}(|\mathbf{m}_h| - 1)_+ / |\mathbf{m}_h| \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T})$ und

$$a(\mathbf{m}_h, \cdot) + \langle D\phi^{**}(\mathbf{m}_h) + \lambda_h \mathbf{m}_h \,;\, \cdot \rangle + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \cdot) = \langle \mathbf{f} \,;\, \cdot \rangle \quad \text{in } \mathcal{L}^0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^d)^*. \tag{3.1}$$

Eine Basis des dN-dimensionalen Vektorraums $\mathcal{L}^0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^d)$ ist

$$\mathcal{B} := \big\{ \chi_T \mathbf{e}_j \,\big|\, T \in \mathcal{T},\, j = 1, \ldots, d \big\}. \tag{3.2}$$

Die Elemente $T \in \mathcal{T}$ seien numeriert, $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_N\}$. Für $\mathbf{m}_h$ wird dann abhängig von $d = 2$ oder $d = 3$ im folgenden die Basisdarstellung

$$\mathbf{m}_h = \sum_{k=1}^{N} \chi_{T_k} (\mathbf{X}_{2k-1} \mathbf{e}_1 + \mathbf{X}_{2k} \mathbf{e}_2) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{m}_h = \sum_{k=1}^{N} \chi_{T_k} (\mathbf{X}_{3k-2} \mathbf{e}_1 + \mathbf{X}_{3k-1} \mathbf{e}_2 + \mathbf{X}_{3k} \mathbf{e}_3) \tag{3.3}$$

verwandt, wobei $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{dN}$ der Koeffizientenvektor von $\mathbf{m}_h$ zur Basis $\mathcal{B}$ aus (3.2) sei. Insbesondere gelten also elementweise für $d = 2$

$$\mathbf{m}_h|_{T_j} = (\mathbf{X}_{2j-1}, \mathbf{X}_{2j}) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad |\mathbf{m}_h|_{T_j}| = (\mathbf{X}_{2j-1}^2 + \mathbf{X}_{2j}^2)^{1/2} \tag{3.4}$$

bzw. für $d = 3$

$$\mathbf{m}_h|_{T_j} = (\mathbf{X}_{3j-2}, \mathbf{X}_{3j-1}, \mathbf{X}_{3j}) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad |\mathbf{m}_h|_{T_j}| = (\mathbf{X}_{3j-2}^2 + \mathbf{X}_{3j-1}^2 + \mathbf{X}_{3j}^2)^{1/2}. \tag{3.5}$$

Bemerkung. Eine mögliche andere Darstellung bezüglich $\mathcal{B}$ ist die vielleicht näherliegende Wahl

$$\mathbf{m}_h = \Big(\sum_{k=1}^{N} \chi_{T_k} y_k \mathbf{e}_1 \Big) + \Big(\sum_{k=1}^{N} \chi_{T_k} y_{N+k} \mathbf{e}_2 \Big) \quad \text{für } d = 2,$$

die z.B. bei der Implementierung in Carstensen-Prohl [24] gewählt wurde. Der Vorteil der oben gewählten Darstellung ist aber, daß man bei adaptiver Netzverfeinerung die Werte $\mathbf{X}_{2k-1}, \mathbf{X}_{2k}$ auf einem nicht verfeinerten Element T_k einfach übernehmen kann. Ein weiterer Vorteil der gewählten Basisdarstellung zeigt sich bei der Initialisierung des Newton-Verfahrens: Der Vektor $F(\mathbf{X})$ läßt sich in Matlab kompakt berechnen. □

Definiere die Funktion $F : \mathbb{R}^{dN} \to \mathbb{R}^{dN}$ für $d = 2$ durch

$$\begin{aligned} F_{2j-1}(\mathbf{X}) &:= a(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_1) + \langle \lambda_h \mathbf{m}_h + D\phi^{**}(\mathbf{m}_h) - \mathbf{f} \,;\, \chi_{T_j}\mathbf{e}_1\rangle + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_1), \\ F_{2j}(\mathbf{X}) &:= a(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_2) + \langle \lambda_h \mathbf{m}_h + D\phi^{**}(\mathbf{m}_h) - \mathbf{f} \,;\, \chi_{T_j}\mathbf{e}_2\rangle + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_2), \end{aligned} \tag{3.6}$$

bzw. für $d = 3$ durch

$$\begin{aligned} F_{3j-2}(\mathbf{X}) &:= a(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_1) + \langle \lambda_h \mathbf{m}_h + D\phi^{**}(\mathbf{m}_h) - \mathbf{f} \,;\, \chi_{T_j}\mathbf{e}_1\rangle + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_1), \\ F_{3j-1}(\mathbf{X}) &:= a(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_2), + \langle \lambda_h \mathbf{m}_h + D\phi^{**}(\mathbf{m}_h) - \mathbf{f} \,;\, \chi_{T_j}\mathbf{e}_2\rangle + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_2), \\ F_{3j}(\mathbf{X}) &:= a(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_3) + \langle \lambda_h \mathbf{m}_h + D\phi^{**}(\mathbf{m}_h) - \mathbf{f} \,;\, \chi_{T_j}\mathbf{e}_3\rangle + \sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_3), \end{aligned} \tag{3.7}$$

wobei $\mathbf{m}_h = \mathbf{m}_h(\mathbf{X})$ durch Gleichung (3.3) gegeben werde. Gleichung (3.1) ist dann äquivalent dazu, eine Nullstelle von F zu finden. Diese Nullstellengleichung wird mit Hilfe eines Newton-Verfahrens numerisch approximiert,

$$\mathbf{X}^{(k+1)} := \mathbf{X}^{(k)} + \delta^{(k)} \quad \text{mit} \quad \delta^{(k)} := -DF(\mathbf{X}^{(k)})^{-1} F(\mathbf{X}^{(k)}). \tag{3.8}$$

Zu gegebenem $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{dN}$ sind also der Vektor $\mathbf{F} := F(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{dN}$ und die Matrix $\mathbf{D} := DF(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{dN \times dN}$ zu berechnen. Dies geschieht im folgende Abschnitt.

Algorithmus 3.1 (Newton-Verfahren). *Gegeben sei ein Startvektor $\mathbf{X}^{(0)} \in \mathbb{R}^{dN}$ und $k = 0$.*

(i) *Berechne $\mathbf{D}^{(k)}$ und $\mathbf{F}^{(k)}$.*

(ii) *Berechne das Newton-Update $\delta \in \mathbb{R}^{2N}$ als Lösung von $\mathbf{D}^{(k)}\delta = -\mathbf{F}^{(k)}$.*

(iii) *Definiere $\mathbf{X}^{(k+1)} := \mathbf{X}^{(k)} + \delta$.*

(iv) *Abbruch oder Erhöhung $k := k + 1$ und Sprung nach* (i).

Als Output liefert der Algorithmus eine Näherung $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(k)}$ der Nullstelle x von $F(x)$. ■

Bemerkung **(Newton-Verfahren mit Abbruch-Kriterium).** Es sei $(\mathbf{X}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der Picard-Iterierten. In der Praxis beobachtet man in der Regel das folgende Konvergenzverhalten der Folge: Im vorasymptotischen Bereich ist keine Konvergenz erkennbar. Ab einem Wert $k_0 \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge dann quadratisch für $k \geq k_0$, ehe die Folgenglieder oberhalb eines weiteren Index k_1 nur noch in der Größenordnung der Maschinengenauigkeit differieren. An dieser Stelle bricht die quadratische Konvergenz ab, und das Newton-Verfahren ist dann zu beenden, da numerisch keine bessere Approximation der gesuchten Nullstelle zu erwarten ist. Diesem Verhalten wird mit dem folgenden Algorithmus 3.2 Rechnung gezollt. □

Algorithmus 3.2 (Newton-Verfahren mit Abbruch-Kriterium). *Gegeben seien natürliche Zahlen $n^{(1)}_{\max}, n^{(2)}_{\max} \in \mathbb{N}$ sowie relative und absolute Toleranzwerte $\tau_{rel}, \tau_{abs} > 0$.*

(i) *Führe ein Newton-Verfahren gemäß Algorithmus 3.1 mit Startvektor* $\mathbf{X}^{(0)} \in \mathbb{R}^{dN}$ *aus und brich dieses ab*

- *erfolgreich, falls* $|\mathbf{F}^{(k+1)}| \leq \tau_{rel}|\mathbf{F}^{(0)}| + \tau_{abs}$,
- *erfolglos, falls* $k = n^{(1)}_{\max}$ *und* $|\mathbf{F}^{(k+1)}| > \tau_{rel}|\mathbf{F}^{(0)}| + \tau_{abs}$.

(ii) *Fehlermeldung und Abbruch, falls (i) erfolglos war.*

(iii) *Definiere* $\mathbf{X}^{(0)} := \mathbf{X}^{(k+1)} \in \mathbb{R}^{dN}$ *und* $k := 0$.

(iv) *Führe ein Newton-Verfahren gemäß Algorithmus 3.1 durch und beende dieses*

- *erfolglos, falls* $k = n^{(2)}_{\max}$ *gilt,*
- *erfolgreich, falls* $|\mathbf{F}^{(k)}| \leq \min\{\tau_{abs}, |\mathbf{F}^{(k+1)}|\}$ *gilt.*

(v) *Fehlermeldung und Abbruch, falls (iv) erfolglos war.*

Als Output liefert der Algorithmus eine Näherung $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(k)}$ *der Nullstelle* x *von* $F(x)$. ■

Bemerkung. Bei den numerischen Experimenten der nachfolgenden Kapitel wurden die Parameter $n^{(1)}_{\max} = 500$, $n^{(2)}_{\max} = 100$, $\tau_{abs} := 10^{-12}$ und $\tau_{rel} := 10^{-6}$ gewählt. In der Praxis zeigt sich, daß das Newton-Verfahren zur Lösung von $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ für $k \leq 10$ in (iv) erfolgreich beendet wird. □

3.2 Berechnung der Daten für das Newton-Verfahren

3.2.1 Berechnung von D und F im Fall $d = 2$

Definiere zunächst die *vollbesetzte* Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}_{\text{sym}}$ mittels

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{2j-1,2k-1} & \mathbf{A}_{2j-1,2k} \\ \mathbf{A}_{2j,2k-1} & \mathbf{A}_{2j,2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_1, \chi_{T_k}\mathbf{e}_1) & a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_1, \chi_{T_k}\mathbf{e}_2) \\ a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_2, \chi_{T_k}\mathbf{e}_1) & a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_2, \chi_{T_k}\mathbf{e}_2) \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

wobei sich die Symmetrie der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ unmittelbar auf die Matrix $\mathbf{A}$ überträgt. Die Einträge von $\mathbf{A}$ können mit Hilfe von Korollar 2.8 berechnet werden. Mit diesen Einträgen und der Darstellung (3.3) von $\mathbf{m}_h$ folgt

$$\begin{aligned} a(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_1) &= \sum_{k=1}^{N} \big(\mathbf{X}_{2k-1} a(\chi_{T_k}\mathbf{e}_1, \chi_{T_j}\mathbf{e}_1) + \mathbf{X}_{2k} a(\chi_{T_k}\mathbf{e}_2, \chi_{T_j}\mathbf{e}_1)\big) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \big(\mathbf{X}_{2k-1}\mathbf{A}_{2k-1,2j-1} + \mathbf{X}_{2k}\mathbf{A}_{2k,2j-1}\big) \end{aligned}$$

und analog

$$a(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_2) = \sum_{k=1}^{N} \big(\mathbf{X}_{2k-1}\mathbf{A}_{2k-1,2j} + \mathbf{X}_{2k}\mathbf{A}_{2k,2j}\big).$$

Zur kürzeren Schreibweise bezeichne $\mathbf{A}(:,n) \in \mathbb{R}^{2N}$ die n-te Spalte der Matrix $\mathbf{A}$. Damit lassen sich die beiden vorausgegangenen Gleichungen kurz als

$$a(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_1) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 2j-1) \quad \text{und} \quad a(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_2) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 2j) \tag{3.10}$$

schreiben. Diese Gleichungen können in MATLAB direkt implementiert werden. Als Nächstes wird der Beitrag von $\langle \lambda_h \mathbf{m}_h \,;\, \chi_{T_j}\mathbf{e}_n \rangle$ ausgewertet. Zunächst einmal gilt wegen (3.4)

$$\langle \lambda_h \mathbf{m}_h \,;\, \chi_{T_j}\mathbf{e}_n \rangle = |T_j|(\lambda_h \mathbf{m}_h \cdot \mathbf{e}_n)|_{T_j}.$$

Definiere

$$\ell_j := |\mathbf{m}_h|_{T_j}| = (\mathbf{X}_{2j-1}^2 + \mathbf{X}_{2j}^2)^{1/2}. \tag{3.11}$$

Nach Definition des penalisierten Verfahrens sind zwei Fälle zu unterscheiden:
Fall 1. $\ell_j \leq 1$. Dies ist nach Definition von λ_h äquivalent zu $\lambda_h|_{T_j} = 0$. Also verschwindet der Beitrag,

$$\langle \lambda_h \mathbf{m}_h \,;\, \chi_{T_j}\mathbf{e}_n \rangle = 0 \quad \text{für } n = 1, 2.$$

Fall 2. $\ell_j > 1$. Dann gilt $\lambda_h \mathbf{m}_h|_{T_j} = \varepsilon^{-1}(1 - 1/|\mathbf{m}_h|_{T_j}|)\mathbf{m}_h|_{T_j} = |T_j|\varepsilon^{-1}(1 - \ell_j^{-1})\,(\mathbf{X}_{2j-1}, \mathbf{X}_{2j})$, und es folgt

$$\langle \lambda_h \mathbf{m}_h \,;\, \chi_{T_j}\mathbf{e}_1 \rangle = |T_j|\varepsilon^{-1}(1 - \ell_j^{-1})\mathbf{X}_{2j-1},$$
$$\langle \lambda_h \mathbf{m}_h \,;\, \chi_{T_j}\mathbf{e}_2 \rangle = |T_j|\varepsilon^{-1}(1 - \ell_j^{-1})\mathbf{X}_{2j}.$$

Der dritte und der vierte Summand in (3.6) sind problemabhängig und nur für konkret gegebene ϕ^{**} und $\mathbf{f}$ systematisch zu berechnen. Die Berechnung von $\langle \mathbf{f} \,;\, \chi_{T_j}\mathbf{e}_n \rangle$ wird regelmäßig über eine geeignete Quadratur erfolgen. Um den vorletzten L^2-Term zu bestimmen, muß man sich auf die Funktion ϕ^{**} festlegen. Im folgenden wird der Modellfall (2.19) betrachtet, d.h. mit einem Vektor $\mathbf{Z} \in S_2^2$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$D\phi^{**}(x) = (x \cdot \mathbf{Z})\mathbf{Z}. \tag{3.12}$$

Hier gilt

$$\langle D\phi^{**}(\mathbf{m}_h) \,;\, \chi_{T_j}\mathbf{e}_n \rangle = \langle (\mathbf{m}_h \cdot \mathbf{Z})\mathbf{Z}_n \,;\, \chi_{T_j} \rangle = |T_j|\big((\mathbf{X}_{2j-1}, \mathbf{X}_{2j}) \cdot \mathbf{Z}\big)\,\mathbf{Z}_n \quad \text{für } n = 1, 2.$$

Schließlich sind noch die Sprungterme $\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_n)$ zu betrachten. Mit Gleichung (2.59) gilt

$$\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_n) = -\sum_{\substack{E \in \mathcal{E}^* \\ E \subseteq \partial T_j}} \beta_E h_E |E| [\![\mathbf{m}_h]\!]_{T_j} \cdot \mathbf{e}_n.$$

Zu einem Element $T_j \in \mathcal{T}$ und $E \in \mathcal{E}^*$ mit $E \subseteq \partial T_j$ existiert ein eindeutiges Nachbarelement $T_J \in \mathcal{T}$, so daß $E \subseteq \partial T_J$ gilt. Die Nummer dieses Nachbarelements wird im folgenden als $J = J(j, E)$ geschrieben. Für $n = 1$ gilt dann nach Definition von $[\![\cdot]\!]_{T_j}$ beispielsweise

$$\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j}\mathbf{e}_1) = -\sum_{\substack{E \in \mathcal{E}^* \\ E \subseteq \partial T_j}} \beta_E h_E |E| [\![\mathbf{m}_h]\!]_{T_j} \cdot \mathbf{e}_1 = -\sum_{\substack{E \in \mathcal{E}^* \\ E \subseteq \partial T_j}} \beta_E h_E |E| \big(\mathbf{X}_{2J(j,E)-1} - \mathbf{X}_{2j-1}\big),$$

denn $\mathbf{m}_h|_{T_k} = (\mathbf{X}_{2k-1}, \mathbf{X}_{2k})$ für alle $1 \leq k \leq N$. Analoges Vorgehen für $n = 2$ verifiziert dann insgesamt das folgende Lemma.

Lemma 3.3 (Berechnung des Vektors $\mathbf{F} := \boldsymbol{F}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{2N}$ für $(\boldsymbol{RP}^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{h}})$). *Im Modellfall* (3.12) *für $d = 2$ gilt für $\ell_j \leq 1$*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_{2j-1} \\ \mathbf{F}_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 2j-1) \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 2j) \end{pmatrix} + |T_j| \big((\mathbf{X}_{2j-1}, \mathbf{X}_{2j}) \cdot \mathbf{Z} \big) \, \mathbf{Z} - \int_{T_j} \mathbf{f} \, dx$$
$$+ \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}^* \\ E \subseteq \partial T_j}} \beta_E h_E^2 \Big\{ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{2j-1} \\ \mathbf{X}_{2j} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{2J(j,E)-1} \\ \mathbf{X}_{2J(j,E)} \end{pmatrix} \Big\}$$

und für $\ell_j > 1$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_{2j-1} \\ \mathbf{F}_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 2j-1) \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 2j) \end{pmatrix} + |T_j| \big((\mathbf{X}_{2j-1}, \mathbf{X}_{2j}) \cdot \mathbf{Z} \big) \, \mathbf{Z} - \int_{T_j} \mathbf{f} \, dx$$
$$+ \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}^* \\ E \subseteq \partial T_j}} \beta_E h_E^2 \Big\{ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{2j-1} \\ \mathbf{X}_{2j} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{2J(j,E)-1} \\ \mathbf{X}_{2J(j,E)} \end{pmatrix} \Big\} + |T_j| \varepsilon^{-1} (1 - \ell_j^{-1}) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{2j-1} \\ \mathbf{X}_{2j} \end{pmatrix}$$

Dabei ist die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}_{\text{sym}}$ durch (3.9) *gegeben, $\mathbf{A}(:, n) \in \mathbb{R}^{2N}$ bezeichnet den n-ten Spaltenvektor von $\mathbf{A}$, und $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2N}$ bzw. $\mathbf{m}_h$ sind durch* (3.3) *verbunden.* ■

Mit dieser Darstellung läßt sich die totale Ableitung $\mathbf{D} = DF(\mathbf{X})$ (also $\mathbf{D}_{jk} = (\partial F_j / \partial x_k)(\mathbf{X})$) elementar berechnen, wobei lediglich zu beachten ist, daß ℓ_j von $\mathbf{X}_{2j-1}$ und $\mathbf{X}_{2j}$ abhängt. Eine kompakte Schreibweise läßt sich dabei durch Tensoren erreichen. Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^d$ bezeichne $x \otimes y \in \mathbb{R}^{d \times d}$ die Matrix

$$(x \otimes y)_{jk} = x_j y_k.$$

Sind x, y *Spaltenvektoren*, die wie üblich mit Matrizen $x, y \in \mathbb{R}^{d \times 1}$ identifiziert werden, so gilt mit der üblichen Matrizenmultiplikation $x \otimes y = xy^T$.

Lemma 3.4 (Berechnung der Matrix $\mathbf{D} := \boldsymbol{DF}(\mathbf{X})$ für $(\boldsymbol{RP}^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{h}})$). *Für fixierte $1 \leq j, k \leq N$ definiere die abkürzenden Schreibweisen*

$$\mathbf{A}(2j-1:2j, 2k-1:2k) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{2j-1,2k-1} & \mathbf{A}_{2j-1,2k} \\ \mathbf{A}_{2j,2k-1} & \mathbf{A}_{2j,2k} \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{D}(2j-1:2j, 2k-1:2k) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{2j-1,2k-1} & \mathbf{D}_{2j-1,2k} \\ \mathbf{D}_{2j,2k-1} & \mathbf{D}_{2j,2k} \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{X}(2j-1:2j) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{2j-1} \\ \mathbf{X}_{2j} \end{pmatrix} \quad \textit{sowie} \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\mathbf{D} = DF(\mathbf{X})$ ist im Modellfall (3.12) *für $d = 2$ symmetrisch $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}_{\text{sym}}$, und die Einträge berechnen sich wie folgt. Falls $j \neq k$ gilt und T_j und T_k nicht benachbart sind, so ergibt sich*

$$\mathbf{D}(2j-1:2j, 2k-1:2k) = \mathbf{A}(2j-1:2j, 2k-1:2k).$$

Im Fall, daß die Elemente T_j und T_k für $j \neq k$ benachbart sind, gilt mit der eindeutigen *Kante $E \in \mathcal{E}^*$ mit $E \subseteq \partial T_j \cap \partial T_k$*

$$\mathbf{D}(2j-1:2j, 2k-1:2k) = \mathbf{A}(2j-1:2j, 2k-1:2k) - \beta_E h_E^2 \mathbb{1}.$$

Für $j = k$ und $\ell_j := |\mathbf{m}_h|_{T_j}| \leq 1$ gilt

$$\mathbf{D}(2j-1:2j, 2j-1:2j) = \mathbf{A}(2j-1:2j, 2j-1:2j) + |T_j|\mathbf{Z}\otimes\mathbf{Z} + \sum_{\substack{E\in\mathcal{E}^* \\ E\subseteq\partial T_j}} \beta_E h_E^2 \mathbb{1},$$

und im Fall $\ell_j > 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(2j-1:2j, 2j-1:2j) = \mathbf{A}(2j-1:2j, 2j-1:2j) + |T_j|\mathbf{Z}\otimes\mathbf{Z} + \sum_{\substack{E\in\mathcal{E}^* \\ E\subseteq\partial T_j}} \beta_E h_E^2 \mathbb{1} \\ + \varepsilon^{-1}|T_j|\big\{(1-\ell_j^{-1})\mathbb{1} + \ell_j^{-3}\,\mathbf{X}(2j-1:2j)\otimes\mathbf{X}(2j-1:2j)\big\}.\end{aligned}$$

Beweis. Im folgenden bezeichnet δ_{jk} wie üblich das Kronecker-Symbol. Für $\ell_j \leq 1$ liefert elementares Ableiten im nicht-stabilisierten Fall

$$\begin{array}{lcll}
\mathbf{D}_{2j-1,2k-1} & = & \mathbf{A}_{2k-1,2j-1} & +\delta_{jk}|T_j|\mathbf{Z}_1^2, \\
\mathbf{D}_{2j-1,2k} & = & \mathbf{A}_{2k,2j-1} & +\delta_{jk}|T_j|\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2, \\
\mathbf{D}_{2j,2k-1} & = & \mathbf{A}_{2k-1,2j} & +\delta_{jk}|T_j|\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2, \\
\mathbf{D}_{2j,2k} & = & \mathbf{A}_{2k,2j} & +\delta_{jk}|T_j|\mathbf{Z}_2^2,
\end{array}$$

und für $\ell_j = (\mathbf{X}_{2j-1}^2 + \mathbf{X}_{2j}^2)^{1/2} > 1$ ergibt sich

$$\begin{array}{lcllll}
\mathbf{D}_{2j-1,2k-1} & = & \mathbf{A}_{2k-1,2j-1} & +\delta_{jk}|T_j|\mathbf{Z}_1^2 & +\delta_{jk}\varepsilon^{-1}|T_j|(1-\ell_j^{-1}+\mathbf{X}_{2j-1}^2\ell_j^{-3}), \\
\mathbf{D}_{2j-1,2k} & = & \mathbf{A}_{2k,2j-1} & +\delta_{jk}|T_j|\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 & +\delta_{jk}\varepsilon^{-1}|T_j|\,\mathbf{X}_{2j-1}\mathbf{X}_{2j}\ell_j^{-3}, \\
\mathbf{D}_{2j,2k-1} & = & \mathbf{A}_{2k-1,2j} & +\delta_{jk}|T_j|\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 & +\delta_{jk}\varepsilon^{-1}|T_j|\,\mathbf{X}_{2j-1}\mathbf{X}_{2j}\ell_j^{-3}, \\
\mathbf{D}_{2j,2k} & = & \mathbf{A}_{2k,2j} & +\delta_{jk}|T_j|\mathbf{Z}_1^2 & +\delta_{jk}\varepsilon^{-1}|T_j|(1-\ell_j^{-1}+\mathbf{X}_{2j}^2\ell_j^{-3}).
\end{array}$$

Insbesondere gilt wegen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2N\times 2N}$ für $j \neq k$ stets

$$\begin{array}{lcllll}
\mathbf{D}_{2j-1,2k-1} & = & \mathbf{A}_{2k-1,2j-1} & = \mathbf{A}_{2j-1,2k-1} & = \mathbf{D}_{2k-1,2j-1}, \\
\mathbf{D}_{2j-1,2k} & = & \mathbf{A}_{2k,2j-1} & = \mathbf{A}_{2j-1,2k} & = \mathbf{D}_{2k,2j-1}, \\
\mathbf{D}_{2j,2k-1} & = & \mathbf{A}_{2k-1,2j} & = \mathbf{A}_{2j1,2k-} & = \mathbf{D}_{2k-1,2j}, \\
\mathbf{D}_{2j,2k} & = & \mathbf{A}_{2k,2j} & = \mathbf{A}_{2j,2k} & = \mathbf{D}_{2k,2j}
\end{array}$$

unabhängig von der Größe ℓ_j, und für $j = k$ gilt zumindest $\mathbf{D}_{2j,2j-1} = \mathbf{D}_{2j-1,2j}$. Es folgt $\mathbf{D} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2N\times 2N}$. Das Hinzutreten der additiven Terme im stabilisierten Fall ist offensichtlich. ■

Algorithmus 3.5 (Aufbau von D und F für ($RP_{\varepsilon,h}^{\beta}$)). *Es bezeichne N die Anzahl der Elemente in $\mathcal{T}$. Die Matrix $\mathbf{A}$ sei bereits aufgestellt worden, und der Vektor $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2N}$ sei der Koeffizientenvektor der aktuellen Approximation $\mathbf{m}_h$ gemäß* (3.3). *ϕ^{**} sei in Form des* Spaltenvektors $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^2$ *wie in* (3.12) *gegeben. Es bezeichnet* `noedges` $\in \mathbb{N}$ *die Anzahl der Kanten der Triangulierung. Dann generiert der folgende Pseudo-Code die Daten $\mathbf{D}$ und $\mathbf{F}$ für das Newton-Verfahren, wobei zur Abkürzung die Schreibweise von Lemma 3.4 zur Anwendnung kommt.*

$\mathbf{D} = \mathbf{A}$

$\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{X}$

`for` $j = 1 : N$

```
    mhT = X(2j − 1 : 2j)
    F(2j − 1 : 2j) = F(2j − 1 : 2j) + |T_j|(mhT · Z)Z − ∫_{T_j} f dx
    D(2j − 1 : 2j, 2j − 1 : 2j) = D(2j − 1 : 2j, 2j − 1 : 2j) + |T_j| (Z ∗ Z^T)
    ℓ := |mhT|
    if ℓ > 1
        F(2j − 1 : 2j) = F(2j − 1 : 2j) + +ε^{−1}|T_j|(1 − ℓ^{−1}) mhT
        D(2j − 1 : 2j, 2j − 1 : 2j) = D(2j − 1 : 2j, 2j − 1 : 2j)
                                      + ε^{−1}|T_j|{(1 − ℓ^{−1})𝟙 + ℓ^{−3}(mhT ∗ mhT^T)}
    endif
end
for k = 1 : noedges
    if E = E_k ∈ ℰ*
        Seien j, J die eindeutigen Indizes mit E ⊆ ∂T_j ∩ ∂T_J
        stab=β_E h_E^2
        D(2j − 1 : 2j, 2j − 1 : 2j)   =  D(2j − 1 : 2j, 2j − 1 : 2j)   +  stab 𝟙
        D(2J − 1 : 2J, 2J − 1 : 2J)   =  D(2J − 1 : 2J, 2J − 1 : 2J)   +  stab 𝟙
        D(2j − 1 : 2j, 2J − 1 : 2J)   =  D(2j − 1 : 2j, 2J − 1 : 2J)   −  stab 𝟙
        D(2J − 1 : 2J, 2j − 1 : 2j)   =  D(2j − 1 : 2j, 2J − 1 : 2J)^T
        jump = X(2j − 1 : 2j) − X(2J − 1 : 2J)
        F(2j − 1 : 2j) = F(2j − 1 : 2j) + stab ∗ jump
        F(2J − 1 : 2J) = F(2J − 1 : 2J) − stab ∗ jump
    endif
end
```

■

Bemerkung. Mit Algorithmus 3.5 ist der Aufwand für den Aufbau von $\mathbf{D}$ bzw. $\mathbf{F}$ im diskreten Modell $(RP_{\varepsilon,h})$ von der Ordnung $O(N)$, wenn man von der Matrix-Vektor-Multiplikation $\mathbf{F} = \mathbf{AX}$ absieht. Aber auch diese kann effizient mittels *panel clustering* bzw. hierarchischen Matrizen realisiert werden, siehe Abschnitt 3.6. Da die Anzahl N der Elemente proportional ist zur Anzahl `noedges` der Kanten beträgt der Gesamtaufwand zum Aufbau von $\mathbf{D}$ bzw. $\mathbf{F}$ für das stabilisierte Problem ebenfalls $O(N)$. □

Damit ist im wesentlichen noch der Aufbau der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}_{\text{sym}}$ zu beschreiben. $\mathbf{A}$ ist nach Definition voll besetzt. Zum komponentenweisen Aufbau soll Korollar 2.8 herangezogen werden. Dazu wird zunächst angenommen, daß die Kanten der Triangulierung $\mathcal{T}$ numeriert sind. Es bezeichne $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_K\}$ die Menge der Kanten zur Triangulierung $\mathcal{T}$. Zunächst wird die ebenfalls *vollbesetzte* Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{2K\times 2K}$ aufgebaut, deren Einträge lauten

$$\mathbf{S}_{jk} := \int_{E_j}\int_{E_k} G(x-y)\, ds_x\, ds_y \quad \text{für zwei Kanten } E_j, E_k \in \mathcal{E}. \tag{3.13}$$

Der Satz von Fubini für die Oberflächenmaße auf E_j und E_k (bzw. analoges Vorgehen zum Beweis von Lemma 2.7) zeigen, daß die Matrix $\mathbf{S}$ symmetrisch ist.

Bemerkung. Die Einträge der Matrix $\mathbf{S}$ werden exakt berechnet. Die Formeln dazu finden sich im Anhang A.3. □

Im Anschluß an den Aufbau von $\mathbf{S}$ wird $\mathbf{A}$ assembliert. Angenommen, die Elemente $T_j, T_k \in \mathcal{T}$ seien Dreiecke mit Kanten $E_{j_1}, E_{j_2}, E_{j_3}, E_{k_1}, E_{k_2}, E_{k_3} \in \mathcal{E}$. Ferner seien $n^{(j,\lambda)} = (n_1^{(j,\lambda)}, n_2^{(j,\lambda)}), n^{(k,\mu)} = (n_1^{(k,\mu)}, n_2^{(k,\mu)})$ die äußeren Normalvektoren von T_j und T_k auf den Kanten E_{j_λ} bzw. E_{k_μ}. Mit Korollar 2.8 gilt in kompakter Matrixschreibweise

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{2j-1,2k-1} & \mathbf{A}_{2j-1,2k} \\ \mathbf{A}_{2j,2k-1} & \mathbf{A}_{2j,2k} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_1, \chi_{T_k}\mathbf{e}_1) & a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_1, \chi_{T_k}\mathbf{e}_2) \\ a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_2, \chi_{T_k}\mathbf{e}_1) & a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_2, \chi_{T_k}\mathbf{e}_2) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3} \mathbf{S}_{j_\lambda,k_\mu} \begin{pmatrix} n_1^{(j,\lambda)} n_1^{(k,\mu)} & n_1^{(j,\lambda)} n_2^{(k,\mu)} \\ n_2^{(j,\lambda)} n_1^{(k,\mu)} & n_2^{(j,\lambda)} n_2^{(k,\mu)} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3} \mathbf{S}_{j_\lambda,k_\mu} n^{(j,\lambda)} \otimes n^{(k,\mu)}.
\end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, daß sich diese Idee zum Aufbau von $\mathbf{A}$ auf beliebige affin-berandete Lipschitz-Gebiete $T_j, T_k \in \mathcal{T}$ überträgt.

Bemerkung. Der rechnerische Hauptaufwand steckt im Aufbau der Matrizen $\mathbf{S} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{\texttt{noedges}\times\texttt{noedges}}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2N\times 2N}$. Aus diesem Grund wird in der späteren Netzverfeinerung darauf geachtet, daß bei der Verfeinerung die Kanten und Elemente, die nicht verfeinert werden, ihre interne Numerierung behalten. Dadurch müssen nur Teile von $\mathbf{S}$ bzw. $\mathbf{A}$ neu berechnet werden. Dennoch verhält sich der Aufwand zum Aufbau von $\mathbf{A}$ (und $\mathbf{S}$) wie $O(N^2)$. □

Bemerkung. Zusätzlich zur globalen Symmetrie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2N\times 2N}$ gilt nach Lemma 2.7 noch $A_{2j,2k-1} = A_{2j-1,2k}$, d.h. eine *lokale Symmetrie*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{2k-1,2j-1} & \mathbf{A}_{2k-1,2j} \\ \mathbf{A}_{2k,2j-1} & \mathbf{A}_{2k,2j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2\times 2}.$$ □

3.2.2 Berechnung von D und F im Fall $d = 3$

Das Konzept für den Aufbau von $\mathbf{D}$ und $\mathbf{F}$ überträgt sich wörtlich auf $d = 3$, weshalb nachfolgend im wesentlichen die Resultate gegeben werden. Definiere zunächst die *vollbesetzte Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3N\times 3N}$ mittels

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{3j-2,3k-2} & \mathbf{A}_{3j-2,3k-1} & \mathbf{A}_{3j-2,3k} \\ \mathbf{A}_{3j-1,3k-2} & \mathbf{A}_{3j-1,3k-1} & \mathbf{A}_{3j-1,3k} \\ \mathbf{A}_{3j,3k-2} & \mathbf{A}_{3j,3k-1} & \mathbf{A}_{3j,3k} \end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_1, \chi_{T_k}\mathbf{e}_1) & a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_1, \chi_{T_k}\mathbf{e}_2) & a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_1, \chi_{T_k}\mathbf{e}_3) \\ a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_2, \chi_{T_k}\mathbf{e}_1) & a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_2, \chi_{T_k}\mathbf{e}_2) & a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_2, \chi_{T_k}\mathbf{e}_3) \\ a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_3, \chi_{T_k}\mathbf{e}_1) & a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_3, \chi_{T_k}\mathbf{e}_2) & a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_3, \chi_{T_k}\mathbf{e}_3) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3\times 3},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

wobei die *lokale Symmetrie* wie im Fall $d = 2$ aus Lemma 2.7 folgt. Verwendet man für $1 \le j \le N$ die direkt in MATLAB umsetzbare Schreibweise

$$\mathbf{X}(3j-2:3j) := \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{3j-2} \\ \mathbf{X}_{3j-1} \\ \mathbf{X}_{3j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

so ergibt sich analog zu oben das folgende Lemma, welches im Modellfall

$$D\phi^{**}(x) = (x \cdot \mathbf{Z})\mathbf{Z} + (x \cdot \widetilde{\mathbf{Z}})\widetilde{\mathbf{Z}} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3$$

mit orthonormalen Vektoren $\mathbf{Z}, \widetilde{\mathbf{Z}} \in \mathbb{R}^3$ den für das Newton-Verfahren benötigten Vektor $\mathbf{F} = F(\mathbf{X})$ berechnet.

Lemma 3.6 (Berechnung des Vektors $\mathbf{F} := F(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{3N}$ für $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ und $d = 3$). *Im Modellfall* (3.12) *für $d = 3$ gilt im Fall $\ell_j := |\mathbf{m}_h|_{T_j}| \leq 1$*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \mathbf{F}_{3j-2} \\ \mathbf{F}_{3j-1} \\ \mathbf{F}_{3j} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 3j-2) \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 3j-1) \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 3j) \end{pmatrix} + |T_j| \big\{ \big(\mathbf{X}(3j-2:3j) \cdot \mathbf{Z}\big)\, \mathbf{Z} + \big(\mathbf{X}(3j-2:3j) \cdot \widetilde{\mathbf{Z}}\big)\, \widetilde{\mathbf{Z}} \big\} \\ &\quad - \int_{T_j} \mathbf{f}\, dx + \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}^* \\ E \subseteq \partial T_j}} \beta_E h_E |E| \big(\mathbf{X}(3j-2:3j) - \mathbf{X}(3J(j,E)-2:3J(j,E))\big),\end{aligned}$$

und für $\ell_j > 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \mathbf{F}_{3j-2} \\ \mathbf{F}_{3j-1} \\ \mathbf{F}_{3j} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 3j-2) \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 3j-1) \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 3j) \end{pmatrix} + |T_j| \big\{ \big(\mathbf{X}(3j-2:3j) \cdot \mathbf{Z}\big)\, \mathbf{Z} + \big(\mathbf{X}(3j-2:3j) \cdot \widetilde{\mathbf{Z}}\big)\, \widetilde{\mathbf{Z}} \big\} \\ &\quad - \int_{T_j} \mathbf{f}\, dx + \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}^* \\ E \subseteq \partial T_j}} \beta_E h_E |E| \big(\mathbf{X}(3j-2:3j) - \mathbf{X}(3J(j,E)-2:3J(j,E))\big) \\ &\quad + \varepsilon^{-1} |T_j| (1 - \ell_j^{-1})\, \mathbf{X}(3j-2:3j).\end{aligned}$$

Dabei ist die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}_{\text{sym}}$ durch (3.14) *gegeben, $\mathbf{A}(:, n) \in \mathbb{R}^{3N}$ bezeichnet den n-ten Spaltenvektor von $\mathbf{A}$, und $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3N}$ bzw. $\mathbf{m}_h$ sind durch* (3.3) *verbunden.* ■

Lemma 3.7 (Berechnung der Matrix $\mathbf{D} := DF(\mathbf{X})$ für $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ und $d = 3$). *Für fixierte $1 \leq j, k \leq N$ definiere die abkürzenden Schreibweisen*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{A}}_{jk} &:= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{3j-2,3k-2} & \mathbf{A}_{3j-2,3k-1} & \mathbf{A}_{3j-2,3k} \\ \mathbf{A}_{3j-1,3k-2} & \mathbf{A}_{3j-1,3k-1} & \mathbf{A}_{3j-1,3k} \\ \mathbf{A}_{3j,3k-2} & \mathbf{A}_{3j,3k-1} & \mathbf{A}_{3j,3k} \end{pmatrix}, \\ \widetilde{\mathbf{D}}_{jk} &:= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{3j-2,3k-2} & \mathbf{D}_{3j-2,3k-1} & \mathbf{D}_{3j-2,3k} \\ \mathbf{D}_{3j-1,3k-2} & \mathbf{D}_{3j-1,3k-1} & \mathbf{D}_{3j-1,3k} \\ \mathbf{D}_{3j,3k-2} & \mathbf{D}_{3j,3k-1} & \mathbf{D}_{3j,3k} \end{pmatrix}, \\ \widetilde{\mathbf{X}}_j &:= \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{3j-2} \\ \mathbf{X}_{3j-1} \\ \mathbf{X}_{3j} \end{pmatrix} \quad \textit{sowie} \quad \mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Falls $j \neq k$ gilt und T_j und T_k nicht *benachbart sind, so gilt*

$$\widetilde{\mathbf{D}}_{jk} = \widetilde{\mathbf{A}}_{jk}.$$

Falls $j \neq k$ gilt, die Elemente T_j und T_k aber benachbart sind, d.h. es existiert eine Seite $E \in \mathcal{E}^*$ mit $E \subseteq \partial T_j \cap \partial T_k$, so ergibt sich

$$\widetilde{\mathbf{D}}_{jk} = \widetilde{\mathbf{A}}_{jk} - \beta_E h_E |E| \, \mathbb{1}.$$

Für $j = k$ und $\ell_j := |\mathbf{m}_h|_{T_j}| \leq 1$ gilt

$$\widetilde{\mathbf{D}}_{jj} = \widetilde{\mathbf{A}}_{jj} + |T_j| \big\{ \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z} + \widetilde{\mathbf{Z}} \otimes \widetilde{\mathbf{Z}} \big\} + \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}^* \\ E \subseteq \partial T_j}} \beta_E h_E |E| \, \mathbb{1}$$

und im Fall $\ell_j > 1$ ergibt sich

$$\widetilde{\mathbf{D}}_{jj} = \widetilde{\mathbf{A}}_{jj} + |T_j| | \big\{ \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z} + \widetilde{\mathbf{Z}} \otimes \widetilde{\mathbf{Z}} \big\} + \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}^* \\ E \subseteq \partial T_j}} \beta_E h_E |E| \, \mathbb{1} + \varepsilon^{-1} |T_j| \big\{ (1 - \ell_j^{-1}) \, \mathbb{1} + \ell_j^{-3} \, \widetilde{\mathbf{X}} \otimes \widetilde{\mathbf{X}} \big\}.$$

Insbesondere ist die Matrix $\mathbf{D}$ also symmetrisch, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}_{\mathrm{sym}}$. ■

Bemerkung. Die Algorithmen zum Aufbau von $\mathbf{A}$, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{F}$ für $d = 3$ entsprechen denen für $d = 2$ und zeigen, daß der Aufbau von $\mathbf{A}$ mit einem Aufwand von $O(N^2)$ durchgeführt werden kann und der von $\mathbf{D}$ und $\mathbf{F}$ dann simultan und im wesentlichen mit linearem Aufwand $O(N)$ erfolgt. □

3.3 Adaptive Netzverfeinerung für isotrope Netze

Es seien $(\lambda, \mathbf{m})$ und $(\lambda_h, \mathbf{m}_h)$ Lösungen von (RP) bzw. $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ zu gegebenen Parametern ε, β. Die konvexifizierte Energiedichte ϕ^{**} erfülle die Monotoniebedingung (2.38). Die a posteriori Abschätzungen (2.63) und (2.64) der Korollare 2.47 und 2.48 legen für eine adaptive Netzverfeinerung die Fehlerschätzer μ und η nahe, die durch

$$\begin{aligned} \mu := \big(& \|(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|(|\mathbf{m}_h| - 1)_+\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \|(|\mathbf{m}_h| - 1)_+ \{(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}) + \mathbf{s}_h\}\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} \big)^{1/2} \end{aligned} \tag{3.15}$$

und

$$\begin{aligned} \eta := \big(& \|h\{(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\}\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|(|\mathbf{m}_h| - 1)_+\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \|(|\mathbf{m}_h| - 1)_+ \{(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}) + \mathbf{s}_h\}\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} \big)^{1/2} \end{aligned} \tag{3.16}$$

gegeben sind. Dabei bezeichnet $h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T})$ die stückweise konstante Netzweite $h|_T := h_T = \operatorname{diam} T$ für $T \in \mathcal{T}$, und $\mathbf{s}_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^d)$ ist gegeben durch

$$\mathbf{s}_h|_T := -\frac{1}{|T|} \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}^* \\ E \subseteq \partial T}} \beta_E h_E \int_E [\![\mathbf{m}_h]\!] \, ds_x, \tag{3.17}$$

Bemerkungen. (a) μ ist ein zuverlässiger Fehlerschätzer im nicht-stabilisierten Fall $\beta_E = 0$. Erfüllt die *unbekannte* exakte Lösung $\mathbf{m} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$, so ist μ auch im stabilisierten Fall zuverlässig bis auf einen Term höherer Ordnung, siehe dazu Abschnitt 2.12.

(b) Für η konnte die Zuverlässigkeit nur bewiesen werden, wenn die (unbekannte) exakte Lösung $\mathbf{m} \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ erfüllt.

(c) Von keinem der beiden Fehlerschätzer konnte die Effizienz bewiesen werden, η besitzt aber zumindest die richtige Ordnung. □

Beide Fehlerschätzer lassen sich lokalisieren, d.h. es gilt

$$\mu = \Big(\sum_{T\in\mathcal{T}} \mu_T^2\Big)^{1/2} \quad \text{und} \quad \eta = \Big(\sum_{T\in\mathcal{T}} \eta_T^2\Big)^{1/2}$$

mit Verfeinerungsindikatoren μ_T, η_T, die mit $\ell_T := |\mathbf{m}_h|_T| \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned}\mu_T^2 := \|(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\|_{L^1(T;\mathbb{R}^d)} + |T|\,(\ell_T-1)_+^2 \\ + (\ell_T-1)_+\,\|(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}) + \mathbf{s}_h\|_{L^1(T;\mathbb{R}^d)}\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\eta_T^2 := h_T\|(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\|_{L^1(T;\mathbb{R}^d)} + |T|\,(\ell_T-1)_+^2 \\ + (\ell_T-1)_+\,\|(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}) + \mathbf{s}_h\|_{L^1(T;\mathbb{R}^d)}\end{aligned} \tag{3.19}$$

gegeben sind, wobei einfach ausgenutzt wurde, daß die Restriktion $\mathbf{m}_h|_T$ konstant ist.

Algorithmus 3.8 (Adaptive Netzverfeinerung). *Gegeben seien ein Anfangsnetz $\mathcal{T}^{(n)}$, $n = 0$ und ein Verfeinerungsparameter $\theta \in [0,1]$.*

(i) *Zu jedem Element $T_j \in \mathcal{T}^{(n)} = \{T_1,\dots,T_N\}$ wähle einen Penalisierungsparameter ε_j, zu jeder Kante bzw. Seite $E_k \in \mathcal{E}^* = \{E_1,\dots,E_K\}$ wähle einen Stabilisierungsparameter $\beta_k \geq 0$.*

(ii) *Berechne die Approximation $\mathbf{m}_h$ zum Netz $\mathcal{T}^{(n)}$.*

(iii) *Berechne die Verfeinerungsindikatoren μ_j und η_j.*

(iv) *Markiere alle Elemente $T_j \in \mathcal{T}^{(n)}$, für die $\eta_j \geq \theta \max\{\eta_J \,|\, 1 \leq J \leq N\}$ (bzw. $\mu_j \geq \theta \max\{\mu_J \,|\, 1 \leq J \leq N\}$) gilt.*

(v) *Verfeinere die markierten Elemente rot, erhöhe $n := n+1$ und gehe nach* (i). ■

Bemerkungen. (a) Für $\theta = 0$ führt der gegebene Algorithmus auf uniforme Netzverfeinerung. In den numerischen Beispielen wurde in der Regel $\theta = 1/2$ gewählt.

(b) Bei den numerischen Experimenten wurde aufgrund der Datenstruktur darauf geachtet, daß bei den allen Seiten $E \in \mathcal{E}$ einer Triangulierung $\mathcal{T}^{(k)}$ maximal ein hängender Knoten im Inneren von E lag. In Schritt (iv) des Algorithmus mußten daher gegebenenfalls noch weitere Elemente zur Verfeinerung markiert weden.

(c) Die a priori Abschätzung in Satz 2.31 bzw. Satz 2.44 legt nahe, den Penalisierungsparameter $\varepsilon_j = h_{T_j}$ auf jedem Element T_j zu wählen, wobei $h_{T_j} := \operatorname{diam}(T_j)$ die lokale Netzweite bezeichne.

(d) Die Konvergenzanalyse zu den Stabilisierungstermen in Abschnitt 2.12 empfiehlt, für jedes $E_k \in \mathcal{E}^*$ einen Parameter $0 \leq \beta_k < h_{E_k}^{-1}$ zu wählen mit $h_{E_k} := \operatorname{diam}(E_k)$, damit zumindest für uniforme Netze und $\mathbf{m} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ der Stabilisierungsterm $\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_{\mathcal{T}}, \mathbf{m}_{\mathcal{T}})$ von höherer Ordnung ist. □

***Bemerkung* (Startwert des Newton-Verfahrens).** Grundsätzlich kann das Newton-Verfahren in Schritt (ii) von Algorithmus 3.8 zur Berechnung der diskreten Magnetisierung $\mathbf{m}_h$ stets mit dem Nullvektor als Startvektor gestartet werden. Bei den Experimenten wurden aber in der Regel *nested iterations* verwandt: Es seien $n \geq 1$, $\mathbf{m}_h^{(n-1)}$ die diskrete Lösung zum Netz $\mathcal{T}^{(n-1)}$ und $\mathcal{T}^{(n)}$ das aktuelle Netz, das durch Rot-Verfeinerung einiger Elemente aus $\mathcal{T}^{(n-1)}$ gewonnen worden ist. Dann gilt natürlich auch $\mathbf{m}_h^{(n-1)} \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}^{(n)}; \mathbb{R}^d)$, und das Newton-Verfahren kann mit dem Basisvektor von $\mathbf{m}_h^{(n-1)}$ bezüglich $\mathcal{L}^0(\mathcal{T}^{(n)}; \mathbb{R}^d)$ gestartet werden. □

Damit steht nur noch aus, die beiden Integrale der Gestalt

$$\|(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}) - \mathbf{c}\|_{L^1(T;\mathbb{R}^2)}$$

mit den Konstanten $\mathbf{c} \in \{(0,0), \mathbf{s}_h|_T\} \in \mathbb{R}^2$ zu berechnen. Die Berechnung wird über Quadratur erfolgen. Dazu muß man aber zunächst verifizieren, daß der Integrand stetig und damit die Punktauswertung wohldefiniert ist.

Lemma 3.9. *Für ein beschränktes Lipschitz-Gebiet $T \subseteq \mathbb{R}^d$ ist das Newton-Potential $G * \chi_T \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \backslash \partial T) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$. Für die partiellen Ableitungen erster Ordnung gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(G * \chi_T)(x) = \Big(\frac{\partial G}{\partial x_j} * \chi_T\Big)(x) = -\int_{\partial T} G(x-y) n_j(x)\, ds_y \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.20}$$

Für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d \backslash \partial T$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}(G * \chi_T)(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial G}{\partial x_k} * \chi_T\Big)(x) = -\int_{\partial T} \frac{\partial G}{\partial x_k}(x-y) n_j(y)\, ds_y, \tag{3.21}$$

und insbesondere gilt für $x \notin \overline{T}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}(G * \chi_T)(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial G}{\partial x_k} * \chi_T\Big)(x) = \Big(\frac{\partial^2 G}{\partial x_j \partial x_k} * \chi_T\Big)(x). \tag{3.22}$$

Für alle $1 < p < \infty$ stimmt die schwache Ableitung von $(\partial G/\partial x_k) * \chi_T \in W_1^p(\mathbb{R}^d)$ gemäß Satz 1.27 mit der starken überein, d.h. durch triviale Fortsetzung definiert (3.21) *eine Funktion in $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis. Der Beweis folgt im wesentlichen aus den Sätzen 1.18 und 1.19. Danach gilt zunächst einmal $G * \chi_T \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\partial(G * \chi_T)/\partial x_k = (\partial G/\partial x_k) * \chi_T$. Mit partieller Integration folgt für alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$\Big(\frac{\partial G}{\partial x_k} * \chi_T\Big)(x) = \int_T \frac{\partial G}{\partial x_k}(x-y)\, dy = -\int_T \frac{\partial G}{\partial y_k}(x-y)\, dy = -\int_{\partial T} G(x-y) n_k(y)\, ds_y.$$

Ferner gilt mit $h := \partial G/\partial x_k$ auch $h * \chi_T \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d \backslash \partial T)$ mit

$$\frac{\partial(h * \chi_T)}{\partial x_j}(x) = -\int_{\partial T} h(x-y) n_j(y)\, ds_y \quad \text{für } x \in T.$$

Gleichung (3.22) folgt direkt mit Satz 1.11, und der Nachsatz folgt unmittelbar aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung und der Definition schwacher Differenzierbarkeit. ■

Da $\mathbf{m}_h$ nach Definition des Verfahrens bzw. (3.3) eine endliche Linearkombinationen charakteristischer Funktionen ist, kann $\nabla u_h(x)$ punktweise in allen Punkten außerhalb des Skeletts $\mathcal{S} := \bigcup \mathcal{E}$ von $\mathcal{T}$ berechnet werden.

Korollar 3.10. *Für* $\mathbf{m}_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ *erfüllt das zugehörige magnetische Potential* $u_h = \mathcal{L}\mathbf{m}_h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d\backslash\mathcal{S})$*, und es gilt*

$$\nabla u_h(x) = \frac{1}{|S_2^d|}\sum_{k=1}^{N}\int_{\partial T_k}\frac{\mathbf{m}_h|_{T_k}\cdot(x-y)}{|x-y|^d}\mathbf{n}(y)\,ds_y \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d\backslash\mathcal{S}. \tag{3.23}$$

Für die triviale Fortsetzung von (3.23) *gilt* $\nabla u_h \in L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ *für alle* $1 < p < \infty$.

Beweis. Nach Satz 1.30 ist das exakte Potential u_h zu $\mathbf{m}_h = (m_1,\ldots,m_d)$ durch

$$u_h = \sum_{\ell=1}^{d}\Big(\frac{\partial G}{\partial x_\ell}\Big) * m_\ell$$

gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $d = 2$. Mit der Basisdarstellung (3.3) gelten

$$m_1 = \sum_{k=1}^{N}\chi_{T_k}\mathbf{X}_{2k-1} \quad \text{und} \quad m_2 = \sum_{k=1}^{N}\chi_{T_k}\mathbf{X}_{2k}.$$

Damit ergibt sich

$$u_h = \sum_{k=1}^{N}\Big(\mathbf{X}_{2k-1}\frac{\partial G}{\partial x_1} * \chi_{T_k} + \mathbf{X}_{2k}\frac{\partial G}{\partial x_2} * \chi_{T_k}\Big), \tag{3.24}$$

und Lemma 3.9 garantiert $u_h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d\backslash\mathcal{S}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_h}{\partial x_j}(x) &= -\sum_{k=1}^{N}\Big(\mathbf{X}_{2k-1}\int_{\partial T_k}\frac{\partial G}{\partial x_1}(x-y)n_j(y)\,ds_y + \mathbf{X}_{2k}\int_{\partial T_k}\frac{\partial G}{\partial x_2}(x-y)n_j(y)\,ds_y\Big)\\
&= -\sum_{k=1}^{N}\int_{\partial T_k}\Big(\mathbf{X}_{2k-1}\frac{\partial G}{\partial x_1}(x-y) + \mathbf{X}_{2k}\frac{\partial G}{\partial x_2}(x-y)\Big)\,n_j(y)\,ds_y\\
&= \frac{1}{|S_2^d|}\sum_{k=1}^{N}\int_{\partial T_k}\frac{\mathbf{X}_{2k-1}(x_1-y_1) + \mathbf{X}_{2k}(x_2-y_2)}{|x-y|^2}n_j(y)\,ds_y\\
&= \frac{1}{|S_2^d|}\sum_{k=1}^{N}\int_{\partial T_k}\frac{\mathbf{m}_h|_{T_k}\cdot(x-y)}{|x-y|^2}n_j(y)\,ds_y.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Damit ist Gleichung (3.23) gezeigt, und der Nachsatz folgt unmittelbar aus Lemma 3.9. ■

Bemerkung. Da der Integrand in (3.23) für fixes $x \in \mathbb{R}^d\backslash\mathcal{S}$ beliebig glatt und beschränkt ist, treten bei der numerischen Quadratur zur Berechnung von $\nabla u_h(x)$ keine Instabilitäten auf. Anders verhält sich der Fall natürlich, wenn man das Integral von $|\nabla u_h|$ über ein Element $T \in \mathcal{T}$ berechnen will. In den Experimenten erwies sich die Verbindung von äußerer und innerer Quadratur erwartungsgemäß als instabil. Abhilfe kann aber dadurch geschaffen werden, daß Integrale der Gestalt (3.23) bzw.

$$\int_{\partial T}\frac{z\cdot(x-y)}{|x-y|^d}\,ds_y \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d\backslash\partial T$$

mit einem fixen Vektor $z \in \mathbb{R}^d$ und $T \in \mathcal{T}$ exakt berechnet werden Integrale dieser Art mit einer beschränkten Mannigfaltigkeit Γ anstelle von ∂T treten im Kontext der Randelementmethode bei der exakten Berechnung des Doppelschichtpotentials auf. Ist Γ eine Strecke in $\mathbb{R}^2$ bzw. ein ebene Rechteckfläche in $\mathbb{R}^3$, so kann dieses Randintegral exakt berechnet werden. Analytische Formeln hierfür finden sich im Anhang A für $d = 2$ bzw. Anhang B für $d = 3$. Damit kann $\nabla u_h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \backslash \mathcal{S}$ exakt berechnet werden, sofern die Elemente $T \in \mathcal{T}$ polygonal berandet sind für $d = 2$ bzw. achsenorientierte Quader sind für $d = 3$. □

Lemma 3.11. *Für $\mathbf{m}_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^d)$, $u_h = \mathcal{L}\mathbf{m}_h$ und alle $1 \le j \le N$ gilt*

$$(\nabla u_h)_{\mathcal{T}}|_{T_j} = \begin{cases} \dfrac{1}{|T_j|} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 2j-1) \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 2j) \end{pmatrix} & \text{für } d = 2, \\ \dfrac{1}{|T_j|} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 3j-2) \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 3j-1) \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 3j) \end{pmatrix} & \text{für } d = 3. \end{cases} \tag{3.26}$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{A}(:, n) \in \mathbb{R}^{dN}$ wieder den n-ten Spaltenvektor der oben definierten Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{dN \times dN}_{\text{sym}}$.

Beweis. Für $d = 2$ gilt nach Gleichung (3.10)

$$\begin{aligned} (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}|_{T_j} = \fint_{T_j} \nabla u_h(x)\, dx &= \frac{1}{|T_j|} \big\{ \langle \nabla u_h \,;\, \chi_{T_j} \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \nabla u_h \,;\, \chi_{T_j} \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 \big\} \\ &= \frac{1}{|T_j|} \big\{ a(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j} \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + a(\mathbf{m}_h, \chi_{T_j} \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 \big\} \\ &= \frac{1}{|T_j|} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 2j-1) \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}(:, 2j) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das entsprechende Ergebnis für $d = 3$ folgt analog. ■

***Bemerkung* (Numerische Quadratur für $d = 2$ und rechteckige Elemente).** Für den Fall, daß die Elemente $T \in \mathcal{T}$ Rechtecke (oder allgemeiner Parallelogramme) sind, wird zur Berechnung des Integrals über T eine Quadraturformel auf dem Referenzviereck $T_{\text{ref}} = [-1, 1]^2$ nach T transformiert. Sind in mathematischer Reihenfolge gegen den Uhrzeigersinn $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$ die Eckpunkte des Parallelogramms T, so wird die affine Transformation

$$\tau : T_{\text{ref}} \to T, (s, t) \mapsto \frac{1}{2}\big((1+s)a + (1+t)c - (s+t)b\big) = b + \frac{1}{2}(s+1)(a-b) + \frac{1}{2}(t+1)(c-b)$$

verwendet. Diese entsteht dadurch, daß man zunächst T_{ref} mittels $(s, t) \mapsto (s+1, t+1)/2$ auf das Einheitsquadrat $[0, 1]^2$ transformiert und dann das letztere mittels $(s, t) \mapsto b + s(a-b) + t(c-b)$ auf T. Durch den Transformationssatz wird die Determinante der Jacobi-Matrix von τ involviert. Es gilt

$$\begin{aligned} |\det D\tau| &= \Big| \frac{1}{4} \big((b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1) \big) \Big| \\ &= \frac{1}{4} \Big| \det \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix} \Big| = \frac{|T|}{4}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt gegebenenfalls leicht ebenfalls aus dem Transformationssatz. Insgesamt gilt damit die Gleichheit

$$\int_T f(y)\,dy = \frac{|T|}{4}\int_{T_{\text{ref}}} f\big(\tau(x)\big)\,dx,$$

und das Integral auf der rechten Seite wurde in den numerischen Beispielen mittels einer Tensor-Quadraturformel approximiert. Auf dem Intervall $[-1,1]$ wurde dazu jeweils eine 2-Punkt Gauss-Quadratur verwendet, wie sie sich in der Standardliteratur findet Secrest-Stroud [57, Seiten 300ff.]. Für die Implementierung hat es sich bewährt, daß die n Stützstellen der Quadraturformel als $(n \times 2)$-Matrix und die zugehörigen Gewichte als Zeilenvektor übergeben werden. □

Nr.	Stützstelle	Gewicht
1	(-0.5774 ,-0.5774)	1
2	(-0.5774 , 0.5774)	1
3	(0.5774 ,-0.5774)	1
4	(0.5774 , 0.5774)	1

Tabelle 3.1: (2×2)-*Punkt Gauss-Quadratur auf* $T_{\text{ref}} = [-1,1]^2$.

Bemerkung **(Numerische Quadratur für $d = 3$ und Quaderelemente).** *Analog zum Fall $d = 2$ wurden für $d = 3$ ebenfalls Tensor-Gauss-Quadraturen involviert.* □

Bemerkung **(Numerische Quadratur für $d = 2$ und dreieckige Elemente).** Ist $T \in \mathcal{T}$ ein Dreieck mit Eckpunkten $a, b, c \in \mathbb{R}^2$, so wird eine 3-Punkt Gauss-Quadratur auf dem Referenzdreieck $T_{\text{ref}} = \text{conv}\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ mit der affinen Transformation

$$\tau : T_{\text{ref}} \to T, (s,t) \mapsto b + s(a-b) + t(c-b) = (1-s-t)b + sa + tc.$$

auf T übertragen. Die Determinante der Jacobi-Matrix $D\tau = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 & c_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 & c_2 - b_2 \end{pmatrix}$ errechnet sich als $|\det D\tau| = 2|T|$, und damit gilt

$$\int_T f(y)\,dy = 2|T|\int_{T_{\text{ref}}} f\big(\tau(x)\big)\,dx.$$

Gauß-Quadraturen auf T_{ref} finden sich z.B. in Bathe [9, Seite 308]. □

Nr.	Stützstelle	Gewicht
1	(1/6 , 1/6)	1/3
2	(2/3 , 1/6)	1/3
3	(1/6 , 2/3)	1/3

Tabelle 3.2: 3-*Punkt Gauss-Quadratur auf* $T_{\text{ref}} = \text{conv}\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$.

3.4 Adaptive Netzverfeinerung zur Generierung anisotroper Netze

Für die Finite Elemente Methode gilt als geklärt, daß man die optimale Konvergenzrate des Verfahrens nur für anisotrope Triangulierungen erwarten kann. Im Kontext der Randelementmethode finden sich gleichlautende Heuristiken in Carstensen-Maischak-Stephan [21] und Carstensen-Maischak-Praetorius-Stephan [22]. Algorithmus 3.8 aus Abschnitt 3.3 verfeinert markierte Elemente stets rot. In diesem Abschnitt wird deshalb ein weiterer adaptiver Algorithmus vorgestellt, der rot-verfeinerte Elemente daraufhin prüft, ob eine Grün-Vergröberung sinnvoll erscheint. Zur Idee siehe Abbildung 3.1. Es wird erwartet, daß der zusätzliche Aufwand bei der Netzvergröberung in nachfolgenden adaptiven Schritten wieder wettgemacht wird durch die geringere Anzahl an Elementen, was insbesondere die Berechnung von $\mathbf{A}$ zeitlich entlastet.

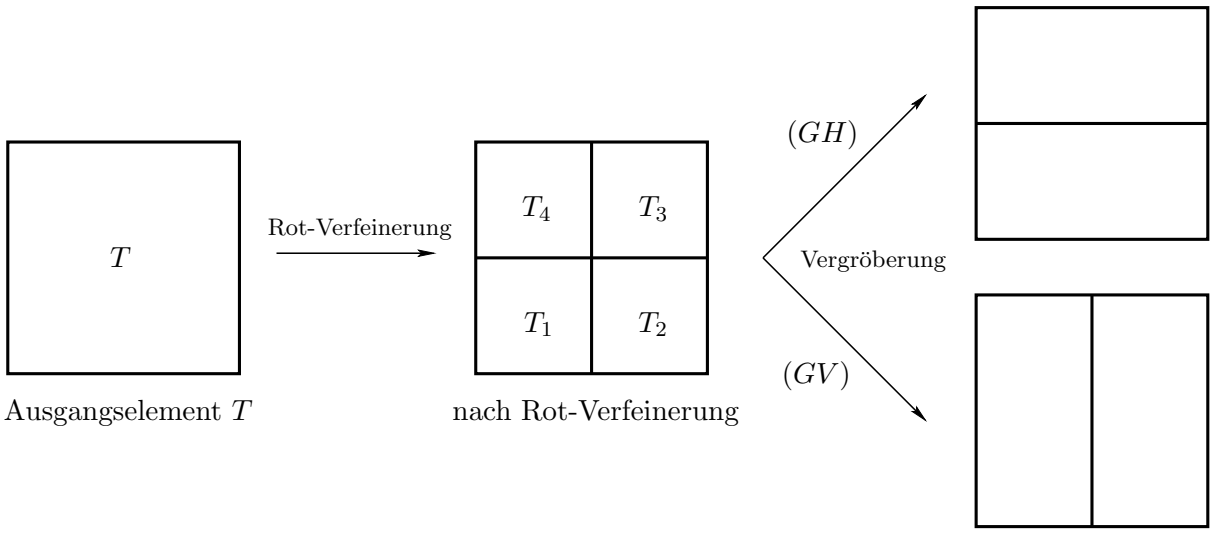


Abbildung 3.1: *Schematisches Vorgehen bei Elementverfeinerung durch Algorithmus 3.17, wobei die Netzvergröberung nur durchgeführt wird, wenn sie eine bessere Konvergenzrate verspricht.*

In diesem Abschnitt wird nur der Fall $d = 2$ betrachtet. Es sei $\mathcal{T}$ eine fastreguläre Triangulierung von Ω in lauter achsenparallele Rechtecke. Ferner sei $\widetilde{\mathcal{T}}$ eine weitere Triangulierung, die durch Rot-Verfeinerung einiger Elemente aus $\mathcal{T}$ entstanden, und $T \in \mathcal{T}$ sei ein solches Element, aus dem die Elemente $T_1, \ldots, T_4 \in \widetilde{\mathcal{T}}$ durch Rot-Verfeinerung hervorgehen. Es bezeichnen P_j die Schwerpunkte der Elemente T_j, vgl. Abbildung 3.2. Auf dem Referenzelement $T_{ref} := [0,1]^2$ seien die vier nodalen Q_1-Basisfunktionen betrachtet,

$$\varphi_1(s,t) = (1-s)(1-t), \quad \varphi_2(s,t) = s(1-t), \quad \varphi_3(s,t) = st, \quad \varphi_4(s,t) = (1-s)t. \tag{3.27}$$

Zunächst wird der folgende Ansatz gemacht: Man approximiere die *unbekannte* Lösung $\mathbf{m}$ auf T durch eine Q_1-Funktion,

$$\widehat{\mathbf{m}} := \sum_{j=1}^{4} \varphi_j^{(T)} \widetilde{\mathbf{m}}_j,$$

wobei die $\widetilde{\mathbf{m}}_j \in \mathbb{R}^2$ als Integralmittel

$$\widetilde{\mathbf{m}}_j = \fint_{T_j} \mathbf{m}\, dx$$

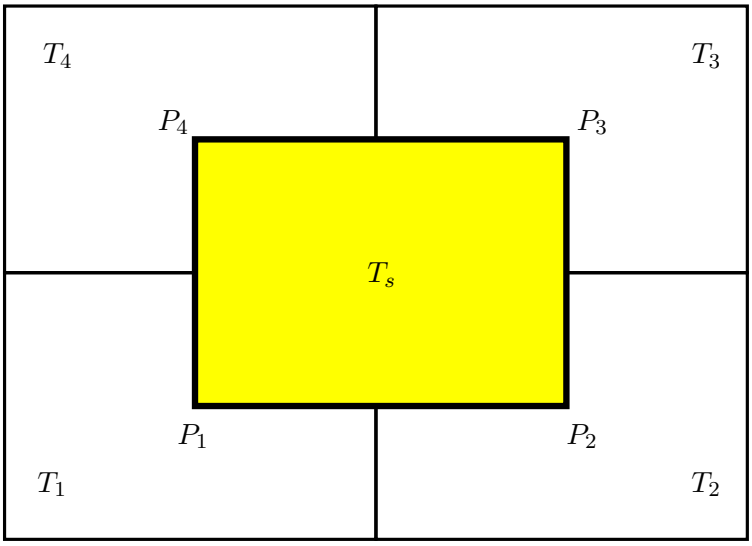


Abbildung 3.2: *Der rot-verfeinerte Block $T \mapsto (T_1, \ldots, T_4)$ mit den Schwerpunkten P_j der neuen Elemente $T_1, \ldots, T_4$ und das dadurch aufgespannte Rechteck $T_s := \operatorname{conv}\{P_1, \ldots, P_4\}$.*

und die Basisfunktionen $\varphi_j^{(T)}$ als Verkettung $\varphi_j^{(T)} = \varphi_j \circ \Phi^{-1}$ mit den nodalen Basisfunktionen φ_j auf T_{ref} und der affinen Transformation

$$\Phi(s,t) := P_1 + s(P_2 - P_1) + t(P_4 - P_1)$$

gegeben seien. Gilt für die *unbekannte* Lösung $\mathbf{m} \in H^2(T;\mathbb{R}^d)$, so folgt

$$\|\mathbf{m} - \widehat{\mathbf{m}}\|_{L^2(T;\mathbb{R}^d)} \lesssim h_T^2 \|D^2\mathbf{m}\|_{L^2(T;\mathbb{R}^d)},$$

d.h. der Fehler ist von höherer Ordnung. Mit Dreiecksungleichung ist dann nur noch der Fehler $\|\widetilde{\mathbf{m}} - \widehat{\mathbf{m}}\|_{L^2(T;\mathbb{R}^2)}$ für verschiedene $(T_1, \ldots T_4)$-stückweise konstante Approximationen $\widetilde{\mathbf{m}}$ von $\widehat{\mathbf{m}}$ zu untersuchen. Betrachte die $(T_1, \ldots, T_4)$-konstanten Funktionen $\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_{GH}, \mathbf{m}_{GV}, \mathbf{m}_R : T \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{m}}_0 &:= \frac{1}{4}\chi_T \sum_{j=1}^{4} \widetilde{\mathbf{m}}_j, \\
\widetilde{\mathbf{m}}_{GH} &:= \chi_{T_{12}} \frac{\widetilde{\mathbf{m}}_1 + \widetilde{\mathbf{m}}_2}{2} + \chi_{T_{34}} \frac{\widetilde{\mathbf{m}}_3 + \widetilde{\mathbf{m}}_4}{2} \quad \text{mit } T_{12} := T_1 \cup T_2, T_{34} := T_3 \cup T_4, \\
\widetilde{\mathbf{m}}_{GV} &:= \chi_{T_{14}} \frac{\widetilde{\mathbf{m}}_1 + \widetilde{\mathbf{m}}_4}{2} + \chi_{T_{23}} \frac{\widetilde{\mathbf{m}}_2 + \widetilde{\mathbf{m}}_3}{2} \quad \text{mit } T_{14} := T_1 \cup T_4, T_{23} := T_2 \cup T_3, \\
\widetilde{\mathbf{m}}_R &:= \sum_{j=1}^{4} \chi_{T_j} \widetilde{\mathbf{m}}_j.
\end{aligned}$$

Mit diesen gilt das folgende Lemma, dessen elementare Verifikation nur der Vollständigkeit halber gegeben wird. Lemma 3.12 dient lediglich dazu die im anschließenden Korollar eingeführten Vergröberungsindikatoren miteinander in Relation setzen zu können.

Lemma 3.12. $\mathbf{m}_0$, $\mathbf{m}_{GH}$, $\mathbf{m}_{GV}$ *und* $\mathbf{m}_R$ *sind die L^2-Bestapproximationen von* $\widehat{\mathbf{m}}$ *auf* $\mathcal{L}^0(\{T\};\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{L}^0(\{T_{12}, T_{34}\};\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{L}^0(\{T_{14}, T_{23}\};\mathbb{R}^2)$ *bzw.* $\mathcal{L}^0(\{T_1, \ldots, T_4\};\mathbb{R}^2)$.

Beweis. Nach Definition der Transformation Φ gilt zunächst einmal

$$\begin{array}{rclrcl} \Phi^{-1}(T_s) & = & T_{ref} = [0,1]^2, & \Phi^{-1}(T) & = & [-1/2,3/2]^2, \\ \Phi^{-1}(T_1) & = & [-1/2,1/2]^2, & \Phi^{-1}(T_2) & = & [1/2,3/2]\times[-1/2,1/2], \\ \Phi^{-1}(T_3) & = & [1/2,3/2]^2, & \Phi^{-1}(T_4) & = & [-1/2,1/2]\times[1/2,3/2]. \end{array} \tag{3.28}$$

Mit dem Transformationssatz gilt beispielsweise wegen $|\det\Phi| = |T_s| = |T|/4$

$$\int_{T_1}\phi_1^{(T)}\,dx = \frac{|T|}{4}\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}(1-s)(1-t)\,ds\,dt = \frac{|T|}{4}\Big(\underbrace{\int_{-1/2}^{1/2}(1-s)\,ds}_{=1}\Big)^2 = \frac{|T|}{4},$$

$$\int_{T_2}\phi_1^{(T)}\,dx = \frac{|T|}{4}\int_{1/2}^{3/2}\int_{-1/2}^{1/2}(1-s)(1-d)\,ds\,dt = \frac{|T|}{4}\Big(\underbrace{\int_{1/2}^{3/2}(1-s)\,dx}_{=0}\Big)\Big(\int_{-1/2}^{1/2}(1-t)\,dt\Big)$$

Analoge Rechnung verifiziert

$$\int_{T_k}\phi_j^{(T)}\,dx = \frac{|T|}{4}\,\delta_{jk} \quad \text{für alle } 1\le j,k\le 4. \tag{3.29}$$

Wie in Kapitel 2 angemerkt, wird für jede Partition Π von T die L^2-Orthogonalprojektion $P_\Pi : L^2(T;\mathbb{R}^2)\to\mathcal{L}^0(\Pi;\mathbb{R}^2)$ durch $P(\mathbf{g}) := \mathbf{g}_\Pi$ mit $\mathbf{g}_\Pi|_\tau := \fint_\tau \mathbf{g}\,dx$ für alle Elemente $\tau\in\Pi$ definiert. Die Bestapproximation $P_\Pi\mathbf{g}$ von $\mathbf{g}$ auf $\mathcal{L}^0(\Pi;\mathbb{R}^2)$ wird damit explizit gegeben durch

$$P_\Pi\mathbf{g} = \sum_{\tau\in\Pi}\chi_\tau\fint_\tau \mathbf{g}\,dx.$$

Also ist $\widetilde{\mathbf{m}}_0$ die L^2-Bestapproximation von $\widehat{\mathbf{m}}$ auf $\mathcal{L}^0(\{T\};\mathbb{R}^2)$, denn mit $\Pi=\{T\}$ gilt

$$\begin{aligned} P_\Pi\widehat{\mathbf{m}} &= \sum_{j=1}^4 P_\Pi\Big(\varphi_{(j)}^{(T)}\widetilde{\mathbf{m}}_j\Big) = \sum_{j=1}^4\Big(\fint_T\varphi_{(j)}^{(T)}\,dx\Big)\chi_T\widetilde{\mathbf{m}}_j = \frac{1}{|T|}\sum_{j=1}^4\Big(\sum_{k=1}^4\underbrace{\int_{T_k}\varphi_{(j)}^{(T)}\,dx}_{=\delta_{jk}|T|/4}\Big)\chi_T\widetilde{\mathbf{m}}_j \\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^4\chi_T\widetilde{\mathbf{m}}_j = \widetilde{\mathbf{m}}_0. \end{aligned}$$

Analoges Vorgehen verifiziert die übrigen Aussagen. Beispielsweise gilt für $\Pi=\{T_{12},T_{34}\}$

$$\begin{aligned} P_\Pi\widehat{\mathbf{m}} &= \sum_{j=1}^4\Big(\chi_{T_{12}}\fint_{T_{12}}\phi_j^{(T)}\,dx + \chi_{T_{34}}\fint_{T_{34}}\phi_j^{(T)}\,dx\Big)\widetilde{\mathbf{m}}_j \\ &= \frac{2}{|T|}\Big\{\sum_{j=1}^4\Big[\chi_{T_{12}}\Big(\int_{T_1}\phi_j^{(T)}\,dx+\int_{T_2}\phi_j^{(T)}\,dx\Big)\widetilde{\mathbf{m}}_j + \chi_{T_{34}}\Big(\int_{T_3}\phi_j^{(T)}\,dx+\int_{T_4}\phi_j^{(T)}\,dx\Big)\widetilde{\mathbf{m}}_j\Big]\Big\} \\ &= \frac{2}{|T|}\Big\{\chi_{T_{12}}\frac{|T|}{4}\big(\widetilde{\mathbf{m}}_1+\widetilde{\mathbf{m}}_2\big) + \chi_{T_{34}}\frac{|T|}{4}\big(\widetilde{\mathbf{m}}_3+\widetilde{\mathbf{m}}_4\big)\Big\} \\ &= \chi_{T_{12}}\frac{\widetilde{\mathbf{m}}_1+\widetilde{\mathbf{m}}_2}{2} + \chi_{T_{34}}\frac{\widetilde{\mathbf{m}}_3+\widetilde{\mathbf{m}}_4}{2} = \widetilde{\mathbf{m}}_{GH}. \end{aligned}$$

■

Die Bestapproximationseigenschaften erlauben nun Definition und Vergleich der folgenden Indikatoren.

Korollar 3.13. *Für die Indikatoren*

$$\begin{aligned}
\alpha_0^{(T)} &:= \|\widetilde{\mathbf{m}}_0 - \widehat{\mathbf{m}}\|_{L^2(T;\mathbb{R}^2)},\\
\alpha_{GH}^{(T)} &:= \|\widetilde{\mathbf{m}}_{GH} - \widehat{\mathbf{m}}\|_{L^2(T;\mathbb{R}^2)},\\
\alpha_{GV}^{(T)} &:= \|\widetilde{\mathbf{m}}_{GV} - \widehat{\mathbf{m}}\|_{L^2(T;\mathbb{R}^2)},\\
\alpha_{R}^{(T)} &:= \|\widetilde{\mathbf{m}}_{R} - \widehat{\mathbf{m}}\|_{L^2(T;\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

gilt die Abschätzung $\alpha_R^{(T)} \le \alpha_G^{(T)} \le \alpha_0^{(T)}$. *Dabei steht* $\alpha_G^{(T)}$ *stellvertretend für einen der beiden Indikatoren* $\alpha_{GH}^{(T)}$ *und* $\alpha_{GV}^{(T)}$. ■

Das angekündigte Entscheidungskriterium, ob das rot-verfeinerte Element $T = T_1 \cup \cdots \cup T_4$ nachträglich grün zu vergröbern ist, basiert auf den beiden folgenden heuristischen Annahmen.

(H1) Die CPU-Zeit für die Berechnung einer diskreten Lösung zu einem gegebenem Netz hängt über die Formel $c_{18}N^{\rho} + c_{19}$ von der Anzahl der Elemente N in diesem ab. Dabei ist ρ ein Parameter $\rho \ge 1$.

Der Aufwand des Algorithmus zur Berechnung der Lösung zum Netz $\mathcal{T}$ ist dementsprechend proportional zu $t_0 := c_{18}N^{\rho} + c_{19}$. Wird das Element $T \in \mathcal{T}$ rot-verfeinert, so beträgt der Aufwand des Algorithmus im nächsten adaptiven Schritt (mindestens) $t_R := c_{18}(N+3)^{\rho} + c_{19}$, wird es grün-verfeinert, so beträgt der Aufwand (mindestens) $t_G := c_{18}(N+1)^{\rho} + c_{19}$. Offensichtlich gilt $t_0 \le t_G \le t_R$.

(H2) Das Element T ist grün zu vergröbern, falls gilt

$$\alpha_G^{(T)} \le \alpha_0^{(T)} + \kappa_N(\alpha_R^{(T)} - \alpha_0^{(T)}) \quad \text{mit} \quad \kappa_N := \frac{(N+1)^{\rho} - N^{\rho}}{(N+3)^{\rho} - N^{\rho}}, \tag{3.31}$$

da in diesem Fall die Konvergenzrate verbessert wird, siehe Abbildung 3.3.

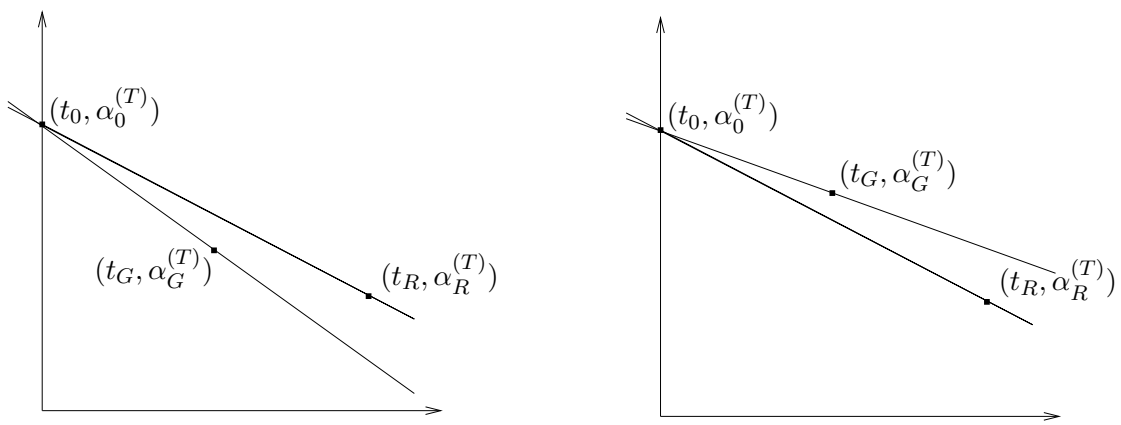


Abbildung 3.3: *Entscheidungskriterium (H2), ob eine Grün-Vergröberung vorzunehmen ist (links) oder nicht (rechts).*

Lemma 3.14. *Die Bedingung* (3.31) *ist äquivalent dazu, daß der Punkt* $(t_G, \alpha_G^{(T)})$ unterhalb *der Verbindungsstrecke von* $(t_0, \alpha_0^{(T)})$ *und* $(t_R, \alpha_R^{(T)})$ *liegt, siehe Abbildung 3.3.*

Beweis. Der Punkt $(t_G, \alpha_G^{(T)})$ liegt genau dann unterhalb der Verbindungsstrecke von $(t_0, \alpha_0^{(T)})$ und $(t_R, \alpha_R^{(T)})$, wenn für die (ohnehin negativen) Steigungen der beiden Geraden gilt

$$\frac{\alpha_G^{(T)} - \alpha_0^{(T)}}{t_G - t_0} \leq \frac{\alpha_R^{(T)} - \alpha_0^{(T)}}{t_R - t_0} \leq 0.$$

Elementare Äquivalenzumformungen mit $\kappa_N = \dfrac{(N+1)^\rho - N^\rho}{(N+3)^\rho - N^\rho} = \dfrac{t_G - t_0}{t_R - t_0}$ zeigen

$$\frac{\alpha_G^{(T)} - \alpha_0^{(T)}}{t_G - t_0} \leq \frac{\alpha_R^{(T)} - \alpha_0^{(T)}}{t_R - t_0} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_G^{(T)} \leq \alpha_0^{(T)} + \kappa_N(\alpha_R^{(T)} - \alpha_0^{(T)}). \qquad \blacksquare$$

Schließlich ist noch das asymptotische Verhalten von κ_N zu untersuchen. Für $\rho = 1$ gilt offensichtlich $\kappa_N = 1/3$ unabhängig von N. Wie das folgende Lemma zeigt, gilt dies asymptotisch auch für $\rho > 1$.

Lemma 3.15. *Es gilt* $\dfrac{1}{3}\Big(1 - \dfrac{3}{N+3}\Big)^{\rho-1} \leq \kappa_N \leq \dfrac{1}{3}\Big(1 + \dfrac{1}{N}\Big)^{\rho-1}$, *also asymptotisch* $\kappa_N \approx 1/3$.

Beweis. Für $\rho > 1$ betrachte die Funktion $f(s) := s^\rho$,

$$\kappa_N = \frac{\frac{f(N+1)-f(N)}{3}}{\frac{f(N+3)-f(N)}{3}} = \frac{1}{3}\,\frac{\frac{f(N+1)-f(N)}{(N+1)-N}}{\frac{f(N+3)-f(N)}{(N+3)-N}}.$$

Nach Mittelwertsatz existieren $\zeta, \xi \in \mathbb{R}$ mit $N \leq \xi \leq N+1$, $N \leq \zeta \leq N+3$ und

$$\kappa_N = \frac{1}{3}\,\frac{f'(\xi)}{f'(\zeta)} = \frac{1}{3}\Big(\frac{\xi}{\zeta}\Big)^{\rho-1}.$$

Einsetzen der Abschätzungen für ζ und ξ liefert dann

$$\frac{1}{3}\Big(1 - \frac{3}{N+3}\Big)^{\rho-1} = \frac{1}{3}\Big(\frac{N}{N+3}\Big)^{\rho-1} \leq \kappa_N \leq \frac{1}{3}\Big(\frac{N+1}{N}\Big)^{\rho-1} = \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{1}{N}\Big)^{\rho-1}. \qquad \blacksquare$$

Korollar 3.16. *Unter der Gültigkeit von (H1) und (H2) ist das Element* $T = T_1 \cup \cdots \cup T_4$ *insgesamt wieder zu vergröbern, falls für einen Parameter* $0 < \kappa \leq 1$ *das Kriterium*

$$\min\{\alpha_{GH}, \alpha_{GV}\} \leq \alpha_0 + \kappa(\alpha_R - \alpha_0) \tag{3.32}$$

erfüllt ist. Lemma 3.15 empfiehlt – zumindest bei großer Elementanzahl – den Wert $\kappa = 1/3$ *zu wählen. Je kleiner der Wert von* $\kappa > 0$ *ist, desto mehr rot-verfeinerte Elemente werden grün vergröbert. Für* $\kappa = 1$ *tritt de facto keine Grün-Vergröberung mehr auf.* $\blacksquare$

Bemerkung. Es bezeichne $\widetilde{\mathbf{m}}_h \in \mathcal{L}^0(\widetilde{\mathcal{T}}; \mathbb{R}^d)$ die diskrete Lösung zum Netz $\widetilde{\mathcal{T}}$, das durch Rot-Verfeinerungen aus $\mathcal{T}$ hervorgegangen ist. Im allgemeinen sind keine garantierten Zusammenhänge von den bekannten Werten $\widetilde{\mathbf{m}}_h|_{T_j}$ und den *unbekannten* Integralmitteln $\widetilde{\mathbf{m}}_j = \fint_{T_j} \mathbf{m}\,dx$ zu erwarten. Unter der Voraussetzung aber, daß $\widetilde{\mathbf{m}}_j$ und $\widetilde{\mathbf{m}}_h|_{T_j}$ hinreichend gute Approximationen von einander sind, kann das Kriterium (3.32) explizit bewertet werden – wobei man $\widetilde{\mathbf{m}}_h|_{T_j}$ zur Berechnung der Indikatoren $\alpha_0^{(T)}, \alpha_{GH}^{(T)}, \alpha_{GV}^{(T)}, \alpha_R^{(T)}$ heranzieht. $\square$

Bemerkung. Da die exakte Lösung $\mathbf{m}$ sicherlich nicht immer in $H^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$ liegt und $\widetilde{\mathbf{m}}_h|_{T_j}$ lediglich eine Approximation von $\fint_{T_j} \mathbf{m}\,dx$ ist, ist der Parameter κ experimentell zu bestimmen. Bei den numerischen Experimenten zeigt sich, daß im Kriterium (3.32) der Parameter $\kappa = 1/3$ bei weitem nicht optimal ist. Er führte sogar zur Verschlechterung der Konvergenzrate. Bei uniformer Netzverfeinerung und $\kappa = 3/4$ konnte hingegen eine leichte Verbesserung der Konvergenzrate beobachtet werden. □

Algorithmus 3.17 (Adaptive anisotrope Netzverfeinerung für $d = 2$). *Gegeben seien ein Anfangsnetz $\mathcal{T}^{(n)}$, $n = 0$ und ein Verfeinerungsparameter $\theta \in [0,1]$.*

(i) *Wähle Penalisierungs- und Stabilisierungsparameter und berechne die diskrete Lösung $\mathbf{m}_h$ zum Netz $\mathcal{T}^{(n)}$.*

(ii) *Berechne die Verfeinerungsindikatoren $\eta_j := \eta_{T_j,\varepsilon_j}$.*

(iii) *Markiere alle Elemente $T_j \in \mathcal{T}^{(n)}$, für die $\eta_j \geq \theta \max\{\eta_J \,|\, 1 \leq J \leq N\}$ gilt.*

(iv) *Verfeinere die markierten Elemente rot und erhalte ein neues Netz $\widetilde{\mathcal{T}}^{(n)}$.*

(v) *Wähle Penalisierungs- und Stabilisierungsparameter und berechne die diskrete Lösung $\widetilde{\mathbf{m}}_h$ zum Netz $\widetilde{\mathcal{T}}^{(n)}$.*

(vi) *Wähle einen Vergröberungsparameter $\kappa > 0$ und berechne für jedes verfeinerte Element $T \in \mathcal{T}^{(n)}$ die Indikatoren $\alpha_0^{(T)}, \alpha_{GH}^{(T)}, \alpha_{GV}^{(T)}, \alpha_R^{(T)}$.*

(vii) *Markiere die Blöcke $(T_1,\ldots,T_4)$ zu verfeinerten Elementen $T \in \mathcal{T}^{(n)}$ für eine Grün-Vergröberung, falls (3.32) gilt.*

(viii) *Vergröbere die markierten Blöcke gemäß Abbildung 3.1 und erhalte dadurch $\mathcal{T}^{(n+1)}$, erhöhe $n := n+1$ und gehe nach (i).* ■

Abschließend ist noch die Berechnung der Indikatoren $\alpha_0^{(T)}, \alpha_{GH}^{(T)}, \alpha_{GV}^{(T)}, \alpha_R^{(T)}$ zu erläutern. Man betrachte zunächst $\widehat{\mathbf{m}} := \sum_{k=1}^4 \varphi_k^{(T)} \mathbf{b}_k$ mit $\mathbf{b}_k = (b_k^{(1)}, b_k^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt mit den symmetrischen Massematrizen $M^{(j)} \in \mathbb{R}^{4\times 4}_{\mathrm{sym}}$, definiert vermöge

$$M_{k\ell}^{(j)} := \int_{\Phi^{-1}(T_j)} \varphi_k \varphi_\ell \, dx,$$

und mit Transformationssatz

$$\begin{aligned}
\big\|\textstyle\sum_{k=1}^4 \varphi_k^{(T)} \mathbf{b}_k\big\|^2_{L^2(T_j;\mathbb{R}^2)} &= \sum_{k,\ell=1}^4 (\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_\ell) \int_{T_j} \phi_k^{(T)} \phi_\ell^{(T)} \, dx = \frac{|T|}{4} \sum_{k,\ell=1}^4 (\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_\ell) \int_{\Phi^{-1}(T_j)} \varphi_k \varphi_\ell \, dx \\
&= \frac{|T|}{4} \Big\{ \sum_{k,\ell=1}^4 b_k^{(1)} M_{k\ell}^{(j)} b_\ell^{(1)} + \sum_{k,\ell=1}^4 b_k^{(2)} M_{k\ell}^{(j)} b_\ell^{(2)} \Big\} \\
&= \frac{|T|}{4} \big\{ b^{(1)} \cdot M^{(j)} b^{(1)} + b^{(2)} \cdot M^{(j)} b^{(2)} \big\}. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Mit Blick auf die nodalen Basisfunktionen (3.27) und die Eigenschaften (3.28) der Transformation Φ involviert die Berechnung der Massematrizen lediglich sechs elementaren Integrale.

Lemma 3.18. *Eine elementare Rechnung zeigt*

$$M^{(1)} = \frac{1}{144}\begin{pmatrix} 169 & -13 & 1 & -13 \\ -13 & 13 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -13 & 1 & -1 & 13 \end{pmatrix}, \qquad M^{(2)} = \frac{1}{144}\begin{pmatrix} 13 & -13 & 1 & -1 \\ -13 & 169 & -13 & 1 \\ 1 & -13 & 13 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M^{(3)} = \frac{1}{144}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 13 & -13 & 1 \\ 1 & -13 & 169 & -13 \\ -1 & 1 & -13 & 13 \end{pmatrix}, \qquad M^{(4)} = \frac{1}{144}\begin{pmatrix} 13 & -1 & 1 & -13 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 13 & -13 \\ -13 & 1 & -13 & 169 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Um schließlich die Indikatoren $\alpha_0^{(T)}, \alpha_{GH}^{(T)}, \alpha_{GV}^{(T)}, \alpha_R^{(T)}$ auszurechnen, beachte man, daß die nodalen Basisfunktionen φ_j eine Zerlegung der $\mathbb{1}$ auf $\mathbb{R}^2$ definieren, d.h. $\sum_{k=1}^4 \varphi_k \equiv 1$, und insbesondere gilt daher auch $\sum_{k=1}^4 \varphi_k^{(T)} \equiv 1$. Ist nun

$$\widetilde{\mathbf{m}} = \sum_{j=1}^4 \chi_{T_j} \mathbf{c}_j$$

eine $(T_1, \ldots, T_4)$-stückweise konstante Funktion mit $\mathbf{c}_j \in \mathbb{R}^2$, so kann $\|\widetilde{\mathbf{m}} - \widehat{\mathbf{m}}\|_{L^2(T_j;\mathbb{R}^2)}$ mittels (3.33) exakt berechnet werden – und damit auch die L^2-Norm über T – denn auf T_j gilt punktweise

$$\widetilde{\mathbf{m}} - \widehat{\mathbf{m}} = \mathbf{c}_j - \sum_{k=1}^4 \varphi_k^{(T)} \mathbf{m}_k = \sum_{k=1}^4 \varphi_k^{(T)} \underbrace{(\mathbf{c}_j - \mathbf{m}_k)}_{=:\mathbf{b}_k}.$$

Bemerkung. Bei der Realisierung des Kriteriums (3.32) werden sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite die Faktoren $|T|/4$ und $\frac{1}{144}$ involviert. Durch Kürzen können diese also bei der numerischen Implementierung entfallen. $\square$

3.5 Implementierung eines auf Glättungseigenschaften basierten Fehlerschätzers

Verfeinerungsindikatoren, die auf Glättungseigenschaften basieren, sind für den Mikromagnetismus bisher noch nicht mathematisch fundiert. Sie haben sich jedoch bei vielfältigen anderen Problemen als äußerst robust erwiesen, vgl. Alberty-Carstensen [2], Bartels-Carstensen [6, 7, 8], Carstensen-Funken [18, 19, 20], Verfürth [60], Zienkiewicz-Zhu [63]. Dieser Abschnitt zeigt die Implementierung eines auf Glättungseigenschaften basierten Fehlerschätzer für $d = 2$. Es sei $\mathcal{T}$ eine fastreguläre Triangulierung der Ordnung 1, deren Elemente achsenorientierte Rechtecke seien. Es wird ein Glättungsoperator $\mathcal{A} : \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}^1(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)$ eingeführt, der jeder $\mathcal{T}$-stückweise konstanten Magnetisierung $\mathbf{m}_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)$ eine global stetige, $\mathcal{T}$-stückweise Q_1-Funktion $\mathcal{A}\mathbf{m}_h \in \mathcal{L}^1(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)$ zuordnet. Dann definiert

$$\zeta := \|\mathbf{m}_h - \mathcal{A}\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$$

einen Fehlerschätzer, der sich in der Literatur zu anderen Problemen als zuverlässig und effizient erwiesen hat. Bei den numerischen Beispielen im nachfolgenden Kapitel bewährte sich ein solcher

Schätzer auch im Bereich des Mikromagnetismus, und empirisch werden Zuverlässigkeit und Effizienz von ζ nachgewiesen.

Es bezeichne $T_{ref} := [0,1]^2$ wieder das Referenzelement mit den Knoten $x_1 = (0,0)$, $x_2 = (1,0)$, $x_3 = (1,1)$ und $x_4 = (0,1)$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ seien die nodalen Q_1-Basisfunktionen gemäß (3.27), und $\Phi : T_{ref} \to T$ sei eine affine Transformation. Für freie Knoten $z \in \mathcal{K}$ werden zunächst Gewichte $\xi_z \in \mathbb{R}^2$ wie folgt berechnet. Es bezeichne

$$\omega_z := \bigcup \left\{ T \in \mathcal{T} \,\middle|\, z \text{ ist Knoten von } T \right\}$$

den *patch* von z, und

$$\xi_z := \fint_{\omega_z} \mathbf{m}_h \, dx$$

sei das Integralmittel von $\mathbf{m}_h$ über ω_z. Zu einem *hängenden Knoten* $z \in \mathcal{K}$ seien $x, y \in \mathcal{K}$ die Knoten der Kante, in deren Inneren z liegt. Dann existiert ein Skalar $t \in (0,1)$ mit $z = (1-t)x + ty$, und man definiert

$$\xi_z := (1-t)\xi_x + t\xi_y \in \mathbb{R}^2, \tag{3.34}$$

sofern ξ_x und ξ_y schon bekannt sind. Läßt sich für jeden Knoten $z \in \mathcal{K}$ gegebenenfalls rekursiv das Gewicht ξ_z bestimmen, so führt diese Definition zu einer eindeutigen, global stetigen, $\mathcal{T}$-stückweisen Q_1-Funktion $\widetilde{\mathbf{m}}_h := \mathcal{A}\mathbf{m}_h \in \mathcal{L}^1(\mathcal{T}; \mathbb{R}^2)$, die in allen Knoten $z \in \mathcal{K}$ den Funktionswert $\widetilde{\mathbf{m}}_h(z) = \xi_z$ besitzt. Diese Funktion wird elementweise durch

$$\widetilde{\mathbf{m}}_h|_T = \sum_{\substack{z \in \mathcal{K} \\ \text{Knoten von } T}} \varphi_z^{(T)} \xi_z$$

gegeben mit $\varphi_z^{(T)} := \varphi_j \circ \Phi^{-1}$ und $\Phi(x_j) = z$.

Bemerkung. Die Bedingung $\xi_z = (1-t)\xi_x + t\xi_y$ für die hängenden Knoten ist zwingend, da jede global stetige $\mathcal{T}$-stückweise Q_1-Funktion auf den Kanten der Triangulierung affin ist. □

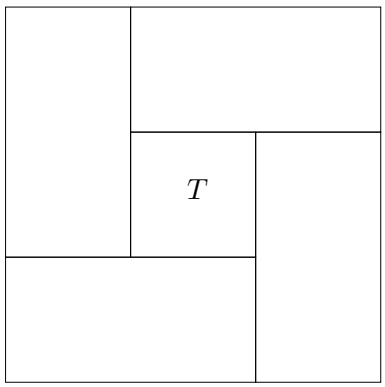


Abbildung 3.4: *Eine fastreguläre Triangulierung der Ordnung 1, für die die Gewichte* ξ_z nicht *vollständig bestimmt werden können.*

Beispiel. Die Definition der ξ_z für hängende Knoten $z \in \mathcal{K}$ muß rekursiv erfolgen, da die Endknoten x, y der großen hängenden Kante, auf der z liegt, ihrerseits wieder hängend sein können. Offensichtlich bricht dieses rekursive Verfahren aber *nicht* für jede fastreguläre Triangulierung ab. Bei der Triangulierung in Abbildung 3.4 sind zum Beispiel alle Knoten des Elements T hängend, und dies führt dazu, daß die Rekursion zur Berechnung der zugehörigen ξ_z *nicht* abbricht. Der nachfolgende Algorithmus bestimmt die Werte ξ_z und bricht gegebenenfalls mit Fehlermeldung ab, wenn nicht alle ξ_z bestimmt werden können. Bei den numerischen Experimenten trat aber kein Abbruch auf. □

Algorithmus 3.19 (Berechnung der Gewichte $\boldsymbol{\xi_z}$). *Es sei $\Lambda := \mathcal{K}$ die Liste aller Knoten $z \in \mathcal{K}$, für die ξ_z noch zu bestimmen ist.*

(i) *Berechne ξ_z für alle reguläre Knoten $z \in \mathcal{K}$ und entferne diese aus Λ.*

(ii) *Es sei $\ell := |\Lambda|$ die Länge der Liste Λ.*

(iii) *Für alle $z \in \Lambda$, für deren Nachbarpunkte $x, y \in \mathcal{K}$ die Gewichte ξ_x, ξ_y schon bestimmt sind, berechne ξ_z gemäß (3.34) und entferne z aus Λ.*

(iv) *Falls Λ die leere Liste ist, sind alle ξ_z berechnet worden: Erfolgreiches Programmende.*

(v) *Ist $\ell > |\Lambda|$ gehe nach (ii), anderenfalls brich das Programm mit einer Fehlermeldung ab.* ■

Für die Berechnung der zu ζ gehörigen Verfeinerungsindikatoren

$$\zeta_T := \|\widetilde{\mathbf{m}}_h - \mathbf{m}_h\|_{L^2(T;\mathbb{R}^2)} \quad \text{für } T \in \mathcal{T}$$

gilt analog zum vorausgegangenen Abschnitt

$$\zeta_T^2 = |T| \left\|\sum_{j=1}^4 \varphi_j(\xi_j - \mathbf{m}_h)\right\|^2_{L^2(T_{ref};\mathbb{R}^2)} = |T| \left\{b^{(1)} \cdot Mb^{(1)} + b^{(2)} \cdot Mb^{(2)}\right\},$$

wobei die Vektoren $b^{(1)}, b^{(2)} \in \mathbb{R}^4$ durch $(b_j^{(1)}, b_j^{(2)}) = \xi_j - \mathbf{m}_h|_T$ und die Massematrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}_{\text{sym}}$ durch $M_{jk} := \int_{T_{ref}} \varphi_j \varphi_k \, dx$ gegeben seien. Ausgenutzt wurde hierbei wieder die Eigenschaft $\sum_{j=1}^4 \varphi_j \equiv 1$ und die Rechnung in Gleichung (3.33). Zusammen mit dem folgenden Lemma können die Verfeinerungsindikatoren ζ_T dann exakt berechnet werden.

Lemma 3.20. *Eine direkte Rechnung zeigt für die Massematrix* $M = \dfrac{1}{36}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. ■

Bemerkung. Die Verfeinerungsindikatoren ζ_T sind aus numerischer Sicht auch daher so interessant, daß sie mit einem Aufwand von $O(1)$ berechnet werden können. Insbesondere erfordert die Berechnung des zugehörigen Fehlerschätzers $\zeta = \left(\sum_{j=1}^N \zeta_{T_j}^2\right)^{1/2}$ nur einen Aufwand von $O(N)$, wobei $N \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Elemente in $\mathcal{T}$ bezeichne. □

3.6 Effizientere Berechnung von A und η mittels *panel clustering*

3.6.1 Idee des *panel clustering* am Beispiel der Berechnung der Matrix A

Für $1 \leq \alpha, \beta \leq d$ und $1 \leq j, k \leq N$ definiere man

$$B^{\alpha\beta}_{jk} := a(\chi_{T_j}\mathbf{e}_\alpha, \chi_{T_k}\mathbf{e}_\beta),$$

wobei wieder $T_j, T_k \in \mathcal{T} := \{T_1, \ldots, T_N\}$ vorausgesetzt sei. Dann gilt mit der oben eingeführten Notation und $B_{jk} = (B^{\alpha\beta}_{jk})^d_{\alpha,\beta=1} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{\text{sym}}$

$$A(2j-1:2j, 2k-1:2k) = B_{jk} \quad \text{bzw.} \quad A(3j-2:3j, 3k-2:3k) = B_{jk}$$

für $d = 2, 3$. Gilt ferner $\overline{T_j} \cap \overline{T_k} = \emptyset$, so berechnet sich der Eintrag $B^{\alpha\beta}_{jk}$ nach Lemma 2.7 als

$$B^{\alpha\beta}_{jk} := \int_{T_j}\int_{T_k} \frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x-y)\,dy\,dx.$$

Die Idee beim *panel clustering* ist es, für gewisse (nicht-leere) *cluster* $\sigma, \tau \subseteq \mathcal{T}$ mit

$$\operatorname{dist}(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) > 0 \quad \text{für } \hat{\sigma} := \bigcup\sigma \text{ und } \hat{\tau} := \bigcup\tau \tag{3.35}$$

die Matrizen $B_{jk} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{\text{sym}}$ durch Approximationen $\widetilde{B}_{jk} \in \mathbb{R}^{d\times d}_{\text{sym}}$ zu ersetzen und diese für alle $j \in \sigma$ und $k \in \tau$ simultan aufzubauen. Dies erfolgt durch Approximation des Integranden

$$g(x,y) := \frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x-y) \quad \text{für } x \in \hat{\sigma}, y \in \hat{\tau}$$

durch eine strukturell einfachere Funktion, z.B.

$$\tilde{g}(x,y) := \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} g(x^{(\sigma)}_m, y^{(\tau)}_n) p^{(\sigma)}_m(x) p^{(\tau)}_n(y) \tag{3.36}$$

mit Lagrange-Polynomen $p^{(\sigma)}_m$ und $p^{(\tau)}_n$ zu gegebenen Stützstellen $x^{(\sigma)}_m \in \hat{\sigma}$, $y^{(\tau)}_n \in \hat{\tau}$, vgl. Börm-Grasedyck-Hackbusch [10]. Es ergibt sich

$$B^{\alpha\beta}_{jk} = \int_{T_j}\int_{T_k} g(x,y)\,dy\,dx \approx \widetilde{B}^{\alpha\beta}_{jk} := \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \underbrace{g(x^{(\sigma)}_m, y^{(\tau)}_n)}_{=:D^{\alpha\beta}_{mn}} \underbrace{\Big\{\int_{T_j} p^{(\sigma)}_m(x)\,dx\Big\}}_{C^{(\sigma)}_{jm}} \underbrace{\Big\{\int_{T_k} p^{(\tau)}_n(y)\,dy\Big\}}_{C^{(\tau)}_{kn}}.$$

Mit den Matrizen $(D^{\alpha\beta}_{mn})_{mn}$, $(C^{(\sigma)}_{jm})_{jm}$ und $(C^{(\tau)}_{kn})_{kn}$ gilt dann

$$B^{\alpha\beta}|_{\sigma\times\tau} \approx \widetilde{B}^{\alpha\beta}|_{\sigma\times\tau} = C^{(\sigma)}|_\sigma D^{\alpha\beta}|_{\sigma\times\tau}(C^{(\tau)}|_\tau)^T.$$

Sind zur exakten Berechnung von $B^{\alpha\beta}|_{\sigma\times\tau}$ insgesamt $|\sigma||\tau|$ Matrixeinträge zu berechnen, so müssen bei der Approximation lediglich $|\sigma|M + M^2 + |\tau|M = M(|\sigma| + |\tau| + M)$ Einträge berechnet werden. Die Matrizenmultiplikationen sind effizient durchführbar, weil die Matrizen $C^{(\sigma)}|_\sigma$ und $C^{(\tau)}|_\tau$ höchstens Rang M haben. Für $M \ll \min\{|\sigma|, |\tau|\}$ verringert sich der Rechenaufwand also signifikant, zumal die Berechnung jedes einzelnen Eintrags $B^{\alpha\beta}_{jk}$ die Berechnung eines Doppelintegrals bzw. Doppelrandintegrals erfordert.

Bemerkung. Man beachte, daß die Matrizen $C^{(\sigma)}$ und $C^{(\tau)}$ *nicht* von α und β abhängen. □

Bemerkung. Ein weiterer Vorteil bei der Betrachtung von *panel clustering* (bzw. allgemeiner hierarchischen Matrizen) liegt darin, daß man große Blöcke dieser Matrizen kostengünstig abspeichern kann, indem man anstelle von $B^{\alpha\beta}_{\sigma\times\tau}$ nur die Niedrigrangmatrizen $C^{(\sigma)}|_\sigma$, $D^{\alpha\beta}_{\sigma\times\tau}$ und $C^{(\tau)}|_\tau$ speichert. Außerdem kann die Matrix-Vektor-Multiplikation mit fast linearem Aufwand realisiert werden. Da MATLAB keine hierarchischen Datenstrukturen unterstützt, wird auf diese beiden Punkte im folgenden kein Augenmerk gerichtet. □

3.6.2 Cluster-Bäume

Die Definition von *panel clustering* Methoden benötigt die Definition von gewissen Baumstrukturen, sogenannten *cluster*-Bäumen. Dabei bezeichnet man die Teilmengen $\sigma \subseteq I$ einer beliebigen Indexmenge als *cluster*. Bei der späteren Anwendung auf das *panel clustering* ist $I = \mathcal{T}$ und für *zulässige cluster* $\sigma, \tau \subseteq I$ soll gerade (3.35) gelten.

Definition. Es seien I eine endliche Indexmenge und $c_\mathbb{T} \in \mathbb{N}$. Eine Menge $\mathbb{T} \subseteq \wp(I)$ heißt *cluster*-Baum zu I und $c_\mathbb{T}$, falls die folgenden beiden Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind.

(i) $\emptyset \notin \mathbb{T}$, $I \in \mathbb{T}$.

(ii) Für alle $\sigma_0 \in \mathbb{T}$ mit $\operatorname{card}(\sigma_0) > c_\mathbb{T}$ existieren ein eindeutiges $n \in \mathbb{N}$ und eindeutige $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{T}$ derart, daß gelten

- $\sigma_0 = \bigcup_{j=1}^n \sigma_j$,
- $\sigma_j \cap \sigma_k = \emptyset$ für $1 \leq j \neq k \leq n$,
- für alle j und alle $\sigma \in \mathbb{T}$ folgt aus $\sigma_j \subsetneqq \sigma \subseteq \sigma_0$ umgehend $\sigma = \sigma_0$.

Die Elemente $\sigma \in \mathbb{T}$ heißen *Knoten* von $\mathbb{T}$. Ein Knoten σ wird genau dann als *Blatt* von $\mathbb{T}$ bezeichnet, falls $|\sigma| \leq c_\mathbb{T}$ gilt. Ist der Knoten $\sigma \in \mathbb{T}$ kein Blatt, so läßt sich σ nach (ii) eindeutig als disjunkte Vereinigung seiner *Söhne* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ schreiben. Die Menge aller Söhne wird gegebenenfalls mit $S(\sigma)$ bezeichnet. Ein *cluster*-Baum ist *binär*, falls jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau zwei Söhne besitzt (d.h. stets $n = 2$ in (ii) gilt). □

Definition. Es seien I eine endliche Indexmenge, $c_\mathbb{T} \in \mathbb{N}$, $\mathbb{T}$ ein *cluster*-Baum dazu und $Z : \mathbb{T}\times\mathbb{T} \to \{0,1\}$ eine Abbildung, die als *Zulässigkeitsbedingung* bezeichnet werde. Ein Paar $(\sigma,\tau) \in \mathbb{T}\times\mathbb{T}$ heißt *zulässiger Block*, wenn $Z(\sigma,\tau) = 1$ gilt, und *unzulässiger Block*, wenn $Z(\sigma,\tau) = 0$ gilt. Eine Menge $\Pi \subseteq \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ heißt *Blockpartitionierung* zu $\mathbb{T}$, falls gilt

(i) $I \times I = \bigcup \big\{\sigma \times \tau \subseteq I \times I \,\big|\, (\sigma,\tau) \in \Pi\big\}$,

(ii) $(\sigma \times \tau) \cap (\sigma' \times \tau') = \emptyset$ für alle $(\sigma,\tau), (\sigma',\tau') \in \Pi$. □

Bemerkung. Gegeben seien eine endliche Indexmenge I, ein *cluster*-Baum $\mathbb{T}$ zu I und eine Zulässigkeitsbedingung $Z : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \{0,1\}$. Gesucht ist eine Blockpartionierung Π zu $\mathbb{T}$ derart, daß mit

$$M := \big\{(i,j) \in I \times I \,\big|\, \exists(\sigma,\tau) \in \Pi \quad (i,j) \in \sigma \times \tau \wedge Z(\sigma,\tau) = 1\big\}$$

einerseits der prozentuale Anteil $|M|/|I|^2$ von Indizes in $I \times I$, die in zulässigen Blöcken liegen, möglichst groß wird. Andererseits soll die Anzahl der zulässigen Blöcke möglichst klein sein. Dies ist ein vielgestaltes Problem. Im Kontext des *panel clustering* ist in der Regel die Zulässigkeitsbedingung $Z : \wp(I) \times \wp(I) \to \{0,1\}$ gegeben. Man sucht dann $\mathbb{T}$ *und* Π, die diese beiden Anforderungen möglichst gut erfüllen. Auf die Frage nach dem optimalen Vorgehen wird hier nicht eingegangen. Näheres findet sich zum Beispiel in GRASEDYCK [33]. □

Jeder *cluster*-Baum $\mathbb{T}$ induziert zusammen mit einer Zulässigkeitsbedingung $Z : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \{0,1\}$ eine Blockpartitionierung $\mathbb{T}_Z$ von $I \times I$.

Algorithmus 3.21 (Erstellen einer Blockpartitionierung [10]). *Es sei $\mathbb{T}$ ein* cluster-*Baum zu einer endlichen Indexmenge I, und $Z : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \{0,1\}$ eine Zulässigkeitsbedingung. Die folgende rekursive Funktion* `GenerateBlockPartition`(I, I) *erstellt dann eine Partitionierung $\mathbb{T}_Z$ von $I \times I$ in zulässige und unzulässige* cluster-*Blöcke.*

```
function GenerateBlockPartition(σ, τ)
if zulässig(σ, τ)
    Speichere (σ, τ) in T_Z als zulässigen Block
elseif min{|σ|, |τ|} > c_T
    for all(σ', τ') ∈ S(σ) × S(τ)
        GenerateBlockPartition(σ', τ')
    end
else
    Speichere (σ, τ)in T_Z als unzulässigen Block
endif
```
■

Der Rest des Abschnitts widmet sich der Generierung eines *cluster*-Baums zu vorgegebener Triangulierung $\mathcal{T}$. Die Ideen sind der einführende Arbeit BÖRM-GRASEDYCK-HACKBUSCH [10] entnommen.

Algorithmus 3.22 (Binärer *cluster*-Baum zu $\mathcal{T}$). *Zu jedem Element $T_j \in \mathcal{T}$ bezeichne $x_j \in \mathbb{R}^d$ einen fixierten Punkt, z.B. den Schwerpunkt, und $Q_j \subseteq \mathbb{R}^d$ sei der kleinste achsenorientierte Quader, der T_j enthält. Mit* `GenerateClusterTree`(1) *wird rekursiv ein binärer* cluster-*Baums $\mathbb{T} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ mit $\mathcal{T}$ als erstem Knoten erzeugt. Die Daten zu $\mathbb{T}$ müssen global zur Verfügung stehen bzw. bei jedem rekursiven Aufruf übergeben werden.*

```
function GenerateClusterTree(j)
if j = 1
    σ_1 := T
elseif |σ_j| > c_T
    Sei Q_σj = [a_1, b_1] × ··· × [a_d, b_d].
    Es sei k = 1, ..., d die Zahl derart, daß
```

- *$b_k - a_k$ möglichst groß ist ist unter der Zusatzbedingung*
- $\sigma' := \{T_j \mid x_j \cdot \mathbf{e}_k \leq (a_k + b_k)/2\} \notin \{\emptyset, \sigma_j\}$.

Es sei $n := |\mathbb{T}|$ die aktuelle Anzahl an Knoten.

Erweitere $\mathbb{T}$ um $\sigma_{n+1} := \sigma'$ und $\sigma_{n+2} := \sigma_j \backslash \sigma'$ (insbesondere folgt $|\mathbb{T}| = n+2$).

Speichere die Vater-Sohn-Beziehung $S(\sigma_j) = \{\sigma_{n+1}, \sigma_{n+2}\}$.

`GenerateClusterTree`$(n+1)$

`GenerateClusterTree`$(n+2)$

`endif` ■

Bemerkung. Die Idee bei Algorithmus 3.22 ist die, Elemente $T \in \mathcal{T}$ so zu einem *cluster* $\sigma \in \mathbb{T}$ zusammenzufassen, daß der Quader Q_σ zum *cluster* σ möglichst kleine Fläche hat. Dabei wird der Quader Q_σ so geteilt, daß die Schwerpunkte der Elemente aus σ_{n+1} und σ_{n+2} durch eine Hyperebene getrennt werden, die, sofern möglich, die längste Seite des Quaders Q_σ halbiert. □

Bemerkung. Daß die in Algorithmus 3.22 gegebene Erzeugung eines *cluster*-Baums nicht notwendig das geschickteste Vorgehen ist, zeigt Grasedyck [33], der auch den Aufwand für die Aufstellung des *cluster*-Baums untersucht. □

***Bemerkung* (Einfache Zulässigkeitsbedingung).** Es seien $\mathbb{T}$ der *cluster*-Baum zu einer Triangulierung $\mathcal{T}$ und $\zeta > 0$ der Zulässigkeitsparameter. Ein *cluster*-Block (σ, τ) ist ζ-zulässig, falls gilt

$$\max\{\operatorname{diam}(Q_\sigma), \operatorname{diam}(Q_\tau)\} \leq \zeta \operatorname{dist}(Q_\sigma, Q_\tau)$$

Im folgenden wird stets diese Zulässigkeitsbedingung vorausgesetzt und für die zugehörige Blockpartitionierung einfach $\mathbb{T}_\zeta$ geschrieben. □

3.6.3 Effiziente Berechnung von A

Es sei $\mathbb{T}_\zeta$ eine Blockpartitionierung von $\mathcal{T}$ mit Zulässigkeitsparameter ζ, die zum Beispiel durch die Algorithmen im letzten Unterabschnitt erzeugt worden ist. Auf unzulässigen *cluster*-Paaren $(\sigma, \tau) \in \mathbb{T}_\zeta$ werden die Einträge $\mathbf{A}|_{\sigma\times\tau}$ in der Matrix $\mathbf{A}$ exakt berechnet. Zu gegebenem $M_0 \in \mathbb{N}$ sei $M := M_0^d$ die Approximationsordnung gemäß (3.36). Die Interpolationsknoten $x_m^{(\sigma)}$ bzw. $y_n^{(\tau)}$ werden durch einen Tensor-Ansatz gewählt. Es sei zum Beispiel $Q_\sigma = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ der kleinste achsenorientierte Quader, der $\hat{\sigma}$ umfaßt. Gegeben seien dann Stützstellen $t_\ell^{(j)} \in \mathbb{R}$ für alle $1 \leq \ell \leq M_0$ und $1 \leq j \leq d$ mit

- $a_j \leq t_1^{(j)} < \cdots < t_{M_0}^{(j)} \leq b_j$.

Dies definiert $M = M_0^d$ Stützstellen $x_{(m_1,\ldots,m_d)}^{(\sigma)} := (t_{m_1}^{(1)}, \ldots, t_{m_d}^{(d)}) \in Q_\sigma$ für $1 \leq m_j \leq M_0$. Die zugehörigen Lagrange-Polynome $p_m^{(\sigma)}$ sind dann durch

$$p_{(m_1,\ldots,m_d)}^{(\sigma)}(x) = \prod_{j=1}^{d} \underbrace{\prod_{\substack{m=1\\ m\neq m_j}}^{M_0} \frac{x_j - t_m^{(j)}}{t_{m_j}^{(j)} - t_m^{(j)}}}_{\in \mathcal{P}^{M_0-1}(\mathbb{R})} \in \mathcal{P}^{(M_0-1)^d}(\mathbb{R}^d)$$

gegeben. Um $p^{(\sigma)}_{(m_1,\dots,m_d)}$ *exakt* über einen Quader $T_j \in \mathcal{T}$ zu integrieren, bedarf es also einer Tensor-Gauß-Quadratur der Ordnung $M = (M_0/2 \times \cdots \times M_0/2)$. Die Matrixeinträge

$$C^{(\sigma)}_{jm} = \int_{T_j} p^{(\sigma)}_m(x)\,dx \quad \text{und} \quad C^{(\tau)}_{kn} = \int_{T_k} p^{(\tau)}_n(x)\,dx.$$

können damit relativ kostengünstig exakt berechnet werden. Die Einträge von $D^{\alpha\beta}$ werden direkt durch die (symmetrische) Hesse-Matrix $H_G(x^{(\sigma)}_m - y^{(\tau)}_n)$ des Newton-Kerns G gegeben,

$$H_G(x) = \frac{1}{|S^d_2|\,|x|^{d+2}}\big\{|x|^2\,\mathbb{1} - d(x \otimes x)\big\}$$

mit der Einheitsmatrix $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^{d\times d}$.

$\lvert\sigma\rvert\lvert\tau\rvert$	M_0	$M = M_0^2$
1	5	25
404	6	36
1097	7	49
2981	8	64
8104	9	81
22027	10	100
59875	11	121

$\lvert\sigma\rvert\lvert\tau\rvert$	M_0	$M = M_0^3$
1	3	27
2981	4	64
22027	5	125
162755	6	216

Tabelle 3.3: *Approximationsordnungen M für $d = 2$ (links) und $d = 3$ (rechts) gemäß Formel* (3.37).

Bemerkungen. (a) In den numerischen Beispielen, die in den folgenden beiden Kapiteln vorgestellt werden, wurden $\zeta = 1$ und $c_{\mathbb{T}} = 5$ gewählt.

(b) Als Stützstellen für die Lagrange-Polynome wurden klassische Tschebyscheff-Stützstellen gewählt, siehe Plato [50].

(c) Mit steigender Größe $|\sigma||\tau|$ der zulässigen *cluster*-Blöcke $(\sigma,\tau) \in \mathbb{T}_\zeta$ z.B. durch Verfeinerung des Netzes muß die Approximationsordnung M steigen, um eine gleichmäßig gute Approximation von $\mathbf{A}$ zu gewährleisten. Dabei hängt M natürlich zum einen von der Blockgröße $|\sigma||\tau|$ ab, zum anderen aber auch vom Abstand beider Blöcke bzw. vom Zulässigkeitsparameter ζ. Erhöht man die Approximationsordnung M *nicht*, so zeigte sich in den numerischen Experimenten, daß sich der Fehler mit einem Faktor von 5 akkumulierte.

(d) Die Approximationsordnung M_0 auf einem zulässigen Block (σ,τ) wurde durch die Formeln

$$\begin{aligned} M_0 &= \min\big\{\max\big\{5, \lfloor\log(|\sigma||\tau|)\rfloor\big\}, 11\big\} && \text{für } d = 2 \quad \text{bzw.} \\ M_0 &= \min\big\{\max\big\{3, \lfloor\log(|\sigma||\tau|)/2\rfloor\big\}, 6\big\} && \text{für } d = 3 \end{aligned} \tag{3.37}$$

gegeben, durch die aber lediglich die Blockgröße berücksichtigt wird. In den Tabellen 3.3 ist dargestellt, bei welchen Blockgrößen die Approximationsordnung M erhöht wird.

(e) Weitere Ersparnis beim Aufbau von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{dN\times dN}_{\text{sym}}$ kann dadurch erzielt werden, daß die Symmetrie von $\mathbf{A}$ ausgenutzt wird und in unzulässigen Blöcken lediglich die Einträge neugerechnet werden, die nicht aus dem vorausgegangenen Schritt übernommen werden können.

3.6.4 Effiziente Berechnung von $\boldsymbol{\eta}$

Die Berechnung von $\eta = (\eta_j)_{j=1}^N$ mit

$$\begin{aligned}\eta_j^2 := h_{T_j}&\|(\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}})\|_{L^1(T_j;\mathbb{R}^d)} \\ &+ \delta_{T_j}\big(\varepsilon^2\|\lambda_h \mathbf{m}_h\|_{L^2(T_j;\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{f}-\mathbf{f}_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(T_j;\mathbb{R}^d)} + \|\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}\|^2_{L^2(T_j;\mathbb{R}^d)}\big)\end{aligned} \tag{3.38}$$

besitzt gemäß Abschnitt 3.3 einen Aufwand von $O(N^2)$, da die Integrale, die ∇u_h involvieren, durch Quadratur berechnet werden müssen und die Berechnung von $\nabla u_h(x)$ für festes x nach Korollar 3.10 einen Aufwand von $O(N)$ hervorruft. Im folgenden wird die Berechnung von $\nabla u_h(x)$ zunächst auf ein lineares Problem zurückgeführt. Die dabei auftretende *vollbesetzte* Matrix B kann als Kollokationsmatrix verstanden und dann mit einem entsprechenden *clustering*-Ansatz behandelt werden. Für $1 \le j \le d$ und $1 \le k \le N$ sei $[j,k] \in \mathbb{N}$ der Index gemäß Basisdarstellung (3.3), d.h.

$$\left\{\begin{array}{ll}[1,k] & := 2k-1 \\ [2,k] & := 2k\end{array}\right\} \quad \text{für } d=2 \qquad \text{bzw.} \qquad \left\{\begin{array}{ll}[1,k] & := 3k-2 \\ [2,k] & := 3k-1 \\ [3,k] & := 3k\end{array}\right\} \quad \text{für } d=3.$$

Mit dieser Notation gilt

$$\mathbf{m}_h = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^N \chi_{T_k} \mathbf{X}_{[j,k]} \mathbf{e}_j$$

und damit

$$u_h := \mathcal{L}\mathbf{m}_h = \sum_{j=1}^d \frac{\partial G}{\partial x_j} * (\mathbf{m}_h)_j = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^N \mathbf{X}_{[j,k]} \frac{\partial G}{\partial x_j} * \chi_{T_k}.$$

Schließlich folgt

$$\frac{\partial u_h}{\partial x_\alpha} = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^N \mathbf{X}_{[j,k]} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(\frac{\partial G}{\partial x_j} * \chi_{T_k}\Big).$$

Gegeben seien nun $L \in \mathbb{N}$ Kollokationspunkte im Inneren jedes Elements $T_k \in \mathcal{T}$,

$$x^{(\ell)} \in \mathbb{R}^d \quad \text{für } \ell = 1, \dots, LN,$$

wobei gerade $x^{(\ell)} \in T_j$ genau für alle $(L-1)j+1 \le \ell \le Lj$ gelte. Mittels dieser Kollokationspunkte sollen später die beiden Integrale in (3.38), die ∇u_h involvieren, über Quadratur approximiert werden. Es gilt

$$\frac{\partial u_h}{\partial x_\alpha}(x^{(\ell)}) = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^N \mathbf{X}_{[j,k]} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(\frac{\partial G}{\partial x_j} * \chi_{T_k}\Big)(x^{(\ell)})}_{=:B^\alpha_{\ell[j,k]}} = \big(B^\alpha \mathbf{X}\big)_\ell$$

mit der Matrix $B^\alpha \in \mathbb{R}^{LN \times dN}$. Um also die Matrix

$$\big(\nabla u_h(x^{(\ell)})\big)_{\ell=1}^{LN} \in \mathbb{R}^{LN \times d}$$

aufzustellen, müssen die Matrizen $B^1, B^2, B^3 \in \mathbb{R}^{LN\times dN}$ berechnet werden. Zur effizienteren Approximation von gewissen Blöcken der Matrizen B^α definiere man $B^{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{LN\times N}$ durch $B^{\alpha\beta}_{\ell k} := B^{\alpha}_{\ell[\beta,k]}$. Weiter seien $\sigma, \tau \subseteq \mathcal{T}$ *cluster* mit $\operatorname{dist}(\hat\sigma, \hat\tau) > 0$. Ist $x^{(\ell)} \in \hat\sigma$, so gilt für $k \in \mathbb{N}$ mit $T_k \in \tau$ wegen $x^{(\ell)} \notin \overline{T}_k$

$$B^{\alpha\beta}_{\ell k} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(\frac{\partial G}{\partial x_\beta} * \chi_{T_k}\Big)(x^{(\ell)}) = \int_{T_k} \frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x^{(\ell)} - y)\, dy$$

nach Lemma 3.9. Approximiert man $g(x,y) := \frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x-y)$ auf $\sigma\times\tau$ durch

$$\tilde g(x,y) := \sum_{m=1}^{M} g(x^{(\sigma)}_m, y) p^{(\sigma)}_m(x), \tag{3.39}$$

so erhält man wie oben eine schnell berechenbare Approximation $\widetilde{B}^{\alpha\beta}$ von $B^{\alpha\beta}$,

$$B^{\alpha\beta}_{\ell k} \approx \widetilde{B}^{\alpha\beta}_{\ell k} := \sum_{m=1}^{M} \underbrace{p^{(\sigma)}_m(x^{(\ell)})}_{=:C^{(\sigma)}_{\ell m}} \underbrace{\int_{T_k} \frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x^{(\sigma)}_m - y)\, dy}_{=:D^{\alpha\beta}_{km}},$$

also $B^{\alpha\beta}|_{\sigma\times\tau} = C^{(\sigma)}|_\sigma D^{\alpha\beta}|^T_{\sigma\times\tau}$. Die Einträge von $D^{\alpha\beta}$ lassen sich mit Lemma 3.9 wieder als Randintegrale schreiben und *exakt* berechnen,

$$\int_{T_k} \frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(x^{(\sigma)}_m - y)\, dy = -\int_{\partial T_k} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(x^{(\sigma)}_m - y) n_\beta(y)\, ds_y.$$

Während zur exakten Berechnung von $B^{\alpha\beta}|_{\sigma\times\tau}$ insgesamt $L|\sigma||\tau|$ Matrixeinträge zu berechnen sind, sind für die Approximation lediglich $L|\sigma|M + L|\tau|M = LM(|\sigma| + |\tau|)$ Einträge zu berechnen. Während der Aufbau der Einträge von $B^{\alpha\beta}|_\sigma$ und von $D^{\alpha\beta}|_\sigma$ den gleichen numerischen Aufwand erfordert, da dieselbe Art von Randintegralen berechnet wird, ist der Aufwand zum Aufbau der Matrix $C^{(\sigma)}$ vernachlässigbar.

Bemerkung. Die Berechnung der Einträge $B^{\alpha}_{\ell[j,k]}$ für nicht-zulässige *cluster*-Blöcke $(\sigma,\tau) \in \mathbb{T}_\zeta$, $T_j \in \sigma$ und $\mathbb{T}_k \in \tau$ (und ebenso die exakte Berechnung der Einträge von $D^{\alpha\beta}|_{\sigma\times\tau}$ erfolgt wie oben: Es sei $T_k \in \tau$ ein polygonal berandetes Element mit Seiten bzw. Kanten $E^{(k)}_1, \dots, E^{(k)}_K$. Mit Lemma 3.9 gilt

$$\begin{aligned} B^{\alpha}_{\ell[j,k]} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big(\frac{\partial G}{\partial x_j} * \chi_{T_k}\Big)(x^{(\ell)}) &= -\int_{\partial T_k} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(x^{(\ell)} - y) n_j(y)\, ds_y \\ &= \frac{1}{|S^d_2|}\sum_{q=1}^{K} n^{(k,q)}_j \int_{E^{(k)}_q} \frac{(x^{(\ell)} - y)_\alpha}{|x^{(\ell)} - y|^d}\, ds_y, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{n}^{(q,k)} = (n^{(q,k)}_1, \dots, n^{(q,k)}_d)$ den äußeren Normalenvektor von T_k auf $E^{(k)}_q$ bezeichne. Insbesondere folgt also für $\widetilde{B} := B^\alpha(\ell, 2k-1:2k)$ und $d = 2$ bzw. $\widetilde{B} := B^\alpha(\ell, 3k-2:3k)$ und $d = 3$ die Gleichheit

$$\widetilde{B} = \frac{1}{|S^d_2|}\sum_{q=1}^{K} \Big\{ \int_{E^{(k)}_q} \frac{(x^{(\ell)} - y)_\alpha}{|x^{(\ell)} - y|^d}\, ds_y \Big\} \mathbf{n}^{(k,q)} \in \mathbb{R}^d. \qquad \square$$

Bemerkung. Für die wählbaren Parameter wurde wie beim approximativen Aufbau von $\mathbf{A}$ verfahren. Der Approximationsansatz (3.36) anstelle von (3.39) führte zu zu großeren Approximationsfehlern bei der Berechnung von η. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Berechnung von $\mathbf{A}$ einem Galerkin-Verfahren entspricht, während die punktweise Berechnung von $\nabla u_h(x)$ auf ein Kollokationsverfahren führt. Beim Galerkin-Verfahren erhält man durch die zusätzliche Integration weitere Glätteeigenschaften, die sich bei der Approximationsgüte bemerkbar machen. □

3.7 Visualisierung des magnetischen Potentials u_h

Bei den numerischen Experimenten im folgenden Kapitel wird zu einigen diskreten Magnetisierungen $\mathbf{m}_h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ das diskrete Potential $u_h \in W_1^2(\mathbb{R}^d)$ berechnet und ausgegeben. Die Berechnung erfolgt in einem *postprocessing step*, da in die numerischen Berechnungen lediglich der Gradient $\nabla u_h \in L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ eingeht. Die analytischen Rechnungen sind elementarer Natur und nur der Vollständigkeit halber diesem Kapitel angegliedert.

Lemma 3.23. *Es sei $d = 2$ und $\mathbf{m}_h = \sum_{k=1}^N \chi_{T_k}(\mathbf{X}_{2k-1}\mathbf{e}_1 + \mathbf{X}_{2k}\mathbf{e}_2)$. Dann gilt mit $u_h := \mathcal{L}\mathbf{m}_h$*

$$u_h(x) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^N \int_{\partial T_k} \big\{ \underbrace{\mathbf{m}_h|_{T_k}}_{\in\mathbb{R}^2} \cdot \mathbf{n}(y)\big\} \log|x-y|\, ds_y \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^2$$

Beweis. Zunächst einmal gilt nach Definition von $\mathcal{L}$

$$u_h = \frac{\partial G}{\partial x_1} * (\mathbf{m}_h)_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} * (\mathbf{m}_h)_2 = \sum_{k=1}^N \mathbf{X}_{2k-1}\Big(\frac{\partial G}{\partial x_1} * \chi_{T_k}\Big) + \sum_{k=1}^N \mathbf{X}_{2k}\Big(\frac{\partial G}{\partial x_1} * \chi_{T_k}\Big).$$

Durch Anwendung von Lemma 3.9 folgt punktweise für alle $x \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \sum_{k=1}^N \mathbf{X}_{2k-1} \int_{\partial T_k} G(x-y) n_1(y)\, ds_x + \sum_{k=1}^N \mathbf{X}_{2k} \int_{\partial T_k} G(x-y) n_2(y)\, ds_x \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{\partial T_k} (\mathbf{X}_{2k-1}, \mathbf{X}_{2k}) \cdot \mathbf{n}(y)\, G(x-y)\, ds_x. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar nach Definition von G für $d = 2$. ■

Die Berechnung von $u_h(x)$ für $x \in \mathbb{R}^2$ ist damit auf die Berechnung von Randintegralen vom Typ

$$I := \int_{[a,b]} \log|x-y|\, ds_y \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } a \neq b$$

zurückgeführt. Das Integral I ist im wesentlichen die Anwendung des Einfachschichtpotentials auf die charakteristische Funktion $\chi_{[a,b]}$. Die Berechnung erfolgt analytisch. Die Darstellung findet sich im Anhang A. Analoges Vorgehen zum Beweis von Lemma 3.23 liefert auch eine Darstellung von $u_h(x)$ für $d = 3$.

Lemma 3.24. *Es sei $d = 3$ und $\mathbf{m}_h = \sum_{k=1}^N \chi_{T_k}(\mathbf{X}_{3k-2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{X}_{3k-1}\mathbf{e}_2 + \mathbf{X}_{3k}\mathbf{e}_3)$. Dann gilt für das magnetische Potential $u_h := \mathcal{L}\mathbf{m}_h$ zu $\mathbf{m}_h$*

$$u_h(x) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^N \int_{\partial T_k} \frac{\mathbf{m}_h|_{T_k} \cdot \mathbf{n}(y)}{|x-y|}\, ds_y \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^3.$$ ■

Ist T_k ein Quader in $\mathbb{R}^3$, so können die auftretenden Randintegrale wieder exakt berechnet werden als Einfachschichtpotentiale charakteristischer Funktionen zu Rechtecksflächen in $\mathbb{R}^3$. Die Darstellung findet sich im Anhang B.

Kapitel 4

Numerische Experimente zu $(RP_{\varepsilon,h})$

In diesem Kapitel finden sich die numerischen Experimente zum diskreten Modell $(RP_{\varepsilon,h})$ und den Algorithmen aus Kapitel 3. Betrachtet wird der uniachsiale Modellfall (2.19) mit der Anisotropiedichte ϕ^{**} und der Ableitung

$$D\phi^{**}(x) = \begin{cases} (x \cdot z)z & \text{für } d = 2, \\ (x \cdot z_1)z_1 + (x \cdot z_2)z_2 & \text{für } d = 3, \end{cases} \tag{4.1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und einem Einheitsvektor $z \in S_2^2$ bzw. orthonormalen Vektoren $z_1, z_2 \in S_2^3$. Im ganzen Kapitel ist $\mathcal{T}$ eine fastreguläre Triangulierung, wobei für die Datenverwaltung jeweils erzwungen wird, daß maximal ein hängender Knoten im Inneren einer Kante ($d = 2$) bzw. Seite ($d = 3$) liegt. Die Elemente von $\mathcal{T}$ sind achsenparallele Rechtecke für $d = 2$ bzw. Quader für $d = 3$.

Das Hauptaugenmerk liegt auf empirischen Untersuchungen zu den analytischen Resultaten aus Kapitel 2. Dabei ist zum einen die optimale Wahl des Penalisierungsparameters ε zu diskutieren. Die a priori Analysis aus Satz 2.31 empfiehlt für glatte Lösungen die Wahl $\varepsilon = h$,

$$\|u - u_h\|_{W_1^2(\mathbb{R}^d)} + \|D\phi^{**}(\mathbf{m}) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon + h).$$

In den Experimenten mit bekannter exakter Lösung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ zeigt sich, daß besonders für nicht-glatte Lösungen eine Wahl $\varepsilon = h^\alpha$ mit $\alpha > 1$ zu besseren Resultaten führt und daher vorzuziehen ist. Zum anderen zeigen diese Experimente die Überlegenheit der adaptiven Netzverfeinerung gegenüber der uniformen, wobei $\varepsilon, h \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T})$ dann als $\mathcal{T}$-stückweise konstante Funktionen verstanden werden. In den Beispielen führen die residualen Fehlerschätzer η und μ zu ähnlichen adaptiven Netzen, und der glättungsbasierte Fehlerschätzer ζ erweist sich zumindest auf adaptiven Netzen als akkurat hinsichtlich der Schätzung des (im allgemeinen unbekannten) L^2-Fehlers. Ferner zeigt sich die volle L^2-Konvergenz von $\mathbf{m}_h$ gegen $\mathbf{m}$, wobei die Analysis aus Kapitel 2 lediglich die Konvergenz von $D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)$ gegen $D\phi^{**}(\mathbf{m})$ garantiert, d.h. L^2-Konvergenz in Richtung von z bzw. z_1 und z_2.

Das Kapitel gliedert sich grob wie folgt: Abschnitt 4.1 formuliert ausführlicher die Fragestellungen, die anhand der Beispiele empirisch untersucht werden sollen. Die Abschnitte 4.2 und 4.3 behandeln den Fall $d = 2$. Dabei werden zunächst zwei Beispiele mit gegebener exakter Lösung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; B_2^2)$ betrachtet. Beim ersten Beispiel gilt $\mathbf{m} \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^2)$, und damit garantiert die a priori Analysis für $\varepsilon = h$ optimales Konvergenzverhalten der diskreten Lösungen $\mathbf{m}_h$ bei uniformer Netzverfeinerung, und der residuale Fehlerschätzer η ist in diesem Fall zuverlässig. Beim zweiten Beispiel führt uniforme Netzverfeinerung wegen $\mathbf{m} \notin H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ zu verminderter Konvergenzordnung, während sich bei η- und μ-adaptiver Netzverfeinerung die optimale Konvergenzordnung einstellt. In beiden Beispielen werden stetige und unstetige Lagrange-Multikplikatoren λ untersucht. Im stetigen Fall

führt lediglich die Wahl von $\varepsilon = h^\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$ zur erwarteten Konvergenzverschlechterung. Im unstetigen Fall zeigt sich hingegen auch für $\alpha = 1$ ein suboptimales Konvergenzverhalten, das für $\alpha > 1$ kompensiert wird.

Anschließend folgen in Abschnitt 4.3 anwendungsrelevantere Beispiele, deren exakte Lösung nicht mehr bekannt ist. Abschnitt 4.4 faßt die experimentellen Resultate für $(RP_{\varepsilon,h})$ und $d = 2$ zusammen.

Abschnitt 4.5 untersucht zwei Beispiele für $d = 3$ und zeigt, daß sich die Beobachtungen für $d = 2$ auch auf den dreidimensionalen Fall übertragen.

In Abschnitt 4.6 wird das stabilisierte diskrete Problem $(RP^\beta_{\varepsilon,h})$ betrachtet. Es zeigt sich experimentell, daß sich bei Stabilisierung die Anzahl der benötigten Newton-Schritte zur Berechnung der diskreten Magnetisierung $\mathbf{m}_h$ leicht reduziert. Fehlerschätzer – und im analytischen Beispiel auch der Fehler – konvergieren mit derselben experimentellen Konvergenzordnung wie im nicht-stabilisierten Fall.

Schließlich untermauert Abschnitt 4.7 die Überlegenheit des konvexifizierten Problems gegenüber dem nicht-konvexifizierten hinsichtlich des numerischen Aufwands. Beim nicht-konvexifizierten Problem (MP) ist das Energiefunktional $E(\mathbf{m})$ über alle $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; S^d_2)$ zu minimieren. Bei der Diskretisierung wird die Nebenbedingung $|\mathbf{m}(x)| = 1$ durch eine Penalisierungsstrategie realisiert. Dies führt auf das diskrete Minimierungsproblem $(MP_{\varepsilon,h})$, dessen Lösbarkeit mit Hilfe eines Kompaktheitsargumentes gezeigt werden kann. Die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen $(P_{\varepsilon,h})$ werden mit einem Newton-Verfahren numerisch gelöst. Die Lösung dieser ist zum einen numerisch aufwändig, und zum anderen konvergiert das Newton-Verfahren im allgemeinen *nicht* gegen ein globales, sondern lediglich gegen ein lokales Minimum des penalisierten Energiefunktionals auf dem diskreten Raum.

4.1 Zielsetzungen der experimentellen Untersuchungen

Konvergenz und Aufwand des Verfahrens. Es ist zu untersuchen, inwieweit die Stabilität, die Konvergenz und der Aufwand des vorgeschlagenen Verfahrens kritisch vom Penalisierungsparameter ε abhängt. Kleineres ε liefert in den Matrizen des Newton-Verfahrens größere Einträge, und es ist deshalb zu erwarten, daß die Anzahl der Newton-Iterationen mit sinkendem ε ansteigt. Außerdem ist zu untersuchen, ob die Konvergenz des Newton-Verfahrens kritisch vom Startwert abhängt.

Fehler und Bestapproximationsfehler. In den numerischen Beispielen mit bekannter Lösung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; B^d_2)$ kann zu gegebenem Netz $\mathcal{T}$ die L^2-Bestapproximation $\mathbf{m}_\mathcal{T} \in \mathcal{L}^0(\mathcal{T}; \mathbb{R}^d)$ berechnet werden. Es bezeichnet dann

$$\mathbb{E} := \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}$$

den Bestapproximationsfehler. Der Fehler $\mathbb{E}$ ist ein gutes Vergleichsmaß zu dem tatsächlichen Fehler

$$E := \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)},$$

wobei $\mathbf{m}_h$ die diskrete Lösung von $(RP_{\varepsilon,h})$ zum Netz $\mathcal{T}$ bezeichne, denn es gilt stets $\mathbb{E} \leq E$.

Wenn der exakte Fehler E berechnet werden kann, ist es möglich das Netz adaptiv an die lokalen Fehler $E_T := \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_h\|_{L^2(T;\mathbb{R}^d)}$ anzupassen, d.h. die E_T können als Verfeinerungsindikatoren im adaptiven Algorithmus 3.8 eingesetzt werden, und es darf erwartet werden, daß sich bei der

fehleradaptierten Netzverfeinerung die optimale Konvergenzrate $O(h)$ einstellt. Es ist zu untersuchen, inwieweit eine indikatorgesteuerte adaptive Netzverfeinerung dasselbe Konvergenzverhalten erzeugt. Zu Vergleichszwecken werden dabei stets die *experimentellen Konvergenzraten* $\kappa^{(k)}$ bestimmt. In einem Schritt $k \geq 2$ des adaptiven Algorithmus 3.8 wird diese beispielsweise für den Fehler E durch

$$\kappa^{(k)}(E) := \frac{\log(E^{(k-1)}/E^{(k)})}{\log(N^{(k)}/N^{(k-1)})}$$

gegeben. Hierbei wird für $\ell \in \{k-1, k\}$ mit $N^{(\ell)}$ die Anzahl der Elemente im Netz $\mathcal{T}^{(\ell)}$ und mit $E^{(\ell)}$ der L^2-Fehler der diskreten Lösung zum Netz $\mathcal{T}^{(\ell)}$ bezeichnet.

Die Degeneriertheit des Problems führt dazu, daß sowohl durch die a priori als auch a posteriori Analysis lediglich der Fehler $\|D\phi^{**}(\mathbf{m}) - D\phi^{**}(\mathbf{m}_h)\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}$ kontrolliert werden kann. Dem entspricht im Modellfall 4.1 die Kontrolle des L^2-Fehlers in z-Richtung für $d = 2$ bzw. (z_1, z_2)-Richtung für $d = 3$. Es bezeichne $z^\perp \in S_2^d$ die *easy axis* von ϕ, d.h. $\{z, z^\perp\}$ bzw. $\{z_1, z_2, z^\perp\}$ ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^d$. Weder die a priori Analysis noch die residualen Fehlerschätzer η und μ kontrollieren den L^2-Fehler in $z^\perp$-Richtung. Es ist daher sinnvoll, die Richtungen des L^2-Fehlers getrennt zu betrachten,

$$E_1 := \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \cdot z\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{und} \quad E_2 := \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \cdot z^\perp\|_{L^2(\Omega)},$$

und mit den Komponenten des Bestapproximationsfehlers zu vergleichen,

$$\mathbb{E}_1 := \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}) \cdot z\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{und} \quad \mathbb{E}_2 := \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}) \cdot z^\perp\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei der Einfachheit halber nur der Fall $d = 2$ formuliert wurde. Für die experimentellen Konvergenzraten der komponentenweisen Fehler (und auch der Fehlerschätzer) wird die analoge Bezeichnung wie oben verwandt, d.h. $\kappa^{(k)}(E_j)$, $\kappa^{(k)}(\eta)$ etc.

Weitere Fehlerterme. Bei der Lösung des konvexifizierten Problems (RP) wird neben der Magnetisierung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; B_2^d)$ ein Lagrange-Parameter $\lambda \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\geq 0})$ involviert. Die a priori Abschätzung aus Satz 2.31 involviert Terme der Gestalt $\lambda\mathbf{m}$ und gibt eine Abschätzung für den Fehler

$$E_{\lambda\mathbf{m}} := \|\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}.$$

Dieser Fehlerterm ist insbesondere deshalb interessant, weil er zumindest im penalisierten Bereich eine volle L^2-Konvergenz in $\mathbb{R}^d$ liefert, wogegen die Degeneriertheit des Problems im Modellfall keine L^2-Konvergenz von $\mathbf{m}_h$ in $z^\perp$-Richtung garantiert. Es ist nicht gelungen, den Fehler $E_{\lambda\mathbf{m}}$ durch eine a posteriori Fehlerabschätzung zu kontrollieren. Deshalb ist das experimentelle Konvergenzverhalten zu beobachten. Damit scheint auch die Betrachtung von

$$E_\lambda := \|\lambda - \lambda_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}$$

von Interesse.

Bemerkung. In den numerischen Experimenten wurden die Integrale, die zu den verschiedenen L^2-Fehlern gehören, elementweise über (3×3)-Tensor-Gauss-Quadraturformeln berechnet. □

Akkuranz des Glättungsfehlerschätzers ζ. Motiviert durch numerische Experimente in anderen Bereichen des *scientific computing* wird in Abschnitt 3.5 für $d = 2$ der Glättungsfehlerschätzer

$$\zeta := \|\mathbf{m}_h - \mathcal{A}\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$$

eingeführt. Dabei bezeichnet $\mathcal{A} : \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^2) \to \mathcal{L}^1(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)$ den oben spezifizierten Glättungsoperator, der jede $\mathcal{T}$-stückweise konstante Magnetisierung auf eine komponentenweise Q_1-Glättung abbildet. Es ist zu untersuchen, inwieweit ζ den im allgemeinen unbekannten Fehler E schätzt – auch und vor allem auf adaptiv erzeugten Netzen. Aus diesem Grund werden wieder die z- und $z^\perp$-Komponenten von ζ betrachtet,

$$\zeta_1 := \|(\mathbf{m}_h - \mathcal{A}\mathbf{m}_h) \cdot z\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{und} \quad \zeta_2 := \|(\mathbf{m}_h - \mathcal{A}\mathbf{m}_h) \cdot z^\perp\|_{L^2(\Omega)}.$$

Diese sind dann in den analytischen Beispielen mit bekannter Lösung $\mathbf{m}$ mit den exakten Fehlern E_j zu vergleichen und empirisch auf Zuverlässigkeit und Effizienz hin zu untersuchen.

Akkuranz des *panel clustering*. In Abschnitt 3.6 wird vorgeschlagen, die Terme, die durch den Integraloperator $\mathcal{L}$ involviert werden, mit einer *panel clustering*-Methode zu approximieren, um Rechenzeit besonders beim Aufbau der beteiligten Matrizen zu sparen. Dies wirft die Frage auf, inwiefern durch die Approximation die Güte der numerischen Ergebnisse verfälscht wird. Deshalb werden bei mehreren Beispielen zu gegebenen adaptiven bzw. uniformen Netzen $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_N\}$ die Daten zum einen exakt berechnet und zum anderen mittels des vorgeschlagenen *panel clustering*. In der Notation von Kapitel 3 bezeichne $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}_{\text{sym}}$ die exakt berechnete und $\widetilde{\mathbf{A}}$ die approximative Matrix. In den Tabellen findet sich dann der *relative Fehler in der Frobenius-Norm*

$$E(\mathbf{A}) := \frac{\|\mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{A}}\|_F}{\|\mathbf{A}\|_F}.$$

Des weiteren wird die Fehlerfortpflanzung auf die zugehörigen diskreten Lösungen $\mathbf{m}_h$ und $\widetilde{\mathbf{m}}_h$ bzw. die zugehörigen Basisvektoren $\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^{2N}$ in Größen der relativen Fehler

$$E(\mathbf{m}_h) := \frac{\|\mathbf{m}_h - \widetilde{\mathbf{m}}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}}{\|\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}} \quad \text{und} \quad E(\mathbf{X}) := \frac{|\mathbf{X} - \widetilde{\mathbf{X}}|}{|\mathbf{X}|}$$

angegeben. Schließlich wird auch die Auswirkung der Approximation auf die Berechnung der Verfeinerungsindikatoren gemessen. Zu einem Fehlerschätzer $\alpha \in \{\mu, \eta, \zeta\}$ sei $\alpha_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^N$ der Vektor der zugehörigen Verfeinerungsindikatoren, und

$$E(\alpha_{\mathcal{T}}) := \frac{|\alpha_{\mathcal{T}} - \widetilde{\alpha}_{\mathcal{T}}|}{|\alpha_{\mathcal{T}}|}$$

bezeichne den relativen Fehler bei approximativer Berechnung. Bei der Interpretation dieses Fehlers ist zu berücksichtigen, daß $\zeta_{\mathcal{T}}$ lediglich durch die approximative Berechnung von $\mathbf{A}$ – und damit von $\mathbf{X}$ – fehlerbehaftet ist, während die residualen Verfeinerungsindikatoren $\mu_{\mathcal{T}}$ und $\eta_{\mathcal{T}}$ einem zusätzlichen Approximationsfehler durch die punktweise Berechnung von $\nabla u_h(x)$ unterliegen. Der Gesamtheit dieser Fehlerwerte wird der prozentuale Anteil an den Matrixeinträgen in $\widetilde{\mathbf{A}}$ (bzw. den Matrizen zur Berechnung von $\nabla u_h(x)$) entgegengesetzt, der *nicht* exakt berechnet, sondern mittels *panel clustering* approximiert wird. Diese Approximations*ordnung* wird in den Tabellen mit O notiert.

4.2 Akademische Beispiele mit bekannter Magnetisierung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; B_2^d)$

Bei der experimentellen Bestimmung des Penalisierungsparameters ε steht die Numerik zum Problem (RP) vor der Schwierigkeit, daß in der Literatur kein Beispiel mit bekannter Lösung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ genannt wird. In der Literatur fanden sich nicht einmal (nicht-triviale) Funktionen $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; B_2^d)$ und $u \in W_1^2(\mathbb{R}^d)$, welche die Maxwellschen Gleichungen

$$\operatorname{div}(-\nabla u + \mathbf{m}) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

exakt lösen. Um ein Modellbeispiel zu erhalten, muß deshalb zu vorgegebener Lösung $(\lambda, \mathbf{m})$ von (RP), bestehend aus Lagrange-Parameter λ und Magnetisierung $\mathbf{m}$, eine geeignete numerische Approximation von ∇u berechnet werden, um die rechte Seite $\mathbf{f}$ zu erhalten.

Das erste Beispiel in Abschnitt 4.2.1 besitzt eine exakte Lösung $\mathbf{m} \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ und erlaubt dadurch das Studium des residualen Fehlerschätzers η, der in diesem Fall zuverlässig ist. Außerdem garantiert die a priori Analysis aus Kapitel 2 für dieses Beispiel optimales Konvergenzverhalten für $\varepsilon = h$, sofern der Lagrange-Parameter λ ebenfalls hinreichend glatt ist.

Die exakte Lösung $\mathbf{m}$ des zweiten Beispiels in Abschnitt 4.2.2 erfüllt gerade $\mathbf{m} \notin H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, und die a priori Analysis macht in diesem Fall keine Aussage über die Konvergenz der Fehlerterme. Tatsächlich zeigt sich bei uniformer Netzverfeinerung eine suboptimale Konvergenz, die belegt, daß für $\mathbf{m} \notin H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ nicht mehr die optimale Konvergenz zu erwarten ist. Andererseits erlaubt dieses Beispiel damit, die Auswirkung adaptiver Netzverfeinerung zu studieren, und es zeigt sich, daß adaptive Netzverfeinerung auf nahezu optimale Konvergenzrate führt. Ferner liefert dieses Beispiel Evidenz dafür, daß bei der Wahl des Penalisierungsparameters $\varepsilon = h^\alpha$ ein Wert $\alpha > 1$ zu favorisieren ist. Der glättungsbasierte Fehlerschätzer aus Abschnitt 3.5 erweist sich wie auch in anderen Anwendungen als äußerst akkurat in Bezug auf die Schätzung des (im allgemeinen unbekannten) Fehlers.
Bei der Konstruktion eines analytischen Beispiels kann man wie folgt vorgehen: Gegeben sei eine Magnetisierung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; B_2^d)$. Nach Definition des relaxierten Problems (RP) in (2.6)-(2.7) ist zusätzlich zu $\mathbf{m}$ ein Lagrange-Parameter $\lambda \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\geq 0})$ zu wählen, der der Gleichung

$$\lambda(1 - |\mathbf{m}|) = 0 \quad \text{f.ü. in } \Omega \tag{4.2}$$

genügt. Das äußere Feld $\mathbf{f} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$, das auf die Lösung $(\lambda, \mathbf{m})$ führt, wird nach Gleichung (2.8) durch

$$\mathbf{f} = \nabla(\mathcal{L}\mathbf{m}) + D\phi^{**}(\mathbf{m}) + \lambda\mathbf{m} \quad \text{f.ü. in } \Omega \tag{4.3}$$

gegeben. Mit der Gültigkeit von (4.1) kann die rechte Seite von $\mathbf{f} - \nabla(\mathcal{L}\mathbf{m}) = D\phi^{**}(\mathbf{m}) + \lambda\mathbf{m}$ punktweise berechnet werden. Anders verhält es sich mit dem magnetischen Potential $u = \mathcal{L}\mathbf{m}$, dessen Auswertung im folgenden approximativ vorgenommen wird. Der Integrand $\nabla(\mathcal{L}\mathbf{m})$ tritt bei der numerischen Implementierung von $(RP_{\varepsilon,h})$ in zwei Fällen auf:

- Für das Newton-Verfahren ist für alle $T \in \mathcal{T}$ das Integral

$$\int_T \mathbf{f}\, dx \tag{4.4}$$

  zu berechnen. Es ist also eine geeignete Approximation von $\int_T \nabla(\mathcal{L}\mathbf{m})\, dx$ zu bestimmen.

- Für die residualen Fehlerschätzer η und μ sind für $T \in \mathcal{T}$ und konstante Vektoren $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ Integrale der Gestalt

$$\|(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}) - \mathbf{c}\|_{L^1(T;\mathbb{R}^d)}, \tag{4.5}$$

  wie oben dargestellt, durch Quadratur zu berechnen.

In den folgenden numerischen Experimenten wird $\mathbf{f} = \nabla(\mathcal{L}\mathbf{m}) + D\phi^{**}(\mathbf{m}) + \lambda\mathbf{m} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ durch $\widetilde{\mathbf{f}} := \nabla(\mathcal{L}\mathbf{m}_{\mathcal{T}}) + D\phi^{**}(\mathbf{m}) + \lambda\mathbf{m}$ ersetzt. In Kapitel 3 wurde gezeigt, daß und wie die Terme (4.4) und (4.5) mit $\widetilde{\mathbf{f}}$ anstelle von $\mathbf{f}$ berechnet werden können. Lemma 4.1 rechtfertigt diese Vorgehen.

Lemma 4.1. *Für $\mathbf{m} \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ und $\lambda \in L^2(\Omega;\mathbb{R}_{\geq 0})$ gilt*

$$\|\mathbf{f} - \widetilde{\mathbf{f}}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} = \|\nabla(\mathcal{L}\mathbf{m}) - \nabla(\mathcal{L}\mathbf{m}_{\mathcal{T}})\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} = O(h).$$

Insbesondere folgen daher

$$\Big|\int_T \mathbf{f}\,dx - \int_T \widetilde{\mathbf{f}}\,dx\Big| = O(h^{1+d/2})$$

und mit $I(\mathbf{g}) := \|(\mathbf{g} - \mathbf{g}_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_h - (\nabla u_h)_{\mathcal{T}}) - \mathbf{c}\|_{L^1(T;\mathbb{R}^d)}$ für fixiertes $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\big|I(\widetilde{\mathbf{f}}) - I(\mathbf{f})\big| = O(h^2),$$

d.h. die residualen Fehlerschätzer werden mindestens mit $O(h)$ approximiert.

Beweis. Unter Ausnutzung der Orthogonalität der Projektion $\nabla\circ\mathcal{L}$ und einer Poincaré-Ungleichung erhält man

$$\|\nabla(\mathcal{L}\mathbf{m}) - \nabla(\mathcal{L}\mathbf{m}_{\mathcal{T}})\|_{L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)} \leq \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} = O(h).$$

Zusammen mit einer Hölder-Ungleichung zeigt eine grobe Abschätzung wegen $|T| \sim h^d$ also

$$\begin{aligned}\Big|\int_T \mathbf{f}\,dx - \int_T \widetilde{\mathbf{f}}\,dx\Big| &= \Big|\int_T \nabla(\mathcal{L}\mathbf{m})\,dx - \int_T \nabla(\mathcal{L}\mathbf{m}_{\mathcal{T}})\,dx\Big| \\ &\leq |T|^{1/2}\|\nabla(\mathcal{L}\mathbf{m}) - \nabla(\mathcal{L}\mathbf{m}_{\mathcal{T}})\|_{L^2(T;\mathbb{R}^d)} = O(h^{1+d/2}).\end{aligned}$$

Mit Dreiecksungleichung, Hölder-Ungleichung und Orthogonalitätseigenschaft von $(\cdot)_{\mathcal{T}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\big|I(\widetilde{\mathbf{f}}) - I(\mathbf{f})\big| &\leq \|(\widetilde{\mathbf{f}} - \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathcal{T}}) - (\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\mathcal{T}})\|_{L^1(T;\mathbb{R}^d)} \leq |T|^{1/2}\|(\mathrm{id} - (\cdot)_{\mathcal{T}})(\widetilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f})\|_{L^2(T;\mathbb{R}^d)} \\ &\leq |T|^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_{L^2(T;\mathbb{R}^d)} = |T|^{1/2}\|\nabla(\mathcal{L}\mathbf{m}) - \nabla(\mathcal{L}\mathbf{m}_{\mathcal{T}})\|_{L^2(T;\mathbb{R}^d)} = O(h^{1+d/2}).\end{aligned}$$

Der Nachsatz folgt durch Summation. ■

Bemerkung. Es sei $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{dN}$ der Koeffizientenvektor von $\mathbf{m}_{\mathcal{T}}$ bezüglich der Basisdarstellung (3.3),

$$\mathbf{m}_{\mathcal{T}} = \sum_{k=1}^{N} \chi_{T_k}(\mathbf{Y}_{2k-1}\mathbf{e}_1 + \mathbf{Y}_{2k}\mathbf{e}_2) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{m}_{\mathcal{T}} = \sum_{k=1}^{N} \chi_{T_k}(\mathbf{Y}_{3k-2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{Y}_{3k-1}\mathbf{e}_2 + \mathbf{Y}_{3k}\mathbf{e}_3).$$

Nach Lemma 3.11 gilt dann für $\widetilde{u} := \mathcal{L}\mathbf{m}_{\mathcal{T}}$ für $d = 2, 3$

$$\int_{T_j} \nabla\widetilde{u}\,dx = \big((\mathbf{AY})_{2j-1}, (\mathbf{AY})_{2j}\big) \text{ bzw. } \int_{T_j} \nabla\widetilde{u}\,dx = \big((\mathbf{AY})_{3j-2}, (\mathbf{AY})_{3j-1}, (\mathbf{AY})_{3j}\big)$$

mit dem Vektor $\mathbf{AY} \in \mathbb{R}^{dN}$. Ferner läßt sich zu vorgegebenen Quadraturpunkten $x^{(\ell)} \in \Omega$ der Gradient $\nabla\widetilde{u}(x^{(\ell)})$ mit den Matrizen $B^{(1)}, \ldots, B^{(d)} \in \mathbb{R}^{LN\times dN}$ aus Abschnitt 3.6.4 durch

$$\nabla\widetilde{u}(x^{(\ell)}) = \big((B^{(1)}\mathbf{Y})_\ell, \ldots, (B^{(d)}\mathbf{Y})_\ell\big)$$

berechnen. Die benötigten Matrizen $\mathbf{A}, B^{(j)}$ werden ohnehin im Programmablauf aufgebaut, vgl. Kapitel 3. □

4.2.1 Ein akademisches Beispiel mit Lösung $\mathbf{m} \in W^{1,\infty}(\Omega; B_2^2)$

Auf $\Omega := (0,1)^2$ sei die exakte Lösung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; B_2^2)$ gegeben durch

$$\mathbf{m}(x) := \begin{cases} x & \text{für } |x| \le 1, \\ x/|x| & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Eine notwendige Bedingung an den Lagrange-Parameter $\lambda \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\ge 0})$ ist nach Definition von $\mathbf{m}$ lediglich

$$\lambda(x) = 0 \quad \text{für } |x| < 1, \tag{4.6}$$

denn jedes $\lambda \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\ge 0})$ mit (4.6) erfüllt auch (4.2). Insbesondere kann nach Definition von $\mathbf{m}$ der Wert $\lambda(x)$ für $x \in \Omega$ mit $|x| \ge 1$ nahezu beliebig gewählt werden. Es werden drei in diesem Sinn zulässige Lagrange-Parameter getestet,

$$\lambda^{(1)} \equiv 0, \qquad \lambda^{(2)}(x) = (|x| - 1)_+, \qquad \lambda^{(3)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < 1, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.7}$$

Bemerkung. Die exakte Magnetisierung $\mathbf{m}$ ist Lipschitz-stetig, d.h. es gilt $\mathbf{m} \in W^{1,\infty}(\Omega; B_2^2)$.

Beweis. Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt im Fall $|x| \le 1 \le |y|$

$$|\mathbf{m}(x) - \mathbf{m}(y)| = \Big|x - \frac{y}{|y|}\Big| = \frac{|\{x-y\}|y| + \{|y|-1\}y|}{|y|} \le |x-y| + \{|y|-1\} \le 2|x-y|,$$

und für $1 \le |x| \le |y|$ gilt

$$|\mathbf{m}(x) - \mathbf{m}(y)| = \Big|\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}\Big| = \frac{|\{x-y\}|y| + \{|y|-|x|\}y|}{|x||y|} \le \frac{2|x-y|}{|x|} \le 2|x-y|.$$

Dies zeigt die Lipschitz-Stetigkeit von $\mathbf{m}$, da der Fall $|x| \le |y| \le 1$ offensichtlich ist. ■

Als letzter freier Parameter wird der Vektor $z = (1,1)/\sqrt{2}$ gewählt, so daß von den diskreten Lösungen die Symmetrie zu erwarten ist. Es bezeichnet $z^\perp \in S_2^2$ die *easy axis*, d.h. $\{z, z^\perp\}$ ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$. Das Anfangsnetz $\mathcal{T}^{(0)}$ ist ein uniformes Netz aus vier Quadraten mit Seitenlänge 1/2. Eine Approximation des *unbekannten* magnetischen Potentials $u \in W_1^2(\mathbb{R}^2)$ findet sich in Abbildung 4.1 für ein uniformes Netz $\mathcal{T}$ mit 256 Elementen.

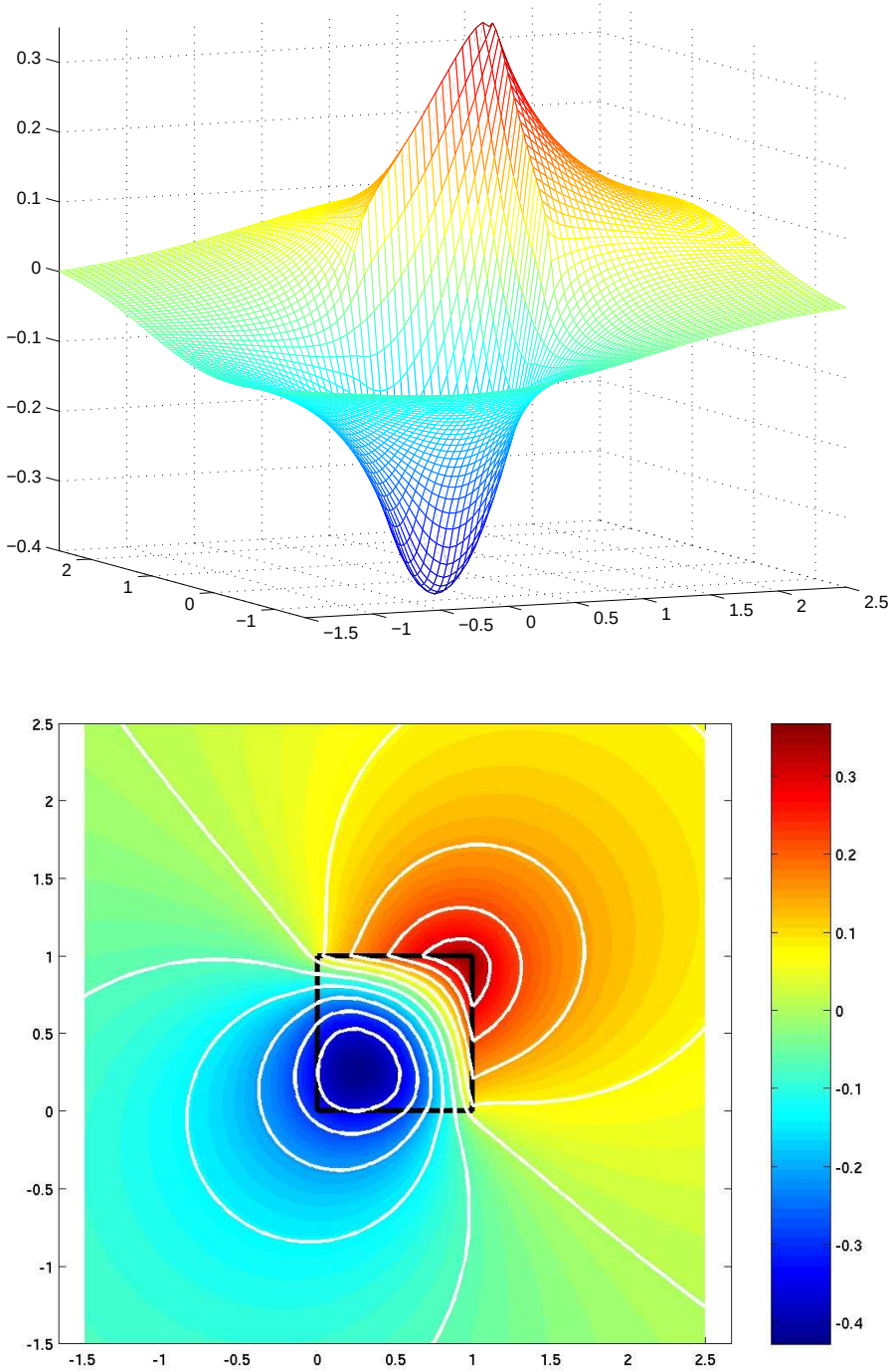


Abbildung 4.1: *Magnetisches Potential* $\widetilde{u} = \mathcal{L}\mathbf{m}_{\mathcal{T}}$ *in Beispiel 4.2.1 zur diskreten (bestapproximierenden) Magnetisierung* $\mathbf{m}_{\mathcal{T}}$ *auf uniformem Netz* $\mathcal{T}_3$ *(*$N = 256$*). Das obere Bild zeigt* $\widetilde{u}(x)$ *als Plot über der Fläche* $[-3/2, 5/2]^2$*. Das untere Bild zeigt die Projektion von* $\widetilde{u}(x)$ *in die* x_1*-*x_2*-Ebene, wobei der Wert* $\widetilde{u}(x)$ *farbig dargestellt ist und einige Isolinien zu* $\widetilde{u}(x)$ *weiß eingezeichnet sind.*

A priori Erwartungen an die numerischen Resultate. Nach der vorausgegangenen Bemerkung gilt insbesondere $\mathbf{m} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, und in den Beispielen $\lambda = \lambda^{(1)}$ und $\lambda = \lambda^{(2)}$ gilt ferner $\lambda\mathbf{m} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Die a priori Analysis aus Kapitel 2 zeigt für diese Fälle

$$\|u - u_h\|_{W_1^2(\mathbb{R}^2)} + \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \cdot z\|_{L^2(\Omega)} + \|\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} = O(\varepsilon + h), \tag{4.8}$$

wenn $(\lambda_h, \mathbf{m}_h)$ die Lösung von $(RP_{\varepsilon,h})$ bezeichnet, siehe Satz 2.31. Zunächst ist empirisch zu klären, wie der Penalisierungsparameter ε *optimal* zu wählen ist. Man erwartet als optimale Wahl $\varepsilon = h^\alpha$ mit $\alpha \geq 1$ bzw. sogar $\alpha = 1$. Nach Korollar 2.36 ist der analytisch untersuchte Fehlerschätzer η zuverlässig. Die von η involvierten Terme lassen erwarten, daß η mit der optimalen Ordnung $1/2$ konvergieren wird und damit auch Effizienz besitzt. Insbesondere wird dann der *stets zuverlässige* Fehlerschätzer μ eine Konvergenzordnung von $1/4$ haben.

Das a priori Resultat zeigt insbesondere

$$\varepsilon^{-1}(|\mathbf{m}_h| - 1)_+ = |\lambda_h\mathbf{m}_h| \to |\lambda\mathbf{m}| = \lambda|\mathbf{m}|$$

punktweise fast überall. Im Bereich $\Omega_\lambda := \{\mathbf{x} \in \Omega \,|\, |\mathbf{m}(x)| = 1\}$ folgt damit insbesondere $\varepsilon^{-1}(|\mathbf{m}_h| - 1)_+ \to \lambda$. Dies läßt erwarten, daß alle diskreten Lösungen auf uniformen Netzen unabhängig von $\alpha > 0$ und $\varepsilon = h^\alpha$ auf denselben Bereich $\Omega_h := \{x \in \Omega \,|\, \lambda_h(x) \neq 0\}$ führen.

Gliederung der numerischen Experimente. Die nachfolgenden Abbildungen 4.2, 4.4 sowie 4.6 zeigen die Abhängigkeit von $E_1 = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \cdot z\|_{L^2(\Omega)}$, $E_2 = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \cdot z^\perp\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ und der Anzahl der Newton-Schritte zur Berechnung der diskreten Lösung $\mathbf{m}_h$ zu $\lambda = \lambda^{(j)}$ für $j = 1, 2, 3$, von der Wahl des Penalisierungsparameter $\varepsilon = h^\alpha$ für $\alpha \in \{n/4 \,|\, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 12\}$ und vom Startvektor des Newton-Verfahrens.

Die Abbildungen 4.3, 4.5 und 4.7 zeigen beispielhaft einige diskrete Lösungen. Ferner wird die Stabilität des Newton-Verfahrens gegenüber dem Startwert untersucht. Dazu wird die Berechnung von $\mathbf{m}_h$ einmal mit dem Nullvektor als Startvektor gestartet und ferner mit der prolongierten Lösung vom vorausgegangenen Netz (sog. *nested iterations*).

Es folgen Untersuchungen zur Zuverlässigkeit und Effizienz der Fehlerschätzer η und ζ auf uniformen Netzen, die in den Abbildungen 4.8 zusammengefaßt sind. Die Abbildungen 4.9 und 4.11 zeigen das Verhalten der Fehlerterme und Indikatoren bei indikatorgesteuerter adaptiver Netzverfeinerung für $\lambda = \lambda^{(3)}$ und $\varepsilon = h$. Dies ist der einzige Fall, bei dem sich die optimale Konvergenzordnung des Fehlers *nicht* bei uniformer Netzverfeinerung einstellt. Die erste Abbildung gibt den L^2-Fehler von $\mathbf{m}_h$ zu $\mathbf{m}$ komponentenweise wieder, die zweite die übrigen Fehlerterme. Schließlich zeigt Abbildung 4.12 einige η-adaptiv generierte Netze sowie die Verteilung von Fehler E und Fehlerschätzer η auf diesen.

Einfluß von $\varepsilon = h^\alpha$ auf die Konvergenz des Verfahrens. Die Glattheit $\lambda^{(\ell)}\mathbf{m} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, für die die a priori Fehlerabschätzung optimale Konvergenz verspricht, ist für $\ell = 1, 2$ gegeben. Im Fall $\ell = 1$ zeigt die Abbildung 4.2, daß die Wahl von $\varepsilon = h^\alpha$ den Approximationsfehler nicht beeinflußt. Dies liegt vor allem daran, daß bei dieser Wahl von $\lambda = \lambda^{(1)}$ im Verlauf des Verfahrens kaum Bereiche auftreten, in denen penalisiert wird. Auf dem uniformen Netz $\mathcal{T}_4$ ($N = 1024$) ist weder bei der diskreten Lösung $\mathbf{m}_h$ zu $\alpha = 1$ noch bei der zu $\alpha = 3/2$ eine Penalisierung sichtbar, siehe Abbildung 4.3. Insbesondere gibt diese Abbildung Evidenz dafür, daß die diskreten Lösungen $\mathbf{m}_h$ zu $\varepsilon = h$ und $\varepsilon = h^{3/2}$ übereinstimmen. Die numerischen Experimente zeigen, daß das Newton-Verfahren auch für den Fall, daß als Startvektor einfach der Nullvektor genommen wird, konvergiert.

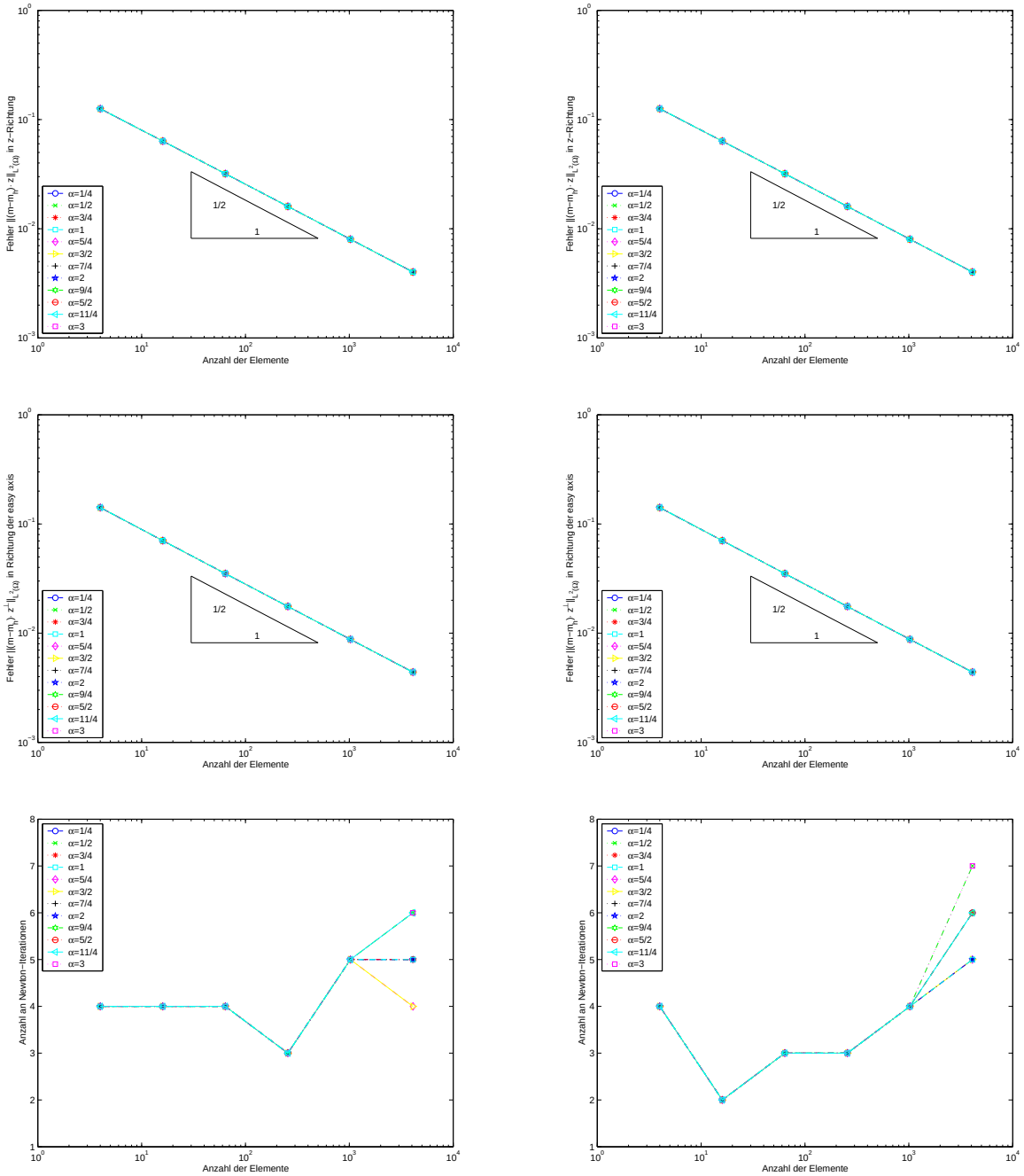


Abbildung 4.2: *Abhängigkeit der Fehler für* $\lambda = \lambda^{(1)}$ *von Penalisierungsparameter und Startvektor im Newton-Verfahren. Die Abbildungen zeigen die a priori kontrollierten Fehler* $E_1 = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \cdot z\|_{L^2(\Omega)}$ *(oben), die nicht-kontrollierten Fehler* $E_2 = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \cdot z^{\perp}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ *(mittig) und die Anzahl der Newton-Schritte zur Berechnung von* $\mathbf{m}_h$ *(unten), wenn das Newton-Verfahren mit dem Nullvektor gestartet wird (links) bzw. bei* nested iterations *(rechts). In allen Fällen ist optimale experimentelle Konvergenz erkennbar, und der Fehler ist unabhängig von der Wahl des Startvektors. Das Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens erweist sich als unabhängig vom Startvektor.*

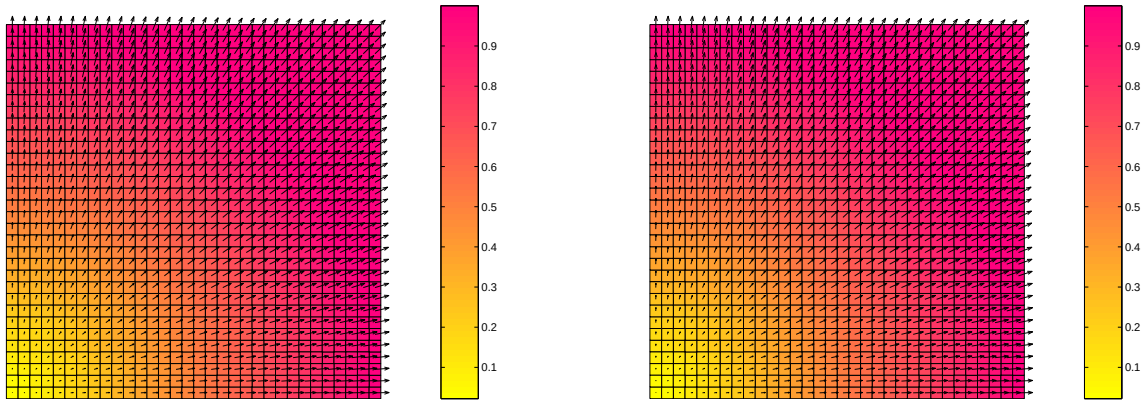


Abbildung 4.3: *Die diskrete Lösung* $\mathbf{m}_h$ *(links) im Fall* $\lambda = \lambda^{(1)}$ *zum uniformen Netz* $\mathcal{T}_4$ *(*$N = 1024$*) und* $\varepsilon = h$ *(links) bzw.* $\varepsilon = h^{3/2}$ *(rechts). Die beiden Lösungen stimmen überein, da in beiden Fällen* $|\mathbf{m}_h| \leq 1$ *in* Ω *gilt.*

Das Newton-Verfahren scheint in diesem Fall also robust gegenüber der Wahl des Startvektors zu sein.

Anders verhält sich das im Fall $\lambda = \lambda^{(2)}$. Es gilt zwar immer noch $\lambda\mathbf{m} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, aber beim numerischen Experiment treten größere Bereiche auf, in denen penalisiert wird, siehe Abbildung 4.5. Die a priori Abschätzung (4.8) zeigt, daß der penalisierte Bereich auftreten muß, denn es gilt $\lambda_h\mathbf{m}_h \to \lambda\mathbf{m}$ in $L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ für $h \to 0$. Abbildung 4.5 zeigt, daß beim numerischen Experiment für $\varepsilon = h$ und $\varepsilon = h^\alpha$ in denselben Bereichen von Ω penalisiert wird. Es ist aber bereits sichtbar, daß die Länge des diskreten Vektorfelds im penalisierten Bereich für $\varepsilon = h^{3/2}$ kleiner ist als bei der entsprechenden Lösung zu $\varepsilon = h$. Der L^2-Fehler E_2 in Richtung der *easy axis* konvergiert unabhängig vom Startvektor für das Newton-Verfahren und vom Penalisierungsparameter $\varepsilon = h^\alpha$ (abgesehen von $\alpha = 1/4$) mit optimaler Konvergenzrate $1/2$. Die L^2-Konvergenz von $\mathbf{m}_h$ in Richtung z wird aber gestört und sinkt mit α ab: Für die Werte $\alpha \in \{1/4, 1/2, 3/4\}$ kleiner als 1 ist die Konvergenzrate schlechter als $O(N^{1/2})$. Für $\alpha > 1$ stimmen die Fehler überein, und auch der Fehler für $\alpha = 1$ konvergiert mit der Ordnung $O(N^{1/2})$ und koinzidiert annähernd mit den Fehlerwerten für größere α.

Im Fall, daß $\lambda = \lambda^{(3)}$ unstetig ist, ist schließlich $\lambda\mathbf{m} \notin H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Für $\alpha \leq 1$ sind die Konvergenzraten von E_1 und E_2 deutlich schlechter als $O(N^{1/2})$, für $\alpha = 1/4$ liegt praktisch keine Konvergenz mehr vor. Mit steigendem α nimmt die Konvergenzordnung zu. Für $\alpha \geq 1$ stellt sich annähernd optimale Konvergenz ein, wobei die absoluten Fehlerwerte für $\alpha = 1$ ein wenig schlechter sind als die für größeres α. Für $\alpha \geq 3/2$ koinzidieren die absoluten Fehlerwerte dann wieder annähernd.

Abbildung 4.7 zeigt, daß der Mangel an Konvergenz für $\alpha < 1$ daran liegt, daß die Länge von $\mathbf{m}_h$ nicht hinreichend penalisiert wird. Man kann sehen, daß die penalisierten Bereiche für $\varepsilon \in \{h^{1/2}, h, h^{3/2}\}$ wieder übereinstimmen. Im Fall $\varepsilon = h^{1/2}$ ist die Länge von $\mathbf{m}_h$ in diesem Bereich aber um 10% größer als zum Beispiel beim numerischen Experiment zu $\varepsilon = h$. Dies offenbart den Konflikt des Verfahrens zwischen der L^2-Konvergenz $\mathbf{m}_h \cdot z \to \mathbf{m} \cdot z$ einerseits und $\lambda_h\mathbf{m}_h \to \lambda\mathbf{m}$ andererseits.

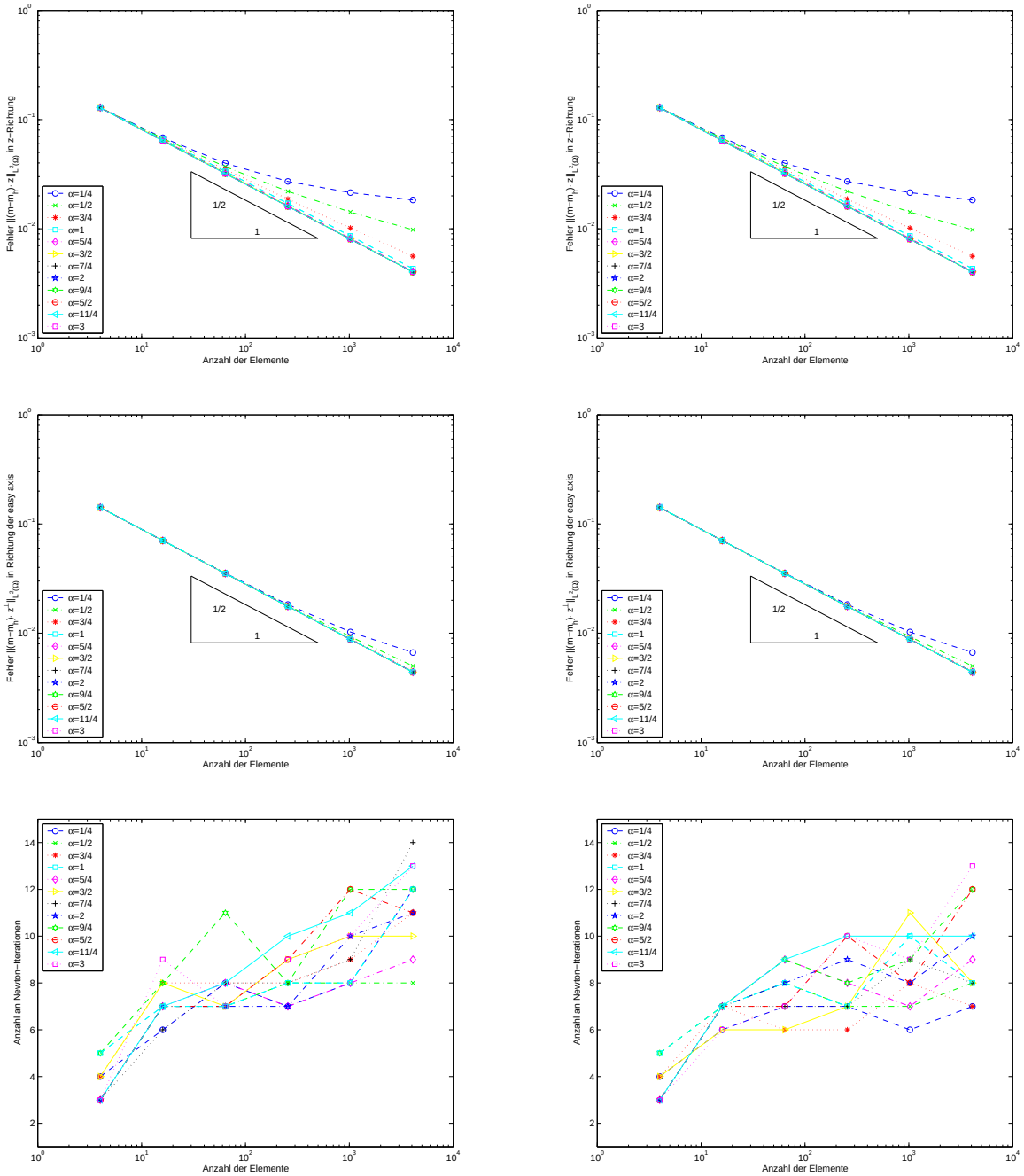


Abbildung 4.4: *Abhängigkeit der Fehler für* $\lambda = \lambda^{(2)}$ *von Penalisierungsparameter und Startvektor im Newton-Verfahren. Die Abbildungen zeigen die a priori kontrollierten Fehler* $E_1 = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \cdot z\|_{L^2(\Omega)}$ *(oben), die nicht-kontrollierten Fehler* $E_2 = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \cdot z^{\perp}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ *(mittig) und die Anzahl der Newton-Schritte zur Berechnung von* $\mathbf{m}_h$ *(unten), wenn das Newton-Verfahren mit dem Nullvektor gestartet wird (links) bzw. bei* nested iterations *(rechts). Die Wahl des Startvektors zeigt keine Auswirkungen auf die Konvergenz des Verfahrens. Bei* nested iterations *sinkt die Anzahl der benötigten Newton-Schritte ein wenig ab.*

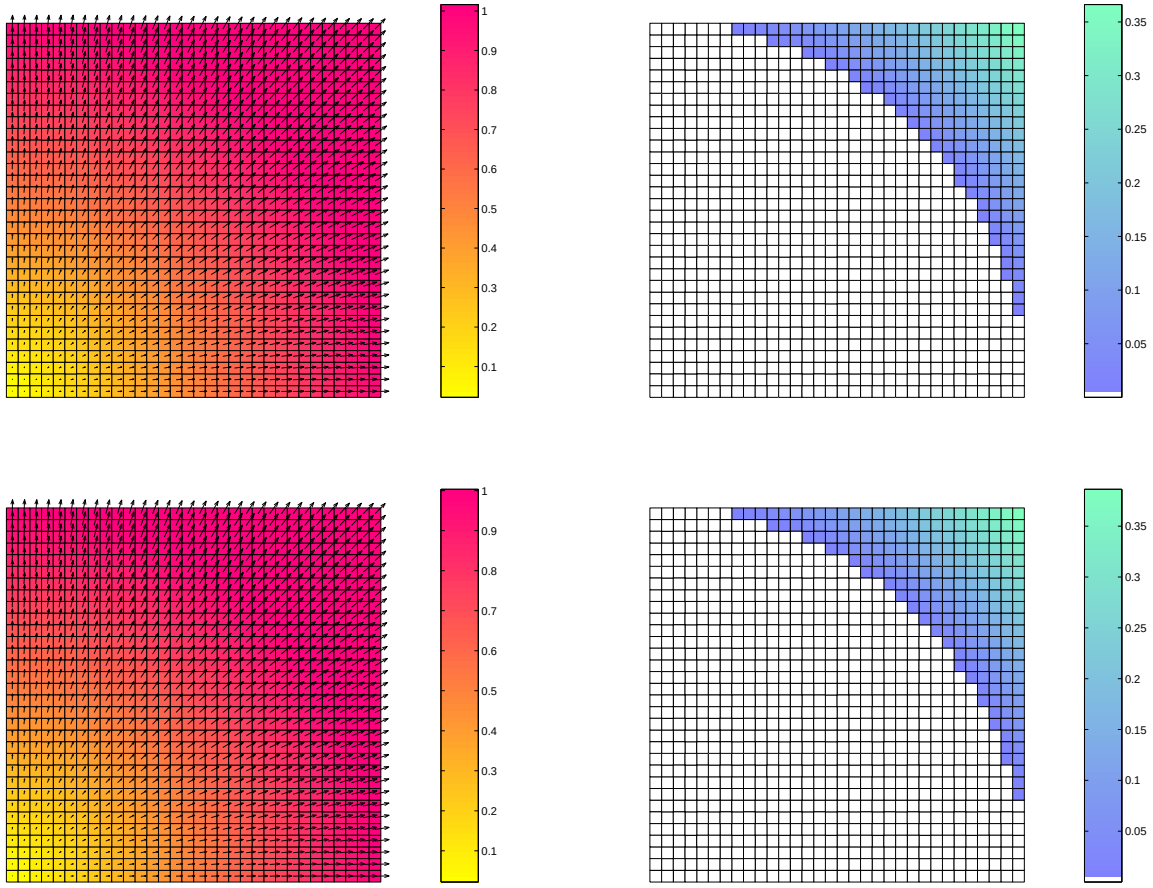


Abbildung 4.5: *Die diskrete Lösung* $\mathbf{m}_h$ *(links) im Fall* $\lambda = \lambda^{(2)}$ *zum uniformen Netz* $\mathcal{T}_4$ *(*$N = 1024$*) und* $\varepsilon = h$ *(oben) bzw.* $\varepsilon = h^{3/2}$ *(unten) sowie der zugehörige diskrete Lagrange-Parameter* λ_h *(rechts). Auf den weißen Elementen gilt* $\lambda_h = 0$*, d.h.* $|\mathbf{m}_h| \leq 1$*. Die Länge des Vektorfeldes* $\mathbf{m}_h$ *ist links farbig dargestellt. Die beiden diskreten Lösungen stimmen im Prinzip überein, insbesondere stimmen die Bereiche von* Ω *überein, auf denen penalisiert wird.*

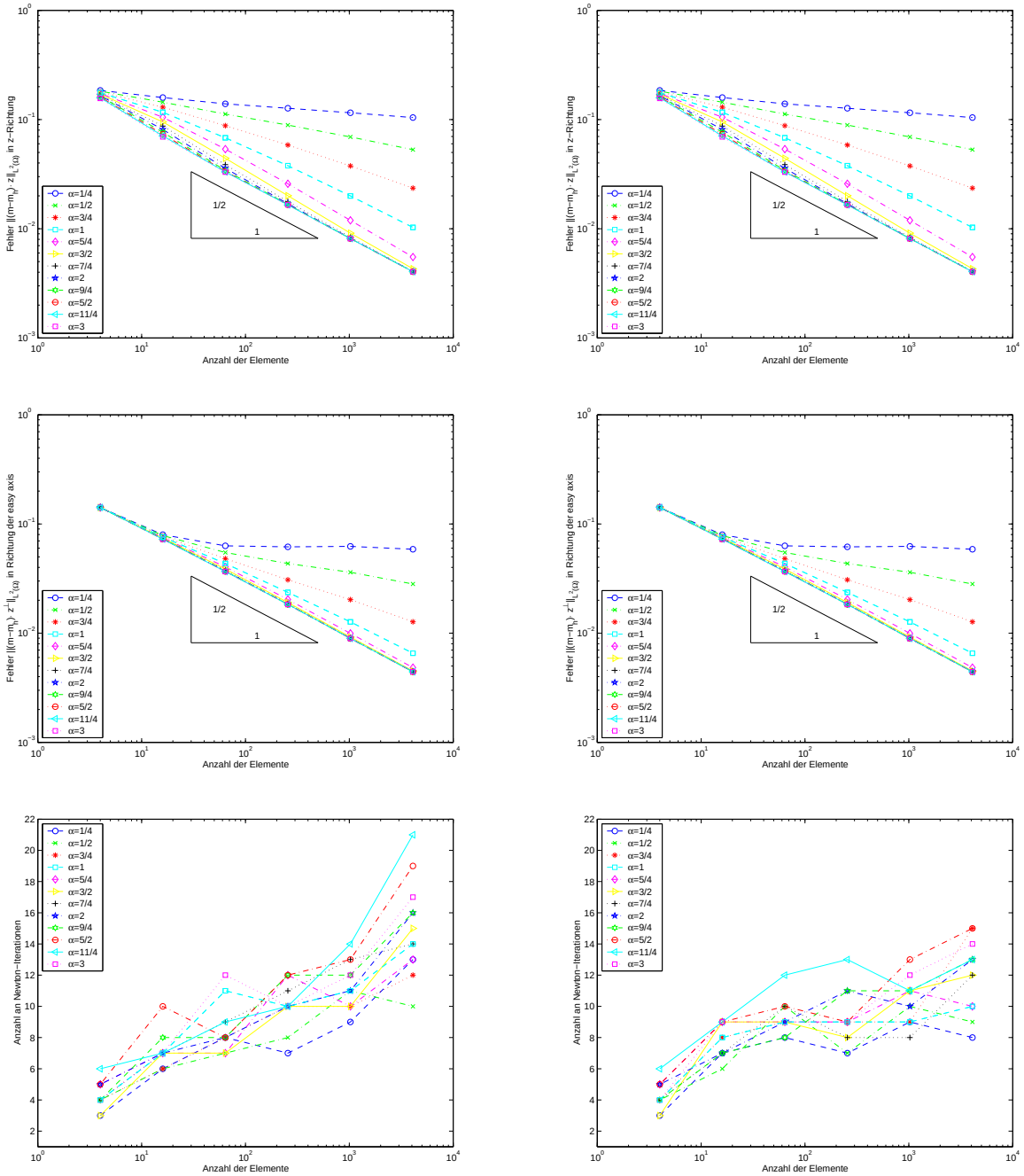


Abbildung 4.6: *Abhängigkeit der Fehler für* $\lambda = \lambda^{(3)}$ *von Penalisierungsparameter und Startvektor im Newton-Verfahren. Die Abbildungen zeigen die a priori kontrollierten Fehler* $E_1 = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \cdot z\|_{L^2(\Omega)}$ *(oben), die nicht-kontrollierten Fehler* $E_2 = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \cdot z^{\perp}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ *(mittig) und die Anzahl der Newton-Schritte zur Berechnung von* $\mathbf{m}_h$ *(unten), wenn das Newton-Verfahren mit dem Nullvektor gestartet wird (links) bzw. bei* nested iterations *(rechts). Die Wahl des Startvektors zeigt keine Auswirkungen auf die Konvergenz des Verfahrens. Dennoch zeigt sich deutlich die Aufwandsreduktion im Newton-Verfahren bei* nested iterations.

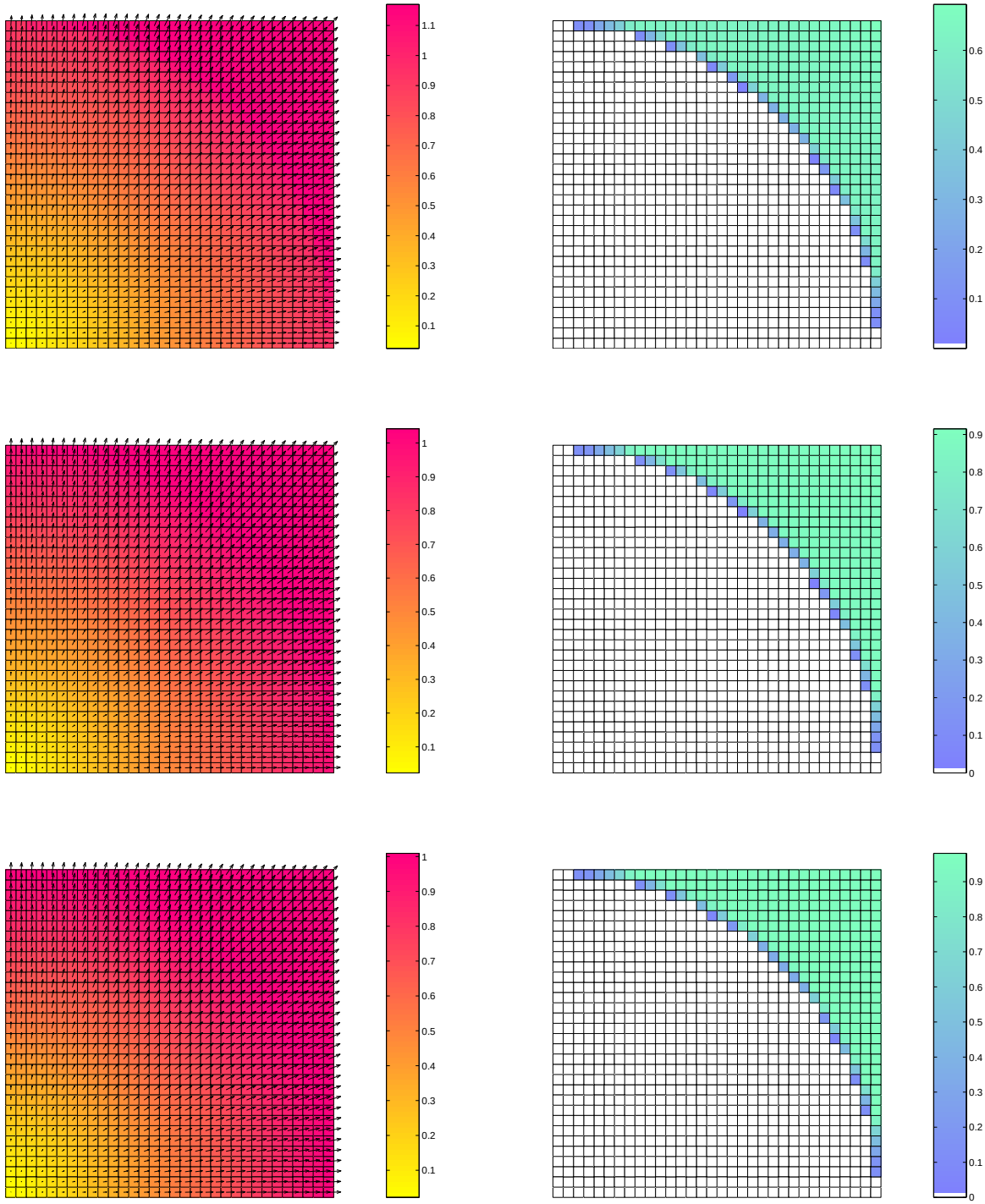


Abbildung 4.7: *Die diskrete Lösung* $\mathbf{m}_h$ *(links) im Fall* $\lambda = \lambda^{(3)}$ *zum uniformen Netz* $\mathcal{T}_4$ *(*$N = 1024$*) und* $\varepsilon = h^{1/2}$ *(oben),* $\varepsilon = h$ *(mittig) bzw.* $\varepsilon = h^{3/2}$ *(unten) sowie der zugehörige diskrete Lagrange-Parameter* λ_h *(rechts). Auf den weißen Elementen gilt* $\lambda_h = 0$*, d.h.* $|\mathbf{m}_h| \leq 1$*. Die Länge des Vektorfeldes* $\mathbf{m}_h$ *ist links farbig dargestellt. Es zeigt sich, daß der Bereich, in dem penalisiert wird, unabhängig ist von* α*. Die Länge der diskreten Magnetisierung* $|\mathbf{m}_h|$ *variiert aber bei unterschiedlichen Penalisierungen.*

Konklusion zur Konvergenz des Verfahrens auf uniformen Netzen. Anders als im diskreten Modell in Carstensen-Prohl [24] und Funken-Prohl [29] ist kein wesentlicher Einfluß von der Wahl von $\varepsilon = h^\alpha$ auf die Anzahl der Newton-Schritte, die bei gegebenem Netz $\mathcal{T}$ zur Berechnung von $\mathbf{m}_h$ benötigt werden, erkennbar. Die Anzahl der Newton-Schritte differiert abhängig von $\alpha \geq 1$ maximal um 7 Schritte. Der Penalisierungsparameter $\alpha = 1$ liefert in den Fällen $\lambda = \lambda^{(1)}$ und $\lambda = \lambda^{(2)}$ sowohl für den Fehler E_1 in z-Richtung als auch für den Fehler E_2 in $z^\perp$-Richtung die optimale Konvergenzrate 1/2. Im Fall, daß $\lambda = \lambda^{(3)}$ unstetig ist, stellt sich für $\alpha = 1$ nur annähernd die Konvergenzordnung 1/2 für die beiden Fehlerterme ein, eine Wahl von $\alpha \geq 3/2$ führt auf optimale Konvergenz. Sowohl bei der Betrachtung des absoluten Fehlers als auch bei Betrachtung der Anzahl der Newton-Schritte zeigt sich also, daß eine Wahl von $\alpha > 1$ sinnvoll erscheint, denn die absoluten Fehlerwerte werden besser, die Anzahl der Newton-Schritte stimmt aber im wesentlichen mit der für $\alpha = 1$ überein. Der Startvektor hat auf die Konvergenz des Newton-Verfahrens keinen Einfluß. Da aber im Fall von *nested iterations* die Anzahl der benötigten Newton-Schritte sinkt, ist dieses Vorgehen vorzuziehen.

Das in Kapitel 2 bewiesene a priori Resultat (4.8) garantiert nur die L^2-Konvergenz von $\mathbf{m}_h$ gegen $\mathbf{m}$ in Richtung von $z \in S_2^2$. Die Konvergenz in Richtung der *easy axis* konnte nicht bewiesen werden, zeigt sich hier aber empirisch. Es ist sogar darauf hinzuweisen, daß der L^2-Fehler E_2 in Richtung der *easy axis* stets mit mindestens derselben Ordnung konvergiert wie der a priori Term E_1.

Die Fehlerschätzer $\boldsymbol{\eta}$ und $\boldsymbol{\zeta}$. Wegen $\mathbf{m} \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ ist der residuale Fehlerschätzer η zuverlässig. Die Abbildungen 4.8 zeigen die Konvergenzordnungen von η, den Fehlern E_1, E_2 und den auf Glättung basierten Schätzern $\zeta_1 = \|(\mathbf{m}_h - \mathcal{A}\mathbf{m}_h) \cdot z\|_{L^2(\Omega)}$ und $\zeta_2 = \|(\mathbf{m}_h - \mathcal{A}\mathbf{m}_h) \cdot z^\perp\|_{L^2(\Omega)}$. Bei Betrachtung der stetigen Fälle für $\lambda^{(1)}$ und $\lambda^{(2)}$ schätzen ζ_1 und ζ_2 den Fehler in z- bzw. $z^\perp$-Richtung exakt, d.h. ζ_1 und ζ_2 scheinen zuverlässig und effizient zu sein, und auch der Fehlerschätzer η besitzt die optimale Konvergenzordnung, erweist sich also experimentell ebenfalls als effizient.

Im unstetigen Fall $\lambda = \lambda^{(3)}$ scheinen ζ_1 und ζ_2 dagegen für $\varepsilon = h$ die Zuverlässigkeit zu verlieren, denn sie konvergieren weiterhin mit optimaler Konvergenzrate, wogegen die Fehler E_1 und E_2 mit verringerter Ordnung konvergieren – E_1 ungefähr mit Ordnung 0.46, E_2 mit der Ordnung 0.44. Im Fall $\varepsilon = h^{3/2}$ zeigen beide Schätzer wieder dasselbe Verhalten wie der tatsächliche Fehler und decken sich sogar mit ihnen für großes N. Der Fehlerschätzer η konvergiert mit leicht verminderter Konvergenzrate.

Bemerkung. In den Abbildungen 4.8 sind die Fehler E_j und die Glättungsfehlerschätzer ζ_j auf Netzen $\mathcal{T}^{(k)}$ für $k = 1, \ldots 5$ mit $N = 4, \ldots, 4096$ Elementen abgebildet. Die Berechnung der residualen Fehlerschätzer ist so speicherintensiv, daß sie mit den vorhandenen Rechnerkapazitäten lediglich auf den Netzen $\mathcal{T}^{(0)}$ bis $\mathcal{T}^{(4)}$ (d.h. $N = 1024$) durchgeführt werden konnte. □

Adaptive Netzverfeinerung mittels der Schätzer $\boldsymbol{\eta}$ und $\boldsymbol{\zeta}$. In Beispiel 4.2.1 scheint eine indikatorgesteuerte adaptive Netzverfeinerung wenig sinnvoll: In den stetigen Fällen $\lambda = \lambda^{(1)}$ bzw. $\lambda = \lambda^{(2)}$ besitzen beiden Komponenten des Fehlers ebenso wie die Fehlerschätzer die optimale Konvergenzrate. Tatsächlich zeigt sich im Experiment, daß die Netze durch die Verfeinerungsindikatoren auch uniform verfeinert werden. Lediglich im Fall $\lambda = \lambda^{(3)}$ und $\varepsilon = h$ ist die Konvergenzrate der Fehler leicht suboptimal. Die Tabellen 4.1 auf Seite 128 zeigen die Werte der komponentenweisen Fehler $E_j^{(k)}$ und der Fehlerschätzer $\zeta_j^{(k)}$ und $\eta^{(k)}$ sowie die experimentellen Konvergenzraten $\kappa^{(k)}$ bei

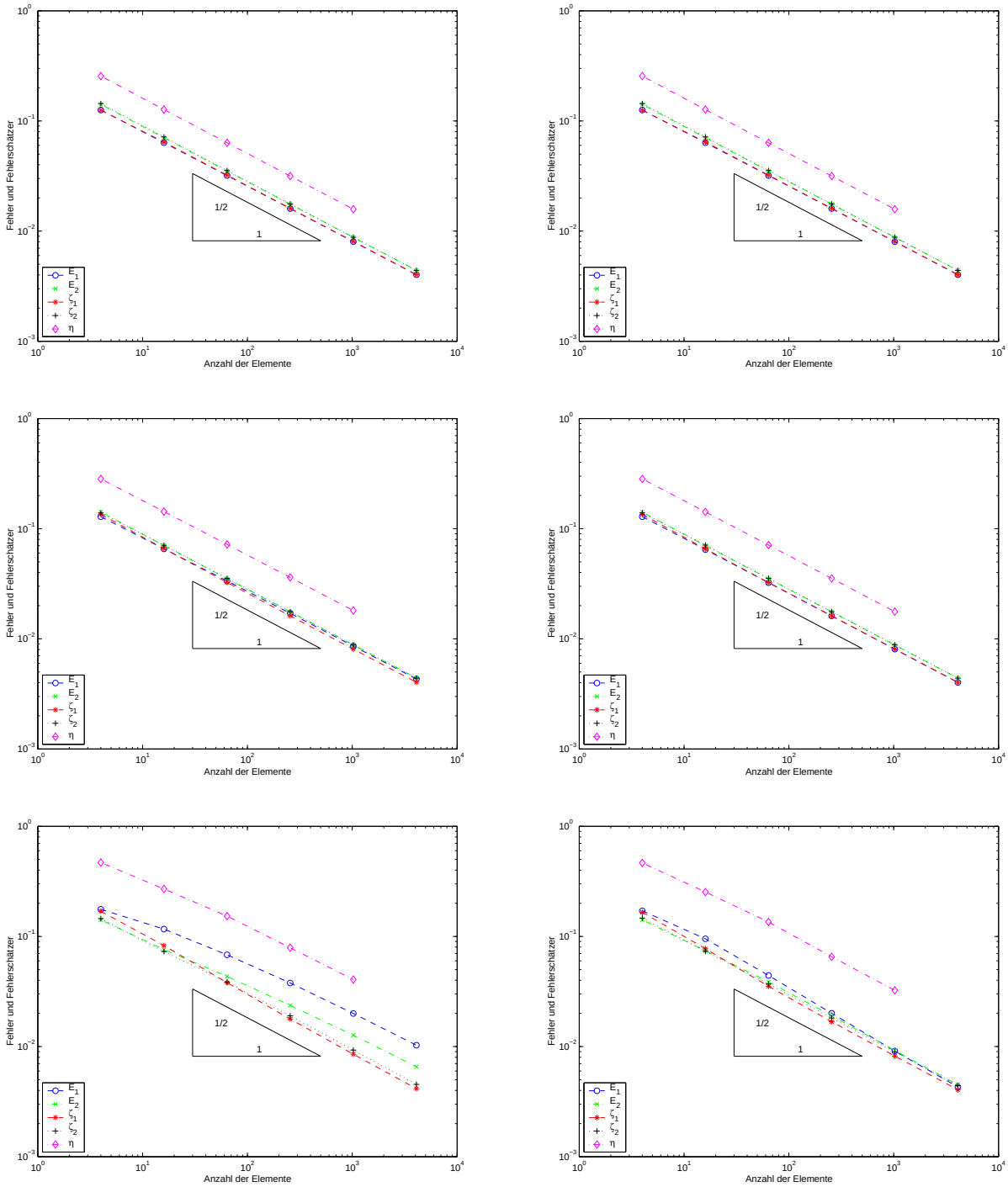


Abbildung 4.8: *Fehler und Fehlerschätzer bei uniformer Netzverfeinerung im Fall* $\alpha = 1$ *(links) und* $\alpha = 3/2$ *(rechts) sowie* $\lambda = \lambda^{(1)}$ *(oben),* $\lambda = \lambda^{(2)}$ *(mittig) und* $\lambda = \lambda^{(3)}$ *(unten). Lediglich im Fall* $\lambda = \lambda^{(3)}$ *und* $\alpha = 1$ *führt uniforme Netzverfeinerung* nicht *auf die optimale Konvergenz der Fehlerterme* E_1 *und* E_2*. Dies ist auch der einzige Fall, in dem die glättungsbasierten Fehlerschätzer* ζ_1, ζ_2 *ihre Zuverlässigkeit einzubüßen scheinen. In allen anderen Fällen sind die* ζ_j *gute Approximationen der exakten Fehler.*

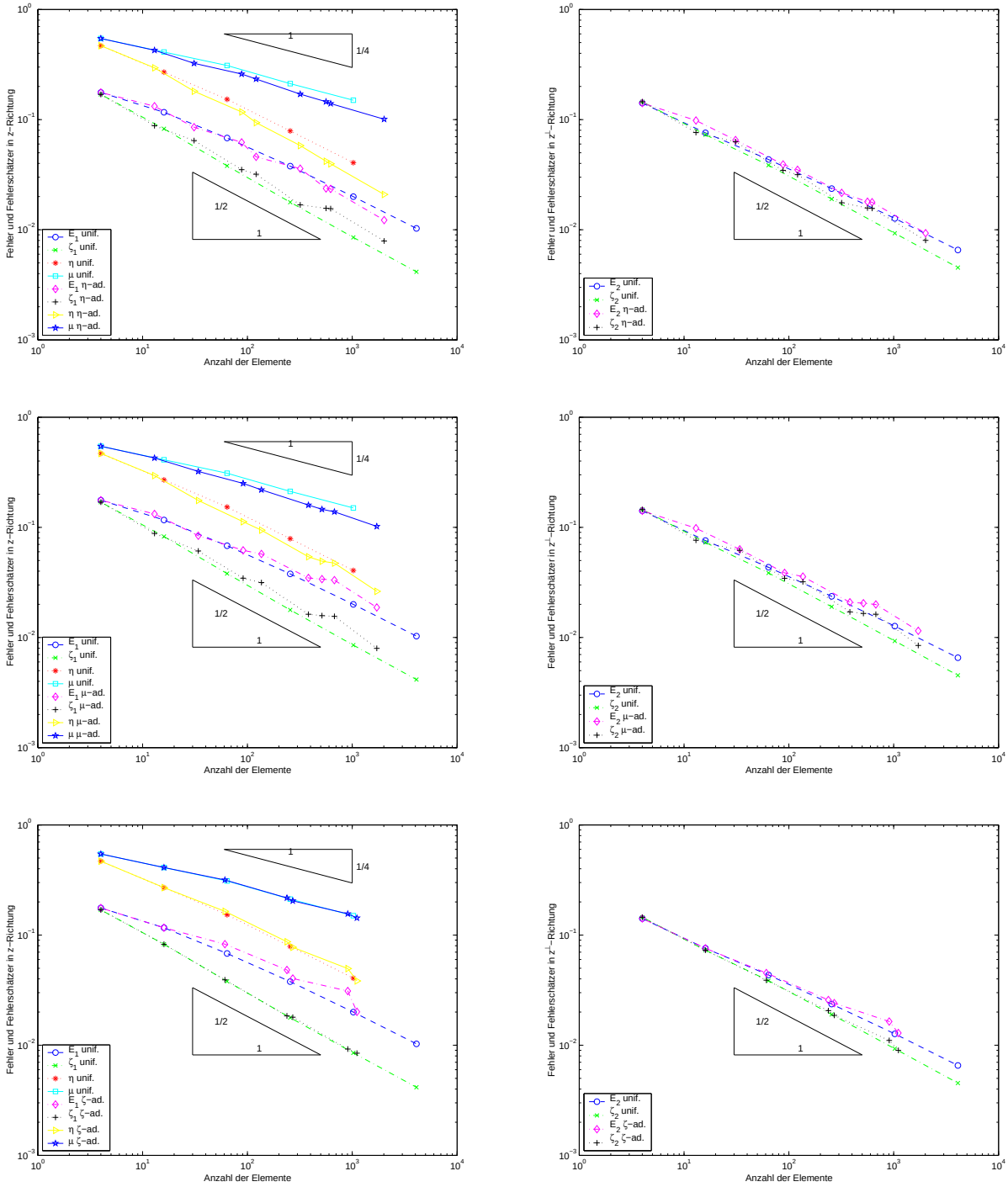


Abbildung 4.9: *Fehler und Fehlerschätzer im Fall* $\lambda^{(3)}$ *für* $\alpha = 1$ *bei* η*-adaptiver (oben),* μ*-adaptiver (mittig) und* ζ*-adaptiver Netzverfeinerung (unten) im Vergleich zur uniformen Netzverfeinerung. Es zeigt sich, daß die* η*-adaptive Netzverfeinerung leicht bessere Fehlerwerte liefert als die übrigen Netzverfeinerungsstrategien.*

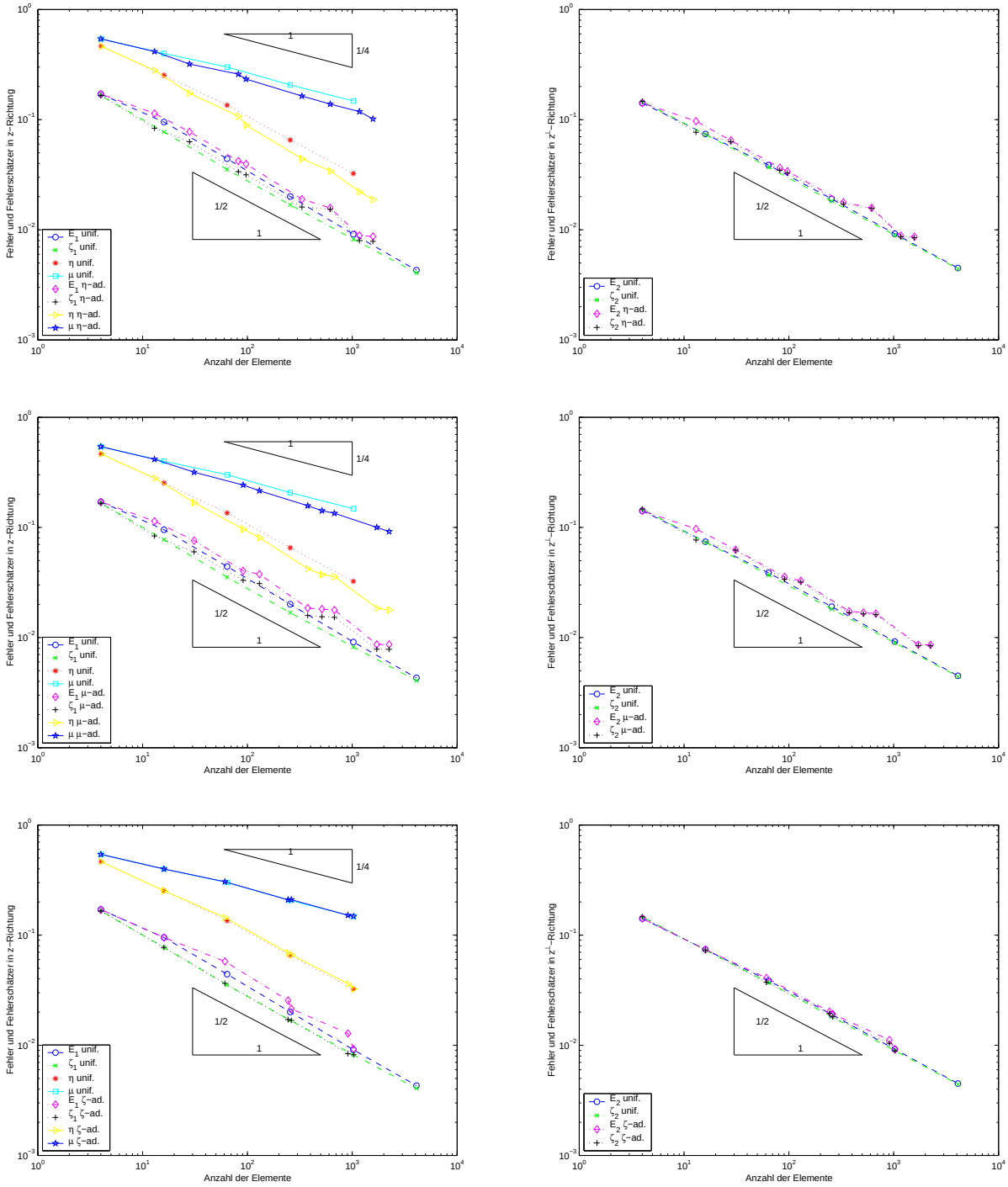


Abbildung 4.10: *Fehler und Fehlerschätzer im Fall $\lambda^{(3)}$ für $\alpha = 3/2$ bei η-adaptiver (oben), μ-adaptiver (mittig) und ζ-adaptiver Netzverfeinerung (unten) im Vergleich zur uniformen Netzverfeinerung.*

uniformer, η-adaptiver, μ-adaptiver und ζ-adaptiver Netzverfeinerung. Der Fehlerschätzer μ zeigt sich in diesem Beispiel für $\varepsilon = h$ als wenig geeignet für adaptive Netzverfeinerung, da μ durch eine suboptimale Abschätzung gewonnen wird, die die höhere Glätte von $\mathbf{m}$ in diesem Beispiel nicht berücksichtigt. Die Netzadaptivität bezüglich η führt ab $N = 600$ Elementen zu einer leichten Verbesserung der Konvergenz des Fehlers $E = \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$, der dann mit optimaler Ordnung konvergiert.
In dem Abbildungen 4.12 und 4.13 wird deutlich, daß durch den η-gesteuerten Algorithmus regelmäßig alle Elemente verfeinert werden, die auch durch den fehlergesteuerten Algorithmus verfeinert würden, d.h. bei Verfeinerung bezüglich der Indikatoren $E_T = \|\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\|_{L^2(T;\mathbb{R}^2)}$ für $T \in \mathcal{T}$. Die η-adaptiv generierten Netze zeigen deutlich eine Verfeinerung zum *interface* $\{x \in \Omega \,|\, |x| = 1\}$, an dem $\lambda = \lambda^{(3)}$ springt. Dadurch führt die η-adaptive Netzverfeinerung zusätzlich zu einer leicht verbesserten Approximation von $\lambda\mathbf{m}$ durch $\lambda_h\mathbf{m}_h$ bzw. von λ durch λ_h. Dies wird in den Tabellen 4.2 auf Seite 129 bzw. Abbildung 4.11 deutlich. Die Konvergenzrate von $E_{\lambda\mathbf{m}} = \|\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ bzw. $E_\lambda = \|\lambda - \lambda_h\|_{L^2(\Omega)}$verbessert sich von 1/4 auf etwa 1/3. Sie liegt damit für $E_{\lambda\mathbf{m}}$ deutlich unter dem optimalen Wert 1/2, welcher der a priori Analysis zufolge im Fall $\lambda = \lambda^{(1)}$ bzw. $\lambda = \lambda^{(2)}$ vorliegt. Dies ist aber darauf zurückzuführen, daß die eingeführten residualen Fehlerschätzer η und μ den Fehler von $\lambda_h\mathbf{m}_h$ zu $\lambda\mathbf{m}$ nicht berücksichtigen.

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	0.16935	0.17617		0.14508	0.14136		0.46907	
1	16	0.08254	0.11662	0.29760	0.07297	0.07579	0.44965	0.26961	0.39946
2	64	0.03807	0.06808	0.38819	0.03856	0.04341	0.40202	0.15296	0.40884
3	256	0.01780	0.03780	0.42452	0.01903	0.02365	0.43819	0.07885	0.47805
4	1024	0.00853	0.01997	0.46024	0.00929	0.01268	0.44961	0.04063	0.47822
5	4096	0.00415	0.01029	0.47808	0.00453	0.00655	0.47649		

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	0.16935	0.17617		0.14508	0.14136		0.46907	
4	121	0.03193	0.04594	0.39423	0.03163	0.03497	0.40970	0.09379	0.47212
8	2014	0.00791	0.01224	0.47043	0.00801	0.00931	0.47055	0.02090	0.53382

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	0.16935	0.17617		0.14508	0.14136		0.46907	
4	136	0.03152	0.05735	0.31826	0.03203	0.03576	0.38977	0.09420	0.45525
8	1714	0.00796	0.01875	0.44122	0.00847	0.01150	0.44776	0.02624	0.50445

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	0.16935	0.17617		0.14508	0.14136		0.46907	
3	238	0.01847	0.04822	0.31712	0.02060	0.02572	0.41709	0.08706	0.41219
6	1108	0.00846	0.02011	0.56845	0.00898	0.01291	0.44798	0.03832	0.53350

Tabelle 4.1: *Fehler, Fehlerschätzer und Konvergenzordnungen für $\lambda = \lambda^{(3)}$ und $\varepsilon = h$ bei uniformer, η-adaptiver, μ-adaptiver und ζ-adaptiver Netzverfeinerung (von oben nach unten).*

Akkuranz des *panel clustering*. Das in Abschnitt 3.6 vorgeschlagene *panel clustering* erweist sich sowohl bei uniformer als auch bei adaptiver Netzverfeinerung als äußerst effizient. Einige ex-

k	$N^{(k)}$	$\zeta^{(k)}$	$E^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E)$	$E_{\lambda\mathbf{m}}^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_{\lambda\mathbf{m}})$	$E_{\lambda}^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_{\lambda})$
0	4	0.22299	0.22588		0.38345		0.39421	
1	16	0.11017	0.13908	0.34980	0.27495	0.23994	0.29841	0.20084
2	64	0.05418	0.08075	0.39224	0.19265	0.25660	0.21375	0.24067
3	256	0.02605	0.04458	0.42842	0.13495	0.25676	0.14810	0.26467
4	1024	0.01261	0.02365	0.45722	0.09229	0.27411	0.09896	0.29088
5	4096	0.00615	0.01220	0.47762	0.06504	0.25238	0.06784	0.27231

k	$N^{(k)}$	$\zeta^{(k)}$	$E^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E)$	$E_{\lambda\mathbf{m}}^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_{\lambda\mathbf{m}})$	$E_{\lambda}^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_{\lambda})$
0	4	0.22299	0.22588		0.38345		0.39421	
4	121	0.04495	0.05773	0.40010	0.13331	0.30988	0.14660	0.29012
8	2014	0.01126	0.01538	0.47048	0.05005	0.34836	0.05362	0.35768

k	$N^{(k)}$	$\zeta^{(k)}$	$E^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E)$	$E_{\lambda\mathbf{m}}^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_{\lambda\mathbf{m}})$	$E_{\lambda}^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_{\lambda})$
0	4	0.22299	0.22588		0.38345		0.39421	
4	136	0.04494	0.06759	0.34216	0.12854	0.30995	0.15177	0.27068
8	1714	0.01163	0.02199	0.44303	0.05205	0.35674	0.06184	0.35432

k	$N^{(k)}$	$\zeta^{(k)}$	$E^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E)$	$E_{\lambda\mathbf{m}}^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_{\lambda\mathbf{m}})$	$E_{\lambda}^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_{\lambda})$
0	4	0.22299	0.22588		0.38345		0.39421	
3	238	0.02767	0.05465	0.34731	0.14082	0.24517	0.15955	0.22137
6	1108	0.01234	0.02390	0.53766	0.08699	0.31317	0.09406	0.34359

Tabelle 4.2: *Fehlerterme* $E = \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$, $E_{\lambda\mathbf{m}} = \|\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ *sowie* $E_\lambda = \|\lambda - \lambda_h\|_{L^2(\Omega)}$ *und Konvergenzordnungen für* $\lambda = \lambda^{(3)}$ *und* $\varepsilon = h$ *bei uniformer,* η*-adaptiver,* μ*-adaptiver und* ζ*-adaptiver Netzverfeinerung (von oben nach unten).*

perimentelle Ergebnisse finden sich in Tabelle 4.3. Einem zeitlichen Gewinn um einen Faktor 10 zum Aufbau der Matrix $\mathbf{A}$ bei uniformem Netz $\mathcal{T}_4$ mit $N = 1024$ Elementen steht lediglich ein relativer Fehler von 10^{-5} gegenüber. Außerdem geht die approximierte Matrix $\mathbf{A}$ nur zu einem Teil bei der Berechnung der diskreten Lösung $\mathbf{m}_h$ ein. Der relative Fehler des Lösungsvektors $\mathbf{X}$ bzw. der diskreten Lösung $\mathbf{m}_h$ liegt in diesem Fall bei 10^{-7}. Dasselbe gilt für die Approximation der Verfeinerungsindikatoren. Bei adaptiv generierten Netzen liegt der Approximationsfehler des *panel clustering* sogar noch unter dem Fehler bei uniformen Netzen mit *kleinerer* Elementezahl. Man vergleiche beispielsweise in Tabelle 4.3 die relativen Fehler auf dem uniformen Netz $\mathcal{T}_3$ ($N = 256$) mit denen zum adaptiven Netz $\mathcal{T}_7$ ($N = 622$). Die relativen Fehler von $\mathbf{A}, \mathbf{X}, \mathbf{m}_h, \zeta_{\mathcal{T}}$ liegen hierbei unter den Werten zum uniformen Netz. Das liegt vor allem daran, daß beim beschriebenen Vorgehen, der Polynomgrad der Approximationspolynome im *panel clustering* auf einem *cluster* $\sigma \subseteq \mathcal{T}$ von der Anzahl $\mathrm{card}(\sigma)$ der Elemente darin abhängt, aber nicht von der räumlichen Größe $\widehat{\sigma} = \bigcup \sigma$. Für die Approximation von $\eta_{\mathcal{T}}$ und $\mu_{\mathcal{T}}$ bekommt man schlechtere Werte. Das mag darin begründet liegen, daß die durch $\eta_{\mathcal{T}}$ und $\mu_{\mathcal{T}}$ involvierten Integrale *nicht* exakt berechnet werden können, sondern mittels numerischer Quadratur berechnet werden müssen. Die relativen Approximationsfehler sind aber mit einer Größenordnung von 10^{-7} und 10^{-6} dennoch hinreichend klein.

Konklusion zu Beispiel 4.2.1. (a) Die exakte Lösung des Beispiels erfüllt $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; B_2^2) \cap W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^2)$. In diesem Fall zeigt die erbrachte Analysis, daß der Fehler $E_1 = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \cdot z\|_{L^2(\Omega)}$

k	$N^{(k)}$	$O^{(k)}$	$E^{(k)}(\mathbf{A})$	$E^{(k)}(\mathbf{X})$	$E^{(k)}(\mathbf{m}_h)$	$E^{(k)}(\eta_{\mathcal{T}})$	$E^{(k)}(\mu_{\mathcal{T}})$	$E^{(k)}(\zeta_{\mathcal{T}})$
0	4	0	0	0	0	0	0	0
1	16	0	0	0	0	0	0	0
2	64	29.7%	2.293e-06	7.938e-08	6.259e-08	3.118e-08	3.566e-08	2.010e-07
3	256	75.3%	1.589e-05	4.127e-07	3.186e-07	1.951e-07	2.372e-07	1.811e-06
4	1024	92.8%	2.235e-05	2.607e-07	1.838e-07	2.036e-07	2.571e-07	1.758e-06

k	$N^{(k)}$	$O^{(k)}$	$E^{(k)}(\mathbf{A})$	$E^{(k)}(\mathbf{X})$	$E^{(k)}(\mathbf{m}_h)$	$E^{(k)}(\eta_{\mathcal{T}})$	$E^{(k)}(\mu_{\mathcal{T}})$	$E^{(k)}(\zeta_{\mathcal{T}})$
0	4	0	0	0	0	0	0	0
1	13	0	0	0	0	0	0	0
2	31	0	0	0	0	0	0	0
3	88	33.3%	2.537e-06	1.388e-07	6.460e-08	3.617e-07	4.019e-07	4.804e-07
4	121	42.8%	3.168e-06	1.629e-07	8.450e-08	5.602e-07	5.806e-07	5.166e-07
5	319	76.3%	1.428e-05	3.340e-07	2.802e-07	7.163e-07	8.640e-07	1.685e-06
6	562	83.5%	1.252e-05	1.944e-07	1.585e-07	7.226e-07	9.370e-07	1.094e-06
7	622	84.9%	1.249e-05	1.890e-07	1.560e-07	7.562e-07	9.850e-07	1.055e-06

Tabelle 4.3: *Approximationsverhalten des* panel clustering *nach Abschnitt 3.6 in Beispiel 4.2.1 für* $\lambda = \lambda^{(3)}$ *und* $\varepsilon = h$ *bei uniformer (oben) sowie* η*-adaptiver Netzverfeinerung.*

mit $O(h+\varepsilon)$ konvergiert, sofern der Lagrange-Parameter λ hinreichend glatt ist. Außerdem ist der Fehlerschätzer η unabhängig von λ eine obere Schranke für E_1. Diese theoretischen Ergebnisse konnten empirisch bestätigt werden. Es zeigte sich ferner experimentell, daß η in diesem Fall auch effizient ist, d.h. bis auf Konstante eine untere Schranke für E_1. Der L^2-Fehler E_2 in Richtung der *easy axis* $z^\perp$, der a priori nicht kontrolliert wird, konvergiert im Experiment stets mit mindestens derselben Konvergenzordnung wie E_1. Die „Komponenten“ ζ_j des Glättungsschätzers ζ erweisen sich als effiziente und zuverlässige Schranken für die entsprechenden L^2-Fehleranteile E_j, sofern λ hinreichend glatt ist. Im Fall $\lambda = \lambda^{(3)}$ und $\varepsilon = h$ büßen die ζ_j die Zuverlässigkeit ein. Dies zeigt sich insbesondere bei der der ζ-adaptiven Netzverfeinerung, die zu schlechteren Konvergenzresultaten führt als die uniforme Netzverfeinerung.

(b) Wie die a priori Analysis erwarten läßt, konvergiert der Fehlerterm E_1 für $\alpha \geq 1$ und $\varepsilon = h^\alpha$ bei uniformer Netzverfeinerung und glattem $\lambda \in \{\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}\}$ mit optimaler Konvergenzordnung. Im unstetigen Fall $\lambda = \lambda^{(3)}$ führt die Wahl $\alpha = 1$ bei uniformer Netzverfeinerung zu einer leicht suboptimalen Konvergenzordnung, die aber zum einen durch Wahl eines größeren $\alpha \geq 3/2$ verbessert werden kann, zum anderen aber auch durch η-basierte Netzadaption. Ein weiterer Vorteil bei der der η-gesteuerten Netzverfeinerung liegt in der Verbesserung der Konvergenzrate von $E_\lambda = \|\lambda - \lambda_h\|_{L^2(\Omega)}$ und dem a priori Term $E_{\lambda\mathbf{m}} = \|\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$. Beide Terme konvergieren bei uniformer Netzverfeinerung lediglich mit der Ordnung 1/4, und diese wird durch die η-Adaptivität auf 1/3 verbessert. Die μ-Adaptivität führt ebenfalls zu einer Konvergenzverbesserung für die letzten beiden Terme. Da sie aber den Fehler E_1 in z-Richtung elementweise um einen Faktor h_T^{-1} überschätzt, führen μ-adaptierte Netze im Bereich $N \leq 2000$ nicht zu einer Verbesserung der Konvergenzordnung im Vergleich zur uniformen Verfeinerung. Im wesentlichen wird diese reproduziert.

(c) Die Konvergenz des Newton-Verfahrens zur Berechnung der diskreten Lösung $\mathbf{m}_h$ hängt *nicht* kritisch vom gewählten Startwert ab. Das Newton-Verfahren zeigt sich als äußerst robust und liefert sowohl für *nested iterations* als auch bei trivialem Startvektor annähernd dieselbe diskrete Lösung. Mit Blick auf die Anzahl der Newton-Schritte im Fall $\lambda = \lambda^{(3)}$ sind aber die *nested iterations*

vorzuziehen. Ihre absolute Anzahl ist dennoch gering, und selbst bei trivialem Startvektor und uniformem Netz mit $N = 4096$ Elemente konvergiert das Newton-Verfahren (inkl. Abbruchkriterium) gemäß Algorithmus 3.2 mit weniger als 22 Schritten. Auch die Wahl des Penalisierungsparameters α wirkt sich kaum auf die Anzahl der Newton-Schritte aus. Es ist zwar festzustellen, daß ihre Anzahl mit steigendem α zunimmt, die absoluten Unterschiede für $1 \leq \alpha \leq 3$ betragen aber bei *nested iterations* weniger als 5 Newton-Schritte.

(d) Sowohl die Matrix $\mathbf{A}$ als auch die Matrizen, die zur Berechnung der Fehlerschätzer benötigt werden, lassen sich über *panel clustering* effizient aufbauen. Der relative Fehler liegt für $\mathbf{A}$ selbst bei großer Approximationsordnung bei 10^{-5}, und die Güte der Lösung ist regelmäßig um eine Potenz besser, d.h. der relative Fehler in $\mathbf{m}_h$ liegt bei ungefähr 10^{-6}.

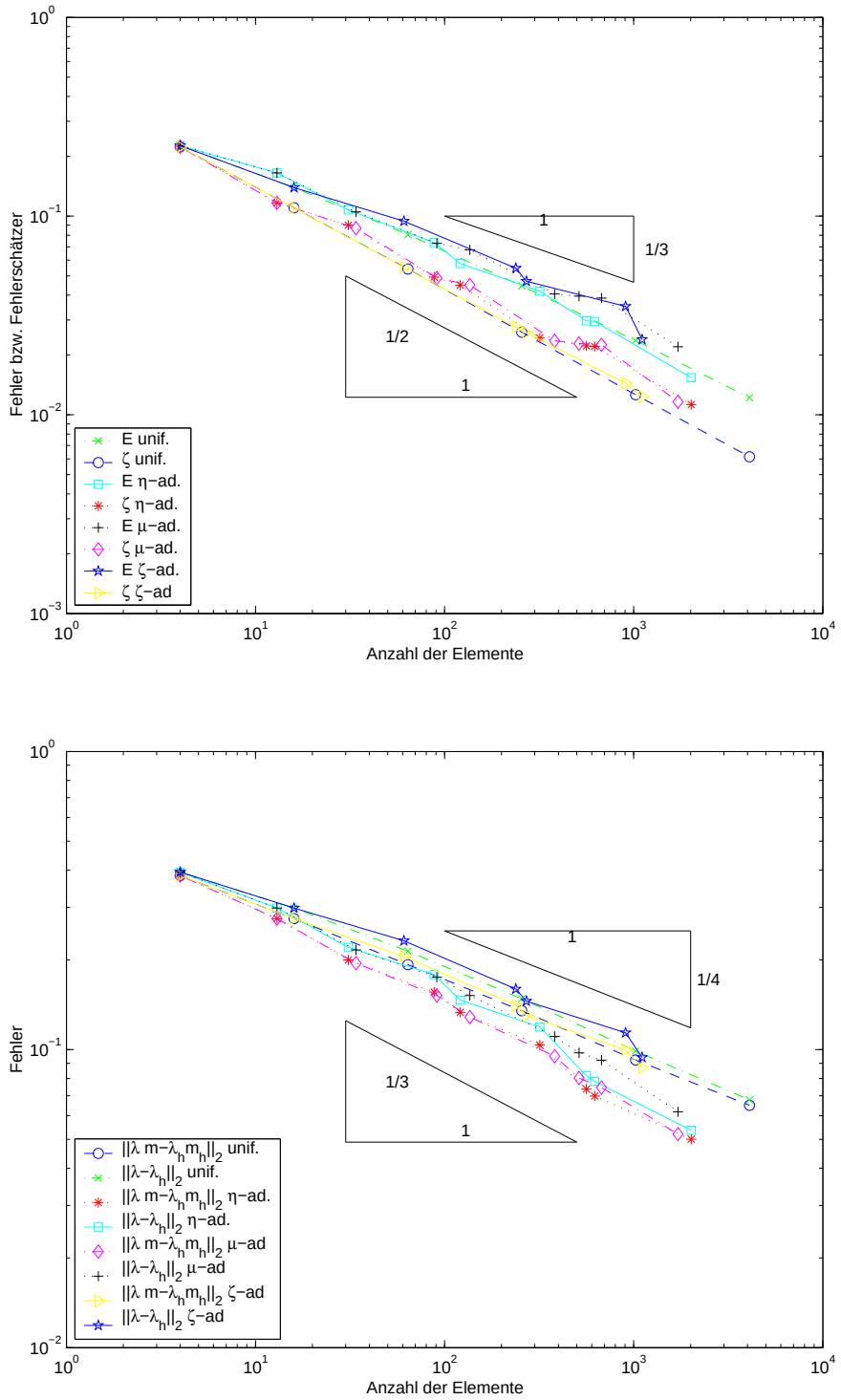


Abbildung 4.11: *Die Fehlerterme* $E = \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ *und der Fehlerschätzer* ζ *(oben) sowie die Fehlerterme* $E_{\lambda\mathbf{m}} = \|\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ *und* $E_\lambda = \|\lambda - \lambda_h\|_{L^2(\Omega)}$ *(unten) für* $\lambda = \lambda^{(3)}$ *in Abhängigkeit von der Anzahl der Elemente und der Netzverfeinerungsstrategie. In allen Fällen führt* η*-adaptive Netzverfeinerung im Vergleich zu den anderen Netzverfeinerungsstrategien auf die besten Resultate.*

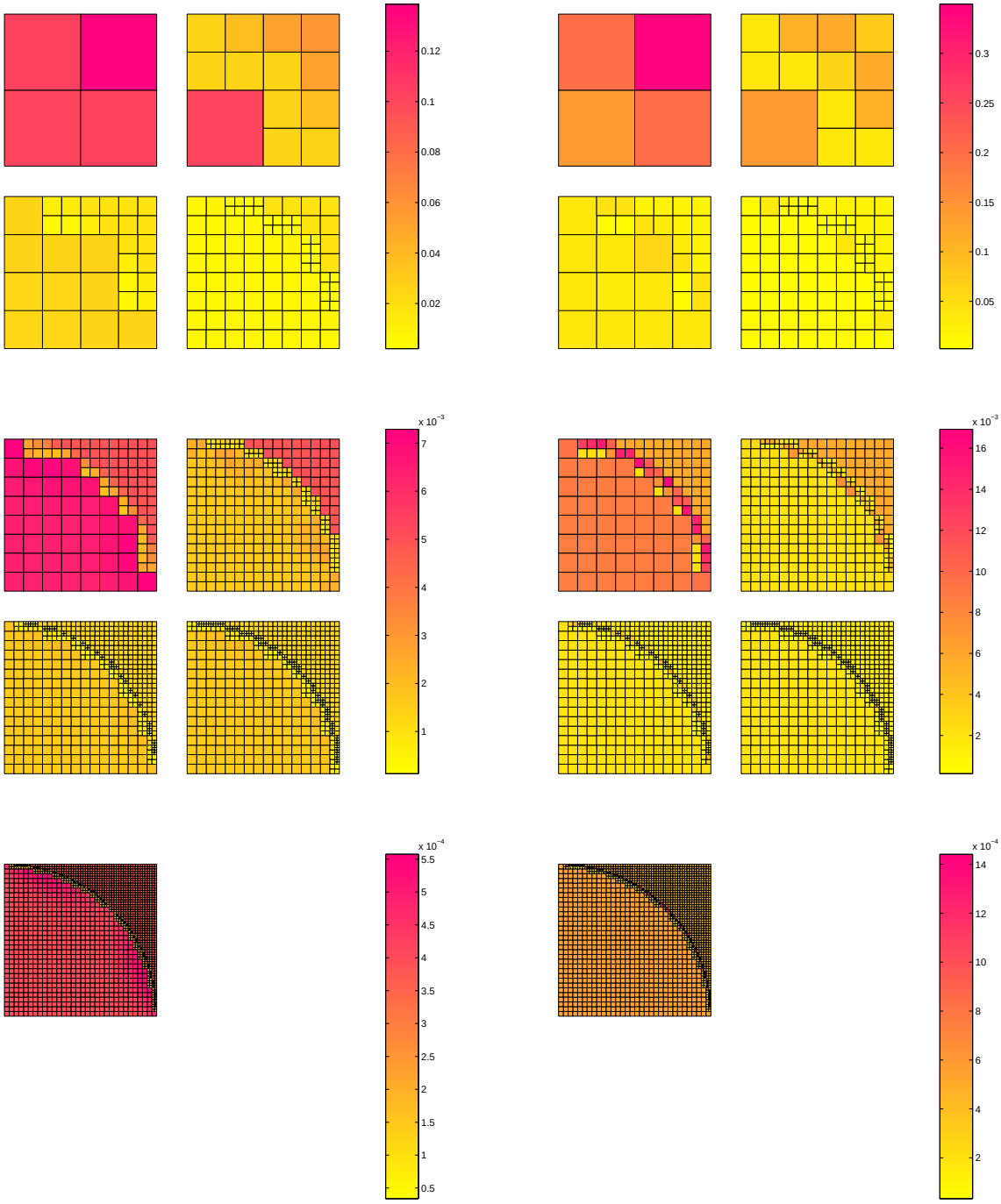


Abbildung 4.12: *Elementweise Verteilung der Fehler (links) und der Verfeinerungsindikatoren η_T (rechts) auf den η-adaptiven Netzen $\mathcal{T}_0$ bis $\mathcal{T}_8$ im Fall $\lambda = \lambda^{(3)}$ und $\varepsilon = h$.*

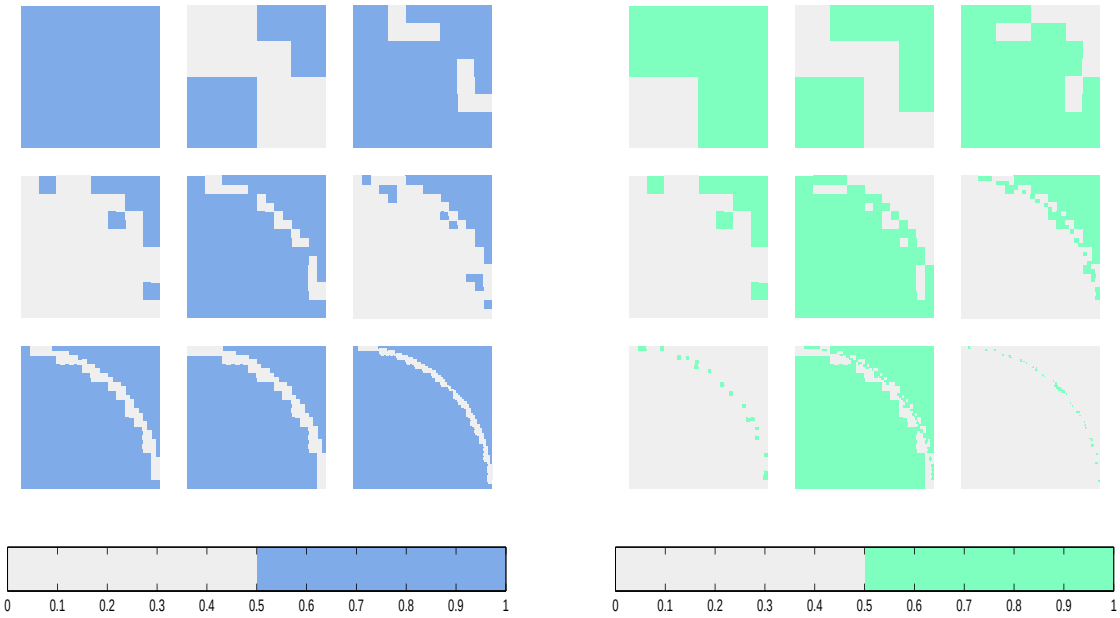


Abbildung 4.13: *Triangulierungen aus Abbildung 4.12 und Elemente, die durch den η-adaptiven Algorithmus 3.8 zur Verfeinerung markiert werden (grün, rechts). Die blau-markierten Elemente (links) würden bei fehleradaptierter Netzverfeinerung markiert, d.h. bei Adaptivität bezüglich der Indikatoren $E_T = \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_h\|_{L^2(T;\mathbb{R}^2)}$. Man sieht, daß die η-gesteuerte Netzadaption mit einigen Zwischenschritten ein optimales Netz erzeugt.*

4.2.2 Ein akademisches Beispiel mit Lösung $\mathbf{m} \notin H^1(\Omega; B_2^2)$

Es seien wieder $\Omega = (0,1)^2$ und $z = (1,1)/\sqrt{2}$. Ferner bezeichne $\omega := \{x \in \Omega \,|\, |x-(1,1)| \le 1\}$, und zu $x \in \Omega$ sei $y = y(x) := \frac{(1,1)-x}{|(1,1)-x|} \in \mathbb{R}^2$. Die exakte Lösung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; B_2^2)$ werde gegeben durch

$$\mathbf{m}(x) = \begin{cases} y(x), & \text{falls } x \in \omega, \\ \frac{x_1}{1-y_1}\,\frac{x_2}{1-y_2}\,y(x), & \text{anderenfalls.} \end{cases} \tag{4.9}$$

Für den Lagrange-Parameter λ wähle

$$\lambda^{(1)} \equiv 0 \quad \text{und} \quad \lambda^{(2)} = \chi_{\Omega\setminus\omega}.$$

Abbildung 4.14 zeigt die Bestapproximation $\mathbf{m}_{\mathcal{T}}$ von $\mathbf{m}$ auf dem uniformen Netz $\mathcal{T}^{(4)}$ ($N = 1024$).

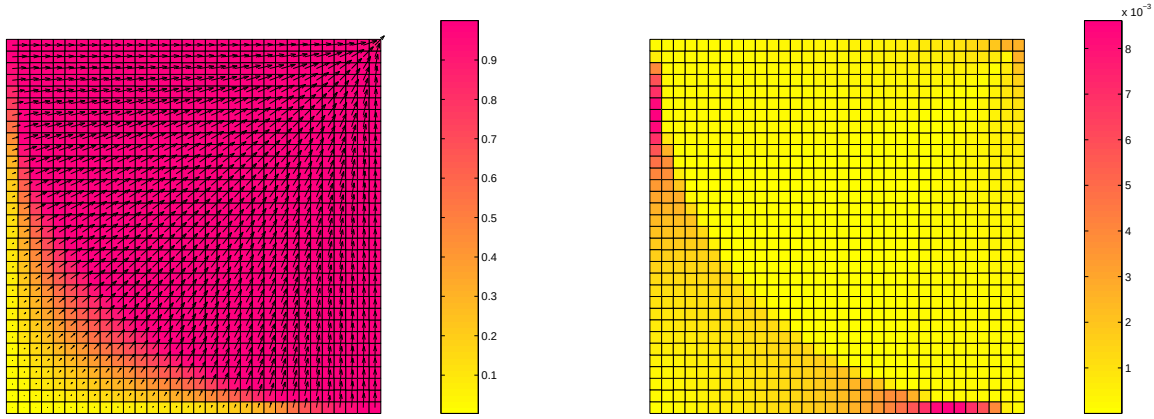


Abbildung 4.14: *Das $\mathcal{T}$-stückweise Integralmittel $\mathbf{m}_{\mathcal{T}}$ der exakten Lösung $\mathbf{m}$ auf uniformem Netz $\mathcal{T}^{(4)}$ mit $N = 1024$ Elementen (links) und die $\mathcal{T}$-elementweise Verteilung des Fehlers $\mathbb{E} = \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ (rechts). Man sieht, daß der größte Anteil des Fehlers am* interface *$I := \{x \in \Omega \,|\, |(1,1)-x| = 1\}$ und nahe der Ecke $(1,1)$ gemacht wird.*

Lemma 4.2. *Die Funktion $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; B_2^2)$ aus (4.9) ist stetig, das Feld ist stets in Richtung des Eckpunkts $(1,1)$ gerichtet, $|\mathbf{m}(x)| = 1$ für $x \in \omega$ und $\mathbf{m}(x) = 0$ für $x \in \Gamma := \{x \in \partial\Omega \,|\, x_1 x_2 = 0\}$. Offensichtlich ist $\mathbf{m}$ in $\Omega\setminus I$ stetig differenzierbar, wenn $I := \{x \in \Omega \,|\, |(1,1)-x| = 1\}$ das* interface *bezeichnet. Es gilt aber $\nabla\mathbf{m} \notin L^2(\Omega; \mathbb{R}^{2\times 2})$ und deshalb $\mathbf{m} \notin H^1(\Omega; B_2^2)$.*

Beweis. Zum Nachweis der Stetigkeit von $\mathbf{m}$ ist nur zu zeigen, daß die Definitionen von $\mathbf{m}|_\omega$ und $\mathbf{m}|_{\Omega\setminus\omega}$ auf I zu denselben Funktionswerten führten. Für $x \in I$ gilt

$$x = (1,1) - \frac{(1,1)-x}{|(1,1)-x|} = (1,1) - y(x), \quad \text{also} \quad \frac{x_j}{1-y_j(x)} = 1.$$

Um $|\mathbf{m}(x)| \le 1$ zu zeigen, ist die Funktion

$$x \mapsto \frac{x_1}{1-y_1(x)}\,\frac{x_2}{1-y_2(x)}$$

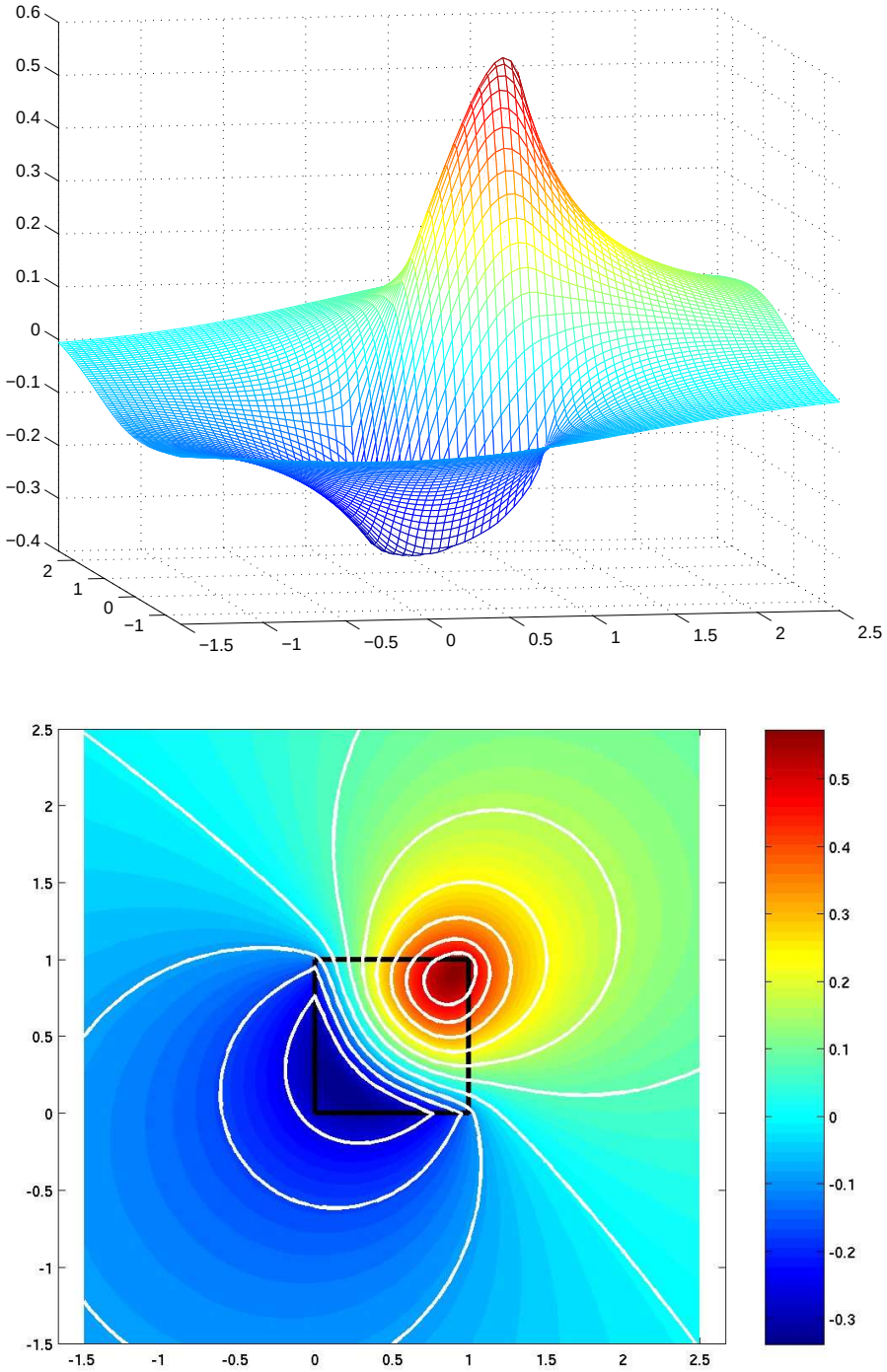


Abbildung 4.15: *Magnetisches Potential* $\widetilde{u} = \mathcal{L}\mathbf{m}_{\mathcal{T}}$ *in Beispiel 4.2.1 zur diskreten (bestapproximierenden) Magnetisierung* $\mathbf{m}_{\mathcal{T}}$ *auf uniformem Netz* $\mathcal{T}_3$ *(*$N = 256$*). Das obere Bild zeigt* $\widetilde{u}(x)$ *als Plot über der Fläche* $[-3/2, 5/2]^2$*. Das untere Bild zeigt die Projektion von* $\widetilde{u}(x)$ *in die* x_1*-*x_2*-Ebene, wobei der Wert* $\widetilde{u}(x)$ *farbig dargestellt ist und einige Isolinien zu* $\widetilde{u}(x)$ *weiß eingezeichnet sind.*

auf $\Omega\backslash\omega$ zu untersuchen. Dazu fixiere $x \in \Omega\backslash\omega$ und betrachte die Menge

$$S := \big\{x + ty(x) \,\big|\, t \in \mathbb{R}\big\} \cap \big(\Omega\backslash Inn(\omega)\big).$$

S ist eine abgeschlossene Strecke in $\mathbb{R}^2$, und für $\widetilde{x} \in S$ gilt offensichtlich $y := y(\widetilde{x}) = y(x)$. Es sei $z \in S \cap \Gamma$. Dann existiert ein Parameter $s_0 > 0$ derart, daß $\gamma : [0, s_0] \to \mathbb{R}^2, s \mapsto z + sy$ die Strecke S parametrisiert. Betrachte die Funktion

$$\phi(s) := \frac{\gamma_1(s)}{1 - y_1} \frac{\gamma_2(s)}{1 - y_2}$$

Dann gilt $\phi(0) = 0$, $\phi(s_0) = 1$ und $\phi'(s) = \frac{y_1}{1-y_1}\frac{y_2}{1-y_2} > 0$ wegen $y \in \Omega$, d.h. ϕ ist monoton wachsend. Insbesondere folgt $\mathrm{Bild}(\phi) = [0, 1]$ und damit wegen $x \in S$ auch

$$\frac{x_1}{1 - y_1(x)} \frac{x_2}{1 - y_2(x)} \in [0, 1].$$

Um schließlich zu zeigen, daß $\nabla\mathbf{m} \notin L^2(\Omega; \mathbb{R}^{2\times 2})$ ist, betrachte die Funktion $g(x) := x/|x|$ für $x \in \mathbb{R}^2_{>0}$. Die partiellen Ableitungen von g sind von der Ordnung $1/|x|$, und deshalb gilt $\nabla g \notin L^2_{\ell oc}(\mathbb{R}^2_{\geq 0}; \mathbb{R}^{2\times 2})$. Da $\mathbf{m}$ lokal um den Eckpunkt $(1, 1)$ eine Transformierte von g ist, folgt die Behauptung. ■

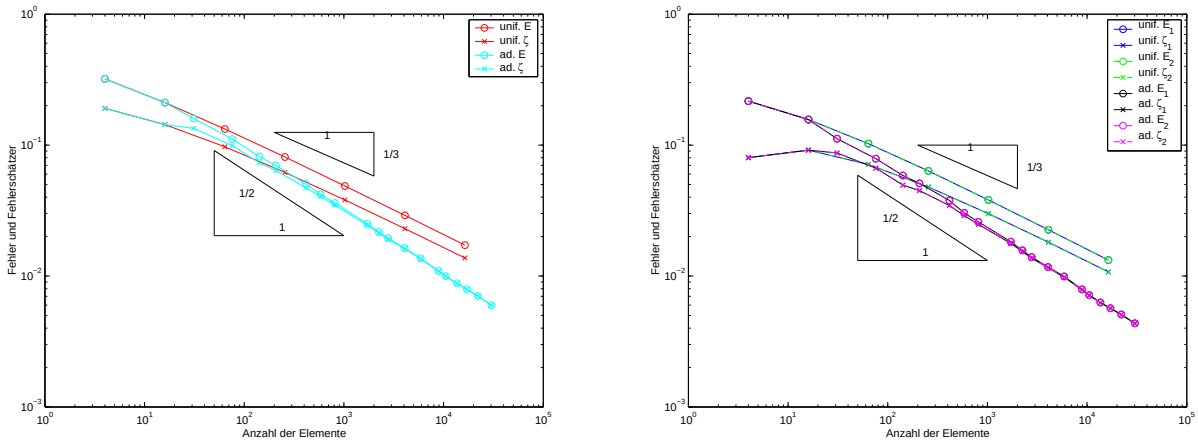


Abbildung 4.16: *Die experimentelle Konvergenzordnung von Bestapproximationsfehler* $\mathbb{E} = \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ *und Glättungsschätzer* $\zeta = \|\mathbf{m}_\mathcal{T} - \mathcal{A}\mathbf{m}_\mathcal{T}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ *(links) sowie die entsprechenden Größen in z-Richtung (rechts)* $\mathbb{E}_1 = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}) \cdot z\|_{L^2(\Omega)}$ *und* $\zeta_1 = \|(\mathbf{m}_\mathcal{T} - \mathcal{A}\mathbf{m}_\mathcal{T}) \cdot z\|_{L^2(\Omega)}$ *und in* $z^\perp$*-Richtung* $\mathbb{E}_2 := \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}) \cdot z^\perp\|_{L^2(\Omega)}$ *und* $\zeta_2 = \|(\mathbf{m}_\mathcal{T} - \mathcal{A}\mathbf{m}_\mathcal{T}) \cdot z^\perp\|_{L^2(\Omega)}$. *Man sieht die reduzierte Konvergenzordnung von E bei uniformer Netzverfeinerung und die optimale Konvergenzordnung* $1/2$ *bei Netzadaption mittels der Indikatoren* $\mathbb{E}_T = \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$.

Daß $\mathbf{m} \notin H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ gilt, zeigt sich auch bei Betrachtung der experimentellen Konvergenz des Bestapproximationsfehlers $\mathbb{E} = \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ in Abbildung 4.16 bei uniformer Netzverfeinerung. Anstelle der optimalen Konvergenzrate $1/2$ ergibt sich nur ein Wert wenig größer als $1/3$. Erfolgt die Netzadaption aber fehlergesteuert, d.h. wird das Netz durch Algorithmus 3.8 mit den Indikatoren $\mathbb{E}_T = \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}\|_{L^2(T;\mathbb{R}^2)}$ für $T \in \mathcal{T}$ verfeinert, so stellt sich die optimale Konvergenzrate $1/2$

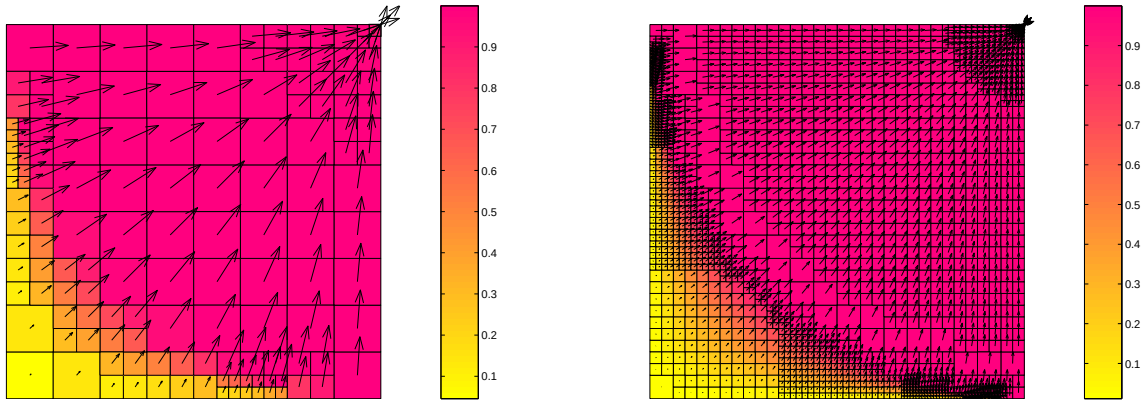


Abbildung 4.17: *Durch die Indikatoren* $\mathbb{E}_T = \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T;\mathbb{R}^2)}$ *erzeugte adaptive Netze* $\mathcal{T}_5$ *(links,* $N = 142$*) und* $\mathcal{T}_{10}$ *(rechts,* $N = 1717$*) mit den dazugehörigen Bestapproximationen* $\mathbf{m}_{\mathcal{T}}$*. Es zeigt sich deutlich die Netzadaption am* interface *und zum Punkt* $(1,1)$ *hin.*

ein. Es ist die Hoffnung, daß eine indikatorgesteuerte Netzadaption, basierend auf den Indikatoren η, μ oder ζ, dasselbe Resultat liefert.

A priori Erwartungen an die numerischen Resultate. Wegen $\mathbf{m} \notin W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ kann in diesem Fall die Zuverlässigkeit des residualen Fehlerschätzers η *nicht* bewiesen werden. Aufgrund der reduzierten Konvergenzordnung von $\mathbb{E}_1 = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\mathcal{T}}) \cdot z\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ ist sogar zu erwarten, daß die experimentelle Konvergenzrate von η deutlich über der von $\mathbb{E}_1$ liegen wird. Die Fehlerverteilung in Abbildung 4.14 zeigt, daß der Hauptfehler am *interface* $I := \{x \in \Omega \,|\, |(1,1) - x| = 1\}$ entsteht. Insbesondere erwartet man, daß der Fehler dort groß ist, wo der Abstand von I zum Rand von Ω besonders klein ist, denn nach Definition ist $\mathbf{m}$ dort stark steigend: Auf dem Randstück $\Gamma := \{x \in \partial\Omega \,|\, x_1 x_2 = 0\}$ gilt nämlich gerade $\mathbf{m}|_\Gamma = 0$, und für $x \in I$ ist $|\mathbf{m}(x)| = 1$. Dies zeigt sich auch bei der fehlergesteuerten Netzadaption. Zwei beispielhafte Netze sind in Abbildung 4.17 gezeigt. Man sieht zum einen eine adaptive Netzverfeinerung entlang I, die dort feiner wird, wo der Abstand von I zu Γ klein ist. Zum anderen zeigt sich eine adaptive Netzverfeinerung hin zur rechten oberen Ecke $(1,1)$, in deren Umgebung das Feld seine Ausrichtung wesentlich wechselt.

Einfluß von $\varepsilon = h^\alpha$ auf die Konvergenz der Verfahrens. Wie im ersten Beispiel zeigt sich, daß im stetigen Fall $\lambda = \lambda^{(1)}$ die Konvergenz von E_1 und E_2 unabhängig ist von der Wahl von $\alpha \in \{j/4 \,|\, j = 1, \ldots, 12\}$. Die Werte von E_1 bzw. E_2 stimmen für jede Wahl von α mit den Werten für die Bestapproximation von $\mathbf{m}$ in $\mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^2)$ überein. Es zeigt sich die suboptimale experimentelle Konvergenzrate von ungefähr 0.36 sowohl für den a priori Term E_1 als auch für den nicht-kontrollierten Fehleranteil E_2.

Der unstetige Fall $\lambda = \lambda^{(2)}$ führt wie im ersten Beispiel zu einer Polarisierung der α-Werte unter Berücksichtigung der Konvergenz von E_1 und E_2. Für $\alpha < 1$ liegt die experimentelle Konvergenzrate deutlich unter dem von $\alpha = 1$. Mit wachsendem α verbessert sich die Konvergenzrate, und für $\alpha \geq 1$ ergibt sich jeweils eine Konvergenzrate von ungefähr 0.38 analog zu den Fehlern für die Bestapproximation $\mathbf{m}_{\mathcal{T}}$.

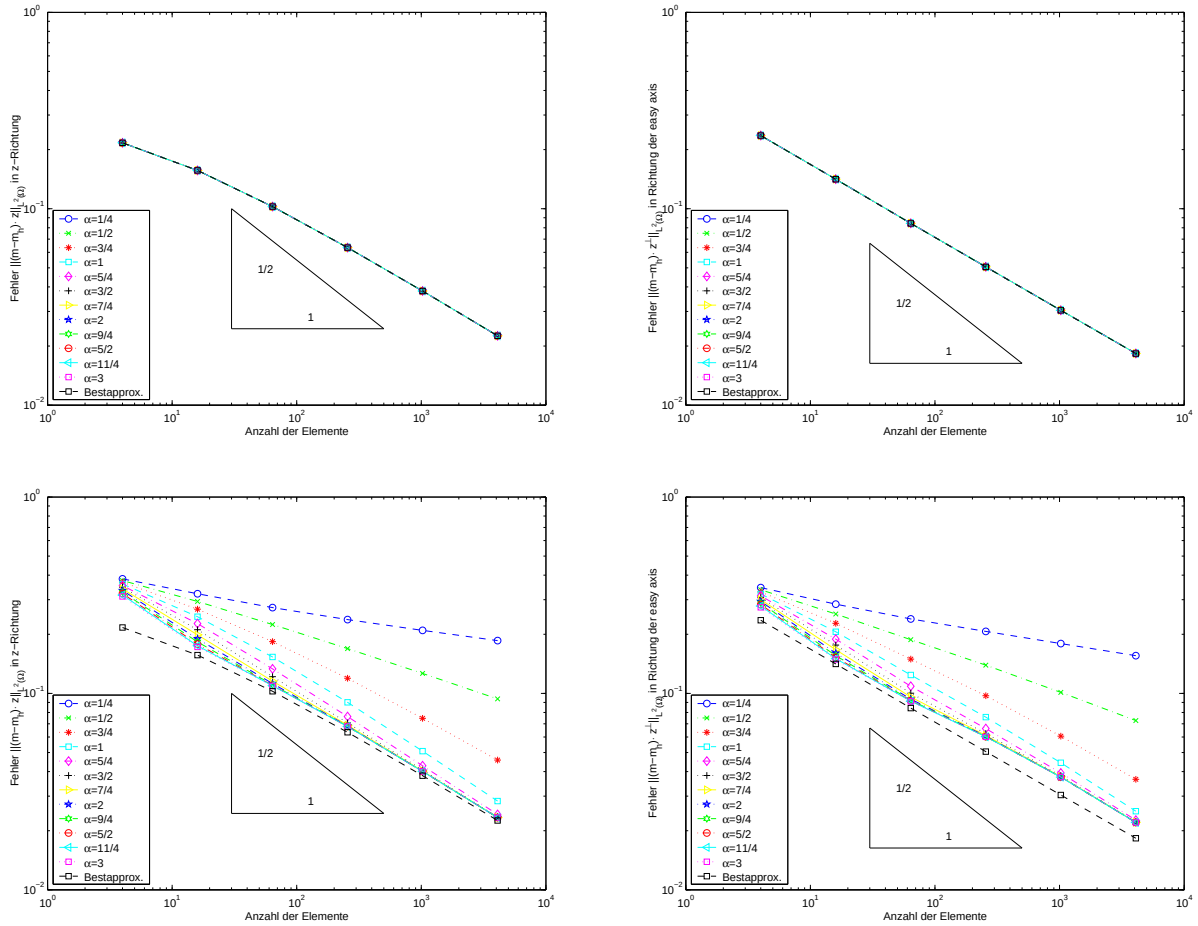


Abbildung 4.18: *Abhängigkeit der Konvergenz des Verfahrens von der Wahl des Stabilisierungsparameters $\varepsilon = h^\alpha$. Für $\lambda \equiv 0$ (oben) zeigt sich die Unabhängigkeit von $E_1 = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \cdot z\|_{L^2(\Omega)}$ (links) und $E_2 = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \cdot z^\perp\|_{L^2(\Omega)}$ (rechts) von der Wahl von α. Im unstetigen Fall $\lambda = \lambda^{(2)}$ (unten) erhält man für $\alpha \geq 1$ dieselbe (suboptimale) experimentelle Konvergenzrate für den a priori Term E_1. Zum Vergleich ist in allen Abbildungen der entsprechende Fehler der Bestapproximation eingetragen, d.h. $\mathbf{m}_h = \mathbf{m}_\mathcal{T}$.*

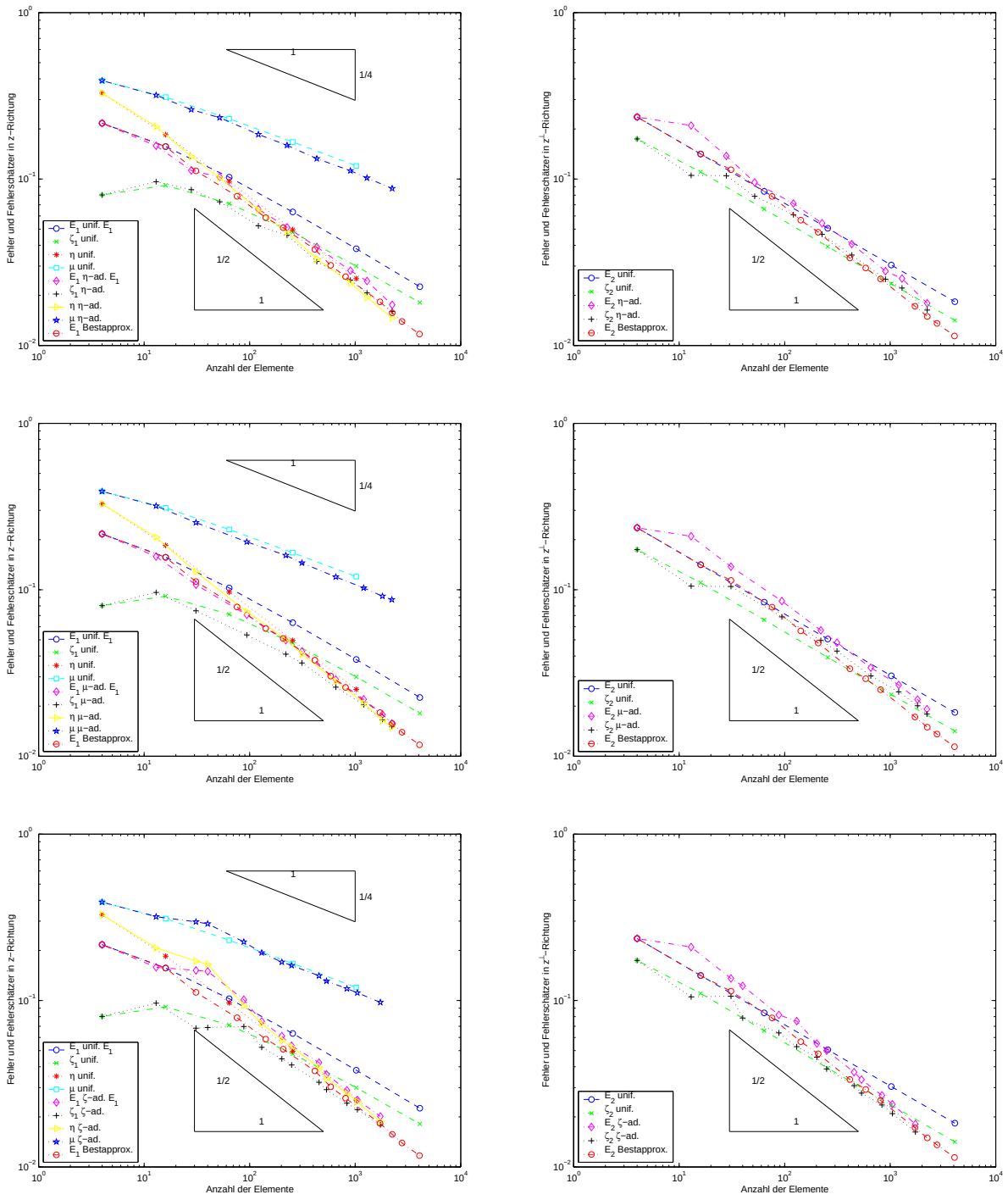


Abbildung 4.19: *Fehler und Fehlerschätzer im Fall* $\lambda = \lambda^{(1)}$ *für* $\alpha = 1$ *bei* η*-adaptiver (oben),* μ*-adaptiver (mittig) und* ζ*-adaptiver Netzverfeinerung (unten) im Vergleich zur uniformen Netzverfeinerung. In allen drei Fällen führt adaptive Netzverfeinerung zu einer sichtbaren Verbesserung der Konvergenzrate des* L^2*-Fehlers in* z*-Richtung (links) und in Richtung der* easy axis *(rechts). Die absolut gesehen besten Werte für* E_1 *liefert die Netzadaption mit* μ*, bei der der Fehler* E_1 *mit dem Bestapproximationsfehler* $\mathbb{E}_1$ *koinzidiert. Die besten Werte für* E_2 *liefert die* ζ*-adaptive Netzverfeinerung.*

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	0.08026	0.21651		0.17421	0.23588		0.32799	
1	16	0.09150	0.15675	0.23297	0.11026	0.14138	0.36921	0.18471	0.41421
2	64	0.07113	0.10249	0.30651	0.06598	0.08424	0.37354	0.09675	0.46645
3	256	0.04783	0.06344	0.34604	0.03927	0.05060	0.36766	0.04963	0.48153
4	1024	0.02997	0.03811	0.36754	0.02349	0.03042	0.36700	0.02521	0.48863
5	4096	0.01811	0.02255	0.37871	0.01415	0.01832	0.36568		

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	0.08026	0.21651		0.17421	0.23588		0.32799	
4	121	0.05237	0.06596	0.34862	0.06100	0.07128	0.35099	0.06528	0.47345
9	2242	0.01599	0.01754	0.45363	0.01633	0.01793	0.47270	0.01463	0.51244

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	0.08026	0.21651		0.17421	0.23588		0.32799	
4	220	0.04104	0.04972	0.36713	0.04961	0.05705	0.35422	0.05036	0.46761
9	2227	0.01500	0.01574	0.49696	0.01793	0.01917	0.47120	0.01500	0.52324

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	0.08026	0.21651		0.17421	0.23588		0.32799	
5	130	0.05233	0.07494	0.30476	0.05280	0.07520	0.32837	0.07297	0.43172
12	1732	0.01793	0.02012	0.50776	0.01621	0.01810	0.55005	0.01869	0.52606

Tabelle 4.4: *Fehler, Fehlerschätzer und Konvergenzordnungen für $\lambda = \lambda^{(1)}$ und $\varepsilon = h$ bei uniformer, η-adaptiver, μ-adaptiver und ζ-adaptiver Netzverfeinerung (von oben nach unten).*

Adaptive indikatorgesteuerte Netzverfeinerung. Uniforme Netzverfeinerung führt in diesem Beispiel nicht zur optimalen Konvergenzordnung des Fehlers. Die Abbildungen 4.16 und 4.17 zeigen, daß dies darin begründet ist, daß der wesentliche Anteil des Fehlers an der Grenzschicht $I := \{x \in \Omega \,|\, |(1,1) - x| = 1\}$ und der Ecke $(1,1)$ anfällt. Die fehlergesteuerte Netzadaption liefert die optimale Konvergenzordnung des L^2-Fehlers sowohl in z-Richtung als auch in Richtung der *easy axis* $z^\perp$. Es ist zu untersuchen, inwieweit die indikatorgesteuerte Netzverfeinerung diese Adaption nachzuahmen vermag.

Im Fall $\lambda = \lambda^{(1)}$ und $h = \varepsilon$ führen η-, μ- und ζ-adaptive Netzverfeinerung sowohl auf die optimale Konvergenzordnung von E_1 in z-Richtung als auch von E_2 in Richtung der *easy axis*,. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.19 dargestellt. Als Vergleichswerte sind jeweils dieselben Fehlerterme bei uniformer Konvergenz sowie die Bestapproximationsfehler $\mathbb{E}_1 = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}) \cdot z\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ und $\mathbb{E}_2 = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_\mathcal{T}) \cdot z^\perp\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ in z- und $z^\perp$-Richtung bei fehlergesteuerter Netzadaption geplottet. Man sieht, daß alle indikatorgesteuerten Netzverfeinerungen die lineare Konvergenz von E_1 und E_2 liefern. Bei Betrachtung der absoluten Werte sieht man aber, daß der Fehlerschätzer μ zu den besten Netzen bezüglich E_1 führt. Die Werte von E_1 decken sich mit den Werten von $\mathbb{E}_1$. Die ζ-Adaptivität hingegen liefert, verglichen mit η- und μ-adaptiver Verfeinerung, die absolut besten Werte von E_2. Einige Werte finden sich zum Vergleich in Tabelle 4.4.

Hinsichtlich μ- und ζ-adaptiver Netzverfeinerung tritt im Fall $\lambda = \lambda^{(1)}$ und $h = \varepsilon^{3/2}$ dasselbe Verhalten auf wie im Fall $h = \varepsilon$.

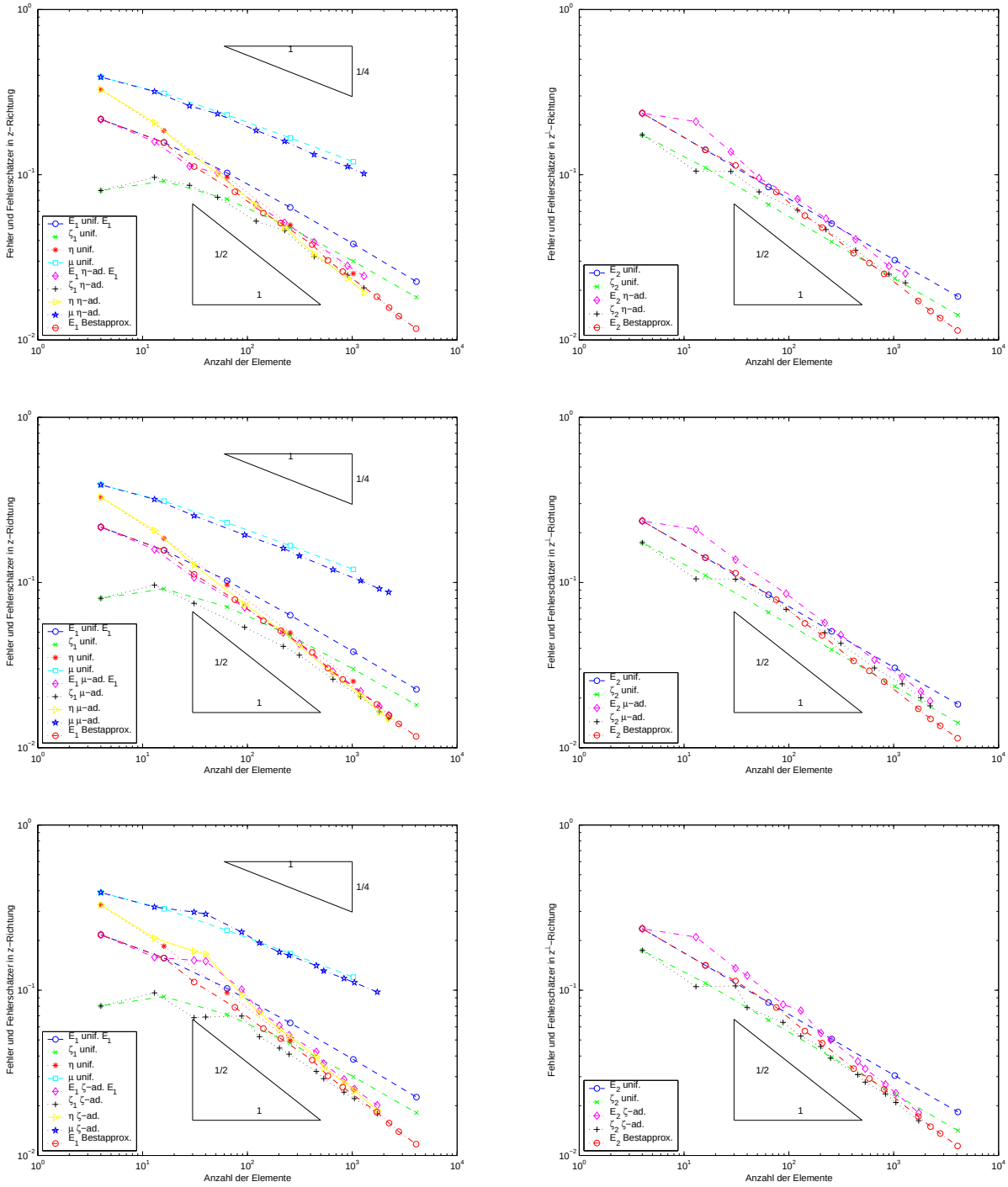


Abbildung 4.20: *Fehler und Fehlerschätzer im Fall $\lambda = \lambda^{(1)}$ für $\alpha = 3/2$ bei η-adaptiver (oben), μ-adaptiver (mittig) und ζ-adaptiver Netzverfeinerung (unten) im Vergleich zur uniformen Netzverfeinerung. Es zeigen sich dieselben Resultate wie für $\alpha = 1$, siehe Abbildung 4.19.*

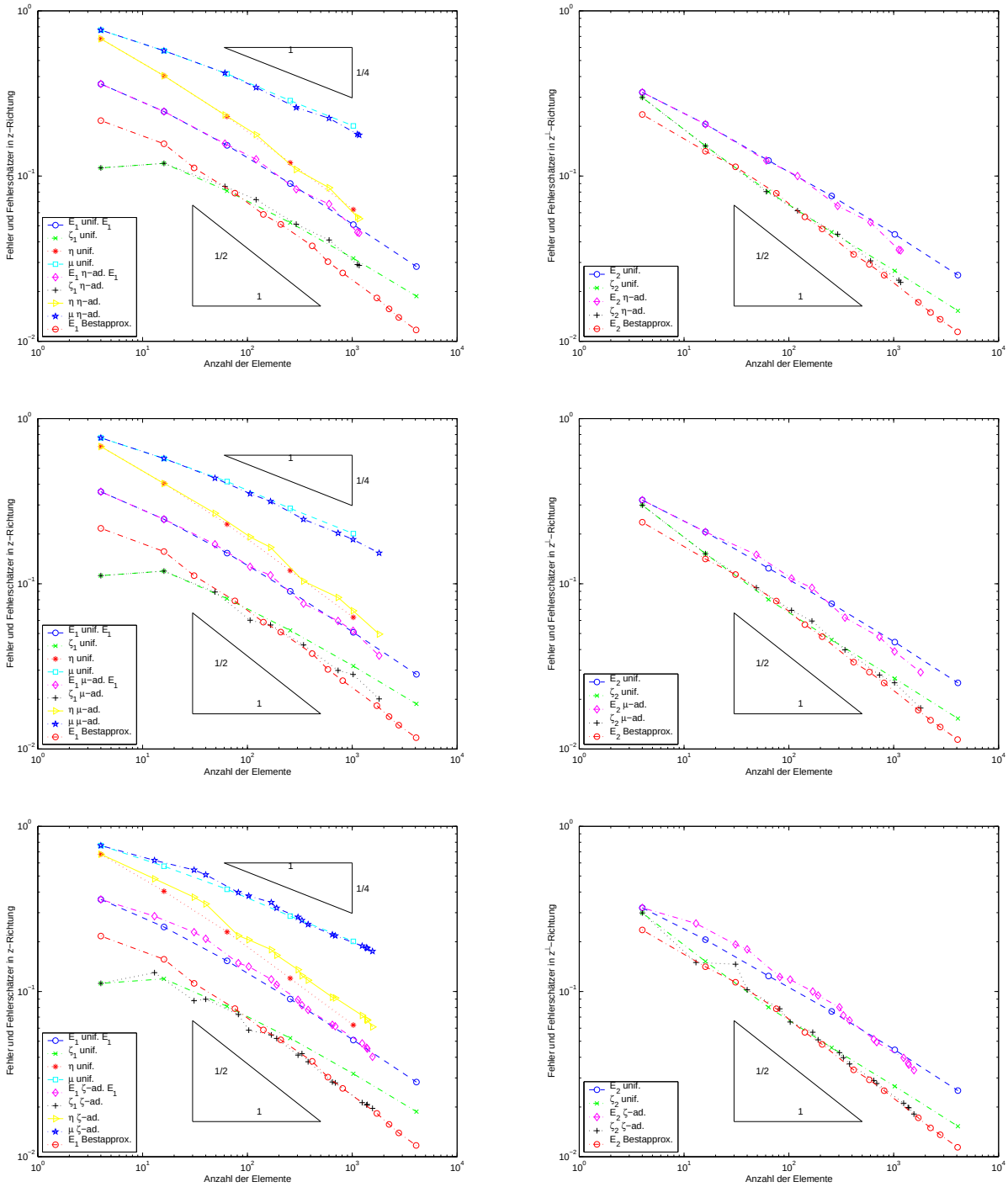


Abbildung 4.21: *Fehler und Fehlerschätzer im Fall* $\lambda = \lambda^{(2)}$ *für* $\alpha = 1$ *bei* η*-adaptiver (oben),* μ*-adaptiver (mittig) und* ζ*-adaptiver Netzverfeinerung (unten) im Vergleich zur uniformen Netzverfeinerung. Anders als im Fall* $\lambda = \lambda^{(1)}$ *liefert die Netzadaptivität für keinen der drei Fehlerschätzer eine wesentliche Verbesserung der Konvergenzrate des Fehlers in* z*-Richtung, sondern lediglich zu einer leichten Verbesserung in Richtung der* easy axis. *Das vergleichsweise beste Konvergenzergebnis liefert die* η*-Adaptivität.*

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	0.10482	0.34702		0.28657	0.30684		0.65996	
1	16	0.11131	0.21101	0.35886	0.13834	0.17630	0.39973	0.36089	0.43542
2	64	0.07690	0.12172	0.39683	0.07376	0.10025	0.40719	0.18553	0.47996
3	256	0.05099	0.07079	0.39103	0.04359	0.06251	0.34073	0.08941	0.52656
4	1024	0.03134	0.04073	0.39871	0.02612	0.03802	0.35862	0.04412	0.50956
5	4096	0.01861	0.02348	0.39733	0.01513	0.02217	0.38924		

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	0.11201	0.36086		0.29908	0.32114		0.67727	
4	292	0.05108	0.08314	0.34215	0.04442	0.06593	0.36903	0.10950	0.42470
7	1165	0.02876	0.04521	0.44030	0.02270	0.03546	0.44823	0.05518	0.49525

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	0.11201	0.36086		0.29908	0.32114		0.67727	
4	166	0.05630	0.11263	0.31252	0.05952	0.09445	0.32848	0.16614	0.37717
8	1804	0.02010	0.03673	0.46971	0.01770	0.02911	0.49331	0.04957	0.50696

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	0.11201	0.36086		0.29908	0.32114		0.67727	
7	190	0.05198	0.10970	0.30842	0.05099	0.09456	0.31668	0.16590	0.36435
16	1561	0.01962	0.04027	0.47589	0.01813	0.03342	0.49385	0.06103	0.47484

Tabelle 4.5: *Fehler, Fehlerschätzer und Konvergenzordnungen für $\lambda = \lambda^{(2)}$ und $\varepsilon = h$ bei uniformer, η-adaptiver, μ-adaptiver und ζ-adaptiver Netzverfeinerung (von oben nach unten).*

Im unstetigen Fall $\lambda = \lambda^{(2)}$ und $h = \varepsilon$ ist die Wirkung der indikatorgesteuerten Netzadaptivität nicht so gut sichtbar wie im Fall $\lambda \equiv 0$, siehe Abbildung 4.21. Die η- bzw. μ-gesteuerte Netzverfeinerung führt augenscheinlich lediglich zu einer leichten Verbesserung der Konvergenzordnung von E_2, während der L^2-Fehler E_1 in z-Richtung dieselbe Konvergenz aufweist wie bei uniformer Verfeinerung. Für ζ-adaptive Verfeinerung weisen sowohl E_1 als auch E_2 bis zu ungefähr $N = 300$ *schlechtere* absolute Werte auf als bei uniformer Verfeinerung. Ab $N = 300$ scheint sich die Konvergenzrate zu verbessern. Die Kurven zu E_1 und E_2 bei ζ-Adaption scheinen dann parallel zu sein zu den zugehörigen Bestapproximationsfehler $\mathbb{E}_1$ und $\mathbb{E}_2$ auf fehleradaptierten Netzen.

Wie bei den vorherigen Experimenten führt die indikatorgesteuerte adaptive Netzverfeinerung auch im Fall $\lambda = \lambda^{(2)}$ und $h = \varepsilon^{3/2}$ zur Verbesserung der experimentellen Konvergenzraten der L^2-Fehler. Alle drei adaptiven Strategien weisen für die Konvergenz der Fehler E_1 und E_2 die optimale experimentelle Konvergenzrate auf, siehe Abbildungen 4.22.

Konklusion zu Beispiel 4.2.2. (a) Im vorliegenden Beispiel erfüllt die exakte Lösung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; B_2^2) \backslash H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Deshalb konvergiert die Folge der Bestapproximationen $\mathbf{m}_{\mathcal{T}}$ zu uniformen Netzen mit verminderter Konvergenzrate. Insbesondere kann auch der Fehlerterm E_1 bei uniformer Netzverfeinerung nicht mit optimaler Ordnung 1/2 konvergieren, wenn das Verfahren mit $\varepsilon = h^\alpha$ für $\alpha \geq 1$ penalisiert wird. Außerdem ist nicht mehr zu erwarten, daß der Fehlerschätzer η zuverlässig ist, denn besonders im Fall $\lambda = \lambda^{(1)} \equiv 0$ ist zu erwarten, daß η mit Konvergenzordnung nahe bei 1/2 fällt, während der L^2-Fehlerterm E_1 von niedrigerer Ordnung ist. Diese Erwartungen können

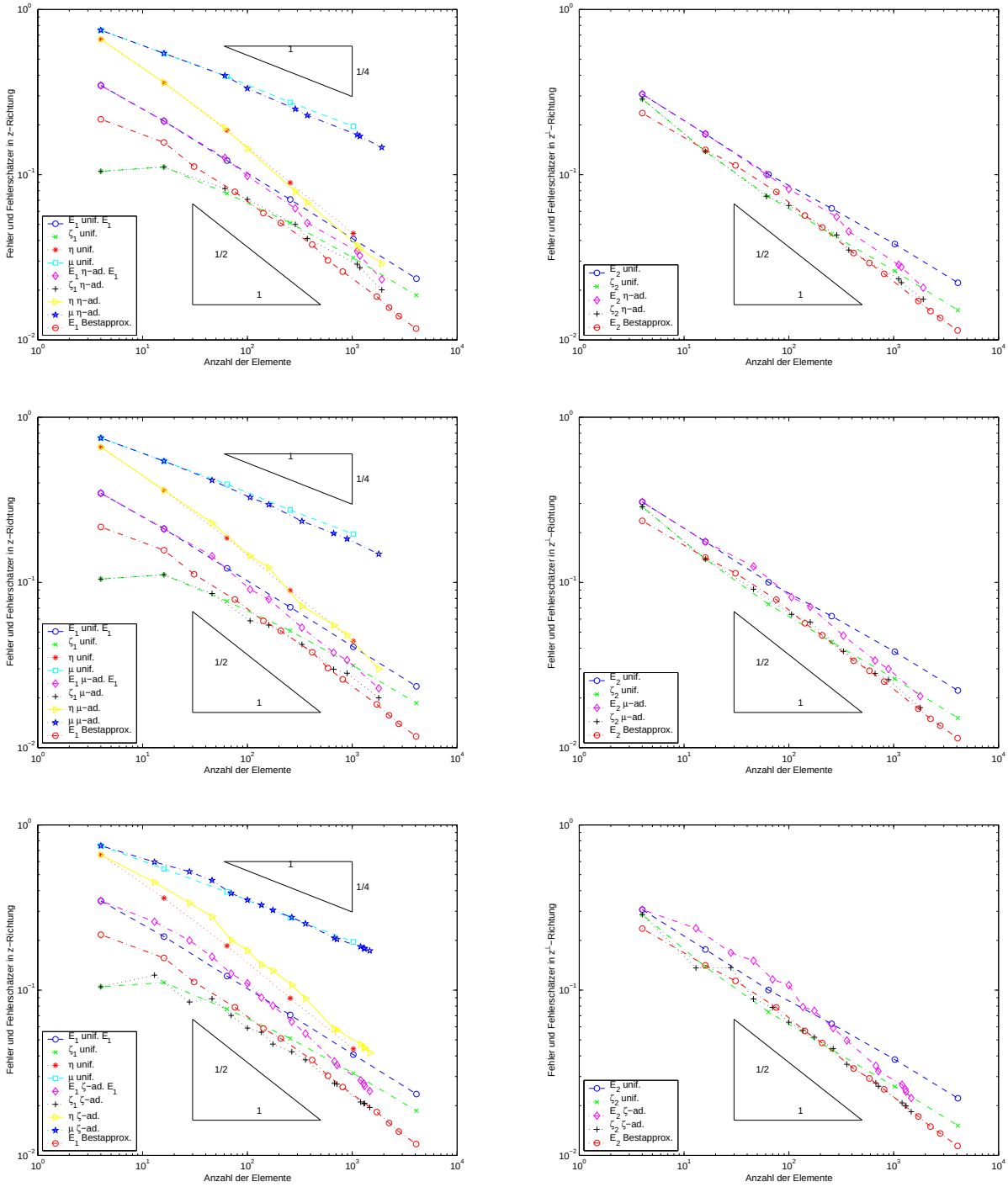


Abbildung 4.22: *Fehler und Fehlerschätzer im Fall $\lambda = \lambda^{(2)}$ für $\alpha = 3/2$ bei η-adaptiver (oben), μ-adaptiver (mittig) und ζ-adaptiver Netzverfeinerung (unten) im Vergleich zur uniformen Netzverfeinerung. Anders als im Fall $\alpha = 1$ führen alle drei Fehlerschätzer sowohl zu einer Verbesserung der Konvergenzrate des Fehlers in z-Richtung als auch in $z^{\perp}$-Richtung.*

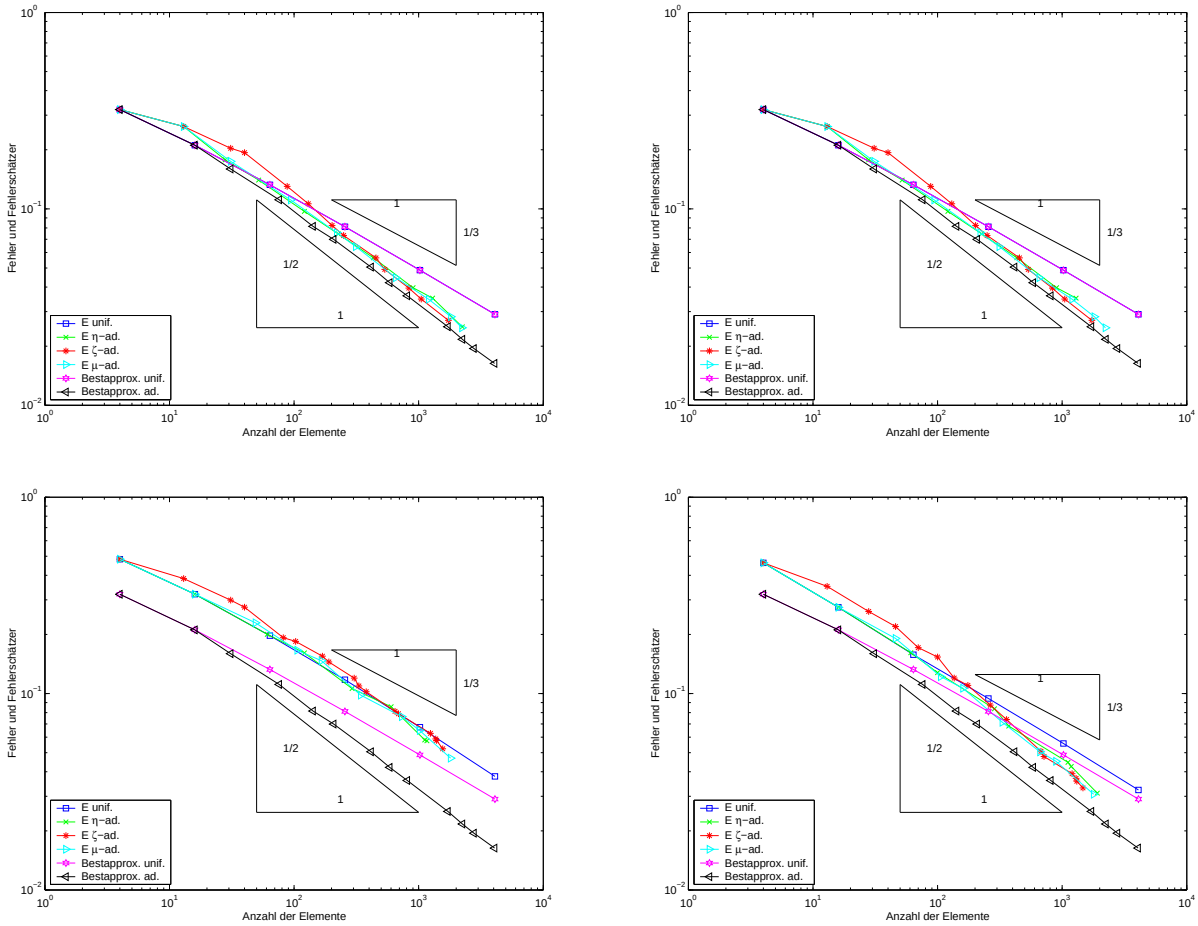


Abbildung 4.23: *Der volle L^2-Fehler $E = \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ im Fall $\lambda = \lambda^{(1)}$ (oben) und $\lambda = \lambda^{(2)}$ (unten) jeweils für $\varepsilon = h$ (links) und $\varepsilon = h^{3/2}$ (rechts) bei uniformer, η-adaptiver, ζ-adaptiver und μ-adaptiver Netzverfeinerung. Zum Vergleich ist in jedem Bild die Norm $\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ für uniforme und optimale Netzadaptivität dargestellt.*

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	0.10482	0.34702		0.28657	0.30684		0.65996	
1	16	0.11131	0.21101	0.35886	0.13834	0.17630	0.39973	0.36089	0.43542
2	64	0.07690	0.12172	0.39683	0.07376	0.10025	0.40719	0.18553	0.47996
3	256	0.05099	0.07079	0.39103	0.04359	0.06251	0.34073	0.08941	0.52656
4	1024	0.03134	0.04073	0.39871	0.02612	0.03802	0.35862	0.04412	0.50956
5	4096	0.01861	0.02348	0.39733	0.01513	0.02217	0.38924		

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	0.10482	0.34702		0.28657	0.30684		0.65996	
4	286	0.05001	0.06254	0.40132	0.04317	0.05553	0.40037	0.07915	0.49672
8	1912	0.02010	0.02323	0.52134	0.01764	0.02070	0.51946	0.02894	0.52948

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	0.10482	0.34702		0.28657	0.30684		0.65996	
4	160	0.05521	0.07915	0.40069	0.05746	0.07119	0.39606	0.12302	0.45537
8	1789	0.02001	0.02286	0.51440	0.01746	0.02050	0.51557	0.02993	0.58548

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	0.10482	0.34702		0.28657	0.30684		0.65996	
7	175	0.04715	0.08048	0.38675	0.05187	0.07503	0.37274	0.13149	0.42696
15	1468	0.01952	0.02448	0.55967	0.01837	0.02224	0.57176	0.04183	0.53851

Tabelle 4.6: *Fehler, Fehlerschätzer und Konvergenzordnungen für $\lambda = \lambda^{(3)}$ und $\varepsilon = h^{3/2}$ bei uniformer, η-adaptiver, μ-adaptiver und ζ-adaptiver Netzverfeinerung (von oben nach unten).*

experimentell nachgewiesen werden.

(b) Auf fehleradaptierten Netzen konvergiert die Folge der L^2-Bestapproximation $\mathbf{m}_{\mathcal{T}}$ mit optimaler Ordnung 1/2. Die numerischen Ergebnisse für das Konvergenzverhalten des Gesamtfehlers $\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ sind in Abbildung 4.23 zusammenfassend dargestellt: Eine indikatorgesteuerte adaptive Netzverfeinerung führt demnach zu besserem Konvergenzverhalten des Gesamtfehlers. Die Fehlerschätzer μ und ζ führen in den Rechnungen zu annähernd denselbem Konvergenzverhalten des Gesamtfehlers. Mit der Ausnahme des Falls $\lambda = \lambda^{(2)}$ und $\alpha = 1$ führt die ζ-adaptive Netzverfeinerung zu den absolut besten Fehlerwerten – wenn auch nur mit leichtem Vorsprung. Es müssen bei der ζ-Adaptivität allerdings auch mit Abstand die meisten Zwischenschritte gerechnet werden. Da der Hauptaufwand in Algorithmus 3.8 beim Aufbau der Daten liegt, die für einen Schritt benötigt werden, ist deshalb einer der beiden residualen Fehlerschätzer zu bevorzugen. Mit erneutem Blick auf den Fall $\lambda = \lambda^{(2)}$ und $\varepsilon = h$ scheint der Fehlerschätzer η am geeignetesten. Die indikatorgesteuerte Netzverfeinerung folgt weitestgehend wieder der fehleradaptierten. Beispielsweise ist in den Abbildung 4.24 und 4.25 die η-gesteuerte Netzverfeinerung gezeigt.

(c) Für $\lambda = \lambda^{(2)}$ und $h = \varepsilon$ liefert die adaptive Netzverfeinerung (im betrachteten Bereich) keine zufriedenstellende Konvergenzresultate. Im glatten Fall zeigt die a priori Analysis $E_{\lambda\mathbf{m}} = \|\lambda\mathbf{m} - \lambda_h\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)} = O(h + \varepsilon)$. Im unstetigen Fall $\lambda = \lambda^{(2)}$ läßt sich im Experiment eine solche Konvergenz mit verminderter Konvergenzordnung nachweisen, siehe Tabelle 4.7. Insbesondere zeigt

k	$N^{(k)}$	$\zeta^{(k)}$	$E^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E)$	$E^{(k)}_{\lambda\mathbf{m}}$	$\kappa^{(k)}(E_{\lambda\mathbf{m}})$	$E^{(k)}_{\lambda}$	$\kappa^{(k)}(E_{\lambda})$
0	4	0.31937	0.48306		0.57575		0.62491	
1	16	0.19335	0.32068	0.29553	0.39572	0.27049	0.46046	0.22029
2	64	0.11428	0.19719	0.35079	0.26020	0.30243	0.31277	0.27898
3	256	0.06941	0.11767	0.37239	0.16648	0.32215	0.19824	0.32894
4	1024	0.04147	0.06742	0.40178	0.10617	0.32447	0.12216	0.34920
5	4096	0.02419	0.03786	0.41615	0.07056	0.29468	0.07746	0.32867

k	$N^{(k)}$	$\zeta^{(k)}$	$E^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E)$	$E^{(k)}_{\lambda\mathbf{m}}$	$\kappa^{(k)}(E_{\lambda\mathbf{m}})$	$E^{(k)}_{\lambda}$	$\kappa^{(k)}(E_{\lambda})$
0	4	0.31937	0.48306		0.57575		0.62491	
4	292	0.06769	0.10610	0.35327	0.14174	0.32670	0.17842	0.29215
7	1165	0.03664	0.05745	0.44334	0.08345	0.38287	0.10349	0.39366

k	$N^{(k)}$	$\zeta^{(k)}$	$E^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E)$	$E^{(k)}_{\lambda\mathbf{m}}$	$\kappa^{(k)}(E_{\lambda\mathbf{m}})$	$E^{(k)}_{\lambda}$	$\kappa^{(k)}(E_{\lambda})$
0	4	0.31937	0.48306		0.57575		0.62491	
4	166	0.08193	0.14699	0.31934	0.19106	0.29607	0.25004	0.24585
8	1804	0.02678	0.04686	0.47913	0.06881	0.42803	0.09156	0.42108

k	$N^{(k)}$	$\zeta^{(k)}$	$E^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E)$	$E^{(k)}_{\lambda\mathbf{m}}$	$\kappa^{(k)}(E_{\lambda\mathbf{m}})$	$E^{(k)}_{\lambda}$	$\kappa^{(k)}(E_{\lambda})$
0	4	0.31937	0.48306		0.57575		0.62491	
6	169	0.07870	0.15497	0.30370	0.21753	0.26000	0.26599	0.22816
14	1372	0.02861	0.05872	0.46337	0.09641	0.38860	0.12469	0.36180

Tabelle 4.7: *Konvergenz der Fehlerterme* $E = \|\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$, $E_{\lambda\mathbf{m}} = \|\lambda\mathbf{m}-\lambda_h\mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ *und* $E_\lambda = \|\lambda-\lambda_h\|_{L^2(\Omega)}$ *bei uniformer, η-adaptiver, μ-adaptiver und ζ-adaptiver Netzverfeinerung (von oben nach unten) im Fall* $\lambda = \lambda^{(2)}$ *und* $\varepsilon = h$.

die Konvergenz für alle Elemente fast überall in Ω die Konvergenz

$$\varepsilon^{-1}|T|(|\mathbf{m}_h|_T| - 1)_+ = |\lambda_h\mathbf{m}_h| \to |\lambda\mathbf{m}|.$$

Im vorliegenden Fall ist die rechte Seite auf ω gerade 1, und mit $\varepsilon = h_T^\alpha$ ergibt sich auf der linken Seite größenordnungsmäßig $h_T^{1/2-\alpha}(|\mathbf{m}_h|_T| - 1)_+ \to \chi_\omega$. Dies erklärt, warum bei der adaptiven Netzverfeinerung zunächst ω hinreichend aufgelöst werden muß. Im Vergleich der Abbildungen 4.17 und 4.24 ist damit aber ersichtlich, daß diese Verfeinerung für die reduzierte Konvergenzordnung verantwortlich ist. Für $\alpha = 3/2$ muß ω nicht so stark aufgelöst werden, um dieselbe Konvergenz zu ermöglichen, siehe Abbildung 4.25. Dies erlaubt zusätzliche Freiheitsgrade an der Grenzschicht $I := \{x \in \Omega \,|\, |x-(1,1)| = 1\}$ und damit eine weitere Annäherung an die optimal adaptierten Netze aus Abbildung 4.17. Zusammenfassend ist ein Penalisierungsparameter $\alpha > 1$ sinnvoll, wenn einerseits das Teilgebiet $\Lambda := \{x \in \Omega \,|\, \lambda(x) \neq 0\}$ verhältnismäßig groß ist und λ auf Λ hohe Werte annimmt. Da keine exakte Lösung von (RP) bekannt ist, ist unklar, ob solche Situationen in praxi auftreten, oder das gegebene Beispiel zufällig pathologisch ist.

(d) Wie im ersten Beispiel 4.2.1 erweist sich das Newton-Verfahren als stabil gegenüber der Wahl des Startvektors und dem dem Penalisierungsparameter $\varepsilon = h^\alpha$.

(e) Das *panel clustering* führt in diesem Beispiel sogar auf ein noch besseres Approximationsverhalten, siehe Tabelle 4.8. Auf dem η-adaptiven Netz $\mathcal{T}_6$ mit $N = 1120$ Elementen sind die relativen Fehler sogar geringer als im Schritt zuvor.

k	$N^{(k)}$	$O^{(k)}$	$E^{(k)}(\mathbf{A})$	$E^{(k)}(\mathbf{X})$	$E^{(k)}(\mathbf{m}_h)$	$E^{(k)}(\eta_{\mathcal{T}})$	$E^{(k)}(\mu_{\mathcal{T}})$	$E^{(k)}(\zeta_{\mathcal{T}})$
0	4	0	0	0	0	0	0	0
1	16	0	0	0	0	0	0	0
2	64	29.7%	2.293e-06	5.065e-08	3.647e-08	2.198e-08	1.386e-08	7.008e-08
3	256	75.3%	1.589e-05	2.855e-07	2.239e-07	1.488e-07	1.031e-07	8.020e-07
4	1024	92.8%	2.235e-05	1.751e-07	1.250e-07	1.214e-07	1.315e-07	6.485e-07

k	$N^{(k)}$	$O^{(k)}$	$E^{(k)}(\mathbf{A})$	$E^{(k)}(\mathbf{X})$	$E^{(k)}(\mathbf{m}_h)$	$E^{(k)}(\eta_{\mathcal{T}})$	$E^{(k)}(\mu_{\mathcal{T}})$	$E^{(k)}(\zeta_{\mathcal{T}})$
0	4	0	0	0	0	0	0	0
1	16	0	0	0	0	0	0	0
2	61	21.5%	8.976e-07	3.396e-08	2.394e-08	1.431e-07	1.982e-07	5.891e-08
3	121	45.9%	4.094e-06	2.209e-07	1.010e-07	5.552e-07	7.399e-07	6.062e-07
4	292	75.5%	6.828e-06	3.016e-07	2.251e-07	5.182e-07	7.960e-07	8.962e-07
5	601	85.0%	1.099e-05	2.590e-07	1.949e-07	6.154e-07	1.007e-06	1.059e-06
6	1120	92.7%	5.857e-06	1.731e-07	1.219e-07	5.467e-07	9.494e-07	7.751e-07

Tabelle 4.8: *Approximationsverhalten des* panel clustering *nach Abschnitt 3.6 in Beispiel 4.2.2 für* $\lambda = \lambda^{(3)}$ *und* $\varepsilon = h$ *bei uniformer (oben) sowie* η*-adaptiver Netzverfeinerung.*

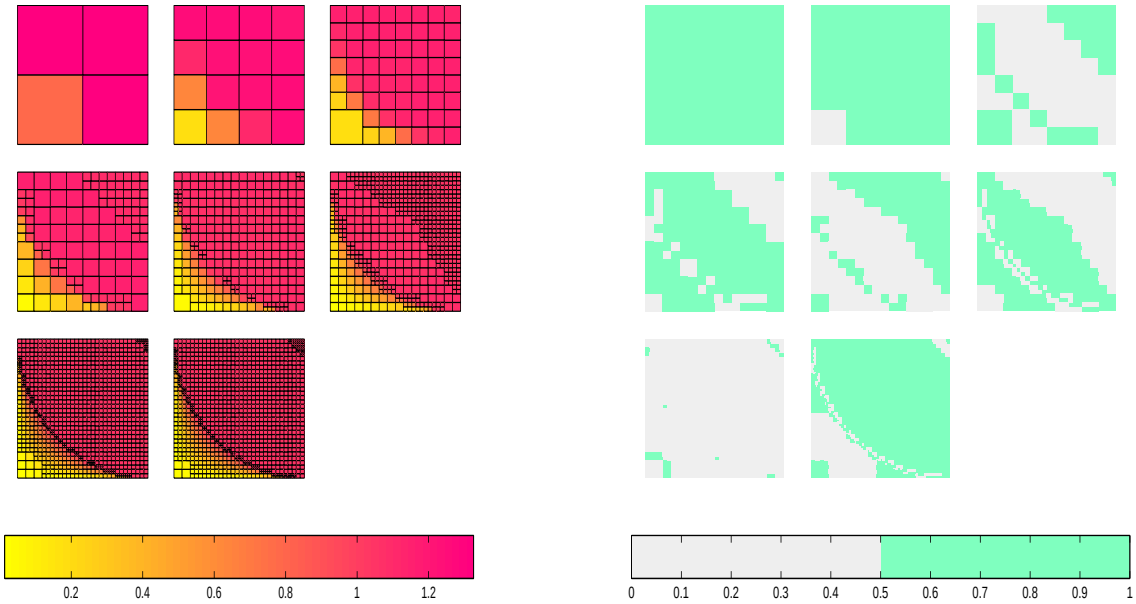


Abbildung 4.24: *Durch den Fehlerschätzer* η*-adaptiv generierte Netze* $\mathcal{T}_0, \ldots, \mathcal{T}_7$ *im Fall* $\lambda = \lambda^{(2)}$ *und* $h = \varepsilon$*. Links ist die Länge* $|\mathbf{m}_h|$ *der diskreten Magnetisierung* $\mathbf{m}_h$ *farbig dargestellt. Die grünen Elemente (rechts) sind zur Verfeinerung markiert.*

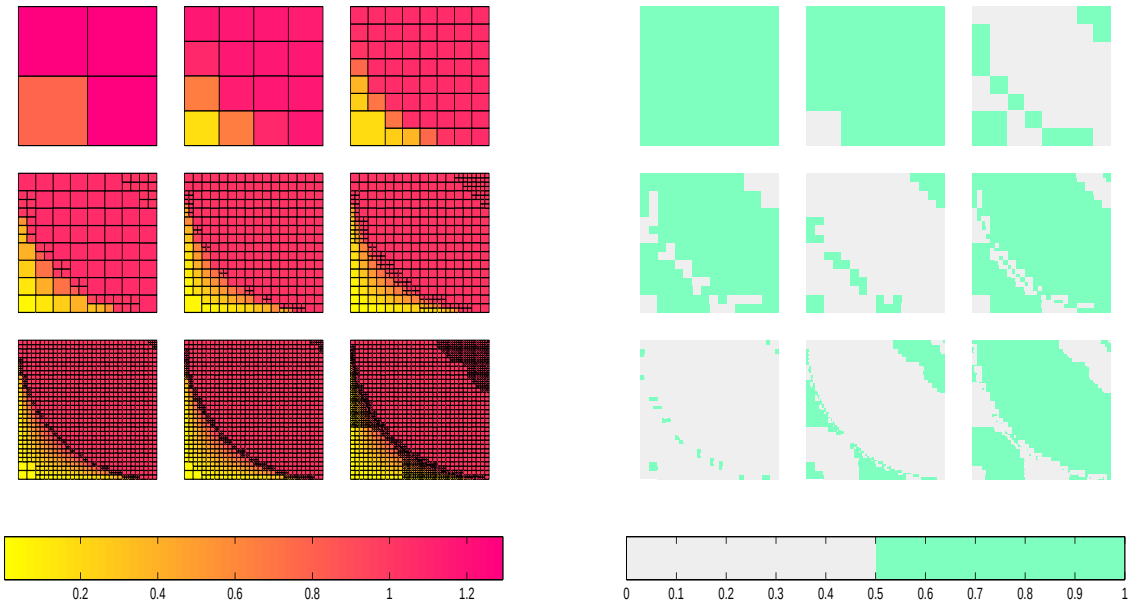


Abbildung 4.25: *Durch den Fehlerschätzer η-adaptiv generierte Netze $\mathcal{T}_0, \ldots, \mathcal{T}_8$ im Fall $\lambda = \lambda^{(2)}$ und $h = \varepsilon^{3/2}$. Links ist die Länge $|\mathbf{m}_h|$ der diskreten Magnetisierung $\mathbf{m}_h$ farbig dargestellt. Die grünen Elemente (rechts) sind zur Verfeinerung markiert.*

4.3 Beispiele für $d = 2$ mit unbekannter exakter Lösung

In den folgenden drei Abschnitten werden Beispiele vorgestellt, bei denen das äußere Feld gegeben ist. Die exakten Lösungen sind unbekannt. Die Schlußfolgerungen sind deshalb nicht analytisch verifizierbar, da die Approximationen $\mathbf{m}_h$ nicht mit der exakten Lösung verglichen werden können. Ebenso kann über die Approximationsgüte des glättungsbasierten Schätzers ζ nur spekuliert werden. Da dieser sich aber in den analytischen Beispielen als effizient erwiesen hat, wird er auch betrachtet. Der einzige der Fehlerschätzer, von dem die Zuverlässigkeit bewiesen ist, ist der residuale Fehlerschätzer μ.

Die ersten Beispiele in Abschnitt 4.3.1 sind der Arbeit Carstensen-Prohl [24] entnommen. Das Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ beschreibt in diesem Fall einen (konvexen) Stab, und das äußere Feld ist konstant. Es zeigt sich, daß die residualen Fehlerschätzer sowohl bei uniformer als auch bei adaptiver Netzverfeinerung ein optimales Konvergenzverhalten zeigen. Die Interpretation ist die, daß die *unbekannte* exakte Lösung hinreichend glatt ist.

Das Experiment in Abschnitt 4.3.2 untersucht das Konvergenzverhalten der Fehlerschätzer bei konstanter rechter Seite auf nicht-konvexen Gebieten. Als Beispiel dient das L-Gebiet. Als Resultat erhält man die Evidenz dafür, daß sich auch die Nicht-Konvexität des Gebiets kaum in den Konvergenzraten niederschlägt. Man erhält nahezu optimale Konvergenzordnungen für die residualen Fehlerschätzer.

Um eine Verringerung der Konvergenz künstlich herbeizuführen, muß das äußere Feld $\mathbf{f}$ auf Ω Unstetigkeiten aufweisen. In Abschnitt 4.3.3 wird ein Beispiel konstruiert, bei dem $\mathbf{f}$ entlang der Gebietsdiagonalen springt. Oberhalb und unterhalb der Diagonale ist $\mathbf{f}$ jeweils konstant. Diese Unstetigkeit reicht aus, für die Fehlerschätzer suboptimale Konvergenzraten zu induzieren. Durch Netzadaptivität können diese jedoch verbessert werden: Die indikatorgesteuerte Netzadaptivität liefert die gewünschten optimalen Konvergenzraten.

4.3.1 Beispiele aus Carstensen-Prohl [24]

Im folgenden bezeichne $\Omega = (-1/2, 1/2) \times (-5/2, 5/2)$ einen ferromagnetischen Stab in einem konstanten äußeren Feld $\mathbf{f}^{(1)} \equiv (3/5, 0)$, $\mathbf{f}^{(2)} \equiv (1/2, 1/2)$ bzw. $\mathbf{f}^{(3)} \equiv (0, 9/10)$. In den drei Experimenten wird der Modellfall (2.19) mit $z = (0, 1)$ betrachtet. Die *easy axis* ist also parallel zu $\mathbf{f}^{(1)}$ und steht orthogonal auf $\mathbf{f}^{(3)}$. Die exakte Lösung $(\lambda, \mathbf{m})$ des konvexifizierten Problems (RP) ist unbekannt, so auch Carstensen-Prohl [24]. Als Startnetz $\mathcal{T}_0$ wird ein uniformes Netz mit $N = 5$ Elementen verwandt. Abbildung 4.26 zeigt die diskreten Lösungen $\mathbf{m}_h$ zu $\mathbf{f}^{(\ell)}$, $\ell = 1, 2, 3$, auf dem uniformen Netz $\mathcal{T}_3$ mit $N = 320$ Elementen. Obwohl in den numerischen Experimenten in Carstensen-Prohl [24], die Maxwell-Gleichung

$$\operatorname{div}(-\nabla u + \mathbf{m}) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

zur Berechnung des magnetischen Potentials u auf einem beschränkten Gebiet $\widehat{\Omega}$ mit $\Omega \Subset \widehat{\Omega} \Subset \mathbb{R}^2$ anstelle des Vollraums $\mathbb{R}^2$ gelöst wird, zeigt sich dasselbe Verhalten der diskreten Lösungen wie bei den numerischen Experimenten in Carstensen-Prohl [24]: Für $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}$ folgt die Magnetisierung $\mathbf{m}_h$ der Vorgabe von $\mathbf{f}$, zumal diese Ausrichtung aus Sicht von Anisotropieenergie und äußerer Energie energetisch sinnvoll ist. Die Spitzenwerte von $|\mathbf{m}_h|$ werden in zwei kegelförmigen Bereichen angenommen, die am oberen und unteren Ende des Stabes liegen. Dieser kegelförmige Bereich ist auch bei der Penalisierung sichtbar. Für $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(2)}$ verhält sich die Magnetisierung nicht so homogen.

Im Inneren des Gebietes richtet sie sich annähernd nach dem äußeren Feld aus. An der linken oberen und rechten unteren Ecke aber scheint das äußere Feld weniger Einfluß zu haben. Die x_2-Komponente von $\mathbf{m}_h$ verliert dort an Einfluß, und $\mathbf{m}_h$ zeigt eher in z-Richtung. Die Länge von $|\mathbf{m}_h|$ ist hierbei an der oberen rechten und der unteren linken Ecke von Ω am größten. Die Bereiche sind aber, jeder für sich betrachtet, nicht mehr symmetrisch wie im Fall von $\mathbf{f}^{(1)}$. Im dritten Fall $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(3)}$ tritt für $\mathbf{m}_h$ eine *flowerlike structure* auf. An den unteren Ecken von Ω zeigt die Magnetisierung mit einem Winkel von $\pm\pi/4$ in Ω hinein, an den oberen Ecken tritt sie mit demselben Winkel aus. Im übrigen Gebiet richtet sich $\mathbf{m}_h$ nach dem äußeren Feld aus und scheint mit Abstand vom oberen und unteren Rand von Ω im wesentlichen parallel zu $\mathbf{f}^{(3)}$. Die Länge $|\mathbf{m}_h|$ der Magnetisierung ist relativ homogen und variiert zwischen 4/5 und 1. In den Eckpunkten ist sie am größten und erreicht maximale Werte von annähernd 1. In keinem Bereich tritt eine Penalisierung auf.

Gliederung der numerischen Experimente. Da die exakte Lösung $(\lambda, \mathbf{m})$ von (RP) nicht bekannt ist, kann der Fehler $E = \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_h\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}$ *nicht* berechnet werden, und auch über die Akkuranz des Glättungsschätzers ζ kann keine Aussage getroffen werden. Im vorausgegangenen Abschnitt hat sich experimentell gezeigt, daß von ζ bzw. ζ_1 und ζ_2 eine gute Approximation des Fehlers E bzw. der komponentenweise Fehler $E_1 := \|(\mathbf{m}-\mathbf{m}_h)\cdot z\|_{L^2(\Omega)}$ und $E_2 := \|(\mathbf{m}-\mathbf{m}_h)\cdot z^\perp\|_{L^2(\Omega)}$ zu erwarten ist. Sie werden deshalb zu Vergleichszwecken mitangegeben. Die Abbildungen 4.28 geben die Werte der ζ_j in Abhängigkeit vom Penalisierungsparametrer $\varepsilon = h^\alpha$ bei uniformer Netzverfeinerung. Es zeigt sich kein Einfluß von dieser Wahl auf die Konvergenz des Verfahrens. Mit den Abbildungen 4.29 - 4.31 werden die adaptiven Netzverfeinerungsstrategien bezüglich η, μ und ζ studiert. Unter Berücksichtigung der letzten Abschnitte werden die Penalisierungsparameter $\varepsilon = h$ und $\varepsilon = h^{3/2}$ betrachtet. Schließlich versuchen die Abbildungen 4.32 - 4.36 einen Eindruck zu vermitteln, wie die adaptiven Netze für dieses Problem aussehen.

Konklusion zu den Beispielen 4.3.1. (a) Abbildung 4.28 legt die Vermutung nahe, daß die Konvergenz des Verfahrens unabhängig ist vom Stabilisierungsparameter $\varepsilon = h^\alpha$, denn für alle getesteten Werte von $\alpha \in [1/4, 3]$ ergibt sich dasselbe Konvergenzverhalten des Glättungsschätzers ζ_1 in z-Richtung. Dieser konvergiert in allen drei Beispielen mit einer suboptimalen Konvergenzrate von ungefähr 2/5. Für die $z^\perp$-Komponente ergibt sich ein ähnliches Bild. Mit Ausnahme der $\alpha \leq 1$ decken sich die Glättungsschätzer ζ_2 für verschiedene α und konvergieren mit einer suboptimalen Konvergenzrate, die für $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}$ und $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(2)}$ ungefähr 2/5 beträgt und für $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(3)}$ sogar lediglich 1/4. Dieses homogene Verhalten der Lösungen in Abhängigkeit vom Penalisierungsparameter läßt darauf schließen, daß der penalisierte Bereich entweder nicht groß ist oder die Werte von $\lambda(x)$ hinreichend klein sind. Diese Vermutung bestätigt sich auch bei Betrachtung der diskreten Lagrange-Parameter λ_h. Für $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}$ verschwindet λ_h ausserhalb zweier Kegel, die mit der oberen und unteren Kante von Ω abschließen, siehe Abbildung 4.32. Insgesamt macht der penalisierte Bereich also keine 10% von Ω aus. Die Werte von λ_h nehmen ihr Maximum an den Außenkanten von Ω an und Verhalten sich monoton wachsend antiproportional zum Abstand vom oberen und unteren Rand. In diesem Bereich scheint λ_h stetig zwischen 0 und 2/5 zu differieren. Ein analoges Bild erhält man für $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(2)}$. Der penalisierte Bereich nimmt wiederum maximal 10% des Gebietes ein, λ_h nimmt sein Maximum nun mit 0.46 in der rechten oberen und der linken unteren Ecke des Gebiets an. Im letzten Fall $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(3)}$ tritt die Penalsierung schließlich nur in den vier Eckpunkten auf.

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	5			0.15877		0.56393		0.47421	
1	20	0.04528		0.11498	0.23278	0.29577	0.46553	0.35001	0.21907
2	80	0.02957	0.30749	0.05347	0.55235	0.15674	0.45806	0.25902	0.21714
3	320	0.01729	0.38717	0.03153	0.38095	0.08089	0.47711	0.18774	0.23218
4	1280	0.00964	0.42100	0.01941	0.34987	0.04100	0.49016	0.13401	0.24321

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	5			0.15877		0.56393		0.47421	
1	11	0.04530		0.11136	0.44981	0.30541	0.77784	0.35467	0.36839
4	236	0.01115	0.45724	0.02877	0.44145	0.05952	0.53337	0.15466	0.27071
7	1604	0.00446	0.47837	0.01587	0.31058	0.02115	0.53989	0.09475	0.25567

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	5			0.15877		0.56393		0.47421	
1	11	0.04530		0.11136	0.44981	0.30541	0.77784	0.35467	0.36839
4	209	0.01147	0.46655	0.02972	0.44865	0.06372	0.53225	0.15797	0.27468
6	1292	0.00443	0.52171	0.01855	0.25865	0.02575	0.49732	0.09780	0.26322

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	5			0.15877		0.56393		0.47421	
1	17	0.04528		0.11497	0.26375	0.29579	0.52729	0.34997	0.24824
4	329	0.01113	0.47368	0.02136	0.56816	0.05493	0.56826	0.14847	0.28940
7	2312	0.00478	0.43349	0.00844	0.47619	0.02527	0.39818	0.09635	0.22177

Tabelle 4.9: *Fehlerschätzer ζ_1, ζ_2, η und μ mit Konvergenzraten für $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}$ und $\varepsilon = h$ bei uniformer, η-adaptiver, μ-adaptiver bzw. ζ-adaptiver Netzverfeinerung (von oben nach unten).*

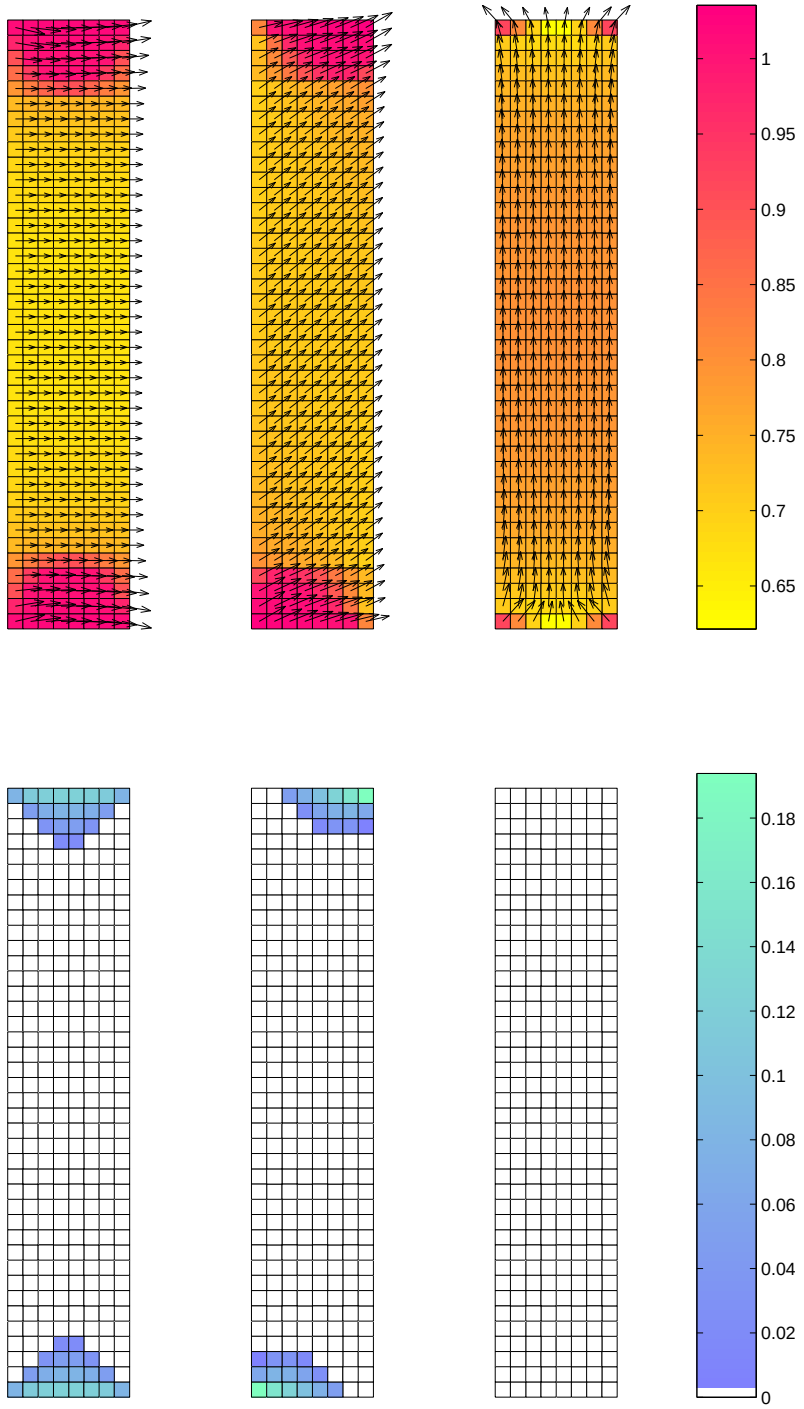


Abbildung 4.26: *Diskrete Lösungen* $\mathbf{m}_h$ *(oben) und dazugehörige Lagrange-Parameter* λ_h *(unten) auf uniformem Netz* $\mathcal{T}_3$ *(*$N = 320$*) für* $\mathbf{f}^{(1)}$, $\mathbf{f}^{(2)}$ *und* $\mathbf{f}^{(3)}$ *(jeweils von links nach rechts). Die Länge* $|\mathbf{m}_h|$ *von* $\mathbf{m}_h$ *ist links farbig dargestellt. Auf den weißen Elementen* $T \in \mathcal{T}_3$ *(rechts) gilt* $|\mathbf{m}_h|_T| \leq 1$ *und damit* $\lambda_h|_T = 0$.

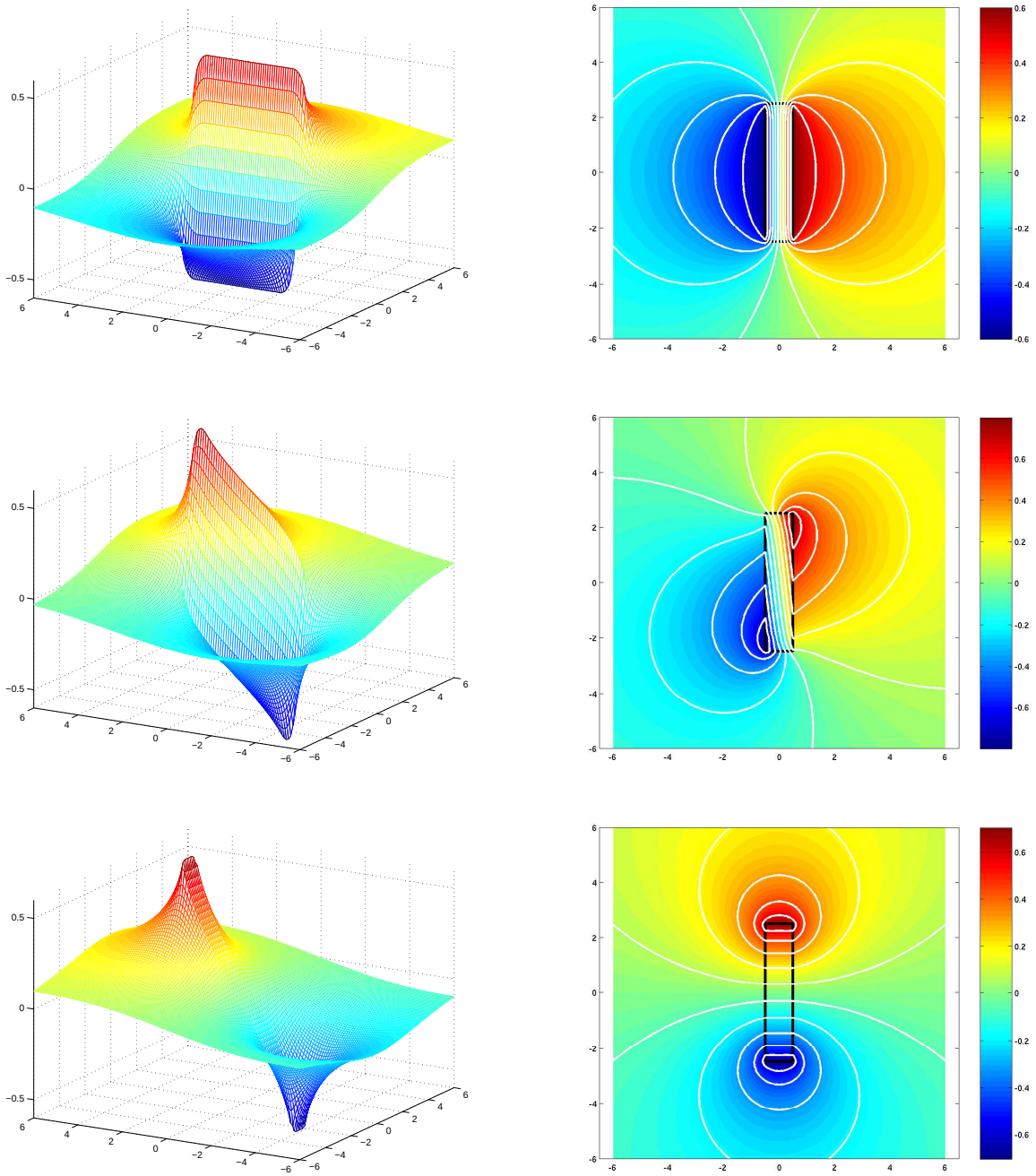


Abbildung 4.27: *Magnetische Potentiale* $u_h = \mathcal{L}\mathbf{m}_h$ *zu diskreten Magnetisierungen* $\mathbf{m}_h$ *auf uniformen Netzen* $\mathcal{T}_3$ *(*$N = 320$*) im Fall* $\varepsilon = h$ *für* $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}$ *(oben),* $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(2)}$ *(oben) und* $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(3)}$ *(unten). Die linken Bilder zeigen jeweils* u_h *als Plot über die Ebene* $[-6, 6]^2$*, die rechten die Projektion in die Ebene, wobei die Werte* $u_h(x)$ *farbig gekennzeichnet und als weiterer Anhaltspunkt einige Isolinien eingezeichnet sind.*

(b) Für alle drei äußeren Felder $\mathbf{f}^{(\ell)}$ wurden adaptive Netzverfeinerung bezüglich η, μ und ζ getestet – und zwar jeweils für die Penalisierung $\varepsilon = h$ und die höhere Penalisierung $\varepsilon = h^{3/2}$. Zunächst einmal ist festzustellen, daß die Kurven der Fehlerschätzer für verschiedene Penalisierungsterme auch bei adaptiver Netzverfeinerung koinzidieren, siehe Abbildung 4.29 - 4.31. Dies unterstreicht die Evidenz dafür, daß der (unbekannte) Lagrange-Parameter λ in praxi nicht die reglementierende Größe ist.

(c) Die adaptiven Netzverfeinerungen bezüglich μ und η verhalten sich im wesentlichen gleich. Beide Strategien liefern neben einer leichten Verbesserung der absoluten Werte von μ und η auch eine Verbesserung der Konvergenzrate des Schätzers ζ_1, der nun ebenfalls mit annähernd optimaler Ordnung konvergiert. Die Konvergenzordnung von ζ_2 scheint sich aber in diesen Fällen nicht zu verbessern.

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	5	0.02050		0.13231		0.62983		0.52962	
1	20	0.03801		0.12252	0.05547	0.33376	0.45808	0.39427	0.21289
2	80	0.02662	0.25707	0.07181	0.38535	0.16412	0.51202	0.26876	0.27645
3	320	0.01559	0.38561	0.04297	0.37036	0.08913	0.44042	0.20581	0.19250
4	1280	0.00863	0.42674	0.02476	0.39775	0.04947	0.42464	0.15893	0.18645

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	5	0.02050		0.13231		0.57891		0.48680	
4	206	0.01266	0.12966	0.04094	0.31547	0.08736	0.50856	0.19630	0.24424
7	1886	0.00435	0.48215	0.02273	0.26578	0.02798	0.51415	0.11226	0.25236

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	5	0.02050		0.13231		0.57891		0.48680	
4	260	0.01063	0.16630	0.04344	0.28189	0.08201	0.49459	0.18344	0.24701
6	1586	0.00433	0.49591	0.02343	0.34145	0.03204	0.51980	0.11618	0.25257

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	5	0.02050		0.13231		0.57891		0.48680	
4	197	0.01336	0.11660	0.03222	0.38450	0.12427	0.41883	0.21230	0.22589
8	1514	0.00553	0.43230	0.01289	0.44930	0.05157	0.43125	0.13507	0.22176

Tabelle 4.10: *Fehlerschätzer ζ_1, ζ_2, η und μ mit Konvergenzraten für $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(2)}$ und $\varepsilon = h$ bei uniformer, η-adaptiver, μ-adaptiver bzw. ζ-adaptiver Netzverfeinerung (von oben nach unten).*

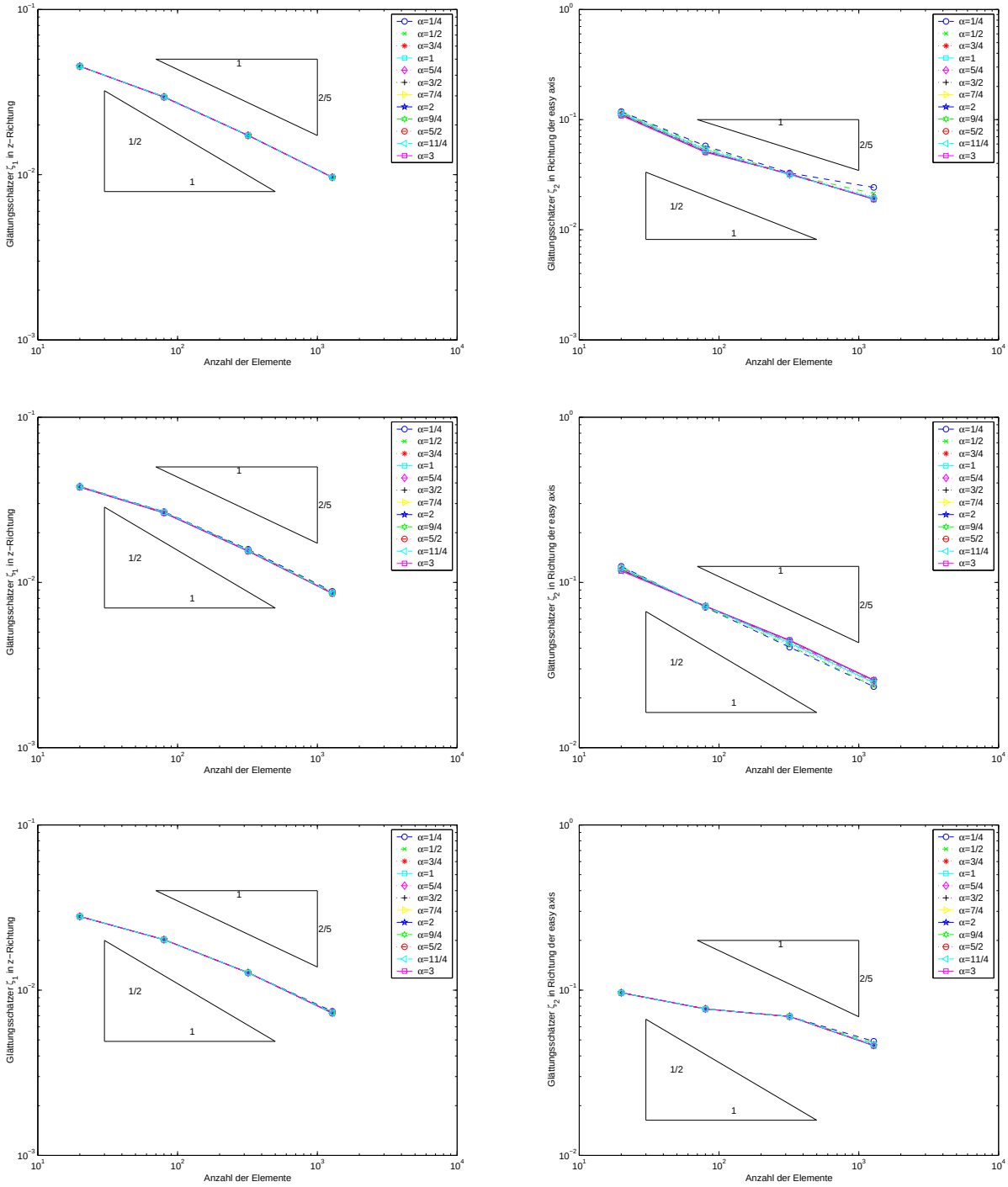


Abbildung 4.28: *Die Glättungsschätzer ζ_1 (links) und ζ_2 (rechts) bei uniformer Netzverfeinerung im Fall $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}$ (oben), $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(2)}$ (mittig) und $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(3)}$ (unten) für verschiedene Penalisierungsparameter α zwischen $1/4$ und 3. In allen drei Beispielen konvergiert der Schätzer in z-Richtung unabhängig von α mit verminderter Konvergenzordnung $2/5$.*

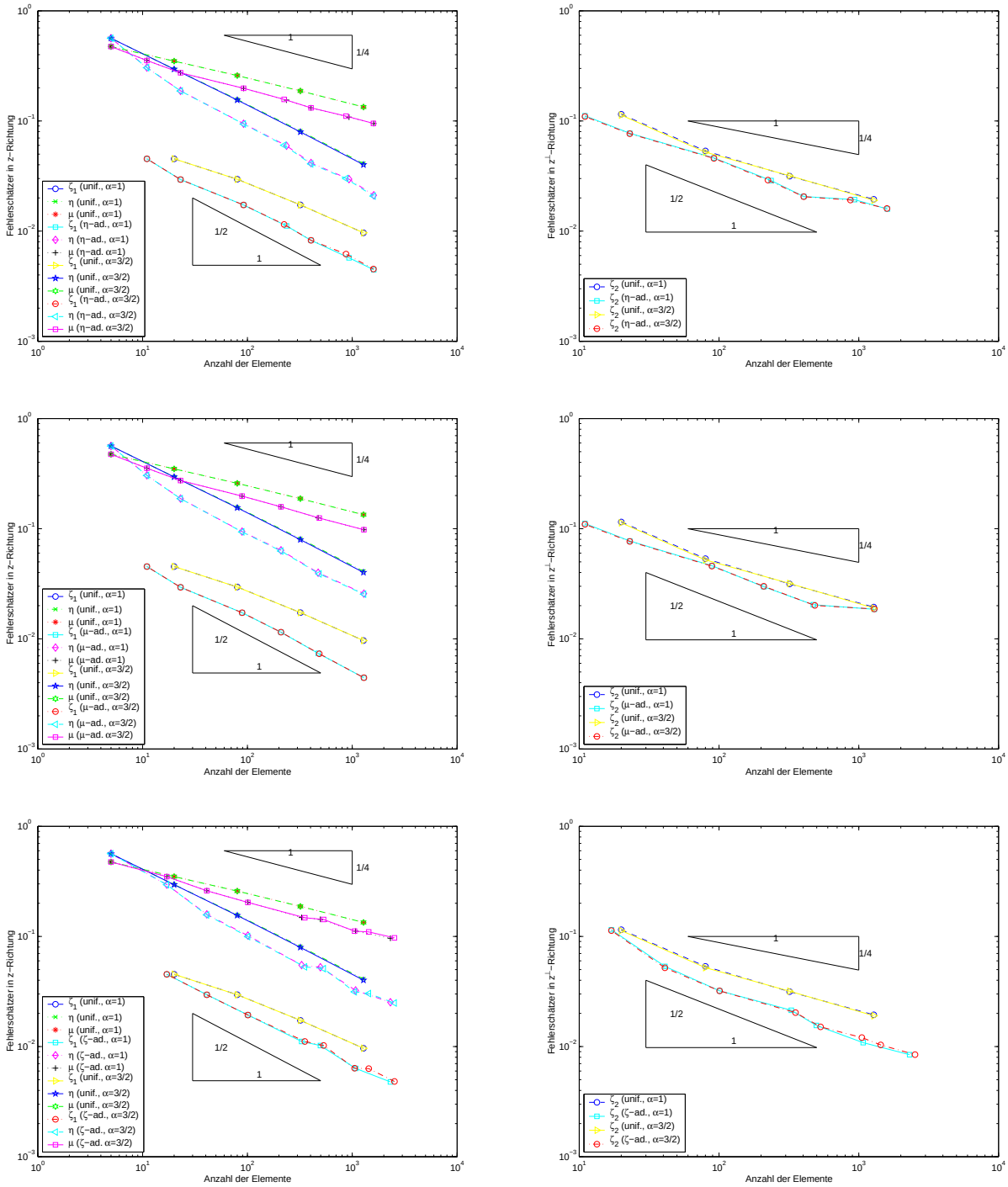


Abbildung 4.29: *Fehler und Fehlerschätzer im Fall* $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}$ *für* $\alpha \in \{1, 3/2\}$ *bei* η*-adaptiver (oben),* μ*-adaptiver (mittig) und* ζ*-adaptiver Netzverfeinerung (unten) im Vergleich zur uniformen Netzverfeinerung. Unter der Annahme, daß die komponentenweisen Glättungsschätzer* ζ_j *eine gute Approximation des* unbekannten *Fehlers in* z*- bzw.* $z^{\perp}$*-Richtung sind, führt die Netzadaptivität bzgl.* η *bzw.* μ *zur optimalen Konvergenz von* E_1*, die* ζ*-Adaptivität zur optimalen Konvergenz von* E_2*. Insbesondere sieht man, daß Penalisierung mit* $\alpha = 3/2$ *keine besseren Werte liefert als* $\alpha = 1$*.*

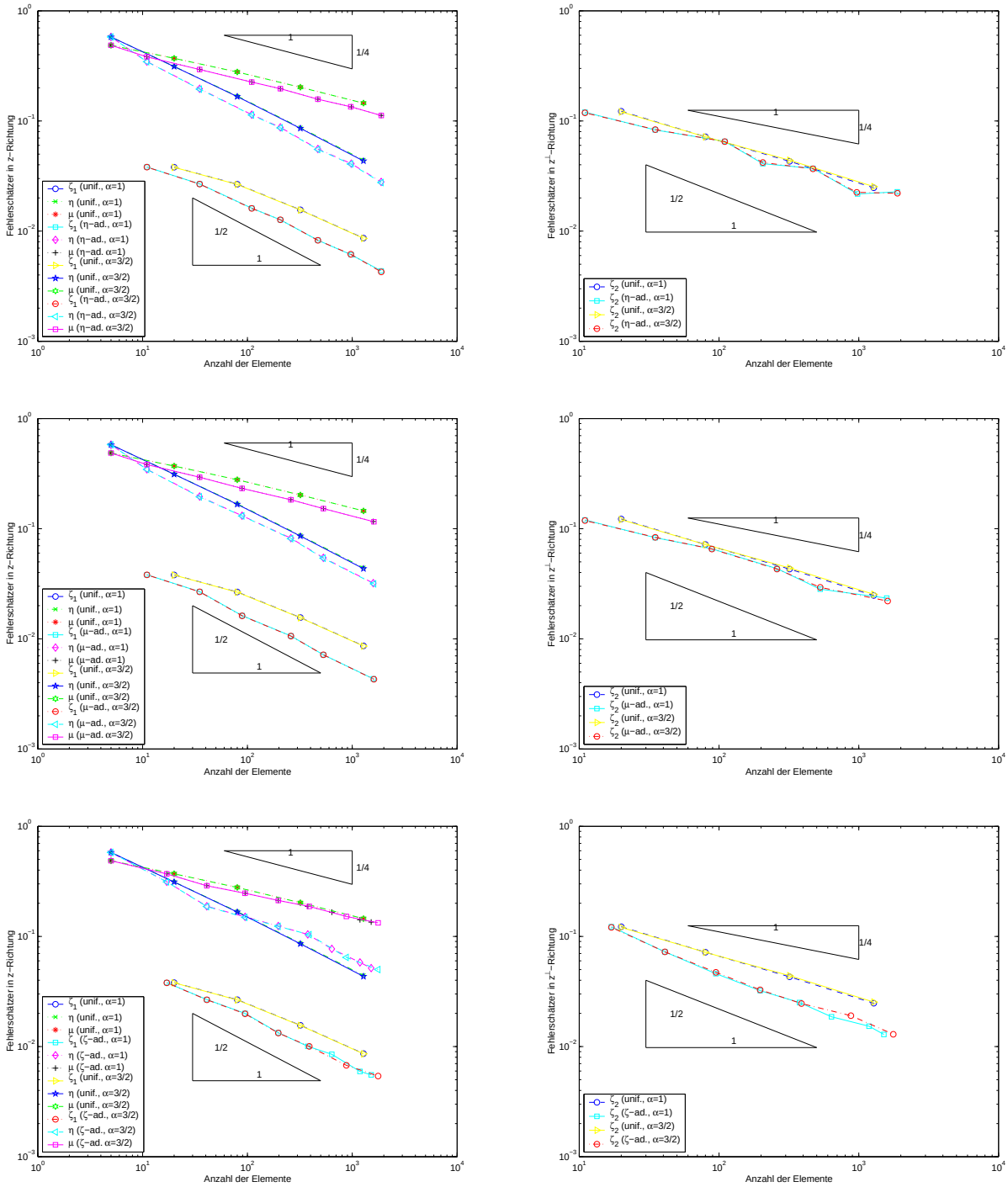


Abbildung 4.30: *Fehler und Fehlerschätzer im Fall* $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(2)}$ *für* $\alpha \in \{1, 3/2\}$ *bei* η*-adaptiver (oben),* μ*-adaptiver (mittig) und* ζ*-adaptiver Netzverfeinerung (unten) im Vergleich zur uniformen Netzverfeinerung. Unter der Annahme, daß die komponentenweisen Glättungsschätzer* ζ_j *eine gute Approximation des* unbekannten *Fehlers in* z*- bzw.* $z^{\perp}$*-Richtung sind, führt die Netzadaptivität bzgl.* η *bzw.* μ *zur optimalen Konvergenz von* E_1*, die* ζ*-Adaptivität zur optimalen Konvergenz von* E_2*. Insbesondere sieht man, daß Penalisierung mit* $\alpha = 3/2$ *keine besseren Werte liefert als* $\alpha = 1$*.*

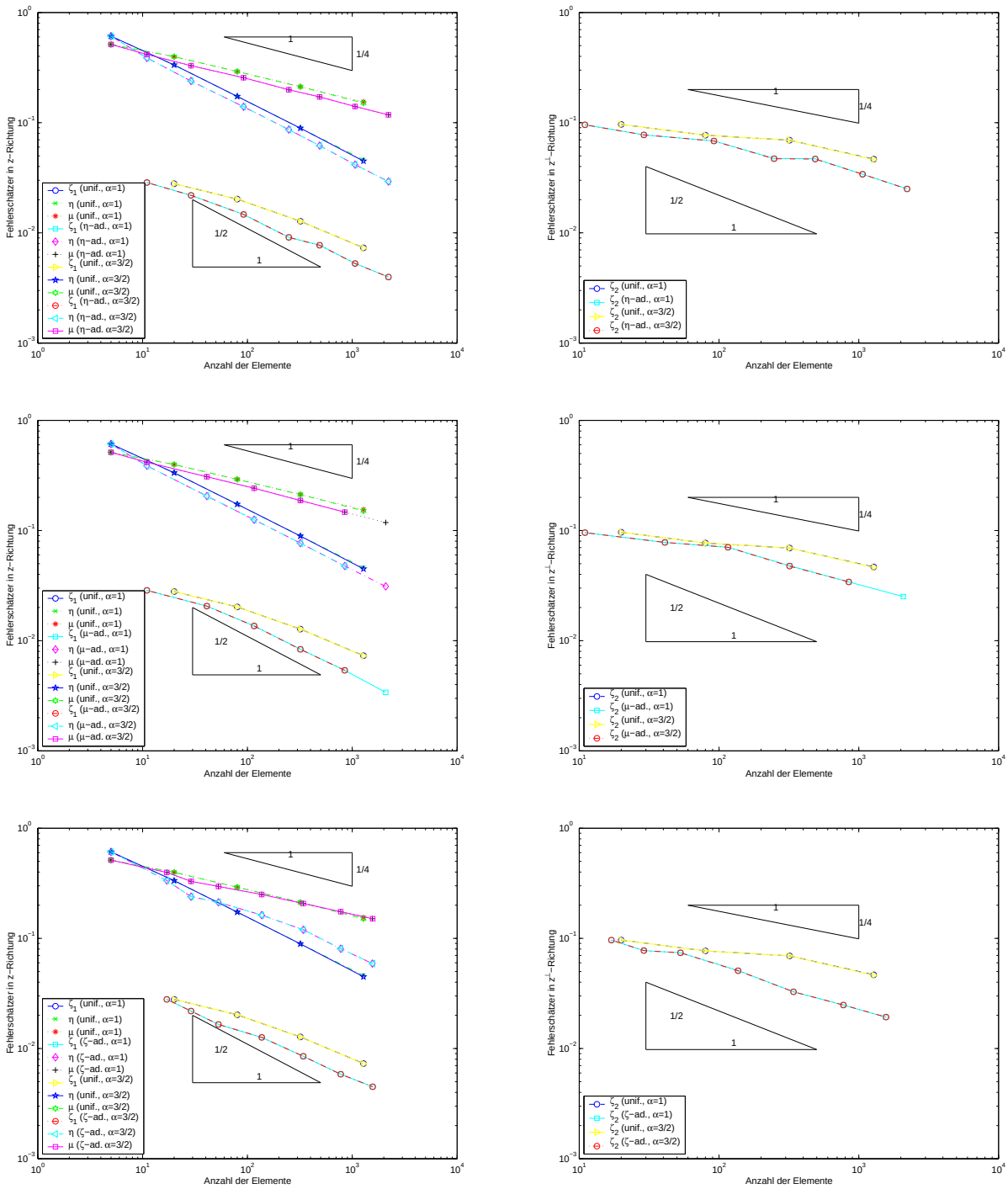


Abbildung 4.31: *Fehler und Fehlerschätzer im Fall* $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(3)}$ *für* $\alpha \in \{1, 3/2\}$ *bei* η*-adaptiver (oben),* μ*-adaptiver (mittig) und* ζ*-adaptiver Netzverfeinerung (unten) im Vergleich zur uniformen Netzverfeinerung. Unter der Annahme, daß die komponentenweisen Glättungsschätzer* ζ_j *eine gute Approximation des* unbekannten *Fehlers in* z*- bzw.* $z^{\perp}$*-Richtung sind, führt die Netzadaptivität bzgl.* η *bzw.* μ *zur optimalen Konvergenz von* E_1*, die* ζ*-Adaptivität zur optimalen Konvergenz von* E_2*. Insbesondere sieht man, daß* $\alpha = 3/2$ *keine besseren Werte liefert als* $\alpha = 1$*.*

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	5	0.03690				0.61042		0.51330	
1	20	0.02793	0.20101	0.09644		0.34707	0.40728	0.41274	0.15728
2	80	0.02022	0.23285	0.07697	0.16268	0.17420	0.49726	0.29296	0.24726
3	320	0.01275	0.33277	0.06927	0.07607	0.09090	0.46916	0.21621	0.21916
4	1280	0.00731	0.40153	0.04665	0.28515	0.04682	0.47864	0.15497	0.24019

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	5	0.03690				0.60972		0.51271	
1	11	0.02863	0.32194	0.09569		0.38730	0.57555	0.41673	0.26288
4	248	0.00912	0.36722	0.04732	0.22602	0.08653	0.48104	0.19911	0.23707
7	2216	0.00397	0.37928	0.02505	0.29038	0.02924	0.49538	0.11779	0.23971

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	5	0.03690				0.60972		0.51271	
1	11	0.02863	0.32194	0.09569		0.38730	0.57555	0.41673	0.26288
4	320	0.00837	0.36495	0.04787	0.20548	0.07677	0.48016	0.18738	0.23716
6	2084	0.00340	0.48125	0.02515	0.34365	0.03113	0.48180	0.11804	0.24661

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	5	0.03690				0.60972		0.51271	
1	17	0.02792	0.22790	0.09649		0.33541	0.48838	0.39665	0.20974
4	137	0.01263	0.38030	0.05106	0.30500	0.16259	0.34700	0.25012	0.22096
7	1556	0.00451	0.42410	0.01928	0.40069	0.05907	0.41669	0.15066	0.20863

Tabelle 4.11: *Fehlerschätzer ζ_1, ζ_2, η und μ mit Konvergenzraten für $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(3)}$ und $\varepsilon = h$ bei uniformer, η-adaptiver, μ-adaptiver bzw. ζ-adaptiver Netzverfeinerung (von oben nach unten).*

k	$N^{(k)}$	$O^{(k)}$	$E^{(k)}(\mathbf{A})$	$E^{(k)}(\mathbf{X})$	$E^{(k)}(\mathbf{m}_h)$	$E^{(k)}(\eta_{\mathcal{T}})$	$E^{(k)}(\mu_{\mathcal{T}})$	$E^{(k)}(\zeta_{\mathcal{T}})$
0	5	0	0	0	0	0	0	0
1	20	32.0%	3.025e-06	1.361e-06	1.212e-06	4.201e-04	4.222e-04	9.018e-06
2	80	61.5%	1.870e-05	5.580e-06	4.986e-06	4.145e-03	4.218e-03	3.258e-05
3	320	82.6%	2.650e-05	4.298e-06	3.507e-06	8.773e-03	8.991e-03	6.738e-05
4	1280	94.6%	3.254e-05	2.122e-05	1.569e-05	1.784e-02	1.836e-02	4.908e-04

k	$N^{(k)}$	$O^{(k)}$	$E^{(k)}(\mathbf{A})$	$E^{(k)}(\mathbf{X})$	$E^{(k)}(\mathbf{m}_h)$	$E^{(k)}(\eta_{\mathcal{T}})$	$E^{(k)}(\mu_{\mathcal{T}})$	$E^{(k)}(\zeta_{\mathcal{T}})$
0	5	0	0	0	0	0	0	0
1	11	0	0	0	0	0	0	0
2	23	40.8%	6.680e-08	1.341e-07	4.632e-08	4.622e-06	3.072e-06	5.355e-07
3	92	52.3%	2.561e-06	3.884e-06	2.625e-06	6.371e-04	3.651e-04	8.563e-05
4	236	66.8%	6.251e-06	5.218e-06	3.982e-06	2.536e-03	1.348e-03	1.111e-04
5	404	79.2%	6.470e-06	8.343e-06	5.225e-06	8.142e-03	4.111e-03	1.762e-04
6	980	89.9%	1.533e-05	1.646e-05	6.201e-06	1.589e-02	7.198e-03	3.809e-04

Tabelle 4.12: *Approximationsverhalten des* panel clustering *nach Abschnitt 3.6 für* $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}$ *und* $\varepsilon = h$ *bei uniformer (oben) sowie* η*-adaptiver Netzverfeinerung.*

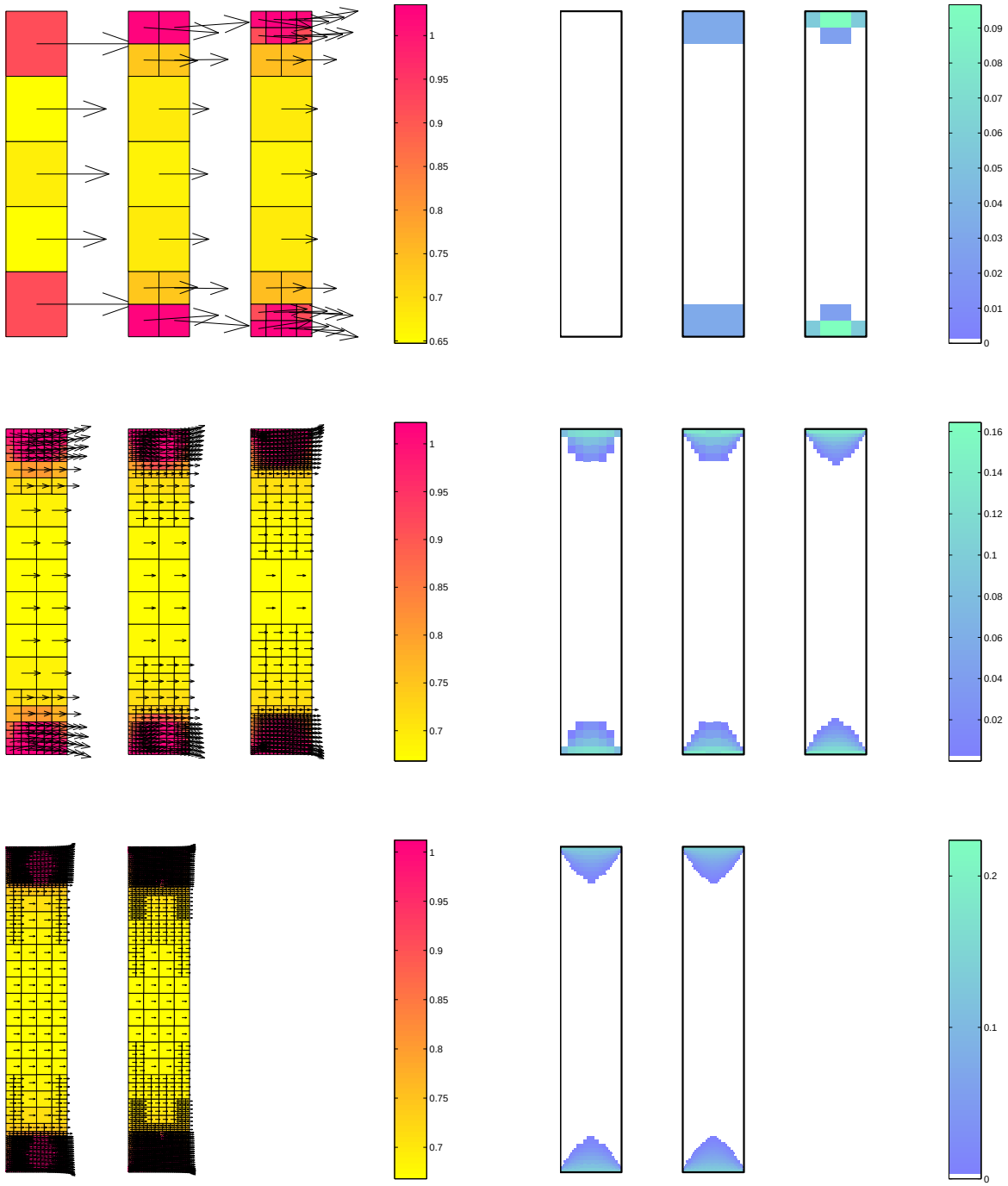


Abbildung 4.32: *Diskrete Lösungen* $\mathbf{m}_h$ *(links) im Fall* $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}$ *und zugehörige Lagrange-Parameter* λ_h *(rechts) auf* η*-adaptiv generierten Netzen* $\mathcal{T}_0, \ldots, \mathcal{T}_7$*. Die Länge* $|\mathbf{m}_h|$ *des Vektorfeldes links ist farbig gekennzeichnet. Im weißen Bereich (rechts) von* Ω *gilt* $|\mathbf{m}_h| \leq 1$ *und damit* $\lambda_h = 0$*. Man sieht eine adaptive Netzverfeinerung hin zu den vier Ecken des Gebiets.*

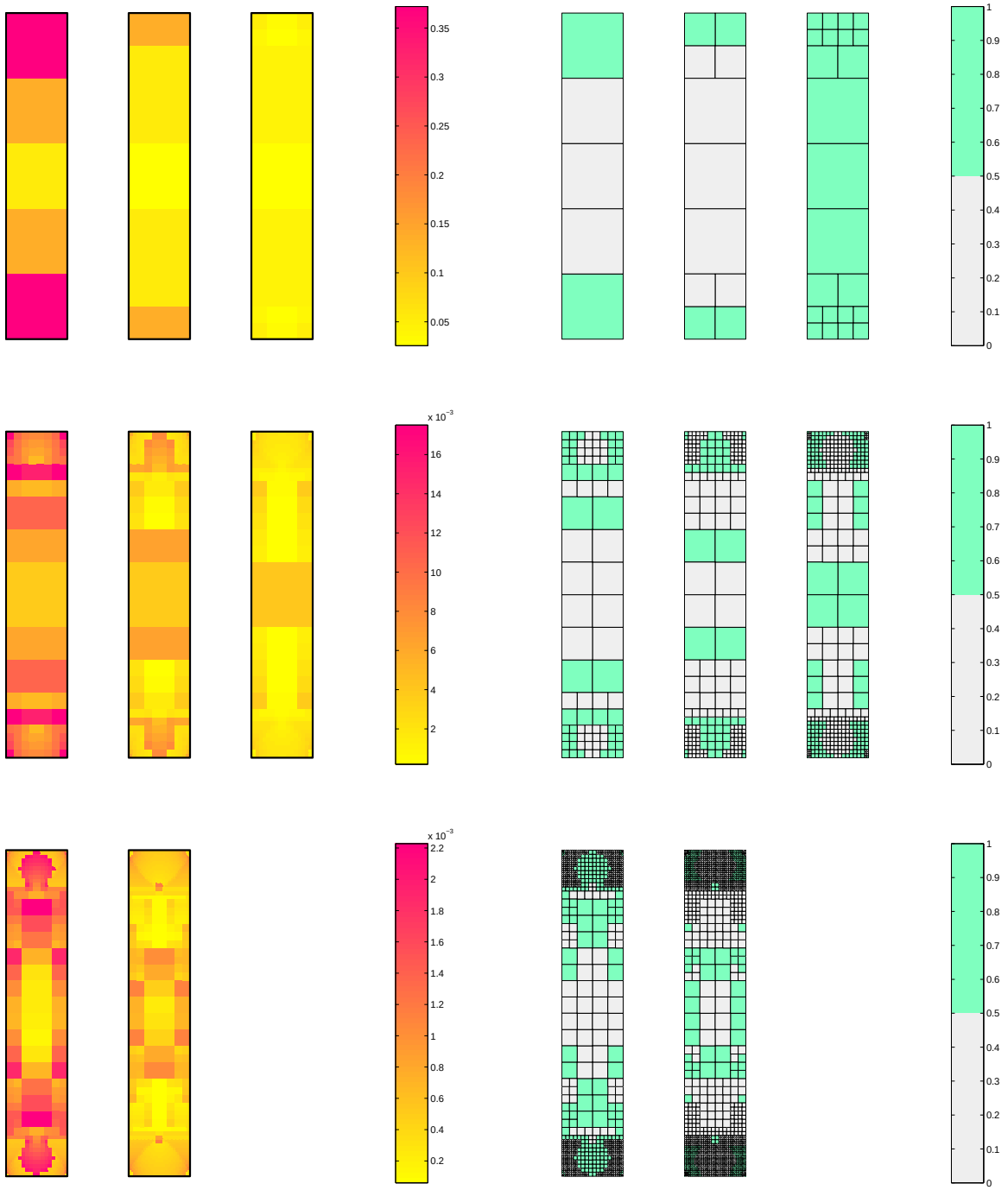


Abbildung 4.33: *Verteilung der Verfeinerungsindikatoren zum Fehlerschätzer η (links) im Fall $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}$ und die Elemente, die durch Algorithmus 3.8 zur Verfeinerung markiert werden (grün, rechts). Das Netz wird an den vier Eckpunkten des Gebietes stark verferinert.*

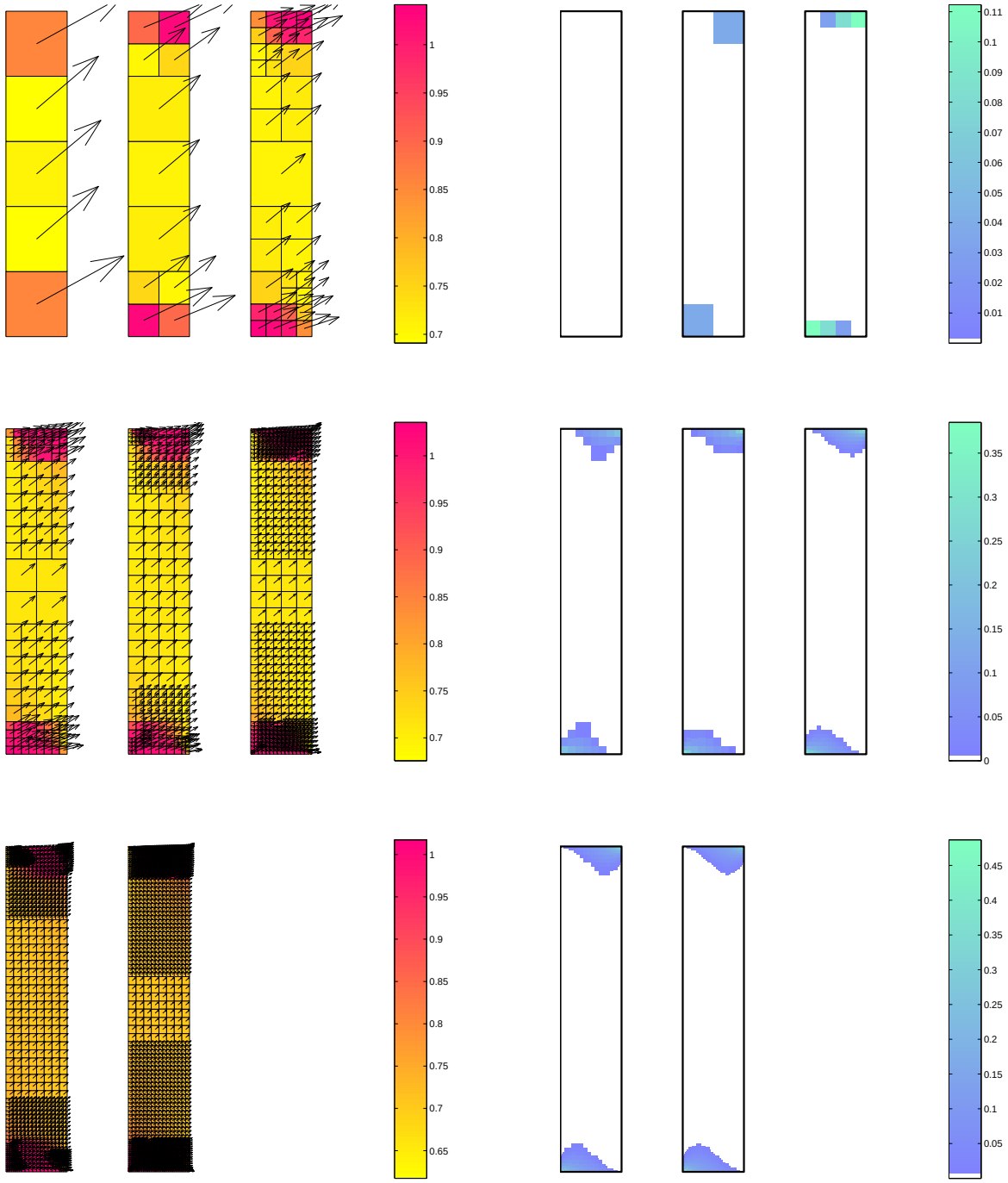


Abbildung 4.34: *Diskrete Lösungen* $\mathbf{m}_h$ *(links) im Fall* $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(2)}$ *und zugehörige Lagrange-Parameter* λ_h *(rechts) auf* η*-adaptiv generierten Netzen* $\mathcal{T}_0, \ldots, \mathcal{T}_7$*. Die Länge* $|\mathbf{m}_h|$ *des Vektorfeldes links ist farbig gekennzeichnet. Im weißen Bereich (rechts) von* Ω *gilt* $|\mathbf{m}_h| \leq 1$ *und damit* $\lambda_h = 0$*. Man sieht eine adaptive Netzverfeinerung hin zu den vier Ecken des Gebiets.*

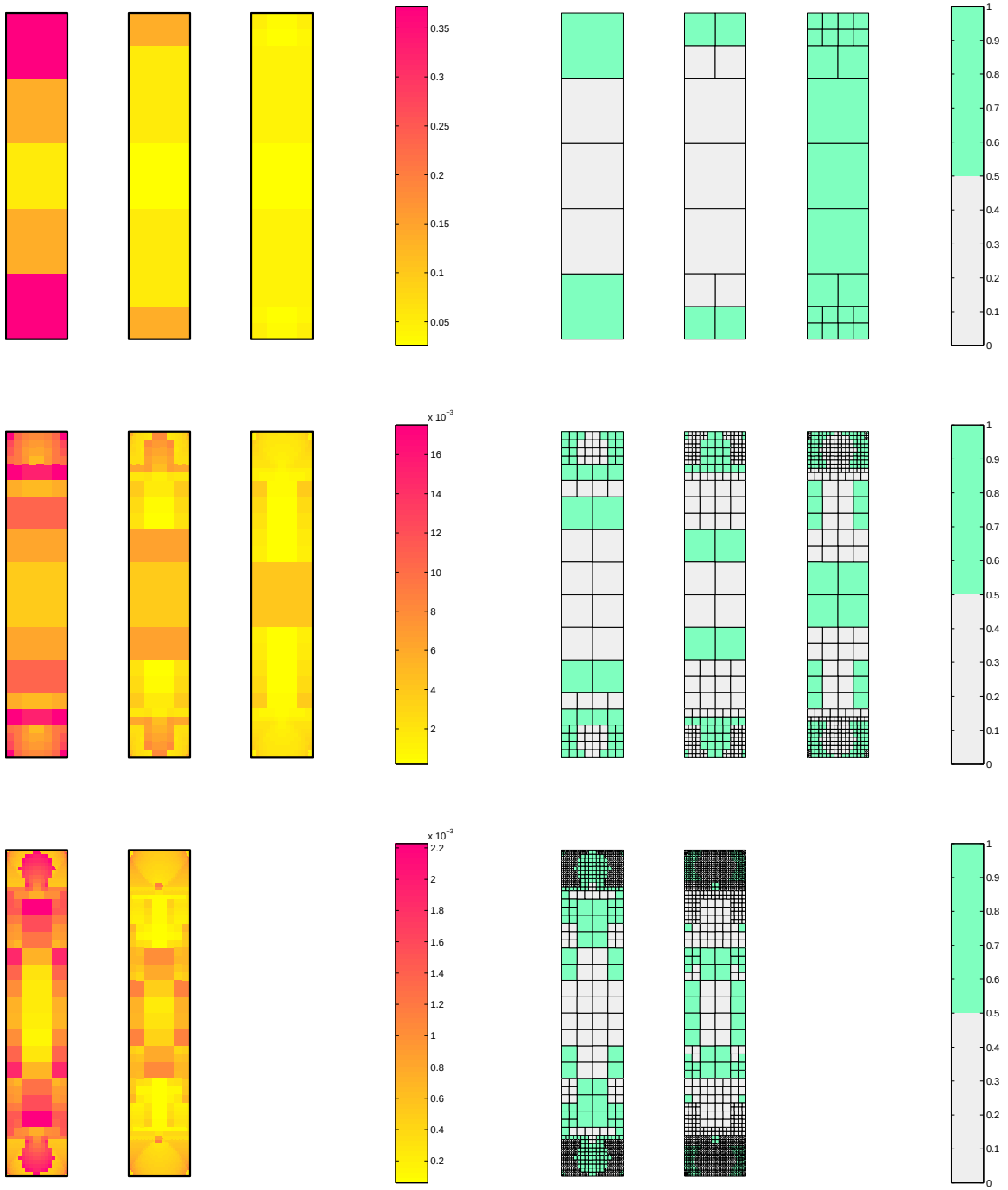


Abbildung 4.35: *Verteilung der Verfeinerungsindikatoren zum Fehlerschätzer η (links) im Fall $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(2)}$ und die Elemente, die durch Algorithmus 3.8 zur Verfeinerung markiert werden (grün, rechts). Man sieht, daß das Netz fern vom oberen und unteren Rand im wesentlichen uniform verfeinert wird. Stärkere Verfeinerung zeigt sich zu den vier Ecken hin.*

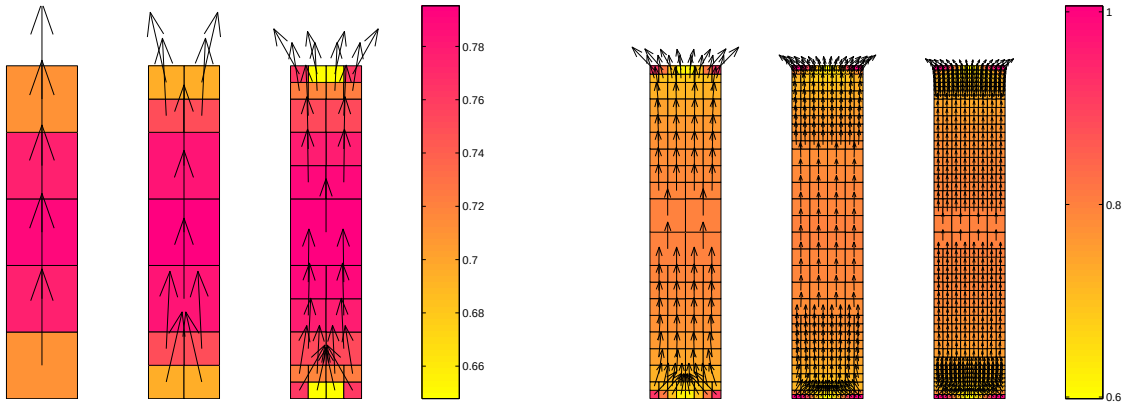


Abbildung 4.36: *Diskrete Lösungen* $\mathbf{m}_h$ *im Fall* $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(3)}$ *auf* η*-adaptiv generierten Netzen* $\mathcal{T}_0, \ldots, \mathcal{T}_5$. *Die Länge* $|\mathbf{m}_h|$ *des Vektorfeldes ist farbig gekennzeichnet. Mit Ausnahme der Eckenelemente gilt überall* $|\mathbf{m}_h| \leq 1$, *weshalb auf die Darstellung von* λ_h *verzichtet wurde.*

4.3.2 Einfluß nicht-konvexer Gebiete

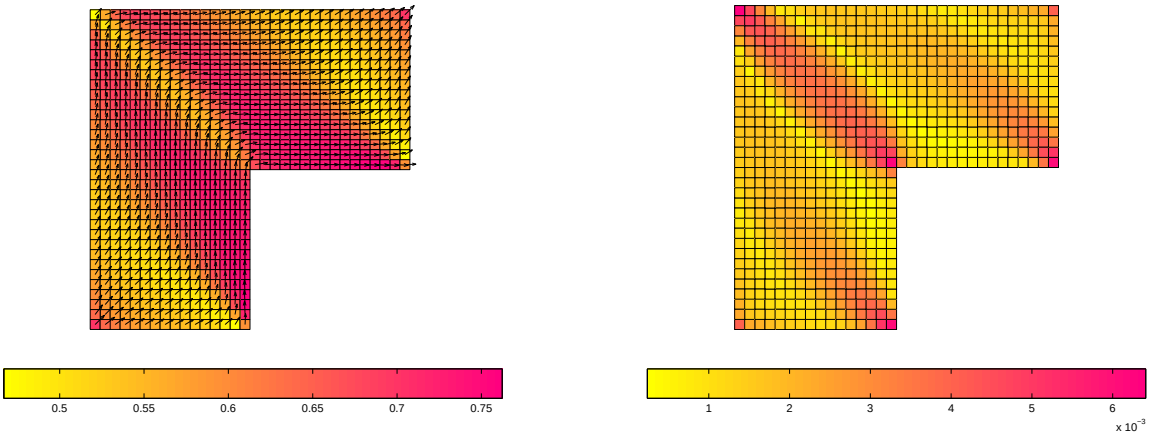


Abbildung 4.37: *Die diskrete Lösung* $\mathbf{m}_h$ *in Beispiel 4.3.2 (links) zu* $\varepsilon = h$ *auf uniformem Netz* $\mathcal{T}_4$ *(*$N = 768$*). Für die Länge der Magnetisierung gilt* $|\mathbf{m}_h| \leq 1$ *in* Ω. *Die rechte Abbildung zeigt die Verteilung der Verfeinerungsindikatoren zum Fehlerschätzer* η.

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Nicht-Konvexität des Gebietes Ω die Konvergenzrate der Fehlerschätzer im wesentlichen nicht beeinflußt. Es bezeichnet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ das L-Gebiet mit den sechs Ecken $(0,0), (1,0), (1,1), (-1,1), (-1,-1), (0,-1)$. Als Anfangstriangulierung wird eine uniforme Triangulierung mit den drei Quadraten

$$T_1 = (-1,0) \times (-1,0), \quad T_2 = (-1,0) \times (0,1), \quad T_3 = (0,1) \times (0,1)$$

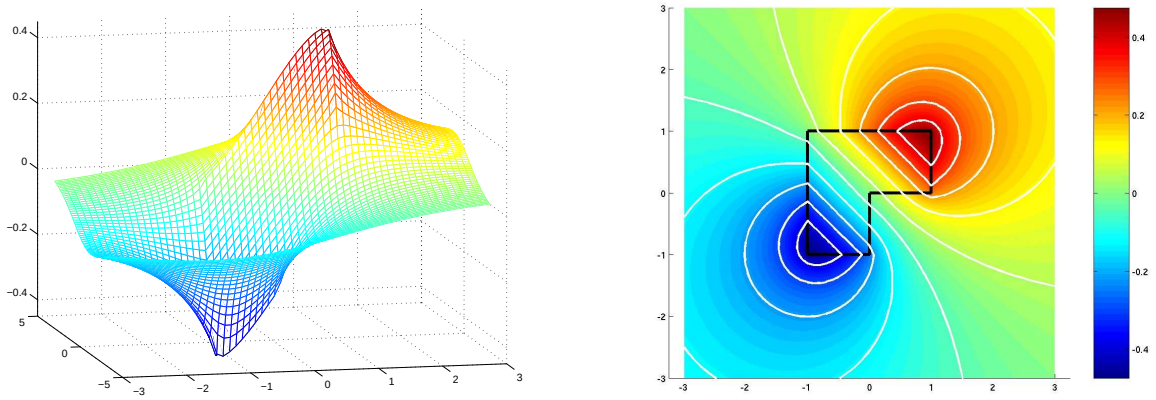


Abbildung 4.38: *Magnetisches Potential* $u_h = \mathcal{L}\mathbf{m}_h$ *zur diskreten Magnetisierung* $\mathbf{m}_h$ *auf uniformem Netzen* $\mathcal{T}_4$ *(*$N = 768$*) im Fall* $\varepsilon = h$*. Das linke Bild zeigt* u_h *als Plot über die Ebene* $[-3,3]^2$*, das rechte die Projektion in die Ebene, wobei die Werte* $u_h(x)$ *farbig gekennzeichnet und als weiterer Anhaltspunkt einige Isolinien eingezeichnet sind.*

gewählt. Das äußere Feld wird wieder als konstant $\mathbf{f} \equiv (1/2, 1/2)$ angenommen. Die numerischen Experimente zeigen wieder, daß jede diskrete Lösung stets $|\mathbf{m}_h| \leq 1$ erfüllt. Insbesondere ergibt sich bei den Konvergenzuntersuchungen damit dasselbe Verhalten für verschiedene Penalisierungsterme $\varepsilon = h^\alpha$. Es zeigt sich, daß die Fehlerschätzer η und μ bereits bei uniformer Netzverfeinerung mit nahezu optimaler Ordnung konvergieren. Die μ- bzw. η-adaptive Netzverfeinerung führt neben einer leichten Konvergenzverbesserung für die residualen Schätzer auch auf eine Verbesserung der Konvergenzordnung von ζ_2, während ζ_1 nahezu dasselbe Konvergenzverhalten zeigt wie bei uniformer Netzverfeinerung. Genaueres ist Tabelle 4.13 und Abbildung 4.39 zu entnehmen.

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	12	0.03080		0.15546		0.35727		0.42486	
1	48	0.01998	0.31221	0.11711	0.20433	0.20467	0.40185	0.34421	0.15185
2	192	0.01176	0.38218	0.07864	0.28729	0.11257	0.43125	0.26774	0.18125
3	768	0.00675	0.40024	0.04913	0.33925	0.05886	0.46772	0.19798	0.21772

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	12	0.03080		0.15546		0.35727		0.42486	
4	420	0.00941	0.33367	0.05720	0.28120	0.07303	0.44655	0.21259	0.19475
7	1950	0.00448	0.48344	0.02890	0.44460	0.03311	0.51515	0.14521	0.24827

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	12	0.03080		0.15546		0.35727		0.42486	
3	366	0.00968	0.33860	0.05519	0.30299	0.07827	0.44425	0.21901	0.19389
5	1878	0.00483	0.42475	0.02718	0.43307	0.03379	0.51369	0.14212	0.26441

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	9	0.04680		0.13370		0.47930		0.46135	
6	291	0.01425	0.34196	0.05899	0.23537	0.10001	0.45081	0.24160	0.18609
12	2067	0.00570	0.46748	0.02341	0.47137	0.03698	0.50744	0.13808	0.28535

Tabelle 4.13: *Fehlerschätzer ζ_1, ζ_2, η und μ mit Konvergenzraten für $\varepsilon = h$ bei uniformer, η-adaptiver, μ-adaptiver bzw. ζ-adaptiver Netzverfeinerung (von oben nach unten).*

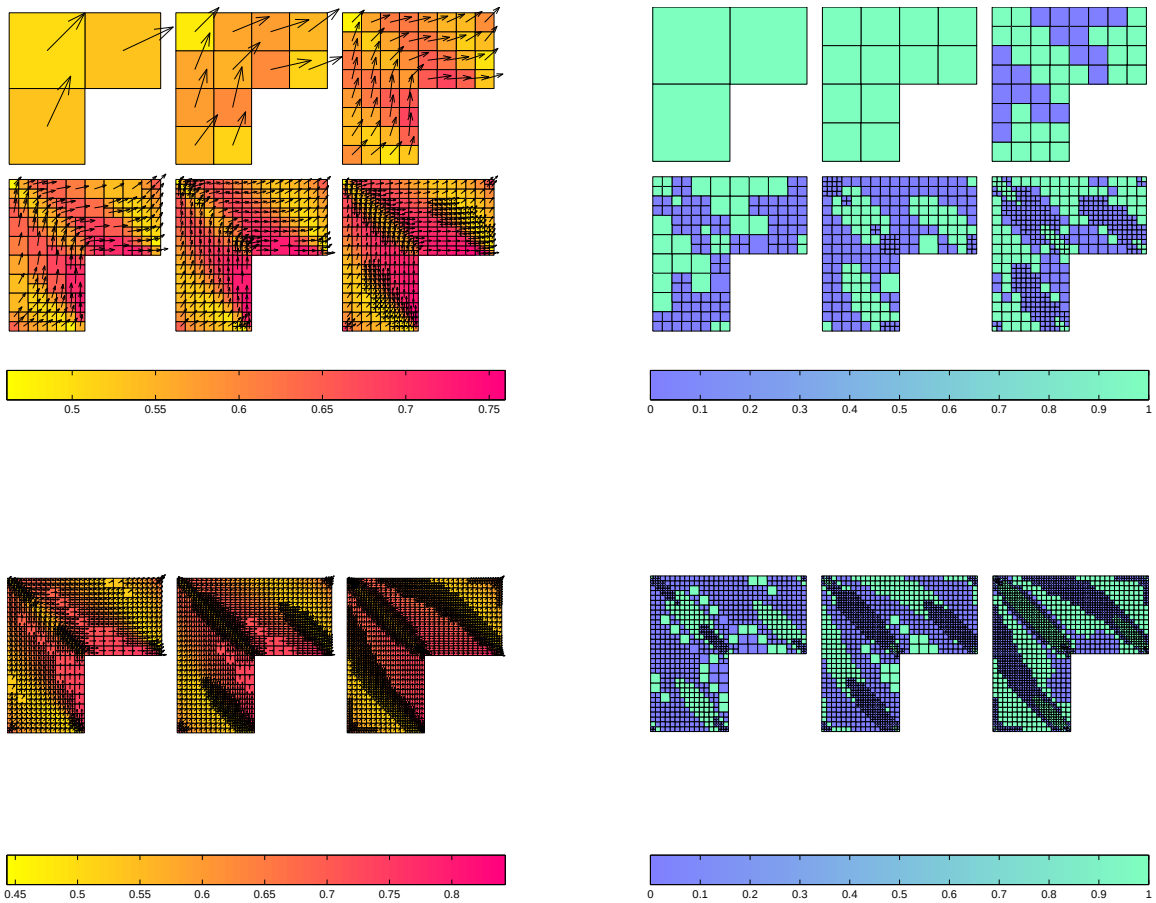


Abbildung 4.39: *Die diskreten Lösungen* $\mathbf{m}_h$ *(links) zu* $\varepsilon = h$ *auf* η*-adaptiv generierten Netzen* $\mathcal{T}_0, \ldots, \mathcal{T}_9$*. Die Länge* $|\mathbf{m}_h|$ *des Vektorfelds ist links farbig verdeutlicht. Die grün markierten Elemente (rechts) werden jeweils durch den* η*-adaptiven Algorithmus 3.8 zur Verfeinerung markiert.*

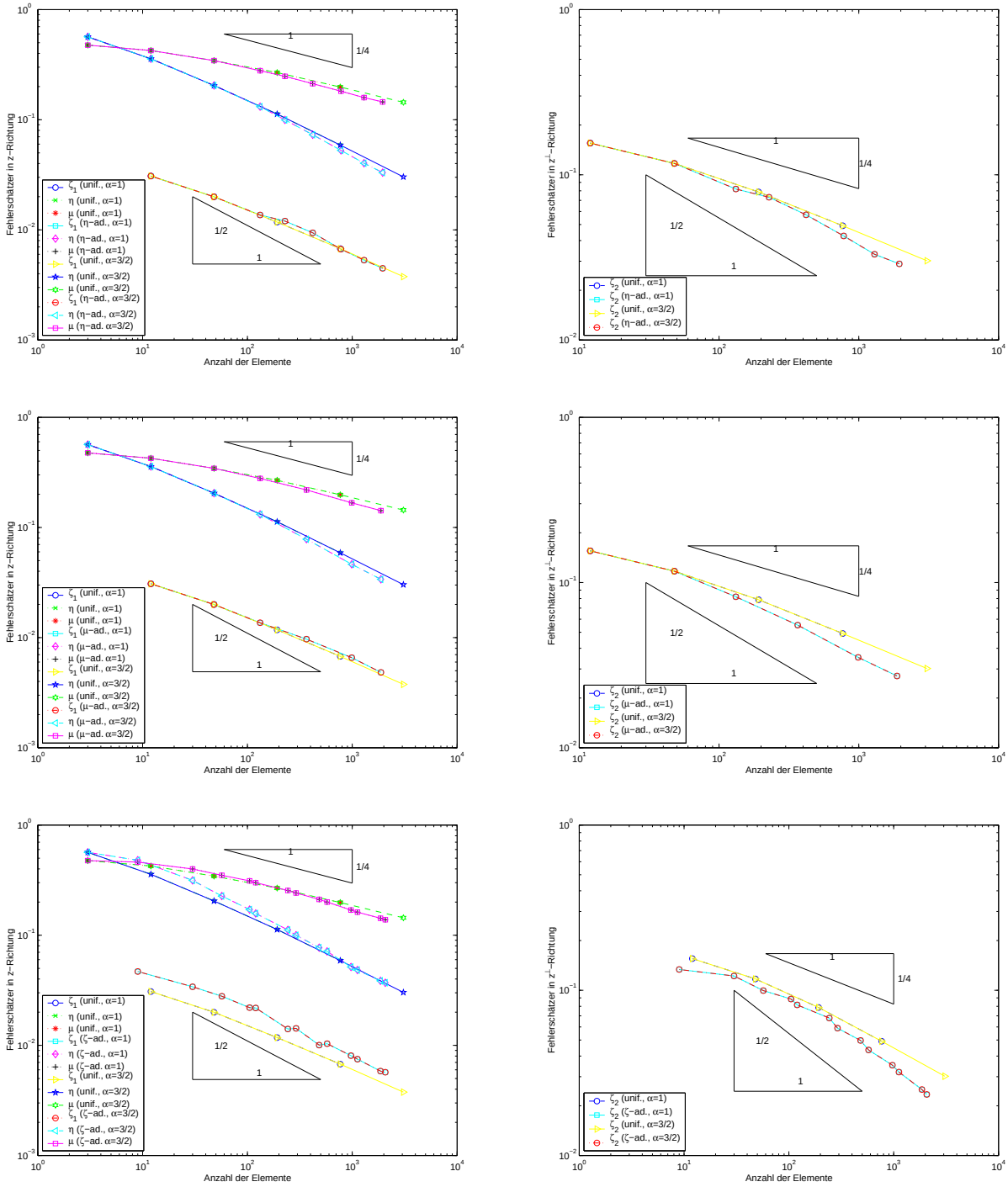


Abbildung 4.40: *Fehler und Fehlerschätzer für $\alpha \in \{1, 3/2\}$ bei η-adaptiver (oben), μ-adaptiver (mittig) und ζ-adaptiver Netzverfeinerung (unten) im Vergleich zur uniformen Netzverfeinerung.*

4.3.3 Einfluß eines unstetigen äußeren Feldes f

Beim letzten Beispiel ist $\Omega = (-1,1) \times (0,1)$ ein Rechteck in $\mathbb{R}^2$, und das äußere Feld auf Ω wird durch

$$\mathbf{f}(x) = \begin{cases} (1,0) & \text{für } x_2 \geq \frac{x_1+1}{2}, \\ (1/2, 1/2) & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegeben, d.h. $\mathbf{f}$ ist oberhalb und unterhalb der Diagonale

$$\gamma(s) := \frac{s}{2} + \frac{1}{2}$$

konstant und springt auf dieser. Es wird wieder der Modellfall mit $z = (1,0)$ betrachtet, und die Anfangstriangulierung $\mathcal{T}_0$ besteht aus acht Quadraten mit Kantenlänge 1/4.

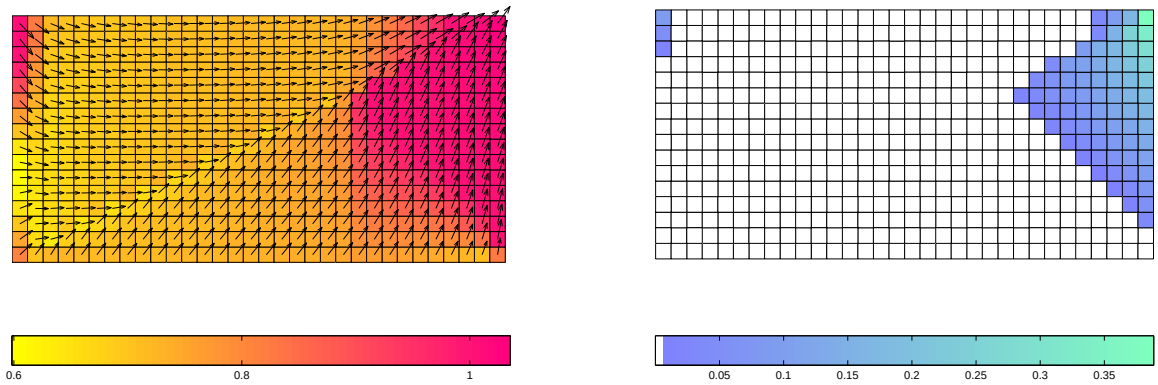


Abbildung 4.41: *Die diskrete Lösung* $\mathbf{m}_h$ *(links) zu* $\varepsilon = h$ *auf uniformem Netz* $\mathcal{T}_3$ *(*$N = 512$*) und der dazugehörige diskrete Lagrange-Parameter* λ_h *(rechts). Im linken Bild ist die Länge* $|\mathbf{m}_h|$ *des Vektorfelds farbig verdeutlicht. Im weißen Bereich von* Ω *(rechts) gilt* $|\mathbf{m}_h| \leq 1$ *und damit* $\lambda_h = 0$.

Bei den letzten vier Beispielen war das äußere Feld als konstant vorausgesetzt, und es zeigte sich, daß in diesem Fall die residualen Fehlerschätzer η und μ bereits mit nahezu optimaler Konvergenzordnung konvergieren. Dieses Beispiel schließlich führt dazu, daß sowohl η als auch μ von deutlich suboptimaler Ordnung sind. Bei Penalisierung mit den Parametern $\varepsilon = h$ und $\varepsilon = h^{3/2}$ ergibt sich dasselbe Verhalten. Dies verträgt sich wieder mit der Beobachtung, daß der penalisierte Bereich nur einen relativ kleinen Teil von Ω ausmacht, und der diskrete Lagrange-Parameter in diesem Bereich nur sehr kleine Werte annimmt, siehe Abbildung 4.44. Wie bei den vorherigen Beispielen ist zu beobachten, daß die μ-adaptive Netzverfeinerung zu leicht verbessertem Konvergenzverhalten von ζ_1 und ζ_2 führt als η. Für die Penalisierung $\varepsilon = h^{3/2}$ höherer Ordnung zeigt sich ein leicht verbessertes Verhalten von ζ_2.

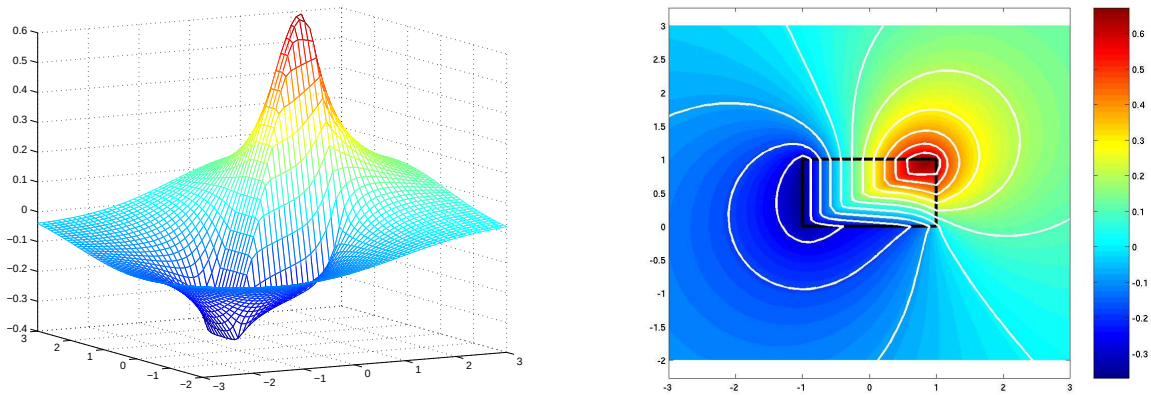


Abbildung 4.42: *Magnetisches Potential* $u_h = \mathcal{L}\mathbf{m}_h$ *zur diskreten Magnetisierung* $\mathbf{m}_h$ *auf uniformem Netz* $\mathcal{T}_4$ *(*$N = 512$*) im Fall* $\varepsilon = h$*. Das linke Bild zeigt* u_h *als Plot über die Ebene* $[-3,3]^2$*, das rechte die Projektion in die Ebene, wobei die Werte* $u_h(x)$ *farbig gekennzeichnet und als weiterer Anhaltspunkt einige Isolinien eingezeichnet sind.*

4.4 Experimentelle Resultate zu $(RP_{\varepsilon,h})$ für $d = 2$

Wahl des Penalisierungsparameters $\varepsilon = h^\alpha$. Das akademische Beispiel 4.2.1 bestätigt die analytischen a priori Resultate und zeigt, daß im Fall einer glatten exakten Lösung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; B_2^2) \cap H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ mit $\lambda\mathbf{m} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ bei Penalisierung mit $\varepsilon = h$ lineare Konvergenz für den Fehler $E = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \cdot z\|_{L^2(\Omega)}$ erwartet werden kann. Ist λ nicht mehr hinreichend glatt, so ergibt sich ein leichter Defekt bei der Konvergenzordnung von E, der zum einen durch adaptive Netzverfeinerung zum anderen aber auch durch Wahl einer stärkeren Penalisierung, wie z.B. $\varepsilon = h^{3/2}$, behoben werden kann.

Eine Wahl von $\alpha < 1$ in $\varepsilon = h^\alpha$ führt zu einer Verschlechterung der Konvergenz des Verfahrens. Dieses Verhalten ließ sich bereits durch die a priori Analysis vermuten und wurde experimentell nachgewiesen – sogar bei glattem $(\lambda, \mathbf{m})$ mit $\lambda\mathbf{m} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$.

In den betrachteten Problemen geht die Wahl der Penalisierung ε *nicht* kritisch in den Aufwand des numerischen Verfahrens ein. Bei *nested iterations* unterscheidet sich die Anzahl der Newton-Schritte, die zur Berechnung der diskreten Lösung $\mathbf{m}_h$ benötigt werden, bei verschiedener Wahl von $\alpha \geq 1$ in $\varepsilon = h^\alpha$ nur unwesentlich. In Beispiel 4.2.2 mit unstetigem Lagrange-Parameter $\lambda = \lambda^{(2)}$ ergibt sich für $\alpha = 1$ und adaptive Netzverfeinerung *keine* Verbesserung der Konvergenzordnung (im Bereich $N \leq 2000$), wogegen sich für $\alpha = 3/2$ die optimale Konvergenzordnung für die drei untersuchten adaptiven Netzverfeinerungsstrategien zeigt. Es ist zwar damit zu rechnen, daß sich bei fortgesetzter Rechnung und großer Elementzahl N auch im Fall $h = \varepsilon$ die optimale Konvergenzrate einstellt, aus Sicht der Effizienz des Verfahrens scheint diese Beobachtung aber die Wahl eines $\alpha > 1$ zu favorisieren.

Bei den Beispielen mit unbekannter Lösung $\mathbf{m}$ konnte kein verbessertes Verhalten bei der Konvergenz der residualen Fehlerschätzer η und μ festgestellt werden, wenn man anstelle des Penalisierungsparameter $\varepsilon = h$ den Parameter $\varepsilon = h^{3/2}$ wählt. Es zeigte sich in den numerischen Beispielen aus Abschnitt 4.3 aber auch, daß der Lagrange-Parameter λ vermutlich nicht in dem Maße unstetig

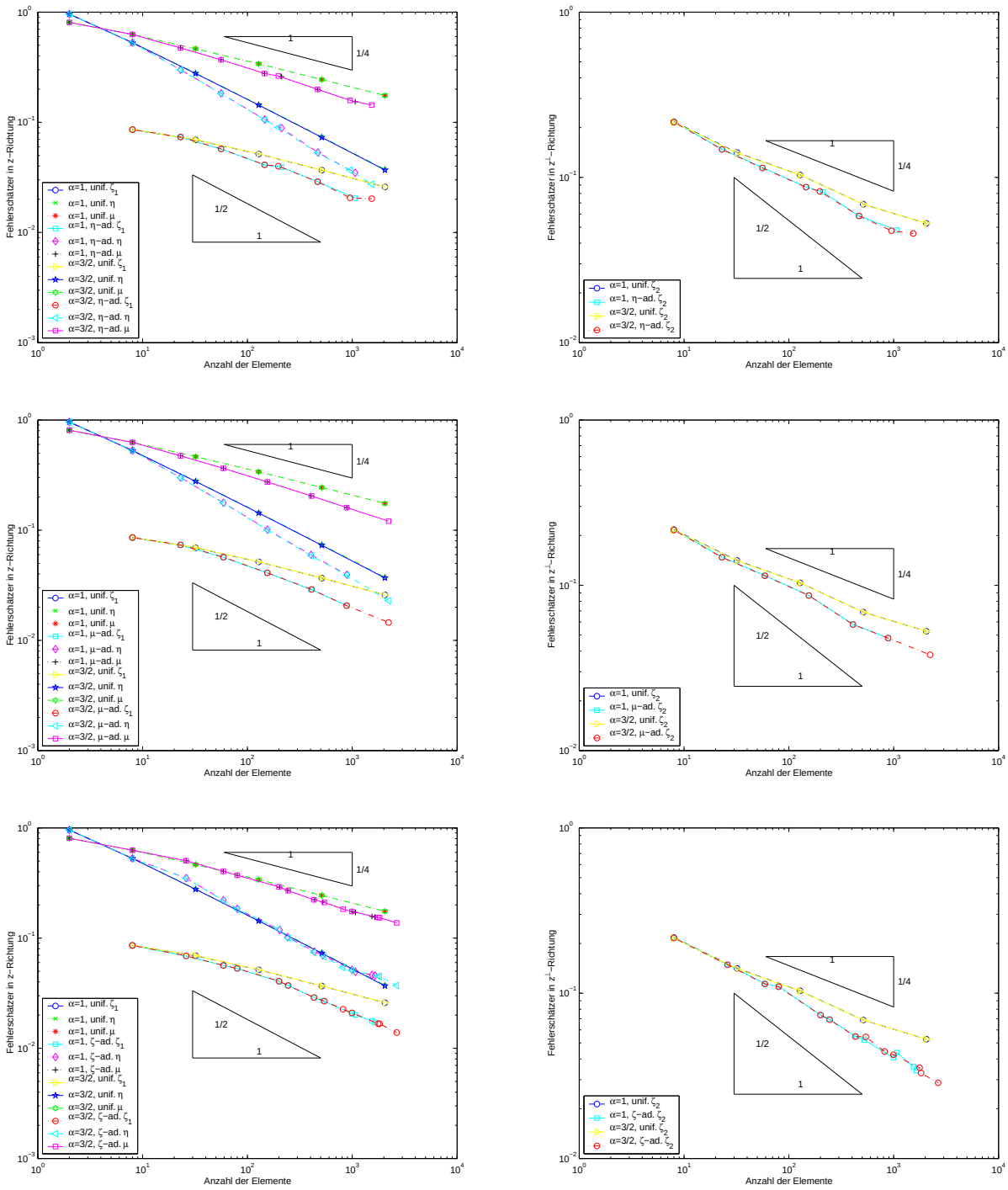


Abbildung 4.43: *Fehler und Fehlerschätzer für $\alpha \in \{1, 3/2\}$ bei η-adaptiver (oben), μ-adaptiver (mittig) und ζ-adaptiver Netzverfeinerung (unten) im Vergleich zur uniformen Netzverfeinerung.*

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	8	0.08577		0.21739		0.52878		0.62739	
1	32	0.06918	0.15513	0.14124	0.31110	0.27894	0.46134	0.46575	0.21491
2	128	0.05156	0.21205	0.10340	0.22493	0.14445	0.47470	0.33986	0.22731
3	512	0.03673	0.24455	0.06881	0.29378	0.07372	0.48518	0.24450	0.23755
4	2048	0.02590	0.25206	0.05266	0.19291	0.03740	0.48949	0.17505	0.24102

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	8	0.08577		0.21739		0.52878		0.62739	
4	212	0.03910	0.23975	0.08146	0.29953	0.08861	0.54509	0.25919	0.26976
6	1067	0.02049	0.39979	0.04803	0.32684	0.03482	0.57790	0.15395	0.32236

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	8	0.08577		0.21739		0.52878		0.62739	
4	404	0.02897	0.27672	0.05833	0.33544	0.05972	0.55606	0.20519	0.28497
5	890	0.02066	0.42851	0.04783	0.25126	0.03942	0.52603	0.16010	0.31417

k	$N^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\zeta_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\mu^{(k)}(\eta)$
0	8	0.08577		0.21739		0.52878		0.62739	
6	437	0.02881	0.27271	0.05469	0.34495	0.07552	0.48649	0.22314	0.25841
11	1646	0.01721	0.38840	0.03400	0.35854	0.04575	0.37789	0.15537	0.27295

Tabelle 4.14: *Fehlerschätzer ζ_1, ζ_2, η und μ mit Konvergenzraten für $\varepsilon = h$ bei uniformer, η-adaptiver, μ-adaptiver bzw. ζ-adaptiver Netzverfeinerung (von oben nach unten).*

ist wie in den numerischen Beispielen aus Abschnitt 4.2, wo Funktionen λ mit Sprüngen betrachtet wurden. In Abschnitt4.3 nehmen die Träger von λ_h regelmäßig einen relativ kleinen Bereich von Ω ein, und λ_h scheint im Grenzfall $h \to 0$ stetig zu sein.

Akkuranz der Fehlerschätzer. Die residualen Fehlerschätzer η und μ eignen sich streng genommen *nicht* zu einer Schätzung des Fehlers, denn η ist nur unter sehr hohen Regularitätsannahmen an die *unbekannte* Lösung $\mathbf{m}$ eine zuverlässige Schranke für den L^2-Fehler E_1 in Richtung z. In fast allen Beispielen besitzt η eine höhere Konvergenzordnung als E_1. Ob sich die Effizienz von η beweisen läßt, ist ein offenes Problem.

Der Fehlerschätzer μ ist zwar stets eine zuverlässige obere Schranke von E_1, konvergiert aber in allen Beispielen mit stark verminderter Konvergenzordnung von $1/4$ – bei gleichzeitiger optimaler Konvergenzordnung des Fehlers E_1, vgl. Beispiel 4.2.1. In diesem Beispiel erweist sich μ also als höchstgradig nicht-effizient.

Der glättungsbasierte Fehlerschätzer liefert in Beispiel 4.2.1 und 4.2.2 eine gute Approximation des Fehler E in beiden Komponenten E_1, E_2. Sind $\mathbf{m}$ und der Lagrange-Parameter λ hinreichend glatt, so schätzt ζ den Fehler auf eine Konstante dicht bei 1, vgl. Beispiel 4.2.1 in den Fällen $\lambda \in \{\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}\}$. Ist λ nicht mehr glatt, so scheint ζ für uniforme Netzverfeinerung die Zuverlässigkeit zu verlieren, für μ- und ζ-adaptive Netzverfeinerung kann aber dasselbe Verhalten von E und ζ experimentell festgestellt werden, und ζ nähert sich mit steigender Elementzahl dem Fehler E von unten an. Dasselbe Verhalten läßt sich auch in Beispiel 4.2.2 beobachten, wo $\mathbf{m}$ nicht mehr in

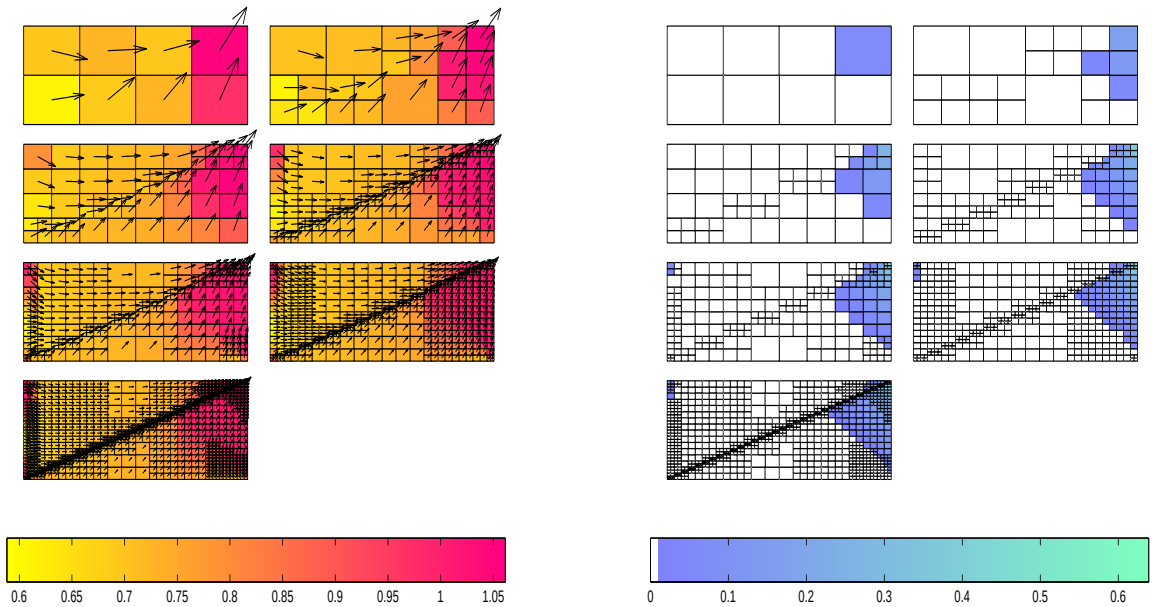


Abbildung 4.44: *Die diskreten Lösungen* $\mathbf{m}_h$ *(links) zu* $\varepsilon = h$ *auf* η*-adaptiv generierten Netzen* $\mathcal{T}_0, \ldots, \mathcal{T}_6$ *und die dazugehörigen diskreten Lagrange-Multiplikatoren* λ_h *(rechts). Die Länge* $|\mathbf{m}_h|$ *des Vektorfelds ist links farbig dargestellt. Im weißen Bereich von* Ω *(rechts) gilt* $|\mathbf{m}_h| \leq 1$ *und damit* $\lambda_h = 0$.

$H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ liegt und $\lambda = \lambda^{(2)}$ nicht stetig ist.

Indikatorgesteuerte adaptive Netzverfeinerung. Mit einer einzigen Ausnahme liefern die untersuchten Netzverfeinerungsstrategien in Beispiel 4.2.1 und 4.2.2 alle die optimale Konvergenzrate des Fehlers E. In Beispiel 4.2.1 führt erwartungsgemäß η-Adaptivität zu einer besseren Konvergenzordnung von E als μ-Adaptivität, da μ die höhere Regularität von $\mathbf{m}$ nicht berücksichtigt. Regelmäßig führt aber die ζ-basierte Netzverfeinerung auf leicht bessere absolute Fehlerwerte von E. Der Vorteil der residualgesteuerten Netzverfeinerung scheint aber darin zu liegen, daß zusätzlich die Konvergenzordnung der Fehlerterme E_λ und $E_{\lambda\mathbf{m}}$ verbessert wird. Eine mathematische Rechtfertigung durch a posteriori Abschätzungen zu E_λ und $E_{\lambda\mathbf{m}}$ steht aber noch aus.

In den Beispielen aus Abschnitt 4.3 mit unbekannter Lösung zeigen die residualen Fehlerschätzer für ein glattes äußeres Feld $\mathbf{f}$ annähernd optimales Konvergenzverhalten. Der leichte Defekt wird durch die Netzadaptivität bezüglich η oder μ behoben. Beide Schätzer führen zu ähnlichen adaptiven Netze. Das letzte Beispiel 4.3.3 gibt Evidenz dafür, daß die Konvergenzordnung der residualen Fehlerschätzer wesentlich von der Glattheit der rechten Seite abhängt, etwaige Konvergenzminderungen aber durch adaptive Netzverfeinerung behoben werden können.

Experimentelle Konvergenz des nicht-kontrollierten L^2-Fehlers E_2. In den Beispielen mit bekannter Lösung zeigt sich, daß nicht nur der a priori kontrollierte Fehler E_1 konvergiert, sondern auch der Fehler $E_2 = \|(\mathbf{m} - \mathbf{m}_h) \cdot z^\perp\|_{L^2(\Omega)}$ in Richtung der *easy axis*. Dies ist insofern beachtens-

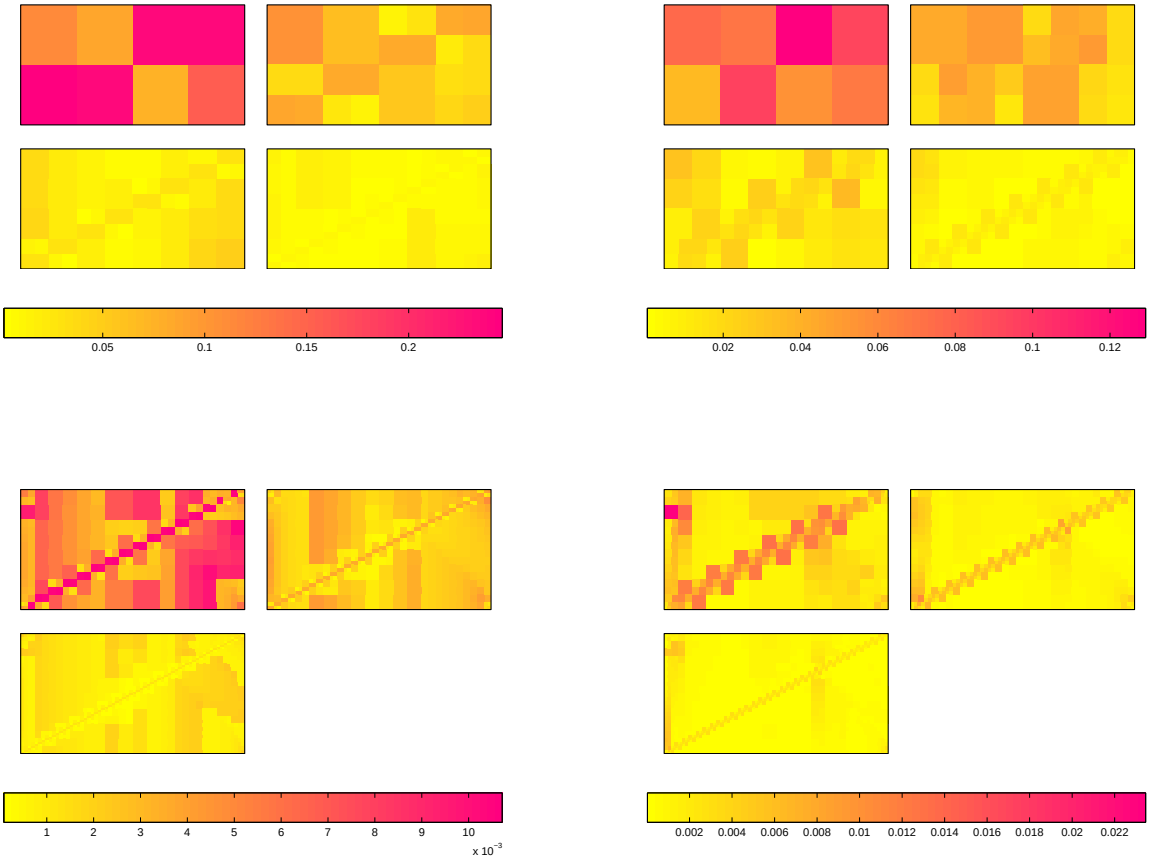


Abbildung 4.45: *Die Fehlerschätzer η (links) und ζ (rechts) auf η-adaptiv generierten Netzen $\mathcal{T}_0, \ldots, \mathcal{T}_6$ zu $\varepsilon = h$.*

wert, als daß E_2 stets mindestens dieselbe Konvergenzordnung aufweist wie E_1 und bei adaptiver Netzverfeinerung bezüglich η und μ ebenfalls die optimale Konvergenzrate besitzt, obwohl η und μ lediglich E_1 dominieren. Die Interpretation davon ist, daß die Regularität der beiden betrachteten Beispiele in Abschnitt 4.2 hinreichend groß ist, so daß sich in diesem Fall auch Fehlerabschätzungen beweisen lassen, die E_2 dominieren. Der analytische Beweis hierfür fehlt aber.

Bei den Beispielen in Abschnitt 4.3 mit unbekannter Lösung wurde statt des nicht-berechenbaren Fehlers E der Glättungfehlerschätzer ζ in Abhängigkeit von den adaptiven Netzverfeinerungsstrategien untersucht. Zumindest für die Komponente ζ_2 in Richtung der *easy axis* konnte in den Beispielen 4.3.1 aus Carstensen-Prohl [24] keine Verbesserung der Konvergenz festgestellt werden, wogegen ζ_1 bei den drei adaptiven Netzverfeinerungsstrategien annähernd optimale Konvergenzordnung besitzt.

4.5 Numerische Experimente zu $(RP_{\varepsilon,h})$ für $d = 3$

Bei den folgenden beiden Beispielen wird wieder der uniachsiale Modellfall betrachtet. Die Anisotropiedichte ϕ^{**} wird mit den Vektoren $z_1 := \mathbf{e}_2$ und $z_2 := \mathbf{e}_3$ durch

$$\phi^{**}(x) = \frac{1}{2}\big\{|x \cdot z_1|^2 + |x \cdot z_2|^2\big\} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3$$

gegeben und favorisiert energetisch die *easy axis* $z^\perp = \mathbf{e}_1$. Beide Beispiele zeigen, daß die vorgeschlagenen Algorithmen auch für $d = 3$ stabil laufen. Den numerischen Experimenten wurden aber durch die verfügbaren Rechnerkapazitäten Grenzen gesetzt, denn bei uniformer Verfeinerung steigt die Elementeanzahl N um den Faktor 8, und dies führt zu einem extrem wachsenden Speicherbedarf für die vollbesetzte Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3N\times 3N}_{\text{sym}}$. Weitergehende numerische Experimente erfordern daher in Zukunft unabdingbar die Implementierung der *effizienten* Speicherung einer durch *panel clustering* gewonnenen Approximation von $\mathbf{A}$.

k	$N^{(k)}$	$n^{(k)}$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\mu)$
0	5	4	1.16157506		0.93026677	
1	40	8	0.79032785	0.18518641	0.83942794	0.04941267
2	320	9	0.41949204	0.30460260	0.59825736	0.16288008
3	2560	9	0.21486728	0.32173254	0.41766930	0.17280171

k	$N^{(k)}$	$n^{(k)}$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\mu)$
0	5	4	1.16157506		0.93026677	
1	40	8	0.79032785	0.18518641	0.83942794	0.04941267
2	320	9	0.41949204	0.30460260	0.59825736	0.16288008
3	2112	10	0.24141225	0.29280239	0.43875984	0.16431235

Tabelle 4.15: *Experimentelle Resultate zu Beispiel 4.5.1 bei uniformer (oben) sowie η-adaptiver (unten) Netzverfeinerung und $\varepsilon = h$. Die Tabelle zeigt die Anzahl der Elemente N, die Anzahl der benötigten Schritte im Newton-Verfahren zur Berechnung von $\mathbf{m}_h$ sowie die residualen Fehlerschätzer η und μ samt experimentellen Konvergenzraten. Die Verfeinerungsindikatoren zu μ liefern in diesem Fall dieselbe Netzverfeinerung. Wie im analogen Beispiel zu $d = 2$ liefert adaptive Netzverfeinerung keine sichtbare Verbesserung der Konvergenzordnungen.*

4.5.1 Ein Beispiel analog zu Abschnitt 4.3.1

In diesem Beispiel ist $\Omega = (-1/2, 1/2)\times(-1/2, 1/2)\times(-5/2, 5/2)$ und $\mathbf{f} \equiv (3/5, 0, 0)$ das dreidimensionale Pendant zu Beispiel 4.3.1 mit $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}$. Tatsächlich zeigen sowohl adaptive Netzverfeinerung bezüglich η bzw. μ als auch die diskreten Lösungen $\mathbf{m}_h$ dasselbe Verhalten wie oben. Abbildung 4.46 zeigt die diskrete Magnetisierung $\mathbf{m}_h$ auf einem uniformen Netz $\mathcal{T}_2$ mit $N = 320$ Elementen. Man erkennt deutlich, daß die Magnetisierung $\mathbf{m}_h$ mit Abstand zur oberen und unteren Seite parallel zu $\mathbf{f}$ ausgerichtet ist, während sie an der oberen und unteren Seite des Stabes einer leicht elliptischen Bahn folgt. Tabelle 4.15 zeigt die experimentellen Ergebnisse bei η- bzw. μ-adaptiver Netzverfeinerung. Tatsächlich markieren die Verfeinerungsindikatoren zu μ und η dieselben Elemente zur Verfeinerung. Man sieht für η ab dem Netz $\mathcal{T}_2$ annähernd die optimale experimentelle Konvergenzrate, die für $d = 3$ bezüglich der Anzahl an Elementen N gerade 1/3 beträgt. Unter der Prämisse,

daß die Konvergenzordnung von μ um eine h-Potenz gemindert ist, liegt die optimale Konvergenzordnung für μ bei $1/6$. Diese wird ebenfalls ab dem Netz $\mathcal{T}_2$ angenommen.

Das Netz $\mathcal{T}_3$ unterscheidet sich erstmalig leicht vom uniformen Netz. Beim Schritt von Netz $\mathcal{T}_2$ mit $N = 320$ Elementen werden von den 240 Elementen am Rand 224 zur Verfeinerung markiert. Die 80 Elemente im Inneren von Ω werden nicht verfeinert.

k	$N^{(k)}$	$n^{(k)}$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\mu)$
0	1	6	0.77399833		0.61080067	
1	8	10	0.51507164	0.19585245	0.54467182	0.05510480
2	64	9	0.29632883	0.26585803	0.41575716	0.12988204
3	512	11	0.16008170	0.29613021	0.30557687	0.14806859

k	$N^{(k)}$	$n^{(k)}$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\mu)$
0	1	6	0.77399833		0.61080067	
1	8	10	0.51507164	0.19585245	0.54467182	0.05510480
2	64	9	0.29632883	0.26585803	0.41575716	0.12988204
3	337	10	0.19520733	0.25126871	0.33101170	0.13721867
4	547	12	0.15709869	0.44839662	0.30179317	0.19078924
5	1401	13	0.12194434	0.26933700	0.25790356	0.16709986

k	$N^{(k)}$	$n^{(k)}$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$	$\mu^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\mu)$
0	1	6	0.77399833		0.61080067	
1	8	10	0.51507164	0.19585245	0.54467182	0.05510480
2	64	9	0.29632883	0.26585803	0.41575716	0.12988204
3	372	10	0.18809393	0.25825312	0.32550648	0.13904402
4	960	12	0.13301071	0.36550364	0.27077632	0.19417893

Tabelle 4.16: *Experimentelle Resultate in Beispiel 4.5.2 bei uniformer, η-adaptiver und μ-adaptiver Netzverfeinerung sowie $\varepsilon = h$ (von oben nach unten). Die Tabellen zeigen die Anzahl der Elemente N, die Anzahl der benötigten Schritte im Newton-Verfahren zur Berechnung von $\mathbf{m}_h$ sowie die residualen Fehlerschätzer η und μ samt experimentellen Konvergenzraten.*

4.5.2 Einfluß eines unstetigen äußeren Feldes f für $d = 3$

Um stärkere Netzadaption zu erhalten, wurde wieder künstlich ein unstetiges äußeres Feld $\mathbf{f}$ konstruiert. Zu $\Omega := (0,1)^3$ bezeichne $\omega := \mathrm{conv}\{0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ den Standardtetraeder. Für das äußere Feld gelte $\mathbf{f}|_\omega \equiv (1/2, 1/2, 1/2)$ und $\mathbf{f}|_{\Omega\setminus\omega} \equiv (-2/5, 0, 0)$. Analog zum zweidimensionalen Fall in Abschnitt 4.3.3 erwartet man bei indikatorgesteuerter Netzadaption eine Verfeinerung an der Hyperebene, die durch die Knoten $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ aufgespannt wird. Diese zeigt sich auch experimentell. Diese ist auch in Abbildung 4.47 sichtbar. Zusätzlich zur Verfeinerung auf der Grenzschicht beobachtet man auch eine Verfeinerung entlang gewisser Außenkanten des Würfels Ω. Tabelle 4.16 zeigt die experimentellen Ergebnisse bei uniformer, η-adaptiver und μ-adaptiver Netzverfeinerung.

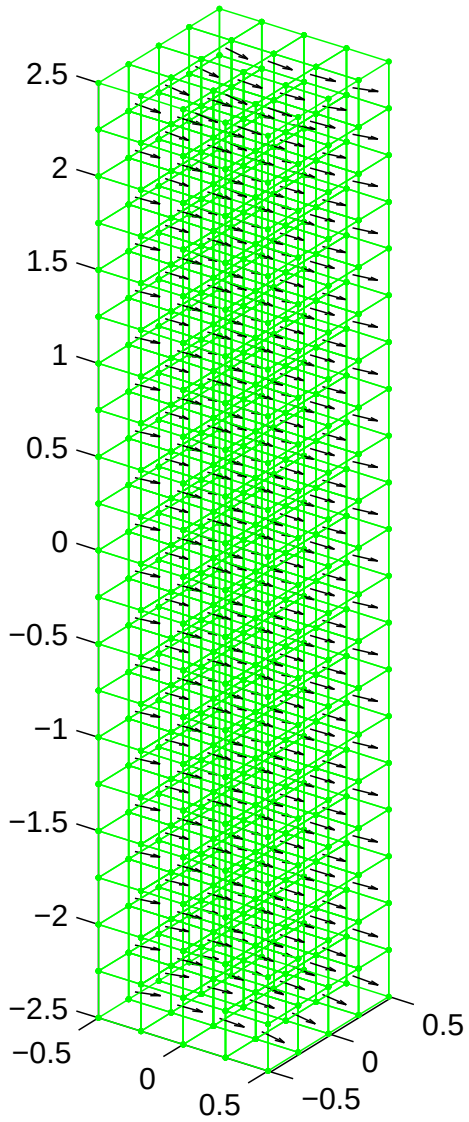


Abbildung 4.46: *Die diskrete Lösung* $\mathbf{m}_h$ *in Beispiel 4.5.1 zu* $\varepsilon = h$, $\mathbf{f} \equiv (2/5, 0, 0)$ *und uniformem Netz bestehend aus* $N = 320$ *Würfeln mit Kantenlänge* $1/4$. *Man erkennt dasselbe Verhalten für die Magnetisierung wie im zweidimensionalen Fall.*

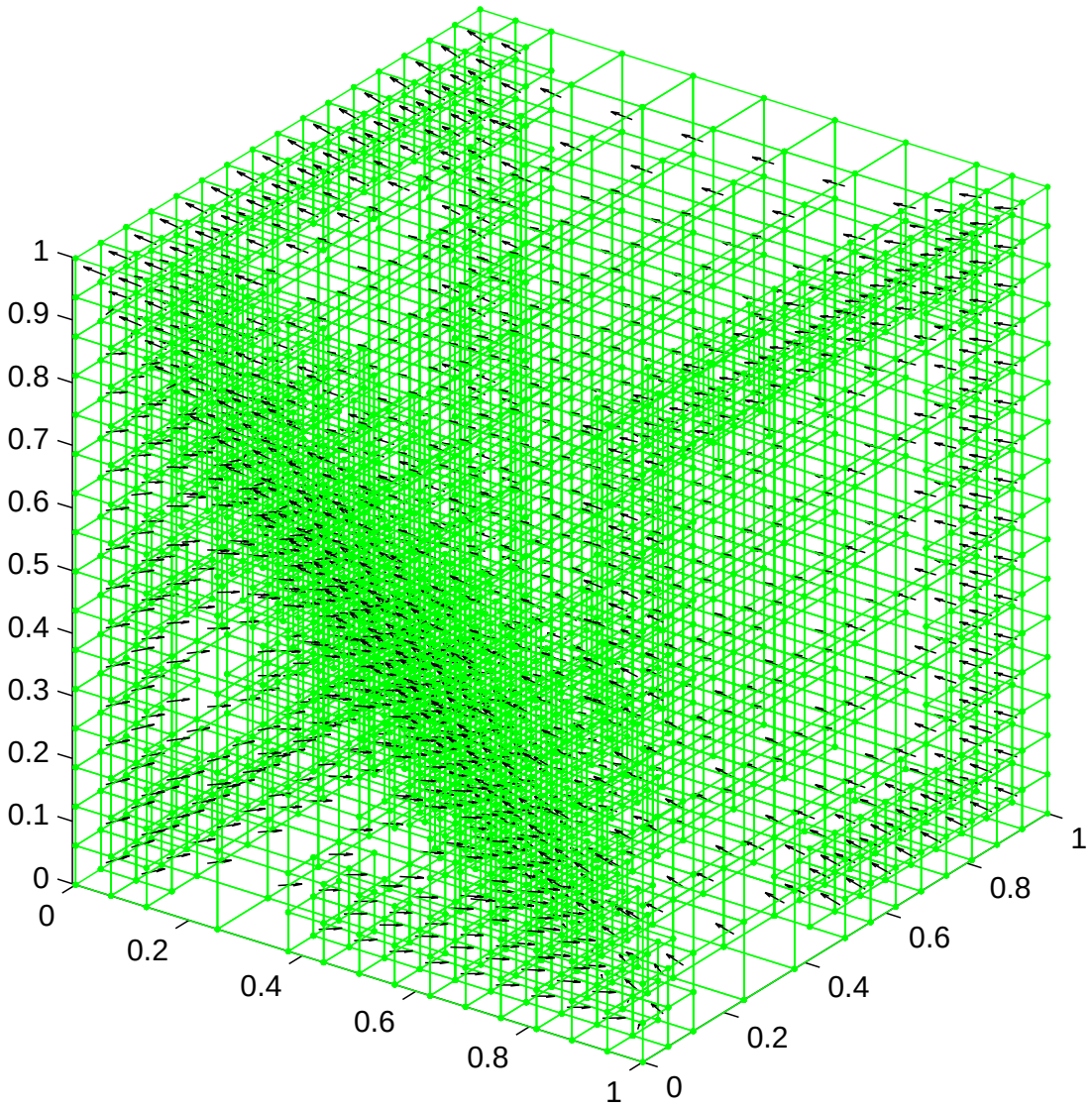


Abbildung 4.47: *Die diskrete Lösung* $\mathbf{m}_h$ *in Beispiel 4.5.2 zu* $\varepsilon = h$ *auf* η*-adaptiv erzeugtem Netz* $\mathcal{T}_5$ *mit* $N = 1401$ *Elementen. Man erkennt die starke Verfeinerung entlang der Grenzschicht, an der das äußere Feld springt und zusätzlich die Verfeinerung entlang gewisser Kanten von* Ω.

4.6 Das stabilisierte Problem

In diesem Abschnitt wird das stabilisierte Problem $(RP^{\beta}_{\varepsilon,h})$ betrachtet. Der Stabilisierungsterm wird durch

$$\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_h, \widetilde{\mathbf{m}}_h) = \sum_{E\in\mathcal{E}^*} \beta_E h_E \int_E [\mathbf{m}_h]\cdot[\widetilde{\mathbf{m}}_h]\, ds$$

für einen gegebenen Vektor $\boldsymbol{\beta} := (\beta_E)_{E\in\mathcal{E}^*}$ definiert. Nach Abschnitt 2.12 sind die Stabilisierungsterme von höherer Ordnung, sofern $\beta_E = h_E^{\beta}$ gilt mit einem Skalar $\beta > -1$. Da zumindest ab einem hinreichend feinen Netz $\mathcal{T}_k$ die Kanten bzw. Seiten $E \in \mathcal{E}^*$ auch $h_E < 1$ erfüllen, entspricht der Fall $\beta = \infty$ formal dann dem nicht-stabilisierten Problem $(RP_{\varepsilon,h})$. Experimentell zeigt sich, daß Stabilisierung eine leichte Aufwandsreduktion des numerischen Verfahrens impliziert: Dadurch, daß man beim Newton-Verfahren eine Funktion betrachtet, die um einen regulären Anteil erweitert ist, werden weniger Iterationsschritte bis zur Konvergenz des Newton-Verfahrens benötigt. Dies ist exemplarisch in den Tabellen 4.17 und 4.18 dargestellt. Experimentell wird dabei Stabilisierung mit $\beta_E = h_E^{\beta}$ und $\beta = -1/2$ favorisiert.

N	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{10}$	∞
4	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
16	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
64	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
256	11	10	9	9	9	10	10	13	10	13	10	11
1024	9	12	10	12	10	10	11	11	10	11	11	10

Tabelle 4.17: *Die Anzahl der Newtonschritte in Beispiel 4.3.1 mit $\varepsilon = h^{3/2}$. Der Fall $\beta = \infty$ führt wegen $h_E < 1$ auf das nicht-stabilisierte Problem $(RP_{\varepsilon,h})$.*

Das Konvergenzverhalten des stabilisierten Problems wird exemplarisch an Beispiel 4.3.1 untersucht, und es wird wieder die Penalisierung $\varepsilon = h^{3/2}$ betrachtet. Tabelle 4.19 zeigt, daß die Konvergenzordnungen der Fehler E_1, E_2 bei uniformen Netzen bis auf 1% übereinstimmen. Die Konvergenzordnung des Fehlerschätzers η scheint im stabilisierten Fall auf den ersten Blick höher als im nicht-stabilisierten. Das liegt aber vermutlich daran, daß die (positiven) Sprungterme $\sigma_{\mathrm{A}}(\mathbf{m}_{\mathcal{T}}, \mathbf{m}_{\mathcal{T}})$ bei der Betrachtung vernachlässigt werden. Es ist damit zu rechnen, das sich zumindest für große Anzahl an Elementen N dieselbe Konvergenzrate wie im nicht-stabilisierten Fall einstellt. Das Verhalten von Fehler- und Fehlerschätzer bei adaptiver Netzverfeinerung ist in Abbildung 4.48 dargestellt. Auch hier liefern stabilisiertes und nicht-stabilisiertes Problem dasselbe Konvergenzverhalten für den Fehler.

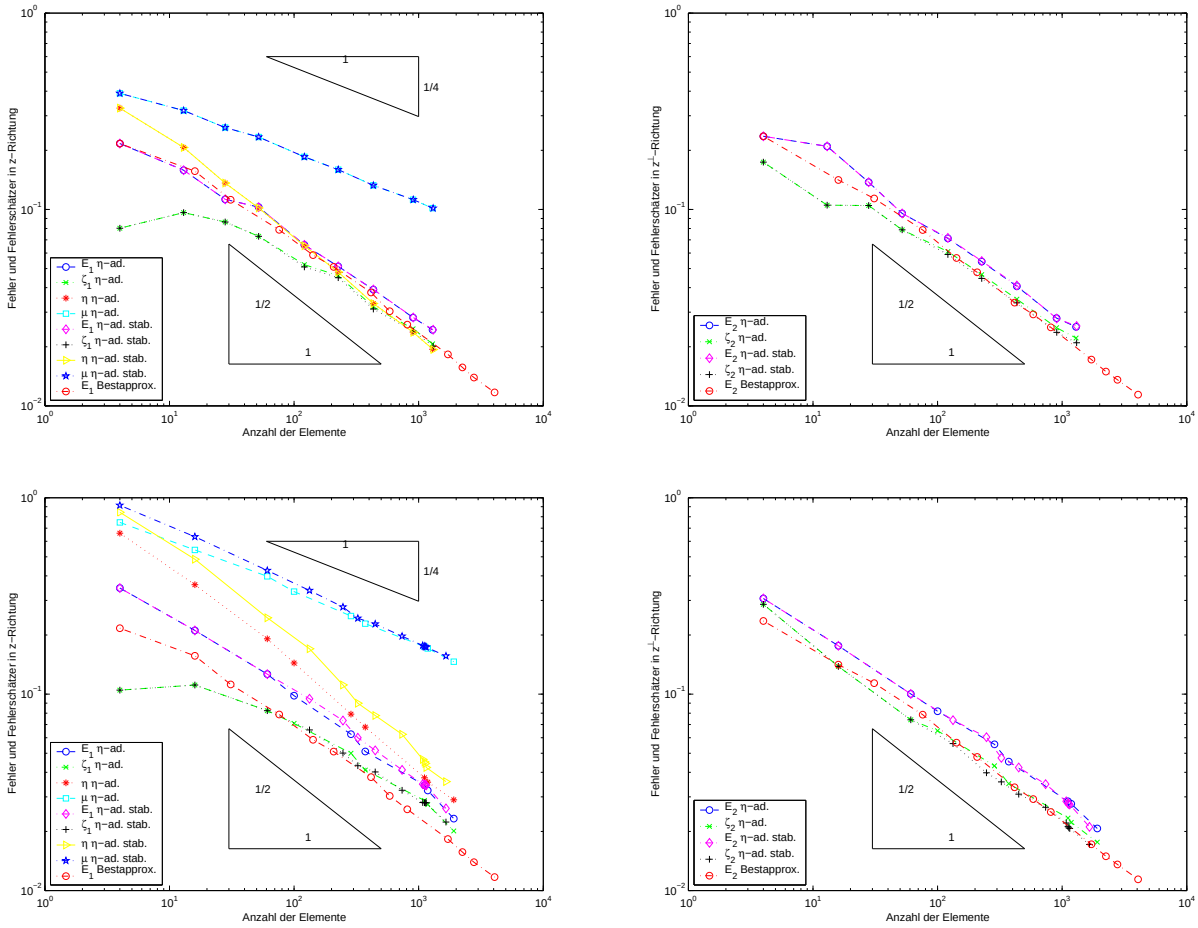


Abbildung 4.48: *Fehler und Fehlerschätzer in Beispiel 4.3.1 für* $\lambda = \lambda^{(1)}$ *(oben) und* $\lambda = \lambda^{(2)}$ *(unten) bei* η*-adaptiver Verfeinerung und Penalisierung* $\varepsilon = h^{3/2}$*. In beiden Fällen zeigt sich, daß der* L^2*-Fehler bei Stabilisierung mit* $\beta_E = h_E^{-1/2}$ *dieselbe experimentelle Konvergenzrate besitzt wie im nicht-stabilisierten Fall* $\beta = \infty$*.*

N	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{10}$	∞
5	3	3	3	3	3	4	3	3	3	3	3	4
20	3	3	4	4	3	7	2	2	2	4	2	7
80	3	3	2	3	2	7	6	6	7	7	8	7
320	4	5	8	7	7	6	8	7	6	8	8	6
1280	7	8	8	6	8	9	8	7	7	7	9	9

N	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{10}$	∞
5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
20	3	2	3	2	4	6	3	3	4	3	3	6
80	3	2	2	2	3	9	5	7	7	6	6	9
320	2	5	8	7	7	9	7	8	6	8	8	6
1280	7	8	6	8	9	10	8	7	8	7	7	11

N	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{10}$	∞
5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
20	2	2	2	5	2	2	3	3	2	5	2	2
80	5	3	3	3	3	3	3	2	2	3	4	3
320	3	3	3	4	3	2	3	3	3	5	3	3
1280	3	2	2	4	4	8	4	6	5	6	7	8

Tabelle 4.18: *Die Anzahl der Newtonschritte in Beispiel 4.3.1 auf uniformen Netzen sowie* $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}$ *(oben),* $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(2)}$ *(mittig) und* $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(3)}$ *(unten) bei Stabilisierung mittels* $\beta_E = h_E^{\beta}$ *für alle* $E \in \mathcal{E}^*$. *In allen Beispielen wurde mit dem Penalisierungsparameter* $\varepsilon = h^{3/2}$ *gerechnet.*

k	$N^{(k)}$	$n^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	8	0.10482	0.34702		0.28657	0.30684		0.65996	
1	16	7	0.11131	0.21101	0.35886	0.13834	0.17630	0.39973	0.36089	0.43542
2	64	8	0.07690	0.12172	0.39683	0.07376	0.10025	0.40719	0.18553	0.47996
3	256	11	0.05099	0.07079	0.39103	0.04359	0.06251	0.34073	0.08941	0.52656
4	1024	10	0.03134	0.04073	0.39871	0.02612	0.03802	0.35862	0.04412	0.50956

k	$N^{(k)}$	$n^{(k)}$	$\zeta_1^{(k)}$	$E_1^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_1)$	$\zeta_2^{(k)}$	$E_2^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(E_2)$	$\eta^{(k)}$	$\kappa^{(k)}(\eta)$
0	4	8	0.10482	0.34702		0.28657	0.30684		0.84342	
1	16	7	0.11131	0.21101	0.35886	0.13834	0.17630	0.39973	0.48630	0.39720
2	64	8	0.07690	0.12172	0.39683	0.07376	0.10025	0.40719	0.24011	0.50908
3	256	9	0.04950	0.07060	0.39289	0.04166	0.06067	0.36227	0.10998	0.56324
4	1024	10	0.03070	0.04080	0.39554	0.02470	0.03697	0.35743	0.05165	0.54523

Tabelle 4.19: *Fehler, Fehlerschätzer und Konvergenzordnungen in Beispiel 4.3.1 für* $\lambda = \lambda^{(3)}$ *und* $\varepsilon = h^{3/2}$ *bei uniformer Netzverfeinerung und Stabilisierung mit* $\beta = \infty$ *(oben) bzw.* $\beta = -1/2$ *(unten). Es zeigt sich in beiden Fällen dasselbe Konvergenzverhalten des Fehlers.*

4.7 Problem (*P*) versus konvexifiziertes Problem (*RP*)

Betrachtet wird der uniachsiale Modellfall, in dem die Anisotropiedichte bereits in konvexer Form vorliegt. Beim Ausgangsproblem (P) mit verschwindender Austauschenergie ist eine Magnetisierung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; S_2^d)$ gesucht, die das Energiefunktional

$$E(\mathbf{m}) = \int_\Omega \phi\big(\mathbf{m}(x)\big)\,dx - \int_\Omega \mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{m}(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(\mathcal{L}\mathbf{m})|^2\,dx$$

über $\mathcal{A} := L^2(\Omega; S_2^d)$ minimiert. Während dieses Minimum nach Kinderlehrer-James [37, 38] nicht angenommen zu werden braucht, existiert mit DeSimone [26] mindestens eine Minimalstelle $\mathbf{m}$ desselben Funktionals in $\mathcal{A}^{(C)} := L^2(\Omega; B_2^d)$. Das Minimierungsproblem läßt sich äquivalent durch seine Euler-Lagrange-Gleichungen (RP) beschreiben, siehe Seite 36, die neben der Lösung $\mathbf{m} \in L^2(\Omega; B_2^d)$ einen Lagrange-Multiplikator $\lambda \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\geq 0})$ involvieren. Die Diskretisierung von (RP) erfolgte mit einem Penalisierungsansatz, wobei die Nebenbedingung $|\mathbf{m}| \leq 1$ mit fixiertem $\varepsilon > 0$ durch den additiven Penalisierungsterm

$$\lambda\mathbf{m} = \varepsilon^{-1}\,\frac{(|\mathbf{m}|-1)_+}{|\mathbf{m}|}\,\mathbf{m} \quad \text{für } \mathbf{m} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$$

ersetzt wird. Dabei wird – analytisch betrachtet – das Energiefunktional E auf $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ um einen additiven Term $E_4 := \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega (|\mathbf{m}|-1)_+^2\,dx$ erweitert. Analoges Vorgehen für das Problem (P) führt auf das penalisierte Energiefunktional

$$E_\varepsilon(\mathbf{m}) = E(\mathbf{m}) + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega (|\mathbf{m}|-1)^2\,dx, \tag{4.10}$$

dessen Definitionsbereich wieder durch den ganzen Raum $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ gegeben wird.

Penalisiertes Minimierungsproblem ($MP_{\varepsilon,\mathcal{A}}$). Es sei $\mathcal{A}$ eine Teilmenge von $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Für fixiertes $\varepsilon > 0$ finde man eine Minimalstelle $\mathbf{m} \in \mathcal{A}$ des penalisierten Energiefunktionals E_ε aus (4.10), d.h. $E_\varepsilon(\mathbf{m}) = \min\limits_{\widetilde{\mathbf{m}}\in\mathcal{A}} E_\varepsilon(\widetilde{\mathbf{m}})$.

Penalisiertes Problem ($P_{\varepsilon,\mathcal{A}}$). Zu gegebenem Teilraum $\mathcal{A}$ von $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ und $\varepsilon > 0$ finde man eine Funktion $\mathbf{m} \in \mathcal{A}$ mit $\operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} |\mathbf{m}(x)| > 0$ und

$$a(\mathbf{m}, \cdot) + \langle D\phi(\mathbf{m}) + \lambda_\varepsilon\mathbf{m}\ ;\ \cdot\rangle = \langle \mathbf{f}\ ;\ \cdot\rangle \quad \text{in } \mathcal{A}^*,$$

wobei die Funktion $\lambda_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ gegeben sei durch

$$\lambda_\varepsilon := \varepsilon^{-1}\,\frac{|\mathbf{m}|-1}{|\mathbf{m}|}.$$

Bemerkung. A priori sind weder die Lösbarkeit von $(MP_{\varepsilon,\mathcal{A}})$ noch die von $(P_{\varepsilon,\mathcal{A}})$ gesichert. Analog zu Satz 2.22 und Korollar 2.23 erhält man aber das folgende Resultat. □

Lemma 4.3. *Gegeben sei ein fixer Penalisierungsparameter $\varepsilon > 0$ und $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sei die Anisotropiedichte des uniachsialen Modellfalls. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) *Das Energiefunktional $E_\varepsilon : L^2(\Omega; \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ ist reellwertig, global stetig und koerziv.*

(ii) *Das penalisierte Problem* $(MP_{\varepsilon,\mathcal{A}})$ *besitzt auf jedem endlich-dimensionalen Teilraum* $\mathcal{A}$ *von* $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ *mindestens eine Lösung.*

(iii) *Ist* $\mathcal{A}$ *ein Teilraum von* $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$ *und* $\mathbf{m} \in \mathcal{A}$ *eine Lösung von* $(MP_{\varepsilon,\mathcal{A}})$ *mit* $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} |\mathbf{m}(x)| > 0$*, so ist* $\mathbf{m}$ *auch Lösung von* $(P_{\varepsilon,\mathcal{A}})$.

Beweis. (i) Nach Satz 2.18 ist $E : L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ reellwertig, stetig, Fréchet-differenzierbar, koerziv und konvex. Da der additive Term

$$E_4(\mathbf{m}) := \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega (|\mathbf{m}|-1)^2\,dx$$

nicht-negativ ist, ist damit auch $E_\varepsilon = E + E_4$ koerziv. Die Stetigkeit von $E_4 : L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ ist offensichtlich und überträgt sich damit auf E_ε. (ii) Es bezeichne $M := \inf\big\{E_\varepsilon(\mathbf{m}) \,\big|\, \mathbf{m} \in \mathcal{A}\big\}$. Zunächst gilt $M \in [-\infty,\infty)$, und es wird der Fall $M = -\infty$ betrachtet. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere die abgeschlossenen Mengen $\mathcal{B}_k := \big\{\mathbf{m} \in \mathcal{A} \,\big|\, E_\varepsilon(\mathbf{m}) \le -k\big\}$. Wäre $\mathcal{B}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ unbeschränkt, so existierte eine Folge $(\mathbf{m}_k)$ von Magnetisierungen $\mathbf{m}_k \in \mathcal{B}_k$ mit $\|\mathbf{m}_k\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \ge k$. Nach Definition der $\mathcal{B}_k$ gilt dann einerseits $\lim_k E_\varepsilon(\mathbf{m}_k) = -\infty$, andererseits impliziert die Koerzivität von E_ε aber die Existenz einer Teilfolge $(\mathbf{m}_{k_\ell})$ mit $\lim_\ell E_\varepsilon(\mathbf{m}_{k_\ell}) = \infty$. Dieser Widerspruch zeigt, daß mindestens ein $\mathcal{B}_k$ beschränkt ist und damit kompakt, denn $\mathcal{A}$ ist endlich-dimensional. Also nimmt das (reellwertige) stetige Funktional E_ε auf $\mathcal{B}_k$ sein Infimum M als Minimum an, und es folgt insgesamt $M \in \mathbb{R}$. Der Fall $M = -\infty$ kann also *nicht* eintreten. Das analoge Argument für die Mengen $\mathcal{B}'_k := \big\{\mathbf{m} \in \mathcal{A} \,\big|\, E_\varepsilon(\mathbf{m}) \le M + 1/k\big\}$ zeigt nun die Existenz eines $k \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{m} \in \mathcal{B}'_k$ mit $E_\varepsilon(\mathbf{m}) = M$. (iii) Mit Satz 2.18 ist nur zu zeigen, daß E_4 Gâteaux-differenzierbar ist in $\mathbf{m}$ mit

$$\big(DE_4(\mathbf{m})\big)(\widetilde{\mathbf{m}}) = \langle \lambda_\varepsilon \mathbf{m}\,;\,\widetilde{\mathbf{m}}\rangle \quad \text{für } \widetilde{\mathbf{m}} \in \mathcal{A}.$$

Die Funktion $\Psi : \mathbb{R}^d\backslash\{0\} \to \mathbb{R}_{\ge 0}, y \mapsto \frac{1}{2}(|y|-1)^2$ ist stetig differenzierbar mit $\nabla\Psi(y) = \frac{|y|-1}{|y|}\,y$. Die Voraussetzungen an $\mathbf{m}$ und $\mathcal{A}$ erlauben es, dieselben Argumente wie im Beweis von Satz 2.18 (v) anzuwenden, vgl. Seite 47, und zeigen die Behauptung. ■

Bei den folgenden numerischen Experimenten wurde zu gegebener Triangulierung $\mathcal{T}$ von Ω der diskrete Raum $\mathcal{A} = \mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ betrachtet, und dieses Verfahren wurde experimentell untersucht. Da E_ε nicht konvex ist, kann im allgemeinen nicht erwartet werden, daß das oben definierte Newton-Verfahren gegen ein *absolutes Minimum* von E_ε in $\mathcal{L}^0(\mathcal{T};\mathbb{R}^d)$ konvergiert. Für einige der betrachteten Beispiele scheint dies dennoch der Fall zu sein. Genauer hat man in Beispiel 4.3.1 für alle $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(j)}$ Konvergenz des Newton-Verfahrens gegen eine diskrete Lösung $\mathbf{m}_h$, die aber im Fall $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(3)}$, wo $\mathbf{f}$ parallel zur *easy axis* verläuft, lediglich lokales Minimum zu sein scheint. Abbildung 4.49 zeigt unter anderem die numerischen Lösungen von $(P_{\varepsilon,h})$ für $\varepsilon = h$ und $\varepsilon = h^{3/2}$. Die diskreten Lösungen zu $\mathbf{f}^{(1)}$ bzw. $\mathbf{f}^{(2)}$ verhalten sich analog zum konvexifizierten Fall – nur, daß nun die Länge $|\mathbf{m}_h|$ im wesentlichen bei 1 liegt. Für die stärkere Penalisierung $\varepsilon = h^{3/2}$ verringert sich wie erwartet die Streuung von $|\mathbf{m}_h|$ um 1. Bei den diskreten Lösungen zu $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(3)}$ tritt ein inhomogenes Verhalten der Magnetisierung auf. Geht man aber mit den Stabilisierungen aus Kapitel 2 zum stabilisierten Problem $(P^\beta_{\varepsilon,h})$ über, so erhält man Lösungen analog zum konvexifizierten Problem $(RP^\beta_{\varepsilon,h})$.

		$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}$		$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(2)}$		$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(3)}$	
k	$N^{(k)}$	$\beta = \infty$	$\beta = -1/2$	$\beta = \infty$	$\beta = -1/2$	$\beta = \infty$	$\beta = -1/2$
0	5	4	3	8	7	2	3
1	20	6	5	6	6	9	5
2	80	9	5	7	7	21	5
3	320	7	7	8	7	21	5
4	1280	7	7	7	7	N.K.	11

Tabelle 4.20: *Die Anzahl an Newton-Schritten zur Berechnung einer diskreten Lösung* $\mathbf{m}_h$ *von* $(P_{\varepsilon,h})$. *Im Fall* $k = 4$ *und* $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(3)}$ *ergab sich im nicht-stabilisierten Fall die experimentelle Nicht-Konvergenz (N.K.) des Newton-Verfahrens, d.h. das Newton-Verfahren wurde nach* 500 *Schritten im vorasymptotischen Bereich abgebrochen.*

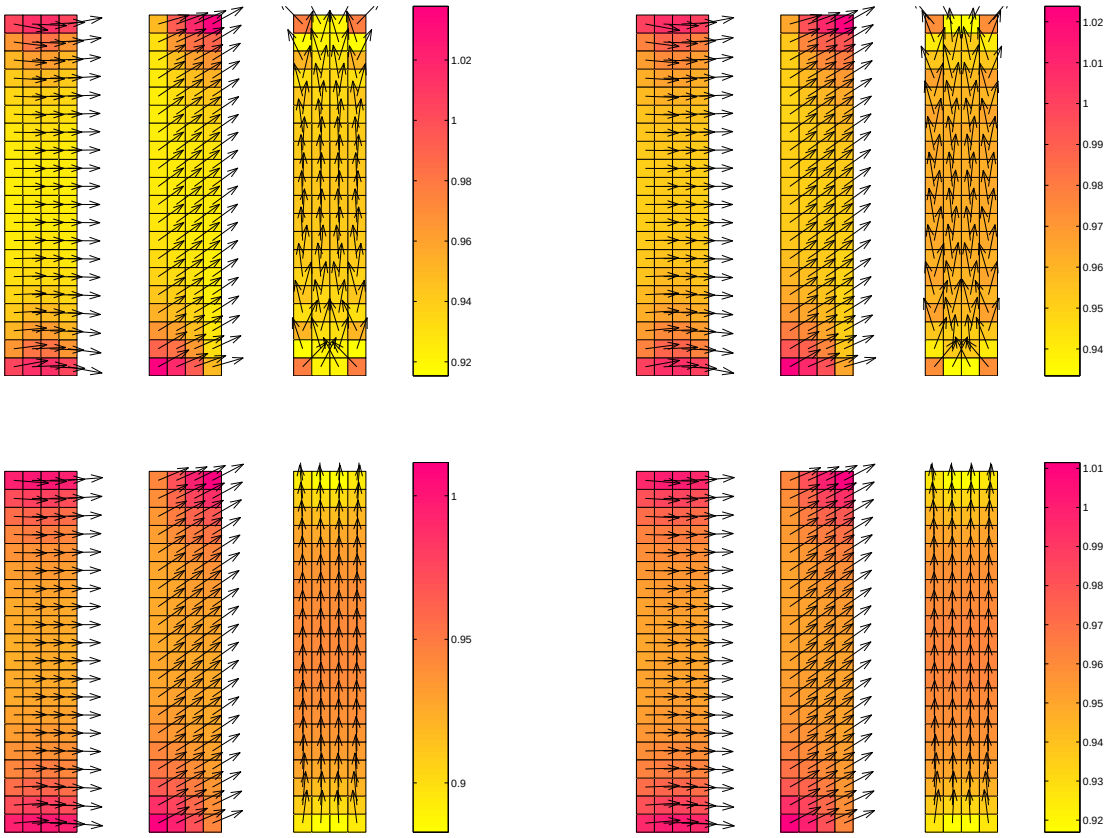


Abbildung 4.49: *Die diskreten Lösungen von* $(P_{\varepsilon,h})$ *für* $\varepsilon = h$ *(links, oben) und* $\varepsilon = h^{3/2}$ *(rechts, unten). Im Fall* $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(3)}$, *wenn* $\mathbf{f}$ *parallel ist zur* easy axis $\mathbf{z}^{\perp}$, *treten bei der der diskreten Lösung* $\mathbf{m}_h$ *gewisse Instabilitäten auf. Aus diesem Grund wurde für beide Penalisierungen das stabilisierte Problem* $(P^{\beta}_{\varepsilon,h})$ *(unten) gerechnet. Man sieht in allen Bildern deutlich, daß für die stärkere Penalisierung* $\varepsilon = h^{3/2}$ *(rechts) die Länge* $|\mathbf{m}_h|$ *weniger von* 1 *differiert als bei Penalisierung mit* $\varepsilon = h$ *(links).*

Anhang A

Analytische Berechnung der auftretenden Randintegrale im Fall $d = 2$

Die weitaus allgemeinere Darstellung der folgenden Abschnitte findet sich in Maischak [47], wo die auftretenden Randintegrale für Dichten von beliebigem Polynomgrad berechnet werden. Die Darstellung in den vorausgegangenen Kapiteln benötigt lediglich die Betrachtung stückweise konstanter Dichten. Diese Einschränkung vereinfacht natürlich die auftretenden Formel wesentlich. Wo der Vorlage Maischak [47] gefolgt wird, ist dies durch Verweise deutlich gemacht.

Bemerkung. Im folgenden sind die wesentlichen Vektoren im Fettdruck dargestellt, z.B. $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. Skalare werden, sofern die Formel dadurch besser lesbar wird, von links *oder* rechts geschrieben, d.h. $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}\lambda$ für einen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ wird weiterhin mit $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ notiert. □

A.1 Integrale vom Typus des Doppelschichtpotentials

Bei der numerischen Realisierung der Fehlerschätzer η_j in Kapitel 3 sind Integrale der Gestalt $\|\nabla u_h - (\nabla u_h)\|_{L^p(T)}$ für $p = 1, 2$ zu implementieren. Dies geschieht über eine Quadraturformel. Dazu muß aber der Integrand punktweise ausgewertet werden. Zur Berechnung von $\nabla u_h(x)$ sind Randintegrale der Gestalt

$$\int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \frac{x-y}{|x-y|^2}\, ds_y \in \mathbb{R}^2 \tag{A.1}$$

für fixierte Vektoren $x, z, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ mit $x \notin [\mathbf{a}, \mathbf{b}] := \operatorname{conv}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ zu berechnen. Um den roten Faden zu wahren, werden zunächst die Resultate gegeben und erst im Anschluß daran bewiesen.

Lemma A.1. *Für gegebene Vektoren $x, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ definiere*

$$\mathbf{c} := \mathbf{a} + \mathbf{b} - 2x, \quad \mathbf{d} := \mathbf{b} - \mathbf{a} \quad \textit{und} \quad D := |c_1 d_2 - c_2 d_1| \geq 0 \tag{A.2}$$

Dann gelten die folgenden Aussagen

(i) *Es gilt genau dann $D = 0$, wenn $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ linear abhängig sind, und in diesem Fall ist $\mathbf{c} = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\,\mathbf{d}$.*

(ii) *x liegt genau dann auf der Geraden $\overline{\mathbf{ab}}$ durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, wenn $D = 0$ ist,*

(iii) *x liegt genau dann auf der Strecke $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, wenn $D = 0$ und $|\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}| \leq |\mathbf{d}|^2$ gelten.*

Satz A.2. *Es seien $x, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ und $x \notin [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ sowie $\mathbf{c}, \mathbf{d}, D$ wie in* (A.2)*. Dann läßt sich das Integral* (A.1) *wie folgt berechnen.*

(i) *Im Fall $D = 0$ gilt*

$$\int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \frac{x-y}{|x-y|^2}\, ds_y = -\frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} \log \frac{|\mathbf{b}-x|}{|\mathbf{a}-x|}. \tag{A.3}$$

(ii) *Im Fall $D > 0$ gilt mit*

$$J := \begin{cases} \arctan \frac{D}{2(\mathbf{a}-x)\cdot(\mathbf{b}-x)}, & \textit{falls } |\mathbf{c}|^2 > |\mathbf{d}|^2, \\ \arctan \frac{D}{2(\mathbf{a}-x)\cdot(\mathbf{b}-x)} + \pi & \textit{falls } |\mathbf{c}|^2 < |\mathbf{d}|^2, \\ \arctan \frac{2(\mathbf{b}-x)\cdot\mathbf{d}}{D} + \arctan \frac{2(x-\mathbf{a})\cdot\mathbf{d}}{D} & \textit{sonst}, \end{cases} \tag{A.4}$$

und $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ einem Normalenvektor auf $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ die Gleichheit

$$\int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \frac{x-y}{|x-y|^2}\, ds_y = -\big(\operatorname{sign}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{n})\big)\, J\, \mathbf{n} - \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} \log \frac{|\mathbf{b}-x|}{|\mathbf{a}-x|}. \tag{A.5}$$

Bemerkung. Das folgende Lemma wird benötigt, um Teil (ii) von Satz A.2 zu beweisen. Dabei sind für die Berechnung der auftretenden Integrale nur die Formeln für I_1 und I_2 von Interesse. Die Angabe der Rekursionsformel erfolgt nur der Vollständigkeit halber. □

Lemma A.3. *Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\Delta := \alpha^2 - 4\beta < 0$ lassen sich Integrale der Form*

$$I_n := \int_{-1}^{1} \frac{s^{n-1}}{s^2 + \alpha s + \beta}\, ds \quad \textit{für } n \in \mathbb{N} \tag{A.6}$$

exakt berechnen. Es gelten mit $\delta := \sqrt{4\beta - \alpha^2} = \sqrt{-\Delta} > 0$

$$I_1 = \frac{2}{\delta} \begin{cases} \big\{ \arctan \frac{\delta}{\beta-1} \big\}, & \textit{falls } \beta > 1, \\ \big\{ \arctan \frac{\delta}{\beta-1} + \pi \big\}, & \textit{falls } \beta < 1, \\ \big\{ \arctan \frac{2+\alpha}{\delta} + \arctan \frac{2-\alpha}{\delta} \big\} & \textit{sonst.} \end{cases}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\Big\{ \log \frac{1+\alpha+\beta}{1-\alpha+\beta} - \alpha I_1 \Big\},$$

$$I_n = \frac{1+(-1)^n}{n-2} - \alpha I_{n-1} - \beta I_{n-2} \quad \textit{für } n \geq 3,$$

und insbesondere sind alle Ausdrücke wohldefiniert, da das Polynom $s^2 + \alpha s + \beta$ keine reellen Nullstellen hat.

Beweis von Lemma A.1. (i) Ein Normalenvektor auf $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ist durch $\mathbf{n} = (d_2, -d_1)/|\mathbf{d}|$ gegeben. Nach Definition gilt gerade $D = |\mathbf{d}||\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}|$, d.h. $D = 0$ ist äquivalent zu $\mathbf{c} \perp \mathbf{n}$. Da aber die beiden Vektoren $\mathbf{n}, \mathbf{d}/|\mathbf{d}|$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bilden, folgt $\mathbf{c} = (\mathbf{c}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\mathbf{d} = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\mathbf{d}$.
(ii) Nach dem gerade Bewiesenen ist $D = 0$ äquivalent zu $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{d}$ mit $\lambda = (\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})/|\mathbf{d}|^2$. Nach Definition von $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ folgt

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2x = \mathbf{c} = \lambda\mathbf{d} = \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

bzw. äquivalent dazu

$$x = \frac{1}{2}\{\mathbf{a} + \mathbf{b} - \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a})\} =: \gamma(-\lambda). \tag{A.7}$$

Die Abbildung γ ist affin, und die Restriktion $\gamma : [-1, 1] \to [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ parametrisiert $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Insbesondere ist also $x = \gamma(-\lambda) \in \overline{\mathbf{ab}}$. (iii) Der Vektor $x \in \mathbb{R}^d$ erfüllt genau dann $x \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \gamma([-1, 1])$, wenn ein Skalar $s \in [-1, 1]$ mit $x = \gamma(s)$ existiert. Dies ist nach Definition von γ zu $-\mathbf{c} = s\mathbf{d}$ äquivalent und damit zu $|\mathbf{c}| = |s||\mathbf{d}|$, also $|\mathbf{c}| \leq |\mathbf{d}|$. Da $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ wegen $D = 0$ linear abhängig sind, gilt die Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Dies liefert abschließend die Äquivalenz von $|\mathbf{c}| \leq |\mathbf{d}|$ zu $|\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}| = |\mathbf{c}||\mathbf{d}| \leq |\mathbf{d}|^2$. ■

Beweis von Satz A.2. Betrachte die Parametrisierung $\gamma : [-1, 1] \to [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ aus (A.7). Dann gelten für $y = \gamma(s)$ zunächst

$$x - y = -\frac{1}{2}\{-2x + \mathbf{a} + \mathbf{b} + s(\mathbf{b} - \mathbf{a})\} = -\frac{1}{2}(\mathbf{c} + s\mathbf{d}) \tag{A.8}$$

und

$$\begin{aligned} |x - y|^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{c} + s\mathbf{d}) \cdot (\mathbf{c} + s\mathbf{d}) &= \frac{1}{4}\big\{|\mathbf{d}|^2 s^2 + 2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})s + |\mathbf{c}|^2\big\} \\ &= \frac{|\mathbf{d}|^2}{4}\Big\{s^2 + 2\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2} + \frac{|\mathbf{c}|^2}{|\mathbf{d}|^2}\Big\} \end{aligned} \tag{A.9}$$

Betrachte das Polynom $s^2 + \alpha s + \beta$ mit $\alpha := 2\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}$ und $\beta := \frac{|\mathbf{c}|^2}{|\mathbf{d}|^2}$. Für die Diskriminante dieses Polynoms gilt dann

$$\begin{aligned} \Delta := \alpha^2 - 4\beta = \frac{4}{|\mathbf{d}|^4}\big\{|\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}|^2 - |\mathbf{c}|^2|\mathbf{d}|^2\big\} &= \frac{4}{|\mathbf{d}|^4}\big\{(c_1 d_1 + c_2 d_2)^2 - (c_1^2 + c_2^2)(d_1^2 + d_2^2)\big\} \\ &= \frac{4}{|\mathbf{d}|^4}\big\{2c_1 d_1 c_2 d_2 - c_1^2 d_2^2 - c_2^2 d_1^2\big\} \\ &= -\frac{4}{|\mathbf{d}|^4}|c_1 d_2 - c_2 d_1|^2 \\ &= -\frac{4}{|\mathbf{d}|^4}D^2. \end{aligned} \tag{A.10}$$

(i) Im Fall $D = 0$ folgt $\Delta = 0$, also $s^2 + \alpha s + \beta = (s + \alpha/2)^2$. Damit ergibt sich für $y = \gamma(s)$

$$|x - y|^2 = \frac{|\mathbf{d}|^2}{4}\Big(s + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\Big)^2.$$

Ferner gilt nach Lemma A.1 $\mathbf{c} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\,\mathbf{d}$, und es folgt durch bloßes Einsetzen in (A.8)

$$x - y = -\frac{1}{2}\Big(s + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\Big)\,\mathbf{d}.$$

Insgesamt folgt für den Integranden

$$\frac{x - y}{|x - y|^2} = \frac{-\frac{1}{2}\big(s + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\big)\,\mathbf{d}}{\frac{|\mathbf{d}|^2}{4}\big(s + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\big)^2} = -2\,\frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\,\frac{1}{s + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}}.$$

Wegen $x \notin [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ folgt nach Lemma A.1 $|\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}| > |\mathbf{d}|^2$, und deshalb ist der zweite Bruch entweder für alle $s \in [-1, 1]$ positiv oder für alle $s \in [-1, 1]$ negativ. In jedem Fall tritt bei der Integration über $[-1, 1]$ keine Polstelle auf. Mit der Parametrisierung γ folgt nun abschließend

$$\begin{aligned}\int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \frac{x-y}{|x-y|^2}\, ds_y &= \frac{|\mathbf{d}|}{2} \int_{-1}^{1} \frac{x-\gamma(s)}{|x-\gamma(s)|^2}\, ds = -2\, \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\, \frac{|\mathbf{d}|}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{s + \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}}\, ds = -\frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} \log \frac{\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2} + 1}{\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2} - 1} \\ &= -\frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} \log \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d} + |\mathbf{d}|^2}{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d} - |\mathbf{d}|^2} = -\frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} \log \frac{(\mathbf{c}+\mathbf{d})\cdot\mathbf{d}}{(\mathbf{c}-\mathbf{d})\cdot\mathbf{d}} = -\frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} \log \frac{(\mathbf{b}-x)\cdot\mathbf{d}}{(\mathbf{a}-x)\cdot\mathbf{d}}.\end{aligned}$$

Wegen $D = 0$ liegt x nach Lemma A.1 auf der Geraden $\overline{\mathbf{ab}}$. Deshalb sind die drei Vektoren $\mathbf{b} - x, \mathbf{a} - x, \mathbf{d}$ paarweise linear abhängig, und es gilt die Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $(\mathbf{b} - x) \cdot \mathbf{d}$ und $(\mathbf{a} - x) \cdot \mathbf{d}$. Wegen $x \notin [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ existiert ein Skalar $\lambda > 0$ mit mit $\mathbf{a} - x = \lambda(\mathbf{b} - x)$. Insbesondere folgt

$$\frac{(\mathbf{b}-x)\cdot\mathbf{d}}{(\mathbf{a}-x)\cdot\mathbf{d}} = \frac{|\mathbf{b}-x||\mathbf{d}|}{|\mathbf{a}-x||\mathbf{d}|} = \frac{|\mathbf{b}-x|}{|\mathbf{a}-x|}.$$

Dies zeigt (A.3). (ii) Im Fall $D > 0$ folgt $\Delta < 0$, und damit hat das Polynom $s^2 + \alpha s + \beta$ keine reellen Nullstellen. Insbesondere existieren alle auftretenden Integrale. Mit (A.8) und (A.9) gilt für $y = \gamma(s)$

$$\frac{x-y}{|x-y|^2} = \frac{-\frac{1}{2}\{\mathbf{c} + s\mathbf{d}\}}{\frac{|\mathbf{d}|^2}{4}\{s^2 + \alpha s + \beta\}} = -\frac{2}{|\mathbf{d}|^2}\Big\{\frac{\mathbf{c}}{s^2 + \alpha s + \beta} + \frac{s\mathbf{d}}{s^2 + \alpha s + \beta}\Big\}.$$

Nun folgt wieder mit der Parametrisierung $\gamma : [-1, 1] \to [a, b]$

$$\begin{aligned}\int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \frac{x-y}{|x-y|^2}\, ds_y &= \frac{|\mathbf{d}|}{2} \int_{-1}^{1} \frac{x-\gamma(s)}{|x-\gamma(s)|^2}\, ds \qquad \text{(A.11)} \\ &= -\frac{1}{|\mathbf{d}|}\Big\{\mathbf{c} \int_{-1}^{1} \frac{1}{s^2 + \alpha s + \beta}\, ds + \mathbf{d} \int_{-1}^{1} \frac{s}{s^2 + \alpha s + \beta}\, ds\Big\}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Für den Fortgang des Beweises wird zunächst der Term I_1 in den Größen $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ formuliert. In der Notation von Lemma A.3 gilt

$$\delta = \sqrt{-\Delta} = \sqrt{\frac{4}{|\mathbf{d}|^4} D^2} = \frac{2}{|\mathbf{d}|^2} D, \quad \text{also} \quad \frac{2}{\delta} = \frac{|\mathbf{d}|^2}{D}, \qquad \text{(A.12)}$$

wobei die zweite Gleichheit bereits in (A.10) bewiesen worden ist. Nach Definition von $\beta = |\mathbf{c}|^2/|\mathbf{d}|^2$ gilt für $\beta \neq 1$

$$\frac{\delta}{\beta - 1} = \frac{\frac{2}{|\mathbf{d}|^2} D}{\frac{|\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{d}|^2}{|\mathbf{d}|^2}} = \frac{2D}{|\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{d}|^2} = \frac{D}{2(\mathbf{a}-x)\cdot(\mathbf{b}-x)}, \qquad \text{(A.13)}$$

denn

$$\begin{aligned}|\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{d}|^2 &= |(\mathbf{a}-x) + (\mathbf{b}-x)|^2 - |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2 \\ &= 2(\mathbf{a}-x)\cdot(\mathbf{b}-x) + |a-x|^2 + |b-x|^2 - |b-a|^2 \\ &= 2(\mathbf{a}-x)\cdot(\mathbf{b}-x) + 2|x|^2 - 2\mathbf{a}\cdot x - 2\mathbf{b} - x + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\ &= 4(\mathbf{a}-x)\cdot(\mathbf{b}-x).\end{aligned}$$

Ferner gilt für $\alpha = 2(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})/|\mathbf{d}|^2$ zunächst

$$2 \pm \alpha = \frac{2}{|\mathbf{d}|^2}(|\mathbf{d}|^2 \pm \mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) = \frac{2}{|\mathbf{d}|^2}(\mathbf{d} \pm \mathbf{c})\cdot\mathbf{d} = \frac{4}{|\mathbf{d}|^2}\begin{cases}(\mathbf{b}-x)\cdot\mathbf{d},\\ (x-\mathbf{a})\cdot\mathbf{d}.\end{cases}$$

Hieraus folgen

$$\frac{2+\alpha}{\delta} = \frac{\frac{4}{|\mathbf{d}|^2}(\mathbf{b}-x)\cdot\mathbf{d}}{2\frac{D}{|\mathbf{d}|^2}} = \frac{2(\mathbf{b}-x)\cdot\mathbf{d}}{D} \quad \text{und} \quad \frac{2-\alpha}{\delta} = \frac{2(x-\mathbf{a})\cdot\mathbf{d}}{D}.$$

Mit bloßem Einsetzen ergibt sich nun

$$I_1 = \frac{|\mathbf{d}|^2}{D}\,J, \tag{A.14}$$

denn

$$I_1 = \frac{|\mathbf{d}|^2}{D}\begin{cases}\left\{\arctan\frac{D}{2(\mathbf{a}-x)\cdot(\mathbf{b}-x)}\right\}, & \text{falls } |\mathbf{c}|^2 > |\mathbf{d}|^2,\\ \left\{\arctan\frac{D}{2(\mathbf{a}-x)\cdot(\mathbf{b}-x)} + \pi\right\}, & \text{falls } |\mathbf{c}|^2 < |\mathbf{d}|^2,\\ \left\{\arctan\frac{2(\mathbf{b}-x)\cdot\mathbf{d}}{D} + \arctan\frac{2(x-\mathbf{a})\cdot\mathbf{d}}{D}\right\} & \text{sonst.}\end{cases}$$

Zuletzt folgt die Umformulierung von I_2. Es gilt zunächst

$$1+\alpha+\beta = \frac{1}{|\mathbf{d}|^2}\left(|\mathbf{d}|^2 + 2\mathbf{c}\cdot\mathbf{d} + |\mathbf{c}|^2\right) = \frac{1}{|\mathbf{d}|}^2|\mathbf{c}+\mathbf{d}|^2 = \frac{4}{|\mathbf{d}|^2}|\mathbf{b}-x|^2$$

und analog

$$1-\alpha+\beta = \frac{4}{|\mathbf{d}|^2}|\mathbf{a}-x|^2.$$

Für den logarithmischen Anteil von I_2 folgt damit

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+\alpha+\beta}{1-\alpha+\beta} = \frac{1}{2}\log\frac{|\mathbf{b}-x|^2}{|\mathbf{a}-x|^2} = \log\frac{|\mathbf{b}-x|}{|\mathbf{a}-x|},$$

und insgesamt ergibt sich

$$I_2 = \log\frac{|\mathbf{b}-x|}{|\mathbf{a}-x|} - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}I_1 = \log\frac{|\mathbf{b}-x|}{|\mathbf{a}-x|} - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{D}\,J. \tag{A.15}$$

Einsetzen von (A.14) und (A.15) in (A.11) liefert

$$\begin{aligned}\int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}\frac{(x-y}{|x-y|^2}\,ds_y &= -\frac{1}{|\mathbf{d}|}\left\{I_1\mathbf{c} + I_2\mathbf{d}\right\}\\ &= -\frac{1}{|\mathbf{d}|}\left\{\mathbf{c}\,\frac{|\mathbf{d}|^2}{D}\,J + \mathbf{d}\,\log\frac{|\mathbf{b}-x|}{|\mathbf{a}-x|} - \mathbf{d}\,\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{D}\,J\right\}\\ &= -\frac{\mathbf{c}\,(\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}) - \mathbf{d}\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})}{|\mathbf{d}|\,D}\,J - \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}\log\frac{|\mathbf{b}-x|}{|\mathbf{a}-x|}.\end{aligned}$$

Dies ist bis auf den Vorfaktor die behauptete Gleichheit (A.5). Mit der Normalen $\mathbf{n} = (d_2, -d_1)/|\mathbf{d}|$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{c}\,(\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}) - \mathbf{d}\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}) &= \mathbf{c}\,(d_1^2 + d_2^2) - \mathbf{d}\,(c_1 d_1 + c_2 d_2) = \begin{pmatrix} c_1 d_1^2 + c_1 d_2^2 - c_1 d_1^2 - c_2 d_1 d_2 \\ c_2 d_1^2 + c_2 d_2^2 - c_1 d_1 d_2 - c_2 d_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 d_2^2 - c_2 d_1 d_2 \\ c_2 d_1^2 - c_1 d_1 d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_2(c_1 d_2 - c_2 d_1) \\ -d_1(-c_2 d_1 + c_1 d_2) \end{pmatrix} = |\mathbf{d}|^2 (\mathbf{c}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}.\end{aligned}$$

Wegen $D = |c_1 d_2 - c_2 d_1| = |\mathbf{d}||\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}|$ folgt hieraus

$$\frac{\mathbf{c}\,(\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}) - \mathbf{d}\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})}{|\mathbf{d}|\,D} = \mathbf{n}\,\mathrm{sign}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}). \qquad \blacksquare$$

Beweis von Lemma A.3. Das Polynom $s^2 + \alpha s + \beta$ hat nach Definition der Diskriminante Δ keine reellen Nullstellen und damit insbesondere keine im Integrationsbereich $[-1, 1]$. Insbesondere ist $s^2 + \alpha s + \beta$ für alle $s \in \mathbb{R}$ strikt positiv. Elementares Ableiten nach s zeigt

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{2}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}} \arctan \frac{2s + \alpha}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}\right]_{s=-1}^{1}, \\ I_2 &= \frac{1}{2}\Big[\log(s^2 + \alpha s + \beta)\Big]_{s=-1}^{1} - \frac{\alpha}{2}\, I_1, \end{aligned} \tag{A.16}$$

und die Rekursionsformel ergibt sich wie folgt,

$$\begin{aligned}\frac{s^{n-1}}{s^2 + \alpha s + \beta} &= s^{n-3}\frac{s^2}{s^2 + \alpha s + \beta} = s^{n-3}\left\{1 - \frac{\alpha s}{s^2 + \alpha s + \beta} - \frac{\beta}{s^2 + \alpha s + \beta}\right\} \\ &= s^{n-3} - \alpha\frac{s^{n-2}}{s^2 + \alpha s + \beta} + \beta\frac{s^{n-3}}{s^2 + \alpha s + \beta}.\end{aligned}$$

Damit sind nur noch die Terme I_1 und I_2 aus (A.16) umzuformulieren. Mit den Rechenregeln des Logarithmus ergibt sich wie behauptet

$$I_2 = \frac{1}{2}\log\frac{1 + \alpha + \beta}{1 - \alpha + \beta} - \frac{\alpha}{2}\, I_1.$$

Um I_1 umzuschreiben, wird zunächst ausgenutzt, daß der Arcustangens eine ungerade Funktion ist, d.h. es gilt $\arctan(-t) = -\arctan(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ergibt sich aus (A.16)

$$I_1 = \frac{2}{\delta}\left\{\arctan\frac{2 + \alpha}{\delta} - \arctan\frac{-2 + \alpha}{\delta}\right\} = \frac{2}{\delta}\left\{\arctan\frac{2 + \alpha}{\delta} + \arctan\frac{2 - \alpha}{\delta}\right\}.$$

Nun wird das Additionstheorem für den Arcustangens ausgenutzt,

$$\arctan s + \arctan t = \begin{cases} \arctan\frac{s+t}{1-st}, & \text{falls } st < 1, \\ \arctan\frac{s+t}{1-st} + \pi, & \text{falls } st > 1 \text{ und } t > 0, \\ \arctan\frac{s+t}{1-st} - \pi, & \text{falls } st > 1 \text{ und } t < 0. \end{cases} \tag{A.17}$$

Mit $s := (2 + \alpha)/\delta$ und $t := (2 - \alpha)/\delta$ ergibt sich

$$st = \frac{4 - \alpha^2}{\delta^2} = \frac{4 - \alpha^2}{4\beta - \alpha^2},$$

und damit gilt die folgende Äquivalenzumformung,

$$st < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 4 - \alpha^2 < 4\beta - \alpha^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < \beta.$$

Analog gilt

$$st > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 > \beta.$$

In diesem Fall, d.h. $1 > \beta$, folgt wegen $0 > \Delta = \alpha^2 - 4\beta > \alpha^2 - 4$ umgehend $\alpha < 2$ und deshalb $t > 0$. Damit tritt der dritte Fall in (A.17) gar nicht ein. Abschließend ist nur noch $(s+t)/(1-st)$ zu berechnen,

$$\frac{s+t}{1-st} = \frac{\frac{4}{\delta}}{1 - \frac{4-\alpha^2}{\delta^2}} = \frac{4\delta}{\delta^2 - (4-\alpha^2)} = \frac{4\delta}{(4\beta - \alpha^2) - (4 - \alpha^2)} = \frac{4\delta}{4\beta - 4} = \frac{\delta}{\beta - 1}. \qquad \blacksquare$$

A.2 Integrale vom Typus des Einfachschichtpotentials

Die Visualisierung des magnetischen Potentials u_h involviert Randintegrale vom Typus des Einfachschichtpotentials

$$V := -\frac{1}{2\pi} \int_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \log|x-y| \, ds_y \tag{A.18}$$

für fixierte Vektoren $x, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$.

Satz A.4. *Sind $x, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, so gilt für das Einfachschichtpotential* (A.18)

$$V = -\frac{1}{\pi}\left\{ |\mathbf{d}|\big(\log|\mathbf{d}| - 1\big) + \frac{(\mathbf{b}-x)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} \log\frac{|\mathbf{b}-x|}{|\mathbf{d}|} - \frac{(\mathbf{a}-x)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} \log\frac{|\mathbf{a}-x|}{|\mathbf{d}|} + \frac{DJ}{2|\mathbf{d}|} \right\}$$

mit J aus Gleichung (A.4).

Der Beweis von Satz A.4 benötigt das folgende Lemma, das auch für die im nächsten Abschnitt vorgestellte Berechnung der Galerkin-Elemente herangezogen wird.

Lemma A.5 (Maischak [47, Lemma 2.2]). *Es seien $k = 0, 1$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $\Delta := b^2 - 4ac \leq 0$. Dann berechnet sich das Integral*

$$G_k(a,b,c) := \int_{-1}^{1} t^k \log(at^2 + bt + c) \, dt$$

wie folgt,

$$G_0(a,b,c) = \frac{1}{2a}\Big\{ (b+2a)\log(a+b+c) - (b-2a)\log(a-b+c) + 2\gamma\sqrt{|\Delta|} \Big\} - 4,$$
$$G_1(a,b,c) = \frac{1}{2a}\Big\{ (a+b+c)\log(a+b+c) - (a-b+c)\log(a-b+c) - b\big[2 + G_0(a,b,c)\big] \Big\},$$

wobei $\gamma = \gamma(a,b,c)$ durch

$$\gamma(a,b,c) = \begin{cases} \arctan\frac{\sqrt{|\Delta|}}{c-a} & \text{für } a < c, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a = c, \\ \pi + \arctan\frac{\sqrt{|\Delta|}}{c-a} & \text{für } a > c \end{cases}$$

gegeben sei. $\blacksquare$

Bemerkung. Im Fall $\Delta = 0$, d.h. $b^2 = 4ac$, gilt $\dfrac{(b \pm 2a)^2}{4a} = \dfrac{b^2 \pm 4ab + 4a^2}{4a} = a \pm b + c$, weshalb die in MAISCHAK [47] gegebene Darstellung mit der Darstellung hier koinzidiert. □

Beweis von Satz A.4. Mit den Notationen (A.2) aus Lemma A.1 und derselben Parametrisierung wie im vorausgegangenen Abschnitt gilt

$$\begin{aligned}
V &= -\frac{|\mathbf{d}|}{2\pi}\int_{-1}^{1}\log\Big|\frac{1}{2}\big\{\mathbf{c}+s\mathbf{d}\big\}\Big|\,ds\\
&= -\frac{|\mathbf{d}|}{4\pi}\int_{-1}^{1}\log\Big|\frac{1}{2}\big\{\mathbf{c}+s\mathbf{d}\big\}\Big|^2\,ds\\
&= -\frac{|\mathbf{d}|}{4\pi}\left\{2\log\frac{|\mathbf{d}|^2}{4}+\int_{-1}^{1}\log\Big(s^2+2\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}+\frac{|\mathbf{c}|^2}{|\mathbf{d}|^2}\Big)\,ds\right\}\\
&= -\frac{|\mathbf{d}|}{4\pi}\left\{4\big(\log|\mathbf{d}|-\log 2\big)+\int_{-1}^{1}\log\Big(s^2+2\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}+\frac{|\mathbf{c}|^2}{|\mathbf{d}|^2}\Big)\,ds\right\}
\end{aligned}$$

Mit $a = 1$, $b := \alpha = 2\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}/|\mathbf{d}|^2$ und $c := \beta = |\mathbf{c}|^2/|\mathbf{d}|^2$ läßt sich Lemma A.5 für $k = 0$ anwenden. Damit müssen nur noch die auftretenden Terme in bekannten Größen formuliert werden. Zunächst einmal gilt

$$\mathbf{c}\pm\mathbf{d} = (\mathbf{a}+\mathbf{b}-2x)\pm(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = 2\begin{cases}\mathbf{b}-x,\\ \mathbf{a}-x,\end{cases}$$

und deshalb folgt

$$\alpha\pm 2 = 2\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}\pm|\mathbf{d}|^2}{|\mathbf{d}|^2} = 2\frac{(\mathbf{c}\pm\mathbf{d})\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2} = \frac{4}{|\mathbf{d}|^2}\begin{cases}(\mathbf{b}-x)\cdot\mathbf{d},\\ (\mathbf{a}-x)\cdot\mathbf{d},\end{cases}$$

$$1\pm\alpha+\beta = \frac{1}{|\mathbf{d}|^2}\{|\mathbf{d}|^2\pm 2\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}+|\mathbf{c}|^2\} = \frac{1}{|\mathbf{d}|^2}|\mathbf{c}\pm\mathbf{d}|^2 = \frac{4}{|\mathbf{d}|^2}\begin{cases}|\mathbf{b}-x|^2,\\ |\mathbf{a}-x|^2.\end{cases}$$

Mit (A.12) gilt $\sqrt{|\Delta|} = 2D/|\mathbf{d}|^2$, und (A.13) zeigte $\frac{\sqrt{|\Delta|}}{\beta-1} = \frac{D}{2(\mathbf{a}-x)\cdot(\mathbf{b}-x)}$. Dies zeigt zum einen die behauptete Darstellung von $\gamma = J$ und zum anderen

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\log\Big(s^2+2\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}+\frac{|\mathbf{c}|^2}{|\mathbf{d}|^2}\Big)\,ds\\
&\quad= \frac{1}{2}\left\{\frac{4(\mathbf{b}-x)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\log\frac{4|\mathbf{b}-x|^2}{|\mathbf{d}|^2}-\frac{4(\mathbf{a}-x)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\log\frac{4|\mathbf{a}-x|^2}{|\mathbf{d}|^2}+\frac{4D\gamma}{|\mathbf{d}|^2}\right\}-4\\
&\quad= 4\frac{(\mathbf{b}-x)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\log\frac{2|\mathbf{b}-x|}{|\mathbf{d}|}-4\frac{(\mathbf{a}-x)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\log\frac{2|\mathbf{a}-x|}{|\mathbf{d}|}+\frac{2D\gamma}{|\mathbf{d}|^2}-4\\
&\quad= 4\frac{(\mathbf{b}-x)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\log\frac{|\mathbf{b}-x|}{|\mathbf{d}|}-4\frac{(\mathbf{a}-x)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\log\frac{|\mathbf{a}-x|}{|\mathbf{d}|}+\frac{2D\gamma}{|\mathbf{d}|^2}-4+4\log 2\Big\},
\end{aligned}$$

denn $(\mathbf{b}-x)\cdot\mathbf{d}-(\mathbf{a}-x)\cdot\mathbf{d} = |\mathbf{d}|^2$. Zusammenfassend ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
V &= -\frac{|\mathbf{d}|}{4\pi}\left\{4\log|\mathbf{d}|-4+4\frac{(\mathbf{b}-x)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\log\frac{|\mathbf{b}-x|}{|\mathbf{d}|}-4\frac{(\mathbf{a}-x)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\log\frac{|\mathbf{a}-x|}{|\mathbf{d}|}+\frac{2D\gamma}{|\mathbf{d}|^2}\right\}\\
&= -\frac{1}{\pi}\left\{|\mathbf{d}|\big(\log|\mathbf{d}|-1\big)+\frac{(\mathbf{b}-x)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}\log\frac{|\mathbf{b}-x|}{|\mathbf{d}|}-\frac{(\mathbf{a}-x)\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}\log\frac{|\mathbf{a}-x|}{|\mathbf{d}|}+\frac{DJ}{2|\mathbf{d}|}\right\}.
\end{aligned}$$

■

A.3 Galerkin-Elemente für die Symmsche Integralgleichung

Satz A.6. *Gegeben seien Vektoren* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$ *mit* $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ *und* $\mathbf{c} \neq \mathbf{d}$. *Zu berechnen ist das zugehörige Galerkin-Element*

$$I := -\frac{1}{2\pi} \int_{[a,b]} \int_{[c,d]} \log|x-y| \, ds_y \, ds_x.$$

Mit den Vektoren

$$\mathbf{x} := \frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a}), \quad \mathbf{y} := \frac{1}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{d}) \quad \textit{und} \quad \mathbf{z} := \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d})$$

läßt sich dann I *wie folgt berechnen: Sind* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *linear abhängig, so existiert ein Skalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *mit* $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$, *und es gilt*

$$I = -\frac{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}{2\pi} \Big\{ J_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}+\mathbf{y}) + J_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}-\mathbf{y}) + \lambda \big[J_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}-\mathbf{x}) - J_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}+\mathbf{x}) \big] \Big\}. \tag{A.19}$$

Sind $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *linear unabhängig, so existieren Skalare* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *mit* $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}$, *und es gilt*

$$I = -\frac{|x||y|}{2\pi} \Big\{ \tfrac{(\lambda+1)J_0(\mathbf{y},\mathbf{z}+\mathbf{x}) - (\lambda-1)J_0(\mathbf{y},\mathbf{z}-\mathbf{x}) + (\mu+1)J_0(\mathbf{x},\mathbf{z}+\mathbf{y}) - (\mu-1)J_0(\mathbf{x},\mathbf{z}-\mathbf{y})}{2} - 2 \Big\}. \tag{A.20}$$

Dabei werden die $J_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *für Vektoren* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ *definiert durch*

$$J_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \int_{-1}^{1} t^k \, \log|t\mathbf{x} + \mathbf{y}| \, dt. \tag{A.21}$$

Bemerkung. Mit $a := |\mathbf{x}|^2$, $b := 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ und $c := |\mathbf{y}|^2$ gilt offensichtlich

$$J_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t^k \log(at^2 + bt + c) \, dt,$$

d.h. die Berechnung der Galerkin-Elemente bedarf, wie Satz A.6 zeigt, der Berechnung von

$$G_k(a, b, c) := \int_{-1}^{1} t^k \log(at^2 + bt + c) \, dt$$

für $k = 0, 1$ sowie Skalare $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, c > 0$ und $\Delta := 4ac - b^2 \geq 0$, siehe Lemma A.5. □.

Der wesentliche Trick, um die Galerkin-Elemente zu berechnen, liegt in dem folgenden Lemma. Dabei bezeichnen natürlich ∂_s und ∂_t die partiellen Ableitungen nach s bzw. t. Der Beweis erfolgt durch elementares Rechnen, wobei die zweite Gleichung aus $\nabla \log|x| = x/|x|^2$, also $x \cdot \nabla \log|x| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$, gewonnen wird, siehe Maischak [47, Seite 7ff.].

Lemma A.7. *Für* $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ *und* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *gelten*

$$\lambda \partial_s \log\big|(s+\lambda t)x + z\big| = \partial_t \log\big|(s+\lambda t)x + z\big|. \tag{A.22}$$

sowie

$$\big((s+\lambda)\partial_s + (t+\mu)\partial t\big) \, \log\big|(s+\lambda)x + (t+\mu)y\big| = 1. \quad \blacksquare \tag{A.23}$$

Beweis von Satz A.6. Wie in Abschnitt A.1 betrachte die Parametrisierungen

$$[-1,1] \to [\mathbf{a},\mathbf{b}], s \mapsto \frac{1}{2}\big\{\mathbf{a}+\mathbf{b}+s(\mathbf{b}-\mathbf{a})\big\} \quad \text{und} \quad [-1,1] \to [\mathbf{c},\mathbf{d}], t \mapsto \frac{1}{2}\big\{\mathbf{c}+\mathbf{d}+t(\mathbf{d}-\mathbf{c})\big\}.$$

Dann folgt erst einmal

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2\pi}\frac{|\mathbf{b}-\mathbf{a}|}{2}\frac{|\mathbf{d}-\mathbf{c}|}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\log\Big|\frac{1}{2}\big\{\mathbf{a}+\mathbf{b}+s(\mathbf{b}-\mathbf{a})\big\}-\frac{1}{2}\big\{\mathbf{c}+\mathbf{d}+t(\mathbf{d}-\mathbf{c})\big\}\Big|\,dt\,ds \\ &= -\frac{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\log|s\mathbf{x}+t\mathbf{y}+\mathbf{z}|\,dt\,ds. \end{aligned}$$

Jetzt sind die beiden Fällen zu unterscheiden, daß $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ linear abhängig bzw. linear unabhängig ist. Zunächst sei vorausgesetzt, $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$ sei linear abhängig. Dann existiert wegen $\mathbf{x} \neq 0$ ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$, also

$$\log|s\mathbf{x}+t\mathbf{y}+\mathbf{z}| = \log|(s+\lambda t)\mathbf{x}+\mathbf{z}|.$$

Mit partieller Integration und Gleichung (A.22) aus Lemma A.7 folgt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}\log|s\mathbf{x}+t\mathbf{y}+\mathbf{z}|\,dt &= \int_{-1}^{1}\log|(s+\lambda t)\mathbf{x}+\mathbf{z}|\,dt \\ &= \Big[t\log|(s+\lambda t)\mathbf{x}+\mathbf{z}|\Big]_{t=-1}^{1} - \int_{-1}^{1} t\,\partial_t\log|(s+\lambda t)\mathbf{x}+\mathbf{z}|\,dt \\ &= \log|(s+\lambda)\mathbf{x}+\mathbf{z}| + \log|(s-\lambda)\mathbf{x}+\mathbf{z}| - \lambda\int_{-1}^{1} t\,\partial_s\log|(s+\lambda t)\mathbf{x}+\mathbf{z}|\,dt. \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Tonelli-Fubini folgt bei Integration des letzten Summanden

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} t\,\partial_s\log|(s+\lambda t)\mathbf{x}+\mathbf{z}|\,dt\,ds &= \int_{-1}^{1} t\,\underbrace{\int_{-1}^{1}\partial_s\log|(s+\lambda t)\mathbf{x}+\mathbf{z}|\,ds}_{=[\log|(s+\lambda t)\mathbf{x}+\mathbf{z}|]_{s=-1}^{1}}\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} t\log|(\lambda t+1)\mathbf{x}+\mathbf{z}|\,dt - \int_{-1}^{1} t\log|(\lambda t-1)\mathbf{x}+\mathbf{z}|\,dt. \end{aligned}$$

Rückeinsetzen $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$ liefert zusammenfassend

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\log|s\mathbf{x}+t\mathbf{y}+\mathbf{z}|\,dt\,ds &= \int_{-1}^{1}\log|(s+\lambda)\mathbf{x}+\mathbf{z}|\,ds + \int_{-1}^{1}\log|(s-\lambda)\mathbf{x}+\mathbf{z}|\,ds \\ &\quad - \lambda\int_{-1}^{1} t\log|(\lambda t+1)\mathbf{x}+\mathbf{z}|\,dt + \lambda\int_{-1}^{1} t\log|(\lambda t-1)\mathbf{x}+\mathbf{z}|\,dt \\ &= \int_{-1}^{1}\log|s\mathbf{x}+(\mathbf{z}+\mathbf{y})|\,ds + \int_{-1}^{1}\log|s\mathbf{x}+(\mathbf{z}-\mathbf{y})|\,ds \\ &\quad - \lambda\int_{-1}^{1} t\log|t\mathbf{y}+(\mathbf{z}+\mathbf{x})|\,dt + \lambda\int_{-1}^{1} t\log|t\mathbf{y}+(\mathbf{z}-\mathbf{x})|\,dt. \end{aligned}$$

Mit der oben eingeführten Notation ergibt sich in diesem Fall

$$I = -\frac{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}{2\pi}\Big\{J_0(\mathbf{x},\mathbf{z}+\mathbf{y}) + J_0(\mathbf{x},\mathbf{z}-\mathbf{y}) + \lambda\big[J_1(\mathbf{y},\mathbf{z}-\mathbf{x}) - J_1(\mathbf{y},\mathbf{z}+\mathbf{x})\big]\Big\}.$$

Nun betrachte den Fall, daß $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ linear unabhängig ist. Dann existieren Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$. Mit Gleichung (A.23) aus Lemma A.7 ergibt sich

$$\begin{aligned} 4 &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \big((s+\lambda)\partial_s + (t+\mu)\partial t\big) \log\big|(s+\lambda)\mathbf{x} + (t+\mu)y\big| \, ds\, dt \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (s+\lambda)\partial_s \log|(s+\lambda)\mathbf{x} + (t+\mu)\mathbf{y}| \, ds\, dt \\ &\quad + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (t+\mu)\partial_t \log|(s+\lambda)\mathbf{x} + (t+\mu)\mathbf{y}| \, dt\, ds, \end{aligned} \tag{A.24}$$

wobei der Satz von Fubini-Tonelli angewandt wurde. Partielle Integration zeigt jeweils für die inneren Integrale

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (s+\lambda)\partial_s \log|(s+\lambda)\mathbf{x} + (t+\mu)\mathbf{y}| \, ds &= \Big[(s+\lambda)\log|(s+\lambda)\mathbf{x} + (t+\mu)\mathbf{y}|\Big]_{s=-1}^{1} \\ &\quad - \int_{-1}^{1} \log|(s+\lambda)\mathbf{x} + (t+\mu)\mathbf{y}| \, ds, \\ \int_{-1}^{1} (t+\mu)\partial_t \log|(s+\lambda)\mathbf{x} + (t+\mu)\mathbf{y}| \, dt &= \Big[(t+\mu)\log|(s+\lambda)\mathbf{x} + (t+\mu)\mathbf{y}|\Big]_{t=-1}^{1} \\ &\quad - \int_{-1}^{1} \log|(s+\lambda)\mathbf{x} + (t+\mu)\mathbf{y}| \, dt. \end{aligned}$$

Damit gilt zum Beispiel für den ersten Summanden aus (A.24)

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (s+\lambda)\partial_s \log|(s+\lambda)\mathbf{x} + (t+\mu)\mathbf{y}| \, ds\, dt \\ &\quad = \int_{-1}^{1} \Big[(s+\lambda)\log|(s+\lambda)\mathbf{x} + (t+\mu)\mathbf{y}|\Big]_{s=-1}^{1} dt - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \log|(s+\lambda)\mathbf{x} + (t+\mu)\mathbf{y}| \, ds\, dt \\ &\quad = (\lambda+1)\int_{-1}^{1} \log|(\lambda+1)\mathbf{x} + (t+\mu)\mathbf{y}| \, dt - (\lambda-1)\int_{-1}^{1} \log|(\lambda-1)\mathbf{x} + (t+\mu)\mathbf{y}| \, dt \\ &\qquad - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \log|(s+\lambda)\mathbf{x} + (t+\mu)\mathbf{y}| \, ds\, dt \end{aligned}$$

Mit Rückeinsätzen von $s\mathbf{x} + t\mathbf{y} + \mathbf{z} = (s+\lambda)\mathbf{x} + (t+\mu)\mathbf{y}$ folgt

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (s+\lambda)\partial_s \log|(s+\lambda)\mathbf{x} + (t+\mu)\mathbf{y}| \, ds\, dt \\ &\quad = (\lambda+1)\int_{-1}^{1} \log|t\mathbf{y} + (\mathbf{z}+\mathbf{x})| \, dt - (\lambda-1)\int_{-1}^{1} \log|t\mathbf{y} + (\mathbf{z}-\mathbf{x})| \, dt \\ &\qquad - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \log|s\mathbf{x} + t\mathbf{y} + \mathbf{z}| \, ds\, dt \\ &\quad = (\lambda+1)J_0(\mathbf{y}, \mathbf{z}+\mathbf{x}) - (\lambda-1)J_0(\mathbf{y}, \mathbf{z}-\mathbf{x}) - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \log|s\mathbf{x} + t\mathbf{y} + \mathbf{z}| \, ds\, dt. \end{aligned} \tag{A.25}$$

Analoges Vorgehen bzw. Vertauschen von $(s, \lambda, \mathbf{x})$ durch $(t, \mu, \mathbf{y})$ zeigt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}&(t+\mu)\partial_t \log|(s+\lambda)\mathbf{x}+(t+\mu)\mathbf{y}|\,dt\,ds\\ &= (\mu+1)J_0(\mathbf{x},\mathbf{z}+\mathbf{y}) - (\mu-1)J_0(\mathbf{x},\mathbf{z}-\mathbf{y}) - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\log|s\mathbf{x}+t\mathbf{y}+\mathbf{z}|\,ds\,dt.\end{aligned} \tag{A.26}$$

Setzt man (A.25) und (A.26) in Gleichung (A.24) ein, so liefert einfaches Umstellen schließlich

$$\begin{aligned}2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\log|s\mathbf{x}+t\mathbf{y}+\mathbf{z}|\,ds\,dt &= (\lambda+1)J_0(\mathbf{y},\mathbf{z}+\mathbf{x}) - (\lambda-1)J_0(\mathbf{y},\mathbf{z}-\mathbf{x})\\ &\quad + (\mu+1)J_0(\mathbf{x},\mathbf{z}+\mathbf{y}) - (\mu-1)J_0(\mathbf{x},\mathbf{z}-\mathbf{y}) - 4\end{aligned}$$

und damit

$$I = -\frac{|x||y|}{2\pi}\left\{\frac{(\lambda+1)J_0(\mathbf{y},\mathbf{z}+\mathbf{x})-(\lambda-1)J_0(\mathbf{y},\mathbf{z}-\mathbf{x})+(\mu+1)J_0(\mathbf{x},\mathbf{z}+\mathbf{y})-(\mu-1)J_0(\mathbf{x},\mathbf{z}-\mathbf{y})}{2} - 2\right\}. \qquad \blacksquare$$

Anhang B

Analytische Berechnung der auftretenden Randintegrale im Fall $d = 3$

Bemerkung. Der vorliegende Anhang beschäftigt sich mit der exakten Berechnung der aufgetretenen Randintegrale. Wie bereits im Text angemerkt, sind diese im Kontext der Randelementmethode bereits wohlbekannt. Der Anhang folgt der Darstellung in Maischak [48]. Eine alternative Darstellung für die Berechnung der Einträge von $\mathbf{A}$ findet sich in Hackbusch [34]. □

Definition . Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Teilmenge und $F, f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. In den folgenden Abschnitten wird genau dann die Schreibweise

$$F = \int dx_1 \ldots \int dx_d \, f(x_1, \ldots, x_d)$$

und F als *Stammfunktion von* f bezeichnet, wenn

$$\frac{\partial}{\partial x_d} \cdots \frac{\partial}{\partial x_1} F = f \quad \text{in } \Omega$$

gilt. Dabei schließt diese Schreibweise die Existenz *und Stetigkeit* aller auftretenden partiellen Ableitungen mit ein.

Beispiel. Ist $\Omega = (a, b) \times (c, d)$ und $F = \int dx_1 \int dx_2 f(x_1, x_2)$, so gilt – stets $f \in L^1(\Omega)$ vorausgesetzt, damit der Satz Tonelli-Fubini angewendet werden kann – nach Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x_1, x_2) \, d(x_1, x_2) &= \int_a^b \int_c^d \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} F(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1 \\
&= \int_a^b \Big(\frac{\partial F}{\partial x_1} F(x_1, d) - \frac{\partial F}{\partial x_1} F(x_1, c) \Big) \, dx_1 \\
&= F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c).
\end{aligned}$$

B.1 Integrale vom Typus des Doppelschichtpotentials

Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der Berechnung von Randintegralen der Gestalt

$$\int_E \frac{x - y}{|x - y|^3} \, ds_y \in \mathbb{R}^3 \tag{B.1}$$

für eine gegebene beschränkte, achsenorientierte, rechteckige Seite $E = (a, b) \times (c, d) \times \{y_3\}$ und $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{E}$. Die Berechnung erfolgt komponentenweise. Zunächst einmal gilt es festzuhalten, daß der Integrand auf E stetig und beschränkt ist, so daß das (Rand-) Integral in $\mathbb{R}^3$ existiert. Für die *erste Komponente* des Integrals gilt

$$\int_E \frac{x_1 - y_1}{|x - y|^3}\, ds_y = -\int_E \frac{\partial}{\partial y_1} |x - y|^{-1}\, ds_y = -\int_c^d \int_a^b \frac{\partial}{\partial y_1} |x - y|^{-1}\, dy_1\, dy_2 \tag{B.2}$$

Eine Stammfunktion für die rechte Seite der vorausgegangenen Gleichung ist mit Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

$$\begin{aligned} \int dy_2 \int dy_1 \frac{\partial}{\partial y_1} |x - y|^{-1} &= \int dy_2 |x - y|^{-1} \\ &= \int dy_2 \big\{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2\big\}^{-1/2}, \end{aligned}$$

und dies reduziert das Problem darauf, die Stammfunktion

$$g(p\,; y\,; x, \lambda) := \int dy \big\{(x - y)^2 + \lambda^2\big\}^p$$

zu berechnen für $p = -1/2$, $y = y_2$, $x = x_2$, $\lambda := \{(x_1 - y_1)^2 + (x_3 - y_3)\}^{1/2}$. Mit dieser Notation gilt also

$$\int dy_2 \int dy_1 \frac{\partial}{\partial y_1} |x - y|^{-1} = g(-1/2\,; y_2\,; x_2, \{(x_1 - y_1)^2 + (x_3 - y_3)\}^{1/2}). \tag{B.3}$$

Analog folgt für die *zweite Komponente*

$$\int_E \frac{x_2 - y_2}{|x - y|^3}\, ds_y = -\int_a^b \int_c^d \frac{\partial}{\partial y_2} |x - y|^{-1}\, dy_1\, dy_2, \tag{B.4}$$

und dies führt auf die Stammfunktion

$$\int dy_1 \int dy_2 \frac{\partial}{\partial y_1} |x - y|^{-1} = g(-1/2\,; y_1\,; x_1, \{(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)\}^{1/2}). \tag{B.5}$$

Lemma B.1. *Für beliebige Skalare $x \in \mathbb{R}$ und $p \neq -1/2$ sowie die Veränderliche $y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(2p + 1)\, g(p\,; y\,; x, 0) = (y - x)|y - x|^{2p},$$

sofern x im Fall $p < -1/2$ außerhalb des Integrationsbereichs liegt. Für $p = -1/2$ und $x \in \mathbb{R}$ wieder außerhalb des betrachteten Integrationsbereichs gilt

$$g(-1/2\,; y\,; x, 0) = \int dy |x - y|^{-1} = \operatorname{sign}(y - x)\, \log |y - x|. \qquad \blacksquare$$

Lemma B.2 (Maischak [48, Seite 3, Gleichungen (12), (13)]). *Für beliebige $x, p, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$ gilt die Rekursionsformel*

$$(2p + 1)\, g(p\,; y\,; x, \lambda) = (y - x)\{(y - x)^2 + \lambda^2\}^p + 2p\lambda^2\, g(p - 1\,; y\,; x, \lambda).$$

Für $p \in \{1/2, 0, -1/2, -1, -3/2\}$ gilt explizit

$$\begin{aligned}
g(1/2\,;y\,;x,\lambda) &= \frac{y-x}{2}\{(y-x)^2+\lambda^2\}^{1/2} + \frac{\lambda^2}{2}\operatorname{arsinh}\frac{y-x}{|\lambda|},\\
g(0\,;y\,;x,\lambda) &= y-x,\\
g(-1/2\,;y\,;x,\lambda) &= \operatorname{arsinh}\frac{y-x}{|\lambda|},\\
g(-1\,;y\,;x,\lambda) &= \arctan\frac{y-x}{|\lambda|},\\
g(-3/2\,;y\,;x,\lambda) &= \frac{y-x}{\lambda^2}\{(y-x)^2+\lambda^2\}^{-1/2}.
\end{aligned}$$

■

Mit den vorausgegangenen beiden Lemmata können erste und zweite Komponente des Integrals (B.1) berechnet werden. Die Berechnung der *dritten Komponente* gestaltet sich schwieriger,

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{x_3-y_3}{|x-y|^3}\,ds_y &= (x_3-y_3)\int_E \frac{1}{|x-y|^3}\,ds_y\\
&= (x_3-y_3)\int_a^b\int_c^d \big\{((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\big\}^{-1/2}\,dy_2\,dy_1.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Damit ist also eine zweidimensionale Stammfunktion zu bestimmen,

$$G(-3/2\,;y_1,y_2\,;x_1,x_2,\lambda) := \int dy_1 \int dy_2 \big\{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\lambda^2\big\}^{-3/2}$$

mit $\lambda := |x_3-y_3|$.

Lemma B.3 (Maischak [48, Seiten 5f, Gleichung (17)]). *Für Parameter $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und Variable $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gilt unter der Bedingung, daß der Integrand $\{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2\}^{-3/2}$ keine Polstelle im Integrationsbereich hat*

$$G(-3/2\,;y_1,y_2\,;x_1,x_2,0) = -\frac{\{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2\}^{1/2}}{(y_1-x_1)(y_2-x_2)}.$$

Im Fall $\lambda \neq 0$ gilt stets

$$\begin{aligned}
&G(-3/2\,;y_1,y_2\,;x_1,x_2,\lambda)\\
&\quad= \frac{\operatorname{sign}\{(y_1-x_1)(y_2-x_2)\}}{2|\lambda|}\arccos\Big(\frac{-2(y_1-x_1)^2(y_2-x_2)^2}{\{(y_1-x_1)^2+\lambda^2\}\{(y_2-x_2)^2+\lambda^2\}}+1\Big).
\end{aligned}$$

■

B.2 Integrale vom Typus des Einfachschichtpotentials

Der zweite Abschnitt behandelt die analytische Berechnung von Randintegralen der Gestalt

$$\int_E \frac{1}{|x-y|}\,ds_y = \int_a^b\int_c^d \big\{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\big\}^{-1/2} \in \mathbb{R} \tag{B.7}$$

für eine gegebene beschränkte, achsenorientierte, rechteckige Seite $E = (a,b)\times(c,d)\times\{y_3\}$ und $x \in \mathbb{R}^3$. Damit ist die Stammfunktion

$$G(-1/2\,;y_1,y_2\,;x_1,x_2,\lambda) := \int dy_1 \int dy_2 \big\{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\lambda^2\big\}^{-1/2}$$

für $\lambda := |x_3-y_3|$ zu berechnen.

Lemma B.4 (Maischak [48, Seite 4, Gleichung (14)]). *Für Konstanten $x_1, x_2, \lambda \in \mathbb{R}$ und Veränderliche $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned}(2p+2)G(p\,;y_1,y_2\,;x_1,x_2,\lambda) =& 2p\lambda^2\, G(p-1\,;y_1,y_2\,;x_1,x_2,\lambda)\\ &+ (y_1-x_1)\, g(p\,;y_2,x_2,\{(y_1-x_1)^2+\lambda^2\}^{1/2})\\ &+ (y_2-x_2)\, g(p\,;y_1,x_1,\{(y_2-x_2)^2+\lambda^2\}^{1/2}),\end{aligned}$$

und im Fall $p = -1/2$ kann die rechte Seite kann mittels Lemma B.3 berechnet werden. ■

B.3 Galerkin-Elemente für die Symmsche Integralgleichung

Es seien $E, \widetilde{E} \subseteq \mathbb{R}^3$ zwei beschränkte, achsenorientierte, rechteckige Seiten in $\mathbb{R}^3$. Geometrisch betrachtet, sind genau zwei Fälle zu untersuchen, ob nämlich die Normalen $\mathbf{n}_E$ und $\mathbf{n}_{\widetilde{E}}$ auf E und $\widetilde{E}$ linear abhänging sind oder orthogonal auf einander stehen.

1. Fall: Die Normalenvektoren $\mathbf{n}_E$ und $\mathbf{n}_{\widetilde{E}}$ sind linear abhängig. Dann gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit, d.h. bis auf Vertauschung der Koordinatenachsen,

$$E = \mathbf{v} + \big[(0,\ell_1)\times(0,\ell_2)\times\{0\}\big] \quad \text{und} \quad \widetilde{E} = \widetilde{\mathbf{v}} + \big[(0,\widetilde{\ell}_1)\times(0,\widetilde{\ell}_2)\times\{0\}\big]$$

mit Vektoren $\mathbf{v}, \widetilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ und Skalaren $\ell_1, \ell_2, \widetilde{\ell}_1, \widetilde{\ell}_2 > 0$. Mit der Definition $\boldsymbol{\delta} := \widetilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ und dem Satz von Fubini gilt dann

$$\begin{aligned}S(E,\widetilde{E}) :&= -\frac{1}{4\pi}\int_E\int_{\widetilde{E}} \frac{1}{|x-y|}\,ds_y\,ds_x\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_E\int_{\widetilde{E}} \big\{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\big\}^{-1/2}\,ds_y\,ds_x\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\int_0^{\widetilde{\ell}_1}\int_0^{\widetilde{\ell}_2} \big\{\big((x_1+v_1)-(y_1+\widetilde{v}_1)\big)^2+\big((x_2+v_2)-(y_2+\widetilde{v}_2)\big)^2\\ &\qquad\qquad + \big(v_3-\widetilde{v}_3\big)^2\big\}^{-1/2}\,dy_2\,dy_1\,dx_2\,dx_1\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\int_0^{\widetilde{\ell}_1}\int_0^{\widetilde{\ell}_2} \big\{(x_1-y_1-\delta_1)^2+(x_2-y_2-\delta_2)^2+\delta_3^2\big\}^{-1/2}\,dy_2\,dy_1\,dx_2\,dx_1.\end{aligned}$$

Damit ist das Problem darauf reduziert, für fixe Parameter $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ die Stammfunktion

$$\begin{aligned}&F(x_1,x_2,y_1,y_2\,;\delta_1,\delta_2,\delta_3)\\ &\quad := \int dx_1\int dx_2\int dy_1\int dy_2 \big\{(x_1-y_1-\delta_1)^2+(x_2-y_2-\delta_2)^2+\delta_3^2\big\}^{1/2} \quad \text{auf ganz } \mathbb{R}^4\end{aligned}$$

zu berechnen, vgl. Maischak [48, Seite 1, Gleichung (1)].

Lemma B.5 (Maischak [48, Seite 13, Gleichung (40)]). *Für beliebige Skalare $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$ und Veränderliche $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gilt global auf $\mathbb{R}^4$*

$$\begin{aligned}&F(x_1,x_2,y_1,y_2\,;\delta_1,\delta_2,\delta_3)\\ &\quad = +(x_1-y_1-\delta_1)(x_2-y_2-\delta_2)\,G(-1/2\,;x_1,x_2\,;y_1+\delta_1,y_2+\delta_2,\delta_3)\\ &\qquad -(x_1-y_1-\delta_1)\,g(1/2\,;x_1\,;y_1+\delta_1,\{(x_2-y_2-\delta_2)^2+\delta_3^2\}^{1/2})\\ &\qquad -(x_2-y_2-\delta_2)\,g(1/2\,;x_2\,;y_2+\delta_2,\{(x_1-y_1-\delta_1)^2+\delta_3^2\}^{1/2})\\ &\qquad +\frac{1}{3}\big\{(x_1-y_1-\delta_1)^2+(x_2-y_2-\delta_2)^2+\delta_3^2\big\}^{3/2},\end{aligned}$$

und die auftretenden Terme können mit Lemma B.1, B.2 und B.4 rekursiv berechnet werden. ■

2. Fall: Die Normalenvektoren $\mathbf{n}_E$ und $\mathbf{n}_{\widetilde{E}}$ sind orthogonal. Dann gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit $E = \mathbf{v} + \big[(0,\ell_1) \times (0,\ell_2) \times \{0\}\big]$ und $\widetilde{E} = \widetilde{\mathbf{v}} + \big[\{0\} \times (0,\widetilde{\ell}_2) \times (0,\widetilde{\ell}_3)\big]$ mit Vektoren $\mathbf{v}, \widetilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ und Skalaren $\ell_1, \ell_2, \widetilde{\ell}_2, \widetilde{\ell}_3 > 0$. Mit der Definition $\delta := \widetilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ und dem Satz von Fubini gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned}
S(E,\widetilde{E}) :&= -\frac{1}{4\pi}\int_E\int_{\widetilde{E}} \frac{1}{|x-y|}\,ds_y\,ds_x \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_E\int_{\widetilde{E}} \big\{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\big\}^{-1/2}\,ds_y\,ds_x \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\int_0^{\widetilde{\ell}_2}\int_0^{\widetilde{\ell}_3} \big\{\big((x_1+v_1)-\widetilde{v}_1\big)^2+\big((x_2+v_2)-(y_2+\widetilde{v}_2)\big)^2 \\
&\qquad\qquad + \big(v_3-(y_3+\widetilde{v}_3)\big)^2\big\}^{-1/2}\,dy_3\,dy_2\,dx_2\,dx_1 \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\ell_1}\int_0^{\ell_2}\int_0^{\widetilde{\ell}_2}\int_0^{\widetilde{\ell}_3} \big\{(x_1-\delta_1)^2+(x_2-y_2-\delta_2)^2+(y_3+\delta_3)^2\big\}^{-1/2}\,dy_3\,dy_2\,dx_2\,dx_1.
\end{aligned}$$

Damit reduziert sich dies ebenfalls auf die analytische Berechnung einer Stammfunktion,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{F}(x_1,x_2,y_2,y_3\,;\delta_1,\delta_2,\delta_3) \\
&\quad := \int dx_1 \int dx_2 \int dy_2 \int dy_3 \big\{(x_1-\delta_1)^2+(x_2-y_2-\delta_2)^2+(y_3+\delta_3)^2\big\}^{1/2} \quad \text{auf ganz } \mathbb{R}^4,
\end{aligned}$$

vgl. Maischak [48, Seite 1, Gleichung (2)].

Lemma B.6 (Maischak [48, Seite 14, Gleichung (41)]). *Für beliebige Skalare $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$ und Veränderliche $x_1, x_2, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ gilt global auf $\mathbb{R}^4$*

$$\begin{aligned}
&2\widetilde{F}(x_1,x_2,y_2,y_3\,;\delta_1,\delta_2,-\delta_3) \\
&\quad = -\,G(1/2\,;y_3,x_1;-\delta_3,\delta_1,x_2-y_2-\delta_2) \\
&\qquad -(x_1-\delta_1)(x_2-y_2-\delta_2)\,G(-1/2\,;x_2,y_3\,;y_2+\delta_2,-\delta_3,x_1-\delta_1) \\
&\qquad +(x_1-\delta_1)\,g(1/2\,;y_3\,;-\delta_3,\{(x_1-\delta_1)^2+(x_2-y_2-\delta_2)^2\}^{1/2}) \\
&\qquad -(y_3+\delta_3)(x_2-y_2-\delta_2)\,G(-1/2\,;x_1,x_2\,;\delta_1,y_2+\delta_2,-y_3-\delta_3) \\
&\qquad +(y_3+\delta_3)\,g(1/2\,;x_1\,;\delta_1,\{(x_2-y_2-\delta_2)^2+(y_3+\delta_3)^2\}^{1/2}).
\end{aligned}$$

■

Literaturverzeichnis

[1] S. Agmon: *Elliptic Boundary Value Problems*, Princeton 1965.

[2] J. Alberty, C. Carstensen: *Averaging techniques for reliable a posteriori FE-error control in elastoplasticity with hardening*, Comput.Math. (accepted).

[3] J.M. Ball: *A Version of the Fundamental Theorem for Young Measures*, in *PDEs and Continuum Models of Phase Transition* by M. Rascle, D. Serre, M. Slemrod (eds.), Lecture Notes in Physics 344, Springer, Berlin 1989, 207-215.

[4] J. Bergh, J. Löfström: *Interpolation Spaces*, vol. 223 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer Verlag, Berlin u.a. 1976.

[5] S. Bartels, C. Carstensen, S. Jansche: *A Posteriori Estimates for Nonconforming Finite Element Methods*, Numer. Math. 92 (2002), 233-256.

[6] S. Bartels, C. Carstensen: *Each Averaging Technique Yields Reliable A Posteriori Error Control in FEM on Unstructured Grids, Part I: Low Order Conforming, Nonconforming, and Mixed FEM*, Math. Comput. 71 (2002), 945-969.

[7] S. Bartels, C. Carstensen: *Each Averaging Technique Yields Reliable A Posteriori Error Control in FEM on Unstructured Grids, Part II: Higher Order FEM*, Math. Comput. 71 (2002), 971-994.

[8] S. Bartels, C. Carstensen: *Averaging Techniques Yield Reliable A Posteriori Finite Element Error Control for Obstacle Problems*, Numer. Math. (to appear).

[9] K.J. Bathe: *Finite Elemente Methoden*, Springer Verlag, Berlin u.a., 1986.

[10] S. Börm, L. Grasedyck, W. Hackbusch: *Introduction to Hierarchical Matrices with Applications*, Preprint 18/2002, Max-Planck-Institute for Mathematics in the Sciences, Leipzig 2002.

[11] S.C. Brenner, L.R. Scott: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer Verlag, Berlin u.a. 1994.

[12] W.F. Brown: *Magnetostatic Interactions*, North-Holland, Amsterdam 1952.

[13] W.F. Brown: *Micromagnetics*, Interscience 1963.

[14] W.F. Brown: *Magnetostatic Principles in Ferromagnetism*, Springer, New York 1966.

[15] C. Carstensen, private communication.

[16] C. Carstensen: *Finite Elemente Methoden*, Skript zur Vorlesung an der CAU Kiel, Sommersemester 2001.

[17] C. Carstensen, S.A. Funken: *Adaptive Coupling of Penalised Finite Element Methods and Boundary Element Methods for Relaxed Micromagnetics*, in preparation.

[18] C. Carstensen, S.A. Funken: *Averaging Technique for FE-A Posteriori Error Control in Elasticity, Part I: Conforming FEM*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 190 (2001), 2483-2498.

[19] C. Carstensen, S.A. Funken: *Averaging Technique for FE-A Posteriori Error Control in Elasticity, Part II: λ-independent estimates*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 190 (2001), 4663-4675.

[20] C. Carstensen, S.A. Funken: *Averaging Technique for A Posteriori Error Control in Elasticity, Part III: Locking-free nonconforming FEM*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 191 (2001), 861-877.

[21] C. Carstensen, M. Maischak, E.P. Stephan: *A Posteriori Error Estimate and h-Adaptive Algorithm on Surfaces for Symm's Integral Equation*, Numer. Math. 90 (2001), 197-213.

[22] C. Carstensen, M. Maischak, D. Praetorius, E.P. Stephan: *Residual Based A Posteriori Error Estimate for Hypersingular Equation on Surfaces*, submitted to Numer. Math. (2002).

[23] C. Carstensen, D. Praetorius: *A Posteriori Error Control in Adaptive Qualocation Boundary Element Analysis for a Logarithmic-Kernel Integral Equation of the First Kind*, SIAM J.Sci.Comp. (to appear).

[24] C. Carstensen, A. Prohl: *Numerical Analysis of Relaxed Micrmagnetics by Penalised Finite Elements*, Numer. Math. 90 (2001), 65-99.

[25] B. Dacorogna: *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer Verlag, Berlin u.a. 1989.

[26] A. DeSimone: *Energy Minimizers for Large Ferromagnetic Bodies*, Arch. Rational Mech. Anal. 125 (1993), 99-143.

[27] I. Ekeland, R. Temam: *Convex Analysis and Variational Problems*, North Holland, Amsterdam 1976.

[28] O. Forster: *Analysis 3*, Vieweg Verlag, Braunschweig ^{3}1993.

[29] S.A. Funken, A. Prohl: *On Stabilized Finite Element Methods in Relaxed Micromagnetism*, Berichtsreihe des Math.Sem. Kiel **00-02** (2000), `http://www.numerik.uni-kiel.de/reports/1999/99-18.html`.

[30] G.P. Galdi: *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*, Springer Verlag, Berlin u.a. 1994.

[31] V. Girault, P.-A. Raviart: *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer Verlag, Berlin u.a. 1986.

[32] D. Gilbarg, N.S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, vol. 224 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer Verlag, Berlin u.a. 1977.

[33] L. Grasedyck: *Theorie und Anwendungen Hierarchischer Matrizen*, Dissertation, Christian-Albrechts-Universität, Kiel 2001.

[34] W. Hackbusch: *Direct Integration of the Newton Potential Over Cubes Including a Program Description*, Preprint 68/2001, Max-Planck-Institute for Mathematics in the Sciences, Leipzig 2001.

[35] W. Hackbusch, M. Melenk: *$\mathcal{H}$-Matrix Treatment of the Operator* $\nabla\Delta^{-1}$ div, in preparation (2001).

[36] A. Hubert, R. Schäfer: *Magnetic Domains*. Springer 1998.

[37] R.D. James, D. Kinderlehrer: *An Example of Frustration in a Ferromagnetic Material*, in *Defects, Singularities, and Patterns in Nematic Liquid Crystals: Mathematical and Physical Aspects*, NATO Meeting Series, J.M. Coron, F. Helein, J.M. Ghidaglia (eds), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1990, 201-221.

[38] R.D. James, D. Kinderlehrer: *Frustration in Ferromagnetic Materials*, Continuum Mech. Thermondyn. 2 (1990), 215-239.

[39] K. Königsberger *Analysis 2*, Springer Verlag, Berlin u.a. ^{2}1997.

[40] M. Kružík, A. Prohl: *Young Measure Approximation in Micromagnetics*, Numer. Math. 90 (2001), 291-307.

[41] M. Kružík, T. Roubíček: *Specimen Shape Influence on Hysteretic Response of Bulk Ferromagnets*, J. Magnetism and Magnetic Materials 2000.

[42] M. Kružík, T. Roubíček: *Microstructure Evolution Model in Micromagnetics*, Z. Angew. Math. Phys.

[43] M. Luskin, L. Ma: *Analysis of the Finite Element Approximation of Microstructure in Micromagnetics*, SIAM J. Numer. Anal. 29 (1992), 320-331.

[44] L. Ma: *Analysis and Computation for a Variational Problem in Micromagnetics*, Ph.D. thesis, University of Minnesota, Minneapolis 1991.

[45] W. McLean: *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge 2000.

[46] L. Ma: *Analysis and Computation for a Variational Problem in Micromagnetics*, Ph.D. Thesis, University of Minnesota 1991.

[47] M. Maischak: *The Analytical Computation of the Galerkin Elements for the Laplace, Lamé and Helmholtz Equation in 2D-BEM*, Preprint, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover 1999.

[48] M. Maischak: *The analytical computation of the Galerkin elements for the Laplace, Lamé and Helmholtz Equation in 3D-BEM*, Preprint, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover 2000.

[49] P. Pedregal: *Parametrized Measures and Variational Principles*, Birkhäuser, Basel 1997.

[50] R. Plato: *Numerische Mathematik kompakt*, Braunschweig u.a. 2000.

[51] A. Prohl: *Computational Micromagnetism*, Teubner, Stuttgart u.a. 2001.

[52] A. Prohl, private communication.

[53] T. Roubíček: *Relaxation in Optimization Theory and Variational Calculus*, de Gruyter, Berlin 1997.

[54] W. Rudin: *Reelle und Komplexe Analysis*, München 1999.

[55] S. Sauter: *Variable Order Panel Clustering*, Computing 64 (2000), 223-261.

[56] T. Schrefl, private communication.

[57] A.H. Stroud, D. Secrest. *Gaussian Quadrature Formulas*, Prentice-Hall, Inc., 1966.

[58] E.M. Stein: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton 1970.

[59] L. Tartar: *Beyond Young Measures*, Meccanica 30 (1995), 505-526.

[60] R. Verfürth: *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*, Wiley-Teubner 1996.

[61] D. Werner: *Funktionalanalysis*, Berlin u.a. ^{2}1997.

[62] K. Yosida: *Functional Analysis*, Berlin u.a. ^{6}1995.

[63] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu: *A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis*, Int. J. Numer. Meth. Engrg. 24 (1987), 337-357.

Curriculum Vitae Dirk Praetorius (03/03)

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik		Tel. (Büro)	++43 1 58801 115 36
Technische Universität Wien		Fax (Büro)	++43 1 58801 115 98
Wiedner Hauptstr. 8-10			
1040 Wien, Österreich		Privat	Diehlgasse 8/1
			1050 Wien
eMail	`dirk.praetorius@tuwien.ac.at`		Österreich
Homepage	`http://www.anum.tuwien.ac.at/~dirk/`	Tel.	++43 1 9202713

Persönliche Daten

Geburtstag	10. Januar 1974
Geburtsort	Neunkirchen (Saar), Deutschland
Staatsbürgerschaft	Deutsch
Familienstand	ledig

Akademische Abschlüsse

06/2000	Diplom in Mathematik, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Deutschland
01/2000	1. Staatsexamen in Mathematik und Lateinischer Philologie, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Deutschland

Ausbildung

seit 09/2001	Universitätsassistent am Institut für Angewandte und Numerische Mathematik, Technische Universität Wien, Österreich
seit 09/2001	assoziiertes Mitglied im DFG Graduiertenkolleg 357 „Effiziente Algorithmen und Mehrskalenmethoden“, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Deutschland
02/2000-08/2001	Doktorand im DFG Graduiertenkolleg 357 „Effiziente Algorithmen und Mehrskalenmethoden“, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Deutschland
10/1993-06/2000	Studium von Mathematik und Lateinischer Philologie, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Deutschland
06/1993	Allgemeine Hochschulreife, Gelehrtenschule Meldorf, Deutschland
08/1984-06/1993	Schulische Ausbildung

Studienbegleitende Tätigkeiten

10/1996-03/2000	Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Deutschland
10/1997-09/1998	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für klassische Altertumskunde, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Deutschland

Wien, den 11. März 2003