

Unterschrift der Gutachter



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
Vienna University of Technology

DISSERTATION

# Konvergente numerische Integration der Landau-Lifshitz-Gilbert Gleichung

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktors der technischen Wissenschaften unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.Math. Dr.techn. Dirk Praetorius  
E101 - Institut für Analysis und Scientific Computing

und

Priv.Doz. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dieter Süß  
E138 - Institut für Festkörperphysik

eingereicht an der Technischen Universität Wien  
Fakultät für Mathematik und Geoinformation

von

Dipl.-Ing. Petra Goldenits  
Matrikelnummer: 0325144  
Ob. Sauerbrunn 3  
7100 Neusiedl am See

Wien, am 13. Mai 2012



## Kurzfassung

Das Verständnis des dynamischen Verhaltens der Magnetisierung eines ferromagnetischen Körpers dient der (Weiter-) Entwicklung von magnetischen Materialien und ermöglicht dadurch technologischen Fortschritt. Beispielhaft führen wir als Einsatzgebiete das Design von magnetischen Sensoren, die Entwicklung von Schreib-/Leseköpfen und den Aufbau von Speichermedien an. Aus dieser Perspektive ist es notwendig und sinnvoll, die integrierten mikromagnetischen Phänomene, die das Verhalten der Magnetisierung beeinflussen, in Form von zuverlässigen Simulationen zu erfassen.

Als in der Literatur anerkanntes Modell zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens der Magnetisierung  $\mathbf{m}$  gilt die *Landau-Lifshitz-Gilbert*-Gleichung. In dieser wird das Zeit-Orts-Gebiet  $\Omega_\tau := (0, t_{\text{end}}) \times \Omega$  betrachtet und  $\mathbf{m} : \Omega_\tau \rightarrow \mathbb{S}^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = 1\}$  als Lösung von

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\frac{1}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}) \quad (1)$$

unter Erfüllung der Anfangs- und Randbedingungen

$$\mathbf{m}(0) = \mathbf{m}_0 \quad \text{in } H^1(\Omega; \mathbb{S}^2) \quad \text{und} \quad \partial_\nu \mathbf{m} = 0 \quad \text{auf } (0, t_{\text{end}}) \times \partial\Omega \quad (2)$$

gesucht. Hierbei bezeichnet  $\alpha > 0$  den *Gilbert-Dämpfungsparameter*, während  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  das effektive Feld darstellt und die Beiträge des Austausches, der Anisotropie, des Streufeldes, sowie des angelegten äußeren Feldes miteinbezieht. Sowohl aus mathematischer Perspektive als auch aus physikalischer Sicht ergeben sich Herausforderungen für die Entwicklung eines zuverlässigen und analytisch fundierten Integrators zur Lösung obiger Modellgleichung. Diese werden bedingt durch die Nichtlinearität der Gleichung und die nicht-konvexe Nebenbedingung, die die (natürliche) Längenerhaltung der Magnetisierung garantiert. Für sehr kleinen Parameter  $\alpha$  kann zudem die Stabilität der Simulation kritisch beeinträchtigt werden. Darüberhinaus stellt die Berechnung des Streufeldes eine weitere ambitionierte Aufgabenstellung dar, zumal dieses über eine Potentialgleichung im Ganzraum  $\mathbb{R}^3$  gegeben ist. Schließlich favorisiert man aus mathematischer Sicht ein Verfahren, für das unbedingte Konvergenz einer in Zeit und Ort approximativ berechneten Lösung  $\mathbf{m}_{hk}$  gegen eine (schwache) Lösung  $\mathbf{m}$  obiger Modellgleichung vorliegt.

In der vorliegenden Arbeit erweitern wir den Algorithmus aus [5], der dort lediglich für den *Small-Particle-Limit* formuliert wurde, zur approximativen Lösung obiger Modellgleichung unter Beachtung des totalen Feldes  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$ . Es gilt zu bemerken, dass das numerische Verfahren lediglich die Lösung eines (schwach-besetzten) linearen Gleichungssystems pro Zeitschritt benötigt und darüber hinaus eine effiziente Berechnung der Beiträge des effektiven Feldes miteinbezieht. Unabhängig von der vorliegenden Arbeit erschien jüngst in [7] ein Konvergenzresultat für den vorgeschlagenen Integrator, der bereits in [52] ohne Betrachtung konvergenzanalytischer Aspekte vorgestellt wurde. Anders als in [7] schließt unsere Analysis den Fehler, der aus der approximativen Berechnung des Streufeldes und des angelegten äußeren Feldes hervorgeht, ein. Außerdem erlauben wir insbesondere eine approximative Berechnung der auftretenden  $L^2$ -Terme durch das *Mass-Lumping des  $L^2$ -Skalarprodukts*. Schließlich beweisen wir als Kernresultat unbedingte Konvergenz einer Teilfolge der aus diesem Schema resultierenden diskreten Magnetisierung  $\mathbf{m}_{hk}$  gegen eine schwache Lösung von Gleichung (1). Dabei wird das Attribut *unbedingt* so verstanden, dass die Konvergenz keine Kopplung von Ortsschrittweite  $h$  und Zeitschrittweite  $k$  erfordert.

Ein eigenes Kapitel widmen wir der (näherungsweise) Berechnung des Streufeldes und stellen darin eine Vielfalt an Ansätzen zusammen. Dabei interessieren wir uns einerseits für die algorithmische Umsetzung dieser Methoden und weisen andererseits analytische Eigenschaften nach, die maßgeblich in das oben vorgestellte Konvergenzresultat eingehen.

Abschließend befassen wir uns mit der Implementierung unseres Time-Splitting-Verfahrens und veranschaulichen und bestätigen durch numerische Experimente dessen Güte.



## Abstract

The understanding of the dynamic behavior of the magnetization of a ferromagnetic body is essential for the development of magnetic materials and thus of utter relevance for technological progress. As example, one may think of the design of magnetic sensors, the development of recording heads, and the layout of storage media. Thus, it is necessary and meaningful to include micromagnetic phenomena, which influence the behavior of the magnetization, in reliable numerical simulations.

In the literature, the *Landau-Lifshitz-Gilbert* equation (LLG) is a well accepted model to describe the dynamics of micromagnetism. In this model, one considers the time-space-domain  $\Omega_\tau := (0, t_{\text{end}}) \times \Omega$  in which the magnetization  $\mathbf{m} : \Omega_\tau \rightarrow \mathbb{S}^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = 1\}$  is sought as solution of

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\frac{1}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}) \quad (3)$$

associated with the initial and boundary conditions

$$\mathbf{m}(0) = \mathbf{m}_0 \quad \text{in } H^1(\Omega; \mathbb{S}^2) \quad \text{and} \quad \partial_\nu \mathbf{m} = 0 \quad \text{on } (0, t_{\text{end}}) \times \partial\Omega. \quad (4)$$

Here,  $\alpha > 0$  denotes the *Gilbert damping constant*, whereas  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  is the effective field including terms stemming from the exchange, the anisotropy, the demagnetization field, as well as the exterior field. From both, a mathematical perspective and a physical point of view, some challenges concerning the development of a reliable and analytically founded scheme to solve LLG arise. These are due to the nonlinearity of the equation, the non-convex side constraint, which guarantees the (natural) conservation of the pointwise modulus of the magnetization, and a possibly very small damping parameter  $\alpha$ , which may critically influence the stability of the scheme. Furthermore, the numerical computation of the demagnetization field turns out to be an ambitious task, since it is determined by a potential equation in the entire space  $\mathbb{R}^3$ . Finally, from a mathematical point of view a reliable convergence analysis for the space-time discretized magnetization  $\mathbf{m}_{hk}$  towards a (weak) solution of LLG is desired.

In our work we extend the algorithm from [5], which treats the *small-particle-limit* only, to solve LLG approximatively under consideration of the total field  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$ . We emphasize that our numerical scheme still requires only one solution of one (sparse) linear system per time-step. Furthermore, an efficient computation of the contributions of the effective magnetic field is included. Recently and independently of our work a convergence result for this extended model was published in [7], whereas the algorithm itself was stated already in [52]. In contrast to [7], our analysis includes the approximative computation of the demagnetization field as well as the exterior field. In addition, we allow an approximative computation of the arising  $L^2$ -contributions by the so-called *mass-lumping of the  $L^2$ -scalar-product*. As the main result of our work, we prove unconditional convergence of a subsequence of the output magnetization  $\mathbf{m}_{hk}$  of our algorithm towards a weak solution of LLG. Here, the attribute *unconditional* has to be understood in the sense that no coupling of the spatial mesh-size  $h$  and the time-step size  $k$  is required.

We dedicate a separate chapter to the (approximative) computation of the demagnetization field and analyze a variety of different methods to this end. On the one hand, we investigate an algorithmical realization of these approaches whereas on the other hand, we prove certain analytical properties which enter the above stated convergence result significantly.

Finally, we focus on the implementation of our time-splitting scheme and illustrate its effective performance by numerical examples.



## Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei Prof. Dirk Praetorius für die Vergabe, Betreuung und Begutachtung des Themas der vorliegenden Dissertation aufrichtig bedanken. Er hat dadurch mein Interesse an spannenden mathematischen Fragestellungen geweckt und mir einen weiten Einblick in die (interdisziplinäre) Forschungswelt ermöglicht - sei es durch hilfreiche Gespräche oder zahlreiche Konferenzbesuche. An dieser Stelle gilt auch besonderer Dank Priv.Do. Dieter Süß, der der zweite Gutachter dieser Arbeit ist und der stets ein offenes Ohr für die „naiven“ Fragen eines Mathematikers hat. Er hat für mich wesentlich zum besseren physikalischen Verständnis des Modellproblems beigetragen und mir die Welt des Mikromagnetismus ein Stück weit näher gebracht.

Das Verfassen dieser Dissertation wurde durch die Finanzierung im Rahmen der „Graduate School PDE-Tech“ der TU Wien und durch das Forschungsprojekt „Micromagnetic Simulation and Computational Design of Future Devices“ durch den Wiener Wissenschafts-, Forschungs- und Technologiefonds (WWTF-Forschungsprojekt MA09-029) möglich gemacht. Außerdem wurde diese Arbeit teilweise durch das Forschungsprojekt „Adaptive Boundary Element Method“ durch den Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung (FWF-Forschungsprojekt P21732) finanziell unterstützt. Den Fördergebern sei hiermit auf das Ausdrücklichste gedankt.

Ich möchte der gesamten Arbeitsgruppe rund um Prof. Dirk Praetorius für die interessanten Diskussionen und die vielen fröhlichen Stunden, die wir gemeinsam verbracht haben, danken. Jeder einzelne hat auf seine eigene Art und Weise für Momente gesorgt, an die ich mich sehr gerne erinnern werde. An dieser Stelle möchte ich mich besonders bei Marcus Page bedanken, der stets offen ist für spannende mathematische und nicht-mathematische Diskussionen und mir auch in den bitteren Momenten meines Doktorandendaseins stets ein guter Freund war.

Einen großen Dank möchte ich auch allen meinen Freunden und lieben Menschen aussprechen, die mich umgeben. Es ist stets eine Bereicherung in vielerlei Hinsicht Zeit mit ihnen zu verbringen.

Besonders herzlicher und inniger Dank gilt meiner Familie, die mich stets unterstützt, meine Entscheidungen respektiert und mitträgt und immer für mich da ist. Sie gibt mir Motivation und den nötigen Rückhalt, meine Ideen zu verwirklichen und meine Ziele zu verfolgen.

Zu guter Letzt - aber deshalb nicht geringer - möchte ich mich von ganzem Herzen bei Silvio Dorrihi bedanken, dessen unendliche Geduld und unzerbrechlicher Optimismus mir sehr oft die nötige Luft zum Atmen geben. Er ist wie ein Weggefährte, der mit völliger Konstanz darauf bedacht ist, den Weg stets gemeinsam zu gehen.

Dankeschön!



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Landau-Lifshitz-Gilbert Gleichung</b>	<b>1</b>
1.1	Modellgleichung . . . . .	2
1.1.1	Austauschenergie . . . . .	5
1.1.2	Anisotropieenergie . . . . .	6
1.1.3	Streifeldenergie . . . . .	7
1.1.4	Zeeman Energie . . . . .	8
1.1.5	Motivation der Modellgleichung . . . . .	8
1.2	Formulierungen der LLG-Gleichung . . . . .	10
1.3	Lösungskonzepte und Überblick der aktuellen Literatur . . . . .	13
1.4	Aufbau der Arbeit und zentrale Resultate . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Analytisches Framework</b>	<b>25</b>
2.1	Diskretisierung im Ort . . . . .	30
2.1.1	Netzverfeinerung . . . . .	33
2.2	Skalarprodukt . . . . .	35
2.2.1	Diskrete Bilinearformen . . . . .	36
2.3	Diskretisierung in der Zeit . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Lineare Diskretisierung der LLG-Gleichung</b>	<b>45</b>
3.1	Notation und Einleitung . . . . .	46
3.2	Finite-Elemente-Schema . . . . .	50
3.2.1	Finite-Elemente-Schema mit Time-Splitting . . . . .	50
3.2.2	Time-Splitting-Verfahren mit diskreter Bilinearform . . . . .	60
3.3	Konvergenzresultat . . . . .	68
3.4	Approximation des angelegten äußeren Feldes . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Methoden zur Berechnung des Streufeldes</b>	<b>101</b>
4.1	Notation und weitere Definitionen . . . . .	103
4.2	Analytische Berechnung des projizierten Streufeldes . . . . .	109
4.3	Hybrider FEM-BEM-Ansatz nach Fredkin/Koehler . . . . .	112
4.4	Hybrider FEM-BEM-Ansatz nach García-Cervera/Roma . . . . .	119
4.5	Symmetrische FEM-BEM-Kopplung . . . . .	124
4.6	Direkte FEM-BEM-Kopplung nach Johnson/Nédélec . . . . .	127
4.7	Kopplung finiter/infiniter Elemente . . . . .	129
4.8	Box-Methode . . . . .	133
<b>5</b>	<b>Implementierung</b>	<b>139</b>
5.1	Datenstrukturen . . . . .	139
5.2	Programmstruktur und Implementierung . . . . .	143
5.2.1	Diskretisierung der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ ohne Mass-Lumping . . . . .	144

5.2.2	Diskretisierung der Bilinearform $b^j(\cdot, \cdot)$ ohne Mass-Lumping . . . . .	146
5.2.3	Mass-Lumping des $L^2$ -Skalarprodukts . . . . .	148
5.2.4	Diskretisierung der rechten Seite $L^j(\cdot)$ . . . . .	149
5.2.5	Berechnung der diskreten Zeitableitung $\mathbf{v}_h^j$ . . . . .	153
5.3	Implementierung der Energiebeiträge . . . . .	155
5.4	Adaptive Zeitschrittweitensteuerung . . . . .	158
<b>6</b>	<b>Numerische Experimente</b>	<b>161</b>
6.1	Hysterese-Beispiel . . . . .	162
6.2	$\mu$ mag-Problem #3 . . . . .	171
6.3	$\mu$ mag-Problem #4 . . . . .	183
<b>A</b>	<b>Weitere Quelltexte</b>	<b>195</b>

# Kapitel 1

## Landau-Lifshitz-Gilbert Gleichung

Die Landau-Lifshitz-Gilbert Gleichung stellt ein in der Literatur anerkanntes Modell dar, das zur Beschreibung der Magnetisierungsdynamik in magnetischen Materialien dient. Ausgangspunkt dieses Modells ist die Landau-Lifshitz Gleichung, die erstmals durch die Physiker L.D. LANDAU und E. LIFSHITZ im Jahr 1935 eingeführt wurde, siehe [34]. Allerdings eignete sich dieses Modell nicht für große Dämpfungsparameter. Daher publizierte etwa 20 Jahre später T.L. GILBERT in [26] eine modifizierte Version dieser ursprünglichen Gleichung, die nun für beliebige Dämpfungskonstanten zulässig war. Entsprechend der Literatur referenzieren wir diese Gleichung als Landau-Lifshitz-Gilbert Gleichung (LLG). Sie dient der vorliegenden Arbeit als Modellproblem.

Das aktuelle Forschungsinteresse an der (numerischen) Lösung der LLG-Gleichung wird einerseits durch die Physik begründet und andererseits durch die Mathematik motiviert. Aus physikalischer Sicht liegt der Fokus auf einem besseren Verständnis der Dynamik magnetischer Effekte, also einer (zeitabhängigen) Beschreibung der Reaktion eines magnetischen Materials auf den Einfluss eines äußeren Feldes. Dadurch ist nämlich Design und Weiterentwicklung in all jenen Bereichen möglich, die magnetische Wechselwirkungen ausnutzen. Als aktuelles Anwendungsgebiet sei die Entwicklung neuer und die Verbesserung bereits entwickelter Einheiten mit hoher Speicherdichte genannt. Man denke beispielsweise an Festplatten, die den Speicheranforderungen der heutzutage üblichen Datenvolumen genügen sollen, oder an Spin-Momentum-Transfer-Oszillatoren (*Spin-Torque Oscillators*) sowie Tunnelresistoren (*Magnetic Tunnel Junctions*). Letztere könnten in naher Zukunft auch im Bereich der Mobiltelefone zu deutlichen Verbesserungen führen.

Aus der Perspektive der Mathematik stellt die LLG-Gleichung eine interessante Herausforderung dar, da man ein effektives numerisches Verfahren zur approximativen Lösung dieser Gleichung entwickeln möchte und gleichzeitig ein vollständiges analytisches Verständnis für ein solches Schema garantieren will. Dabei sind sowohl die Nicht-Linearität der parabolischen Modellgleichung als auch die nicht-konvexe Nebenbedingung an die Magnetisierung sowie ein nicht-lokaler Energiebeitrag im totalen magnetischen Feld zu berücksichtigen. Darüber hinaus ist man an einem numerischen Schema interessiert, das sich auch für kleine Dämpfungsparameter als stabil erweist.

Ziel dieses Kapitels ist die Einführung der LLG-Gleichung. Dabei wollen wir zunächst die dimensionsbehaftete Version dieses Modells betrachten, wie es auch in der Physik üblich ist, und anschließend daraus eine entdimensionalisierte Form ableiten, die dem mathematischen Studium dient. Dadurch soll der Zusammenhang des Begriffs „LLG-Gleichung“ zwischen Physik und Mathematik herausgearbeitet werden. Des Weiteren wollen wir eine verständliche Interpretation der einzelnen Energiebeiträge und schließlich der Modellgleichung gewährleisten. In einem wei-

teren Abschnitt wollen wir verschiedene, jedoch äquivalente Formulierungen der LLG-Gleichung vorstellen und auch deren Äquivalenz im mathematischen Sinn nachweisen. Abschließend wird eine kurze Darstellung der aktuellen Forschungsergebnisse zur Lösung der LLG-Gleichung angestrebt, um die vorliegende Arbeit letztendlich abzugrenzen und einzuordnen.

## 1.1 Modellgleichung

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst jene Form der LLG-Gleichung präsentieren, die auch in der physikalischen Literatur zu finden ist. Jedoch zielen wir auf eine entdimensionalisierte Version dieser Gleichung ab, die wir in der vorliegenden Arbeit dann als Modellgleichung betrachten und auch im Folgenden als „LLG-Gleichung“ bezeichnen. Des Weiteren wollen wir die Modellgleichung motivieren und eine Deutung des effektiven Feldes geben, um ein besseres Verständnis der physikalischen Bedeutung des Modells zu gewährleisten.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes polyedrisches Lipschitz-Gebiet, und bezeichne  $(0, \tau_{\text{end}})$  ein endliches Zeitintervall. Weiters sei durch  $\alpha \geq 0$  ein dimensionsloser empirischer Parameter gegeben, die sogenannte Gilbert-Dämpfungs-konstante, die nur vom betrachteten magnetischen Material abhängt. Dieser Parameter variiert im Bereich  $0.01 \leq \alpha \leq 1$ . Das magnetische Verhalten im ferromagnetischen Körper  $\Omega$  wird durch die vektorwertige Magnetisierung  $\mathbf{M}$ , die in Ampère pro Meter  $[A/m]$  gemessen wird, charakterisiert. Es gilt

$$\mathbf{M} : (0, \tau_{\text{end}}) \times \Omega \rightarrow \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = M_s \right\}.$$

Hierbei bezeichnet die Konstante  $M_s$  in  $[A/m]$  die Volumenmagnetisierung. Im Allgemeinen wird diese Größe durch eine Funktion  $f$  in Abhängigkeit einer Temperatur  $\Theta$  wiedergegeben, d.h.

$$|\mathbf{M}(\tau, \mathbf{x})| = M_s = f(\Theta) \quad \text{für alle } (\tau, \mathbf{x}) \in (0, \tau_{\text{end}}) \times \Omega.$$

Erreicht oder übersteigt die Temperatur  $\Theta$  den Curie-Punkt  $\Theta_0$ , so gilt  $f(\Theta) = 0$ . In der vorliegenden Arbeit fixieren wir eine Temperatur, sodass  $M_s$  fast überall in  $(0, \tau_{\text{end}}) \times \Omega$  konstant ist. Damit lässt sich die Magnetisierung  $\mathbf{M}$  darstellen als Produkt der magnetischen Stärke  $M_s$  und der dimensionslosen Richtung der Magnetisierung  $\mathbf{m}$

$$\mathbf{M} = M_s \mathbf{m}.$$

Skalieren wir  $\mathbf{M}$  mit der Vakuum-Permeabilität  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ , die in Tesla mal Meter pro Ampère  $[Tm/A]$  gegeben wird, so erhalten wir die magnetische Polarisierung  $\mathbf{J}$  in Tesla  $[T]$ . Mit  $J_s$  in  $[T]$  bezeichnen wir die Saturationspolarisierung und erhalten damit die Zusammenhänge

$$\mathbf{J} = \mu_0 \mathbf{M}, \quad J_s = \mu_0 M_s, \quad \mathbf{J} = J_s \mathbf{m}. \quad (1.1)$$

Die LLG-Gleichung beschreibt nun die zeitliche Änderung der magnetischen Polarisierung unter dem Einfluss eines effektiven magnetischen Feldes und lässt sich wie folgt darstellen

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \tau} = -\frac{\gamma_0}{1 + \alpha^2} \mathbf{J} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} - \frac{\alpha \gamma_0}{(1 + \alpha^2) J_s} \mathbf{J} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}). \quad (1.2)$$

Hierbei bezeichnet  $\gamma_0 = 2.210173 \cdot 10^5$  in Meter pro Ampère und Sekunden  $[m/(As)]$  das gyromagnetische Verhältnis und  $\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{H}_{\text{eff}}(\mathbf{J}, \mathbf{F})$  das totale magnetische Feld in  $[A/m]$ , welches

linear von der Magnetisierungspolarisierung  $\mathbf{J}$  und einem gegebenen angelegten äußeren Feld  $\mathbf{F}$  in  $[A/m]$  abhängt.  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$  ist gegeben als die negative Variation der Gibbs-Energie  $E = E(\mathbf{J})$  entlang der Magnetisierungspolarisierung  $\mathbf{J}$ . Die physikalische Einheit der totalen Energie  $E$  ist Joule  $[J]$ , und sie wird durch folgende Gleichung bestimmt

$$E = \frac{A}{J_s^2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{J}|^2 d\mathbf{x} + K \int_{\Omega} \Phi \left( \frac{\mathbf{J}}{J_s} \right) d\mathbf{x} + \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{P}(\mathbf{J})|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{J} d\mathbf{x}. \quad (1.3)$$

Die einzelnen Beiträge der Gibbs-Energie  $E$  werden als Austauschenergie, Anisotropieenergie, magnetostatische Energie und Zeeman Energie bezeichnet. Die Austauschkonstante  $A > 0$  ist in Joule pro Meter  $[J/m]$  gegeben, während die Anisotropiekonstante  $K > 0$  in Joule pro Volumenmeter  $[J/m^3]$  angegeben wird. Beide Konstanten hängen nur vom magnetischen Material ab. Des Weiteren bezeichnet  $\Phi$  die Anisotropiedichte, während sich  $\mathcal{P}$  auf den Streufeldoperator bezieht.

Nützt man die Differenzierbarkeit der involvierten Operatoren und berücksichtigt weiters die Symmetrieeigenschaft und Linearität des Streufeldoperators  $\mathcal{P}$ , so lässt sich das totale effektive Feld  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$  wie folgt darstellen

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{\delta E}{\delta \mathbf{J}} = \frac{2A}{J_s^2} \Delta \mathbf{J} - \frac{K}{J_s^2} D\Phi(\mathbf{J}) - \frac{1}{\mu_0} \mathcal{P}(\mathbf{J}) + \mathbf{F}. \quad (1.4)$$

Nun wollen wir Gleichung (1.2) in eine dimensionslose Gleichung überführen. Dazu betrachten wir (1.2) und setzen zunächst die Relation  $\mathbf{J} = J_s \mathbf{m}$  aus (1.1) ein

$$J_s \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \tau} = -\frac{\gamma_0 J_s}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} - \frac{\alpha \gamma_0 J_s^2}{(1 + \alpha^2) J_s} \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}).$$

Des Weiteren heben wir aus dem totalen effektiven Feld  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$  einen Faktor  $M_s$  heraus und erhalten

$$\begin{aligned} J_s \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \tau} &= -\frac{\gamma_0 J_s M_s}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times \left( \frac{\mathbf{H}_{\text{eff}}}{M_s} \right) - \frac{\alpha \gamma_0 J_s M_s}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times \left( \mathbf{m} \times \left( \frac{\mathbf{H}_{\text{eff}}}{M_s} \right) \right) \\ &= -\frac{\gamma_0 J_s M_s}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times \left( \frac{2A}{J_s^2 M_s} \Delta \mathbf{J} - \frac{K}{J_s^2 M_s} D\Phi(\mathbf{J}) - \frac{1}{\mu_0 M_s} \mathcal{P}(\mathbf{J}) + \frac{1}{M_s} \mathbf{F} \right) \\ &\quad - \frac{\alpha \gamma_0 J_s M_s}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times \left( \mathbf{m} \times \left( \frac{2A}{J_s^2 M_s} \Delta \mathbf{J} - \frac{K}{J_s^2 M_s} D\Phi(\mathbf{J}) - \frac{1}{\mu_0 M_s} \mathcal{P}(\mathbf{J}) + \frac{1}{M_s} \mathbf{F} \right) \right). \end{aligned}$$

Anwenden von  $\mathbf{J} = J_s \mathbf{m}$  und  $J_s = \mu_0 M_s$ , siehe (1.1), und Ausnützen der Homogenität von der Anisotropiedichte  $\Phi$  und des Streufeldoperators  $\mathcal{P}$  vereinfacht dies zu

$$\begin{aligned} J_s \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \tau} &= -\frac{\gamma_0 J_s M_s}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times \left( \frac{2A}{J_s M_s} \Delta \mathbf{m} - \frac{K}{J_s M_s} D\Phi(\mathbf{m}) - \frac{J_s}{\mu_0 M_s} \mathcal{P}(\mathbf{m}) + \frac{1}{M_s} \mathbf{F} \right) \\ &\quad - \frac{\alpha \gamma_0 J_s M_s}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times \left( \mathbf{m} \times \left( \frac{2A}{J_s M_s} \Delta \mathbf{m} - \frac{K}{J_s M_s} D\Phi(\mathbf{m}) - \frac{J_s}{\mu_0 M_s} \mathcal{P}(\mathbf{m}) + \frac{1}{M_s} \mathbf{F} \right) \right) \\ &= -\frac{\gamma_0 J_s M_s}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times \left( \frac{2A}{\mu_0 M_s^2} \Delta \mathbf{m} - \frac{K}{\mu_0 M_s^2} D\Phi(\mathbf{m}) - \mathcal{P}(\mathbf{m}) + \frac{1}{M_s} \mathbf{F} \right) \\ &\quad - \frac{\alpha \gamma_0 J_s M_s}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times \left( \mathbf{m} \times \left( \frac{2A}{\mu_0 M_s^2} \Delta \mathbf{m} - \frac{K}{\mu_0 M_s^2} D\Phi(\mathbf{m}) - \mathcal{P}(\mathbf{m}) + \frac{1}{M_s} \mathbf{F} \right) \right). \end{aligned}$$

Es gilt zu beachten, dass das um  $1/M_s$  skalierte äußere angelegte Feld  $\mathbf{F}$  eine dimensionslose Größe definiert

$$\mathbf{f} := \frac{1}{M_s} \mathbf{F}. \quad (1.5)$$

Unter Verwendung dieser eingeführten Größe  $\mathbf{f}$  wollen wir nun ein dimensionsloses Äquivalentum, nämlich  $\mathbf{h}_{\text{eff}} := \mathbf{h}_{\text{eff}}(\mathbf{m}, \mathbf{f})$ , zum effektiven magnetischen Feld definieren

$$\mathbf{h}_{\text{eff}} := \frac{2A}{\mu_0 M_s^2} \Delta \mathbf{m} - \frac{K}{\mu_0 M_s^2} D\Phi(\mathbf{m}) - \mathcal{P}(\mathbf{m}) + \mathbf{f}. \quad (1.6)$$

Schließlich erhalten wir mit der Substitution

$$t = \gamma_0 M_s \tau$$

eine sogenannte reduzierte Zeit  $t$ , die ebenfalls dimensionslos ist. Dies impliziert

$$\mathbf{m} : (0, t_{\text{end}}) \times \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = 1\},$$

wobei nun beide Größen,  $\mathbf{m}$  und  $t$ , keine physikalische Einheit besitzen. Partielle Differentiation und Skalierung mit  $1/(\gamma_0 J_s M_s)$  führt unter Beachtung von (1.5) und (1.6) auf die nicht-lineare partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\frac{1}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}), \quad (1.7)$$

die durch folgende Anfangs- und Randbedingungen ergänzt wird

$$\mathbf{m}(0) = \mathbf{m}_0 \quad \text{in } H^1(\Omega; \mathbb{S}^2), \quad (1.8)$$

$$\partial_\nu \mathbf{m} = 0 \quad \text{auf } (0, t_{\text{end}}) \times \partial\Omega. \quad (1.9)$$

Es gilt zu beachten, dass die nicht-konvexe Nebenbedingung  $|\mathbf{m}| = 1$  fast überall in  $(0, t_{\text{end}}) \times \Omega$  auch als Konsequenz von Gleichung (1.7) gesehen werden kann. Dies ist einfach einzusehen, indem man (1.7) mit  $\mathbf{m}$  multipliziert und fundamentale Rechenregeln des Vektorkreuzprodukts anwendet. Eine ordentliche Ausführung der Argumentation findet sich im Beweis zu Lemma 1.2.1. Die dimensionslosen Gleichungen (1.7)–(1.9) werden im Folgenden als LLG-Gleichung referenziert und dienen der vorliegenden Arbeit als Modellproblem. Außerdem wird das orts- und zeitabhängige Gebiet durch  $\Omega_\tau := (0, t_{\text{end}}) \times \Omega$  definiert.

**Bemerkung 1.1.1.** *Bezüglich der natürlichen Randbedingung (1.9) gilt es zu beachten, dass diese aus dem Drehmomentausgleich  $\mathbf{m} \times \partial_\nu \mathbf{m} = 0$  resultiert und aufgrund  $\mathbf{m} \in \mathbb{S}^2$  zu  $\partial_\nu \mathbf{m} = 0$  vereinfacht werden kann.*

**Bemerkung 1.1.2.** *Es sei betont, dass die intrinsische Einheit dieser Formulierung der LLG-Gleichung, (1.7)–(1.9), Meter [m] für das räumliche Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ist. Darüber hinaus korrespondiert  $1/(\gamma_0 M_s)$  zu 1 Sekunde [s].*

In den folgenden Unterabschnitten wollen wir auf die einzelnen Beiträge der Gibbs-Energie genauer eingehen, indem wir einerseits mathematische Eigenschaften herausstreichen und andererseits eine physikalische Interpretation geben. Um die Notation zu vereinheitlichen, wollen wir die totale Energie nochmals in Abhängigkeit der dimensionslosen Richtung der Magnetisierung darstellen. Dies bedeutet keine Skalierung von  $E$ , sondern beinhaltet lediglich die Relationen zwischen dimensionsbehafteter und dimensionsloser Größen, siehe (1.1). Daher kann die Gibbs-Energie als  $E = E(\mathbf{m})$  interpretiert und wie folgt dargestellt werden

$$E = A \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}|^2 dx + K \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{m}) dx + \frac{\mu_0 M_s^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{P}(\mathbf{m})|^2 dx - \mu_0 M_s^2 \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{m} dx. \quad (1.10)$$

Anhand dieser Darstellung gehen wir im Folgenden auf die einzelnen Energiebausteine ein.

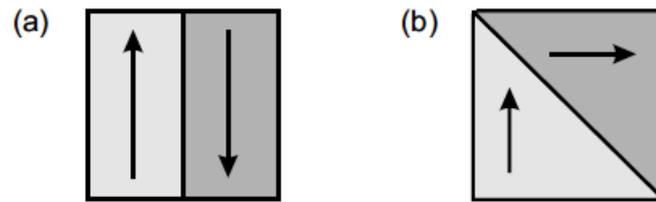


Abbildung 1.1: Mögliche Ausrichtung der Magnetisierung zweier benachbarter Weiss'scher Bezirke (entnommen aus [25, Seite 120]).

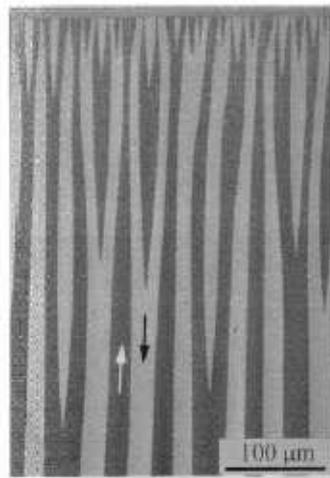


Abbildung 1.2: Ausbildung Weiss'scher Bezirke am Beispiel Kobalt (entnommen aus [25, Seite 121]).

### 1.1.1 Austauschenergie

Die Austauschenergie  $E_{ex}$  beschreibt, wie ein Spin auf seinen benachbarten Spin reagiert. Um die Austauschenergie zu minimieren, wird eine Magnetisierung präferiert, die in möglichst großen Bereichen des magnetischen Körpers  $\Omega$  parallel ausgerichtet ist. Dadurch prägen sich in  $\Omega$  Regionen mit quasi konstanter Magnetisierung aus, die von solchen mit rasch wechselnder Magnetisierungsrichtung separiert sind. Erstere bezeichnet man als Weiss'sche Bezirke. Diese sind durch sogenannte Domänenwände voneinander getrennt, deren Typ von der kristallographischen Struktur des Ferromagneten abhängt.

Wie in [25] ausführlich erläutert wird, wird eine Klassifizierung durch den Winkel zwischen der Magnetisierungen zweier benachbarter Domänen gegeben:

- 180°-Domänenwand: Die Magnetisierungen zweier benachbarter Domänen sind exakt entgegengesetzt zueinander ausgerichtet. Abbildung 1.1(a) stellt eine solche Relation dar.
- 90°-Domänenwand: Die Magnetisierungen zweier benachbarter Weiss'scher Bezirke verlaufen normal zueinander. Dies wird in Abbildung 1.1(b) festgehalten.

Betrachtet man ein uniachiales Material, beispielsweise Kobalt, so beobachtet man lediglich 180° Domänenwände, siehe Abbildung 1.2. Solche Domänenwände kann man zusätzlich noch abhängig von der Rotationsbewegung der Magnetisierung unter Einfluss äußerer Faktoren charakterisieren. Wir unterscheiden weiter:

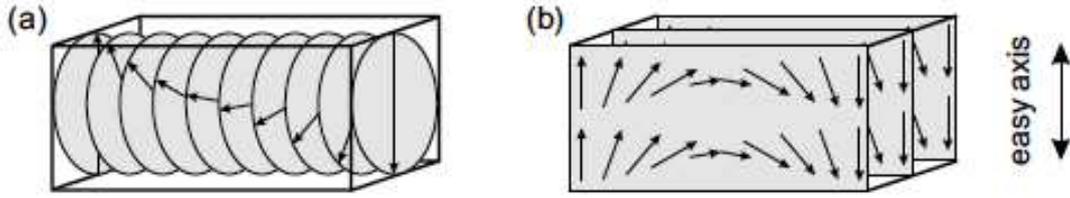


Abbildung 1.3: Rotationsbewegung der Magnetisierung bei Bloch-Wänden (a) bzw. Néel-Wänden (b) (entnommen aus [25, Seite 121]).

- Bloch-Wand: Die dynamische Veränderung der Magnetisierung wird durch eine Rotation dargestellt, die in Ebenen verläuft, die parallel zu jener Ebene sind, in der die Domänenwand liegt. Abbildung 1.3(a) veranschaulicht diese Rotation.
- Néel-Wand: Die Rotation der Magnetisierung verläuft in einer Ebene, die normal zu jener ist, in der die Domänenwand liegt. Zur Illustration einer Néel-Wand sei auf Abbildung 1.3(b) verwiesen.

Es sei bemerkt, dass eine Bloch-Wand das Verschwinden des Streufeldes sicherstellt. Betrachtet man Dünnschichten, so ist aufgrund der Dicke des magnetischen Körpers aus energetischer Sicht eine Néel-Wand zu bevorzugen. Diese minimiert nämlich für eine in der Ebene liegende Magnetisierung das Streufeld.

Die Austauschenergie wird gegeben durch

$$E_{ex} = A \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}|^2 dx, \quad (1.11)$$

wobei  $A > 0$  die Austauschkonstante bezeichnet. Diese wird in Joule pro Meter [ $J/m$ ] angegeben und hängt nur vom magnetischen Material ab.

Im Vergleich zu den anderen Energiebausteinen stellt die Austauschenergie den Term höchster Ordnung dar. Diese Eigenschaft deutet bereits auf eine spezielle Behandlung dieses Beitrags in Hinblick auf die numerische Analysis hin.

### 1.1.2 Anisotropieenergie

Die Energie eines ferromagnetischen Körpers hängt mitunter von der Richtung der Magnetisierung relativ zu den strukturellen Achsen des Materials ab. Diese Beeinflussung resultiert hauptsächlich aus Spin-Bahn-Wechselwirkungen und wird durch die kristalline Anisotropieenergie wiedergegeben.

Wir unterscheiden grundsätzlich zwischen uniachsialen und multiachsialen Materialien, wobei wir in der vorliegenden Arbeit stets die erste Kategorie betrachten. Im Falle eines uniachsialen Materials, wie zum Beispiel Kobalt, gibt es eine sogenannte Easy-Achse  $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^2$  mit den Eigenschaften  $\Phi(\pm \mathbf{e}) = 0$  und  $\Phi(\mathbf{x}) > 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2$  mit  $\mathbf{x} \neq \mathbf{e}$ . Hierbei bezeichnet  $\Phi$  die Anisotropiedichte, die wie folgt gegeben ist

$$\Phi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit} \quad \Phi(\mathbf{m}) = |\mathbf{m}|^2 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{e})^2. \quad (1.12)$$

Dabei definiert  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{e}\}$  eine orthonormale Basis des  $\mathbb{R}^3$ . Nach der Parseval'schen Gleichung gilt

$$|\mathbf{m}|^2 = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{e})^2 + \sum_{j=1}^2 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{b}_j)^2, \quad (1.13)$$

was in Betracht der nicht-konvexen Nebenbedingung  $|\mathbf{m}| = 1$  zu folgender Darstellung führt

$$\Phi(\mathbf{m}) = 1 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{e})^2 = \sum_{j=1}^2 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{b}_j)^2 \quad \text{für alle } \mathbf{m} \in \mathbb{S}^2.$$

Dies ist anders im Bezug auf multiachbiale Materialien, wo es mehrere Richtungen  $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n \in \mathbb{S}^2$  gibt, die von der Anisotropieenergie bevorzugt werden im Sinne einer Energieminimierung, d.h.  $\Phi(\mathbf{e}^j) = 0$ . Als Beispiel denke man an Eisen mit  $n = d$ .

Jener Energiebeitrag, der aus der Anisotropie resultiert, findet folgende Darstellung

$$E_a = K \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{m}) \, d\mathbf{x}. \quad (1.14)$$

Hierbei bezeichnet  $K > 0$  die Anisotropiekonstante, welche in Joule pro Volumenmeter  $[J/m^3]$  angegeben wird und nur vom betrachteten magnetischen Material abhängt.

### 1.1.3 Streufeldenergie

Das magnetische Feld besteht aus zwei unterschiedlichen Teilen, nämlich dem Streufeld und dem äußeren Feld. Das magnetische Feld, das vom magnetischen Körper selbst induziert wird, steht im Zusammenhang mit der Streufeldenergie. Diese verschwindet, wenn die Magnetisierung divergenzfrei im Ganzraum ist. Charakterisiert wird die Auswirkung des Streufeldes durch Feldlinien, die in jedem Punkt des magnetischen Körpers  $\Omega$  sowohl die Richtung als auch die Größe des magnetischen Feldes wiedergeben.

Die Streufeldenergie (oder: magnetostatische Energie) im  $\mathbb{R}^3$  ist wie folgt gegeben

$$E_{stray} = \frac{\mu_0 M_s^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{P}(\mathbf{m})|^2 \, d\mathbf{x} = \frac{\mu_0 M_s^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x}, \quad (1.15)$$

wobei  $\mathcal{P}$  den Streufeldoperator bezeichnet und  $u$  das magnetostatische Potential wiedergibt. Das Streufeld  $\mathcal{P}(\mathbf{m}) = \nabla u$  wird durch  $\mathbf{m}$  induziert als Lösung  $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$  der quasi-statischen Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta u &= \operatorname{div} \mathbf{m} && \text{in } \Omega, \\ \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega^{\text{ext}} := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ [u] &= 0 && \text{auf } \Gamma, \\ [\partial_{\nu} u] &= -\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} && \text{auf } \Gamma, \\ u(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|) && \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Hierbei bezeichnen  $[u]$  und  $[\partial_{\nu} u]$  die Sprünge von  $u$  und seiner Normalenableitung am Rand  $\Gamma$ . Es gilt zu beachten, dass  $\mathcal{P} : L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  die  $L^2$ -Orthogonalprojektion auf den Raum der Gradientenfelder darstellt. Daher gilt  $\mathcal{P}(\mathbf{m}) = 0$  dann und nur dann, wenn  $\mathbf{m}$  divergenzfrei im  $\mathbb{R}^3$  ist, siehe z.B. [45] für weitere Details. Insbesondere erhalten wir

$$\|\mathcal{P}(\mathbf{m})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nimmt man zusätzlich an, dass die Magnetisierung  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$  hinreichend glatt ist, so findet das magnetostatische Potential  $u$  eine Darstellung in Form einer Faltung

$$u = \mathcal{L}\mathbf{m} = G * \operatorname{div} \mathbf{m} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial G}{\partial x_j} * m_j.$$

Hierbei bezeichnet  $G$  den Newton Kern, und diese Darstellung gilt auch für  $\mathbf{m} \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ , siehe [45].

Es sei bemerkt, dass das Streufeld in der Literatur häufig als Demagnetisierungsfeld bezeichnet wird. Letzterer Begriff wird motiviert durch die Deutung des Streufeldes als Indikator für die Stärke des Feldes, welches angelegt werden muss, um die Magnetisierung umzukehren. Da die Streufeldenergie eines Spins nicht nur Einfluss auf die Nachbarspins nimmt, stellt dieser Energiebaustein im Gegensatz zu den übrigen einen nicht-lokalen Beitrag zur Gesamtenergie dar.

**Bemerkung 1.1.3.** *Das numerische Lösen von (1.16) führt auf eine aufwendige Berechnung, die man in der Regel vermeiden bzw. möglichst gering halten möchte. In Kapitel 4 stellen wir verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung des Streufeldes vor und gehen unter anderem auf deren Vor- und Nachteile bezüglich der numerischen Umsetzung ein.*

#### 1.1.4 Zeeman Energie

Der zweite Beitrag des magnetischen Feldes wird durch die Wechselwirkung des magnetischen Vektorfeldes  $\mathbf{m}$  mit einem äußeren Feld  $\mathbf{f}$  erzeugt. Die daraus resultierende Energie bezeichnet man als äußere Energie oder *Zeeman Energie*.

Dieser Energiebeitrag wird charakterisiert durch die Bevorzugung von Magnetisierungsrichtungen parallel zum äußeren Feld  $\mathbf{f}$ , um die Gesamtenergie zu minimieren.

Die Zeeman Energie findet folgende Darstellung

$$E_{ext} = -\mu_0 M_s^2 \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{m} \, d\mathbf{x} = -\mu_0 M_s \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{m} \, d\mathbf{x}.$$

In dieser Arbeit betrachten wir das angewandte äußere Feld  $\mathbf{f}$  entweder als Funktion  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega_\tau) = L^2((0, t_{\text{end}}); L^2(\Omega))$ ,  $\mathbf{f} \in C([0, t_{\text{end}}]; L^2(\Omega))$  oder  $\mathbf{f} \in C(\overline{\Omega}_\tau)$ . In Abschnitt 3.4 befassen wir uns mit Varianten zur Diskretisierung des externen Feldes  $\mathbf{f}$  in Zeit und/oder Ort.

#### 1.1.5 Motivation der Modellgleichung

Im Folgenden wollen wir eine anschauliche Motivation der Modellgleichung anstreben.

Aus Sicht der Magnetisierung  $\mathbf{m}$  ist der Zustand niedrigster Energie genau dann erreicht, wenn  $\mathbf{m}$  parallel zum effektiven magnetischen Feld  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  ausgerichtet ist. Dieses Energieminimum ist gleichzeitig genau jener Zustand, der von der Magnetisierung angestrebt wird, um sich im Equilibrium zu befinden. Mit dem Ziel, in eben diesen energieärmsten Gleichgewichtszustand zu gelangen, antwortet das Vektorfeld  $\mathbf{m}$  auf das angelegte Feld  $\mathbf{f}$ . Die dynamische Beschreibung dieser Reaktion der Magnetisierung wird durch die LLG-Gleichung gegeben.

Zum besseren Verständnis wollen wir die LLG-Gleichung hier nochmals anführen

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\frac{1}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}), \quad (1.17)$$

d.h. die rechte Seite von Gleichung (1.17) beschreibt die zeitliche Veränderung der Magnetisierung. Der erste Term der rechten Seite beinhaltet im Wesentlichen die Präzession  $\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}$  der Magnetisierung  $\mathbf{m}$  um das effektive magnetische Feld  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$ . Würde dieser Summand von keinem Dämpfungsterm ergänzt werden, so würde diese Gleichung eine unendlich lange und gleichmäßige Rotation der Magnetisierung  $\mathbf{m}$  um  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  beschreiben. Der zweite Beitrag auf der rechten Seite

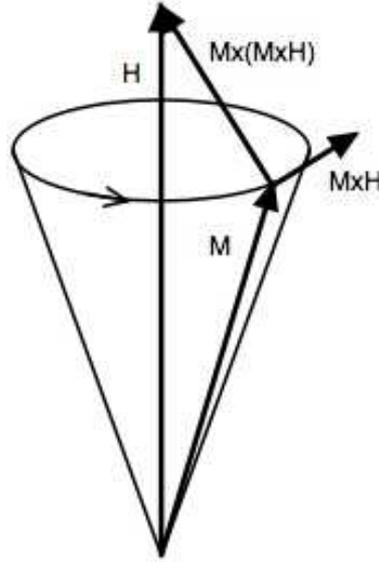


Abbildung 1.4: Gedämpfte Rotation der Magnetisierung  $\mathbf{m}$  um das effektive Feld  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$ .

der LLG-Gleichung wird als Dämpfungsterm bezeichnet und beschreibt jene Kraft, die die Magnetisierung aus dieser gleichmäßigen Präzession ablenkt und in Richtung des effektiven Feldes  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  zieht. Wie schnell die Magnetisierung der Änderung des effektiven Feldes folgen kann, wird durch die empirische Dämpfungskonstante  $\alpha$  festgelegt. Abbildung 1.4 veranschaulicht einerseits die rotierende Magnetisierung  $\mathbf{m}$  um  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  und stellt die Wirkung von  $\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}})$  dar.

Betrachtet man ein reduziertes effektives magnetisches Feld

$$\mathbf{h}_{\text{eff}} = \Delta \mathbf{m},$$

so modelliert dies den Small-Particle-Limit, d.h. die Magnetisierung  $\mathbf{m}$  erfüllt folgende Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\frac{1}{1+\alpha^2} \mathbf{m} \times \Delta \mathbf{m} - \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \Delta \mathbf{m}). \quad (1.18)$$

Hierbei führt der Grenzübergang der Dämpfungskonstante  $\alpha \rightarrow 0$  auf die Heisenberg-Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{m},$$

da

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \alpha} \rightarrow 0 \quad \text{für } \alpha \rightarrow 0.$$

Substituieren wir für  $\alpha > 0$

$$\tilde{\mathbf{m}}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{m} \left( \frac{1+\alpha^2}{\alpha} t, \mathbf{x} \right),$$

so leiten wir aus dem Small-Particle-Limit (1.18) nach der Kettenregel folgende Gleichung ab

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^2} \frac{\partial \tilde{\mathbf{m}}}{\partial t} = -\frac{1}{1+\alpha^2} \tilde{\mathbf{m}} \times \Delta \tilde{\mathbf{m}} - \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \tilde{\mathbf{m}} \times (\tilde{\mathbf{m}} \times \Delta \tilde{\mathbf{m}}).$$

Skalierung um  $(1 + \alpha^2)/\alpha$  und Miteinbeziehen der Identität

$$\tilde{\mathbf{m}} \times (\tilde{\mathbf{m}} \times \Delta \tilde{\mathbf{m}}) = (\tilde{\mathbf{m}} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{m}})\tilde{\mathbf{m}} - |\tilde{\mathbf{m}}|^2 \Delta \tilde{\mathbf{m}} = (\tilde{\mathbf{m}} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{m}})\tilde{\mathbf{m}} - \Delta \tilde{\mathbf{m}},$$

wobei wir hier die nicht-konvexe Nebenbedingung  $|\mathbf{m}| = 1$  bzw.  $|\tilde{\mathbf{m}}| = 1$  genutzt haben, führt auf

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{m}}}{\partial t} = -\frac{1}{\alpha} \tilde{\mathbf{m}} \times \Delta \tilde{\mathbf{m}} - (\tilde{\mathbf{m}} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{m}})\tilde{\mathbf{m}} + \Delta \tilde{\mathbf{m}}.$$

Für den Limes  $\alpha \rightarrow \infty$  resultiert diese Gleichung unter erneuter Berücksichtigung der nicht-konvexen Nebenbedingung in

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{m}}}{\partial t} = |\nabla \tilde{\mathbf{m}}|^2 \tilde{\mathbf{m}} + \Delta \tilde{\mathbf{m}},$$

also den Wärmefluss für harmonische Abbildungen.

**Bemerkung 1.1.4.** *Es gilt zu beachten, dass man unter Anwendung des  $\nabla$ -Operators auf  $|\mathbf{m}|^2$  die Identität  $\mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{m} = 0$  erhält. Dies impliziert weiters  $\mathbf{m} \cdot \Delta \mathbf{m} = -|\nabla \mathbf{m}|^2$ , da  $0 = \nabla \cdot (\mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{m}) = |\nabla \mathbf{m}|^2 + \mathbf{m} \cdot \Delta \mathbf{m}$  gilt.*

## 1.2 Formulierungen der LLG-Gleichung

Im Folgenden wollen wir zwei weitere, jedoch mathematisch äquivalente Formulierungen der LLG-Gleichung präsentieren. Wir werden eine Motivation für solche Varianten geben und darüberhinaus deren Äquivalenz nachweisen.

Die verschiedenen Formulierungen der LLG-Gleichung erlauben einerseits ein einfaches Verständnis der Modellgleichung und dienen andererseits als Grundlage für die Definition einer schwachen Lösung bzw. als Basis für die Entwicklung eines numerischen Lösungsverfahrens. Die Wahl zwischen den einzelnen Formulierungen der dynamischen Modellgleichung basiert häufig auf mathematischer Dienlichkeit.

In folgendem Lemma wollen wir die äquivalenten Formen präsentieren.

**Lemma 1.2.1.** *Die LLG-Gleichung findet in klassischer Form folgende Darstellung*

$$\mathbf{m}_t = -\frac{1}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}), \quad (1.19)$$

$$\mathbf{m}(0) = \mathbf{m}_0 \text{ in } H^1(\Omega; \mathbb{S}^2), \quad (1.20)$$

$$\partial_\nu \mathbf{m} = 0 \text{ auf } (0, t_{\text{end}}) \times \partial\Omega. \quad (1.21)$$

Unter Ergänzung derselben Anfangs- und Randbedingungen (1.20)–(1.21) gilt Äquivalenz zu

$$\alpha \mathbf{m}_t + \mathbf{m} \times \mathbf{m}_t = \mathbf{h}_{\text{eff}} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m} \quad \text{und} \quad |\mathbf{m}| = 1 \text{ f.ü. in } \Omega_\tau \quad (1.22)$$

bzw. zu

$$\mathbf{m}_t - \alpha \mathbf{m} \times \mathbf{m}_t = \mathbf{h}_{\text{eff}} \times \mathbf{m}. \quad (1.23)$$

Ferner gilt für die Darstellungen (1.19) und (1.23)  $|\mathbf{m}| = 1$  fast überall in  $\Omega_\tau$ .

*Beweis.* Der Übersichtlichkeit halber teilen wir den Beweis in mehrere Abschnitte. In den ersten beiden Schritten wollen wir auf die nicht-konvexe Nebenbedingung  $|\mathbf{m}| = 1$  eingehen und zeigen, dass diese bereits sowohl aus der klassischen Formulierung der LLG-Gleichung als auch aus der Gilbert-Formulierung (1.23) hervorgeht. In den darauffolgenden Teilen des Beweises schließen wir die Äquivalenz der drei oben vorgestellten Formulierungen der LLG-Gleichung unter Verwendung algebraischer Umformungen und unter Beachtung der Rechenregeln für das Vektorprodukt.

- In einem ersten Schritt zeigen wir, dass aus der klassischen Formulierung (1.19) der LLG-Gleichung die nicht-konvexe Nebenbedingung  $|\mathbf{m}| = 1$  folgt. Dazu multiplizieren wir (1.19) mit  $\mathbf{m}$  und erhalten

$$\mathbf{m}_t \cdot \mathbf{m} = -\frac{1}{1 + \alpha^2}(\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}) \cdot \mathbf{m} - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}(\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}})) \cdot \mathbf{m}.$$

Wenden wir die Orthogonalitätsrelation  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$  für alle  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  auf die Magnetisierung  $\mathbf{m}$  bzw. das effektive magnetische Feld  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  an, so sehen wir

$$\mathbf{m}_t \cdot \mathbf{m} = 0.$$

Demnach gilt

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{m}|^2 = \mathbf{m}_t \cdot \mathbf{m} = 0,$$

wodurch wir schließen, dass die Länge der Magnetisierung  $|\mathbf{m}|$  konstant in der Zeit ist. Als Konsequenz aus  $\mathbf{m}_0 \in H^1(\Omega; \mathbb{S}^2)$  und daher  $|\mathbf{m}_0| = 1$  fast überall in  $\Omega$  folgern wir schließlich, dass  $|\mathbf{m}|^2 = 1$  fast überall in  $\Omega_\tau$  gilt.

- In einem weiteren Schritt wollen wir beweisen, dass wir dieselbe Aussage auch aus der Gilbert-Formulierung (1.23) ableiten können. Wir multiplizieren (1.23) mit  $\mathbf{m}$  und erhalten

$$\mathbf{m}_t \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m}_t \cdot \mathbf{m} - \alpha(\mathbf{m} \times \mathbf{m}_t) \cdot \mathbf{m} = (\mathbf{h}_{\text{eff}} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m} = 0.$$

Aus diesem Zwischenresultat folgt mit denselben Argumenten wie im ersten Abschnitt des Beweises  $|\mathbf{m}|^2 = 1$  fast überall in  $\Omega_\tau$ .

- Im dritten Teil des Beweises führen wir die klassische Formulierung (1.19) der LLG-Gleichung mit algebraischen Umformungen und unter Beachtung der Rechenregeln für das Vektorprodukt in Gleichung (1.22) über.

Wir wenden die Identität  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$  für alle  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  an, um folgende Gleichheit einzusehen

$$\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}) = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m} - |\mathbf{m}|^2 \mathbf{h}_{\text{eff}}. \quad (1.24)$$

Dies erlaubt uns Gleichung (1.19) wie folgt zu schreiben

$$\mathbf{m}_t = -\frac{1}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} ((\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m} - |\mathbf{m}|^2 \mathbf{h}_{\text{eff}}) \quad (1.25)$$

$$= -\frac{1}{1 + \alpha^2} \mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m} + \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} |\mathbf{m}|^2 \mathbf{h}_{\text{eff}}. \quad (1.26)$$

Setzen wir die im ersten Teil des Beweises gewonnene Aussage  $|\mathbf{m}| = 1$  ein, dann erlaubt uns diese Feststellung Gleichung (1.26) unter Bildung des Kreuzproduktes mit  $\mathbf{m}$  in folgende Gleichung überzuführen

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_t \times \mathbf{m} &= -\frac{1}{1+\alpha^2}(\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}) \times \mathbf{m} \\ &\quad - \frac{\alpha}{1+\alpha^2}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m} \times \mathbf{m} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\mathbf{h}_{\text{eff}} \times \mathbf{m}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Dies ergibt unter Berücksichtigung von  $(\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}) \times \mathbf{m} = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m} + |\mathbf{m}|^2\mathbf{h}_{\text{eff}} = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m} + \mathbf{h}_{\text{eff}}$

$$\mathbf{m}_t \times \mathbf{m} = -\frac{1}{1+\alpha^2}\mathbf{h}_{\text{eff}} + \frac{1}{1+\alpha^2}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\mathbf{h}_{\text{eff}} \times \mathbf{m}. \quad (1.28)$$

Es sei bemerkt, dass erneute Anwendung des Kreuzproduktes mit  $\mathbf{m}$  wieder zurück auf Gleichung (1.25) führt. Daher sind die Formulierungen (1.19) und (1.28) äquivalent. Addition der mit  $\alpha$  multiplizierten Gleichung (1.25), also

$$\alpha\mathbf{m}_t = -\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} - \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}((\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m} - \mathbf{h}_{\text{eff}}),$$

und der um  $-1$  skalierten Gleichung (1.28), d.h.

$$-\mathbf{m}_t \times \mathbf{m} = \frac{1}{1+\alpha^2}\mathbf{h}_{\text{eff}} - \frac{1}{1+\alpha^2}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}},$$

impliziert

$$\alpha\mathbf{m}_t - \mathbf{m}_t \times \mathbf{m} = \mathbf{h}_{\text{eff}} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m}, \quad (1.29)$$

d.h. aus der klassischen Formulierung (1.19) folgt die alternative Variante (1.22).

- Betrachten wir nun die alternative Formulierung (1.29) und setzen  $|\mathbf{m}| = 1$  als gültig voraus, dann zeigt erneute Bildung des Kreuzproduktes mit  $\mathbf{m}$ , Einbindung der Identität  $(\mathbf{m}_t \times \mathbf{m}) \times \mathbf{m} = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_t)\mathbf{m} - |\mathbf{m}|^2\mathbf{m}_t = -\mathbf{m}_t$  und Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelation  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_t = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_t - \alpha\mathbf{m} \times \mathbf{m}_t &= \alpha\mathbf{m}_t \times \mathbf{m} - (\mathbf{m}_t \times \mathbf{m}) \times \mathbf{m} \\ &= \mathbf{h}_{\text{eff}} \times \mathbf{m} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m} \times \mathbf{m} \\ &= \mathbf{h}_{\text{eff}} \times \mathbf{m}, \end{aligned}$$

d.h. aus der alternativen Form (1.22) folgt unter der Annahme  $|\mathbf{m}| = 1$  die Gilbert-Formulierung (1.23).

- Im nächsten Schritt wollen wir nun aus Gleichung (1.23) zunächst die alternative Form (1.22) der LLG-Gleichung folgern.

Wir wenden auf Gleichung (1.23) das Vektorkreuzprodukt mit  $\mathbf{m}$  an. Aufgrund von  $(\mathbf{m} \times \mathbf{m}_t) \times \mathbf{m} = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_t)\mathbf{m} + |\mathbf{m}|^2\mathbf{m}_t = \mathbf{m}_t$  und  $(\mathbf{h}_{\text{eff}} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{m} = -\mathbf{h}_{\text{eff}} + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m}$  erhalten wir folgendes Ergebnis

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_t \times \mathbf{m} - \alpha(\mathbf{m} \times \mathbf{m}_t) \times \mathbf{m} &= (\mathbf{h}_{\text{eff}} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{m} \\ \mathbf{m}_t \times \mathbf{m} - \alpha\mathbf{m}_t &= -\mathbf{h}_{\text{eff}} + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m}. \end{aligned}$$

Nachdem  $\mathbf{m}_t \times \mathbf{m} = -\mathbf{m} \times \mathbf{m}_t$  gilt, stellt dies bereits die alternative Form (1.22) dar, d.h. (1.23) impliziert (1.22). Damit erhalten wir zusammen mit der Beobachtung aus dem zweiten Teil des Beweises Äquivalenz der Gilbert-Form (1.23) zu der alternativen Formulierung (1.22).

- Nun wollen wir Gleichung (1.23) mit dem  $\alpha$ -fachen der Gleichung (1.22) linear kombinieren, was in folgende Gleichheit resultiert

$$\begin{aligned} (1 + \alpha^2)\mathbf{m}_t &= \mathbf{m}_t + \alpha^2\mathbf{m}_t - \alpha\mathbf{m} \times \mathbf{m}_t + \alpha\mathbf{m} \times \mathbf{m}_t \\ &= \mathbf{h}_{\text{eff}} \times \mathbf{m} + \alpha\mathbf{h}_{\text{eff}} - \alpha(\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m} \\ &= -\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} + \alpha(\mathbf{m} \cdot \mathbf{m})\mathbf{h}_{\text{eff}} - \alpha(\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m}, \end{aligned}$$

also

$$\mathbf{m}_t = -\frac{1}{1 + \alpha^2}\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} + \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}(|\mathbf{m}|^2\mathbf{h}_{\text{eff}} - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}})\mathbf{m}).$$

Erneute Anwendung der Rechenregeln für das Vektorkreuzprodukt im  $\mathbb{R}^3$  bzw. Identität (1.24) zeigen schließlich

$$\mathbf{m}_t = -\frac{1}{1 + \alpha^2}\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}(\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}})).$$

Dies entspricht exakt der klassischen Formulierung (1.19) der LLG-Gleichung. Damit ist die Äquivalenzkette nun vollständig bewiesen und der Beweis abgeschlossen.  $\square$

**Bemerkung 1.2.2.** Gleichung (1.23) wird in der Literatur häufig als Gilbert-Formulierung der LLG-Gleichung bezeichnet. Im Weiteren werden wir von Gleichung (1.22) als alternative Form sprechen.

**Bemerkung 1.2.3.** Man beachte, dass sowohl die Gilbert-Formulierung als auch die klassische Form der LLG-Gleichung die nicht-konvexe Nebenbedingung  $|\mathbf{m}| = 1$  fast überall in  $\Omega_\tau$  bereits aufgrund der Erfüllung von  $|\mathbf{m}_0| = 1$  fast überall in  $\Omega$  erhalten. Daher ist es hinreichend für ebendiese Formulierungen nur letztere Bedingung zu fordern. Im Gegensatz dazu benötigt die alternative Variante (1.22) der LLG-Gleichung die Nebenbedingung  $|\mathbf{m}| = 1$  fast überall in  $\Omega_\tau$ .

## 1.3 Lösungskonzepte und Überblick der aktuellen Literatur

Möchte man über eine Lösung der LLG-Gleichung sprechen, so ist zwischen den einzelnen Lösungsbegriffen und -ansätzen zu differenzieren. Im Allgemeinen müssen wir zwischen Lösungen

- im starken Sinn
- im schwachen Sinn

unterscheiden und weiters auch im Hinblick auf

- analytisch
- numerisch analytisch.

In diesem Abschnitt wollen wir einen groben Überblick über die aktuellen und bereits bekannten Resultate bezüglich der Lösung der LLG-Gleichung zusammenstellen. Dabei unterscheiden wir zwischen Literatur zur analytischen Behandlung und Publikationen zum numerischen Umgang mit dieser. Im Wesentlichen ist dabei zu beachten, dass sich der Großteil dieser Resultate auf ein vereinfachtes Modell bezieht, in dem das effektive magnetische Feld  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  auf den Austausch reduziert wird, also  $\mathbf{h}_{\text{eff}} = \Delta \mathbf{m}$ . Außerdem wird der Begriff der LLG-Gleichung nicht einheitlich verwendet wenn gleich stets charakteristische Bausteine in den jeweiligen Modellproblemen enthalten sind. Dennoch dienen diese Resultate als Basis für ein weiteres Studium der LLG-Gleichung mit vollem effektiven Feld. Eine solche Erweiterung, wie sie auch in der aktuellen Arbeit zu finden ist, dient dem besseren Verständnis von dynamischen Prozessen in magnetischen Materialien im Zusammenhang mit analytischen/mathematischen Aspekten als auch mit physikalischer und damit praktischer Relevanz.

Bevor wir einen Überblick der aktuellen Forschung geben, die im Zusammenhang mit den jeweiligen Lösungskonzepten steht, wollen wir zwei Lösungsbegriffe einführen.

Zuerst wollen wir den Begriff einer Lösung im starken Sinn vorstellen. Lösungen  $\mathbf{m} : \Omega_\tau \rightarrow \mathbb{S}^2$ , die Gleichung (1.7) unter der Anfangsbedingung (1.8) und der Randbedingung (1.9) erfüllen, bezeichnet man als *starke Lösungen* der LLG-Gleichung.

Die folgende Definition führt den Begriff einer *schwachen Lösung* der LLG-Gleichung ein. Diese basiert auf jenem Konzept, das in [8] präsentiert wurde.

**Definition 1.3.1.** Sei  $\mathbf{m}_0 \in H^1(\Omega; \mathbb{S}^2)$  eine bekannte Startmagnetisierung, dann wird  $\mathbf{m}$  als *schwache Lösung* der LLG-Gleichung bezeichnet, falls für alle Zeiten  $t_{\text{end}} > 0$  folgende Eigenschaften erfüllt sind

(i)  $\mathbf{m} \in H^1(\Omega_\tau; \mathbb{S}^2)$  mit  $\mathbf{m}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{m}_0(\mathbf{x})$  im Spürsinn;

(ii) für alle  $\phi \in C_0^\infty(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3)$  gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\tau} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \cdot \phi \, d\mathbf{x} \, dt - \alpha \int_{\Omega_\tau} \left( \mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \right) \cdot \phi \, d\mathbf{x} \, dt \\ &= C_{\text{ex}} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_\tau} \left( \mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} \, dt \\ & \quad - \int_{\Omega_\tau} \left( \left( -\frac{K}{\mu_0 M_s^2} D\Phi(\mathbf{m}) - \mathcal{P}(\mathbf{m}) + \mathbf{f} \right) \times \mathbf{m} \right) \cdot \phi \, d\mathbf{x} \, dt; \end{aligned} \quad (1.30)$$

(iii) für fast alle  $t' \in (0, t_{\text{end}})$  gilt

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}(t', \cdot)|^2 \, d\mathbf{x} + C_1 \int_{[0, t'] \times \Omega} \left| \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \right|^2 \, d\mathbf{x} \, dt \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_0|^2 \, d\mathbf{x} + C_2, \quad (1.31)$$

wobei die Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  nur vom angewandten äußeren Feld  $\mathbf{f}$ , dem Gebiet  $\Omega$  und dem Dämpfungsparameter  $\alpha > 0$  abhängen.

Die ersten beiden Forderungen der Definition einer schwachen Lösung scheinen in einem gewissen Sinn natürlich zu sein, da sie der klassischen Idee einer schwachen Lösung folgen. Wir bemerken, dass (1.30) die schwache Form der Gilbert-Formulierung (1.23) darstellt. Die letzte Bedingung in Definition 1.3.1 repräsentiert allerdings eine Stabilitätsabschätzung, die beschränktes Wachstum in Ort und Zeit der Magnetisierung  $\mathbf{m}$  fordert. Diese Restriktion ist wiederum durch einen physikalischen Zugang zu mikromagnetischen Problemstellungen gerechtfertigt. In der vorliegenden

Arbeit beziehen wir unsere Resultate stets auf einen solchen Lösungsbegriff.

Im Bezug auf die Theorie zu analytischen Lösungen der LLG-Gleichung wollen wir hier lediglich jene zwei Arbeiten anführen, die zum Entstehungsprozess der vorliegenden Dissertation beigetragen haben. In [15] wird eine starke Lösung vorgestellt, die jedoch entweder lokal und eindeutig in der Zeit ist oder global existiert und gleichzeitig die Bedingung erfüllt, dass die Anfangsdaten hinreichend kleine Energie haben. Des Weiteren ist letzteres Resultat auf den zweidimensionalen Fall eingeschränkt. Wir bemerken, dass in dieser Referenz ein reduziertes effektives Feld  $\mathbf{h}_{\text{eff}} = \Delta \mathbf{m} - \mathcal{P}(\mathbf{m})$  betrachtet wird.

Ein schwaches Lösungskonzept wird beispielsweise in [8] betrachtet, wobei das effektive Feld auf  $\mathbf{h}_{\text{eff}} = \Delta \mathbf{m}$  reduziert wird. Hierbei wird gezeigt, dass die Lösungen zwar global in der Zeit sind, aber im Allgemeinen nicht eindeutig. – Es werden explizite Fälle konstruiert, in denen Nichteindeutigkeit gezeigt wird. Wir bemerken, dass dieser von ALOUGES und SOYEUR in [8] vorgestellte Zugang zum Beweis der Existenz einer schwachen Lösung der LLG-Gleichung auch auf ein volles effektives Feld im Sinn von (1.6) übertragen werden kann.

Legt man den Fokus auf numerisch analytische Resultate, so eröffnet sich eine Vielfalt an kürzlich publizierten Arbeiten. Die approximative Berechnung von (starken und/oder schwachen) Lösungen der LLG-Gleichung stellt ein interessantes und umfangreiches Thema sowohl in der Physik als auch in der Mathematik dar. Die Anwendung der LLG-Gleichung in realistischen Simulationen ist von großer Bedeutung für das Verständnis, die Modellierung und die Weiterentwicklung von magnetischen Materialien und den damit im Zusammenhang stehenden Technologien und industriellen Anwendungen. Aus einem mathematischen Blickwinkel gesehen bedeutet das Lösen der LLG-Gleichung ebenfalls eine interessante und anspruchsvolle Aufgabe, da die betrachtete Gleichung nicht-linear ist und durch eine nicht-konvexe Nebenbedingung ergänzt wird. Außerdem gilt es zu beachten, dass der nicht-lokale Beitrag des Streufeldes im effektiven Feld sowohl aus numerisch analytischer Sicht als auch im Bezug auf die Implementierung eine Herausforderung darstellt.

In den letzten Jahrzehnten gab es eine stetige Weiterentwicklung in der Vorgehensweise zur approximativen Lösung der LLG-Gleichung. Da verschiedene Interessensgruppen daran beteiligt sind und die Aufgabenstellung eine gewisse Komplexität mit sich bringt, ist es wenig verwunderlich, dass es eine Reihe von verschiedenen Lösungsansätzen gibt. Diese können nach diversen Gesichtspunkten charakterisiert und klassifiziert werden, siehe [33] und [18]. Im Folgenden wollen wir einen groben Überblick über die bereits erbrachten (numerisch analytischen) Resultate geben ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, um letztendlich auch die vorliegende Arbeit einzuordnen. Dabei beschränken wir uns auf Ansätze, die im effektiven Feld  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  zumindest den Beitrag der Austauschenergie miteinbeziehen. Außerdem fokussieren wir Lösungsansätze die auf Finiten Elementen (FE) basieren und werden diese anführen und knapp erklären. Dabei betrachten wir Zeitintegratoren mit Ortsschrittweite  $h$  und Zeitschrittweite  $k$ . Darüber hinaus stellen wir im  $j$ -ten Zeitschritt die im Ort approximierte Magnetisierung durch  $\mathbf{m}_h^j(\mathbf{x}) \approx \mathbf{m}(t_j, \mathbf{x})$  dar. Weiters bemerken wir, dass in Finite Elemente Simulationen die Erfüllung der Nebenbedingung  $|\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z})| = 1$  üblicherweise für alle Knoten  $\mathbf{z}$  der FE-Triangulierung garantiert wird.

Weiters unterscheiden wir im Folgenden wir zwischen Verfahren, die die Existenz einer starken Lösung der LLG-Gleichung mit gewissen Regularitätseigenschaften voraussetzen und diese auch approximieren (semi-implizite Verfahren), und solchen, die sich auf die näherungsweise Berechnung einer schwachen Lösung der LLG-Gleichung beziehen.

Wir halten uns im Wesentlichen an den sehr ausführlich gehaltenen Überblicksartikel [18] und entnehmen Lösungsansätze daraus. Diese Auflistung wird ergänzt durch weitere Arbeiten.

Zunächst wollen wir numerische Verfahren zur Lösung der LLG-Gleichung anführen, die auf die Approximation einer starken Lösung abzielen.

Als ersten Ansatz präsentieren wir ein voll implizites Rückwärts-Euler-Verfahren aus [18], in dem die nicht-konvexe Nebenbedingung, die die Längenerhaltung der Magnetisierung (zumindest knotenweise) erhält, mittels Projektion garantiert wird

$$\begin{aligned}\partial_t \widehat{\mathbf{m}}_h^{j+1} &= -\frac{1}{1+\alpha^2} \widehat{\mathbf{m}}_h^{j+1} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}(\widehat{\mathbf{m}}_h^{j+1}, \mathbf{f}_h^{j+1}) - \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \widehat{\mathbf{m}}_h^{j+1} \times (\widehat{\mathbf{m}}_h^{j+1} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}(\widehat{\mathbf{m}}_h^{j+1}, \mathbf{f}_h^{j+1})) \\ \mathbf{m}_h^{j+1} &= \frac{\widehat{\mathbf{m}}_h^{j+1}}{|\widehat{\mathbf{m}}_h^{j+1}|}.\end{aligned}$$

Dieses erweist sich stabiler im Vergleich zu expliziten Methoden. Allerdings gilt es zu beachten, dass in jedem Zeitschritt ein nicht-lineares Gleichungssystem zu lösen ist. Dieser Ansatz ist jedoch aus analytischer Sicht nicht verstanden.

Im Gegensatz dazu wird in [21]  $|\nabla \mathbf{m}|^2$  als Lagrange-Multiplikator für die nicht-konvexe Bedingung  $|\mathbf{m}| = 1$  angesetzt. Dies führt ausgehend von der äquivalenten Formulierung (1.23) letztendlich auf das Lösen von

$$\frac{\widehat{\mathbf{m}}_h^{j+1} - \mathbf{m}_h^j}{k} + \frac{1}{\alpha} \mathbf{m}_h^j \times \frac{\widehat{\mathbf{m}}_h^{j+1} - \mathbf{m}_h^j}{k} = \frac{1}{\alpha} \Delta \widehat{\mathbf{m}}_h^{j+1}$$

unter der Randbedingung  $\partial_\nu \widehat{\mathbf{m}}_h^{j+1}|_\Gamma = 0$ . Wieder wird durch Projektion  $\mathbf{m}_h^{j+1} = \widehat{\mathbf{m}}_h^{j+1}/|\widehat{\mathbf{m}}_h^{j+1}|$  die Magnetisierung im  $(j+1)$ -ten Zeitschritt bestimmt. E und WANG zeigen in [21] unter der Annahme, dass es eine exakte Lösung gibt, die der Regularitätsannahme  $\mathbf{m} \in L^\infty((0, t_{\text{end}}), W^{3,2}(\Omega))$  genügt, Konvergenz in  $L^\infty((0, t_{\text{end}}), L^\infty(\Omega))$  von erster Ordnung und unbedingte Stabilität. Unter leichten Modifikationen postulieren die Autoren eine Genauigkeit von zweiter Ordnung, wobei dies den Verlust der unbedingten Stabilität nach sich zieht.

Als Verfahren, das auf der Mittelpunktsregel basiert, wollen wir jenen Ansatz präsentieren, der zunächst in [38] für ein effektives Feld  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$ , das aus der Austauschenergie und der Anisotropieenergie resultiert, eingeführt wurde. In [20] wurde diese Idee weiter verfolgt, wobei darin schließlich ein effektives Feld  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  betrachtet wird, das nun vom Austausch, der Anisotropie, dem Streufeld und dem angelegten äußeren Feld abhängt. Zur Diskretisierung bezüglich der Ortskomponente werden Finite Differenzen oder Finite Elemente vorgeschlagen. Unter der Notation

$$\mathbf{m}_h^{j+1/2} := \frac{\mathbf{m}_h^j + \mathbf{m}_h^{j+1}}{2}$$

lässt sich das Schema wie folgt skizzieren

$$\frac{\mathbf{m}_h^{j+1} - \mathbf{m}_h^j}{k} = \mathbf{m}_h^{j+1/2} \times \left( \frac{1}{1+\alpha^2} \mathbf{h}_{\text{eff}}(\mathbf{m}_h^{j+1/2}, \mathbf{f}_h^{j+1/2}) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \mathbf{m}_h^j \times \mathbf{h}_{\text{eff}}(\mathbf{m}_h^{j+1/2}, \mathbf{f}_h^{j+1/2}) \right).$$

Die Autoren aus [20] weisen nach, dass dieses Verfahren die Längenerhaltung der Magnetisierung garantiert und darüberhinaus gewisse physikalische Eigenschaften wahrt. Dennoch liegen weder Fehlerabschätzungen noch Konvergenzresultate vor. Außerdem gilt es zu bemerken, dass dieser Ansatz auf das Lösen eines nicht-linearen Gleichungssystems in jedem Zeitschritt hinausläuft.

Des Weiteren betrachten wir ein semi-implizites Verfahren, das für den dreidimensionalen Fall in [17] studiert wurde. Es gilt zu bemerken, dass hierbei wieder ein reduziertes effektives Feld  $\mathbf{h}_{\text{eff}} = \Delta \mathbf{m}$  angenommen wird. Ausgehend von der klassischen Formulierung (1.19) und unter

Einsatz einfacher äquivalenter Umformungen erhalten wir als essentielle Gleichung des Lösungsverfahrens

$$\frac{\mathbf{m}_h^{j+1} - \mathbf{m}_h^j}{k} - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \Delta \mathbf{m}_h^{j+1} = -\frac{1}{1 + \alpha^2} \mathbf{m}_h^j \times \Delta \mathbf{m}_h^{j+1} + \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} |\nabla \mathbf{m}_h^j|^2 \mathbf{m}_h^{j+1}. \quad (1.32)$$

In [17] wird unter der Annahme, dass eine Lösung im starken Sinn existiert, eine Fehlerabschätzung nachgewiesen. Darüber hinaus werden die Voraussetzungen, denen zufolge eine starke Lösung existiert, angegeben. Für die  $L^\infty((0, t_{\text{end}}), L^2(\Omega))$ -Norm liegt eine Konvergenzordnung  $o(k)$  vor, während im Bezug auf die  $L^2((0, t_{\text{end}}), W^{1,2}(\Omega))$ -Norm  $o(k)$  festgestellt wird. Allerdings gilt es zu bemerken, dass bezüglich der nicht-konvexen Nebenbedingung lediglich die asymptotische Aussage  $\lim \max_{0 \leq j \leq J} \|1 - |\mathbf{m}_h^j|^2\|_{L^2} = o(k)$  für  $k \rightarrow 0$  vorliegt.

Um die Fehlerabschätzungen, die bezüglich des Schemas aus (1.32) gewonnen wurden, zu verbessern, führte PROHL in [46] einen Penalisierungsterm  $\Phi(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{m}_h^{j+1})$  ein und erhielt damit folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{m}_h^{j+1} - \mathbf{m}_h^j}{k} - \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \Delta \mathbf{m}_h^{j+1} + \frac{1}{\varepsilon} \Phi(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{m}_h^{j+1}) \mathbf{m}_h^{j+1} \\ = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} |\nabla \mathbf{m}_h^j|^2 \mathbf{m}_h^{j+1} - \frac{1}{1 + \alpha^2} \mathbf{m}_h^{j+1} \times \Delta \mathbf{m}_h^{j+1}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Hierbei dient der zusätzliche Beitrag der linken Seite nun der Bestrafung für eine Verletzung der nicht-konvexen Nebenbedingung  $|\mathbf{m}_h^j| = 1$  für  $j > 0$ , wobei der Parameter  $\varepsilon$  bzw.  $1/\varepsilon$  das Ausmaß der Penalisierung vorgibt. Wir bemerken, dass es für  $\Phi$  mehrere zulässige Ansätze gibt

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{m}_h^{j+1}) &= |\mathbf{m}_h^{j+1}|^2 - 1, \\ \Phi_2(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{m}_h^{j+1}) &= 1 - |\mathbf{m}_h^j|^{-2}, \\ \Phi_3(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{m}_h^{j+1}) &= 1 - |\mathbf{m}_h^j|^{-1}. \end{aligned}$$

In [46] werden alle drei Ansätze für ein Gebiet in 2D behandelt. Dabei werden je nach Regularität der Magnetisierung  $\mathbf{m}$  Konvergenzraten nachgewiesen, die gleichzeitig eine Abhängigkeit des Bestrafungsparameters  $\varepsilon$  von der Zeitschrittweite  $k$  je nach Wahl von  $\Phi$  nach sich ziehen. Darüberhinaus wird eine asymptotische Längenerhaltung der Magnetisierung mit Ordnung  $o(k^{1/2} \varepsilon^{1/2})$  festgehalten.

Nun widmen wir uns jener Klasse an Lösungsverfahren, die die näherungsweise Berechnung einer schwachen Lösung zum Ziel haben.

Ein erster Lösungsansatz, der nach der Approximation einer schwachen Lösung der LLG-Gleichung strebt, wurde in der Arbeit [6] von ALOUGES und JAISON eingeführt. Ausgehend von der alternativen Formulierung (1.22) wird hierbei eine FE-Diskretisierung mit einer expliziten Zeitdiskretisierung deduziert, indem als Testfunktion  $\phi = \mathbf{m} \times \psi$  mit  $\psi \in W^{1,2}(\Omega_\tau)^3 \cap L^\infty(\Omega_\tau)$  und  $\psi \cdot \mathbf{m} = 0$  zum Einsatz kommt. Zunächst ergibt sich damit als für alle  $\psi_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j} = \{\psi_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3) \mid \psi_h(\mathbf{z}_i) \cdot \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_i) = 0 \text{ für alle Knoten } \mathbf{z}_i \text{ der Triangulierung}\}$  zu lösende Gleichung

$$\alpha \int_{\Omega} \mathbf{v}_h^j \cdot \psi_h \, dx + \int_{\Omega} \left( \mathbf{m}_h^j \times \mathbf{v}_h^j \right) \cdot \psi_h \, dx = - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{m}_h^j \cdot \nabla \psi_h \, dx.$$

Bemerkt man allerdings, dass diese Gleichung linear bezüglich der Approximation  $\mathbf{v}_h^j$  der Zeitableitung der Magnetisierung ist, so ist klar, dass das Lösen nach  $\mathbf{v}_h^j$  einfacher ist als direkt  $\mathbf{m}_h^{j+1}$  durch  $\mathbf{v}_h^j = (\mathbf{m}_h^{j+1} - \mathbf{m}_h^j)/k$  zu berechnen unter gleichzeitiger Beachtung der nicht-konvexen

Nebenbedingung. Um dennoch schließlich  $\mathbf{m}_h^{j+1}$  zu erhalten, wird das Verfahren durch einen Projektionsschritt ergänzt

$$\mathbf{m}_h^{j+1} = \frac{\mathbf{m}_h^j + k\mathbf{v}_h^j}{|\mathbf{m}_h^j + k\mathbf{v}_h^j|}.$$

Damit wird insbesondere auch die Längenerhaltung  $|\mathbf{m}| = 1$  in jedem Knoten der Triangulierung sichergestellt. Wir heben hervor, dass im Gegensatz zu anderen Projektionsverfahren für dieses ein Konvergenzresultat vorliegt, das besagt, dass die numerischen Lösungen gegen eine schwache globale Lösung der LLG-Gleichung konvergieren, sofern zunächst der Grenzübergang  $k \rightarrow 0$  betrachtet wird und erst in einem zweiten Schritt der Limes  $h \rightarrow 0$  angenommen wird. Hier und im Folgenden ist *Konvergenz* im Sinn einer schwachen Subkonvergenz gegen eine schwache Lösung der LLG-Gleichung zu verstehen, d.h. es gibt eine Teilfolge, die schwach konvergiert.

Dieses Konvergenzresultat wurde in [11] verbessert, indem für eine Konvergenzaussage des expliziten Schemas lediglich die Forderung der Konvergenz von  $k/h^{1+d/2}$  gegen 0 erfüllt sein muss, wobei sich  $d$  auf die Dimension des Raumes bezieht, in dem das Problem gestellt ist. Dennoch scheint diese Kopplung der Orts- und Zeitschrittweite im Bezug auf eine praktische Umsetzung sehr nachteilig zu sein.

Möchte man solche starken Restriktionen der Ortsschrittweite  $h$  und der Zeitschrittweite  $k$  verhindern, so geht man üblicherweise zu impliziten Verfahren über. Ein solches Schema wurde von BARTELS und PROHL in [12] vorgeschlagen. Dieses ist ein Verfahren das von zweiter Ordnung in der Zeit ist. Dabei wird von Formulierung (1.23) der LLG-Gleichung ausgegangen und mittels der Mittelpunktsregel eine Zeitintegration realisiert. Demnach lässt sich für ein gegebenes  $\mathbf{m}_h^j$  die Magnetisierung im  $(j+1)$ -ten Zeitschritt durch  $\mathbf{m}_h^{j+1}$  approximieren, indem für alle  $\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  folgendes nicht-lineare Gleichungssystem gelöst wird

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \frac{\mathbf{m}_h^{j+1} - \mathbf{m}_h^j}{k} \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) dx - \alpha \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \left( \mathbf{m}_h^j \times \frac{\mathbf{m}_h^{j+1} - \mathbf{m}_h^j}{k} \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) dx \\ & = - \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \left( \mathbf{m}_h^{j+1/2} \times \tilde{\Delta}_h \mathbf{m}_h^{j+1/2} \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) dx. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathcal{I}_h$  den nodalen Interpolanten und  $\tilde{\Delta}_h$  stellt ein diskretes Pendant zum Laplace-Operator dar und wird durch  $-\int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\tilde{\Delta}_h \boldsymbol{\phi}_h \cdot \boldsymbol{\psi}_h) dx = \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\nabla \boldsymbol{\phi}_h \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}_h) dx$  für alle  $\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  definiert. Unter der Voraussetzung, dass bereits die initiale Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^0 \approx \mathbf{m}_0$  knotenweise die nicht-konvexe Nebenbedingung erfüllt, zeigen die Autoren, dass dies ebenfalls für die Lösungen  $\mathbf{m}_h^j$  für  $j > 0$ , die aus obigem Gleichungssystem resultieren, der Fall ist. Darüber hinaus wird für eine in der Zeit linear interpolierte Lösung  $\mathbf{m}_{hk}$  unter der Annahme, dass  $\mathbf{m}_h^0 \rightarrow \mathbf{m}_0$  in  $W^{1,2}(\Omega)$  für  $h \rightarrow 0$  gilt und unter exakter Lösung des nicht-linearen Gleichungssystems, schwache Konvergenz einer Teilfolge in  $W^{1,2}(\Omega_\tau)$  gegen eine schwache Lösung der LLG-Gleichung gezeigt sofern  $h$  und  $k$  (unabhängig voneinander) jeweils gegen 0 streben. Es gilt jedoch zu bemerken, dass in der Praxis nicht von einem exakten Lösen des nicht-linearen Systems ausgegangen werden kann. In [12] wird folgende Fix-Punkt-Iteration zur Lösung dieses nicht-linearen Gleichungssystems vorgeschlagen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \mathbf{m}_h^{j+1, \ell+1} \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) dx + \frac{\alpha}{k} \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \left( \mathbf{m}_h^j \times \mathbf{m}_h^{j+1, \ell+1} \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) dx \\ & + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \left( \mathbf{m}_h^{j+1, \ell+1} \times \tilde{\Delta}_h \mathbf{m}_h^{j+1, \ell} \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) dx \\ & + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \left( \mathbf{m}_h^{j+1, \ell+1} \times \tilde{\Delta}_h \mathbf{m}_h^j \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \left( \mathbf{m}_h^j \times \tilde{\Delta}_h \mathbf{m}_h^{j+1, \ell+1} \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) dx \\ & = -\frac{1}{4} \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \left( \mathbf{m}_h^j \times \tilde{\Delta}_h \mathbf{m}_h^j \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) dx + \frac{1}{k} \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \mathbf{m}_h^j \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) dx \end{aligned}$$

mit  $\mathbf{m}_h^{j+1,0} = \mathbf{m}_h^j \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  und für alle  $\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$ . Demnach wird für die Konvergenzanalyse eine ähnliche Bedingung an  $h$  und  $k$  gestellt wie im expliziten Fall, siehe [11]. Außerdem gilt es zu bemerken, dass durch diese Fix-Punkt-Iteration eine Approximation der eindeutigen Lösung  $\mathbf{m}_h^{j+1,*}$  erzielt wird, die im Allgemeinen die nicht-konvexe Nebenbedingung in den Knoten nicht mehr sicherstellt.

Alternativ dazu betrachtet BARTELS in [10] einen Algorithmus zur approximativen Lösung der LLG-Gleichung, der im Wesentlichen auf (1.34) aufbaut

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \frac{\mathbf{m}_h^{j+1} - \mathbf{m}_h^j}{k} \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) d\mathbf{x} - \alpha \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \left( \mathbf{m}_h^{j+1/2} \times \frac{\mathbf{m}_h^{j+1} - \mathbf{m}_h^j}{k} \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \left( \mathbf{m}_h^{j+1/2} \times \tilde{\Delta}_h \mathbf{m}_h^{j+1/2} \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( (\mathbf{r}_h^j \times \mathbf{m}_h^{j+1/2}) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

mit  $\|\mathbf{r}_h^j\|_{h,\Omega} := \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\mathbf{r}_h^j, \mathbf{r}_h^j) d\mathbf{x} \leq \varepsilon$  und mittels folgender Fix-Punkt-Iteration gelöst wird: Setze  $\mathbf{n}_h^0 := \mathbf{m}_h^j$  und  $\ell = 0$ . Dann (i) berechne  $\mathbf{n}_h^{\ell+1} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$ , sodass für alle  $\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{k} \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \mathbf{n}_h^{\ell+1} \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) d\mathbf{x} - \frac{2\alpha}{k} \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( (\mathbf{n}_h^{\ell+1} \times \mathbf{m}_h^j) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( (\mathbf{n}_h^{\ell+1} \times \tilde{\Delta}_h \mathbf{n}_h^{\ell}) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) d\mathbf{x} = \frac{2}{k} \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \mathbf{m}_h^j \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

gilt und (ii) falls  $\|\tilde{\Delta}(\mathbf{n}_h^{\ell+1} - \mathbf{n}_h^{\ell})\|_{h,\Omega} \leq \varepsilon$  setze  $\mathbf{m}_h^{j+1} := 2\mathbf{n}_h^{\ell+1} - \mathbf{m}_h^j$  und beende die Iteration, andernfalls setze  $\ell = \ell + 1$  und gehe zu (i). Für dieses Verfahren wird in dieser Arbeit ein analoges Resultat zu [12] nachgewiesen, wobei einerseits die notwendige Forderung des exakten Lösens des nicht-linearen Gleichungssystems, um unbedingte Konvergenz einzusehen, abgeschwächt wird durch die Konvergenz von  $\varepsilon \rightarrow 0$  unter der Bedingung  $\varepsilon = o(h^2)$ . Andererseits wird die Erfüllung der nicht-konvexe Nebenbedingung in jedem Knoten garantiert, indem  $\mathbf{r}_h^j = \tilde{\Delta}_h(\mathbf{n}_h^{\ell} - \mathbf{n}_h^{\ell-1})$  in das nicht-lineare Gleichungssystem (1.34) eingesetzt wird.

Es gilt zu betonen, dass die Ansätze aus [11, 12] stabil trotz einer Wahl von einem kleinen Dämpfungsparameter  $\alpha > 0$  zu sein scheinen.

Die bisher vorgestellten impliziten Schemata zur näherungsweise Berechnung einer schwachen Lösung der LLG-Gleichung bedienen sich stets der Gilbert-Formulierung (1.23). Einen anderen Ausgangspunkt kann jedoch auch die klassische Formulierung (1.19) darstellen. In [18] wird diese betrachtet und die Ideen aus [12] angewandt, um folgendes Schema basierend auf der Mittelpunktsregel zu erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \frac{\mathbf{m}_h^{j+1} - \mathbf{m}_h^j}{k} \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \left( \mathbf{m}_h^{j+1/2} \times (\mathbf{m}_h^{j+1/2} \times \tilde{\Delta}_h \mathbf{m}_h^{j+1/2}) \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \left( \mathbf{m}_h^{j+1/2} \times \tilde{\Delta}_h \mathbf{m}_h^{j+1/2} \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \mathbf{m}_h^{j+1/2} \times \mathbf{r}_h^{j+1} \right) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

für gegebenes  $\mathbf{r}_h^j \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  mit  $\|\mathbf{r}_h^j\|_{h,\Omega} \leq \varepsilon$  und alle  $\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$ . CIMRÁK präsentiert in [18] analoge Resultate wie sie in [12] bewiesen wurden.

Das aktuellste Verfahren wurde von ALOUGES in [5] publiziert. In dieser Arbeit wird ein implizites Finite Elemente Schema eingeführt, das lediglich die Lösung eines linearen Gleichungssystems pro Zeitschritt erfordert und sich als unbedingt konvergent zeigt. Ausgehend von der alternativen

Formulierung der LLG-Gleichung, siehe (1.22), unter Betrachtung eines reduzierten effektiven Feldes  $\mathbf{h}_{\text{eff}} = \Delta \mathbf{m}$  lässt sich das nach  $\mathbf{v}_h^j$  für alle  $\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j} = \{\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3) \mid \boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z}_i) \cdot \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_i) = 0 \text{ für alle Knoten } \mathbf{z}_i \text{ der Triangulierung}\}$  zu lösende Gleichungssystem wie folgt darstellen

$$\alpha \int_{\Omega} \mathbf{v}_h^j \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{m}_h^j \times \mathbf{v}_h^j) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{m}_h^j + \theta k \mathbf{v}_h^j) \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x}.$$

Um letztendlich die Magnetisierung im  $(j+1)$ -ten Zeitschritt zu approximieren, wird dieses Verfahren durch den Projektionsschritt

$$\mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})}{|\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})|} \quad (1.35)$$

für alle Knoten  $\mathbf{z}$  der Triangulierung komplettiert. Der Autor zeigt schwache Konvergenz für  $\theta \in (1/2; 1]$  für eine Teilfolge gegen eine schwache Lösung der LLG-Gleichung, die einzig die Konvergenz von  $h$  und  $k$  (unabhängig voneinander) gegen 0 fordert.

Auch dieses Verfahren scheint für einen kleinen Dämpfungsparameter  $\alpha > 0$  stabil zu sein. Allerdings gilt es zu bemerken, dass der Nachteil dieses Verfahrens darin liegt, dass es für  $\theta \in (1/2; 1]$  lediglich von erster Ordnung ist.

Die letztgenannte Publikation stellt im Wesentlichen den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit dar. Bevor wir jedoch auf dessen Inhalt eingehen und die gewonnenen Resultate präsentieren, wollen wir der Vollständigkeit halber eine Arbeit von ALOUGES, ET AL. zitieren, die zeitgleich und vollkommen unabhängig von der vorliegenden Arbeit entstanden ist, jedoch teilweise Überschneidungen aufweist.

In [7] wird eine Erweiterung des Algorithmus aus [5] vorgestellt, die nun ein volles effektives magnetisches Feld  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  zulässt und zusätzlich den Beitrag des Austausches implizit behandelt während die übrigen Terme explizit eingehen. Der Übersichtlichkeit halber fassen wir diese explizit berechneten Terme zusammen

$$\mathbf{h}_{\text{low}} = \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}, \mathbf{f}) := -\frac{K}{\mu_0 M_s^2} D\Phi(\mathbf{m}) - \mathcal{P}(\mathbf{m}) + \mathbf{f} = -C_{\text{ani}} D\Phi(\mathbf{m}) - \mathcal{P}(\mathbf{m}) + \mathbf{f}. \quad (1.36)$$

Daraus ergibt sich ein Schema, das bereits auch in [52] und [53] präsentiert wurde. Allerdings wird in dieser Arbeit keine Konvergenzanalyse im mathematischen Sinn ausgearbeitet.<sup>1</sup> Dieses Schema lässt sich wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega} \mathbf{v}_h^j \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{m}_h^j \times \mathbf{v}_h^j) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} &= -C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{m}_h^j + \theta k \mathbf{v}_h^j) \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

welches wieder für alle  $\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j} = \{\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3) \mid \boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z}_i) \cdot \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_i) = 0 \text{ für alle Knoten } \mathbf{z}_i \text{ der Triangulierung}\}$  nach der approximativen Zeitableitung  $\mathbf{v}_h^j$  der Magnetisierung zu lösen ist. Wie im ursprünglichen Algorithmus wird durch Projektion (1.35) die nicht-konvexe Nebenbedingung knotenweise garantiert und die Magnetisierung für den  $(j+1)$ -ten Zeitschritt angenähert. Die Autoren weisen schwache Konvergenz einer Teilfolge der in der Zeit linear interpolierten Lösung gegen eine schwache Lösung der LLG-Gleichung nach. Allerdings unterscheidet sich deren Lösungsbegriff in der Stabilitätsbedingung, die dort eine Energieabschätzung im Endzeitpunkt gegenüber dem Anfangszeitpunkt darstellt. Es gilt zu bemerken, dass diese offensichtlich

<sup>1</sup>Wir danken Prof. Jean-Christophe Toussaint für den Hinweis auf diese Arbeiten.

nicht für alle angelegten äußeren Felder  $\mathbf{f}$  im Allgemeinen erfüllt sein kann.

Alternativ zu (1.37) wird in [7] zusätzlich ein Verfahren vorgeschlagen, welches von zweiter Ordnung in der Zeit ist und im Wesentlichen auf der Mittelpunktsregel basiert

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} \mathbf{v}_h^j \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{m}_h^j \times \mathbf{v}_h^j) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} \\ &= -C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{m}_h^j + \frac{k}{2} \mathbf{v}_h^j) \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} + \frac{k}{2} \int_{\Omega} \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{v}_h^j, \mathbf{f}) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} - \frac{k}{2} \int_{\Omega} (\lambda^{j+1} \mathbf{v}_h^j) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $\lambda^{j+1}$  für  $j \geq 0$  die Lagrange-Multiplikatoren. Es gilt zu beachten, dass dieses Verfahren nun nicht-linear ist und demnach mittels Fix-Punkt-Iteration zu lösen ist. Für dieses Verfahren wurden keinerlei Konvergenzresultate postuliert.

Im folgenden Abschnitt werden wir die Hauptresultate der vorliegenden Arbeit vorstellen, um diese von den bisher erbrachten Publikationen abzugrenzen und in die vorhandene Literatur einzuordnen.

## 1.4 Aufbau der Arbeit und zentrale Resultate

Zunächst wollen wir die Gliederung der vorliegenden Arbeit kurz und präzise darstellen. Für einen groben Überblick des Aufbaus der Arbeit verweisen wir auf Abbildung 1.4.

Im aktuellen Kapitel findet sich eine Auseinandersetzung mit der Modellgleichung. Hierbei wird zunächst eine verständliche und vor allem zur Literatur aus der Physik einheitliche Notation der LLG-Gleichung angestrebt. Wir betrachten in der vorliegenden Arbeit stets eine entdimensionalisierte Variante und verwenden für diese ebenso die Bezeichnung „LLG-Gleichung“. Ausgehend davon beschäftigen wir uns mit diversen jedoch äquivalenten Formulierungen der LLG-Gleichung. Dies dient unter anderem einem einfacheren Verständnis der bisher erbrachten Resultate im Bezug auf dynamischen Mikromagnetismus, welche ebenfalls in diesem ersten Kapitel zu finden sind.

Das zweite Kapitel ist im Wesentlichen der Einführung und Erklärung jener Begriffe gewidmet, die in der vorliegenden Arbeit Gebrauch finden. Dies wird ergänzt durch grundlegende analytische Resultate, die einerseits direkt bewiesen werden und andererseits aus der Literatur zusammengetragen werden, um in den darauf folgenden Kapiteln einfach referenziert werden zu können.

Das Kernresultat der vorliegenden Arbeit wird in Kapitel 3 dargebracht. Dabei wird großer Wert auf eine ausführliche und verständliche Herleitung eines FE-Schemas gelegt, das zur effektiven Lösung der LLG-Gleichung angewandt werden kann. Außerdem wird durch eine rigorose Konvergenzanalyse sichergestellt, dass dieses Verfahren tatsächlich eine schwache Lösung der LLG-Gleichung approximiert, sofern gewisse Anforderungen an die Startmagnetisierung, die Triangulierung des magnetischen Körpers und die näherungsweise berechneten Anteile des totalen effektiven Feldes  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  erfüllt sind.

Im darauf folgenden Kapitel legen wir den Fokus auf die numerische Realisierung des Streufeldes, welches den am aufwändigsten zu berechnenden Beitrag des effektiven magnetischen Feldes  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  darstellt. Dabei bereiten wir eine Fülle an Ansätzen zur Approximation des Streufeldoperators derart auf, sodass einerseits herausgearbeitet wird, ob sich dieser Zugang aus analytischer Sicht eignet, und andererseits offensichtliche Vor- und Nachteile für eine praktische Implementierung in Betracht gezogen werden.

Auf eine praktische Realisierung der Time-Splitting-Verfahren aus Kapitel 3 wird in Kapitel 5 eingegangen. Hierbei wird eine einfache und klare Darstellung der zu implementierenden Bausteine forciert. Diese Darlegung wird durch Code-Abschnitte komplettiert und dient den numerischen Experimenten aus Kapitel 6 als Grundlage.

Abschließend werden im letzten Kapitel an Hand dreier numerischer Beispiele die analytischen Resultate aus Kapitel 3 experimentell verifiziert. Insbesondere werden diverse Aspekte bezüglich der Stabilität des Verfahrens visualisiert und diskutiert.

Wir wollen nun die Kernresultate der folgenden Kapitel herausstreichen.

In der vorliegenden Arbeit wird basierend auf jenem Ansatz, der erstmals in [5] vorgestellt wurde, ein FE-Schema entwickelt und analysiert, welches nicht nur auf ein reduziertes Energiemodell anwendbar ist, sondern das volle effektive Feld  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$ , wie in (1.6) definiert, in Betracht zieht. A priori ist zu erwarten, dass mit ähnlichen Techniken ein analoges Konvergenzresultat zu [5] erzielt werden kann. Diese Erwartung wird erfüllt und darüber hinaus wird gezeigt, dass ebenfalls eine approximative Berechnung der  $L^2$ -Anteile der Systemmatrix unter gewissen Voraussetzungen dieses Ergebnis unverändert lässt. In Anbetracht dessen, dass in der vorliegenden Arbeit auch Energiebausteine zugelassen werden, die für eine numerische Realisierung eine Approximation erfordern, ist vorab nicht klar, welchen Bedingungen diese genügen müssen, um die Konvergenzaussage nicht zu verändern. Wir befassen uns mit diesem Thema und werden sehen, dass nicht jeder Ansatz zur näherungsweise Berechnung des Streufeldes den schließlich dargelegten Forderungen genügt.

Wir verfolgen zunächst die Idee, die in [5] vorgeschlagen wurde, und betrachten demnach die alternative Formulierung (1.22). Es gilt zu bemerken, dass diese Gleichung nicht-linear bezüglich der Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^j \approx \mathbf{m}(t_j, \cdot)$  ist, jedoch linear im Bezug auf die Zeitableitung der Magnetisierung  $\mathbf{v}_h^j \approx \mathbf{m}_t(t_j, \cdot)$ . Da jener Beitrag des totalen effektiven Feldes, der dem Austausch entspringt, von höchster Ordnung ist, wird die implizite Behandlung dieses Terms im Algorithmus beibehalten. Für die restlichen Beiträge ist eine implizite Berechnung weder aus analytischer noch aus praktischer Sicht von Nöten, weshalb diese explizit in das Verfahren eingehen. Damit ergibt sich in einem ersten Schritt das selbe Verfahren wie in [7] vorgestellt wurde, siehe (1.37), und in Kapitel 3 ausführlich erarbeitet und studiert wird. Der essentielle Gewinn dieser Vorgehensweise liegt im Wesentlichen an der expliziten Berechnung jenes Beitrags im effektiven magnetischen Feld, der der Streufeldenergie entspringt. Die Berechnung des Streufeldbeitrags ist nämlich an das (zusätzliche) Lösen der magnetostatischen Potentialgleichungen gekoppelt. Eine implizite Behandlung ist vergleichsweise teuer und sehr aufwändig, weshalb man dies vermeiden möchte. Allerdings gilt es zu bemerken, dass sich die analytischen Resultate aus Kapitel 3 ebenfalls für einen vollständig impliziten Ansatz nachweisen lassen.

Wir betonen nochmals, dass die Resultate im Bezug auf dieses Time-Splitting-Verfahren samt der Idee des Algorithmus selbst unabhängig wenn auch zeitgleich zur Arbeit [7] entstanden sind. Anders als in [7] wird in der vorliegenden Arbeit auch die numerische Berechnung des effektiven Feldes in die Konvergenzanalyse miteinbezogen. Darüber hinaus wird klar dargelegt, welchen Anforderungen das angelegte äußere Feld zu genügen hat, um die erzielten Resultate zu gewähren. Ergänzend dazu streben wir eine effiziente Implementierung an und forcieren daher eine approximative Berechnung der auftretenden Massenmatrizen. Das daraus resultierende Verfahren lässt sich wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} & \alpha \left( \mathbf{v}_h^j, \boldsymbol{\psi}_h \right)_{h,\Omega} + \left( \mathbf{m}_h^j \times \mathbf{v}_h^j, \boldsymbol{\psi}_h \right)_{h,\Omega} \\ & = -C_{\text{ex}} \left( \nabla(\mathbf{m}_h^j + \theta k \mathbf{v}_h^j), \nabla \boldsymbol{\psi}_h \right)_{L^2(\Omega)} + \left( \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j), \boldsymbol{\psi}_h \right)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Hierbei stellt  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  eine diskrete Bilinearform auf  $C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$  dar, die gewissen Anforderungen

zu genügen hat, siehe Kapitel 3. Eine mögliche und in der Praxis einfach umzusetzende Variante der diskreten Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  wird durch das *Mass-Lumping* des  $L^2$ -Skalarprodukts gegeben. Diese Vorgehensweise scheint von äußerstem Vorteil insbesondere für jenen Beitrag zu sein, der das Kreuzprodukt beinhaltet. Darüber hinaus stellt dies eine deutliche Abgrenzung und Erweiterung zu jenem Algorithmus dar, der lediglich die effektive Behandlung von  $\mathbf{h}_{\text{low}}$ , siehe (1.36), im Sinne einer expliziten Berechnung beinhaltet.

Um eine rigorose Konvergenzanalyse für eine tatsächliche numerische Umsetzung geben zu können, liegt ein weiterer Fokus dieser Arbeit auf einer effektiven Berechnung des Streufeldes unter Berücksichtigung gewisser analytischer Aspekte. Wie aus der Analysis hervorgeht hat dieser näherungsweise berechnete Streufeldoperator  $\mathcal{P}_h$  folgenden Anforderungen zu genügen

- Stabilität:

$$\|\mathcal{P}_h \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\mathcal{P}} \|\mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } \mathbf{n} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad (1.39)$$

- Konvergenz:

$$\|\mathcal{P} \mathbf{n} - \mathcal{P}_h \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{für alle } \mathbf{n} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3). \quad (1.40)$$

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir eine Vielzahl an möglichen Varianten das Streufeld numerisch zu berechnen. Wir studieren spezielle Eigenschaften dieser Ansätze und legen gleichzeitig stets einen Algorithmus zur tatsächlichen Realisierung dar. Eine solche Sammlung samt ausführlicher Diskussion der jeweiligen Eigenschaften (1.39) und (1.40) ist unseres Wissens nach in der aktuellen Literatur nicht zu finden und stellt daher einen Aspekt dar, der einerseits von theoretischer/analytischer Bedeutung ist und andererseits ebenfalls für die Umsetzung numerischer Experimente und realistischer Simulationen von Interesse sein kann.

Der wesentliche Vorteil des in der vorliegenden Arbeit eingeführten Verfahrens zur approximativen Lösung der LLG-Gleichung gegenüber anderen bisher vorgestellten Schemata liegt in der Tatsache, dass es lediglich die Lösung eines schwach besetzten linearen Gleichungssystems pro Zeitschritt erfordert. Durch die Trennung in explizit und implizit zu behandelnde Terme des effektiven magnetischen Feldes  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  wird außerdem eine im Sinn von Zeit- und Speicheraufwand relativ günstige Realisierung des Streufeldbeitrags gewährleistet ohne nachteilige Konsequenzen für eine Konvergenzanalyse nach sich zu ziehen. Ähnliches gilt für die approximative Berechnung der auftretenden Massenmatrizen. Der wesentliche Nutzen dieser näherungsweisen Herangehensweise liegt in der Struktur der daraus resultierenden Matrizen. Darüber hinaus ist aus analytischer Sicht keine Restriktion an das Verhältnis der Ortsschrittweite  $h$  zur Zeitschrittweite  $k$  gegeben, um dennoch Konvergenz im schwachen Sinn einer Teilfolge gegen eine schwache Lösung der LLG-Gleichung zu garantieren. Dieses Resultat wird in Kapitel 3 postuliert und rigoros bewiesen. Im Gegenzug zu dieser Reihe an Boni ist einzig als Nachteil anzuführen, dass die Zeitintegratoren aus Kapitel 3 lediglich von erster Ordnung sind.

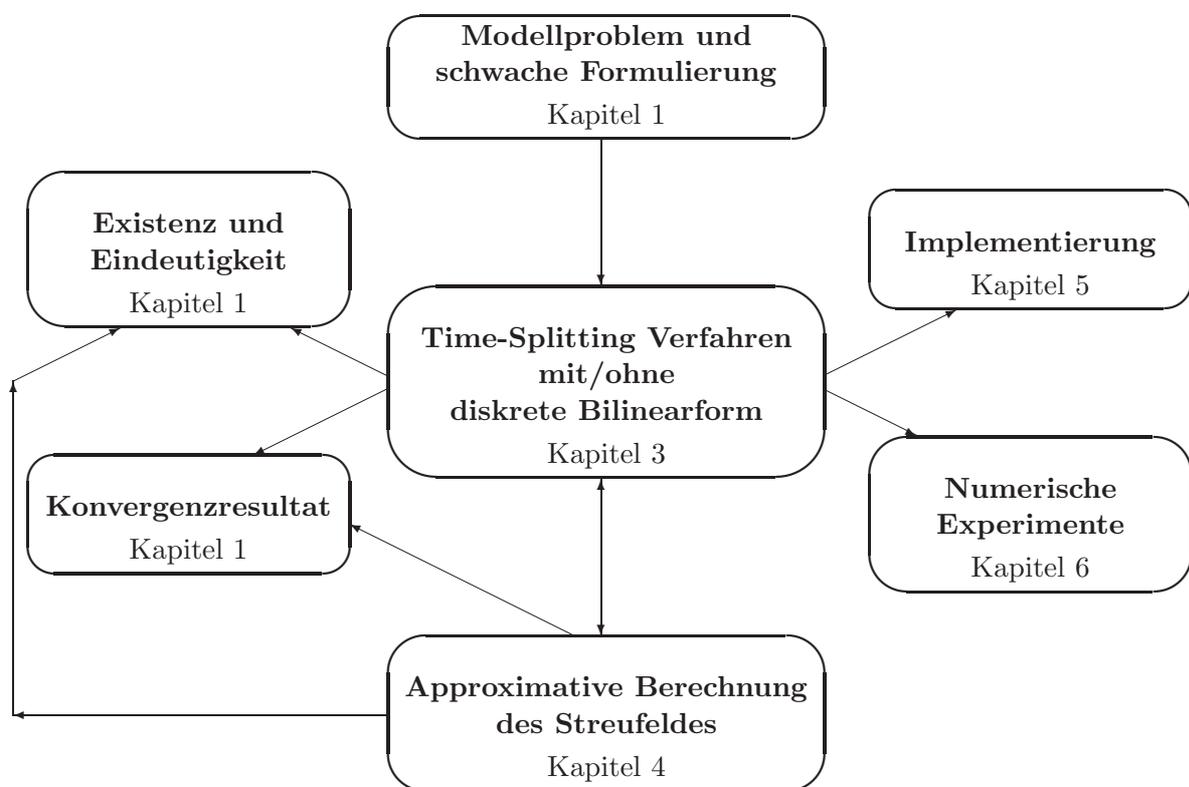


Abbildung 1.5: Überblick des Inhalts und der Resultate der vorliegenden Arbeit.

## Kapitel 2

# Analytisches Framework und allgemeine numerisch analytische Resultate

In diesem Kapitel wollen wir die analytischen Rahmenbedingungen für die Diskretisierung der LLG-Gleichung vorstellen. Zunächst tragen wir Sätze aus der numerischen Analysis und der Funktionalanalysis zusammen, um im Weiteren darauf zurückgreifen zu können. Des Weiteren führen wir zunächst grundlegende Begriffe ein, die uns dann zu einer sinnvollen Ortsdiskretisierung verhelfen. Hierbei ist das Attribut „sinnvoll“ so zu verstehen, dass neben in der Finite-Elemente-Methode (FEM) üblichen Anforderungen an eine Zerlegung des Gebiets  $\Omega$  auch jene Voraussetzungen erfüllt sein müssen, die wesentlich in den Beweis der Konvergenzaussage 3.3.7 eingehen, siehe Bedingung (3.59). Ferner führen wir passende Ansatzräume ein und stellen eine entsprechende Notation vor.

In einem weiteren Abschnitt setzen wir uns mit einer Netzverfeinerung auseinander, die gewisse Eigenschaften der initialen Triangulierung erhält und daher diese an die aus der Anwendung der Verfeinerungsregel entstehenden Netze weitergibt.

Schließlich beschäftigen wir uns mit diskreten Bilinearformen und führen den Begriff des *Mass-Lumping* ein. Dieser führt uns auf eine diskrete Variante des  $L^2$ -Skalarprodukts. Eigenschaften dieses diskreten Pendanten werden festgehalten und bewiesen.

Um eine einheitliche Notation sicherzustellen und für diese Arbeit spezifische Schreibweisen festzuhalten, sammeln wir zunächst jene Notation, die in der vorliegenden Arbeit wie folgt zu interpretieren ist, falls nicht explizit anders gesagt.

Zuerst halten wir fest, dass wir Skalare, sowie skalarwertige Funktionen stets mit Buchstaben normaler Schriftdicke identifizieren. Im Gegensatz dazu notieren wir Vektoren und vektorwertige Funktionen stets mit fetten Buchstaben. Für Matrizen verwenden wir ebenfalls eine fette Schreibweise und führen diese zusätzlich mit Großbuchstaben an.

In der vorliegenden Arbeit notiert  $C > 0$  stets eine positive Konstante ohne genaue Spezifikation ihres Werts. Ist diese Konstante abhängig von diversen Größen, so wird dies entweder mit Hilfe von Klammern notiert, d.h.  $C = C(\cdot)$ , oder auch mit Indizierung, wobei der Index auf die Größe, von der nun  $C$  abhängig ist, referenziert.

**Konvention 2.0.1.** *Um die Notation einfach zu halten, verwenden wir im Folgenden, falls nicht*

anders gesagt, die Schreibweise

$$\mathcal{L}(\Omega; \mathbb{R}^d) = \mathcal{L}(\Omega)^d = \mathcal{L}(\Omega)$$

mit  $\mathcal{L}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  einem beliebigen Hilbert-Raum. Im Weiteren kommt auch die abkürzende Schreibweise

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}} := \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\Omega)} = \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\Omega; \mathbb{R}^d)}$$

zum Einsatz, wobei  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\Omega; \mathbb{R}^d)}$  eine entsprechende Norm über einem beschränkten Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  bezeichnet.

Wir nehmen also keine explizite Unterscheidung in unserer Notation zwischen  $\mathcal{L}(\Omega; \mathbb{R})$  und  $\mathcal{L}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  bzw.  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\Omega; \mathbb{R})}$  und  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\Omega; \mathbb{R}^d)}$  für  $d = 2, 3$  vor, da die Bedeutung der Schreibweise aus dem Zusammenhang bzw. dem Argument der Norm ohnedies hervorgeht.

Wir erinnern an die Definition des Gradienten  $\nabla\phi$  einer Funktion  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  durch die Jacobi-Matrix

$$\begin{aligned} \nabla : C^1(\Omega; \mathbb{R}^3) &\rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \\ \nabla\phi &= \left[ \frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \right] = \left( \frac{\partial\phi_i}{\partial x_j} \right) \quad \text{für } i = 1, \dots, 3 \text{ und } j = 1, \dots, 3. \end{aligned}$$

Die Ableitung in der Zeitkomponente einer in der Zeit differenzierbaren Funktion  $\phi$  wird entweder durch  $\partial_t\phi$  oder  $\phi_t$  notiert. Des Weiteren verwenden wir die Schreibweise  $\partial_\nu\phi$  für die Normalenableitung von  $\phi$ .

Wir betrachten in der gesamten Arbeit stets ein beschränktes Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Da die LLG-Gleichung die Änderung der Magnetisierung in Abhängigkeit von Ort und Zeit beschreibt, verwenden wir für das Orts-Zeit-Gebiet folgende Kurzschreibweise.

**Konvention 2.0.2.** Um die Notation einfach zu halten, verwenden wir, wenn nicht anders angegeben, folgende Schreibweise

$$\Omega_\tau := (0, t_{\text{end}}) \times \Omega,$$

wobei  $(0, t_{\text{end}})$  das Zeitintervall bezeichnet, während  $\Omega$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  festlegt.

Der Vollständigkeit halber, stellen wir nun jene Sobolev-Räume vor, die in der vorliegenden Arbeit relevant sind. Dabei betrachten im Wesentlichen Sobolev-Räume auf dem beschränkten Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

Wir definieren den Sobolev-Raum

$$H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) := \{\phi \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \mid \nabla\phi \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)\}$$

mit der zugehörigen Norm

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

wobei  $\nabla\phi$  den schwachen Gradienten bezeichnet. Entsprechend dieser Definition, lässt sich ein analoger Begriff für das Orts-Zeit-Gebiet  $\Omega_\tau$  herleiten

$$H^1(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3) := \{\phi \in L^2(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3) \mid \nabla\phi \in L^2(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3) \text{ und } \partial_t\phi \in L^2(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3)\}$$

mit der zugehörigen Norm

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega_\tau)}^2 := \int_{\Omega_\tau} |\phi|^2 d\mathbf{x}dt + \int_{\Omega_\tau} |\nabla\phi|^2 d\mathbf{x}dt + \int_{\Omega_\tau} |\partial_t\phi|^2 d\mathbf{x}dt.$$

Für ein detailliertes Studium der Sobolev-Räume sei der Leser auf [1] verwiesen.

Wir definieren für eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  nun induktiv Sobolev-Räume höherer Ordnung

$$H^n(\Omega; \mathbb{R}^3) := \{\phi \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \mid \nabla\phi \in H^{n-1}(\Omega; \mathbb{R}^3)\}$$

mit entsprechender Norm

$$\|\phi\|_{H^n(\Omega)}^2 := \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi\|_{H^{n-1}(\Omega)}^2.$$

Insbesondere identifizieren wir den Sobolev-Raum  $H^0(\Omega; \mathbb{R}^3)$  mit  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ .

Wir betrachten nun Sobolev-Räume mit nicht-ganzzahligem Exponenten. Dazu führen wir für reelle Zahlen  $0 < s < 1$  die Sobolev-Slobodeckij Seminorm für skalarwertige Funktionen ein

$$|u|_{H^s(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+2s}} d\mathbf{y} d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \quad (2.1)$$

Für  $\ell \in \mathbb{R}$  bezeichne  $[\ell]$  die größte ganze Zahl mit  $[\ell] \leq \ell$ . Für nicht-ganzzahliges  $\ell \geq 0$ , d.h.  $\ell = [\ell] + s$  mit  $s \in (0, 1)$ , definieren wir mit Hilfe der Sobolev-Slobodeckij Seminorm die Sobolev-Räume mit nicht-ganzzahliger Ordnung  $\ell \geq 0$  durch

$$H^\ell(\Omega; \mathbb{R}) := \{u \in H^{[\ell]}(\Omega; \mathbb{R}) \mid |\partial^{[\ell]}u|_{H^s(\Omega)} < \infty\}$$

mit zugehöriger Norm

$$\|u\|_{H^\ell(\Omega)}^2 := \|u\|_{H^{[\ell]}(\Omega)}^2 + |\partial^{[\ell]}u|_{H^s(\Omega)}^2.$$

Hierbei bezeichnet  $\partial^{[\ell]}$  die  $\ell$ -te (schwache) Ableitung.

Aus diesen Definitionen erhalten wir analoge Begriffe für vektorwertige Sobolev-Räume  $H^\ell(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , sofern wir diese komponentenweise einsetzen.

Es ist bekannt, dass  $H^\ell(\Omega; \mathbb{R}^3)$  für  $\ell \in \mathbb{R}$  ein Hilbert-Raum ist, siehe [1, Theorem 3.5].

Im Folgenden identifizieren wir mit  $\tilde{H}^{-\ell}(\Omega; \mathbb{R}^3) := (H^\ell(\Omega; \mathbb{R}^3))^*$  den Dualraum von  $H^\ell(\Omega; \mathbb{R}^3)$  bezüglich des erweiterten  $L^2$ -Skalarprodukts.

**Definition 2.0.1.** *Wir definieren den orts- und zeitabhängigen Funktionenraum  $L^2(H^1)$  durch*

$$L^2(H^1) := L^2((0, t_{\text{end}}); H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)).$$

*Die zugehörige Norm ist dann wie folgt gegeben*

$$\|\phi\|_{L^2(H^1)}^2 = \|\phi\|_{L^2((0, t_{\text{end}}); H^1(\Omega))}^2 := \int_0^\tau \|\phi\|_{H^1(\Omega)}^2 dt = \int_0^\tau \left( \int_{\Omega} |\phi|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\nabla\phi|^2 d\mathbf{x} \right) dt$$

*für  $\phi \in L^2((0, t_{\text{end}}); H^1(\Omega; \mathbb{R}^3))$ .*

Damit haben wir nun alle in der vorliegenden Arbeit benötigten Sobolev-Räume auf dem beschränkten Lipschitz-Gebiet  $\Omega$  eingeführt und dies durch orts- und zeitabhängige Räume vervollständigt.

Ergänzend dazu tragen wir fundamentale Sätze aus der Theorie der Sobolev-Räume zusammen, sofern wie sie in Folge benötigen, und verzichten hierin gänzlich auf Beweise.

**Theorem 2.0.2** ([56, Lemma V.1.10]). *Der Raum aller Testfunktionen  $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$  liegt dicht in  $L^p(\Omega)$  für  $1 \leq p < \infty$ .*

**Satz 2.0.3** (Sobolevscher Einbettungssatz[48, Abs. 2.5 Satz 2.5.4]). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes  $C^k$ -Gebiet. Für  $k > \ell$  und ein ganzzahliges  $m < \ell - 1$  gilt*

$$H^\ell(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega})$$

mit stetiger Einbettung:

$$\|v\|_{C^m(\overline{\Omega})} \leq C \|v\|_{H^\ell(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H^\ell(\Omega).$$

**Satz 2.0.4** (Meyers-Serrin[14, Theorem 1.3.4]). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein offenes Gebiet mit stückweise glattem Rand. Dann gilt für alle  $\ell \geq 0$ , dass  $C^\infty(\Omega) \cap H^\ell(\Omega)$  ein dichter Unterraum von  $H^\ell(\Omega)$  ist. Außerdem ist  $C^\infty(\overline{\Omega}) = \{v|_\Omega \text{ mit } v \in C^\infty(\mathbb{R}^d)\}$  ein dichter Unterraum des Sobolev-Raums  $H^\ell(\Omega)$ .*

**Satz 2.0.5** (Rellich[48, Abs. 2.5 Satz 2.5.6]). *Die Einbettung  $H^k(\Omega) \subseteq H^\ell(\Omega)$  für  $k \geq \ell$  ist kompakt.*

Aus den kompakten Einbettungen gehen die nützlichen Poincaré-Ungleichungen hervor.

**Satz 2.0.6** (1. Poincarésche Ungleichung[40, Thm. 1.1]). *Für  $\ell \in \mathbb{N}$  gilt*

$$\|u\|_{H^\ell(\Omega)}^2 \leq C(1 + \text{diam}(\Omega)) \sum_{|\alpha|=\ell} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^2 dx \quad \text{für alle } u \in H_0^\ell(\Omega) := \overline{C_0^\infty}^{\|\cdot\|_{H^\ell(\Omega)}}. \quad (2.2)$$

**Satz 2.0.7** (2. Poincarésche Ungleichung[40, Thm. 1.5]). *Es gilt*

$$\|u\|_{H^\ell(\Omega)}^2 \leq C \left\{ \sum_{|\alpha|=\ell} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^2 dx + \sum_{|\alpha|<\ell} \left| \int_\Omega \partial^\alpha u dx \right|^2 \right\} \quad \text{für alle } u \in H^\ell(\Omega). \quad (2.3)$$

**Lemma 2.0.8** ([56, Theorem V.3.6]). *Seien  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  Hilbert-Räume mit stetiger Einbettung  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ . Dann ist die Riesz-Abbildung*

$$J_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}^* \quad \text{mit} \quad J_{\mathcal{Y}} y := (y, \cdot)_{\mathcal{Y}}$$

ein wohldefinierter Operator  $J_{\mathcal{Y}} \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X}^*)$ . Darüber hinaus gilt, dass  $J_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y})$  ein dichter Unterraum von  $\mathcal{X}^*$  ist.

**Lemma 2.0.9.** *Sei  $\mathcal{X}$  ein normierter Raum und bezeichne  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetiges und konvexes Funktional auf  $\mathcal{X}$ . Dann ist  $f$  schwach unterhalb stetig, d.h. es gilt für jede schwach konvergente Folge  $x_n$  in  $\mathcal{X}$  mit  $x_n \rightharpoonup x \in \mathcal{X}$*

$$f(x) \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} f(x_n).$$

**Lemma 2.0.10.** *Seien  $\zeta, \eta \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Dann gilt*

$$\langle \nabla \zeta, \nabla(\zeta \times \eta) \rangle = \langle \nabla \zeta, \zeta \times \nabla \eta \rangle, \quad (2.4)$$

wobei hier  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Frobenius'sche innere Produkt bezeichnet.

*Beweis.* Zunächst wiederholen wir die Definition des Frobenius'schen inneren Produkts

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle := \mathbf{A} : \mathbf{B} := \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} \quad \text{für alle } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Wir betrachten jene Terme, die im jeweils rechten Argument des Frobenius'schen inneren Produkts in (2.4) auftreten und führen folgende einfache Rechnung durch

$$\begin{aligned} \nabla(\zeta \times \eta) &= \nabla \left( \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(\zeta_2 \eta_3 - \zeta_3 \eta_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(\zeta_2 \eta_3 - \zeta_3 \eta_2)}{\partial x_2} & \frac{\partial(\zeta_2 \eta_3 - \zeta_3 \eta_2)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(\zeta_3 \eta_1 - \zeta_1 \eta_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial(\zeta_3 \eta_1 - \zeta_1 \eta_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial(\zeta_3 \eta_1 - \zeta_1 \eta_3)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(\zeta_1 \eta_2 - \zeta_2 \eta_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial(\zeta_1 \eta_2 - \zeta_2 \eta_1)}{\partial x_2} & \frac{\partial(\zeta_1 \eta_2 - \zeta_2 \eta_1)}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Produktregel, erhalten wir nach Differentiation

$$\nabla(\zeta \times \eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} \eta_3 + \frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} \zeta_2 - \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_1} \eta_2 - \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} \zeta_3 & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Um  $\zeta \times \nabla \eta$  zu berechnen, sei an folgende Relation erinnert

$$\zeta \times \nabla \eta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} \times \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta}{\partial x_2}, \frac{\partial \eta}{\partial x_3} \right] = \left( \zeta \times \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \mid \zeta \times \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \mid \zeta \times \frac{\partial \eta}{\partial x_3} \right).$$

Schließlich zeigt einfache Rechnung

$$\zeta \times \nabla \eta = \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} \zeta_2 - \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} \zeta_3 & \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2} \zeta_2 - \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} \zeta_3 & \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} \zeta_2 - \frac{\partial \eta_2}{\partial x_3} \zeta_3 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} \zeta_3 - \frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} \zeta_1 & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} \zeta_3 - \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2} \zeta_1 & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} \zeta_3 - \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} \zeta_1 - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} \zeta_2 & \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} \zeta_1 - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} \zeta_2 & \frac{\partial \eta_2}{\partial x_3} \zeta_1 - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} \zeta_2 \end{pmatrix}.$$

Führen wir nun auf beiden Seiten von (2.4) das Frobenius'sche innere Produkt aus, so bleibt lediglich Orthogonalität zu zeigen, d.h. es gilt nun für jeden Eintrag der linken Seite von (2.4), der sich vom entsprechenden Eintrag der rechten Seite unterscheidet, zu verifizieren, dass dieser unter Anwendung des Frobenius'schen inneren Produkts verschwindet. Dies ist jedoch mit einfacher Rechnung einzusehen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} \eta_3 - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_1} \eta_2 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2} \eta_3 - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_2} \eta_2 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_3} \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_3} \eta_3 - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_3} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_3} \eta_2 \\ &+ \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_1} \eta_1 - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} \eta_3 + \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_2} \eta_1 - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2} \eta_3 + \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_3} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_3} \eta_1 - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_3} \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_3} \eta_3 \\ &+ \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_1} \eta_2 - \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_1} \eta_1 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_2} \eta_2 - \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_2} \eta_1 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_3} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_3} \eta_2 - \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_3} \frac{\partial \zeta_3}{\partial x_3} \eta_1 \end{aligned}$$

und beschließt daher den Beweis.  $\square$

## 2.1 Diskretisierung im Ort

In der vorliegenden Arbeit interessieren wir uns für numerische Verfahren zum Lösen der LLG-Gleichung und schränken uns dabei auf die Finite-Elemente-Methode (FEM) ein. In Kapitel 3 stellen wir ein spezielles FE-Schema vor und führen darin eine genaue Herleitung dieses Lösungsverfahrens an. An dieser Stelle sei lediglich erwähnt, dass wir dazu — wie in der Galerkin-FEM üblich — unsere Modellgleichung in der schwachen Formulierung betrachten, welche bezüglich der Ortskomponente im Sobolev-Raum  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  gestellt ist. Die FEM besteht nun darin, diesen unendlichdimensionalen Sobolev-Raum durch einen endlichdimensionalen Unterraum  $\mathcal{V}_h$  zu ersetzen. Wir versuchen sodann eine bestmögliche Approximation der Lösung unseres Problems zu berechnen, indem wir eine diskretisierte Variationsformulierung in eben diesem Unterraum  $\mathcal{V}_h$  lösen.

Würde man die Dimension von  $\mathcal{V}_h$  stetig erhöhen, so erwartet man sich eine gleichmäßige Verbesserung der Näherungslösung im Sinne einer genaueren Approximation der analytischen Lösung. Schließlich erhofft man sich, dass im Grenzfall die approximativ berechnete Lösung gegen die exakte Lösung des Modellproblems strebt. Im Zuge einer Konvergenzanalyse stellt sich heraus, dass ein solches Resultat nur dann zu erwarten ist, wenn der Unterraum  $\mathcal{V}_h$  entsprechend gewählt ist. In diesem Abschnitt wollen wir einen passenden Kandidaten für den endlichdimensionalen Unterraum definieren unter dem Zusatz, dass wir eine FEM niedrigster Ordnung anstreben.

Mit dem Ziel eine Diskretisierung im Ort vornehmen zu können, sehen wir, dass es notwendig ist grundlegende Begriffe einzuführen, die im Folgenden eine einheitliche Notation und eine übersichtliche Darstellung zulassen.

**Definition 2.1.1.** *Wir bezeichnen einen Simplex  $T \subset \mathbb{R}^d$  als nicht-degeneriert, wenn er als konvexe Hülle von Knoten darstellbar ist, d.h.  $T = \text{conv}\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{d+1}\}$ , und gleichzeitig  $|T| := \text{meas}(T) > 0$  gilt.*

Um geeignete endlichdimensionale Teilräume zu finden, in denen wir ein im Ort diskretisiertes Problem formulieren können, zerlegen wir zunächst das betrachtete Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  mit  $d = 2, 3$  in disjunkte, nicht-degenerierte Elemente. Des Weiteren halten wir jene Anforderungen fest, denen diese Partition genügen muss. Dies führt uns auf den Begriff der *Triangulierung*, den wir nun vorstellen wollen.

**Definition 2.1.2.** *Eine Menge  $\mathcal{T}_h = \{T_1, \dots, T_E\}$  wird dann und nur dann als Triangulierung des polyedrischen Lipschitz-Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  mit  $d = 2, 3$  bezeichnet, wenn folgende Eigenschaften vorliegen:*

- $\mathcal{T}_h$  ist eine endliche Menge von nicht-degenerierten Dreiecken bzw. Tetraedern.
- Der Abschluss von  $\Omega$  wird durch die Menge  $\mathcal{T}_h$  überdeckt, d.h. es gilt  $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ .
- Für alle  $T_i, T_j \in \mathcal{T}_h$  mit  $i \neq j$  gilt  $|T_i \cap T_j| = 0$ , d.h. der Schnitt zweier Elemente stellt eine Menge vom Maß Null dar.

Wir sprechen von einer regulären Triangulierung (im Sinne von Ciarlet), wenn der Schnitt zweier Elemente  $T_i, T_j$  mit  $i \neq j$

- leer,
- ein gemeinsamer Knoten,
- eine gemeinsame Kante,

- oder eine gemeinsame Fläche ist.

Es bezeichnen  $h \in L^\infty(\Omega)$  und  $\varrho \in L^\infty(\Omega)$  die lokalen Netzweitenfunktionen, die wie folgt definiert sind

$$h|_T := h_T := \text{diam}(T) := \sup \{ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in T \} \quad \text{und} \quad \varrho|_T := \varrho_T \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_h.$$

Dabei beschreibt  $\varrho_T$  den Radius des größten eingeschriebenen Kreises falls  $d = 2$  bzw. der größten eingeschriebenen Kugel für  $d = 3$  eines Elements  $T \in \mathcal{T}_h$ . Des Weiteren gibt  $\sigma(\mathcal{T}_h)$  die sogenannte Formregularitätskonstante wieder, die durch folgendes Verhältnis definiert ist

$$\sigma(\mathcal{T}_h) := \max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_T^d}{\text{meas}(T)} \geq 1.$$

Da die Formregularitätskonstante alle Fehlerabschätzungen beeinflusst, favorisiert man Netzverfeinerungen die ein Blow-up von  $\sigma(\mathcal{T}_h)$  vermeiden.

Mit diesen Begriffen ist es uns möglich, Triangulierungen genauer zu spezifizieren.

**Definition 2.1.3.** *Es bezeichne  $\{\mathcal{T}_h\}$  eine Familie von regulären Triangulierungen.*

- Die Familie  $\{\mathcal{T}_h\}$  heißt lokal  $\kappa$ -quasi-uniform oder  $\kappa$ -formregulär, wenn eine Zahl  $\kappa > 0$  existiert, so dass jedes Element  $T \in \mathcal{T}_h$  einen Kreis bzw. eine Kugel mit Radius  $\varrho_T$  enthält, sodass

$$\frac{h_T}{\varrho_T} \leq \kappa \tag{2.5}$$

gilt.

- Die Familie  $\{\mathcal{T}_h\}$  heißt  $\kappa$ -quasi-uniform, wenn eine Zahl  $\kappa > 0$  existiert, so dass jedes Element  $T \in \mathcal{T}_h$  einen Kreis bzw. eine Kugel mit Radius  $\varrho_T$  enthält, sodass

$$\max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_T}{\varrho_T} \leq \kappa \tag{2.6}$$

gilt.

Beachten wir, dass die Variationsformulierung der LLG-Gleichung bezüglich der Ortskomponente in  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  gestellt ist, so können wir nun einen sinnvollen endlichdimensionalen Unterraum dieses Sobolev-Raums definieren, auf dem wir dann eine diskretisierte Formulierung unseres Modellproblems mittels FEM niedrigster Ordnung lösen können.

Sei  $\mathcal{T}_h = \{T_1, \dots, T_E\}$  eine lokal  $\kappa$ -quasi-uniforme und reguläre Triangulierung unseres Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  bestehend aus Dreiecken bzw. Tetraedern für Dimension  $d = 2$  bzw.  $d = 3$ . Wir definieren den Finite-Elemente-Raum niedrigster Ordnung  $\mathcal{V}_h \subset H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  durch

$$\mathcal{V}_h = \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3) = \left\{ \boldsymbol{\phi}_h \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3) \mid \boldsymbol{\phi}_h|_T \in \mathcal{P}^1(T; \mathbb{R}^3) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Hierbei bezeichnet  $\mathcal{P}^1(T; \mathbb{R}^3)$  die Menge aller Polynome von totalem Grad kleiner oder gleich eins, die auf ein Element  $T \in \mathcal{T}_h$  restringiert sind.

**Bemerkung 2.1.4.** *Wir bemerken, dass  $\mathcal{V}_h$  ein endlichdimensionaler Unterraum eines Hilbert-Raums ist und daher selbst einen Hilbert-Raum darstellt.*

Wir notieren mit  $\mathcal{N}_h = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N\}$  die Menge aller Knoten der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$ . Eine zugehörige nodale Basis des Ansatzraumes für den skalaren Fall  $\mathcal{V}_h \subset H^1(\Omega; \mathbb{R})$  wird durch die Menge  $\mathcal{B}_h = \{\beta_1, \dots, \beta_N\}$  gegeben. Solche Basisfunktionen werden durch die Kronecker Eigenschaft  $\beta_i(\mathbf{z}_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  charakterisiert, wobei  $N = \#\mathcal{N}_h = \#\mathcal{B}_h$  gilt. Basierend auf dieser Menge definieren wir durch  $\tilde{\mathcal{B}}_h = \{\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_{3N}\}$  die Menge jener Basisfunktionen, die durch  $\tilde{\beta}_{i+(\ell-1)N} = \beta_i \mathbf{e}_\ell$  für  $i = 1, \dots, N$ ,  $\ell = 1, \dots, 3$  und  $\mathbf{e}_\ell$  Einheitsvektoren des  $\mathbb{R}^3$  gegeben sind, also

$$\left\{ \left( \begin{array}{c} \beta_i \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ \beta_i \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \beta_i \end{array} \right) \mid i = 1, \dots, N \right\}.$$

Diese Menge stellt demnach eine Basis des diskreten Ansatzraumes  $\mathcal{V}_h$  für den vektorwertigen Fall dar, d.h.  $\mathcal{V}_h \subset H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ .

Der Vollständigkeit halber wollen wir jene aus der Literatur bekannten Resultate aus der Finite-Elemente-Methode anführen und zitieren, auf die wir uns in dieser Arbeit beziehen. Dabei halten wir uns an die Bücher und Monographien von BRAESS [13] und BRENNER/SCOTT [14] und verzichten hierin gänzlich auf Beweise.

**Lemma 2.1.5** (Bramble-Hilbert[14, Lemma 4.3.8]). *Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet. Bezeichne  $\mathcal{P}^k(\Omega)$  den Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich  $k \in \mathbb{N}_0$ . Sei  $f \in H^{k+1}(\Omega)^*$  ein lineares stetiges Funktional mit  $\ker(f) \supseteq \mathcal{P}^k(\Omega)$ .*

(i) *Es gilt*

$$|f(v)| \lesssim \|f\| \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H^{k+1}(\Omega).$$

(ii) *Außerdem gilt*

$$\inf_{p \in \mathcal{P}^k(\Omega)} \|v - p\|_{H^{k+1}(\Omega)} \lesssim |v|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H^{k+1}(\Omega).$$

**Satz 2.1.6** (Approximationssatz[13, Kap. II, §6, Satz 6.4]). *Sei  $u \in H^2(\Omega)$ . Dann gilt für einen beliebigen Exponenten  $\alpha \in \mathbb{R}$  für alle  $T \in \mathcal{T}_h$  die Abschätzung*

$$\|h^\alpha(u - \mathcal{I}_h u)\|_{L^2(T)} \leq C \|h^{2+\alpha} D^2 u\|_{L^2(T)} \quad (2.7)$$

bzw.

$$\|h^\alpha(u - \mathcal{I}_h u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|h^{2+\alpha} D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.8)$$

und

$$\|h^\alpha \nabla(u - \mathcal{I}_h u)\|_{L^2(T)} \leq C \sigma(\mathcal{T}_h) \|h^{1+\alpha} D^2 u\|_{L^2(T)} \quad (2.9)$$

bzw.

$$\|h^\alpha \nabla(u - \mathcal{I}_h u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \sigma(\mathcal{T}_h) \|h^{1+\alpha} D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.10)$$

mit einer positiven Konstante  $C > 0$ , die nicht von  $u$ ,  $\mathcal{T}_h$  und dem Gebiet  $\Omega$  abhängt.

**Lemma 2.1.7** ([13, Kap. II, §6, Satz 6.8]). Sei  $\phi_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$ . Dann gibt es eine positive Konstante  $C > 0$ , so dass für alle  $T \in \mathcal{T}_h$  folgende Abschätzung gilt

$$\|\nabla \phi_h\|_{L^2(T)} \leq C \|h^{-1} \phi_h\|_{L^2(T)} \quad \text{für alle } \phi_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3). \quad (2.11)$$

Insbesondere gilt mit einer positiven Konstanten  $C > 0$

$$\|\nabla \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|h^{-1} \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } \phi_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3). \quad (2.12)$$

Die Konstante  $C = C(\sigma(\mathcal{T}_h)) > 0$  hängt jeweils weder vom Gebiet  $\Omega$ , noch von der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  ab, sondern wird einzig durch die Formregularitätskonstante  $\sigma(\mathcal{T}_h)$  beeinflusst.

### 2.1.1 Netzverfeinerung

In diesem Unterabschnitt wollen wir uns mit der Verfeinerung einer Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  auseinandersetzen, die gewisse analytische Eigenschaften eines initialen Netzes erhält. Diese Anforderung stellt in Kapitel 3 eine zentrale Bedingung dar, um ein Konvergenzresultat für den darin vorgestellten Algorithmus zur numerischen Lösung der LLG-Gleichung beweisen zu können.

Die konkrete Forderung an eine  $\kappa$ -formreguläre Triangulierungen lautet

$$\int_{\Omega} \nabla \beta_i \cdot \nabla \beta_{i'} \, d\mathbf{x} \leq 0 \quad \text{für alle } i \neq i', \quad (2.13)$$

wobei entweder  $\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h \setminus \Gamma$  oder  $\mathbf{z}_{i'} \in \mathcal{N}_h \setminus \Gamma$  gilt. Hierbei stellen  $\beta_i$  und  $\beta_{i'}$  nodale Basisfunktionen von  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  dar. Unter der Annahme, dass  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  gilt, wird eine in diesem Sinn zulässige Triangulierung des Gebiets  $\Omega$  durch eine Triangulierung vom *Delaunay*-Typ gegeben. Wir führen für den Fall  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  den Begriff der *Delaunay*-Triangulierung ein, um weitere geometrische Eigenschaften eines Netzes festzuhalten.

**Definition 2.1.8.** Wir betrachten, dass Innere des Umkreises eines Elements  $T \in \mathcal{T}_h$  und bezeichnen diesen kurz mit  $U_T$ . Damit definieren wir die Menge  $U_{T,\Omega}$  als die größte einfach zusammenhängende Menge innerhalb des Schnitts  $U_T \cap \Omega$ , die das Innere des Elements  $T \in \mathcal{T}_h$  enthält.

Eine Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  eines konvexen Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  heißt dann und nur dann *Delaunay*-Triangulierung, wenn für jedes Dreieck  $T \in \mathcal{T}_h$  der Durchschnitt  $\mathcal{N}_h \cap U_{T,\Omega}$  leer ist.

Aus dieser Definition geht hervor, dass die Anforderungen an eine *Delaunay*-Triangulierung im Wesentlichen aus Bedingungen an die Relation der Winkel innerhalb der auftretenden Dreiecke besteht.

Aus Sicht der Implementierung stellt eine Verfeinerung, die sicherstellen soll, dass das Anwenden der Verfeinerungsregel auf ein *Delaunay*-Netz in eine weitere Triangulierung vom *Delaunay*-Typ führt, keine große Herausforderung dar, da ohnedies die meisten Netzgeneratoren (z.B.: NETGEN, Gmesh, etc.) eine solche Triangulierung automatisch produzieren.

**Bemerkung 2.1.9.** Betrachten wir zwei benachbarte Knoten  $\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h \setminus \Gamma$  und  $\mathbf{z}_{i'} \in \mathcal{N}_h$  mit  $i \neq i'$ . Die Kante, die durch diese zwei Knoten begrenzt wird, stelle den Schnitt  $T_1 \cap T_2$  zweier Elemente  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$  dar. Des Weiteren bezeichnen wir mit  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  jene Winkel der Elemente  $T_1$  und  $T_2$ , die der gemeinsamen Kante gegenüberliegen. Nach [9] bzw. den darin erwähnten Referenzen ist Bedingung (2.13) erfüllt, wenn  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi$  gilt. Es gilt zu bemerken, dass in diesem Fall von einer *Delaunay*-Triangulierung gesprochen wird. Für die Darlegung eines einfachen Gegenbeispiels verweisen wir den Leser auf [9, Example 3.4].

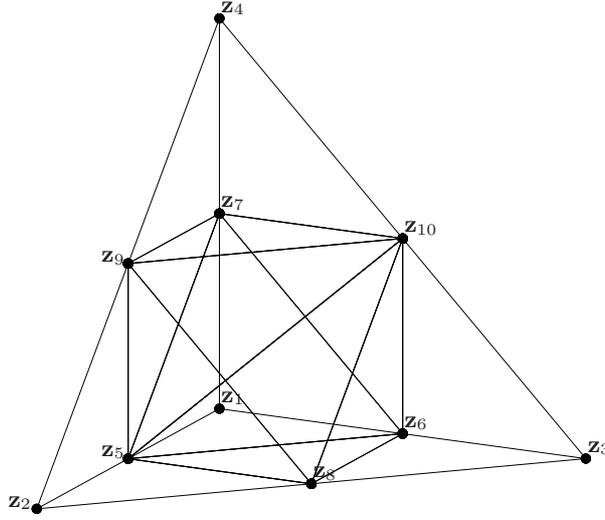


Abbildung 2.1: Verfeinerung des Elements  $T = \text{conv}\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$  unter Verwendung einer regulären lokal  $\kappa$ -quasi-uniformen Verfeinerungsstrategie.

Für den dreidimensionalen Fall wird eine Triangulierung dann als zulässig im Sinne von Bedingung (2.13) bezeichnet, wenn diese ausschließlich aus Tetraedern besteht, deren dihedrale Winkel stets kleiner als  $\pi/2$  sind. Wir betrachten im Folgenden ein Tetraedernetz  $\mathcal{T}_h$ , das bereits dieser Anforderung genügt. Wir führen nun eine Verfeinerung ein, die gewisse Regularitätseigenschaften dieses Anfangsnetzes erhält, wie beispielsweise die Beschränkung aller dihedralen Winkel eines Tetraeders.

Sei  $\mathcal{T}_h$  eine Familie von Triangulierungen von  $\Omega$ , die folgende Bedingungen erfüllen:

- (i) Je zwei Simplizes in  $\mathcal{T}_h$  sind entweder disjunkt oder besitzen eine gemeinsame vollständige glatte Teilmanigfaltigkeit ihrer Ränder, d.h. unsere Verfeinerungsstrategie verhindert hängende Knoten bzw. Kanten.
- (ii) Das Verhältnis  $h_T/\varrho_T$  ist nach oben beschränkt unabhängig vom Element  $T \in \mathcal{T}_h$ .

Die Erfüllung dieser Eigenschaften einer Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  von  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  wird durch eine reguläre lokal  $\kappa$ -quasi-uniforme Verfeinerungsstrategie sichergestellt. Eine solche wird in [55, Abschnitt 4.1] betrachtet.

Wir beschreiben die Verfeinerungsregel für ein Tetraeder  $T \in \mathcal{T}_h$  des Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , indem wir das Element  $T$  mit der konvexen Hülle der Knoten  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$  und  $\mathbf{z}_4$ , d.h.  $T = \text{conv}\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ , identifizieren. Darüberhinaus bezeichnen  $\mathbf{z}_5, \mathbf{z}_6, \mathbf{z}_7, \mathbf{z}_8, \mathbf{z}_9$  und  $\mathbf{z}_{10}$  die Mittelpunkte aller auftretenden Kanten des Tetraeders  $T$ , siehe Abbildung 2.1 für eine detailliertere Beschreibung. Die Verfeinerungsprozedur funktioniert derart, sodass das Element  $T$  in folgende 8 Tetraeder geteilt wird:

$$\begin{aligned}
 T_1 &:= \text{conv}\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_5, \mathbf{z}_6, \mathbf{z}_7\}, & T_2 &:= \text{conv}\{\mathbf{z}_5, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_8, \mathbf{z}_9\}, \\
 T_3 &:= \text{conv}\{\mathbf{z}_6, \mathbf{z}_8, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_{10}\}, & T_4 &:= \text{conv}\{\mathbf{z}_7, \mathbf{z}_9, \mathbf{z}_{10}, \mathbf{z}_4\}, \\
 T_5 &:= \text{conv}\{\mathbf{z}_5, \mathbf{z}_6, \mathbf{z}_7, \mathbf{z}_9\}, & T_6 &:= \text{conv}\{\mathbf{z}_5, \mathbf{z}_6, \mathbf{z}_8, \mathbf{z}_9\}, \\
 T_7 &:= \text{conv}\{\mathbf{z}_6, \mathbf{z}_8, \mathbf{z}_9, \mathbf{z}_{10}\}, & T_8 &:= \text{conv}\{\mathbf{z}_6, \mathbf{z}_7, \mathbf{z}_9, \mathbf{z}_{10}\}.
 \end{aligned}$$

Da  $T_1, T_2, T_3$  und  $T_4$  durch abscheiden jener Sohnelemente entstehen, die die Knoten des Vaterelements  $T$  beinhalten, sind sie ähnlich zu diesem. Die übrigen Tetraeder  $T_5, T_6, T_7$  und  $T_8$  bilden

gemeinsam ein Oktaeder und erfüllen diese Ähnlichkeitsrelation zu  $T$  nicht. Nach [55, Abschnitt 4.1] kann man dennoch zeigen, dass diese Verfeinerungsregel auf höchstens drei verschiedene Ähnlichkeitsklassen von Tetraedern führt. Damit wird die Beschränktheit der Formregularitätskonstante  $\sigma(\mathcal{T}_h)$  sichergestellt.

**Bemerkung 2.1.10.** *Betrachten wir zwei benachbarte Knoten  $\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h \setminus \Gamma$  und  $\mathbf{z}_{i'} \in \mathcal{N}_h$  mit  $i \neq i'$ . Die Kante, die durch diese zwei Knoten begrenzt wird, stelle eine Kante eines Elements  $T \in \mathcal{T}_h$  dar. Des Weiteren bezeichnen wir mit  $\gamma$  jenen Winkel des Elements  $T$ , der von jenen Flächen von  $\partial T$  eingeschlossen wird, die nicht beide Knoten  $\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_{i'}$  beinhalten. Nach [9] bzw. den darin erwähnten Referenzen ist Bedingung (2.13) erfüllt, wenn  $\gamma \leq \pi/2$  für alle  $T \in \mathcal{T}_h$  mit  $\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_{i'} \in \mathcal{N}_h \cap T$  gilt. Daraus geht hervor, dass obige Verfeinerungsprozedur auf eine weitere feinere Triangulierung führt, die (2.13) genügt, sofern das Ausgangsnetz bereits in diesem Sinn zulässig war. In [9, Remark 3.6] wird auf die Winkelbedingung für  $\gamma$  eingegangen und darüber hinaus wird in [9, Example 3.7] eine zulässige initiale Triangulierung des Einheitswürfels vorgestellt.*

Um im Weiteren die Notation einfach zu halten, definieren wir einen Diffeomorphismus, der das Referenztetraeder  $T_{\text{ref}}$

$$T_{\text{ref}} := \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

bijektiv auf das Element  $T := \text{conv}\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$  abbildet:

$$\Phi_T : T_{\text{ref}} \rightarrow T \quad \text{mit} \quad \Phi_T(\mathbf{x}) = \mathbf{z}_1 + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} \quad \text{für } \mathbf{x} \in T_{\text{ref}}, \quad (2.14)$$

wobei  $\mathbf{B} := (\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 \mid \mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1 \mid \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_1) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Damit erhalten wir eine konstante Funktionaldeterminante, die durch  $|\det D\Phi_T| = |\det \mathbf{B}| = |\det(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 \mid \mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1 \mid \mathbf{z}_4 - \mathbf{z}_1)|$  gegeben ist. Es gilt zu beachten, dass die gegen den Uhrzeigersinn gerichtete Anordnung der Knoten im Bezug auf den Rand eines Elements  $T \in \mathcal{T}_h$  eine Nichtnegativität der Determinante garantiert.

## 2.2 Skalarprodukt

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der in dieser Arbeit verwendeten Notation des Skalarprodukts. Darüber hinaus betrachten wir diskrete Bilinearformen mit gewissen Eigenschaften. Definiert man eine solche diskrete Bilinearform mit Hilfe des nodalen Interpolanten, so führt uns dies auf eine Art diskretes Pendant des  $L^2$ -Skalarprodukts, das in der Literatur unter dem Namen *Mass-Lumping* bekannt ist.

**Konvention 2.2.1.** *Wenn nicht anders gesagt, dann notiert  $\cdot$  oder  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das euklidische Skalarprodukt in  $\mathbb{R}^d$ . Des Weiteren bezieht sich  $(\cdot, \cdot)_*$  stets auf ein Skalarprodukt auf einem Hilbert-Raum, der hierbei mit  $*$  notiert wird.*

Für gegebene Funktionen  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  setzen wir

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \, d\mathbf{x},$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bzw.  $\cdot$  das innere Produkt im  $\mathbb{R}^d$  notiert. Wir behalten diese Notation auch dann bei, wenn wir das Frobenius'sche innere Produkt betrachten.

### 2.2.1 Diskrete Bilinearformen

Wir wollen uns mit speziellen diskreten Bilinearformen beschäftigen, da wir eine effizientere jedoch hinreichend genaue Berechnung diverser  $L^2$ -Skalarprodukte anstreben. Aus Sicht der Implementierung ist klar, dass eine solche approximative Berechnung für alle auftretenden Massenmatrizen unserer in Kapitel 3 präsentierten Algorithmen von Vorteil ist. Stellen wir gewisse Anforderungen an die approximierende Bilinearform, dann ist diese näherungsweise Berechnung auch aus analytischer Sicht für den Beweis eines Konvergenzresultats bezüglich der Lösungen, die aus den Algorithmen 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 und 3.2.14 resultieren, nicht kritisch. Wir fassen die notwendigen Bedingungen zusammen:

- Wir notieren auf  $C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$  eine Bilinearform durch

$$(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi})_{h,\Omega} \quad \text{für } \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3), \quad (2.15)$$

die für  $\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  ein Skalarprodukt darstellt und bezeichnen diese kurz als  $h$ -Bilinearform bzw.  $h$ -Skalarprodukt.

- Für die durch das  $h$ -Skalarprodukt induzierte Norm  $\|\cdot\|_{h,\Omega}^2 := (\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  gilt Äquivalenz zur  $L^2$ -Norm

$$C_{\text{low}} \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{h,\Omega} \leq \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\text{high}} \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{h,\Omega} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\phi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3), \quad (2.16)$$

wobei die positiven Konstanten  $C_{\text{low}}, C_{\text{high}} > 0$  von der Netzweite  $h$  unabhängig sind.

- Die  $h$ -Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  erfüllt

$$(\boldsymbol{\phi}_h \times \boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\zeta}_h)_{h,\Omega} = -(\boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\phi}_h \times \boldsymbol{\zeta}_h)_{h,\Omega} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\zeta}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3) \quad (2.17)$$

und genügt daher insbesondere folgender Orthogonalitätsrelation

$$(\boldsymbol{\phi}_h \times \boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\psi}_h)_{h,\Omega} = 0 \quad \text{für alle } \boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3). \quad (2.18)$$

- Wir betrachten mit  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  und  $\mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  endlichdimensionale Teilräume von  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ . Dann fordern wir für alle  $\boldsymbol{\phi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3), \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  die Abschätzung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\boldsymbol{\phi}_h, \nabla \boldsymbol{\psi}_h \neq \mathbf{0}} \frac{|(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h)_{L^2(\Omega)} - (\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h)_{h,\Omega}|}{\|\boldsymbol{\phi}_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \boldsymbol{\psi}_h\|_{L^2(\Omega)}} = 0. \quad (2.19)$$

Für den Fall, dass  $\|\boldsymbol{\phi}_h\|_{L^2(\Omega)} = 0$  oder  $\|\nabla \boldsymbol{\psi}_h\|_{L^2(\Omega)} = 0$ , setzen wir voraus, dass der Zähler bereits verschwindet.

Im folgenden Abschnitt geben wir ein konkretes Beispiel für die diskrete Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  an.

#### Mass-Lumping des $L^2$ -Skalarprodukts

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einem speziellen Kandidaten für eine diskrete Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  auseinandersetzen. Dies führt uns auf den Begriff des *Mass-Lumping* des  $L^2$ -Skalarprodukts. Diese Namensgebung lässt bereits vermuten, dass es sich um eine Umgewichtung eines Integrals handelt, also im Wesentlichen um eine Quadratur. Das Mass-Lumping des  $L^2$ -Skalarprodukts kommt immer dort zum Einsatz, wo es um eine hinreichend genaue und gleichzeitig möglichst effiziente Berechnung des  $L^2$ -Skalarprodukts geht.

Wir wiederholen die Definition des nodalen Interpolanten.

**Definition 2.2.1.** Der nodale Interpolant  $\mathcal{I}_h$  ist ein linearer und stetiger Operator, der für skalarwertige Funktionen wie folgt gegeben ist

$$\mathcal{I}_h : C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \quad \text{mit} \quad \mathcal{I}_h(\phi) = \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} \phi(\mathbf{z}_i) \beta_i.$$

Diese Definition lässt sich auch auf vektorwertige Funktionen übertragen

$$\mathcal{I}_h : C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{V}_h := \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3) \quad \text{mit} \quad \mathcal{I}_h(\boldsymbol{\phi}) = \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{z}_i) \beta_i,$$

wobei wir die Notation des nodalen Interpolanten absichtlich unverändert lassen.

Damit können wir nun ein Skalarprodukt definieren, das gewissermaßen das diskrete Gegenstück zum  $L^2$ -Skalarprodukt darstellt.

Für beliebige stetige Funktionen  $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$  definieren wir die diskrete Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  als

$$(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi})_{h,\Omega} := \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \rangle) \, d\mathbf{x}.$$

Im Weiteren betrachten wir lediglich den diskreten Raum  $\mathcal{V}_h$  und weisen für diese Wahl nach, dass dadurch tatsächlich ein Skalarprodukt auf  $\mathcal{V}_h$  definiert wird. Insbesondere wird durch dieses Skalarprodukt auf  $\mathcal{V}_h$  eine zur  $L^2$ -Norm äquivalente Norm induziert.

Wir führen weiters ein Gewicht  $\omega_i > 0$  ein, das durch

$$\omega_i := \int_{\Omega} \beta_i \, d\mathbf{x}$$

definiert ist. Hierbei bezeichnet  $\beta_i$  eine skalare Ansatzfunktion des FE-Ansatzraumes niedrigster Ordnung  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ . Insbesondere findet nun die mittels  $\mathcal{I}_h$  eingeführte Bilinearform folgende Darstellung

$$(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi})_{h,\Omega} = \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \rangle) \, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} \omega_i \langle \boldsymbol{\phi}(\mathbf{z}_i), \boldsymbol{\psi}(\mathbf{z}_i) \rangle,$$

wobei  $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ . In diesem Sinn stellt diese Bilinearform eine diskrete Variante des  $L^2$ -Skalarprodukts dar.

In den folgenden Lemmata halten wir Eigenschaften des Mass-Lumping des  $L^2$ -Skalarprodukts  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  und eine quantifizierte Normäquivalenz zwischen  $\|\cdot\|_{h,\Omega}$  und  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  fest.

**Lemma 2.2.2.** Das Mass-Lumping des  $L^2$ -Skalarprodukts, das durch

$$(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h)_{h,\Omega} := \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h \rangle) \, d\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{V}_h \tag{2.20}$$

gegeben ist, definiert ein Skalarprodukt auf  $\mathcal{V}_h$ . Demnach gilt weiters

$$(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h)_{h,\Omega} \leq (\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\phi}_h)_{h,\Omega}^{1/2} (\boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\psi}_h)_{h,\Omega}^{1/2} \tag{2.21}$$

für Funktionen  $\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{V}_h$ . Darüber hinaus gelten die Rechenregeln des Vektorkreuzprodukts

$$(\boldsymbol{\phi}_h \times \boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\zeta}_h)_{h,\Omega} = -(\boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\phi}_h \times \boldsymbol{\zeta}_h)_{h,\Omega} \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\zeta}_h \in \mathcal{V}_h \tag{2.22}$$

und damit insbesondere Orthogonalität im folgenden Sinn

$$(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\phi}_h \times \boldsymbol{\psi}_h)_{h,\Omega} = 0 \tag{2.23}$$

für alle  $\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{V}_h$ .

*Beweis.* Wir weisen Schritt für Schritt die charakteristischen Eigenschaften eines Skalarprodukts nach. Daraus ergibt sich insbesondere die Gültigkeit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung.

- Zunächst wollen wir die Bilinearität des Mass-Lumping des  $L^2$ -Skalarprodukts  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  einsehen und betrachten daher Funktionen  $\phi_h, \psi_h, \zeta_h \in \mathcal{V}_h$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(\phi_h + \alpha\psi_h, \zeta_h)_{h,\Omega} = \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \phi_h + \alpha\psi_h, \zeta_h \rangle) dx = \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \phi_h, \zeta_h \rangle + \alpha\langle \psi_h, \zeta_h \rangle) dx.$$

Dies liefert in Betracht der Linearität des nodalen Interpolanten  $\mathcal{I}_h$  und des Integrals

$$\begin{aligned} (\phi_h + \alpha\psi_h, \zeta_h)_{h,\Omega} &= \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \phi_h, \zeta_h \rangle) dx + \alpha \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \psi_h, \zeta_h \rangle) dx \\ &= (\phi_h, \zeta_h)_{h,\Omega} + \alpha(\psi_h, \zeta_h)_{h,\Omega} \end{aligned}$$

und zeigt daher, dass  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  eine Bilinearform definiert. Insbesondere folgt daraus

$$(\phi_h, \phi_h)_{h,\Omega} = 0 \quad \text{für } \phi_h \in \mathcal{V}_h \text{ mit } \phi_h \equiv 0. \quad (2.24)$$

- Die Symmetrieeigenschaft des Mass-Lumping des  $L^2$ -Skalarprodukts  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  ergibt sich einfach aus der Symmetrie des euklidischen Skalarprodukts in  $\mathbb{R}^3$  wie folgt

$$(\phi_h, \psi_h)_{h,\Omega} = \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \phi_h, \psi_h \rangle) dx = \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \psi_h, \phi_h \rangle) dx = (\psi_h, \phi_h)_{h,\Omega}.$$

- Um schließlich einzusehen, dass  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  positiv definit ist, bedienen wir uns der Positivdefinitheit des euklidischen Skalarprodukts, der Monotonie des nodalen Interpolanten  $\mathcal{I}_h$ , sowie der Monotonie des Integrals und sehen sofort

$$(\phi_h, \phi_h)_{h,\Omega} \geq 0 \quad \text{für alle } \phi_h \in \mathcal{V}_h.$$

Um aus dem Verschwinden des Skalarprodukts  $(\phi_h, \phi_h)_{h,\Omega} = 0$ , siehe (2.24), die Identität  $\phi_h \equiv 0$  zu folgern, beachten wir nun die Darstellung des nodalen Interpolanten  $\mathcal{I}_h$  in der Form

$$\mathcal{I}_h(\langle \phi_h, \phi_h \rangle) = \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} \langle \phi_h(\mathbf{z}_i), \phi_h(\mathbf{z}_i) \rangle \beta_i.$$

Wir nutzen der Übersichtlichkeit halber die zuvor definierten Koeffizienten  $\omega_i := \int_{\Omega} \beta_i dx > 0$  und erhalten

$$(\phi_h, \phi_h)_{h,\Omega} = \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} \omega_i \langle \phi_h(\mathbf{z}_i), \phi_h(\mathbf{z}_i) \rangle.$$

Hierbei kann jedoch die rechte Seite nur verschwinden, wenn  $\langle \phi_h(\mathbf{z}_i), \phi_h(\mathbf{z}_i) \rangle = 0$  gilt. Dies ist allerdings für affine Funktionen  $\phi_h \in \mathcal{V}_h$  nur dann der Fall, wenn  $\phi_h \equiv 0$  gilt.

Abschließend bemerken wir, dass nach der Definition des Mass-Lumpings des  $L^2$ -Skalarprodukts die Rechenregeln des Vektorkreuzprodukts gelten

$$(\phi_h \times \psi_h, \zeta_h)_{h,\Omega} = \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \phi_h \times \psi_h, \zeta_h \rangle) dx = - \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \psi_h, \phi_h \times \zeta_h \rangle) dx = -(\psi_h, \phi_h \times \zeta_h)_{h,\Omega}.$$

Damit verifizieren insbesondere die postulierte Orthogonalitätsrelation

$$(\phi_h, \phi_h \times \psi_h)_{h,\Omega} = (\phi_h \times \phi_h, \psi_h)_{h,\Omega} = 0.$$

Damit ist der Beweis nun vollständig. □

**Lemma 2.2.3.** *Durch das Mass-Lumping des  $L^2$ -Skalarprodukts*

$$\|\phi_h\|_{h,\Omega}^2 = (\phi_h, \phi_h)_{h,\Omega} := \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \phi_h, \phi_h \rangle) dx \quad \text{für alle } \phi_h \in \mathcal{V}_h \quad (2.25)$$

wird auf dem FE-Ansatzraum  $\mathcal{V}_h$  eine Norm definiert, die zur  $L^2$ -Norm äquivalent ist. Diese Relation wird durch

$$\|\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\phi_h\|_{h,\Omega}^2 \leq 5\|\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{für alle } \phi_h \in \mathcal{V}_h \quad (2.26)$$

quantifiziert, wobei die auftretenden Konstanten nicht verbesserbar sind.

*Beweis.* Wir halten fest, dass  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  nach Lemma 2.2.2 ein Skalarprodukt auf dem Hilbert-Raum  $\mathcal{V}_h$  definiert. Daher ist klar, dass dieses Skalarprodukt eine Norm induziert. Es bleibt lediglich die quantifizierte Normäquivalenz zur  $L^2$ -Norm zu zeigen.

Zunächst bemerken wir, dass alle auf  $\mathcal{V}_h$  definierten Normen äquivalent sind, d.h. es gilt

$$C_1\|\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\phi_h\|_{h,\Omega}^2 \leq C_2\|\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{für alle } \phi_h \in \mathcal{V}_h,$$

da  $\mathcal{V}_h$  endlichdimensional ist. Um konkrete Werte für die Konstanten  $C_1 > 0$  und  $C_2 > 0$  zu erhalten, transformieren wir das Problem. Da beide Normen lokal sind, d.h. es gilt

$$\|\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\phi_h\|_{L^2(T)}^2 \quad \text{und} \quad \|\phi_h\|_{h,\Omega}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\phi_h\|_{h,T}^2,$$

ist es hinreichend folgende Relation nachzuweisen

$$\|\phi_h\|_{L^2(T)}^2 \leq \|\phi_h\|_{h,T}^2 \leq 5\|\phi_h\|_{L^2(T)}^2.$$

Um die folgenden Rechnungen und Umformungen so einfach wie möglich zu halten, bezeichnen wir mit  $\Phi_T : T_{\text{ref}} \rightarrow T$  die affine Transformation, die das Referenzelement  $T_{\text{ref}}$  bijektiv auf das Element  $T := \text{conv}\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$  abbildet, aus (2.14).

Dies führt auf

$$\begin{aligned} \|\phi_h\|_{L^2(T)}^2 &= \int_T \langle \phi_h, \phi_h \rangle dx = \int_{T_{\text{ref}}} \langle \phi_h \circ \Phi_T, \phi_h \circ \Phi_T \rangle |\det D\Phi_T| dx \\ &= |\det \mathbf{B}| \|\phi_h \circ \Phi_T\|_{L^2(T_{\text{ref}})}^2. \end{aligned}$$

In analoger Weise erhalten wir

$$\|\phi_h\|_{h,T}^2 = |\det \mathbf{B}| \|\phi_h \circ \Phi_T\|_{h,T_{\text{ref}}}^2.$$

Daher gilt es im Folgenden die Äquivalenz

$$\|\phi_h \circ \Phi_T\|_{L^2(T_{\text{ref}})}^2 \leq \|\phi_h \circ \Phi_T\|_{h,T_{\text{ref}}}^2 \leq 5\|\phi_h \circ \Phi_T\|_{L^2(T_{\text{ref}})}^2. \quad (2.27)$$

nachzuweisen.

Eine skalarwertige Basis für das Referenzelement  $T_{\text{ref}}$  ist wie folgt gegeben

$$\begin{aligned} \beta_{\text{ref}}^1 &= 1 - x - y - z, \\ \beta_{\text{ref}}^2 &= x, \\ \beta_{\text{ref}}^3 &= y, \\ \beta_{\text{ref}}^4 &= z. \end{aligned}$$

Entsprechend dieser eingeführten Basis kann eine Funktion  $\phi_h \circ \Phi_T : T_{\text{ref}} \rightarrow \mathbb{R}^3$  stets eine Repräsentation in folgender Form finden

$$\phi_h \circ \Phi_T(x, y, z) = (1 - x - y - z)\mathbf{a} + x\mathbf{b} + y\mathbf{c} + z\mathbf{d}$$

mit gewissen vektorwertigen Koeffizienten  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ . Simple jedoch mühsame Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} \|\phi_h \circ \Phi_T\|_{L^2(T_{\text{ref}})}^2 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} |(1-x-y-z)\mathbf{a} + x\mathbf{b} + y\mathbf{c} + z\mathbf{d}|^2 dz dy dx \\ &= \frac{1}{120} \left( |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}|^2 + |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{d}|^2 \right). \end{aligned}$$

Da  $\mathcal{I}_h(\langle \phi_h \circ \Phi_T, \phi_h \circ \Phi_T \rangle)$  eine Kombinationen aus Basisfunktionen  $\beta_{\text{ref}}^1, \beta_{\text{ref}}^2, \beta_{\text{ref}}^3$  und  $\beta_{\text{ref}}^4$  ist, d.h. es gilt

$$\mathcal{I}_h(\langle \phi_h \circ \Phi_T, \phi_h \circ \Phi_T \rangle) = (1 - x - y - z)|\mathbf{a}|^2 + x|\mathbf{b}|^2 + y|\mathbf{c}|^2 + z|\mathbf{d}|^2,$$

können wir  $\|\phi_h \circ \Phi_T\|_{h, T_{\text{ref}}}^2$  auf die selbe Art und Weise berechnen wie  $\|\phi_h \circ \Phi_T\|_{L^2(T_{\text{ref}})}^2$ . Dies führt auf

$$\begin{aligned} \|\phi_h \circ \Phi_T\|_{h, T_{\text{ref}}}^2 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \left( (1-x-y-z)|\mathbf{a}|^2 + x|\mathbf{b}|^2 + y|\mathbf{c}|^2 + z|\mathbf{d}|^2 \right) dz dy dx \\ &= \frac{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{d}|^2}{24}. \end{aligned}$$

Um einzusehen, dass die erste Äquivalenzkonstante in (2.26) durch  $C_1 = 1$  gegeben ist, betrachten wir

$$\begin{aligned} \|\phi_h \circ \Phi_T\|_{h, T_{\text{ref}}}^2 - \|\phi_h \circ \Phi_T\|_{L^2(T_{\text{ref}})}^2 &= \\ &= \frac{1}{120} (|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{c}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{d}|^2 + |\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2 + |\mathbf{b} - \mathbf{d}|^2 + |\mathbf{c} - \mathbf{d}|^2). \end{aligned}$$

Da wir auf eine Abschätzung

$$\|\phi_h \circ \Phi_T\|_{h, T_{\text{ref}}}^2 - \|\phi_h \circ \Phi_T\|_{L^2(T_{\text{ref}})}^2 \geq 0 \quad (2.28)$$

abzielen, ist der pessimistischste Fall im Sinne einer Minimierung von  $\frac{1}{120} (|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{c}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{d}|^2 + |\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2 + |\mathbf{b} - \mathbf{d}|^2 + |\mathbf{c} - \mathbf{d}|^2)$  durch die Anwendung  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{d} \neq 0$  abgedeckt. Dennoch ist auch unter dieser Koeffizientenwahl Abschätzung (2.28) gültig und daher die Wahl  $C_1 = 1$  zulässig.

Um die obere Äquivalenzkonstante  $C_2 = 5$  in (2.26) einzusehen, betrachten wir

$$5\|\phi_h \circ \Phi_T\|_{L^2(T_{\text{ref}})}^2 - \|\phi_h \circ \Phi_T\|_{h, T_{\text{ref}}}^2 = \frac{1}{24} |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}|^2.$$

Unter der Bedingung, dass

$$5\|\phi_h \circ \Phi_T\|_{L^2(T_{\text{ref}})}^2 - \|\phi_h \circ \Phi_T\|_{h, T_{\text{ref}}}^2 \geq 0 \quad (2.29)$$

gilt, ist der schlimmste Fall im Sinne einer Minimierung von  $\frac{1}{24} |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}|^2$  dann erreicht, wenn  $\mathbf{a} = -\mathbf{b}, \mathbf{c} = \mathbf{d} = 0$  oder eine dazu äquivalente Wahl getroffen wird. Da diese Kombination noch immer die Gültigkeit von (2.29) erfüllt, ist die Wahl  $C_2 = 5$  zulässig.

Damit ist die Aussage des Lemmas vollständig bewiesen.  $\square$

**Lemma 2.2.4.** Sei  $\phi_h \in \mathcal{V}_h$  und  $\psi \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ . Dann gilt folgende Identität

$$(\phi_h, \psi)_{h,\Omega} = (\phi_h, \mathcal{I}_h(\psi))_{h,\Omega}. \quad (2.30)$$

Dies stellt eine Invarianz des Mass-Lumping des  $L^2$ -Skalarprodukts gegenüber dem nodalen Interpolanten  $\mathcal{I}_h$  dar.

*Beweis.* Wir betrachten die rechte Seite von (2.30) und setzen die Definition der diskreten Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  und des nodalen Interpolationsoperators  $\mathcal{I}_h$  ein

$$\begin{aligned} (\phi_h, \mathcal{I}_h(\psi))_{h,\Omega} &= \int_{\Omega} \mathcal{I}_h \left( \left\langle \phi_h, \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} \psi(\mathbf{z}_i) \beta_i \right\rangle \right) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{\mathbf{z}_\ell \in \mathcal{N}_h} \int_{\Omega} \left\langle \phi_h(\mathbf{z}_\ell), \left( \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} \psi(\mathbf{z}_i) \beta_i \right) (\mathbf{z}_\ell) \right\rangle \beta_\ell d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Da die nodalen Basisfunktionen  $\{\beta_i\}$  durch die Kronecker Eigenschaft charakterisiert werden, d.h. es gilt  $\beta_i(\mathbf{z}_\ell) = \delta_{i\ell}$  für  $i, \ell = 1, \dots, N$ , erhalten wir

$$(\phi_h, \mathcal{I}_h(\psi))_{h,\Omega} = \sum_{\mathbf{z}_\ell \in \mathcal{N}_h} \int_{\Omega} \langle \phi_h(\mathbf{z}_\ell), \psi(\mathbf{z}_\ell) \rangle \beta_\ell d\mathbf{x}.$$

Nach Definition von  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  gilt daher

$$(\phi_h, \mathcal{I}_h(\psi))_{h,\Omega} = (\phi_h, \psi)_{h,\Omega}$$

und verifiziert damit die Behauptung des Lemmas.  $\square$

**Lemma 2.2.5.** Es gilt

$$\left| \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \phi_h, \psi_h \rangle) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \langle \phi_h, \psi_h \rangle d\mathbf{x} \right| \leq Ch \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \psi_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.31)$$

für alle Funktionen  $\phi_h, \psi_h \in \mathcal{V}_h$  mit einer Konstante  $C > 0$ , die unabhängig von der Netzweite  $h$  ist.

*Beweis.* In einem ersten Schritt bedienen wir uns der Lokalität der  $L^1$ -Norm, setzen die Höldersche Ungleichung ein und erhalten unter Berücksichtigung von  $\mathcal{P}^1(T; \mathbb{R}^3) \subset \ker(\mathcal{I}_h - 1)$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \phi_h, \psi_h \rangle) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \langle \phi_h, \psi_h \rangle d\mathbf{x} \right| &\leq \|(\mathcal{I}_h - 1)(\langle \phi_h, \psi_h \rangle)\|_{L^1(\Omega)} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\| (\mathcal{I}_h - 1)(\langle \phi_h, \psi_h - \bar{\psi}_h \rangle) \right\|_{L^1(T)} \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |T|^{1/2} \|(\mathcal{I}_h - 1)(\langle \phi_h, \psi_h - \bar{\psi}_h \rangle)\|_{L^2(T)} \end{aligned}$$

mit  $\bar{\psi}_h$  einer beliebigen Funktion aus  $\mathcal{P}^0(T; \mathbb{R}^3)$ . Im Folgenden wählen wir  $\bar{\psi}_h = 1/|T| \int_T \psi_h d\mathbf{x}$ . Nach dem Approximationssatz und der inversen Abschätzung gilt

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{I}_h - 1)(\langle \phi_h, \psi_h - \bar{\psi}_h \rangle)\|_{L^2(T)} &\lesssim h^2 \|D^2(\langle \phi_h, \psi_h - \bar{\psi}_h \rangle)\|_{L^2(T)} \\ &\lesssim h \|\nabla(\langle \phi_h, \psi_h - \bar{\psi}_h \rangle)\|_{L^2(T)}. \end{aligned}$$

Dies führt zusammen mit der Beobachtung  $\|\chi_h\|_{L^2(T)}|T|^{1/2} \simeq \|\chi_h\|_{L^1(T)}$  für beliebiges  $\chi_h \in \mathcal{P}^q(T; \mathbb{R}^3)$  mit  $q \in \mathbb{N}$ , die auf einem einfachen Skalierungsargument beruht, auf

$$\begin{aligned} |T|^{1/2} \|(\mathcal{I}_h - 1)(\langle \phi_h, \psi_h - \bar{\psi}_h \rangle)\|_{L^2(T)} &\simeq \|(\mathcal{I}_h - 1)(\langle \phi_h, \psi_h - \bar{\psi}_h \rangle)\|_{L^1(T)} \\ &\lesssim h \|\nabla(\langle \phi_h, \psi_h - \bar{\psi}_h \rangle)\|_{L^1(T)}. \end{aligned}$$

Anwenden der Produktregel und erneutes Einsetzen der Hölderschen Ungleichung zeigt

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{I}_h - 1)(\langle \phi_h, \psi_h - \bar{\psi}_h \rangle)\|_{L^1(T)} &\lesssim h \|(\langle \nabla \phi_h, \psi_h - \bar{\psi}_h \rangle) + (\langle \phi_h, \nabla \psi_h \rangle)\|_{L^1(T)} \\ &\leq h \left( \|\nabla \phi_h\|_{L^2(T)} \|\psi_h - \bar{\psi}_h\|_{L^2(T)} + \|\phi_h\|_{L^2(T)} \|\nabla \psi_h\|_{L^2(T)} \right). \end{aligned}$$

Wir bedienen uns nun der inversen Abschätzung für den ersten Faktor des ersten Summanden der rechten Seite, während wir für den zweiten Faktor die Poincarésche Ungleichungen bemühen und sehen

$$\|(\mathcal{I}_h - 1)(\langle \phi_h, \psi_h \rangle)\|_{L^1(T)} \lesssim h \|\phi_h\|_{L^2(T)} \|\nabla \psi_h\|_{L^2(T)}.$$

Schließlich zeigt Summation über alle Elemente  $T \in \mathcal{T}_h$  und Anwenden der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung das gewünschte Resultat.  $\square$

**Lemma 2.2.6.** *Es gibt eine von der Netzweite  $h$  unabhängige Konstante  $C > 0$ , sodass*

$$\left| \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \phi_h, \psi_h \rangle) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \langle \phi_h, \psi_h \rangle d\mathbf{x} \right| \leq Ch \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \psi_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.32)$$

für alle Funktionen  $\phi_h \in \mathcal{V}_h$  und  $\psi_h \in \mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  gilt.

*Beweis.* Wir wenden zunächst Lemma 2.2.4 an und schätzen mit der Dreiecksungleichung ab

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \phi_h, \psi_h \rangle) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \langle \phi_h, \psi_h \rangle d\mathbf{x} \right| &\leq \left| \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \phi_h, \mathcal{I}_h(\psi_h) \rangle) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \langle \phi_h, \mathcal{I}_h(\psi_h) \rangle d\mathbf{x} \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} \langle \phi_h, \mathcal{I}_h(\psi_h) \rangle d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \langle \phi_h, \psi_h \rangle d\mathbf{x} \right|. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Um den ersten Summanden der rechten Seite weiter abzuschätzen, nutzen wir Lemma 2.2.5 und erhalten

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \phi_h, \mathcal{I}_h(\psi_h) \rangle) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \langle \phi_h, \mathcal{I}_h(\psi_h) \rangle d\mathbf{x} \right| \\ &\lesssim h \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathcal{I}_h(\psi_h)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim h \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} (\|\nabla(\mathcal{I}_h - 1)(\psi_h)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \psi_h\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Wir wenden den Approximationssatz und die inverse Abschätzung für jedes Element  $T \in \mathcal{T}_h$  an und erhalten schließlich

$$\left| \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\langle \phi_h, \mathcal{I}_h(\psi_h) \rangle) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \langle \phi_h, \mathcal{I}_h(\psi_h) \rangle d\mathbf{x} \right| \lesssim h \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \psi_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Betrachten wir den zweiten Summanden der rechten Seite von (2.33), so erhalten wir nach lokaler Anwendung des Approximationssatzes und der inversen Abschätzung

$$\left| \int_{\Omega} \langle \phi_h, (\mathcal{I}_h - 1)(\psi_h) \rangle d\mathbf{x} \right| \lesssim h^2 \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \|D^2 \psi_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \psi_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Insgesamt haben wir damit das gewünschte Resultat verifiziert.  $\square$

**Bemerkung 2.2.7.** *Es gilt zu bemerken, dass nach Lemma 2.2.2—2.2.6 klar ist, dass das Mass-Lumping des  $L^2$ -Skalarprodukts eine zulässige Wahl der diskreten Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  im Sinne der Forderungen (2.15)—(2.19) darstellt.*

## 2.3 Diskretisierung in der Zeit

Wir betrachten eine uniforme Diskretisierung  $\mathcal{U}_k$  des endlichen Zeitintervalls  $(0, t_{\text{end}}) = (t_0, t_1] \cup \dots \cup [t_{J-1}, t_J)$ . Dabei gilt  $t_0 = 0$  und  $t_J = t_{\text{end}}$ . Wir bezeichnen die Zeitschrittweite mit  $k$ , wobei  $k = k_j := t_{j+1} - t_j$  für  $j = 0, \dots, J - 1$ . Entsprechend dieser Notation wird mit  $\varphi^j$  die Auswertung einer Funktion  $\varphi \in C(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3)$  zum Zeitpunkt  $t_j$  dargestellt.



## Kapitel 3

# Lineare Diskretisierung der LLG-Gleichung

In diesem Kapitel wollen wir ein Finite-Elemente-Schema (FE-Schema) niedrigster Ordnung zur approximativen Lösung der LLG-Gleichung vorstellen und analysieren. Zum Zwecke der Übersichtlichkeit wiederholen wir unsere Modellgleichung

$$\mathbf{m}_t = -\frac{1}{1+\alpha^2}\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}(\mathbf{m}, \mathbf{f}) - \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}}(\mathbf{m}, \mathbf{f})), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{m}(0) = \mathbf{m}_0 \quad \text{in } H^1(\Omega; \mathbb{S}^2), \quad (3.2)$$

$$\partial_\nu \mathbf{m} = 0 \quad \text{auf } (0, t_{\text{end}}) \times \partial\Omega \quad (3.3)$$

und betonen, dass die Lösung  $\mathbf{m}$  stets die nicht-konvexe Nebenbedingung

$$|\mathbf{m}(t, \mathbf{x})| = 1 \quad \text{für fast alle } (t, \mathbf{x}) \in \Omega_\tau \quad (3.4)$$

erfüllt.

Unser Verfahren basiert auf jenem Lösungsansatz, der von ALOUGES in [5] für ein reduziertes Modellproblem, nämlich das *Small-Particle-Limit*, eingeführt wurde. Ein solches Modellproblem reicht zwar aus, um die Grundidee eines numerischen Verfahrens zu präsentieren, stellt jedoch keine rigorose Analysis für ein physikalisch vollständiges Modell dar.

Wir erweitern diesen impliziten Ansatz zu einem Time-Splitting-Verfahren und betrachten anstelle des vereinfachten effektiven Feldes  $\mathbf{h}_{\text{eff}}(\mathbf{m}) = \Delta\mathbf{m}$  das totale magnetische Feld unter Einfluss des Austausch, der Anisotropie, des Streufeldes und des angelegten äußeren Feldes. Daher findet das totale effektive Feld  $\mathbf{h}_{\text{eff}} = \mathbf{h}_{\text{eff}}(\mathbf{m}, \mathbf{f})$  folgende Darstellung

$$\mathbf{h}_{\text{eff}} = \frac{2A}{\mu_0 M_s^2} \Delta\mathbf{m} - \frac{K}{\mu_0 M_s^2} D\Phi(\mathbf{m}) - \mathcal{P}(\mathbf{m}) + \mathbf{f}. \quad (3.5)$$

In unserem numerischen Verfahren wird jener Term, der von höchster Ordnung ist — nämlich jener Beitrag, der von der Austauschenergie abhängt — implizit berechnet, während die anderen Energiebeiträge explizit behandelt werden. Dies scheint insbesondere für die Berechnung des Streufeldes von Vorteil zu sein, da dieser Anteil aus Sicht der Implementierung sowohl am Speicher- als auch am zeitaufwändigsten ist. In Kapitel 4 wird auf diverse Methoden zur approximativen Berechnung dieses Energiebausteins eingegangen. Im Folgenden nehmen wir auf die näherungsweise Berechnung des Streufeldes sowie des angewandten äußeren Feldes, siehe Abschnitt 3.4, Rücksicht und beziehen dies ebenfalls in unsere Konvergenzanalyse mit ein. Außerdem kommt in unserem numerischen Verfahren das Ersetzen des  $L^2$ -Skalarprodukts durch eine diskrete Variante zum Einsatz, um dadurch eine zusätzliche Beschleunigung des Algorithmus'

zu erzielen. Trotz dieser Erweiterungen und der Tatsache, dass wir eine nicht-lineare Gleichung betrachten, benötigt der numerische Algorithmus nach wie vor nur die Lösung eines schwach besetzten linearen Gleichungssystems pro Zeitschritt. Des Weiteren beweisen wir unbedingte schwache Konvergenz einer Teilfolge gegen eine globale schwache Lösung der LLG-Gleichung. Hierbei ist das Attribut „unbedingt“ so zu interpretieren, dass die Ortschaftweite  $h$  und die Zeitschrittweite  $k$  keiner Kopplung unterliegen, sondern unabhängig voneinander gegen 0 gehen.

Zunächst wollen wir in einem einleitenden Abschnitt jene Begriffe und Notation einführen, die wir ausschließlich in diesem Kapitel verwenden. Des Weiteren werden vorbereitende Lemmata und Resultate gesammelt, die in späteren Abschnitten ihre Anwendung finden.

### 3.1 Notation und Einleitung

Diese Sektion ist der Einführung weiterer Notation gewidmet, die wir speziell in diesem Kapitel verwenden wollen. Darüber hinaus stellen wir Resultate im Zusammenhang mit diskreten Funktionen  $\phi_h \in \mathcal{V}_h$  bzw.  $\mathbf{m}_h \in \mathcal{M}_h$  zusammen.

Wir wählen den FE-Ansatzraum  $\mathcal{V}_h = \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  niedrigster Ordnung. Mit Ansatzfunktionen  $\beta_i \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  für  $i = 1, \dots, N$  aus Kapitel 2 findet er folgende Darstellung

$$\mathcal{V}_h = \left\{ \phi_h = \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} \phi_h(\mathbf{z}_i) \beta_i \mid \phi_h(\mathbf{z}_i) \in \mathbb{R}^3 \text{ für alle } \mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h \right\}.$$

Aus diesem Raum diskreter Funktionen extrahieren wir eine Teilmenge  $\mathcal{M}_h \subseteq \mathcal{V}_h$ , die wie folgt charakterisiert wird

$$\mathcal{M}_h = \left\{ \phi_h \in \mathcal{V}_h \mid \phi_h(\mathbf{z}_i) \in \mathbb{S}^2 \text{ für alle } \mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h \right\},$$

wobei  $\mathbb{S}^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = 1\}$  die 2-Sphäre bezeichnet. Es gilt zu beachten, dass die Auswahl  $\mathcal{M}_h$  jene Menge an Funktionen repräsentiert, in der wir unsere approximative Lösung der LLG-Gleichung suchen entsprechend der nicht-konvexen Nebenbedingung  $|\mathbf{m}| = 1$ , siehe (3.4). Darüber hinaus definieren wir für jede Funktion  $\phi_h = \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} \phi_h(\mathbf{z}_i) \beta_i \in \mathcal{M}_h$  den Raum

$$\mathcal{K}_{\phi_h} = \left\{ \psi_h \in \mathcal{V}_h \mid \psi_h(\mathbf{z}_i) \cdot \phi_h(\mathbf{z}_i) = 0 \text{ für alle } \mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h \right\},$$

die in einem gewissen Sinn das orthogonale Gegenstück zu jeweils einer Funktion aus  $\mathcal{M}_h$  darstellt.

Da der diskrete Ansatzraum  $\mathcal{V}_h$  endlichdimensional ist, sind alle auf ihm definierten Normen äquivalent. Das folgende Lemma präsentiert eine quantifizierte Äquivalenzrelation im Bezug auf nodale Auswertung.

**Lemma 3.1.1.** *Sei  $\mathcal{T}_h$  eine quasi-uniforme und reguläre Triangulierung von  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Dann existiert eine Konstante  $C > 0$ , die lediglich von der Formregularitätskonstante  $\sigma(\mathcal{T}_h)$  und der*

Dimension des Gebiets abhängt, sodass für alle  $1 \leq p < \infty$  und alle  $\phi_h \in \mathcal{V}_h$  die Relation

$$\frac{1}{C} \|\phi_h\|_{L^p(\Omega)}^p \leq h^d \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} |\phi_h(\mathbf{z}_i)|^p \leq C \|\phi_h\|_{L^p(\Omega)}^p \quad (3.6)$$

erfüllt ist.

*Beweis.* Wir bemerken, dass die Äquivalenzrelation (3.6) gleichbedeutend zu

$$C_1 h^d \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} |\phi_h(\mathbf{z}_i)|^p \leq \|\phi_h\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C_2 h^d \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} |\phi_h(\mathbf{z}_i)|^p \quad (3.7)$$

ist, wobei  $C_1, C_2 > 0$  positive Konstanten darstellen, die durch die Definition  $C := \max\{1/C_1, C_2\}$  mit der Konstante  $C > 0$  aus (3.6) im Zusammenhang stehen.

Da  $\mathcal{T}_h$  eine formreguläre Triangulierung von  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ist, ist die Anzahl an Elementen  $T \in \mathcal{T}_h$ , die einen gewissen Knoten beinhalten, gleichmäßig beschränkt durch die Formregularitätskonstante  $\sigma(\mathcal{T}_h)$ . Darüber hinaus impliziert Quasi-Uniformität, dass es hinreichend ist, folgende Relation für ein beliebiges Element  $T \in \mathcal{T}_h$  zu zeigen

$$C_1 h_T^d \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h(T)} |\phi_h(\mathbf{z}_i)|^p \leq \|\phi_h\|_{L^p(T)}^p \leq C_2 h_T^d \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h(T)} |\phi_h(\mathbf{z}_i)|^p. \quad (3.8)$$

In einem ersten Schritt wollen wir die Gültigkeit von (3.8) auf dem Referenzelement  $T_{\text{ref}}$  prüfen. Dazu betrachten wir die affine Abbildung  $\Phi_T : T_{\text{ref}} \rightarrow T$  mit der Abbildungsvorschrift  $\Phi_T(\mathbf{z}_i^{\text{ref}}) = \mathbf{z}_i$  und definieren  $\hat{\phi}_h := \phi_h \circ \Phi_T$ . Insbesondere findet  $\hat{\phi}_h$  folgende Darstellung bezüglich der nodalen Basis am Referenzelement

$$\hat{\phi}_h = \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h(T)} \phi_h(\mathbf{z}_i) \beta_i^{\text{ref}}.$$

Des Weiteren wird durch

$$\|\cdot\|_T := \left( \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h(T)} |\cdot(\mathbf{z}_i)|^p \right)^{1/p}$$

eine Norm definiert. Aufgrund der Endlichdimensionalität können wir die Normäquivalenz zwischen  $\|\cdot\|_{L^p(T_{\text{ref}})}$  und  $\|\cdot\|_{T_{\text{ref}}}$  am Referenzelement  $T_{\text{ref}}$  nutzen und erhalten unter Berücksichtigung von

$$\|\phi_h\|_T^p = \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h(T)} |\phi_h(\mathbf{z}_i)|^p = \sum_{\mathbf{z}_i^{\text{ref}} \in \mathcal{N}_h(T_{\text{ref}})} \left| \hat{\phi}_h(\mathbf{z}_i^{\text{ref}}) \right|^p = \|\hat{\phi}_h\|_{T_{\text{ref}}}^p$$

die Äquivalenzrelation

$$C'_1 \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h(T)} |\phi_h(\mathbf{z}_i)|^p \leq \int_{T_{\text{ref}}} \left| \hat{\phi}_h \right|^p d\mathbf{x} \leq C'_2 \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h(T)} |\phi_h(\mathbf{z}_i)|^p,$$

wobei die auftretenden Konstanten lediglich von  $T_{\text{ref}}$  und von  $p$  abhängen. Insbesondere haben wir damit die Gültigkeit von (3.8) auf dem Referenzelement  $T_{\text{ref}}$  nachgewiesen.

In einem zweiten Schritt wollen wir diese Äquivalenz für ein beliebiges Element  $T \in \mathcal{T}_h$  einsehen. Nach dem Transformationssatz gilt

$$\int_{T_{\text{ref}}} \left| \hat{\phi}_h \right|^p d\mathbf{x} = \int_{T_{\text{ref}}} |\phi_h \circ \Phi_T|^p d\mathbf{x} = |\det B_T|^{-1} \int_T |\phi_h|^p d\mathbf{x},$$

wobei  $B_T$  die Jacobi Matrix der affinen Abbildung  $\Phi_T$  notiert. Verwenden wir die inverse Transformation  $\Phi_T^{-1}$ , so erhalten wir  $\phi_h = \widehat{\phi}_h \circ \Phi_T^{-1}$ . Daher gilt insgesamt

$$\int_T |\phi_h|^p d\mathbf{x} = |\det B_T| \int_{T_{\text{ref}}} |\widehat{\phi}_h|^p d\mathbf{x}.$$

Die Wahl einer konstanten Funktion  $\phi_h$  impliziert die Existenz einer Konstante  $C' > 0$ , die nur von der Dimension  $d$  des Gebiets abhängt, sodass

$$|\det B_T| = \frac{|T|}{|T_{\text{ref}}|} \leq C' h_T^d$$

gilt. Damit erhalten wir schließlich

$$\|\phi_h\|_{L^p(T)}^p \leq C' h_T^d \|\widehat{\phi}_h\|_{L^p(T_{\text{ref}})}^p \leq C' C_2' h_T^d \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h(T)} |\phi_h(\mathbf{z}_i)|^p.$$

Um auch eine Abschätzung nach unten zu erreichen, bedienen wir uns der Formregularität der Familie von Triangulierungen  $\mathcal{T}_h$  und erhalten demnach folgende Abschätzung für eine Konstante  $C'' > 0$

$$|\det B_T| \geq C'' h_T^d.$$

Daher gilt

$$\|\phi_h\|_{L^p(T)}^p \geq C'' h_T^d \int_{T_{\text{ref}}} |\widehat{\phi}_h|^p d\mathbf{x} \geq C'' C_1' h_T^d \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h(T)} |\phi_h(\mathbf{z}_i)|^p.$$

Damit haben wir insgesamt folgende Relation gezeigt

$$C'' C_1' h_T^d \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h(T)} |\phi_h(\mathbf{z}_i)|^p \leq \|\phi_h\|_{L^p(T)}^p \leq C' C_2' h_T^d \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h(T)} |\phi_h(\mathbf{z}_i)|^p.$$

Dies gleicht (3.8) und beschließt daher den Beweis.  $\square$

Im folgenden Lemma beschäftigen wir uns mit der Quantifizierung einer knotenweisen Auswertung im Gegensatz zu einer generischen Evaluation einer Funktion  $\phi_h \in \mathcal{M}_h$ .

**Lemma 3.1.2.** *Für jedes Element  $T$  einer quasi-uniformen Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  von  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  und jede Funktion  $\phi_h \in \mathcal{M}_h$  gilt für alle  $\mathbf{x} \in T$  die Abschätzung*

$$||\phi_h(\mathbf{x})| - 1| \leq h |\nabla \phi_h(\mathbf{x})|. \quad (3.9)$$

*Insbesondere lässt sich daraus für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$  einfach die Abschätzung*

$$\left\| |\phi_h(\mathbf{x})| - 1 \right\|_{L^2(\Omega)} \leq h \|\nabla \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.10)$$

*ableiten.*

*Beweis.* Wir betrachten die Funktion  $\phi_h$  auf einem Element  $T \in \mathcal{T}_h$ . Nach der Mittelwertungleichung schätzen wir wie folgt ab

$$||\phi_h(\mathbf{x})| - 1| = \left| |\phi_h(\mathbf{x})| - |\phi_h(\mathbf{z}_i)| \right| \leq |\phi_h(\mathbf{x}) - \phi_h(\mathbf{z}_i)| \leq \max_{\mathbf{z} \in T} |\nabla \phi_h(\mathbf{z})| |\mathbf{x} - \mathbf{z}_i|.$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h$  einen Eckpunkt des Tetraeders  $T \in \mathcal{T}_h$ , während  $\mathbf{x} \in T$  lediglich einen beliebigen Punkt des Tetraeders  $T$  beschreibt. Da  $\phi_h \in \mathcal{S}^1(T; \mathbb{R}^3)$  gilt, leiten wir daraus

$$|\phi_h(\mathbf{x})| - 1 \leq h |\nabla \phi_h|_T$$

ab und haben damit Abschätzung (3.9) bewiesen.

Um die zweite Aussage des Lemmas einzusehen integrieren wir über die Quadrate der linken und rechten Seite über das Gebiet  $T$  und summieren über alle Elemente  $T \in \mathcal{T}_h$ . Wir erhalten

$$\int_{\Omega} \left| |\phi_h(\mathbf{x})| - 1 \right|^2 d\mathbf{x} \leq h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T |\nabla \phi_h|_T|^2 d\mathbf{x} = h^2 \int_{\Omega} |\nabla \phi_h|^2 d\mathbf{x}.$$

Dies ist gleichbedeutend zu (3.10) und beschließt daher den Beweis.  $\square$

Zuletzt wollen wir eine einfache Identität nachprüfen, die später einen Beitrag zum Beweis der unbeschränkten Konvergenz des FE-Schemas leistet.

**Lemma 3.1.3.** *Seien  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ . Des Weiteren sei  $\mathbf{a}$  normiert, d.h.  $|\mathbf{a}| = 1$ . Dann gilt die Identität*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \tag{3.11}$$

für alle  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ .

*Beweis.* Wir betrachten die linke Seite von Gleichung (3.11) und erläutern diese

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 c_3 - a_3 c_2 \\ a_3 c_1 - a_1 c_3 \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 \end{pmatrix} \\ &= a_2^2 b_3 c_3 - a_2 a_3 b_2 c_3 - a_2 a_3 b_3 c_2 + a_3^2 b_2 c_2 \\ &\quad + a_3^2 b_1 c_1 - a_1 a_3 b_3 c_1 - a_1 a_3 b_1 c_3 + a_1^2 b_3 c_3 \\ &\quad + a_1^2 b_2 c_2 - a_1 a_2 b_1 c_2 - a_1 a_2 b_2 c_1 + a_2^2 b_1 c_1. \end{aligned}$$

Einfaches Umformen und Zusammenfassen zeigt Äquivalenz zu

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) &= a_1^2 (b_2 c_2 + b_3 c_3) + a_2^2 (b_1 c_1 + b_3 c_3) + a_3^2 (b_1 c_1 + b_2 c_2) \\ &\quad - a_1 c_1 (a_3 b_3 + a_2 b_2) - a_2 c_2 (a_1 b_1 + a_3 b_3) - a_3 c_3 (a_1 b_1 + a_2 b_2). \end{aligned}$$

Beziehen wir die Gleichheit  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3$  mit ein, so liefert dies

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) &= a_1^2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - a_1^2 b_1 c_1 + a_2^2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - a_2^2 b_2 c_2 + a_3^2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - a_3^2 b_3 c_3 \\ &\quad - a_1 c_1 (a_3 b_3 + a_2 b_2) - a_2 c_2 (a_1 b_1 + a_3 b_3) - a_3 c_3 (a_1 b_1 + a_2 b_2) \\ &= |\mathbf{a}|^2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - a_1^2 b_1 c_1 - a_2^2 b_2 c_2 - a_3^2 b_3 c_3 \\ &\quad - a_1 c_1 (a_3 b_3 + a_2 b_2) - a_2 c_2 (a_1 b_1 + a_3 b_3) - a_3 c_3 (a_1 b_1 + a_2 b_2) \end{aligned}$$

und unter Berücksichtigung der Normierung  $|\mathbf{a}| = 1$  und weiterer Substitution gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - a_1^2 b_1 c_1 - a_2^2 b_2 c_2 - a_3^2 b_3 c_3 \\ &\quad - (a_1 c_1 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - a_1 c_1 a_1 b_1 + a_2 c_2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - a_2 c_2 a_2 b_2 + a_3 c_3 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - a_3 c_3 a_3 b_3). \end{aligned}$$

Wenden wir die Orthogonalitätsrelation  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  an, so erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + a_1^2 c_1 b_1 + a_2^2 c_2 b_2 + a_3^2 c_3 b_3 - a_1^2 c_1 b_1 - a_2^2 c_2 b_2 - a_3^2 c_3 b_3 \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

und beschließen damit den Beweis.  $\square$

## 3.2 Finite-Elemente-Schema

Das Herleiten eines effizienten FE-Schemas ist das Ziel dieses Abschnitts. Dabei gehen wir zunächst ähnlich wie in [5] vor und betrachten daher eine alternative jedoch äquivalente Formulierung der LLG-Gleichung, siehe (1.22). Ausgehend von dieser Darstellung betrachten wir ihre schwache Formulierung und diskretisieren diese. Im Weiteren geben wir eine spezielle Berechnung jener Terme an, die der totalen Energie entspringen. Dies bedeutet im Konkreten, dass wir den Energiebeitrag des Austausches implizit berechnen, während wir Anisotropie, Streufeld und äußeres Feld explizit behandeln. Bezugnehmend auf den daraus resultierenden Algorithmus zeigen wir Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des diskreten Problems. Dies schließt den ersten Unterabschnitt ab.

In einem weiteren Schritt gehen wir von dem zuletzt gewonnen FE-Schema aus und bemühen außerdem eine approximative Berechnung jener Terme, die die Gestalt einer Massenmatrix haben, wodurch deren Blöcke auf Diagonalgestalt reduziert werden. Wir zeigen für das daraus resultierende FE-Schema Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des linearen Gleichungssystems, das pro Zeitschritt zu lösen ist.

### 3.2.1 Finite-Elemente-Schema mit Time-Splitting

Wir betrachten die äquivalente Formulierung (1.22) der LLG-Gleichung und wiederholen diese zum Zwecke der Präsentation

$$\alpha \mathbf{m}_t + \mathbf{m} \times \mathbf{m}_t = \mathbf{h}_{\text{eff}}(\mathbf{m}, \mathbf{f}) - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}}(\mathbf{m}, \mathbf{f})) \mathbf{m} \text{ in } \Omega_\tau, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{m}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{m}_0(\mathbf{x}) \text{ in } H^1(\Omega; \mathbb{S}^2), \quad (3.13)$$

$$\partial_\nu \mathbf{m} = 0 \quad \text{auf } (0, t_{\text{end}}) \times \partial\Omega. \quad (3.14)$$

mit

$$|\mathbf{m}(t, \mathbf{x})| = 1 \quad \text{für fast alle } (t, \mathbf{x}) \in \Omega_\tau. \quad (3.15)$$

Es gilt zu beachten, dass hierbei die Magnetisierung  $\mathbf{m}$  nicht-lineares Auftreten hat, während die Zeitableitung der Magnetisierung  $\mathbf{m}_t$  linear in die Gleichung eingeht. Für ein diskretes Lösungsverfahren erscheint es daher sinnvoll, nach der unbekanntem Zeitableitung der Magnetisierung zu suchen und anschließend mithilfe eines einseitigen Differenzenquotienten die Magnetisierung zu berechnen.

Um diese Idee zu verfolgen und das Auflösen der Gleichung nach der Zeitableitung zu betonen, setzen wir zunächst  $\mathbf{v} := \mathbf{m}_t$ . Des Weiteren wollen wir hervorheben, dass aufgrund der nicht-konvexen Nebenbedingung  $|\mathbf{m}| = 1$  fast überall in  $\Omega_\tau$ , die Relation  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m}_t \cdot \mathbf{m} \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{m}|^2 = 0$  erfüllt ist. In diesem Sinn erscheint es natürlich, die Menge der Testfunktionen durch Funktionen aus  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \cap \mathcal{K}_{\mathbf{m}}$  zu charakterisieren, wobei  $\mathcal{K}_{\mathbf{m}} = \{\boldsymbol{\phi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \mid \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{x}) = 0 \text{ für fast alle } \mathbf{x} \in \Omega\}$ .

Testen wir nun Gleichung (3.12) mit einer Funktion  $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}}$ , so erhalten wir

$$\alpha \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{m} \times \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{h}_{\text{eff}}(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x}.$$

Wie wir bereits aus den Abschnitten 1.1.1–1.1.4 wissen, lassen sich die Beiträge des totalen Feldes in einen Term höherer Ordnung und Beiträge niedrigerer Ordnung zerlegen. Wir fassen jene Terme, die von niedrigerer Ordnung sind, zusammen und definieren  $\mathbf{h}_{\text{low}} = \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}, \mathbf{f})$  wie folgt

$$\mathbf{h}_{\text{low}} := -\frac{K}{\mu_0 M_s^2} D\Phi(\mathbf{m}) - \mathcal{P}(\mathbf{m}) + \mathbf{f} = -C_{\text{ani}} D\Phi(\mathbf{m}) - \mathcal{P}(\mathbf{m}) + \mathbf{f} \quad (3.16)$$

und ergänzen dies mit der vereinfachten Schreibweise

$$C_{\text{ex}} := \frac{2A}{\mu_0 M_s^2}, \quad C_{\text{ani}} := \frac{K}{\mu_0 M_s^2}. \quad (3.17)$$

Mit dieser Notation und der Darstellung des effektiven Feldes  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  aus (3.5) betrachten wir nun

$$\alpha \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{m} \times \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} = C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \Delta \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x}$$

und wenden auf jenen Term, der vom Austausch stammt, partielle Integration an, wobei wir die Randbedingung  $\partial_{\nu} \mathbf{m} = 0$  auf  $(0, t_{\text{end}}) \times \partial\Omega$  berücksichtigen. Damit erhalten wir

$$\alpha \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{m} \times \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} = -C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{m} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x}. \quad (3.18)$$

Um die schwache Formulierung (3.18) im Ort zu einem Zeitschritt  $t_j$  zu diskretisieren, approximieren wir  $\mathbf{m}(t_j, \cdot)$  durch eine diskrete Funktion  $\mathbf{m}_h^j \in \mathcal{M}_h$ . In analoger Weise wird die Zeitableitung  $\mathbf{v}$  der Magnetisierung im Zeitschritt  $t_j$  durch eine diskrete Funktion  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  angenähert.

Induktiv wird  $\mathbf{m}_h^{j+1}$ , also die Auswertung der diskretisierten Magnetisierung im Zeitschritt  $t_{j+1}$ , bis auf Normalisierung durch die Summe  $\mathbf{m}_h^j + k\mathbf{v}_h^j$  bestimmt. Entsprechend der kontinuierlichen Eigenschaft  $\mathbf{m}_t \cdot \mathbf{m} \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{m}|^2 = 0$ , die aufgrund der nicht-konvexen Nebenbedingung  $|\mathbf{m}| = 1$  fast überall in  $\Omega_{\tau}$  gilt, ist die kanonische Menge der diskreten Testfunktionen durch  $\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  gegeben. Nach Definition gilt daher  $\boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) = 0$  für alle Knoten  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_h$ .

Betrachten wir nun jene Operatoren die durch das totale effektive Feld induziert werden. Wie aus Kapitel 1 bereits hervorgeht ist einzig die Diskretisierung für jenen Beitrag, der vom Streufeld induziert wird, nicht offensichtlich. Wir widmen uns ausführlich der Fragestellung nach einer sinnvollen und effizienten Approximation des Streufeldoperators  $\mathcal{P}$  durch sein diskretes Pendant  $\mathcal{P}_h$  in Kapitel 4. Im aktuellen Kapitel halten wir lediglich die Forderung nach Stabilität

$$\|\mathcal{P}_h \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\mathcal{P}} \|\mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } \mathbf{n} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \quad (3.19)$$

und Konvergenz

$$\|\mathcal{P} \mathbf{n} - \mathcal{P}_h \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{für alle } \mathbf{n} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \quad (3.20)$$

fest. Hierbei bezeichnet  $C_{\mathcal{P}} > 0$  eine von der Netzweite  $h$  und Zeitschrittweite  $k$  unabhängige Konstante.

**Bemerkung 3.2.1.** *Wir bemerken, dass aus (3.19) insbesondere*

$$\|\mathcal{P}_h \mathbf{m}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\mathcal{P}} \|\mathbf{m}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } j > 0 \quad (3.21)$$

bzw.

$$\|\mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\mathcal{P}} \|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.22)$$

folgt. Außerdem bemerken wir, dass aus (3.20)

$$\|\mathcal{P} \mathbf{m} - \mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega_{\tau})} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0 \quad (3.23)$$

impliziert wird. Um dies einzusehen, betrachten wir

$$\|\mathcal{P}(\mathbf{m}) - \mathcal{P}_h(\mathbf{m})\|_{L^2(\Omega_{\tau})}^2 = \int_0^{t_{\text{end}}} \|\mathcal{P}(\mathbf{m}(t, \cdot)) - \mathcal{P}_h(\mathbf{m}(t, \cdot))\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Aus der Abschätzung  $\|\mathcal{P}(\mathbf{m}(t, \cdot)) - \mathcal{P}_h(\mathbf{m}(t, \cdot))\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \|\mathcal{P}(\mathbf{m}(t, \cdot))\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|\mathcal{P}_h(\mathbf{m}(t, \cdot))\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (2 + 2C_P^2) \|\mathbf{m}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (2 + 2C_P^2) |\Omega|$  und unter Berücksichtigung der endlichen Zeit  $t_{\text{end}} < \infty$ , schließen wir aus dem Satz von Lebesgue

$$\|\mathcal{P}(\mathbf{m}) - \mathcal{P}_h(\mathbf{m})\|_{L^2(\Omega_\tau)} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Es sei außerdem bemerkt, dass die im folgenden Abschnitt präsentierte Analysis eine Wahl des angewandten äußeren Feldes  $\mathbf{f}$  zulässt, das durch eine Funktion  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega_\tau) = L^2((0, t_{\text{end}}); L^2(\Omega))$ ,  $\mathbf{f} \in C([0, t_{\text{end}}]; L^2(\Omega))$  oder  $\mathbf{f} \in C(\overline{\Omega_\tau})$  gegeben ist. In jedem Fall ist eine Diskretisierung des äußeren Feldes in der Zeit notwendig. Zusätzlich ist auch eine Approximation im Ort möglich. Im Folgenden bezeichnen wir durch  $\mathbf{f}_{hk}$  mit

$$\mathbf{f}_{hk}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}_h^j(\mathbf{x}) \quad \text{für } t_j \leq t < t_{j+1} \text{ und } \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.24)$$

das im Ort und in der Zeit approximiert angelegte äußere Feld. Hierbei gibt es verschiedene Möglichkeiten, die diskrete Funktion  $\mathbf{f}_h^j$  zu definieren. Für weitere Details sei der Leser auf Abschnitt 3.4 verwiesen.

Im Wesentlichen fordern wir für die Approximation  $\mathbf{f}_{hk}$  des angelegten äußeren Feldes die Eigenschaft

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \rightarrow 0 \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0. \quad (3.25)$$

Mit diesem Diskretisierungsschritt deduzieren wir nun aus der schwachen Formulierung (3.18) folgenden Algorithmus:

**Algorithmus 3.2.2.** *Input: Startmagnetisierung  $\mathbf{m}_h^0 \in \mathcal{M}_h$ , Dämpfungsparameter  $\alpha > 0$ .*

(i) *Finde  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$ , sodass für alle Testfunktionen  $\psi_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  folgende Gleichung gilt*

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega} \mathbf{v}_h^j \cdot \psi_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{m}_h^j \times \mathbf{v}_h^j) \cdot \psi_h \, d\mathbf{x} \\ = -C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{m}_h^j \cdot \nabla \psi_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j) \cdot \psi_h \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

(ii) *Definiere  $\mathbf{m}_h^{j+1} \in \mathcal{M}_h$  durch  $\mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})}{|\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})|}$  für alle  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_h$  und gehe zu (i).*

*Output: Folge von Funktionen  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  als auch  $\mathbf{m}_h^{j+1} \in \mathcal{M}_h$  für  $j \geq 0$ .*

Algorithmus 3.2.2 stellt einen vollständig expliziten Ansatz zur approximativen Lösung von (3.18) dar. Die im folgenden Abschnitt präsentierte Konvergenzaussage würde zwar auch für diesen Algorithmus Gültigkeit haben, allerdings unter der Forderung einer zusätzlichen Bedingung an das Verhältnis von Ortsschrittweite und Zeitschrittweite.

Es gilt zu bemerken, dass die jeweils ersten Terme der linken und rechten Seite von (3.26) zur linearen Wärmeleitungsgleichung korrespondieren. Insbesondere ist hierin jener Anteil, der von der Austauschenergie stammt, enthalten und stellt den Term höchster Ordnung dar. Des Weiteren beschreiben jene Beiträge, die der Anisotropieenergie, der Streufeldenergie und der Zeeman-Energie entspringen, Terme niedrigerer Ordnung. Daher erwartet man im Bezug auf Stabilität die Notwendigkeit eines impliziten Ansatzes, damit eine Entkopplung von Ortsschrittweite  $h$  und Zeitschrittweite  $k$  möglich ist.

Einführung eines Parameters  $0 \leq \theta \leq 1$  und implizite Berechnung jener Terme, die die Magnetisierung enthalten, führt auf folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega} \mathbf{v}_h^j \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \left( (\mathbf{m}_h^j + \theta k \mathbf{v}_h^j) \times \mathbf{v}_h^j \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} \\ = -C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{m}_h^j + \theta k \mathbf{v}_h^j) \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j + \theta k \mathbf{v}_h^j, \mathbf{f}_h^j) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Dies ergibt, unter Berücksichtigung der Orthogonalität  $\mathbf{v}_h^j \times \mathbf{v}_h^j = 0$ , folgenden vollständig impliziten Algorithmus:

**Algorithmus 3.2.3.** *Input: Startmagnetisierung  $\mathbf{m}_h^0 \in \mathcal{M}_h$ , Dämpfungsparameter  $\alpha > 0$ , Parameter  $0 \leq \theta \leq 1$ .*

(i) *Finde  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$ , sodass für alle Testfunktionen  $\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  folgende Gleichung gilt*

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega} \mathbf{v}_h^j \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{m}_h^j \times \mathbf{v}_h^j) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} \\ = -C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{m}_h^j + \theta k \mathbf{v}_h^j) \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j + \theta k \mathbf{v}_h^j, \mathbf{f}_h^j) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

(ii) *Definiere  $\mathbf{m}_h^{j+1} \in \mathcal{M}_h$  durch  $\mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})}{|\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})|}$  für alle  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_h$  und gehe zu (i).*

*Output: Folge von Funktionen  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  als auch  $\mathbf{m}_h^{j+1} \in \mathcal{M}_h$  für  $j \geq 0$ .*

Dieser FE-Ansatz repräsentiert ein klassisches  $\theta$ -Schema. Wir erwarten aufgrund der Ähnlichkeit zur Wärmeleitungsgleichung, welche durch ein analoges Schema approximativ gelöst werden kann, unbedingte Stabilität von Algorithmus 3.2.3 für die Wahl eines Parameters  $1/2 < \theta \leq 1$ . Außerdem stellt der Fall  $\theta = 1/2$  eine Variante eines Crank-Nicolson-Schemas dar. Für  $\theta = 0$  erfolgt eine explizite Berechnung der Magnetisierung und insbesondere erhalten wir Algorithmus 3.2.2. Entsprechend erhält man hierfür nur bedingte Stabilität im Bezug auf Orts- und Zeitschrittweite. Schließlich führt die Wahl  $\theta = 1$  auf ein voll implizites Schema.

Es sei bemerkt, dass eine vollständige Konvergenzanalyse für Algorithmus 3.2.3 vorliegt, die im Wesentlichen auf jener Argumentation basiert, die in folgendem Unterabschnitt dargelegt wird. Daher wird in dieser Arbeit gänzlich auf eine Analysis bezüglich des impliziten Schemas verzichtet.

Der Vorteil des impliziten Ansatzes gegenüber dem expliziten liegt in der unbedingten Konvergenz des Verfahrens. Dies erlaubt nämlich eine Entkopplung der Ortsschrittweite  $h$  gegenüber der Zeitschrittweite  $k$ , was in numerischen Experimenten von Vorteil ist. Allerdings wird jener Teil des effektiven Feldes, der am aufwändigsten zu berechnen ist, nämlich das Streufeld, implizit behandelt. Die Berechnung des Streufeldes ist aus Sicht der Implementierung der teuerste Baustein des Gleichungssystems im Sinne von Speicherkosten und Zeitaufwand. Des Weiteren ist das Streufeld von niedrigerer Ordnung. Daher erwartet man aus analytischer Sicht nicht die Notwendigkeit einer impliziten Behandlung dieses Terms. Im folgenden Algorithmus reduzieren wir die implizite Berechnung auf den Term höchster Ordnung, während alle anderen Beiträge explizit in das Verfahren eingehen.

**Algorithmus 3.2.4.** *Input: Startmagnetisierung  $\mathbf{m}_h^0 \in \mathcal{M}_h$ , Dämpfungsparameter  $\alpha > 0$ , Parameter  $0 \leq \theta \leq 1$ .*

(i) Finde  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$ , sodass für alle Testfunktionen  $\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  folgende Gleichung gilt

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} \mathbf{v}_h^j \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{m}_h^j \times \mathbf{v}_h^j) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} \\ & = -C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{m}_h^j + \theta k \mathbf{v}_h^j) \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

(ii) Definiere  $\mathbf{m}_h^{j+1} \in \mathcal{M}_h$  durch  $\mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})}{|\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})|}$  für alle  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_h$  und gehe zu (i).

Output: Folge von Funktionen  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  als auch  $\mathbf{m}_h^{j+1} \in \mathcal{M}_h$  für  $j \geq 0$ .

Algorithmus 3.2.4 stellt ein sogenanntes Time-Splitting-Verfahren dar. Im Folgenden wollen wir charakteristische Eigenschaften der diskreten Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^j$  für  $j \geq 0$  herausarbeiten und die eindeutige Lösbarkeit von Gleichung (3.28) studieren.

Für den Moment gehen wir davon aus, dass eine Lösung  $\mathbf{v}_h^j$  von (3.28) für  $j \geq 0$  existiert. Dies wird nachfolgend bewiesen, siehe Theorem 3.2.10.

**Lemma 3.2.5.** *Die in Schritt (ii) der zuvor präsentierten Algorithmen 3.2.2, 3.2.3 und 3.2.4 definierte approximative Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^{j+1}$  ist wohldefiniert.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung gilt  $|\mathbf{m}_h^0(\mathbf{z})| = 1$  für alle Knoten  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_h$ . Wir betrachten nun  $j > 0$  und nehmen an, dass  $|\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z})| = 1$  für alle  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_h$  gilt. Jetzt zeigen wir, dass dann  $\mathbf{m}_h^{j+1}$  wohldefiniert ist mit  $|\mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z})| = 1$  für alle  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_h$ .

Die Tatsache, dass  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$ , impliziert Orthogonalität, d.h.  $\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) = 0$  für alle  $j \geq 0$  und für alle Knoten  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_h$ . Nach dem Satz von Pythagoras gilt also  $|\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})|^2 = |\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z})|^2 + k^2 |\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})|^2 \geq 1$ . Dies garantiert die Wohldefiniertheit von  $\mathbf{m}_h^{j+1}$  durch die knotenweise Definition

$$\mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})}{|\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})|} \quad \text{für alle } \mathbf{z} \in \mathcal{N}_h.$$

Gleichzeitig stellt dies für alle  $j > 0$  und alle Knoten  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_h$  die Längenerhaltung  $|\mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z})| = 1$  sicher.  $\square$

**Lemma 3.2.6.** *Die in den Algorithmen 3.2.2, 3.2.3 und 3.2.4 näherungsweise berechnete Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^j$  ist gleichmäßig beschränkt in folgendem Sinn*

$$\|\mathbf{m}_h^j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$$

für alle  $j \geq 0$ .

*Beweis.* Nach Konstruktion, siehe Algorithmen 3.2.2, 3.2.3 und 3.2.4 Schritt (ii), gilt  $|\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z})| = 1$  für alle  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_h$  und alle Indizes  $j \geq 0$ . Betrachten wir  $\mathbf{x} \in \Omega$ , so stellen wir fest, dass es zumindest ein Element  $T \in \mathcal{T}_h$  gibt, sodass  $\mathbf{x} \in T$ . Durch die Konvexität des Tetraeders  $T = \text{conv}\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\} \in \mathcal{T}_h$  können wir  $\mathbf{x}$  mit Hilfe von baryzentrischen Koordinaten wie folgt darstellen

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \mathbf{z}_i \quad \text{mit} \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1. \quad (3.29)$$

Wir beachten, dass  $\mathbf{m}_h^j \in \mathcal{M}_h \subset \mathcal{V}_h$  eine affine Funktion repräsentiert und sich daher in einen linearen Anteil  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  und eine Verschiebung  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$  zerlegen lässt

$$\mathbf{m}_h^j(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{t}.$$

Setzen wir nun die Darstellung von  $\mathbf{x}$  mit Hilfe der baryzentrischen Koordinaten ein, siehe (3.29), so erhalten wir aufgrund der Linearität

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_h^j(\mathbf{x}) &= \mathbf{A} \left( \sum_{i=1}^4 \lambda_i \mathbf{z}_i \right) + \mathbf{t} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i (\mathbf{A}\mathbf{z}_i) + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \mathbf{t} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i (\mathbf{A}\mathbf{z}_i + \mathbf{t}) \\ &= \sum_{i=1}^4 \lambda_i \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_i). \end{aligned}$$

Zusammen mit der Längenerhaltung  $|\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_i)| = 1$  für alle  $\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h$  schätzen wir wie folgt ab

$$\left| \mathbf{m}_h^j(\mathbf{x}) \right| = \left| \sum_{i=1}^4 \lambda_i \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_i) \right| \leq \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1,$$

wodurch die Aussage des Lemmas bewiesen ist.  $\square$

Wir führen eine verkürzte Schreibweise ein

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h) &= \alpha \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi}_h \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} + \theta k C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{\phi}_h \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x}, \\ b^j(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h) &= \int_{\Omega} (\mathbf{m}_h^j \times \boldsymbol{\phi}_h) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x}, \\ L^j(\boldsymbol{\psi}_h) &= -C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{m}_h^j \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} \\ &= -C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{m}_h^j \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} - C_{\text{ani}} \int_{\Omega} D\Phi(\mathbf{m}_h^j) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathcal{P}_h \mathbf{m}_h^j \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{f}_h^j \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

und können nun die Variationsformulierung aus Schritt (i) aus Algorithmus 3.2.4 in einer kompakteren Schreibweise darstellen

$$\begin{aligned} \text{Finde } \mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}, \text{ sodass für alle } \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j} \text{ gilt :} \\ a(\mathbf{v}_h^j, \boldsymbol{\psi}_h) + b^j(\mathbf{v}_h^j, \boldsymbol{\psi}_h) = L^j(\boldsymbol{\psi}_h) \quad \text{für alle } \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Wir wollen nun charakteristische Eigenschaften der Bilinearformen  $a(\cdot, \cdot)$  und  $b^j(\cdot, \cdot)$  bzw. der Linearform  $L^j(\cdot)$  nachweisen, um anschließend Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Variationsformulierung (3.31) treffen zu können.

**Lemma 3.2.7.** *Die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  ist symmetrisch, d.h.*

$$a(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}) = a(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi}) \quad \text{für alle } \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$$

und stetig

$$a(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}) \leq C_c \|\boldsymbol{\phi}\|_{H^1(\Omega)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$$

mit einer positiven Konstante  $C_c > 0$ , die unabhängig von der Netzweite  $h$  ist. Die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  ist positiv definit für  $\alpha > 0$ , d.h.

$$a(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}) \geq 0 \quad \text{mit} \quad a(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}) = 0 \iff \boldsymbol{\phi} \equiv 0 \quad \text{für alle } \boldsymbol{\phi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

Des Weiteren existiert eine Konstante  $C_e > 0$ , die unabhängig von der Netzweite  $h$  ist, sodass für Parameter  $\alpha, \theta k > 0$  für eine feste Zeitschrittweite  $k$  Elliptizität nachgewiesen wird

$$a(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}) \geq C_e \|\boldsymbol{\phi}\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{für alle } \boldsymbol{\phi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

Für den Fall  $\theta k = 0$  ist die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  elliptisch lediglich auf  $\mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j} \subset H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Des Weiteren hängt dann die Elliptizitätskonstante  $C_e$  von  $\mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  und der Dämpfungskonstante  $\alpha > 0$  ab.

*Beweis.* Nach Definition der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  ist die Symmetrieeigenschaft aufgrund der Symmetrie des Skalarprodukts in  $\mathbb{R}^3$  bzw. des Frobenius'schen inneren Produkts gegeben. Des Weiteren geht die positive Definitheit aus der Positivität der Koeffizienten wie folgt hervor

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}) &= \alpha \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{x} + \theta k C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{\phi} \cdot \nabla \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{x} \\ &= \alpha \int_{\Omega} |\boldsymbol{\phi}|^2 \, d\mathbf{x} + \theta k C_{\text{ex}} \int_{\Omega} |\nabla \boldsymbol{\phi}|^2 \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  für beliebige  $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  und wenden die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung an

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}) &= \alpha \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} + \theta k C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{\phi} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} \\ &\leq \alpha \|\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(\Omega)} + \theta k C_{\text{ex}} \|\nabla \boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \boldsymbol{\psi}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\alpha + \theta k C_{\text{ex}}) \|\boldsymbol{\phi}\|_{H^1(\Omega)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Mit diesen Charakteristiken definiert  $a(\cdot, \cdot)$  eine stetige Bilinearform.

Um die Elliptizitätseigenschaften der Bilinearform  $a(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi})$  einzusehen, unterscheiden wir wie folgt:

- Wir behandeln zunächst den Fall  $\theta k > 0$ .  
Wir schließen an die Überlegung zur positiven Definitheit an und schätzen ab

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}) &= \alpha \int_{\Omega} |\boldsymbol{\phi}|^2 \, d\mathbf{x} + \theta k C_{\text{ex}} \int_{\Omega} |\nabla \boldsymbol{\phi}|^2 \, d\mathbf{x} \\ &= \alpha \|\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \theta k C_{\text{ex}} \|\nabla \boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \min\{\alpha, \theta k C_{\text{ex}}\} \|\boldsymbol{\phi}\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Dies ergibt für eine feste Zeitschrittweite  $k$  eine positive Elliptizitätskonstante  $C_e := \min\{\alpha, \theta k C_{\text{ex}}\} > 0$ .

- Für den Fall  $\theta k = 0$  betrachten wir die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  auf dem diskreten Teilraum  $\mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j} \subset H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Um die Elliptizität klar zu machen, nützen wir die Normäquivalenz auf endlichdimensionalen Räumen und sehen

$$a(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}) = \alpha \|\boldsymbol{\phi}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \alpha C \|\boldsymbol{\phi}\|_{H^1(\Omega)}^2$$

mit einer positiven Konstante  $C = C(\mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}) > 0$ , die nur von  $\mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  abhängt und beschließen daher den Beweis.

□

**Lemma 3.2.8.** Die Bilinearform  $b^j(\cdot, \cdot)$  ist schief-symmetrisch, d.h. es gilt

$$b^j(\phi, \psi) = -b^j(\psi, \phi) \quad \text{für alle } \phi, \psi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

Im Fall  $\phi = \psi$  gilt

$$b^j(\phi, \phi) = 0 \quad \text{für alle } \phi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

Darüber hinaus gilt

$$b^j(\phi, \psi) \leq \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{für alle } \phi, \psi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3),$$

wodurch die Stetigkeit von  $b^j(\cdot, \cdot)$  repräsentiert wird.

*Beweis.* Betrachten wir die Definition der Bilinearform  $b^j(\phi, \psi)$  für beliebige  $\phi, \psi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , so ist die Schief-Symmetrie durch ebendiese Eigenschaft des Vektorkreuzprodukts begründet

$$b^j(\phi, \psi) = \int_{\Omega} (\mathbf{m}_h^j \times \phi) \cdot \psi \, dx = - \int_{\Omega} (\mathbf{m}_h^j \times \psi) \cdot \phi \, dx = -b^j(\psi, \phi).$$

Die zweite charakteristische Eigenschaft ist aufgrund des Verschwindens des Kreuzprodukts  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$  für beliebige  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  bzw. der Orthogonalitätseigenschaft  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$  für alle  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  einfach einzusehen

$$b^j(\phi, \phi) = \int_{\Omega} (\mathbf{m}_h^j \times \phi) \cdot \phi \, dx = \int_{\Omega} (\phi \times \phi) \cdot \mathbf{m}_h^j \, dx = 0.$$

Wenden wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf  $b^j(\phi, \psi)$  an, so erhalten wir

$$b^j(\phi, \psi) \leq \left| \int_{\Omega} (\mathbf{m}_h^j \times \phi) \cdot \psi \, dx \right| \leq \left( \int_{\Omega} |\mathbf{m}_h^j \times \phi|^2 \, dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Schließlich führt die gleichmäßige Beschränktheit von  $\mathbf{m}_h^j$ , siehe Lemma 3.2.6, zusammen mit der Anwendung von  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \gamma \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ , wobei  $\gamma$  hier den von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  eingeschlossenen Winkel bezeichnet für  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ , auf

$$\begin{aligned} b^j(\phi, \psi) &\leq \left( \int_{\Omega} |\mathbf{m}_h^j|^2 |\phi|^2 \, dx \right)^{1/2} \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left( \|\mathbf{m}_h^j\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |\phi|^2 \, dx \right)^{1/2} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |\phi|^2 \, dx \right)^{1/2} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

und zeigt damit Stetigkeit der Bilinearform  $b^j(\cdot, \cdot)$  mit einer Konstante  $C_c = 1$ . Damit ist der Beweis vollständig. □

**Lemma 3.2.9.**  $L^j(\cdot)$  definiert zu jedem Zeitpunkt  $t_j \in [0, t_{\text{end}}]$  und für eine feste Ortsschrittweite  $h$  eine stetige Linearform auf  $\mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$ . Unter der zusätzlichen Annahme

$$\|\mathbf{f}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\text{ext}} < \infty$$

mit einer positiven Konstante  $C_{\text{ext}} > 0$  definiert  $L^j(\cdot)$  zu jedem Zeitpunkt  $t_j \in [0, t_{\text{end}}]$  und für eine feste Ortsschrittweite  $h$  eine stetige Linearform für alle Funktionen  $\boldsymbol{\psi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , d.h. es gilt

$$L^j(\boldsymbol{\psi}) \leq C_c \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\psi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3),$$

wobei  $C_c > 0$  von den Koeffizienten der einzelnen Energiebeiträge,  $C_{\mathcal{P}}$ ,  $C_{\text{ext}}$  und dem Volumen des magnetischen Körpers  $\text{vol}(\Omega)$  abhängt.

*Beweis.* Betrachten wir die Definition von  $L^j(\boldsymbol{\psi})$  für ein beliebiges  $\boldsymbol{\psi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , so erhalten wir aufgrund der Linearität des Integrals, des Skalarprodukts in  $\mathbb{R}^3$  und aller Operatoren, die durch die Beiträge der totalen Energie induziert werden, siehe Kapitel 1 für ein ausführlicheres Studium der Gibbs Energie, dass  $L^j(\boldsymbol{\psi})$  eine Linearform auf  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  darstellt. Wir erinnern, dass  $\mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  einen endlichdimensionalen Teilraum von  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  darstellt. Daher ist jede Linearform insbesondere stetig, weshalb die erste Aussage des Lemmas klar ist.

Um nun die zweite Aussage des Lemmas zu verifizieren, ist die Stetigkeit der Linearform  $L^j(\boldsymbol{\psi})$  für alle  $\boldsymbol{\psi} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  einzusehen. Dazu betrachten wir die involvierten Summanden einzeln. Wir verifizieren zunächst, dass jener Beitrag, der von der Austauschenergie stammt, stetig ist. Dazu wenden wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung an, bedienen uns der Eigenschaft  $\mathbf{m}_h^j \in \mathcal{M}_h$  und damit insbesondere der Beobachtung, dass für jeden Zeitschritt  $j$  und eine feste Ortsschrittweite  $h$  die diskrete Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^j$  in  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  beschränkt ist, und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{m}_h^j \cdot \nabla \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} &\leq \|\nabla \mathbf{m}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \boldsymbol{\psi}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\mathbf{m}_h^j\|_{H^1(\Omega)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Somit haben wir Stetigkeit nachgewiesen. Um diese Eigenschaft auch für den Anisotropiebeitrag zu erhalten, stellen wir die Anisotropiedichte bis auf Konstanten an Hand einer Orthonormalbasis  $\{\mathbf{e}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$  mit  $\mathbf{e}$  der sogenannten Easy-Achse dar

$$\Phi(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e})^2 = \sum_{i=1}^2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_i)^2 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Somit erhalten wir bis auf weitere Konstanten

$$D\Phi(\mathbf{x}) = 2 \sum_{i=1}^2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_i) \mathbf{b}_i \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Zusammen mit dieser Darstellung und der gleichmäßigen Beschränktheit von  $\mathbf{m}_h^j$ , siehe Lemma 3.2.6, schätzen wir wie folgt ab

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (\mathbf{m}_h^j \cdot \mathbf{b}_i) \mathbf{b}_i \cdot \boldsymbol{\psi} \leq \left\| \sum_{i=1}^2 (\mathbf{m}_h^j \cdot \mathbf{b}_i) \mathbf{b}_i \right\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{m}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Betrachten wir den Beitrag des Streufeldes, so zeigt die Stetigkeit von  $\mathcal{P}_h$  auf  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , siehe (3.19), folgendes Resultat

$$\int_{\Omega} \mathcal{P}_h \mathbf{m}_h^j \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} \leq \|\mathcal{P}_h \mathbf{m}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\mathcal{P}} \|\mathbf{m}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\Omega)}.$$

In analoger Weise erhalten wir für jenen Term, der vom äußeren angelegten Feld  $\mathbf{f}$  induziert wird, folgende Abschätzung

$$\int_{\Omega} \mathbf{f}_h^j \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} \leq \|\mathbf{f}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Hierbei hängt die Konstante ausschließlich vom diskretisierten äußeren Feld  $\mathbf{f}_h^j$  ab, deren  $L^2$ -Norm für einen Zeitschritt  $j$  und eine feste Ortsschrittweite  $h$  nach Voraussetzung endlich ist. Insgesamt erhalten wir nun

$$\begin{aligned} L^j(\boldsymbol{\psi}) &= -C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{m}_h^j \cdot \nabla \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} - C_{\text{ani}} \int_{\Omega} D\Phi(\mathbf{m}_h^j) \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathcal{P}_h \mathbf{m}_h^j \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{f}_h^j \cdot \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} \\ &\leq C_c \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei die Konstante  $C_c > 0$  lediglich von den Koeffizienten der einzelnen Energiebeiträge,  $C_{\mathcal{P}}$ ,  $C_{\text{ext}}$  und dem Volumen des magnetischen Körpers  $\text{vol}(\Omega)$  abhängt. Damit ist die Stetigkeit der Linearform  $L^j(\cdot)$  auf  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  vollständig bewiesen.  $\square$

Wir wollen nun mit Hilfe all dieser Feststellungen die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  der Variationsformulierung (3.31) begründen. Um dies mit dem Lemma von Lax-Milgram zu argumentieren, ist einzusehen, dass die linke Seite in (3.31) eine stetige und elliptische Bilinearform definiert. Mit Lemma 3.2.7 und Lemma 3.2.8 ist klar, dass die Summe der Bilinearformen  $a(\cdot, \cdot)$  und  $b^j(\cdot, \cdot)$  eine positiv definite Bilinearform auf  $\mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  darstellt. Daher gibt es eine Konstante  $C_c > 0$ , die nur von den Bilinearformen  $a(\cdot, \cdot)$  und  $b^j(\cdot, \cdot)$  abhängt, sodass

$$a(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h) + b^j(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \leq C_c \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{H^1(\Omega)} \|\boldsymbol{\psi}_h\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j} \subset H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$$

gilt. Außerdem reicht die Elliptizität von  $a(\cdot, \cdot)$  aus, um diese Eigenschaft auch für die Summe zu erhalten, da nach Lemma 3.2.8  $b^j(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\phi}_h) = 0$  für alle  $\boldsymbol{\phi}_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  gilt. Es gibt daher in jedem Zeitschritt eine Konstante  $C_e > 0$ , die ausschließlich von der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  abhängt, sodass folgende Abschätzung gilt

$$a(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\phi}_h) + b^j(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\phi}_h) = a(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\phi}_h) \geq C_e \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{für alle } \boldsymbol{\phi}_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j} \subset H^1(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

Diese Beobachtungen erlauben uns das Lemma von Lax-Milgram anzuwenden, wodurch die Existenz einer eindeutigen Lösung  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  der Variationsformulierung (3.31) garantiert wird. Insgesamt ist damit die Aussage des folgenden Theorems klar.

**Theorem 3.2.10.** *Das in Algorithmus 3.2.4 vorgestellte Time-Splitting-Verfahren liefert eindeutige Lösungen  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  bzw.  $\mathbf{m}_h^j \in \mathcal{M}_h$  für Indizes  $j \geq 0$ . Insbesondere ist auch für fixes  $(h, k) > 0$  die in der Zeit interpolierte approximative Lösung  $\mathbf{m}_{hk}$  der LLG-Gleichung mit*

$$\mathbf{m}_{hk}(t, \mathbf{x}) := \frac{t - jk}{k} \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{x}) + \frac{(j+1)k - t}{k} \mathbf{m}_h^j(\mathbf{x})$$

für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$  und alle Zeiten  $t \in [0, t_{\text{end}}]$  mit  $j = \{0, \dots, J\}$ , sodass  $t \in [jk, (j+1)k)$ , eindeutig.

Wir fassen die bisher erzielten Ergebnisse bezüglich des Time-Splitting-Verfahrens, Algorithmus 3.2.4, zusammen. Wir haben bewiesen, dass das Variationsproblem (3.31) aus Schritt (i) des FE-Schemas 3.2.4 eine eindeutige Lösung besitzt. Im Gegensatz zu alternativen Ansätzen zur approximativen Lösung der LLG-Gleichung, benötigt unser Verfahren lediglich die Lösung eines linearen und schwach besetzten Gleichungssystems pro Zeitschritt und bezieht insbesondere eine explizite Berechnung des Streufeldes mit ein.

### 3.2.2 Time-Splitting-Verfahren mit diskreter Bilinearform

Um das Verfahren 3.2.4 aus numerischer Sicht noch attraktiver zu machen, bedienen wir uns spezieller diskreter Bilinearformen mit denen wir das  $L^2$ -Skalarprodukt annähern. Dabei werden die Einträge der Massenmatrix nicht analytisch berechnet, sondern lediglich approximativ gespeichert. Daraus resultiert eine Massenmatrix, die Diagonalgestalt hat.

In Kapitel 2 setzen wir uns genauer mit diesem Thema auseinander und stellen dabei eine spezielle Wahl dieser diskreten Bilinearform vor, nämlich das sogenannte *Mass-Lumping* des  $L^2$ -Skalarprodukts. Hier wollen wir lediglich die für ein Konvergenzresultat notwendigen Eigenschaften der diskreten Bilinearform anführen:

- Wir notieren auf  $C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$  eine Bilinearform durch

$$(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi})_{h,\Omega} \quad \text{für } \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3), \quad (3.32)$$

die für  $\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  ein Skalarprodukt darstellt und bezeichnen diese kurz als  $h$ -Bilinearform bzw.  $h$ -Skalarprodukt.

- Für die durch das  $h$ -Skalarprodukt induzierte Norm  $\|\cdot\|_{h,\Omega}^2 := (\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  gilt Äquivalenz zur  $L^2$ -Norm

$$C_{\text{low}} \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{h,\Omega} \leq \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\text{high}} \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{h,\Omega} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\phi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3), \quad (3.33)$$

wobei die positiven Konstanten  $C_{\text{low}}, C_{\text{high}} > 0$  von der Netzweite  $h$  unabhängig sind.

- Die  $h$ -Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  erfüllt

$$(\boldsymbol{\phi}_h \times \boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\zeta}_h)_{h,\Omega} = -(\boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\phi}_h \times \boldsymbol{\zeta}_h)_{h,\Omega} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\zeta}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3) \quad (3.34)$$

und genügt daher insbesondere folgender Orthogonalitätsrelation

$$(\boldsymbol{\phi}_h \times \boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\psi}_h)_{h,\Omega} = 0 \quad \text{für alle } \boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3). \quad (3.35)$$

- Wir betrachten mit  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  und  $\mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  endlichdimensionale Teilräume von  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ . Dann fordern wir für alle  $\boldsymbol{\phi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3), \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  die Abschätzung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\boldsymbol{\phi}_h, \nabla \boldsymbol{\psi}_h \neq \mathbf{0}} \frac{|(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h)_{L^2(\Omega)} - (\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h)_{h,\Omega}|}{\|\boldsymbol{\phi}_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \boldsymbol{\psi}_h\|_{L^2(\Omega)}} = 0. \quad (3.36)$$

Für den Fall, dass  $\|\boldsymbol{\phi}_h\|_{L^2(\Omega)} = 0$  oder  $\|\nabla \boldsymbol{\psi}_h\|_{L^2(\Omega)} = 0$ , setzen wir voraus, dass der Zähler bereits verschwindet.

**Konvention 3.2.1.** Wir definieren für  $\boldsymbol{\phi}_{hk}, \boldsymbol{\psi}_{hk} \in \mathcal{P}^0(\mathcal{U}_k, \mathcal{X}_h)$

$$(\boldsymbol{\phi}_{hk}, \boldsymbol{\psi}_{hk})_{h,\Omega_\tau} := \int_0^{t_{\text{end}}} (\boldsymbol{\phi}_{hk}, \boldsymbol{\psi}_{hk})_{h,\Omega} dt,$$

um im Folgenden die Notation einfach zu halten.

**Konvention 3.2.2.** Falls nicht explizit anders gesagt, betrachten wir im Folgenden stets eine diskrete Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$ , die den Eigenschaften (3.32)–(3.35) sowie der Approximationseigenschaft (3.36) genügt.

**Lemma 3.2.11.** Wir definieren durch  $\mathcal{X}_h := \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  einen endlichdimensionalen Teilraum von  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \cap C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ . Dann gilt für beliebige Funktionen  $\phi_h, \psi_h \in \mathcal{X}_h$  Stetigkeit in folgendem Sinn

$$(\phi_h, \psi_h)_{h,\Omega} \leq \widetilde{C}_c \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \|\psi_h\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einer positiven Konstante  $\widetilde{C}_c > 0$ , die unabhängig von der Ortsschrittweite  $h$  ist. Außerdem gilt für beliebige  $\phi_h \in \mathcal{X}_h$  Elliptizität in folgendem Sinn

$$(\phi_h, \phi_h)_{h,\Omega} \geq \widetilde{C}_e \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2$$

mit einer positiven Konstante  $\widetilde{C}_e > 0$ , die ebenfalls unabhängig von der Ortsschrittweite  $h$  ist.

*Beweis.* Zunächst wollen wir die Stetigkeitseigenschaft der diskreten Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  einsehen. Dazu bemerken wir, dass für alle  $\phi_h, \psi_h \in \mathcal{X}_h$  die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung gilt. Daraus deduzieren wir zusammen mit Normäquivalenz (3.33)

$$(\phi_h, \psi_h)_{h,\Omega} \leq \|\phi_h\|_{h,\Omega} \|\psi_h\|_{h,\Omega} \leq \frac{1}{C_{\text{low}}^2} \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \|\psi_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Damit erhalten wir Stetigkeit mit einer positiven Konstante  $\widetilde{C}_c > 0$ , die unabhängig von  $h$  ist.

Für die Verifikation des zweiten Resultats dieses Lemmas betonen wir, dass für die durch das  $h$ -Skalarprodukt induzierte Norm Äquivalenzrelation (3.33) gilt und daher Elliptizität mit einer Konstante  $\widetilde{C}_e = 1/(C_{\text{high}}^2)$  gilt. Dies vervollständigt den Beweis.  $\square$

**Lemma 3.2.12.** Wir betrachten mit  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  und  $\mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  endlichdimensionale Teilräume von  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \cap C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ . Es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\phi_{hk}, \nabla \psi_{hk} \neq 0} \frac{|(\phi_{hk}, \psi_{hk})_{h,\Omega_\tau} - (\phi_{hk}, \psi_{hk})_{L^2(\Omega_\tau)}|}{\|\phi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|\nabla \psi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}} = 0, \quad (3.37)$$

wobei das Supremum über alle  $\phi_{hk} \in \mathcal{P}^0(\mathcal{U}_k, \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3))$ ,  $\psi_{hk} \in \mathcal{P}^0(\mathcal{U}_k, \mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3))$  genommen wird.

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann wählen wir ein  $h_0 > 0$ , sodass für eine hinreichend kleine Ortsschrittweite  $h \in (0, h_0)$

$$\sup_{\phi_h, \nabla \psi_h \neq 0} \frac{|(\phi_h, \psi_h)_{L^2(\Omega)} - (\phi_h, \psi_h)_{h,\Omega}|}{\|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \psi_h\|_{L^2(\Omega)}} \leq \varepsilon \quad (3.38)$$

gilt, wobei das Supremum über alle  $\phi_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$ ,  $\psi_h \in \mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  betrachtet wird. Dies resultiert aus Abschätzung (3.36), der unsere diskrete Bilinearform genügen muss.

Sei  $\phi_{hk} \in \mathcal{P}^0(\mathcal{U}_k, \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3))$  mit  $\phi_{hk} \neq 0$  und  $\psi_{hk} \in \mathcal{P}^0(\mathcal{U}_k, \mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3))$  mit  $\nabla \psi_{hk} \neq 0$ . Des Weiteren sei  $t_j < t < t_{j+1}$  für  $j \in \{0, \dots, J-1\}$ . Dann setzen wir  $\phi_h = \phi_{hk}(t)$  und  $\psi_h = \psi_{hk}(t)$  für fast alle  $t \in (0, t_{\text{end}})$ . Wir betrachten

$$\begin{aligned} \frac{|(\phi_{hk}, \psi_{hk})_{L^2(\Omega_\tau)} - (\phi_{hk}, \psi_{hk})_{h, \Omega_\tau}|}{\|\phi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|\nabla \psi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}} &= \frac{\left| \int_0^{t_{\text{end}}} ((\phi_{hk}, \psi_{hk})_{L^2(\Omega)} - (\phi_{hk}, \psi_{hk})_{h, \Omega}) \right|}{\|\phi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|\nabla \psi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}} \\ &\leq \frac{\int_0^{t_{\text{end}}} |(\phi_{hk}, \psi_{hk})_{L^2(\Omega)} - (\phi_{hk}, \psi_{hk})_{h, \Omega}|}{\|\phi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|\nabla \psi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{J-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |(\phi_{hk}, \psi_{hk})_{L^2(\Omega)} - (\phi_{hk}, \psi_{hk})_{h, \Omega}|}{\|\phi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|\nabla \psi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}}. \end{aligned}$$

Da  $\phi_{hk}, \psi_{hk}$  jeweils konstant in der Zeit sind, unterscheiden wir für jedes Zeitintervall wie folgt:

- Falls  $\|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$  und  $\|\nabla \psi_h\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$  gilt, können wir aufgrund von  $\phi_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  und  $\psi_h \in \mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  nach (3.38) wie folgt abschätzen

$$\frac{|(\phi_h, \psi_h)_{L^2(\Omega)} - (\phi_h, \psi_h)_{h, \Omega}|}{\|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \psi_h\|_{L^2(\Omega)}} \leq \sup_{\phi_h, \nabla \psi_h \neq 0} \frac{|(\phi_h, \psi_h)_{L^2(\Omega)} - (\phi_h, \psi_h)_{h, \Omega}|}{\|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \psi_h\|_{L^2(\Omega)}} \leq \varepsilon.$$

Daher liegt für diesen Beitrag insbesondere folgende Abschätzung vor

$$|(\phi_h, \psi_h)_{L^2(\Omega)} - (\phi_h, \psi_h)_{h, \Omega}| \leq \varepsilon \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \psi_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.39)$$

sofern  $h \in (0, h_0)$  gilt. Wir bemerken, dass  $\varepsilon$  und damit auch  $h_0$  unabhängig vom betrachteten Zeitintervall sind.

- Falls  $\|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} = \|\phi_{hk}(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$  oder  $\|\nabla \psi_h\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla \psi_{hk}(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$  gilt, dann verschwindet der zugehörige Summand des Zeitintegrals nach Voraussetzung (3.36), der unsere diskrete Bilinearform genügen muss. Daher gilt Fehlerabschätzung (3.39) trivialerweise.

Damit erhalten wir insgesamt

$$\frac{|(\phi_{hk}, \psi_{hk})_{L^2(\Omega_\tau)} - (\phi_{hk}, \psi_{hk})_{h, \Omega_\tau}|}{\|\phi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|\nabla \psi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}} \leq \varepsilon \frac{\int_0^{t_{\text{end}}} \|\phi_{hk}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \psi_{hk}\|_{L^2(\Omega)}}{\|\phi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|\nabla \psi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}}.$$

Dies liefert zusammen mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\frac{|(\phi_{hk}, \psi_{hk})_{L^2(\Omega_\tau)} - (\phi_{hk}, \psi_{hk})_{h, \Omega_\tau}|}{\|\phi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|\nabla \psi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}} \leq \varepsilon \frac{\sqrt{\int_0^{t_{\text{end}}} \|\phi_{hk}\|_{L^2(\Omega)}^2} \sqrt{\int_0^{t_{\text{end}}} \|\nabla \psi_{hk}\|_{L^2(\Omega)}^2}}{\|\phi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|\nabla \psi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}} \leq \varepsilon.$$

Da dieses Resultat für eine beliebig kleine Konstante  $\varepsilon > 0$  und alle  $\phi_{hk} \in \mathcal{P}^0(\mathcal{U}_k, \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3))$  mit  $\phi_{hk} \neq 0$  und  $\psi_{hk} \in \mathcal{P}^0(\mathcal{U}_k, \mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3))$  mit  $\nabla \psi_{hk} \neq 0$  gilt, haben wir damit die Aussage des Lemmas verifiziert.  $\square$

**Lemma 3.2.13.** *Wir betrachten mit  $\mathcal{X}_h := \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  einen endlichdimensionalen Teilraum von  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \cap C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ . Seien  $\phi_{hk}, \psi_{hk} \in \mathcal{P}^0(\mathcal{U}_k, \mathcal{X}_h)$  und  $\Psi \in C_0^\infty(\Omega_\tau)$ , wobei  $\phi_{hk}$  gleichmäßig in  $L^2(\Omega_\tau)$  beschränkt ist und  $\psi_{hk}$  gleichmäßig beschränkt in  $L^2(H^1)$  ist. Dann wird durch  $\mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times$*

$\Psi$ ), wobei  $\mathcal{I}_h$  den nodalen Interpolanten bezeichnet, eine weitere Funktion definiert, die bezüglich der Ortskomponente eine Funktion aus  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  darstellt. Es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| (\phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{h, \Omega_\tau} - (\phi_{hk}, \psi_{hk} \times \Psi)_{L^2(\Omega_\tau)} \right| = 0 \quad (3.40)$$

und unter der zusätzlichen Annahme, dass  $\psi_{hk}$  in  $L^\infty(\Omega_\tau)$  gleichmäßig beschränkt ist, gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{h, \Omega_\tau} - (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \psi_{hk} \times \Psi)_{L^2(\Omega_\tau)} \right| = 0. \quad (3.41)$$

*Beweis.* Wir gliedern den Beweis in zwei Schritte, wobei wir im ersten (3.40) nachweisen, während wir im zweiten (3.41) einsehen wollen.

Wir betrachten zunächst den Betrag der Differenz der beiden auftretenden Bilinearformen und wenden die Dreiecksungleichung an

$$\begin{aligned} & \left| (\phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{h, \Omega_\tau} - (\phi_{hk}, \psi_{hk} \times \Psi)_{L^2(\Omega_\tau)} \right| \\ & \leq \left| (\phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{h, \Omega_\tau} - (\phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{L^2(\Omega_\tau)} \right| \\ & \quad + \left| (\phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{L^2(\Omega_\tau)} - (\phi_{hk}, \psi_{hk} \times \Psi)_{L^2(\Omega_\tau)} \right|. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Um einzusehen, dass  $\|\nabla \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi)\|_{L^2(\Omega_\tau)}$  gleichmäßig beschränkt ist, bedienen wir uns der Dreiecksungleichung und setzen sodann den Approximationssatz ein

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi)\|_{L^2(\Omega_\tau)} & \leq \|\mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi) - \psi_{hk} \times \Psi\|_{L^2(H^1)} + \|\psi_{hk} \times \Psi\|_{L^2(H^1)} \\ & \lesssim h \|\psi_{hk}\|_{L^2(H^1)} \|\Psi\|_{W^{2,\infty}(\Omega_\tau)} + \|\psi_{hk}\|_{L^2(H^1)} \|\Psi\|_{W^{1,\infty}(\Omega_\tau)}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung (3.36) können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $\|\phi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} > 0$  und  $\|\nabla \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi)\|_{L^2(\Omega_\tau)} > 0$  gilt. Damit und da  $\mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi)$  bezüglich der Ortskomponente eine Funktion aus  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  darstellt, erhalten wir nach Lemma 3.2.12

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| (\phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{h, \Omega_\tau} - (\phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{L^2(\Omega_\tau)} \right| = 0.$$

Wir betrachten nun den zweiten Summanden der rechten Seite von (3.42) und schätzen unter Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung wie folgt ab

$$\begin{aligned} & \left| (\phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{L^2(\Omega_\tau)} - (\phi_{hk}, \psi_{hk} \times \Psi)_{L^2(\Omega_\tau)} \right| \\ & = \left| (\phi_{hk}, (\mathcal{I}_h - 1)(\psi_{hk} \times \Psi))_{L^2(\Omega_\tau)} \right| \\ & \leq \|\phi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|(\mathcal{I}_h - 1)(\psi_{hk} \times \Psi)\|_{L^2(\Omega_\tau)}. \end{aligned}$$

Des Weiteren beachten wir die Lokalität der  $L^2$ -Norm und schätzen daher mit dem Approximationssatz für alle Elemente  $T \in \mathcal{T}_h$  den zweiten Faktor der rechten Seite weiter ab

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{I}_h - 1)(\psi_{hk} \times \Psi)(t, \cdot)\|_{L^2(T)} & \lesssim h^2 \|(\psi_{hk} \times \Psi)(t, \cdot)\|_{H^2(T)} \\ & \lesssim h^2 \|\psi_{hk}(t, \cdot)\|_{H^2(T)} \|\Psi(t, \cdot)\|_{W^{2,\infty}(T)} \\ & = h^2 \|\psi_{hk}(t, \cdot)\|_{H^1(T)} \|\Psi(t, \cdot)\|_{W^{2,\infty}(T)}, \end{aligned}$$

wobei die Produktregel zum Einsatz kam und die Affinität von  $\psi_{hk}$  genutzt wurde. Summieren wir nun über alle Elemente  $T \in \mathcal{T}_h$  und integrieren über die Zeit, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left| (\phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{L^2(\Omega_\tau)} - (\phi_{hk}, \psi_{hk} \times \Psi)_{L^2(\Omega_\tau)} \right| \\ & \lesssim h^2 \|\phi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|\psi_{hk}\|_{L^2(H^1)} \|\Psi\|_{W^{2,\infty}(\Omega_\tau)}. \end{aligned}$$

Beachtet man, dass  $\phi_{hk}$  in  $L^2(\Omega_\tau)$  gleichmäßig beschränkt ist und außerdem  $\psi_{hk}$  in  $L^2(H^1)$  gleichmäßig beschränkt ist, so ist klar, dass

$$\left| (\phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{L^2(\Omega_\tau)} - (\phi_{hk}, \psi_{hk} \times \Psi)_{L^2(\Omega_\tau)} \right| = \mathcal{O}(h^2)$$

gilt.

Damit haben wir insgesamt die Aussage

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| (\phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{h, \Omega_\tau} - (\phi_{hk}, \psi_{hk} \times \Psi)_{L^2(\Omega_\tau)} \right| = 0$$

bewiesen und insbesondere die Behauptung aus (3.40) verifiziert.

Um nun Eigenschaft (3.41) nachzuweisen, gehen wir wie im ersten Schritt des Beweises vor und erhalten mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} & \left| (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{h, \Omega_\tau} - (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \psi_{hk} \times \Psi)_{L^2(\Omega_\tau)} \right| \\ & \leq \left| (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{h, \Omega_\tau} - (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{L^2(\Omega_\tau)} \right| \\ & \quad + \left| (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{L^2(\Omega_\tau)} - (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \psi_{hk} \times \Psi)_{L^2(\Omega_\tau)} \right|. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Zunächst betrachten wir den ersten Summanden der rechten Seite und bedienen uns der Rechenregeln des Vektorkreuzprodukts

$$\begin{aligned} & \left| (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{h, \Omega_\tau} - (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{L^2(\Omega_\tau)} \right| \\ & = \left| (\phi_{hk}, \psi_{hk} \times \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{h, \Omega_\tau} - (\phi_{hk}, \psi_{hk} \times \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{L^2(\Omega_\tau)} \right|. \end{aligned}$$

Wir erinnern, dass  $\mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi)$  bezüglich der Ortskomponente eine Funktion aus  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  darstellt und daher  $\psi_{hk} \times \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi)$  bezüglich der Ortskomponente eine Funktion aus  $\mathcal{S}^2(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  ist. Wir schätzen nun wie folgt ab

$$\begin{aligned} & \|\nabla(\psi_{hk} \times \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))\|_{L^2(\Omega_\tau)} \\ & \leq \|\nabla \psi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|\mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi)\|_{L^\infty(\Omega_\tau)} + \|\psi_{hk}\|_{L^\infty(\Omega_\tau)} \|\nabla \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi)\|_{L^2(\Omega_\tau)} \end{aligned}$$

und bemerken, dass alle auftretenden Terme gleichmäßig beschränkt sind. Dies erlaubt uns Lemma 3.2.12 anzuwenden und wir sehen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{h, \Omega_\tau} - (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{L^2(\Omega_\tau)} \right| = 0.$$

Den zweiten Summanden der rechten Seiten von (3.43) schätzen wir wie im ersten Schritt des Beweises mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ab

$$\begin{aligned} & \left| (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{L^2(\Omega_\tau)} - (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \psi_{hk} \times \Psi)_{L^2(\Omega_\tau)} \right| \\ & \leq \|\psi_{hk} \times \phi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|(\mathcal{I}_h - 1)(\psi_{hk} \times \Psi)\|_{L^2(\Omega_\tau)}. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass der zweite Faktor der rechten Seite bereits im ersten Schritt des Beweises weiter abgeschätzt wurde. Unter Berücksichtigung der zusätzlichen Voraussetzung, die besagt, dass  $\psi_{hk}$  in  $L^\infty(\Omega_\tau)$  gleichmäßig beschränkt ist, erhalten wir daher insgesamt

$$\begin{aligned} & \left| (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{L^2(\Omega_\tau)} - (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \psi_{hk} \times \Psi)_{L^2(\Omega_\tau)} \right| \\ & \lesssim h^2 \|\phi_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|\psi_{hk}\|_{L^2(H^1)} \|\Psi\|_{W^{2,\infty}(\Omega_\tau)}. \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Voraussetzungen an  $\phi_{hk}$  und  $\psi_{hk}$  sehen wir damit schließlich

$$\left| (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \mathcal{I}_h(\psi_{hk} \times \Psi))_{L^2(\Omega_\tau)} - (\psi_{hk} \times \phi_{hk}, \psi_{hk} \times \Psi)_{L^2(\Omega_\tau)} \right| = \mathcal{O}(h^2)$$

ein und haben damit insgesamt Konvergenzaussage (3.41) verifiziert.  $\square$

Mit der Einführung der  $h$ -Bilinearform deduzieren wir aus dem Time-Splitting-Verfahren 3.2.4 folgenden Algorithmus:

**Algorithmus 3.2.14.** *Input: Startmagnetisierung  $\mathbf{m}_h^0 \in \mathcal{M}_h$ , Dämpfungsparameter  $\alpha > 0$ , Parameter  $0 \leq \theta \leq 1$ .*

(i) *Finde  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$ , sodass für alle Testfunktionen  $\psi_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  folgende Gleichung gilt*

$$\begin{aligned} & \alpha \left( \mathbf{v}_h^j, \psi_h \right)_{h,\Omega} + \left( \mathbf{m}_h^j \times \mathbf{v}_h^j, \psi_h \right)_{h,\Omega} \\ & = -C_{\text{ex}} \left( \nabla(\mathbf{m}_h^j + \theta k \mathbf{v}_h^j), \nabla \psi_h \right)_{L^2(\Omega)} + \left( \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j), \psi_h \right)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

(ii) *Definiere  $\mathbf{m}_h^{j+1} \in \mathcal{M}_h$  durch  $\mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})}{|\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})|}$  für alle  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_h$  und gehe zu (i).*

*Output: Folge von Funktionen  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  als auch  $\mathbf{m}_h^{j+1} \in \mathcal{M}_h$  für  $j \geq 0$ .*

Das FE-Schema 3.2.14 stellt ebenfalls ein Time-Splitting-Verfahren dar. Der Vorteil dieses Verfahrens gegenüber den bisher präsentierten liegt in der Verwendung der diskreten Bilinearform, die tatsächlich strukturelle Vorzüge mit sich bringt, siehe Kapitel 5 für weitere Details.

Wir diskutieren zunächst die eindeutige Lösbarkeit von Gleichung (3.44) und präsentieren im folgenden Abschnitt eine rigorose Konvergenzanalyse. Außerdem dient dieser Algorithmus als Grundlage für die in Kapitel 6 vorgestellten numerischen Experimente, mit denen unter anderem die Stabilität des Verfahrens im Bezug auf den kritischen Parameter  $\alpha$  diskutiert werden soll.

**Bemerkung 3.2.15.** *Wir bemerken, dass eine Definition der diskreten Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  als  $L^2$ -Skalarprodukt offensichtlich eine zulässige Wahl ist. Dabei ist klar, dass hierfür Algorithmus 3.2.14 ident zum FE-Schema 3.2.4 ist. Insbesondere liegt mit dem folgenden Abschnitt eine vollständig ausgearbeitete Konvergenzanalyse ebenfalls für das Time-Splitting-Verfahren 3.2.4 vor.*

**Bemerkung 3.2.16.** *Allen vier Ansätzen ist gemeinsam, dass stets nur ein lineares Gleichungssystem pro Zeitschritt zu lösen ist. Wie bereits erwähnt, liegt dies an der Idee, das System nach  $\mathbf{v}_h^j$  anstelle von  $\mathbf{m}_h^j$  bzw.  $\mathbf{m}_h^{j+1}$  zu lösen.*

**Konvention 3.2.3.** *Da wir in dieser Arbeit den Fokus auf das zuletzt präsentierte Verfahren legen, siehe Algorithmus 3.2.14, nehmen wir im Folgenden stets Bezug auf ebendieses Algorithmus.*

Die Aussagen der folgenden beiden Lemmata gleichen jenen aus Lemma 3.2.5 und Lemma 3.2.6. Da es sich hierbei lediglich um Beobachtungen handelt, die vom zu lösenden linearen Gleichungssystem unabhängig sind, lassen sich die Beweise auf die folgenden Feststellungen wörtlich übertragen. Daher verzichten wir auf eine exakte Argumentation.

**Lemma 3.2.17.** *Wir betrachten Algorithmus 3.2.14. Die in Schritt (ii) definierte approximative Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^{j+1}$  ist wohldefiniert.  $\square$*

**Lemma 3.2.18.** *Die in Algorithmus 3.2.14 näherungsweise berechnete Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^j$  ist gleichmäßig beschränkt in folgendem Sinn*

$$\|\mathbf{m}_h^j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$$

für alle  $j \geq 0$ .  $\square$

Mit der verkürzten Schreibweise

$$\begin{aligned} a_h(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h) &= \alpha (\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h)_{h,\Omega} + \theta k C_{\text{ex}} (\nabla \boldsymbol{\phi}_h, \nabla \boldsymbol{\psi}_h)_{L^2(\Omega)}, \\ b_h^j(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h) &= \left( \mathbf{m}_h^j \times \boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h \right)_{h,\Omega}, \\ L^j(\boldsymbol{\psi}_h) &= -C_{\text{ex}} \left( \nabla \mathbf{m}_h^j, \nabla \boldsymbol{\psi}_h \right)_{L^2(\Omega)} + \left( \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j), \boldsymbol{\psi}_h \right)_{L^2(\Omega)} \\ &= -C_{\text{ex}} \left( \nabla \mathbf{m}_h^j, \nabla \boldsymbol{\psi}_h \right)_{L^2(\Omega)} - C_{\text{ani}} \left( D\Phi(\mathbf{m}_h^j), \boldsymbol{\psi}_h \right)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - \left( \mathcal{P}_h \mathbf{m}_h^j, \boldsymbol{\psi}_h \right)_{L^2(\Omega)} + \left( \mathbf{f}_h^j, \boldsymbol{\psi}_h \right)_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

können wir die Variationsformulierung aus Schritt (i) aus Algorithmus 3.2.14 in einer kompakteren Schreibweise darstellen

$$\begin{aligned} \text{Finde } \mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}, \text{ sodass für alle } \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j} \text{ gilt :} \\ a_h(\mathbf{v}_h^j, \boldsymbol{\psi}_h) + b_h^j(\mathbf{v}_h^j, \boldsymbol{\psi}_h) = L^j(\boldsymbol{\psi}_h) \quad \text{für alle } \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Im Folgenden wollen wir charakteristische Eigenschaften der Bilinearformen  $a_h(\cdot, \cdot)$  und  $b_h^j(\cdot, \cdot)$  festhalten und nachweisen, um anschließend Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Variationsformulierung (3.46) treffen zu können.

**Lemma 3.2.19.** *Es existiert eine Konstante  $C_c > 0$ , die vom diskreten Teilraum  $\mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  abhängt, sodass Stetigkeit gilt*

$$a_h(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h) + b_h^j(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \leq C_c \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{H^1(\Omega)} \|\boldsymbol{\psi}_h\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{für alle } \boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}.$$

Des Weiteren gibt es eine Konstante  $C_e > 0$ , die unabhängig von der Ortsschrittweite  $h$  ist, sodass für Parameter  $\alpha, \theta k > 0$  für eine feste Zeitschrittweite  $k$  Elliptizität, d.h.

$$a_h(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\phi}_h) + b_h^j(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\phi}_h) \geq C_e \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{für alle } \boldsymbol{\phi}_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j},$$

nachgewiesen wird.

*Beweis.* Der Übersichtlichkeit halber gliedern wir den Beweis in zwei Teile, wobei wir im ersten Schritt die Stetigkeitseigenschaft der Summe  $a_h(\cdot, \cdot) + b_h^j(\cdot, \cdot)$  nachweisen. Schließlich verifizieren wir im letzten Abschnitt des Beweises die Elliptizität von  $a_h(\cdot, \cdot) + b_h^j(\cdot, \cdot)$ .

- Zunächst weisen wir die Stetigkeit der Bilinearform  $a_h(\cdot, \cdot)$  nach. Dazu bemühen wir die Beschränktheitseigenschaft der diskreten Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$ , die aus Lemma 3.2.11 hervorgeht, und erhalten

$$\begin{aligned} a_h(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h) &= \alpha (\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h)_{h,\Omega} + \theta k C_{\text{ex}} (\nabla \boldsymbol{\phi}_h, \nabla \boldsymbol{\psi}_h)_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \alpha \widetilde{C}_c \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{\psi}_h\|_{L^2(\Omega)} + \theta k C_{\text{ex}} \|\nabla \boldsymbol{\phi}_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \boldsymbol{\psi}_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left( \alpha \widetilde{C}_c + \theta k C_{\text{ex}} \right) \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{H^1(\Omega)} \|\boldsymbol{\psi}_h\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Nach Definition ist  $b_h^j(\cdot, \cdot)$  aufgrund der Verknüpfung von linearen bzw. bilinearen Abbildungen ebenfalls bilinear. Da wir uns auf einem endlichdimensionalen Teilraum  $\mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j} \subset H^1(\Omega)$  befinden, schließen wir daraus bereits Stetigkeit. Insbesondere ergibt sich damit die Existenz einer Konstante  $C_c > 0$ , sodass

$$a_h(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h) + b_h^j(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \leq C_c \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{H^1(\Omega)} \|\boldsymbol{\psi}_h\|_{H^1(\Omega)}$$

gilt.

- Um Elliptizität der Summe  $a_h(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\phi}_h) + b_h^j(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\phi}_h)$  für alle  $\boldsymbol{\phi}_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  einzusehen, bemerken wir zunächst, dass nach der Orthogonalitätseigenschaft (3.35) die Bilinearform  $b_h^j(\cdot, \cdot)$  auf  $\mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  verschwindet

$$b_h^j(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\phi}_h) = \left( \mathbf{m}_h^j \times \boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\phi}_h \right)_{h, \Omega} = 0.$$

Demnach ist lediglich nachzuweisen, dass  $a_h(\cdot, \cdot)$  elliptisch ist. Wir bedienen uns der Normäquivalenz (3.33) und sehen

$$\begin{aligned} a_h(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\phi}_h) &= \alpha \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{h, \Omega}^2 + \theta k C_{\text{ex}} \|\nabla \boldsymbol{\phi}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \frac{\alpha}{C_{\text{high}}^2} \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \theta k C_{\text{ex}} \|\nabla \boldsymbol{\phi}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \min \left\{ \frac{\alpha}{C_{\text{high}}^2}, \theta k C_{\text{ex}} \right\} \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Es sei erinnert, dass die Normäquivalenzkonstante  $C_{\text{high}} > 0$  unabhängig von  $h$  ist und nach Voraussetzung  $\alpha, \theta k > 0$  gilt. Damit liegt Elliptizität vor und vervollständigt den Beweis.  $\square$

Diese Beobachtungen erlauben uns für eine feste Zeitschrittweite  $k$  das Lemma von Lax-Milgram anzuwenden, wodurch die Existenz einer eindeutigen Lösung  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  der Variationsformulierung (3.46) garantiert wird. Insgesamt ist damit die Aussage des folgenden Theorems einsichtig.

**Theorem 3.2.20.** *Das in Algorithmus 3.2.14 vorgestellte Time-Splitting-Verfahren liefert für eine feste Ortschaftweite  $h$  und eine feste Zeitschrittweite  $k$  eindeutige Lösungen  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  bzw.  $\mathbf{m}_h^j \in \mathcal{M}_h$  für Indizes  $j \geq 0$ . Insbesondere ist dann auch für fixes  $(h, k) > 0$  die in der Zeit interpolierte approximative Lösung  $\mathbf{m}_{hk}$  der LLG-Gleichung mit*

$$\mathbf{m}_{hk}(t, \mathbf{x}) := \frac{t - jk}{k} \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{x}) + \frac{(j+1)k - t}{k} \mathbf{m}_h^j(\mathbf{x})$$

für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$  und alle Zeiten  $t \in [0, t_{\text{end}}]$  mit  $j = \{0, \dots, J\}$ , sodass  $t \in [jk, (j+1)k)$ , eindeutig.

Zusammenfassend halten wir fest, dass wir aus Algorithmus 3.2.4 mit einem gestörten  $L^2$ -Skalarprodukt, nämlich der diskreten Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h, \Omega}$ , ein weiteres FE-Schema, siehe Algorithmus 3.2.14, deduziert haben. Für dieses Verfahren haben wir die Existenz einer eindeutigen Lösung des Variationsproblems (3.46) aus Schritt (i) des FE-Schemas 3.2.14 verifiziert. Trotz dieser Erweiterung benötigt unser numerisches Verfahren noch immer lediglich die Lösung eines linearen und schwach besetzten Gleichungssystems pro Zeitschritt und bezieht insbesondere eine explizite Berechnung des Streufeldes mit ein.

### 3.3 Konvergenzresultat

Diesen Abschnitt widmen wir der Konvergenzanalyse unseres Time-Splitting-Verfahrens, siehe Algorithmus 3.2.14.

Bisher haben wir Algorithmus 3.2.14 im Bezug auf Existenz und Eindeutigkeit seiner Lösungen studiert. Dabei haben wir bewiesen, dass der Output dieses FE-Schemas eine eindeutige Folge von Lösungen ist, für die jedoch unklar ist, ob diese Folge jemals konvergiert. Insbesondere ist die Frage nach dem Grenzwert im Fall einer konvergenten Folge gänzlich offen. In diesem Abschnitt wollen wir uns mit diesen Fragestellungen auseinandersetzen und eine rigorose Analysis für eine Konvergenzaussage bereitstellen.

Nachdem wir einführend einige Eigenschaften der diskreten Lösungen  $\mathbf{m}_h^j \in \mathcal{M}_h$  bzw.  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  angeführt und bewiesen haben, werden wir unbedingte Konvergenz im schwachen Sinn für eine Teilfolge gegen eine schwache Lösung der LLG-Gleichung, siehe Definition 1.3.1, zeigen. Dieses Resultat rechtfertigt aus analytischer Sicht den Einsatz des numerischen Verfahrens 3.2.14 zur approximativen Lösung der LLG-Gleichung. Gleichzeitig stellt es eines der essentiellen Ziele dieser Arbeit dar.

Es sei bemerkt, dass sich die in diesem Abschnitt präsentierten und bewiesenen Konvergenzresultate vollständig auf Algorithmus 3.2.4 übertragen, da beide FE-Schemata ident sind unter der Wahl der  $h$ -Bilinearform als  $L^2$ -Skalarprodukt.

Der Übersichtlichkeit halber wiederholen wir die Definition einer schwachen Lösung der LLG-Gleichung.

**Definition 3.3.1.** Sei  $\mathbf{m}_0 \in H^1(\Omega; \mathbb{S}^2)$  eine bekannte Startmagnetisierung, dann wird  $\mathbf{m}$  als schwache Lösung der LLG-Gleichung bezeichnet, falls für alle Zeiten  $t_{\text{end}} > 0$  folgende Eigenschaften erfüllt sind

(i)  $\mathbf{m} \in H^1(\Omega_\tau; \mathbb{S}^2)$  mit  $\mathbf{m}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{m}_0(\mathbf{x})$  im Sparsinn;

(ii) für alle  $\phi \in C_0^\infty(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3)$  gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\tau} \mathbf{m}_t \cdot \phi \, d\mathbf{x} \, dt - \alpha \int_{\Omega_\tau} (\mathbf{m} \times \mathbf{m}_t) \cdot \phi \, d\mathbf{x} \, dt \\ &= C_{\text{ex}} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_\tau} (\mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i}) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} \, dt \\ & \quad - \int_{\Omega_\tau} (\mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \times \mathbf{m}) \cdot \phi \, d\mathbf{x} \, dt; \end{aligned} \quad (3.47)$$

(iii) für fast alle  $t' \in (0, t_{\text{end}})$  gilt

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}(t', \cdot)|^2 \, d\mathbf{x} + C_1 \int_{[0, t'] \times \Omega} |\mathbf{m}_t|^2 \, d\mathbf{x} \, dt \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_0|^2 \, d\mathbf{x} + C_2, \quad (3.48)$$

wobei die Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  lediglich vom Streufeldoperator  $\mathcal{P}$ , vom angewandten äußeren Feld  $\mathbf{f}$ , dem Gebiet  $\Omega$  und dem Dämpfungsparameter  $\alpha > 0$  abhängen.

Um eine Aussage bezüglich der Variation der diskreten Lösungen  $\mathbf{m}_h^j$  für  $j \geq 0$ , die aus unserem FE-Schema 3.2.14 hervorgehen, zu erhalten, ist es nötig deren Konstruktion genauer zu studieren. Dies wird in folgendem Lemma getan.

**Lemma 3.3.2.** Seien  $\mathbf{m}_h^j, \mathbf{m}_h^{j+1} \in \mathcal{M}_h$  und  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  für alle Iterationsschritte  $j \geq 0$  jene Lösungen, die aus Algorithmus 3.2.14 hervorgehen. Dann gilt

$$\left| \frac{\mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) - \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z})}{k} \right| \leq |\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})| \quad \text{für alle } j \geq 0, \text{ für alle } \mathbf{z} \in \mathcal{N}_h. \quad (3.49)$$

*Beweis.* Zunächst wollen wir nachweisen, dass für ein beliebiges  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  folgende Ungleichung gilt

$$2 - x \leq \frac{2}{(1+x)^{1/2}} \quad \text{für } x \geq 0. \quad (3.50)$$

Dazu führen wir eine simple Fallunterscheidung durch:

- Im Fall  $x \geq 2$  ist die Aussage offensichtlich korrekt, da die rechte Seite strikt positiv ist, während die linke Seite einen Wert kleiner oder gleich 0 annimmt.
- Im Fall  $x < 2$  stellt das nochmalige Quadrieren auf beiden Seiten eine Äquivalenzumformung dar, da beide Seiten positiv sind, und wir erhalten

$$(2-x)^2 \leq \frac{4}{1+x}.$$

Wir führen einfache Umformungen durch, die uns erlauben unsere letzte Abschätzung wie folgt darzustellen

$$(2-x)^2(1+x) - 4 \leq 0.$$

Interpretieren wir die linke Seite als eine reellwertige Funktion  $f(x) := (2-x)^2(1+x) - 4$  und untersuchen diese auf Nullstellen, so verifizieren wir für  $x \leq 3$

$$(2-x)^2(1+x) - 4 = (4-4x+x^2)(1+x) - 4 = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3) \leq 0$$

und haben damit die Gültigkeit von (3.50) für  $x < 2$  nachgewiesen.

Setzen wir in (3.50)  $x = k^2 |\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})|^2$  ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 - k^2 |\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})|^2 &\leq \frac{2}{\left(1 + k^2 |\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})|^2\right)^{1/2}} = \frac{2}{\left(\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}), \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})\right)^{1/2}} \\ &= \frac{2}{\left|\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})\right|}. \end{aligned}$$

Es sei bemerkt, dass aufgrund der Relation von  $\mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  zu  $\mathcal{M}_h$ , die Linearkombination  $\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})$  stets ungleich 0 ist und daher der Nenner der rechte Seite unserer letzten Abschätzung und insbesondere  $\mathbf{m}_h^{j+1}$  wohldefiniert sind.

Führen wir nun einfache algebraische Umformungen durch, so sehen wir, dass nach Konstruktion von  $\mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z})$  in Algorithmus 3.2.14 und aufgrund der Orthogonalitätsrelation von  $\mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  zu  $\mathcal{M}_h$

$$\left| \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) - \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) \right|^2 = 2 - 2 \left( \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) \right) = 2 - 2 \frac{1}{\left| \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right|} \leq k^2 |\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})|^2$$

gilt. Dies ist wegen der Positivität aller auftretenden Terme äquivalent zu

$$\left| \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) - \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) \right| \leq k |\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})|.$$

Damit ist der Beweis nun vollständig.  $\square$

Im folgenden Lemma präsentieren wir ein weiteres essentielles Verhältnis zwischen den Lösungen  $\mathbf{m}_h^j \in \mathcal{M}_h$  bzw.  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$ , die aus dem Time-Splitting-Verfahren 3.2.14 resultieren.

**Lemma 3.3.3.** *Wir betrachten die durch Algorithmus 3.2.14 generierten Lösungen. Für alle Koeffizienten  $\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}), \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) \in \mathbb{S}^2$  und  $\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^3$  mit  $j \geq 0$  und  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_h$  gilt*

$$\left| \frac{\mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) - \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z})}{k} - \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right| \leq \frac{1}{2}k \left| \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right|^2, \quad (3.51)$$

wobei  $k$  die Zeitschrittweite bezeichnet.

*Beweis.* Zunächst halten wir folgende Beobachtungen fest

$$\left| \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) - \left( \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right) \right| = \left| \left( \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right) - \frac{\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})}{\left| \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right|} \right|.$$

Wir bemerken, dass aus der Orthogonalitätsrelation  $\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) = 0$  und der Normiertheitseigenschaft  $|\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z})| = 1$  die Abschätzung  $\left| \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right| \geq 1$  hervorgeht. Demnach gilt

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) - \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) - k\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right| &= \left( 1 - \frac{1}{\left| \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right|} \right) \left| \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right| \\ &= \left| \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right| - 1. \end{aligned}$$

Wir streben für die rechte Seite eine bessere Abschätzung an. Dazu zeigen wir

$$\left| \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) + k\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right| \leq \frac{1}{2}k^2 \left| \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right|^2 + 1.$$

Dies ist einfach einzusehen, indem man beide Seiten quadriert

$$1 + k^2 \left| \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right|^2 \leq \frac{1}{4}k^4 \left| \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right|^4 + k^2 \left| \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right|^2 + 1,$$

was äquivalent zu

$$0 \leq \frac{1}{4}k^4 \left| \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right|^4$$

ist. Hierbei haben wir verwendet, dass beide Seiten positiv sind. Insgesamt führt uns dies auf folgende Abschätzung

$$\left| \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) - \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) - k\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right| \leq \frac{1}{2}k^2 \left| \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right|^2,$$

was äquivalent zu

$$\left| \frac{\mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) - \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z})}{k} - \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right| \leq \frac{1}{2}k \left| \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) \right|^2$$

ist. Damit haben wir den Beweis vervollständigt.  $\square$

Der Normalisierungsschritt in unserem numerischen Verfahren, siehe Algorithmus 3.2.14, kommt auch in verwandten Problemen zum Einsatz. Wir halten im folgenden Resultat fest, dass dieser mindernd im Bezug auf die Austauschenergie wirkt. Obwohl dieses Ergebnis einfach einzusehen ist, beweisen wir es der Vollständigkeit halber.

**Lemma 3.3.4.** Sei  $\varphi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  mit  $|\varphi(\mathbf{x})| \geq 1$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\varphi}{|\varphi|} \right|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx. \quad (3.52)$$

Diese Abschätzung zeigt, dass Normalisierung auf eine Minderung der Austauschenergie führt.

*Beweis.* In einem ersten Schritt betrachten wir jeweils einen einzelnen Eintrag der Jacobimatrizen  $\nabla \varphi$  bzw.  $\nabla \frac{\varphi}{|\varphi|}$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 3,$$

und

$$\frac{\partial \left( \frac{\varphi}{|\varphi|} \right)_i}{\partial x_j} = \frac{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} |\varphi| - \frac{\partial |\varphi|}{\partial x_j} \varphi_i}{|\varphi|^2} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 3. \quad (3.53)$$

Es gilt zu beachten, dass (3.53) wie folgt dargestellt werden kann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( \frac{\varphi}{|\varphi|} \right)_i}{\partial x_j} &= \frac{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} |\varphi| - \varphi_i^2 \frac{1}{|\varphi|} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}}{|\varphi|^2} \\ &= \frac{1}{|\varphi|} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} - \frac{\varphi_i^2}{|\varphi|^3} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \left( \frac{1}{|\varphi|} - \frac{\varphi_i^2}{|\varphi|^3} \right). \end{aligned}$$

Um nun den Betrag der linken Seite nach oben gegen  $\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|$  abschätzen zu können, zeigen wir unter Berücksichtigung der Annahme  $|\varphi(\mathbf{x})| \geq 1$

$$\left| \frac{1}{|\varphi|} - \frac{\varphi_i^2}{|\varphi|^3} \right| \leq 1.$$

Dies ist äquivalent zu folgender Abschätzung

$$||\varphi|^2 - \varphi_i^2| \leq |\varphi|^3.$$

Die Korrektheit dieser Aussage ist einfach einzusehen, da einerseits  $|\varphi|^2 = \sum_{i=1}^3 \varphi_i^2$  und damit stets  $|\varphi|^2 - \varphi_i^2 \geq 0$  gilt und andererseits unter Beachtung von  $|\varphi(\mathbf{x})| \geq 1$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$  folgende Relation gilt

$$|\varphi|^2 - \varphi_i^2 = |\varphi|^2 - \varphi_i^2 \leq |\varphi|^2 \leq |\varphi|^3.$$

Insgesamt haben wir damit

$$\left| \frac{\partial \left( \frac{\varphi}{|\varphi|} \right)_i}{\partial x_j} \right| \leq \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| \quad \text{für alle } i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 3$$

zeigt und gleichzeitig den Beweis abgeschlossen.  $\square$

Die Aussage von Lemma 3.3.4 bezieht sich auf den kontinuierlichen Funktionenraum  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Unser numerisches Verfahren betrachtet allerdings diskrete Funktionen  $\phi_h = \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} \phi_h(\mathbf{z}_i) \beta_i \in \mathcal{V}_h$ . Dies motiviert die Notwendigkeit eines analogen Resultats, welches unserem diskreten Funktionenraum entspricht. In der Arbeit von BARTELS [9] wird ein solches Resultat ausgearbeitet.

**Theorem 3.3.5** (Diskrete Energieverminderung (BARTELS [9])). *Unter der Bedingung, dass*

$$\int_{\Omega} \nabla \beta_i \cdot \nabla \beta_j \, d\mathbf{x} \leq 0 \quad \text{für alle } i \neq j \quad (3.54)$$

*gilt, stimmt die folgende Abschätzung*

$$\int_{\Omega} \left| \nabla \mathcal{I}_h \left( \frac{\phi_h}{|\phi_h|} \right) \right|^2 \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} |\nabla \phi_h|^2 \, d\mathbf{x} \quad (3.55)$$

*für alle Funktionen  $\phi_h = \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} \phi_h(\mathbf{z}_i) \beta_i \in \mathcal{V}_h$  mit  $|\phi_h(\mathbf{z}_i)| \geq 1$ .*  $\square$

**Bemerkung 3.3.6.** *Theorem 3.3.5 stellt eine Relation zwischen einer Bedingung an die Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  und einem analytischen Attribut dar. Für weitere Details sei der Leser auf [9] verwiesen, worin ein Netz konstruiert wird, sodass Abschätzung (3.55) nicht erfüllt ist.*

Es sei betont, dass Forderung (3.54) zu einem diskreten Maximumsprinzip korrespondiert. Wie in [54] gezeigt, ist diese Bedingung in folgenden zwei Fällen erfüllt:

- In 2D, wenn das Netz vom Delaunay-Typ ist, siehe Kapitel 2 für eine genaue und anschauliche Spezifikation dieses Begriffs.
- In 3D, wenn das Netz ausschließlich aus Tetraedern besteht, deren dihedrale Winkel stets kleiner als  $\pi/2$  sind.

In der Praxis stellt im 2-dimensionalen Raum diese Bedingung keine große Herausforderung bzw. keinen zusätzlichen Aufwand dar, da ohnedies viele Netzgeneratoren Delaunay-Netze konstruieren. Im Fall des 3-dimensionalen Raumes gilt es sicherzustellen, dass die initiale Triangulierung diese Bedingung bereits erfüllt. Darüber hinaus ist die weitere Netzverfeinerung so zu wählen, dass die Winkelrelationen in der verfeinerten Triangulierung erhalten bleiben. Ein Beispiel für eine solche Verfeinerungsstrategie wurde in Kapitel 2 vorgeschlagen und ausführlich erklärt.

Mit Hilfe der diskreten Lösungen  $\mathbf{m}_h^j$  definieren wir eine Funktion  $\mathbf{m}_{hk} : \Omega_{\tau} \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch affine Interpolation in der Zeit wie in Theorem 3.2.10 bzw. Theorem 3.2.20 und wiederholen diese

$$\mathbf{m}_{hk}(t, \mathbf{x}) = \frac{t - jk}{k} \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{x}) + \frac{(j+1)k - t}{k} \mathbf{m}_h^j(\mathbf{x}) \quad \text{für } t_j \leq t < t_{j+1} \text{ und } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.56)$$

d.h.  $\mathbf{m}_{hk} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{U}_k; \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3))$  mit  $\mathcal{U}_k$  als das diskrete Zeitnetz für  $[0, t_{\text{end}}] = [t_0, t_1] \cup \dots \cup [t_{J-1}, t_J]$ . Außerdem können die approximativen Lösungen von Algorithmus 3.2.14 in der Zeit ebenfalls durch

$$\mathbf{m}_{hk}^-(t, \mathbf{x}) = \mathbf{m}_h^j(\mathbf{x}) \quad \text{für } t_j \leq t < t_{j+1} \text{ und } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.57)$$

$$\mathbf{v}_{hk}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_h^j(\mathbf{x}) \quad \text{für } t_j \leq t < t_{j+1} \text{ und } \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.58)$$

interpretiert werden, d.h.  $\mathbf{m}_{hk}^-, \mathbf{v}_{hk} \in \mathcal{P}^0(\mathcal{U}_k; \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3))$ .

**Konvention 3.3.1.** *Im Beweis zum folgenden Theorem bzw. in den Beweisen und Aussagen der dazugehörigen Lemmata wollen wir der Übersichtlichkeit halber eine verkürzte Schreibweise verwenden. Wir verzichten bei sämtlichen Integralen auf die Angabe der Integrationsrichtung  $d\mathbf{x}$  bzw.  $dt$ . Diese geht ohnedies aus dem Integrationsgebiet hervor.*

Das folgende Konvergenzresultat stellt das essentielle Resultat dieses Abschnitts dar. Einerseits beantwortet es die Frage nach Konvergenz und Grenzwert der mittels Algorithmus 3.2.14 berechneten approximativen Lösungen und andererseits behandelt es die Existenz schwacher Lösungen der LLG-Gleichung.

**Theorem 3.3.7.** *Sei  $\theta \in (1/2, 1]$  fest gewählt und sei  $\mathcal{T}_h$  eine Familie von formregulären Triangulierungen mit Netzweite  $h \rightarrow 0$ , die folgende Bedingung erfüllt*

$$\int_{\Omega} \nabla \beta_i \cdot \nabla \beta_{i'} d\mathbf{x} \leq 0 \quad \text{für alle } i \neq i'. \quad (3.59)$$

*Des Weiteren betrachten wir Algorithmus 3.2.14 mit einer diskreten Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$ , die den Anforderungen (3.32)–(3.36) genügt. Gilt für die initiale Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^0 \rightarrow \mathbf{m}_0$  in  $H^1(\Omega)$  für  $h \rightarrow 0$ , erfüllt der approximierte Streufeldoperator  $\mathcal{P}_h$  sowohl*

$$\|\mathcal{P}_h \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\mathcal{P}} \|\mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{als auch} \quad \|\mathcal{P} \mathbf{n} - \mathcal{P}_h \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0 \quad (3.60)$$

*für alle  $\mathbf{n} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  mit einer Konstante  $C_{\mathcal{P}} > 0$  und gilt für das näherungsweise berechnete angelegte äußere Feld*

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_{hk}\|_{L^2(\Omega_{\tau})} \rightarrow 0 \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0, \quad (3.61)$$

*dann konvergiert eine Teilfolge der interpolierten diskreten Magnetisierung  $\mathbf{m}_{hk}$  aus (3.56) schwach in  $H^1(\Omega_{\tau})$  gegen eine schwache Lösung  $\mathbf{m}$  der LLG-Gleichung sofern  $(h, k) \rightarrow 0$  unabhängig voneinander.  $\square$*

Der Übersichtlichkeit halber sammeln wir zunächst Teilresultate, die wesentlich zum Beweis von Theorem 3.3.7 beitragen. Des Weiteren streben wir eine rigorose Analysis an und führen daher für jede Behauptung stets den Beweis direkt anschließend aus. Veranschaulicht werden die einzelnen Zusammenhänge in den Abbildungen 3.1–3.3. Letztendlich führt dies zu einer klareren und kürzeren Darstellung des Beweises von Theorem 3.3.7, welcher im Anschluss geführt wird.

Das folgende Lemma beinhaltet essentielle Stabilitätsaussagen bezüglich der von Algorithmus 3.2.14 produzierten Lösungen.

**Lemma 3.3.8.** *Seien  $\mathbf{m}_h^j, \mathbf{m}_h^{j+1} \in \mathcal{M}_h$  und  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  für alle Iterationsschritte  $j \in \{0, \dots, J-1\}$  jene Lösungen, die von Algorithmus 3.2.14 generiert werden. Dann gilt für einen fest gewählten Parameter  $\theta \in [1/2, 1]$  folgende Abschätzung*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^{j+1}|^2 - \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^j|^2 \right) + \frac{k\widehat{C}}{C_{\text{ex}}} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_h^j|^2 \\ & \leq - \left( \theta - \frac{1}{2} \right) k^2 \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_h^j|^2 + \frac{k}{C_{\text{ex}}} \left( \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j), \mathbf{v}_h^j \right)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

*Des Weiteren gilt für  $j \in \{0, \dots, J\}$  folgende Abschätzung*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^j|^2 + \frac{k}{C_{\text{ex}}} \left( \widehat{C} - \frac{1}{2\varepsilon_Y} \right) \sum_{i=0}^{j-1} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_h^i|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^0|^2 + C_{\text{sum}}, \quad (3.63)$$

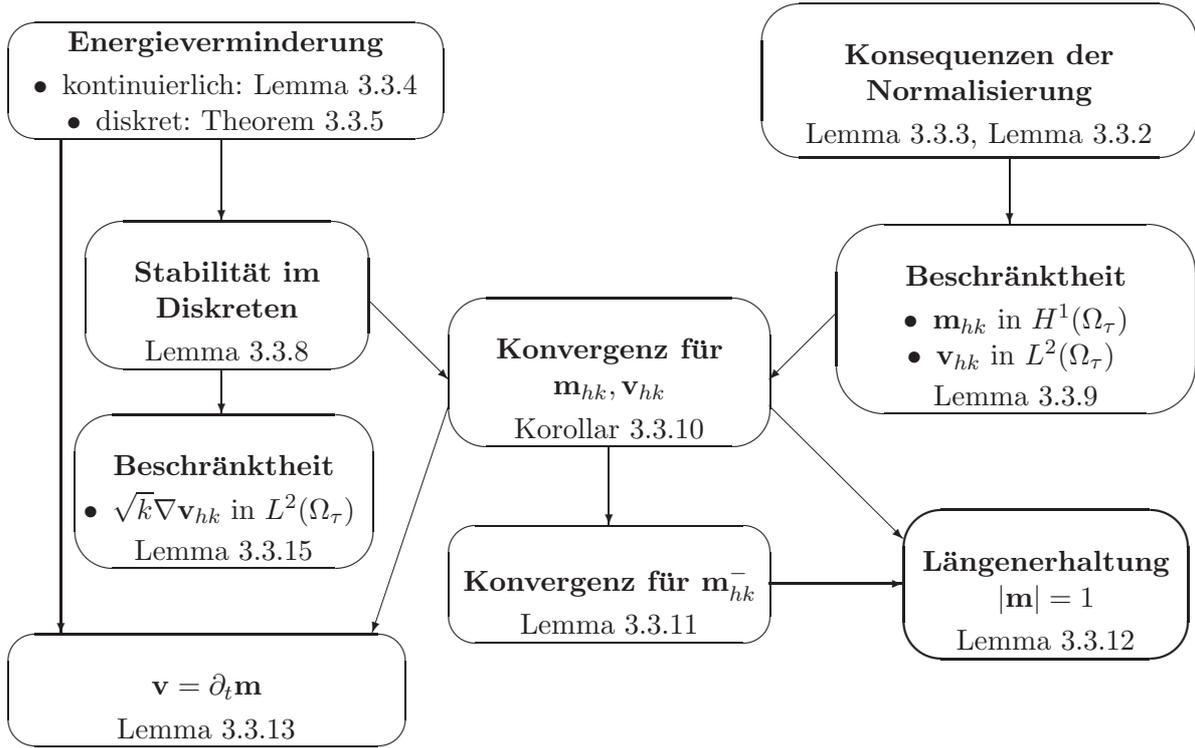


Abbildung 3.1: Zusammenhänge der einzelnen Teilergebnisse um  $|m| = 1$  für den Grenzwert der Approximation  $m_{hk}$  der Magnetisierung einzusehen.

wobei alle auftretenden Konstanten positiv sind. Insbesondere wird beschränktes Wachstum der diskreten Magnetisierung  $m_h^j$  im Ort und beschränkte Änderung der approximativ berechneten Zeitableitung  $v_h^j$  impliziert, sofern  $\varepsilon_Y > 1/(2\widehat{C}) > 0$  gilt.

*Beweis.* Zunächst wollen wir die Gültigkeit von Abschätzung (3.62) nachweisen. Dazu wählen wir die spezielle Testfunktion  $\psi_h = v_h^j \in \mathcal{K}_{m_h^j}$  und setzen diese in Algorithmus 3.2.14 ein und erhalten

$$\alpha \left( v_h^j, v_h^j \right)_{h,\Omega} + \left( m_h^j \times v_h^j, v_h^j \right)_{h,\Omega} = -C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla(m_h^j + \theta k v_h^j) \cdot \nabla v_h^j + \left( h_{\text{low}}(m_h^j, f_h^j), v_h^j \right)_{L^2(\Omega)}.$$

Da nach Annahme unsere Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  Relation (3.54) erfüllt, dürfen wir Abschätzung (3.55)

anwenden und erhalten für  $\|\nabla \mathbf{m}_h^{j+1}\|_{L^2(\Omega)}^2$  daher

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^{j+1}|^2 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \nabla \left( \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}_i) \beta_i \right) \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \nabla \left( \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} \frac{\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_i) + k \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}_i)}{|\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_i) + k \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}_i)|} \beta_i \right) \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \nabla \mathcal{I}_h \left( \frac{\mathbf{m}_h^j + k \mathbf{v}_h^j}{|\mathbf{m}_h^j + k \mathbf{v}_h^j|} \right) \right|^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(\mathbf{m}_h^j + k \mathbf{v}_h^j)|^2.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Kombination der letzten beiden Resultate zeigt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^{j+1}|^2 &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^j|^2 + k \int_{\Omega} \nabla \mathbf{m}_h^j \cdot \nabla \mathbf{v}_h^j + \frac{k^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_h^j|^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^j|^2 + \frac{k^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_h^j|^2 - \frac{\alpha k}{C_{\text{ex}}} (\mathbf{v}_h^j, \mathbf{v}_h^j)_{h,\Omega} - \theta k^2 \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_h^j|^2 \\
&\quad + \frac{k}{C_{\text{ex}}} (\mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j), \mathbf{v}_h^j)_{L^2(\Omega)} - \frac{k}{C_{\text{ex}}} (\mathbf{m}_h^j \times \mathbf{v}_h^j, \mathbf{v}_h^j)_{h,\Omega}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Zunächst beachten wir, dass nach Eigenschaft (3.35) des  $h$ -Skalarprodukts  $(\mathbf{a}_h \times \mathbf{b}_h, \mathbf{b}_h)_{h,\Omega} = 0$  für alle  $\mathbf{a}_h, \mathbf{b}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  gilt. Des Weiteren schätzen wir unter Berücksichtigung der Normäquivalenzeigenschaft der diskreten Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  wie folgt ab

$$-\alpha (\mathbf{v}_h^j, \mathbf{v}_h^j)_{h,\Omega} \leq -\frac{\alpha}{C_{\text{high}}^2} \|\mathbf{v}_h^j\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Fügen wir diese Abschätzung unter der Definition einer von  $h$  unabhängigen Konstante  $\widehat{C} := \alpha/C_{\text{high}}^2 > 0$  nun in (3.65) ein, so erhalten wir mit einfachen algebraischen Umformungen

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^{j+1}|^2 - \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^j|^2 \right) + \frac{k \widehat{C}}{C_{\text{ex}}} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_h^j|^2 \\
&\leq - \left( \theta - \frac{1}{2} \right) k^2 \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_h^j|^2 + \frac{k}{C_{\text{ex}}} (\mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j), \mathbf{v}_h^j)_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

und verifizieren Abschätzung (3.62).

Um Stabilitätsabschätzung (3.63) einzusehen, summieren wir nun ausgehend von (3.62) über die Indizes  $j = 0, \dots, i-1$  auf. Dabei berücksichtigen wir, dass die linke Seite eine Teleskopsumme beinhaltet und sehen

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^i|^2 - \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^0|^2 \right) + \frac{k \widehat{C}}{C_{\text{ex}}} \sum_{j=0}^{i-1} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_h^j|^2 + \left( \theta - \frac{1}{2} \right) k^2 \sum_{j=0}^{i-1} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_h^j|^2 \\
&\leq \frac{k}{C_{\text{ex}}} \sum_{j=0}^{i-1} (\mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j), \mathbf{v}_h^j)_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{3.66}$$

woraus wir unter Berücksichtigung der Wahl von  $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$  und der Feststellung  $k^2 \sum_{j=0}^{i-1} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_h^j|^2 \geq 0$  folgende Abschätzung ableiten

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^i|^2 + \frac{k\widehat{C}}{C_{\text{ex}}} \sum_{j=0}^{i-1} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_h^j|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^0|^2 + \frac{k}{C_{\text{ex}}} \sum_{j=0}^{i-1} \left( \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j), \mathbf{v}_h^j \right)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Betrachten wir nun jene Terme der rechten Seite, die vom Iterationsindex  $j$  abhängen separat. Wir führen für jeden einzelnen einfache Abschätzungen durch. Dabei sei zunächst an die Definition der Anisotropiedichte erinnert, wodurch der von ihr induzierte Beitrag bis auf Konstanten folgende Darstellung findet

$$D\Phi(\mathbf{m}_h^j) = 2 \sum_{i=1}^2 (\mathbf{m}_h^j \cdot \mathbf{b}_i) \mathbf{b}_i.$$

Damit erhalten wir nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left( D\Phi(\mathbf{m}_h^j), \mathbf{v}_h^j \right)_{L^2(\Omega)} \leq \|D\Phi(\mathbf{m}_h^j)\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \|\mathbf{m}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_h^j\|_{L^2(\Omega)}.$$

Des Weiteren fassen wir jenen Term, der der Streufeldenergie entspringt, ins Auge und führen folgende Abschätzung durch

$$\left( \mathcal{P}_h(\mathbf{m}_h^j), \mathbf{v}_h^j \right)_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathcal{P}_h(\mathbf{m}_h^j)\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\mathcal{P}} \|\mathbf{m}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_h^j\|_{L^2(\Omega)}.$$

Schließlich betrachten wir den Beitrag des angelegten äußeren Feldes und erhalten

$$\left( \mathbf{f}_h^j, \mathbf{v}_h^j \right)_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{f}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_h^j\|_{L^2(\Omega)}.$$

Führen wir diese Abschätzungen zusammen und kombinieren sie mit (3.67), so liegt folgende Abschätzung vor

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^i|^2 + \frac{k\widehat{C}}{C_{\text{ex}}} \sum_{j=0}^{i-1} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_h^j|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^0|^2 + \frac{k}{C_{\text{ex}}} \sum_{j=0}^{i-1} \left( (2C_{\text{ani}} + C_{\mathcal{P}}) \|\mathbf{m}_h^j\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{f}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\mathbf{v}_h^j\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Insbesondere impliziert dies unter Anwendung der Youngschen Ungleichung auf den zweiten Summanden der rechten Seite

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^i|^2 + \frac{k\widehat{C}}{C_{\text{ex}}} \sum_{j=0}^{i-1} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_h^j|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^0|^2 \\ & \quad + \frac{k}{C_{\text{ex}}} \sum_{j=0}^{i-1} \left( \frac{\varepsilon_Y}{2} \left( (2C_{\text{ani}} + C_{\mathcal{P}}) \|\mathbf{m}_h^j\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{f}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 + \frac{1}{2\varepsilon_Y} \|\mathbf{v}_h^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

mit  $\varepsilon_Y > 0$  beliebig wählbar. Absorbieren wir jene Terme der rechten Seite, die von  $\mathbf{v}_h^j$  abhängen, so sehen wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^i|^2 + \frac{k}{C_{\text{ex}}} \left( \widehat{C} - \frac{1}{2\varepsilon_Y} \right) \sum_{j=0}^{i-1} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_h^j|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^0|^2 + \frac{k}{C_{\text{ex}}} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\varepsilon_Y}{2} \left( (2C_{\text{ani}} + C_{\mathcal{P}}) \left\| \mathbf{m}_h^j \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \mathbf{f}_h^j \right\|_{L^2(\Omega)} \right)^2. \end{aligned}$$

Beachten wir die gleichmäßige Beschränktheit der Magnetisierung  $|\mathbf{m}_h^j(\mathbf{x})| \leq 1$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ , siehe Lemma 3.2.18, so deduzieren wir daraus folgende Stabilitätsabschätzung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^i|^2 + \frac{k}{C_{\text{ex}}} \left( \widehat{C} - \frac{1}{2\varepsilon_Y} \right) \sum_{j=0}^{i-1} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_h^j|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^0|^2 + \frac{k}{C_{\text{ex}}} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\varepsilon_Y}{2} \left( (2C_{\text{ani}} + C_{\mathcal{P}}) |\Omega|^{1/2} + \left\| \mathbf{f}_h^j \right\|_{L^2(\Omega)} \right)^2. \end{aligned}$$

Erneutes Anwenden der Youngschen Ungleichung auf den zweiten Summanden der rechten Seite, wobei wir diesmal die spezielle Abschätzung  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$  für  $a, b \in \mathbb{R}$  verwenden, und Einsetzen der Eigenschaft der Triangulierung des Zeitintervalls  $ki \leq kJ = t_{\text{end}}$  zeigen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^i|^2 + \frac{k}{C_{\text{ex}}} \left( \widehat{C} - \frac{1}{2\varepsilon_Y} \right) \sum_{j=0}^{i-1} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_h^j|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^0|^2 + \frac{kJ}{C_{\text{ex}}} \varepsilon_Y (2C_{\text{ani}} + C_{\mathcal{P}})^2 |\Omega| + \frac{k}{C_{\text{ex}}} \varepsilon_Y \sum_{j=0}^{J-1} \left\| \mathbf{f}_h^j \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^0|^2 + \frac{\varepsilon_Y t_{\text{end}}}{C_{\text{ex}}} (2C_{\text{ani}} + C_{\mathcal{P}})^2 |\Omega| + \frac{\varepsilon_Y}{C_{\text{ex}}} \left\| \mathbf{f}_{hk} \right\|_{L^2(\Omega_{\tau})}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^0|^2 + \frac{\varepsilon_Y t_{\text{end}}}{C_{\text{ex}}} (2C_{\text{ani}} + C_{\mathcal{P}})^2 |\Omega| + \frac{\varepsilon_Y}{C_{\text{ex}}} \left( \left\| \mathbf{f}_{hk} - \mathbf{f} \right\|_{L^2(\Omega_{\tau})}^2 + \left\| \mathbf{f} \right\|_{L^2(\Omega_{\tau})}^2 \right) \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^0|^2 + \frac{\varepsilon_Y t_{\text{end}}}{C_{\text{ex}}} (2C_{\text{ani}} + C_{\mathcal{P}})^2 |\Omega| + \frac{\varepsilon_Y}{C_{\text{ex}}} \left( C_{\mathbf{f}}^2 + \left\| \mathbf{f} \right\|_{L^2(\Omega_{\tau})}^2 \right), \end{aligned}$$

wobei einerseits die Konstanztheit von  $\mathbf{f}_h^j$  auf jedem Zeitintervall berücksichtigt wurde und andererseits die Eigenschaften des diskretisierten angelegten äußeren Feldes  $\mathbf{f}_{hk}$ , siehe Annahme (3.24) bzw. (3.25), zum Einsatz kamen und daher eine positive Konstante  $C_{\mathbf{f}} > 0$  existiert, die von  $h$  und  $k$  unabhängig ist. Wir führen durch

$$C_{\text{sum}} := \frac{\varepsilon_Y t_{\text{end}}}{C_{\text{ex}}} (2C_{\text{ani}} + C_{\mathcal{P}})^2 |\Omega| + \frac{\varepsilon_Y}{C_{\text{ex}}} \left( C_{\mathbf{f}}^2 + \left\| \mathbf{f} \right\|_{L^2(\Omega_{\tau})}^2 \right)$$

eine positive Konstante  $C_{\text{sum}} > 0$  ein. Es ist klar, dass diese unabhängig von  $h$  und  $k$  ist. Wir erhalten damit insgesamt

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^i|^2 + \frac{k}{C_{\text{ex}}} \left( \widehat{C} - \frac{1}{2\varepsilon_Y} \right) \sum_{j=0}^{i-1} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_h^j|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^0|^2 + C_{\text{sum}} \quad (3.68)$$

und verifizieren schließlich Abschätzung (3.63).

Es sei bemerkt, dass Abschätzung (3.63) eine lokale Energieabschätzung für eine Konstante  $\varepsilon_Y = \varepsilon_Y(\widehat{C}) > 0$  darstellt, die von der Ortsschrittweite  $h$  unabhängig ist, sofern folgende Relation erfüllt ist

$$\widehat{C} - \frac{1}{2\varepsilon_Y} > 0, \quad \text{also } \varepsilon_Y > \frac{1}{2\widehat{C}}.$$

Da die auftretende Konstante strikt positiv ist, gilt  $\varepsilon_Y > 0$  und daher beschränktes Wachstum der approximativen Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^j$  im Ort und beschränkte Evolution der näherungsweise berechneten Zeitableitung  $\mathbf{v}_h^j$ .

Damit ist der Beweis nun vollständig.  $\square$

Im nächsten Lemma beschäftigen wir uns mit Beschränktheitsaussagen im Bezug auf die von Algorithmus 3.2.14 erzeugten Lösungen. Dabei streben wir gleichmäßige Beschränktheit unabhängig von der Ortsschrittweite  $h$  und der Zeitschrittweite  $k$  in  $H^1(\Omega_\tau)$  für die approximative Magnetisierung  $\mathbf{m}_{hk}$  bzw. in  $L^2(\Omega_\tau)$  für  $\mathbf{v}_{hk}$  an.

**Lemma 3.3.9.** *Für die in der Zeit interpolierten Lösungen von Algorithmus 3.2.14  $\mathbf{m}_{hk}$  bzw.  $\mathbf{v}_{hk}$  gilt uniforme Beschränktheit in  $H^1(\Omega_\tau)$  bzw.  $L^2(\Omega_\tau)$  unabhängig von der Ortsschrittweite  $h$  und der Zeitschrittweite  $k$ .*

*Beweis.* Um eine Aussage bezüglich der relativen Abweichung von  $\mathbf{m}_h^j$  zu  $\mathbf{m}_h^{j+1}$  pro Zeitschritt zu gewinnen, bedienen wir uns des Resultats von Lemma 3.1.1 und erhalten

$$\left\| \frac{\mathbf{m}_h^{j+1} - \mathbf{m}_h^j}{k} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ch^3 \sum_{\mathbf{z}_\ell \in \mathcal{N}_h} \left| \frac{1}{k} \left( \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}_\ell) - \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_\ell) \right) \right|^2.$$

Weitere Anwendung von Relation (3.6) und Abschätzung (3.49), die besagt

$$\left| \frac{\mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}) - \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z})}{k} \right| \leq |\mathbf{v}_h^j(\mathbf{z})| \quad \text{für alle } j \geq 0, \text{ für alle } \mathbf{z} \in \mathcal{N}_h,$$

zeigt

$$\left\| \frac{\mathbf{m}_h^{j+1} - \mathbf{m}_h^j}{k} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ch^3 \sum_{\mathbf{z}_\ell \in \mathcal{N}_h} \left| \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}_\ell) \right|^2 \leq C' \left\| \mathbf{v}_h^j \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

wobei die Konstanten  $C, C' > 0$  aus (3.6) hervorgehen und unabhängig von der Netzweite  $h$  sind. Da diese Relation für alle Zeitschritte  $j = 0, \dots, J-1$  gilt, schließen wir daraus

$$\|\partial_t \mathbf{m}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 = k \sum_{j=0}^{J-1} \left\| \frac{\mathbf{m}_h^{j+1} - \mathbf{m}_h^j}{k} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C' \|\mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2. \quad (3.69)$$

Des Weiteren folgt aus der Stabilitätsabschätzung (3.63)

$$\|\nabla \mathbf{m}_h^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + C' \|\mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 \leq C.$$

Dies zeigt, dass insgesamt uniforme Beschränktheit gilt

$$\|\partial_t \mathbf{m}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 \lesssim \|\mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 \leq C, \quad (3.70)$$

wobei die positive Konstante  $C > 0$  unabhängig von  $h$  und  $k$  ist. Ferner leiten wir gleichmäßige Beschränktheit des Gradienten wie folgt ab

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{m}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 &= \sum_{i=0}^{J-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \frac{t-jk}{k} \nabla \mathbf{m}_h^{j+1} + \frac{(j+1)k-t}{k} \nabla \mathbf{m}_h^j \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \sum_{i=0}^{J-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\nabla \mathbf{m}_h^{j+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \mathbf{m}_h^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C'', \end{aligned}$$

wobei die Konstante  $C'' > 0$  unabhängig von  $h$  und  $k$  ist.

Aus dem Beweis zu Lemma 3.2.18 wissen wir, dass Beschränktheit  $|\mathbf{m}_h^j(\mathbf{x})| \leq 1$  für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$  vorliegt. Daraus schließen wir insbesondere die Beschränktheit von  $\mathbf{m}_{hk}$ , da  $\mathbf{m}_{hk}$  lediglich eine Linearkombination von  $\mathbf{m}_h^j$  bzw.  $\mathbf{m}_h^{j+1}$  ist und sich für  $t \in [jk, (j+1)k]$  wie folgt abschätzen lässt

$$\begin{aligned} |\mathbf{m}_{hk}(t, \mathbf{x})| &= \left| \frac{t-jk}{k} \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{x}) + \frac{(j+1)k-t}{k} \mathbf{m}_h^j(\mathbf{x}) \right| \\ &\leq \left| \frac{t-jk}{k} \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{x}) \right| + \left| \frac{(j+1)k-t}{k} \mathbf{m}_h^j(\mathbf{x}) \right| \\ &\leq \left| \mathbf{m}_h^j(\mathbf{x}) \right| + \left| \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{x}) \right| \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich mit Stabilitätsabschätzung (3.63) und Abschätzung (3.70) die uniforme Beschränktheit von  $\mathbf{m}_{hk}$  in  $H^1(\Omega_\tau)$  und Beschränktheit von  $\mathbf{v}_{hk}$  in  $L^2(\Omega_\tau)$ .  $\square$

**Korollar 3.3.10.** *Aufgrund der Beschränktheitsresultate aus Lemma 3.3.9, besitzt die in der Zeit interpolierte approximative Magnetisierung  $\mathbf{m}_{hk}$  bzw. die näherungsweise berechnete Zeitableitung  $\mathbf{v}_{hk}$  eine Teilfolge, die wir der Einfachheit halber gleichnamig bezeichnen, die gegen eine Funktion  $\mathbf{m} \in H^1(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3)$  bzw. eine Funktion  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3)$  konvergiert, d.h. es gilt*

$$\mathbf{m}_{hk} \rightharpoonup \mathbf{m} \quad \text{schwach in } H^1(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0, \quad (3.71)$$

$$\mathbf{m}_{hk} \rightarrow \mathbf{m} \quad \text{stark in } L^2(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0, \quad (3.72)$$

$$\mathbf{v}_{hk} \rightharpoonup \mathbf{v} \quad \text{schwach in } L^2(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0. \quad (3.73)$$

**Lemma 3.3.11.** *Bezeichne  $\mathbf{m}_{hk}^- \in \mathcal{P}^0(\mathcal{U}_k; \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3))$  die in der Zeit nach (3.57) interpolierte diskrete Magnetisierung. Dann gibt es eine Teilfolge von  $\mathbf{m}_{hk}^-$ , die wir der Einfachheit halber gleichnamig bezeichnen, für die folgende Konvergenzaussage gilt*

$$\mathbf{m}_{hk}^- \rightarrow \mathbf{m} \quad \text{stark in } L^2(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0 \quad (3.74)$$

mit  $\mathbf{m} \in H^1(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3)$ .

*Beweis.* Nach Definition (3.56) bzw. (3.57) gilt für alle Indizes  $j = 0, \dots, J-1$  und alle Zeitpunkte  $t \in [jk, (j+1)k)$  folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} |\mathbf{m}_{hk}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{m}_{hk}^-(t, \mathbf{x})| &= \left| \frac{t-jk}{k} \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{x}) + \frac{(j+1)k-t}{k} \mathbf{m}_h^j(\mathbf{x}) - \mathbf{m}_h^j(\mathbf{x}) \right| \\ &= \left| \frac{t-jk}{k} \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{x}) + \frac{jk-t}{k} \mathbf{m}_h^j(\mathbf{x}) \right| \\ &= \left| (t-jk) \frac{\mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{m}_h^j(\mathbf{x})}{k} \right| \\ &= |t-jk| |\partial_t \mathbf{m}_{hk}(t, \mathbf{x})| \\ &\leq k |\partial_t \mathbf{m}_{hk}(t, \mathbf{x})|. \end{aligned}$$

Daraus schließen wir

$$\|\mathbf{m}_{hk} - \mathbf{m}_{hk}^-\|_{L^2(\Omega_\tau)} \leq k \|\partial_t \mathbf{m}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}. \quad (3.75)$$

Da  $\mathbf{m}_{hk} \in H^1(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3)$  gleichmäßig in  $h$  und  $k$  beschränkt ist, ist insbesondere  $\partial_t \mathbf{m}_{hk} \in L^2(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3)$  gleichmäßig beschränkt in  $h$  und  $k$ . Dies impliziert für den Grenzübergang  $k$  gegen 0 nach  $\|\mathbf{m}_{hk}^- - \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \leq \|\mathbf{m}_{hk}^- - \mathbf{m}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} + \|\mathbf{m}_{hk} - \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega_\tau)}$  die Konvergenzaussage

$$\mathbf{m}_{hk}^- \rightarrow \mathbf{m} \quad \text{stark in } L^2(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0$$

und vervollständigt damit den Beweis.  $\square$

Im nächsten Lemma beschäftigen wir uns mit der Erfüllung der nicht-konvexen Nebenbedingung  $|\mathbf{m}| = 1$  für die Grenzfunktion der konvergenten Teilfolge  $\mathbf{m}_{hk}$  bzw.  $\mathbf{m}_{hk}^-$ , die durch Algorithmus 3.2.14 generiert wird.

**Lemma 3.3.12.** *Die Grenzfunktion  $\mathbf{m} \in H^1(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3)$  der konvergenten Teilfolge  $\mathbf{m}_{hk}$  bzw.  $\mathbf{m}_{hk}^-$  erfüllt die nicht-konvexe Eigenschaft*

$$|\mathbf{m}(t, \mathbf{x})| = 1 \quad \text{für fast alle } (t, \mathbf{x}) \in \Omega_\tau. \quad (3.76)$$

*Beweis.* Wir betrachten folgende Abschätzung

$$\| |\mathbf{m}| - 1 \|_{L^2(\Omega_\tau)} \leq \| |\mathbf{m}| - |\mathbf{m}_{hk}^-| \|_{L^2(\Omega_\tau)} + \| |\mathbf{m}_{hk}^-| - 1 \|_{L^2(\Omega_\tau)}.$$

Für den ersten Summanden der rechten Seite schätzen wir weiter ab und nutzen das Konvergenzresultat aus Lemma 3.3.11. Damit erhalten wir

$$\| |\mathbf{m}| - |\mathbf{m}_{hk}^-| \|_{L^2(\Omega_\tau)} \leq \| \mathbf{m} - \mathbf{m}_{hk}^- \|_{L^2(\Omega_\tau)} \rightarrow 0 \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0.$$

Um Konvergenz des zweiten Terms der rechten Seite für  $h$  und  $k$  gegen 0 einzusehen, nutzen wir die Endlichkeit des Zeitintervalls und bemühen Lemma 3.1.2 für die Ortskomponente

$$\| |\mathbf{m}_{hk}^-|(t, \cdot) - 1 \|_{L^2(\Omega)} \leq \max_{t_j} \left\| |\mathbf{m}_h^j| - 1 \right\|_{L^2(\Omega)} \leq h \max_{t_j} \left\| \nabla \mathbf{m}_h^j \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Des Weiteren bemerken wir, dass gleichmäßige Beschränktheit  $\|\nabla \mathbf{m}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \leq C$  für  $j > 0$  vorliegt, wobei die Konstante  $C > 0$  unabhängig von  $h$  und  $k$  ist. Für den Grenzübergang gilt nun

$$\| |\mathbf{m}_{hk}^-| - 1 \|_{L^2(\Omega_\tau)} \leq Ch \rightarrow 0 \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0.$$

Insgesamt haben wir damit bewiesen, dass  $|\mathbf{m}| = 1$  fast überall in  $\Omega_\tau$  gilt.  $\square$

Im folgenden Lemma verifizieren wir die Gleichheit des Grenzwerts der approximierten Zeitableitung  $\mathbf{v}_{hk}$  und des nach der Zeit abgeleiteten Grenzwerts der näherungsweise berechneten Magnetisierung  $\mathbf{m}_{hk}$ , d.h. wir weisen die Gültigkeit von  $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{m}$  nach.

**Lemma 3.3.13.** *Die Grenzfunktion  $\mathbf{v}$  der konvergenten Teilfolge  $\mathbf{v}_{hk}$  der näherungsweise berechneten Zeitableitung der Magnetisierung erfüllt  $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{m} \in L^2(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3)$ , wobei  $\mathbf{m}$  den Limes der konvergenten Teilfolge  $\mathbf{m}_{hk}$  bzw.  $\mathbf{m}_{hk}^-$  bezeichnet.*

*Beweis.* Wir kombinieren Normäquivalenz (3.6) und Abschätzung (3.51), siehe Lemma 3.3.3, und erhalten

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C'} \left\| \frac{\mathbf{m}_h^{j+1} - \mathbf{m}_h^j}{k} - \mathbf{v}_h^j \right\|_{L^1(\Omega)} \\ & \leq h^3 \sum_{\mathbf{z}_\ell \in \mathcal{N}_h} \left| \frac{\mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{z}_\ell) - \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_\ell)}{k} - \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}_\ell) \right| \\ & \leq \frac{1}{2} h^3 k \sum_{\mathbf{z}_\ell \in \mathcal{N}_h} \left| \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}_\ell) \right|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} C'' k \left\| \mathbf{v}_h^j \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Daraus schließen wir aufgrund der Entkopplung der Zeitkomponente  $t$  und der Ortskomponente  $\mathbf{x}$  nach Definition von  $\mathbf{m}_{hk}$  bzw.  $\mathbf{v}_{hk}$

$$\left\| \partial_t \mathbf{m}_{hk} - \mathbf{v}_{hk} \right\|_{L^1(\Omega_\tau)} \leq \frac{1}{2} C' C'' k \left\| \mathbf{v}_{hk} \right\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 \leq C''' k, \quad (3.77)$$

da  $\mathbf{v}_{hk}$  gleichmäßig in  $h$  und  $k$  beschränkt in  $L^2(\Omega_\tau)$  ist. Hierbei entspringen die Konstanten dem Verhältnis (3.6) bzw. Stabilitätsabschätzung (3.63) und sind daher von  $h$  und  $k$  unabhängig.

Aus der Konvergenzaussage  $\mathbf{m}_{hk} \rightharpoonup \mathbf{m}$  in  $H^1(\Omega_\tau)$  ergibt sich  $\partial_t \mathbf{m}_{hk} \rightharpoonup \partial_t \mathbf{m}$  in  $L^2(\Omega_\tau)$ . Insbesondere folgt daraus zusammen mit dem Konvergenzresultat (3.73) aus Korollar 3.3.10

$$\partial_t \mathbf{m}_{hk} - \mathbf{v}_{hk} \rightharpoonup \partial_t \mathbf{m} - \mathbf{v} \quad \text{in } L^2(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0.$$

Des Weiteren bemerken wir, dass die  $L^1$ -Norm konvex und stetig bezüglich der  $L^2$ -Norm ist, d.h.  $\| \cdot \|_{L^1(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/2} \| \cdot \|_{L^2(\Omega)}$ . Daher erhalten wir nun mit Hilfe schwacher Unterhalbstetigkeit folgendes Resultat

$$\left\| \partial_t \mathbf{m} - \mathbf{v} \right\|_{L^1(\Omega_\tau)} \leq \liminf_{(h,k) \rightarrow 0} \left\| \partial_t \mathbf{m}_{hk} - \mathbf{v}_{hk} \right\|_{L^1(\Omega_\tau)} \lesssim \liminf_{(h,k) \rightarrow 0} k \quad (3.78)$$

Schließlich beachten wir, dass der Limes  $\lim_{(h,k) \rightarrow 0} k$  existiert und daher  $\liminf_{(h,k) \rightarrow 0} k = \lim_{(h,k) \rightarrow 0} k = 0$  gilt. Damit haben wir gezeigt, dass die rechte Seite verschwindet, sofern wir die Netzweite  $h$  und die Zeitschrittweite  $k$  gegen 0 streben lassen und insbesondere  $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{m}$  verifiziert.  $\square$

**Lemma 3.3.14.** *Der Grenzwert  $\mathbf{m}$  unserer konvergenten Teilfolge von diskreten Lösungen  $\mathbf{m}_{hk}$  bzw.  $\mathbf{m}_{hk}^-$  erfüllt für fast alle  $t \in [0, t_{\text{end}}]$  die Abschätzung*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}(t, \cdot)|^2 + C_1 \int_{[0,t] \times \Omega} |\partial_t \mathbf{m}|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_0|^2 + C_2. \quad (3.79)$$

Hierbei hängen die Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  zwar vom angewandten äußeren Feld  $\mathbf{f}$ , dem Streufeldoperator  $\mathcal{P}$ , dem Gebiet  $\Omega$  und dem Dämpfungsparameter  $\alpha > 0$  ab, aber nicht von der Ortsschrittweite  $h$  und der Zeitschrittweite  $k$ .

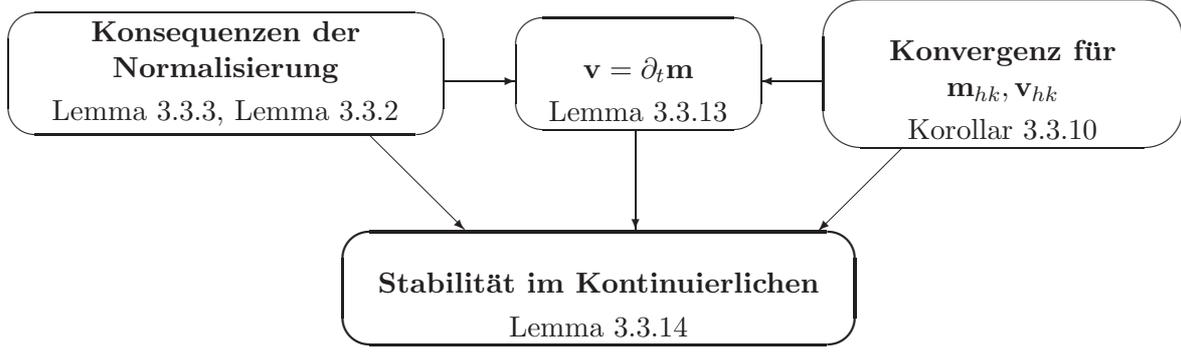


Abbildung 3.2: Zusammenhänge der einzelnen Teilresultate um eine Stabilitätsabschätzung für den Grenzwert  $\mathbf{m}$  der Approximation  $\mathbf{m}_{hk}$  der Magnetisierung einzusehen.

*Beweis.* Zunächst gehen wir von Abschätzung (3.63) aus, d.h. es gilt unter obigen Voraussetzungen

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^i|^2 + \frac{k}{C_{\text{ex}}} \left( \widehat{C} - \frac{1}{2\varepsilon_Y} \right) \sum_{j=0}^{i-1} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_h^j|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^0|^2 + C_{\text{sum}}$$

für  $i \in \{1, \dots, J\}$ . Wir definieren analog zu (3.57)

$$\mathbf{m}_{hk}^+(t, \mathbf{x}) = \mathbf{m}_h^{j+1}(\mathbf{x}) \quad \text{für } t_j \leq t < t_{j+1} \text{ und } \mathbf{x} \in \Omega$$

und bemerken, dass mit der selben Vorgehensweise wie im Beweis zu Lemma 3.3.11 folgendes Konvergenzresultat einzusehen ist

$$\mathbf{m}_{hk}^+ \rightarrow \mathbf{m} \quad \text{stark in } L^2(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0.$$

Berücksichtigen wir nun, dass  $\mathbf{v}_{hk}$  konstant auf jedem Zeitintervall  $[jk; (j+1)k)$  für  $j = 0, \dots, J-1$  ist, dann gilt für  $t \in [t_j, t_{j+1})$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{m}_{hk}^+(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{C_{\text{ex}}} \left( \widehat{C} - \frac{1}{2\varepsilon_Y} \right) \|\mathbf{v}_{hk}\|_{L^2([0,t] \times \Omega)}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{m}_h^{j+1}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{C_{\text{ex}}} \left( \widehat{C} - \frac{1}{2\varepsilon_Y} \right) \|\mathbf{v}_{hk}\|_{L^2([0,t_{j+1}] \times \Omega)}^2 \\ & = \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{m}_h^{j+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{k}{C_{\text{ex}}} \left( \widehat{C} - \frac{1}{2\varepsilon_Y} \right) \sum_{i=0}^j \|\mathbf{v}_h^i\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{m}_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{\text{sum}}. \end{aligned}$$

Integration in der Zeit führt auf

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{t_{\text{end}}} \|\nabla \mathbf{m}_{hk}^+\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{C_{\text{ex}}} \left( \widehat{C} - \frac{1}{2\varepsilon_Y} \right) \int_0^{t_{\text{end}}} \|\mathbf{v}_{hk}\|_{L^2([0,t] \times \Omega)}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^{t_{\text{end}}} \|\nabla \mathbf{m}_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^{t_{\text{end}}} C_{\text{sum}}. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass die in der Zeit interpolierte Magnetisierung  $\mathbf{m}_{hk}^+$  gleichmäßig in  $h$  und  $k$  in  $L^2(H^1)$  beschränkt ist. Daraus geht hervor, dass es eine Teilfolge von  $\mathbf{m}_{hk}^+$  gibt, die wir der Einfachheit halber gleichnamig bezeichnen, sodass

$$\mathbf{m}_{hk}^+ \rightharpoonup \tilde{\mathbf{m}} \quad \text{schwach in } L^2(H^1) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0$$

gilt. Dies impliziert

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{hk}^+ &\rightarrow \tilde{\mathbf{m}} \quad \text{stark in } L^2(\Omega_\tau) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0, \\ \nabla \mathbf{m}_{hk}^+ &\rightharpoonup \nabla \tilde{\mathbf{m}} \quad \text{schwach in } L^2(\Omega_\tau) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Da jedoch starke Konvergenz in  $L^2(\Omega_\tau)$  für  $\mathbf{m}_{hk}^+$  gegen  $\mathbf{m}$  vorliegt und der Grenzwert einer schwach konvergenten Folge eindeutig ist, deduzieren wir daraus schließlich

$$\mathbf{m}_{hk}^+ \rightharpoonup \mathbf{m} \quad \text{schwach in } L^2(H^1) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0.$$

Dies und die schwache Konvergenz von  $\mathbf{v}_{hk} \rightharpoonup \partial_t \mathbf{m}$  in  $L^2(\Omega_\tau)$  erlauben uns schwache Unterhalbstetigkeit anzuwenden, um folgendes Resultat einzusehen

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^{t_{\text{end}}} \|\nabla \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{C_{\text{ex}}} \left( \hat{C} - \frac{1}{2\varepsilon_Y} \right) \int_0^{t_{\text{end}}} \|\partial_t \mathbf{m}\|_{L^2([0,t] \times \Omega)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^{t_{\text{end}}} \|\nabla \mathbf{m}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^{t_{\text{end}}} C_{\text{sum}}. \end{aligned}$$

Da diese Ungleichung auf jeder Borelmenge auf  $[0, t_{\text{end}}]$  gültig ist, folgt aus [22, IV, Satz 4.4], dass die gewünschte Abschätzung für die Integranden fast überall auf  $[0, t_{\text{end}}]$  gilt.  $\square$

**Lemma 3.3.15.** *Sei  $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$  und gelte  $\varepsilon_Y > 1/(2\hat{C}) > 0$ . Dann gilt für die näherungsweise berechnete Zeitableitung  $\mathbf{v}_{hk}$  der Magnetisierung Beschränktheit im folgenden Sinn*

$$\begin{aligned} &\left( \theta - \frac{1}{2} \right) k \|\nabla \mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 + \frac{1}{C_{\text{ex}}} \left( \hat{C} - \frac{1}{2\varepsilon_Y} \right) \|\mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{m}_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{\text{sum}} \end{aligned} \tag{3.80}$$

mit  $C_{\text{sum}} > 0$  einer von der Ortsschrittweite  $h$  und Zeitschrittweite  $k$  unabhängigen Konstante, die lediglich durch das Gebiet  $\Omega$ , die Koeffizienten der Energiebeiträge, dem Streufeldoperator  $\mathcal{P}$ , sowie dem angelegten äußeren Feld  $\mathbf{f}$  beeinflusst wird.

Insbesondere ist  $\sqrt{k} \nabla \mathbf{v}_{hk}$  beschränkt in  $L^2(\Omega_\tau)$ .

*Beweis.* Wir schreiben Stabilitätsabschätzung (3.62) wie folgt um

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left( \int_\Omega |\nabla \mathbf{m}_h^{j+1}|^2 - \int_\Omega |\nabla \mathbf{m}_h^j|^2 \right) + \left( \theta - \frac{1}{2} \right) k^2 \int_\Omega |\nabla \mathbf{v}_h^j|^2 + \frac{k\hat{C}}{C_{\text{ex}}} \int_\Omega |\mathbf{v}_h^j|^2 \\ &\leq \frac{k}{C_{\text{ex}}} \left( \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j), \mathbf{v}_h^j \right)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.81}$$

Unter Berücksichtigung der Definition von  $\mathbf{h}_{\text{low}}$  erhalten wir für die rechte Seite unter Anwendung von Cauchy-Schwarz eine weitere Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{k}{C_{\text{ex}}} \left( \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j), \mathbf{v}_h^j \right)_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{k}{C_{\text{ex}}} \left\| \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j) \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \mathbf{v}_h^j \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{k}{C_{\text{ex}}} \left\| C_{\text{ani}} D\Phi(\mathbf{m}_h^j) + \mathcal{P}_h(\mathbf{m}_h^j) - \mathbf{f}_h^j \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \mathbf{v}_h^j \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Dies lässt sich weiter unter Beachtung der Eigenschaften der Anisotropie, des Streufeldes und des angewandten äußeren Feldes und mit Hilfe der Youngschen Ungleichung durch

$$\begin{aligned} & \frac{k}{C_{\text{ex}}} \left( \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j), \mathbf{v}_h^j \right)_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \frac{k}{C_{\text{ex}}} \left( \frac{\varepsilon_Y}{2} \left( (2C_{\text{ani}} + C_{\mathcal{P}}) \|\mathbf{m}_h^j\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{f}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 + \frac{1}{2\varepsilon_Y} \|\mathbf{v}_h^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & = \frac{\varepsilon_Y k}{2C_{\text{ex}}} \left( (2C_{\text{ani}} + C_{\mathcal{P}}) \|\mathbf{m}_h^j\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{f}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 + \frac{k}{2\varepsilon_Y C_{\text{ex}}} \|\mathbf{v}_h^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

abschätzen. Letztendlich führt die gleichmäßige Beschränktheit der Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^j$ , siehe Lemma 3.2.18, auf

$$\frac{k}{C_{\text{ex}}} \left( \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j), \mathbf{v}_h^j \right)_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon_Y k}{2C_{\text{ex}}} \left( (2C_{\text{ani}} + C_{\mathcal{P}}) |\Omega|^{1/2} + \|\mathbf{f}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 + \frac{k}{2\varepsilon_Y C_{\text{ex}}} \|\mathbf{v}_h^j\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Setzen wir diese Abschätzung nun in (3.81) ein, summieren von  $j = 0$  bis  $J - 1$  und wenden gleichzeitig die Konstanzheit von  $\mathbf{v}_h^j$  auf jedem Zeitintervall  $[jk; (j+1)k)$  für  $j = 0, \dots, J - 1$  an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^J|^2 - \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^0|^2 \right) + \left( \theta - \frac{1}{2} \right) k \int_{\Omega_{\tau}} |\nabla \mathbf{v}_{hk}|^2 + \frac{\widehat{C}}{C_{\text{ex}}} \int_{\Omega_{\tau}} |\mathbf{v}_{hk}|^2 \\ & \leq \frac{\varepsilon_Y k}{2C_{\text{ex}}} \sum_{j=0}^{J-1} \left( (2C_{\text{ani}} + C_{\mathcal{P}}) |\Omega|^{1/2} + \|\mathbf{f}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 + \frac{1}{2\varepsilon_Y C_{\text{ex}}} \|\mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_{\tau})}^2. \end{aligned}$$

Des Weiteren führen erneutes Anwenden der Youngschen Ungleichung, wobei wir diesmal die spezielle Abschätzung  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$  für  $a, b \in \mathbb{R}$  einsetzen, algebraische Umformungen und die Tatsache, dass  $kJ = t_{\text{end}}$  gilt, auf

$$\begin{aligned} & \left( \theta - \frac{1}{2} \right) k \|\nabla \mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_{\tau})}^2 + \frac{1}{C_{\text{ex}}} \left( \widehat{C} - \frac{1}{2\varepsilon_Y} \right) \|\mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_{\tau})}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{m}_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon_Y k}{C_{\text{ex}}} \sum_{j=0}^{J-1} (2C_{\text{ani}} + C_{\mathcal{P}})^2 |\Omega| + \frac{\varepsilon_Y k}{C_{\text{ex}}} \sum_{j=0}^{J-1} \|\mathbf{f}_h^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & = \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{m}_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon_Y kJ}{C_{\text{ex}}} (2C_{\text{ani}} + C_{\mathcal{P}})^2 |\Omega| + \frac{\varepsilon_Y}{C_{\text{ex}}} \|\mathbf{f}_{hk}\|_{L^2(\Omega_{\tau})}^2, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Eigenschaft (3.24) des approximierten angelegten äußeren Feldes einfließen haben lassen. Berücksichtigen wir nun auch noch Forderung (3.25), so erhalten wir die gewünschte Behauptung

$$\left( \theta - \frac{1}{2} \right) k \|\nabla \mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_{\tau})}^2 + \frac{1}{C_{\text{ex}}} \left( \widehat{C} - \frac{1}{2\varepsilon_Y} \right) \|\mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_{\tau})}^2 \leq \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{m}_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{\text{sum}}$$

mit

$$C_{\text{sum}} := \frac{\varepsilon_Y t_{\text{end}}}{C_{\text{ex}}} (2C_{\text{ani}} + C_{\mathcal{P}})^2 |\Omega| + \frac{\varepsilon_Y}{C_{\text{ex}}} \left( C_{\mathbf{f}}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega_{\tau})}^2 \right)$$

unabhängig von  $h$  und  $k$  und schließen daraus, dass  $\sqrt{k} \nabla \mathbf{v}_{hk}$  beschränkt in  $L^2(\Omega_{\tau})$  ist unter der Bedingung  $\varepsilon_Y > 1/(2\widehat{C}) > 0$ . Dies vervollständigt den Beweis.  $\square$

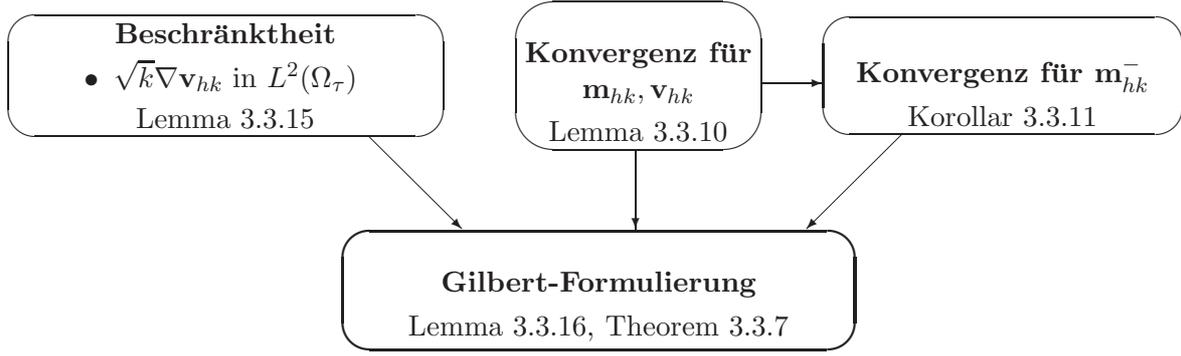


Abbildung 3.3: Zusammenhänge der einzelnen Teilresultate um einzusehen, dass der Grenzwert  $\mathbf{m}$  der Approximation  $\mathbf{m}_{hk}$  der Magnetisierung die Gilbert-Formulierung im schwachen Sinn erfüllt.

**Lemma 3.3.16.** *Die in der Zeit interpolierten Lösungen von Algorithmus 3.2.14 erfüllen folgende Relation*

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega_\tau} (\alpha \mathbf{v}_{hk} + \mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}) \cdot (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \right. \\
& \quad + \theta k C_{\text{ex}} \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{v}_{hk} \cdot \nabla (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \\
& \quad \left. + C_{\text{ex}} \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m}_{hk}^- \cdot \nabla (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) - \int_{\Omega_\tau} \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_{hk}^-, \mathbf{f}_{hk}) \cdot (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \right| = 0.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Hierbei stellt  $\Psi \in C_0^\infty(\Omega_\tau)$  eine beliebige Testfunktion dar.

*Beweis.* Wir wählen eine Testfunktion  $\Psi \in C_0^\infty(\Omega_\tau)$  und testen für alle Zeitpunkte  $t \in [jk, (j+1)k)$  die diskrete Variationsformulierung (3.44) mit  $\boldsymbol{\psi}_h = \mathcal{I}_h((\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi)(jk)) \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$ , wobei  $\mathcal{I}_h$  den nodalen Interpolanten bezeichnet. Nach Definition von  $\mathbf{m}_{hk}^-$  und Konstruktion des diskreten Raumes  $\mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  gilt  $\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$ . Einsetzen in Algorithmus 3.2.14 liefert

$$\begin{aligned}
& \alpha \left( \mathbf{v}_h^j, \mathcal{I}_h((\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi)(jk)) \right)_{h,\Omega} + \left( \mathbf{m}_h^j \times \mathbf{v}_h^j, \mathcal{I}_h((\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi)(jk)) \right)_{h,\Omega} \\
& = -C_{\text{ex}} \left( \nabla(\mathbf{m}_h^j + \theta k \mathbf{v}_h^j), \nabla \mathcal{I}_h((\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi)(jk)) \right)_{L^2(\Omega)} \\
& \quad + \left( \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_h^j, \mathbf{f}_h^j), \mathcal{I}_h((\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi)(jk)) \right)_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

In einem nächsten Schritt integrieren wir über die Zeit. Da unsere diskreten Funktionen konstant auf jedem Zeitintervall sind, gehen wir wie in vorigen Berechnungen vor und führen die Integration durch Multiplikation mit der Zeitschrittweite  $k$  und Summation über alle Indizes  $j \in \{0, \dots, J-1\}$  durch. Des Weiteren bedienen wir uns der äquivalenten Notation (3.58) und erhalten insgesamt

$$\begin{aligned}
& (\alpha \mathbf{v}_{hk} + \mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}, \mathcal{I}_h(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi))_{h,\Omega_\tau} \\
& = -C_{\text{ex}} \left( \nabla(\mathbf{m}_{hk}^- + \theta k \mathbf{v}_{hk}), \nabla \mathcal{I}_h(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \right)_{L^2(\Omega_\tau)} \\
& \quad + \left( \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_{hk}^-, \mathbf{f}_{hk}), \mathcal{I}_h(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \right)_{L^2(\Omega_\tau)}.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Berücksichtigen wir  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  und wenden wir den Approximationssatz an, so sehen wir für jede Funktion  $\phi \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \subseteq C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$  folgende Abschätzung

$$\|\phi - \mathcal{I}_h(\phi)\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|\nabla^2 \phi\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei  $C > 0$  eine Konstante notiert, die lediglich vom Durchmesser  $\text{diam}(\Omega)$  des Gebiets  $\Omega$  und der Formregularitätskonstante  $\sigma(\mathcal{T}_h)$  beeinflusst wird. Bedienen wir uns der Produktregel und beziehen wir mit ein, dass  $\mathbf{m}_{hk}^-$  bezüglich der Ortskomponente linear auf jedem Element  $T$  ist und daher insbesondere  $\nabla \mathbf{m}_{hk}^-$  konstant ist bzw.  $\nabla^2 \mathbf{m}_{hk}^-$  verschwindet, so beobachten wir als Konsequenz daraus auf jedem Element  $T \in \mathcal{T}_h$  folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{m}_{hk}^-(t, \cdot) \times \Psi(t, \cdot) - \mathcal{I}_h(\mathbf{m}_{hk}^-(t, \cdot) \times \Psi(t, \cdot))\|_{H^1(T)}^2 \\ & \leq Ch^2 \|\nabla^2(\mathbf{m}_{hk}^-(t, \cdot) \times \Psi(t, \cdot))\|_{L^2(T)}^2 \\ & \leq Ch^2 \|\mathbf{m}_{hk}^-(t, \cdot)\|_{H^1(T)}^2 \|\Psi\|_{W^{2,\infty}(T)}^2. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Da die  $L^2$ -Norm lokal ist, impliziert Summation über alle Elemente  $T \in \mathcal{T}_h$  in (3.84) und Integration in der Zeit

$$\|\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi - \mathcal{I}_h(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi)\|_{L^2(H^1)} \leq Ch \|\mathbf{m}_{hk}^-\|_{L^2(H^1)} \|\Psi\|_{W^{2,\infty}(\Omega_\tau)}. \quad (3.85)$$

Wir betrachten die Summanden aus (3.83) einzeln und binden sowohl Abschätzung (3.85) als auch die Eigenschaften der diskreten Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h, \Omega_\tau}$  mit ein.

- Zunächst weisen wir für  $h \rightarrow 0$  folgendes Resultat nach

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left| (\alpha \mathbf{v}_{hk} + \mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}, \mathcal{I}_h(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi))_{h, \Omega_\tau} \right. \\ & \quad \left. - (\alpha \mathbf{v}_{hk} + \mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}, \mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi)_{L^2(\Omega_\tau)} \right| = 0. \end{aligned} \quad (3.86)$$

In einem ersten Schritt wollen wir eine entsprechende Aussage für den jeweils ersten Summanden, der in den Integralen auftritt, nachweisen, d.h. wir zeigen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| (\mathbf{v}_{hk}, \mathcal{I}_h(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi))_{h, \Omega_\tau} - (\mathbf{v}_{hk}, \mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi)_{L^2(\Omega_\tau)} \right| = 0. \quad (3.87)$$

Beachten wir, dass  $\mathbf{v}_{hk} \in \mathcal{P}^0(\mathcal{U}_k, \mathcal{V}_h)$  in  $L^2(\Omega_\tau)$  gleichmäßig beschränkt ist,  $\mathbf{m}_{hk}^- \in \mathcal{P}^0(\mathcal{U}_k, \mathcal{V}_h)$  in  $L^2(H^1)$  gleichmäßig beschränkt ist und  $\Psi \in C_0^\infty(\Omega_\tau)$  gilt, dann ist klar, dass wir Lemma 3.2.13 anwenden können und erhalten somit direkt die Gültigkeit von (3.87).

Nun streben wir ein analoges Resultat für den jeweils zweiten Summanden an, der in den Integralen auftritt, d.h. wir weisen folgendes Resultat nach

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| (\mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}, \mathcal{I}_h(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi))_{h, \Omega_\tau} - (\mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}, \mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi)_{L^2(\Omega_\tau)} \right| = 0. \quad (3.88)$$

Dazu betrachten wir folgende Darstellung

$$\|\mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 = \int_0^{t_{\text{end}}} \|\mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

und sehen unter Berücksichtigung der Aussage von Lemma 3.2.18,  $\|\mathbf{m}_h^j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ ,

$$\|\mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 \leq \int_0^{t_{\text{end}}} \|\mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2.$$

Wir erinnern, dass die rechte Seite unabhängig von  $h$  und  $k$  beschränkt ist. Dies erlaubt uns Lemma 3.2.13 anzuwenden, wodurch wir Aussage (3.88) schließlich verifizieren.

- Wir beschäftigen uns nun mit dem Beitrag der Austauschenergie. Wir zeigen, dass eine weitere Konsequenz aus (3.85) folgende Gleichheit ist

$$\begin{aligned}
& k \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{v}_{hk} \cdot \nabla \mathcal{I}_h(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \\
&= k \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{v}_{hk} \cdot \nabla (\mathcal{I}_h - 1)(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) + k \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{v}_{hk} \cdot \nabla (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \\
&= \mathcal{O}(h) + k \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{v}_{hk} \cdot \nabla (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi),
\end{aligned} \tag{3.89}$$

die wir sogleich detaillierter betrachten. Aufgrund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Definition der  $L^2(H^1)$ -Norm gilt

$$\begin{aligned}
k \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{v}_{hk} \cdot \nabla (\mathcal{I}_h - 1)(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) &\leq \left| k \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{v}_{hk} \cdot \nabla (\mathcal{I}_h - 1)(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \right| \\
&\leq \|k \nabla \mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|\nabla (\mathcal{I}_h - 1)(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi)\|_{L^2(\Omega_\tau)} \\
&\leq \|k \nabla \mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|(\mathcal{I}_h - 1)(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi)\|_{L^2(H^1)}.
\end{aligned}$$

Erneute Anwendung von (3.85) und Berücksichtigung der Eigenschaft, dass  $\sqrt{k} \nabla \mathbf{v}_{hk}$  nach (3.80) beschränkt in  $L^2(\Omega_\tau)$  ist, impliziert

$$\begin{aligned}
k \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{v}_{hk} \cdot \nabla (\mathcal{I}_h - 1)(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) &\leq Ch \sqrt{k} \left\| \sqrt{k} \nabla \mathbf{v}_{hk} \right\|_{L^2(\Omega_\tau)} \|\mathbf{m}_{hk}^-\|_{L^2(H^1)} \|\Psi\|_{W^{2,\infty}(\Omega_\tau)} \\
&= \mathcal{O}(h)
\end{aligned}$$

und verifiziert daher (3.89).

- Mit exakt der gleichen Argumentation und unter Beachtung der Beschränktheit von  $\nabla \mathbf{m}_{hk}^-$  in  $L^2(\Omega_\tau)$ , die aus der Definition  $\mathbf{m}_{hk}^-(t, \mathbf{x}) := \mathbf{m}_h^j(\mathbf{x})$  für  $t_j \leq t < t_{j+1}$  und der Stabilitätsaussage (3.63) folgt, ist ebenfalls folgende Gleichheit einfach einzusehen

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m}_{hk}^- \cdot \nabla \mathcal{I}_h(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \\
&= \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m}_{hk}^- \cdot \nabla (\mathcal{I}_h - 1)(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) + \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m}_{hk}^- \cdot \nabla (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \\
&= \mathcal{O}(h) + \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m}_{hk}^- \cdot \nabla (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi).
\end{aligned} \tag{3.90}$$

- Im letzten Schritt des Beweises wollen wir die Konvergenzaussage

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \left| \left( \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_{hk}^-, \mathbf{f}_{hk}), \mathcal{I}_h(\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \right)_{L^2(\Omega_\tau)} \right. \\
& \quad \left. - \left( \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_{hk}^-, \mathbf{f}_{hk}), \mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi \right)_{L^2(\Omega_\tau)} \right| = 0
\end{aligned} \tag{3.91}$$

nachweisen. Dazu bemerken wir, dass jeder auftretende Summand in  $\mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_{hk}^-, \mathbf{f}_{hk})$  in  $L^2(\Omega_\tau)$  gleichmäßig beschränkt ist. Außerdem ist klar, dass  $\mathbf{m}_{hk}^- \in \mathcal{P}^0(\mathcal{U}_k, \mathcal{V}_h)$  in  $L^2(H^1)$  gleichmäßig beschränkt ist und  $\Psi \in C_0^\infty(\Omega_\tau)$  gilt. Anwenden des Approximationssatzes verifiziert die Behauptung.

Kombination all dieser Teilresultate, (3.83) und (3.86)–(3.91), führt schließlich auf

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega_\tau} (\alpha \mathbf{v}_{hk} + \mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}) \cdot (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \right. \\ \left. + \theta k C_{\text{ex}} \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{v}_{hk} \cdot \nabla (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \right. \\ \left. + C_{\text{ex}} \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m}_{hk}^- \cdot \nabla (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) - \int_{\Omega_\tau} \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_{hk}^-, \mathbf{f}_{hk}) \cdot (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \right| = 0 \end{aligned}$$

und vervollständigt damit den Beweis.  $\square$

In den folgenden Behauptungen streben wir eine zu (3.82) analoge Aussage für die Grenzfunktionen der in der Zeit interpolierten Lösungen  $\mathbf{m}_{hk}$ ,  $\mathbf{m}_{hk}^-$  und  $\mathbf{v}_{hk}$  des Time-Splitting-Verfahrens 3.2.14 an.

**Lemma 3.3.17.** *Seien  $\mathbf{m}_{hk}^-$  und  $\mathbf{v}_{hk}$  die in der Zeit interpolierten Lösungen von Algorithmus 3.2.14. Dann gilt für den Grenzübergang  $(h, k) \rightarrow 0$*

$$\int_{\Omega_\tau} (\alpha \mathbf{v}_{hk} + \mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}) \cdot (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \rightarrow \int_{\Omega_\tau} (\alpha \partial_t \mathbf{m} + \mathbf{m} \times \partial_t \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{m} \times \Psi), \quad (3.92)$$

wobei  $\Psi \in C_0^\infty(\Omega_\tau)$ .

*Beweis.* Aus den Konvergenzaussagen (3.72) und (3.73), siehe Korollar 3.3.10 bzw. Lemma 3.3.11, wissen wir

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{hk}^- &\rightarrow \mathbf{m} \quad \text{stark in } L^2(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0, \\ \mathbf{v}_{hk} &\rightharpoonup \mathbf{v} \quad \text{schwach in } L^2(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Da das Produkt einer stark konvergenten und einer schwach konvergenten Folge in Konvergenz der dualen Paarung resultiert und wir dies für jede Komponente  $i = 1, \dots, 3$ ,  $j = 1, \dots, 3$  von  $\mathbf{m}_{hk,i}^- \mathbf{v}_{hk,j}$  anwenden können, erhalten wir

$$\mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk} \rightharpoonup \mathbf{m} \times \mathbf{v} \quad \text{schwach in } L^1(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0.$$

Des Weiteren bemerken wir, dass uniforme Beschränktheit vorliegt

$$\|\mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 \leq \int_0^{t_{\text{end}}} \|\mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \|\mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 \leq C.$$

Dies führt uns insgesamt auf die Existenz einer Teilfolge von  $\mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}$ , sodass

$$\mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk} \rightharpoonup \mathbf{g} \quad \text{schwach in } L^2(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0$$

gilt. Wir wollen nun einsehen, dass dieser Grenzwert  $\mathbf{g} = \mathbf{m} \times \mathbf{v}$  fast überall in  $\Omega_\tau$  erfüllt. Dazu bemerken wir, dass nach obigen Konvergenzaussagen

$$\begin{aligned} (\mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}, \Phi) &\rightarrow (\mathbf{m} \times \mathbf{v}, \Phi) \quad \text{für alle } \Phi \in C_0^\infty(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3) \subset L^\infty(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3), \\ (\mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}, \Psi) &\rightarrow (\mathbf{g}, \Psi) \quad \text{für alle } \Psi \in C_0^\infty(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3) \subseteq L^2(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

gilt und daher insgesamt

$$(\mathbf{m} \times \mathbf{v} - \mathbf{g}, \zeta) = 0 \quad \text{für alle } \zeta \in C_0^\infty(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3).$$

Da  $C_0^\infty(\Omega_\tau)$  dicht in  $L^2(\Omega_\tau)$  ist, erhalten wir die gewünschte Gleichheit  $\mathbf{m} \times \mathbf{v} = \mathbf{g}$  fast überall in  $\Omega_\tau$  und damit die Konvergenzaussage für eine Teilfolge, die wir der Einfachheit halber gleichnamig bezeichnen,

$$\mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk} \rightharpoonup \mathbf{m} \times \mathbf{v} \quad \text{schwach in } L^2(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0.$$

Des Weiteren folgt aufgrund von  $\Psi \in C_0^\infty(\Omega_\tau)$  und als Konsequenz der starken Konvergenz von  $\mathbf{m}_{hk}^-$  gegen  $\mathbf{m}$  in  $L^2(\Omega_\tau)$

$$\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi \rightarrow \mathbf{m} \times \Psi \quad \text{stark in } L^2(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0.$$

Dies impliziert unter Berücksichtigung von (3.78), die Gültigkeit von  $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{m}$ , das folgende Konvergenzresultat

$$\int_{\Omega_\tau} (\alpha \mathbf{v}_{hk} + \mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}) \cdot (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \rightarrow \int_{\Omega_\tau} (\alpha \partial_t \mathbf{m} + \mathbf{m} \times \partial_t \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{m} \times \Psi)$$

für  $(h, k) \rightarrow 0$  und beschließt damit den Beweis.  $\square$

**Lemma 3.3.18.** *Für die in der Zeit interpolierten Lösungen  $\mathbf{m}_{hk}^-$  und  $\mathbf{v}_{hk}$  von Algorithmus 3.2.14 gilt folgendes Konvergenzresultat*

$$\left| k \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{v}_{hk} \cdot \nabla (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \right| \rightarrow 0 \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0 \quad (3.93)$$

mit  $\Psi \in C_0^\infty(\Omega_\tau)$ .

*Beweis.* Aus Lemma 3.3.15 erhalten wir, dass  $\sqrt{k} \nabla \mathbf{v}_{hk}$  beschränkt in  $L^2(\Omega_\tau)$  ist unter der Bedingung  $\varepsilon_Y > 1/(2\hat{C}) > 0$ . Zusammen mit der Anwendung der Produktregel erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} & \left| k \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{v}_{hk} \cdot \nabla (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \right| \\ & \leq \sqrt{k} \left\| \sqrt{k} \nabla \mathbf{v}_{hk} \right\|_{L^2(\Omega_\tau)} \left\| \mathbf{m}_{hk}^- \right\|_{L^2(H^1)} \left\| \Psi \right\|_{W^{1,\infty}(\Omega_\tau)}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Dies impliziert Konvergenz gegen 0 sofern die Zeitschrittweite  $k$  gegen 0 konvergiert.  $\square$

**Lemma 3.3.19.** *Für die in der Zeit interpolierten Lösung  $\mathbf{m}_{hk}^-$  von Algorithmus 3.2.14 gilt folgendes Konvergenzresultat*

$$\int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m}_{hk}^- \cdot \nabla (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \rightarrow \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m} \cdot (\mathbf{m} \times \nabla \Psi) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0$$

mit  $\Psi \in C_0^\infty(\Omega_\tau)$ .

*Beweis.* Zunächst halten wir eine Gleichheit fest, die aus mühsamer, jedoch einfacher Rechnung resultiert, siehe Lemma 2.0.10,

$$\int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m}_{hk}^- \cdot \nabla (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) = \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m}_{hk}^- \cdot (\mathbf{m}_{hk}^- \times \nabla \Psi). \quad (3.95)$$

Es sei erinnert, dass die in der Zeit interpolierte Magnetisierung  $\mathbf{m}_{hk}^-$  gleichmäßig in  $h$  und  $k$  in  $L^2(H^1)$  beschränkt ist. Daraus schließen wir, dass es eine Teilfolge von  $\mathbf{m}_{hk}^-$  gibt, die wir der Einfachheit halber gleichnamig bezeichnen, sodass

$$\mathbf{m}_{hk}^- \rightharpoonup \tilde{\mathbf{m}} \quad \text{schwach in } L^2(H^1) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0$$

gilt. Dies impliziert die Konvergenzaussagen

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{hk}^- &\rightharpoonup \tilde{\mathbf{m}} \quad \text{schwach in } L^2(\Omega_\tau) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0, \\ \nabla \mathbf{m}_{hk}^- &\rightharpoonup \nabla \tilde{\mathbf{m}} \quad \text{schwach in } L^2(\Omega_\tau) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Da jedoch starke Konvergenz in  $L^2(\Omega_\tau)$  für  $\mathbf{m}_{hk}^-$  gegen  $\mathbf{m}$  vorliegt und der Grenzwert einer schwach konvergenten Folge eindeutig ist, erhalten wir schließlich

$$\mathbf{m}_{hk}^- \rightharpoonup \mathbf{m} \quad \text{schwach in } L^2(H^1) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0.$$

Des Weiteren führt erneute Anwendung der starken Konvergenz  $\mathbf{m}_{hk}^- \rightarrow \mathbf{m}$  in  $L^2(\Omega_\tau)$  für  $(h, k) \rightarrow 0$  auf

$$\mathbf{m}_{hk}^- \times \nabla \Psi \rightarrow \mathbf{m} \times \nabla \Psi \quad \text{stark in } L^2(\Omega_\tau) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0$$

für  $\Psi \in C_0^\infty(\Omega_\tau)$ . Schließlich resultiert daraus

$$\int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m}_{hk}^- \cdot (\mathbf{m}_{hk}^- \times \nabla \Psi) \rightarrow \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m} \cdot (\mathbf{m} \times \nabla \Psi) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0.$$

Dies impliziert zusammen mit der Identität (3.95) das folgende Konvergenzresultat

$$\int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m}_{hk}^- \cdot \nabla (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \rightarrow \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m} \cdot (\mathbf{m} \times \nabla \Psi) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0$$

und beschließt damit den Beweis.  $\square$

Im Hinblick auf jene Terme, die der Anisotropieenergie, der Streufeldenergie und der Zeeman-Energie entspringen, stellen wir in folgendem Lemma eine analoge Konvergenzaussage zu jener aus Lemma 3.3.17 fest.

**Lemma 3.3.20.** *Es gelten für die in der Zeit interpolierte diskrete Magnetisierung  $\mathbf{m}_{hk}^-$  und deren Grenzwert  $\mathbf{m}$  folgende Konvergenzaussagen*

$$\int_{\Omega_\tau} D\Phi(\mathbf{m}_{hk}^-) \cdot (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \rightarrow \int_{\Omega_\tau} D\Phi(\mathbf{m}) \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0, \quad (3.96)$$

$$\int_{\Omega_\tau} \mathcal{P}_h(\mathbf{m}_{hk}^-) \cdot (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \rightarrow \int_{\Omega_\tau} \mathcal{P}(\mathbf{m}) \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0, \quad (3.97)$$

$$\int_{\Omega_\tau} \mathbf{f}_{hk} \cdot (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \rightarrow \int_{\Omega_\tau} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0. \quad (3.98)$$

Hierbei stellt  $\Psi \in C_0^\infty(\Omega_\tau)$  eine beliebige Testfunktion dar.

*Beweis.* Wir behalten eine analoge Argumentation zu jener bei, wie wir sie für den Beitrag, der von der Austauschenergie induziert wird, durchgeführt haben, siehe Lemma 3.3.19. Dabei betonen wir nochmals die Linearität und Stetigkeit der Operatoren  $\mathcal{P}_h(\cdot)$  und  $D\Phi(\cdot)$ . Entsprechend der starken Konvergenz  $\mathbf{m}_{hk}^- \rightarrow \mathbf{m}$  in  $L^2(\Omega_\tau)$  schließen wir

$$D\Phi(\mathbf{m}_{hk}^-) \rightarrow D\Phi(\mathbf{m}) \quad \text{stark in } L^2(\Omega_\tau) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0$$

und erhalten zusammen mit der starken Konvergenz  $\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi \rightarrow \mathbf{m} \times \Psi$  in  $L^2(\Omega_\tau)$  für jenen Term, der von der Anisotropieenergie stammt, folgendes Konvergenzresultat

$$\int_{\Omega_\tau} D\Phi(\mathbf{m}_{hk}^-) \cdot (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \rightarrow \int_{\Omega_\tau} D\Phi(\mathbf{m}) \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0.$$

Bezüglich des Streufeldes erinnern wir an die Bedingung  $\mathcal{P}_h(\mathbf{n}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{n})$  in  $L^2(\Omega)$  für  $h \rightarrow 0$  und beliebiges  $\mathbf{n} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Um daraus  $\mathcal{P}_h(\mathbf{m}_{hk}^-) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{m})$  in  $L^2(\Omega_\tau)$  für  $(h, k) \rightarrow 0$  abzuleiten, bedienen wir uns der Dreiecksungleichung

$$\|\mathcal{P}_h(\mathbf{m}_{hk}^-) - \mathcal{P}(\mathbf{m})\|_{L^2(\Omega_\tau)} \leq \|\mathcal{P}_h(\mathbf{m}_{hk}^-) - \mathcal{P}_h(\mathbf{m})\|_{L^2(\Omega_\tau)} + \|\mathcal{P}_h(\mathbf{m}) - \mathcal{P}(\mathbf{m})\|_{L^2(\Omega_\tau)}.$$

Da  $\mathbf{m}_{hk}^-$  gegen  $\mathbf{m}$  in  $L^2(\Omega_\tau)$  konvergiert und  $\mathcal{P}_h$  einen stetigen Operator definiert, ist klar, dass der erste Summand der rechten Seite gegen 0 konvergiert, sofern die Ortsschrittweite  $h$  und die Zeitschrittweite  $k$  gegen 0 streben. Des Weiteren gilt nach Bemerkung 3.2.1

$$\|\mathcal{P}(\mathbf{m}) - \mathcal{P}_h(\mathbf{m})\|_{L^2(\Omega_\tau)} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Insgesamt haben wir damit

$$\|\mathcal{P}_h(\mathbf{m}_{hk}^-) - \mathcal{P}(\mathbf{m})\|_{L^2(\Omega_\tau)} \rightarrow 0 \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0$$

gezeigt. Insbesondere liefert dies

$$\int_{\Omega_\tau} \mathcal{P}_h(\mathbf{m}_{hk}^-) \cdot (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \rightarrow \int_{\Omega_\tau} \mathcal{P}(\mathbf{m}) \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0.$$

Im Hinblick auf das äußere angelegte Feld sehen wir mit  $\mathbf{f}_{hk} \rightarrow \mathbf{f}$  in  $L^2(\Omega_\tau)$  für  $(h, k) \rightarrow 0$  nach Bedingung (3.25) die Konvergenz

$$\int_{\Omega_\tau} \mathbf{f}_{hk} \cdot (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \rightarrow \int_{\Omega_\tau} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0.$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

*Beweis zu Theorem 3.3.7.* Um eine bessere Übersicht und ein einfacheres Verständnis der Argumentation zu gewähren, geben wir zuerst einen Überblick über die essentiellen Ideen, die in den Beweis eingehen und gliedern diesen im Wesentlichen in drei Abschnitte. Zuerst wollen wir einsehen, dass die Folge von Funktionen, die aus Algorithmus 3.2.14 resultiert, konvergiert und insbesondere der Grenzwert die Normierungseigenschaft  $|\mathbf{m}| = 1$  erhält und Eigenschaft (i) aus Definition 3.3.1 erfüllt. Außerdem weisen wir nach, dass der Grenzwert von  $\mathbf{v}_h^j$  bzw. jener der in der Zeit interpolierten Funktion  $\mathbf{v}_{hk}$  tatsächlich der Zeitableitung der Magnetisierung entspricht, d.h. es gilt  $\mathbf{v} = \mathbf{m}_t$ . In einem weiteren Abschnitt legen wir den Fokus auf den Nachweis der Stabilitätsabschätzung, siehe Definition 3.3.1 (iii),

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}(t', \cdot)|^2 d\mathbf{x} + C_1 \int_{[0, t'] \times \Omega} |\mathbf{m}_t|^2 d\mathbf{x} dt \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_0|^2 d\mathbf{x} + C_2$$

mit Konstanten  $C_1, C_2 > 0$ , die lediglich vom Gebiet  $\Omega$ , dem angelegten äußeren Feld  $\mathbf{f}$ , dem Streufeldoperator  $\mathcal{P}$ , den Koeffizienten der einzelnen Energiebeiträge und dem Dämpfungsparameter  $\alpha$  abhängen. Schließlich bleibt noch zu zeigen, dass der Grenzwert unserer Teilfolgen

eine Funktion darstellt, die gleichzeitig die schwache Form der Gilbert-Formulierung der LLG-Gleichung erfüllt, d.h. es gilt für alle Testfunktionen  $\phi \in C_0^\infty(\Omega_\tau; \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\tau} \mathbf{m}_t \cdot \phi \, d\mathbf{x} \, dt - \alpha \int_{\Omega_\tau} (\mathbf{m} \times \mathbf{m}_t) \cdot \phi \, d\mathbf{x} \, dt \\ = C_{\text{ex}} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_\tau} (\mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i}) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} \, dt - \int_{\Omega_\tau} (\mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \times \mathbf{m}) \cdot \phi \, d\mathbf{x} \, dt. \end{aligned}$$

Im Folgenden arbeiten wir diese Schritte detailliert aus.

- **Schritt 1:** Unser erstes Ziel ist es Konvergenzeigenschaften der Folge von Lösungen unseres Time-Splitting-Verfahrens, siehe Algorithmus 3.2.14, einzusehen und für den Grenzwert  $\mathbf{m}$  die nicht-konvexe Bedingung  $|\mathbf{m}| = 1$  nachzuweisen. Des Weiteren zeigen wir die Gültigkeit von Eigenschaft (i) aus Definition 3.3.1. Außerdem wollen wir die Gleichheit  $\mathbf{v} = \mathbf{m}_t$  verifizieren.

Korollar 3.3.10 bzw. Lemma 3.3.11 halten die Konvergenzeigenschaften der in der Zeit interpolierten Lösungen  $\mathbf{m}_{hk}$ ,  $\mathbf{m}_{hk}^-$  und  $\mathbf{v}_{hk}$  fest, die im Wesentlichen aus den in Lemma 3.3.9 nachgewiesenen Beschränktheitseigenschaften folgen. Wir wiederholen diese Resultate der Vollständigkeit halber

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{hk} &\rightharpoonup \mathbf{m} \quad \text{schwach in } H^1(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0, \\ \mathbf{m}_{hk} &\rightarrow \mathbf{m} \quad \text{stark in } L^2(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0, \\ \mathbf{v}_{hk} &\rightharpoonup \mathbf{v} \quad \text{schwach in } L^2(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0, \\ \mathbf{m}_{hk}^- &\rightarrow \mathbf{m} \quad \text{stark in } L^2(\Omega_\tau) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Des Weiteren besagt Lemma 3.3.12, dass der Grenzwert der konvergenten Teilfolge der von Algorithmus 3.2.14 erzeugten Folge von Lösungen die nicht-konvexe Nebenbedingung  $|\mathbf{m}(t, \mathbf{x})| = 1$  fast überall in  $\Omega_\tau$  erfüllt.

Um  $\mathbf{m}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{m}_0(\mathbf{x})$  im Spursinn einzusehen, also Eigenschaft 3.3.1 (i), bemerken wir, dass  $\mathbf{m}_{hk} \in H^1(\Omega_\tau)$  stetig in der Zeit ist und daher  $\mathbf{m}_{hk}(0) = \mathbf{m}_h^0$  wohldefiniert ist. Insbesondere gilt aufgrund von  $\mathbf{m} \in H^1(\Omega_\tau)$ , dass  $\mathbf{m}(0)$  wohldefiniert ist. Wir halten fest, dass der Spuroperator  $\gamma$  stetig und linear von  $H^1([0, t_{\text{end}}])$  nach  $H^{1/2}(\partial[0, t_{\text{end}}])$  abbildet. Um nun einzusehen, dass der Grenzwert  $\mathbf{m}$  von  $\mathbf{m}_{hk}$  ausgewertet zum Zeitpunkt 0 tatsächlich der initialen Magnetisierung  $\mathbf{m}_0$  entspricht, wenden wir den Spuroperator an und bemerken, dass aufgrund der Stetigkeit von  $\gamma$  schwache Konvergenz erhalten bleibt

$$\gamma(\mathbf{m}_{hk}) \rightharpoonup \gamma(\mathbf{m}) \quad \text{schwach in } H^{1/2}(\partial[0, t_{\text{end}}]; H^1(\Omega)) \text{ für } (h, k) \rightarrow 0.$$

Da  $\gamma$  in diesem Fall genau die Punktauswertung darstellt, folgt aus der Voraussetzung  $\mathbf{m}_{hk}(0) = \mathbf{m}_h^0 \rightarrow \mathbf{m}_0$  in  $H^1(\Omega)$  und der Eindeutigkeit der Grenzwerte die gewünschte Aussage.

Der Zusammenhang  $\mathbf{v} = \mathbf{m}_t$  zwischen dem Grenzwert von  $\mathbf{v}_{hk}$  und dem in der Zeit abgeleiteten Limes der in der Zeit interpolierten approximativ berechneten Magnetisierung  $\mathbf{m}_{hk}$  geht direkt aus Lemma (3.3.13) hervor. Dies schließt den ersten Beweisschritt ab.

- **Schritt 2:** Unser nächstes Ziel ist es, die Gültigkeit der Stabilitätsabschätzung (3.48) einzusehen. Wir bemerken, dass diese aus Abschätzung (3.79) aus Lemma 3.3.14 folgt und verweisen daher auf den zugehörigen Beweis.
- **Schritt 3:** Um letztendlich zu zeigen, dass  $\mathbf{m}$  tatsächlich eine schwache Lösung der LLG-Gleichung ist, ist noch die Erfüllung der schwachen Formulierung der Gilbert-Form, siehe Gleichung (3.47), nachzuprüfen.

Zunächst betrachten wir die Aussage von Lemma 3.3.16 und wiederholen diese

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega_\tau} (\alpha \mathbf{v}_{hk} + \mathbf{m}_{hk}^- \times \mathbf{v}_{hk}) \cdot (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) + \theta k C_{\text{ex}} \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{v}_{hk} \cdot \nabla (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \right. \\ \left. + C_{\text{ex}} \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m}_{hk}^- \cdot \nabla (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) - \int_{\Omega_\tau} \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}_{hk}^-, \mathbf{f}_{hk}) \cdot (\mathbf{m}_{hk}^- \times \Psi) \right| = 0. \end{aligned}$$

Wir wollen daraus ein analoges Resultat für die Grenzfunktionen herleiten. Dazu betrachten wir die involvierten Terme einzeln und fügen die in Lemma 3.3.17–3.3.20 gewonnenen Konvergenzresultate ein. Daher gilt

$$\begin{aligned} 0 = \alpha \int_{\Omega_\tau} \mathbf{m}_t \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) + \int_{\Omega_\tau} (\mathbf{m} \times \mathbf{m}_t) \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) \\ + C_{\text{ex}} \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m} \cdot (\mathbf{m} \times \nabla \Psi) + \int_{\Omega_\tau} (C_{\text{ani}} D\Phi(\mathbf{m}) + \mathcal{P}(\mathbf{m}) - \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{m} \times \Psi). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Da nach Lemma 2.0.10  $\int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m} \cdot (\mathbf{m} \times \nabla \Psi) = \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m} \cdot \nabla (\mathbf{m} \times \Psi)$  gilt, ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega_\tau} \mathbf{m}_t \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) + \int_{\Omega_\tau} (\mathbf{m} \times \mathbf{m}_t) \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) \\ = -C_{\text{ex}} \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m} \cdot \nabla (\mathbf{m} \times \Psi) - \int_{\Omega_\tau} (C_{\text{ani}} D\Phi(\mathbf{m}) + \mathcal{P}(\mathbf{m}) - \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) \quad (3.100) \\ = -C_{\text{ex}} \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m} \cdot \nabla (\mathbf{m} \times \Psi) + \int_{\Omega_\tau} \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{m} \times \Psi). \end{aligned}$$

Behält man im Kopf, dass  $\mathbf{m} \times \Psi$  im Tangentialraum von  $\mathbf{m}$  liegt, so lässt sich (3.100) auch darstellen als

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Omega_\tau} \mathbf{m}_t \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) + \int_{\Omega_\tau} (\mathbf{m} \times \mathbf{m}_t) \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) \\ = -C_{\text{ex}} \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m} \cdot \nabla (\mathbf{m} \times \Psi) + \int_{\Omega_\tau} \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) \\ + \int_{\Omega_\tau} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{\text{eff}}(\mathbf{m}, \mathbf{f})) \mathbf{m} \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) \end{aligned}$$

und stellt daher die schwache Form der alternativen Formulierung der LLG-Gleichung dar, siehe Gleichung (1.22).

Um die schwache Form der Gilbert-Formulierung, siehe Gleichung (1.23), für alle Testfunktionen  $\Psi \in C_0^\infty(\Omega_\tau)$  einzusehen, führen wir der Übersichtlichkeit halber zwei essentielle Beobachtungen an:

- Da  $|\mathbf{m}| = 1$  und die Orthogonalität  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_t = 0$  gilt, leiten wir für alle  $\mathbf{m} \in H^1(\Omega_\tau; \mathbb{S}^2)$  und  $\mathbf{m}_t, \Psi \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}}$  aus Lemma 3.1.3 die Identität

$$(\mathbf{m} \times \mathbf{m}_t) \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) = \mathbf{m}_t \cdot \Psi \quad (3.101)$$

ab.

- Die folgende Identität gilt aufgrund einfacher Rechenregeln für das Vektorkreuzprodukt, nämlich  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$  für alle  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbf{m}_t \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) = -(\mathbf{m} \times \mathbf{m}_t) \cdot \Psi. \quad (3.102)$$

Unter Zuhilfenahme dieser Resultate können wir Gleichung (3.99) wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned} & -\alpha \int_{\Omega_\tau} (\mathbf{m} \times \mathbf{m}_t) \cdot \Psi + \int_{\Omega_\tau} \mathbf{m}_t \cdot \Psi \\ & = -C_{\text{ex}} \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m} \cdot (\mathbf{m} \times \nabla \Psi) + \int_{\Omega_\tau} \mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) \end{aligned}$$

was unter Anwendung von  $\mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{m} \times \Psi) = (\mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \times \mathbf{m}) \cdot \Psi$  äquivalent zu folgender Gleichung ist

$$\begin{aligned} & -\alpha \int_{\Omega_\tau} (\mathbf{m} \times \mathbf{m}_t) \cdot \Psi + \int_{\Omega_\tau} \mathbf{m}_t \cdot \Psi \\ & = -C_{\text{ex}} \int_{\Omega_\tau} \nabla \mathbf{m} \cdot (\mathbf{m} \times \nabla \Psi) + \int_{\Omega_\tau} (\mathbf{h}_{\text{low}}(\mathbf{m}, \mathbf{f}) \times \mathbf{m}) \cdot \Psi. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Aufgrund der Tatsache, dass Gleichung (3.103) für alle Testfunktionen  $\Psi \in C_0^\infty(\Omega_\tau)$  gilt und identisch zur schwachen Form der Gilbert-Formulierung der LLG-Gleichung ist, siehe Gleichung (1.23), haben wir nun insgesamt gezeigt, dass die Grenzfunktion  $\mathbf{m}$  eine schwache Lösung der LLG-Gleichung im Sinn von Definition 3.3.1 ist. Damit ist der Beweis vollständig. □

**Bemerkung 3.3.21.** *Aus Theorem 3.3.7 geht hervor, dass es eine konvergente Teilfolge der aus Algorithmus 3.2.14 gewonnenen und in der Zeit interpolierten Lösungen gibt. Der Grenzwert erfüllt gleichzeitig auch alle Bedingungen von Definition 3.3.1 und stellt daher eine schwache Lösung der LLG-Gleichung dar. Es sei hervorgehoben, dass damit insbesondere die Existenz einer schwachen Lösung der LLG-Gleichung bewiesen ist. Alternativ dazu kann man der Idee von ALOUGES/SOYEUR in [8] folgen, das darin präsentierte Konzept auf ein vollständiges Energiemodell erweitern und Existenz entsprechender globaler schwacher Lösungen nachweisen.*

**Bemerkung 3.3.22.** *Sowohl die Erfüllung von (3.54) als auch die Beschränktheit der Formregularitätskonstante  $\sigma(\mathcal{T}_h)$  werden beispielsweise durch die Verfeinerungsstrategie, die in [47, Abschnitt 4.1] vorgeschlagen wird, sichergestellt.*

**Bemerkung 3.3.23.** *Es gilt zu beachten, dass mit denselben bzw. leicht modifizierten Techniken, wie sie im Beweis zu Theorem 3.3.7 zum Einsatz kamen, auch verwandte Probleme, wie beispielsweise der Wärmefluss für harmonische Abbildungen in die Sphäre, behandelt werden können, siehe [3].*

Wir wollen nun eine Wahl des Parameters  $\theta$  mit  $\theta \leq 1/2$  zulassen und ein entsprechendes Konvergenzresultat herleiten. Hierfür ist es nötig lediglich jene Argumente des Beweises von Theorem 3.3.7, in denen die Wahl des Parameters  $\theta$  eingeht, in alternativer Form zu erhalten. Wir unterscheiden im Folgenden zwei Fälle:

- Im Fall  $\theta \in [0; 1/2)$  benötigt der Term  $\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_h^j|^2$  in (3.66) eine spezielle Behandlung. Da für eine reguläre Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  eine Konstante  $C > 0$  existiert, sodass die inverse Abschätzung

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi_h|^2 \leq \frac{C}{h^2} \int_{\Omega} |\phi_h|^2 \quad \text{für alle } \phi_h \in \mathcal{V}_h \quad (3.104)$$

gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{k\widehat{C}}{C_{\text{ex}}} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_h^j|^2 + \left(\theta - \frac{1}{2}\right) k^2 \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_h^j|^2 \\ & \geq k \left( \frac{\widehat{C}}{C_{\text{ex}}} + \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \frac{Ck}{h^2} \right) \int_{\Omega} |\mathbf{v}_h^j|^2. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Unter der Voraussetzung, dass  $k/h^2$  gegen 0 konvergiert sofern die Ortsschrittweite  $h$  und die Zeitschrittweite  $k$  gegen 0 gehen, leiten wir daraus nun ein entsprechendes Konvergenzresultat ab, welches analog zu jener in Theorem 3.3.7 präsentierten Aussage ist.

**Theorem 3.3.24.** *Sei  $\theta \in [0; 1/2)$  fest gewählt und sei  $\mathcal{T}_h$  eine Familie von formregulären Triangulierungen mit Netzweite  $h \rightarrow 0$ , die folgende Bedingung erfüllt*

$$\int_{\Omega} \nabla \beta_i \cdot \nabla \beta_{i'} \, d\mathbf{x} \leq 0 \quad \text{für alle } i \neq i'. \quad (3.106)$$

Des Weiteren sei  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  eine diskrete Bilinearform, die den Anforderungn (3.32)–(3.36) genügt. Gilt für die initiale Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^0 \rightarrow \mathbf{m}_0$  in  $H^1(\Omega)$  für  $h \rightarrow 0$ , erfüllt der approximierende Streufeldoperator  $\mathcal{P}_h$

$$\|\mathcal{P}_h \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\mathcal{P}} \|\mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{als auch} \quad \|\mathcal{P} \mathbf{n} - \mathcal{P}_h \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0 \quad (3.107)$$

für alle  $\mathbf{n} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  mit einer Konstante  $C_{\mathcal{P}} > 0$  und gilt für das näherungsweise berechnete angelegte äußere Feld

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \rightarrow 0 \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0, \quad (3.108)$$

dann konvergiert eine Teilfolge der interpolierten diskreten Magnetisierung  $\mathbf{m}_{hk}$  aus (3.56) schwach in  $H^1(\Omega_\tau)$  gegen eine schwache Lösung  $\mathbf{m}$  der LLG-Gleichung für  $(h, k) \rightarrow 0$ , falls das Verhältnis von Orts- und Zeitschrittweite  $k/h^2$  ebenfalls verschwindet.

- Für den Fall  $\theta = 1/2$  stellt Algorithmus 3.2.14 bezüglich des Austauschbeitrags eine Variante eines Crank-Nicolson-Schemas dar. Um eine analoge Aussage zu jener aus Theorem 3.3.7 zu erhalten, müssen wir die Argumentation von (3.94) modifizieren. Es ist klar, dass diese mit der Parameterwahl  $\theta = 1/2$  nicht mehr gilt, da die Beschränktheit von  $\sqrt{k} \nabla \mathbf{v}_{hk}$  in  $L^2(\Omega_\tau)$  verloren geht. Verwenden wir jedoch die Abschätzung  $\|k \nabla \mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \leq \sqrt{C} (k/h) \|\mathbf{v}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)}$ , die sich aus (3.104) durch Multiplikation mit  $k^2$  und Integration in der Zeit ergibt, so erhalten wir das gewünschte entsprechende Konvergenzresultat unter Forderung der zusätzlichen Eigenschaft, dass  $k/h \rightarrow 0$  gilt für  $(h, k) \rightarrow 0$ .

**Theorem 3.3.25.** *Sei  $\theta = 1/2$  fest gewählt und sei  $\mathcal{T}_h$  eine Familie von formregulären Triangulierungen mit Netzweite  $h \rightarrow 0$ , die folgende Bedingung erfüllt*

$$\int_{\Omega} \nabla \beta_i \cdot \nabla \beta_{i'} \, d\mathbf{x} \leq 0 \quad \text{für alle } i \neq i'. \quad (3.109)$$

Des Weiteren sei  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  eine diskrete Bilinearform, die den Anforderungen (3.32)–(3.36) genügt. Gilt für die initiale Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^0 \rightarrow \mathbf{m}_0$  in  $H^1(\Omega)$  für  $h \rightarrow 0$ , erfüllt das approximierten Streufeld  $\mathcal{P}_h$

$$\|\mathcal{P}_h \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\mathcal{P}} \|\mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{als auch} \quad \|\mathcal{P} \mathbf{n} - \mathcal{P}_h \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0 \quad (3.110)$$

für alle  $\mathbf{n} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  mit einer Konstante  $C_{\mathcal{P}} > 0$  und gilt für das näherungsweise berechnete angelegte äußere Feld

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_{hk}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \rightarrow 0 \quad \text{für } (h, k) \rightarrow 0, \quad (3.111)$$

dann konvergiert eine Teilfolge der interpolierten diskreten Magnetisierung  $\mathbf{m}_{hk}$  aus (3.56) schwach in  $H^1(\Omega_\tau)$  gegen eine schwache Lösung  $\mathbf{m}$  der LLG-Gleichung für  $(h, k) \rightarrow 0$ , falls das Verhältnis von Orts- und Zeitschrittweite  $k/h$  ebenfalls verschwindet.

Neben einer vollständigen Konvergenzanalyse für unser Time-Splitting-Verfahren geht aus dem Beweis zu Theorem 3.3.7 weiters hervor, dass sich Terme niedrigerer Ordnung, die analoge Anforderungen zu jenen, die an den approximativ berechneten Streufeldoperator  $\mathcal{P}_h$  bzw. das näherungsweise berechnete angelegte Feld  $\mathbf{f}_{hk}$  gestellt werden, erfüllen in die totale Energie eingliedern lassen, ohne die Aussage des Theorems bzw. dessen Beweis wesentlich zu beeinflussen.

**Bemerkung 3.3.26.** Es gilt zu bemerken, dass die diskrete Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_{h,\Omega}$  auch zur approximativen Berechnung jener Anteile des effektiven magnetischen Feldes  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$ , die der Anisotropie und dem angelegten äußeren Feld entspringen, herangezogen werden kann ohne Einfluß auf die Korrektheit obiger Konvergenzaussagen zu nehmen.

### 3.4 Approximation des angelegten äußeren Feldes

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Varianten zur näherungsweisen Berechnung des angelegten äußeren Feldes  $\mathbf{f}$  beschäftigen. Dabei verwenden wir die Notation  $\mathbf{f}_h^j \approx \mathbf{f}(t_j, \cdot)$ . Klar ist, dass diese Möglichkeiten stets von den analytischen Eigenschaften von  $\mathbf{f}$  abhängen. Daher seien hier exemplarisch Vorschläge festgehalten:

- Für  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega_\tau)$  sind folgende Definitionen denkbar
  - für eine Approximation in der Zeit

$$\mathbf{f}_h^j := \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathbf{f} \, dt; \quad (3.112)$$

- für eine Approximation in Ort und Zeit

$$\mathbf{f}_h^j|_T := \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{1}{|T|} \int_T \mathbf{f} \, d\mathbf{x} \, dt. \quad (3.113)$$

- Für  $\mathbf{f} \in C([0, t_{\text{end}}]; L^2(\Omega))$  sind folgende Definitionen denkbar
  - für eine Approximation in der Zeit

$$\mathbf{f}_h^j := \mathbf{f}(t_j, \cdot); \quad (3.114)$$

– für eine Approximation in Ort und Zeit

$$\mathbf{f}_h^j|_T := \frac{1}{|T|} \int_T \mathbf{f}(t_j, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (3.115)$$

• Für  $\mathbf{f} \in C(\overline{\Omega}_\tau)$  sind folgende Definitionen denkbar

– für eine Approximation in der Zeit

$$\mathbf{f}_h^j := \mathbf{f}(t_j, \cdot); \quad (3.116)$$

– für eine Approximation in Ort und Zeit

$$\mathbf{f}_h^j := \mathcal{I}_h(\mathbf{f}(t_j, \cdot)) \quad (3.117)$$

mit  $\mathcal{I}_h : C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  dem nodalen Interpolationsoperator.

Um eine vollständige Konvergenzanalyse für Algorithmus 3.2.4 bzw. Algorithmus 3.2.14 zu garantieren ist es jedenfalls notwendig, dass die Approximation

$$\mathbf{f}_{hk}(t, \mathbf{x}) := \mathbf{f}_h^j(\mathbf{x}) \quad \text{für } t_j \leq t < t_{j+1} \text{ mit } j \geq 0 \text{ und für alle } \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.118)$$

Konvergenzeigenschaft (3.25), also

$$\|\mathbf{f}_{hk} - \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \rightarrow 0 \quad \text{für } h, k \rightarrow 0 \quad (3.119)$$

erfüllt.

**Lemma 3.4.1.** *Jene Varianten zur Approximation in Zeit und/oder Ort des angelegten äußeren Feldes  $\mathbf{f}$ , die in (3.112)–(3.117) präsentiert wurden, erfüllen Konvergenzeigenschaft (3.25).*

*Beweis.* Wir wollen obige Vorschläge zur Approximation des angelegten äußeren Feldes in Zeit und/oder Ort einzeln betrachten und jeweils Konvergenzeigenschaft (3.25) nachweisen.

• Wir betrachten für eine Funktion  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega_\tau)$  Variante (3.112) für eine Annäherung in der Zeit. Zunächst bemerken wir die Bestapproximationseigenschaft des stückweisen Integralmittels und erhalten

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_{hk} - \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 &= \int_0^{t_{\text{end}}} \|\mathbf{f}_{hk} - \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\| \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathbf{f} \, dt - \mathbf{f} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} \min_{\mathbf{g} \in \mathcal{P}^0((t_j, t_{j+1}), L^2(\Omega))} \|\mathbf{g} - \mathbf{f}\|_{L^2((t_j, t_{j+1}), L^2(\Omega))}^2 \\ &\leq \|\Pi_k \mathbf{f} - \mathbf{f}\|_{L^2((0, t_{\text{end}}), L^2(\Omega))}^2 \end{aligned}$$

mit  $\Pi_k$  der stückweisen  $L^2$ -Orthogonalprojektion auf  $\mathcal{P}^0(\mathcal{U}_k, L^2(\Omega))$ . Des Weiteren bemerken wir, dass der Integrand eine Funktion mit verschwindendem Integralmittel über die Zeit darstellt. Da  $H^1((0, t_{\text{end}}); L^2(\Omega))$  dicht in  $L^2((0, t_{\text{end}}), L^2(\Omega))$  ist, wählen wir eine Funktion  $\mathbf{g} \in H^1((0, t_{\text{end}}); L^2(\Omega))$ , sodass für ein  $\varepsilon > 0$   $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{L^2((0, t_{\text{end}}); L^2(\Omega))} \leq \varepsilon$

gilt. Wir schätzen nun unter Berücksichtigung der Stetigkeit von  $\Pi_k$  und mit Hilfe der Poincaréschen Ungleichung weiter ab

$$\begin{aligned} \|\Pi_k \mathbf{f} - \mathbf{f}\|_{L^2((0,t_{\text{end}}),L^2(\Omega))} &\leq \|\Pi_k \mathbf{f} - \Pi_k \mathbf{g}\|_{L^2((0,t_{\text{end}}),L^2(\Omega))} + \|\Pi_k \mathbf{g} - \mathbf{g}\|_{L^2((0,t_{\text{end}}),L^2(\Omega))} \\ &\quad + \|\mathbf{g} - \mathbf{f}\|_{L^2((0,t_{\text{end}}),L^2(\Omega))} \\ &\leq 2\varepsilon + \frac{1}{\pi} k \|\partial_t \mathbf{g}\|_{L^2((0,t_{\text{end}}),L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Hierbei stellt der Faktor  $1/\pi$  die nicht verbesserbare Poincaré-Konstante für konvexe Gebiete dar, siehe [41]. Damit ist nun klar, dass die rechte Seite und damit insbesondere die linke Seite verschwindet, sofern die Zeitschrittweite  $k$  gegen 0 konvergiert.

- In analoger Weise verifizieren wir (3.25) für eine Funktion  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega_\tau)$ , die durch (3.113) in Ort und Zeit approximiert wird

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_{hk} - \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 &= \sum_{j=0}^{J-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left| \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{1}{|T|} \int_T \mathbf{f} \, d\mathbf{x} \, dt - \mathbf{f} \right|^2 d\mathbf{x} \, dt \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{J-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left| \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{1}{|T|} \int_T \mathbf{f} \, d\mathbf{x} \, dt - \frac{1}{|T|} \int_T \mathbf{f} \, d\mathbf{x} \right|^2 d\mathbf{x} \, dt \\ &\quad + \sum_{j=0}^{J-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left| \frac{1}{|T|} \int_T \mathbf{f} \, d\mathbf{x} \, dt - \mathbf{f} \right|^2 d\mathbf{x} \, dt \end{aligned}$$

Wir wenden dieselbe Argumentation wie im vorhergehenden Schritt nun ebenfalls im Ort an und erhalten somit die gewünschte Konvergenzeigenschaft.

- Sei  $\mathbf{f} \in C([0, t_{\text{end}}]; L^2(\Omega))$ . Um nun (3.25) für eine nach (3.114) in der Zeit approximierenden Funktion  $\mathbf{f}_{hk}$  einzusehen, betrachten wir

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_{hk} - \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 &= \sum_{j=0}^{J-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\mathbf{f}(t_j, \cdot) - \mathbf{f}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\leq k \sum_{j=0}^{J-1} \max_{t \in [t_j, t_{j+1}]} \|\mathbf{f}(t_j, \cdot) - \mathbf{f}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq t_{\text{end}} \max_{j \in \{0, \dots, J-1\}} \max_{t \in [t_j, t_{j+1}]} \|\mathbf{f}(t_j, \cdot) - \mathbf{f}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass  $\mathbf{f}$  bezüglich der Zeitkomponente eine gleichmäßig stetige Funktion darstellt. Damit ist insbesondere klar, dass für eine verschwindende Zeitschrittweite  $k$  der Limes der rechten Seite 0 ist.

- Führen wir die Argumentation der beiden vorhergehenden Schritte zusammen, so erhalten wir damit insbesondere Konvergenz im Sinn von (3.25) für eine Approximation des äußeren angelegten Feldes  $\mathbf{f} \in C([0, t_{\text{end}}]; L^2(\Omega))$  nach (3.115).
- Wir betrachten nun ein stetiges angelegtes äußeres Feld  $\mathbf{f} \in C(\overline{\Omega}_\tau)$ . Um letztendlich sicherzustellen, dass eine Annäherung in Ort und Zeit nach (3.117) zulässig ist im Sinn der Erfüllung von Konvergenzeigenschaft (3.25), schätzen wir mit der Dreiecksungleichung

bzw. der Youngschen Ungleichung ab

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{f}_{hk} - \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 &= \sum_{j=0}^{J-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T |\mathcal{I}_h(\mathbf{f}(t_j, \cdot)) - \mathbf{f}|^2 d\mathbf{x} dt \\
&\lesssim t_{\text{end}} \max_{j \in \{0, \dots, J-1\}} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T |\mathcal{I}_h(\mathbf{f}(t_j, \cdot)) - \mathbf{f}(t_j, \cdot)|^2 d\mathbf{x} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{J-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\mathbf{f}(t_j, \cdot) - \mathbf{f}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.
\end{aligned}$$

Wir haben bereits festgestellt, dass der zweite Summand der rechten Seite gegen 0 konvergiert sofern die Zeitschrittweite  $k$  ebenfalls gegen 0 geht. Daher ist lediglich einzusehen, dass der erste Summand der rechten Seite für  $k \rightarrow 0$  verschwindet. Wir schätzen daher seinen Integranden weiter ab

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}_h(\mathbf{f}(t_j, \mathbf{x})) - \mathbf{f}(t_j, \mathbf{x})| &= \left| \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h(T)} \mathbf{f}(t_j, \mathbf{z}_i) \beta_i(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h(T)} \beta_i(\mathbf{x}) \mathbf{f}(t_j, \mathbf{x}) \right| \\
&\leq \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h(T)} \beta_i(\mathbf{x}) |\mathbf{f}(t_j, \mathbf{z}_i) - \mathbf{f}(t_j, \mathbf{x})| \\
&= |\mathbf{f}(t_j, \mathbf{z}_i) - \mathbf{f}(t_j, \mathbf{x})|.
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass  $\mathbf{f}$  im Ort eine gleichmäßig stetige Funktion darstellt und damit insbesondere klar ist, dass für eine gegen 0 konvergierende Ortsschrittweite  $h$  der Limes der rechten Seite 0 ist. Dies begründet das Erfülltsein von Konvergenzeigenschaft (3.25) für diesen Approximationsansatz und beschließt damit insgesamt den Beweis.

□



## Kapitel 4

# Methoden zur approximativen Berechnung des Streufeldes

Dieses Kapitel widmen wir der Präsentation und Diskussion verschiedener Methoden zur näherungsweisen Berechnung des Streufeldes.

Wie wir bereits in Kapitel 1 gesehen haben kann die Berechnung des Streufeldoperators  $\mathcal{P}$  bzw. dessen diskreten Gegenstücks  $\mathcal{P}_h$  das Lösen eines zusätzlichen Gleichungssystems bedeuten. Im aktuellen Kapitel wollen wir verschiedene Möglichkeiten aufzeigen und diskutieren, um dieses Problem zu lösen. Da wir nicht nur an einer Darlegung der diversen Lösungsansätze interessiert sind, sondern gleichzeitig auch eine numerische bzw. algorithmische Umsetzung anstreben, werden wir jeweils auch Aspekte der Implementierung berücksichtigen. Darüber hinaus weisen wir gewisse Eigenschaften der aus den diversen Ansätzen resultierenden diskreten Streufeldoperatoren  $\mathcal{P}_h$  nach, um sicher zu stellen, dass deren Anwendung zulässig im Sinn der in Kapitel 3 erbrachten Konvergenzanalyse ist.

Zunächst wollen wir die essentiellen Gleichungen, die das Verhalten des Streufeldes beschreiben, anführen. Dazu erinnern wir, dass die Streufeldenergie (oder: magnetostatische Energie) im  $\mathbb{R}^3$  durch

$$E_{stray} = \frac{\mu_0 M_s^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{P}(\mathbf{m})|^2 d\mathbf{x} = \frac{\mu_0 M_s^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} \quad (4.1)$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet  $\mathcal{P}$  den Streufeldoperator, während  $u$  das magnetostatische Potential wiedergibt. Das Streufeld  $\mathcal{P}(\mathbf{m}) = \nabla u$  wird durch  $\mathbf{m}$  induziert als Lösung  $u = (u^{\text{int}}, u^{\text{ext}}) \in H^1(\Omega) \times H_{\text{lok}}^1(\Omega^{\text{ext}})$  der quasi-statischen Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta u^{\text{int}} &= \operatorname{div} \mathbf{m} && \text{in } \Omega, \\ \Delta u^{\text{ext}} &= 0 && \text{in } \Omega^{\text{ext}}, \\ [u] &= 0 && \text{auf } \Gamma, \\ [\partial_{\boldsymbol{\nu}} u] &= -\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} && \text{auf } \Gamma, \\ u^{\text{ext}}(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|) && \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.2)$$

mit  $[u] = u^{\text{ext}} - u^{\text{int}}$  und  $[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u] = \partial_{\boldsymbol{\nu}} u^{\text{ext}} - \partial_{\boldsymbol{\nu}} u^{\text{int}}$  die Sprünge von  $u$  und seiner Normalenableitung am Rand  $\Gamma = \partial\Omega$  und  $\boldsymbol{\nu}$  dem nach außen gerichteten Einheitsnormalenvektor.

Aus analytischer Sicht stellt  $\mathcal{P} : L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  eine  $L^2$ -Orthogonalprojektion auf das Gradientenfeld dar. Daraus ergibt sich, dass  $\mathcal{P}(\mathbf{m}) = 0$  dann und nur dann gilt, wenn  $\mathbf{m}$  divergenzfrei im  $\mathbb{R}^3$  ist, siehe [45, Proposition 3.4]. Insbesondere gilt

$$\|\mathcal{P}(\mathbf{m})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Unter der zusätzlichen Annahme, dass die Magnetisierung  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$  hinreichend glatt ist, lässt sich das magnetostatische Potential  $u$  in Form einer Faltung darstellen

$$u = \mathcal{L}\mathbf{m} = G * \operatorname{div} \mathbf{m} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial G}{\partial x_j} * m_j. \quad (4.3)$$

Dabei bezeichnet  $G$  den Newton-Kern, der die Fundamentallösung des Laplace-Operators für den 3-dimensionalen Fall ist und durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$$

gegeben ([51, Kapitel 5.1]) ist. Wir bemerken, dass Darstellung (4.3) auch für  $\mathbf{m} \in L^p(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  gilt, siehe [45, Theorem 5.2].

Wir wollen die magnetostatischen Potentialgleichungen (4.2) approximativ lösen. Dabei gilt es zu beachten, dass wir an einer Lösung lediglich am Gebiet  $\Omega$  interessiert sind, wobei das Problem jedoch am Ganzraum  $\mathbb{R}^3$  gestellt ist. Anders als alle anderen Energiebeiträge der Gibbs Freien Energie stellt also die Streufeldenergie einen nicht-lokalen Beitrag dar.

In der Literatur finden sich nun verschiedene Ansätze zur näherungsweise Lösung von (4.2). Allerdings bringt jede Methode verschiedene Vorteile, aber auch Nachteile mit sich. Diese wollen wir in den nachfolgenden Unterabschnitten aufzeigen. Gleichzeitig favorisieren wir Lösungsansätze, die diskrete Streufeldoperatoren zurück liefern, die den Anforderungen von Theorem 3.3.7 aus Kapitel 3 genügen.

Wir betrachten die diskreten Lösungen  $\mathbf{m}_h^j$  für  $j > 0$  der in Kapitel 3 vorgestellten Time-Splitting-Verfahren bzw. den Grenzwert  $\mathbf{m}$  einer Teilfolge der in der Zeit interpolierten Magnetisierung  $\mathbf{m}_{hk}$ . Wir stellen an ein diskretes Pendant  $\mathcal{P}_h$  zu  $\mathcal{P}$  zweierlei Anforderungen. Zum Einen ist aus analytischer Sicht für die Approximation  $\mathcal{P}_h$  Stabilität

$$\|\mathcal{P}_h \mathbf{m}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\mathcal{P}} \|\mathbf{m}_h^j\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } j > 0 \quad (4.4)$$

und Konvergenz

$$\|\mathcal{P}\mathbf{m} - \mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

von Bedeutung. Hierbei bezeichnet  $C_{\mathcal{P}} > 0$  eine von der Netzweite  $h$  und Zeitschrittweite  $k$  unabhängige Konstante. Diese Bedingungen ergeben sich aus der Konvergenzanalyse aus Kapitel 3. Zum Anderen zielen wir auf eine möglichst effiziente Implementierung des Streufeldes ab. Unter diesem Aspekt wollen wir also auch Algorithmen zu den jeweiligen Ansätzen betrachten und offensichtliche Pros und Kontras herausstreichen.

**Lemma 4.0.2.** *Um die Eigenschaften (4.4) und (4.5) zu verifizieren, ist es hinreichend die Gültigkeit von sowohl*

$$\|\mathcal{P}_h \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\mathcal{P}} \|\mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{als auch} \quad \|\mathcal{P}\mathbf{n} - \mathcal{P}_h \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0 \quad (4.6)$$

für alle  $\mathbf{n} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  zu zeigen. Dies impliziert insbesondere  $\|\mathcal{P}\mathbf{m} - \mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$  f.ü. in  $[0, t_{\text{end}}]$  für  $h \rightarrow 0$ .

*Beweis.* Um Eigenschaften (4.5) einzusehen bemerken wir

$$\|\mathcal{P}\mathbf{m} - \mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega_\tau)}^2 = \int_0^{t_{\text{end}}} \|\mathcal{P}\mathbf{m}(t, \cdot) - \mathcal{P}_h \mathbf{m}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}\mathbf{m}(t, \cdot) - \mathcal{P}_h\mathbf{m}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq 2\|\mathcal{P}\mathbf{m}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\mathcal{P}_h\mathbf{m}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq (2 + 2C_{\mathcal{P}}^2)\|\mathbf{m}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq (2 + 2C_{\mathcal{P}}^2)|\Omega| \end{aligned}$$

und aufgrund der Endlichkeit des Zeitintervalls  $t_{\text{end}} < \infty$ , folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\|\mathcal{P}\mathbf{m} - \mathcal{P}_h\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0. \quad (4.7)$$

Dies stellt die gewünschte Konvergenzeigenschaft des approximierten Streufeldoperators dar, siehe (4.5).  $\square$

Im nächsten Abschnitt wollen wir der Vollständigkeit halber jene analytischen Konstrukte und Grundlagen einführen, die wir in den darauf folgenden Sektionen benötigen. Darüber hinaus streben wir eine einheitliche Notation an. Schließlich stellen wir in den darauf folgenden Abschnitten einerseits verschiedene Ansätze zur Lösung des Transmissionsproblems (4.2) vor und studieren andererseits deren numerische Umsetzung und gewisse analytische Eigenschaften.

## 4.1 Notation und weitere Definitionen

In diesem Abschnitt wollen wir jene Definitionen sammeln und wiedergeben, die für die verschiedenen Ansätze zur approximativen Berechnung des Streufeldes von Nöten sind. Dazu führen wir zunächst Sobolev-Räume auf Rändern ein, um darauf folgend diverse Randintegraloperatoren zu präsentieren. Schließlich führen wir abschließend weitere (spezielle) Interpolationsoperatoren ein.

**Konvention 4.1.1.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und definiere  $\Gamma = \partial\Omega$  dessen Rand. Wir bezeichnen mit  $\Omega^{\text{ext}} := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$  das Komplement des Gebiets  $\Omega$ .

**Konvention 4.1.2.** Wir bezeichnen mit  $\mathcal{T}_{h,\Gamma}$  jene Triangulierung am Rand  $\Gamma = \partial\Omega$  bestehend aus ebenen Dreiecken, die durch die Gebietstriangulierung  $\mathcal{T}_h$  des magnetischen Körpers  $\Omega$  induziert wird.

Der Raum  $H^1(\Omega^{\text{ext}})$  enthält nicht alle  $H^1$ -Funktionen  $v$  auf dem Außenraum  $\Omega^{\text{ext}}$ , die der Abklingbedingung  $v(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|)$  für  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  genügen. Daher ist dieser ungeeignet für die Betrachtung des Transmissionsproblems (4.2) im schwachen Sinn. Dies ist anders für den folgenden Raum. Wir führen für  $\ell \in \mathbb{N}$  den Raum aller messbaren Funktionen, die auf jedem Kompaktum in  $H^\ell$  liegen, durch

$$H_{\text{lok}}^\ell(\Omega) := \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue-messbar} \mid v|_K \in H^\ell(K) \text{ für alle } K \subseteq \overline{\Omega} \text{ mit } K \text{ kompakt} \right\}$$

ein. Des Weiteren bezeichnen wir für  $\ell \in \mathbb{N}$  mit

$$H_*^\ell(\Omega) := \left\{ v \in H^\ell(\Omega) \mid \int_\Omega v \, d\mathbf{x} = 0 \right\}$$

den Raum jener Funktionen  $v \in H^\ell(\Omega)$  mit verschwindendem Integralmittel. Außerdem definieren wir  $H(\text{div}; \Omega)$  mit

$$H(\text{div}; \Omega) := \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \mid \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \right\},$$

wobei  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  im schwachen Sinn verstanden wird. Aus dieser Definition geht hervor, dass  $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  ein Teilraum von  $H(\operatorname{div}; \Omega)$  ist.

In den folgenden Abschnitten benötigen wir spezielle Sobolev-Räume auf Rändern. Dazu führen wir für  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  die Sobolev-Slobodeckij-Seminorm auf Rändern ein

$$|v|_{H^{1/2}(\Gamma)} := \left( \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} ds_{\mathbf{y}} ds_{\mathbf{x}} \right)^{1/2}.$$

Der Sobolev-Raum  $H^{1/2}(\Gamma)$  wird dann durch

$$H^{1/2}(\Gamma) := \left\{ v \in L^2(\Gamma) \mid \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} < \infty \right\}$$

definiert, wobei die  $H^{1/2}$ -Norm wie folgt gegeben ist

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} := \left( \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 + |v|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)^{1/2}.$$

In analoger Weise zur Definition der Räume mit verschwindendem Integralmittel auf  $\Omega$  erklären wir den Raum  $H_*^{1/2}(\Gamma)$  als

$$H_*^{1/2}(\Gamma) := \left\{ v \in H^{1/2}(\Gamma) \mid \int_{\Gamma} v ds_{\mathbf{x}} = 0 \right\}.$$

Es kann gezeigt werden, dass die eben eingeführten Sobolev-Räume auf Rändern Hilbert-Räume sind.

Wir führen durch

$$\begin{aligned} H^{-1/2}(\Gamma) &:= (H^{1/2}(\Gamma))^*, \\ H_*^{-1/2}(\Gamma) &:= \{g \in H^{-1/2}(\Gamma) \mid (g, 1)_{L^2(\Gamma)} = 0\} = (H_*^{1/2}(\Gamma))^* \end{aligned}$$

die Dualräume der eben definierten Sobolev-Räume auf Rändern ein und bemerken, dass hierbei Dualität im Sinn des erweiterten  $L^2$ -Skalarprodukts verstanden wird.

Schließlich benötigen wir noch die Definition diverser Spur- und Randintegraloperatoren. Dazu betrachten wir zunächst ein beschränktes Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  mit hinreichend glattem Rand  $\Gamma = \partial\Omega$ .

**Proposition 4.1.1** ([37, Theorem 3.37]). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes  $C^{r-1,1}$ -Gebiet und bezeichne  $\Gamma \subseteq \partial\Omega$  den Rand des Gebiets. Für  $r \geq s > 1/2$  gibt es einen eindeutigen Spuroperator*

$$\gamma_0 \in L(H^s(\Omega); H^{s-1/2}(\partial\Omega)) \quad \text{mit} \quad \gamma_0 \varphi = \varphi|_{\partial\Omega} \quad \text{für alle } \varphi \in C^0(\overline{\Omega}).$$

Darüber hinaus existiert ein eindeutiger Spuroperator

$$\gamma \in L(H_{\text{lok}}^s(\mathbb{R}^3); H^{s-1/2}(\Gamma)) \quad \text{mit} \quad \gamma \varphi = \varphi|_{\Gamma} \quad \text{für alle } \varphi \in C^0(\mathbb{R}^3).$$

Der Spuroperator  $\gamma_0 = \gamma_0^{\text{int}}$  wird auch als *innere Spur* bezeichnet, während  $\gamma_0^{\text{ext}} \in L(H_{\text{lok}}^s(\Omega^{\text{ext}}); H^{s-1/2}(\Gamma))$  für alle  $\varphi \in C^0(\overline{\Omega^{\text{ext}}})$  die *äußere Spur* darstellt.

Wir verwenden im Folgenden die vereinfachte Notation  $\gamma_0$  für den einseitigen Spuroperator, falls ohnedies klar ist von welcher Seite aus die Spur zu bilden ist.

**Proposition 4.1.2** ([37, Lemma 4.3]). *Sei  $\varphi \in H^1(\Omega)$  und gelte  $-\Delta\varphi = f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$  im distributionellen Sinn. Dann gibt es ein eindeutiges lineares und stetiges Funktional  $\gamma_1\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ , sodass*

$$(f, v)_{L^2(\Omega)} = (\nabla\varphi, \nabla v)_{L^2(\Omega)} - (\gamma_1\varphi, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega) \quad (4.8)$$

erfüllt ist. Wir bezeichnen  $\gamma_1\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$  als die Konormalenableitung von  $\varphi$ . Insbesondere gilt  $\gamma_1\varphi = \partial_{\nu}\varphi$  für alle  $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ .

Wieder unterscheiden wir mit  $\gamma_1^{\text{int}}$  die innere Konormalenableitung von  $\gamma_1^{\text{ext}}$  der äußeren Konormalenableitung. Falls klar ist, von welcher Seite aus die Spur zu bilden ist, verwenden wir die vereinfachte Schreibweise  $\gamma_1$ .

Wir betrachten die Abbildung  $\gamma_{\nu}\mathbf{v} := \mathbf{v} \cdot \nu$ , die für glatte Funktionen  $\mathbf{v}$  mit kompaktem Träger erklärt ist. Wie in [27, Satz 2.5] nachzulesen ist, lässt sich  $\gamma_{\nu}$  zu einer linearen und stetigen Abbildung  $\gamma_{\nu} : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  fortsetzen.

Im Folgenden führen wir diverse Randintegraloperatoren ein und fassen deren wichtigste Eigenschaften kurz zusammen. Für ein detailliertes Studium sei der Leser auf [37, 48, 51] verwiesen.

Für eine gegebene Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger in  $\bar{\Omega}$  definieren wir das Volumen- oder Newton-Potential durch

$$\tilde{N}f(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.9)$$

Es ist zu bemerken, dass das Newton-Potential als Faltung  $\tilde{N}f = G * f$  mit dem Newton-Kern verstanden werden kann.

**Satz 4.1.3** ([37, Kapitel 6]). *Es bezeichne  $\tilde{H}_{\text{komp}}^{-1}(\mathbb{R}^3)$  den Raum aller Distributionen aus  $\tilde{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$  mit kompaktem Träger in  $\mathbb{R}^3$ . Dann definiert das Newton-Potential einen Operator  $\tilde{N} \in L(\tilde{H}_{\text{komp}}^{-1}(\mathbb{R}^3); H_{\text{lok}}^1(\mathbb{R}^3))$ . Für alle Funktionen  $f \in \tilde{H}_{\text{komp}}^{-1}(\mathbb{R}^3)$  gilt*

$$-\Delta(\tilde{N}f) = f \quad \text{schwach in } \mathbb{R}^3.$$

*Insbesondere sind die Anwendung der Spurooperatoren und der Konormalenableitungen wohldefiniert und erklären lineare und stetige Operatoren*

$$\begin{aligned} \gamma_0^{\text{int}}\tilde{N} : \tilde{H}^{-1}(\Omega) &\rightarrow H^{1/2}(\Gamma), & \gamma_0^{\text{ext}}\tilde{N} : \tilde{H}_{\text{komp}}^{-1}(\Omega^{\text{ext}}) &\rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \\ \gamma_1^{\text{int}}\tilde{N} : \tilde{H}^{-1}(\Omega) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), & \gamma_1^{\text{ext}}\tilde{N} : \tilde{H}_{\text{komp}}^{-1}(\Omega^{\text{ext}}) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

*Damit liegen folgende Sprungeigenschaften vor*

$$\begin{aligned} [\gamma_0\tilde{N}f] &:= \gamma_0^{\text{ext}}\tilde{N}f - \gamma_0^{\text{int}}\tilde{N}f = 0, \\ [\gamma_1\tilde{N}f] &:= \gamma_1^{\text{ext}}\tilde{N}f - \gamma_1^{\text{int}}\tilde{N}f = 0. \end{aligned}$$

Für eine gegebene Dichte  $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  wird das Einfachschichtpotential durch

$$\tilde{V}\phi(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{y})ds_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \quad (4.10)$$

definiert.

**Satz 4.1.4** ([37, Theorem 6.11]). *Das Einfachschichtpotential  $\tilde{V}$  definiert einen Operator  $\tilde{V} \in L(H^{-1/2}(\Gamma); H_{\text{lok}}^1(\mathbb{R}^3))$ , und es gilt für alle  $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$*

$$-\Delta(\tilde{V}\phi) = 0 \quad \text{schwach in } \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma.$$

*Des Weiteren sind die Anwendung der Spurooperatoren und der Konormalenableitungen wohldefiniert und erklären lineare und stetige Operatoren*

$$\begin{aligned} \gamma_0^{\text{int}} \tilde{V} &: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), & \gamma_0^{\text{ext}} \tilde{V} &: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \\ \gamma_1^{\text{int}} \tilde{V} &: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), & \gamma_1^{\text{ext}} \tilde{V} &: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

*Damit liegen folgende Sprungeigenschaften vor*

$$\begin{aligned} [\gamma_0 \tilde{V}\phi] &:= \gamma_0^{\text{ext}} \tilde{V}\phi - \gamma_0^{\text{int}} \tilde{V}\phi = 0, \\ [\gamma_1 \tilde{V}\phi] &:= \gamma_1^{\text{ext}} \tilde{V}\phi - \gamma_1^{\text{int}} \tilde{V}\phi = -\phi. \end{aligned}$$

Das Einfachschichtpotential  $\tilde{V}$  erfüllt für  $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$  fast überall in  $\Omega^{\text{ext}}$  das Abklingverhalten

$$\tilde{V}\phi(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

wie in [48, Abschnitt 3.1] nachzulesen ist.

Für ein  $v : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  wird das Doppelschichtpotential formal durch

$$\tilde{K}v(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \gamma_{1,\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \quad (4.11)$$

erklärt, wobei der Index  $\mathbf{y}$  in  $\gamma_{1,\mathbf{y}}$  vermerkt, dass die Ableitung nach  $\mathbf{y}$  betrachtet wird.

**Satz 4.1.5** ([37, Theorem 6.11]). *Das Doppelschichtpotential  $\tilde{K}$  definiert einen Operator  $\tilde{K} \in L(H^{1/2}(\Gamma); H^1(\Omega) \cup H_{\text{lok}}^1(\Omega^{\text{ext}}))$ , und es gilt für alle  $v \in H^{1/2}(\Gamma)$*

$$-\Delta(\tilde{K}v) = 0 \quad \text{schwach in } \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma.$$

*Insbesondere sind die Anwendung der Spurooperatoren und der Konormalenableitungen wohldefiniert und erklären lineare und stetige Operatoren*

$$\begin{aligned} \gamma_0^{\text{int}} \tilde{K} &: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), & \gamma_0^{\text{ext}} \tilde{K} &: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \\ \gamma_1^{\text{int}} \tilde{K} &: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), & \gamma_1^{\text{ext}} \tilde{K} &: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

*Damit liegen folgende Sprungeigenschaften vor*

$$\begin{aligned} [\gamma_0 \tilde{K}v] &:= \gamma_0^{\text{ext}} \tilde{K}v - \gamma_0^{\text{int}} \tilde{K}v = v, \\ [\gamma_1 \tilde{K}v] &:= \gamma_1^{\text{ext}} \tilde{K}v - \gamma_1^{\text{int}} \tilde{K}v = 0. \end{aligned}$$

Das Einfachschichtpotential  $\tilde{K}$  erfüllt für  $\phi \in H^{1/2}(\Gamma)$  das Abklingverhalten

$$\tilde{K}\phi(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$$

wie in [48, Abschnitt 3.1] nachzulesen ist.

Mit Hilfe der nun vorgestellten Randintegraloperatoren und deren Eigenschaften können wir eine Darstellungsformel für die exakte Lösung  $\varphi$  des Laplace-Problems formulieren:

Für  $\varphi \in H^1(\Omega)$  mit  $-\Delta\varphi = f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$  gilt

$$\varphi = \tilde{N}f + \tilde{V}(\gamma_1^{\text{int}}\varphi) - \tilde{K}(\gamma_0^{\text{int}}\varphi). \quad (4.12)$$

Insbesondere ergibt sich durch Anwendung des Spuoperators  $\gamma_0^{\text{int}}$  bzw. der Konormalenableitung  $\gamma_1^{\text{int}}$  auf Gleichung (4.12), dass die Cauchy-Daten  $(\gamma_0^{\text{int}}\varphi, \gamma_1^{\text{int}}\varphi) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$  das Calderón-System

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{int}}\varphi \\ \gamma_1^{\text{int}}\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_0^{\text{int}}\tilde{K} & \gamma_0^{\text{int}}\tilde{V} \\ -\gamma_1^{\text{int}}\tilde{K} & \gamma_1^{\text{int}}\tilde{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{int}}\varphi \\ \gamma_1^{\text{int}}\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{int}}\tilde{N}f \\ \gamma_1^{\text{int}}\tilde{N}f \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

erfüllen. Für einen Beweis der Gültigkeit der Darstellungsformel im schwachen Sinn, sei der Leser auf [48, Satz 3.1.6] verwiesen.

Aus der Darstellungsformel geht hervor, dass die Lösung  $\varphi$  der Differentialgleichung eindeutig bestimmt ist, sobald die Cauchy-Daten  $(\gamma_0^{\text{int}}\varphi, \gamma_1^{\text{int}}\varphi) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$  bekannt sind.

Wir definieren die Spur und Normalenableitung der im Folgenden betrachteten Integraloperatoren fast überall auf  $\Gamma$  wie folgt:

- $V := \gamma_0^{\text{int}}\tilde{V}$       Einfachschichtpotential     $V \in L(H^{-1/2}(\Gamma); H^{1/2}(\Gamma))$
- $K' := \gamma_1^{\text{int}}\tilde{V} - \frac{1}{2}$     adjungiertes Doppelschichtpotential     $K' \in L(H^{-1/2}(\Gamma); H^{-1/2}(\Gamma))$
- $K := \gamma_0^{\text{int}}\tilde{K} + \frac{1}{2}$     Doppelschichtpotential     $K \in L(H^{1/2}(\Gamma); H^{1/2}(\Gamma))$
- $W := -\gamma_1^{\text{int}}\tilde{K}$       hypersingulärer Integraloperator     $W \in L(H^{1/2}(\Gamma); H^{-1/2}(\Gamma))$

Unter Berücksichtigung obiger Definitionen können wir das Calderón-System wie folgt darstellen

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{int}}\varphi \\ \gamma_1^{\text{int}}\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - K & V \\ W & \frac{1}{2} + K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{int}}\varphi \\ \gamma_1^{\text{int}}\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{int}}\tilde{N}f \\ \gamma_1^{\text{int}}\tilde{N}f \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Betrachtet man für eine Funktion  $\varphi \in H_{\text{lok}}^1(\Omega^{\text{ext}})$  das Außenraumproblem

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi &= 0 && \text{in } \Omega^{\text{ext}}, \\ \varphi(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) && \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

so ist nach [37, Kapitel 7, Abschnitt *Exterior Problems*] bekannt, dass die Lösung  $\varphi$  folgende Darstellung findet

$$\varphi = \tilde{K}\gamma_0^{\text{ext}}\varphi - \tilde{V}\gamma_1^{\text{ext}}\varphi.$$

Dies schließt die Einführung von Sobolev-Räumen auf Rändern samt Randintegraloperatoren und deren Eigenschaften ab.

Mit dem Ziel einer numerischen Umsetzung und praktischen Implementierung führen wir einen Approximationsoperator ein, der Funktionen aus Sobolev-Räumen auf affine und global stetige Funktionen abbildet. In Kapitel 2 haben wir bereits einen solchen Operator vorgestellt, den nodalen Interpolanten. Da dieser jedoch nur für stetige Funktionen definiert ist, ist er nicht für  $H^1$ -Funktionen im  $\mathbb{R}^3$  anwendbar, sondern lediglich für  $H^2$ -Funktionen. Bestimmt man jedoch

die Werte einer zu approximierenden affinen und global stetigen Funktion an den Knoten einer Triangulierung durch (gewichtetes) Mitteln über lokale Bereiche, so führt dies auf einen Approximationsoperator, der auf  $H^1$ -Funktionen anwendbar ist.

Wir führen den *Scott-Zhang-Operator* ein. Dazu betrachten wir ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Wir wählen zu jedem Knoten  $\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h$  eine Fläche  $a_i$ , die  $\mathbf{z}_i$  als Knoten enthält. Für den Fall  $\mathbf{z}_i \in \Gamma$  fordern wir zusätzlich, dass die gewählte Seitenfläche  $a_i$  ebenfalls einen Teil des Randes  $\Gamma$  darstellt. Im Weiteren bezeichnen wir mit  $\{\phi_{ij}\}$  für  $j = 1, \dots, 3$  die Menge der skalarwertigen nodalen Basisfunktionen von  $a_i$ . Wir identifizieren mit  $\{\psi_{ij}\}$  für  $j = 1, \dots, 3$  die entsprechende  $L^2(a_i)$ -duale Basis, d.h. es gilt

$$\int_{a_i} \psi_{ik} \phi_{ij} \, d\mathbf{x} = \delta_{kj}$$

mit  $\delta_{kj}$  als Kronecker-Symbol. Des Weiteren sind diese Basisfunktionen derart geordnet, sodass  $\phi_{ij}(\mathbf{z}_i) = \delta_{1j}$  und daher insbesondere  $\phi_{i1}(\mathbf{z}_i) = 1$  gilt. Für eine skalarwertige Basisfunktion  $\beta_i$  des  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  gilt dann

$$\beta_i|_{a_i} = \phi_{i1}.$$

Beachten wir, dass  $a_i$  nur dann im Träger einer Ansatzfunktion  $\beta_j$  liegt, wenn  $\mathbf{z}_j \in a_i$  gilt, dann folgern wir daraus schließlich

$$\int_{a_i} \psi_{i1} \beta_j \, d\mathbf{x} = \delta_{ij}$$

für alle Indizes  $i, j = 1, \dots, N$ .

Mit der Einführung von Funktionen  $\phi_i := \phi_{i1}$  bzw.  $\psi_i := \psi_{i1}$  definieren wir nun den *Scott-Zhang-Operator*

$$\mathcal{S}_h : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \quad \text{mit} \quad \mathcal{S}_h v := \sum_{i=1}^N v_i \beta_i \quad \text{und} \quad v_i := \int_{a_i} \psi_i v \, d\mathbf{x}. \quad (4.15)$$

Wir halten in den folgenden Sätzen essentielle Eigenschaften dieses Interpolationsoperators fest.

**Satz 4.1.6** ([50, Satz 2.1]). *Der in (4.15) definierte Operator  $\mathcal{S}_h$  ist eine Projektion von  $H^1(\Omega)$  nach  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ . Des Weiteren bleiben homogene Randbedingungen unter Anwendung von  $\mathcal{S}_h$  erhalten, d.h.  $H_0^1(\Omega)$  wird auf  $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$  abgebildet.*

**Satz 4.1.7** ([50, Abschnitt 4]). *Sei  $v \in H^\ell(\Omega)$  mit  $\ell = 1, 2$ . Dann gibt es eine positive Konstante  $C > 0$ , sodass*

$$\|v - \mathcal{S}_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|h^{\ell-1} D^\ell v\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.16)$$

*gilt. Die Konstante  $C > 0$  hängt hierbei lediglich von der Dimension des Gebiets und der Formregularitätskonstante  $\sigma(\mathcal{T}_h)$  ab.*

Damit haben wir nun jene Räume, Operatoren und Notation eingeführt, die wir in den folgenden Abschnitten verwenden werden.

Im folgenden Lemma halten wir essentielle Beobachtungen aufgrund der Dichtheit von Räumen fest.

**Lemma 4.1.8.** *Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbert-Raum, und für  $h > 0$  sei  $\mathcal{X}_h \subseteq \mathcal{H}$  ein endlichdimensionaler Teilraum. Des Weiteren bezeichne  $b(\cdot, \cdot)$  eine stetige und elliptische Bilinearform auf  $\mathcal{H}$  und  $f(\cdot)$  ein stetiges, lineares Funktional auf  $\mathcal{H}$ . Wir notieren mit  $u \in \mathcal{H}$  die eindeutige Lösung von  $b(u, v) = f(v)$  für alle  $v \in \mathcal{H}$ , während  $u_h \in \mathcal{X}_h$  die eindeutige Lösung von  $b(u_h, v_h) = f(v_h)$  für alle  $v_h \in \mathcal{X}_h$  darstellt. Außerdem existiere eine dichte Teilmenge  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}$  und ein (nicht notwendigerweise stetiger und nicht notwendigerweise linearer) Operator  $\mathcal{I}_h : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{X}_h$  mit*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(1 - \mathcal{I}_h)v\|_{\mathcal{H}} = 0 \quad \text{für alle } v \in \mathcal{D}. \quad (4.17)$$

Dann gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{\mathcal{H}} = 0. \quad (4.18)$$

*Beweis.* Zunächst bemerken wir, dass nach obigen Annahmen für die Lösungen  $u \in \mathcal{H}$  und  $u_h \in \mathcal{X}_h$  mit  $h > 0$  die Céa-Abschätzung

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \leq C \min_{v_h \in \mathcal{X}_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}} = C \|u - \Pi_h u\|_{\mathcal{H}} \quad (4.19)$$

gilt, wobei die positive Konstante  $C > 0$  unabhängig von der Netzweite  $h$  ist und  $\Pi_h$  die Orthogonalprojektion auf  $\mathcal{X}_h$  bezeichnet. Da  $\mathcal{D}$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist, ist es uns möglich für ein  $\varepsilon > 0$  ein  $v \in \mathcal{D}$  zu wählen, sodass

$$\|u - v\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon$$

gilt. Mit der Dreiecksungleichung und der der Bestapproximationseigenschaft von  $\Pi_h$  sehen wir nun

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \leq \|u - v\|_{\mathcal{H}} + \|v - \Pi_h v\|_{\mathcal{H}} + \|\Pi_h(v - u)\|_{\mathcal{H}} \leq 2\varepsilon + \|(1 - \mathcal{I}_h)v\|_{\mathcal{H}}.$$

Schließlich erhalten wir mit der Approximationseigenschaft für  $\mathcal{I}_h$  aus (4.17) die gewünschte Aussage.  $\square$

## 4.2 Analytische Berechnung des projizierten Streufeldes

Zunächst wollen wir jenen Ansatz betrachten, der in [45] vorgestellt wurde. Die grundlegende Idee dieser Lösungsmethode beruht auf der Hintereinanderausführung von Projektionen  $\Pi_h : L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h)^3$  und kontinuierlichem Streufeldoperator  $\mathcal{P}$ . Daraus resultiert nämlich ein diskreter Operator

$$\mathcal{P}_h := \Pi_h \mathcal{P} \Pi_h : L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h)^3, \quad (4.20)$$

der einerseits den Anforderungen (4.4) und (4.5) genügt und andererseits in Form von numerisch berechenbaren Doppelintegralen darzustellen ist.

Es definiere  $\Pi_h : L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h)^3$  die  $L^2$ -Orthogonalprojektion auf  $\mathcal{T}_h$ -stückweise konstante Felder. Dabei bemerken wir, dass für  $\mathbf{n} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  der Operator  $\Pi_h$  lediglich das lokale Integralmittel darstellt

$$(\Pi_h \mathbf{n})|_{T_{i'}} = \frac{1}{|T_{i'}|} \int_{T_{i'}} \mathbf{n} \, d\mathbf{x} =: \mathbf{n}_{T_{i'}} \quad \text{für } T_{i'} \in \mathcal{T}_h.$$

Mit Hilfe dieser Feststellung und der Linearität von  $\mathcal{P}$  deduzieren wir aus [45, Proposition 6.1] folgende Gleichheit

$$(\mathcal{P}_h \mathbf{n})|_{T_{i'}} = \frac{1}{|T_{i'}|} \sum_{i=1}^n \int_{T_{i'}} \mathcal{P} \mathbf{n}_{T_i} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|T_{i'}|} \sum_{i=1}^n \int_{\partial T_{i'}} \int_{\partial T_i} \frac{\boldsymbol{\nu}_{T_i}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_{T_i}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \boldsymbol{\nu}_{T_{i'}}(\mathbf{x}) ds_{\mathbf{y}} ds_{\mathbf{x}}. \quad (4.21)$$

Es gilt zu beachten, dass die hierin auftretenden Doppelintegrale jenen gleichen, die durch das Einfachschichtpotential mit  $\mathcal{P}^0$ -Ansatzfunktionen aus den Randintegralgleichungen bekannt sind. Analytische Formeln zur Berechnung dieser Randintegrale finden sich beispielsweise in [28, 35, 44].

Mit der charakteristischen Funktion  $\chi_i$  von  $T_i \in \mathcal{T}_h$  und  $\mathbf{e}_\ell \in \mathbb{S}^2$  den  $\ell$ -ten Einheitsvektor definieren wir  $\boldsymbol{\chi}_{i+(\ell-1)n} = \chi_i \mathbf{e}_\ell$ . Es sei bemerkt, dass  $\{\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_{3n}\}$  eine Basis von  $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h)^3$  ist. Damit findet jene Matrix, die den Streufeldoperator repräsentiert, folgende Darstellung

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{11} & \mathbf{P}^{12} & \mathbf{P}^{13} \\ \mathbf{P}^{12} & \mathbf{P}^{22} & \mathbf{P}^{23} \\ \mathbf{P}^{13} & \mathbf{P}^{23} & \mathbf{P}^{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n} \quad \text{mit Einträgen} \quad P_{mm'} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}_m \cdot \mathcal{P} \boldsymbol{\chi}_{m'} d\mathbf{x}. \quad (4.22)$$

Dieser Operator ist also eine symmetrische  $3 \times 3$ -Blockmatrix mit symmetrischen Blöcken  $\mathbf{P}^{\ell\ell'} \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ , siehe [45, Abschnitt 6]. Darüber hinaus kann jeder Block und damit insbesondere die gesamte Matrix durch hierarchische Matrizen beliebig genau approximiert werden, siehe [42, 43] für weitere Details. Für jedes Element  $T_i \in \mathcal{T}_h$  bezeichne  $\mathbf{c}_i \in T_i$  den Schwerpunkt. Dann gilt

$$(\Pi_h \mathbf{m}_h^j)|_{T_i} = \mathbf{m}_h^j(\mathbf{c}_i).$$

Definieren wir den Vektor  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{3n}$  durch  $\mu_{i+(\ell-1)n} = \mathbf{m}_h^j(\mathbf{c}_i) \cdot \mathbf{e}_\ell$ , so berechnen wir das Streufeld näherungsweise mit

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_h \mathbf{m}_h^j)|_{T_i} \cdot \mathbf{e}_\ell &= \frac{1}{|T_i|} \int_{T_i} \mathcal{P} \left( \sum_{\ell'=1}^3 \sum_{i'=1}^n (\Pi_h \mathbf{m}_h^j)|_{T_{i'}} \cdot \mathbf{e}_{\ell'} \boldsymbol{\chi}_{i'+(\ell'-1)n} \right) d\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_\ell \\ &= \frac{1}{|T_i|} \sum_{\ell'=1}^3 \sum_{i'=1}^n \left( \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}_{i+(\ell-1)n} \mathcal{P} \boldsymbol{\chi}_{i'+(\ell'-1)n} d\mathbf{x} (\Pi_h \mathbf{m}_h^j)|_{T_{i'}} \cdot \mathbf{e}_{\ell'} \right) \\ &= \frac{1}{|T_i|} \sum_{\ell'=1}^3 \sum_{i'=1}^n P_{i+(\ell-1)n, i'+(\ell'-1)n} \mu_{i'+(\ell'-1)n} \\ &= \frac{1}{|T_i|} P_{i+(\ell-1)n}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

wobei  $\mathbf{p} = \mathbf{P}\boldsymbol{\mu}$  gilt.

Wir haben nun die Berechnung des approximativen Streufeldoperators  $\mathcal{P}_h$  vorgestellt und ausgeführt. Dabei sehen wir, dass dieser Projektionsansatz zur Berechnung des Streufeldes, lediglich in eine Matrix-Vektor-Multiplikation resultiert. Wir fassen diesen Ansatz zur Lösung der magnetostatischen Potentialgleichungen in folgendem Algorithmus zusammen:

**Algorithmus 4.2.1.** *Input: Magnetisierung  $\mathbf{m}$ , Triangulierung  $\mathcal{T}_h$ , Schwerpunkte  $\mathbf{c}_i$  der Elemente  $T_i \in \mathcal{T}_h$  für  $i = 1, \dots, n$ .*

(i) *Berechne  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  aus (4.22), wobei*

$$P_{ij}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial T_j} \int_{\partial T_i} \frac{(\boldsymbol{\nu}_{T_i}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_\alpha)(\boldsymbol{\nu}_{T_j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_\beta)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} ds_{\mathbf{y}} ds_{\mathbf{x}}. \quad (4.24)$$

(ii) Berechne  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{3n}$  mit

$$\mu_{i+(\ell-1)n} = \mathbf{m}(\mathbf{c}_i) \cdot \mathbf{e}_\ell. \quad (4.25)$$

(iii) Berechne  $p_{j+(\ell-1)n} = \frac{1}{|T_j|}(\mathbf{P}\boldsymbol{\mu})_{j+(\ell-1)n}$  für  $j = 1, \dots, n$  und  $\ell = 1, 2, 3$ .

*Output:* Approximativ berechneter Koeffizientenvektor  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3n}$  des Streufeldes  $\mathcal{P}_h \mathbf{m} = \sum_{i=1}^{3n} p_i \boldsymbol{\chi}_i \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$ .

Es gilt zu bemerken, dass im Gegensatz zu anderen Ansätzen zur approximativen Lösung der magnetostatischen Potentialgleichungen der Rückgabewert von Algorithmus 4.2.1 bereits das gesuchte diskrete Streufeld  $\mathcal{P}_h \mathbf{m} \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  ist.

Im Folgenden halten wir die Eigenschaften des nach Algorithmus 4.2.1 näherungsweise berechneten Streufeldoperators  $\mathcal{P}_h$  fest.

**Proposition 4.2.2.** *Der diskrete Operator  $\mathcal{P}_h := \Pi_h \mathcal{P} \Pi_h$  erfüllt die Anforderungen (4.4) und (4.5).*

*Beweis.* Da  $\Pi_h$  und  $\mathcal{P}$  jeweils  $L^2$ -Orthogonalprojektionen sind, gilt folgende Stabilitätsabschätzung

$$\|\mathcal{P}_h \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} = \|\Pi_h \mathcal{P} \Pi_h \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } \mathbf{n} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

Daher ist Bedingung (4.4) sogar mit einer Konstante  $C_{\mathcal{P}} = 1$  erfüllt.

Wir schätzen weiter mit der Dreiecksungleichung ab und erhalten unter Ausnützung der Projektionseigenschaften von  $\Pi_h$  und  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P} \mathbf{n} - \mathcal{P}_h \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|(1 - \Pi_h) \mathcal{P} \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} + \|\Pi_h \mathcal{P} (1 - \Pi_h) \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|(1 - \Pi_h) \mathcal{P} \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} + \|(1 - \Pi_h) \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Um die rechte Seite nun weiter abzuschätzen, bemühen wir Lemma 4.1.8 unter der Wahl  $\mathcal{H} = L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ ,  $\mathcal{D} = C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$  und der Bilinearform  $b(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L^2}$ . Als diskreten Teilraum legen wir  $\mathcal{X}_h = \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  fest und wählen als Approximationsoperator die  $L^2$ -Orthogonalprojektion  $\Pi_h$ . Wir bemerken, dass nach der Poincaréschen Ungleichung Eigenschaft (4.17) erfüllt ist und erhalten schließlich

$$\begin{aligned} \|(1 - \Pi_h) \mathcal{P} \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} &\rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0, \\ \|(1 - \Pi_h) \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} &\rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Daher vervollständigt Lemma 4.0.2 schließlich den Beweis.  $\square$

Abschließend halten wir fest, dass der in diesem Abschnitt vorgestellte Ansatz zur approximativen Berechnung des Streufeldes ohne Lösung eines oder mehrerer Gleichungssysteme auskommt und direkt die gewünschte Größe als Matrix-Vektor-Produkt zurück liefert. Allerdings bedient er sich der Darstellung der Lösung der magnetostatischen Potentialgleichungen in Form einer Faltung, siehe (4.3).

Es gilt zu bemerken, dass dieser Lösungsansatz den Anforderungen (4.4) und (4.5) genügt. Er stellt also eine im Sinne der Analysis zulässige Approximationsmethode dar.

### 4.3 Hybrider FEM-BEM-Ansatz nach Fredkin/Koehler

Eine in der Welt der Anwendung beliebte Methode zur Berechnung des Streufeldes ist der Ansatz nach FREDKIN und KOEHLER, siehe [23]. Dabei handelt es sich um einen hybriden FEM-BEM-Ansatz, der auf einem Superpositionsprinzip beruht und daher letztendlich auf das Lösen eines Neumann-Problems und darauf folgend die Behandlung eines Dirichlet-Problems führt. Des Weiteren wird ausgenutzt, dass uns das Streufeld  $\mathcal{P}\mathbf{m}$  lediglich für das Gebiet  $\Omega$  interessiert.

Wir betrachten zunächst die magnetostatischen Differentialgleichungen (4.2) in der schwachen Form und splitten sodann die Lösung  $u$  in die Funktionen  $u_1$  und  $u_2$  auf. Für eine bekannte Magnetisierung  $\mathbf{m} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  führen wir die Funktion  $u_1 = (u_1^{\text{int}}, u_1^{\text{ext}}) \in H_*^1(\Omega) \times H_{\text{lok}}^1(\Omega^{\text{ext}})$  als Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u_1^{\text{int}} &= \operatorname{div} \mathbf{m} && \text{in } \Omega, \\ \gamma_1^{\text{int}} u_1^{\text{int}} &= \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (4.27)$$

ein. Definieren wir den äußeren Anteil der partiellen Lösung  $u_1$  als  $u_1^{\text{ext}} := 0$ , so führt uns dies auf folgende Sprünge

$$\begin{aligned} [\gamma_0 u_1] &= -\gamma_0^{\text{int}} u_1^{\text{int}}, \\ [\gamma_1 u_1] &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Entsprechend dieser Wahl von  $u_1$  gilt es, nun  $u_2$  derart zu wählen, dass die Summe  $u_1 + u_2$  das volle Problem (4.2) löst. Daher hat die partielle Lösung  $u_2 = (u_2^{\text{int}}, u_2^{\text{ext}}) \in H^1(\Omega) \times H_{\text{lok}}^1(\Omega^{\text{ext}})$  das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \Delta u_2 &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \\ [\gamma_0 u_2] &= \gamma_0^{\text{int}} u_1^{\text{int}} && \text{auf } \Gamma, \\ [\partial_{\boldsymbol{\nu}} u_2] &= 0 && \text{auf } \Gamma, \\ u_2^{\text{ext}}(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) && \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.29)$$

zu lösen.

Das Transmissionsproblem (4.29) wurde bereits beispielsweise in [37, 48] ausführlich betrachtet und behandelt. Demnach ist auch bekannt, dass es eine eindeutige Lösung besitzt, die mit Hilfe des Doppelschichtpotentials wie folgt dargestellt werden kann

$$u_2(\mathbf{x}) = \left( \tilde{K}(\gamma_0^{\text{int}} u_1) \right)(\mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} u_1(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma. \quad (4.30)$$

Es sei bemerkt, dass nach den Sprungeigenschaften des Doppelschichtpotentials folgende Gleichheit vorliegt

$$\gamma_0^{\text{int}} \tilde{K}(\gamma_0^{\text{int}} u_1) = (K - 1/2)(\gamma_0^{\text{int}} u_1).$$

Damit kann die partielle Lösung  $u_2$  auf dem Gebiet  $\Omega$  durch das inhomogene Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u_2^{\text{int}} &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \gamma_0 u_2^{\text{int}} &= (K - 1/2)(\gamma_0 u_1^{\text{int}}) && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (4.31)$$

charakterisiert werden.

Insgesamt kann nun der Streufeldoperator mit Hilfe der Lösungen  $u_1$  und  $u_2$  als  $\mathcal{P}\mathbf{m} = \nabla u_1 + \nabla u_2$  auf dem Gebiet  $\Omega$  berechnet werden.

Wir beschäftigen uns nun mit der algorithmischen Umsetzung dieses hybriden FEM-BEM-Ansatzes. Da wir unsere Lösung  $u$  nach dem Superpositionsprinzip berechnen, ist klar, dass wir dazu zwei verschiedene Teilprobleme zu lösen haben. Wie bereits zu Beginn dieses Abschnitts erwähnt und wie auch aus den Gleichungen der partiellen Lösungen hervorgeht, ist in einem ersten Schritt die Lösung eines Neumann-Problems erforderlich. Im zweiten Schritt ist ein inhomogenes Dirichlet-Problem zu lösen. Gekoppelt sind die Probleme über die Randdaten, die zur Lösung des inhomogenen Dirichlet-Problems benötigt werden, da diese unter Anwendung des Doppelschichtpotentials aus der Lösung des Neumann-Problems hervorgehen. Dieses Prozedere induziert folgenden Algorithmus zur Lösung der magnetostatischen Potentialgleichungen:

**Algorithmus 4.3.1.** *Input: Magnetisierung  $\mathbf{m}$ , Triangulierung  $\mathcal{T}_h$ ,  $\mathcal{A}_{h,\Gamma} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_{h,\Gamma})$  Approximationsoperator.*

- (i) *Finde  $u_{1,h} \in \mathcal{S}_*^1(\mathcal{T}_h) := \{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \mid \int_{\Omega} v_h \, d\mathbf{x} = 0\}$ , sodass für alle Testfunktionen  $v_h \in \mathcal{S}_*^1(\mathcal{T}_h)$  folgende Gleichung gilt*

$$(\nabla u_{1,h}, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)} = (\mathbf{m}, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)}. \quad (4.32)$$

- (ii) *Berechne die Randdaten  $g_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_{h,\Gamma})$  als*

$$g_h = \mathcal{A}_{h,\Gamma}(K - 1/2)(\gamma_0 u_{1,h}). \quad (4.33)$$

- (iii) *Finde  $u_{2,h} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ , sodass für alle Testfunktionen  $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h) := \{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \mid v_h(\mathbf{z}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{z} \in \mathcal{N}_h \cap \Gamma\}$  folgende Gleichungen erfüllt sind*

$$\begin{aligned} (\nabla u_{2,h}, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)} &= 0 \\ \gamma_0 u_{2,h} &= g_h. \end{aligned} \quad (4.34)$$

- (iv) *Berechne das approximative magnetostatische Potential  $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  durch*

$$u_h = u_{1,h} + u_{2,h}.$$

*Output: Approximationslösung  $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ .*

Mit der Lösung  $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  aus Algorithmus 4.3.1 lässt sich das Streufeld durch  $\mathcal{P}_h \mathbf{m} = \nabla u_h \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h)^3$  berechnen.

**Bemerkung 4.3.2.** *Wir bemerken, dass der Scott-Zhang-Operator  $\mathcal{S}_h : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  eine  $H^1$ -stabile Projektion auf  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  darstellt und durch*

$$\mathcal{S}_{h,\Gamma} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_{h,\Gamma}) \quad \text{mit} \quad \gamma_0(\mathcal{S}_h v) = \mathcal{S}_{h,\Gamma}(\gamma_0 v) \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega) \quad (4.35)$$

*einen stetigen Operator am Spurraum induziert. Demnach stellt  $\mathcal{S}_{h,\Gamma}$  eine zulässige Wahl des Approximationsoperator  $\mathcal{A}_{h,\Gamma}$  dar.*

**Bemerkung 4.3.3.** *Da im Ansatz von FREDKIN/KOEHLER, siehe [23], zwei FEM-Probleme zu lösen sind und demnach lediglich schwach-besetzte Matrizen auftreten, erwartet man im Gegensatz zu Lösungsansätzen, die auf einer FEM-BEM-Kopplung beruhen, eine schnellere Berechnung der gesuchten Lösung. Darüber hinaus streichen wir hervor, dass dieser Ansatz einzig die Implementierung des Doppelschichtpotentials  $K$  benötigt.*

Schließlich wollen wir einsehen, dass dieser Zugang im Sinne einer rigorosen Konvergenzanalyse, wie sie in Kapitel 3 durchgeführt wird, zulässig ist. Daher weisen wir nach, dass dieser Ansatz den Anforderungen (4.4) und (4.5) genügt.

**Proposition 4.3.4.** *Sei der Interpolationsoperator  $\mathcal{A}_{h,\Gamma}$  aus Algorithmus 4.3.1 der Scott-Zhang-Operator  $\mathcal{S}_{h,\Gamma}$  am Spurraum. Des Weiteren sei  $\mathcal{T}_h$  eine uniforme und formreguläre Triangulierung des Gebiets  $\Omega$ . Dann erfüllt der diskrete Streufeldoperator  $\mathcal{P}_h$ , der durch den Ansatz von FREDKIN und KOEHLER induziert wird, die Bedingungen (4.4) und (4.5).*

*Beweis.* Der Übersichtlichkeit halber gliedern wir den Beweis in einzelne Schritte.

- In einem ersten Schritt wollen wir eine Stabilitätseigenschaft für die Teillösung  $u_{1,h}$  nachweisen. Dazu betrachten wir das diskrete Neumann-Problem (4.32) und wählen eine spezielle Testfunktion  $v_h = u_{1,h} \in \mathcal{S}_*^1(\mathcal{T}_h)$ . Dies führt unter Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auf

$$\|\nabla u_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}^2 = (\mathbf{m}, \nabla u_{1,h})_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}$$

und zeigt damit insbesondere

$$\|\nabla u_{1,h}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)}.$$

- Wir wollen eine (4.5) entsprechende Konvergenzeigenschaft für die Teillösung  $u_{1,h} \in \mathcal{S}_*^1(\mathcal{T}_h)$  einsehen. Dazu bemerken wir dass  $u_{1,h}$  die Galerkin-Approximation von (4.27) ist, weshalb die Céa-Abschätzung

$$\|u_1 - u_{1,h}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \min_{v_h \in \mathcal{S}_*^1(\mathcal{T}_h)} \|u_1 - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

mit einer  $h$ -unabhängigen Konstante  $C > 0$  gilt. Betrachten wir  $\mathcal{D} := H^2(\Omega) \cap H_*^1(\Omega)$ , so stellt dies einen dichten Teilraum von  $H_*^1(\Omega)$  dar. Insbesondere erfüllt der Operator  $(1 - \mathbb{M})\mathcal{I}_h$  mit  $\mathbb{M}$  dem Integralmittel über  $\Omega$  und  $\mathcal{I}_h$  dem nodalen Interpolanten die geforderte Eigenschaft aus (4.17) aus Lemma 4.1.8. Daher erhalten wir die gewünschte Konvergenz

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\nabla u_1 - \nabla u_{1,h}\|_{L^2(\Omega)} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \|u_1 - u_{1,h}\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

und schließen damit diesen Beweisschritt ab.

- Wir verwenden im Folgenden die abkürzende Notation  $\gamma_0 = \gamma_0^{\text{int}}$ . Um eine Stabilitätseigenschaft, die (4.4) entspricht, für die zweite Teillösung  $u_{2,h}$  einzusehen, erinnern wir daran, dass diese approximative Lösung gleichzeitig die Galerkin-Lösung von (4.31) mit gestörten Dirichlet-Daten  $\mathcal{S}_{h,\Gamma}(K-1/2)(\gamma_0 u_{1,h})$  darstellt. Wir schätzen daher unter Berücksichtigung des Céa-Lemmas, der Fortsetzung der Dirichlet-Daten durch  $\mathcal{S}_h \tilde{K}(\gamma_0 u_{1,h}) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  und der Darstellung  $u_2 = \tilde{K}(\gamma_0 u_1)$  wie folgt ab

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{2,h}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_{2,h}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|u_{2,h} - u_2\|_{H^1(\Omega)} + \|u_2\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \min_{v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)} \|(v_h + \mathcal{S}_h \tilde{K}(\gamma_0 u_{1,h})) - u_2\|_{H^1(\Omega)} + \|u_2\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \|\mathcal{S}_h \tilde{K}(\gamma_0 u_{1,h}) - u_2\|_{H^1(\Omega)} + \|u_2\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \|\mathcal{S}_h \tilde{K}(\gamma_0 u_{1,h}) - \mathcal{S}_h \tilde{K}(\gamma_0 u_1)\|_{H^1(\Omega)} + C \|\mathcal{S}_h \tilde{K}(\gamma_0 u_1) - u_2\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \|u_2\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei die Konstante  $C > 0$  lediglich vom Gebiet  $\Omega$  und dessen Rand  $\Gamma$  abhängt. Damit und unter Berücksichtigung der Stetigkeit des Interpolationsoperators  $\mathcal{S}_h : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ , sowie der Stetigkeit des Doppelschichtpotentials  $\tilde{K} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega)$  erhalten wir

$$\|\nabla u_{2,h}\|_{L^2(\Omega)} \leq C' \|\gamma_0(u_{1,h} - u_1)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + C \|\mathcal{S}_h \tilde{K}(\gamma_0 u_1) - u_2\|_{H^1(\Omega)} + \|u_2\|_{H^1(\Omega)}$$

mit  $C' = C'(\Omega, \Gamma) > 0$ . Wir erinnern wieder an die Darstellung (4.30) der Lösung von (4.31) und schätzen unter Berücksichtigung der Stetigkeit von  $\tilde{K}$  die letzten beiden Summanden der rechten Seite nun weiter ab

$$\begin{aligned} & C \|\mathcal{S}_h \tilde{K}(\gamma_0 u_1) - u_2\|_{H^1(\Omega)} + \|u_2\|_{H^1(\Omega)} \\ &= C \|\mathcal{S}_h \tilde{K}(\gamma_0 u_1) - \tilde{K}(\gamma_0 u_1)\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{K}(\gamma_0 u_1)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \|(1 - \mathcal{S}_h) \tilde{K}(\gamma_0 u_1)\|_{H^1(\Omega)} + C' \|\gamma_0 u_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq C'' \|\gamma_0 u_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \end{aligned}$$

mit  $h$ -unabhängigen positiven Konstanten  $C, C', C'' > 0$ . Beachten wir, dass der Sobolev-Raum  $H^{1/2}(\Gamma)$  als der Spurraum von  $H^1(\Omega)$  charakterisiert wird und demnach mit der entsprechenden Quotientennorm versehen ist, so erhalten wir letztendlich

$$\|\nabla u_{2,h}\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|u_{1,h}\|_{H^1(\Omega)} + \|u_1\|_{H^1(\Omega)}.$$

Schließlich führt das Anwenden der Poincaré'schen Ungleichung zusammen mit der Stabilitätsabschätzung aus dem ersten Schritt des Beweises auf

$$\|\nabla u_{2,h}\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\nabla u_{1,h}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)}$$

und zeigt damit Stabilität der Lösung  $u_{2,h}$ .

- Fügen wir die Stabilitätsabschätzungen aus dem ersten und dritten Schritt des Beweises zusammen, so ist insgesamt damit die Stabilitätsaussage

$$\|\mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u_{1,h}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_{2,h}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)}$$

klar, wobei  $C > 0$  eine positive Konstante darstellt, die lediglich vom Gebiet  $\Omega$ , dessen Rand  $\Gamma$  und der Formregularitätskonstante  $\sigma(\mathcal{T}_h)$  abhängt. Wir bemerken, dass sich die Argumente aus den ersten beiden Schritten des Beweises auf eine beliebige diskrete Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^j$  für  $j > 0$  anwenden lassen und haben damit insgesamt Eigenschaft (4.4) nachgewiesen.

- Im vorletzten Schritt des Beweises wollen wir eine Konvergenzeigenschaft, die (4.5) entspricht, für die Teillösung  $u_{2,h}$  nachweisen. Hierzu betrachten wir die schwache Formulierung von (4.31) und das diskrete Pendant (4.34) und erhalten mit der Céa-Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_2 - u_{2,h})\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_2 - u_{2,h}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \min_{v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)} \|u_2 - (v_h + \mathcal{S}_h \tilde{K}(\gamma_0 u_{1,h}))\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \|u_2 - \mathcal{S}_h \tilde{K}(\gamma_0 u_{1,h})\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Mit  $u_2 = \tilde{K}(\gamma_0 u_1)$ , siehe (4.30) erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_2 - u_{2,h})\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\tilde{K}(\gamma_0 u_1) - \mathcal{S}_h \tilde{K}(\gamma_0 u_{1,h})\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|(1 - \mathcal{S}_h) \tilde{K}(\gamma_0 u_1)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \|\mathcal{S}_h \tilde{K}(\gamma_0 u_1 - \gamma_0 u_{1,h})\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Wir bemerken, dass  $\mathcal{S}_h : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$  eine stetige Projektion auf  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  darstellt, d.h. es gilt  $(1 - \mathcal{S}_h)v_h = 0$  für  $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \subset H^1(\Omega)$  beliebig. Damit sehen wir folgende Abschätzung ein

$$\begin{aligned} \|(1 - \mathcal{S}_h)\tilde{K}(\gamma_0 u_1)\|_{H^1(\Omega)} &= \min_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)} \|(1 - \mathcal{S}_h)(\tilde{K}(\gamma_0 u_1) - v_h)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\lesssim \min_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)} \|\tilde{K}(\gamma_0 u_1) - v_h\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Wir erinnern an die Dichtheit von  $C^\infty(\bar{\Omega}) \subseteq H^1(\Omega)$  und bemerken, dass wir unter Anwendung der Dichtheitsaussage von Lemma 4.1.8 mit dem nodalen Interpolanten als Approximationsoperator

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(1 - \mathcal{S}_h)\tilde{K}(\gamma_0 u_1)\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

erhalten.

Um den zweiten Summanden der rechten Seite von (4.36) weiter abzuschätzen, nützen wir die Stetigkeit des Approximationsoperators  $\mathcal{S}_h$  und des Doppelschichtpotentials  $\tilde{K}$ . Dies liefert

$$\|\mathcal{S}_h \tilde{K}(\gamma_0 u_1 - \gamma_0 u_{1,h})\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|\gamma_0(u_1 - u_{1,h})\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

und führt zusammen mit der Stetigkeit des Spurooperators und der Poincaré'schen Ungleichung auf die Abschätzung

$$\|\mathcal{S}_h \tilde{K}(\gamma_0 u_1 - \gamma_0 u_{1,h})\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|u_1 - u_{1,h}\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|\nabla(u_1 - u_{1,h})\|_{L^2(\Omega)}.$$

Es gilt zu beachten, dass aus Schritt 2 bekannt ist, dass hierbei die rechte Seite gegen 0 konvergiert, sofern die Ortsschrittweite  $h$  ebenfalls gegen 0 geht. Dies beschließt diesen Beweisschritt, da wir damit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\nabla(u_2 - u_{2,h})\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

einsehen.

- Letztendlich führt das Zusammenfügen der Konvergenzeigenschaften der Lösungen  $u_{1,h}$  und  $u_{2,h}$  unter Anwendung der Dreiecksungleichung fast überall in  $[0, t_{\text{end}}]$  für  $h \rightarrow 0$  auf

$$\|\mathcal{P}\mathbf{m} - \mathcal{P}_h\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla(u_1 - u_{1,h})\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(u_2 - u_{2,h})\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$$

und bestätigt damit die Konvergenzeigenschaft des approximativ berechneten Streufeldes  $\mathcal{P}_h\mathbf{m}$ . Wir bemerken, dass sich obige Ausführungen für beliebige Funktionen  $\mathbf{n} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  anwenden lassen. Schließlich vervollständigt der Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz, siehe Lemma 4.0.2, den Beweis.  $\square$

In der Originalarbeit von FREDKIN/KOEHLER, siehe [23], wird als Interpolationsoperator  $\mathcal{A}_h$  der nodale Interpolant  $\mathcal{I}_h$  angewandt um  $\tilde{K}(\gamma_0 u_{1,h})$  zu diskretisieren. Dies steht im Gegensatz zur vorliegenden Arbeit, wo als mögliche Wahl des Approximationsoperators  $\mathcal{A}_h$  der Scott-Zhang-Operator  $\mathcal{S}_h$  zum Einsatz kommt. Der Grund hierfür ist die Tatsache, dass  $H^{1/2}$ -Funktionen im Allgemeinen unstetig sind und daher keine Fehleranalyse im mathematischen Sinn erlauben. Betrachtet man ein Gebiet in  $1D$ , so stimmen der nodale Interpolant und der Scott-Zhang-Operator jedoch überein. In diesem Sinn stellt also der Scott-Zhang-Operator eine passende

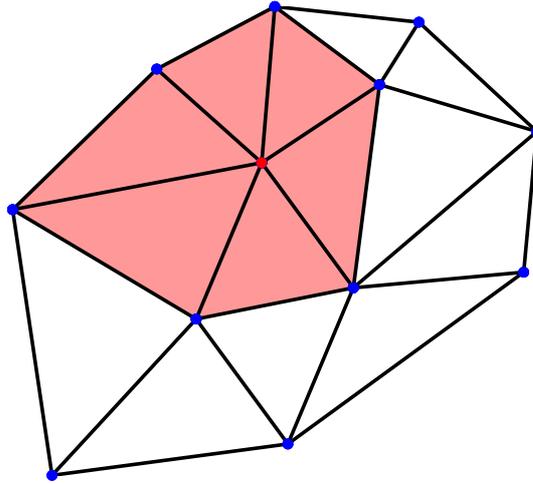


Abbildung 4.1: Der rötlich eingefärbte Bereich markiert den Knotenpatch  $\omega_{\mathbf{z}}^{\Gamma}$  des rot dargestellten Knotens  $\mathbf{z}$ .

Verallgemeinerung des nodalen Interpolanten auf höhere Dimensionen dar.

Wir wollen nun die Wahl des Interpolationsoperators  $\mathcal{A}_h$  zur Diskretisierung von  $(K-1/2)u_{1,h}|_{\Gamma}$  diskutieren.

Das folgende Lemma besagt, dass sowohl durch gewöhnliche Clément-artige Quasiinterpolationsoperatoren am Rand  $\Gamma$  als auch durch die  $L^2$ -Orthogonalprojektion  $\Pi_{h,\Gamma} : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h|_{\Gamma})$  eine Variante des Ansatzes von FREDKIN/KOEHLER repräsentiert wird, der ebenfalls die Anforderungen (4.4) und (4.5) erfüllt. Eine mögliche Wahl für einen Clément-artigen Quasiinterpolationsoperator wird durch

$$(\mathcal{J}_h v)(\mathbf{z}) = \frac{1}{|\omega_{\mathbf{z}}^{\Gamma}|} \int_{\omega_{\mathbf{z}}^{\Gamma}} v \, d\Gamma \quad \text{für alle } \mathbf{z} \in \mathcal{N}_h|_{\Gamma}$$

gegeben. Hierbei definiert  $\omega_{\mathbf{z}}^{\Gamma}$  als

$$\omega_{\mathbf{z}}^{\Gamma} := \bigcup \{E \in \mathcal{T}_{h,\Gamma} : \mathbf{z} \in E\}$$

einen Knotenpatch, also die Vereinigung jener Randelemente, die den Knoten  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_h|_{\Gamma}$  als Eckpunkt beinhalten, siehe Abbildung 4.1.

**Lemma 4.3.5.** Sei  $\mathcal{J}_{h,\Gamma} : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_{h,\Gamma})$  ein  $L^2$ - und  $H^1$ -stabiler Operator, d.h. es gilt

$$\|\mathcal{J}_{h,\Gamma} v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_1 \|v\|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{und} \quad \|\nabla_{\Gamma} \mathcal{J}_{h,\Gamma} v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_2 \|\nabla_{\Gamma} v\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (4.37)$$

Zusätzlich genüge der Interpolationsoperator  $\mathcal{J}_{h,\Gamma}$  einer Approximationseigenschaft erster Ordnung, d.h. er erfülle für alle  $v \in H^1(\Gamma)$

$$\|(1 - \mathcal{J}_{h,\Gamma})v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_3 h \|\nabla_{\Gamma} v\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (4.38)$$

Hierbei bezeichnet  $\nabla_{\Gamma}$  den Oberflächengradienten und die auftretenden Konstanten  $C_1, C_2, C_3 > 0$  sind positiv und bleiben beschränkt, sofern die Ortsschrittweite  $h$  gegen 0 konvergiert. Setzen wir nun den Operator  $\mathcal{J}_{h,\Gamma}$  als Interpolationsoperator  $\mathcal{A}_h$  (anstelle des Scott-Zhang-Operators  $\mathcal{S}_h$ ) zur Diskretisierung der inhomogenen Dirichlet-Daten in (4.31) ein, so sind die Anforderungen (4.4) und (4.5) an den diskreten Streufeldoperator noch immer erfüllt.

*Beweis.* Wir folgen der Beweisführung von Proposition 4.3.4 und bemerken, dass aufgrund der Annahmen an  $\mathcal{J}_{h,\Gamma}$  lediglich der dritte, sowie der fünfte Schritt zu ersetzen sind.

- Zunächst bemerken wir, dass nach den Stabilitätseigenschaften (4.37) der Operator  $\mathcal{J}_{h,\Gamma} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  stetig ist. Mit diesem Charakteristikum ist klar, dass wir im dritten Schritt von Proposition 4.3.4 den Interpolationsoperator  $\mathcal{S}_{h,\Gamma}$  durch  $\mathcal{J}_{h,\Gamma}$  ersetzen können ohne die Korrektheit der Argumentation zu verletzen. Insbesondere erhalten wir damit die gewünschte Stabilität  $\|\mathcal{P}_h \mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{n}\|_{L^2(\Omega)}$  für alle  $\mathbf{n} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  unter Verwendung der Variante des Ansatzes von FREDKIN/KOEHLER mit  $\mathcal{J}_{h,\Gamma}$  als Approximationsoperator.
- In einem zweiten Schritt wollen wir die Konvergenzeigenschaft (4.5) für die diskrete Lösung  $u_{2,h} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  mit den Dirichlet-Daten

$$\gamma_0 u_{2,h} = \mathcal{J}_{h,\Gamma}(K - 1/2)(\gamma_0 u_{1,h})$$

des inhomogenen Dirichlet-Problems (4.34) unter Verwendung von  $\mathcal{J}_{h,\Gamma}$  als Interpolationsoperator nachweisen. Dazu betrachten wir zusätzlich die diskrete Lösung  $\tilde{u}_{2,h} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  bezüglich der Dirichlet-Daten

$$\gamma_0 \tilde{u}_{2,h} = \mathcal{S}_{h,\Gamma}(K - 1/2)(\gamma_0 u_{1,h}),$$

also die Lösung des inhomogenen Dirichlet-Problems (4.34) unter Verwendung des Scott-Zhang-Operators für die Diskretisierung der Dirichlet-Daten. Entsprechend der Dreiecksungleichung gilt folgende Abschätzung

$$\|\nabla u_2 - \nabla u_{2,h}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u_2 - \nabla \tilde{u}_{2,h}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \tilde{u}_{2,h} - \nabla u_{2,h}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Aus dem fünften Schritt des Beweises zu Proposition 4.3.4 ist bekannt, dass der erste Summand der rechten Seite verschwindet sofern die Netzweite  $h$  gegen 0 konvergiert. Um ein solches Resultat auch für den zweiten Beitrag der rechten Seite zu erhalten, bemühen wir die Stabilität des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{u}_{2,h} - \nabla u_{2,h}\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim \|(\mathcal{S}_{h,\Gamma} - \mathcal{J}_{h,\Gamma})(K - 1/2)(\gamma_0 u_{1,h})\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq \|(\mathcal{S}_{h,\Gamma} - \mathcal{J}_{h,\Gamma})(K - 1/2)(\gamma_0 u_1)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\quad + \|(\mathcal{S}_{h,\Gamma} - \mathcal{J}_{h,\Gamma})(K - 1/2)(\gamma_0 u_1 - \gamma_0 u_{1,h})\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Beachtet man die Stetigkeitseigenschaften aller involvierten Operatoren  $\mathcal{S}_{h,\Gamma} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $\mathcal{J}_{h,\Gamma} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  und  $K : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ , so führt dies weiter auf

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{u}_{2,h} - \nabla u_{2,h}\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim \|(\mathcal{S}_{h,\Gamma} - \mathcal{J}_{h,\Gamma})(K - 1/2)(\gamma_0 u_1)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\quad + \|\gamma_0 u_1 - \gamma_0 u_{1,h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass für die Approximationslösung  $u_{1,h}$  des Neumann-Problems (4.32) Konvergenz vorliegt und daher der zweite Term der rechten Seite für  $h \rightarrow 0$  verschwindet. Um Konvergenz auch für den ersten Summanden einzusehen, definieren wir eine Funktion  $v := (K - 1/2)(\gamma_0 u_1) \in H^{1/2}(\Gamma)$  und schreiben diesen sogleich um

$$\|(\mathcal{S}_{h,\Gamma} - \mathcal{J}_{h,\Gamma})v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \|(1 - \mathcal{S}_{h,\Gamma})v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|(1 - \mathcal{J}_{h,\Gamma})v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Wir nützen die Approximationseigenschaft erster Ordnung, siehe (4.38), und die  $H^1$ -Stabilität von  $\mathcal{S}_{h,\Gamma}$  bzw.  $\mathcal{J}_{h,\Gamma}$  aus und erhalten

$$\|(1 - \mathcal{J}_{h,\Gamma})w\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \|(1 - \mathcal{J}_{h,\Gamma})w\|_{L^2(\Gamma)}^{1/2} \|(1 - \mathcal{J}_{h,\Gamma})w\|_{H^1(\Gamma)}^{1/2} \lesssim h^{1/2} \|w\|_{H^1(\Gamma)}$$

für alle  $w \in H^1(\Gamma)$ . Mit dem Dichtheitsargument aus Lemma 4.1.8 sehen wir ein, dass die obere Schranke gegen 0 konvergiert sofern die Ortsschrittweite  $h$  verschwindet. Insgesamt deduzieren wir daraus

$$\|\nabla u_2 - \nabla u_{2,h}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Damit ist der Beweis nun abgeschlossen. □

## 4.4 Hybrider FEM-BEM-Ansatz nach García-Cervera/Roma

Als alternativen hybriden FEM-BEM-Ansatz stellen wir das Lösungsverfahren nach GARCÍA-CERVERA und ROMA vor, siehe [24]. Wie die Namensgebung bereits vermuten lässt, ist dieses Verfahren verwandt zum Lösungsansatz von FREDKIN und KOEHLER. Allerdings läuft diese Methode zur approximativen Berechnung des Streufeldes zunächst auf das Lösen eines homogenen Dirichlet-Problems hinaus, wobei in einem zweiten Schritt ein inhomogenes Dirichlet-Problem zu behandeln ist.

Auch diese Methode beruht, wie der Ansatz von FREDKIN und KOEHLER, auf dem Superpositionsprinzip, weshalb wir die gesuchte Lösung  $u$  darstellen als  $u = u_1 + u_2$ . Wir betrachten für eine gegebene Magnetisierung  $\mathbf{m} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  eine Funktion  $u_1 \in H^1(\Omega)$  mit  $\gamma_0 u_1 = 0$ , sodass  $u_1$  das homogene Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u_1^{\text{int}} &= \operatorname{div} \mathbf{m} && \text{in } \Omega, \\ u_1^{\text{int}} &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (4.39)$$

löst. Wir setzen diese Lösung auf den Ganzraum  $\mathbb{R}^3$  durch  $u_1^{\text{ext}} = 0$  fort. Dies induziert folgende Sprungeigenschaften

$$\begin{aligned} [\gamma_0 u_1] &= 0, \\ [\gamma_1 u_1] &= \gamma_1^{\text{int}} u_1^{\text{int}}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Um nun sicherzustellen, dass  $u = u_1 + u_2$  das magnetostatische Potential darstellt, also Gleichungssystem (4.2) erfüllt, muss  $u_2 = u - u_1$  Lösung des folgenden Gleichungssystems sein

$$\begin{aligned} \Delta u_2 &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \\ [u_2] &= 0 && \text{auf } \Gamma, \\ [\partial_{\boldsymbol{\nu}} u_2] &= -\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} + \partial_{\boldsymbol{\nu}} u_1 && \text{auf } \Gamma, \\ u_2^{\text{ext}}(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|) && \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Es sei bemerkt, dass  $\partial_{\boldsymbol{\nu}} u_i$  stets die innere Normalenableitung einer Funktion  $u_i$  bezeichnet.

In der Literatur wurde sich bereits ausgiebig mit dem Transmissionsproblem (4.41) beschäftigt, siehe beispielsweise [37, 48]. Hier sei lediglich betont, dass die eindeutige Lösung des Gleichungssystems (4.41) durch das Einfachschichtpotential wie folgt gegeben ist

$$u_2(\mathbf{x}) = \left( \widetilde{V}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \partial_{\boldsymbol{\nu}} u_1) \right)(\mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{m}(\mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) - \partial_{\boldsymbol{\nu}} u_1(\mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} ds_{\mathbf{y}} \quad (4.42)$$

für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ . Da das Einfachschichtpotential stetig auf  $\mathbb{R}^3$  ist, kann  $u_2$  im Gebiet  $\Omega$  durch das inhomogene Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u_2^{\text{int}} &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u_2^{\text{int}} &= V(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \partial_{\boldsymbol{\nu}} u_1) && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (4.43)$$

charakterisiert werden. Hierbei stimmt der Operator  $V$  mit  $\tilde{V}$  überein, wobei dieser nun für  $\mathbf{x} \in \Gamma$  ausgewertet wird.

Mit Hilfe der Teillösungen  $u_1$  und  $u_2$  lässt sich das Streufeld auf dem Gebiet  $\Omega$  durch  $\mathcal{P}\mathbf{m} = \nabla u_1 + \nabla u_2$  berechnen.

Wir wollen uns nun mit der numerischen Umsetzung dieses Ansatzes beschäftigen.

Da wir unsere Lösung  $u$  nach dem Superpositionsprinzip berechnen, ist klar, dass wir dazu zwei verschiedene Teilprobleme zu lösen haben. Wie bereits zu Beginn dieses Abschnitts erwähnt und wie auch aus den Gleichungen der partiellen Lösungen hervorgeht, ist in einem ersten Schritt die Lösung eines homogenen Dirichlet-Problems erforderlich. Im zweiten Schritt ist ein inhomogenes Dirichlet-Problem zu lösen. Gekoppelt sind die Probleme über die Randdaten, die zur Lösung des inhomogenen Dirichlet-Problems benötigt werden, da diese aus der Lösung des homogenen Dirichlet-Problems hervorgehen. Dieses Prozedere induziert folgenden Algorithmus zur Lösung der magnetostatischen Potentialgleichungen:

**Algorithmus 4.4.1.** *Input: Magnetisierung  $\mathbf{m}$ , Triangulierung  $\mathcal{T}_h$ , Approximationsoperator  $\mathcal{A}_{h,\Gamma} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_{h,\Gamma})$ .*

- (i) *Finde  $u_{1,h} \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$ , sodass für alle Testfunktionen  $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$  folgende Gleichung gilt*

$$(\nabla u_{1,h}, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)} = (\mathbf{m}, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)}. \quad (4.44)$$

- (ii) *Berechne die Randdaten  $g_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_{h,\Gamma})$  mit*

$$g_h = \mathcal{A}_{h,\Gamma} \mathcal{V}(\Pi_{h,\Gamma}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu}). \quad (4.45)$$

- (iii) *Finde  $u_{2,h} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ , sodass für alle Testfunktionen  $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$  folgende Gleichungen erfüllt sind*

$$\begin{aligned} (\nabla u_{2,h}, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)} &= 0 \\ \gamma_0 u_{2,h} &= g_h. \end{aligned} \quad (4.46)$$

- (iv) *Berechne das approximative magnetostatische Potential  $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  durch*

$$u_h = u_{1,h} + u_{2,h}.$$

*Output: Approximationslösung  $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ .*

Eine mögliche Wahl des Interpolationsoperators  $\mathcal{A}_{h,\Gamma} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_{h,\Gamma})$  könnte der Scott-Zhang-Operator  $\mathcal{S}_{h,\Gamma}$  sein. Des Weiteren bezeichnet  $\Pi_{h,\Gamma} : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_{h,\Gamma})$  die  $L^2$ -Orthogonalprojektion auf  $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_{h,\Gamma})$ , also die Berechnung des stückweisen Integralmittels.

Wieder lässt sich mit Hilfe der Lösung  $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  aus Algorithmus 4.4.1 das Streufeld durch  $\mathcal{P}_h \mathbf{m} = \nabla u_h \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h)^3$  berechnen.

Im Gegensatz zum hybriden FEM-BEM-Ansatz nach FREDKIN/KOEHLER können wir für den Ansatz von GARCÍA-CERVERA/ROMA zur Lösung der magnetostatischen Potentialgleichungen (4.2) weder Stetigkeit im Sinn von (4.4) noch Konvergenzeigenschaft (4.5) feststellen. Unter Zuhilfenahme zusätzlicher Bedingungen halten wir einerseits eine modifizierte Stetigkeitsabschätzung fest und können andererseits Konvergenzeigenschaft (4.5) nachweisen.

**Proposition 4.4.2.** *Sei der Interpolationsoperator  $\mathcal{A}_{h,\Gamma}$  in Algorithmus 4.4.1 als Scott-Zhang-Operator  $\mathcal{S}_{h,\Gamma}$  am Spurraum festgelegt. Des Weiteren sei  $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} \in L^2(\Gamma)$  und es gelte*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\gamma_1 u_1 - \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = 0. \quad (4.47)$$

Dann genügt der diskrete Streufeldoperator, der nach dem hybriden FEM-BEM-Ansatz nach GARCÍA-CERVERA/ROMA, also mittels Algorithmus 4.4.1, berechnet wird, der Abschätzung

$$\|\mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\mathbf{m}\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} + \alpha_h \quad (4.48)$$

mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha_h = 0 \quad (4.49)$$

und erfüllt Konvergenzeigenschaft (4.5).

*Beweis.* Wir gliedern den Beweis in einzelne Schritte.

- Wir betrachten zunächst das homogene Dirichlet-Problem (4.44), wählen als spezielle Testfunktion  $v_h = u_{1,h} \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$  und schätzen nach Cauchy-Schwarz ab

$$\|\nabla u_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}^2 = (\nabla u_{1,h}, \nabla u_{1,h})_{L^2(\Omega)} = (\mathbf{m}, \nabla u_{1,h})_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Damit sehen wir insbesondere

$$\|\nabla u_{1,h}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)}.$$

- Wir erinnern daran, dass  $u_{1,h} \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$  die Galerkin-Approximation zur kontinuierlichen Lösung  $u_1$  des homogenen Dirichlet-Problems (4.39) ist. Demnach gilt das Céa-Lemma und wir sehen

$$\|\nabla u_1 - \nabla u_{1,h}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_1 - u_{1,h}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \min_{v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)} \|u_1 - v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

mit einer  $h$ -unabhängigen Konstante  $C > 0$ . Wir bemerken, dass  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  dicht in  $H_0^1(\Omega)$  ist und halten fest, dass der nodale Interpolationsoperator  $\mathcal{I}_h$  Anforderung (4.17) genügt. Damit deduzieren wir mit dem Dichtheitsargument aus Lemma 4.1.8 die gewünschte Konvergenz

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\nabla u_1 - \nabla u_{1,h}\|_{L^2(\Omega)} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \|u_1 - u_{1,h}\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

- Um eine Konvergenzeigenschaft für die diskrete Teillösung  $u_{2,h}$  einzusehen, bedienen wir uns des Céa-Lemmas und erhalten

$$\begin{aligned} \|\nabla u_2 - \nabla u_{2,h}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_2 - u_{2,h}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\lesssim \min_{v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)} \|u_2 - (v_h + \mathcal{S}_h \tilde{V}(\Pi_{h,\Gamma}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu}))\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|u_2 - \mathcal{S}_h \tilde{V}(\Pi_{h,\Gamma}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu})\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

mit einer positiven Konstante, die lediglich vom Gebiet  $\Omega$  und dessen Rand  $\Gamma$  abhängt. Wieder setzen wir Darstellung (4.42) der kontinuierlichen Lösung des inhomogenen Dirichlet-Problems ein

$$\begin{aligned} \|\nabla u_2 - \nabla u_{2,h}\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim \|\tilde{V}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_1 u_1) - \mathcal{S}_h \tilde{V}(\Pi_{h,\Gamma}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu})\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|\tilde{V}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_1 u_1) - \mathcal{S}_h \tilde{V}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_1 u_1)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \|\mathcal{S}_h \tilde{V}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_1 u_1) - \mathcal{S}_h \tilde{V}(\Pi_{h,\Gamma}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu})\|_{H^1(\Omega)} \\ &= \|(1 - \mathcal{S}_h)(\tilde{V}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_1 u_1))\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \|\mathcal{S}_h \tilde{V}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_1 u_1 - \Pi_{h,\Gamma}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu})\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Um den ersten Summanden der rechten Seite weiter abzuschätzen, bemerken wir  $u_2 = \tilde{V}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_1 u_1)$ , bedienen uns der Tatsache, dass  $v_h \in \ker(1 - \mathcal{S}_h)$  für alle  $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  gilt, und sehen

$$\|(1 - \mathcal{S}_h)u_2\|_{H^1(\Omega)} = \min_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)} \|(1 - \mathcal{S}_h)(u_2 - v_h)\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \min_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)} \|u_2 - v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Mit dem Dichtheitsargument aus Lemma 4.1.8 unter der Wahl des nodalen Interpolationsoperators  $\mathcal{I}_h$ , der Anforderung (4.17) genügt, als Approximationsoperator und aufgrund der Dichtheit von  $C^\infty(\overline{\Omega}) \subseteq H^1(\Omega)$  erhalten wir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(1 - \mathcal{S}_h)(\tilde{V}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_1 u_1))\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Wenden wir die Stetigkeitseigenschaften des Scott-Zhang-Operators  $\mathcal{S}_h$  und des Einfachschichtpotentials  $\tilde{V}$  an, so sehen wir weiters

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{S}_h \tilde{V}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_1 u_1 - \Pi_{h,\Gamma}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu})\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_1 u_1 - \Pi_{h,\Gamma}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\leq \|(1 - \Pi_{h,\Gamma})(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu})\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|\gamma_1 u_1 - \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

woraus sich unter Anwendung der Approximationseigenschaft von  $\Pi_{h,\Gamma}$  folgende Abschätzung ergibt

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{S}_h \tilde{V}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_1 u_1 - \Pi_{h,\Gamma}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu})\|_{H^1(\Omega)} \\ &= \mathcal{O}(h^{1/2}) + \|\gamma_1 u_1 - \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Schließlich führt dies unter Berücksichtigung der Voraussetzung (4.47) auf

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\nabla u_2 - \nabla u_{2,h}\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{h \rightarrow 0} \|\gamma_1 u_1 - \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = 0$$

und beschließt somit diesen Beweisschritt.

- Ausgehend vom inhomogenen Dirichlet-Problem (4.46) schätzen wir mit Hilfe des Céa-Lemmas und der Fortsetzung  $\mathcal{S}_h \tilde{V}(\Pi_{h,\Gamma}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu})$  der Dirichlet-Daten  $\mathcal{S}_{h,\Gamma} \mathcal{V}(\Pi_{h,\Gamma}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu})$  wie folgt ab

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{h,2}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_{h,2}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|u_{h,2} - u_2\|_{H^1(\Omega)} + \|u_2\|_{H^1(\Omega)} \\ &\lesssim \min_{v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)} \|v_h + \mathcal{S}_h \tilde{V}(\Pi_{h,\Gamma}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu}) - u_2\|_{H^1(\Omega)} + \|u_2\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|u_2 - \mathcal{S}_h \tilde{V}(\Pi_{h,\Gamma}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu})\|_{H^1(\Omega)} + \|u_2\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Wir erinnern an die Darstellung (4.42) der Lösung des inhomogenen Dirichlet-Problems und setzen diese ein

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{h,2}\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim \|\tilde{V}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_1 u_1) - \mathcal{S}_h \tilde{V}(\Pi_{h,\Gamma}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \nabla u_{1,h} \cdot \boldsymbol{\nu})\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \|\tilde{V}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_1 u_1)\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Wir schätzen den zweiten Summanden unter Zuhilfenahme der Stetigkeit des Einfachschichtpotentials  $\tilde{V}$  und ebendieser Eigenschaft der Konormalenableitung  $\gamma_1$  weiter ab

$$\begin{aligned} \|\tilde{V}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_1 u_1)\|_{H^1(\Omega)} &\lesssim \|\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_1 u_1\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\lesssim \|\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|\gamma_1 u_1\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\leq \|\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|u_1\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Mit der Friedrichs-Ungleichung, dem Resultat aus Schritt 1 und der Tatsache, dass  $\gamma_{\boldsymbol{\nu}}$  sich auf einen stetigen und linearen Operator von  $H(\operatorname{div}; \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  erweitern lässt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\tilde{V}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} - \gamma_1 u_1)\|_{H^1(\Omega)} &\lesssim \|\gamma_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{m}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim \|\mathbf{m}\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} + \|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim \|\mathbf{m}\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)}. \end{aligned}$$

Wir schätzen den ersten Summanden der rechten Seite von (4.50) wie in Schritt 3 des Beweises ab und erhalten einen Term  $\alpha_h$  für den  $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha_h = 0$  gilt. Damit sehen wir insgesamt

$$\|\nabla u_{h,2}\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\mathbf{m}\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} + \alpha_h$$

wodurch dieser Beweisschritt nun vollständig ist.

- Schließlich fügen wir die Resultate, die wir im ersten und vierten Schritt des Beweises gewonnen haben, zusammen und schätzen mit der Dreiecksungleichung ab

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\nabla u_{1,h}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_{2,h}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim \|\mathbf{m}\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} + \alpha_h \end{aligned}$$

Damit haben wir insgesamt Eigenschaft (4.48) nachgewiesen.

- Kombinieren wir die Resultate der letzten Schritte, so erhalten wir unter Anwendung der Dreiecksungleichung fast überall in  $[0, t_{\text{end}}]$  für  $h \rightarrow 0$

$$\|\mathcal{P} \mathbf{m} - \mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla(u_1 - u_{1,h})\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(u_2 - u_{2,h})\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Dies stellt die geforderte Konvergenzeigenschaft (4.5) des approximativ berechneten Streufeldes  $\mathcal{P}_h \mathbf{m}$  dar. Wir bemerken, dass sich obige Ausführungen für beliebige Funktionen  $\mathbf{n} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  anwenden lassen. Schließlich vervollständigt der Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz, siehe Lemma 4.0.2, den Beweis. □

Im Vergleich zum Ansatz von FREDKIN und KOEHLER ist zu bemerken, dass der hybride FEM-BEM-Ansatz, der von GARCÍA-CERVERA und ROMA eingeführt wurde, die Lösung von zwei Dirichlet-Problemen benötigt. Daher liegt der Vorteil dieser Methode darin, dass für beide Probleme lediglich ein Löser zum Einsatz kommt. Dennoch eignet sich dieser Ansatz nicht zur Lösung der magnetostatischen Potentialgleichungen im Sinn der Konvergenzanalyse aus Kapitel 3, da weder Anforderung (4.4) noch Konvergenzeigenschaft (4.5) unter den üblichen Voraussetzungen einzusehen sind. Fordert man hingegen (4.47), so lässt sich Konvergenzeigenschaft (4.5) nachweisen.

## 4.5 Symmetrische FEM-BEM-Kopplung

In diesem Abschnitt wollen wir eine Methode zur näherungsweisen Berechnung des Streufeldes anführen und diskutieren, die auf einer FEM-BEM-Kopplung basiert. Die sogenannte symmetrische FEM-BEM-Kopplung geht auf COSTABEL zurück, siehe [19]. Anders als in den vorangegangenen Abschnitten benötigt dieser Ansatz das Lösen eines einzigen Gleichungssystems, wobei jedoch diverse Integraloperatoren involviert sind.

Zunächst wollen wir das symmetrische FEM-BEM-Kopplungsproblem in einer allgemeinen Variante präsentieren. Dazu seien  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$  und  $g_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$  gegeben. Damit lautet das zu lösende Problem: Finde  $(u, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ , sodass

$$\begin{aligned} (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (W(\gamma_0 u) + (K' - 1/2)\phi, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)} &= (f, v)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - (g_1 + Wg_0, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)}, \\ (\psi, V\phi - (K - 1/2)(\gamma_0 u))_{L^2(\Gamma)} &= (\psi, (K - 1/2)g_0)_{L^2(\Gamma)} \end{aligned} \quad (4.51)$$

für alle  $v \in H^1(\Omega)$  und  $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$  gilt.

**Bemerkung 4.5.1.** In der Arbeit von COSTABEL, siehe [19], wird gezeigt, dass die Formulierung des Kopplungsproblems (4.51) auf beliebigen abgeschlossenen Teilräumen  $\mathcal{X}_h \subseteq H^1(\Omega)$  und  $\mathcal{Y}_h \subseteq H^{-1/2}(\Gamma)$  eine uniforme Inf-Sup-Bedingung erfüllt sofern der diskrete Teilraum  $\mathcal{Y}_h$  die konstanten Funktionen beinhaltet. Demnach stellt dann der Kopplungsoperator  $\mathbb{H}$  mit

$$\begin{aligned} \mathbb{H} : \mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h &\rightarrow (\mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h)^*, \\ (\mathbb{H}(u_h, \phi_h))(v_h, \psi_h) &:= (\nabla u_h, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)} + (W(\gamma_0 u_h) + (K' - 1/2)\phi_h, \gamma_0 v_h)_{L^2(\Gamma)} \\ &\quad + (\psi_h, V\phi_h - (K - 1/2)(\gamma_0 u_h))_{L^2(\Gamma)} \end{aligned} \quad (4.52)$$

einen Isomorphismus dar und es gilt  $\|\mathbb{H}\|, \|\mathbb{H}^{-1}\| \leq C$  mit einer positiven Konstante  $C = C(\Omega) > 0$ , die weder von  $\mathcal{X}_h$  noch von  $\mathcal{Y}_h$  abhängt. Des Weiteren gilt die Céa-Abschätzung

$$\|(u, \phi) - (u_h, \phi_h)\|_{H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \min_{(v_h, \psi_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h} \|(u, \phi) - (v_h, \psi_h)\|_{H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)}$$

mit einer positiven Konstante  $C > 0$ , die nur vom Gebiet  $\Omega$  abhängt. Hierbei stellt  $(u, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$  das kontinuierliche Lösungspaar zu (4.51) und  $(u_h, \phi_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h$  die entsprechende Galerkin-Lösung dar.

Es sei bemerkt, dass nach [16] das Transmissionsproblem

$$\begin{aligned} \Delta u^{\text{int}} &= f && \text{in } \Omega, \\ \Delta u^{\text{ext}} &= 0 && \text{in } \Omega^{\text{ext}}, \\ [u] &= g_0 && \text{auf } \Gamma, \\ [\partial_{\nu} u] &= -g_1 && \text{auf } \Gamma, \\ u^{\text{ext}}(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|) && \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.53)$$

äquivalent zur FEM-BEM-Kopplung (4.51) ist in folgendem Sinn: Ist  $(u^{\text{int}}, u^{\text{ext}}) \in H^1(\Omega) \times H_{\text{lok}}^1(\Omega^{\text{ext}})$  eine Lösung des Transmissionsproblems (4.53), dann stellt  $(u^{\text{int}}, \partial_{\nu} u^{\text{ext}}) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$  eine Lösung der direkten FEM-BEM-Kopplung (4.51) dar. In umgekehrter Weise gilt für den Fall, dass  $(u^{\text{int}}, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$  eine Lösung von (4.51) darstellt, dass dann auch das Lösungspaar  $(u^{\text{int}}, \tilde{K}(\gamma_0 u + g_0) - \tilde{V}\phi) \in H^1(\Omega) \times H_{\text{lok}}^1(\Omega^{\text{ext}})$  eine Lösung des Transmissionsproblems (4.53) ist.

Aus Bemerkung 4.5.1 schließen wir zusammen mit der Äquivalenz der beiden Formulierungen (4.51) und (4.53), dass auch das Transmissionsproblem (4.53) eindeutig lösbar ist.

Ausgehend von der allgemeinen Formulierung (4.51) deduzieren wir nun daraus ein symmetrisches Kopplungsproblem zur Lösung der magnetostatischen Gleichungen (4.2). Sei  $\mathbf{m} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  gegeben, dann definieren wir  $f = -\operatorname{div} \mathbf{m}$ ,  $g_0 = 0$  und  $g_1 = -\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}$ . Nach der ersten Greenschen Identität gilt

$$(-\operatorname{div} \mathbf{m}, v)_{L^2(\Omega)} = (\mathbf{m}, \nabla v)_{L^2(\Omega)} - (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega).$$

Demnach lautet das nun zu lösende Gleichungssystem wie folgt: Finde  $(u, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ , sodass

$$\begin{aligned} (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + (W(\gamma_0 u) + (K' - 1/2)\phi, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)} &= (\mathbf{m}, \nabla v)_{L^2(\Omega)}, \\ (\psi, V\phi - (K - 1/2)(\gamma_0 u))_{L^2(\Gamma)} &= 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

für alle  $v \in H^1(\Omega)$  und  $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$  gilt.

Der Anteil  $u$  der Lösung  $(u, \phi)$  des Kopplungsproblems (4.54) entspricht der Lösung des Transmissionsproblems (4.2) auf dem Gebiet  $\Omega$ . Die Lösungskomponente  $\phi$  stellt hingegen die äußere Normalenableitung der Lösung von (4.2) am Rand  $\Gamma$  dar.

Des Weiteren halten wir fest, dass das Ersetzen des Sobolev-Raums  $H^1(\Omega)$  durch den FE-Ansatzraum  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  und das Ersetzen von  $H^{-1/2}(\Gamma)$  durch den Raum der stückweise konstanten Ansatzfunktion  $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_{h,\Gamma})$  auf eine Galerkin-Lösung  $(u_h, \phi_h)$  von (4.54) führt. Insbesondere wird damit der diskrete Streufeldoperator durch  $\mathcal{P}_h \mathbf{m} = \nabla u_h$  berechnet.

Wir stellen der Vollständigkeit halber den symmetrischen FEM-BEM-Kopplungsansatz in folgendem Algorithmus dar:

**Algorithmus 4.5.2.** *Input: Magnetisierung  $\mathbf{m}$ , Triangulierung  $\mathcal{T}_h$ .*

- (i) *Finde  $(u_h, \phi_h) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_{h,\Gamma})$ , sodass für alle Testpaare  $(v_h, \psi_h) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_{h,\Gamma})$  folgende Gleichung gilt*

$$\begin{aligned} (\nabla u_h, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)} + (W u_h + (K' - 1/2)\phi_h, v_h)_{L^2(\Gamma)} &= (\mathbf{m}, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)}, \\ (\psi_h, V\phi_h - (K - 1/2)v_h)_{L^2(\Gamma)} &= 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

*Output: Approximationslösung  $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ .*

Auch der symmetrische FEM-BEM-Kopplungsansatz nach COSTABEL eignet sich als Methode zur approximativen Berechnung des Streufeldes ohne die Gültigkeit der Konvergenzanalyse aus Kapitel 3 zu verändern. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

**Proposition 4.5.3.** *Der diskrete Streufeldoperator, der nach dem FEM-BEM-Kopplungsansatz von COSTABEL, also mittels Algorithmus 4.5.2, berechnet wird, erfüllt die Anforderungen (4.4) und (4.5).*

*Beweis.* Wir gliedern den Beweis in zwei Teile.

- Da der FE-Ansatzraum  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  ein abgeschlossener Teilraum des Sobolev-Raums  $H^1(\Omega)$  ist und auch  $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_{h,\Gamma})$  ein abgeschlossener Teilraum von  $H^{-1/2}(\Gamma)$  ist, gilt eine uniforme

Inf-Sup-Bedingung für  $h \rightarrow 0$  nach [19]. Wir schätzen daher mit dem Céa-Lemma wie folgt ab

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} &= \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \min_{(v_h, \psi_h) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h)} (\|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} + \|\phi - \psi_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}). \end{aligned}$$

Wir wählen  $v_h = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} u \, d\mathbf{x}$  und  $\psi_h = 0$ . Dies erlaubt uns nach Poincaré weiter abzuschätzen

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \left\| u - |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} u \, d\mathbf{x} \right\|_{H^1(\Omega)} + \|\phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\lesssim \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Wir beachten unter der Invarianz von  $K - 1/2$  gegenüber konstanten Funktionen die Darstellung  $\phi = V^{-1}(K - 1/2)u = V^{-1}(K - 1/2)(u - c)$  und schätzen den letzten Summanden der rechten Seite mit Hilfe der Stetigkeitseigenschaften der auftretenden Operatoren weiter ab

$$\|\phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \|V^{-1}(K - 1/2)(u - c)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \lesssim \|u - c\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Schließlich treffen wir für die konstante Funktion  $c$  die Wahl  $c = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} u \, d\mathbf{x}$  und erhalten nach Poincaré

$$\|\phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \lesssim \|u - c\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \|u - c\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

und damit insgesamt die Stabilitätsabschätzung

$$\|\mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \|\mathcal{P} \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Wir bemerken, dass diese Argumentation für beliebige Funktionen  $\mathbf{n} \in L^2(\Omega)$  anwendbar ist und haben damit Eigenschaft (4.4) nachgewiesen.

- Um Konvergenzeigenschaft (4.5) einzusehen, bemühen wir wieder das Céa-Lemma

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P} \mathbf{m} - \mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} &= \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \min_{(v_h, \psi_h) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h)} (\|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} + \|\phi - \psi_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}). \end{aligned}$$

Wir bedienen uns der Dichtheit von  $H^2(\Omega)$  in  $H^1(\Omega)$  bzw.  $L^2(\Gamma)$  in  $H^{-1/2}(\Gamma)$  und setzen als Approximationsoperatoren den Scott-Zhang-Operator  $\mathcal{S}_h$  bzw. die Projektion  $\Pi_h$  in Lemma 4.1.8 ein. Damit schließen wir fast überall in  $[0, t_{\text{end}}]$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathcal{P} \mathbf{m} - \mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Wieder beschließen wir mit dem Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz, siehe Lemma 4.0.2, den Beweis.

□

Zusammenfassend halten wir fest, dass der symmetrische FEM-BEM-Kopplungsansatz mit Matrizen auskommt, die entweder symmetrisch oder elliptisch sind. Dem ist die Tatsache gegenüber zu stellen, dass alle Randintegraloperatoren, nämlich das Einfachschichtpotential  $V$ , das Doppelschichtpotential  $K$ , das adjungierte Doppelschichtpotential  $K'$ , sowie der hypersinguläre Integraloperator  $W$ , zum Einsatz kommen. Darüber hinaus ist im Vergleich zu den hybriden FEM-BEM-Ansätzen jeweils ein größeres Gleichungssystem zu lösen.

## 4.6 Direkte FEM-BEM-Kopplung nach Johnson/Nédélec

Ein weiterer Ansatz zur approximativen Berechnung des Streufeldes basierend auf FEM-BEM-Kopplung wird in der Literatur auch als *direkte FEM-BEM-Kopplung* oder *einfache FEM-BEM-Kopplung* bezeichnet und geht auf JOHNSON und NÉDÉLEC zurück. In ihrer Arbeit [30] stellen die beiden Autoren einen Kopplungsansatz vor, der lediglich das Einfachschichtpotential  $V$  und das Doppelschichtpotential  $K$  zur Umsetzung benötigt. Dies steht im Gegensatz zur *symmetrischen FEM-BEM-Kopplung* nach COSTABEL, wo sämtliche Randintegraloperatoren involviert sind.

Zunächst betrachten wir die allgemeine Formulierung des direkten Kopplungsproblems. Dabei seien  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ , sowie  $g_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$  gegeben. Ausgehend von der ersten Gleichung des Calderón-Systems (4.14) lautet das in diesem Ansatz zu lösende Problem: Finde  $(u, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ , sodass

$$\begin{aligned} (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} - (\phi, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)} &= (f, v)_{L^2(\Omega)} - (g_1, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)}, \\ (\psi, V\phi - (K - 1/2)(\gamma_0 u))_{L^2(\Gamma)} &= (\psi, (K - 1/2)(g_0))_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (4.56)$$

für alle  $v \in H^1(\Omega)$  und  $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$  gilt. Nach JOHNSON/NÉDÉLEC [30] besitzt das Gleichungssystem (4.56) eine eindeutige Lösung.

**Bemerkung 4.6.1.** *Betrachtet man ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , so ist zur Erhaltung der Existenz einer eindeutigen Lösung des Kopplungsproblems (4.56) eine Skalierung des Gebiets nötig, sodass letztendlich  $\text{diam}(\Omega) < 1$  gilt. Schließlich gewährleistet eine solche Skalierung, dass das Einfachschichtpotential  $V$  positiv definit ist und damit eine eindeutige Lösung sichergestellt ist.*

**Bemerkung 4.6.2.** *In der Arbeit von SAYAS, siehe [49], wird auf das Problem (4.56) Stellung bezogen. Dabei wird nachgewiesen, dass für beliebige abgeschlossene Teilräume  $\mathcal{X}_h \subseteq H^1(\Omega)$  und  $\mathcal{Y}_h \subseteq H^{-1/2}(\Gamma)$  eine gleichmäßige Inf-Sup-Bedingung erfüllt ist, sofern der diskrete Teilraum  $\mathcal{Y}_h$  die konstanten Funktionen beinhaltet. Demnach stellt der Kopplungsoperator  $\mathbb{H}$  mit*

$$\begin{aligned} \mathbb{H} : \mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h &\rightarrow (\mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h)^*, \\ (\mathbb{H}(u_h, \phi_h))(v_h, \psi_h) &:= (\nabla u_h, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)} - (\phi_h, \gamma_0 v_h)_{L^2(\Gamma)} \\ &\quad + (\psi_h, V\phi_h - (K - 1/2)(\gamma_0 u_h))_{L^2(\Gamma)} \end{aligned} \quad (4.57)$$

einen Isomorphismus dar und es gilt  $\|\mathbb{H}\|, \|\mathbb{H}^{-1}\| \leq C$  mit einer positiven Konstante  $C = C(\Omega) > 0$ , die weder von  $\mathcal{X}_h$  noch von  $\mathcal{Y}_h$  abhängt. Des Weiteren gilt die Céa-Abschätzung

$$\|(u, \phi) - (u_h, \phi_h)\|_{H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \min_{(v_h, \psi_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h} \|(u, \phi) - (v_h, \psi_h)\|_{H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)}$$

mit einer positiven Konstante  $C > 0$ , die nur vom Gebiet  $\Omega$  abhängt. Hierbei stellt  $(u, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$  das kontinuierliche Lösungspaar zu (4.56) und  $(u_h, \phi_h) \in \mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h$  die entsprechende Galerkin-Lösung dar.

Wir betrachten für gegebenes  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$  und  $g_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$  das allgemeine Transmissionsproblem, das im distributionellen Sinn zu verstehen ist,

$$\begin{aligned} \Delta u^{\text{int}} &= f && \text{in } \Omega, \\ \Delta u^{\text{ext}} &= 0 && \text{in } \Omega^{\text{ext}}, \\ [u] &= g_0 && \text{auf } \Gamma, \\ [\partial_{\boldsymbol{\nu}} u] &= -g_1 && \text{auf } \Gamma, \\ u^{\text{ext}}(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|) && \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{4.58}$$

mit  $[u]$  und  $[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u]$  die Sprünge von  $u$  und seiner Normalenableitung am Rand  $\Gamma = \partial\Omega$ . Dieses ist äquivalent zum Kopplungsproblem (4.56) in folgendem Sinn:

Ist  $(u^{\text{int}}, u^{\text{ext}}) \in H^1(\Omega) \times H_{\text{lok}}^1(\Omega^{\text{ext}})$  eine Lösung des Transmissionsproblems (4.58), dann stellt  $(u^{\text{int}}, \partial_{\boldsymbol{\nu}} u^{\text{ext}}) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$  eine Lösung der direkten FEM-BEM-Kopplung (4.56) dar. In umgekehrter Weise gilt für den Fall, dass  $(u^{\text{int}}, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$  eine Lösung von (4.56) darstellt, dass dann auch das Lösungspaar  $(u^{\text{int}}, \tilde{K}(\gamma_0 u + g_0) - \tilde{V}(\phi)) \in H^1(\Omega) \times H_{\text{lok}}^1(\Omega^{\text{ext}})$  eine Lösung des Transmissionsproblems (4.58) ist.

Damit können wir nun ein Kopplungsproblem zur Lösung der magnetostatischen Gleichungen (4.2) deduzieren. Sei  $\mathbf{m} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  gegeben. Wir setzen  $f = -\text{div } \mathbf{m}$ ,  $g_0 = 0$  und  $g_1 = -\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}$ . Bedienen wir uns der ersten Greenschen Identität, so sehen wir

$$(-\text{div } \mathbf{m}, v)_{L^2(\Omega)} = (\mathbf{m}, \nabla v)_{L^2(\Omega)} - (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega).$$

Dies führt uns nun auf das folgende Kopplungsproblem: Finde  $(u, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ , sodass

$$\begin{aligned} (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} - (\phi, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)} &= (\mathbf{m}, \nabla v)_{L^2(\Omega)} && \text{für alle } v \in H^1(\Omega), \\ (\psi, V\phi - (K - 1/2)(\gamma_0 u))_{L^2(\Gamma)} &= 0 && \text{für alle } \psi \in H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned} \tag{4.59}$$

Wir bemerken, dass sich dieses Gleichungssystem vom symmetrischen Kopplungsansatz (4.54) lediglich in der ersten Gleichung unterscheidet.

Wieder stellt der Lösungsanteil  $u$  der Gesamtlösung  $(u, \phi)$  von (4.59) die Lösung des Transmissionsproblems (4.2) im Gebiet  $\Omega$  dar, während sich  $\phi$  auf die äußere Normalenableitung am Rand der Lösung von (4.2) bezieht.

Ersetzt man  $H^1(\Omega)$  durch den FE-Ansatzraum  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  und  $H^{-1/2}(\Gamma)$  durch  $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_{h,\Gamma})$ , so ist klar, dass das Gleichungssystem (4.59) eine eindeutige Galerkin-Lösung  $(u_h, \phi_h)$  besitzt. Damit berechnet sich das Streufeld näherungsweise durch  $\mathcal{P}_h \mathbf{m} = \nabla u_h$ .

Wir stellen der Vollständigkeit halber den direkten FEM-BEM-Kopplungsansatz in folgendem Algorithmus dar:

**Algorithmus 4.6.3.** *Input: Magnetisierung  $\mathbf{m}$ , Triangulierung  $\mathcal{T}_h$ .*

- (i) *Finde  $(u_h, \phi_h) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_{h,\Gamma})$ , sodass für alle Testpaare  $(v_h, \psi_h) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_{h,\Gamma})$  folgende Gleichung gilt*

$$\begin{aligned} (\nabla u_h, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)} - (\phi_h, v_h)_{L^2(\Gamma)} &= (\mathbf{m}, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)}, \\ (\psi_h, V\phi_h - (K - 1/2)(u_h))_{L^2(\Gamma)} &= 0. \end{aligned} \tag{4.60}$$

*Output: Approximationslösung  $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ .*

In folgender Proposition halten wir fest, dass sich auch die direkte FEM-BEM-Kopplung nach JOHNSON und NÉDÉLEC als Methode zur approximativen Berechnung des Streufeldes eignet, ohne auf die Gültigkeit der Konvergenzanalyse aus Kapitel 3 Einfluss zu nehmen.

**Proposition 4.6.4.** *Der diskrete Streufeldoperator, der nach dem direkten FEM-BEM-Kopplungsansatz von JOHNSON und NÉDÉLEC, also mittels Algorithmus 4.6.3, berechnet wird, erfüllt die Anforderungen (4.4) und (4.5).*

Da sich der direkte FEM-BEM-Kopplungsansatz nach Bemerkung 4.6.2 mit den wesentlichen Eigenschaften der symmetrischen FEM-BEM-Kopplung auszeichnet, erfolgt der Beweis von Proposition 4.6.4 analog zum Beweis von Proposition 4.5.3.

Abschließend halten wir fest, dass der Vorteil der direkten FEM-BEM-Kopplung gegenüber der symmetrischen FEM-BEM-Kopplung in der Notwendigkeit der Implementierung lediglich zweier Randintegraloperatoren, nämlich des Einfachschichtpotentials  $V$  und des Doppelschichtpotentials  $K$ , liegt.

## 4.7 Kopplung finiter/infiniter Elemente

In diesem Abschnitt wollen wir einen Ansatz zur näherungsweise Berechnung des Streufeldes mit Hilfe der Kopplung finiter und unendlicher Elemente vorstellen. Diese Methode wurde bereits von ALOUGES in [4] präsentiert und diskutiert.

Die grundlegende Idee dieses Verfahrens besteht darin, dass wir die magnetostatischen Potentialgleichungen auf dem Ganzraum lösen, wobei wir im Innenraum uns der Finite-Elemente-Methode bedienen und im Außenraum die Infinite-Elemente-Methode zum Einsatz kommen lassen. Dazu stellen wir im folgenden Abschnitt eine spezielle Triangulierung des Außenraums vor. Da diese jedoch aus unendlich vielen Elementen besteht, schneiden wir den Ganzraum bei einer hinreichenden Größe ab und lösen sodann ein endliches Gleichungssystem für den reduzierten Raum. Damit erzielen wir eine effektive Implementierung dieses Ansatzes. Darüber hinaus weisen wir nach, dass diese Methode zulässig im Sinn einer vollständigen Konvergenzanalyse nach Kapitel 3 ist.

Im Folgenden halten wir uns an [4] und umreißen das darin beschriebene Vorgehen. Wir gehen von folgendem Gleichungssystem aus

$$\begin{aligned} \Delta u^{\text{int}} &= \operatorname{div} \mathbf{m} && \text{in } \Omega, \\ \Delta u^{\text{ext}} &= 0 && \text{in } \Omega^{\text{ext}}, \\ [u] &= 0 && \text{auf } \Gamma, \\ [\partial_{\boldsymbol{\nu}} u] &= -\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} && \text{auf } \Gamma, \\ u^{\text{ext}}(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|) && \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{4.61}$$

und führen den Raum

$$H^{1,*}(\mathbb{R}^3) := \left\{ v \mid \nabla v \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ und } \frac{v(\mathbf{x})}{(1+|\mathbf{x}|^2)^{1/2}} \in L^2(\mathbb{R}^3) \right\}$$

ein. Betrachtet man auf diesem die Norm

$$\|v\|_{H^{1,*}}^2 := \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|^2 d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{v^2(\mathbf{x})}{1+|\mathbf{x}|^2} d\mathbf{x}$$

oder

$$|v|_{H^{1,*}}^2 := \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|^2 d\mathbf{x},$$

so stellt  $H^{1,*}(\mathbb{R}^3)$  einen Hilbert-Raum dar, siehe [48, Abschnitt 2.9]. Damit betrachten wir nun die Variationsformulierung: Finde  $u \in H^{1,*}(\mathbb{R}^3)$  mit

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{m} \cdot \nabla v d\mathbf{x} \quad \text{für alle } v \in H^{1,*}(\mathbb{R}^3). \quad (4.62)$$

Es gilt zu beachten, dass die linke Seite den Ganzraum  $\mathbb{R}^3$  involviert.

**Bemerkung 4.7.1.** *Es gilt zu bemerken, dass aufgrund der Abschätzung  $\|v\|_{H^{1,*}}^2 \leq \|v\|_{H^1}^2$  für beliebiges  $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$  folgende Inklusion vorliegt  $H^1(\mathbb{R}^3) \subset H^{1,*}(\mathbb{R}^3)$ .*

**Bemerkung 4.7.2.** *Vergleicht man das Transmissionsproblem (4.2) mit dem in diesem Abschnitt betrachteten Problem (4.61) und berücksichtigt man, dass  $H^1(\mathbb{R}^3) \subset H^{1,*}(\mathbb{R}^3)$  gilt, so folgt aus der Eindeutigkeit der Lösungen bereits, dass die Lösungen der beiden Probleme übereinstimmen.*

Zunächst wollen wir das Vorgehen zur Konstruktion einer sinnvollen Triangulierung des Ganzraums  $\mathbb{R}^3$  vorstellen. Wir betrachten ein konvexes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  mit Rand  $\Gamma$  und Zentrum  $\mathbf{O}$ , das durch den Nullpunkt festgelegt ist. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{T}_h$  die Triangulierung des Gebiets  $\Omega$ . Dann definiert  $\Gamma_0 := \mathcal{T}_{h,\Gamma}$  den Rand des konvexen Gebiets. Von diesem ausgehend legen wir eine Triangulierung des Außenraums  $\Omega^{\text{ext}}$  fest, die aus homothetischen Schichten besteht. Dazu wählen wir eine Konstante  $\zeta > 1$  und definieren für  $j \in \mathbb{N}_{>0}$  weitere konvexe Polyeder  $\Omega_j$  mit Rändern  $\Gamma_j := \zeta^j \Gamma_0$ , die nun homothetisch zu  $\Gamma_0$  sind mit dem Proportionalitätsfaktor  $\zeta^j$  und Zentrum  $\mathbf{O}$ . Das Gebiet zwischen zwei aufeinander folgenden Polyedern  $\Omega_{j-1}$  und  $\Omega_j$  für  $j > 0$  bezeichnen wir als Schicht  $C_j$ . Wir fordern, dass die Triangulierungen dieser Schichten stets identisch sind. Ein solches Vorgehen führt dazu, dass Schichten, die weiter vom Zentrum  $\mathbf{O}$  des Gebiets entfernt sind, eine entsprechend gröbere Netzweite aufweisen. Für eine anschauliche Darstellung wird in Abbildung 4.2 ein solches Netz für den zweidimensionalen Fall gezeigt.

Es gilt zu beachten, dass die Vergrößerung der Triangulierung des Außenraums durch den Abfall der Lösung  $u$  von (4.61), die sich durch

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{m}(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y} \quad (4.63)$$

darstellen lässt, und deren Ableitungen ausgeglichen wird, sofern die Vergrößerung der Netzweite nicht zu schnell erfolgt. Ergänzend dazu halten wir fest, dass nach [4, Lemma 1] die Regularitätseigenschaft  $u \in \{v \in H^{1,*}(\mathbb{R}^3) \mid D^2 u|_{\Omega} \in L^2(\Omega) \text{ und } D^2 u|_{\Omega^{\text{ext}}} \in L^2(\Omega^{\text{ext}})\}$  vorliegt.

Anders als bisher, bezeichnen wir nun mit  $\mathcal{T}_\ell$  eine Folge von Triangulierungen des Gebiets  $\Omega$ . Darüber hinaus notiert  $\mathcal{T}_\ell^\infty$  die durch das eben präsentierte Prozedere konstruierte Triangulierung des  $\mathbb{R}^3$ . Entsprechend enthält  $\mathcal{T}_\ell^L$  jene Elemente, die im konvexen Polyeder liegen, das von der Schicht  $C_L$  abgeschlossen wird. Die Folge von Netzen  $\mathcal{T}_\ell$  ist so beschaffen, sodass

$$\sup_{T \in \mathcal{T}_\ell \cup C_1} \frac{h_T}{\varrho_T} \leq C$$

mit  $C > 0$  einer positiven Konstante und

$$h_{\mathcal{T}_\ell \cup C_1} \rightarrow 0 \quad \text{für } \ell \rightarrow \infty$$

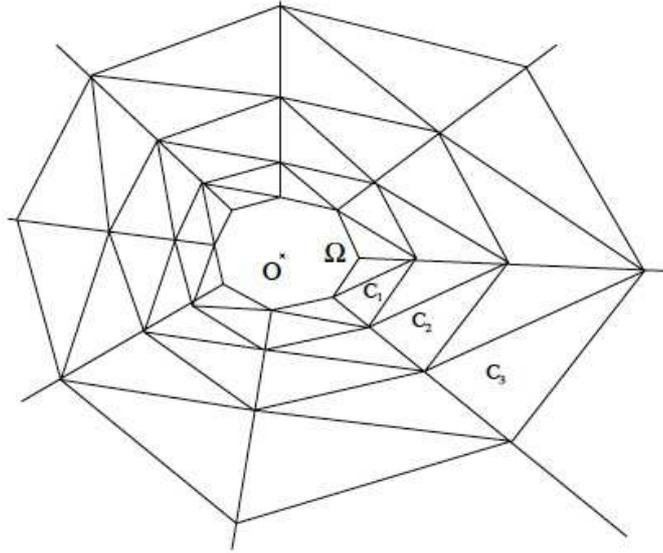


Abbildung 4.2: Mögliche Triangulierung des Außenraums mit Hilfe homothetischer Schichten (entnommen aus [4, Abbildung 1]).

gilt. Diese Voraussetzung bedeutet im Wesentlichen, dass die Triangulierung des ersten Layers  $C_1$  eben so fein zu sein hat, wie die Triangulierung des Gebiets  $\Omega$ .

Um nun eine diskrete Variante der Variationsformulierung (4.62) betrachten zu können, definieren wir ein diskretes Pendant zum Hilbert-Raum  $H^{1,*}(\mathbb{R}^3)$  durch

$$H_h^{1,*}(\mathcal{T}_\ell^\infty) := \left\{ \tilde{v}_h \in H^{1,*}(\mathbb{R}^3) \mid \tilde{v}_h|_T \in \mathcal{P}^1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_\ell^\infty \right\}.$$

Es sei bemerkt, dass dieser Raum abgeschlossen aber noch immer unendlichdimensional ist, da unsere Triangulierung  $\mathcal{T}_\ell^\infty$  aus unendlich vielen Elementen besteht. Damit lautet die diskrete Variationsformulierung: Finde  $\tilde{u}_h \in H_h^{1,*}(\mathcal{T}_\ell^\infty)$  mit

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \tilde{u}_h \cdot \nabla \tilde{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{m} \cdot \nabla \tilde{v}_h \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } \tilde{v}_h \in H_h^{1,*}(\mathcal{T}_\ell^\infty). \quad (4.64)$$

Nach dem Lemma von Lax-Milgram besitzt dieses Problem eine eindeutige Lösung.

Um letztendlich eine numerische Berechnung durchführen zu können, ist es notwendig das zu lösende Problem auf einem endlichdimensionalen Teilraum zu stellen. Dazu schneiden wir den Ganzraum ab, sodass die Elemente der ersten  $L$  Schichten der Triangulierung des Außenraums  $\Omega^{\text{ext}}$  zusammen mit jenen Elementen der Triangulierung von  $\Omega$  ein neues Gebiet darstellen, das wir im Folgenden mit  $\Omega_L$  bzw. deren Triangulierung wir mit  $\mathcal{T}_\ell^L$  bezeichnen. Ein solches Vorgehen zieht eine Randbedingung für den äußeren Rand der  $L$ -ten Schicht  $C_L$  nach sich. In [39] werden sowohl Neumann-, Dirichlet- als auch gemischte Randbedingungen betrachtet und diskutiert. Wir halten uns hierbei jedoch an die Arbeit von ALOUGES [4] und betrachten Neumann-Randbedingungen. Dies führt uns auf folgendes Problem

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} &= \operatorname{div} \mathbf{m} && \text{in } \Omega_L, \\ \partial_\nu \tilde{u} &= g && \text{auf } \partial\Omega_L = \Gamma_L \end{aligned} \quad (4.65)$$

mit  $\int_{\Gamma_L} g \, ds_{\mathbf{x}} = 0$ .

Mit dem Ziel ein diskretes Problem für den reduzierten Raum betrachten zu können, definieren

wir den endlichdimensionalen diskreten Raum

$$H_{h,L}^1(\mathcal{T}_\ell^L) := \left\{ v_h \in H^1(\Omega_L) \mid \int_{\Omega_L} v_h \, d\mathbf{x} = 0 \text{ und } v_h|_T \in \mathcal{P}^1(T) \text{ f\"ur alle } T \in \mathcal{T}_\ell^L \right\}.$$

Dann lautet die entsprechende diskrete Variationsformulierung: Finde  $u_h \in H_{h,L}^1(\mathcal{T}_\ell^L)$  mit

$$\int_{\Omega_L} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{m} \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_L} g \cdot v_h \, ds_{\mathbf{x}} \quad \text{f\"ur alle } v_h \in H_{h,L}^1(\mathcal{T}_\ell^L). \quad (4.66)$$

Dieses Problem besitzt nach [4, Lemma 3] eine eindeutige L\"osung, die der Fehlerabsch\"atzung

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega_L)} \leq C_1 \inf_{v_h \in H_{h,L}^1(\Omega_L)} |u - v_h|_{H^1(\Omega_L)} + C_2 \zeta^L \|\partial_{\nu} u - g\|_{L^2(\Gamma_L)} \quad (4.67)$$

gen\"ugt. Hierbei sind die Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  unabh\"angig von der Netzweite  $h$ , der Anzahl  $L$  der betrachteten Layer und dem Proportionalit\"atsfaktor  $\zeta$ .

Setzen wir nun  $g = 0$  in die Neumann-Randbedingung ein, so wird in [4, Theorem 2] nachgewiesen, dass f\"ur ein asymptotisches Verhalten

$$L \sim -\frac{\ln h}{\ln \zeta} \quad \text{f\"ur } h \rightarrow 0 \quad (4.68)$$

die Fehlerabsch\"atzung

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega_L)} \leq Ch \quad (4.69)$$

vorliegt. Die positive Konstante  $C > 0$  ist unabh\"angig von der Anzahl  $L$  der betrachteten Layer und der Netzweite  $h$ , die von der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  von  $\Omega$  und deren Fortsetzung auf die erste Schicht  $C_1$  abh\"angt. Des Weiteren sei betont, dass diese Fehlerabsch\"atzung trotz des gr\"o\"ber aufgel\"osten partiellen Au\"aenraums eine Genauigkeit erreicht, die der feineren Triangulierung des Innenraums entspricht.

Wir fassen diesen Ansatz in folgendem Algorithmus zusammen:

**Algorithmus 4.7.3.** *Input: Magnetisierung  $\mathbf{m}$ , Triangulierung  $\mathcal{T}_\ell^L$ .*

(i) *Finde  $u_h \in H_{h,L}^1(\mathcal{T}_\ell^L)$ , sodass f\"ur alle  $v_h \in H_{h,L}^1(\mathcal{T}_\ell^L)$  folgende Gleichung gilt*

$$(\nabla u_h, \nabla v_h)_{L^2(\Omega_L)} = (\mathbf{m}, \nabla v_h)_{L^2(\Omega)}. \quad (4.70)$$

*Output: Approximationsl\"osung  $u_h \in H_{h,L}^1(\mathcal{T}_\ell^L)$ .*

Wir berechnen mit Hilfe der L\"osung  $u_h$  aus Algorithmus 4.7.3 das Streufeld durch  $\mathcal{P}_h \mathbf{m} = \nabla u_h$ .

Mit obigen Feststellungen k\"onnen wir nun die geforderten Eigenschaften eines diskreten Streufeldoperators nachweisen.

**Proposition 4.7.4.** *Der diskrete Streufeldoperator, der mittels der Kopplung von finiten und infiniten Elementen nach dem Ansatz von ALOUGES [4], also mittels Algorithmus 4.7.3, berechnet wird, erf\"ullt die Anforderungen (4.4) und (4.5) sofern sich die Anzahl der Layer  $L$  zum Proportionalit\"atsfaktor  $\zeta$  und der Netzweite  $h$  wie in (4.68) gefordert verh\"alt.*

*Beweis.* Zunächst wollen wir die Stabilitätseigenschaft (4.4) nachweisen. Dazu betrachten wir die diskrete Variationsformulierung (4.66) und wählen eine spezielle Testfunktion  $v_h = u_h$ . Dies führt unter Berücksichtigung von  $\mathcal{P}_h \mathbf{m} = \nabla u_h$  und Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung auf

$$\|\mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega_L} \nabla u_h \cdot \nabla u_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{m} \cdot \nabla u_h \, d\mathbf{x} \leq \|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}$$

und zeigt damit insbesondere

$$\|\mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Da dasselbe Argument für eine beliebige diskrete Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^j$  für  $j > 0$  anwendbar ist, haben wir somit Eigenschaft (4.4) mit einer Konstante  $C_{\mathcal{P}} = 1$  nachgewiesen.

Um die Konvergenzeigenschaft (4.5) einzusehen, zitieren wir Fehlerabschätzung (4.69) und erhalten

$$\|\mathcal{P} \mathbf{m} - \mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathcal{P} \mathbf{m} - \mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega_L)} = |u - u_h|_{H^1(\Omega_L)} \leq Ch.$$

Die rechte Seite verschwindet, sofern die von  $\sup_{T \in \mathcal{T}_\ell} h_T$  und der Netzweite des ersten Layers  $C_1$  abhängige Netzweite  $h$  gegen 0 geht. Damit schließen wir zusammen mit der Endlichkeit des Zeitintervalls  $t_{\text{end}} < \infty$  und dem Satz von Lebesgue

$$\|\mathcal{P} \mathbf{m} - \mathcal{P}_h \mathbf{m}\|_{L^2(\Omega_\tau)} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0, \quad (4.71)$$

wodurch wir die gewünschte Konvergenzeigenschaft des approximierten Streufeldoperators, siehe (4.5), eingesehen haben.

Damit ist der Beweis nun vollständig.  $\square$

Insgesamt haben wir nun eine Methode zur approximativen Berechnung des Streufeldes dargelegt, die den Anforderung (4.4) und (4.5) genügt. Der Vorteil dieses Ansatzes besteht darin, dass das passende Abschneiden des Ganzraums zusammen mit einer immer gröber werdenden Netzstruktur des noch vorhandenen Außenraums auf eine zur Box-Methode aus Abschnitt 4.8 vergleichsweise speicherarme Implementierung der Steifigkeitsmatrix führt. Dem gegenüber zu stellen ist die Tatsache, dass diese Methode nur auf konvexe Gebiete anwendbar ist.

## 4.8 Box-Methode

In diesem Abschnitt wollen wir einen vergleichsweise naiven jedoch sehr anschaulichen und einfachen Zugang zur approximativen Berechnung des Streufeldes vorstellen. Dabei lösen wir die magnetostatischen Potentialgleichungen nicht für den Ganzraum, sondern für eine um den magnetischen Körper  $\Omega$  gelegte Box  $\Omega_L$ , die so zu wählen ist, dass sie quasi den Ganzraum repräsentiert. Eine Motivation für dieses Vorgehen liegt in der Abklingbedingung der Lösung der magnetostatischen Potentialgleichungen. Sowohl für  $\Omega$  als auch für den reduzierten Außenraum  $\Omega_L \setminus \overline{\Omega}$  bemühen wir die FEM als Lösungsmethode.

Wir betrachten im Folgenden einen magnetischen Körper  $\Omega$  in Form eines konvexen Polyeders, der um einen Ursprung  $\mathbf{O}$  zentriert ist. Diesen referenzieren wir kurz als Box. Des Weiteren bezeichne  $\mathcal{T}_h$  die Triangulierung von  $\Omega$  mit Netzweite  $h \rightarrow 0$ . Wir wollen nun auf die Konstruktion einer sinnvollen Triangulierung des Ganzraums  $\mathbb{R}^3$  eingehen. Dazu definieren wir den Rand des

Gebiets  $\Omega$  als  $\Gamma_0 := \mathcal{T}_{h,\Gamma}$  und legen von diesem ausgehend eine Triangulierung des Außenraums  $\Omega^{\text{ext}}$  fest. Wir definieren für  $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$  weitere Ränder von konvexen Polyedern  $\Gamma_\ell := \ell\Gamma_0$ , die nun proportional zu  $\Gamma_0$  sind und ebenfalls  $\mathbf{O}$  als Zentrum haben. Das Gebiet zwischen zwei aufeinander folgenden Rändern  $\Gamma_{\ell-1}$  und  $\Gamma_\ell$  für  $\ell > 0$  bezeichnen wir als Schicht  $C_\ell$ . Anders als in [4] betrachten wir  $h$  als Netzweite sowohl für den Innenraum  $\Omega$  als auch für den Außenraum  $\Omega^{\text{ext}}$ . Dies betont einerseits die Einfachheit der Idee und deutet andererseits bereits auf eine unnötig feine Partition des Außenraums hin, die sich in der praktischen Umsetzung bemerkbar machen wird.

In einem ersten Schritt betrachten wir den Ganzraum  $\mathbb{R}^3$  und legen durch  $\mathcal{T}_h^\infty$  eine Triangulierung auf ihm fest, die als Fortsetzung der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  des magnetischen Körpers  $\Omega$  auf den Ganzraum verstanden wird. Wir gehen nun wie in [4] bzw. Abschnitt 4.7 vor, verwenden die darin eingeführten Räume und deren Notation und betrachten Problem (4.61). Das daraus resultierende diskrete Problem, das jedoch noch immer auf einem unendlichdimensionalen Raum gestellt ist, lautet wieder wie folgt: Finde  $\tilde{u}_h \in H_h^{1,*}(\mathcal{T}_h^\infty)$ , sodass

$$(\nabla \tilde{u}_h, \nabla \tilde{v}_h)_{L^2(\mathbb{R}^3)} = (\mathbf{m}, \nabla \tilde{v}_h)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } \tilde{v}_h \in H_h^{1,*}(\mathcal{T}_h^\infty) \quad (4.72)$$

gilt. Ausgehend von dieser diskreten jedoch unendlichdimensionalen Approximation der Lösung der magnetostatischen Potentialgleichungen (4.2), zielen wir in einem nächsten Schritt auf eine näherungsweise Berechnung der Lösung  $u$  ab durch eine Approximation auf einem endlichdimensionalen Raum  $\Omega_L := \Omega \cup C_1 \cup \dots \cup C_L$ . Um eine Triangulierung des Außenraums  $\Omega_L \setminus \overline{\Omega}$  zu erhalten, setzen wir die Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  des Gebiets  $\Omega$  zu einer Triangulierung  $\mathcal{T}_h^L$  des gesamten konvexen Polyeders  $\Omega_L$  mit identer Netzweite  $h$  fort.

Für den Rand des Gebiets  $\Omega_L$  wählen wir nun homogene Neumann-Randdaten. Daher lautet das zu lösende kontinuierliche Problem

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} &= \operatorname{div} \mathbf{m} && \text{in } \Omega_L, \\ [\partial_\nu \tilde{u}] &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_L = \Gamma_L. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Unter der Definition von

$$H_{h,L}^1(\mathcal{T}_h^L) := \left\{ v_h \in H^1(\Omega_L) \mid \int_{\Omega_L} v_h \, d\mathbf{x} = 0 \text{ und } v_h|_T \in \mathcal{P}^1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h^L \right\}.$$

findet (4.73) nun folgende Darstellung in der Variationsformulierung: Finde  $u_h \in H_{h,L}^1(\mathcal{T}_h^L)$  mit

$$\int_{\Omega_L} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{m} \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } v_h \in H_{h,L}^1(\mathcal{T}_h^L). \quad (4.74)$$

Dieses Problem besitzt nach [4, Lemma 3] eine eindeutige Lösung. Insbesondere ist der daraus resultierende Algorithmus zur näherungsweise Lösung der magnetostatischen Potentialgleichungen ident zu Algorithmus 4.7.3.

Um gewisse Eigenschaften des approximativ berechneten Streufeldes  $\mathcal{P}_h \mathbf{m} = \nabla u_h$  festhalten zu können, zielen wir auf eine Fehlerabschätzung der Form

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega_L)} \leq Ch$$

mit einer positiven Konstante  $C > 0$ , die unabhängig von der Anzahl  $L$  der betrachteten Schichten und der Netzweite  $h$  ist, ab. Dabei gilt es zu bemerken, dass sich die Argumentation aus [4] bis auf wenige Modifikationen vollständig auf die in diesem Abschnitt betrachtete Box-Methode

übertragen lässt, da sich beide Varianten lediglich in der Konstruktion/Feinheit der Triangulierung des Außenraums unterscheiden. Der Vollständigkeit halber zitieren wir ausschließlich jene Resultate, deren Argumentation aufgrund der betrachteten Methode abweicht und ergänzen den Beweis.

**Lemma 4.8.1.** *Es existiert eine positive Konstante  $C > 0$ , sodass die Fehlerabschätzung*

$$|u - \tilde{u}_h|_{H^{1,*}(\mathbb{R}^3)} \leq Ch$$

*gilt.*

*Beweis.* Wir betrachten eine Konstante  $R > 0$ , sodass  $|D^2u(\mathbf{x})| \lesssim 1/|\mathbf{x}|^4$  für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  mit  $|\mathbf{x}| \geq R$  gilt. Die Existenz einer solchen Konstante wird in [4, Lemma 2] nachgewiesen. Wir bezeichnen mit  $B(\mathbf{0}, R)$  eine Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung  $\mathbf{0}$  und Radius  $R$ . Nun wählen wir  $L > 0$  als die kleinste natürliche Zahl, sodass  $B(\mathbf{0}, R) \subset \Omega_L$  gilt. Daher gilt

$$(L-1) \min_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |\mathbf{x}| < R < L \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |\mathbf{x}|.$$

Des Weiteren zitieren wir die in [4] postulierte Fehlerabschätzung

$$|u - \tilde{u}_h|_{H^{1,*}(\mathbb{R}^3)} \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\infty} |u|_{H^2(T)}^2 h^2.$$

Wir führen nun eine Fallunterscheidung bezüglich der Elemente  $T$  der Triangulierung  $\mathcal{T}_h^\infty$  durch:

- $T \in \mathcal{T}_h$ : Wir erhalten

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u|_{H^2(T)}^2 h^2 \leq |u|_{H^2(\Omega)}^2 h^2$$

und wissen nach [4, Lemma 1], dass die  $H^2(\Omega)$ -Seminorm von  $u$  beschränkt ist.

- $n \leq L$ : In diesem Fall gilt  $T \in \mathcal{T}_h^L$ . Da die Netzweite im Äußeren des Gebiets  $\Omega$  gleich bleibt, erhalten wir

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^L \setminus \mathcal{T}_h} |u|_{H^2(T)}^2 h^2 \leq |u|_{H^2(\Omega_L \setminus \bar{\Omega})}^2 h^2 \leq |u|_{H^2(\Omega^{\text{ext}})}^2 h^2.$$

Nach [4, Lemma 1] ist die  $H^2(\Omega^{\text{ext}})$ -Seminorm von  $u$  beschränkt.

- $n > L$ : In diesem Fall gilt  $T \in \mathcal{T}_h^\infty \setminus \mathcal{T}_h^L$ . Wir betrachten zunächst jene Elemente, die innerhalb der  $n$ -ten Schicht liegen, und schätzen mit dem Resultat aus [4, Lemma 2] wie folgt ab

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^n \setminus \mathcal{T}_h^{n-1}} |u|_{H^2(T)}^2 h^2 \leq |u|_{H^2(C_n)}^2 h^2 \lesssim h^2 \int_{C_n} \frac{1}{|\mathbf{x}|^8} d\mathbf{x} \lesssim h^2 n^{-8} |\Omega_n| \leq h^2 n^{-5} |\Omega|.$$

Dies führt letztendlich auf

$$\sum_{n > L} \sum_{T \in \mathcal{T}_h^n \setminus \mathcal{T}_h^{n-1}} |u|_{H^2(T)}^2 h^2 \lesssim h^2 \sum_{n > N} n^{-5} \lesssim h^2.$$

Die Kombination der Resultate der einzelnen Fallunterscheidungen bestätigt die Aussage des Lemmas.  $\square$

In einem nächsten Schritt gilt es eine Fehlerabschätzung für  $|u - u_h|_{H^1(\Omega_L)}$  zu beweisen. Wieder folgen wir dem Vorgehen aus [4].

**Lemma 4.8.2.** *Es existieren Konstanten  $C_1, C_2 > 0$ , die unabhängig von der Netzweite  $h$  und der Anzahl  $L$  der betrachteten Schichten sind, sodass die Fehlerabschätzung*

$$\begin{aligned} |u - u_h|_{H^1(\Omega_L)} &= \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega_L)} \\ &\leq C_1 \inf_{v_h \in H_{h,L}^1(\Omega_L)} |u - v_h|_{H^1(\Omega_L)} + C_2 L \|\partial_{\nu} u\|_{L^2(\Gamma_L)} \end{aligned} \quad (4.75)$$

*gilt.*

*Beweis.* Zunächst folgen wir exakt der Beweisführung aus [4, Lemma 3] und erhalten

$$\begin{aligned} \|\nabla u_h - \nabla v_h\|_{L^2(\Omega_L)}^2 &\leq \|\nabla u - \nabla v_h\|_{L^2(\Omega_L)} \|\nabla v_h - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega_L)} \\ &\quad + \|\partial_{\nu} u\|_{L^2(\Gamma_L)} \|u_h - v_h\|_{L^2(\Gamma_L)}. \end{aligned}$$

Wir schätzen den zweiten Faktor des zweiten Summanden der rechten Seite weiter ab und bedienen uns außerdem der Poincaréschen Ungleichung, um

$$\|u_h - v_h\|_{L^2(\Gamma_L)} \leq C \|u_h - v_h\|_{H^1(\Omega_L)} \leq C' \|\nabla u_h - \nabla v_h\|_{L^2(\Omega_L)}$$

zu sehen. Es gilt zu bemerken, dass hierbei die Konstante  $C'$  von Gebiet  $\Omega_L$  abhängt. Um diese Abhängigkeit zu umgehen, verwenden wir die Skalierung  $\Omega_L = L\Omega$  und erhalten

$$\|u_h - v_h\|_{L^2(\Gamma_L)} \leq C'' L \|\nabla u_h - \nabla v_h\|_{L^2(\Omega_L)}.$$

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung erhalten wir analog zu [4] schließlich das gewünschte Resultat.  $\square$

**Lemma 4.8.3.** *Unter der Voraussetzung, dass sich die Anzahl  $L$  der betrachteten Schichten asymptotisch invers zur Netzweite  $h$  verhält, gilt die Fehlerabschätzung*

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega_L)} \leq Ch, \quad (4.76)$$

wobei die Konstante  $C > 0$  unabhängig von  $h$  und  $L$  ist.

*Beweis.* Wir betrachten zunächst die Fehlerabschätzung (4.75) und erhalten nach [4, Abschnitt 3]

$$\inf_{v_h \in H_{h,L}^1(\Omega_L)} |u - v_h|_{H^1(\Omega_L)} \leq Ch.$$

Um eine solche Abschätzung auch für den zweiten Summanden der rechten Seite aus (4.75) zu erhalten, wählen wir  $L$ , sodass  $L \min_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} |\mathbf{x}| > R$  gilt. Dann können wir uns des Abklingverhaltens der Lösung  $u$  bedienen, siehe (4.63), und schätzen wie folgt ab

$$\|\partial_{\nu} u\|_{L^2(\Gamma_L)}^2 \leq |\Gamma_L| \frac{C}{L^6} \leq |\Gamma_0| \frac{C}{L^4}.$$

Insbesondere zeigt dies  $L \|\partial_{\nu} u\|_{L^2(\Gamma_L)} \lesssim 1/L$ . Um den Beweis nun abschließen zu können, gilt es

$$\frac{1}{L} \leq Ch$$

einzusehen. Diese Abschätzung ist gültig, sofern sich  $L$  asymptotisch invers proportional zu  $h$  verhält.  $\square$

**Proposition 4.8.4.** *Für den nach Algorithmus 4.7.3 approximativ berechneten Streufeldoperator sind die Anforderungen (4.4) und (4.5) erfüllt, sofern sich die Anzahl  $L$  der betrachteten Layer invers zur Netzweite  $h$  verhält.*

Da der Beweis analog zu jenem für Proposition 4.7.4 aus Abschnitt (4.7) verläuft, verweisen wir auf diesen und verzichten an dieser Stelle auf eine ausführliche Argumentation.

Zusammenfassend halten wir fest, dass sich die in diesem Abschnitt vorgestellte Box-Methode durch ihre einfache Idee und der damit einhergehenden simplen praktischen Umsetzung auszeichnet. Allerdings schlägt sich die großzügige Triangulierung der Box, deren Größe im Vergleich zum magnetischen Körper sehr hoch ist, in hohem Speicheraufwand und langen Simulationszeiten nieder. Aus analytischer Sicht stellt diese Approximationsstrategie eine sinnvolle und zulässige Methode dar.



# Kapitel 5

## Implementierung

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Implementierung des Time-Splitting-Verfahrens 3.2.4 bzw. 3.2.14 aus Kapitel 3 beschäftigen. Diese Umsetzung wird der Simulation der numerischen Beispiele in Kapitel 6 als Grundlage dienen. Vervollständigt wird die Darlegung der implementierten Routinen durch Anhang A. Es sei bemerkt, dass alle Implementierungen bzw. Berechnungen mittels MATLAB (R2010B) durchgeführt werden. Ausgelagerte Codes in C bzw. C++ werden über die MEX-Schnittstelle von MATLAB bedient.

In einem ersten Schritt bemühen wir uns, um eine übersichtliche Darlegung der verwendeten Datenstrukturen. Anschließend legen wir den Fokus auf die Assemblierung der Daten für das in jedem Zeitschritt zu lösende lineare Gleichungssystem. Im dritten Abschnitt befassen wir uns mit der Berechnung der einzelnen Energiebeiträge, um letztendlich eine Darstellung der Simulation in Form von Energiewerten geben zu können. Abschließend präsentieren wir einen Algorithmus zur adaptiven Zeitschrittweitensteuerung, um eine effiziente Simulation im Sinn einer hinreichend feinen Zeitschrittweite und möglichst wenigen Iterationsschritten zu garantieren. Ergänzt werden die einzelnen Implementierungsschritte durch Auszüge der entsprechenden MATLAB-Codes.

### 5.1 Datenstrukturen

In diesem Abschnitt streben wir eine kurze und übersichtliche Darstellung der verwendeten Datenstrukturen an.

Wir bezeichnen im Folgenden mit  $N$  die Anzahl der Knoten der Triangulierung  $\mathcal{T}_h = \{T_1, \dots, T_E\}$  des magnetischen Körpers  $\Omega$ , während wir durch  $E$  die Anzahl der Elemente  $\#\mathcal{T}_h$  notieren. Die Menge der Knoten  $\mathcal{N}_h = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N\}$  wird durch den  $N \times 3$ -Array `coordinates` repräsentiert. Hierbei beinhaltet die  $i$ -te Zeile die Koordinaten des  $i$ -ten Knotens  $\mathbf{z}_i = (z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}) \in \mathbb{R}^3$ , d.h.

$$\text{coordinates}(i, :) = [z_{i,1} \ z_{i,2} \ z_{i,3}].$$

Des Weiteren beinhaltet der  $E \times 4$ -Array `elements` die Menge der Elemente der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$ . Dabei werden in der  $j$ -ten Zeile die Nummern jener Knoten gespeichert, durch die das  $j$ -te Element  $T_j = \text{conv}\{\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_\ell, \mathbf{z}_n, \mathbf{z}_m\}$  als konvexe Hülle festgelegt ist, d.h.

$$\text{elements}(j, :) = [k \ \ell \ m \ n].$$

Zusätzlich ist die Anordnung der Knoten derart gewählt, dass die konvexe Hülle der ersten drei Knoten ein Dreieck aufspannt, welches vom Blickpunkt des vierten Knotens aus gesehen im

mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird.

In analoger Weise werden Informationen bezüglich des Randnetzes gespeichert. Wir bezeichnen mit  $nCB$  die Anzahl der Knoten der Triangulierung  $\mathcal{E}_h = \{E_1, \dots, E_{nEB}\}$  des Randes des magnetischen Körpers, während  $nEB$  die Anzahl der Elemente  $\#\mathcal{E}_h$  fixiert. Der  $nCB \times 3$ -Array `boundarycoo` speichert in der  $i$ -ten Zeile die Koordinaten des  $i$ -ten Knotens des Randnetzes bezüglich der Menge der Randknoten  $\mathcal{B}_h = \{\tilde{\mathbf{z}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{z}}_{nCB}\}$ . Entsprechend werden in der  $i$ -ten Zeile des  $nEB \times 3$ -Arrays `boundaryele2D` die Knotennummern bezüglich der Menge der Randknoten  $\mathcal{B}_h$  festgehalten, deren konvexe Hülle das Element  $E_i$  wiedergibt. Die Relation zwischen der Nummerierung der Randknoten in der Menge  $\mathcal{B}_h$  und jener in der Knotenmenge  $\mathcal{N}_h$  des Volumensnetzes wird in den Arrays `boundarynodes` und `full2boundary` beschrieben.

Diese Charakteristiken der Geometrie werden durch weitere Größen ergänzt, z.B. Volumina `vol` der Elemente der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$ , Flächeninhalte `area` der Elemente der Triangulierung  $\mathcal{E}_h$ , Skalierungsfaktor `scalgeo` zur Umrechnung des Volumens von Meter [ $m$ ] in Nanometer [ $nm$ ] bzw. zur Anpassung der Kantenlänge. Schließlich zeigt Listing 5.1 die tatsächlichen Datenstrukturen zur Zusammenfassung der Informationen bezüglich der Triangulierung des Volumensnetzes  $\mathcal{T}_h$  bzw. des Randnetzes  $\mathcal{E}_h$ . Während die Struktur `VolumeData` lediglich geometrische Eigenschaften des Volumensnetzes festhält, werden in der Struktur `BoundaryData` zusätzlich zu diesen tatsächlichen Geometriedaten der Randintegraloperator  $K - 1/2$  sowie weitere vorab berechenbare Größen zur Berechnung des Streufeldes eingefügt.

Listing 5.1: Strukturen zum Sammeln der geometrischen Daten

---

```

1 function [VolumeData, BoundaryData] = createGeometricData(boundaryOperator,...
2     coordinates, elements, area, vol, boundarycoo, boundaryele2D,...
3     boundarynodes, full2boundary, coordinatesplot, scalvol,...
4     scalgeo)
5 %*****
6 % Compute initial data for the computation of the stray-field. Create
7 % structures to summarize data.
8 % INPUT: boundaryOperator: 'double layer' potential operator K-1/2
9 %     coordinates: coordinates of volume mesh
10 %     elements: elements of volume mesh in terms of node numbers
11 %     area: area of surfaces of boundary mesh
12 %     vol: volumes of elements of volume mesh
13 %     boundarycoo: coordinates of boundary mesh
14 %     boundaryele2D: elements of boundary mesh
15 %     boundarynodes: boundary nodes relative to volume mesh
16 %     full2boundary: volume nodes relative to boundary mesh
17 %     coordinatesplot: coordinates of volume mesh scaled by a factor
18 %         to stabilize computation of stray-field
19 %     scalvol: volume of magnetic body scaled by 1e27
20 %     scalgeo: scaling factor to stabilize computation of stray-field
21 % OUTPUT: VolumeData: structure involving data corresponding to vol. mesh
22 %     BoundaryData: structure involving data to comp. stray-field as
23 %         well as stray-field energy
24 %*****
25
26 % standard space unit due to SI-units: 1 ...1 m
27
28 nE = size(elements,1);    % number of elements
29 nC = size(coordinates,1); % number of nodes
30
31 % preliminary computation for later computation of stray-field
32 [grad,scalcc] = prepareFK3D(coordinatesplot, elements);
33
34 % create structure to collect data corresponding to volume mesh
35 VolumeData = struct('coordinates',coordinates,'elements',elements,...

```

```

36     'nE',nE,'nC',nC,'vol',vol);
37
38 % create structure to collect data needed for the implementation of
39 % the stray-field and the stray-field energy
40 BoundaryData = struct('boundaryOperator',boundaryOperator,'area',area,...
41     'boundarycoo',boundarycoo,'boundaryele2D',boundaryele2D,...
42     'boundarynodes',boundarynodes,'full2boundary',full2boundary,...
43     'coordinatesplot',coordinatesplot,'scalvol',scalvol,...
44     'scalgeo',scalgeo,'grad',grad,'scalcc',scalcc);

```

---

Wir fassen Informationen bezüglich der Simulation in der Struktur `SimulationData` zusammen. Dabei gilt es zu beachten, dass der vorliegende Code auf einer entdimensionalisierten Formulierung der LLG-Gleichung basiert. Demnach wird die Einheit der Zeit intern durch eine Skalierung modifiziert, weshalb sich Anfangs- und Endzeitpunkt der Simulation einerseits in  $[ns]$  darstellen lassen oder eben in reduzierten Einheiten, siehe Kapitel 1. Des Weiteren wird die (initiale) Zeitschrittweite vom Programm aus vorgegeben. Der Implizitätsparameter  $\theta$  sowie der Skalierungsfaktor `scalL`, der zur Verbesserung der Konditionszahl der Systemmatrix beiträgt, werden ebenfalls in dieser Struktur festgehalten.

Listing 5.2: Struktur zum Sammeln der Simulationsparameter

```

1 function [SimulationData] = createSimulationData(t_0, t_end,...
2     theta, gamma, Ms)
3 %*****
4 % Create structure to collect simulation parameters.
5 % INPUT: t_0: initial time in [ns], usually set to 0
6 %     t_end: final time in [ns]
7 %     gamma: gyromagnetic constant in [m/As]
8 %     Ms: saturation magnetization Ms given [A/m]
9 % OUTPUT: SimulationData: structure involving the parameter setting
10 %     corresponding to simulation
11 %*****
12
13 % initial and final time for non-dimensional LLG
14 tau_0 = gamma*Ms*t_0;
15 tau_end = gamma*Ms*t_end;
16
17 % uniform time-stepping
18 % time-step size should be in pico sec ...1e-12
19 steps = 10; % number of steps
20 k = (tau_end - tau_0)/steps; % uniform time-step size
21
22 % adaption of Langrange-multiplier-Ansatz for better condition
23 scalL = 1e-27;
24
25 % create structure to summarize simulation parameters
26 SimulationData = struct('t_0',t_0,'t_end',t_end,'tau_0',tau_0,...
27     'tau_end',tau_end,'theta',theta,'k',k,'steps',steps,...
28     'scalL',scalL);

```

---

Physikalische Kenngrößen und deren entdimensionalisierte Pendanten werden in der Struktur `PhysicalData` angelegt. Für eine genaue Beschreibung der auftretenden Konstanten verweisen wir einerseits auf Kapitel 1 und andererseits auf die Kommentare in Listing 5.3.

Listing 5.3: Struktur zum Sammeln der physikalischen Daten

```

1 function [PhysicalData] = createPhysicalData(Js, constexch, constani,...
2     easyaxis, turnstray, fstr, alpha)
3 %*****
4 % Create structure to set and collect physical parameters.
5 % INPUT: Js: saturation polarization Js = Ms*mu0 given in [T]
6 %     constexch: exchange constant A in [J/m]
7 %     constani: anisotropy constant K in [J/m^3]
8 %     easyaxis: select easy-axis as one of the coordinate axis
9 %     turnstray: turn strayfield on (1) or off (0)
10 %     fstr: strength of applied field in [A/m]
11 %     alpha: damping parameter (material dependent) 0 < alpha <= 1
12 % OUTPUT: PhysicalData: structure involving the physical parameter setting
13 %*****
14
15 % standard time unit due to SI-units: 1 ...1 s
16
17 % physical constants (fix)
18 gamma = 2.210173e5; % gyromagnetic constant in [m/As]
19 mu0 = 12.566371e-7; % permeability in [T*m/A]
20
21 % deduced physical constants (fix)
22 Ms = Js/mu0; % saturation magnetization Ms in [A/m]
23 Km = 0.5*mu0*Ms*Ms; % magnetostatic energy density in [A/m]
24
25 % scaled coefficients for energy contributions of effective field H_eff
26 scalexch = 2*constexch/(mu0*Ms*Ms);
27 scalani = constani/(mu0*Ms*Ms);
28 scalstray = 0.5*Ms^2*mu0;
29 scalext = -Ms^2*mu0;
30
31 % set easy-axis and supplementary axes to represent orthonormal basis
32 [e, z1, z2] = seteasyaxis(easyaxis);
33
34 % strength of applied field: H_ext = fstrengthdim 'f' Ms' ...in [A/m]
35 % H_ext for dimensionless LLG: 'f' fstrength = fstrengthdim/Msfunction
36 fstrength = fstr/Ms;
37
38 % mesh size should be smaller than exchange length
39 lex = sqrt(2*mu0*constexch/(Js*Js)); % exchange length
40
41 PhysicalData = struct('gamma',gamma,'mu0',mu0,'Js',Js,'Ms',Ms,'Km',Km,...
42     'constexch',constexch,...
43     'scalexch',scalexch,'constani',constani,'scalani',scalani,...
44     'scalstray',scalstray,'scalenergyext',scalext,...
45     'e',e,'z1',z1,'z2',z2,'turnstray',turnstray,'fstrength',fstrength,...
46     'alpha',alpha,'lex',lex);

```

Der Übersichtlichkeit halber legen wir eine Struktur zur Zusammenfassung der einzelnen Energiebeiträge fest. Dabei werden lediglich Vektoren zur Speicherung initialisiert und entsprechend bezeichnet.

---

Listing 5.4: Struktur zum Sammeln der Werte der Energiebeiträge

---

```

1 function [EnergyData] = createEnergyData
2 %*****
3 % Create structure to save data corresponding to energy contributions.
4 % OUTPUT: EnergyData: structure to save energy cont. at each time-step
5 %*****
6
7 % initialization of vectors to save energy

```

```

8 energyexch = [];
9 energyani = [];
10 energystray = [];
11 energyext = [];
12
13 % create corresponding structure
14 EnergyData = struct('energyexch',energyexch,'energyani',energyani,...
15                    'energystray',energystray,'energyext',energyext);

```

---

## 5.2 Programmstruktur und Implementierung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der numerischen Umsetzung des Algorithmus 3.2.4 bzw. 3.2.14. Im Hinblick auf das letztgenannte Verfahren, beschränken wir uns hierbei auf das *Mass-Lumping des  $L^2$ -Skalarprodukts* als Approximation der  $L^2$ -Terme, die im linearen Gleichungssystem auftreten. Abschnitt 2.2.1 ist einer detaillierteren Auseinandersetzung mit dieser Approximationsstrategie gewidmet.

Zunächst wollen wir uns mit der eigentlichen Programmstruktur befassen, um einen Gesamtüberblick der implementierten Routinen zu gewinnen. Um eine numerisch und physikalisch sinnvolle Simulation zu gestatten, ist es notwendig gewisse problemspezifische Parameter zu setzen. Im vorliegenden Code ist es die Aufgabe des Benutzers folgende Parameter in Form einer Text-Datei zu speichern:

```

Js
t_end
constexch
constani
easyaxis (1, 2, 3 <=> x, y, z)
turnstray (0, 1 <=> on, off)
fstrength
theta (0 <= theta <= 1)
alpha (alpha > 0)

```

Hierbei stellt `Js` die Saturationspolarisierung in Tesla [ $T$ ] dar, `t_end` bezeichnet den Endzeitpunkt der Simulation in Nanosekunden [ $ns$ ], während `constexch` die Austauschkonstante in Joule pro Meter [ $J/m$ ] wiedergibt. Analog dazu wird durch `constani` die Anisotropiekonstante in Joule pro Volumenmeter [ $J/m^3$ ] festgehalten und durch den Parameter `easyaxis`, der die Werte 1, 2 oder 3 entsprechend der  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Achse annehmen kann, die leichte Achse des magnetischen Materials angegeben. Der Parameter `turnstray` kann die Werte 0 oder 1 annehmen, wobei im ersten Zustand eine Simulation ohne Einfluss des Streufeldes veranlasst wird und im zweiten Fall der Effekt des Streufeldes miteinbezogen wird. In der Variable `fstrength` wird die Stärke des äußeren angelegten Feldes in Ampère pro Meter [ $A/m$ ] spezifiziert. Schließlich legt der Benutzer durch `theta` den Implizitätsparameter fest, der Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann, und setzt mit `alpha` den stets positiven Gilbert-Dämpfungsparameter.

Außerdem ist es notwendig, dass der Benutzer einen Namen einer Geometrie angibt, für die bereits entsprechende Daten generiert wurden, siehe Anhang A für weitere Details.

Damit ergibt sich bereits der Input für die Hauptroutine `simulation.m`, siehe Anhang A, weshalb ein Aufruf beispielsweise wie folgt aussehen kann

```
simulation('cube', 'ExampleData_mumag3.txt');
```

Diese Routine stellt die Kern-Datei der gesamten Simulation dar. Einerseits werden hierin alle Parameter und Geometriedaten eingelesen und sinnvoll für das Time-Stepping-Verfahren aufbereitet und andererseits wird von hier aus die Zeitintegration veranlasst. Die Zeitintegration kann hierbei entweder mit uniformen Zeitschritten erfolgen oder durch einen adaptiven Algorithmus in jedem Schritt angepasst werden. Diese Funktion verzichtet auf einen Output im herkömmlichen Sinn und speichert daher alle interessanten Größen direkt in dafür vorgesehenen Dateien.

Im gesamten Programm sind die Einträge der Systemmatrizen bzw. der Koeffizientenvektoren derart angelegt, dass zunächst die  $x$ -Komponenten, dann die  $y$ -Komponenten und zuletzt die  $z$ -Komponenten für jeweils alle Knoten betrachtet werden.

Jenes Vektorfeld, das die Magnetisierung  $\mathbf{m}$  repräsentiert, wird in den folgenden Codesegmenten gleichnamig bezeichnet und stellt üblicherweise einen  $N \times 3$ -Array dar, der in der  $j$ -ten Zeile die Werte der einzelnen Komponenten der Magnetisierung speichert. In entsprechender Weise werden analoge Größen gespeichert.

Im Folgenden wollen wir nun auf die Implementierung des diskreten Systems eingehen, das in jedem Zeitschritt zu lösen ist. Dabei legen wir den Fokus auf die tatsächliche Umsetzung der Berechnung jener Größen und Bauteile, die von Interesse sind. Wir ergänzen dies durch Codesegmente. Aus den in den einzelnen Codeabschnitten enthaltenen Kommentaren ist sodann Input und Output der Funktion zu entnehmen und wird daher nicht separat diskutiert.

### 5.2.1 Diskretisierung der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ ohne Mass-Lumping

Wir erinnern an die Wahl der Basisfunktionen  $\beta_{i+(\ell-1)N} = \beta_i \mathbf{e}_\ell$  mit  $i = 1, \dots, N$ ,  $\ell = 1, \dots, 3$  des FE-Ansatzraumes  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  aus Abschnitt 2.1. Dem entsprechend findet die aus (3.30) bekannte Bilinearform

$$a(\beta_i, \beta_{i'}) = \alpha \int_{\Omega} \beta_i \cdot \beta_{i'} \, d\mathbf{x} + \theta k C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla \beta_i \cdot \nabla \beta_{i'} \, d\mathbf{x}$$

eine Darstellung in der Form einer symmetrischen Blockdiagonalmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^0 & & \\ & \mathbf{A}^0 & \\ & & \mathbf{A}^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3N \times 3N} \quad (5.1)$$

mit symmetrischen Blöcken

$$\mathbf{A}^0 \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{N \times N}, \quad \text{mit} \quad A_{ii'}^0 = \alpha \int_{\Omega} \beta_i \beta_{i'} \, d\mathbf{x} + \theta k C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla \beta_i \cdot \nabla \beta_{i'} \, d\mathbf{x}. \quad (5.2)$$

Es sei bemerkt, dass die auftretenden Integrale durch geschlossene Formeln zu berechnen sind. Außerdem stellt  $\mathbf{A}^0$  eine positiv gewichtete Summe der standardmäßigen Massen- und Steifigkeitsmatrix dar. Daher sind  $\mathbf{A}^0$  und insbesondere  $\mathbf{A}$  positiv definite und schwach besetzte Matrizen, die jeweils nicht vom Zeit- bzw. Iterationsschritt  $j$  abhängen.

Der Vollständigkeit halber stellen wir die Massenmatrix für stückweise affine und global stetige Basisfunktionen  $\beta_{i+(\ell-1)N} = \beta_i \mathbf{e}_\ell$  für  $i = 1, \dots, N$ ,  $\ell = 1, \dots, 3$  des FE-Ansatzraumes  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  dar

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}^0 & & \\ & \mathbf{N}^0 & \\ & & \mathbf{N}^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3N \times 3N} \quad (5.3)$$

mit Blöcken

$$\mathbf{N}^0 \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad \text{mit} \quad N_{ii'}^0 = \int_{\Omega} \beta_i \cdot \beta_{i'} d\mathbf{x}. \quad (5.4)$$

In analoger Weise lässt sich die Steifigkeitsmatrix wie folgt schreiben

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^0 & & \\ & \mathbf{S}^0 & \\ & & \mathbf{S}^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3N \times 3N} \quad (5.5)$$

mit Blöcken

$$\mathbf{S}^0 \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad \text{mit} \quad S_{ii'}^0 = \int_{\Omega} \nabla \beta_i \cdot \nabla \beta_{i'} d\mathbf{x}. \quad (5.6)$$

Die entsprechende numerische Realisierung der Masse- und Steifigkeitsmatrix findet sich in den Codeabschnitten 5.5 und 5.6. Hierbei wurde bereits auf die Tatsache, dass diese Matrizen schwach besetzt sind, eingegangen.

Listing 5.5: Berechnung der Massenmatrix

---

```

1 function M = calcmassma(coordinates, elements)
2 %*****
3 % Computation of mass-matrix for lowest order basis functions mapping
4 % from R^3 to R^3 in linear complexity.
5 % INPUT: coordinates: coordinates of nodes of volume mesh
6 %         elements: elements of volume mesh
7 % OUTPUT: M: (3nC x 3nC)-mass-matrix
8 %*****
9
10 nC = size(coordinates,1); % number of nodes
11 nE = size(elements,1); % number of elements
12 I = zeros(3*16*nE,1); % initialize data vectors
13 J = zeros(3*16*nE,1);
14 M = zeros(3*16*nE,1);
15
16 % assembly of mass-matrix in linear complexity
17 for i = 1:nE
18     nodes = elements(i,:); % numbers of nodes of i-th element
19     % compute coordinates of non-zero entries
20     idx = 16*(i-1)+1:16*i;
21     tmp = [1;1;1;1]*nodes;
22     I(idx) = reshape(tmp',16,1);
23     I(idx + 16*nE) = reshape(tmp'+nC,16,1);
24     I(idx + 2*16*nE) = reshape(tmp'+2*nC,16,1);
25     J(idx) = reshape(tmp,16,1);
26     J(idx + 16*nE) = reshape(tmp+nC,16,1);
27     J(idx + 2*16*nE) = reshape(tmp+2*nC,16,1);
28     % compute integral and set values of non-zero entries
29     hlpM = det([1 1 1 1;coordinates(elements(i,:),:)]')...
30     *[2 1 1 1; 1 2 1 1; 1 1 2 1; 1 1 1 2]/120;
31     M(idx) = hlpM;
32     M(idx + 16*nE) = hlpM;
33     M(idx + 2*16*nE) = hlpM;
34 end
35 M = sparse(I,J,M,3*nC,3*nC);

```

---

Listing 5.6: Berechnung der Steifigkeitsmatrix

---

```

1 function A = calcstima(coordinates, elements)
2 %*****
3 % Computation of stiffness-matrix for lowest order basis functions mapping
4 % from R^3 to R^3 in linear complexity.
5 % INPUT: coordinates: coordinates of nodes of volume mesh
6 %         elements: elements of volume mesh
7 % OUTPUT: A: (3nC x 3nC)-stiffness-matrix
8 %*****
9
10 nC = size(coordinates,1); % number of nodes
11 nE = size(elements,1);   % number of elements
12 I = zeros(3*16*nE,1);   % initialize data vectors
13 J = zeros(3*16*nE,1);
14 A = zeros(3*16*nE,1);
15
16 % assembly of stiffness-matrix in linear complexity
17 for i = 1:nE
18     nodes = elements(i,:); % numbers of nodes of i-th element
19     % compute local stiffness-matrix
20     B = [1 1 1 1; coordinates(nodes,:)'];
21     grad = B \ [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];
22     % compute coordinates of non-zero entries
23     idx = 16*(i-1)+1:16*i;
24     tmp = [1;1;1;1]*nodes;
25     I(idx) = reshape(tmp',16,1);
26     I(idx + 16*nE) = reshape(tmp'+nC,16,1);
27     I(idx + 2*16*nE) = reshape(tmp'+2*nC,16,1);
28     J(idx) = reshape(tmp,16,1);
29     J(idx + 16*nE) = reshape(tmp+nC,16,1);
30     J(idx + 2*16*nE) = reshape(tmp+2*nC,16,1);
31     % compute integral and set values of non-zero entries
32     hlpA = det(B)/6*reshape(grad*grad',16,1);
33     A(idx) = hlpA;
34     A(idx + 16*nE) = hlpA;
35     A(idx + 2*16*nE) = hlpA;
36 end
37 A = sparse(I,J,A,3*nC,3*nC);

```

---

### 5.2.2 Diskretisierung der Bilinearform $b^j(\cdot, \cdot)$ ohne Mass-Lumping

Unter Verwendung der Identität  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  für alle  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  lässt sich die Bilinearform  $b^j(\cdot, \cdot)$  aus (3.30) für Basisfunktionen  $\beta_{i+(\ell-1)N} = \beta_i \mathbf{e}_\ell$  mit  $i = 1, \dots, N$ ,  $\ell = 1, \dots, 3$  des FE-Ansatzraumes  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  aus Abschnitt 2.1 wie folgt darstellen

$$b^j(\beta_i, \beta_{i'}) = \int_{\Omega} (\mathbf{m}_h^j \times \beta_i) \cdot \beta_{i'} dx = \int_{\Omega} (\beta_i \times \beta_{i'}) \cdot \mathbf{m}_h^j dx.$$

Um eine entsprechende Systemmatrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}$  präsentieren zu können, bemerken wir, dass  $\beta_i \mathbf{e}_\ell \times \beta_{i'} \mathbf{e}_{\ell'} = \beta_i \beta_{i'} \mathbf{e}_\ell \times \mathbf{e}_{\ell'}$ , sowie folgende Eigenschaften gelten

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_\ell \times \mathbf{e}_\ell = 0.$$

Also findet  $\mathbf{B}$  eine Blockstruktur in folgender Form

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\mathbf{B}^3 & -\mathbf{B}^2 \\ -\mathbf{B}^3 & \mathbf{0} & +\mathbf{B}^1 \\ +\mathbf{B}^2 & -\mathbf{B}^1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3N \times 3N} \quad (5.7)$$

mit

$$\mathbf{B}^\ell \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{N \times N}, \quad B_{ii'}^\ell = \int_{\Omega} \beta_i \beta_{i'} \mathbf{m}_h^j \cdot \mathbf{e}_\ell \, d\mathbf{x}. \quad (5.8)$$

Da  $b^j(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h) = -b^j(\boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\phi}_h)$  und  $b^j(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\phi}_h) = 0$  für alle  $\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  gilt, ist klar, dass  $\mathbf{B}$  eine schief-symmetrische und positiv semidefinite Matrix ist, die gleichzeitig auch schwach besetzt ist. Wir verweisen auf Listing 5.7 für eine numerische Umsetzung.

Listing 5.7: Berechnung der Bilinearform  $b^j$

---

```

1 function C = calccrossma(m, coordinates, elements)
2 %*****
3 % Computation of matrix including the vector-cross-product (b^j(..))
4 % with affine basis functions mapping from R^3 to R^3.
5 % INPUT: m: magnetization as (nC x 3)-matrix
6 %       coordinates: coordinates of nodes of volume mesh
7 %       elements: elements of volume mesh
8 % OUTPUT: C: matrix representing bilinear form b^j(..)
9 %*****
10
11 nC = size(coordinates,1); % number of nodes
12 nE = size(elements,1); % number of elements
13 Z = sparse([], [], [], nC, nC); % initialize matrix
14 I = zeros(16*nE,1); % initialize data vectors
15 J = zeros(16*nE,1);
16 B1 = zeros(16*nE,1);
17 B2 = zeros(16*nE,1);
18 B3 = zeros(16*nE,1);
19
20 % compute local cross-product-matrices for reference tetrahedron under:
21 % beta1 = 1-x-y-z; beta2 = x; beta3 = y; beta4 = z
22 % tmp_i(j,k) = int beta_j*beta_k*beta_i
23 tmp1 = [6 2 2 2; 2 2 1 1; 2 1 2 1; 2 1 1 2]./720;
24 tmp2 = [2 2 1 1; 2 6 2 2; 1 2 2 1; 1 2 1 2]./720;
25 tmp3 = [2 1 2 1; 1 2 2 1; 2 2 6 2; 1 1 2 2]./720;
26 tmp4 = [2 1 1 2; 1 2 1 2; 1 1 2 2; 2 2 2 6]./720;
27
28 % compute matrix according to vector-cross-product
29 for j = 1:nE
30     nodes = elements(j,:); % numbers of nodes belonging to j-th element
31     % compute coordinates of non-zero entries
32     idx = 16*(j-1)+1:16*j;
33     tmp = [1;1;1;1]*nodes;
34     I(idx) = reshape(tmp',16,1);
35     J(idx) = reshape(tmp,16,1);
36     % compute determinant
37     tmpdet = det([1 1 1 1;coordinates(elements(j,:),:)]);
38     % evaluate m at nodes of j-th element
39     tmpm = [m(nodes(1),:); m(nodes(2),:); m(nodes(3),:); m(nodes(4),:)];
40     tmpm = reshape(tmpm,12,1);
41     % set values of non-zero entries
42     B1(idx) = tmpdet*(tmp1*tmpm(1) + tmp2*tmpm(2)...
43                 + tmp3*tmpm(3) + tmp4*tmpm(4));
44     B2(idx) = tmpdet*(tmp1*tmpm(5) + tmp2*tmpm(6)...
45                 + tmp3*tmpm(7) + tmp4*tmpm(8));
46     B3(idx) = tmpdet*(tmp1*tmpm(9) + tmp2*tmpm(10)...
47                 + tmp3*tmpm(11) + tmp4*tmpm(12));
48 end

```

```

49 B1 = sparse(I, J, B1, nC, nC);
50 B2 = sparse(I, J, B2, nC, nC);
51 B3 = sparse(I, J, B3, nC, nC);
52 C = [Z B3 -B2; -B3 Z B1; B2 -B1 Z];

```

---

### 5.2.3 Mass-Lumping des $L^2$ -Skalarprodukts

Im vorliegenden Abschnitt behandeln wir die Implementierung einer vereinfachten Berechnung der auftretenden Massenmatrizen unter Verwendung des *Mass-Lumpings des  $L^2$ -Skalarprodukts*, siehe Abschnitt 2.2.1. Es gilt zu bemerken, dass wir die korrespondierenden Matrizen hier und im Folgenden gleichnamig bezeichnen, da eine entsprechende Interpretation ohnedies je nach betrachtetem Algorithmus erfolgt.

Wir betrachten nun die approximativen Pendanten  $a_h(\cdot, \cdot)$  und  $b_h^j(\cdot, \cdot)$  der Bilinearformen  $a(\cdot, \cdot)$  und  $b^j(\cdot, \cdot)$ , die in (3.45) eingeführt wurden. Sie werden für Basisfunktionen  $\beta_{i+(\ell-1)N} = \beta_i \mathbf{e}_\ell$  mit  $i = 1, \dots, N$ ,  $\ell = 1, \dots, 3$  des FE-Ansatzraumes  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  durch

$$a_h(\beta_i, \beta_{i'}) = \alpha \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\beta_i \cdot \beta_{i'}) \, d\mathbf{x} + \theta k \frac{2A}{\mu_0 M_s^2} \int_{\Omega} \nabla \beta_i \cdot \nabla \beta_{i'} \, d\mathbf{x} \quad (5.9)$$

und

$$b_h^j(\beta_i, \beta_{i'}) = \int_{\Omega} \mathcal{I}_h((\mathbf{m}_h^j \times \beta_i) \cdot \beta_{i'}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathcal{I}_h((\beta_i \times \beta_{i'}) \cdot \mathbf{m}_h^j) \, d\mathbf{x} \quad (5.10)$$

repräsentiert. Die daraus resultierenden Matrixblöcke haben den Vorteil, dass sie Diagonalgestalt haben, d.h. der  $L^2$ -Anteil der Matrix  $\mathbf{A}^0$  aus (5.2) findet nun folgende Darstellung

$$\int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\beta_i \beta_{i'}) \, d\mathbf{x} = |\omega_i| \delta_{ii'}$$

mit  $\omega_i = \bigcup \{T \in \mathcal{T}_h : \mathbf{z}_i \in T\}$  als den mit dem Knoten  $\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h$  assoziierten Knotenpatch und  $\delta_{ii'}$  dem Kronecker-Symbol. Diese Beobachtung ist von noch größerer Bedeutung für die Blöcke der Matrix  $\mathbf{B}^\ell$  aus (5.8) mit

$$B_{ii'}^\ell = \int_{\Omega} \mathcal{I}_h(\beta_i \beta_{i'} \mathbf{m}_h^j \cdot \mathbf{e}_\ell) \, d\mathbf{x} = |\omega_i| \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_i) \cdot \mathbf{e}_\ell \delta_{ii'}.$$

Unter der Darstellung  $\mathbf{m}_h^j = \sum_{m=1}^{3N} \mu_m \boldsymbol{\beta}_m$ , können wir die Matrix  $\mathbf{B}^\ell$  in folgender Form präsentieren

$$\mathbf{B}^\ell = \text{diag} (|\omega_i| \mu_{i+(\ell-1)N}, i = 1, \dots, N) \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

wodurch die Implementierung von  $\mathbf{B}$  wesentlich vereinfacht wird.

Es sei betont, dass trotz des *Mass-Lumpings des  $L^2$ -Skalarprodukts* sowohl die Matrix  $\mathbf{A}$ , die nun zur Bilinearform  $a_h(\cdot, \cdot)$  korrespondiert, als auch die Matrix  $\mathbf{B}$ , die der Bilinearform  $b_h^j(\cdot, \cdot)$  entspricht, ihre charakteristischen Eigenschaften beibehalten. Das bedeutet, dass  $\mathbf{A}$  noch immer eine schwach besetzte positiv definite Matrix ist, während  $\mathbf{B}$  nun aus Blöcken mit Diagonalgestalt besteht und damit insbesondere schwach besetzt ist. Darüber hinaus ist  $\mathbf{B}$  noch immer schief-symmetrisch und positiv semidefinit. Für eine numerische Umsetzung verweisen wir auf Listing 5.8 bzw. 5.9.

Listing 5.8: Berechnung der Massenmatrix mittels *Mass-Lumping des  $L^2$ -Skalarprodukts*


---

```

1 function M = calcMLmassma(coordinates, elements, vol)
2 %*****
3 % Computation of matrix corresponding to mass-lumping (ML) of
4 %  $L^2$ -scalar-product for lowest order basis functions mapping
5 % from  $R^3$  to  $R^3$ .
6 % INPUT: coordinates: coordinates of nodes of volume mesh
7 %         elements: elements of volume mesh
8 %         vol: volumes of elements of volume mesh
9 % OUTPUT: M: (3nC x 3nC)-mass-matrix
10 %*****
11
12 nC = size(coordinates,1); % number of nodes
13 nE = size(elements,1);   % number of nodes
14 volPatch = zeros(nC,1); % initialize data vector
15
16 % compute volumes of node patches
17 for i = 1:nE
18     nodes = elements(i,:); % numbers of nodes of i-th element
19     volPatch(nodes) = volPatch(nodes) + vol(i);
20 end
21 % ML-matrix for lowest order basis functions mapping from  $R^3$  to  $R^3$ 
22 M = spdiags([volPatch; volPatch; volPatch],0,3*nC,3*nC);

```

---

Listing 5.9: Berechnung der Bilinearform  $b_h^j$  mittels *Mass-Lumping des  $L^2$ -Skalarprodukts*


---

```

1 function C = calcMLcrossma(m, coordinates, elements, vol)
2 %*****
3 % Computation of matrix including the vector-cross-product ( $b_h^j(\dots)$ )
4 % with affine basis functions mapping from  $R^3$  to  $R^3$  under application of
5 % the mass-lumping (ML) of the  $L^2$ -scalar-product.
6 % INPUT: m: magnetization as (nC x 3)-matrix
7 %         coordinates: coordinates of nodes of volume mesh
8 %         elements: elements of volume mesh
9 %         vol: volumes of elements of volume mesh
10 % OUTPUT: C: matrix representing bilinear form  $b_h^j(\dots)$ 
11 %*****
12
13 nC = size(coordinates,1); % number of nodes
14 nE = size(elements,1);   % number of nodes
15 volPatch = zeros(nC,1); % initialize data vector
16
17 % compute volumes of node patches
18 for i = 1:nE
19     nodes = elements(i,:); % numbers of nodes of i-th element
20     volPatch(nodes) = volPatch(nodes) + vol(i);
21 end
22 C = spdiags([[volPatch.*m(:,2); zeros(2*nC,1)],...
23             [-volPatch.*m(:,3);-volPatch.*m(:,1);zeros(nC,1)],...
24             [zeros(nC,1);volPatch.*m(:,3);volPatch.*m(:,1)],...
25             [zeros(2*nC,1);-volPatch.*m(:,2)]],-2*nC -nC nC 2*nC],3*nC,3*nC);

```

---

### 5.2.4 Diskretisierung der rechten Seite $L^j(\cdot)$

In diesem Abschnitt wollen wir die Implementierung der Linearform  $L^j(\cdot)$  aus (3.30) kurz umreißen. Wir wählen die vektorwertigen Funktionen  $\beta_{i+(\ell-1)N} = \beta_i \mathbf{e}_\ell$  mit  $i = 1, \dots, N$ ,  $\ell = 1, \dots, 3$ ,

die bereits in Abschnitt 2.1 eingeführt wurden, als Basis des FE-Ansatzraumes  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$ . Damit lässt sich die rechte Seite  $L^j(\cdot)$  wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} L^j(\beta_i) &= -C_{\text{ex}} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{m}_h^j \cdot \nabla \beta_i \, d\mathbf{x} - C_{\text{ani}} \int_{\Omega} D\Phi(\mathbf{m}_h^j) \cdot \beta_i \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathcal{P}_h \mathbf{m}_h^j \cdot \beta_i \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{f}_h^j \cdot \beta_i \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Wir betrachten im Folgenden die numerische Realisierung der auftretenden Summanden einzeln und verwenden hierfür eine entsprechende Notation durch selbsterklärende Indizierung.

Zunächst betrachten wir die Darstellung der diskreten Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^j = \sum_{i=1}^{3N} \mu_i \beta_i$  mit  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{3N}$ , wodurch jener Beitrag der rechten Seite, der der Austauschenergie entspringt, wie folgt dargestellt werden kann

$$L_{\text{ex}}^j(\beta_i) = -C_{\text{ex}} \sum_{i'=1}^{3N} \mu_{i'} \int_{\Omega} \nabla \beta_{i'} \cdot \nabla \beta_i \, d\mathbf{x}. \quad (5.12)$$

Demnach ist klar, dass sich eine Implementierung mit einfacher Matrix-Vektor-Multiplikation unter Verwendung der standardmäßigen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3N \times 3N}$ , siehe (5.5), in Form eines Vektors  $\boldsymbol{\ell}_{\text{ex}} \in \mathbb{R}^{3N}$  mit

$$\boldsymbol{\ell}_{\text{ex}} = -C_{\text{ex}} \mathbf{S} \boldsymbol{\mu} \quad (5.13)$$

umsetzen lässt.

Es stelle  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{e}\}$  eine orthonormale Basis des  $\mathbb{R}^3$  dar. Dann lässt sich jener Beitrag, der zur Anisotropieenergie korrespondiert, unter der Definition der Anisotropiedichte aus Kapitel 1, wie folgt darstellen

$$L_{\text{ani}}^j(\beta_i) = -2C_{\text{ani}} \int_{\Omega} \left( (\mathbf{m}_h^j \cdot \mathbf{b}_1) \mathbf{b}_1 + (\mathbf{m}_h^j \cdot \mathbf{b}_2) \mathbf{b}_2 \right) \cdot \beta_i \, d\mathbf{x}. \quad (5.14)$$

Unter Verwendung der Darstellung der diskreten Magnetisierung in der Form  $\mathbf{m}_h^j = \sum_{i=1}^{3N} \mu_i \beta_i$  mit  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{3N}$  führt die Berechnung von  $L_{\text{ani}}^j(\beta_i)$  zunächst auf das Aufstellen der standardmäßigen Massenmatrix  $\mathbf{N} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3N \times 3N}$ , siehe (5.3). Damit lässt sich dieser Beitrag der rechten Seite  $L^j(\cdot)$  durch Matrix-Vektor-Multiplikation in der Form eines Vektors  $\boldsymbol{\ell}_{\text{ani}} \in \mathbb{R}^{3N}$  mit

$$\boldsymbol{\ell}_{\text{ani}} = -2C_{\text{ani}} \mathbf{N} \boldsymbol{\alpha} \quad (5.15)$$

realisieren, siehe Codeauszug 5.11. Hierbei stellt  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{3N}$  einen Koeffizientenvektor mit Einträgen  $\alpha_{i+(\ell-1)N} = ((\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_i) \cdot \mathbf{b}_1) \mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{e}_{\ell} + ((\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_i) \cdot \mathbf{b}_2) \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{e}_{\ell}$  dar.

Im Bezug auf die Darstellung jenes Terms, der dem Streufeld entspringt, bemerken wir zunächst, dass  $\mathcal{P}_h \mathbf{m}_h^j \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  gilt. Es stelle  $\boldsymbol{\chi}_{i+(\ell-1)E} = \chi_i \mathbf{e}_{\ell}$  für  $i = 1, \dots, E$ ,  $\ell = 1, 2, 3$  eine vektorwertige Basis von  $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  dar. Hierbei bezeichnen wir wieder mit  $\mathbf{e}_{\ell} \in \mathbb{S}^2$  den  $\ell$ -ten Einheitsvektor und mit  $\chi_i$  die charakteristische Funktion des Elements  $T_i \in \mathcal{T}_h$ , also jene skalarwertige Basisfunktion des  $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h)$ , die konstant auf dem Element  $T_i \in \mathcal{T}_h$  ist. Unter Verwendung dieser Basis lässt sich das approximierte Streufeld  $\mathcal{P}_h \mathbf{m}_h^j$  durch  $\mathcal{P}_h \mathbf{m}_h^j = \sum_{i=1}^{3E} p_i \boldsymbol{\chi}_i$  mit  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3E}$  dem entsprechenden Koeffizientenvektor ausdrücken, siehe Kapitel 4 für weitere Details. Des Weiteren findet der dazu korrespondierende Beitrag der rechten Seite folgende Darstellung

$$L_{\text{stray}}^j(\beta_i) = - \sum_{i'=1}^{3E} p_{i'} \int_{\Omega} \boldsymbol{\chi}_{i'} \cdot \beta_i \, d\mathbf{x}. \quad (5.16)$$

Insbesondere führt dies auf die Berechnung einer Massenmatrix der Gestalt

$$\widehat{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{N}}^0 & & \\ & \widehat{\mathbf{N}}^0 & \\ & & \widehat{\mathbf{N}}^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3N \times 3E} \quad (5.17)$$

mit Blöcken

$$\widehat{\mathbf{N}}^0 \in \mathbb{R}^{N \times E} \quad \text{mit} \quad \widehat{N}_{ii'}^0 = \int_{\Omega} \chi_i \cdot \beta_{i'} \, d\mathbf{x}, \quad (5.18)$$

die elementweise konstante Basisfunktionen mit knotenweise definierten affinen Ansatzfunktionen koppelt. Wir halten fest, dass die auftretenden Integrale durch eine geschlossene Formel zu berechnen sind. Insgesamt ergibt sich damit die Berechnung eines Vektors  $\ell_{\text{stray}} \in \mathbb{R}^{3N}$  mit

$$\ell_{\text{stray}} = -\widehat{\mathbf{N}}\mathbf{p} \quad (5.19)$$

zur numerischen Realisierung dieses Anteils der rechten Seite. Wir verweisen auf Listing 5.10 für die Implementierung der Systemmatrix  $\widehat{\mathbf{N}}^0$ .

Wir setzen voraus, dass die Diskretisierung des angewandten äußeren Feldes auf eine Funktion  $\mathbf{f}_h^j \approx \mathbf{f}(t, \cdot)$  mit  $\mathbf{f}_h^j \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  für  $t \in [t_j, t_{j+1})$  für  $j > 0$  führt. Mit der Notation  $\mathbf{f}_h^j = \sum_{i'=1}^{3N} \zeta_{i'} \beta_{i'}$  mit  $\zeta \in \mathbb{R}^{3N}$  lässt sich der aus dem angelegten äußeren Feld resultierende Beitrag durch

$$L_{\text{ext}}^j(\beta_i) = \sum_{i'=1}^{3N} \zeta_{i'} \int_{\Omega} \beta_{i'} \cdot \beta_i \, d\mathbf{x} \quad (5.20)$$

darstellen. Simple Matrix-Vektor-Multiplikation, siehe Listing 5.12, unter Verwendung der Massenmatrix  $\mathbf{N} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3N \times 3N}$  aus (5.3) führt auf auf einen Vektor  $\ell_{\text{ext}} \in \mathbb{R}^{3N}$  mit

$$\ell_{\text{ext}} = \mathbf{N}\zeta. \quad (5.21)$$

Damit ist dieser Abschnitt nun vollständig.

Eine numerische Realisierung der Assemblierung der Daten findet sich in Codeauszug 5.14. Dies wird ergänzt durch die Listings 5.11 und 5.12, in denen die Berechnung der Beiträge bezüglich der Anisotropie und des angelegten äußeren Feldes ausgelagert sind.

Listing 5.10: Berechnung der Massenmatrix (für das Streufeld)

---

```

1 function MnEnC = calcMnEnC(vol, nC, nE, elements)
2 %*****
3 % Computation of mass-matrix for lowest order nodal basis functions
4 % mapping from R^3 to R with element basis functions from R^3 to R in
5 % linear complexity.
6 % INPUT: vol: volumes of elements of volume mesh
7 %         nC: number of nodes of volume mesh
8 %         nE: number of elements of volume mesh
9 %         elements: elements of volume mesh
10 % OUTPUT: MnEnC: nCx nE-mass-matrix combining S^1 and P^0 ansatz functions
11 %*****
12
13 % initialize data vectors
14 I = zeros(4*nE, 1);

```

```

15 J = zeros(4*nE,1);
16 MnEnC = zeros(4*nE,1);
17
18 hlp = 1/4*ones(4,1);
19
20 % assembly of mass-matrix in linear complexity
21 for i = 1:nE
22     nodes = elements(i,:); % numbers of nodes of i-th element
23     % compute coordinates of non-zero entries
24     idx = 4*(i-1)+1:4*i;
25     I(idx) = nodes';
26     J(idx) = i;
27     % compute integral and set values of non-zero entries
28     MnEnC(idx) = hlp*vol(i);
29 end
30 MnEnC = sparse(I,J,MnEnC,nC,nE);

```

---

Listing 5.11: Berechnung der Anisotropie

```

1 function val = calcani(m, coordinates, b1, b2, scaling)
2 %*****
3 % Computation of DPhi with e, b1, b2 an orthogonal basis of R^3.
4 % INPUT: m: magnetization as nCx3-matrix
5 %         coordinates: coordinates of nodes of volume mesh
6 %         b1, b2: such that e, b1, b2 is orthogonal basis of R^3
7 %         scaling: scaling factor of anisotropy due to dimensionless LLG
8 % OUTPUT: val: anisotropy
9 %*****
10
11 nC = size(coordinates,1); % number of nodes
12 val = zeros(3*nC,1);
13
14 % compute euclidean scalarproduct of m with orthogonal basis vectors z1,z2
15 hlpb1 = m*b1;
16 hlpb2 = m*b2;
17 % compute DPhi
18 for i=1:nC
19     val([i nC+i 2*nC+i]) = hlpb1(i).*b1 + hlpb2(i).*b2;
20 end
21
22 % include scaling factors arising due to derivative and anisotropy
23 val = val*2*scaling;

```

---

Listing 5.12: Konstantes angelegtes äußeres Feldes

```

1 function val = f(nC, scaling)
2 %*****
3 % Computation of constant applied field.
4 % INPUT: nC: number of nodes
5 %         scaling: scaling factor of applied field including sign
6 % OUTPUT: val: constant applied field
7 %*****
8
9 % compute constant applied field in direction of 45-degree including the
10 % scaling factor arising due to the applied field
11 val = scaling.*[-ones(nC,1); zeros(nC,1); -ones(nC,1)];

```

---

### 5.2.5 Berechnung der diskreten Zeitableitung $\mathbf{v}_h^j$

Wir wollen uns nun mit der Berechnung der Approximation  $\mathbf{v}_h^j \in \mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j} = \{\boldsymbol{\psi}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3) \mid \boldsymbol{\psi}_h(\mathbf{z}_i) \cdot \boldsymbol{\phi}_h(\mathbf{z}_i) = 0 \text{ für alle } \mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h\}$  der Zeitableitung  $\mathbf{m}_t(t_j, \cdot)$  der Magnetisierung beschäftigen. Dabei bemerken wir zunächst, dass nach Kapitel 3 die Systemmatrix  $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}$  positiv definit und daher regulär ist. Demnach besitzen die Variationsformulierungen (3.28) und (3.44) eine eindeutige Lösung, wenn man diese Probleme jeweils am Ganzraum  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  betrachtet. Allerdings wird  $\mathbf{v}_h^j$  stets dadurch bestimmt, indem man die Gleichungssysteme (3.28) und (3.44) am Teilraum  $\mathcal{K}_{\mathbf{m}_h^j}$  löst. Wir realisieren diese linearen Nebenbedingungen, die aus der Orthogonalitätsrelation

$$\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}_h^j(\mathbf{z}) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{z} \in \mathcal{N}_h \quad (5.22)$$

hervorgehen, durch einen Lagrangeschen Multiplikator-Ansatz, d.h. wir berechnen die unbekanntenen Koeffizienten  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{3N}$  von

$$\mathbf{v}_h^j = \sum_{m=1}^{3N} \mu_m \boldsymbol{\beta}_m \quad \text{durch Lösen von} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \boldsymbol{\Lambda}^T \\ \boldsymbol{\Lambda} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Hierbei stellt  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N$  die Lagrange-Multiplikatoren dar und  $\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$  realisiert die Nebenbedingungen (5.22). Demzufolge lässt sich die Lagrange-Matrix wie folgt darstellen

$$\boldsymbol{\Lambda} = (\boldsymbol{\Lambda}^1 \quad \boldsymbol{\Lambda}^2 \quad \boldsymbol{\Lambda}^3) \in \mathbb{R}^{N \times 3N} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\Lambda}^\ell \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \Lambda_{ii'}^\ell = kh^2 \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_i) \cdot \mathbf{e}_\ell \delta_{ii'},$$

d.h. die Teilmatrizen  $\boldsymbol{\Lambda}^\ell$  sind stets diagonal und werden zusätzlich mit dem Faktor  $kh^2$  skaliert, um die Konditionszahl der Systemmatrix zu verbessern und damit das Schema zu stabilisieren, siehe z.B. [13]. Eine numerische Umsetzung der Lagrange-Multiplikatoren findet sich im Codeauszug 5.13, während in Listing 5.14 die Realisierung der Lösung des linearen Gleichungssystems in einem Zeitschritt zu finden ist.

Listing 5.13: Berechnung der linearen Nebenbedingungen

---

```

1 function L = computeLambda(m, nC)
2 %*****
3 % Computation of (nCx3nC)-matrix for implementation of linear constraints
4 % m(z)\cdot v(z) = 0 for all nodes z due to v\in\mathbb{K}_m.
5 % INPUT: m: magnetization m as (nC x 3)-matrix
6 %         nC: number of nodes of volume mesh
7 % OUTPUT: L: matrix to realize Langrange multiplier ansatz
8 %*****
9
10 % computation of linear constraints
11 L = spdiags(m, [0 nC 2*nC], nC, 3*nC);

```

---

Listing 5.14: Assemblierung der Daten und Lösen des linearen Gleichungssystems

---

```

1 function [m,v,EnergyData] = TimeSplitting(i, m, VolumeData,...
2     BoundaryData, SimulationData, PhysicalData, ext, Ald, MASSMA,...
3     STIMA, MnEnC, EnergyData)
4 %*****
5 % Assembling of the data used in the linear system. Computation of energy
6 % contributions at current time-step. Performance of one step of
7 % time-splitting scheme.
8 % INPUT: i: current time-step

```

```

 9 %           m: magnetization (known from prev. time-step) given as 3nC-vector
10 %           VolumeData: struct. to summarize data corresponding to vol. mesh
11 %           BoundaryData: struct. to summarize data corr. to boundary mesh
12 %           SimulationData: struct. involving simulation parameters
13 %           PhysicalData: struct. involving physical parameters
14 %           ext: constant applied field
15 %           Ald, MASSMA, STIMA, MnEnC: system-matrices
16 %           EnergyData: struct. incl. vectors to save energy contributions
17 %
18 % OUTPUT: m: magnetization (of current time-step with |m| = 1)
19 %           v: approximation of time derivative of magnetization m
20 %           EnergyData: updated structure including energy contributions
21 %*****
22
23 nE = VolumeData.nE;    % number of elements
24 nC = VolumeData.nC;    % number of coordinates
25
26
27 % ASSEMBLE DATA and COMPUTE ENERGY:
28 % compute exchange energy
29 EnergyData.energyexch(i+1) = computeExchEnergy(m,...
30     PhysicalData.constexch, STIMA);
31
32 % extract 1D-part for computation of anisotropy energy
33 MASSMAld = MASSMA(1:nC,1:nC);
34 % compute anisotropy
35 ani = MASSMA*calcani(m,VolumeData.coordinates,PhysicalData.z1,...
36     PhysicalData.z2, PhysicalData.scalani);
37 % compute anisotropy energy
38 EnergyData.energyani(i+1) = computeAniEnergy(m, PhysicalData.z1,...
39     PhysicalData.z2, PhysicalData.constani, MASSMAld);
40
41 % compute stray-field and its energy contribution if turned on
42 if PhysicalData.turnstray == 1
43     hlpstray = calcFK3D(m, VolumeData, BoundaryData, Ald);
44     stray = BoundaryData.scalgeo*...
45         [MnEnC*hlpstray(1:nE);MnEnC*hlpstray(nE+1:2*nE);...
46         MnEnC*hlpstray(2*nE+1:3*nE)];
47     % compute stray-field energy
48     EnergyData.energystray(i+1)...
49         = computeStrayEnergy(VolumeData.elements, m, hlpstray,...
50         PhysicalData.scalstray, BoundaryData.scalvol);
51 else
52     stray = zeros(3*nC,1);
53     EnergyData.energystray(i+1) = 0;
54 end
55
56 % compute Zemann energy
57 EnergyData.energyext(i+1) = computeExtEnergy(m,...
58     PhysicalData.scalenergyext, ext);
59
60 % compute bilinearform a(...)
61 A = PhysicalData.alpha*MASSMA...
62     + PhysicalData.scalexch*SimulationData.k*SimulationData.theta*STIMA;
63 % compute bilinearform b^j(...)
64 B = calccrossma(m, VolumeData.coordinates, VolumeData.elements);
65 % compute linear constr. due to Lagrange ansatz to solve in subspace K_m
66 L = SimulationData.scaleL.*computeLambda(m, nC);
67 % compute system-matrix
68 TOTAL = [A+B, L'; L, zeros(nC)];
69 % compute right-hand side L^j(.)
70 l = [-PhysicalData.scalexch*STIMA*m(:) - ani - stray + ext; zeros(nC,1)];

```

```

71
72
73 % STEP (i):
74 % solve linear system on subspace K_m
75 vtmp = TOTAL\1;
76 % devide solution vector vtmp into individual parts
77 v = vtmp(1:3*nC);
78 lagrangian = vtmp(3*nC+1:4*nC);
79
80
81 % STEP (ii):
82 % update and normalize magnetization
83 v = reshape(v(:),nC,3);
84 for j=1:nC
85     m(j,:) = (m(j,:) + SimulationData.k*v(j,:))...
86             /norm(m(j,:) + SimulationData.k*v(j,:));
87 end

```

---

### 5.3 Implementierung der Energiebeiträge

In diesem Abschnitt wollen wir die Implementierung der Gibbs-Energie  $E = E(\mathbf{m})$  behandeln. Der Übersichtlichkeit halber wiederholen wir diese

$$E = A \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}|^2 dx + K \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{m}) dx + \frac{\mu_0 M_s^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{P}(\mathbf{m})|^2 dx - \mu_0 M_s^2 \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{m} dx. \quad (5.23)$$

Wir betonen, dass der Streufeldoperator  $\mathcal{P} : L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  die  $L^2$ -Orthogonalprojektion auf den Raum der Gradientenfelder darstellt und demnach  $\int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{P}(\mathbf{m})|^2 dx = \int_{\Omega} \mathcal{P}(\mathbf{m}) \cdot \mathbf{m} dx$  gilt. Im Folgenden betrachten wir die auftretenden Energiebeiträge einzeln und legen den Fokus auf deren numerische Umsetzung. Schließlich gibt dann die Summation dieser Beiträge die totale Energie  $E$  wieder.

#### Austauschenergie

Unter der Wahl der Basisfunktionen  $\boldsymbol{\beta}_{i+(\ell-1)N} = \beta_i \mathbf{e}_{\ell}$  mit  $i = 1, \dots, N$ ,  $\ell = 1, \dots, 3$  des FE-Ansatzraumes  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  aus Abschnitt 2.1 und  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{3N}$  als Koeffizientenvektor von  $\mathbf{m}_h^j = \sum_{m=1}^{3N} \mu_m \boldsymbol{\beta}_m$  lässt sich die Austauschenergie zum Zeitpunkt  $t_j$  wie folgt darstellen

$$E_{\text{ex}} = A \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_h^j|^2 dx = A \sum_{i=1}^{3N} \sum_{i'=1}^{3N} \mu_i \mu_{i'} \int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{\beta}_i \cdot \nabla \boldsymbol{\beta}_{i'} dx. \quad (5.24)$$

Die zu den auftretenden Integralen korrespondierende Matrix ist die standardmäßige Steifigkeitsmatrix, die wir hier mit  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3N \times 3N}$  bezeichnen, siehe (5.5). Mit Hilfe dieser Notation resultiert die Berechnung der Austauschenergie in eine Vektor-Matrix-Vektor-Multiplikation

$$E_{\text{ex}} = A \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\mu}, \quad (5.25)$$

wie auch dem Auszug des entsprechenden Codes zu entnehmen ist, siehe Listing 5.15.

```

1 function [energyexch] = computeExchEnergy(m, constexch, STIMA)
2 %*****
3 % Computation of exchange energy.
4 % INPUT: m: magnetization as (nC x 3)-matrix
5 %         constexch: exchange constant
6 %         STIMA: (3nC x 3nC)-stiffness-matrix
7 % OUTPUT: energyani: exchange energy
8 %*****
9
10 % compute exchange energy
11 energyexch = constexch*m(:)'+STIMA*m(:);

```

---

### Anisotropieenergie

Wir erinnern an die Definition der Anisotropiedichte aus Kapitel 1. Wir definieren mit  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{e}\}$  eine orthonormale Basis des  $\mathbb{R}^3$  und erhalten somit die Darstellung

$$E_{\text{ani}} = K \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{m}) \, d\mathbf{x} = K \int_{\Omega} ((\mathbf{m} \cdot \mathbf{b}_1)^2 + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{b}_2)^2) \, d\mathbf{x}. \quad (5.26)$$

Damit lässt sich die Anisotropieenergie zum Zeitpunkt  $t_j$  näherungsweise durch

$$E_{\text{ani}} = K \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} \sum_{\mathbf{z}_{i'} \in \mathcal{N}_h} (\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_i) \cdot \mathbf{b}_1)(\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_{i'}) \cdot \mathbf{b}_1) \int_{\Omega} \beta_i \beta_{i'} \, d\mathbf{x} \quad (5.27)$$

$$+ K \sum_{\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h} \sum_{\mathbf{z}_{i'} \in \mathcal{N}_h} (\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_i) \cdot \mathbf{b}_2)(\mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_{i'}) \cdot \mathbf{b}_2) \int_{\Omega} \beta_i \beta_{i'} \, d\mathbf{x} \quad (5.28)$$

berechnen. Hierbei bezeichnen wir mit  $\beta_i$  für  $i = 1, \dots, N$  die mit dem Knoten  $\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h$  assoziierten skalarwertigen Hutfunktionen, die dem FE-Ansatzraum  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$  als Basis dienen. Demnach wird die Integration über die entsprechende Massenmatrix  $\mathbf{N}^0 \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{N \times N}$  aus (5.4) für Funktionen, die von  $\mathbb{R}^3$  nach  $\mathbb{R}$  abbilden, realisiert. Halten wir in  $\boldsymbol{\varrho}_1, \boldsymbol{\varrho}_2 \in \mathbb{R}^N$  die Einträge  $\varrho_{1,i} = \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_i) \cdot \mathbf{b}_1$  bzw.  $\varrho_{2,i} = \mathbf{m}_h^j(\mathbf{z}_i) \cdot \mathbf{b}_2$  für  $\mathbf{z}_i \in \mathcal{N}_h$  fest, so resultiert die näherungsweise Berechnung der Anisotropieenergie zum Zeitpunkt  $t_j$  in Vektor-Matrix-Vektor-Multiplikationen

$$E_{\text{ani}} = K(\boldsymbol{\varrho}_1^T \mathbf{N}^0 \boldsymbol{\varrho}_1 + \boldsymbol{\varrho}_2^T \mathbf{N}^0 \boldsymbol{\varrho}_2). \quad (5.29)$$

Diese Umsetzung wird in Listing 5.16 festgehalten.

Listing 5.16: Berechnung der Anisotropieenergie

```

1 function [energyani] = computeAniEnergy(m, z1, z2, constani, MASSMAld)
2 %*****
3 % Computation of anisotropy energy.
4 % INPUT: m: magnetization as (nC x 3)-matrix
5 %         z1, z2: such that e,z1,z2 orthonormal basis of R^3
6 %         constani: anisotropy constant
7 %         MASSMAld: (nC x nC)-mass-matrix
8 % OUTPUT: energyani: anisotropy energy
9 %*****
10
11 % compute anisotropy energy
12 hlp1 = m*z1;
13 hlp2 = m*z2;
14 energyani = constani*(hlp1'*MASSMAld*hlp1 + hlp2'*MASSMAld*hlp2);

```

---

### Streufeldenergie

Es sei bemerkt, dass das approximativ berechnete Streufeld  $\mathcal{P}_h \mathbf{m}_h^j = \nabla u_h^j$  für alle  $j > 0$  konstant auf jedem Element  $T \in \mathcal{T}_h$  ist, d.h. es gilt  $\mathcal{P}_h \mathbf{m}_h^j \in P^0(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$ . Demnach lässt sich die Streufeldenergie wie folgt darstellen

$$E_{\text{stray}} = \frac{\mu_0 M_s^2}{2} \int_{\Omega} \mathcal{P}_h \mathbf{m}_h^j \cdot \mathbf{m}_h^j \, d\mathbf{x} = \frac{\mu_0 M_s^2}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\mathcal{P}_h \mathbf{m}_h^j)|_T \int_T \mathbf{m}_h^j \, d\mathbf{x}. \quad (5.30)$$

Es gilt zu beachten, dass das nun zu berechnende Integral durch Mittelpunktsquadratur

$$\int_T \mathbf{m}_h^j \, d\mathbf{x} = |T| \mathbf{m}_h^j(\mathbf{S}_T) \quad (5.31)$$

mit  $\mathbf{S}_T$  dem Schwerpunkt des Elements  $T \in \mathcal{T}_h$  gelöst werden kann. Die zugehörige Implementierung findet sich im Listing 5.17.

Listing 5.17: Berechnung der Streufeldenergie

---

```

1 function [energystray] = computeStrayEnergy(elements, m, hlpstray, ...
2     scalstray, scalvol)
3 %*****
4 % Computation of stray-field energy.
5 % INPUT: elements: elements of volume mesh
6 %         m: magnetization
7 %         hlpstray: stray-field
8 %         scalstray: scaling factor for stray-field energy which is
9 %                   defined as 0.5*Ms^2*mu0
10 %        scalvol: scaled volume of magnetic body
11 % OUTPUT: energystray: stray-field energy
12 %*****
13
14 nE = size(elements, 1);    % number of elements
15
16 % reshape stray-field
17 hlpstray = reshape(hlpstray, nE, 3);
18 % evaluate magnetization at center of mass
19 hlpmass = (m(elements(:,1),:)+m(elements(:,2),:)+...
20           m(elements(:,3),:)+m(elements(:,4),:)))/4;
21 % compute stray-field energy with one-point-quadrature
22 energystray = scalstray*scalvol.*sum(hlpstray.*hlpmass,2);

```

---

### Zeeman Energie

Wieder betrachten wir die kanonischen Basisfunktionen  $\boldsymbol{\beta}_{i+(\ell-1)N} = \beta_i \mathbf{e}_\ell$  für  $i = 1, \dots, N$ ,  $\ell = 1, \dots, 3$  des FE-Ansatzraumes  $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$ . Unter dieser Wahl lässt sich die approximative Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^j$  mit Hilfe eines Koeffizientenvektors  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{3N}$  durch  $\mathbf{m}_h^j = \sum_{m=1}^{3N} \mu_m \boldsymbol{\beta}_m$  darstellen. Außerdem nehmen wir an, dass die Diskretisierung des angewandten äußeren Feldes auf eine Funktion  $\mathbf{f}_h^j \approx \mathbf{f}(t, \cdot)$  mit  $\mathbf{f}_h^j \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h; \mathbb{R}^3)$  für  $t \in [t_j, t_{j+1})$  für  $j > 0$  führt und daher ebenfalls eine solche Darstellung  $\mathbf{f}_h^j = \sum_{m=1}^{3N} \varrho_m \boldsymbol{\beta}_m$  mit  $\boldsymbol{\varrho} \in \mathbb{R}^{3N}$  findet. Demnach berechnen wir die Zeeman Energie zum Zeitpunkt  $t_j$  näherungsweise durch

$$E_{\text{ext}} = -\mu_0 M_s^2 \int_{\Omega} \mathbf{f}_h^j \cdot \mathbf{m}_h^j \, d\mathbf{x} = -\mu_0 M_s^2 \sum_{i=1}^{3N} \sum_{i'=1}^{3N} \varrho_i \mu_{i'} \int_{\Omega} \boldsymbol{\beta}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_{i'} \, d\mathbf{x}. \quad (5.32)$$

Wir bemerken, dass die auftretenden Integrale zu einer standardmäßigen Massenmatrix  $\mathbf{N} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3N \times 3N}$  korrespondieren, siehe (5.3). Demzufolge lässt sich die Berechnung der Zeeman Energie als Vektor-Matrix-Vektor-Multiplikation darstellen

$$E_{\text{ext}} = -\mu_0 M_s^2 \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\mu}. \quad (5.33)$$

Dies ist auch im Auszug 5.18 des Codes nachzulesen.

Wir bemerken, dass im Zuge einer effizienten Implementierung unter Anwendung eines in der Zeit konstanten angelegten äußeren Feldes der Anteil  $\boldsymbol{\rho}^T \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{3N}$  bereits vor der Zeititeration berechnet werden kann. Innerhalb der Iteration wird schließlich durch das Produkt mit dem Koeffizientenvektor der aktuellen Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^j$  der Wert der Zeeman Energie zum Zeitpunkt  $t_j$  näherungsweise berechnet.

Listing 5.18: Berechnung der Zeeman Energie

---

```

1 function [energyext] = computeExtEnergy(m, scalenergyext, ext)
2 %*****
3 % Computation of Zeeman energy.
4 % INPUT: m: magnetization as (nC x 3)-matrix
5 %       scalenergyext: scaling factor for Zeeman energy
6 %                   defined as -Ms^2*mu0
7 %       ext: computation of constant applied field by
8 %           ext = MASSMA*f(coordinates,fstrength);
9 % OUTPUT: energyext: Zeeman energy
10 %*****
11
12 % recall, 'ext' already includes the integral
13 energyext = scalenergyext*m(:)'+ext;

```

---

## 5.4 Adaptive Zeitschrittweitensteuerung

Aus den in Kapitel 6 durchgeführten numerischen Experimenten geht hervor, dass (zumindest zu Beginn der Simulation) die Wahl einer im Vergleich zur Ortsschrittweite geringen Zeitschrittweite von Nöten sein kann, um einen zuverlässigen Simulationsablauf zu garantieren. Allerdings stellt eine relativ kleine Zeitschrittweite eine unter Umständen unnötig und entsprechend lange Simulation in Aussicht. Um dies zu vermeiden ist man an einer adaptiven Zeitschrittweitensteuerung interessiert.

In der vorliegenden Arbeit halten wir uns im Wesentlichen an den adaptiven Algorithmus zur Schrittweitensteuerung, wie er in [29] vorgeschlagen wird. Der Übersichtlichkeit halber stellen wir diese Prozedur angewandt auf unsere Problemstellung hier vereinfacht dar. Dabei wählen wir die verkürzte Schreibweise  $\Psi(\cdot)$  für die Berechnung der Lösungen  $\mathbf{v}_h^j$  bzw.  $\mathbf{m}_h^{j+1}$  aus Schritt (i) und (ii) von Algorithmus 3.2.4 bzw. 3.2.14. Des Weiteren halten wir fest, dass die Time-Splitting Schemata 3.2.4 und 3.2.14 formal von erster Ordnung sind, d.h. der Ordnungsparameter  $p$  wird durch  $p = 1$  festgelegt. Damit lässt sich die adaptive Zeitschrittweitensteuerung in folgendem Pseudocode darstellen:

**Algorithmus 5.4.1.** *Input: minimale Zeitschrittweite  $k_{\min}$ , initiale Zeitschrittweite  $k_0$ , Toleranz  $\epsilon > 0$ , Sicherheitsfaktor  $\varrho \in (0, 1]$ , Vergrößerungsfaktor  $\eta > 1$ , Zähler  $j = 0$ , Zeitschritt  $\tau := 0$ , initiale diskrete Magnetisierung  $\mathbf{m}_h^0$ . So lange  $\tau < \tau_{\text{end}}$  gilt, sind folgende Schritte zu iterieren:*

- (i) Berechne die Lösung  $\tilde{\mathbf{m}}_h^{j+1} = \Psi(\mathbf{m}_h^j, k)$  mit zugehöriger Zeitschrittweite  $k$
- (ii) Berechne die Lösungen  $\hat{\mathbf{m}}_h^{j+1/2} = \Psi(\mathbf{m}_h^j, k/2)$  und  $\hat{\mathbf{m}}_h^{j+1} = \Psi(\hat{\mathbf{m}}_h^{j+1/2}, k/2)$  mit der jeweiligen Zeitschrittweite  $k/2$ .
- (iii) Berechne den Indikator  $EST = \frac{|\tilde{\mathbf{m}}_h^{j+1} - \hat{\mathbf{m}}_h^{j+1}|}{1-2^{-p}}$ .
- (iv) Falls  $EST/k > \epsilon$  und  $k > k_{\min}$ , vermindere die Zeitschrittweite  $k \mapsto k/2$  und gehe zu (i).
- (v) Ansonsten setze  $\mathbf{m}_h^{j+1} = \hat{\mathbf{m}}_h^{j+1}$ , erhöhe den Zähler  $j \mapsto j+1$  und die Zeit  $\tau \mapsto \tau + k$ , wähle neue Zeitschrittweite  $k := \min \left\{ \tau_{\text{end}} - \tau, \max \left\{ k_{\min}, \min \left\{ \eta k, \varrho \left( \frac{\epsilon}{EST} k^{p+1} \right)^{1/p} \right\} \right\} \right\}$ , und gehe zu (i).

Output: Folge von diskreten Magnetisierungen  $\mathbf{m}_h^j \in \mathcal{M}_h$  für  $j > 0$ .

In Codeauszug 5.19 findet sich die Realisierung dieses Algorithmus zur adaptiven Steuerung der Zeitschrittweite.

Es gilt zu bemerken, dass die adaptive Zeitschrittweitensteuerung eine gewisse Anzahl an zusätzlich zu lösenden Gleichungssystemen mit sich bringt. Wie sich dieser Overhead gegenüber der tatsächlichen Anzahl an notwendigen Lösungsschritten verhält wird in Kapitel 6 an Hand numerischer Simulationen veranschaulicht.

Listing 5.19: Adaptive Zeitschrittweitensteuerung

---

```

1 function [EnergyDataAdap,timeval,m] = adaptiveTimeStepping(m, VolumeData,...
2     BoundaryData, SimulationData, PhysicalData, ext, Ald, MASSMA,...
3     STIMA, MnEnC, EnergyDataAdap)
4 %*****
5 % Solve LLG with adaptive time-stepping.
6 % INPUT: m: initial magnetization as nCx3-matrix
7     VolumeData: struct. to summarize data corresponding to vol. mesh
8     BoundaryData: struct. to summarize data corr. to boundary mesh
9     SimulationData: struct. involving simulation parameters
10    PhysicalData: struct. involving physical parameters
11    ext: constant applied field
12    Ald, MASSMA, STIMA, MnEnC: system-matrices
13    EnergyData: struct. incl. vectors to save energy contributions
14 % OUTPUT: EnergyDataAdap: struct. incl. energy contributions at each time
15     m: magnetization in final state
16     timeval: vector including values of time t
17 %*****
18
19 % adaptive parameter-setting
20 k0 = SimulationData.k;      % initial guess for time-step size
21 tol = 1e-2;                % tolerance
22 kMIN = k0*1e-1;           % minimal time-step size
23 rho = 0.5;                 % safety factor (> 0; < 1)
24 eta = 1.25;                % amplification factor (>= 1)
25 p = 1;                     % order of procedure
26 t = SimulationData.tau_0;  % set time to initial time
27 % compute initial time-step size
28 k = min(k0, (SimulationData.tau_end - SimulationData.tau_0));
29
30 control = 1; % check if we already reached final time
31 count = 0; % count number of iterations
32 countenergy = 0; % count number of successful iterations
33 timeval = []; % save time if iteration is successful
34

```

```

35 while control ~= 0
36     count = count+1;
37
38     SimulationData.k = k;
39     % perform one step of time-splitting scheme with time-step size k
40     [mTILDE,vTILDE,EnergyData] = TimeSplitting(countenergy, m,...
41         VolumeData, BoundaryData, SimulationData, PhysicalData, ext,...
42         Ald, MASSMA, STIMA, MnEnC, EnergyData);
43
44     SimulationData.k = k*0.5;
45     % perform one step of time-splitting scheme with time-step size k/2
46     [mHALF,vHALF,EnergyData] = TimeSplitting(countenergy, m,...
47         VolumeData, BoundaryData, SimulationData, PhysicalData, ext,...
48         Ald, MASSMA, STIMA, MnEnC, EnergyData);
49     % perform one step of time-splitting scheme with time-step size k/2
50     [mHAT,vHAT,EnergyData] = TimeSplitting(countenergy, mHALF,...
51         VolumeData, BoundaryData, SimulationData, PhysicalData, ext,...
52         Ald, MASSMA, STIMA, MnEnC, EnergyData);
53
54     % compute estimator to decide if choice of 'k' was admissible
55     est = norm(vTILDE - vHAT)/(1-(1/2p));
56     if ((est/k <= tol) || (k <= kMIN))
57         m = mHAT;
58
59         % computation of energy
60         countenergy = countenergy + 1;
61
62         % compute energy contributions
63         EnergyDataAdap.energyexch(countenergy)...
64             = computeExchEnergy(m, PhysicalData.constexch, STIMA);
65         EnergyDataAdap.energyext(countenergy)...
66             = computeExtEnergy(m, PhysicalData.scalenergyext, ext);
67         EnergyDataAdap.energyani(countenergy)...
68             = computeAniEnergy(m, PhysicalData.z1, PhysicalData.z2,...
69             PhysicalData.constani, MASSMA(1:VolumeData.nC,1:VolumeData.nC));
70         hlpstray = calcFK3D(m, VolumeData, BoundaryData, Ald);
71         EnergyDataAdap.energystray(countenergy)...
72             = computeStrayEnergy(VolumeData.elements, m, hlpstray,...
73             PhysicalData.scalstray, BoundaryData.scalvol);
74
75         timeval(countenergy) = t; % save time
76         t = t+k; % update time
77
78         if t == SimulationData.tau_end
79             control = 0; % reached already final time
80         end
81         % compute new time step-size
82         k = min(kMAX,max(kMIN, min(eta*k, rho*((tol/est)*k^(p+1))^(1/p))));
83         if t+k >= SimulationData.tau_end
84             k = SimulationData.tau_end-t; % 'k' for possible last iter. step
85         end
86     else
87         k = k*0.5; % try again with smaller time-step size
88     end
89 end

```

---

## Kapitel 6

# Numerische Experimente

In diesem abschließenden Kapitel wollen wir das in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Time-Splitting-Verfahren, siehe Algorithmus 3.2.4 bzw. 3.2.14, auf in der Physik relevante Probleme anwenden. Damit illustrieren wir die analytischen Resultate, die wir in Kapitel 3 zusammengestellt und vollständig bewiesen haben, und erhalten gleichzeitig eine experimentelle Rechtfertigung dieser Ergebnisse.

Falls nicht explizit anders gesagt, kommt in unseren Simulationen stets Algorithmus 3.2.4 zum Einsatz, um Fehler, die das Mass-Lumping nach sich zieht, auszublenden. Des Weiteres bemühen wir stets den Ansatz von Fredkin/Koehler, siehe Abschnitt 4.3 für weitere Details, zur approximativen Berechnung des Streufeldes.

Zur Simulation der LLG-Gleichung wurde im Rahmen der Dissertation ein eigener Code in MATLAB (R2010B) entwickelt. Auf diesen wird in Kapitel 5 genauer eingegangen. Außerdem wird zur Generierung eines Randnetzes auf den Code von KEMETMÜLLER [31] zurückgegriffen. Dank der Programmierarbeit von MAYR [36] liegt eine stabile Implementierung des Randintegraloperators  $K$  in C++ vor, die wir über die MEX-Schnittstelle von MATLAB bedienen. Die folgenden numerischen Experimente wurden mit ebendiesem Code bzw. diesen Beiträgen erzielt.

Bevor wir uns den numerischen Beispielen widmen, wollen wir Begriffe einführen, die von großer Bedeutung für eine zuverlässige Simulation sind.

Aus numerischen Experimenten ist bekannt, dass die Diskretisierung des magnetischen Körpers  $\Omega$  für eine zuverlässige Simulation derart erfolgen sollte, dass die Netzweite  $h$  in etwa der *kritischen Länge* des Materials entspricht. Diese *signifikante Länge* hängt von der relativen Stärke der Austauschenergie im Vergleich zu den anderen Energiebeiträgen der totalen Energie ab. Wir unterscheiden:

- weichmagnetische Materialien: In weichmagnetischen Körpern ist der einflussreichste Energiebeitrag die magnetostatische Energie. Die *kritische Länge* wird durch die sogenannte *Austauschlänge* gegeben, die wie folgt definiert ist

$$l_{\text{ex}} = \left( \frac{2\mu_0 A}{J_s^2} \right)^{1/2}.$$

Hierbei bezeichnet  $A > 0$  in  $[J/m]$  die Austauschkonstante,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  in  $[T m/A]$  die Vakuum-Permeabilität und  $J_s$  in  $[T]$  die Saturationspolarisierung.

- hartmagnetische Materialien: Körper aus hartmagnetischem Material weisen eine Dominanz der magneto-kristallinen Anisotropieenergie auf. Die *signifikante Länge* des Materials

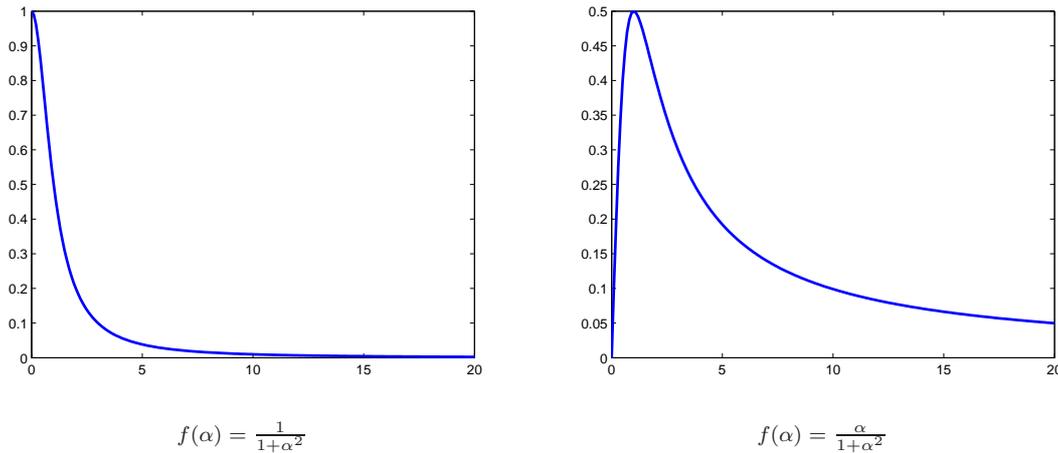


Abbildung 6.1: Koeffizienten des Rotationsterms und des Dämpfungsterms als Funktionen  $f(\alpha)$  der Gilbert-Dämpfungskonstante  $\alpha$ .

ist hierbei durch den *Bloch-Parameter* gegeben, der wie folgt definiert ist

$$\delta_0 = \left( \frac{A}{K} \right)^{1/2}.$$

Hierbei stellt  $K > 0$  in  $[J/m^3]$  die Anisotropiekonstante dar.

Wir führen die magnetostatische Energiedichte  $K_m$  in  $[J/m^3]$  mit Hilfe der Volumenmagnetisierung  $M_s$  in  $[A/m]$  durch

$$K_m = \frac{\mu_0 M_s^2}{2} \quad (6.1)$$

ein. Damit ist auch eine Darstellung der Austauschlänge durch

$$l_{\text{ex}} = \left( \frac{A}{K_m} \right)^{1/2}$$

zulässig.

Wie wir bereits in Kapitel 1 festgestellt haben wird in der klassischen Formulierung der LLG-Gleichung die zeitliche Änderung der Magnetisierung durch einen Rotationsterm und einen Dämpfungsanteil beschrieben. In Abschnitt 1.1.5 wird auf die Bedeutung des (materialabhängigen) Gilbert-Dämpfungsparameters  $\alpha > 0$  eingegangen. Es gilt zu beachten, dass wir in der vorliegenden Arbeit eine entdimensionalisierte Version der LLG-Gleichung betrachten und daher skalierte Vorfaktoren auftreten. Während der Koeffizient der Rotation durch  $1/(1 + \alpha^2)$  gegeben ist, lautet jener für die Dämpfung  $\alpha/(1 + \alpha^2)$ . Abbildung 6.1 stellt diese Koeffizienten als Funktionen in Abhängigkeit der Dämpfungskonstante  $\alpha$  dar. In realistischen Simulationen gilt  $0.01 \leq \alpha \leq 1$ .

## 6.1 Hysterese-Beispiel

Wir betrachten im ersten numerischen Experiment das uniachsale Material  $Nd_2Fe_{14}B$ , das durch die intrinsischen Parameter  $A = 1.25 \cdot 10^{-11}$   $[J/m]$  für die Austauschkonstante,  $K =$

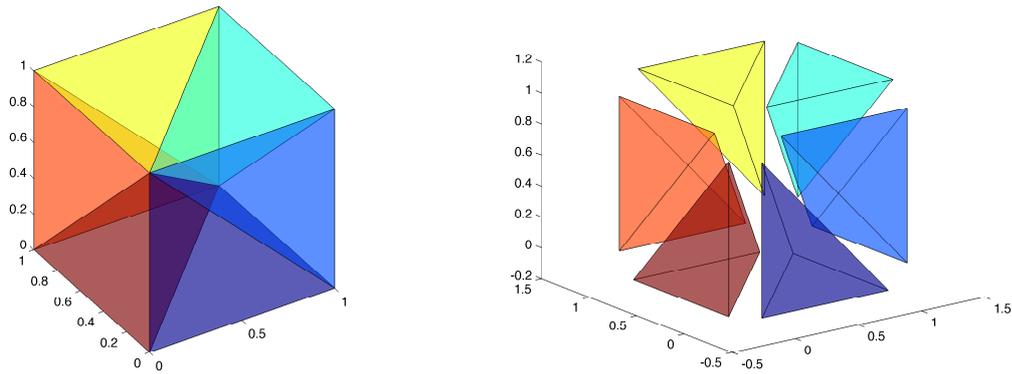


Abbildung 6.2: (Zulässige) Triangulierung eines Würfels mit einer Kantenlänge von 1 [nm] .

$4.5 \cdot 10^6 [J/m^3]$  für die Anisotropiekonstante und  $J_s = 1.61 [T]$  für die Saturationspolarisierung festgelegt ist. Außerdem sei die leichte Achse  $\mathbf{e}$  parallel zur  $z$ -Achse  $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]$  ausgerichtet.

Im Folgenden sind wir an der Reaktion der Magnetisierung auf ein angewandtes äußeres Feld interessiert. Dabei stellen wir uns die Frage, wie sich ein magnetisches Material durch ein angelegtes äußeres Feld ummagnetisieren lässt. Eine solche Fragestellung wird üblicherweise in sogenannten *Hysteresis-Plots* beantwortet. In diesen wird die durchschnittliche Magnetisierung bezüglich der Easy-Achse, also  $|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{m}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e} d\mathbf{x}$ , über der mit  $\mu_0/J_s$  skalierten Stärke des angewandten äußeren Feldes, also  $|\mathbf{F}(t)| \cdot \mu_0/J_s$ , aufgetragen. Jenen Punkt, in dem die Hysteresis-Schleife das erste Mal die  $y$ -Achse schneidet, bezeichnet man als *Remanenzpunkt*. Würde man zu diesem Zeitpunkt das angelegte äußere Feld ausschalten, so würde die Magnetisierung in diesem Zustand verweilen. Jenen Punkt, in dem die Hysteresis-Schleife das erste Mal die  $x$ -Achse schneidet, nennen wir *Koerzitivität*. In der Literatur verwendet man den Begriff *Ummagnetisierungsfeld* für jene Stärke des angewandten Feldes, die notwendig ist, um das magnetische Feld diesem sich ändernden externen Feld folgen zu lassen.

Wir wollen nun eine Analyse der Antwort des magnetischen Feldes auf ein wechselndes angelegtes äußeres Feld betreiben. Dabei vernachlässigen wir die Wirkung des Streufeldes. Darüber hinaus betrachten wir einen Würfel mit einer Kantenlänge von 1 [nm], der eine Triangulierung wie in Abbildung 6.2 dargestellt besitzt. Ausgegangen wird von einer konstanten initialen Magnetisierung  $\mathbf{m}_0 = \mathbf{e} = [0, 0, 1]$  und einem Gilbert-Dämpfungsparameter  $\alpha = 1$ . Der Implizitätsparameter wird mit  $\theta = 1$  gewählt. Darüber hinaus legen wir eine skalare Funktion  $-2 \leq \lambda(t) \leq 2$  fest, die sich kontinuierlich in der Zeit  $t$  verändert. Mit Hilfe dieser Funktion lässt sich das angewandte äußere Feld durch  $\mathbf{F}(t) = \lambda(t)\overline{\mathbf{F}}$  in [A/m] darstellen, wobei  $\overline{\mathbf{F}}$  ein konstantes Feld in Richtung  $[-0.5, 0, -1]$  mit einer Stärke von  $K/J_s = 2.7950 \cdot 10^6 [A/m]$  bezeichnet. Damit ergibt sich als maximaler Wert der Stärke des angewandten äußeren Feldes  $2K/J_s = 5.5901 \cdot 10^6 [A/m]$ . Für eine Veranschaulichung der skalaren Funktion  $\lambda(t)$  verweisen wir auf Abbildung 6.3. Wir bemerken, dass ein solch rasches Umkehren der Richtung des angewandten Feldes  $\mathbf{F}$  deshalb möglich ist, da als Gilbert-Dämpfungskonstante  $\alpha = 1$  vorliegt und wir daher davon ausgehen können, dass die Magnetisierung sehr schnell bzw. schnell genug auf eine (Richtungs)-Änderung des effektiven Feldes reagiert. In Anbetracht dessen, dass die Simulation einen Zeitraum von 100 [ns] umfasst, gilt es dennoch zu bemerken, dass das Feld sehr langsam zu- bzw. abnimmt.

Nach der *Stoner-Wohlfarth*-Theorie, vgl. [2, Abschnitt 5.4], kann man die Koerzitivität  $f_{ko}$  für

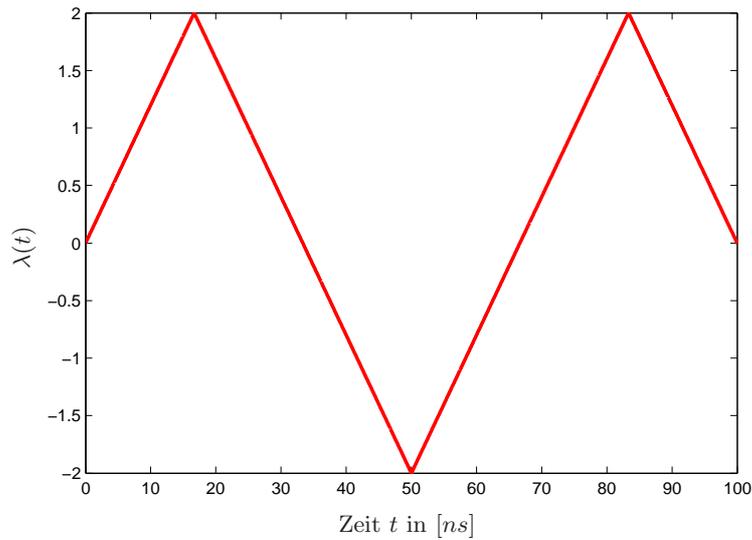


Abbildung 6.3: Skalare Funktion  $\lambda(t)$ , die die Änderung des angelegten externen Feldes  $\mathbf{F}$  bestimmt.

ein Eindomänenteilchen mit uniachsialer Anisotropie analytisch mit Hilfe der Formel

$$f_{\text{ko}} = \alpha_{\varrho}^{\text{nuc}} \cdot \frac{2K\mu_0}{J_s^2} = \frac{1}{\cos(\varrho)} \frac{1}{(1 + (\tan(\varrho))^2/3)^{3/2}} \cdot \frac{2K\mu_0}{J_s^2}$$

berechnen. Hierbei bezeichnet  $\varrho$  den vom angelegten äußeren Feld und der leichten Achse eingeschlossenen Winkel, während  $\alpha_{\varrho}^{\text{nuc}}$  einen Mikrostrukturparameter angibt. Damit ergibt sich für obige Angaben eine Koerzivität von  $\sim 2.3435$ . Wie aus Abbildung 6.4 bzw. 6.5 hervorgeht, wird dieser Wert sowohl bei uniformer Zeitschrittweite als auch bei adaptiver Zeitschrittweitensteuerung nahezu exakt angenommen.

Wir untersuchen im Folgenden die Auswirkung diverser Parametersetzungen im Bezug auf eine uniforme bzw. adaptive Zeitschrittweitensteuerung. Im Falle einer adaptiven Zeitschrittweitensteuerung gehen wir jeweils von einer initialen Schrittweite  $k_0 = 0.002$  [ns] aus und betrachten verschiedene Toleranzparameter  $tol$  sowie diverse Vielfache  $fac$  von  $k_0$ , um die minimale Zeitschrittweite durch  $k_{\text{min}} = k_0 \cdot fac$  festzulegen.

Betrachtet man zunächst eine uniforme Zeitschrittweitensteuerung, so werden die zugehörigen Hysterese-Schleifen in Abbildung 6.4 dargestellt. Es zeigt sich, dass erst ab einer Zeitschrittweite von  $k = 0.0004$  [ns] ein zuverlässiges Ergebnis gewährleistet wird. Eine solche Feinheit des Zeitnetzes zieht jedoch unnötig lange Simulationszeiten nach sich wie aus dem Vergleich zu adaptiver Zeitschrittweitensteuerung hervorgeht, siehe Tabelle 6.1. Auflistung 6.1 beinhaltet einerseits die Gegenüberstellung der tatsächlichen Simulationsdauer bei uniformer Zeitschrittweite und adaptiver Zeitschrittweitensteuerung und unterscheidet andererseits im Hinblick auf diverse Parametersetzungen in den einzelnen Kategorien.

Im Bezug auf den adaptiven Fall veranschaulicht Abbildung 6.5 bzw. dessen vergrößerter Bildausschnitt 6.6, dass die Berechnung wenig sensibel gegenüber verschiedenen Genauigkeiten und zulässigen Zeitschrittweiten ist. Offenbar ist bereits die initiale Zeitschrittweite von  $k_0 = 0.002$  [ns] für weite Bereiche der Simulation genau genug und die minimale Schrittweite  $k_{\text{min}}$  jeweils klein genug, um das Zeitnetz dort aufzulösen, wo das Verfahren Gefahr läuft instabil zu werden.

In Abbildung 6.7 wird die durchschnittliche Magnetisierung in jeder Komponente gegenüber der dritten Komponente des mit  $\mu_0$  skalierten externen Feldes dargestellt. Um den zeitlichen

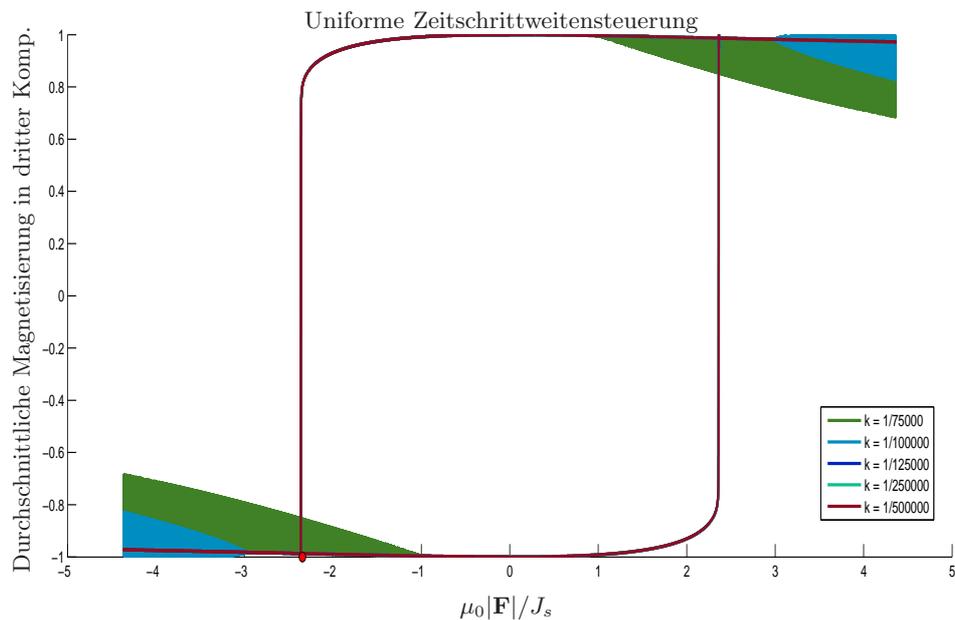


Abbildung 6.4: Hysterese-Plot unter Verwendung eines uniformen Zeitnetzes mit verschiedener Feinheit. Der Wert des entdimensionalisierten Koerzitivitätsfeldes wird durch den roten Punkt markiert.

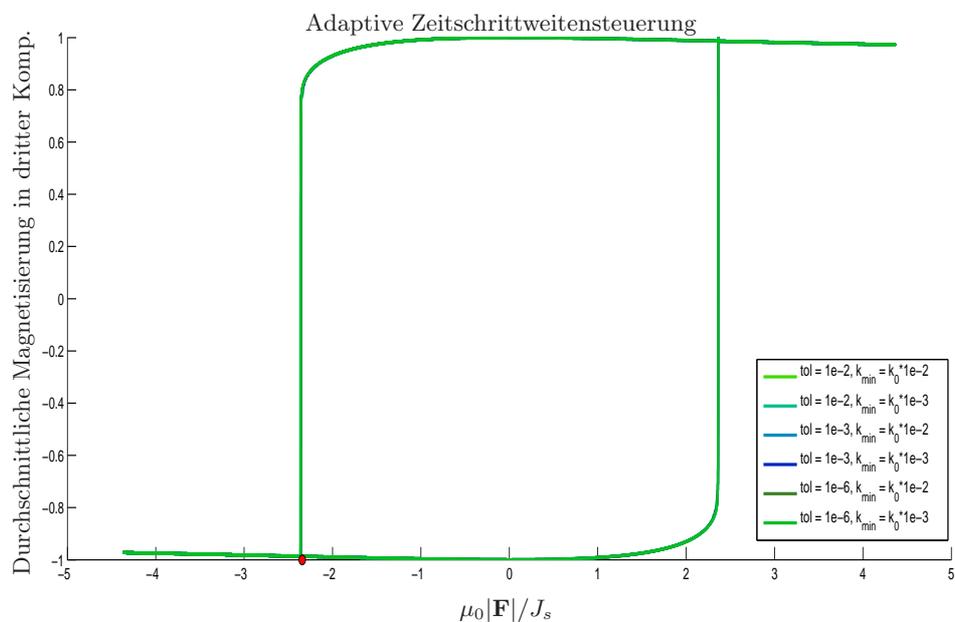


Abbildung 6.5: Hysterese-Plot unter Verwendung einer adaptiven Zeitschrittweitensteuerung mit verschiedenen Toleranzen  $tol$  und minimalen Zeitschrittweiten  $k_{min}$ . Der rote Punkt markiert den Wert der Koerzitivität.

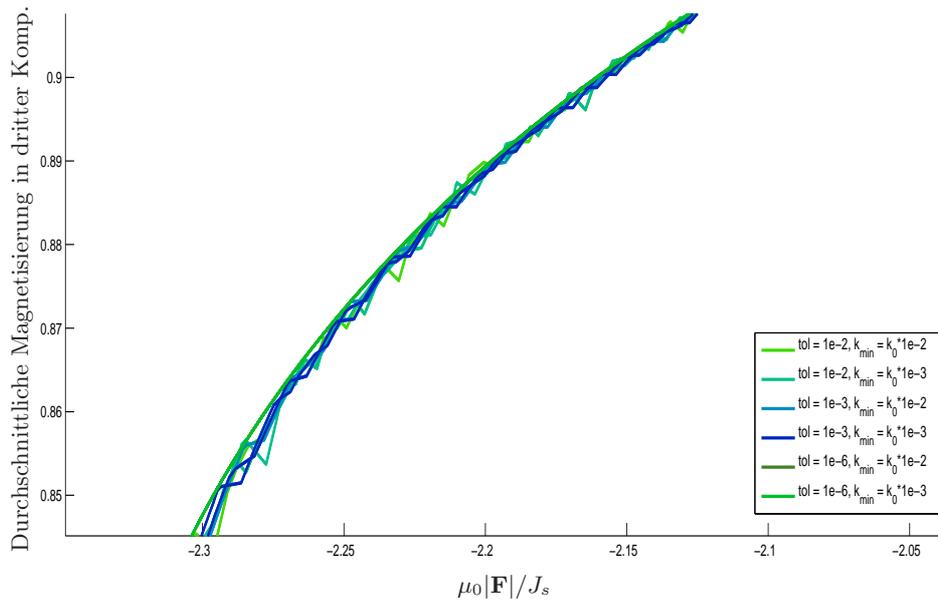


Abbildung 6.6: Vergrößerter Bildausschnitt von Abbildung 6.5 zur Veranschaulichung der Übereinstimmung der Simulationsergebnisse.

uniform			adaptiv				
$k$ in [ns]	# Schritte	Zeit in [s]	$tol$	$fac$	# Schritte	Overhead	Zeit in [s]
1.3000e-03	75000	1.3973e+02	1e-02	1e-02	57491	10564	1.2998e+02
1.0000e-03	100000	1.9152e+02	1e-02	1e-03	61390	10584	1.4724e+02
8.0000e-04	125000	3.0387e+02	1e-03	1e-02	58856	10533	1.3508e+02
4.0000e-04	250000	7.2244e+02	1e-03	1e-03	72252	10629	1.7340e+02
2.0000e-04	500000	2.4320e+03	1e-06	1e-02	88001	9987	2.3570e+02
			1e-06	1e-03	181115	10026	7.9702e+02

Tabelle 6.1: Variation der Simulationsparameter für eine uniforme (Zeitschrittweite  $k$  in [ns], Anzahl der Schritte) bzw. adaptive Zeitschrittweitensteuerung (Toleranz  $tol$ , Verkleinerungsfaktor  $fac$  der initialen Schrittweite  $k_0 = 0.002$  [ns], sodass  $k_{\min} = k_0 \cdot fac$ , Anzahl an tatsächlichen Lösungsschritten (inkl. Overhead), Anzahl an zusätzlichen Schritten Overhead für Zeitschrittweitensteuerung) und der jeweils daraus resultierenden Simulationsdauer in [s].

Verlauf dieses Plots zu skizzieren, wird in Abbildung 6.8 das Entstehen einer Hysterese-Schleife dargestellt. Wie erwartet wird mit zunehmendem bzw. abnehmendem äußeren angelegten Feld das magnetische Feld derart beeinflusst, sodass die Magnetisierung in den Extremwerten des externen Feldes diesem vollständig gefolgt ist.

Betrachtet man verschiedene Werte des Implizitätsparameters  $\theta \in (0.5, 1]$ , so stellen die Simulationsergebnisse jeweils idente Hysterese-Kurven dar, siehe Abbildung 6.7. Wir wählen in den zugehörigen Simulationen stets eine Toleranz von  $tol = 10^{-6}$  und eine minimale Zeitschrittweite von  $k_{\min} = 0.00002$  [ns]. Betrachtet man nun den Aufwand, um zu einem zuverlässigen Resultat zu gelangen, so zeigt sich, dass für  $\theta \in (0.5, 1]$  eine in etwa gleichbleibende Anzahl von Lösungsschritten mit nahezu identem Overhead entsteht. Als Overhead bezeichnen wir in diesem Fall, die zusätzliche Anzahl an Lösungsschritten die aus der adaptiven Zeitschrittweitensteuerung resultiert. Für  $\theta = 0.5$  besagt die Analysis aus Kapitel 3, dass sich die Zeitschrittweite im

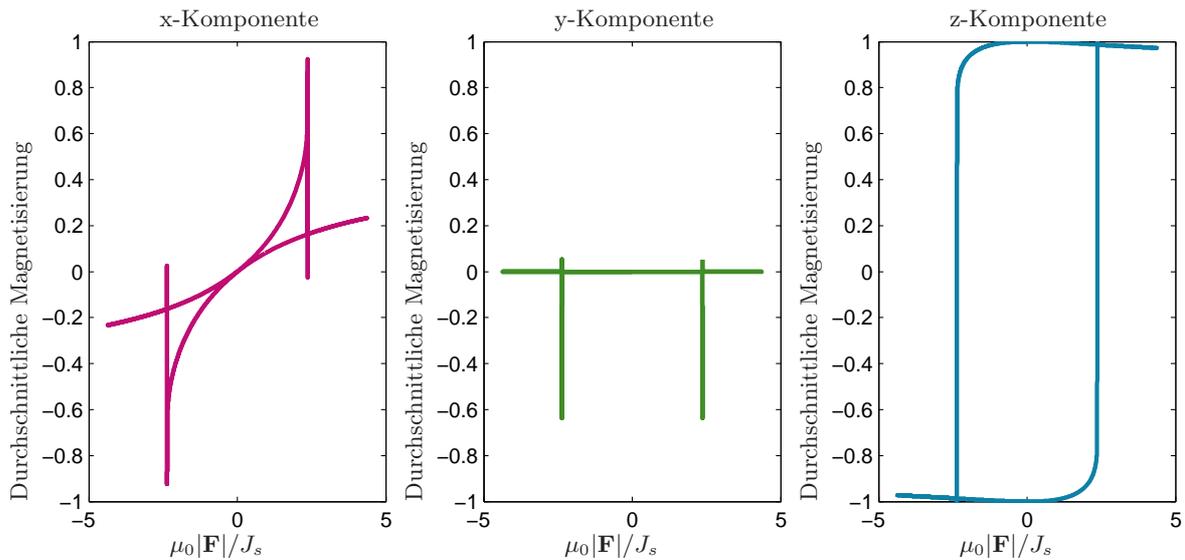


Abbildung 6.7: Darstellung der durchschnittlichen Magnetisierung in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Komponente entlang der skalierten Stärke des angelegten äußeren Feldes  $\mathbf{F}$ .

Wesentlichen quadratisch zur Ortschaftweite zu verhalten hat, um ein zuverlässiges Simulationsergebnis erwarten zu können. Aus Tabelle 6.2 ist zu entnehmen, dass sowohl der Overhead als auch die Anzahl an notwendigen Lösungsschritten mehr als 10% ansteigt. Dies lässt jedoch nicht vermuten, dass eine wesentlich kleinere minimale Zeitschrittweite  $k_{\min}$  von Nöten ist, sondern bestätigt den Verdacht, dass die Wahl  $\theta = 0.5$  keine Restriktion von Orts- und Zeitschrittweite benötigt, um ein sinnvolles Simulationsergebnis sicherzustellen. Hingegen dazu führt eine Wahl von  $\theta < 0.5$  auf einen deutlichen Mehraufwand an Schritten bzw. Overheadschritten, um ein hinreichend genaues Simulationsergebnis zu garantieren. Dies entspricht der Erwartung aus Kapitel 3.

Setzt man zur Berechnung der auftretenden Massen-Matrizen das Mass-Lumping des  $L^2$ -Skalarprodukts ein, so zeigt sich, dass für eine Parameterwahl von  $\theta = 1$  insgesamt 88074 lineare Gleichungssysteme zu lösen sind mit einem Overhead von 10002 Schritten. Damit liegt die Anzahl an zu lösenden linearen Gleichungssystemen zwar etwas höher als im exakten Fall, allerdings zeigt sich durch die Dauer von  $2.1722 \cdot 10^2$  [s] eine Verbesserung hinsichtlich des Aufbaus der Massen-Matrizen und eine strukturbedingte Beschleunigung im Lösen der Gleichungssysteme. Der Strukturvorteil, den der Matrixaufbau mittels Mass-Lumping nach sich zieht, liegt zwar auch bei der Berechnung der Massenmatrix vor, wird aber besonders deutlich bei der Berechnung der Kreuzproduktmatrix. In Abbildung 6.9 veranschaulichen wir die strukturellen Unterschiede. Dabei gehen wir von einer durch Zufall generierten Magnetisierung aus, die auf einer Triangulierung betrachtet wird, die aus 4913 Knoten besteht. Dies führt bei einem standardmäßigen Vorgehen zum Aufbau der Kreuzproduktmatrix auf 401766 Nicht-Null-Einträge, während die Anzahl dieser unter Anwendung des Mass-Lumpings auf 29478 reduziert wird.

Abschließend stellen wir die zeitliche Entwicklung der Energiebeiträge, siehe Abbildung 6.10, sowie die der totalen Energie dar, siehe Abbildung 6.11. Wir bemerken, dass auf Grund der zeitlichen und richtungsbezogenen Veränderung des angelegten äußeren Feldes Energie dem System zugeführt bzw. abgezogen wird. Des Weiteren bewegt sich das eingangs homogen ausgerichtete Feld ebenfalls homogen und bedingt daher das Verschwinden des Austauschbeitrags. Schließlich resultiert dies insgesamt in eine Zu- und Abnahme der Zeeman Energie sowie der Anisotropie-

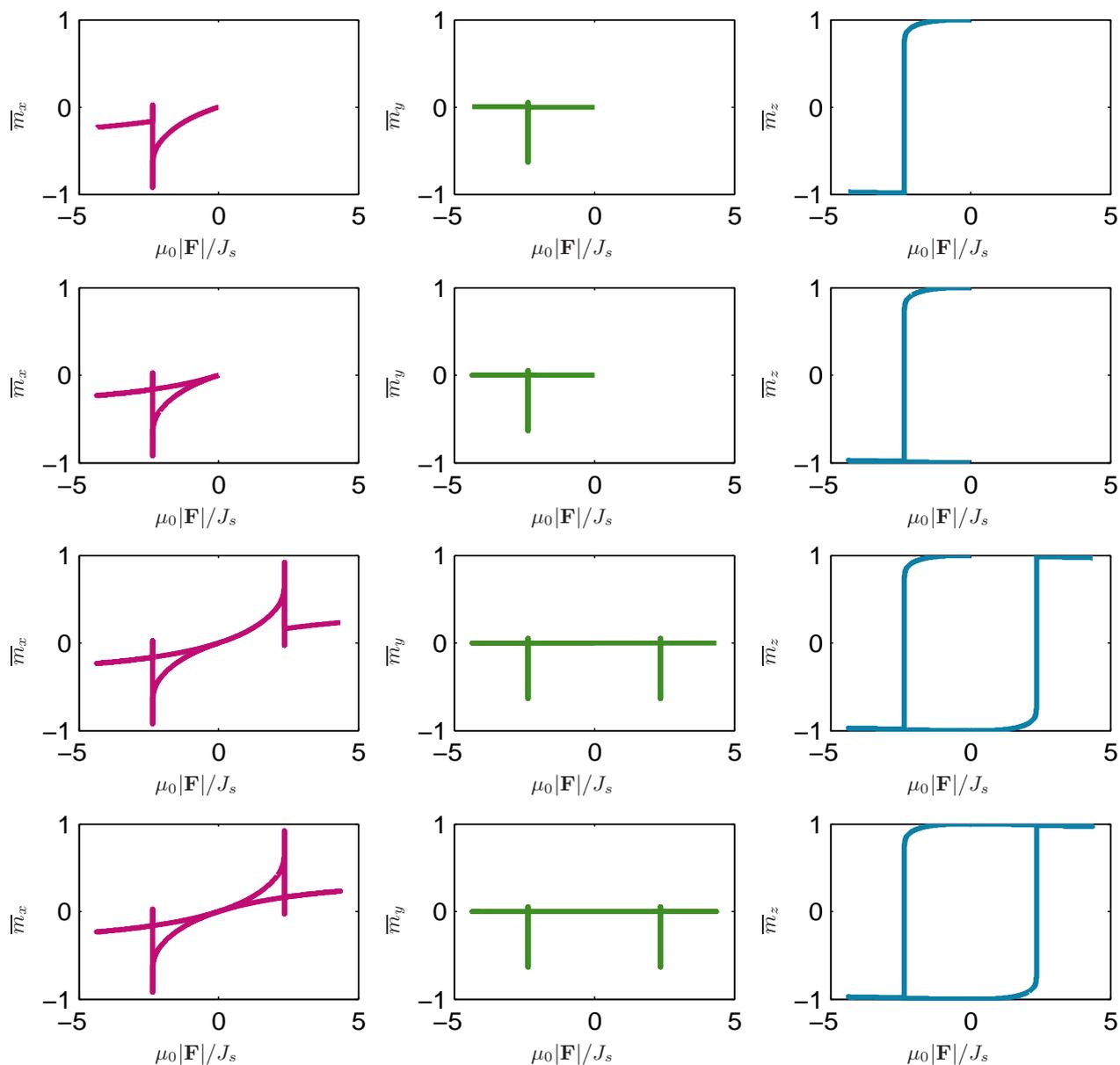
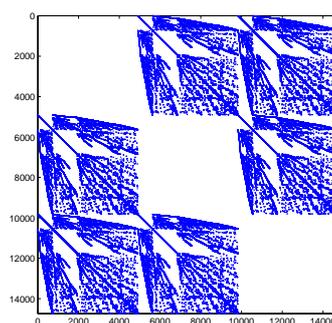
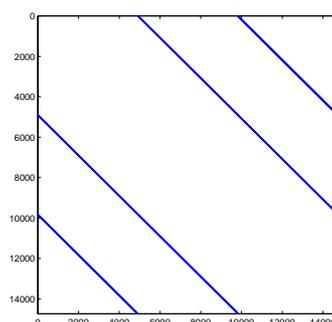


Abbildung 6.8: Darstellung der durchschnittlichen Magnetisierung  $\overline{\mathbf{m}}$  in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Komponente entlang der skalierten Stärke des angelegten äußeren Feldes  $\mathbf{F}$  in Zeitlupe. Dabei bezieht sich die erste Zeile an Abbildungen auf eine Zeit  $t = 16.6667$  [ns], die zweite Zeile veranschaulicht die Entwicklung zum Zeitpunkt  $t = 33.3333$  [ns], während in der dritten Zeile auf  $t = 50$  [ns] Bezug genommen wird. Zuletzt werden die entsprechenden Werte zum Zeitpunkt  $t = 66.6667$  [ns] aufgetragen.



Standardaufbau



Aufbau mittels Mass-Lumping

Abbildung 6.9: Sparsity-Pattern der Kreuzproduktsmatrix.

$\theta$	# Schritte gesamt	Overhead	Dauer in [s]
1	88001	9987	2.3570e+02
0.9	88113	10068	2.3117e+02
0.8	88077	10038	2.2906e+02
0.75	88008	10006	2.3559e+02
0.7	87941	9949	2.2964e+02
0.6	88132	10082	2.2999e+02
0.5	97535	13439	2.6772e+02
0.4	195286	50814	6.8863e+02
0.3	1967503	1448036	3.9649e+04

Tabelle 6.2: Die Simulationsdauer, die Anzahl der insgesamt zu lösenden linearen Gleichungssysteme und die Anzahl der zusätzlichen Schritte, die durch eine sinnvolle adaptive Zeitschrittweitensteuerung bedingt sind, werden im Bezug auf verschiedene Werte des Implizitätsparameters  $\theta$  aufgelistet. Dabei wird für die adaptive Zeitschrittweitensteuerung stets  $tol = 10^{-6}$  gewählt, während  $k_{\min} = k_0 \cdot 0.01$  [ns] mit  $k_0 = 0.002$  [ns] gilt.

energie und begründet damit insbesondere das Verhalten der Gesamtenergie.

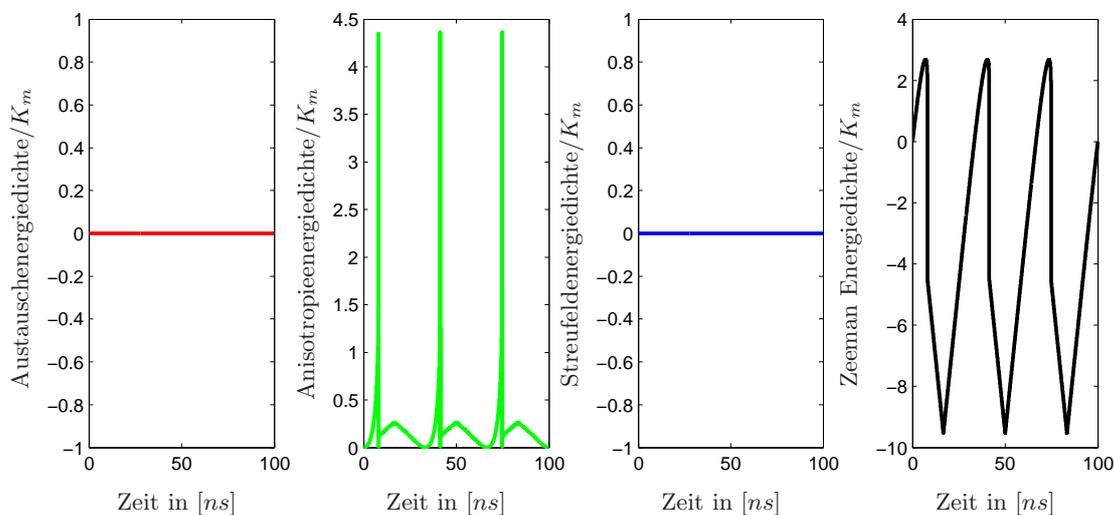


Abbildung 6.10: Darstellung der zeitlichen Entwicklung der einzelnen Energiebeiträge für eine Simulation unter Verwendung einer adaptiven Zeitschrittweitensteuerung mit  $tol = 10^{-6}$  und  $k_{\min} = k_0 \cdot 0.01$  [ns] mit  $k_0 = 0.002$  [ns].

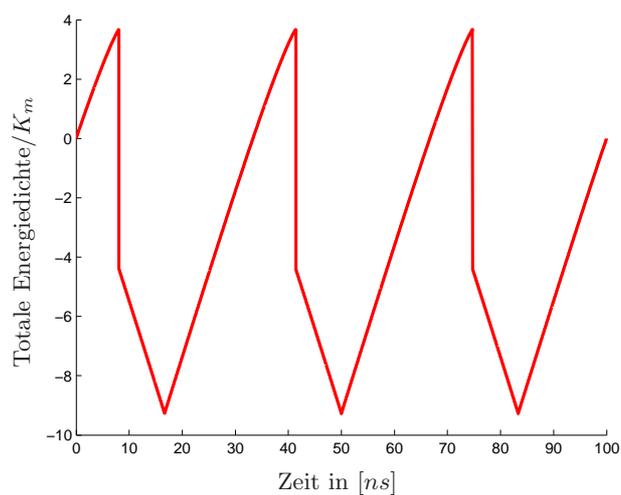
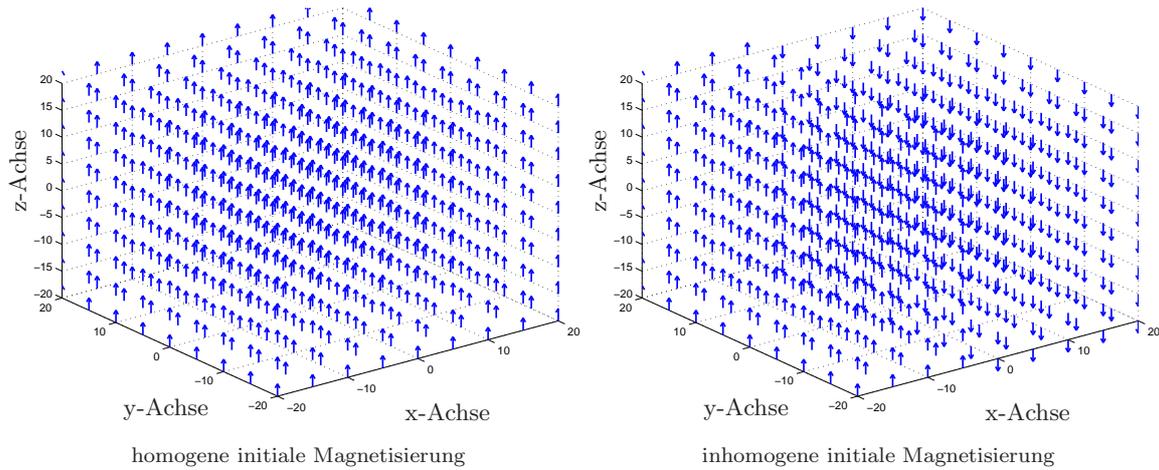


Abbildung 6.11: Darstellung der um  $1/K_m$  skalierten totalen Energiedichte für eine Simulation unter Verwendung einer adaptiven Zeitschrittweitensteuerung mit  $tol = 10^{-6}$  und  $k_{\min} = k_0 \cdot 0.01$  [ns] mit  $k_0 = 0.002$  [ns].

Abbildung 6.12: Initiale Magnetisierungskonfigurationen parallel zur leichten Achse  $\mathbf{e}$ .

## 6.2 $\mu$ mag-Problem #3

In diesem numerischen Beispiel wollen wir unser Verfahren auf ein Standardproblem anwenden. Dabei handelt es sich um das sogenannte  $\mu$ mag-Problem #3. Dieses wurde vom *NIST (National Institute of Standards and Technology)* und dem *CTCMS (Center for Theoretical and Computational Materials Science)* zum Testen numerischer Verfahren zum Zwecke der Simulation des dynamischen Verhaltens der Magnetisierung in mikromagnetischen Körpern vorgeschlagen.

Wir wollen die Problemstellung kurz erörtern. Wir betrachten einen magnetischen Würfel, der aus einem uniachsialen Material besteht, für das die Easy-Achse  $\mathbf{e}$  parallel entlang einer Würfelkante ausgerichtet ist. Außerdem wird kein äußeres Feld angelegt, sodass die beobachtbaren magnetischen Effekte ohne äußeren Einfluss hergestellt werden. Für diesen Würfel ist die Kantenlänge so zu bestimmen, dass die Gesamtenergie im *Flower-Zustand* genau jener im *Vortex-Zustand* entspricht. Diese spezielle Größe des Würfels wird in der Literatur als *Eindomänen-grenze* bezeichnet.

Sowohl der *Flower-Zustand* als auch der *Vortex-Zustand* sind stabile Zustände niedrigster Energie, die jedoch abhängig von der initialen Magnetisierung erreicht werden. Um in der Simulation als Endzustand einen *Flower-Zustand* zu beobachten, richten wir die gesamte Startmagnetisierung parallel und gleichgerichtet zu einer Würfelkante aus. Im Gegensatz dazu wählen wir eine inhomogene initiale Magnetisierungsconfiguration, um als stabilen Energiezustand den *Vortex-Zustand* vorzufinden. Dabei ist zwar die gesamte Startmagnetisierung parallel zu einer Würfelkante ausgerichtet, jedoch zeigen die Vektoren, die die Magnetisierung repräsentieren, in einer Hälfte des Körpers exakt entgegengesetzt zur Ausrichtung der Vektoren in der anderen Würfelhälfte, siehe Abbildung 6.12.

In unserer numerischen Simulation legen wir als Dämpfungsparameter  $\alpha = 1$  fest und wählen den Implizitätsparameter ebenfalls als  $\theta = 1$ . Mit einer Saturationspolarisierung von  $J_s = 1$  [T], einer Austauschkonstante  $A = 10^{-11}$  [J/m] und einer magnetostatischen Energiedichte  $K_m = \mu_0 M_s^2 / 2 = 3,9788736 \cdot 10^5$  [J/m<sup>3</sup>] bestimmen wir die Anisotropiekonstante durch  $K = 0.1 \cdot K_m = 3,9788736 \cdot 10^4$  [J/m<sup>3</sup>] und berechnen eine Austauschlänge von  $l_{\text{ex}} = 5.013256$  [nm]. Des Weiteren wird in unserem Beispiel durch  $\mathbf{e} = [0, 0, 1]$  die leichte Achse gegeben.

Zur Diskretisierung des Orts wählen wir eine im Sinn der Analysis aus Kapitel 3 zulässige Triangulierung bestehend aus 24576 Tetraedern. Diese wird ergänzt durch eine uniforme Zeitschrittweite  $k = 0.0004$  [ns]. Die folgenden Simulationsergebnisse beziehen sich, falls nicht explizit

anders gesagt, auf diese Diskretisierungsparameter.

**Flower-Zustand.** Wir ergänzen die vorgegebenen Parameter durch eine homogene Startmagnetisierung entlang der leichten Achse  $\mathbf{e}$ , siehe Abbildung 6.12, und beobachten ein dynamisches Verhalten der Magnetisierung wie es in Abbildung 6.15 zu sehen ist. Wir bemerken, dass wir im Folgenden den Endzustand, den diese initiale Magnetisierung nach sich zieht, als Flower-Zustand bezeichnen. Grundsätzlich unterscheidet man zwischen symmetrischem und getwistetem Flower-Zustand. Der erstgenannte stellt bei einer Kantenlänge von in etwa  $42 \sim 8.3778 \cdot l_{\text{ex}} [nm]$ , im Gegensatz zu geringeren Kantenlängen, keinen stabilen Zustand mehr dar, wohingegen sich der eingedrehte Flower-Zustand nun als stabiler Eindomänenzustand niedrigerer Energie erweist, vgl. [32, Kapitel 13].

Wie in Abbildung 6.14 dargestellt ist, ändert sich die totale Energie zu Beginn der Simulation relativ schnell und findet somit bereits nach wenigen Pikosekunden ein minimales Energieniveau. Betrachtet man die diversen Energiebeiträge einzeln, siehe Abbildung 6.13, so zeigt sich, dass anfangs sowohl die Austauschenergie als auch die Anisotropieenergie minimal sind. Dies ist einfach einzusehen, da die Startmagnetisierung gerade so gewählt ist, dass diese beiden Beträge im Sinne einer Energieminimierung befriedigt sind. Dies ist jedoch anders im Bezug auf die magnetostatische Energie. Über die Zeit hinweg nehmen also die Austauschenergie und die Anisotropieenergie zu Gunsten einer Minderung der Streufeldenergie zu. Schließlich stellt sich der Zustand minimaler Gesamtenergie als ein Kompromiss der einzelnen Präferenzen der Energiebeiträge dar. Abbildung 6.15 ist die entsprechende Entwicklung der Magnetisierung zu entnehmen.

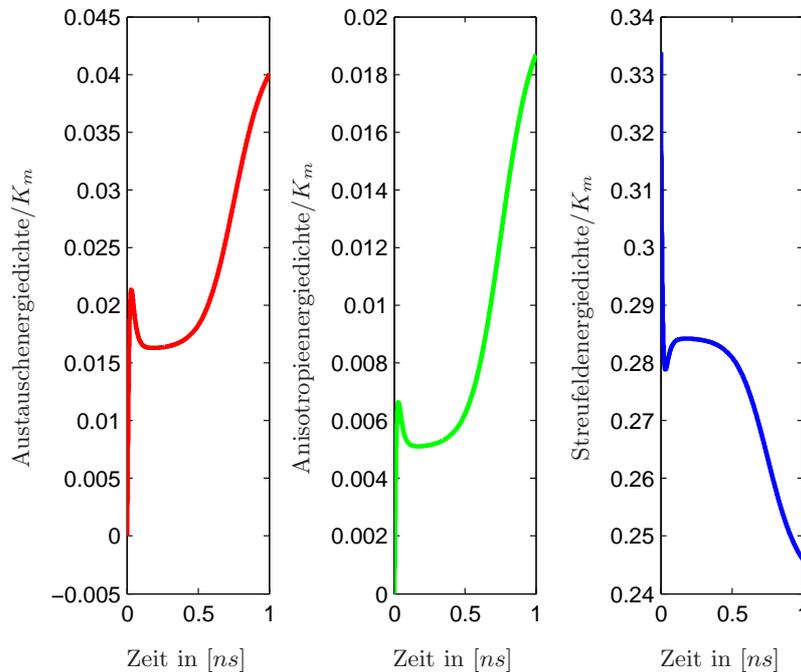


Abbildung 6.13: Entwicklung der Austauschenergie, der Anisotropieenergie und der Streufeldenergie jeweils mit  $1/K_m$  skaliert zum Flower-Zustand in der Simulation des dynamischen Verhaltens der Magnetisierung an Hand des  $\mu\text{mag}$ -Problems #3. Dabei wurde  $\alpha = 1$ ,  $\theta = 1$  und eine Kantenlänge von  $42 [nm]$  gewählt.

Um den Equilibriumszustand klarer darzustellen wurden in Abbildung 6.16 diverse Querschnitt-

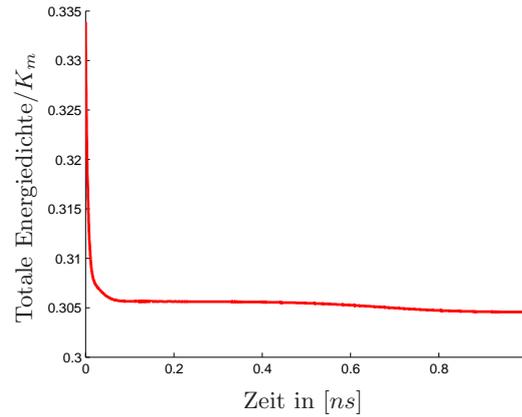


Abbildung 6.14: Entwicklung der mit  $1/K_m$  skalierten Gibbs-Energiedichte zum Flower-Zustand in der Simulation des dynamischen Verhaltens der Magnetisierung an Hand des  $\mu$ mag-Problems #3 für  $\alpha = 1$ ,  $\theta = 1$  und eine Kantenlänge von 42 [nm].

te des magnetischen Körpers samt der entsprechenden Magnetisierung zusammengefasst. Die Querschnitte liegen jeweils parallel zu einer Würfelseite. Außerdem entsprechen die Farben der Richtung der Magnetisierung normal zur Bildebene. Dabei beschränken wir uns auf die Betrachtung eines Würfels mit einer Kantenlänge von 42 [nm]. Wir beobachten einen leicht *eingetwisteten* Flower-Zustand, der in diesem Kantenlängenbereich als stabiler Equilibriumszustand erwartet wird. Betrachtet man allerdings einen Würfel mit einer Kantenlänge von 28 [nm], so stellt ein *symmetrischer* Flower-Zustand einen stabilen Zustand niedrigster Energie dar. Wie Abbildung 6.16 veranschaulicht, erfüllt unsere Simulation diese Erwartung.

Die totale Energie bzw. die einzelnen Energiebeiträge sind abhängig von der Kantenlänge des Würfels. Daher haben wir die partiellen Energiewerte  $E_{\text{exch}}$ ,  $E_{\text{ani}}$ ,  $E_{\text{stray}}$ , sowie die totale Energie  $E_{\text{total}}$  für den Flower-Zustand in Tabelle 6.3 für variierende Kantenlängen zusammengestellt. Dies ermöglicht uns die tatsächliche Übergangslänge im Vergleich mit entsprechenden Werten für den Vortex-Zustand zu ermitteln.

Kantenlänge in [nm]	$e_{\text{exch}}/K_m$	$e_{\text{ani}}/K_m$	$e_{\text{stray}}/K_m$	$e_{\text{total}}/K_m$
39	0.0156	0.0043	0.2882	0.3081
40	0.0161	0.0047	0.2865	0.3073
41	0.0203	0.0072	0.2788	0.3063
42	0.0400	0.0187	0.2459	0.3045
43	0.0554	0.0285	0.2184	0.3022

Tabelle 6.3: Auflistung der mit  $1/K_m$  skalierten (und daher dimensionslosen) partiellen Energiedichten  $e_{\text{exch}}$ ,  $e_{\text{ani}}$ ,  $e_{\text{stray}}$ , sowie der ebenfalls mit  $1/K_m$  skalierten totalen Energiedichte  $e_{\text{total}}$  im Flower-Zustand bezüglich eines Würfels mit gewisser Kantenlänge.

**Vortex-Zustand.** Ergänzen wir die eingangs festgelegten Parameter durch eine inhomogene initiale Magnetisierungskonfiguration wie sie in Abbildung 6.12 dargestellt ist, so zeigt sich ebenfalls ein rasches Abklingen der totalen Energie hin zu jenem Energieniveau in dem die Magnetisierung einen stabilen Endzustand erreicht hat, siehe Abbildung 6.20. Dabei ist zu bemerken, dass zu Beginn der Simulation die totale Energie höher liegt als beim vorangegangenen Experiment. Da die Startmagnetisierung inhomogen festgelegt ist, ist außerdem am Anfang die Austauschenergie etwas erhöht, während die Parallelität zur leichten Achse für eine befriedigte

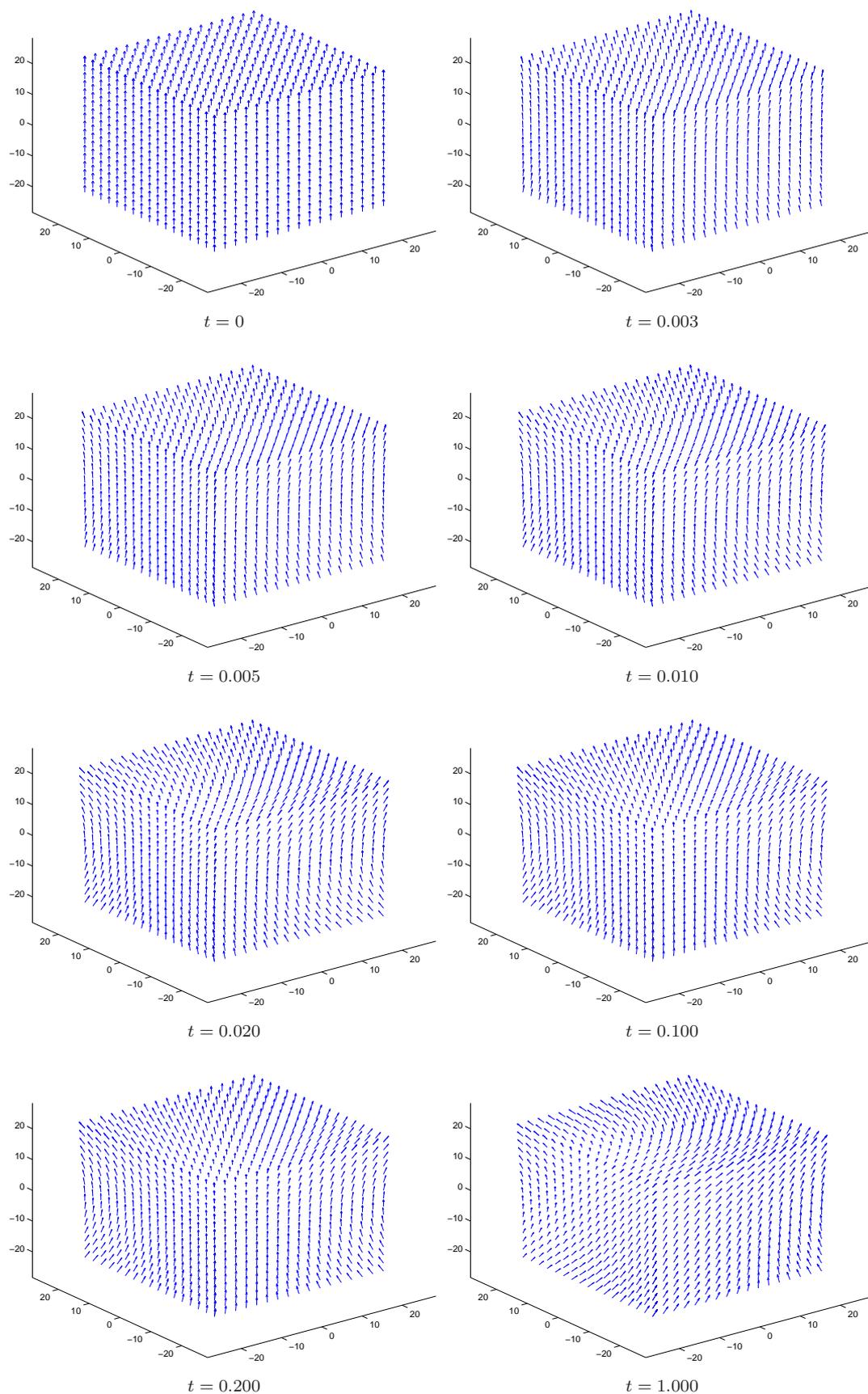


Abbildung 6.15: Auswahl gewisser Zeiten  $t$  in  $[ns]$  zu denen jeweils die Magnetisierung, die sich hin zum Flower-Zustand entwickelt, visualisiert wird. Dabei wurde  $\alpha = 1$ ,  $\theta = 1$  und eine Kantenlänge von  $42 [nm]$  gewählt.

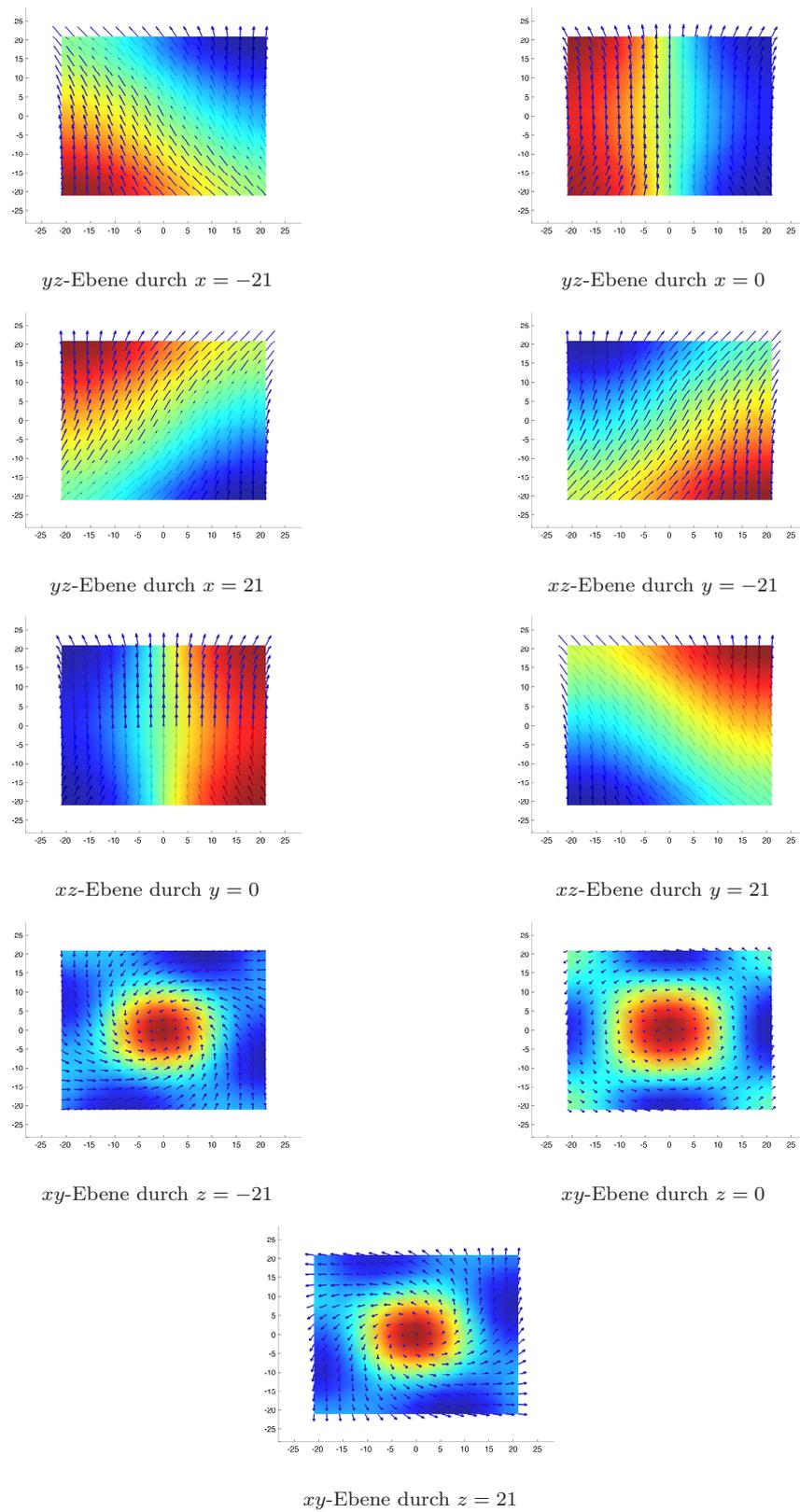


Abbildung 6.16: Visualisierung der Magnetisierung im (eingedrehten) Flower-Zustand entlang gewisser Ebenen für einen Würfel mit einer Kantenlänge von  $42 [nm]$ . Die Farben charakterisieren die Richtung der Magnetisierung normal zur Bildebene.

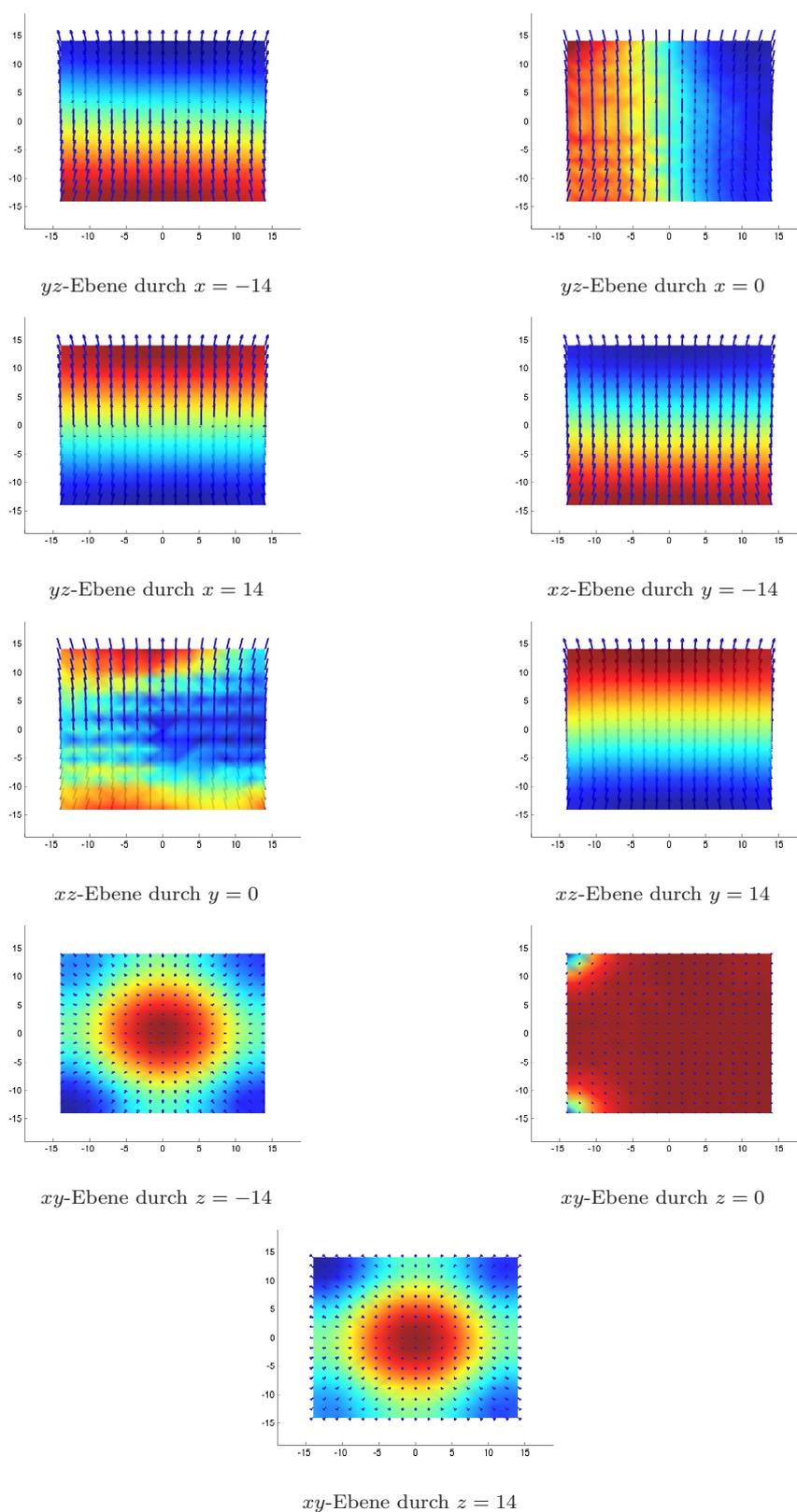


Abbildung 6.17: Visualisierung der Magnetisierung im (symmetrischen) Flower-Zustand entlang gewisser Ebenen für einen Würfel mit einer Kantenlänge von 28 [nm]. Die Farben charakterisieren die Richtung der Magnetisierung normal zur Bildebene.

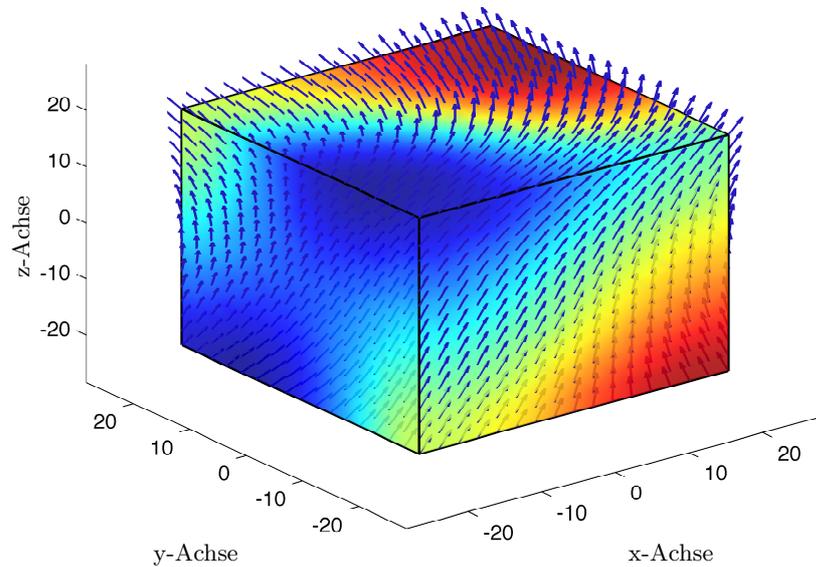


Abbildung 6.18: Visualisierung der Magnetisierung im Flower-Zustand für einen Würfel mit einer Kantenlänge von  $42 \text{ [nm]}$ . Die Farben charakterisieren die Richtung der Magnetisierung normal zur jeweiligen Oberflächenebene.

Anisotropieenergie sorgt. Insbesondere nimmt daher die Streufeldenergie anfangs ihr Maximum an. Wie sich diese partiellen Energien im Laufe der Simulation, mit dem Ziel ein optimales Energieniveau im Sinne einer Minimierung der Gesamtenergie zu erreichen, verändern, zeigt Abbildung 6.19 und wird mit Zahlen unter anderem in Tabelle 6.4 belegt. Das entsprechende dynamische Verhalten der Magnetisierung ist in Abbildung 6.21 abgebildet.

In Abbildung 6.22 veranschaulichen wir die zeitliche Entwicklung der totalen Energie  $E_{\text{total}}$  gegenüber diversen Werten der Gilbert-Dämpfungskonstante  $\alpha$ . Hierbei betrachten wir stets einen Würfel mit einer Kantenlänge von  $42 \text{ [nm]}$  und gehen von einer inhomogenen Startmagnetisierung, vgl. Abbildung 6.12, aus. Wie erwartet findet die Magnetisierung am schnellsten in ein stabiles Energieminimum für eine Wahl von  $\alpha = 1$ , vgl. Abbildung 6.1 für eine Darstellung der Koeffizienten des Dämpfungsanteils. Hingegen führt ein kleiner Wert für  $\alpha$  auf eine langsamere Energiereduktion. Wir bemerken, dass unser Time-Splitting-Verfahren auch für eine kleine Wahl von  $\alpha$  ein stabiles Verhalten zeigt, ohne eine wesentlich geringere Zeitschrittweite  $k$  einzufordern.

In Abbildung 6.23 sind verschiedene Querschnitte des magnetischen Körpers samt der entsprechenden Magnetisierung dargestellt. Dies soll einen übersichtlicheren Einblick in die Magnetisierung im Gleichgewichtszustand geben. Die Querschnitte liegen hierbei jeweils parallel zu einer Würfelseite. Außerdem entsprechen die Farben der Richtung der Magnetisierung normal zur Bildebene. Wir beschränken uns auf die Betrachtung eines Würfels mit einer Kantenlänge von  $42 \text{ [nm]}$ .

Um schließlich jene Kantenlänge feststellen zu können, bei der das Energieniveau im Gleichgewicht für den Vortex- und den Flower-Zustand übereinstimmt, halten wir die Werte der einzelnen Energiebeiträge in Form der dimensionslosen Größen  $e_{\text{exch}}/K_m$ ,  $e_{\text{ani}}/K_m$ ,  $e_{\text{stray}}/K_m$ , sowie die

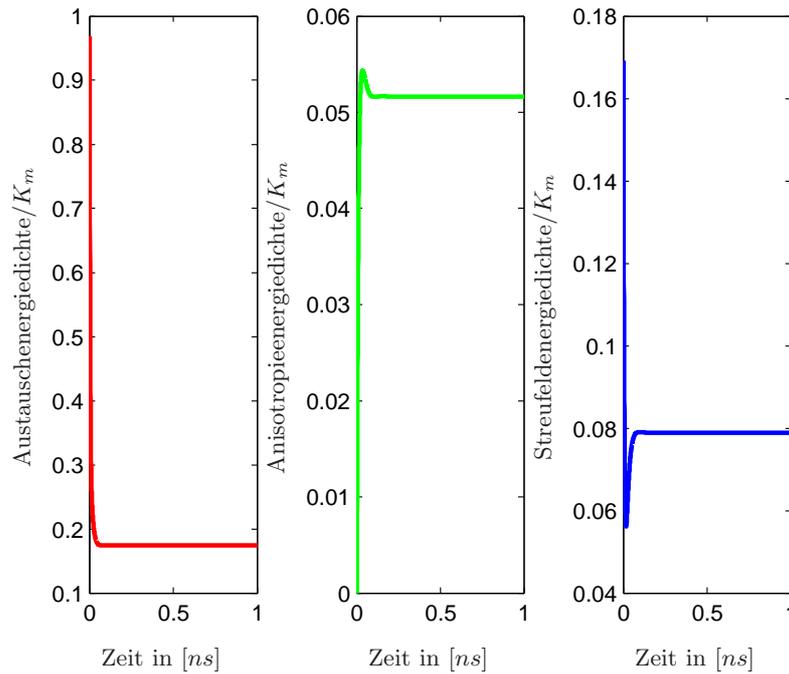


Abbildung 6.19: Entwicklung der mit  $1/K_m$  skalierten Austauschenergie  $e_{\text{exch}}$ , der Anisotropieenergie  $e_{\text{ani}}$  und der Streufeldenergie  $e_{\text{stray}}$  zum Vortex-Zustand in der Simulation des dynamischen Verhaltens der Magnetisierung an Hand des  $\mu\text{mag}$ -Problems #3. Dabei wurde  $\alpha = 1$ ,  $\theta = 1$  und eine Kantenlänge von  $42 [nm]$  gewählt.

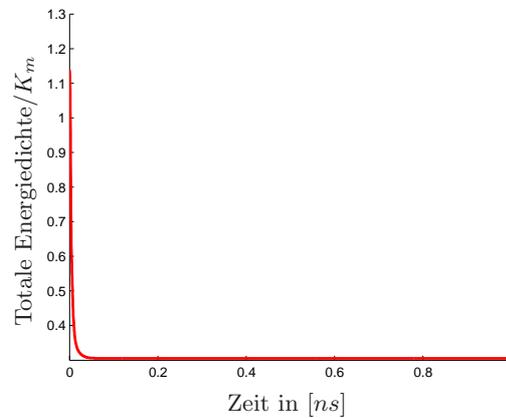


Abbildung 6.20: Entwicklung der mit  $1/K_m$  skalierten Gibbs-Energiedichte  $e_{\text{total}}$  zum Vortex-Zustand in der Simulation des dynamischen Verhaltens der Magnetisierung an Hand des  $\mu\text{mag}$ -Problems #3 für  $\alpha = 1$ ,  $\theta = 1$  und eine Kantenlänge von  $42 [nm]$ .

skalierte totale Energiedichte  $e_{\text{total}}/K_m$  in Tabelle 6.4 fest.

Schließlich wollen wir die Transitionslänge, also jene Kantenlänge des Würfels für die der Flower-Zustand und der Vortex-Zustand idente Gleichgewichtsenergie aufweisen, ermitteln. Dazu können wir die Werte der Tabellen 6.3 und 6.4 miteinander vergleichen. Diese werden in Abbildung 6.25 visualisiert und wir sehen, dass der Übergang bei einer Kantenlänge von etwa  $42.1 [nm]$  stattfindet. Diesen Wert können wir auch bezüglich der Austauschlänge  $l_{\text{ex}}$  darstellen und sehen

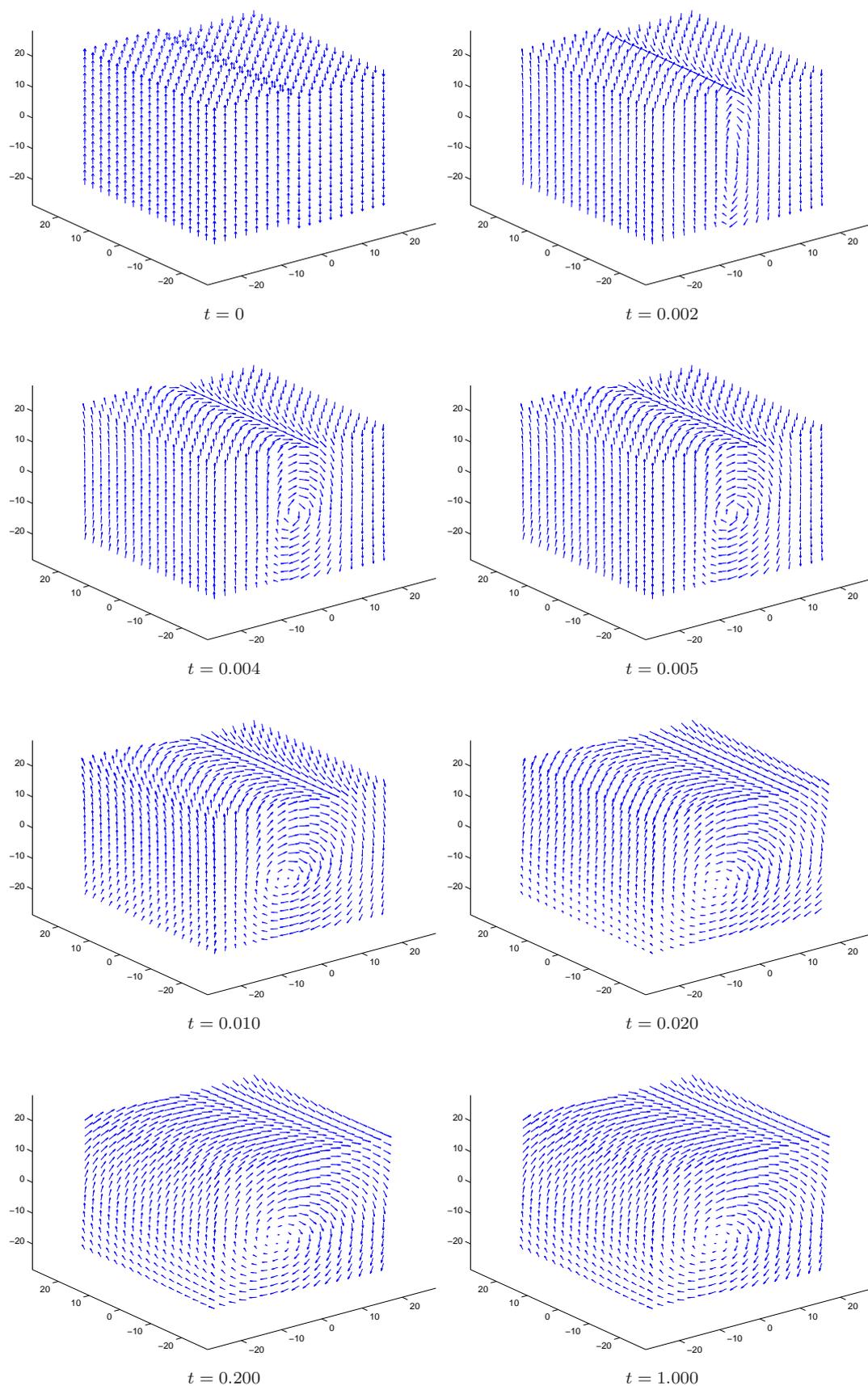


Abbildung 6.21: Auswahl gewisser Zeiten  $t$  in  $[ns]$  zu denen jeweils die Magnetisierung, die sich hin zum Vortex-Zustand entwickelt, visualisiert wird. Dabei wurde  $\alpha = 1$ ,  $\theta = 1$  und eine Kantenlänge von  $42 [nm]$  gewählt.

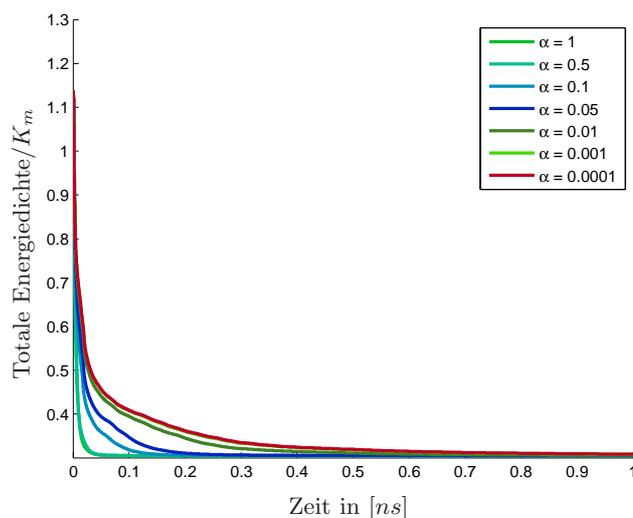


Abbildung 6.22: Entwicklung der mit  $1/K_m$  skalierten totalen Energiedichte für einen Würfel mit Kantenlänge 42 [nm] unter Betrachtung von verschiedenen Werten des Dämpfungsparameters  $\alpha$ .

Kantenlänge in [nm]	$e_{\text{exch}}/K_m$	$e_{\text{ani}}/K_m$	$e_{\text{stray}}/K_m$	$e_{\text{total}}/K_m$
39	0.1809	0.0546	0.0961	0.3316
40	0.1795	0.0535	0.0895	0.3225
41	0.1774	0.0525	0.0838	0.3136
42	0.1747	0.0516	0.0788	0.3052
43	0.1715	0.0509	0.0746	0.2970

Tabelle 6.4: Auflistung der mit  $1/K_m$  skalierten (und daher dimensionslosen) partiellen Energiedichten  $e_{\text{exch}}$ ,  $e_{\text{ani}}$ ,  $e_{\text{stray}}$ , sowie der ebenfalls mit  $1/K_m$  skalierten totalen Energiedichte  $e_{\text{total}}$  im Vortex-Zustand bezüglich eines Würfels, mit gewisser Kantenlänge.

$42.1 = 8.3977 \cdot l_{\text{ex}} [nm]$ . Dies entspricht den Erwartungen der Hausgeber des  $\mu\text{mag}$ -Problems #3.

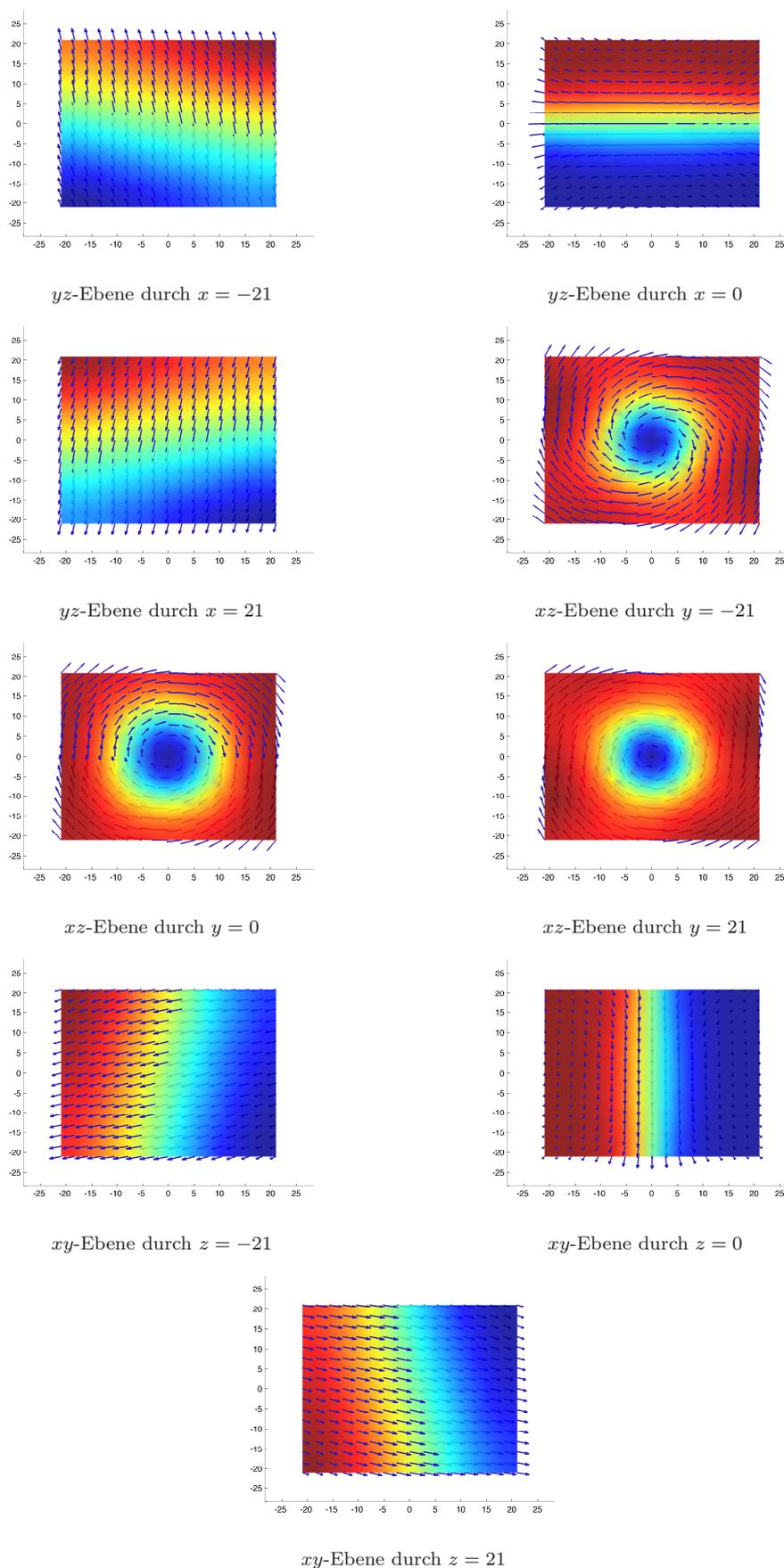


Abbildung 6.23: Visualisierung der Magnetisierung im Vortex-Zustand entlang gewisser Ebenen für einen Würfel mit Kantenlänge  $42 \text{ [nm]}$ . Die Farben charakterisieren die Richtung der Magnetisierung normal zur Bildebene.

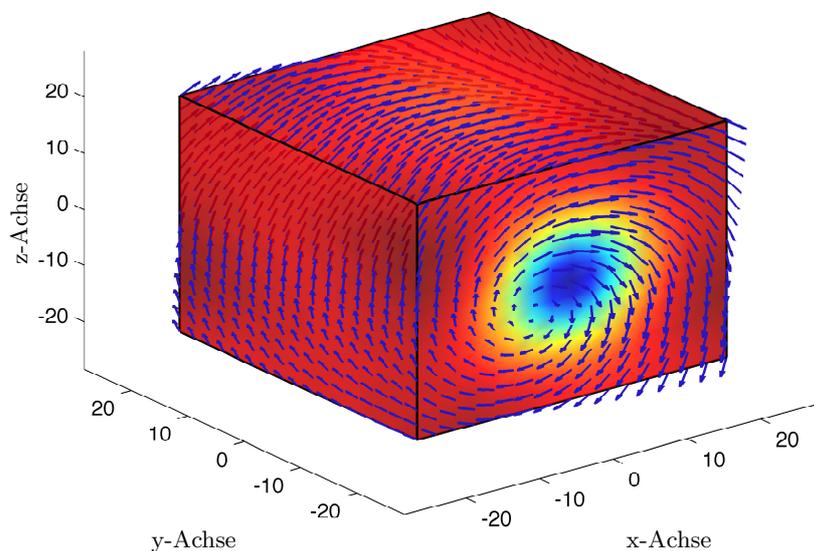


Abbildung 6.24: Visualisierung der Magnetisierung im Vortex-Zustand für einen Würfel mit einer Kantenlänge von 42 [nm]. Die Farben charakterisieren die Richtung der Magnetisierung normal zur jeweiligen Oberflächebene.

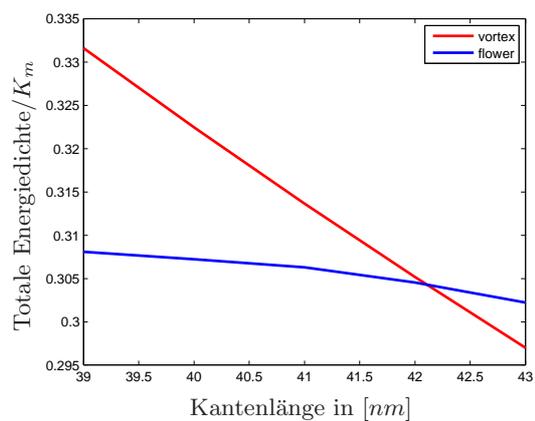


Abbildung 6.25: Die mit  $1/K_m$  skalierten (und daher dimensionslosen) totalen Energiedichten bezüglich des Vortex-Zustands und des Flower-Zustands werden gegenüber der Kantenlänge des Würfels in [nm] aufgetragen.

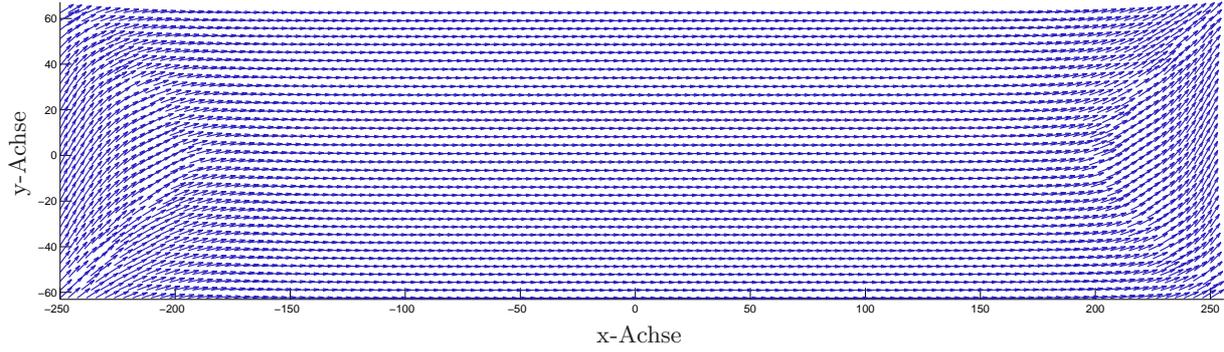


Abbildung 6.26: Stabiler Endzustand  $S$ -State unter einem langsam abklingenden angelegten äußeren Feld in Richtung  $[1, 1, 1]$ .

### 6.3 $\mu$ mag-Problem #4

Anders als beim  $\mu$ mag-Problem #3 liegt der Fokus im vierten Standardproblem, das vom *NIST* (*National Institute of Standards and Technology*) und dem *CTCMS* (*Center for Theoretical and Computational Materials Science*) herausgegeben wurde, auf den dynamischen Aspekten einer mikromagnetischen Simulation. Deshalb eignet sich diese Problemstellung in besonderem Maße zur Verifikation und Validierung des Zeitintegrators aus Algorithmus 3.2.4 bzw. 3.2.14.

Wir stellen zunächst die Ausgangskonfiguration bezüglich des  $\mu$ mag-Problems #4 dar. Hierbei wird als initiale Magnetisierung der sogenannte  $S$ -State betrachtet, siehe Abbildung 6.26. Diese Konfiguration entspricht dem Gleichgewichtszustand, der erreicht wird, wenn man ein saturierendes Feld in Richtung  $[1, 1, 1]$  anlegt und dieses langsam über den Zeitraum der Simulation abklingen lässt. Im numerischen Experiment wird dann ausgehend von diesem initialen  $S$ -Zustand ein Feld angelegt, das hinreichend stark ist, sodass die Magnetisierung des quaderförmigen Körpers umgekehrt wird. Im Gegensatz zum  $\mu$ mag-Problem #3 ist man nun an der zeitlichen Veränderung der Magnetisierung vom Beginn der Simulation bis hin zum Endzustand oder über einen gewissen Zeitraum hinweg interessiert. Wir betrachten diesen Prozess, wie im  $\mu$ mag-Problem #4 vorgeschlagen, an Hand von zwei verschiedenen angelegten äußeren Feldern.

Bezüglich der Geometrie halten wir fest, dass ein Film betrachtet wird, der  $3 [nm]$  dick ist,  $500 [nm]$  lang ist und  $125 [nm]$  breit ist. Dieser wird, falls nicht explizit anders gesagt, von einer im Sinn der Analysis aus Kapitel 3 zulässigen Triangulierung des magnetischen Körpers in 29483 Tetraeder zerlegt. Dies führt eine Netzweite von in etwa  $3.5 [nm]$ . Des Weiteren wählen wir als uniforme Zeitschrittweite  $k = 0.0002 [ns]$ . Darüber hinaus liegen ähnliche Parameter wie für Permalloy Filme vor. Demnach wird die Austauschkonstante durch  $A = 1.3 \cdot 10^{-11} [J/m]$ , die Saturationsmagnetisierung durch  $M_s = 8.0 \cdot 10^5 [A/m]$  und die Anisotropiekonstante durch  $K = 0.0 [J/m^3]$  festgelegt. Als Gilbert-Dämpfungskonstante kommt  $\alpha = 0.02$  zum Einsatz.

#### Experiment 1

In einem ersten numerischen Experiment legen wir ein äußeres Feld an, das in der  $xy$ -Ebene liegt und durch die Komponenten  $\mu_0 F_x = -24.6 [mT]$ ,  $\mu_0 F_y = 4.3 [mT]$  und  $\mu_0 F_z = 0.0 [mT]$  festgelegt ist. Damit ergibt sich ein mit  $\mu_0$  skaliertes angelegtes äußeres Feld mit einer Stärke von in etwa  $25 [mT]$ , das im  $170^\circ$ -Winkel ausgehend von der positiven  $x$ -Achse im mathematisch positiven Sinn wirkt.

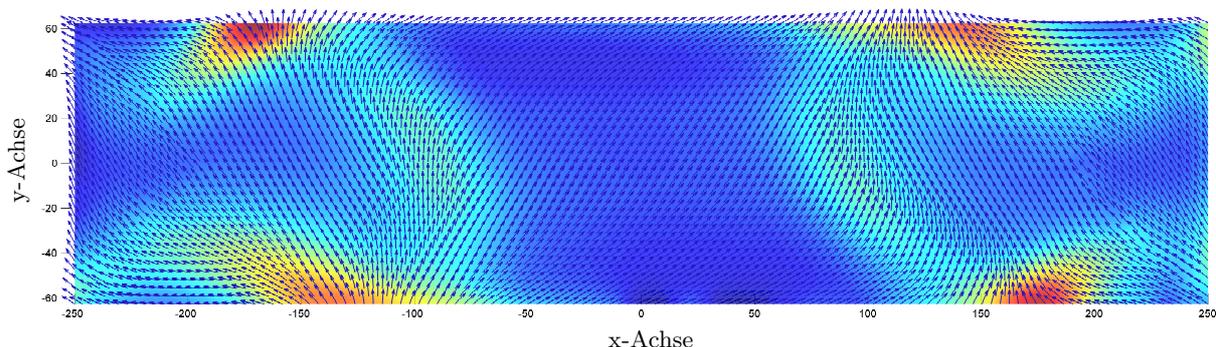


Abbildung 6.27: Darstellung der Magnetisierung zu jenem Zeitpunkt, in dem die durchschnittliche Magnetisierung in der  $x$ -Komponente zum ersten Mal den Wert 0 annimmt, wobei als angelegtes äußeres Feld die Konfiguration aus Experiment 1 zum Einsatz kommt. Die Farben charakterisieren die Richtung der Magnetisierung normal zur Bildebene.

Zunächst sind wir an jener Magnetisierung interessiert, die sich zu jenem Zeitpunkt ausprägt, in dem die durchschnittliche Magnetisierung der  $x$ -Komponente den Wert 0 annimmt. Die zugehörige Magnetisierungskonfiguration wird in Abbildung 6.27 dargestellt und tritt, wie Abbildung 6.30 zu entnehmen ist, nach in etwa  $0.151 [ns]$  auf. Es gilt zu bemerken, dass diese Veranschaulichung den Erwartungen entspricht.

Um einen weiteren Einblick in die dynamische Antwort der Magnetisierung auf das angelegte äußere Feld zu erhalten, verweisen wir den Leser auf Abbildung 6.28 bzw. 6.29. Darin wird zu ausgewählten Zeitpunkten die Magnetisierung dargestellt, wodurch einerseits die Bewegung der Domänenwände sichtbar wird und andererseits sich nach  $1 [ns]$  bereits ein Zustand minimaler Energie erahnen lässt.

Möchte man die zeitliche Veränderung der durchschnittlichen Magnetisierung pro Komponente hinterfragen, so gibt Abbildung 6.30 eine Antwort darauf. Wir bemerken, dass zwar das qualitative Verhalten den Erwartungen der Herausgeber des Beispiels entspricht, allerdings weichen die Absolutwerte von den Referenzlösungen ab. Dies legt den Verdacht nahe, dass die Triangulierung für die Berechnung des Streufeldes noch nicht hinreichend fein gewählt wurde.

Abschließend stellen wir der Vollständigkeit halber die zeitliche Entwicklung der jeweiligen Energiebeiträge sowie der Gesamtenergie in Form von skalierten und daher dimensionslosen Energiedichten dar, siehe Abbildung 6.31 bzw. 6.32. Wie erwartet beobachten wir stets ein Abnehmen der mit  $1/K_m$  skalierten totalen Energiedichte und damit der Gesamtenergie.

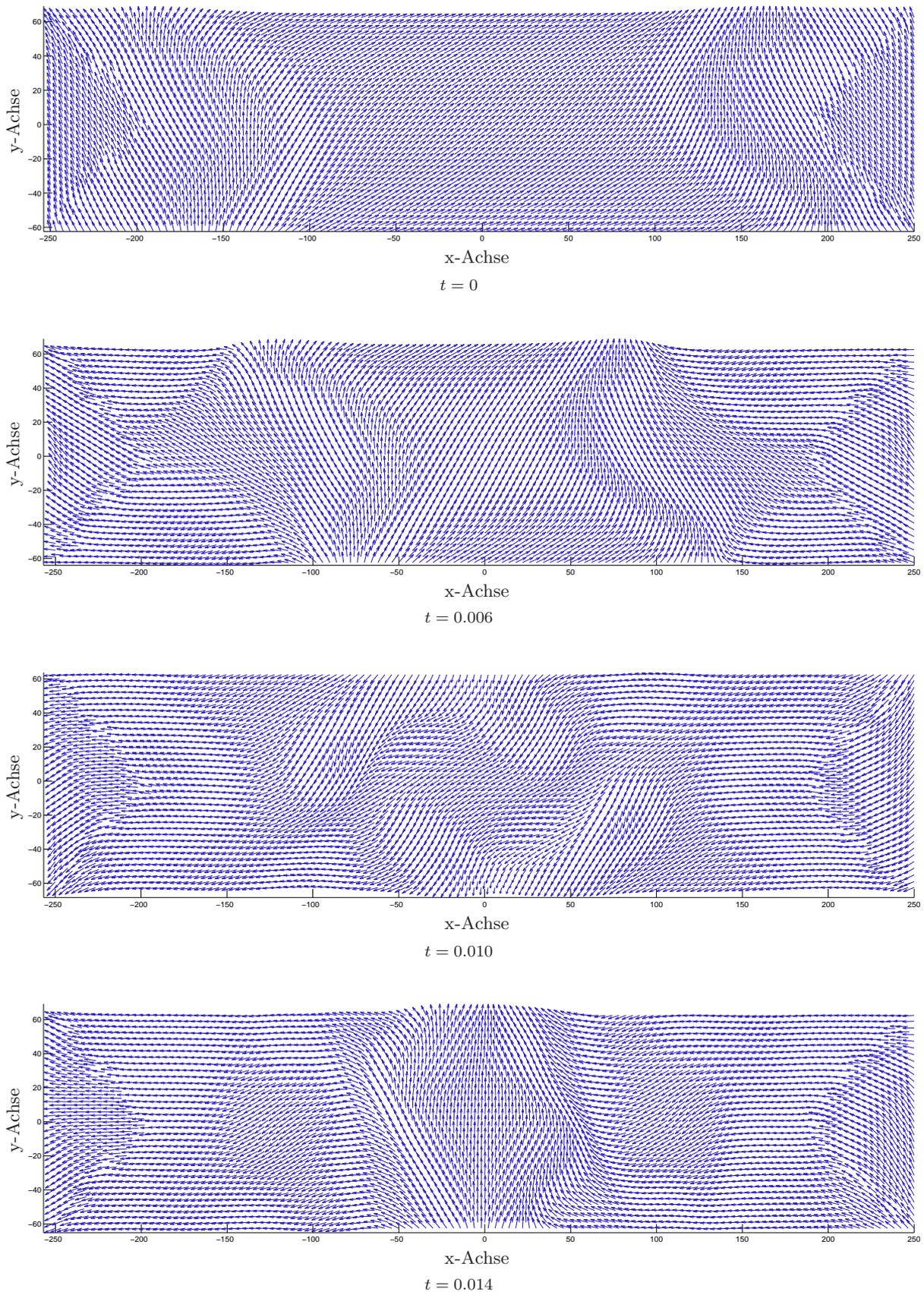


Abbildung 6.28: Auswahl gewisser Zeiten  $t$  in [ns] zu denen jeweils die Magnetisierung visualisiert wird, wobei als angelegtes äußeres Feld die Konfiguration aus Experiment 1 betrachtet wird.

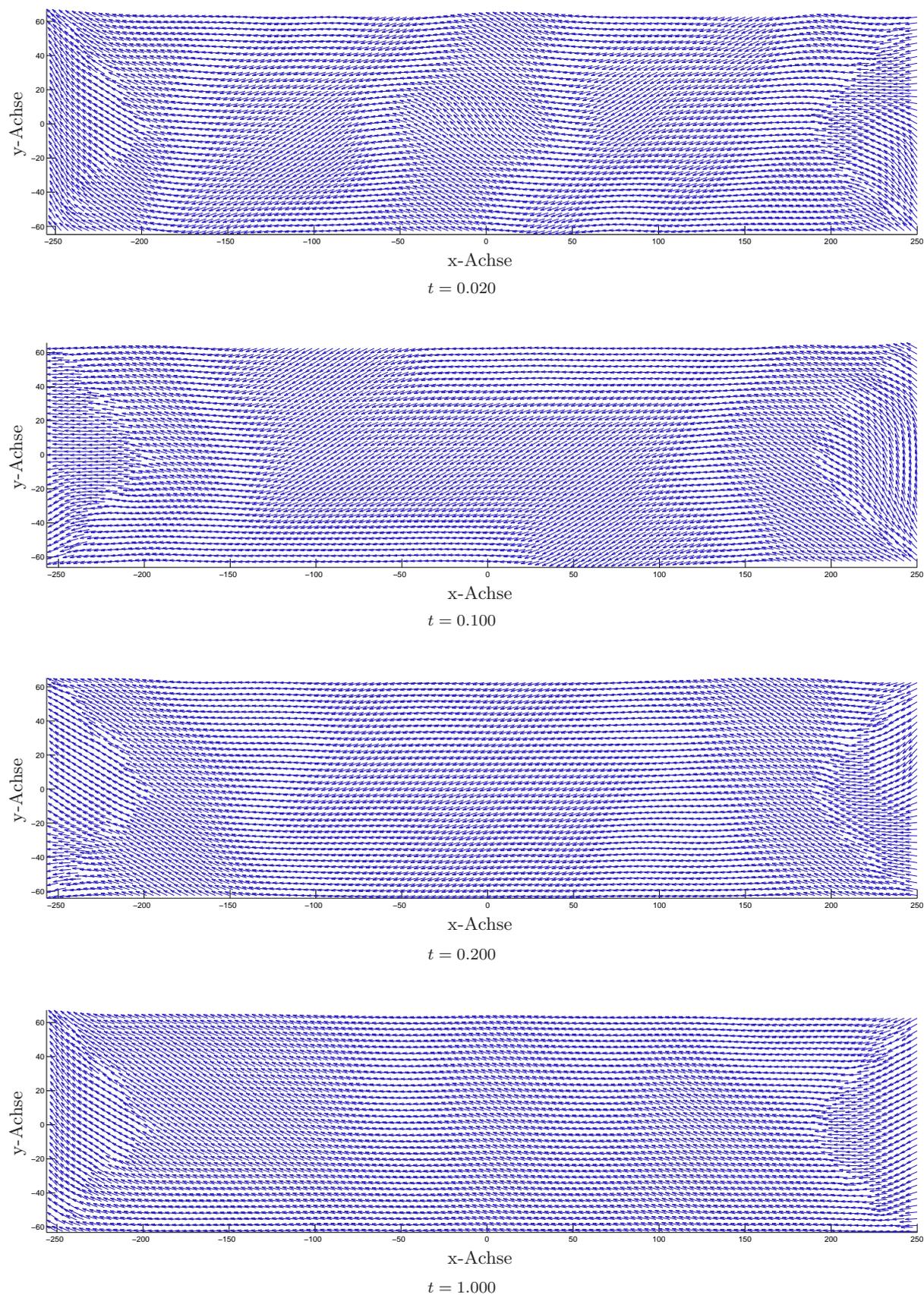


Abbildung 6.29: Fortsetzung der Auswahl von gewissen Zeiten  $t$  in  $[ns]$  zu denen jeweils die Magnetisierung visualisiert wird, wobei als angelegtes äußeres Feld die erste Konfiguration betrachtet wird.

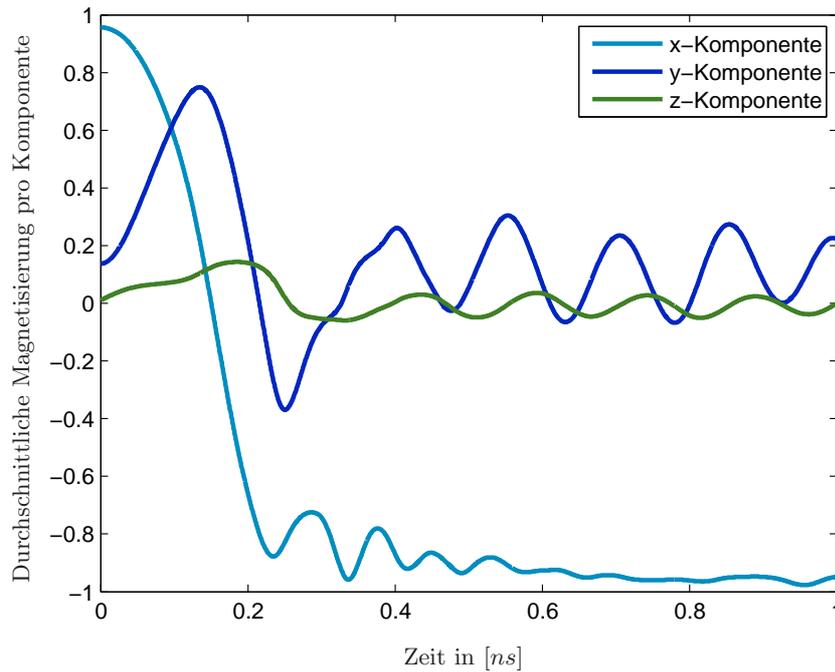


Abbildung 6.30: Zeitliche Entwicklung der durchschnittlichen Magnetisierung in jeder Komponente. Dabei kommt die Konfiguration des äußeren angewandten Feldes aus Experiment 1 zum Einsatz.

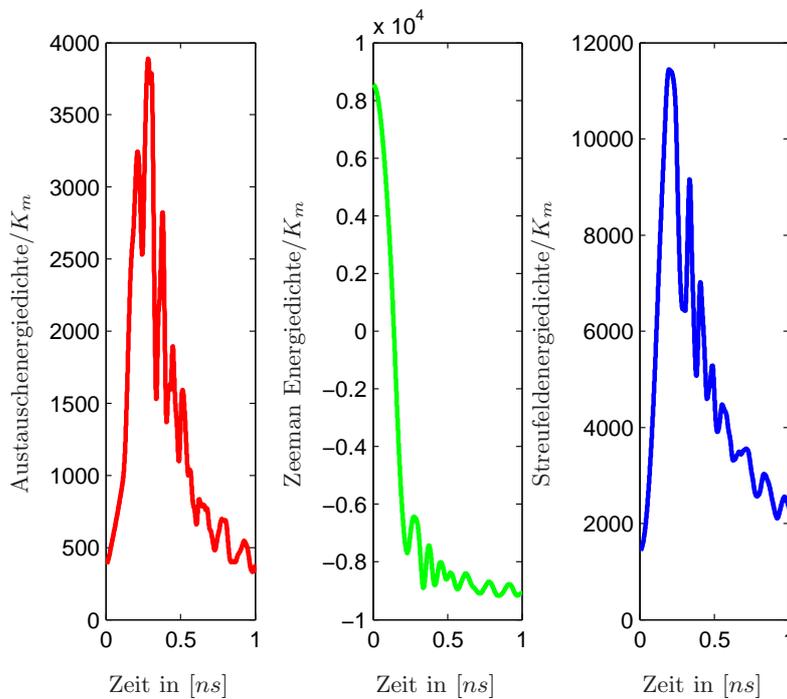


Abbildung 6.31: Zeitliche Entwicklung der Austauschenergiedichte  $e_{\text{exch}}$ , der Streufeldenergiedichte  $e_{\text{stray}}$  und der Zeeman Energiedichte  $e_{\text{ext}}$ , wobei jeweils mit  $1/K_m$  skaliert wurde, um eine dimensionslose Größe zu erhalten. Dabei kommt die Konfiguration des äußeren angewandten Feldes aus Experiment 1 zum Einsatz.

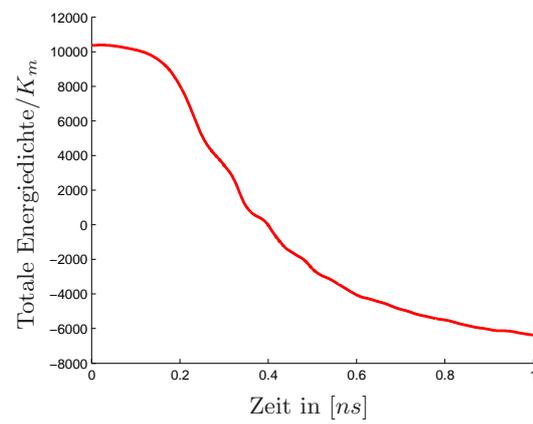


Abbildung 6.32: Zeitliche Entwicklung der mit  $1/K_m$  skalierten Gibbs-Energiedichte  $e_{\text{total}}$ , wobei als angelegtes äußeres Feld jene Variante betrachtet wird, die in Experiment 1 angegeben ist.

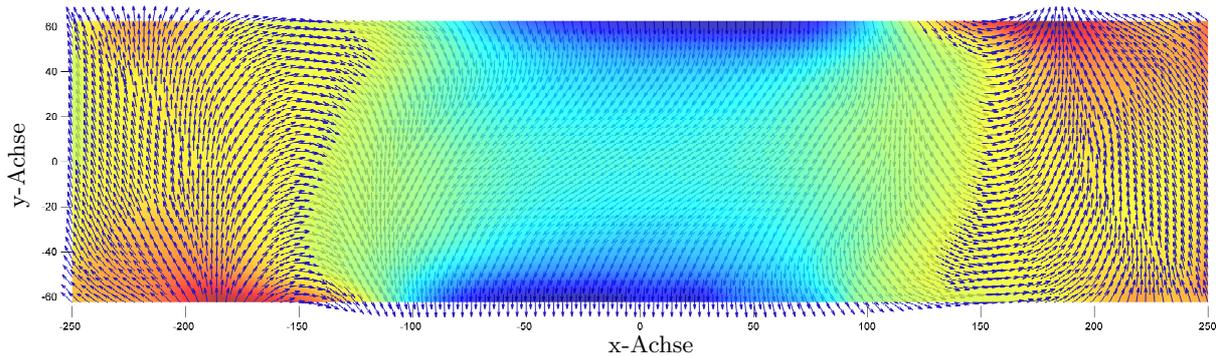


Abbildung 6.33: Darstellung der Magnetisierung zu jenem Zeitpunkt, in dem die durchschnittliche Magnetisierung in der  $x$ -Komponente zum ersten Mal den Wert 0 annimmt, wobei als angelegtes äußeres Feld die Konfiguration aus Experiment 2 betrachtet wird. Die Farben charakterisieren die Richtung der Magnetisierung normal zur Bildebene.

## Experiment 2

Im zweiten Experiment zum  $\mu$ mag-Problem #4 legen wir ein Feld an, das ebenfalls in der  $xy$ -Ebene liegt und diesmal über die Komponenten  $\mu_0 F_x = -35.5 [mT]$ ,  $\mu_0 F_y = -6.3 [mT]$  und  $\mu_0 F_z = 0.0 [mT]$  definiert wird. Daraus resultiert ein äußeres Feld mit einer Stärke von in etwa  $36 [mT]$ , das im  $190^\circ$ -Winkel ausgehend von der positiven  $x$ -Achse im mathematisch positiven Sinn angelegt wird.

Wieder betrachten wir zunächst die Magnetisierung zu jenem Zeitpunkt, in dem die  $x$ -Komponente der durchschnittlichen Magnetisierung zum ersten Mal den Wert 0 annimmt. Dies passiert, wie Abbildung 6.36 zu entnehmen ist, in etwa nach  $0.16 [ns]$ . Abbildung 6.33 stellt die entsprechende Magnetisierungskonfiguration dar. Wir bemerken, dass dies den Vergleichsergebnissen entspricht.

Abbildung 6.34 bzw. 6.35 zeigt zu ausgewählten Zeitpunkten über die Dauer der Simulation hinweg die zugehörige Magnetisierung. Daraus lässt sich einerseits die Bewegung der Domänenwände ablesen und andererseits lässt jene Abbildung, die zum Zeitpunkt von einer  $1 [ns]$  korrespondiert, einen stabilen Endzustand vermuten.

Um die durchschnittliche Magnetisierung pro Komponente zu dokumentieren, wird diese in Abbildung 6.36 festgehalten. Wieder stellen wir fest, dass das qualitative Verhalten den Referenzlösungen und damit den Erwartungen entspricht, allerdings weichen die absoluten Werte etwas ab. Einerseits könnte der Grund hierfür bereits in den leichten Abweichungen der initialen Magnetisierung liegen, da die Simulationsparameter so gewählt sind, dass die Simulation bereits auf minimale Veränderungen in der Ausgangskonfiguration der Magnetisierung mit starken Abweichungen reagiert. Andererseits scheint auch die betrachtete Netzweite zur Berechnung des Streufeldes nicht fein genug zu sein.

Der Vollständigkeit halber wird der zeitliche Fortschritt der einzelnen Energiebeiträge in Abbildung 6.37 in Form von dimensionslosen Größen festgehalten. Anschließend findet sich die Entwicklung der totalen Energie in Abbildung 6.38. Diese wird ebenfalls durch die dimensionslose Größe  $e_{\text{total}}/K_m$  dargestellt. Wir beobachten stets ein Abnehmen der Gesamtenergie. Dies bestätigt unsere Erwartungen.

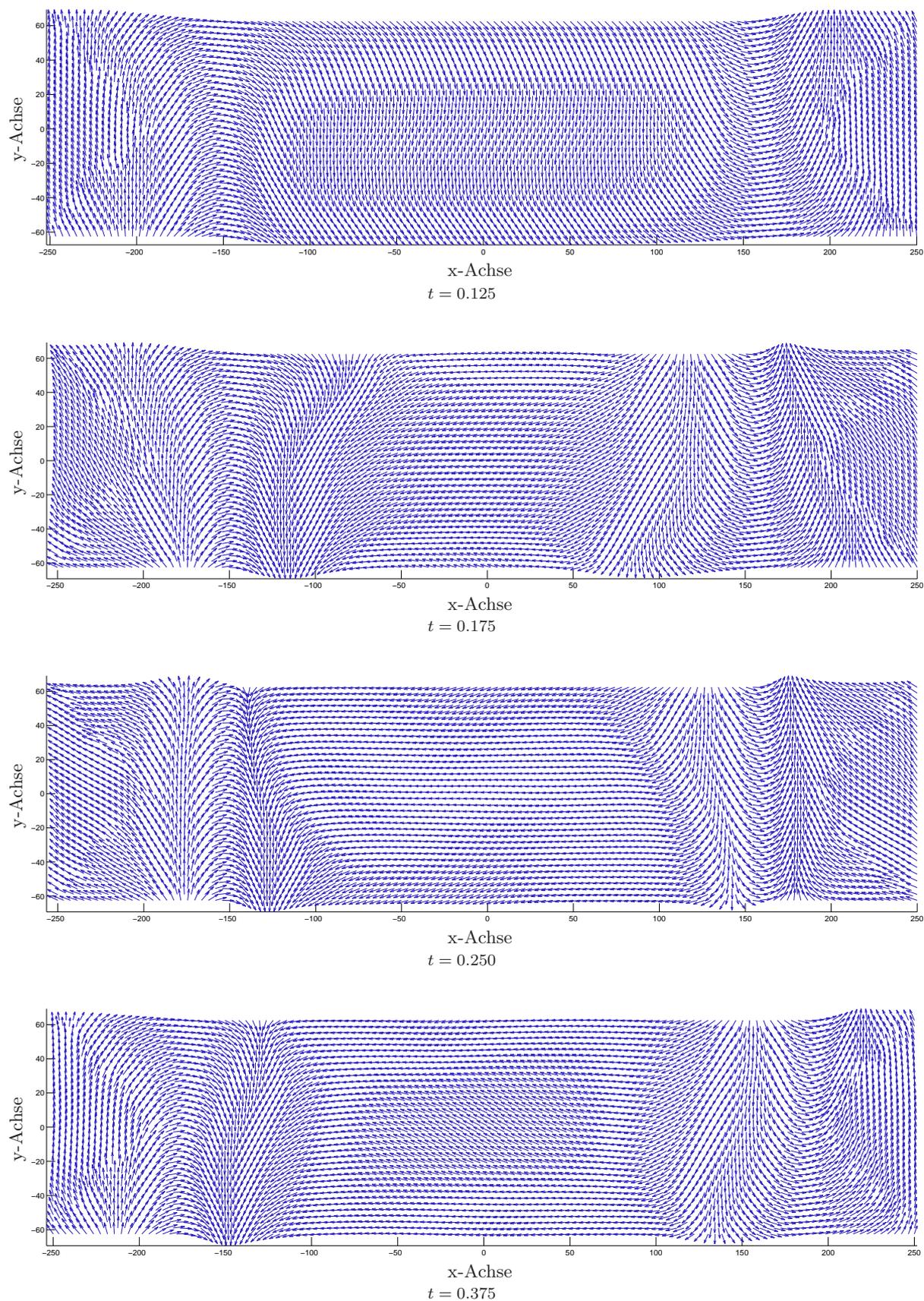


Abbildung 6.34: Auswahl gewisser Zeiten  $t$  in [ns] zu denen jeweils die Magnetisierung visualisiert wird, wobei als angelegtes äußeres Feld jene Konfiguration betrachtet wird, die in Experiment 2 angegeben ist.

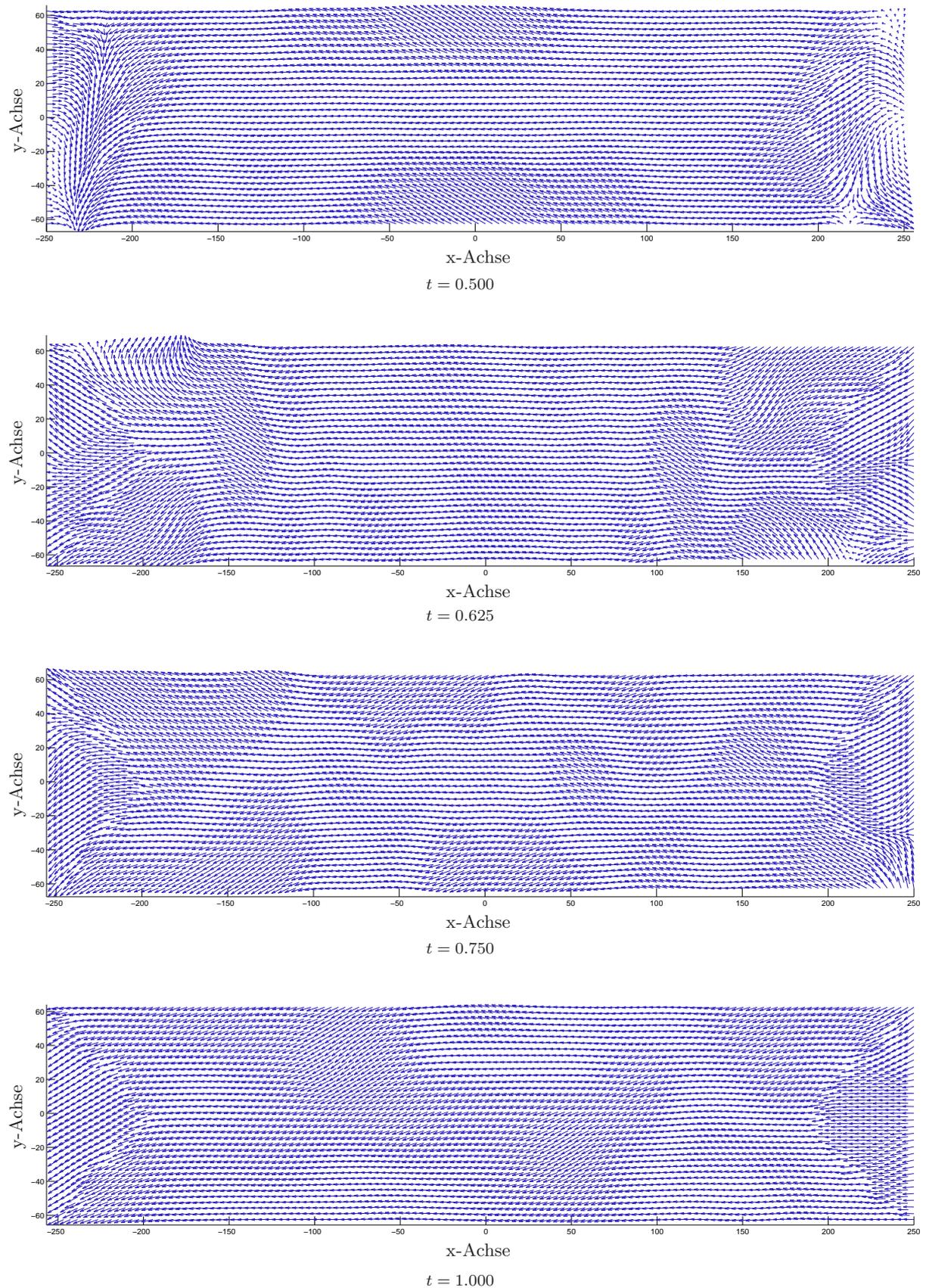


Abbildung 6.35: Fortsetzung der Auswahl von gewissen Zeiten  $t$  in  $[ns]$  zu denen jeweils die Magnetisierung visualisiert wird, wobei als angelegtes äußeres Feld jene Konfiguration betrachtet wird, die in Experiment 2 angegeben ist.

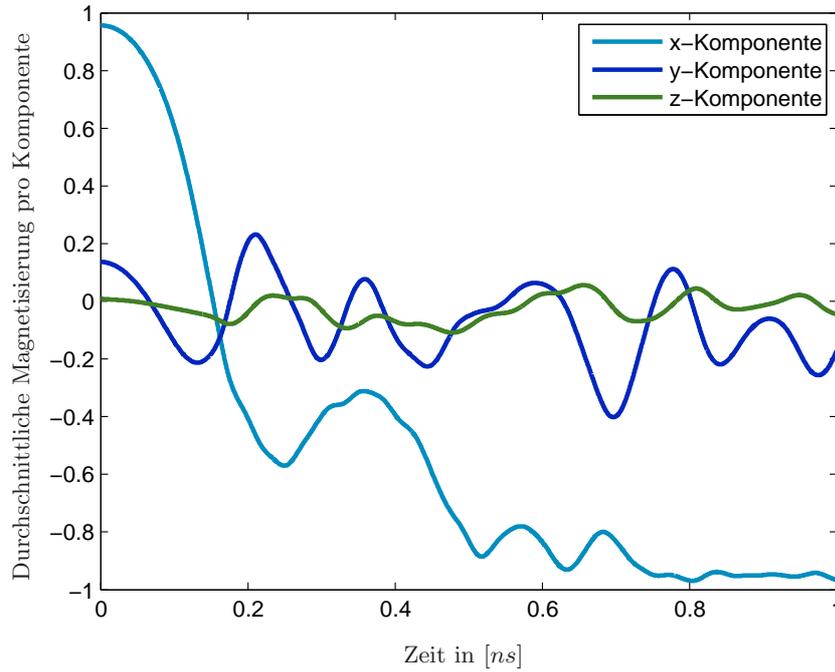


Abbildung 6.36: Zeitliche Entwicklung der durchschnittlichen Magnetisierung  $\bar{\mathbf{m}}$  in jeder Komponente. Dabei kommt die Variante des äußeren angewandten Feldes aus Experiment 2 zum Einsatz.

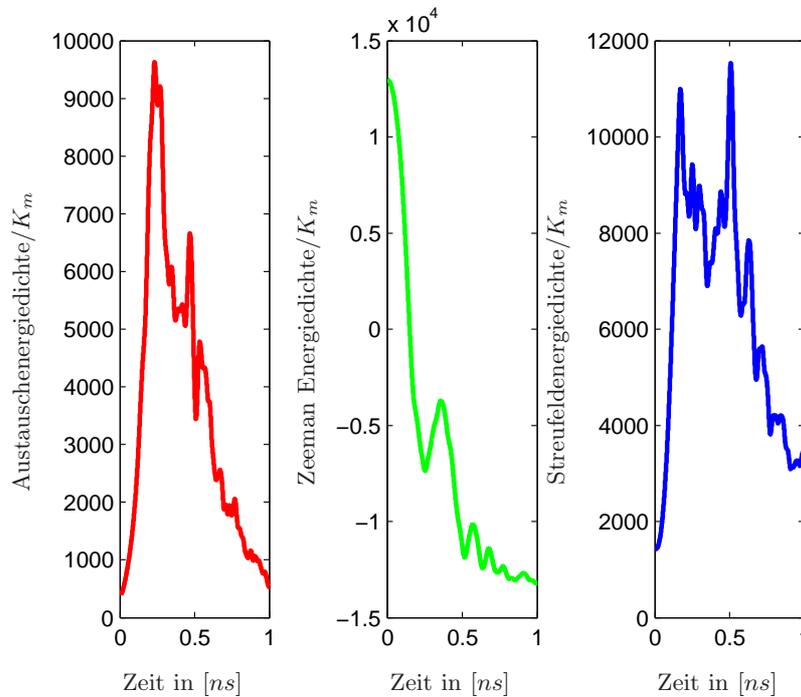


Abbildung 6.37: Zeitliche Entwicklung der Austauschenergiedichte  $e_{\text{exch}}$ , der Streufeldenergiedichte  $e_{\text{stray}}$  und der Zeeman Energiedichte  $e_{\text{ext}}$ , wobei jeweils mit  $1/K_m$  skaliert wurde, um eine dimensionslose Größe betrachten zu können. Dabei wird als angelegtes äußeres Feld die Konfiguration aus Experiment 2 angewandt.

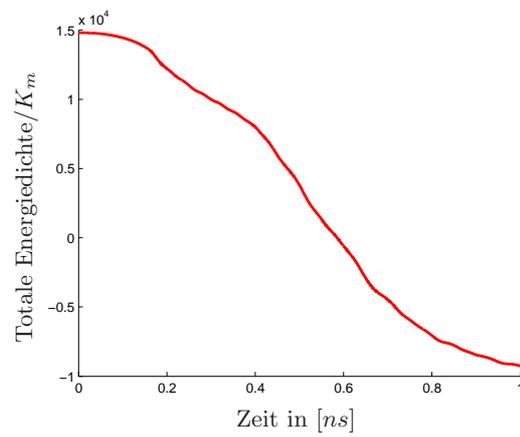


Abbildung 6.38: Zeitliche Entwicklung der mit  $1/K_m$  skalierten (und damit dimensionslosen) Gibbs-Energiedichte  $e_{\text{total}}$  unter Verwendung des angelegten äußeren Feldes aus Experiment 2.



# Anhang A

## Weitere Quelltexte

Ergänzend zu Kapitel 5 fügen wir hier die übrigen Codeabschnitte an, die zu einer erfolgreichen Simulation des dynamischen Verhaltens der Magnetisierung notwendig sind. Dabei sind die Listings A.1—A.4 als vorbereitende Codeteile zu sehen, die dazu dienen vorab für eine gewisse Geometrie Daten bezüglich des Volumensnetzes zu generieren. Eingelesen werden die simulationsspezifischen Daten in den Codeabschnitten A.5—A.8. In den Codeauszügen A.10—A.13 wird die Berechnung des magnetostatischen Potentials durchgeführt unter Verwendung des Ansatzes von FREDKIN/KOEHLER, siehe Kapitel 4 für weitere Details. Diese letztgenannten Segmente wurden in Zusammenarbeit mit M. PAGE (Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien) erarbeitet. Abschließend findet sich die Hauptdatei in Listing A.14, von der aus die gesamte Simulation gesteuert wird. Mit unter ist auch eine uniforme Zeitschrittweitensteuerung implementiert, siehe Listing A.15.

Listing A.1: Netzverfeinerung

---

```
1 function [coordinatesfine,elementsfine]...
2     = refineVolumeMesh(coordinates,elements)
3 %*****
4 % Uniform refinement of a given mesh fulfilling a certain angle
5 % condition. Please make sure that all elements are numbered in such
6 % a way that the first 3 nodes are the convex hull of a triangle which are
7 % run through in mathematical positive way if you look at the triangle
8 % from the fourth point of the tetrahedron.
9 % INPUT: coordinates: coordinates of nodes of volume mesh
10 %      elements: tetrahedron elements of volume mesh
11 % OUTPUT: coordinatesfine: coordinates of nodes of unif. refined vol. mesh
12 %      elementsfine: tetrahedron elements of uniform refined volume mesh
13 %*****
14
15 % check the correct number of input parameters
16 if ~(nargin == 2)
17     error('refineVolumeMesh: Wrong number of input arguments!');
18 end
19
20 % check the correct number of output parameters
21 if ~(nargout == 2)
22     error('refineVolumeMesh: Wrong number of output arguments!');
23 end
24
25 nC = size(coordinates,1); % number of nodes
26 nE = size(elements,1);   % number of elements
27
28 % produce edges in certain order resulting in edge2nodes
```

```

29 I = reshape(elements(:,[1,2,3,1,2,3]),6*nE,1);
30 J = reshape(elements(:,[2,3,1,4,4,4]),6*nE,1);
31 edge2nodes = [I,J];
32
33 % sort nodes of edges
34 sortededge2nodes = sort(edge2nodes,2);
35
36 % eliminate same edges
37 [uniqueedge2nodes,K,L] = unique(sortededge2nodes,'rows');
38
39 % enumerate all occuring edges
40 nU = size(uniqueedge2nodes,1);
41 number2edges = [1:nU];
42 edge2number = number2edges(L);
43
44 % provide element2edges
45 element2edges = reshape(edge2number,nE,6);
46
47 % generate new nodes
48 coordinatesfine = [coordinates;zeros(nU,3)];
49 coordinatesfine(nC+(1:nU),:) =...
50     (coordinates(uniqueedge2nodes(:,1),:))...
51     + coordinates(uniqueedge2nodes(:,2),:))*0.5;
52
53 % generate new elements
54 elementsfine = zeros(8*nE,4);
55 elementsfine = [elements(:,1),nC+element2edges(:,1),nC+element2edges(:,3),...
56               nC+element2edges(:,4);
57               nC+element2edges(:,1),elements(:,2),nC+element2edges(:,2),...
58               nC+element2edges(:,5);
59               nC+element2edges(:,3),nC+element2edges(:,2),elements(:,3),...
60               nC+element2edges(:,6);
61               nC+element2edges(:,4),nC+element2edges(:,5),...
62               nC+element2edges(:,6),elements(:,4);
63               nC+element2edges(:,1),nC+element2edges(:,3),...
64               nC+element2edges(:,4),nC+element2edges(:,5);
65               nC+element2edges(:,1),nC+element2edges(:,2),...
66               nC+element2edges(:,3),nC+element2edges(:,5);
67               nC+element2edges(:,3),nC+element2edges(:,5),...
68               nC+element2edges(:,2),nC+element2edges(:,6);
69               nC+element2edges(:,3),nC+element2edges(:,4),...
70               nC+element2edges(:,5),nC+element2edges(:,6)]];

```

Listing A.2: Anordnung der Knoten pro Element

```

1 function elementsnew = alignMesh(coordinates, elements)
2 %*****
3 % Realignment of mesh to ensure that each element is properly orientated,
4 % i.e. all determinants are positive.
5 % INPUT: coordinates: coordinates of nodes of volume mesh
6 %         elements: elements of volume mesh
7 % OUTPUT: elementsnew: elements of volume mesh containing reordering of
8 %         node numbers
9 %*****
10
11 nE = size(elements, 1);           % number of elements
12
13 for i = 1:nE
14     nodes = elements(i,:);        % numbers of nodes of i-th element
15     vert = coordinates(nodes,:); % coordinates of those nodes

```

```

16     d = size(vert,2);           % dimension
17     % compute 6 times the volume via determinant
18     areaTest = det([ones(1,d+1);vert]);
19     % areaTest should be positive – if not:
20     % swap numbering in current element such that determinant is positive
21     if (areaTest <= 0)
22         elements(i,:) = [nodes(1), nodes(3), nodes(2), nodes(4)];
23         disp('orientation changed');
24     end
25 end
26 elementsnew = elements;

```

---

### Listing A.3: Berechnung der Flächeninhalte der Randelemente

---

```

1 function area = getarea(coordinates, elements)
2 %*****
3 % Computation of area of triangle elements.
4 % INPUT: coordinates: coordinates of nodes of boundary mesh
5 %       elements: elements of boundary mesh
6 % OUTPUT: area of elements of boundary mesh (triangles)
7 %*****
8
9 nC = size(coordinates, 1); % number of nodes
10 nE = size(elements, 1);   % number of elements
11 area = zeros(nC,1);      % initialize data vector
12
13 % compute auxiliary quantities
14 c1 = coordinates(elements(:,1),:);
15 d21 = coordinates(elements(:,2),:) - c1;
16 d31 = coordinates(elements(:,3),:) - c1;
17 for i = 1:nE
18     % compute area for i-th element via vector-cross-product
19     area(i) = norm(cross(d21(i,:),d31(i,:)))/2;
20 end

```

---

### Listing A.4: Berechnung der Volumina der Elemente

---

```

1 function vol = getvol(coordinates, elements)
2 %*****
3 % Computation of volumes of tetrahedron elements.
4 % INPUT: coordinates: coordinates of nodes of volume mesh
5 %       elements: elements of volume mesh in terms of node numbers
6 % OUTPUT: vol: volumes corresponding to elements
7 %*****
8
9 nE = size(elements, 1);   % number of elements
10 vol = zeros(nE,1);      % initialize data vector
11
12 for i = 1:nE
13     nodes = elements(i,:); % numbers of nodes belonging to i-th element
14     % computation of volume of i-th element via determinant
15     MT = [1 1 1 1; coordinates(nodes,:)]';
16     vol(i) = 1/6*det(MT);
17 end

```

---

### Listing A.5: Einlesen der Geometriedaten

---

```

1 function [boundaryOperator, coordinates, elements, area, vol,...
2     boundarycoo, boundaryele2D, boundarynodes, full2boundary,...
3     coordinatesplot, scalgeo, scalvol]...
4     = readinGeometricData(geometry)
5 %*****
6 % Read in geometric input data. Set parameters in connection with
7 % geometric data.
8 % INPUT: geometry: type of geometry
9 % OUTPUT: boundaryOperator: 'double layer' potential operator K-1/2
10 %     coordinates: coordinates of volume mesh
11 %     elements: elements of volume mesh in terms of node numbers
12 %     area: area of surfaces of boundary mesh
13 %     vol: volumes of elements of volume mesh
14 %     boundarycoo: coordinates of boundary mesh
15 %     boundaryele2D: elements of boundary mesh
16 %     boundarynodes: boundary nodes relative to volume mesh
17 %     full2boundary: relation between volume node numbers and
18 %                   boundary node numbers
19 %     coordinatesplot: coordinates of volume mesh scaled by a factor
20 %                   to stabilize computation of stray-field
21 %     scalgeo: scaling factor to stabilize computation of stray-field
22 %     scalvol: volume of magnetic body scaled by scalgeo
23 %*****
24
25 % read in geometric data
26 boundaryOperator = dlmread(['K_', geometry, '.txt']);
27 coordinates = dlmread(['coordinates_', geometry, '.txt']);
28 elements = dlmread(['elementsSTRAY_', geometry, '.txt']);
29 area = dlmread(['area_', geometry, '.txt']);
30 vol = dlmread(['vol_', geometry, '.txt']);
31 boundarycoo = dlmread(['boundarycoo_', geometry, '.txt']);
32 boundaryele2D = dlmread(['boundaryele2D_', geometry, '.txt']);
33 boundarynodes = dlmread(['boundarynodes_', geometry, '.txt']);
34 full2boundary = dlmread(['full2boundary_', geometry, '.txt']);
35
36 % scaling factor for size of magnetic body
37 scalcoo = 20;
38
39 % in order to stabilize comp. of stray-field and to produce nicer pictures
40 coordinatesplot = coordinates;
41
42 % transform geometry (centered around (0,0,0)) such that cube has
43 % edge length of 2*scalcoo [nm] = 2*scalcoo*1e-9 [m]
44 coordinates = 1e-9*scalcoo.*coordinates;
45 scalgeo = 1e-27*scalcoo^3;
46 scalvol = 1e-27*scalcoo^3.*vol;

```

Listing A.6: Einlesen der spezifischen Daten des Experiments

```

1 function [Js, t_0, t_end, constexch, constani, easyaxis, turnstray, fstr...
2     theta, alpha] = readinExampleData(file)
3 %*****
4 % Read in data for numerical simulation.
5 % INPUT: file: file containing physical and simulation parameters
6 % OUTPUT: Js: saturation polarization Js = Ms*mu0 given in [T]
7 %     t_0: initial time in [ns]
8 %     t_end: final time in [ns]
9 %     constexch: exchange constant A in [J/m]
10 %     constani: anisotropy constant K in [J/m^3]
11 %     easyaxis: easy-axis (1,2,3) as one of the coordinate axes (x,y,z)

```

```

12 %      turnstray: turn stray-field on (1) or off (0)
13 %      fstr: strength of applied field in [A/m]
14 %      theta: implicitiy parameter with 1/2 < theta <= 1
15 %      alpha: damping parameter (material dependent) 0 < alpha <= 1
16 %*****
17
18 % set standard value for initial time
19 t_0 = 0;
20
21 % read in filename and check number of input arguments
22 inp = dlmread(file, '', 13, 0);
23 if length(inp) ~= 9
24     error('ErrorMsg:Inp_Args', 'Wrong number of input arguments.');
```

---

```

25 end
26
27 % give information
28 disp(['starting simulation with parameter file: ', file]);
29 disp(' ');
30
31 % read in from input file
32 Js = inp(1);
33 disp(['saturation polarization Js: ', num2str(Js)]);
34 disp(' ');
35 t_end = inp(2);
36 disp(['final time in [ns]: ', num2str(t_end)]);
37 disp(' ');
38 constexch = inp(3);
39 disp(['exchange constant A in [J/m]: ', num2str(constexch)]);
40 disp(' ');
41 constani = inp(4);
42 disp(['constant for uniaxial anisotropy K in [J/m^3]: ', num2str(constani)]);
43 disp(' ');
44 easyaxis = inp(5);
45 disp(['direction of easy-axis (1, 2, 3 <=> x, y, z): ', num2str(easyaxis)]);
46 disp(' ');
47 turnstray = inp(6);
48 disp(['turn stray-field on or off (should be 0 or 1): ', num2str(turnstray)]);
49 disp(' ');
50 fstr = inp(7);
51 disp(['strength of the applied field in [A/m]: ', num2str(fstr)]);
52 disp(' ');
53 theta = inp(8);
54 disp(['implicitiy paramter theta: ', num2str(theta)]);
55 disp(' ');
56 alpha = inp(9);
57 disp(['damping parameter alpha: ', num2str(alpha)]);
58 disp(' ');
```

---

Listing A.7: Setzen der Easy-Achse

---

```

1 function [e, z1, z2] = seteasyaxis(easyaxis)
2 %*****
3 % Under consideration of a uniaxial material, set easy-axis due to
4 % input parameter. We restrict ourselves to an easy-axis which
5 % is parallel to the x-axis, y-axis, or the z-axis.
6 % INPUT: easyaxis: easy-axis (1,2,3) as one of the coordinate axes (x,y,z)
7 % OUTPUT: e, z1, z2: basis of R^3
8 %*****
9
10 % characterization of easy-axis e and additional vectors z1, z2
```

```

11 if easyaxis == 1
12     z1 = [0 1 0]';
13     z2 = [0 0 1]';
14     e = [1 0 0]';
15 elseif easyaxis == 2
16     z1 = [1 0 0]';
17     z2 = [0 0 1]';
18     e = [0 1 0]';
19 elseif easyaxis == 3
20     z1 = [1 0 0]';
21     z2 = [0 1 0]';
22     e = [0 0 1]';
23 else
24     error('ErrorMsg: Check_Easy_Axis',...
25         'easy axis for uniaxial anisotropy has to be 1, 2, or 3.');
```

---

Listing A.8: Setzen der initialen Magnetisierung

```

1 function [m] = initMagnetization(nC, coordinates)
2 %*****
3 % Set initial magnetization under consideration of the non-covex
4 % constraint |m| = 1. Here, some initial states due to NIST example
5 % "mumag #3" are given.
6 % INPUT: nC: number of nodes
7 %         coordinates: coordinates of volume mesh
8 % OUTPUT: initial magnetization fulfilling |m| = 1
9 %*****
10
11 % random initial magnetization
12 m = rand(nC, 3);
13
14 % homogeneous initial magnetization in z-direction
15 m(:,1) = 0;
16 m(:,2) = 0;
17 m(:,3) = 1;
18
19 % inhomogeneous initial magnetization (in pos./neg. z-direction)
20 %foo = find(coordinates(:,1) >= 0);
21 %m(foo,3) = -1;
22
23 % ensure geometric side constraint |m|_{R^3} = 1
24 for i = 1:nC
25     m(i,:) = m(i,:)/norm(m(i,:));
26 end
```

---

Listing A.9: Berechnung der Steifigkeitsmatrix (für das Streufeld)

```

1 function [A] = calcstima1D(coordinates, elements)
2 %*****
3 % Computation of stiffness-matrix for lowest order basis functions mapping
4 % from R^3 to R in linear complexity.
5 % INPUT: coordinates: coordinates of nodes of volume mesh
6 %         elements: elements of volume mesh
7 % OUTPUT: A: stiffness-matrix
8 %*****
9
10 nC = size(coordinates,1); % number of nodes
11 nE = size(elements,1); % number of elements
```

```

12 I = zeros(16*nE,1);           % initialize data vectors
13 J = zeros(16*nE,1);
14 A = zeros(16*nE,1);
15
16 % assembly of stiffness-matrix in linear complexity
17 for i = 1:nE
18     nodes = elements(i,:); % numbers of nodes of i-th element
19     % compute local stiffness-matrix
20     B = [1 1 1 1; coordinates(nodes,:)'];
21     grad = B \ [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];
22     % compute coordinates of non-zero entries
23     idx = 16*(i-1)+1:16*i;
24     tmp = [1;1;1;1]*nodes;
25     I(idx) = reshape(tmp',16,1);
26     J(idx) = reshape(tmp,16,1);
27     % compute integral and set values of non-zero entries
28     A(idx) = det(B)/6*reshape(grad*grad',16,1);
29 end
30 A = sparse(I,J,A,nC,nC);

```

---

Listing A.10: Clement-Interpolation 2D

```

1 function gh = interpCL(gh_P0, coordinates, elements)
2 %*****
3 % Computation of Clement-interpolant of a given function.
4 % INPUT: gh_P0: funtion to be Clement-interpolated
5 %         coordinates: coordinates of nodes of boundary mesh
6 %         elements: elements of boundary mesh
7 % OUTPUT: gh: interpolated function ready for use in calcFK3D
8 %*****
9
10 nE = size(elements, 1); % number of boundary elements
11 nC = size(coordinates, 1); % number of boundary nodes
12 gh = zeros(nC,1);
13
14 % compute area for all elements
15 c1 = coordinates(elements(:,1),:);
16 d21 = coordinates(elements(:,2),:) - c1;
17 d31 = coordinates(elements(:,3),:) - c1;
18 for i = 1:nE
19     % compute area of triangle via vector-cross-product
20     area(i) = norm(cross(d21(i,:),d31(i,:)))/2;
21 end
22 area = area';
23
24 for i = 1:nC
25     % find elements of i-th patch; row index corresponds to element number
26     [ind_i, ind_j] = find(elements == i);
27     areaPatch = sum(area(ind_i)); % area of i-th node patch
28     integrals = zeros(length(ind_i),1);
29     % compute value at i-th node via Clement-interpolation formula
30     integrals(:,1) = area(ind_i).*gh_P0(ind_i);
31     gh(i) = 1/areaPatch*sum(integrals);
32 end

```

---

Listing A.11: Aufbau des Doppelschichtpotentials  $K$ 

```

1 function K = getK
2 %*****

```

```

3 % Computation of double layer potential K (M. Mayr).
4 % OUTPUT: K: 'double layer' potential operator K-1/2
5 %*****
6
7 % read in data
8 coordinates = dlmread('boundarycoo.txt');
9 elements = dlmread('boundaryele2D.txt');
10 area = dlmread('area.txt');
11
12 nC = size(coordinates, 1); % number of nodes
13
14 % build double layer potential under usage of HLib
15 K = buildK(coordinates, elements, area, 0.5);
16
17 % assembling of potential operator K-1/2
18 for i = 1:nC
19     K(:,i) = -K(:,i)./area;
20 end

```

---

Listing A.12: Aufbereitung der Daten für calcFK3D

```

1 function [grad,c] = prepareFK3D(coordinates, elements)
2 %*****
3 % Preliminary computations for later computation of stray-field under
4 % usage of Fredkin-Koehler approach.
5 % INPUT: coordinates: coordinates of nodes of volume mesh
6 %         elements: elements of volume mesh
7 % OUTPUT: grad: gradient matrix
8 %         c: vector to extend linear system of equations to solve
9 %         neumann problem arising in fredkin-koehler ansatz
10 %*****
11
12 nE = size(elements, 1); % number of elements
13 nC = size(coordinates,1); % number of nodes
14
15 % compute |T|*grad(V_j), where V_j is hat function on T by matrix with
16 % blocks containing values per element and its nodes, where
17 % first column is just for listing the nodes corresponding to element
18 grad = zeros(nE*4,4);
19 for i=1:nE
20     nodes = elements(i,:); % node numbers corresponding to i-th element
21     rows = (4*(i-1)+1):(4*i);
22     grad(rows,1) = nodes;
23     grad(rows,2:4) = gradMatrix(coordinates(nodes,:));
24 end
25
26 % compute scalc to fix constants in neumann problem
27 c = zeros(nC,1);
28 for i = 1:nE
29     nodes = elements(i,:); % node numbers corresponding to i-th element
30     MT = [1 1 1 1; (coordinates(nodes,:))'];
31     areaT = det(MT)/6; % compute area via determinant
32     c(nodes) = c(nodes) + areaT/4; % V_k has value 1/4 at mid-point
33 end
34
35
36 % compute local gradient matrix
37 function B = gradMatrix(vert)
38 MT = [1 1 1 1; vert'];
39 B = MT \ [0 0 0; 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];

```

```
40 B = 1/6*det(MT)*B; % multiply by |T| via determinant
```

---

Listing A.13: Berechnung der magnetostatischen Potentials nach FREDKIN/KOEHLER

---

```
1 function [GRADu] = calcFK3D(m, VolumeData, BoundaryData, Ald)
2 %*****
3 % Compute demagnetization field in 3D via the approach of Fredkin/Koehler.
4 % To discretize boundary data standard Clement-Operator is used.
5 % INPUT: m: magnetization
6 %         VolumeData: structure to collect geometric data of volume
7 %         BoundaryData: struct. to collect geom. data of boundary of vol.
8 %         Ald: nCxnC-stiffness-matrix
9 % OUTPUT: GRADu: stray-field (P^0-function)
10 %*****
11
12 coordinates = BoundaryData.coordinatesplot; % unscaled coordinates... [m]
13 nC = size(coordinates,1); % number of nodes
14
15 %*****
16 % STEP 1: compute ( $\nabla u_l$ ,  $\nabla v_h$ ) = (M,  $\nabla v_h$ )
17 %         for all  $v_h$  in  $S^1_{l,*}(T_h)$ 
18 %*****
19 % compute m(sT) for one-point quadrature
20 % if m is affine then m at barycenter is given by
21 MsT = (m(VolumeData.elements(:,1),:) + m(VolumeData.elements(:,2),:))...
22       + m(VolumeData.elements(:,3),:) + m(VolumeData.elements(:,4),:))/4;
23
24 % assembe right-hand side via  $|T|*\text{grad}(V_j)*M(sT)$ 
25 b = zeros(nC, 1);
26 MsTmat = reshape(MsT, VolumeData.nE, 3);
27 for i = 1:VolumeData.nE
28     nodes = VolumeData.elements(i,:);
29     gMat = (BoundaryData.grad(4*(i-1)+1:4*i,2:4))';
30     b(nodes) = b(nodes) + (MsTmat(i,:)*gMat)';
31 end
32
33 % compute P1-FEM approx. of Neumann problem by solving extended system
34 EA = [Ald, BoundaryData.scalcc; BoundaryData.scalcc' zeros(1)];
35 Eb = [b; 0];
36 Ex1 = EA \ Eb;
37
38 x1 = Ex1(1:nC);
39 lambda = Ex1(nC+1:end);
40
41 %*****
42 % STEP 2: compute Dirichlet data  $g_h = J_h(K - 1/2)u_l|_{\Gamma}$ 
43 %*****
44 x1 = reshape(x1, nC, 1);
45 ulh = x1(BoundaryData.boundarynodes);
46
47 % get 'double layer' potential operator  $K-1/2$ 
48 gh_P0 = BoundaryData.boundaryOperator*ulh;
49
50 % get P1 approximation by Clement-interpolation
51 g_h = interpCL(gh_P0, BoundaryData.boundarycoo, BoundaryData.boundaryele2D);
52
53 %*****
54 % STEP 3: compute solution of ( $\nabla u_{2h}$ ,  $\nabla v_h$ ) = 0 with
55 %          $u_{2h}|_{\Gamma} = g_h$ 
56 %*****
```

```

57 % prescribe values at boundary
58 x2 = zeros(nC,1);
59 x2(BoundaryData.boundarynodes) = g_h;
60
61 % assemble right-hand side
62 b = -Ald*x2;
63
64 % compute P1-FEM solution
65 freenodes = setdiff(1:nC, BoundaryData.boundarynodes);
66 x2(freenodes) = Ald(freenodes, freenodes)\b(freenodes);
67
68 %*****
69 % STEP 4: obtain discrete solution and demagnetization field
70 %*****
71 x = x1+x2;
72
73 % compute demagnetization field
74 % PhM = \grad x1 + \grad x2 = \grad x on elements
75 GRADu = zeros(VolumeData.nE,3);
76 for i = 1:VolumeData.nE
77     nodes = VolumeData.elements(i,:);
78     gradient_tmp = zeros(3,1);
79     vec_tmp = zeros(3,1);
80     mat = BoundaryData.grad((4*(i-1)+1):(4*i),:);
81     for j = nodes
82         ind = find(mat(:,1)== j);
83         vec_tmp(:,1) = mat(ind,2:4)';
84         gradient_tmp = gradient_tmp + x(j)*vec_tmp/VolumeData.vol(i);
85     end
86     GRADu(i,:) = gradient_tmp';
87 end
88 GRADu = reshape(GRADu, 3*VolumeData.nE, 1);

```

Listing A.14: Simulation basierend auf LLG

```

1 function val = simulation(geometry,example)
2 %*****
3 % Implementation of time-splitting scheme with uniform time-step size.
4 % INPUT: geometry: type of geometry of magnetic body
5 %     example: input file including material parameters
6 % OUTPUT: val: vector including values of total energy at each time-step
7 %*****
8
9 %*****read in geometry data of magnetic body*****
10 % read in data and set geometric parameters
11 [boundaryOperator, coordinates, elements, area, vol,...
12     boundarycoo, boundaryele2D, boundarynodes, full2boundary,...
13     coordinatesplot, scalgeo, scalvol]...
14     = readinGeometricData(geometry);
15 % creat according structures
16 [VolumeData, BoundaryData] = createGeometricData(boundaryOperator,...
17     coordinates, elements, area, vol, boundarycoo, boundaryele2D,...
18     boundarynodes, full2boundary, coordinatesplot, scalvol, scalgeo);
19 %*****
20
21 %*****initial magnetization*****
22 % set initial magnetization
23 m = initMagnetization(VolumeData.nC, VolumeData.coordinates);
24 %*****
25

```

```

26 %*****parameter-setting PHYSICAL*****
27 % read in physical parameters
28 [Js, t_0, t_end, constexch, constani, easyaxis, turnstray, fstr...
29     theta, alpha] = readinExampleData(example);
30 % create according structure
31 PhysicalData = createPhysicalData(Js, constexch, constani, easyaxis,...
32     turnstray, fstr, alpha);
33 %*****
34
35 %*****parameter-setting ALGORITHMIC*****
36 % read in algorithmic parameters
37 [SimulationData] = createSimulationData(t_0, t_end, theta,...
38     PhysicalData.gamma, PhysicalData.Ms);
39 %*****
40
41 %*****computation of system-matrices and others*****
42 % compute mass-matrix for affine ansatz functions: R^3 to R^3
43 MASSMA = calcmassma(coordinates, elements);
44 % compute stiffness-matrix for affine ansatz functions: R^3 to R^3
45 STIMA = calcstima(coordinates, elements);
46 % compute mass-matrix with nodale basis functions and element basis func.
47 MnEnC = calcMnEnC(VolumeData.vol, VolumeData.nC, VolumeData.nE, elements);
48 % compute stiffness-matrix for affine ansatz functions: R^3 to R
49 Ald = calcstimalD(coordinatesplot, elements);
50
51 % computation of constant applied field
52 ext = MASSMA*f(VolumeData.nC,PhysicalData.fstrength);
53
54 % create structure to collect energy contributions
55 [EnergyData] = createEnergyData;
56 %*****
57
58 %*****SIMULATION*****
59 % perform simulation with uniform time-stepping
60 [EnergyData, m] = uniformTimeStepping(m, VolumeData, BoundaryData, ...
61     SimulationData, PhysicalData, ext, Ald, MASSMA, STIMA, MnEnC,...
62     EnergyData);
63
64 % return vector of Gibbs Free energy for all time-steps
65 val = EnergyData.energyexch + EnergyData.energyani...
66     + EnergyData.energystray + EnergyData.energyext;
67 %*****

```

Listing A.15: Uniforme Zeitschrittwertensteuerung

---

```

1 function [EnergyData,m] = uniformTimeStepping(m, VolumeData,...
2     BoundaryData, SimulationData, PhysicalData, ext, Ald, MASSMA,...
3     STIMA, MnEnC, EnergyData)
4 %*****
5 % Solve LLG with uniform time-stepping.
6 % INPUT: m: initial magnetization
7 %     VolumeData: struct. to summarize data corresponding to vol. mesh
8 %     BoundaryData: struct. to summarize data corr. to boundary mesh
9 %     SimulationData: struct. involving simulation parameters
10 %     PhysicalData: struct. involving physical parameters
11 %     ext: constant applied field
12 %     Ald, MASSMA, STIMA, MnEnC: system-matrices
13 %     EnergyData: struct. incl. vectors to save energy contributions
14 % OUTPUT: EnergyData: struct. incl. energy contributions at each time-step
15 %     m: magnetization in final state

```

```

16 %*****
17
18 % solve LLG with uniform time-stepping
19 for i=0:SimulationData.steps-1
20     % assemble data (and compute energy) and perform one step of
21     % time-splitting scheme
22     [m,v,EnergyData] = TimeSplitting(i, m, VolumeData,...
23     BoundaryData, SimulationData, PhysicalData, ext, Ald, MASSMA,...
24     STIMA, MnEnC, EnergyData);
25 end
26
27 % computation of energy for magnetization in final state
28 EnergyData.energyexch(SimulationData.steps+1)...
29     = computeExchEnergy(m, PhysicalData.constexch, STIMA);
30 EnergyData.energyani(SimulationData.steps+1)...
31     = computeAniEnergy(m, PhysicalData.z1, PhysicalData.z2,...
32     PhysicalData.constani, MASSMA(1:VolumeData.nC,1:VolumeData.nC));
33 if PhysicalData.turnstray == 1
34     hlpstray = calcFK3D(m, VolumeData, BoundaryData, Ald);
35     EnergyData.energystray(SimulationData.steps+1)...
36         = computeStrayEnergy(VolumeData.elements, m, hlpstray,...
37         PhysicalData.scalstray, BoundaryData.scalvol);
38 else
39     EnergyData.energystray(SimulationData.steps+1) = 0;
40 end
41 EnergyData.energyext(SimulationData.steps+1) =...
42     computeExtEnergy(m, PhysicalData.scalenergyext, ext);

```

---

# Literaturverzeichnis

- [1] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York a.o., 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [2] A. Aharoni. *Introduction to the Theory of Ferromagnetism*. Oxford University Press, 2001.
- [3] F. Alouges. A new algorithm for computing liquid crystal stable configurations: the harmonic mapping case. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(5):1708–1726, 1997.
- [4] F. Alouges. Computation of the demagnetizing potential in micromagnetics using a coupled finite and infinite elements method. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 6:629–647 (electronic), 2001.
- [5] F. Alouges. A new finite element scheme for Landau-Lifschitz equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 1(2):187–196, 2008.
- [6] F. Alouges and P. Jaisson. Convergence of a finite element discretization for the Landau-Lifshitz equations in micromagnetism. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 16(2):299–316, 2006.
- [7] F. Alouges, E. Kritsikis, and J.-C. Toussaint. A convergent finite element approximation for landau-lifschitz-gilbert equation. *Physica B*, 407(9):1345–1349, 2011.
- [8] F. Alouges and A. Soyeur. On global weak solutions for Landau-Lifshitz equations: existence and nonuniqueness. *Nonlinear Anal.*, 18(11):1071–1084, 1992.
- [9] S. Bartels. Stability and convergence of finite-element approximation schemes for harmonic maps. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(1):220–238 (electronic), 2005.
- [10] S. Bartels. Constraint preserving, inexact solution of implicit discretizations of Landau-Lifshitz-Gilbert equations and consequences for convergence. *PAMM Proc. Appl. Math. Mech.*, 6:19–22, 2006.
- [11] S. Bartels, J. Ko, and A. Prohl. Numerical analysis of an explicit approximation scheme for the Landau-Lifshitz-Gilbert equation. *Math. Comp.*, 77(262):773–788, 2008.
- [12] S. Bartels and A. Prohl. Convergence of an implicit finite element method for the Landau-Lifshitz-Gilbert equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(4):1405–1419 (electronic), 2006.
- [13] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer, Berlin, 2007. Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie.
- [14] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Texts in Applied Mathematics. Springer, New York, 2008.
- [15] G. Carbou and P. Fabrie. Regular solutions for Landau-Lifschitz equation in a bounded domain. *Differential Integral Equations*, 14(2):213–229, 2001.

- [16] C. Carstensen and E. Stephan. Adaptive coupling of boundary elements and finite elements. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 29(7):779–817, 1995.
- [17] I. Cimrák. Error estimates for a semi-implicit numerical scheme solving the Landau-Lifshitz equation with an exchange field. *IMA J. Numer. Anal.*, 25(3):611–634, 2005.
- [18] I. Cimrák. A survey on the numerics and computations for the Landau-Lifshitz equation of micromagnetism. *Arch. Comput. Methods Eng.*, 15(3):277–309, 2008.
- [19] M. Costabel. A symmetric method for the coupling of finite elements and boundary elements. In *The mathematics of finite elements and applications, VI (Uxbridge, 1987)*, pages 281–288. Academic Press, London, 1988.
- [20] M. d’Aquino, C. Serpico, and G. Miano. Geometrical integration of Landau-Lifshitz-Gilbert equation based on the mid-point rule. *J. Comput. Phys.*, 209(2):730–753, 2005.
- [21] W. E and X.-P. Wang. Numerical methods for the Landau-Lifshitz equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(5):1647–1665 (electronic), 2000.
- [22] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, Berlin, 2005.
- [23] D. Fredkin and T. Koehler. Hybrid method for computing demagnetizing fields. *IEEE Trans. Magn.*, 26:415–417, 1990.
- [24] C. García-Cervera and A. Roma. Adaptive mesh refinement for micromagnetics simulations. *IEEE Trans. Magn.*, 42:1648–1654, 2006.
- [25] M. Getzlaff. *Fundamentals of Magnetism*. Springer, Berlin, 2008.
- [26] T. Gilbert. A lagrangian formulation of the gyromagnetic equation of the magnetic field. *Physical Review*, 100:1243–1255, 1955.
- [27] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*. Springer-Verlag, 1986.
- [28] W. Hackbusch. Direct integration of the Newton potential over cubes. *Computing*, 68(3):193–216, 2002.
- [29] E. Hairer, S. P. Nørsett, and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations 1: Nonstiff Problems*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [30] C. Johnson and J.-C. Nédélec. On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Math. Comp.*, 35(152):1063–1079, 1980.
- [31] J. Kemetmüller. *Vektorisierte Implementierung von P1-FEM in 3D*. Bachelor thesis, Institute for Analysis and Scientific Computing, Vienna University of Technology, Wien, Austria, 2012.
- [32] H. Krohnmüller and M. Fähnle. *Micromagnetism and the Microstructure of Ferromagnetic Solids*. Universitext. Cambridge University Press, New York, 2003. Translated and revised from the 3rd (2005) German edition by Martin Stynes.
- [33] M. Kružík and A. Prohl. Recent developments in the modeling, analysis, and numerics of ferromagnetism. *SIAM Rev.*, 48(3):439–483, 2006.
- [34] L. Landau and E. Lifshitz. On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. *Phys. Z. Sowjetunion*, 8:153–169, 1935.

- [35] M. Maischak. The analytical computation of the Galerkin elements for the Laplace, Lamé and Helmholtz equation in 3d bem. *Institute for Applied Mathematics, University of Hannover*, Technical report ifam 50, 2000.
- [36] M. Mayr. *work in progress*. Diploma thesis, Institute for Analysis and Scientific Computing, Vienna University of Technology, Wien, Austria, 2012.
- [37] W. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [38] P. B. Monk and O. Vacus. Accurate discretization of a non-linear micromagnetic problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190(40-41):5243–5269, 2001.
- [39] S. A. Nazarov and M. Specovius-Neugebauer. Approximation of exterior problems. Optimal conditions for the Laplacian. *Analysis*, 16(4):305–324, 1996.
- [40] J. Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris; Academia, Éditeurs, Prague, 1967.
- [41] L. E. Payne and H. F. Weinberger. An optimal Poincaré inequality for convex domains. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 5:286–292 (1960), 1960.
- [42] N. Popović and D. Praetorius. Applications of  $\mathcal{H}$ -matrix techniques in micromagnetics. *Computing*, 74(3):177–204, 2005.
- [43] N. Popović and D. Praetorius.  $\mathcal{H}$ -matrix techniques for stray-field computations in computational micromagnetics. In *Large-scale scientific computing*, volume 3743 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 102–110. Springer, Berlin, 2006.
- [44] D. Praetorius. *Analysis, Numerik und Simulation eines relaxierten Modellproblems zum Mikromagnetismus (in German)*. Dissertation, Institute for Analysis and Scientific Computing, Vienna University of Technology, Wien, Austria, 2003.
- [45] D. Praetorius. Analysis of the operator  $\Delta^{-1}\text{div}$  arising in magnetic models. *Z. Anal. Anwendungen*, 23(3):589–605, 2004.
- [46] A. Prohl. *Computational micromagnetism*. Advances in Numerical Mathematics. B. G. Teubner, Stuttgart, 2001.
- [47] V. Rüdiger. *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*. Advances in Numerical Mathematics. Wiley-Teubner, Chichester a.o., 1996.
- [48] S. A. Sauter and C. Schwab. *Boundary element methods*, volume 39 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2011. Translated and expanded from the 2004 German original.
- [49] F.-J. Sayas. The validity of Johnson-Nédélec’s BEM-FEM coupling on polygonal interfaces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(5):3451–3463, 2009.
- [50] L. R. Scott and S. Zhang. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Math. Comp.*, 54(190):483–493, 1990.
- [51] O. Steinbach. *Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems*. Springer, ¥w York, 2008. Finite and boundary elements, Translated from the 2003 German original.

- [52] H. Szambolics. *Nouvelles formulations éléments finis pour le micromagnétisme et Déplacement de parois par courant polarisé en spin*. Dissertation, Institute Polytechnique de Grenoble, 2008.
- [53] H. Szambolics, J.-C. Toussaint, L. D. Buda-Prejbeanu, F. Alouges, E. Krittikis, and O. Fruchart. Innovative weak formulation for the Landau-Lifshitz-Gilbert equations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(11), 2008.
- [54] R. Vanselow. About Delaunay triangulations and discrete maximum principles for the linear conforming FEM applied to the Poisson equation. *Appl. Math.*, 46(1):13–28, 2001.
- [55] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Wiley-Teubner, Chichester a.o., 1996.
- [56] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, Berlin a.o., 2007.

# LEBENS LAUF

Institut für Analysis und Scientific Computing    Tel.: ++43 1 58801-10164  
Technische Universität Wien    Fax: ++43 1 58801-10196  
Wiedner Hauptstraße 8-10    eMail: e0325144@student.tuwien.ac.at  
1040 Wien    <http://www.asc.tuwien.ac.at/~petra/>

---

## PERSÖNLICHE DATEN

Name    Petra Goldenits  
Geburts tag    3. Dezember 1984  
Geburtsort    Kittsee  
Staatsbürgerschaft    österreichisch  
Familienstand    ledig

---

## AUSBILDUNG

seit 03/2009    **Technische Universität Wien**  
Doktoratsstudium  
01/2012 – 06/2012    Assoziiertes Mitglied des WWTF Forschungsprojekts „Micromagnetic Simulation and Computational Design of Future Devices“ gefördert durch den Wiener-, Wissenschafts-, Forschungs- und Technologiefonds (MA09-029)  
08/2009 – 06/2012    Assoziiertes Mitglied des FWF Forschungsprojekts „Adaptive Boundary Element Method“ gefördert durch den Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung (P21732)  
03/2009 – 03/2012    Mitglied der „Graduate School PDE-Tech“ der TU Wien  
10/2003 – 01/2009    **Technische Universität Wien**  
Studium der Technischen Mathematik  
Abschluss: Dipl.-Ing. (mit Auszeichnung)  
Titel der Diplomarbeit: „Analyse adaptiver Netzverfeinerungsstrategien für eine hypersinguläre Integralgleichung in 2D“  
09/1995– 06/2003    **Gymnasium BG/BRG Neusiedl/See**  
Neusprachlicher Zweig  
Abschluss: Matura (mit Auszeichnung)

---

## STIPENDIEN & PROGRAMME

04/2010    **Verbund AG**  
Verbund-Frauenstipendium für PhD-Studentinnen  
11/2009    **Society for Industrial and Applied Mathematics**  
SIAM Student Travel Award  
10/2009 – 06/2010    **TUtheTOP**  
Teilnahme am High Potential Programm der TU Wien  
03/2008    **PARISTECH Ecole Nationale Supérieure des Telecommunications**  
Teilnahme am ATHENS-Programm, Paris

# PUBLIKATIONEN

C. Erath, S. Funken, P. Goldenits, D. Praetorius:

*Simple error estimators for the Galerkin BEM for some hypersingular integral equation in 2D*,  
accepted for publication in Appl. Anal. (2012).

M. Aurada, S. Ferraz-Leite, P. Goldenits, M. Karkulik, M. Mayr, D. Praetorius:

*Convergence of adaptive BEM for some mixed boundary value problem*,  
Appl. Numer. Math., 62 (2012), 226-245.

P. Goldenits, D. Praetorius, D. Süß:

*Convergent Geometric Integrator for the Landau-Lifshitz-Gilbert Equation in Micromagnetics*,  
GAMM Jahrestagung 2011, Graz, 18.04.2011-21.04.2011, PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, PAMM, 11 (2011), ISSN: 1617-7061, S. 775-776.

M. Aurada, M. Ebner, M. Feischl, S. Ferraz-Leite, P. Goldenits, M. Karkulik, M. Mayr, D. Praetorius:

*HILBERT-A MATLAB Implementation of Adaptive 2D-BEM*,  
ASC Report 24/2011, Institute of Analysis and Scientific Computing, Vienna University of Technology, Wien, 2011, ISBN 978-3-902627-04-9.

T. Führer (Supervisor: P. Goldenits, D. Praetorius):

*Numerische Berechnung des magnetischen Streufelds*,  
Diplomarbeit, Institut für Analysis und Scientific Computing, 2010.

M. Aurada, P. Goldenits, D. Praetorius:

*Convergence of data perturbed adaptive boundary element methods*,  
ASC Report 40/2009, Institute for Analysis and Scientific Computing, Vienna University of Technology, Wien, 2009, ISBN 978-3-902627-02-5.

P. Goldenits (Supervisor: D. Praetorius):

*Analyse adaptiver Netzverfeinerungsstrategien für eine hypersinguläre Integralgleichung in 2D*,  
Diplomarbeit, Institut für Analysis und Scientific Computing, 2009.