TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Cowen-Douglas-Operatoren

Ausgeführt am Institut für

Analysis und Scientific Computing

der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Kaltenbäck

durch

Wolfgang Carl, B.Sc.
Matr. Nr.: 0625228
Ybbsstraße 20/39
A-1020 Wien

Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Operatortheorie befasst sich vorwiegend mit der Untersuchung beschränkter linearer Abbildungen. Eines ihrer grundlegenden Ziele ist, zu bestimmen, wann zwei beschränkte lineare Operatoren T und $\tilde{T}$ auf einem Hilbertraum H unitär äquivalent sind. D.h. unter welchen Bedingungen ein unitärer Operator U auf H existiert, sodass $\tilde{T} = U^*TU$.

Für einige Klassen von Operatoren spielt hierbei die Spektraltheorie eine wesentliche Rolle. Im letzten Jahrhundert hat man auf diesem Gebiet große Fortschritte erzielt. Es gibt jedoch etliche Operatoren, auf die man diese Theorie nicht anwenden kann.

Gegen Ende der 1970er Jahre begannen die beiden Mathematiker M. J. Cowen und R. G. Douglas mit dem Studium einer Klasse von Operatoren, deren Punktspektrum eine offene Teilmenge der komplexen Zahlenebene umfasst. Für einen separablen Hilbertraum H, ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ definierten sie die Menge $\mathcal{B}_k(\Omega)$ aller beschränkten linearen Operatoren T auf H mit folgenden Eigenschaften (siehe [1], Definition 1.2):

(CD1) $\Omega \subset \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \text{ ist nicht invertierbar}\}$.

(CD2) Für alle $\lambda \in \Omega$ ist $\operatorname{ran}(T - \lambda I) = H$.

(CD3) Für alle $\lambda \in \Omega$ ist $\dim \ker(T - \lambda I) = k$.

(CD4) $\operatorname{cls} \bigcup \{\ker(T - \lambda I) : \lambda \in \Omega\} = H$.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dieser Klasse von Operatoren, welche heutzutage als Cowen-Douglas-Operatoren bekannt sind. Wir werden dabei einige äquivalente Bedingungen herausarbeiten, unter denen zwei Operatoren T und $\tilde{T}$ aus $\mathcal{B}_k(\Omega)$ unitär äquivalent sind.

Im ersten Kapitel befassen wir uns ausführlich mit Banachraum-wertigen analytischen Funktionen in mehreren Variablen, da diese in der gesamten Arbeit sehr häufig auftreten. Wir zeigen unter anderem die wichtige Tatsache, dass jede analytische Funktionen lokal in eine Mehrfachpotenzreihe entwickelt werden kann. Als Grundlage dienen uns hierfür die Skripten [7] und [8] zu Vorlesungen von Michael Kaltenbäck und das Buch [9] von Steven G. Krantz.

In Kapitel 2 betrachten wir Fredholm-Operatoren. Hierbei orientieren wir uns an dem Buch [4] von Harro Heuser. Direkt aus der Definition der Cowen-Douglas-Operatoren geht hervor, dass der Operator $(T - \lambda I)$ für alle $T \in \mathcal{B}_k(\Omega)$ und alle $\lambda \in \Omega$ ein Fredholm-Operator mit konstantem Index k ist. Mit $I : H \to H$ bezeichnen wir dabei die Identität auf H. Ausgehend von dieser Eigenschaft zeigen wir, dass für jeden Operator T aus $\mathcal{B}_k(\Omega)$ die Abbildung

$$t : \begin{cases} \Omega & \to & Gr(k, H) \\ \lambda & \mapsto & \ker(T - \lambda I) \end{cases}$$

analytisch ist. D.h. zu jedem Punkt $w \in \Omega$ gibt es eine offene Umgebung $\Delta_w \subseteq \Omega$ und analytische Funktionen $\gamma_j : \Delta_w \to H, j = 1, \ldots, k$, sodass $\ker(T - \lambda I) = \operatorname{span}\{\gamma_1(\lambda), \ldots, \gamma_k(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \Delta_w$. Dabei bezeichnen wir mit $Gr(k, H)$ die Menge aller k-dimensionalen Unterräume des Hilbertraumes H. Diese Beobachtung bildet in den Artikeln [1] und [2] den Grundstein aller weiteren Untersuchungen.

Im dritten Kapitel führen wir Mannigfaltigkeiten und Vektorbündel ein. Bei den Definitionen und grundlegenden Aussagen halten wir uns an das Buch [10] von Raymond O. Wells und an das Skriptum [5] von Michael Kaltenbäck. In Abschnitt 3.2 zeigen wir, dass für eine analytische Funktion $f : \Omega \to Gr(k, H)$ die Menge

$$E_f := \big\{(\lambda, x) \in \Omega \times H : x \in f(\lambda)\big\}$$

ein Hermite'sches Vektorbündel vom Rang k über Ω darstellt. Im darauffolgenden Abschnitt 3.3 beweisen wir unter Anleitung von [1] den Stabilitätssatz. Dieser besagt, dass zwei analytische Funktionen $f, \tilde{f} : \Omega \to Gr(k, H)$ unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$\operatorname{cls}\bigcup\big\{f(\lambda) : \lambda \in \Omega\big\} = \operatorname{cls}\bigcup\big\{\tilde{f}(\lambda) : \lambda \in \Omega\big\} = H$$

genau dann kongruent sind, wenn die zugehörigen Hermite'schen Vektorbündel E_f und $E_{\tilde{f}}$ äquivalent sind. Dabei nennt man die analytischen Abbildungen f und $\tilde{f}$ kongruent, falls es einen unitären Operator U auf H gibt, sodass $\tilde{f}(\lambda) = Uf(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Omega$.

In Kapitel 4 tragen wir die Resultate aus den Kapiteln 2 und 3 zusammen. Wir zeigen, dass zwei Operatoren T und $\tilde{T}$ aus $\mathcal{B}_k(\Omega)$ genau dann unitär äquivalent sind, wenn die analytischen Abbildungen $t : \lambda \mapsto \ker(T - \lambda I)$ und $\tilde{t} : \lambda \mapsto \ker(\tilde{T} - \lambda I)$ kongruent sind. Nach den Überlegungen von Kapitel 3 ist dies wiederum genau dann der Fall, wenn die zugehörigen Hermite'schen Vektorbündel

$$E_T := \big\{(\lambda, x) \in \Omega \times H : x \in \ker(T - \lambda I)\big\} \quad \text{und} \quad E_{\tilde{T}} := \big\{(\lambda, x) \in \Omega \times H : x \in \ker(\tilde{T} - \lambda I)\big\}$$

äquivalent sind.

Im letzten Kapitel befassen wir uns mit verallgemeinerten Cowen-Douglas-Operatoren. Für ein n-Tupel $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ beschränkter linearer Operatoren auf einem separablen Hilbertraum H und einen Punkt $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ aus dem Vektorraum $\mathbb{C}^n$ definieren wir hierfür den beschränkten linearen Operator

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} : \left\{ \begin{array}{ccl} H & \to & H^n \\ x & \mapsto & \big((T_1 - \lambda_1 I)x, \dots, (T_n - \lambda_n I)x\big). \end{array} \right.$$

Für zwei natürliche Zahlen $k, n \in \mathbb{N}$ und ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ betrachten wir dann die Menge $\mathcal{B}_k^n(\Omega)$ aller n-Tupel $\mathbf{T}$ mit folgenden Eigenschaften:

(VCD1) Für alle $\lambda \in \Omega$ ist $\operatorname{ran} \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} \subseteq H^n$ abgeschlossen.

(VCD2) Für alle $\lambda \in \Omega$ ist $\dim \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} = k$.

(VCD3) $\operatorname{cls}\bigcup\big\{\ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} : \lambda \in \Omega\big\} = H$.

Die Idee dieser Verallgemeinerung stammt aus [2]. Wir folgen in diesem Kapitel jedoch in erster Linie der Arbeit [3] von R. E. Curto und N. Salinas. Wieder sind wir an der Frage interessiert, wann zwei n-Tupel $\mathbf{T}$ und $\tilde{\mathbf{T}}$ aus $\mathcal{B}_k^n(\Omega)$ komponentenweise unitär äquivalent sind, d.h. wann es einen unitären Operator U auf H gibt, sodass $\tilde{T}_j = U^* T_j U$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. In Abschnitt 5.1 übertragen wir etliche Aussagen aus dem vierten Kapitel auf die Klasse $\mathcal{B}_k^n(\Omega)$. Danach beschreiben wir in den Abschnitten 5.2 und 5.3 „kanonische Modelle“ für verallgemeinerte Cowen-Douglas-Operatoren.

An dieser Stelle möchte ich mich noch bei Michael Kaltenbäck für die sorgfältige Betreuung meiner Diplomarbeit bedanken.

Wolfgang Carl Wien, 5. August 2012

Kapitel 1

Analytische Funktionen

1.1 Analytische Funktionen in einer Variable

Zu Beginn dieser Arbeit wollen wir Banachraum-wertige analytische Funktionen betrachten. Sei dazu $(X, \|\cdot\|_X)$ stets ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Mit $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ bezeichnen wir den topologischen Dualraum von X.

Definition 1.1.1. Eine Funktion $f : \Omega \to X$ heißt *analytisch*, falls für alle $\lambda \in \Omega$ der Grenzwert

$$f'(\lambda) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(\lambda + h) - f(\lambda)}{h}$$

in X existiert. Man nennt f *schwach analytisch*, falls für alle $\hat{x} \in X'$ die Funktion $\hat{x} \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch ist.

Ist $f : \Omega \to X$ analytisch und $\lambda \in \Omega$, so sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x} f(\lambda)$ und $\frac{\partial}{\partial y} f(\lambda)$ definiert als

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\lambda) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(\lambda + h) - f(\lambda)}{h} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(\lambda) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(\lambda + ih) - f(\lambda)}{h}.$$

Da der Grenzwert $f'(\lambda) \in X$ existiert, muss $\frac{\partial}{\partial x} f(\lambda) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} f(\lambda) = f'(\lambda)$ gelten.

Definiert man die Wirtinger-Ableitungen $\partial f(\lambda)$ und $\bar{\partial} f(\lambda)$ durch

$$\partial f(\lambda) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(\lambda) - i \frac{\partial}{\partial y} f(\lambda) \right) \quad \text{und} \quad \bar{\partial} f(\lambda) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(\lambda) + i \frac{\partial}{\partial y} f(\lambda) \right),$$

so folgt $\partial f(\lambda) = f'(\lambda)$ und $\bar{\partial} f(\lambda) = 0$.

Für höhere Ableitungen verwenden wir die übliche Notation $\partial^k f(\lambda)$ und $\bar{\partial}^k f(\lambda)$ für $k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 1.1.2. Jede analytische Funktion $f : \Omega \to X$ ist wegen

$$\|f(\lambda + h) - f(\lambda)\|_X = |h| \cdot \left\| \frac{f(\lambda + h) - f(\lambda)}{h} \right\|_X \xrightarrow{h \to 0} 0$$

stetig. Ist $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein weiterer Banachraum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, so ist mit f auch die Funktion $T \circ f : \Omega \to Y$ analytisch, da

$$\frac{(T \circ f)(\lambda + h) - (T \circ f)(\lambda)}{h} = T \left(\frac{f(\lambda + h) - f(\lambda)}{h} \right) \xrightarrow{h \to 0} T(f'(\lambda)) \in Y.$$

Jede analytische Funktion ist also auch schwach analytisch.

Für $w \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ definieren wir

$$\begin{aligned} U_r(w) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - w| < r\}, \\ \partial U_r(w) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - w| = r\} \text{ und} \\ \overline{U_r(w)} &:= U_r(w) \cup \partial U_r(w). \end{aligned}$$

Definition 1.1.3. Sei $w \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Für eine stetige Funktion $g : \overline{U_r(w)} \to X$ definieren wir das *Kurvenintegral*

$$\oint_{\partial U_r(w)} g(\zeta)\, d\zeta := \int_0^{2\pi} g(w + re^{it}) ire^{it}\, dt$$

als Banachraum-wertiges Riemann-Integral.

Lemma 1.1.4. *Sei $f : \Omega \to X$ analytisch, $w \in \Omega$ beliebig und $r > 0$, sodass $\overline{U_r(w)} \subset \Omega$, dann gilt die Cauchy'sche Integralformel*

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \lambda}\, d\zeta, \quad \forall\, \lambda \in U_r(w).$$

Beweis. Sei $\hat{x} \in X'$, dann ist die Abbildung $\hat{x} \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch. Also gilt die klassische Cauchy'sche Integralformel (siehe z.B. [11], Lemma 2.1.8) und man erhält

$$\hat{x}(f(\lambda)) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(w)} \frac{\hat{x}(f(\zeta))}{\zeta - \lambda}\, d\zeta = \hat{x}\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \lambda}\, d\zeta \right).$$

Damit gilt

$$\hat{x}\left(f(\lambda) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \lambda}\, d\zeta \right) = 0, \quad \forall\, \hat{x} \in X',$$

woraus die Behauptung mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach folgt. □

Lemma 1.1.5. *Sei $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein weiterer Banachraum über $\mathbb{C}$. Für $x \in X$ seien*

$$T : \begin{cases} \Omega & \to & \mathcal{L}(X,Y) \\ \lambda & \mapsto & T(\lambda) \end{cases} \quad \text{und} \quad T_x : \begin{cases} \Omega & \to & Y \\ \lambda & \mapsto & T(\lambda)x. \end{cases}$$

Dann ist T genau dann analytisch, wenn T_x für alle $x \in X$ analytisch ist. In diesem Fall gilt $T'(\lambda)x = (T_x)'(\lambda)$ für alle $x \in X$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Für beliebiges $x \in X$ gilt

$$\left\| \frac{T(\lambda + h)x - T(\lambda)x}{h} - T'(\lambda)x \right\|_Y \le \left\| \frac{T(\lambda + h) - T(\lambda)}{h} - T'(\lambda) \right\| \cdot \|x\|_X \xrightarrow{h \to 0} 0,$$

also $(T_x)'(\lambda) = T'(\lambda)x$.

($\Leftarrow$) Sei $w \in \Omega$ beliebig und $r > 0$, sodass $\overline{U_r(w)} \subset \Omega$. Dann gilt laut Voraussetzung und Lemma 1.1.4

$$T(\lambda)x = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(w)} \frac{T(\zeta)x}{\zeta - \lambda}\, d\zeta, \quad \forall\, \lambda \in U_r(w), x \in X.$$

Es ist zu zeigen, dass der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(w + h) - T(w)}{h}$$

in $\mathcal{L}(X,Y)$ existiert, was aber äquivalent zur Cauchy-Bedingung

$$\lim_{h,g\to 0} \frac{T(w+h)-T(w)}{h} - \frac{T(w+g)-T(w)}{g} = 0 \tag{1.1}$$

ist. Für $h \neq g$ mit $0 < |h|, |g| \leq \frac{r}{2}$ definieren wir den Operator

$$\Gamma(h,g) := \frac{1}{h-g}\left[\frac{T(w+h)-T(w)}{h} - \frac{T(w+g)-T(w)}{g}\right] \in \mathcal{L}(X,Y),$$

und erhalten für beliebiges $x \in X$

$$\begin{aligned}
\left\|\Gamma(h,g)x\right\|_Y &= \left\| \frac{1}{h-g}\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial U_r(w)} T(\zeta)x \left(\frac{\frac{1}{\zeta-(w+h)} - \frac{1}{\zeta-w}}{h} - \frac{\frac{1}{\zeta-(w+g)} - \frac{1}{\zeta-w}}{g} \right) d\zeta \right\|_Y = \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial U_r(w)} T(\zeta)x \frac{1}{(\zeta-(w+h))(\zeta-(w+g))(\zeta-w)}\, d\zeta \right\|_Y \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\partial U_r(w)} \left\|T(\zeta)x\right\|_Y \left| \frac{1}{(\zeta-(w+h))(\zeta-(w+g))(\zeta-w)} \right| d\zeta \leq \\
&\leq \frac{2\pi r}{2\pi} \max_{\zeta\in\partial U_r(w)} \left\|T(\zeta)x\right\|_Y \left(\frac{2}{r}\right)^2 \frac{1}{r} = \frac{4}{r^2} \max_{\zeta\in\partial U_r(w)} \left\|T(\zeta)x\right\|_Y =: C_x < \infty.
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit existiert nun eine Konstante $C > 0$, sodass $\|\Gamma(h,g)\| \leq C$ für alle $h \neq g$ mit $0 < |h|, |g| \leq \frac{r}{2}$, womit die Gültigkeit von (1.1) folgt. □

Korollar 1.1.6. *Sei $f : \Omega \to X$ eine Funktion. Ist $\hat{x} \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ für alle $\hat{x} \in X'$ analytisch, dann ist f analytisch.*

Beweis. Wir fassen X als abgeschlossenen Teilraum des Bidualraumes $X'' := \mathcal{L}(X', \mathbb{C})$ auf und betrachten f als Abbildung von Ω nach $\mathcal{L}(X', \mathbb{C})$. Nach Voraussetzung ist

$$f_{\hat{x}} : \begin{cases} \Omega & \to \quad \mathbb{C} \\ \lambda & \mapsto \quad f(\lambda)\hat{x} := \hat{x}\big(f(\lambda)\big) \end{cases}$$

für alle $\hat{x} \in X'$ analytisch. Mit Lemma 1.1.5 ist damit f analytisch. □

Korollar 1.1.7. *Sei $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein weiterer Banachraum über $\mathbb{C}$ und $T : \Omega \to \mathcal{L}(X,Y)$. Ist die Abbildung*

$$\hat{y}\big(T(\cdot)x\big) : \begin{cases} \Omega & \to \quad \mathbb{C} \\ \lambda & \mapsto \quad \hat{y}\big(T(\lambda)x\big) \end{cases}$$

für alle $\hat{y} \in Y'$ und alle $x \in X$ analytisch, dann ist T analytisch.

Beweis. Laut Voraussetzung und Korollar 1.1.6 ist die Abbildung $\lambda \mapsto T(\lambda)x$ für alle $x \in X$ analytisch. Nach Lemma 1.1.5 ist damit T analytisch. □

Lemma 1.1.8. *Seien X, Y und Z Banachräume über $\mathbb{C}$ und $\Omega, \tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\Omega \cap \tilde{\Omega} \neq \emptyset$. Sind die Abbildungen $T : \Omega \to \mathcal{L}(X,Y)$ und $S : \tilde{\Omega} \to \mathcal{L}(Y,Z)$ analytisch, so ist auch die Zusammensetzung $S(\cdot)T(\cdot) : (\Omega \cap \tilde{\Omega}) \to \mathcal{L}(X,Z) : \lambda \mapsto S(\lambda)T(\lambda)$ analytisch und es gilt*

$$\big(S(\cdot)T(\cdot)\big)'(\lambda) = S(\lambda)T'(\lambda) + S'(\lambda)T(\lambda), \quad \forall\, \lambda \in \Omega \cap \tilde{\Omega}.$$

Beweis. Für $\lambda \in \Omega \cap \tilde{\Omega}$ gilt

$$\frac{S(\lambda+h)T(\lambda+h)-S(\lambda)T(\lambda)}{h} = S(\lambda+h)\frac{T(\lambda+h)-T(\lambda)}{h} + \frac{S(\lambda+h)-S(\lambda)}{h}T(\lambda) \xrightarrow{h\to 0} S(\lambda)T'(\lambda)+S'(\lambda)T(\lambda).$$

□

Lemma 1.1.9. *Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $T : \Omega \to \mathcal{L}(X)$ analytisch. Sind die Operatoren $T(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ für alle $\lambda \in \Omega$ invertierbar, dann ist auch die Abbildung $T(\cdot)^{-1} : \Omega \to \mathcal{L}(X) : \lambda \mapsto T(\lambda)^{-1}$ analytisch und es gilt*

$$\left(T(\cdot)^{-1}\right)'(\lambda) = -T(\lambda)^{-1}T'(\lambda)T(\lambda)^{-1}, \quad \forall\ \lambda \in \Omega.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X))$ die Menge der invertierbaren Operatoren aus $\mathcal{L}(X)$. Aus der Funktionalanalysis ist bekannt (siehe z.B. [6], Lemma 1.1.9), dass diese Menge offen ist und dass die Abbildung $\mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X)) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{L}(X)) : S \mapsto S^{-1}$ stetig ist. Die Abbildung $T(\cdot)^{-1} : \Omega \to \mathcal{L}(X) : \lambda \mapsto T(\lambda) \mapsto T(\lambda)^{-1}$ ist also als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig. Für $\lambda \in \Omega$ gilt nun

$$\frac{T(\lambda+h)^{-1}-T(\lambda)^{-1}}{h} = -T(\lambda+h)^{-1}\frac{T(\lambda+h)-T(\lambda)}{h}T(\lambda)^{-1} \xrightarrow{h\to 0} -T(\lambda)^{-1}T'(\lambda)T(\lambda)^{-1}.$$

□

1.2 Analytische Funktionen in mehreren Variablen

Wir wollen nun Banachraum-wertige analytische Funktionen in mehreren Variablen betrachten. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ fest und $\mathbb{C}^n$ der Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$, wobei

$$e_1 := (1,0,\ldots,0), \quad e_2 := (0,1,0,\ldots,0), \quad \ldots, \quad e_n := (0,\ldots,0,1).$$

Für zwei Vektoren $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und $w = (w_1, \ldots, w_n)$ aus $\mathbb{C}^n$ definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle \lambda, w \rangle := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, \overline{w}_j.$$

Damit wird $\mathbb{C}^n$ zu einem n-dimensionalen Hilbertraum über $\mathbb{C}$. Weiters definieren wir für $\lambda \in \mathbb{C}^n$

$$\|\lambda\|_2 := \sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle}.$$

Für $w \in \mathbb{C}^n$ und $r > 0$ definieren wir

$$\begin{aligned} D_r^n(w) &:= \left\{\lambda \in \mathbb{C}^n : |\lambda_j - w_j| < r, \forall\ j \in \{1\ldots n\}\right\}, \\ \partial D_r^n(w) &:= \left\{\lambda \in \mathbb{C}^n : |\lambda_j - w_j| = r, \forall\ j \in \{1\ldots n\}\right\} \text{ und} \\ \overline{D_r^n(w)} &:= D_r^n(w) \cup \partial D_r^n(w). \end{aligned}$$

Sei wieder $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen.

Definition 1.2.1. Eine Funktion $f : \Omega \to X$ heißt *analytisch*, falls sie in jeder Variable analytisch ist, d.h. falls für jedes $\lambda \in \Omega$ und alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(\lambda + he_j) - f(\lambda)}{h}$$

in X existiert.

Bemerkung 1.2.2. Ist $X = \mathbb{C}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$, so ist eine Funktion $f = (f_1, \dots, f_d) : \Omega \to \mathbb{C}^d$ genau dann analytisch, wenn die Funktionen $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ für alle $k \in \{1, \dots, d\}$ analytisch sind.

Ist $f : \Omega \to X$ analytisch und $\lambda \in \Omega$, so definieren wir analog zum eindimensionalen Fall für $j \in \{1, \dots, n\}$ die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(\lambda) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(\lambda + he_j) - f(\lambda)}{h} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y_j} f(\lambda) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(\lambda + ihe_j) - f(\lambda)}{h},$$

sowie die Wirtinger-Ableitungen

$$\partial_j f(\lambda) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(\lambda) - i\frac{\partial}{\partial y_j} f(\lambda)\right) \quad \text{und} \quad \bar{\partial}_j f(\lambda) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(\lambda) + i\frac{\partial}{\partial y_j} f(\lambda)\right).$$

Wie im eindimensionalen Fall folgt $\bar{\partial}_j f(\lambda) = 0$ und

$$\partial_j f(\lambda) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\lambda + he_j) - f(\lambda)}{h},$$

für alle $\lambda \in \Omega$ und $j \in \{1, \dots, n\}$. Es gilt nun eine weitere Verallgemeinerung der Cauchy'schen Integralformel.

Lemma 1.2.3. *Sei $f : \Omega \to X$ analytisch, $w \in \Omega$ beliebig und $r > 0$, sodass $\overline{D_r^n(w)} \subset \Omega$. Dann gilt*

$$f(\lambda) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint\limits_{\partial U_r(w_n)} \cdots \oint\limits_{\partial U_r(w_1)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - \lambda_1) \cdots (\zeta_n - \lambda_n)} \, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n$$

für alle $\lambda \in D_r^n(w)$.

Beweis. Nach wiederholter Anwendung von Lemma 1.1.4 folgt

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial U_r(w_n)} \frac{f(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \zeta_n)}{\zeta_n - \lambda_n} \, d\zeta_n = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\limits_{\partial U_r(w_n)} \oint\limits_{\partial U_r(w_{n-1})} \frac{f(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}, \zeta_{n-1}, \zeta_n)}{(\zeta_{n-1} - \lambda_{n-1})(\zeta_n - \lambda_n)} \, d\zeta_{n-1} \, d\zeta_n = \\ &= \cdots = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint\limits_{\partial U_r(w_n)} \cdots \oint\limits_{\partial U_r(w_1)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - \lambda_1) \cdots (\zeta_n - \lambda_n)} \, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n. \end{aligned}$$

□

Wir werden nun das Konzept der Potenzreihen in einer Variable verallgemeinern zu Potenzreihen in mehreren Variablen, den sogenannten Mehrfachpotenzreihen. Dabei orientieren wir uns an dem Skriptum [7] von Michael Kaltenbäck und Lukas Parapatits.

Im Folgenden sei A eine beliebige aber fest gewählte abzählbare Menge.

Definition 1.2.4. Sei $b_\alpha \in X$ für jedes $\alpha \in A$. Dann ist eine *Mehrfachreihe* zunächst rein formal definiert als

$$\sum_{\alpha \in A} b_\alpha.$$

Wir wollen die Summe einer Mehrfachreihe als Grenzwert eines Netzes interpretieren. Hierfür betrachten wir die Menge $\mathfrak{f}(A)$ aller endlichen Teilmengen von A. Diese bildet zusammen mit der Inklusion $\subseteq$ eine gerichtete Menge. Ist nun $b_\alpha \in X$ für jedes $\alpha \in A$, so ist

$$\Big(\sum_{\alpha \in M} b_\alpha \Big)_{M \in \mathfrak{f}(A)}$$

also ein Netz in X über der gerichteten Menge $(\mathfrak{f}(A), \subseteq)$. Die Konvergenz einer Mehrfachreihe ist nun wie folgt definiert.

Definition 1.2.5. Sei $b_\alpha \in X$ für jedes $\alpha \in A$. Die Mehrfachreihe $\sum_{\alpha \in A} b_\alpha$ heißt *konvergent*, falls das Netz $\big(\sum_{\alpha \in M} b_\alpha \big)_{M \in \mathfrak{f}(A)}$ in X konvergiert. In diesem Fall setzen wir

$$\sum_{\alpha \in A} b_\alpha := \lim_{M \in \mathfrak{f}(A)} \sum_{\alpha \in M} b_\alpha.$$

Die Mehrfachreihe heißt *absolut konvergent*, falls das Netz $\big(\sum_{\alpha \in M} \|b_\alpha\|_X \big)_{M \in \mathfrak{f}(A)}$ in $\mathbb{R}_+$ konvergiert.

Bemerkung 1.2.6. Sei $b_\alpha \in X$ für jedes $\alpha \in A$. Dann gilt:

(i) Das Netz $\big(\sum_{\alpha \in M} \|b_\alpha\|_X \big)_{M \in \mathfrak{f}(A)}$ ist monoton wachsend. Es konvergiert also genau dann, wenn es beschränkt ist, d.h. falls $\sup_{M \in \mathfrak{f}(A)} \sum_{\alpha \in M} \|b_\alpha\|_X < \infty$. Dabei gilt

$$\sum_{\alpha \in A} \|b_\alpha\|_X = \sup_{M \in \mathfrak{f}(A)} \sum_{\alpha \in M} \|b_\alpha\|_X .$$

(ii) Konvergiert die Mehrfachreihe $\sum_{\alpha \in A} b_\alpha$ absolut, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $M_\varepsilon \in \mathfrak{f}(A)$, sodass

$$\sum_{\alpha \in A \setminus M_\varepsilon} \|b_\alpha\|_X < \varepsilon.$$

Für zwei Mengen $M_1, M_2 \in \mathfrak{f}(A)$ mit $M_1, M_2 \supseteq M_\varepsilon$ erhält man damit

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{\alpha \in M_1} b_\alpha - \sum_{\alpha \in M_2} b_\alpha \Big\|_X &= \Big\| \sum_{\alpha \in M_1 \setminus M_2} b_\alpha - \sum_{\alpha \in M_2 \setminus M_1} b_\alpha \Big\|_X \leq \\ &\leq \sum_{\alpha \in M_1 \Delta M_2} \|b_\alpha\|_X \leq \sum_{\alpha \in A \setminus M_\varepsilon} \|b_\alpha\|_X < \varepsilon. \end{aligned}$$

Das Netz $\big(\sum_{\alpha \in M} b_\alpha \big)_{M \in \mathfrak{f}(A)}$ ist also ein Cauchy-Netz in X und somit konvergent. Jede absolut konvergente Mehrfachreihe ist daher auch konvergent.

Lemma 1.2.7. *Sei $b_\alpha \in X$ für jedes $\alpha \in A$ und $(A_i)_{i \in I}$ eine Partition von A in höchsten abzählbar viele Mengen. Dann konvergiert die Mehrfachreihe $\sum_{\alpha \in A} b_\alpha$ genau dann absolut, wenn $\sum_{i \in I} \sum_{\alpha \in A_i} \|b_\alpha\|_X < \infty$. In diesem Fall gilt*

$$\sum_{i \in I} \sum_{\alpha \in A_i} b_\alpha = \sum_{\alpha \in A} b_\alpha.$$

Beweis. Aus Bemerkung 1.2.6 folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \sum_{\alpha \in A_i} \|b_\alpha\|_X &= \sup_{J \in \mathfrak{f}(I)} \sum_{i \in J} \sup_{M_i \in \mathfrak{f}(A_i)} \sum_{\alpha \in M_i} \|b_\alpha\|_X = \sup_{J \in \mathfrak{f}(I)} \sup_{\substack{M_i \in \mathfrak{f}(A_i) \\ i \in J}} \sum_{i \in J} \sum_{\alpha \in M_i} \|b_\alpha\|_X = \\ &= \sup_{J \in \mathfrak{f}(I)} \sup_{M \in \mathfrak{f}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right)} \sum_{\alpha \in M} \|b_\alpha\|_X = \sup_{M \in \mathfrak{f}(A)} \sum_{\alpha \in M} \|b_\alpha\|_X = \sum_{\alpha \in A} \|b_\alpha\|_X , \end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, dass diese Ausdrücke Elemente von $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ sind. Die Mehrfachreihe $\sum_{\alpha\in A} b_\alpha$ konvergiert also genau dann absolut, wenn $\sum_{i\in I}\sum_{\alpha\in A_i} \|b_\alpha\|_X < \infty$. Ist das der Fall, so gilt $\sum_{\alpha\in A_i} \|b_\alpha\|_X < \infty, \forall\ i \in I$, womit für jedes $i \in I$ die Mehrfachreihe $\sum_{\alpha\in A_i} b_\alpha$ absolut konvergiert. Außerdem ist wegen

$$\sum_{i\in I}\Big\|\sum_{\alpha\in A_i} b_\alpha\Big\|_X \leq \sum_{i\in I}\sum_{\alpha\in A_i}\|b_\alpha\|_X < \infty$$

auch die Reihe $\sum_{i\in I}\sum_{\alpha\in A_i} b_\alpha$ absolut konvergent.

Ist nun $\varepsilon > 0$, so existiert eine Menge $M \in \mathfrak{f}(A)$, sodass $\sum_{\alpha\in A\setminus M}\|b_\alpha\|_X < \varepsilon$. Weiters existiert eine Menge $J \in \mathfrak{f}(I)$, sodass $\sum_{i\in I\setminus J}\sum_{\alpha\in A_i}\|b_\alpha\|_X < \varepsilon$. Indem wir J nötigenfalls größer machen, können wir annehmen, dass $M \subseteq \bigcup_{i\in J} A_i$ gilt. Zu jedem $i \in J$ existiert nun eine Menge $M_i \in \mathfrak{f}(A_i)$, sodass $\sum_{\alpha\in A_i\setminus M_i}\|b_\alpha\|_X < \frac{\varepsilon}{\#J}$, wobei wir mit $\#J$ die Mächtigkeit von J bezeichnen. Indem wir die Mengen M_i nötigenfalls größer machen, können wir hierbei annehmen, dass $M \subseteq \bigcup_{i\in J} M_i$. Insgesamt erhält man damit

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{i\in I}\sum_{\alpha\in A_i} b_\alpha - \sum_{\alpha\in A} b_\alpha\Big\|_X \leq \\
&\leq \Big\|\sum_{i\in I}\sum_{\alpha\in A_i} b_\alpha - \sum_{i\in J}\sum_{\alpha\in A_i} b_\alpha\Big\|_X + \Big\|\sum_{i\in J}\sum_{\alpha\in A_i} b_\alpha - \sum_{i\in J}\sum_{\alpha\in M_i} b_\alpha\Big\|_X + \Big\|\sum_{i\in J}\sum_{\alpha\in M_i} b_\alpha - \sum_{\alpha\in A} b_\alpha\Big\|_X \leq \\
&\leq \sum_{i\in I\setminus J}\sum_{\alpha\in A_i}\|b_\alpha\|_X + \sum_{i\in J}\sum_{\alpha\in A_i\setminus M_i}\|b_\alpha\|_X + \sum_{\alpha\in A\setminus M}\|b_\alpha\|_X < \varepsilon + \#J\frac{\varepsilon}{\#J} + \varepsilon = 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Korollar 1.2.8.

(i) *Ist B eine weitere abzählbare Menge und $b_{\alpha,\beta} \in X$ für alle $\alpha \in A$ und $\beta \in B$, so gilt*

$$\sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B} b_{\alpha,\beta} = \sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B} b_{\alpha,\beta} = \sum_{\beta\in B}\sum_{\alpha\in A} b_{\alpha,\beta},$$

falls $\sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B}\|b_{\alpha,\beta}\|_X < \infty$ oder äquivalent dazu $\sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B}\|b_{\alpha,\beta}\|_X < \infty$.

(ii) *Ist $A = \mathbb{N}_0^n$ und $b_\alpha \in X$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, so gilt für jede Permutation σ von $\{1,\dots,n\}$*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} b_\alpha = \sum_{\alpha_{\sigma(1)}\in\mathbb{N}_0}\cdots\sum_{\alpha_{\sigma(n)}\in\mathbb{N}_0} b_\alpha,$$

falls $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\|b_\alpha\|_X < \infty$ oder äquivalent dazu $\sum_{\alpha_{\sigma(1)}\in\mathbb{N}_0}\cdots\sum_{\alpha_{\sigma(n)}\in\mathbb{N}_0}\|b_\alpha\|_X < \infty$.

(iii) *Sei X eine Banach-Algebra und $a_{j,k} \in X$ für alle $j \in \{1,\dots,n\}$ und $k \in \mathbb{N}_0^n$. Konvergieren die Reihen $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} a_{1,k},\dots,\sum_{k\in\mathbb{N}_0} a_{n,k}$ absolut und definiert man für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Summanden $b_\alpha := a_{1,\alpha_1}\cdots a_{n,\alpha_n}$, so ist auch $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} b_\alpha$ absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} b_\alpha = \Big(\sum_{\alpha_1\in\mathbb{N}_0} a_{1,\alpha_1}\Big)\cdots\Big(\sum_{\alpha_n\in\mathbb{N}_0} a_{n,\alpha_n}\Big).$$

Beweis. Betrachtet man die Partition $A \times B = \dot{\bigcup}_{\alpha\in A}\{\alpha\}\times B$, so folgt die erste Aussage direkt aus Lemma 1.2.7. Die zweite Aussage folgt durch wiederholte Anwendung der ersten. Für die letzte Aussage sei $\Lambda \in \mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)$ beliebig und $N := \max\big\{\alpha_j : \alpha \in \Lambda, j \in \{1,\ldots,n\}\big\}$. Dann gilt

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} \|b_\alpha\|_X \leq \sum_{\alpha_1=0}^{N} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{N} \|a_{1,\alpha_1}\cdots a_{n,\alpha_n}\|_X \leq \sum_{\alpha_1=0}^{N} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{N} \|a_{1,\alpha_1}\|_X \cdots \|a_{n,\alpha_n}\|_X =$$
$$= \left(\sum_{\alpha_1=0}^{N} \|a_{1,\alpha_1}\|_X\right) \cdots \left(\sum_{\alpha_1=0}^{N} \|a_{1,\alpha_1}\|_X\right) \leq \left(\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \|a_{1,\alpha_1}\|_X\right) \cdots \left(\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \|a_{1,\alpha_1}\|_X\right) < \infty.$$

Die Mehrfachreihe $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} b_\alpha$ konvergiert also absolut und aus Punkt (ii) erhält man

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} b_\alpha = \sum_{\alpha_1\in\mathbb{N}_0} \cdots \sum_{\alpha_n\in\mathbb{N}_0} a_{1,\alpha_1}\cdots a_{n,\alpha_n} = \Big(\sum_{\alpha_1\in\mathbb{N}_0} a_{1,\alpha_1}\Big) \cdots \Big(\sum_{\alpha_n\in\mathbb{N}_0} a_{n,\alpha_n}\Big).$$

$\square$

Bevor wir nun Mehrfachpotenzreihen betrachten können, benötigen wir noch ein paar Definitionen. Mit $\mathbb{N}_0^n$ bezeichnen wir die Menge aller Multiindizes $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ mit $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$ für alle $j \in \{1,\ldots,n\}$. Summe und Differenz zweier Multiindizes sind komponentenweise definiert. Die Vektoren $e_1,\ldots,e_n$ seien wie in $\mathbb{C}^n$ definiert durch $e_j := (\delta_{1j},\ldots,\delta_{nj})$.

Des Weiteren definieren wir für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und einen Punkt $w \in \mathbb{C}^n$

$$w^\alpha := \prod_{j=1}^{n} w_j^{\alpha_j}, \qquad \alpha! := \prod_{j=1}^{n} \alpha_j! \quad \text{und} \quad |\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j.$$

Für zwei Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ schreiben wir $\alpha \geq \beta$, wenn $\alpha_j \geq \beta_j$ für alle $j \in \{1,\ldots,n\}$ gilt.

Definition 1.2.9. Seien $\lambda, w \in \mathbb{C}^n$ und $b_\alpha \in X$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Eine Mehrfachreihe der Gestalt $f(\lambda) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} b_\alpha(\lambda - w)^\alpha$ heißt *Mehrfachpotenzreihe mit Anschlussstelle w*.

Bemerkung 1.2.10. Ist $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} b_\alpha(\lambda - w)^\alpha$ eine konvergente Mehrfachreihe, so ist

$$\left(\sum_{\alpha\in M} b_\alpha(\lambda - w)^\alpha\right)_{M\in\mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)}$$

ein Cauchy-Netz in X. Es existiert also eine Menge $M_0 \in \mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)$, sodass

$$\left\| \sum_{\alpha\in M_1} b_\alpha(\lambda - w)^\alpha - \sum_{\alpha\in M_2} b_\alpha(\lambda - w)^\alpha \right\|_X \leq 1$$

für je zwei Mengen $M_1, M_2 \in \mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)$ mit $M_1, M_2 \supseteq M_0$. Für $\beta \in \mathbb{N}_0^n \backslash M_0$ gilt also

$$\big\|b_\beta(\lambda - w)^\beta\big\|_X = \left\| \sum_{\alpha\in M_0\cup\{\beta\}} b_\alpha(\lambda - w)^\alpha - \sum_{\alpha\in M_0} b_\alpha(\lambda - w)^\alpha \right\|_X \leq 1.$$

Setzt man $C := \max_{\alpha\in M_0} \|b_\alpha(\lambda - w)^\alpha\|_X$, so folgt insgesamt $\|b_\alpha(\lambda - w)^\alpha\|_X \leq \max\{1, C\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Lemma 1.2.11 (Abel'sches Lemma). *Sei $w \in \mathbb{C}^n$ und $b_\alpha \in X$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Konvergiert die Mehrfachpotenzreihe $f(\lambda) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} b_\alpha(\lambda - w)^\alpha$ in einem Punkt $z \in \mathbb{C}^n$ mit $z_j \neq w_j, j = 1,\ldots,n$, dann konvergiert sie absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von*

$$D_z(w) := \big\{\lambda \in \mathbb{C}^n : |\lambda_j - w_j| < |z_j - w_j|, \forall\, j \in \{1,\ldots,n\}\big\}.$$

Beweis. Da die Mehrfachreihe $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} b_\alpha(z-w)^\alpha$ laut Voraussetzung konvergiert, existiert eine Konstante $C>0$, sodass $\|b_\alpha(z-w)^\alpha\|_X \le C$ für alle $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$. Sei $K\subset D_z(w)$ kompakt, dann existieren $r_j\in\mathbb{R}$ mit $0<r_j<|z_j-w_j|, j=1,\dots,n$ und

$$K\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C}^n : |\lambda_j-w_j|\le r_j, j=1,\dots,n\}.$$

Für $\lambda\in K$ gilt nun

$$\begin{aligned}\|b_\alpha(\lambda-w)^\alpha\|_X &= \left\|b_\alpha\prod_{j=1}^n(\lambda_j-w_j)^{\alpha_j}\right\|_X = \left\|b_\alpha\prod_{j=1}^n(z_j-w_j)^{\alpha_j}\right\|_X\cdot\left|\prod_{j=1}^n\left(\frac{\lambda_j-w_j}{z_j-w_j}\right)^{\alpha_j}\right|\\ &\le C\prod_{j=1}^n\left|\frac{r_j}{z_j-w_j}\right|^{\alpha_j} = C\rho^\alpha,\end{aligned}$$

mit $\rho_j := \left|\frac{r_j}{z_j-w_j}\right| < 1, j=1,\dots,n$ und $\rho:=(\rho_1,\dots,\rho_n)$.
Es bleibt also zu zeigen, dass die Mehrfachreihe $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\rho^\alpha$ konvergiert. Sei dazu $\Lambda\in\mathfrak{f}(N_0^n)$ und $N:=\max\{\alpha_i : \alpha\in\Lambda, i\in\{1,\dots,n\}\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\Lambda}\rho^\alpha &\le \sum_{\alpha_n=0}^N\cdots\sum_{\alpha_1=0}^N\rho_1^{\alpha_1}\cdots\rho_n^{\alpha_n} = \left(\sum_{\alpha_1=0}^N\rho_1^{\alpha_1}\right)\cdots\left(\sum_{\alpha_n=0}^N\rho_n^{\alpha_n}\right)\\ &\le \left(\sum_{\alpha_1=0}^\infty\rho_1^{\alpha_1}\right)\cdots\left(\sum_{\alpha_n=0}^\infty\rho_n^{\alpha_n}\right) =: D<\infty.\end{aligned}$$

Damit ist $\sup_{\Lambda\in\mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)}\sum_{\alpha\in\Lambda}\rho^\alpha\le D<\infty$, was die Behauptung zeigt. □

Korollar 1.2.12. *Sei $w\in\mathbb{C}^n$ und $b_\alpha\in X$ für $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$. Existiert $r>0$, sodass die Mehrfachpotenzreihe $f(\lambda)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}b_\alpha(\lambda-w)^\alpha$ für alle $\lambda\in D_r^n(w)$ konvergiert, so konvergiert für beliebiges $j\in\{1,\dots,n\}$ die Mehrfachpotenzreihe*

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ \alpha_j\ge1}} b_\alpha\alpha_j(\lambda-w)^{\alpha-e_j}$$

absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $D_r^n(w)$.

Beweis. Seien $j\in\{1,\dots,n\}$ und $\lambda\in D_r^n(w)$ beliebig gewählt. Dann existiert ein $\mu\in D_r^n(w)$, sodass $|\lambda_i-w_i|<|\mu_i-w_i|$ für alle $i\in\{1,\dots,n\}$. Da laut Voraussetzung die Mehrfachreihe $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}b_\alpha(\mu-w)^\alpha$ konvergiert, existiert eine Konstante $C>0$, sodass $\|b_\alpha(\mu-w)^\alpha\|_X\le C$ für alle $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$. Definiert man $\rho_i := \left|\frac{\lambda_i-w_i}{\mu_i-w_i}\right| < 1$ für $i\in\{1,\dots,n\}$ und $\rho:=(\rho_1,\dots,\rho_n)$, so gilt für jedes $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha_j\ge1$

$$\left\|b_\alpha\alpha_j(\lambda-w)^{\alpha-e_j}\right\|_X = \|b_\alpha\alpha_j(\mu-w)^\alpha\|_X\,\frac{\rho^{\alpha-e_j}}{|\mu_j-w_j|}\le\frac{C}{|\mu_j-w_j|}\alpha_j\rho^{\alpha-e_j}.$$

Für $\Lambda\in\mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)$ gilt nun

$$\sum_{\substack{\alpha\in\Lambda\\ \alpha_j\ge1}}\alpha_j\rho^{\alpha-e_j}\le\left(\sum_{\alpha_1=0}^\infty\rho_1^{\alpha_1}\right)\cdots\left(\sum_{\alpha_j=1}^\infty\alpha_j\rho_j^{\alpha_j-1}\right)\cdots\left(\sum_{\alpha_n=0}^\infty\rho_n^{\alpha_n}\right)<\infty.$$

Da $\lambda\in D_r^n(w)$ beliebig war, folgt die Behauptung mit Hilfe von Lemma 1.2.11. □

Lemma 1.2.13. *Sei $w \in \mathbb{C}^n$ und $b_\alpha \in X$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Existiert $r > 0$, sodass die Mehrfachpotenzreihe $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} b_\alpha (\lambda - w)^\alpha$ für alle $\lambda \in D_r^n(w)$ konvergiert, so ist die Funktion*

$$f : \begin{cases} D_r^n(w) & \to & X \\ \lambda & \mapsto & \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} b_\alpha (\lambda - w)^\alpha \end{cases}$$

analytisch. Insbesondere gilt

$$\partial_j f(\lambda) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \alpha_j \geq 1}} b_\alpha \alpha_j (\lambda - w)^{\alpha - e_j}, \quad \forall\, \lambda \in D_r^n(w), j \in \{1, \dots, n\},$$

wobei letztere Mehrfachpotenzreihe absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $D_r^n(w)$ konvergiert.

Beweis. Sei o.B.d.A $w = 0$. Laut Korollar 1.2.12 konvergiert für $j \in \{1, \dots, n\}$ die Mehrfachpotenzreihe

$$g(\lambda) := \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \alpha_j \geq 1}} b_\alpha \alpha_j \lambda^{\alpha - e_j}$$

absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $D_r^n(0)$.
Sei $\lambda \in D_r^n(0)$ und $0 \neq h \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$\frac{f(\lambda + h e_j) - f(\lambda)}{h} - g(\lambda) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \alpha_j \geq 2}} b_\alpha \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \left[\frac{(\lambda_j + h)^{\alpha_j} - \lambda_j^{\alpha_j}}{h} - \alpha_j \lambda_j^{\alpha_j - 1} \right] \cdots \lambda_n^{\alpha_n}.$$

Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes folgt für $\alpha_j \geq 2$

$$\frac{(\lambda_j + h)^{\alpha_j} - \lambda_j^{\alpha_j}}{h} - \alpha_j \lambda_j^{\alpha_j - 1} = h \sum_{k=2}^{\alpha_j} \binom{\alpha_j}{k} h^{k-2} \lambda_j^{\alpha_j - k}.$$

Mit der Abschätzung

$$\binom{\alpha_j}{k} \leq k(k-1) \binom{\alpha_j}{k} = \alpha_j (\alpha_j - 1) \binom{\alpha_j - 2}{k - 2}, \quad \forall\, k \geq 2,$$

und dem binomischen Lehrsatz folgt weiters

$$\sum_{k=2}^{\alpha_j} \binom{\alpha_j}{k} |h|^{k-2} |\lambda_j|^{\alpha_j - k} \leq \alpha_j (\alpha_j - 1)(|h| + |\lambda_j|)^{\alpha_j - 2}.$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\left\| \frac{f(\lambda + h e_j) - f(\lambda)}{h} - g(\lambda) \right\|_X \leq |h| \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \alpha_j \geq 2}} \|b_\alpha\|_X \, \alpha_j (\alpha_j - 1) |\lambda_1|^{\alpha_1} \cdots (|h| + |\lambda_j|)^{\alpha_j - 2} \cdots |\lambda_n|^{\alpha_n}$$

Für $|h|$ hinreichend klein konvergiert die Mehrfachreihe auf der rechten Seite laut Korollar 1.2.12 und es folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\lambda + h e_j) - f(\lambda)}{h} = g(\lambda).$$

Da $\lambda \in D_r^n(0)$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ beliebig waren, zeigt dies die Behauptung. □

Als Folgerung der bisherigen Überlegungen erhalten wir, dass Mehrfachpotenzreihen beliebig oft stetig partiell differenzierbar sind. Für eine hinreichend oft partiell differenzierbare Funktion $f : \Omega \to X$, einen Punkt $\lambda \in \Omega$ und einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ definieren wir hierfür

$$\begin{aligned}\partial^\alpha f(\lambda) &:= \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f(\lambda) \quad \text{und} \\ \bar{\partial}^\alpha f(\lambda) &:= \bar{\partial}_1^{\alpha_1} \cdots \bar{\partial}_n^{\alpha_n} f(\lambda).\end{aligned}$$

Korollar 1.2.14. *Sei $w \in \mathbb{C}^n$ und $b_\alpha \in X$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Existiert $r > 0$, sodass die Mehrfachpotenzreihe $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} b_\alpha (\lambda - w)^\alpha$ für alle $\lambda \in D_r(w)$ konvergiert, so ist die Funktion*

$$f : \begin{cases} D_r^n(w) & \to \quad X \\ \lambda & \mapsto \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} b_\alpha (\lambda - w)^\alpha \end{cases}$$

beliebig oft stetig partiell differenzierbar und es gilt

$$\partial^\beta f(\lambda) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \alpha \geq \beta}} b_\alpha \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} (\lambda - w)^{\alpha - \beta}, \quad \forall\, \lambda \in D_r^n(w), \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Die Mehrfachpotenzreihe konvergiert dabei absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $D_r^n(w)$. Insbesondere ist

$$b_\alpha = \frac{\partial^\alpha f(w)}{\alpha!}, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt mittels vollständiger Induktion nach $|\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$ aus Lemma 1.2.13. In der Tat gilt für $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\partial_j f(\lambda) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \alpha_j \geq 1}} b_\alpha \frac{\alpha_j!}{(\alpha_j - 1)!} (\lambda - w)^{\alpha - e_j},$$

was die Behauptung für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| = 1$ zeigt. Sei nun $m \in \mathbb{N}$ und gelte die Behauptung für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| = m$. Für $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| = m + 1$ existiert mindestens ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, sodass $\beta_j \neq 0$. Wegen $|\beta - e_j| = |\beta| - 1 = m$ folgt nun

$$\begin{aligned}\partial^\beta f(\lambda) &= \partial_j \Big(\zeta \mapsto \partial^{\beta - e_j} f(\zeta)\Big)(\lambda) \\ &= \partial_j \left(\zeta \mapsto \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \alpha \geq \beta - e_j}} b_\alpha \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta + e_j)!} (\zeta - w)^{\alpha - \beta + e_j}\right)(\lambda) \\ &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \alpha \geq \beta}} b_\alpha \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} (\lambda - w)^{\alpha - \beta},\end{aligned}$$

was die Behauptung für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| = m + 1$ zeigt. Setzt man $\lambda = w$, so folgt daraus $\partial^\beta f(w) = b_\beta \cdot \beta!$. □

Als nächstes zeigen wir, dass jede analytische Funktion lokal in eine Mehrfachpotenzreihe entwickelt werden kann und somit beliebig oft stetig partiell differenzierbar ist. Im Beweis dieser Aussage geht wesentlich ein Satz von Friedrich Hartogs ein, welcher besagt, dass jede nach Definition 1.2.1 analytische Funktion stetig ist. Für einen Beweis dieses Satzes verweisen wir den Leser auf das Buch „Function theory of several complex variables“ von Steven G. Krantz.

Satz 1.2.15 (Hartogs)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}, \Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann ist f stetig.*

Beweis. Siehe [9], Theorem 1.2.5. □

Korollar 1.2.16. *Sei $f : \Omega \to X$ analytisch und $K \subset \Omega$ kompakt. Dann ist f auf K beschränkt, d.h. es gilt $\sup_{\lambda \in K} \|f(\lambda)\|_X < \infty$.*

Beweis. Wir definieren für $\lambda \in K$ das lineare Funktional

$$\mathcal{E}_\lambda : \begin{cases} X' & \to & \mathbb{C} \\ \hat{x} & \mapsto & \hat{x}\big(f(\lambda)\big) \end{cases}$$

und betrachten die Familie $\{\mathcal{E}_\lambda : \lambda \in K\}$. Wegen $|\hat{x}(f(\lambda))| \leq \|\hat{x}\| \cdot \|f(\lambda)\|_X$ sind die Funktionale $\mathcal{E}_\lambda$ für alle $\lambda \in K$ beschränkt mit $\|\mathcal{E}_\lambda\| \leq \|f(\lambda)\|_X$. Aus dem Satz von Hahn-Banach folgt, dass es zu jedem $\lambda \in K$ ein $\hat{x}_\lambda \in X'$ gibt, sodass $\|\hat{x}_\lambda\| = 1$ und $\hat{x}_\lambda(f(\lambda)) = \|f(\lambda)\|_X$. Insgesamt ist also $\|\mathcal{E}_\lambda\| = \|f(\lambda)\|_X$ für alle $\lambda \in K$.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Familie $\{\mathcal{E}_\lambda : \lambda \in K\}$ punktweise beschränkt ist. Sei dazu $\hat{x} \in X'$ beliebig aber fest gewählt. Dann ist die Funktion $\hat{x} \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch und damit laut Satz 1.2.15 stetig. Da K kompakt ist, gilt also

$$\sup_{\lambda \in K} |\mathcal{E}_\lambda \hat{x}| = \sup_{\lambda \in K} |\hat{x}(f(\lambda))| = C_{\hat{x}} < \infty.$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist damit die Familie $\{\mathcal{E}_\lambda : \lambda \in K\}$ gleichmäßig beschränkt, d.h. es gilt

$$\sup_{\lambda \in K} \|f(\lambda)\|_X = \sup_{\lambda \in K} \|\mathcal{E}_\lambda\| = C < \infty.$$

□

Lemma 1.2.17. *Sei $f : \Omega \to X$ analytisch, $w \in \Omega$ beliebig und $r > 0$, sodass $\overline{D_r^n(w)} \subset \Omega$, dann ist f beliebig oft stetig partiell differenzierbar und es gilt*

$$f(\lambda) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} b_\alpha (\lambda - w)^\alpha, \quad \forall\, \lambda \in D_r^n(w),$$

mit

$$b_\alpha = \frac{\partial^\alpha f(w)}{\alpha!} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint\limits_{\partial U_r(w_n)} \cdots \oint\limits_{\partial U_r(w_1)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - w_1)^{\alpha_1 + 1} \cdots (\zeta_n - w_n)^{\alpha_n + 1}}\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

Die Mehrfachpotenzreihe konvergiert dabei absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $D_r^n(w)$.

Beweis. Sei $\lambda \in D_r^n(w)$ beliebig, dann gilt für $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{1}{\zeta_j - \lambda_j} = \frac{1}{\zeta_j - w_j} \cdot \frac{\zeta_j - w_j}{\zeta_j - w_j - (\lambda_j - w_j)} = \frac{1}{\zeta_j - w_j} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda_j - w_j}{\zeta_j - w_j}}.$$

Für $\zeta_j \in \partial U_r(w_j)$ ist $\left|\frac{\lambda_j - w_j}{\zeta_j - w_j}\right| = \frac{|\lambda_j - w_j|}{r} < 1$, womit die geometrische Reihe

$$\sum_{\alpha_j = 0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_j - w_j}{\zeta_j - w_j}\right)^{\alpha_j} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda_j - w_j}{\zeta_j - w_j}}$$

absolut und gleichmäßig in ζ_j auf $\partial U_r(w_j)$ konvergiert. Um die Notation zu vereinfachen, sei $\mathbf{1} := (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}_0^n$. Dann gilt für $\zeta \in \partial D_r^n(w)$ laut Korollar 1.2.8 (*iii*)

$$\frac{1}{(\zeta - \lambda)^{\mathbf{1}}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{(\zeta - w)^{\alpha + \mathbf{1}}} (\lambda - w)^\alpha,$$

wobei diese Mehrfachreihe absolut und gleichmäßig in ζ auf $\partial D_r^n(w)$ konvergiert. Laut Lemma 1.2.3 gilt nun

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint\limits_{\partial U_r(w_n)} \cdots \oint\limits_{\partial U_r(w_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \lambda)^{\mathbf{1}}}\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint\limits_{\partial U_r(w_n)} \cdots \oint\limits_{\partial U_r(w_1)} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{\alpha + \mathbf{1}}} (\lambda - w)^\alpha \, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n. \end{aligned}$$

Nach Korollar 1.2.16 ist $f : \Omega \to X$ auf der kompakten Teilmenge $\partial D_r^n(w) \subset \Omega$ beschränkt. Somit konvergiert auch die Mehrfachreihe

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{\alpha + \mathbf{1}}} (\lambda - w)^\alpha$$

absolut und gleichmäßig in ζ auf $\partial D_r^n(w)$. Sind $(\zeta_2, \ldots, \zeta_n) \in \partial U_r(w_2) \times \cdots \times \partial U_r(w_n)$ fest gewählt, dann gilt also

$$\oint\limits_{\partial U_r(w_1)} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{\alpha + \mathbf{1}}} (\lambda - w)^\alpha \, d\zeta_1 = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \oint\limits_{\partial U_r(w_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{\alpha + \mathbf{1}}} (\lambda - w)^\alpha \, d\zeta_1. \tag{1.2}$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt nun

$$\left\| \oint\limits_{\partial U_r(w_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{\alpha + \mathbf{1}}} (\lambda - w)^\alpha \, d\zeta_1 \right\|_X \leq 2\pi r \sup_{\zeta \in \partial D_r^n(w)} \left\| f(\zeta) \right\|_X \prod_{j=1}^n \frac{|\lambda_j - w_j|^{\alpha_j}}{r^{\alpha_j + 1}},$$

womit die Mehrfachreihe auf der rechten Seite von (1.2) absolut und gleichmäßig in $(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ auf $\partial U_r(w_2) \times \cdots \times \partial U_r(w_n)$ konvergiert. Für $(\zeta_3, \ldots, \zeta_n) \in \partial U_r(w_3) \times \cdots \times \partial U_r(w_n)$ gilt damit

$$\begin{aligned} &\oint\limits_{\partial U_r(w_2)} \oint\limits_{\partial U_r(w_1)} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{\alpha + \mathbf{1}}} (\lambda - w)^\alpha \, d\zeta_1 \, d\zeta_2 = \\ &\qquad \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \oint\limits_{\partial U_r(w_2)} \oint\limits_{\partial U_r(w_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{\alpha + \mathbf{1}}} (\lambda - w)^\alpha \, d\zeta_1 \, d\zeta_2. \end{aligned}$$

Analog zu obigen Überlegungen folgt insgesamt

$$f(\lambda) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint\limits_{\partial U_r(w_n)} \cdots \oint\limits_{\partial U_r(w_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{\alpha + \mathbf{1}}} \, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n \cdot (\lambda - w)^\alpha,$$

wobei diese Mehrfachreihe absolut konvergiert. Da $\lambda \in D_r^n(w)$ beliebig war, folgt die Behauptung aus Lemma 1.2.11 und Korollar 1.2.14. $\square$

Korollar 1.2.18 (erster Identitätssatz)**.** *Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch und $\Delta \subseteq \Omega$ ein Gebiet, d.h. offen und zusammenhängend. Hat die Menge $\mathcal{N} := \{\lambda \in \Delta : f(\lambda) = 0\}$ nichtleeres Inneres, so ist $\mathcal{N} = \Delta$.*

Beweis. Wir definieren $\mathcal{M} \subseteq \Delta$ durch $\mathcal{M} := \bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \left\{ \lambda \in \Delta : \partial^\alpha f(\lambda) = 0 \right\}$. Die Menge $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen, da für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Funktion $\lambda \mapsto \partial^\alpha f(\lambda)$ stetig ist als Funktion von Δ nach X. Ist w im Inneren von $\mathcal{N}$, dann gilt $\partial^\alpha f(w) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, also $w \in \mathcal{M}$. Damit ist das Innere von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$ enthalten und $\mathcal{M}$ insbesondere nichtleer.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{M}$ auch offen ist. Sei dazu $\lambda_0 \in \mathcal{M}$ beliebig und $r > 0$, sodass $\overline{D_r^n(\lambda_0)} \subset \Omega$, dann gilt laut Lemma 1.2.17

$$f(\lambda) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^\alpha f(\lambda_0)}{\alpha!}(\lambda - \lambda_0)^\alpha = 0, \quad \forall \lambda \in D_r^n(\lambda_0),$$

also ist $D_r^n(\lambda_0)$ im Inneren von $\mathcal{N}$. Damit ist $\mathcal{M}$ offen, da das Innere von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$ enthalten ist. Da Δ zusammenhängend ist, muss $\mathcal{M} = \Delta$ sein. Wegen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ folgt insgesamt $\mathcal{N} = \Delta$. □

Korollar 1.2.19 (zweiter Identitätssatz). *Sei $f : \Omega \to X$ analytisch, $\Delta \subseteq \Omega$ ein Gebiet und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Hat die Menge $\Delta_Y := \{\lambda \in \Delta : f(\lambda) \in Y\}$ nichtleeres Inneres, so ist $\Delta_Y = \Delta$.*

Beweis. Angenommen $\Delta_Y \neq \Delta$, dann gibt es ein $w \in \Delta$ mit $f(w) \in X \backslash Y$. Da Y abgeschlossen ist existiert nach dem Satz von Hahn-Banach ein $\hat{x} \in X'$, sodass $\hat{x}(y) = 0$ für alle $y \in Y$, aber $\hat{x}(f(w)) \neq 0$. Da laut Voraussetzung die Menge $\{\lambda \in \Delta : \hat{x}(f(\lambda)) = 0\} \supseteq \{\lambda \in \Delta : f(\lambda) \in Y\}$ nichtleeres Inneres hat, ist dies ein Widerspruch zu Korollar 1.2.18, weil $\hat{x} \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch ist. □

Um bei dem nächsten Resultat die Notation etwas übersichtlicher zu gestalten benötigen wir eine Verallgemeinerung des Binomialkoeffizienten für Multiindizes. Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ und ist $\alpha \geq \beta$ so definiert man

$$\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}.$$

Analog zum eindimensionalen Fall gilt

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha - e_j}{\beta - e_j} + \binom{\alpha - e_j}{\beta}$$

für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha \geq \beta \geq e_j$.

Lemma 1.2.20 (Leibniz'sche Regel). *Seien X, Y und Z Banachräume über $\mathbb{C}$ und $\Omega, \tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{C}^n$ offen mit $\Omega \cap \tilde{\Omega} \neq \emptyset$. Sind die Funktionen $T : \Omega \to \mathcal{L}(X, Y)$ und $S : \tilde{\Omega} \to \mathcal{L}(Y, Z)$ analytisch, so ist auch die Zusammensetzung $S(\cdot)T(\cdot) : (\Omega \cap \tilde{\Omega}) \to \mathcal{L}(X, Z) : \lambda \mapsto S(\lambda)T(\lambda)$ analytisch und für alle $\lambda \in \Omega \cap \tilde{\Omega}$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt*

$$\partial^\alpha \big(S(\cdot)T(\cdot)\big)(\lambda) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta S(\lambda) \partial^{\alpha - \beta} T(\lambda). \tag{1.3}$$

Beweis. Da eine Funktion in mehreren Variablen genau dann analytisch ist, wenn sie in jeder Variable analytisch ist, folgt die Analytizität der Abbildung $S(\cdot)T(\cdot)$ direkt aus Lemma 1.1.8.

Wir zeigen die Gültigkeit von (1.3) mittels vollständiger Induktion nach $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$. Aus Lemma 1.1.8 folgt (1.3) für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = 1$. Sei also $m \in \mathbb{N}$ und gelte (1.3) für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$. Ist nun $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = m + 1$ und $\alpha_j > 0$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$, so gilt $|\alpha - e_j| = |\alpha| - 1 = m$ und damit laut Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha \big(S(\cdot)T(\cdot)\big)(\lambda) &= \partial_j \Big(\zeta \mapsto \partial^{\alpha - e_j} \big(S(\cdot)T(\cdot)\big)(\zeta)\Big)(\lambda) = \\
&= \partial_j \left(\zeta \mapsto \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha - e_j} \binom{\alpha - e_j}{\beta} \partial^\beta S(\zeta) \partial^{\alpha - e_j - \beta} T(\zeta)\right)(\lambda) = \\
&= \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha - e_j} \binom{\alpha - e_j}{\beta} \sum_{0 \leq \sigma \leq e_j} \partial^{\beta - \sigma} S(\lambda) \partial^{\alpha - \beta - \sigma} T(\lambda) =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{0 \le \beta \le \alpha - e_j} \binom{\alpha - e_j}{\beta} \partial^\beta S(\lambda) \partial^{\alpha-\beta} T(\lambda) + \sum_{e_j \le \beta \le \alpha} \binom{\alpha - e_j}{\beta - e_j} \partial^\beta S(\lambda) \partial^{\alpha-\beta} T(\lambda) =$$

$$= \sum_{0 \le \beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta S(\lambda) \partial^{\alpha-\beta} T(\lambda).$$

□

1.3 Koanalytische Funktionen

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch koanalytiche Funktionen betrachten. Dazu sei $(X, \|\cdot\|_X)$ wieder ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen.

Definition 1.3.1. Wir nennen eine Funktion $f : \Omega \to X$ *koanalytisch*, falls für alle $\lambda \in \Omega$ und alle $j \in \{1, \dots, n\}$ der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(\lambda + \overline{h} e_j) - f(\lambda)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(\lambda + h e_j) - f(\lambda)}{\overline{h}}$$

in X existiert.

Bemerkung 1.3.2. Setzt man $\Omega^* := \{\overline{\lambda} : \lambda \in \Omega\}$, so ist eine Funktion $f : \Omega \to X$ genau dann koanalytisch, wenn die Funktion $\hat{f} : \Omega^* \to X : \lambda \mapsto f(\overline{\lambda})$ analytisch ist. In diesem Fall gilt für $\lambda \in \Omega$ und $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\partial_j \hat{f}(\overline{\lambda}) = \lim_{h \to 0} \frac{\hat{f}(\overline{\lambda} + h e_j) - \hat{f}(\overline{\lambda})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\lambda + \overline{h} e_j) - f(\lambda)}{h}.$$

Weiters folgt leicht, dass für eine koanalytische Funktion $f : \Omega \to X$ stets $\partial_j f(\lambda) = 0$ und

$$\bar{\partial}_j f(\lambda) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\lambda + \overline{h} e_j) - f(\lambda)}{h}$$

für alle $\lambda \in \Omega$ und alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Mittels vollständiger Induktion nach $|\alpha|$ folgt daraus

$$\bar{\partial}^\alpha f(\lambda) = \partial^\alpha \hat{f}(\overline{\lambda}), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \lambda \in \Omega.$$

Ist nun $w \in \Omega$ und $r > 0$, sodass $\overline{D_r^n(w)} \subset \Omega$, dann folgt aus Lemma 1.2.17 die Gültigkeit von

$$f(\lambda) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\bar{\partial}^\alpha f(w)}{\alpha!} (\overline{\lambda} - \overline{w})^\alpha, \quad \forall\, \lambda \in D_r^n(w),$$

wobei diese Mehrfachpotenzreihe absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $D_r^n(w)$ konvergiert.

Lemma 1.3.3. *Seien $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1})$ und $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_2})$ Hilberträume über $\mathbb{C}$. Dann ist eine Abbildung $T : \Omega \to \mathcal{L}(H_1, H_2)$ genau dann analytisch, wenn die Abbildung $T(\cdot)^* : \Omega \to \mathcal{L}(H_2, H_1) : \lambda \mapsto T(\lambda)^*$ koanalytisch ist.*

Beweis. Identifiziert man den Dualraum H_1' mit H_1 und den Dualraum H_2' mit H_2, so ist die Abbildung T laut Korollar 1.1.7 genau dann analytisch, wenn für alle $x \in H_1$ und alle $y \in H_2$ die Abbildung

$$\left\langle T(\cdot)x, y \right\rangle_{H_2} : \Omega \to \mathbb{C} : \lambda \mapsto \left\langle T(\lambda)x, y \right\rangle_{H_2}$$

analytisch ist. Wegen $\langle T(\lambda)x, y \rangle_{H_2} = \langle x, T(\lambda)^* y \rangle_{H_1} = \overline{\langle T(\lambda)^* y, x \rangle_{H_1}}$, ist dies äquivalent dazu, dass die Abbildung

$$\left\langle T(\cdot)^* y, x \right\rangle_{H_1} : \Omega \to \mathbb{C} : \lambda \mapsto \left\langle T(\lambda)^* y, x \right\rangle_{H_1}$$

für alle $x \in H_1$ und alle $y \in H_2$ koanalytisch ist. Nach Korollar 1.1.7 ist das aber genau dann der Fall, wenn die Abbildung $T(\cdot)^* : \Omega \to \mathcal{L}(H_2, H_1)$ koanalytisch ist. □

Kapitel 2

Fredholm-Operatoren

2.1 Fredholm-Operatoren

Definition 2.1.1. Seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann sind der *Nulldefekt* $\operatorname{nul} T$ und der *Bilddefekt* $\operatorname{def} T$ von T definiert als

$$\operatorname{nul} T := \dim \ker T \quad \text{und} \quad \operatorname{def} T := \dim Y / \operatorname{ran} T.$$

Ist zumindest eine dieser Zahlen endlich, so definieren wir den *Index* $\operatorname{ind} T$ von T durch

$$\operatorname{ind} T := \operatorname{nul} T - \operatorname{def} T.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir dabei $\infty - n := \infty$ und $n - \infty := -\infty$.

Definition 2.1.2. Für Banachräume X und Y definieren wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\text{nul}}(X,Y) &:= \{T \in \mathcal{L}(X,Y) : \operatorname{nul} T < \infty \text{ und } \operatorname{ran} T \text{ ist abgeschlossen}\},\\
\mathcal{F}_{\text{def}}(X,Y) &:= \{T \in \mathcal{L}(X,Y) : \operatorname{def} T < \infty\},\\
\mathcal{F}_S(X,Y) &:= \mathcal{F}_{\text{nul}}(X,Y) \cup \mathcal{F}_{\text{def}}(X,Y) \text{ und}\\
\mathcal{F}(X,Y) &:= \mathcal{F}_{\text{nul}}(X,Y) \cap \mathcal{F}_{\text{def}}(X,Y).
\end{aligned}$$

Operatoren $T \in \mathcal{F}(X,Y)$ heißen *Fredholm-Operatoren* und Operatoren $T \in \mathcal{F}_S(X,Y)$ nennt man *Semi-Fredholm-Operatoren.*

Lemma 2.1.3. *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und F ein linearer Teilraum von X, sodass $\dim X/F < \infty$. Dann gibt es einen linearen Teilraum E von X mit $\dim E = \dim X/F$ und $X = E \dotplus F$.*

Beweis. Für $x \in X$ bezeichnen wir mit $[x] = x + F = \{x + y : y \in F\} \in X/F$ die Äquivalenzklasse von x. Ist $\{[b_1], \dots, [b_n]\}$ eine Basis von X/F, so sind die Elemente $b_1, \dots, b_n \in X$ linear unabhängig. Für $E := \operatorname{span}\{b_1, \dots, b_n\}$ gilt also $\dim E = \dim X/F$. Zu $x \in X$ existieren nun $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, sodass $[x] = \sum_{i=1}^n \alpha_i [b_i]$. Damit ist $f := x - \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \in F$ und $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i + f \in E + F$. Um zu zeigen, dass die Summe direkt ist, sei $x \in E \cap F$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, sodass $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$. Dann gilt $[0] = [x] = \sum_{i=1}^n \alpha_i [b_i]$, woraus $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ folgt. Insgesamt ist also $X = E \dotplus F$. $\square$

Lemma 2.1.4. *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und E ein endlich-dimensionaler linearer Teilraum von X. Ist F ein linearer Teilraum von X, sodass $X = E \dotplus F$, dann gilt $\dim X/F = \dim E < \infty$.*

Beweis. Ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von E, so sind die Elemente $[b_1], \dots, [b_n] \in X/F$ wegen $E \cap F = \{0\}$ linear unabhängig. Sei nun $[x] \in X/F$ beliebig. Dann gibt es ein $e \in E$ und ein $f \in F$, sodass $x = e + f$. Es existieren also $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, sodass $e = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$ und damit $[x] = [e] = \sum_{i=1}^n \alpha_i [b_i]$ gilt. Die Menge $\{[b_1], \dots, [b_n]\}$ ist also eine Basis von X/F. $\square$

Lemma 2.1.5. *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und E ein endlich-dimensionaler linearer Teilraum von X. Dann existiert eine stetige Projektion $P : X \to X$ mit $\operatorname{ran} P = E$.*

Beweis. Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von E. Definiere für $j \in \{1, \ldots, n\}$ die linearen Abbildungen $f_j : E \to \mathbb{C}$ durch $f_j(b_i) := \delta_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$. Da auf endlich-dimensionalen Vektorräumen sämtliche Normen äquivalent sind, existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i \in E$

$$|f_j(x)| \le \sum_{i=1}^n |f_i(x)| = \sum_{i=1}^n |x_i| \le C \|x\|_X , \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach existieren also Funktionale $F_j \in X'$ mit $F_j\big|_E = f_j$ und $|F_j(x)| \le C\|x\|_X$ für alle $x \in X$. Sei nun

$$P : X \to X : x \mapsto \sum_{j=1}^n F_j(x) b_j .$$

Dann ist P eine Projektion auf E und $\|P\| \le C \sum_{j=1}^n \|b_j\|_X$. □

Korollar 2.1.6. *Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und E ein endlich-dimensionaler linearer Teilraum von X. Dann gilt:*

(i) Es existiert ein abgeschlossener linearer Teilraum F von X, sodass $X = E \dot{+} F$.

(ii) E ist abgeschlossen.

Beweis. Nach Lemma 2.1.5 gibt es eine stetige Projektion $P : X \to X$ mit $\operatorname{ran} P = E$. Setzt man $F := \ker P$, dann ist F abgeschlossen und es gilt $X = \operatorname{ran} P \dot{+} \ker P = E \dot{+} F$. Weiters ist $E = \operatorname{ran} P = \ker(I - P)$ ebenfalls abgeschlossen. □

Lemma 2.1.7 (Satz von Kato)**.** *Seien X und Y Banachräume über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Ist $\dim Y/\operatorname{ran} T < \infty$, so ist $\operatorname{ran} T$ abgeschlossen.*

Beweis. Da $\ker T \subseteq X$ abgeschlossen ist, ist der Faktorraum $X/\ker T$ versehen mit der Norm

$$\|x + \ker T\|_{X/\ker T} := \inf_{z \in \ker T} \|x - z\|_X$$

ein Banachraum. Laut Lemma 2.1.3 existiert ein linearer Teilraum Y_0 von Y mit $\dim Y_0 = \dim Y/\operatorname{ran} T$, sodass $Y = \operatorname{ran} T \dot{+} Y_0$. Da Y_0 nach Korollar 2.1.6 abgeschlossen ist, ist der Produktraum $(X/\ker T) \times Y_0$ versehen mit der Summennorm

$$\|([x], y)\|_+ := \|x + \ker T\|_{X/\ker T} + \|y\|_Y$$

ebenfalls ein Banachraum. Wir betrachten nun die lineare Abbildung

$$\hat{T} : \begin{cases} (X/\ker T) \times Y_0 & \to \quad Y \\ \qquad ([x], y) & \mapsto \quad Tx + y. \end{cases}$$

Diese ist wegen $Y = \operatorname{ran} T \dot{+} Y_0$ surjektiv. Gilt $\hat{T}([x], y) = Tx + y = 0$ für ein Paar $([x], y) \in (X/\ker T) \times Y_0$, dann folgt $Tx = -y \in \operatorname{ran} T \cap Y_0 = \{0\}$, also $y = 0$ und damit auch $x \in \ker T$, also $[x] = [0]$. Dies zeigt, dass $\hat{T}$ bijektiv ist. Darüber hinaus ist $\hat{T}$ beschränkt, denn für alle $([x], y) \in (X/\ker T) \times Y_0$ gilt

$$\begin{aligned} \|\hat{T}([x], y)\|_Y = \|Tx + y\|_Y \le \|Tx\|_Y + \|y\|_Y = \inf_{z \in \ker T} \|T(x - z)\|_Y + \|y\|_Y \le \\ \le \|T\| \inf_{z \in \ker T} \|x - z\|_X + \|y\|_Y \le \max\{1, \|T\|\} \cdot \|([x], y)\|_+. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist $\hat{T}$ also offen, womit $\hat{T}^{-1} : Y \to (X/\ker T) \times Y_0$ stetig ist. Definiert man den abgeschlossenen Teilraum $X_0 := (X/\ker T) \times \{0\}$ von $(X/\ker T) \times Y_0$, so folgt nun aus der Stetigkeit von $\hat{T}^{-1}$, dass $(\hat{T}^{-1})^{-1}(X_0) = \hat{T}(X_0) = \operatorname{ran} T$ abgeschlossen ist. □

Lemma 2.1.8 (Indextheorem von Atkinson)**.** *Seien X, Y und Z Banachräume, $T \in \mathcal{F}(X,Y)$ und $S \in \mathcal{F}(Y,Z)$. Dann ist $S \circ T \in \mathcal{F}(X,Z)$ und es gilt* $\operatorname{ind}(S \circ T) = \operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T)$.

Beweis. Wir definieren zunächst den linearen Teilraum $Y_1 := \operatorname{ran} T \cap \ker S$ von Y. Klarerweise ist $\dim Y_1 \leq \dim \ker S = \operatorname{nul} S < \infty$. Da $\operatorname{ran} T$ und $\ker S$ abgeschlossen sind, existieren laut Korollar 2.1.6 (abgeschlossene) lineare Teilräume Y_2 und Y_3 von Y, sodass

$$\operatorname{ran} T = Y_1 \dotplus Y_2 \quad \text{und} \quad \ker S = Y_1 \dotplus Y_3.$$

Dabei gilt $\operatorname{ran} T \cap Y_3 = \{0\}$, denn aus $y \in \operatorname{ran} T \cap Y_3$ folgt $y \in \operatorname{ran} T \cap \ker S = Y_1$ und damit $y \in Y_1 \cap Y_3 = \{0\}$. Wegen $\operatorname{ran} T \subseteq \operatorname{ran} T \dotplus Y_3$ gilt weiters $\dim Y/(\operatorname{ran} T \dotplus Y_3) \leq \dim Y/\operatorname{ran} T = \operatorname{def} T < \infty$. Laut Lemma 2.1.3 existiert also ein weiterer linearer Teilraum Y_4 von Y, sodass

$$Y = \operatorname{ran} T \dotplus Y_3 \dotplus Y_4 = Y_1 \dotplus Y_2 \dotplus Y_3 \dotplus Y_4.$$

Mit Lemma 2.1.4 gilt also

$$\operatorname{def} T = \dim Y/\operatorname{ran} T = \dim Y_3 + \dim Y_4 \quad \text{und} \tag{2.1}$$

$$\operatorname{nul} S = \dim \ker S = \dim Y_1 + \dim Y_3. \tag{2.2}$$

Als nächstes wollen wir zeigen, dass $S(Y_2 \dotplus Y_4) = S(Y_2) \dotplus S(Y_4)$ gilt. Sei dazu $z \in S(Y_2) \cap S(Y_4)$ beliebig. Dann existiert ein $y_2 \in Y_2$ und ein $y_4 \in Y_4$, sodass $z = S(y_2) = S(y_4)$ ist. Es ist also $y_2 - y_4 \in (Y_2 \dotplus Y_4) \cap \ker S = \{0\}$. Daraus folgt $y_2 = y_4 \in Y_2 \cap Y_4 = \{0\}$, also $z = 0$. Damit gilt

$$\operatorname{ran} S = S(Y_2 \dotplus Y_4) = S(Y_2) \dotplus S(Y_4) = S(\underbrace{Y_1 \dotplus Y_2}_{= \operatorname{ran} T}) \dotplus S(Y_4) = \operatorname{ran}(S \circ T) \dotplus S(Y_4).$$

Wegen $Y_4 \cap \ker S = \{0\}$ ist $S\big|_{Y_4} : Y_4 \to S(Y_4)$ bijektiv und somit $\dim S(Y_4) = \dim Y_4$. Wegen $\operatorname{def} S < \infty$ existiert laut Lemma 2.1.3 ein linearer Teilraum Z_0 von Z mit $\dim Z_0 = \operatorname{def} S$, sodass $Z = \operatorname{ran} S \dotplus Z_0$. Es ist also $Z = \operatorname{ran} S \dotplus Z_0 = \operatorname{ran}(S \circ T) \dotplus S(Y_4) \dotplus Z_0$. Nach Lemma 2.1.4 ist daher

$$\operatorname{def}(S \circ T) = \dim Z/\operatorname{ran}(S \circ T) = \dim Z_0 + \dim S(Y_4) = \operatorname{def} S + \dim Y_4 < \infty. \tag{2.3}$$

Laut Lemma 2.1.7 ist damit $\operatorname{ran}(S \circ T)$ abgeschlossen.

Nun wollen wir zeigen, dass $\operatorname{nul}(S \circ T) = \operatorname{nul} T + \dim Y_1$ ist. Wegen $\operatorname{nul} T < \infty$ existiert ein linearer Teilraum X_0 von X, sodass

$$\ker(S \circ T) = \ker T \dotplus X_0.$$

Dabei ist $T(X_0) = T(\ker T \dotplus X_0) = T(\ker(S \circ T)) \subseteq \operatorname{ran} T \cap \ker S = Y_1$. Um zu zeigen, dass hier Gleichheit gilt, sei $y \in Y_1$ beliebig. Dann existiert ein $x \in X$, sodass $y = T(x)$. Wegen $y \in \ker S$ gilt $0 = S(y) = S(T(x))$, also $x \in \ker(S \circ T)$ und damit $y \in T(\ker(S \circ T))$. Es ist also $T(X_0) = Y_1$. Nun ist $T\big|_{X_0} : X_0 \to T(X_0)$ bijektiv, womit $\dim X_0 = \dim T(X_0) = \dim Y_1$ ist. Daraus folgt

$$\operatorname{nul}(S \circ T) = \dim \ker(S \circ T) = \dim \ker T + \dim X_0 = \operatorname{nul} T + \dim Y_1 < \infty. \tag{2.4}$$

Aus den Gleichungen (2.1) – (2.4) folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(S \circ T) = \operatorname{nul}(S \circ T) - \operatorname{def}(S \circ T) &= \operatorname{nul} T + \dim Y_1 - \operatorname{def} S - \dim Y_4 = \\
&= (\dim Y_1 + \dim Y_3 - \operatorname{def} S) + (\operatorname{nul} T - \dim Y_3 - \dim Y_4) = \\
&= (\operatorname{nul} S - \operatorname{def} S) + (\operatorname{nul} T - \operatorname{def} T) = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T.
\end{aligned}$$

□

Aus der Theorie der Fredholm-Operatoren geht hervor, dass für zwei Banachräume X und Y die Menge der Semi-Fredholm-Operatoren von X nach Y eine offene Teilmenge aller beschränkten linearen Operatoren von X nach Y ist. Für einen Beweis dieser interessanten Tatsache verweisen wir den Leser auf das Buch „Funktionalanalysis: Theorie und Anwendung" von Harro Heuser.

Satz 2.1.9. *Seien X und Y Banachräume und $T \in \mathcal{F}_S(X,Y)$. Dann existiert ein $\rho > 0$, sodass für alle $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\|S\| < \rho$ auch $T+S$ ein Semi-Fredholm-Operator ist und* $\operatorname{ind}(T+S) = \operatorname{ind}(T)$ *gilt. Die Menge $\mathcal{F}_S(X,Y)$ ist also offen in $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Beweis. Siehe [4], Satz 82.4. □

Lemma 2.1.10. *Seien X und Y Banachräume über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{F}(X,Y)$. Sei weiters $P : X \to X$ eine stetige Projektion mit* $\operatorname{ran} P = \ker T$ *und $Q : Y \to Y$ stetige Projektion mit* $\operatorname{ran} Q = \operatorname{ran} T$*. Dann existiert ein Operator $S \in \mathcal{F}(Y,X)$ mit*

$$S \circ T = I_X - P \quad \textit{und} \quad T \circ S = Q,$$

wobei wir mit I_X die Identität auf X bezeichnen.

Beweis. Laut Voraussetzung gilt $X = \operatorname{ran} P \dotplus \ker P = \ker T \dotplus \ker P$. Die Einschränkung

$$T_0 := T\big|_{\ker P} : \ker P \to \operatorname{ran} T$$

ist somit eine bijektive beschränkte lineare Abbildung. Da $\ker P \subseteq X$ und $\operatorname{ran} T \subseteq Y$ als abgeschlossene Teilräume von Banachräumen ebenfalls Banachräume sind, ist T_0 nach dem Satz von der offenen Abbildung offen. Damit ist $T_0^{-1} : \operatorname{ran} T \to \ker P$ stetig.
Sei $\iota : \ker P \to X : x \mapsto x$ die identische Einbettung von $\ker P$ in X. Definiert man

$$S := \iota \circ T_0^{-1} \circ Q \in \mathcal{L}(Y,X),$$

so gilt laut Lemma 2.1.4 $\dim \ker S = \dim \ker Q = \dim Y/\operatorname{ran} Q = \dim Y/\operatorname{ran} T < \infty$ und $\dim X/\operatorname{ran} S = \dim X/\ker P = \dim \operatorname{ran} P = \dim \ker T < \infty$. Aus Lemma 2.1.7 folgt, dass $\operatorname{ran} S$ abgeschlossen ist, also $S \in \mathcal{F}(Y,X)$. Um den Beweis abzuschließen, sei $x = x_1 + x_2 \in X$ mit $x_1 \in \operatorname{ran} P = \ker T$ und $x_2 \in \ker P$. Dann gilt

$$S \circ Tx = T_0^{-1} \circ Q \circ Tx_2 = T_0^{-1} \circ Tx_2 = x_2 = x - x_1 = (I_X - P)x.$$

Analog gilt für $y = y_1 + y_2 \in Y$ mit $y_1 \in \operatorname{ran} Q$ und $y_2 \in \ker Q$

$$T \circ Sy = T \circ T_0^{-1} \circ Qy_1 = T \circ T_0^{-1} y_1 = y_1 = Qy.$$

□

Proposition 2.1.11. *Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und F ein linearer Teilraum von X mit* $\dim X/F < \infty$*. Dann ist F genau dann abgeschlossen, wenn es eine stetige Projektion $P : X \to X$ mit* $\operatorname{ran} P = F$ *gibt.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Laut Lemma 2.1.3 existiert ein endlich-dimensionaler Unterraum E von X, sodass $X = E \dotplus F$. Damit gibt es eine (eindeutige) Projektion $Q : X \to X$ mit $\operatorname{ran} Q = E$ und $\ker Q = F$. Wir wollen nun zeigen, dass der Graph von Q abgeschlossen ist. Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $x_n \in X$, für welche die beiden Limiten $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y := \lim_{n\to\infty} Q(x_n)$ existieren. Da $\operatorname{ran} Q$ als endlich-dimensionaler Unterraum abgeschlossen ist, muss $y \in \operatorname{ran} Q$ sein. Es existiert also ein $z \in X$ mit $y = Q(z)$. Laut Voraussetzung ist auch $\ker Q = F$ abgeschlossen, also ist $\lim_{n\to\infty} x_n - Q(x_n) = x - Q(z) \in \ker Q$. Daraus folgt $Q(x) - Q(z) = Q(x - Q(z)) = 0$, also $Q(x) = Q(z) = y$. Dies zeigt, dass der Graph von Q abgeschlossen ist. Also ist Q nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen stetig. Mit Q ist nun auch $P := (I - Q)$ eine stetige Projektion, wobei wir mit I die Identität auf X bezeichnen. Außerdem gilt $\operatorname{ran} P = \operatorname{ran}(I - Q) = \ker Q = F$.
($\Leftarrow$) Sei $P : X \to X$ eine stetige Projektion mit $\operatorname{ran} P = F$, dann ist $F = \ker(I - P)$ abgeschlossen.
□

Definition 2.1.12. Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(X)$. Wir nennen $w \in \mathbb{C}$ einen *Stabilitätspunkt* von T, wenn $(T - wI) \in \mathcal{F}(X)$ und es eine Umgebung von w gibt, auf der $\lambda \mapsto \dim\ker(T - \lambda I)$ konstant ist.

Satz 2.1.13. *Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $T \in \mathcal{L}(X)$ und $w \in \mathbb{C}$ ein Stabilitätspunkt von T. Sei weiters $\{b_1, \dots, b_k\}$ eine Basis von $\ker(T - wI)$. Dann gibt es eine offene Umgebung Δ von w und analytische Funktionen $\gamma_j : \Delta \to X, j = 1, \dots, k$, sodass $\gamma_j(w) = b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ und $\ker(T - \lambda I) = \operatorname{span}\{\gamma_1(\lambda), \dots, \gamma_k(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \Delta$.*

Beweis. Laut Lemma 2.1.5 und Proposition 2.1.11 gibt eine stetige Projektion $P_{\text{ker}} : X \to X$ auf $\ker(T - wI)$ und eine stetige Projektion $P_{\text{ran}} : X \to X$ auf $\operatorname{ran}(T - wI)$. Aus Lemma 2.1.10 folgt die Existent eines Operators $S \in \mathcal{F}(X)$ mit $S \circ (T - wI) = I - P_{\text{ker}}$.

Mit $\Delta_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - w| < \|S\|^{-1}\}$ ist der Operator $(I - (\lambda - w)S) \in \mathcal{L}(X)$ für alle $\lambda \in \Delta_1$ invertierbar, wobei

$$\big(I - (\lambda - w)S\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n (\lambda - w)^n,$$

Diese Reihe konvergiert bezüglich der Operatornorm. Die Abbildung $\lambda \mapsto \big(I - (\lambda - w)S\big)^{-1}$ von Δ_1 nach $\mathcal{L}(X)$ ist somit analytisch. Wir betrachten nun für $\lambda \in \Delta_1$ den Operator

$$P(\lambda) := I - \big(I - (\lambda - w)S\big)^{-1} \circ S \circ (T - \lambda I) \in \mathcal{L}(X).$$

Aus dieser Definition folgt zunächst $P(\lambda)x = x$ für alle $x \in \ker(T - \lambda I)$, also

$$\operatorname{ran} P(\lambda) \supseteq \ker(T - \lambda I), \quad \forall\, \lambda \in \Delta_1.$$

Weiters gilt laut obigen Überlegungen für $\lambda \in \Delta_1$

$$S \circ (T - I\lambda) = S \circ \big((T - wI) - (\lambda - w)I\big) = I - P_{\text{ker}} - (\lambda - w)S$$

und damit

$$P(\lambda) = I - \big(I - (\lambda - w)S\big)^{-1} \circ \big(I - (\lambda - w)S - P_{\text{ker}}\big) = \big(I - (\lambda - w)S\big)^{-1} \circ P_{\text{ker}}.$$

Daraus folgt

$$\dim\operatorname{ran} P(\lambda) = \dim\operatorname{ran} P_{\text{ker}} = \dim\ker(T - wI), \quad \forall\, \lambda \in \Delta_1.$$

Außerdem existiert laut Voraussetzung eine offene Umgebung Δ_2 von w, sodass

$$\dim\ker(T - wI) = \dim\ker(T - \lambda I), \quad \forall\, \lambda \in \Delta_2.$$

Setzt man $\Delta := \Delta_1 \cap \Delta_2$, so folgt insgesamt

$$\operatorname{ran} P(\lambda) = \ker(T - \lambda I), \quad \forall\, \lambda \in \Delta.$$

Definiert man schließlich für $j \in \{1, \dots, k\}$ die analytischen Funktionen

$$\gamma_j : \left\{ \begin{array}{ccc} \Delta & \to & X \\ \lambda & \mapsto & P(\lambda)b_j, \end{array} \right.$$

dann gilt erstens $\gamma_j(w) = P(w)b_j = P_{\text{ker}}b_j = b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ und zweitens

$$\operatorname{span}\{\gamma_1(\lambda), \dots, \gamma_k(\lambda)\} = P(\lambda)\operatorname{span}\{b_1, \dots, b_k\} = \ker(T - \lambda I), \quad \forall\, \lambda \in \Delta.$$

□

Kapitel 3

Mannigfaltigkeiten und Vektorbündel

3.1 Mannigfaltigkeiten

Definition 3.1.1. Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $d \in \mathbb{N}$.

- Eine bijektive Abbildung $\varphi : U_\varphi \to D_\varphi$ heißt *Karte* auf M mit Werten in $\mathbb{C}^d$, falls $\emptyset \neq U_\varphi \subseteq M$ und $\emptyset \neq D_\varphi \subseteq \mathbb{C}^d$ offen sind, und φ ein Homöomorphismus ist, wobei U_φ und D_φ mit der Spurtopologie versehen werden.
- Ist $\varphi : U_\varphi \to D_\varphi$ eine Karte, so bezeichnet man die Abbildung $\varphi^{-1} : D_\varphi \to U_\varphi$ als *Einbettung*.
- Zwei Karten $\varphi : U_\varphi \to D_\varphi$ und $\psi : U_\psi \to D_\psi$ auf M mit Werten in $\mathbb{C}^d$ heißen *analytisch verträglich*, falls $U_\varphi \cap U_\psi = \emptyset$ oder die Abbildung

$$\psi \circ \varphi^{-1}\big|_{\varphi(U_\varphi \cap U_\psi)} : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \to \psi(U_\varphi \cap U_\psi)$$

  analytisch ist.
- Ein d-dimensionaler *Atlas* auf M ist eine Menge $\mathcal{A}$ von Karten $\varphi : U_\varphi \to D_\varphi$ auf M mit Werten in $\mathbb{C}^d$, sodass

$$M = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} U_\varphi$$

  und je zwei Karten aus $\mathcal{A}$ analytisch verträglich sind.
- Ist $\mathcal{A}$ ein d-dimensionaler Atlas auf M und φ eine Karte auf M mit Werten in $\mathbb{C}^d$, so nennen wir φ *verträglich* mit $\mathcal{A}$, falls auch $\mathcal{A} \cup \{\varphi\}$ ein Atlas auf M ist.

  Einen zweiten Atlas $\mathcal{A}'$ auf M nennen wir *äquivalent* zu $\mathcal{A}$, wenn auch $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ ein Atlas auf M ist.

Definition 3.1.2. Ist $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, der das Hausdorff'sche Trennungsaxiom erfüllt und eine abzählbare topologische Basis besitzt, und ist $d \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{A}$ ein d-dimensionaler Atlas auf M, so nennt man das Paar $(M, \mathcal{A})$ eine d-dimensionale (komplexe) *Mannigfaltigkeit.*

Beispiel 3.1.3. Für $M = \mathbb{C}^d$ ist $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^d} : M \to \mathbb{C}^d : \lambda \mapsto \lambda$ offensichtlich eine Karte und $\{\mathrm{id}_{\mathbb{C}^d}\}$ ein d-dimensionaler Atlas. Also ist $(\mathbb{C}^d, \{\mathrm{id}_{\mathbb{C}^d}\})$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit. ♯

Beispiel 3.1.4. Ist $(M, \mathcal{A})$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit und $O \subset M$ offen, dann ist auch $(O, \mathcal{B})$ mit

$$\mathcal{B} := \{\varphi|_O : \varphi \in \mathcal{A}, U_\varphi \cap O \neq \emptyset\}$$

eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn man O mit der Spurtopologie versieht. $\sharp$

Beispiel 3.1.5 (Produktmannigfaltigkeiten). Sei $(M_1, \mathcal{A}_1)$ eine d_1-dimensionale Mannigfaltigkeit und $(M_2, \mathcal{A}_2)$ eine d_2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Definiert man für $\varphi_1 \in \mathcal{A}_1$ und $\varphi_2 \in \mathcal{A}_2$

$$\varphi_1 \times \varphi_2 : U_{\varphi_1} \times U_{\varphi_2} \to D_{\varphi_1} \times D_{\varphi_1} : (x, y) \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(y))$$

und versieht $M := M_1 \times M_2$ mit der Produkttopologie und dem Atlas

$$\mathcal{A} := \{\varphi_1 \times \varphi_2 : \varphi_1 \in \mathcal{A}_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}_2\},$$

so ist $(M, \mathcal{A})$ eine $(d_1 + d_2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. $\sharp$

Beispiel 3.1.6 (Matrizen mit vollem Rang). Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ sei $M_{k,n}(\mathbb{C})$ die Menge aller $k \times n$ Matrizen mit Rang k. Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass $M_{k,n}(\mathbb{C})$ eine $(k \cdot n)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Für $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ und $I = \{i_1, \ldots, i_\ell\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ definieren wir die lineare Abbildung

$$p_I : \begin{cases} \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^\ell \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \mapsto & (\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_\ell}). \end{cases}$$

Für $A \in \mathbb{C}^{k \times n}$ sei

$$A_I := \begin{pmatrix} p_I(a_1) \\ \vdots \\ p_I(a_k) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{k \times \ell},$$

wobei wir mit $a_j, j = 1, \ldots, k$ die Zeilenvektoren der Matrix A bezeichnen. Weiters definieren wir die Indexmenge $\mathcal{I} := \big\{\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\} : i_1 < i_2 < \cdots < i_k\big\}$ und für $I \in \mathcal{I}$ die Mengen

$$V_I := \{A \in \mathbb{C}^{k \times n} : \det(A_I) \neq 0\}.$$

Mit dieser Notation gilt

$$M_{k,n}(\mathbb{C}) = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} V_I.$$

Da die Abbildungen $p_I : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ und $\det : \mathbb{C}^{k \times k} \to \mathbb{C}$ stetig sind, sind die Mengen $V_I \subset \mathbb{C}^{k \times n}$ offen. Damit ist $M_{k,n}(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{k \times n}$ offen. Die Menge $\mathbb{C}^{k \times n}$ aller $k \times n$ Matrizen kann auf natürliche Weise mit $\mathbb{C}^{k \cdot n}$ identifiziert werden und ist somit eine $(k \cdot n)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Nach Beispiel 3.1.4 ist damit auch $M_{k,n}(\mathbb{C})$ eine $(k \cdot n)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. $\sharp$

Beispiel 3.1.7 (Graßmann'sche Mannigfaltigkeiten). Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{C}$ und eine natürliche Zahl $k < \dim(V)$ ist die Graßmann'sche Mannigfaltigkeit $Gr(k, V)$ definiert als die Menge aller k-dimensionalen Unterräume von V. In diesem Beispiel zeigen wir, dass für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k < n$ die Menge $Gr(k, \mathbb{C}^n)$ eine $k \cdot (n - k)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Wir verwenden die Notation aus Beispiel 3.1.6 und definieren die Abbildung

$$\pi : \begin{cases} M_{k,n}(\mathbb{C}) & \to & Gr(k, \mathbb{C}^n) \\ A & \mapsto & \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_k\}, \end{cases}$$

wobei wir mit $a_j, j = 1, \ldots, k$ wieder die Zeilenvektoren von A bezeichnen. Die Abbildung π ist offensichtlich surjektiv. Wir versehen $Gr(k, \mathbb{C}^n)$ mit der finalen Topologie bezüglich π, d.h. mit der feinsten Topologie, sodass π stetig ist. Eine Teilmenge $O \subseteq Gr(k, \mathbb{C}^n)$ ist dabei genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(O) \subseteq M_{k,n}(\mathbb{C})$ offen ist.

(1) Wir zeigen zunächst, dass $Gr(k, \mathbb{C}^n)$ das Hausdorff'sche Trennungsaxiom erfüllt. Für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}^n$ definieren wir hierfür die Abbildung

$$d_\lambda \left\{ \begin{array}{rcl} Gr(k, \mathbb{C}^n) & \to & \mathbb{R}_+ \\ X & \mapsto & \|P_X(\lambda) - \lambda\|_2, \end{array} \right.$$

wobei wir für $X \in Gr(k, \mathbb{C}^n)$ mit $P_X : \mathbb{C}^n \to X$ die orthogonale Projektion bezeichnen. Für eine Matrix $A \in M_{k,n}(\mathbb{C})$ bilden die Zeilenvektoren $a_j, j = 1, \ldots, k$ nach Definition eine Basis von $\pi(A)$. Nach dem Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren existiert eine Matrix $\tilde{A} \in M_{k,n}(\mathbb{C})$, deren Zeilen paarweise orthogonal sind und für die $\pi\big(\tilde{A}\big) = \pi(A)$ gilt. Die Abbildung $A \mapsto \tilde{A}$ ist dabei stetig. Sind $\widetilde{a}_j, j = 1, \ldots, k$ die Zeilen der Matrix $\tilde{A}$, dann gilt

$$P_{\pi(A)}(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \lambda, \widetilde{a}_j \rangle}{\langle \widetilde{a}_j, \widetilde{a}_j \rangle} \widetilde{a}_j.$$

Die Abbildung $d_\lambda \circ \pi : M_{k,n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+ : A \mapsto \tilde{A} \mapsto \|P_{\pi(A)}(\lambda) - \lambda\|_2$ ist also stetig. Damit ist auch die Abbildung $d_\lambda : Gr(k, \mathbb{C}^n) \to \mathbb{R}_+$ stetig, da wir $Gr(k, \mathbb{C}^n)$ mit der finalen Topologie bezüglich π versehen haben. Sind nun $X, Y \in Gr(k, \mathbb{C}^n)$ verschieden, dann existiert sicher ein $w \in \mathbb{C}^n$, sodass $d_w(X) \neq d_w(Y)$. Damit gibt es offene Umgebungen O_X von $d_w(X)$ und O_Y von $d_w(Y)$ mit $O_X \cap O_Y = \emptyset$. Die Urbilder $d_w^{-1}(O_X)$ und $d_w^{-1}(O_Y)$ sind nun disjunkte offene Umgebungen von X bzw. Y, denn aus $Z \in d_w^{-1}(O_X) \cap d_w^{-1}(O_Y)$ würde $d_w(Z) \in O_X \cap O_Y$ folgen.

(2) Wir wollen nun Karten auf $Gr(k, \mathbb{C}^n)$ definieren. Dazu sei bemerkt, dass für zwei Matrizen $A, B \in M_{k,n}(\mathbb{C})$ genau dann $\pi(A) = \pi(B)$ gilt, falls es eine Matrix $T \in GL_k(\mathbb{C}) := M_{k,k}(\mathbb{C})$ gibt, für die $A = T \cdot B$ gilt. Weiters überlegt man sich leicht, dass für $A \in \mathbb{C}^{k \times n}$, $T \in GL_k(\mathbb{C})$ und $I \in \mathcal{I}$ stets $(T \cdot A)_I = T \cdot A_I$ gilt.

Definiert man für $I \in \mathcal{I}$ die Menge $U_I := \pi(V_I)$, dann gilt klarerweise $V_I \subseteq \pi^{-1}(U_I)$. Andererseits existiert zu $A \in \pi^{-1}(U_I)$ ein $B \in V_I$ mit $\pi(B) = \pi(A)$. Laut obigen Überlegungen gibt es also ein $T \in GL_k(\mathbb{C})$, sodass $A = T \cdot B$ gilt, woraus $A \in V_I$ folgt. Damit ist $V_I = \pi^{-1}(U_I)$ und die Mengen $(U_I)_{I \in \mathcal{I}}$ stellen eine (endliche) offene Überdeckung von $Gr(k, \mathbb{C}^n)$ dar.

Für $I \in \mathcal{I}$ bezeichnen wir mit $I' := \{1, \ldots, n\} \backslash I$ das Komplement von I und definieren

$$\varphi_I : \left\{ \begin{array}{rcl} U_I & \to & \mathbb{C}^{k \times (n-k)} \\ X & \mapsto & A_I^{-1} \cdot A_{I'}, \quad A \in \pi^{-1}(X) \text{ beliebig.} \end{array} \right.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da zu $A, B \in \pi^{-1}(X)$ ein $T \in GL_k(\mathbb{C})$ existiert, sodass $A = T \cdot B$ und damit

$$A_I^{-1} \cdot A_{I'} = (T \cdot B)_I^{-1} \cdot (T \cdot B)_{I'} = (T \cdot B_I)^{-1} \cdot T \cdot B_{I'} = B_I^{-1} \cdot B_{I'}$$

gilt. Um zu zeigen, dass φ_I stetig ist, sei $O \subseteq \mathbb{C}^{k \times (n-k)}$ offen. Die Abbildung $\varphi_I \circ \pi|_{V_I} : V_I \to \mathbb{C}^{k \times (n-k)} : A \mapsto A_I^{-1} \cdot A_{I'}$ ist (nach der Cramer'schen Regel) stetig, also ist

$$(\varphi_I \circ \pi|_{V_I})^{-1}(O) = (\pi|_{V_I})^{-1} \circ \varphi_I^{-1}(O) = \pi^{-1} \circ \varphi_I^{-1}(O) \subseteq V_I$$

offen, womit $\varphi_I^{-1}(O) \subseteq U_I$ offen ist.

Als nächstes zeigen wir, dass φ_I ein Homöomorphismus ist. Wir bezeichnen mit $P_I \in GL_n(\mathbb{C})$ jene Permutationsmatrix, für die $x \cdot P_I = (p_I(x), p_{I'}(x))$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$ gilt und mit $E_k \in GL_k(\mathbb{C})$ die Einheitsmatrix. Für $Q \in \mathbb{C}^{k \times (n-k)}$ sei $[E_k, Q] \in M_{k,n}(\mathbb{C})$ jene Matrix mit den Zeilenvektoren $(e_j, q_j), j = 1, \ldots, k$, wobei e_j die Einheitsvektoren des $\mathbb{C}^k$ sind und q_j die Zeilenvektoren der Matrix Q. Wir definieren nun die Abbildung

$$\psi_I : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^{k \times (n-k)} & \to & U_I \\ Q & \mapsto & \pi([E_k, Q] \cdot P_I). \end{array} \right.$$

Diese ist als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig. Für $Q \in \mathbb{C}^{k\times(n-k)}$ gilt

$$\varphi_I \circ \psi_I(Q) = \varphi_I \circ \pi([E_k, Q] \cdot P_I) = E_k^{-1}Q = Q.$$

Für $A \in V_I$ ist $A_I \in GL_k(\mathbb{C})$ und damit $\pi(A) = \pi(A_I^{-1} \cdot A) = \pi([E_k, A_I^{-1} \cdot A_{I'}] \cdot P_I)$. Daraus folgt

$$\psi_I \circ \varphi_I(\pi(A)) = \psi_I(A_I^{-1} \cdot A_{I'}) = \pi(A).$$

Also ist $\psi_I = \varphi_I^{-1}$ und $\varphi_I : U_I \to \mathbb{C}^{k\times(n-k)}$ somit ein Homöomorphismus.

(3) Seien nun φ_I und φ_J zwei Karten auf $Gr(k, \mathbb{C}^n)$. Zu $X \in U_I \cap U_J$ existieren also zwei Matrizen $Q, R \in \mathbb{C}^{k\times(n-k)}$, sodass

$$X = \pi([E_k, Q] \cdot P_I) = \pi([E_k, R] \cdot P_J).$$

Damit gibt es eine Matrix $T \in GL_k(\mathbb{C})$, sodass

$$[E_k, Q] \cdot P_I = T \cdot [E_k, R] \cdot P_J \quad \Leftrightarrow \quad [E_k, Q] = T \cdot [E_k, R] \cdot P_J \cdot P_I^{-1}$$

gilt. Sei

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} := P_J \cdot P_I^{-1} \in GL_n(\mathbb{C}),$$

mit $P_{11} \in \mathbb{C}^{k\times k}, P_{12} \in \mathbb{C}^{k\times(n-k)}, P_{21} \in \mathbb{C}^{(n-k)\times k}$ und $P_{22} \in \mathbb{C}^{(n-k)\times(n-k)}$. Damit ist

$$[E_k, Q] = [T, T \cdot R] \cdot P_J \cdot P_I^{-1} = [T \cdot P_{11} + T \cdot R \cdot P_{21}, T \cdot P_{12} + T \cdot R \cdot P_{22}]$$

also

$$E_k = T \cdot (P_{11} + R \cdot P_{21}) \quad \text{und} \quad Q = T \cdot (P_{12} + R \cdot P_{22}).$$

Daraus folgt, dass die Matrix $(P_{11} + R \cdot P_{21}) \in \mathbb{C}^{k\times k}$ invertierbar ist und die Abbildung

$$\varphi_I \circ \varphi_J^{-1}\big|_{\varphi_J(U_I \cap U_J)} : \varphi_J(U_I \cap U_J) \to \mathbb{C}^{k\times(n-k)}$$

gegeben ist durch

$$R \mapsto (P_{11} + R \cdot P_{21})^{-1} \cdot (P_{12} + R \cdot P_{22}).$$

Nach der Cramer'schen Regel ist diese Abbildung analytisch.

(4) Ist schließlich $\mathcal{C}$ eine abzählbare topologische Basis von $\mathbb{C}^{k\times(n-k)}$, dann sieht man leicht, dass

$$\mathcal{B} := \{\varphi_I^{-1}(C) : I \in \mathcal{I}, C \in \mathcal{C}\}$$

eine abzählbare topologische Basis von $Gr(k, \mathbb{C}^n)$ ist.

(5) Als letzten Punkt wollen wir noch zeigen, dass die Abbildung $\pi : M_{k,n}(\mathbb{C}) \to Gr(k, \mathbb{C}^n)$ analytisch ist. Sei dazu $B \in M_{k,n}(\mathbb{C})$ beliebig und $I \in \mathcal{I}$, sodass $B \in V_I$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi_I \circ \pi \circ \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{k\times n}}\big|_{V_I} : V_I \to \mathbb{C}^{k\times(n-k)} : A \mapsto A_I^{-1} \cdot A_{I'}$$

nach der Cramer'schen Regel analytisch, womit π analytisch ist. $\sharp$

Lemma 3.1.8 (Lindelöf)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Hat $(X, \mathcal{T})$ eine abzählbare topologische Basis, dann existiert eine höchsten abzählbare Teilmenge $J \subseteq I$, sodass $X = \bigcup_{j\in J} U_j$.*

Beweis. Ist $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis von $(X, \mathcal{T})$, so gibt es zu jedem $i \in I$ und jedem $x \in U_i$ ein $B_{i,x} \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_{i,x} \subseteq U_i$. Mit $\mathcal{B}$ ist auch $\mathcal{C} := \{B_{i,x} : i \in I, x \in U_i\}$ höchstens abzählbar. Also existieren $i_n \in I$ und $x_n \in U_{i_n}, n \in \mathbb{N}$, sodass $\mathcal{C} = \{B_{i_n,x_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Ist nun $x \in X$ beliebig, so gibt es laut Voraussetzung ein $i \in I$, sodass $x \in U_i$. Wegen $B_{i,x} \in \mathcal{C}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $x \in B_{i_n,x_n} = B_{i,x} \subseteq U_i$. Da aber auch $B_{i_n,x_n} \subseteq U_{i_n}$, folgt $x \in U_{i_n}$. $\square$

Korollar 3.1.9. *Ist $(M,\mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit, so gibt es einen Atlas $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$, der aus höchstens abzählbar vielen Karten besteht.*

Beweis. Da $(U_\varphi)_{\varphi\in\mathcal{A}}$ eine offene Überdeckung von M ist, folgt die Behauptung direkt aus Lemma 3.1.8. $\square$

Lemma 3.1.10. *Sei M eine Menge versehen mit einer Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von M und injektiven Abbildungen $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n, i\in I$, sodass die folgenden Eigenschaften gelten:*

(a) *Für jedes $i\in I$ ist $\varphi_i(U_i)\subseteq\mathbb{C}^n$ offen.*

(b) *Für alle $i,j\in I$ ist $\varphi_i(U_i\cap U_j)\subseteq\mathbb{C}^n$ offen.*

(c) *Für alle $i,j\in I$ ist entweder $U_i\cap U_j=\emptyset$ oder die Abbildung*

$$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}\big|_{\varphi_i(U_i\cap U_j)} : \varphi_i(U_i\cap U_j)\to\varphi_j(U_i\cap U_j)$$

analytisch.

(d) *Es gibt eine höchstens abzählbare Teilmenge $J\subseteq I$, sodass $M=\bigcup_{j\in J}U_j$.*

(e) *Zu $x,y\in M$ mit $x\neq y$ gibt es $i,j\in I$ und offene Teilmengen $V\subseteq\varphi_i(U_i)$ und $W\subseteq\varphi_j(U_j)$, sodass $x\in\varphi_i^{-1}(V)$, $y\in\varphi_j^{-1}(W)$ und $\varphi_i^{-1}(V)\cap\varphi_j^{-1}(W)=\emptyset$.*

Setzt man

$$\mathfrak{B} := \left\{\varphi_i^{-1}(V) : i\in I, V\subseteq\varphi_i(U_i) \text{ offen}\right\},$$

so kann M zu einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit gemacht werden, welche $\mathcal{T}(\mathfrak{B})$ als Topologie trägt und $\{\varphi_i : i\in I\}$ als Atlas hat.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass das Mengensystem $\mathfrak{B}$ die Eigenschaften einer topologischen Basis erfüllt. Seien dazu $i,j\in I$ und $V\subseteq\varphi_i(U_i), W\subseteq\varphi_j(U_j)$ offen, sodass $\varphi_i^{-1}(V)\cap\varphi_j^{-1}(W)\neq\emptyset$. Ist $x\in\varphi_i^{-1}(V)\cap\varphi_j^{-1}(W)\subseteq U_i\cap U_j$ beliebig, so liegt $\varphi_j(x)$ offensichtlich in der nach Punkt (b) offenen Menge $W\cap\varphi_j(U_i\cap U_j)$. Damit liegt $\varphi_i(x)$ in der nach Punkt (c) offenen Menge $V\cap\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}(W\cap\varphi_j(U_i\cap U_j))$. Insgesamt gilt also $x\in\varphi_i^{-1}(V\cap\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}(W\cap\varphi_j(U_i\cap U_j)))\subseteq\varphi_i^{-1}(V)\cap\varphi_j^{-1}(W)$, was die erste Eigenschaft einer Basis zeigt. Dass dieses Mengensystem darüber hinaus die Menge M überdeckt, folgt direkt aus Punkt (d).
Wir versehen nun M mit jener Topologie, welche $\mathfrak{B}$ als Basis hat. Damit ist für jedes $i\in I$ die Menge U_i offen und die Abbildung φ_i stetig. Um zu zeigen, dass auch die Umkehrabbildungen stetig sind, sei $i\in I$ beliebig und $O\subseteq U_i$ offen. Da $\mathfrak{B}$ eine Basis ist, existiert zu jedem $x\in O$ ein $j\in I$ und eine offene Teilmenge $W\subseteq\varphi_j(U_j)$, sodass $x\in\varphi_j^{-1}(W)\subseteq O$. Damit ist $x\in U_i\cap U_j$ und $\varphi_j(x)$ liegt in der nach Punkt (b) offenen Menge $W\cap\varphi_j(U_i\cap U_j)$. Insgesamt liegt $\varphi_i(x)$ in der nach Punkt (c) offenen Menge $\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}(W\cap\varphi_j(U_i\cap U_j))\subseteq\varphi_i(O)$, womit $\varphi_i(O)$ offen ist. Die Menge $\{\varphi_i : i\in I\}$ ist also ein n-dimensionaler Atlas auf M.
Laut Punkt (e) erfüllt M klarerweise das Hausdorff'sche Trennungsaxiom. Es bleibt also zu zeigen, dass M eine abzählbare topologische Basis besitzt. Sei dazu $\mathfrak{C}$ eine abzählbare topologische Basis von $\mathbb{C}^n$ und J eine höchstens abzählbare Teilmenge von I, sodass $M=\bigcup_{j\in J}U_j$. Dann ist das Mengensystem

$$\widetilde{\mathfrak{B}} := \{\varphi_j^{-1}(C) : j\in J, C\in\mathfrak{C}, C\subseteq\varphi_j(U_j)\}$$

ebenfalls abzählbar. Ist $j\in J$ und $V\subseteq\varphi_j(U_j)$ offen, dann gilt $V=\bigcup\{C\in\mathfrak{C} : C\subseteq V\}$, also

$$\varphi_j^{-1}(V)=\bigcup\{\varphi_j^{-1}(C) : C\in\mathfrak{C} : C\subseteq V\}.$$

Daraus folgt, dass $\widetilde{\mathfrak{B}}$ eine Basis von M ist, denn man kann jede offene Teilmenge O von M darstellen als $O=\bigcup_{j\in J}O\cap U_j=\bigcup_{j\in J}\varphi_j^{-1}(\varphi_j(O\cap U_j))$. $\square$

Definition 3.1.11. Seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *analytisch*, falls es zu jedem $x \in M$ eine mit $\mathcal{A}$ verträgliche Karte φ mit $x \in U_\varphi$ und eine mit $\mathcal{B}$ verträgliche Karte ψ mit $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$ gibt, sodass

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : D_\varphi \to D_\psi$$

analytisch ist. Die Menge aller analytischen Abbildungen von M nach N bezeichnen wir mit $\mathrm{Hol}(M, N)$. Eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ nennen wir *bianalytisch*, wenn $f \in \mathrm{Hol}(M, N)$ und $f^{-1} \in \mathrm{Hol}(N, M)$.

Lemma 3.1.12. *Seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \to N$ ist genau dann analytisch, falls f stetig ist (als Abbildung zwischen topologischen Räumen) und für jede mit $\mathcal{A}$ verträgliche Karte φ und jede mit $\mathcal{B}$ verträgliche Karte ψ mit $U_\varphi \cap f^{-1}(U_\psi) \neq \emptyset$ die Abbildung*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big|_{\varphi(U_\varphi \cap f^{-1}(U_\psi))} : \varphi(U_\varphi \cap f^{-1}(U_\psi)) \to D_\psi$$

analytisch ist.

Beweis. $(\Rightarrow)$ Sei $f : M \to N$ analytisch und $x \in M$ beliebig. Seien $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$ Karten wie in Definition 3.1.11 mit $x \in U_{\tilde{\varphi}}$, dann ist

$$f\big|_{U_{\tilde{\varphi}}} = \tilde{\psi}^{-1} \circ (\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}) \circ \tilde{\varphi} : U_{\tilde{\varphi}} \to N$$

als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig. Da $U_{\tilde{\varphi}}$ offen ist, folgt die Stetigkeit von f an x. Da $x \in M$ beliebig war, ist f stetig.
Seien nun φ und ψ (mit $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ verträgliche) Karten, sodass $U_\varphi \cap f^{-1}(U_\psi) \neq \emptyset$. Wegen der Stetigkeit von f ist $U_\varphi \cap f^{-1}(U_\psi)$ offen. Sei $\lambda \in \varphi(U_\varphi \cap f^{-1}(U_\psi))$ beliebig und $y := \varphi^{-1}(\lambda)$. Seien $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\psi}$ Karten wie in Definition 3.1.11 mit $y \in U_{\tilde{\varphi}}$. Setzt man $D := \varphi(U_{\tilde{\varphi}} \cap U_\varphi \cap f^{-1}(U_\psi))$, so ist $D \subseteq \varphi(U_\varphi \cap f^{-1}(U_\psi))$ offen, $\lambda \in D$ und

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\big|_D = (\psi \circ \tilde{\psi}^{-1}) \circ (\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}) \circ (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})\big|_D : D \to D_\psi$$

als Zusammensetzung analytischer Funktionen analytisch. Da $\lambda \in \varphi(U_\varphi \cap f^{-1}(U_\psi))$ beliebig war, folgt die Behauptung.

$(\Leftarrow)$ Sei $x \in M$ beliebig, φ eine Karte auf M mit $x \in U_\varphi$ und ψ eine Karte auf N mit $f(x) \in U_\psi$. Da f stetig ist, ist $U := U_\varphi \cap f^{-1}(U_\psi)$ eine offene Umgebung von x. Mit φ ist klarerweise auch $\phi := \varphi\big|_U$ eine mit $\mathcal{A}$ verträgliche Karte auf M. Nach Voraussetzung ist nun

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to D_\psi$$

analytisch. □

Korollar 3.1.13. *Seien M, N und L Mannigfaltigkeiten. Sind $f : M \to N$ und $g : N \to L$ analytisch, dann ist auch $g \circ f : M \to L$ analytisch.*

Beweis. Sei $x \in M$ beliebig und φ eine Karte auf M mit $x \in U_\varphi$. Zu $f(x) \in N$ existiert laut Voraussetzung eine Karte ψ auf N mit $f(x) \in U_\psi$ und eine Karte γ auf L mit $g(U_\psi) \subseteq U_\gamma$, sodass

$$\gamma \circ g \circ \psi^{-1} : D_\psi \to D_\gamma$$

analytisch ist. Wegen der Stetigkeit von f ist nun die Menge $U := U_\varphi \cap f^{-1}(U_\psi)$ eine offene Umgebung von x mit $f(U) \subseteq U_\psi$ und $g \circ f(U) \subseteq g(U_\psi) \subseteq U_\gamma$. Mit φ ist auch $\phi := \varphi|_U$ eine (mit dem Atlas auf M verträgliche) Karte auf M. Nach Lemma 3.1.12 ist schließlich die Abbildung

$$\gamma \circ g \circ f \circ \phi^{-1} = (\gamma \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) : \phi(U) \to D_\gamma$$

als Zusammensetzung analytischer Abbildungen analytisch. □

Korollar 3.1.14 (dritter Identitätssatz)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und M eine Mannigfaltigkeit. Sind die Abbildungen $f : \Omega \to M$ und $g : \Omega \to M$ analytisch und hat die Menge $\mathcal{M} := \{\lambda \in \Omega : f(\lambda) = g(\lambda)\}$ nichtleeres Inneres, so ist $\mathcal{M} = \Omega$.*

Beweis. Da f und g stetig sind, ist die Menge $\mathcal{M}$ abgeschlossen bezüglich der Spurtopologie auf Ω. Betrachtet man die Menge

$$\mathcal{N} := \overline{\left\{\lambda \in \Omega : f(\lambda) = g(\lambda)\right\}^{\circ}} \cap \Omega,$$

so gilt also $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$. Weiters ist die Menge $\mathcal{N}$ laut Voraussetzung nichtleer und offensichtlich ebenfalls abgeschlossen bezüglich der Spurtopologie auf Ω. Um zu zeigen, dass $\mathcal{N}$ auch offen ist, sei $w \in \mathcal{N}$ beliebig und $\varphi : U_\varphi \to D_\varphi$ eine Karte auf M mit $f(w) = g(w) \in U_\varphi$. Da f und g stetig sind, ist die Menge $U := f^{-1}(U_\varphi) \cap g^{-1}(U_\varphi)$ eine offene Umgebung von w. Daraus folgt $U \cap \left\{\lambda \in \Omega : f(\lambda) = g(\lambda)\right\}^{\circ} \neq \emptyset$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass U zusammenhängend ist. Die Abbildungen

$$\varphi \circ f\big|_U : U \to D_\varphi \quad \text{und} \quad \varphi \circ g\big|_U : U \to D_\varphi$$

sind laut Lemma 3.1.12 analytisch, und die Menge $\{\lambda \in U : \varphi \circ f(\lambda) = \varphi \circ g(\lambda)\}$ hat laut obigen Überlegungen nichtleeres Inneres. Nach dem zweiten Identitätssatz (Korollar 1.2.19) gilt also $\varphi \circ f(\lambda) = \varphi \circ g(\lambda)$ für alle $\lambda \in U$. Da φ bijektiv ist, folgt daraus $U \subseteq \mathcal{N}$, also ist $\mathcal{N}$ offen. Insgesamt folgt $\Omega = \mathcal{N} = \mathcal{M}$. ☐

3.2 Vektorbündel

Definition 3.2.1. Sind E und M Mannigfaltigkeiten und ist $\pi : E \to M$ analytisch und $k \in \mathbb{N}$, dann nennt man das Tripel (π, E, M) ein (komplexes) *Vektorbündel* vom Rang k über M, falls folgende Eigenschaften gelten:

(VB1) Für jedes $x \in M$ ist $E_x := \pi^{-1}(x)$ ein k-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$.

(VB2) Zu jedem $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung $O_x \subseteq M$ von x und eine bianalytische Abbildung

$$\phi : \pi^{-1}(O_x) \to O_x \times \mathbb{C}^k,$$

sodass für jedes $y \in O_x$ erstens $\phi(E_y) \subseteq \{y\} \times \mathbb{C}^k$ und zweitens die Abbildung

$$\phi_y := p_2 \circ \phi\big|_{E_y} : E_y \xrightarrow{\phi} \{y\} \times \mathbb{C}^k \xrightarrow{p_2} \mathbb{C}^k$$

ein Vektorraumisomorphismus ist, wobei wir mit $p_2 : M \times \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ die Projektion auf die zweite Komponente bezeichnen.

Den Raum E nennt man *Totalraum*, und M nennt man *Basisraum* des Bündels. Die Abbildung π heißt *Bündelprojektion.* Für $x \in M$ nennt man den Raum E_x *Faser* über x. Das Paar (ϕ, O_x) heißt *Bündelkarte* oder *lokale Trivialisierung.*

Beispiel 3.2.2. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\pi : M \times \mathbb{C}^k \to M$ die Projektion auf die erste Komponente. Dann ist $(\pi, M \times \mathbb{C}^k, M)$ ein Vektorbündel vom Rang k über M. ♯

Definition 3.2.3. Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $k, n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Wir bezeichnen mit $Gr(k, X)$ die Menge aller k-dimensionalen Unterräume von X und nennen eine Abbildung $f : \Omega \to Gr(k, X)$ *analytisch*, falls zu jedem $w \in \Omega$ eine offene Umgebung $\Delta_w \subseteq \Omega$ und analytische Funktionen $\gamma_j : \Delta_w \to X$, $j = 1, \ldots, k$ existieren, sodass

$$f(\lambda) = \operatorname{span}\{\gamma_1(\lambda), \ldots, \gamma_k(\lambda)\}, \quad \forall\ \lambda \in \Delta_w.$$

Lemma 3.2.4. *Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $k,n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Dann induziert jede analytische Funktion $f : \Omega \to Gr(k,X)$ ein Vektorbündel vom Rang k über Ω. Der Totalraum und die Bündelprojektion sind gegeben durch*

$$E_f := \big\{(\lambda, x) \in \Omega \times X : x \in f(\lambda)\big\} \quad \textit{und} \quad \pi_f : E_f \to \Omega : (\lambda, x) \mapsto \lambda.$$

Beweis. (1) Wir zeigen zuerst, dass E_f eine $(n+k)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Laut Voraussetzung existieren zu jedem $w \in \Omega$ eine offene Umgebung $\Delta_w \subseteq \Omega$ und analytische Funktionen $\gamma_i^w : \Delta_w \to X, i = 1,\dots,k$, sodass $f(\lambda) = \operatorname{span}\{\gamma_1^w(\lambda),\dots,\gamma_k^w(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \Delta_w$. Für $\lambda \in \Delta_w$ definieren wir $\gamma_w(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^k, f(\lambda))$ durch

$$\gamma_w(\lambda) : \mathbb{C}^k \to f(\lambda) : v \mapsto \sum_{j=1}^{k} v_j \cdot \gamma_j^w(\lambda).$$

Da $\{\gamma_1^w(\lambda),\dots,\gamma_k^w(\lambda)\}$ eine Basis von $f(\lambda)$ darstellt, ist $\gamma_w(\lambda)$ invertierbar. Sei nun

$$\varphi_w : \begin{cases} \pi_f^{-1}(\Delta_w) & \to & \Delta_w \times \mathbb{C}^k \\ (\lambda, x) & \mapsto & \big(\lambda, \gamma_w(\lambda)^{-1}x\big). \end{cases}$$

Zu jedem $w \in \Omega$ gibt es also eine offene Umgebung $\Delta_w \subseteq \Omega$ und eine bijektive Abbildung $\varphi_w : \pi_f^{-1}(\Delta_w) \to \Delta_w \times \mathbb{C}^k$. Für $w \in \Omega$ ist die Menge $\Delta_w \times \mathbb{C}^k$ klarerweise offen in $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k \simeq \mathbb{C}^{n+k}$. Für $w, \mu \in \Omega$ ist die Menge $\varphi_w(\pi_f^{-1}(\Delta_w \cap \Delta_\mu)) = (\Delta_w \cap \Delta_\mu) \times \mathbb{C}^k$ ebenfalls offen. Weiters ist die Familie $(\Delta_w)_{w\in\Omega}$ eine offene Überdeckung von Ω, womit laut Lemma 3.1.8 eine höchstens abzählbare Teilmenge $\Lambda \subset \Omega$ existiert, sodass $\Omega = \bigcup_{w\in\Lambda} \Delta_w$. Die Familie $(\pi_f^{-1}(\Delta_w))_{w\in\Lambda}$ ist nun eine abzählbare Überdeckung von E_f. Damit sind die Punkte $(a), (b)$ und (d) von Lemma 3.1.10 bereits erfüllt.

Um die Gültigkeit von Punk (c) zu zeigen, seinen $w, \mu \in \Omega$ beliebig. Um die Notation zu vereinfachen sei $\Delta := \Delta_w \cap \Delta_\mu$. Falls $\Delta \neq \emptyset$, so müssen wir zeigen, dass

$$\varphi_w \circ \varphi_\mu^{-1}\big|_{\Delta\times\mathbb{C}^k} : (\lambda, v) \mapsto \big(\lambda, \gamma_w(\lambda)^{-1}\gamma_\mu(\lambda)v\big)$$

analytisch ist. Das ist aber äquivalent dazu, dass die Abbildung

$$\gamma_w(\cdot)^{-1}\gamma_\mu(\cdot) : \begin{cases} \Delta & \to & \mathcal{L}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k) \\ \lambda & \mapsto & \gamma_w(\lambda)^{-1}\gamma_\mu(\lambda) \end{cases}$$

analytisch ist. Man beachte, dass man Lemma 1.1.9 hier nicht unmittelbar anwenden kann, da für $\lambda \in \Delta$ der Definitionsbereich der Abbildung $\gamma_w(\lambda)^{-1}$ von λ abhängt. Um also zu zeigen, dass die Abbildung $\gamma_w(\cdot)^{-1}\gamma_\mu(\cdot)$ analytisch ist, wählen wir $\lambda_0 \in \Delta$ beliebig aber fest. Laut Lemma 2.1.5 existiert eine stetige Projektion $P : X \to X$ mit $\operatorname{ran} P = f(\lambda_0)$. Wir bezeichnen mit $I : X \to X$ die Identität und definieren die Abbildung

$$R : \Delta \to \mathcal{L}(X) : \lambda \mapsto (I - P) + \gamma_w(\lambda)\gamma_w(\lambda_0)^{-1}P.$$

Für alle $v \in \mathbb{C}^k$ und alle $w \in \Omega$ ist die Abbildung $\gamma_w(\cdot)v : \Delta_w \to X : \lambda \mapsto \gamma_w(\lambda)v$ laut Voraussetzung analytisch. Also ist für jedes $x \in X$ die Abbildung $R(\cdot)x : \Delta \to X : \lambda \mapsto R(\lambda)x$ ebenfalls analytisch, womit laut Lemma 1.1.5 auch die Abbildung $R : \Delta \to \mathcal{L}(X)$ analytisch ist.

Wir bezeichnen mit $\operatorname{Inv}(\mathcal{L}(X))$ die Menge der invertierbaren Operatoren aus $\mathcal{L}(X)$. Aus der Funktionalanalysis ist bekannt (siehe z.B. [6], Lemma 1.1.9), dass diese Menge offen ist. Nun ist $R(\lambda_0) = I$ invertierbar, womit wegen der Stetigkeit von R ein $\delta > 0$ existiert, sodass $D_\delta^n(\lambda_0) \subseteq \Delta$ und sodass für alle $\lambda \in D_\delta^n(\lambda_0)$ auch der Operator $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ invertierbar ist. Mit R ist laut Lemma 1.1.9 schließlich auch die Abbildung $R(\cdot)^{-1} : D_\delta^n(\lambda_0) \to \mathcal{L}(X) : \lambda \mapsto R(\lambda)^{-1}$ analytisch.

Für $\lambda \in D_\delta^n(\lambda_0)$ und $x \in f(\lambda_0)$ ist $R(\lambda)x = \gamma_w(\lambda)\gamma_w(\lambda_0)^{-1}x$, also ist die Einschränkung $R(\lambda)|_{f(\lambda_0)} : f(\lambda_0) \to f(\lambda)$ bijektiv und $(R(\lambda)|_{f(\lambda_0)})^{-1} = \gamma_w(\lambda_0)\gamma_w(\lambda)^{-1}$. Insgesamt folgt damit für $\lambda \in D_\delta^n(\lambda_0)$

$$\gamma_w(\lambda)^{-1}\gamma_\mu(\lambda) = \gamma_w(\lambda_0)^{-1}R(\lambda)^{-1}\gamma_\mu(\lambda).$$

Die rechte Seite ist nun als Zusammensetzung analytischer Funktionen analytisch auf $D_\delta^n(\lambda_0)$. Da $\lambda_0 \in \Delta$ beliebig war, folgt daraus, dass die Abbildung $\gamma_w(\cdot)^{-1}\gamma_\mu(\cdot) : \Delta \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k)$ analytisch ist. Damit gilt auch Punkt (c) von Lemma 3.1.10.

Für den Punkt (e) seien $(w, x), (\mu, y) \in E_f$ verschieden. Ist $w \neq \mu$, so gibt es klarerweise eine offene Umgebung $U_w \subseteq \Delta_w$ von w und eine offene Umgebung $U_\mu \subseteq \Delta_\mu$ von μ, sodass $U_w \cap U_\mu = \emptyset$. Damit ist $(w, x) \in \varphi_w^{-1}(U_w \times \mathbb{C}^k), (\mu, y) \in \varphi_\mu^{-1}(U_\mu \times \mathbb{C}^k)$ und $\varphi_w^{-1}(U_w \times \mathbb{C}^k) \cap \varphi_\mu^{-1}(U_\mu \times \mathbb{C}^k) = \emptyset$. Für $w = \mu$ ist $\mu \in \Delta_w$ und $\varphi_w(w, x) \neq \varphi_w(\mu, y)$. Damit gibt es eine offene Umgebung $U_x \subset \Delta_w \times \mathbb{C}^k$ von $\varphi_w(w, x)$ und eine offene Umgebung $U_y \subset \Delta_w \times \mathbb{C}^k$ von $\varphi_w(\mu, y)$ mit $U_x \cap U_y = \emptyset$. Es folgt $(w, x) \in \varphi_w^{-1}(U_x), (\mu, y) \in \varphi_w^{-1}(U_y)$ und $\varphi_w^{-1}(U_x) \cap \varphi_w^{-1}(U_y) = \emptyset$.

Mit Lemma 3.1.10 können wir also E_f zu einer $(n + k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit machen, welche $\{\varphi_w : w \in \Omega\}$ als Atlas hat.

(2) Nun können wir zeigen, dass (π, E_f, Ω) ein Vektorbündel vom Rang k über Ω ist. Da für jede Karte φ_w die Abbildung $\pi_f \circ \varphi_w^{-1} : \Delta_w \times \mathbb{C}^k \to \Delta_w : (\lambda, v) \mapsto \lambda$ offensichtlich analytisch ist, ist die Abbildung $\pi_f : E_f \to \Omega : (\lambda, x) \mapsto \lambda$ analytisch.

Sei $\lambda \in \Omega$ beliebig, aber fest gewählt. Laut Voraussetzung ist $f(\lambda)$ ein k-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$. Definiert man für $E_{f,\lambda} := \pi_f^{-1}(\lambda) = \{\lambda\} \times f(\lambda)$ die Abbildungen

$$+_\lambda : \begin{cases} E_{f,\lambda} \times E_{f,\lambda} & \to & E_{f,\lambda} \\ ((\lambda, x); (\lambda, y)) & \mapsto & (\lambda, x + y) \end{cases} \quad \text{und} \quad \cdot_\lambda : \begin{cases} \mathbb{C} \times E_{f,\lambda} & \to & E_{f,\lambda} \\ (\zeta; (\lambda, y)) & \mapsto & (\lambda, \zeta \cdot y), \end{cases}$$

so ist $(E_{f,\lambda}, +_\lambda, \cdot_\lambda)$ ebenfalls ein k-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$.

Als lokale Trivialisierung bei $w \in \Omega$ können wir einfach die Karte $\varphi_w : \pi_f^{-1}(\Delta_w) \to \Delta_w \times \mathbb{C}^k$ nehmen. Diese ist bianalytisch, da je zwei Karten analytisch verträglich sind. Weiters ist für jedes fest gewählte $\lambda \in \Delta_w$ erstens $\varphi_w(E_{f,\lambda}) = \{\lambda\} \times \mathbb{C}^k$ und zweitens die Abbildung

$$p_2 \circ \varphi_w\big|_{E_{f,\lambda}} : E_{f,\lambda} \to \mathbb{C}^k : (\lambda, x) \mapsto \gamma_w(\lambda)^{-1}x$$

ein Vektorraumisomorphismus. □

Definition 3.2.5. Sei (π, E, M) ein Vektorbündel und $O \subseteq M$ offen. Ein *analytischer Schnitt* von E über O ist eine analytische Abbildung $\xi : O \to E$, sodass $\pi \circ \xi(x) = x$ für alle $x \in O$. Die Menge aller analytischen Schnitte von E über O bezeichnen wir mit $\Gamma(O, E)$.

Proposition 3.2.6. *Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $k, n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Sei weiters $f : \Omega \to Gr(k, X)$ analytisch und (π_f, E_f, Ω) das zugehörige Vektorbündel, d.h.*

$$E_f = \big\{(\lambda, x) \in \Omega \times X : x \in f(\lambda)\big\} \quad \textit{und} \quad \pi_f : E_f \to \Omega : (\lambda, x) \mapsto \lambda.$$

Ist $\Delta \subseteq \Omega$ offen und $\xi \in \Gamma(\Delta, E_f)$, dann ist die Abbildung

$$\pi_2 \circ \xi : \begin{cases} \Delta & \to & X \\ \lambda & \mapsto & \pi_2 \circ \xi(\lambda) \end{cases}$$

analytisch, wobei wir mit $\pi_2 : E_f \to X : (\lambda, x) \mapsto x$ die Projektion auf die zweite Komponente bezeichnen. Ist umgekehrt $\eta_2 : \Delta \to X$ analytisch mit $\eta_2(\lambda) \in f(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Delta$, dann ist

$$\eta : \begin{cases} \Delta & \to & E_f \\ \lambda & \mapsto & \big(\lambda, \eta_2(\lambda)\big) \end{cases}$$

ein analytischer Schnitt von E_f über Δ.

Beweis. Sei $\Delta \subseteq \Omega$ offen, $w \in \Delta$ beliebig aber fest und

$$\varphi_w : \pi_f^{-1}(\Delta_w) \to \Delta_w \times \mathbb{C}^k : (\lambda, x) \mapsto \big(\lambda, \gamma_w(\lambda)^{-1}x\big)$$

eine Karte auf E_f mit $w \in \Delta_w \subseteq \Omega$ (siehe Beweis von Lemma 3.2.4).

(1) Für die erste Aussage sei $\xi \in \Gamma(U, E_f)$. Nach Lemma 3.1.12 ist dann die Abbildung

$$\varphi_w \circ \xi\big|_{\Delta\cap\Delta_w} : \begin{cases} \Delta\cap\Delta_w & \to & (\Delta\cap\Delta_w)\times\mathbb{C}^k \\ \lambda & \mapsto & \varphi_w\circ\xi(\lambda) = \big(\lambda, \gamma_w(\lambda)^{-1}\circ\pi_2\circ\xi(\lambda)\big) \end{cases}$$

analytisch. Damit ist aber

$$\pi_2 \circ \xi\big|_{\Delta\cap\Delta_w} : \begin{cases} \Delta\cap\Delta_w & \to & X \\ \lambda & \mapsto & \pi_2\circ\xi(\lambda) = \gamma_w(\lambda)\circ\gamma_w(\lambda)^{-1}\circ\pi_2\circ\xi(\lambda) \end{cases}$$

als Zusammensetzung analytischer Abbildungen ebenfalls analytisch. Da $w \in \Delta$ beliebig war, zeigt dies die Behauptung.

(2) Sei nun $\eta_2 : \Delta \to X$ analytisch mit $\eta_2(\lambda) \in f(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Delta$, und

$$\eta : \begin{cases} \Delta & \to & E_f \\ \lambda & \mapsto & \big(\lambda, \eta_2(\lambda)\big). \end{cases}$$

Wir müssen zeigen, dass die Abbildung

$$\varphi_w \circ \eta\big|_{\Delta\cap\Delta_w} : \Delta\cap\Delta_w \to (\Delta\cap\Delta_w)\times\mathbb{C}^k : \lambda \mapsto \big(\lambda, \gamma_w(\lambda)^{-1}\circ\eta_2(\lambda)\big)$$

analytisch ist. Sei dazu $\lambda_0 \in \Delta\cap\Delta_w$ beliebig. Wir bezeichnen mit $P : X \to X$ wieder eine stetige Projektion mit $\operatorname{ran} P = f(\lambda_0)$ und definieren die Abbildung

$$R : \Delta\cap\Delta_w \to \mathcal{L}(X) : \lambda \mapsto (I - P) + \gamma_w(\lambda)\gamma_w(\lambda_0)^{-1}P.$$

Wie im Beweis von Lemma 3.2.4 folgt, dass es dann ein $\delta > 0$ gibt, sodass $R(\lambda)$ für alle $\lambda \in D^n_\delta(\lambda_0)$ invertierbar ist und $R(\cdot)^{-1} : D^n_\delta(\lambda_0) \to \mathcal{L}(X) : \lambda \mapsto R(\lambda)^{-1}$ analytisch ist. Weiters gilt

$$\gamma_w^{-1}(\lambda)\circ\eta_2(\lambda) = \gamma_w(\lambda_0)^{-1}\circ R(\lambda)^{-1}\circ\eta_2(\lambda), \quad \forall\, \lambda \in D^n_\delta(\lambda_0).$$

Die rechte Seite ist als Zusammensetzung analytischer Funktionen analytisch auf $D^n_\delta(\lambda_0)$. Da $\lambda_0 \in \Delta\cap\Delta_w$ beliebig war, folgt daraus die Behauptung. $\square$

Definition 3.2.7. Sei $(M, \mathcal{A})$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $f : M \to \mathbb{C}$ heißt C^∞-*Abbildung*, falls es zu jedem $x \in M$ eine mit $\mathcal{A}$ verträgliche Karte $\varphi : U_\varphi \to D_\varphi$ mit $x \in U_\varphi$ gibt, sodass die Abbildung

$$f \circ \varphi^{-1} : D_\varphi \to \mathbb{C}$$

beliebig oft reell stetig partiell differenzierbar ist, wenn man D_φ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{2d}$ auffasst. Die Menge aller C^∞-Abbildungen von M nach $\mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $C^\infty(M, \mathbb{C})$.

Bemerkung 3.2.8. Ist M eine Mannigfaltigkeit, so ist jede analytische Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ eine C^∞-Abbildung. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch, d.h. es gilt $\operatorname{Hol}(M, \mathbb{C}) \subsetneq C^\infty(M, \mathbb{C})$.

Definition 3.2.9. Sei (π, E, M) ein Vektorbündel. Eine *Hermite'sche Metrik* h auf E ist eine Zuordnung eines Hermite'schen inneren Produkts $h(x) = \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_x} : E_x \times E_x \to \mathbb{C}$ zu jeder Faser E_x des Bündels, sodass für jede offene Teilmenge $O \subseteq M$ und je zwei analytische Schnitte $\xi, \eta \in \Gamma(O, E)$ die Abbildung

$$\langle\xi, \eta\rangle(\cdot) : \begin{cases} O & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & h(x)\big(\xi(x), \eta(x)\big) = \big\langle\xi(x), \eta(x)\big\rangle_{E_x} \end{cases}$$

eine C^∞-Abbildung ist. Ein Vektorbündel (π, E, M), auf dem eine Hermite'sche Metrik h definiert ist, heißt *Hermite'sches Vektorbündel* und man schreibt dafür auch (π, E, M, h).

Lemma 3.2.10. *Sei* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ *ein Hilbertraum über* $\mathbb{C}$, $k, n \in \mathbb{N}$ *und* $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *offen. Sei weiters* $f : \Omega \to Gr(k, H)$ *analytisch und* (π_f, E_f, Ω) *das zugehörige Vektorbündel, d.h.*

$$E_f := \big\{(\lambda, x) \in \Omega \times H : x \in f(\lambda)\big\} \quad \textit{und} \quad \pi_f : E_f \to \Omega : (\lambda, x) \mapsto \lambda.$$

Definiert man für $\lambda \in \Omega$ *die Abbildung*

$$h_f(\lambda) = \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_{f,\lambda}} : \begin{cases} E_{f,\lambda} \times E_{f,\lambda} & \to & \mathbb{C} \\ ((\lambda, x); (\lambda, y)) & \mapsto & \langle x, y\rangle_H \end{cases},$$

so ist $(\pi_f, E_f, \Omega, h_f)$ *ein Hermite'sches Vektorbündel vom Rang* k *über* Ω.

Beweis. Dass für jedes $\lambda \in \Omega$ die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E_{f,\lambda}}$ ein Hermite'sches inneres Produkt auf $E_{f,\lambda}$ ist, folgt leicht aus der Definition der Vektorraumstruktur auf $E_{f,\lambda}$ (siehe Beweis von Lemma 3.2.4) und der Tatsache, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ ein Hermite'sches inneres Produkt auf H ist.

Sei nun $\Delta \subseteq \Omega$ offen und $\xi, \eta \in \Gamma(\Delta, E_f)$. Wir bezeichnen mit π_2 wieder die Abbildung $\pi_2 : E_f \to H : (\lambda, x) \mapsto x$. Nach Proposition 3.2.6 sind dann die Abbildungen $\pi_2 \circ \xi : \Delta \to H$ und $\pi_2 \circ \eta : \Delta \to H$ analytisch. Damit ist aber

$$\langle \xi, \eta\rangle(\cdot) : \begin{cases} \Delta & \to & \mathbb{C} \\ \lambda & \mapsto & \big\langle \xi(\lambda), \eta(\lambda)\big\rangle_{E_{f,\lambda}} = \big\langle \pi_2 \circ \xi(\lambda), \pi_2 \circ \eta(\lambda)\big\rangle_H \end{cases}$$

eine C^∞-Abbildung. □

3.3 Der Stabilitätssatz

Definition 3.3.1. Seien (π_E, E, M, h_E) und (π_F, F, M, h_F) zwei Hermite'sche Vektorbündel. Ein *isometrischer Vektorbündelisomorphismus* ist eine bianalytische Abbildung

$$\Phi : E \to F,$$

sodass für alle $x \in M$ erstens $\Phi(E_x) = F_x$ und zweitens die Abbildung $\Phi_x := \Phi|_{E_x} : E_x \to F_x$ ein isometrischer Vektorraumisomorphismus bezüglich $h_E(x)$ und $h_F(x)$ ist. Zwei Hermite'sche Vektorbündel, zu denen ein isometrischer Vektorbündelisomorphismus existiert, nennt man *äquivalent*. Sie heißen *lokal äquivalent*, falls es zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung $O_x \subseteq M$ und einen isometrischen Vektorbündelisomorphismus $\Phi_{O_x} : \pi_E^{-1}(O_x) \to \pi_F^{-1}(O_x)$ gibt.

Definition 3.3.2. Seien H_1 und H_2 Hilberträume über $\mathbb{C}$. Ein Operator $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ heißt *unitär*, falls $UU^* = I_{H_2}$ und $U^*U = I_{H_1}$ gilt.

Bemerkung 3.3.3. Ist $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ unitär, so ist U invertierbar und $U^{-1} = U^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$. Außerdem gilt

$$\langle Ux, Uy\rangle_{H_2} = \langle U^*Ux, y\rangle_{H_1} = \langle x, y\rangle_{H_1}, \quad \forall\, x, y \in H_1,$$

womit U ein isometrischer Isomorphismus ist. Umgekehrt kann man zeigen, dass jeder isometrische Isomorphismus zwischen Hilberträumen unitär ist.

Definition 3.3.4. Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$, $k, n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Zwei analytische Abbildungen $f : \Omega \to Gr(k, H)$ und $\tilde{f} : \Omega \to Gr(k, H)$ heißen *kongruent*, falls es einen unitären Operator $U \in \mathcal{L}(H)$ gibt, sodass $\tilde{f}(\lambda) = Uf(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Omega$.

Lemma 3.3.5. *Sei* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ *ein Hilbertraum über* $\mathbb{C}$, $k, n \in \mathbb{N}$ *und* $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *offen. Sind die analytischen Abbildungen* $f : \Omega \to Gr(k, H)$ *und* $\tilde{f} : \Omega \to Gr(k, H)$ *kongruent, dann sind die zugehörigen Hermite'schen Vektorbündel* $(\pi_f, E_f, \Omega, h_f)$ *und* $(\pi_{\tilde{f}}, E_{\tilde{f}}, \Omega, h_{\tilde{f}})$ *äquivalent.*

Beweis. Laut Voraussetzung existiert ein unitärer Operator $U \in \mathcal{L}(H)$ mit $\tilde{f}(\lambda) = Uf(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Omega$. Wir definieren die Abbildung

$$\Phi : E_f \to E_{\tilde{f}} : (\lambda, x) \mapsto (\lambda, Ux).$$

Diese ist offensichtlich bijektiv mit Inverser $\Phi^{-1} : E_{\tilde{f}} \to E_f : (\lambda, x) \mapsto (\lambda, U^* x)$. Um zu zeigen, dass Φ bianalytisch ist, sei $w \in \Omega$ beliebig und seien

$$\begin{aligned} \varphi_w &: \pi_f^{-1}(\Delta_w) \to \Delta_w \times \mathbb{C}^k : (\lambda, x) \mapsto (\lambda, \gamma_w(\lambda)^{-1} x) \quad \text{und} \\ \tilde{\varphi}_w &: \pi_{\tilde{f}}^{-1}(\tilde{\Delta}_w) \to \tilde{\Delta}_w \times \mathbb{C}^k : (\lambda, x) \mapsto (\lambda, \tilde{\gamma}_w(\lambda)^{-1} x) \end{aligned}$$

Karten auf E_f bzw. $E_{\tilde{f}}$ mit $w \in \Delta_w, \tilde{\Delta}_w \subseteq \Omega$. Wie im Beweis von Lemma 3.2.4 folgt nun, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_w \circ \Phi \circ \varphi_w^{-1}\big|_{(\Delta_w \cap \tilde{\Delta}_w) \times \mathbb{C}^k} &: (\lambda, v) \mapsto \big(\lambda, \tilde{\gamma}_w(\lambda)^{-1} U \gamma_w(\lambda) v\big) \quad \text{und} \\ \varphi_w \circ \Phi^{-1} \circ \tilde{\varphi}_w^{-1}\big|_{(\Delta_w \cap \tilde{\Delta}_w) \times \mathbb{C}^k} &: (\lambda, v) \mapsto \big(\lambda, \gamma_w(\lambda)^{-1} U^* \, \tilde{\gamma}_w(\lambda) v\big) \end{aligned}$$

analytisch sind. Da $w \in \Omega$ beliebig war folgt daraus, dass Φ bianalytisch ist.

Für $\lambda \in \Omega$ gilt $E_{f,\lambda} := \pi_f^{-1}(\lambda) = \{\lambda\} \times f(\lambda)$ und $E_{\tilde{f},\lambda} := \pi_{\tilde{f}}^{-1}(\lambda) = \{\lambda\} \times \tilde{f}(\lambda)$, also $\Phi(E_{f,\lambda}) = E_{\tilde{f},\lambda}$. Aus der Linearität von U und der Definition der Vektorraumstruktur auf $E_{f,\lambda}$ und $E_{\tilde{f},\lambda}$ folgt direkt die Linearität der Abbildung $\Phi_\lambda := \Phi|_{E_{f,\lambda}} : E_{f,\lambda} \to E_{\tilde{f},\lambda}$. Für $(\lambda, x), (\lambda, y) \in E_{f,\lambda}$ gilt weiters

$$\big\langle \Phi(\lambda, x), \Phi(\lambda, y) \big\rangle_{E_{\tilde{f},\lambda}} = \big\langle Ux, Uy \big\rangle_H = \big\langle x, y \big\rangle_H = \big\langle (\lambda, x), (\lambda, y) \big\rangle_{E_{f,\lambda}},$$

also ist Φ_λ ein isometrischer Vektorraumisomorphismus.

Insgesamt ist $\Phi : E_f \to E_{\tilde{f}}$ also ein isometrischer Vektorbündelisomorphismus. □

Proposition 3.3.6. *Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $k, n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Ist die Abbildung $f : \Omega \to Gr(k, X)$ analytisch, dann gilt*

$$\operatorname{cls} \bigcup \big\{ f(\lambda) : \lambda \in \Omega_0 \big\} = \operatorname{cls} \bigcup \big\{ f(\lambda) : \lambda \in \Omega \big\}$$

für jede nichtleere offene Teilmenge Ω_0 von Ω.

Beweis. Sei $Y := \operatorname{cls} \bigcup \{ f(\lambda) : \lambda \in \Omega_0 \}$. Angenommen es existiert ein $x_0 \in \operatorname{cls} \bigcup \{ f(\lambda) : \lambda \in \Omega \}$ mit $x_0 \notin Y$, dann gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein $\hat{x} \in X'$, mit $\hat{x}(x_0) = 1$ und $\hat{x}(y) = 0$ für alle $y \in Y$. Wir betrachten nun die Menge

$$\mathcal{M} = \overline{\big\{ \lambda \in \Omega : \hat{x}(f(\lambda)) = \{0\} \big\}^\circ} \cap \Omega.$$

Diese ist laut Voraussetzung nichtleer und offensichtlich abgeschlossen bezüglich der Spurtopologie auf Ω. Um zu zeigen, dass sie auch offen ist, sei $w \in \mathcal{M}$ beliebig. Dann gibt es eine offene Umgebung $\Delta_w \subseteq \Omega$ von w und analytische Funktionen $\gamma_j^w : \Delta_w \to X, j = 1, \ldots, k$ mit $f(\lambda) = \operatorname{span}\{\gamma_1^w(\lambda), \ldots, \gamma_k^w(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \Delta_w$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass Δ_w zusammenhängend ist. Da Δ_w eine Umgebung von $w \in \mathcal{M}$ ist, gilt $\big\{ \lambda \in \Omega : \hat{x}(f(\lambda)) = \{0\} \big\}^\circ \cap \Delta_w \neq \emptyset$. Also hat für $j \in \{1, \ldots, k\}$ die Menge $\mathcal{N}_j := \{ \lambda \in \Delta_w : \hat{x} \circ \gamma_j^w(\lambda) = 0 \}$ nichtleeres Inneres, denn

$$\mathcal{N}_j^\circ \supseteq \big\{ \lambda \in \Delta_w : \hat{x}(f(\lambda)) = \{0\} \big\}^\circ = \big\{ \lambda \in \Omega : \hat{x}(f(\lambda)) = \{0\} \big\}^\circ \cap \Delta_w \neq \emptyset.$$

Nach Korollar 1.2.18 gilt $\mathcal{N}_j = \Delta_w$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$, und damit $\Delta_w \subseteq \mathcal{M}$. Also ist $\mathcal{M}$ offen. Da Ω zusammenhängend ist, gilt $\mathcal{M} = \Omega$
Laut obigen Überlegungen gilt nun $\hat{x}(f(w)) = \{0\}$ für alle $w \in \mathcal{M} = \Omega$, woraus $\hat{x}(x_0) = 0$ folgt, was ein Widerspruch ist. □

Proposition 3.3.7. *Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $\Delta \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Ist $\gamma : \Delta \to X$ analytisch, $w \in \Delta$ beliebig und $r > 0$, sodass $\overline{D_r^n(w)} \subset \Delta$, dann gilt*

$$\operatorname{cls}\left\{\partial^\alpha \gamma(w) : \alpha \in \mathbb{N}_0^n\right\} = \operatorname{cls}\left\{\gamma(\lambda) : \lambda \in D_r^n(w)\right\}.$$

Beweis. ($\subseteq$) Wir zeigen mittels vollständiger Induktion nach $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, dass $\partial^\alpha \gamma(\zeta) \in \operatorname{cls}\left\{\gamma(\lambda) : \lambda \in D_r^n(w)\right\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $\zeta \in D_r^n(w)$ gilt. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $\zeta \in D_r^n(w)$ gilt

$$\partial_j \gamma(\zeta) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(\zeta + he_j) - \gamma(\zeta)}{h} \in \operatorname{cls}\left\{\gamma(\lambda) : \lambda \in D_r^n(w)\right\},$$

was die Behauptung für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = 1$ zeigt. Sei jetzt $m \in \mathbb{N}$, sodass die Behauptung für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = m$ gilt. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = m+1$ existiert mindestens ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, sodass $\alpha_j > 0$ gilt. Wegen $|\alpha - e_j| = |\alpha| - 1 = m$ gilt nun analog zu obigen Überlegungen

$$\partial^\alpha \gamma(\zeta) = \lim_{h \to \infty} \frac{\partial^{\alpha - e_j} \gamma(\zeta + he_j) - \partial^{\alpha - e_j} \gamma(\zeta)}{h} \in \operatorname{cls}\left\{\gamma(\lambda) : \lambda \in D_r^n(w)\right\},$$

für alle $\zeta \in D_r^n(w)$.

($\supseteq$) Für $\lambda \in D_r^n(w)$ gilt laut Lemma 1.2.17

$$\gamma(\lambda) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^\alpha \gamma(w)}{\alpha!} (\lambda - w)^\alpha \in \operatorname{cls}\left\{\partial^\alpha \gamma(w) : \alpha \in \mathbb{N}_0^n\right\},$$

was die andere Inklusion zeigt. □

Definition 3.3.8. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *separabel*, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

Lemma 3.3.9. *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) X ist separabel.

(ii) Es gibt eine abzählbare Teilmenge B von X, sodass $X = \operatorname{cls}\{b : b \in B\}$.

Beweis. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Sei A eine abzählbare dichte Teilmenge von X. Dann gilt

$$A \subseteq \operatorname{span}\{a : a \in A\} \subseteq X,$$

woraus $X = \operatorname{cls}\{a : a \in A\}$ folgt.

(ii) $\Leftarrow$ *(i)* Sei B eine abzählbare Teilmenge von X, sodass $X = \operatorname{cls}\{b : b \in B\}$ und C eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Wir betrachten die abzählbare Teilmenge

$$A := \left\{ \sum_{j=1}^n \xi_j b_j : n \in \mathbb{N}, \xi_j \in C, b_j \in B \right\}$$

von X und zeigen $\overline{A} = X$. Seien dazu $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest gewählt. Dann existiert ein $y_0 \in \operatorname{span}\{b : b \in B\}$, sodass $\|x - y_0\|_X < \varepsilon/2$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und $b_1, \ldots, b_n \in B$, sodass $y_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j$. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\xi_j \in C$, sodass $|\lambda_j - \xi_j| < \varepsilon/(2\sum_{j=1}^n \|b_j\|_X)$, dann gilt für $y := \sum_{j=1}^n \xi_j b_j \in A$

$$\|x - y\|_X \leq \|x - y_0\|_X + \|y_0 - y\|_X < \varepsilon/2 + \max_{j \in \{1, \ldots, n\}} |\lambda_j - \xi_j| \sum_{j=1}^n \|b_j\|_X < \varepsilon.$$

□

Lemma 3.3.10. *Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $k,n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Existiert eine analytische Funktion $f : \Omega \to Gr(k,X)$ mit $\operatorname{cls}\bigcup\{f(\lambda) : \lambda \in \Omega\} = X$, so ist X separabel. Genauer gilt: Ist $w \in \Omega$ und Δ_w eine offene Umgebung von w, sodass analytische Funktionen $\gamma_j : \Delta_w \to X, j = 1,\dots,k$ existieren mit $f(\lambda) = \operatorname{span}\{\gamma_1(\lambda),\dots,\gamma_k(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \Delta_w$, dann ist*

$$\operatorname{cls}\left\{\partial^\alpha \gamma_j(w) : j \in \{1,\dots,k\}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\right\} = X.$$

Beweis. Sei $w \in \Omega$ beliebig. Dann gibt es eine offene Umgebung Δ_w von w und analytische Funktionen $\gamma_j : \Delta_w \to X, j = 1,\dots,k$, sodass $f(\lambda) = \operatorname{span}\{\gamma_1(\lambda),\dots,\gamma_k(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \Delta_w$. Ist $r > 0$, sodass $\overline{D_r^n(w)} \subseteq \Delta_w$, so folgt aus den Propositionen 3.3.6 und 3.3.7

$$\begin{aligned}\operatorname{cls}\left\{\partial^\alpha \gamma_j(w) : j \in \{1,\dots,k\}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\right\} &= \operatorname{cls}\left\{\gamma_j(\lambda) : j \in \{1,\dots,n\}, \lambda \in D_r^n(w)\right\} = \\ &= \operatorname{cls}\bigcup\left\{f(\lambda) : \lambda \in D_r^n(w)\right\} = \operatorname{cls}\bigcup\left\{f(\lambda) : \lambda \in \Omega\right\} = X.\end{aligned}$$

Laut Lemma 3.3.9 ist X insbesondere separabel. □

Proposition 3.3.11. *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$. Sei weiters $(H_N)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Folge von endlich-dimensionalen Unterräumen von H, sodass $H_N \subseteq H_{N+1}$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} H_N$ dicht ist in H. Für $N \in \mathbb{N}$ sei $P_N \in \mathcal{L}(H)$ die orthogonale Projektion auf H_N. Sind V und W zwei endlich-dimensionale Unterräume von H, dann gilt*

$$P_N V = P_N W \text{ für alle } N \in \mathbb{N} \qquad \Leftrightarrow \qquad V = W.$$

Beweis. Die Implikation ($\Leftarrow$) ist trivial.
($\Rightarrow$) Wir zeigen zuerst, dass $\lim_{N\to\infty} P_N x = x$ für alle $x \in H$. Seien dazu $x \in H$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Laut Voraussetzung existiert ein $x_0 \in \bigcup_{N\in\mathbb{N}} H_N$ mit $\|x - x_0\|_H \le \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x_0 \in H_{N_0}$, dann gilt für alle $N \ge N_0$

$$\|P_N x - x\|_H = \|P_N x - P_N x_0 + \underbrace{P_N x_0}_{=x_0} - x\|_H \le (\underbrace{\|P_N\|}_{\le 1} + 1)\|x - x_0\|_H \le \varepsilon.$$

Also gilt $\lim_{N\to\infty} P_N x = x$.

Für $x_1,\dots,x_k \in H$ bezeichnen wir mit $G(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{C}^{k\times k}$ die Gram-Matrix, d.h.

$$G(x_1,\dots,x_k)_{i,j} := \langle x_i, x_j\rangle_H, \quad \forall\, i,j \in \{1,\dots,k\}.$$

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass $\det G(x_1,\dots,x_k) \neq 0$ genau dann, wenn die Elemente $x_1,\dots,x_k$ linear unabhängig sind.

Sei nun $v_1,\dots,v_k$ eine Orthonormalbasis von V. Aus obigen Überlegungen und der Stetigkeit der Abbildung $\det : \mathbb{C}^{k\times k} \to \mathbb{C}$ folgt

$$\det G\big(P_N v_1,\dots,P_N v_k\big) \xrightarrow{N\to\infty} \det G\big(v_1,\dots,v_k\big) = 1,$$

womit es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\det G\big(P_N v_1,\dots,P_N v_k\big) \neq 0$ für alle $N \ge N_1$. Für $N \ge N_1$ definieren wir $v_1^N := \frac{P_N v_1}{\|P_N v_1\|_H}$ und induktiv für $j = 2,\dots,k$

$$u_j^N := P_N v_j - \sum_{n=1}^{j-1} \left\langle P_N v_j, v_n^N\right\rangle_H v_n^N, \quad v_j^N := \frac{u_j^N}{\|u_j^N\|_H}.$$

Dann ist $\{v_1^N,\dots,v_k^N\}$ eine Orthonormalbasis von $P_N V$ und induktiv zeigt man leicht, dass $\lim_{N\to\infty} v_j^N = v_j$ für alle $j \in \{1,\dots,k\}$.

Wir bezeichnen für $N \in \mathbb{N}$ mit $\pi_V^N \in \mathcal{L}(H)$ die orthogonale Projektion auf $P_N V$ und mit $\pi_V \in \mathcal{L}(H)$ die orthogonale Projektion auf V. Dann gilt für $x \in H$ und $N \geq N_1$

$$\begin{aligned}\left\|\pi_V x - \pi_V^N x\right\|_H &= \left\| \sum_{j=1}^k \left\langle x, v_j \right\rangle_H v_j - \left\langle x, v_j^N \right\rangle_H v_j^N \right\|_H \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^k \left\| \left\langle x, v_j \right\rangle_H v_j - \left\langle x, v_j^N \right\rangle_H v_j + \left\langle x, v_j^N \right\rangle_H v_j - \left\langle x, v_j^N \right\rangle_H v_j^N \right\|_H \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^k \left| \left\langle x, v_j - v_j^N \right\rangle_H \right| + \left| \left\langle x, v_j^N \right\rangle_H \right| \cdot \left\| v_j - v_j^N \right\|_H \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \\ &\leq 2\|x\|_H \sum_{j=1}^k \left\| v_j - v_j^N \right\|_H.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\lim_{N\to\infty} \pi_V^N = \pi_V$ bezüglich der Operatornorm auf $\mathcal{L}(H)$.

Für $N \in \mathbb{N}$ sei nun $\pi_W^N \in \mathcal{L}(H)$ die orthogonale Projektion auf $P_N W$ und $\pi_W \in \mathcal{L}(H)$ die orthogonale Projektion auf W, dann folgt völlig analog zu obigen Überlegungen $\lim_{N\to\infty} \pi_W^N = \pi_W$ bezüglich der Operatornorm auf $\mathcal{L}(H)$. Laut Voraussetzung gilt $P_N V = P_N W$ für alle $N \in \mathbb{N}$, woraus $\pi_V^N = \pi_W^N$ für alle $N \in \mathbb{N}$ folgt. Insgesamt gilt also $\pi_V = \lim_{N\to\infty} \pi_V^N = \lim_{N\to\infty} \pi_W^N = \pi_W$ und damit $V = W$. □

Satz 3.3.12 (vierter Identitätssatz). *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein separabler Hilbertraum über $\mathbb{C}$, $k, n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Sind $f : \Omega \to Gr(k, H)$ und $g : \Omega \to Gr(k, H)$ analytisch und hat die Menge $\mathcal{M} := \{\lambda \in \Omega : f(\lambda) = g(\lambda)\}$ nichtleeres Inneres, dann ist $\mathcal{M} = \Omega$.*

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{N} := \overline{\left\{\lambda \in \Omega : f(\lambda) = g(\lambda)\right\}^\circ} \cap \Omega.$$

Diese ist laut Voraussetzung nichtleer und offensichtlich abgeschlossen bezüglich der Spurtopologie auf Ω. Um zu zeigen, dass sie auch offen ist, sei $w \in \mathcal{N}$ beliebig. Dann existiert eine offene Umgebung Δ_1 von w und analytische Funktionen $\gamma_j : \Delta_1 \to H, j = 1, \ldots, k$, sodass $f(\lambda) = \operatorname{span}\{\gamma_1(\lambda), \ldots, \gamma_k(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \Delta_1$. Weiters existiert eine offene Umgebung Δ_2 von w und analytische Funktionen $\xi_j : \Delta_2 \to H, j = 1, \ldots, k$, sodass $g(\lambda) = \operatorname{span}\{\xi_1(\lambda), \ldots, \xi_k(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \Delta_2$.

Da H ein separabler Hilbertraum ist, existiert eine abzählbare Orthonormalbasis $\{b_i : i \in \mathbb{N}\}$ von H. Für $N \in \mathbb{N}$ sei $H_N := \operatorname{span}\{b_i : 1 \leq i \leq N\}$ und $P_N \in \mathcal{L}(H)$ die orthogonale Projektion auf H_N. Dann gilt

$$P_N x = \sum_{i=1}^N \langle x, b_i \rangle_H b_i \xrightarrow{N\to\infty} \sum_{i=1}^\infty \langle x, b_i \rangle_H b_i = x, \quad \forall\, x \in H.$$

Für $x_1, \ldots, x_k \in H$ bezeichnen wir mit $G(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{C}^{k\times k}$ die Gram-Matrix, d.h.

$$G(x_1, \ldots, x_k)_{i,j} := \langle x_i, x_j \rangle_H, \quad \forall\, i, j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass $\det G(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$ genau dann, wenn die Elemente $x_1, \ldots, x_k$ linear unabhängig sind. Es gilt also $\det G\big(\gamma_1(w), \ldots, \gamma_k(w)\big) \neq 0$. Da die Abbildung $\det : \mathbb{C}^{k\times k} \to \mathbb{C}$ stetig ist gilt

$$\det G\big(P_N\gamma_1(w), \ldots, P_N\gamma_k(w)\big) \xrightarrow{N\to\infty} \det G\big(\gamma_1(w), \ldots, \gamma_k(w)\big) \neq 0,$$

womit ein $N_1 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\det G\big(P_{N_1}\gamma_1(w), \dots, P_{N_1}\gamma_k(w)\big) \neq 0$. Aus der Stetigkeit der Funktionen $\gamma_j, j = 1, \dots, k$ folgt nun die Existenz einer offenen Umgebung Δ_3 von w, sodass $\det G\big(P_{N_1}\gamma_1(\lambda), \dots, P_{N_1}\gamma_k(\lambda)\big) \neq 0$ für alle $\lambda \in \Delta_3$. Um zu zeigen, dass auch

$$\det G\big(P_N\gamma_1(\lambda), \dots, P_N\gamma_k(\lambda)\big) \neq 0, \quad \forall\, \lambda \in \Delta_3, N \geq N_1 \tag{3.1}$$

gilt, sei $\sum_{j=1}^k \alpha_j P_N \gamma_j(\lambda) = 0$ für ein $\lambda \in \Delta_3$, ein $N \geq N_1$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\sum_{j=1}^k \alpha_j \gamma_j(\lambda) \in \ker P_N = H_N^\perp \subseteq H_{N_1}^\perp = \ker P_{N_1}$, also $\sum_{j=1}^k \alpha_j P_{N_1}\gamma_j(\lambda) = 0$. Da die Elemente $P_{N_1}\gamma_1(\lambda), \dots, P_{N_1}\gamma_k(\lambda)$ linear unabhängig sind, folgt daraus $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, womit auch die Elemente $P_N\gamma_1(\lambda), \dots, P_N\gamma_k(\lambda)$ linear unabhängig sind. Also gilt (3.1).

Analog folgt die Existenz eines Index $N_2 \in \mathbb{N}$ und einer offenen Umgebung Δ_4 von w, sodass

$$\det G\big(P_N\xi_1(\lambda), \dots, P_N\xi_k(\lambda)\big) \neq 0, \quad \forall\, \lambda \in \Delta_4, N \geq N_2 \tag{3.2}$$

gilt. Sei nun $\Delta := \Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 \cap \Delta_4$ und $N_0 := \max(N_1, N_2)$. O.B.d.A. können wir annehmen, dass Δ zusammenhängend ist.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass $\Delta \subseteq \mathcal{N}$. Sei zunächst $N \geq N_0$ beliebig aber fest gewählt. Da H_N ein N-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist, existiert ein Vektorraumisomorphismus $\Psi_N : H_N \to \mathbb{C}^N$. Nach Beispiel 3.1.7 ist $Gr(k, \mathbb{C}^N)$ eine Mannigfaltigkeit und die Abbildung $\pi : M_{k,N}(\mathbb{C}) \to Gr(k, \mathbb{C}^N) : A \mapsto \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_k\}$ analytisch, wobei wir mit $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}^N$ wieder die Zeilen der Matrix A bezeichnen. Wir definieren nun die Abbildungen

$$F : \Delta \to M_{k,N}(\mathbb{C}) : \lambda \mapsto \begin{bmatrix} \Psi_N P_N \gamma_1(\lambda) \\ \vdots \\ \Psi_N P_N \gamma_k(\lambda) \end{bmatrix}$$

und

$$G : \Delta \to M_{k,N}(\mathbb{C}) : \lambda \mapsto \begin{bmatrix} \Psi_N P_N \xi_1(\lambda) \\ \vdots \\ \Psi_N P_N \xi_k(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Diese sind wegen (3.1) und (3.2) wohldefiniert. Da die Funktionen γ_j und ξ_j für $j \in \{1, \dots, k\}$ analytisch sind, sind auch F und G analytisch (als Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten). Die Abbildungen $\Psi_N P_N f : \Delta \to Gr(k, \mathbb{C}^N) : \lambda \mapsto \pi \circ F(\lambda)$ und $\Psi_N P_N g : \Delta \to Gr(k, \mathbb{C}^N) : \lambda \mapsto \pi \circ G(\lambda)$ sind also nach Korollar 3.1.13 analytisch als Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten. Da Δ eine offene Umgebung von w ist, gilt $\Delta \cap \big\{\lambda \in \Omega : f(\lambda) = g(\lambda)\big\}^\circ \neq \emptyset$. Die Menge $\{\lambda \in \Delta : \Psi_N P_N f(\lambda) = \Psi_N P_N g(\lambda)\}$ hat also nichtleeres Inneres, womit laut Korollar 3.1.14 $\Psi_N P_N f(\lambda) = \Psi_N P_N g(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Delta$ gilt. Insgesamt erhalten wir

$$P_N f(\lambda) = P_N g(\lambda), \quad \forall\, \lambda \in \Delta, N \geq N_0.$$

Aus Proposition 3.3.11 folgt nun $f(\lambda) = g(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Delta$, also $\Delta \subseteq \mathcal{N}$. Damit ist $\mathcal{N}$ auch offen, und es folgt $\mathcal{N} = \Omega$ und daraus schließlich $\mathcal{M} = \Omega$. □

Satz 3.3.13 (Stabilitätssatz)**.** *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein separabler Hilbertraum über $\mathbb{C}$, $k, n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Seien weiters $f : \Omega \to Gr(k, H)$ und $\tilde{f} : \Omega \to Gr(k, H)$ analytisch mit*

$$\operatorname{cls} \bigcup \big\{f(\lambda) : \lambda \in \Omega\big\} = \operatorname{cls} \bigcup \big\{\tilde{f}(\lambda) : \lambda \in \Omega\big\} = H.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Die Abbildungen f und $\tilde{f}$ sind kongruent.

(ii) Die Hermite'schen Vektorbündel $(\pi_f, E_f, \Omega, h_f)$ und $(\pi_{\tilde{f}}, E_{\tilde{f}}, \Omega, h_{\tilde{f}})$ sind äquivalent.

(*iii*) *Die Hermite'schen Vektorbündel* $(\pi_f, E_f, \Omega, h_f)$ *und* $(\pi_{\tilde{f}}, E_{\tilde{f}}, \Omega, h_{\tilde{f}})$ *sind lokal äquivalent.*

(*iv*) *Es gibt eine nichtleere offene Teilmenge* Δ *von* Ω*, sodass die Hermite'schen Vektorbündel* $\big(\pi_f, \pi_f^{-1}(\Delta), \Delta, h_f\big)$ *und* $\big(\pi_{\tilde{f}}, \pi_{\tilde{f}}^{-1}(\Delta), \Delta, h_{\tilde{f}}\big)$ *äquivalent sind.*

Beweis. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) Sind f und $\tilde{f}$ kongruent, so sind laut Lemma 3.3.5 die zugehörigen Hermite'schen Vektorbündel äquivalent. Die Implikationen (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) $\Rightarrow$ (*iv*) sind trivial.

(*iv*) $\Rightarrow$ (*i*) *Schritt 1:* Laut Voraussetzung existiert eine nichtleere offene Teilmenge Δ_1 von Ω und ein isometrischer Vektorbündelisomorphismus $\Phi : \pi_f^{-1}(\Delta_1) \to \pi_{\tilde{f}}^{-1}(\Delta_1)$. Sei $w \in \Delta_1$ beliebig aber fest gewählt. Dann existiert eine offene Umgebung $\Delta_2 \subseteq \Omega$ von w und analytische Funktionen $\gamma_j : \Delta_2 \to H, j = 1, \ldots, k$ mit $f(\lambda) = \operatorname{span}\{\gamma_1(\lambda), \ldots, \gamma_k(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \Delta_2$. Wir setzen $\Delta := \Delta_1 \cap \Delta_2$. Für $j \in \{1, \ldots, k\}$ ist laut Proposition 3.2.6 die Abbildung

$$\eta_j : \Delta \to E_f : \lambda \mapsto \big(\lambda, \gamma_j(\lambda)\big)$$

ein analytischer Schnitt von E_f über Δ. Wegen $\Phi(\lambda, \gamma_j(\lambda)) \in E_{\tilde{f},\lambda}$ für alle $\lambda \in \Delta$, ist damit die Abbildung $\Phi \circ \eta_j : \Delta \to E_{\tilde{f}}$ ein analytischer Schnitt von $E_{\tilde{f}}$ über Δ. Wir definieren nun für $j \in \{1, \ldots, k\}$ die (laut Proposition 3.2.6) analytischen Abbildungen

$$\tilde{\gamma}_j : \Delta \to H : \lambda \mapsto \tilde{\pi}_2 \circ \Phi \circ \eta_j(\lambda),$$

wobei $\tilde{\pi}_2 : E_{\tilde{f}} \to H : (\lambda, y) \mapsto y$. Für beliebiges $\lambda \in \Delta$ folgt aus $\Phi(E_{f,\lambda}) = E_{\tilde{f},\lambda}$ und der Linearität von $\Phi|_{E_{f,\lambda}}$ und $\tilde{\pi}_2$ die Gültigkeit von $\tilde{f}(\lambda) = \operatorname{span}\{\tilde{\gamma}_1(\lambda), \ldots, \tilde{\gamma}_k(\lambda)\}$. Da $\Phi|_{E_{f,\lambda}}$ außerdem eine Isometrie ist, folgt für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ und alle $\lambda \in \Delta$

$$\begin{aligned}\big\langle \tilde{\gamma}_i(\lambda), \tilde{\gamma}_j(\lambda)\big\rangle_H &= \langle \Phi(\lambda, \gamma_i(\lambda)), \Phi(\lambda, \gamma_j(\lambda))\rangle_{E_{\tilde{f},\lambda}} = \\ &= \langle (\lambda, \gamma_i(\lambda)), (\lambda, \gamma_j(\lambda))\rangle_{E_{f,\lambda}} = \big\langle \gamma_i(\lambda), \gamma_j(\lambda)\big\rangle_H.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Da die Abbildungen γ_j und $\tilde{\gamma}_j$ für $j = 1, \ldots, k$ analytisch sind, gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ weiters

$$\begin{aligned}\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \Big(\zeta \mapsto \big\langle \gamma_i(\zeta), \gamma_j(\zeta)\big\rangle_H\Big)(\lambda) &= \partial^\alpha \Bigg(\zeta \mapsto \sum_{0 \le \tau \le \beta} \binom{\beta}{\tau} \big\langle \underbrace{\bar{\partial}^\tau \gamma_i(\zeta)}_{=0, \text{ falls } \tau \neq 0}, \partial^{\beta-\tau} \gamma_j(\zeta)\big\rangle_H\Bigg)(\lambda) = \\ &= \partial^\alpha \Big(\zeta \mapsto \big\langle \gamma_i(\zeta), \partial^\beta \gamma_j(\zeta)\big\rangle_H\Big)(\lambda) = \\ &= \sum_{0 \le \sigma \le \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \big\langle \partial^{\alpha-\sigma} \gamma_i(\lambda), \underbrace{\bar{\partial}^\sigma \partial^\beta \gamma_j(\lambda)}_{=0, \text{ falls } \sigma \neq 0} \big\rangle_H = \\ &= \big\langle \partial^\alpha \gamma_i(\lambda), \partial^\beta \gamma_j(\lambda)\big\rangle_H\end{aligned} \tag{3.4}$$

und genauso

$$\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \Big(\zeta \mapsto \big\langle \tilde{\gamma}_i(\zeta), \tilde{\gamma}_j(\zeta)\big\rangle_H\Big)(\lambda) = \big\langle \partial^\alpha \tilde{\gamma}_i(\lambda), \partial^\beta \tilde{\gamma}_j(\lambda)\big\rangle_H. \tag{3.5}$$

Aus (3.3), (3.4) und (3.5) folgt nun

$$\big\langle \partial^\alpha \gamma_i(\lambda), \partial^\beta \gamma_j(\lambda)\big\rangle_H = \big\langle \partial^\alpha \tilde{\gamma}_i(\lambda), \partial^\beta \tilde{\gamma}_j(\lambda)\big\rangle_H,$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $\lambda \in \Delta$.

Schritt 2: Für beliebiges $\mu \in \Delta$ können wir nun einen linearen Operator

$$V_\mu : \operatorname{span}\big\{\partial^\alpha \gamma_j(\mu) : j \in \{1, \ldots, k\}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\big\} \to \operatorname{cls}\big\{\partial^\alpha \tilde{\gamma}_j(\mu) : j \in \{1, \ldots, k\}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\big\}$$

definieren durch

$$V_\mu\big(\partial^\alpha \gamma_j(\mu)\big) := \partial^\alpha \tilde{\gamma}_j(\mu), \quad \forall\, j \in \{1,\dots,k\}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Der Operator V_μ ist wegen

$$\big\langle V_\mu\big(\partial^\alpha \gamma_i(\mu)\big), V_\mu\big(\partial^\beta \gamma_j(\mu)\big)\big\rangle_H = \big\langle \partial^\alpha \tilde{\gamma}_i(\mu), \partial^\beta \tilde{\gamma}_j(\mu)\big\rangle_H = \big\langle \partial^\alpha \gamma_i(\mu), \partial^\beta \gamma_j(\mu)\big\rangle_H$$

eine Isometrie und daher insbesondere beschränkt. Es existiert also eine eindeutige isometrische Fortsetzung von V_μ auf $\operatorname{cls}\big\{\partial^\alpha \gamma_j(\mu) : j \in \{1,\dots,k\}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\big\}$, welche wir mit U_μ bezeichnen. Da U_μ isometrisch ist, ist $\operatorname{ran} U_\mu$ abgeschlossen. Weiters folgt aus der Definition von V_μ, dass $\operatorname{ran} U_\mu \supseteq \operatorname{span}\big\{\partial^\alpha \tilde{\gamma}_j(\mu) : j \in \{1,\dots,k\}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\big\}$. Laut Lemma 3.3.10 ist aber

$$\operatorname{cls}\big\{\partial^\alpha \gamma_j(\mu) : j \in \{1,\dots,k\}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\big\} = H \quad \text{und} \quad \operatorname{cls}\big\{\partial^\alpha \tilde{\gamma}_j(\mu) : j \in \{1,\dots,k\}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\big\} = H,$$

also gilt $\operatorname{ran} U_\mu = H$. Somit ist $U_\mu \in \mathcal{L}(H)$ ein unitärer Operator.

Schritt 3: Als nächstes zeigen wir, dass die Definition von U_ζ unabhängig von $\zeta \in D_r^n(\mu)$ ist. Sei dazu $\zeta \in D_r^n(\mu)$ beliebig, $j \in \{1,\dots,k\}$ und $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ dann gilt (siehe Korollar 1.2.14)

$$\partial^\beta \gamma_j(\zeta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^{\alpha+\beta}\gamma_j(\mu)}{\alpha!}(\zeta-\mu)^\alpha \quad \text{und} \quad \partial^\beta \tilde{\gamma}_j(\zeta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^{\alpha+\beta}\tilde{\gamma}_j(\mu)}{\alpha!}(\zeta-\mu)^\alpha.$$

Ist nun $U_\zeta \in \mathcal{L}(H)$ der zu ζ gehörige unitäre Operator, dann folgt

$$\begin{aligned} U_\mu\big(\partial^\beta \gamma_j(\zeta)\big) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{U_\mu\big(\partial^{\alpha+\beta}\gamma_j(\mu)\big)}{\alpha!}(\zeta-\mu)^\alpha = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^{\alpha+\beta}\tilde{\gamma}_j(\mu)}{\alpha!}(\zeta-\mu)^\alpha = \partial^\beta \tilde{\gamma}_j(\zeta) = U_\zeta\big(\partial^\beta \gamma_j(\zeta)\big), \end{aligned}$$

für alle $j \in \{1,\dots,k\}$ und alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, also $U_\zeta = U_\mu$ für alle $\zeta \in D_r^n(\mu)$.

Schritt 4: Setzen wir $U := U_\mu \in \mathcal{L}(H)$, dann gilt $\tilde{f}(\lambda) = U_\lambda f(\lambda) = U f(\lambda)$ für alle $\lambda \in D_r^n(\mu)$. Die Menge $\{\lambda \in \Omega : \tilde{f}(\lambda) = U f(\lambda)\}$ hat also nichtleeres Inneres. Da die Abbildungen $\tilde{f} : \Omega \to Gr(k,H)$ und $Uf : \Omega \to Gr(k,H)$ analytisch sind, folgt daraus mit Hilfe von Satz 3.3.12

$$\tilde{f}(\lambda) = U f(\lambda), \quad \forall\, \lambda \in \Omega.$$

$\square$

Kapitel 4

Cowen-Douglas-Operatoren

4.1 Cowen-Douglas-Operatoren

Im Folgenden sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ stets ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum über $\mathbb{C}$. Falls nicht anders angegeben bezeichnen wir mit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und mit $k \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl.

Definition 4.1.1. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}_k(\Omega)$ die Menge aller Operatoren $T \in \mathcal{L}(H)$ mit folgenden Eigenschaften:

(CD1) $\Omega \subset \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \text{ ist nicht invertierbar}\}$.

(CD2) Für alle $\lambda \in \Omega$ ist $\operatorname{ran}(T - \lambda I) = H$.

(CD3) Für alle $\lambda \in \Omega$ ist $\dim\ker(T - \lambda I) = k$.

(CD4) $\operatorname{cls}\bigcup\{\ker(T - \lambda I) : \lambda \in \Omega\} = H$.

Operatoren $T \in \mathcal{B}_k(\Omega)$ nennt man *Cowen-Douglas-Operatoren*.

Bemerkung 4.1.2. Man beachte, dass $\mathcal{B}_k(\Omega) = \emptyset$, falls H ein endlich-dimensionaler Hilbertraum oder $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ unbeschränkt ist.

Bemerkung 4.1.3. Für einen Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ mit den Eigenschaften (CD1) und (CD2) ist die Eigenschaft (CD3) äquivalent zu

(CD3*) Es existiert ein $w \in \Omega$, sodass $\dim\ker(T - wI) = k$.

Für beliebiges $\lambda \in \Omega$ ist ja $\operatorname{def}(T - \lambda I) = \dim H/\operatorname{ran}(T - \lambda I) = 0$, also $(T - \lambda I) \in \mathcal{F}_{\mathrm{def}}(H)$ und $\operatorname{ind}(T-\lambda I) = \dim\ker(T-\lambda I)$. Da die Abbildung $\lambda \mapsto \operatorname{ind}(T-\lambda I)$ laut Satz 2.1.9 lokal konstant ist und Ω laut Voraussetzung zusammenhängend ist, folgt daraus $\dim\ker(T-\lambda I) = \dim\ker(T-\mu I)$ für alle $\mu \in \Omega$. Die Bedingung (CD3) besagt also „nur“, dass $\dim\ker(T - \lambda I)$ endlich ist und damit $(T - \lambda I) \in \mathcal{F}(H)$.

Beispiel 4.1.4 (Linksshift, Teil 1). Sei $H = \ell^2(\mathbb{N}) := \big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty\big\}$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\big\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} := \sum_{n=1}^\infty x_n\,\overline{y}_n.$$

Wir definieren den Linksshift $S \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ durch

$$S(x_1, x_2, \ldots) := (x_2, x_3, \ldots).$$

Für $\lambda \in \mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^{(n-1)}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (|\lambda|^2)^n = \frac{1}{1-|\lambda|^2} < \infty$, also ist $(\lambda^{(n-1)})_{n\in\mathbb{N}} = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{N})$. Weiters gilt

$$\big(S - \lambda I\big)(1, \lambda, \lambda^2, \ldots) = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3 \ldots) - \lambda\,(1, \lambda, \lambda^2, \ldots) = (0, 0, \ldots).$$

Ist umgekehrt $\big(S - \lambda I\big)(x_1, x_2, \ldots) = 0$ für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, so folgt

$$x_n = \lambda\, x_{n-1}, \quad \forall\, n \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x_1\,(1, \lambda, \lambda^2, \ldots).$$

Es ist also $\mathbb{D} \subseteq \sigma(S)$ und $\dim\ker(S - \lambda I) = 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{D}$.

Um die Gültigkeit von $\operatorname{ran}(S-\lambda I) = H$ für alle $\lambda \in \mathbb{D}$ zu zeigen benötigen wir die Adjungierte $S^* \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ von S. Man überlegt sich leicht, dass

$$S^*(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots), \quad \forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Daraus ergibt sich $S \circ S^* = I$. Für $\lambda \in \mathbb{D}$ ist also $(S - \lambda I) = S \circ (I - \lambda S^*)$. Wegen $\|\lambda S^*\| = |\lambda| \cdot \|S^*\| = |\lambda| < 1$ ist der Operator $(I - \lambda S^*)$ invertierbar und es folgt

$$(S - \lambda I) \circ (I - \lambda S^*)^{-1} \circ S^* = S \circ (I - \lambda S^*) \circ (I - \lambda S^*)^{-1} \circ S^* = I.$$

Es ist also $\operatorname{ran}(S - \lambda I) = H$ für alle $\lambda \in \mathbb{D}$. Der Operator $S \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ erfüllt somit die Eigenschaften (CD1) – (CD3) für $k = 1$ und $\Omega = \mathbb{D}$. Um zu zeigen, dass $S \in \mathcal{B}_1(\mathbb{D})$ ist, benötigen wir eine äquivalente Formulierung von (CD4), die wir in Korollar 4.1.13 beweisen. ♯

Definition 4.1.5. Für einen Operator $T \in \mathcal{B}_k(\Omega)$ definieren wir

$$E_T := \{(\lambda, x) \in \Omega \times H : x \in \ker(T - \lambda I)\} \quad \text{und} \quad \pi_T : E_T \to \Omega : (\lambda, x) \mapsto \lambda.$$

Für $\lambda \in \Omega$ sei weiters $E_{T,\lambda} := \pi_T^{-1}(\lambda)$ und

$$h_T(\lambda) = \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_{T,\lambda}} : \begin{cases} E_{T,\lambda} \times E_{T,\lambda} & \to & \mathbb{C} \\ \big((\lambda, x); (\lambda, y)\big) & \mapsto & \langle x, y\rangle_H. \end{cases}$$

Satz 4.1.6. *Sei $T \in \mathcal{B}_k(\Omega)$, dann ist die Abbildung*

$$t : \begin{cases} \Omega & \to & Gr(k, H) \\ \lambda & \mapsto & \ker(T - \lambda I) \end{cases}$$

analytisch.

Beweis. Laut Voraussetzung gilt $\dim\ker(T - \lambda I) = k$ für alle $\lambda \in \Omega$. Also ist die Abbildung $t : \Omega \to Gr(k, H)$ wohldefiniert. Da außerdem $(T - \lambda I) \in \mathcal{F}(H)$ für alle $\lambda \in \Omega$, folgt die Behauptung aus Satz 2.1.13. □

Korollar 4.1.7. *Sei $T \in \mathcal{B}_k(\Omega)$, dann ist $(\pi_T, E_T, \Omega, h_T)$ ein Hermite'sches Vektorbündel vom Rang k über Ω.*

Beweis. Die Abbildung $t : \Omega \to Gr(k, H) : \lambda \mapsto \ker(T - \lambda I)$ ist laut Satz 4.1.6 analytisch. Aus Lemma 3.2.4 und Lemma 3.2.10 folgt nun direkt, dass $E_t = E_T$ eine $(k + 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit und $(\pi_T, E_T, \Omega, h_T)$ ein Hermite'sches Vektorbündel vom Rang k über Ω ist. □

Korollar 4.1.8. *Sei Ω_0 eine nichtleere, offene und zusammenhängende Teilmenge von Ω. Dann ist $\mathcal{B}_k(\Omega_0) \supseteq \mathcal{B}_k(\Omega)$.*

Beweis. Sei $T \in \mathcal{B}_k(\Omega)$ beliebig. Wegen $\Omega_0 \subseteq \Omega$, gelten die Eigenschaften (CD1) – (CD3) trivialerweise auch für Ω_0. Da die Abbildung $t : \Omega \to Gr(k, H) : \lambda \mapsto \ker(T - \lambda I)$ laut Satz 4.1.6 analytisch ist, folgt aus Proposition 3.3.6 die Gültigkeit von

$$\operatorname{cls}\bigcup\{\ker(T - \lambda I) : \lambda \in \Omega_0\} = \operatorname{cls}\bigcup\{\ker(T - \lambda I) : \lambda \in \Omega\} = H.$$

Insgesamt ist also $T \in \mathcal{B}_k(\Omega_0)$. □

Definition 4.1.9. Seien H_1 und H_2 Hilberträume über $\mathbb{C}$. Zwei Operatoren $T \in \mathcal{L}(H_1)$ und $\tilde{T} \in \mathcal{L}(H_2)$ heißen *unitär äquivalent*, falls es einen unitären Operator $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ gibt, sodass $UT = \tilde{T}U$.

Satz 4.1.10. *Zwei Operatoren $T, \tilde{T} \in \mathcal{B}_k(\Omega)$ sind genau dann unitär äquivalent, wenn die zugehörigen analytischen Abbildungen*

$$t : \begin{cases} \Omega & \to & Gr(k,H) \\ \lambda & \mapsto & \ker(T - \lambda I) \end{cases} \quad \textit{und} \quad \tilde{t} : \begin{cases} \Omega & \to & Gr(k,H) \\ \lambda & \mapsto & \ker(\tilde{T} - \lambda I) \end{cases}$$

kongruent sind.

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei $U \in \mathcal{L}(H)$ unitär, sodass $\tilde{T} = U^*TU$. Dann gilt für $\lambda \in \Omega$ und $x \in H$

$$(T - \lambda I)Ux = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U^*(T - \lambda I)Ux = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\tilde{T} - \lambda I)x = 0.$$

Damit gilt $\ker(T - \lambda I) = U \ker(\tilde{T} - \lambda I)$ für alle $\lambda \in \Omega$. Die Abbildungen t und $\tilde{t}$ sind also kongruent.

($\Leftarrow$) Sei $W \in \mathcal{L}(H)$ unitär, sodass $\ker(T - \lambda I) = W \ker(\tilde{T} - \lambda I)$ für alle $\lambda \in \Omega$. Dann gilt für $\lambda \in \Omega$ und $x \in \ker(\tilde{T} - \lambda I)$

$$W^*TWx - \tilde{T}x = W^*\lambda Wx - \lambda x = 0.$$

Wegen $\operatorname{cls} \bigcup \{\ker(\tilde{T} - \lambda I) : \lambda \in \Omega\} = H$ folgt daraus $\tilde{T}x = W^*TWx$ für alle $x \in H$. Die Operatoren T und $\tilde{T}$ sind also unitär äquivalent. □

Korollar 4.1.11. *Seien $T, \tilde{T} \in \mathcal{B}_k(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die Operatoren T und $\tilde{T}$ sind unitär äquivalent.

(ii) Die Hermite'schen Vektorbündel $(\pi_T, E_T, \Omega, h_T)$ und $(\pi_{\tilde{T}}, E_{\tilde{T}}, \Omega, h_{\tilde{T}})$ sind äquivalent.

(iii) Die Hermite'schen Vektorbündel $(\pi_T, E_T, \Omega, h_T)$ und $(\pi_{\tilde{T}}, E_{\tilde{T}}, \Omega, h_{\tilde{T}})$ sind lokal äquivalent.

(iv) Es gibt eine nichtleere offene Teilmenge Δ von Ω, sodass die Hermite'schen Vektorbündel $\big(\pi_T, \pi_T^{-1}(\Delta), \Delta, h_T\big)$ und $\big(\pi_{\tilde{T}}, \pi_{\tilde{T}}^{-1}(\Delta), \Delta, h_{\tilde{T}}\big)$ äquivalent sind.

Beweis. Da für die laut Satz 4.1.6 analytischen Abbildungen

$$t : \begin{cases} \Omega & \to & Gr(k,H) \\ \lambda & \mapsto & \ker(T - \lambda I) \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{t} : \begin{cases} \Omega & \to & Gr(k,H) \\ \lambda & \mapsto & \ker(\tilde{T} - \lambda I) \end{cases}$$

die Voraussetzung

$$\operatorname{cls} \bigcup \big\{ t(\lambda) : \lambda \in \Omega \big\} = \operatorname{cls} \bigcup \big\{ \tilde{t}(\lambda) : \lambda \in \Omega \big\} = H$$

erfüllt ist, folgt die Behauptung direkt aus dem Stabilitätssatz (Satz 3.3.13) und Satz 4.1.10. □

Lemma 4.1.12. *Sei $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ offen und $k \in \mathbb{N}$. Sei weiters $T \in \mathcal{L}(H)$ mit den Eigenschaften* (CD1) – (CD3). *Sind $\gamma_j : \Delta \to H, j = 1, \ldots, k$ analytische Funktionen mit $\ker(T - \lambda I) = \operatorname{span}\{\gamma_1(\lambda), \ldots, \gamma_k(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \Delta$, dann gilt*

(i) $(T - \lambda I)\partial^m \gamma_j(\lambda) = m \cdot \partial^{m-1}\gamma_j(\lambda)$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}, \lambda \in \Delta, m \in \mathbb{N}$ und

(ii) $\ker(T - \lambda I)^m = \operatorname{span}\big\{\partial^n \gamma_j(\lambda) : j \in \{1, \ldots, k\}, n \in \{0, \ldots, m-1\}\big\}$ für alle $\lambda \in \Delta, m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst (i) durch vollständige Induktion nach m. Seien dazu $\lambda \in \Delta$ und $j \in \{1,\dots,k\}$ beliebig aber fest gewählt. Für $\zeta \in \Delta$ gilt laut Voraussetzung $\gamma_j(\zeta) \in \ker(T-\zeta I)$, also $T\gamma_j(\zeta) = \zeta\gamma_j(\zeta)$. Für $m = 1$ gilt also

$$T\big(\partial\gamma_j(\lambda)\big) = \partial\big(\zeta \mapsto T\gamma_j(\zeta)\big)(\lambda) = \partial\big(\zeta \mapsto \zeta\gamma_j(\zeta)\big)(\lambda) = \gamma_j(\lambda) + \lambda\partial\gamma_j(\lambda)$$

und damit $(T-\lambda I)\partial\gamma_j(\lambda) = \gamma_j(\lambda)$. Sei nun $m \in \mathbb{N}$ beliebig und gelte

$$(T-\lambda I)\partial^m\gamma_j(\lambda) = m \cdot \partial^{m-1}\gamma_j(\lambda),$$

dann folgt durch Differenziation

$$-\partial^m\gamma_j(\lambda) + (T-\lambda I)\partial^{m+1}\gamma_j(\lambda) = m \cdot \partial^m\gamma_j(\lambda)$$

und damit $(T-\lambda I)\partial^{m+1}\gamma_j(\lambda) = (m+1)\cdot\partial^m\gamma_j(\lambda)$. Also gilt (i).

Den Punkt (ii) können wir nun ebenfalls durch vollständige Induktion nach m zeigen. Laut Voraussetzung gilt (ii) für $m = 1$. Sei also $m \in \mathbb{N}$ beliebig und gelte

$$\ker(T-\lambda I)^m = \operatorname{span}\big\{\partial^n\gamma_j(\lambda) : j \in \{1,\dots,k\}, n \in \{0,\dots,m-1\}\big\}.$$

Aus (i) folgt

$$(T-\lambda I)^m\partial^m\gamma_j(\lambda) = m!\,\gamma_j(\lambda), \quad \forall\, j \in \{1,\dots,k\}. \tag{4.1}$$

Für $j \in \{1,\dots,k\}$ ist also $\partial^m\gamma_j(\lambda) \in \ker(T-\lambda I)^{m+1}$, aber $\partial^m\gamma_j(\lambda) \notin \ker(T-\lambda I)^m$. Um zu zeigen, dass die Menge $\big\{\partial^m\gamma_1(\lambda),\dots,\partial^m\gamma_k(\lambda)\big\} \subset \ker(T-\lambda I)^{m+1}$ linear unabhängig ist, gelte $\sum_{j=1}^k \alpha_j\,\partial^m\gamma_j(\lambda) = 0$ für gewisse $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{C}$. Dann folgt aus (4.1)

$$0 = (T-\lambda I)^m\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j\,\partial^m\gamma_j(\lambda)\right) = m!\sum_{j=1}^k \alpha_j\,\gamma_j(\lambda),$$

und damit $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Insgesamt ist also die Menge

$$\mathfrak{B} := \big\{\partial^n\gamma_j(\lambda) : j \in \{1,\dots,k\}, n \in \{0,\dots,m\}\big\} \subset \ker(T-\lambda I)^{m+1}$$

linear unabhängig. Nach dem Indextheorem von Atkinson (Lemma 2.1.8) gilt nun

$$\dim\ker(T-\lambda I)^{m+1} = \operatorname{ind}(T-\lambda I)^{m+1} = (m+1)\operatorname{ind}(T-\lambda I) = (m+1)k,$$

womit $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\ker(T-\lambda I)^{(m+1)}$ ist, was die Gültigkeit von (ii) zeigt. □

Korollar 4.1.13. *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Sei weiters $T \in \mathcal{L}(H)$ mit den Eigenschaften* (CD1) – (CD3). *Dann ist die Eigenschaft* (CD4) *äquivalent zu*

(CD4*) *Es existiert ein $w \in \Omega$, sodass* $\operatorname{cls}\bigcup\big\{\ker(T-wI)^m : m \in \mathbb{N}\big\} = H$.

Beweis. Sei $w \in \Omega$ beliebig. Da die Abbildung $t : \Omega \to Gr(k,\Omega) : \lambda \mapsto \ker(T-\lambda I)$ laut Satz 4.1.6 analytisch ist, gibt es eine offene Umgebung $\Delta \subseteq \Omega$ von w und analytische Funktionen $\gamma_j : \Delta \to H, j = 1,\dots,k$, mit $\ker(T-\lambda I) = \operatorname{span}\{\gamma_1(\lambda),\dots,\gamma_k(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \Delta$. Aus Lemma 4.1.12 folgt

$$\operatorname{cls}\bigcup\big\{\ker(T-wI)^m : m \in \mathbb{N}\big\} = \operatorname{cls}\big\{\partial^n\gamma_j(w) : j \in \{1,\dots,k\}, n \in \mathbb{N}_0\big\}.$$

Sei $r > 0$, sodass $\overline{U_r(w)} \subseteq \Omega$, dann folgt aus den Propositionen 3.3.6 und 3.3.7

$$\begin{aligned}\operatorname{cls}\big\{\partial^n\gamma_j(w) : j \in \{1,\dots,k\}, n \in \mathbb{N}_0\big\} &= \operatorname{cls}\big\{\gamma_j(\lambda) : j \in \{1,\dots,k\}, \lambda \in U_r(w)\big\} = \\ &= \operatorname{cls}\bigcup\big\{\ker(T-\lambda I) : \lambda \in U_r(w)\big\} = \operatorname{cls}\bigcup\big\{\ker(T-\lambda I) : \lambda \in \Omega\big\}.\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\operatorname{cls}\bigcup\big\{\ker(T-wI)^m : m \in \mathbb{N}\big\} = \operatorname{cls}\bigcup\big\{\ker(T-\lambda I) : \lambda \in \Omega\big\},$$

was die Behauptung zeigt. □

Beispiel 4.1.14 (Linksshift, Teil 2). Wir verwenden die Notation aus Beispiel 4.1.4 und betrachten wieder den Linksshift $S \in \ell^2(\mathbb{N})$. Wir haben bereits gezeigt, dass S die Eigenschaften (CD1) – (CD3) für $k = 1$ und $\Omega = \mathbb{D}$ erfüllt. Nun wollen wir zeigen, dass S die Bedingung (CD4*) für $w = 0$ erfüllt. Dazu definieren wir zunächst

$$e_j := (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \delta_{3j}, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{N}), \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $\{e_1, e_2, \ldots\}$ eine Orthonormalbasis von $\ell^2(\mathbb{N})$. Weiters gilt

$$\ker S^m = \operatorname{span}\{e_j : 1 \leq j \leq m\}, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

und damit

$$\operatorname{cls} \bigcup \big\{ \ker S^m : m \in \mathbb{N} \big\} = \operatorname{cls}\{e_j : j \in \mathbb{N}\} = \ell^2(\mathbb{N}).$$

Insgesamt ist also $S \in \mathcal{B}_1(\mathbb{D})$. ♯

Lemma 4.1.15. *Ist $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum über $\mathbb{C}$, dann gilt $H \cong \ell^2(\mathbb{N})$, d.h. es gibt einen isometrischen Isomorphismus $\Psi : H \to \ell^2(\mathbb{N})$.*

Beweis. Sei $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von H. Für $x \in H$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $(\Psi x)_n := \langle x, b_n\rangle_H$. Die lineare Abbildung $\Psi : H \to \ell^2(\mathbb{N}) : x \to \Psi x$ ist wegen der Parseval'schen Gleichung

$$\|x\|_H^2 = \langle x, x\rangle_H = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, b_n\rangle_H|^2, \quad \forall\, x \in H$$

wohldefiniert und isometrisch. Um zu zeigen, dass Ψ surjektiv ist, sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ beliebig. Dann gilt

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n b_n \Big\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

also ist $x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n b_n \in H$ und $(\Psi x)_n = \langle x, b_n\rangle_H = x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt ist Ψ ein isometrischer Isomorphismus. □

Proposition 4.1.16. *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Sei $f : \Omega \to Gr(k, H)$ analytisch, $w \in \Omega$ und $\{b_1, \ldots, b_k\}$ eine Orthonormalbasis von $f(w)$. Sei weiters $\Delta_1 \subseteq \Omega$ eine offene Umgebung von w und $\gamma_j : \Delta_1 \to H, j = 1, \ldots, k$ analytisch, sodass $\gamma_j(w) = b_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$ und $f(\lambda) = \operatorname{span}\{\gamma_1(\lambda), \ldots, \gamma_k(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \Delta_1$.*
Dann gibt es eine offene Umgebung Δ_2 von w und analytische Funktonen $\hat{\gamma}_j : \Delta_2 \to H$ für $j = 1, \ldots, k$, sodass

1. *$\hat{\gamma}_j(w) = b_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$,*
2. *$f(\lambda) = \operatorname{span}\{\hat{\gamma}_1(\lambda), \ldots, \hat{\gamma}_k(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \Delta_2$ und*
3. *$\big\langle \hat{\gamma}_i(\lambda), b_j \big\rangle_H = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ und alle $\lambda \in \Delta_2$.*

Beweis. Für $\lambda \in \Delta_1$ sei $C(\lambda) \in \mathbb{C}^{k\times k}$ definiert durch

$$C(\lambda)_{i,j} := \langle \gamma_i(\lambda), b_j\rangle_H, \quad \forall\, i, j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Da die Funktionen $\gamma_j, j = 1, \ldots, k$ analytisch sind, ist die Abbildung $C : \Delta_1 \to \mathbb{C}^{k\times k} : \lambda \mapsto C(\lambda)$ analytisch. Weiters gilt laut Voraussetzung $C(w) = I_k \in GL_k(\mathbb{C})$, wobei wir mit I_k die Einheitsmatrix bezeichnen. Es existiert also eine offene Umgebung $\Delta_2 \subseteq \Delta_1$ von w, sodass die Matrix $C(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Delta_2$ invertierbar ist. Nach Lemma 1.1.9 ist somit auch die Abbildung $C(\cdot)^{-1} : \Delta_2 \to \mathbb{C}^{k\times k} : \lambda \mapsto C(\lambda)^{-1}$ analytisch. Wir definieren nun für $j \in \{1, \ldots, k\}$ die Abbildungen

$$\hat{\gamma}_j : \Delta_2 \to H : \lambda \mapsto \sum_{i=1}^{k} \big(C(\lambda)^{-1}\big)_{j,i}\, \gamma_i(\lambda).$$

Diese sind analytisch und wegen $C(w) = I_k$ gilt $\hat{\gamma}_j(w) = \gamma_j(w) = b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$. Um zu zeigen, dass die Elemente $\hat{\gamma}_1(\lambda), \dots, \hat{\gamma}_k(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Delta_2$ linear unabhängig sind, gelte $\sum_{j=1}^k \alpha_j \hat{\gamma}_j(\lambda) = 0$ für ein $\lambda \in \Delta_2$ und gewisse $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$. Es ist also

$$0 = \sum_{j=1}^k \alpha_j \left(\sum_{i=1}^k \big(C(\lambda)^{-1}\big)_{j,i} \gamma_i(\lambda) \right) = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \big(C(\lambda)^{-1}\big)_{j,i} \right) \gamma_i(\lambda).$$

Daraus folgt $\sum_{j=1}^k \alpha_j \big(C(\lambda)^{-1}\big)_{j,i} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$, was äquivalent zu

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \cdot C(\lambda)^{-1} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^k$$

ist. Es muss also $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ gelten. Dies zeigt

$$\operatorname{span}\{\hat{\gamma}_1(\lambda), \dots, \hat{\gamma}_k(\lambda)\} = \operatorname{span}\{\gamma_1(\lambda), \dots, \gamma_k(\lambda)\} = f(\lambda), \quad \forall\, \lambda \in \Delta_2.$$

Um den Beweis abzuschließen, sei bemerkt, dass die Gleichung $C(\lambda)^{-1} \cdot C(\lambda) = I_k$ für $\lambda \in \Delta_2$ äquivalent ist zu

$$\sum_{\ell=1}^k \big(C(\lambda)^{-1}\big)_{i,\ell} C(\lambda)_{\ell,j} = \delta_{ij}, \quad \forall\, i,j \in \{1, \dots, k\}.$$

Für $i, j \in \{1, \dots, k\}$ und $\lambda \in \Delta_2$ gilt also

$$\delta_{ij} = \sum_{\ell=1}^k \big(C(\lambda)^{-1}\big)_{i,\ell} \big\langle \gamma_\ell(\lambda), b_j \big\rangle_H = \Big\langle \sum_{\ell=1}^k \big(C(\lambda)^{-1}\big)_{i,\ell} \gamma_\ell(\lambda), b_j \Big\rangle_H = \big\langle \hat{\gamma}_i(\lambda), b_j \big\rangle_H,$$

woraus die letzte Behauptung folgt. □

Definition 4.1.17. Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $k, m \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zwei analytische Abbildungen $f, \tilde{f} : \Omega \to Gr(k, X)$ *stimmen in* $w \in \Omega$ *von* m*-ter Ordnung überein*, falls es offene Umgebungen $\Delta, \tilde{\Delta} \subseteq \Omega$ von w und analytische Funktionen $\gamma_j : \Delta \to X, \tilde{\gamma}_j : \tilde{\Delta} \to X, j = 1, \dots, k$ gibt, sodass

1. $f(\lambda) = \operatorname{span}\{\gamma_1(\lambda), \dots, \gamma_k(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \Delta$,
2. $\tilde{f}(\lambda) = \operatorname{span}\{\tilde{\gamma}_1(\lambda), \dots, \tilde{\gamma}_k(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \tilde{\Delta}$ und
3. $\partial^n \gamma_j(w) = \partial^n \tilde{\gamma}_j(w)$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ und alle $n \in \{0, \dots, m\}$.

Definition 4.1.18. Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $k, m \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zwei analytische Abbildungen $f, \tilde{f} : \Omega \to Gr(k, X)$ *berühren einander von* m*-ter Ordnung*, falls zu jedem $w \in \Omega$ ein unitärer Operator $U_w \in \mathcal{L}(H)$ existiert, sodass die Abbildungen $\tilde{f}$ und $U_w f$ in w von m-ter Ordnung übereinstimmen.

Satz 4.1.19. *Seien* $T, \tilde{T} \in \mathcal{B}_k(\Omega)$ *und* $t, \tilde{t} : \Omega \to Gr(k, H)$ *definiert durch* $t(\lambda) := \ker(T - \lambda I)$ *und* $\tilde{t}(\lambda) := \ker(\tilde{T} - \lambda I)$. *Für* $w \in \Omega$ *und* $m \in \mathbb{N}$ *sei weiters* $N_w^{[m]} := (T - wI)|_{\ker(T-wI)^{m+1}}$ *und* $\tilde{N}_w^{[m]} := (\tilde{T} - wI)|_{\ker(\tilde{T}-wI)^{m+1}}$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gibt einen unitären Operator $U_w \in \mathcal{L}(H)$, *sodass die Abbildungen* $\tilde{t}$ *und* $U_w t$ *in* w *von* m*-ter Ordnung übereinstimmen.*

(ii) Die Operatoren $N_w^{[m]}$ *und* $\tilde{N}_w^{[m]}$ *sind unitär äquivalent.*

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen, sei $H_1 := \ker(T - wI)^{m+1}$ und $H_2 := \ker(\tilde{T} - wI)^{m+1}$. Die Räume H_1 und H_2 sind als abgeschlossene lineare Teilräume des Hilbertraumes H ebenfalls Hilberträume. Weiters gilt für $x \in H_1$ klarerweise $(T - wI)x \in \ker(T - wI)^m \subseteq H_1$, also kann man $N_w^{[m]}$ als Element von $\mathcal{L}(H_1)$ auffassen. Analog gilt $\tilde{N}_w^{[m]} \in \mathcal{L}(H_2)$. Die Operatoren $N_w^{[m]}$ und $\tilde{N}_w^{[m]}$ sind also per definitionem genau dann unitär äquivalent, wenn es einen unitären Operator $W \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ gibt, sodass $WN_w^{[m]} = \tilde{N}_w^{[m]}W$.

($\Rightarrow$) Laut Voraussetzung gibt es zu $w \in \Omega$ einen unitären Operator $U_w \in \mathcal{L}(H)$, offene Umgebungen $\Delta, \tilde{\Delta} \subseteq \Omega$ und analytische Funktionen $\hat{\gamma}_j : \Delta \to H, \tilde{\gamma}_j : \tilde{\Delta} \to H, j = 1, \ldots, k$, sodass

- $U_w \ker(T - \lambda I) = \operatorname{span}\{\hat{\gamma}_1(\lambda), \ldots, \hat{\gamma}_k(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \Delta$,
- $\ker(\tilde{T} - \lambda I) = \operatorname{span}\{\tilde{\gamma}_1(\lambda), \ldots, \tilde{\gamma}_k(\lambda)\}$ für alle $\lambda \in \tilde{\Delta}$ und
- $\partial^n \tilde{\gamma}_j(w) = \partial^n \hat{\gamma}_j(w)$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$ und alle $n \in \{0, \ldots, m\}$ gilt.

Für $j \in \{1, \ldots, k\}$ sei $\gamma_j := U_w^* \hat{\gamma}_j, j = 1, \ldots, k$. Dann sind die Funktionen $\gamma_j : \Delta \to Gr(k, H)$ analytisch und es gilt

$$\ker(T - \lambda I) = \operatorname{span}\{\gamma_1(\lambda), \ldots, \gamma_k(\lambda)\}, \quad \forall\, \lambda \in \Delta.$$

Weiters folgt aus obigen Eigenschaften

$$\partial^n \tilde{\gamma}_j(w) = U_w \partial^n \gamma_j(w), \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, k\}, n \in \{0, \ldots, m\}.$$

Laut Lemma 4.1.12 (ii) gilt außerdem

$$\begin{aligned} H_1 &= \ker(T - wI)^{m+1} = \operatorname{span}\{\partial^n \gamma_j(w) : j \in \{1, \ldots, k\}, n \in \{0, \ldots, m\}\} \quad \text{und} \\ H_2 &= \ker(\tilde{T} - wI)^{m+1} = \operatorname{span}\{\partial^n \tilde{\gamma}_j(w) : j \in \{1, \ldots, k\}, n \in \{0, \ldots, m\}\}. \end{aligned}$$

Sei also $j \in \{1, \ldots, k\}$ und $n \in \{1, \ldots, m\}$, dann folgt aus Lemma 4.1.12 (i)

$$\begin{aligned} U_w N_w^{[m]}\big(\partial^n \gamma_j(w)\big) &= U_w(T - wI)\big(\partial^n \gamma_j(w)\big) = U_w\big(n \cdot \partial^{n-1}\gamma_j(w)\big) \\ &= n \cdot \partial^{n-1}\tilde{\gamma}_j(w) = (\tilde{T} - wI)\partial^n \tilde{\gamma}_j(w) = \tilde{N}_w^{[m]} U_w\big(\partial^n \gamma_j(w)\big) \end{aligned}$$

Für $j \in \{1, \ldots, k\}$ (und $n = 0$) gilt

$$U_w N_w^{[m]}\big(\gamma_j(w_0)\big) = 0 = \tilde{N}_w^{[m]}\big(\tilde{\gamma}_j(w_0)\big) = \tilde{N}_w^{[m]} U_w\big(\gamma_j(w)\big).$$

Definiert man $W := U_w|_{H_1} : H_1 \to H_2$, dann ist W unitär und es gilt $WN_w^{[m]} = \tilde{N}_w^{[m]}W$. Die Operatoren $N_w^{[m]}$ und $\tilde{N}_w^{[m]}$ sind also unitär äquivalent.

($\Leftarrow$) Laut Voraussetzung existiert ein unitärer Operator $W \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ mit $WN_w^{[m]} = \tilde{N}_w^{[m]}W$. Wegen $\dim H_1 = \dim H_2 < \infty$ existiert laut Lemma 4.1.15 ein isometrischer Isomorphismus $V : H_1^\perp \to H_2^\perp$. Wir bezeichnen mit $\iota_1 : H_2 \to H$ und $\iota_2 : H_2^\perp \to H$ die identischen Einbettungen und mit $P_{H_1} \in \mathcal{L}(H)$ die orthogonale Projektion auf H_1 und definieren

$$U_w := \iota_1 \circ W \circ P_{H_1} + \iota_2 \circ V \circ (I - P_{H_1}) \in \mathcal{L}(H).$$

Dann gilt für $x = x_1 + x_2 \in H$ mit $x_1 \in H_1$ und $x_2 \in H_1^\perp$ mit Hilfe des Satzes von Pythagoras

$$\|U_w x\|_H^2 = \|Wx_1 + Vx_2\|_H^2 = \|Wx_1\|_H^2 + \|Vx_2\|_H^2 = \|x_1\|_H^2 + \|x_2\|_H^2 = \|x_1 + x_2\|_H^2 = \|x\|_H^2.$$

Also ist $U_w \in \mathcal{L}(H)$ unitär und es gilt $U_w N_w^{[m]} x = \tilde{N}_w^{[m]} U_w x$ für alle $x \in \ker(T - wI)^{m+1}$.

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass $\tilde{t}$ und $U_w t$ in w von m-ter Ordnung übereinstimmen. Sei dazu $\{b_1, \dots, b_k\}$ eine Orthonormalbasis von $\ker(T - wI)$. Dann ist $\{U_w b_1, \dots, U_w b_k\}$ eine Orthonormalbasis von $\ker(\tilde{T} - wI)$. Laut Satz 2.1.13 und Proposition 4.1.16 gibt es offene Umgebungen $\Delta, \tilde{\Delta} \subseteq \Omega$ von w und analytische Funktionen $\gamma_j : \Delta \to H, \tilde{\gamma}_j : \tilde{\Delta} \to H, j = 1, \dots, k$, sodass erstens

$$U_w t(\lambda) = \operatorname{span}\{U_w \gamma_1(\lambda), \dots, U_w \gamma_k(\lambda)\}, \forall\ \lambda \in \Delta, \quad \tilde{t}(\lambda) = \operatorname{span}\{\tilde{\gamma}_1(\lambda), \dots, \tilde{\gamma}_k(\lambda)\}, \forall\ \lambda \in \tilde{\Delta},$$

zweitens

$$\gamma_j(w) = b_j, \quad \tilde{\gamma}_j(w) = U_w b_j, \quad \forall\ j \in \{1, \dots, k\}$$

und drittens

$$\big\langle \partial^n \gamma_i(w), b_j \big\rangle_H = \big\langle \partial^n \tilde{\gamma}_i(w), U_w b_j \big\rangle_H = 0, \quad \forall\ i, j \in \{1, \dots, k\}, n \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$

gilt. Wir zeigen nun

$$U_w\big(\partial^n \gamma_j(w)\big) = \partial^n \tilde{\gamma}_j(w), \quad \forall\ j \in \{1, \dots, k\}, n \in \{0, \dots, m\} \tag{4.3}$$

durch Induktion nach n. Sei dazu $j \in \{1, \dots, k\}$ beliebig aber fest gewählt. Für $n = 0$ gilt $U_w \gamma_j(w) = U_w b_j = \tilde{\gamma}_j(w)$. Sei also $n \in \{0, \dots, m-1\}$ und gelte $U_w\big(\partial^n \gamma_j(w)\big) = \partial^n \tilde{\gamma}_j(w)$. Dann gilt laut Lemma 4.1.12 (i)

$$\begin{aligned}
&\tilde{N}_w^{[m]}\left(U_w \partial^{n+1} \gamma_j(w) - \partial^{n+1} \tilde{\gamma}_j(w)\right) = \tilde{N}_w^{[m]} U_w \partial^{n+1} \gamma_j(w) - \tilde{N}_w^{[m]} \partial^{n+1} \tilde{\gamma}_j(w) = \\
&= U_w N_w^{[m]} \partial^{n+1} \gamma_j(w) - \tilde{N}_w^{[m]} \partial^{n+1} \tilde{\gamma}_j(w) = (n+1)\left(U_w \partial^n \gamma_j(w) - \partial^n \tilde{\gamma}_j(w)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Also ist $U_w \partial^{n+1} \gamma_j(w) - \partial^{n+1} \tilde{\gamma}_j(w) \in \ker(\tilde{T} - wI) = \operatorname{span}\{U_w b_1, \dots, U_w b_k\}$. Für $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt aber wegen (4.2)

$$\begin{aligned}
\big\langle U_w \partial^{n+1} \gamma_j(w) - \partial^{n+1} \tilde{\gamma}_j(w), U_w b_i \big\rangle_H &= \big\langle U_w \partial^{n+1} \gamma_j(w), U_w b_i \big\rangle_H - \big\langle \partial^{n+1} \tilde{\gamma}_j(w), U_w b_i \big\rangle_H = \\
&= \big\langle \partial^{n+1} \gamma_j(w), b_i \big\rangle_H - \big\langle \partial^{n+1} \tilde{\gamma}_j(w), U_w b_i \big\rangle_H = 0 - 0 = 0,
\end{aligned}$$

woraus $U_w \partial^{n+1} \gamma_j(w) = \partial^{n+1} \tilde{\gamma}_j(w)$ folgt. Damit ist (4.3) gezeigt, also stimmen $\tilde{t}$ und $U_w t$ in w von m-ter Ordnung überein. □

Korollar 4.1.20. *Seien $T, \tilde{T} \in \mathcal{B}_k(\Omega)$ und $t, \tilde{t} : \Omega \to Gr(k, H)$ definiert durch $t(\lambda) := \ker(T - \lambda I)$ und $\tilde{t}(\lambda) := \ker(\tilde{T} - \lambda I)$. Für $\lambda \in \Omega$ und $m \in \mathbb{N}$ sei weiters $N_\lambda^{[m]} := (T - \lambda I)|_{\ker(T - \lambda I)^{m+1}}$ und $\tilde{N}_\lambda^{[m]} := (\tilde{T} - \lambda I)|_{\ker(\tilde{T} - \lambda I)^{m+1}}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die Abbildungen t und $\tilde{t}$ berühren einander von m-ter Ordnung.

(ii) Für alle $\lambda \in \Omega$ sind die Operatoren $N_\lambda^{[m]}$ und $\tilde{N}_\lambda^{[m]}$ unitär äquivalent.

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Satz 4.1.19. □

Kapitel 5

Verallgemeinerte Cowen-Douglas-Operatoren

Im Folgenden wollen wir eine Verallgemeinerung der Cowen-Douglas-Operatoren betrachten, welche zum ersten Mal in den Arbeiten [1] und [2] von M. J. Cowen und R. G. Douglas beschrieben wurde. Wir orientieren uns dabei an dem Artikel [3] von R. E. Curto und N. Salinas.

5.1 Verallgemeinerte Cowen-Douglas-Operatoren

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ wieder ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum über $\mathbb{C}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir das kartesische Produkt $H^n := \prod_{j=1}^n H$ und versehen es mit dem Summenskalarprodukt

$$\big\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \big\rangle_{H^n} := \sum_{j=1}^n \langle x_j, y_j \rangle_H .$$

Damit wird H^n zu einem Hilbertraum über $\mathbb{C}$. Des Weiteren sei $\mathcal{L}^n(H) := \prod_{j=1}^n \mathcal{L}(H)$ versehen mit der Summennorm

$$\|(T_1, \ldots, T_n)\| := \sum_{j=1}^n \|T_j\|.$$

Für $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}^n(H)$ und $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ sei der Operator $\mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} \in \mathcal{L}(H, H^n)$ definiert durch

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} : \begin{cases} H & \to \quad H^n \\ x & \mapsto \quad \big((T_1 - \lambda_1 I)x, \ldots, (T_n - \lambda_n I)x\big). \end{cases}$$

Definition 5.1.1. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet. Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}_k^n(\Omega)$ die Menge aller n-Tupel $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}^n(H)$ mit folgenden Eigenschaften:

(VCD1) Für alle $\lambda \in \Omega$ ist $\operatorname{ran} \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} \subseteq H^n$ abgeschlossen.

(VCD2) Für alle $\lambda \in \Omega$ ist $\dim \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} = k$.

(VCD3) $\operatorname{cls} \bigcup \big\{ \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} : \lambda \in \Omega \big\} = H$.

Lemma 5.1.2. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Für ein n-Tupel $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}^n(H)$ mit der Eigenschaft* (VCD3) *gilt*

$$T_i T_j = T_j T_i, \quad \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Beweis. Seien $i,j \in \{1,\dots,n\}$ beliebig aber fest gewählt. Für jedes $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \Omega$ ist offensichtlich $\ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} = \bigcap_{m=1}^n \ker(T_m - \lambda_m I)$. Ist also $\lambda \in \Omega$ und $x \in \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}$, so folgt aus der Linearität der Abbildungen T_i und T_j die Gültigkeit von

$$T_iT_j(x) = T_i(\lambda_j x) = \lambda_j T_i(x) = \lambda_j\lambda_i x = \lambda_i\lambda_j x = \lambda_i T_j(x) = T_j(\lambda_i x) = T_jT_i(x).$$

Ebenfalls aus der Linearität der Abbildungen T_i und T_j erhält man damit

$$T_iT_j(x) = T_jT_i(x), \quad \forall\, x \in \operatorname{span}\bigcup\big\{ \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} : \lambda \in \Omega\big\}.$$

Da die Abbildungen T_i und T_j außerdem stetig sind, ergibt sich daraus und wegen der Eigenschaft (VCD3) die Behauptung. $\square$

Definition 5.1.3. Für $\mathbf{T} \in \mathcal{B}_k^n(\Omega)$ sei

$$E_{\mathbf{T}} := \big\{(\lambda,x) \in \Omega \times H : x \in \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}\big\} \quad \text{und} \quad \pi_{\mathbf{T}} : E_{\mathbf{T}} \to \Omega : (\lambda,x) \mapsto \lambda.$$

Für $\lambda \in \Omega$ definieren wir weiters $E_{\mathbf{T},\lambda} := \pi_{\mathbf{T}}^{-1}(\lambda)$ und

$$h_{\mathbf{T}} = \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_{\mathbf{T},\lambda}} : \begin{cases} E_{\mathbf{T},\lambda} \times E_{\mathbf{T},\lambda} & \to & \mathbb{C} \\ \big((\lambda,x);(\lambda,y)\big) & \mapsto & \langle x,y\rangle_H. \end{cases}$$

Satz 5.1.4. *Sei $\mathbf{T} \in \mathcal{B}_k^n(\Omega)$ und $w \in \Omega$ beliebig. Dann gibt es eine offene Umgebung $\Delta_w \subseteq \Omega$ von w und eine analytische Funktion $\Gamma_w : \Delta_w \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^k, H)$, sodass*

$$\operatorname{ran}\Gamma_w(\lambda) = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} \quad \textit{und} \quad \Gamma_w(w)^*\Gamma_w(\lambda) = I_{\mathbb{C}^k}, \quad \forall\, \lambda \in \Delta_w.$$

Beweis. Laut Voraussetzung ist $\operatorname{ran}\mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w} \subseteq H^n$ abgeschlossen und damit ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$. Betrachtet man $\mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w}$ als beschränkten linearen Operator von H auf $\operatorname{ran}\mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w}$, so ist $\mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w} \in \mathcal{F}(H, \operatorname{ran}\mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w})$ mit $\operatorname{nul}\mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w} = k$ und $\operatorname{def}\mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w} = 0$. Ist $P_{\ker} \in \mathcal{L}(H)$ die orthogonale Projektion auf $\ker\mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w}$, dann existiert laut Lemma 2.1.10 ein Operator $\tilde{S} \in \mathcal{F}(\operatorname{ran}\mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w}, H)$ mit $\tilde{S} \circ \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w} = I_H - P_{\ker}$. Ist $P_{\operatorname{ran}} \in \mathcal{L}(H^n)$ die orthogonale Projektion auf $\operatorname{ran}\mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w}$, so ist $S := \tilde{S} \circ P_{\operatorname{ran}} \in \mathcal{L}(H^n, H)$, und es gilt weiterhin $S \circ \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w} = I_H - P_{\ker}$.

Setzt man $\Delta_w := \{\lambda \in \mathbb{C}^n : \|\lambda - w\|_2 < \|S\|^{-1}\}$, dann gilt für $\lambda \in \Delta_w$ und $x \in H$

$$\big\|\mathfrak{D}_{\lambda-w}x\big\|_{H^n}^2 = \big\|\big((\lambda_1-w_1)x,\dots,(\lambda_n-w_n)x\big)\big\|_{H^n}^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i - w_i|^2\,\|x\|_H^2 = \|\lambda-w\|_2^2 \cdot \|x\|_H^2$$

und damit

$$\|S \circ \mathfrak{D}_{\lambda-w}\| \le \|S\| \cdot \|\mathfrak{D}_{\lambda-w}\| = \|S\| \cdot \|\lambda - w\|_2 < 1.$$

Der Operator $(I_H - S \circ \mathfrak{D}_{\lambda-w}) \in \mathcal{L}(H)$ ist also für alle $\lambda \in \Delta_w$ invertierbar mit

$$(I_H - S \circ \mathfrak{D}_{\lambda-w})^{-1} = \sum_{m=0}^\infty (S \circ \mathfrak{D}_{\lambda-w})^m, \quad \forall\, \lambda \in \Delta_w.$$

Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Abbildung $\Delta_w \to \mathcal{L}(H,H^n) : \lambda \mapsto \mathfrak{D}_{\lambda-w}$ analytisch ist. Nach Lemma 1.1.5 ist dies äquivalent dazu, dass die Abbildung $\Delta_w \to H^n : \lambda \mapsto \mathfrak{D}_{\lambda-w}x$ für alle $x \in H$ analytisch ist. Um das zu zeigen, seien $x \in H$, $\lambda \in \Delta_w$ und $j \in \{1,\dots,n\}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\big(\mathfrak{D}_{\lambda+he_j-w}x - \mathfrak{D}_{\lambda-w}x\big) &= \frac{1}{h}\big(0,\dots,0,(\lambda_j+h-w_j)x - (\lambda_j-w_j)x,0,\dots,0\big) = \\ &= \frac{1}{h}\big(0,\dots,0,hx,0,\dots,0\big) \xrightarrow{h\to 0} \big(0,\dots,0,x,0,\dots,0\big) \in H^n. \end{aligned}$$

Damit ist auch die Abbildung $\Delta_w \to \mathcal{L}(H) : \lambda \mapsto (I_H - S \circ \mathfrak{D}_{\lambda-w})$ analytisch. Mit Hilfe von Lemma 1.1.9 folgt nun, dass die Abbildung $\Delta_w \to \mathcal{L}(H) : \lambda \mapsto (I_H - S \circ \mathfrak{D}_{\lambda-w})^{-1}$ ebenfalls analytisch ist.

Wir betrachten für $\lambda \in \Delta_w$ den Operator

$$P(\lambda) := I_H - (I_H - S \circ \mathfrak{D}_{\lambda-w})^{-1} \circ S \circ \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} \in \mathcal{L}(H).$$

Aus dieser Definition folgt zunächst $P(\lambda)x = x$ für alle $x \in \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}$, also

$$\operatorname{ran} P(\lambda) \supseteq \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}, \quad \forall\, \lambda \in \Delta_w. \tag{5.1}$$

Außerdem ist laut obigen Überlegungen

$$\begin{aligned} S \circ \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} &= S \circ \big(\mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w} - \mathfrak{D}_{\lambda-w}\big) = S \circ \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w} - S \circ \mathfrak{D}_{\lambda-w} = \\ &= I_H - P_{\ker} - S \circ \mathfrak{D}_{\lambda-w} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= I_H - (I_H - S \circ \mathfrak{D}_{\lambda-w})^{-1} \circ (I_H - S \circ \mathfrak{D}_{\lambda-w} - P_{\ker}) = \\ &= (I_H - S \circ \mathfrak{D}_{\lambda-w})^{-1} \circ P_{\ker}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\dim \operatorname{ran} P(\lambda) = \dim \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w} = \dim \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}, \quad \forall\, \lambda \in \Delta_w. \tag{5.2}$$

Aus (5.1) und (5.2) ergibt sich insgesamt

$$\operatorname{ran} P(\lambda) = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}, \quad \forall\, \lambda \in \Delta_w.$$

Ist nun $V : \mathbb{C}^k \to \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w}$ ein isometrischer Isomorphismus, so ist die Abbildung

$$\Gamma_w : \begin{cases} \Delta_w & \to \quad \mathcal{L}(\mathbb{C}^k, H) \\ \lambda & \mapsto \quad P(\lambda) \circ V \end{cases}$$

analytisch und für alle $\lambda \in \Delta_w$ ist $\operatorname{ran} \Gamma(\lambda) = \operatorname{ran} P(\lambda) = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}$.

Um die zweite Aussage zu zeigen, sei $\lambda \in \Delta_w$ beliebig. Aus $S \circ \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w} = I_H - P_{\ker}$ folgt zunächst $P_{\ker} \circ Sx = 0$ für alle $x \in \operatorname{ran} \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w}$. Für alle $x \in (\operatorname{ran} \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-w})^{\perp}$ ist aber $Sx = \tilde{S} \circ P_{\operatorname{ran}} x = 0$, und somit $P_{\ker} \circ S = 0 \in \mathcal{L}(H^n, H)$. Daraus folgt schließlich

$$\begin{aligned} \Gamma_w(w)^* \Gamma_w(\lambda) &= V^* P(w)^* P(\lambda) V = V^* P_{\ker} (I_H - S \circ \mathfrak{D}_{\lambda-w})^{-1} P_{ker} V = \\ &= V^* P_{\ker} \sum_{m=0}^{\infty} (S \circ \mathfrak{D}_{\lambda-w})^m V = V^* \sum_{m=0}^{\infty} P_{\ker} (S \circ \mathfrak{D}_{\lambda-w})^m V = V^* P_{\ker} V = I_{\mathbb{C}^k}. \end{aligned}$$

□

Korollar 5.1.5. *Sei* $\mathbf{T} \in \mathcal{B}_k^n(\Omega)$, *dann ist die Abbildung*

$$\mathbf{t} : \begin{cases} \Omega & \to \quad Gr(k, H) \\ \lambda & \mapsto \quad \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} \end{cases}$$

analytisch.

Beweis. Sei $w \in \Omega$ beliebig. Laut Satz 5.1.4 existiert eine offene Umgebung $\Delta \subseteq \Omega$ von w und eine analytische Funktion $\Gamma : \Delta \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^k, H)$ mit

$$\operatorname{ran} \Gamma(\lambda) = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}, \quad \forall\, \lambda \in \Delta.$$

Definiert man also für $j \in \{1, \dots, k\}$ die (laut Lemma 1.1.5) analytischen Funktionen $\gamma_j : \Delta \to H$ durch $\gamma_j(\lambda) := \Gamma(\lambda) e_j$, dann gilt

$$\operatorname{span}\{\gamma_1(\lambda), \dots, \gamma_k(\lambda)\} = \Gamma(\lambda) \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_k\} = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}, \quad \forall \lambda \in \Delta.$$

□

Korollar 5.1.6. *Sei* $\mathbf{T} \in \mathcal{B}_k^n(\Omega)$*, dann ist* $(\pi_{\mathbf{T}}, E_{\mathbf{T}}, \Omega, h_{\mathbf{T}})$ *ein Hermite'sches Vektorbündel vom Rang* k *über* Ω*.*

Beweis. Laut Korollar 5.1.5 ist die Abbildung $\mathbf{t} : \Omega \to Gr(k, H) : \lambda \mapsto \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}$ analytisch. Aus Lemma 3.2.4 und Lemma 3.2.10 folgt, dass $E_{\mathbf{t}} = E_{\mathbf{T}}$ eine $(n+k)$-dimensionale Mannigfaltigkeit und $(\pi_{\mathbf{T}}, E_{\mathbf{T}}, \Omega, h_{\mathbf{T}})$ ein Hermite'sches Vektorbündel vom Rang k über Ω ist. □

Korollar 5.1.7. *Ist* Ω_0 *eine nichtleere, offene und zusammenhängende Teilmenge von* Ω*, dann ist* $\mathcal{B}_k^n(\Omega_0) \supseteq \mathcal{B}_k^n(\Omega)$*.*

Beweis. Sei $\mathbf{T} \in \mathcal{B}_k^n(\Omega)$. Klarerweise erfüllt $\mathbf{T} \in \mathcal{L}^n(H)$ die Bedingungen (VCD1) – (VCD3) auch für alle $\lambda \in \Omega_0 \subseteq \Omega$. Da die Abbildung $\mathbf{t} : \Omega \to Gr(k, H) : \lambda \mapsto \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}$ nach Korollar 5.1.5 analytisch ist, gilt laut Proposition 3.3.6 außerdem

$$\operatorname{cls}\{\ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} : \lambda \in \Omega_0\} = \operatorname{cls}\{\ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} : \lambda \in \Omega\} = H.$$

Es ist also $\mathbf{T} \in \mathcal{B}_k^n(\Omega_0)$. □

Definition 5.1.8. Seien H_1 und H_2 Hilberträume über $\mathbb{C}$. Wir nennen zwei n-Tupel $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}^n(H_1)$ und $\tilde{\mathbf{T}} = (\tilde{T}_1, \ldots, \tilde{T}_n) \in \mathcal{L}^n(H_2)$ *komponentenweise unitär äquivalent*, falls es einen unitären Operator $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ gibt, sodass $UT_j = \tilde{T}_j U$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Satz 5.1.9. *Zwei* n*-Tupel* $\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{T}} \in \mathcal{B}_k^n(\Omega)$ *sind genau dann komponentenweise unitär äquivalent, wenn die zugehörigen analytischen Abbildungen*

$$\mathbf{t} : \left\{ \begin{array}{lcl} \Omega & \to & Gr(k, H) \\ \lambda & \mapsto & \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} \end{array} \right. \quad \textit{und} \quad \tilde{\mathbf{t}} : \left\{ \begin{array}{lcl} \Omega & \to & Gr(k, H) \\ \lambda & \mapsto & \ker \mathfrak{D}_{\tilde{\mathbf{T}}-\lambda} \end{array} \right.$$

kongruent sind.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass

$$\ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} = \bigcap_{j=1}^{n} \ker(T_j - \lambda_j I) \quad \text{und} \quad \ker \mathfrak{D}_{\tilde{\mathbf{T}}-\lambda} = \bigcap_{j=1}^{n} \ker(\tilde{T}_j - \lambda_j I), \quad \forall\, \lambda \in \Omega.$$

($\Rightarrow$) Sei $U \in \mathcal{L}(H)$ unitär, sodass $UT_j = \tilde{T}_j U$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt für $\lambda \in \Omega, x \in H$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$(T_i - \lambda_i I)Ux = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U^*(T_i - \lambda_i I)Ux = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\tilde{T}_i - \lambda_i I)x = 0,$$

woraus $\ker(T_i - \lambda_i I) = U \ker(\tilde{T}_i - \lambda_i I)$ folgt. Damit ist

$$\mathbf{t}(\lambda) = \bigcap_{j=1}^{n} \ker(T_j - \lambda_j I) = \bigcap_{j=1}^{n} U \ker(\tilde{T}_j - \lambda_j I) = U\Big(\bigcap_{j=1}^{n} \ker(\tilde{T}_j - \lambda_j I)\Big) = U\tilde{\mathbf{t}}(\lambda), \quad \forall\, \lambda \in \Omega.$$

Die Abbildungen $\mathbf{t}$ und $\tilde{\mathbf{t}}$ sind also kongruent.

($\Leftarrow$) Sei $W \in \mathcal{L}(H)$ ein unitärer Operator, sodass $\mathbf{t}(\lambda) = W\tilde{\mathbf{t}}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Omega$. Dann gilt für $i \in \{1, \ldots, n\}, \lambda \in \Omega$ und $x \in \ker \mathfrak{D}_{\tilde{\mathbf{T}}-\lambda} = \bigcap_{j=1}^{n} \ker(\tilde{T}_j - \lambda_j I)$

$$W^* T_i W x - \underbrace{\tilde{T}_i x}_{=\lambda_i x} = W^* \underbrace{(T_i - \lambda_i I)Wx}_{=0} = 0.$$

Wegen $\operatorname{cls} \bigcup \{\ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} : \lambda \in \Omega\} = H$ folgt daraus $W\tilde{T}_j = T_j W$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Die n-Tupel $\mathbf{T}$ und $\tilde{\mathbf{T}}$ sind also komponentenweise unitär äquivalent. □

Korollar 5.1.10. *Seien* $\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{T}} \in \mathcal{B}_k^n(\Omega)$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die n*-Tupel* $\mathbf{T}$ *und* $\tilde{\mathbf{T}}$ *sind komponentenweise unitär äquivalent.*

(ii) Die Hermite'schen Vektorbündel $(\pi_{\mathbf{T}}, E_{\mathbf{T}}, \Omega, h_{\mathbf{T}})$ *und* $(\pi_{\tilde{\mathbf{T}}}, E_{\tilde{\mathbf{T}}}, \Omega, h_{\tilde{\mathbf{T}}})$ *sind äquivalent.*

(iii) Die Hermite'schen Vektorbündel $(\pi_{\mathbf{T}}, E_{\mathbf{T}}, \Omega, h_{\mathbf{T}})$ *und* $(\pi_{\tilde{\mathbf{T}}}, E_{\tilde{\mathbf{T}}}, \Omega, h_{\tilde{\mathbf{T}}})$ *sind lokal äquivalent.*

(iv) Es gibt eine nichtleere offene Teilmenge Δ *von* Ω*, sodass die Hermite'schen Vektorbündel* $\big(\pi_{\mathbf{T}}, \pi_{\mathbf{T}}^{-1}(\Delta), \Delta, h_{\mathbf{T}}\big)$ *und* $\big(\pi_{\tilde{\mathbf{T}}}, \pi_{\tilde{\mathbf{T}}}^{-1}(\Delta), \Delta, h_{\tilde{\mathbf{T}}}\big)$ *äquivalent sind.*

Beweis. Da für die laut Korollar 5.1.5 analytischen Abbildungen

$$\mathbf{t} : \begin{cases} \Omega & \to \quad Gr(k, H) \\ \lambda & \mapsto \quad \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{t}} : \begin{cases} \Omega & \to \quad Gr(k, H) \\ \lambda & \mapsto \quad \ker \mathfrak{D}_{\tilde{\mathbf{T}}-\lambda} \end{cases}$$

die Voraussetzung

$$\operatorname{cls} \bigcup \big\{ \mathbf{t}(\lambda) : \lambda \in \Omega \big\} = \operatorname{cls} \bigcup \big\{ \tilde{\mathbf{t}}(\lambda) : \lambda \in \Omega \big\} = H$$

erfüllt ist, folgt die Behauptung direkt aus dem Stabilitätssatz (Satz 3.3.13) und Satz 5.1.9. □

Die Aussage von Satz 5.1.4 motivierte R. E. Curto und N. Salinas zu folgender Definition (siehe [3], Definition 2.3).

Definition 5.1.11. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet. Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}_\infty^n(\Omega)$ die Menge aller n-Tupel $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}^n(H)$ mit folgenden Eigenschaften:

(CS1) Für alle $\lambda \in \Omega$ ist $\operatorname{ran} \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} \subseteq H^n$ abgeschlossen.

(CS2) Zu jedem $w \in \Omega$ existiert eine offene Umgebung $\Delta_w \subseteq \Omega$ und eine analytische Funktion $\Gamma_w : \Delta_w \to \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}), H)$, sodass für alle $\lambda \in \Delta_w$

$$\ker \Gamma_w(\lambda) = \{0\} \quad \text{und} \quad \operatorname{ran} \Gamma_w(\lambda) = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}.$$

(CS3) $\operatorname{cls} \bigcup \big\{ \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} : \lambda \in \Omega \big\} = H$.

Definition 5.1.12. Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, definieren wir für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ den Vektorraum $\ell_k^2 := \big\{ (\xi_j)_{j=1}^k : \xi_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^k |\xi_j|^2 < \infty \big\}$ und versehen ihn mit dem Skalarprodukt

$$\big\langle (\xi_j)_{j=1}^k, (\zeta_j)_{j=1}^k \big\rangle_{\ell_k^2} := \sum_{j=1}^k \xi_j \, \overline{\zeta}_j.$$

Damit wird ℓ_k^2 zu einem Hilbertraum über $\mathbb{C}$.

Definition 5.1.13. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet. Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_k^n(\Delta)$ die Menge aller n-Tupel $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}^n(H)$ mit folgenden Eigenschaften:

(A1) Für alle $\lambda \in \Delta$ ist $\operatorname{ran} \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} \subseteq H^n$ abgeschlossen.

(A2) Es existiert eine analytische Funktion $\Gamma : \Delta \to \mathcal{L}(\ell_k^2, H)$, sodass für alle $\lambda \in \Delta$

$$\ker \Gamma(\lambda) = \{0\} \quad \text{und} \quad \operatorname{ran} \Gamma(\lambda) = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}.$$

(A3) $\operatorname{cls} \bigcup \{ \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} : \lambda \in \Delta \} = H$.

Für eine Funktion $\Gamma : \Delta \to \mathcal{L}(\ell_k^2, H)$ wie im Punkt (A3) definieren wir $K_\Gamma : \Delta \times \Delta \to \mathcal{L}(\ell_k^2)$ durch $K_\Gamma(\lambda, \mu) := \Gamma(\mu)^* \Gamma(\lambda)$ für alle $\lambda, \mu \in \Delta$.

Lemma 5.1.14. *Sei $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann ist ein n-Tupel $\mathbf{T} \in \mathcal{L}^n(H)$ genau denn ein Element von $\mathcal{B}_k^n(\Omega)$, wenn es um jeden Punkt $w \in \Omega$ eine zusammenhängende offene Umgebung $\Delta_w \subseteq \Omega$ gibt, sodass $\mathbf{T}$ ein Element von $\mathcal{A}_k^n(\Delta_w)$ ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei $\mathbf{T} \in \mathcal{B}_k^n(\Omega)$ und $w \in \Omega$ beliebig aber fest gewählt. Dann existiert laut Satz 5.1.4 bzw. Definition 5.1.11 eine offene Umgebung $\Delta_w \subseteq \Omega$ von w und eine analytische Funktion $\Gamma_w : \Delta_w \to \mathcal{L}(\ell_k^2, H)$, sodass erstens $\ker \Gamma_w(\lambda) = \{0\}$ und zweitens $\operatorname{ran} \Gamma_w(\lambda) = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}$ für alle $\lambda \in \Delta_w$ gilt. O.B.d.A. können wir annehmen, dass Δ_w zusammenhängend ist. Die Eigenschaften (A1) und (A2) sind damit bereits erfüllt. Die Eigenschaft (A3) folgt aus Korollar 5.1.7.

($\Leftarrow$) Existiert zu jedem Punkt $w \in \Omega$ eine zusammenhängende offene Umgebung $\Delta_w \subseteq \Omega$, sodass $\mathbf{T} \in \mathcal{A}_k^n(\Delta_w)$, so ist erstens $\operatorname{ran} \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} \subseteq H^n$ für alle $\lambda \in \Omega$ abgeschlossen und zweitens $\operatorname{cls} \bigcup \{\ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} : \lambda \in \Omega\} = H$. Ist $k = \infty$, so gilt also $\mathbf{T} \in \mathcal{B}_\infty^n(\Omega)$. Ist $k \in \mathbb{N}$, so folgt aus der Eigenschaft (A2), dass $\dim \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} = k$ für alle $\lambda \in \Omega$ gilt. Damit ist $\mathbf{T} \in \mathcal{B}_k^n(\Omega)$. ☐

5.2 Hilberträume mit reproduzierendem Kern

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit funktionalen Hilberträumen beschäftigen. Als Grundlage dient uns hierfür neben dem Artikel [3] auch das Skriptum [8] von Maximilian Kleinert.

Im Folgenden sei Ω eine beliebige nichtleere Menge und $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle_G)$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$.

Definition 5.2.1. Eine Abbildung $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(G)$ heißt

1. *Kern* auf $\Omega \times \Omega$, falls $K(\lambda, \mu)^* = K(\mu, \lambda)$ für alle $\lambda, \mu \in \Omega$.
2. *positiver Kern* auf $\Omega \times \Omega$, falls für je endlich viele $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Omega$ die Operatormatrix $\big(K(\lambda_p, \lambda_q)\big)_{p,q=1}^m$ positiv semidefinit ist, d.h. falls

$$\sum_{p,q=1}^m \big\langle K(\lambda_p, \lambda_q) x_p, x_q \big\rangle_G \geq 0, \quad \forall\, x_1, \ldots, x_m \in G.$$

Lemma 5.2.2. *Für einen positiven Kern $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(G)$ gilt $K(\lambda, \mu)^* = K(\mu, \lambda)$ für alle $\lambda, \mu \in \Omega$.*

Beweis. Da K ein positiver Kern ist, gilt zunächst $\langle K(\lambda, \lambda)x, x \rangle_G \geq 0$ für alle $x \in G$ und $\lambda \in \Omega$. Weiters gilt für alle $x_1, x_2 \in G$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$

$$\begin{aligned} 0 \leq &\sum_{p,q=1}^2 \big\langle K(\lambda_p, \lambda_q) x_p, x_q \big\rangle_G = \\ &= \big\langle K(\lambda_1, \lambda_1) x_1, x_1 \big\rangle_G + \big\langle K(\lambda_1, \lambda_2) x_1, x_2 \big\rangle_G + \big\langle K(\lambda_2, \lambda_1) x_2, x_1 \big\rangle_G + \big\langle K(\lambda_2, \lambda_2) x_2, x_2 \big\rangle_G. \end{aligned}$$

Also ist $\langle K(\lambda_1, \lambda_2)x_1, x_2 \rangle_G + \langle K(\lambda_2, \lambda_1)x_2, x_1 \rangle_G \in \mathbb{R}$ für alle $x_1, x_2 \in G$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \Omega$. Setzt man $x_1 = x_2$, dann folgt $\langle [K(\lambda_1, \lambda_2) + K(\lambda_2, \lambda_1)]x, x \rangle_G \in \mathbb{R}$ für alle $x \in G$. Also ist $[K(\lambda_1, \lambda_2) + K(\lambda_2, \lambda_1)] \in \mathcal{L}(G)$ selbstadjungiert, d.h.

$$K(\lambda_1, \lambda_2) + K(\lambda_2, \lambda_1) = K(\lambda_1, \lambda_2)^* + K(\lambda_2, \lambda_1)^*. \tag{5.3}$$

Setzt man $x_1 = ix_2$, so ergibt sich $\langle i[K(\lambda_1, \lambda_2) - K(\lambda_2, \lambda_1)]x, x \rangle_G \in \mathbb{R}$ für alle $x \in G$. Also ist auch $i[K(\lambda_1, \lambda_2) - K(\lambda_2, \lambda_1)] \in \mathcal{L}(G)$ selbstadjungiert, d.h.

$$\begin{aligned} & i[K(\lambda_1, \lambda_2) - K(\lambda_2, \lambda_1)] = -i[K(\lambda_1, \lambda_2)^* - K(\lambda_2, \lambda_1)^*] \\ \Leftrightarrow \quad & K(\lambda_1, \lambda_2) - K(\lambda_2, \lambda_1) = -K(\lambda_1, \lambda_2)^* + K(\lambda_2, \lambda_1)^*. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Addiert man nun die Gleichungen (5.3) und (5.4), so folgt $K(\lambda_1, \lambda_2) = K(\lambda_2, \lambda_1)^*$. ☐

Definition 5.2.3. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{F}(\Omega, G)$ den (komplexen) Vektorraum aller Funktionen von Ω nach G. Die Vektorraumoperationen seien dabei punktweise definiert, d.h. es gelte

$$(af + bg)(\lambda) = af(\lambda) + bg(\lambda), \quad \forall\ f, g \in \mathfrak{F}(\Omega, G),\ a, b \in \mathbb{C},\ \lambda \in \Omega.$$

Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *funktionaler Hilbertraum* auf Ω, falls er ein linearer Teilraum von $\mathfrak{F}(\Omega, G)$ ist.

Definition 5.2.4. Ein funktionaler Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *Hilbertraum mit reproduzierendem Kern* (abkürzend schreiben wir RKHS), falls für alle $\lambda \in \Omega$ das Punktauswertungsfunktional

$$E(\lambda) : \begin{cases} \mathcal{H} & \to & G \\ f & \mapsto & f(\lambda) \end{cases}$$

stetig ist.

Definition 5.2.5. Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ ein funktionaler Hilbertraum. Eine Abbildung $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(G)$ heißt *reproduzierender Kern von* $\mathcal{H}$, falls die folgenden Eigenschaften gelten:

(RK1) Für alle $\lambda \in \Omega$ und $x \in G$ ist $K(\lambda, \cdot)x : \Omega \to G : \mu \mapsto K(\lambda, \mu)x$ ein Element von $\mathcal{H}$.

(RK2) Für alle $\lambda \in \Omega, x \in G$ und $f \in \mathcal{H}$ gilt $\langle f(\lambda), x \rangle_G = \langle f, K(\lambda, \cdot)x \rangle_{\mathcal{H}}$.

Lemma 5.2.6. *Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ ein funktionaler Hilbertraum. Dann ist $\mathcal{H}$ genau dann ein RKHS, wenn er einen reproduzierenden Kern $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(G)$ besitzt. In diesem Fall ist K eindeutig bestimmt und es gilt $K(\lambda, \mu) = E(\mu)E(\lambda)^*$ für alle $\lambda, \mu \in \Omega$.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ ein RKHS. Wir betrachten die Abbildung

$$K : \begin{cases} \Omega \times \Omega & \to & \mathcal{L}(G) \\ (\lambda, \mu) & \mapsto & E(\mu)E(\lambda)^*. \end{cases}$$

Da laut Voraussetzung $E(\mu) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, G)$ und $E(\lambda)^* \in \mathcal{L}(G, \mathcal{H})$ für alle $\lambda, \mu \in \Omega$ gilt, ist diese Abbildung wohldefiniert. Seien nun $\lambda \in \Omega$ und $x \in G$ beliebig aber fest gewählt. Dann ist $E(\lambda)^*x \in \mathcal{H}$ und es gilt

$$\big(E(\lambda)^*x\big)(\mu) = E(\mu)E(\lambda)^*x = K(\lambda, \mu)x, \quad \forall\ \mu \in \Omega.$$

Es ist also $E(\lambda)^*x = K(\lambda, \cdot)x \in \mathcal{H}$. Des Weiteren folgt daraus

$$\langle f(\lambda), x \rangle_G = \langle E(\lambda)f, x \rangle_G = \langle f, E(\lambda)^*x \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, K(\lambda, \cdot)x \rangle_{\mathcal{H}}.$$

($\Leftarrow$) Die Abbildung $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(G)$ erfülle die Bedingungen (RK1) und (RK2). Sei $\lambda \in \Omega$ beliebig aber fest gewählt. Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgt, dass die Abbildung $\mathcal{H} \to \mathbb{C} : f \mapsto \langle f, K(\lambda, \cdot)x \rangle_{\mathcal{H}}$ für alle $x \in G$ stetig ist. Aus der Eigenschaft (RK2) folgt damit, dass für alle $x \in G$ auch die Abbildung

$$\mathcal{H} \to \mathbb{C} : f \mapsto \langle E(\lambda)f, x \rangle_G$$

stetig ist. Wir wollen nun zeigen, dass der Graph von $E(\lambda)$ abgeschlossen ist. Sei dazu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}$, für welche die beiden Limiten $f := \lim_{n \to \infty} f_n \in \mathcal{H}$ und $y := \lim_{n \to \infty} E(\lambda)f_n \in G$ existieren. Dann gilt für alle $x \in G$

$$\langle E(\lambda)f_n, x \rangle_G \xrightarrow{n \to \infty} \langle E(\lambda)f, x \rangle_G \quad \text{und} \quad \langle E(\lambda)f_n, x \rangle_G \xrightarrow{n \to \infty} \langle y, x \rangle_G,$$

also $y = E(\lambda)f$. Aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt nun die Stetigkeit von $E(\lambda)$. Da $\lambda \in \Omega$ beliebig war, ist $\mathcal{H}$ somit ein RKHS.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, sei $\tilde{K} : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(G)$ eine weitere Abbildung mit den Eigenschaften (RK1) und (RK2). Für alle $\lambda \in \Omega, x \in G$ und $f \in \mathcal{H}$ gilt also

$$\langle f, \tilde{K}(\lambda, \cdot)x \rangle_{\mathcal{H}} = \langle E(\lambda)f, x \rangle_G = \langle f, E(\lambda)^*x \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Daraus folgt $\tilde{K}(\lambda, \cdot)x = E(\lambda)^*x$, also $\tilde{K}(\lambda, \mu)x = E(\mu)E(\lambda)^*x$ für alle $\lambda, \mu \in \Omega$ und $x \in G$. $\square$

Lemma 5.2.7. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ ein RKHS mit Kern K. Dann gilt:*

(i) K ist ein positiver Kern auf $\Omega \times \Omega$.

(ii) $\operatorname{cls}\{K(\lambda,\cdot)x : \lambda \in \Omega, x \in G\} = \mathcal{H}$.

(iii) Für $\lambda \in \Omega$ gilt $\|K(\lambda,\lambda)\| = \|E(\lambda)\|^2$.

(iv) Für jede Teilmenge $\Delta \subseteq \Omega$ ist die Familie $\{E(\lambda) : \lambda \in \Delta\}$ genau dann gleichmäßig beschränkt, wenn die Familie $\{K(\lambda,\lambda) : \lambda \in \Delta\}$ gleichmäßig beschränkt ist, d.h. es gilt

$$\sup_{\lambda\in\Delta} \|E(\lambda)\| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{\lambda\in\Delta} \|K(\lambda,\lambda)\| < \infty.$$

In diesem Fall folgt aus der Konvergenz in $\mathcal{H}$ die gleichmäßige Konvergenz in $\mathfrak{F}(\Delta, G)$.

(v) Für $\lambda \in \Omega$ ist $\ker K(\lambda,\lambda) = \ker E(\lambda)^*$.

Beweis. Für $\lambda \in \Omega$ bezeichnen wir mit $E(\lambda) : \mathcal{H} \to G$ wieder das Punktauswertungsfunktional. Dann ist laut Lemma 5.2.6 der Kern K gegeben durch $K(\lambda,\mu) = E(\mu)E(\lambda)^*$ für alle $\lambda, \mu \in \Omega$.

(i) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Omega$ und $x_1, \ldots, x_m \in G$ beliebig, dann gilt

$$\sum_{p,q=1}^{m} \left\langle K(\lambda_p,\lambda_q)x_p, x_q \right\rangle_G = \sum_{p,q=1}^{m} \left\langle E(\lambda_p)E(\lambda_q)^* x_p, x_q \right\rangle_G = \\ = \left\langle \sum_{p=1}^{m} E(\lambda_p)^* x_p, \sum_{q=1}^{m} E(\lambda_q)^* x_q \right\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

(ii) Sei $f \in \operatorname{span}\{K(\lambda,\cdot)x : \lambda \in \Omega, x \in G\}^{\perp}$, dann folgt aus der Eigenschaft (RK2)

$$\left\langle f(\lambda), x \right\rangle_G = \left\langle f, K(\lambda,\cdot)x \right\rangle_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall\, \lambda \in \Omega, x \in G.$$

Also muss $f = 0$ sein. Damit ist $\operatorname{cls}\{K(\lambda,\cdot)x : \lambda \in \Omega, x \in G\} = \mathcal{H}$.

(iii) Sei $\lambda \in \Omega$ beliebig aber fest gewählt. Dann gilt zunächst

$$\|K(\lambda,\lambda)\| = \|E(\lambda)E(\lambda)^*\| \leq \|E(\lambda)\| \cdot \|E(\lambda)^*\| = \|E(\lambda)\|^2.$$

Umgekehrt folgt aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\|E(\lambda)^* x\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle E(\lambda)^* x, E(\lambda)^* x \rangle_{\mathcal{H}} = \langle E(\lambda)E(\lambda)^* x, x \rangle_G \leq \|E(\lambda)E(\lambda)^*\| \cdot \|x\|_G^2, \quad \forall\, x \in G,$$

also $\|E(\lambda)\|^2 = \|E(\lambda)^*\|^2 \leq \|E(\lambda)E(\lambda)^*\| = \|K(\lambda,\lambda)\|$, was die Behauptung zeigt.

(iv) Sei $\Delta \subseteq \Omega$ und gelte $\sup_{\lambda\in\Delta} \|E(\lambda)\| < \infty$. Ist nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathcal{H}$ und $f := \lim_{n\to\infty} f_n$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\lambda\in\Delta} \|f(\lambda) - f_n(\lambda)\|_G = \lim_{n\to\infty} \sup_{\lambda\in\Delta} \|E(\lambda)(f - f_n)\|_G \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{\lambda\in\Delta} \|E(\lambda)\| \cdot \|f - f_n\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Die andere Aussage folgt direkt aus Punkt (iii).

(v) Sei $\lambda \in \Omega$ beliebig aber fest gewählt. Ist $x \in \ker K(\lambda,\lambda)$, so folgt

$$0 = \langle K(\lambda,\lambda)x, x \rangle_G = \langle E(\lambda)E(\lambda)^* x, x \rangle_G = \langle E(\lambda)^* x, E(\lambda)^* x \rangle_{\mathcal{H}},$$

also $x \in \ker E(\lambda)^*$. Ist umgekehrt $x \in \ker E(\lambda)^*$, so gilt $K(\lambda,\lambda)x = E(\lambda)E(\lambda)^* x = 0$. $\square$

Satz 5.2.8. *Sei $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(G)$ ein positiver Kern. Dann existiert genau ein RKHS $\mathcal{H}$, sodass K der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}$ ist.*

Beweis. (1) Wir betrachten den linearen Raum

$$\mathcal{D} := \operatorname{span}\{K(\lambda,\cdot)x : \lambda \in \Omega, x \in G\} \subseteq \mathfrak{F}(\Omega, G)$$

und definieren für $f = \sum_{p=1}^m K(\lambda_p,\cdot)x_p$ und $g = \sum_{q=1}^n K(\mu_q,\cdot)y_q$ aus $\mathcal{D}$

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}} := \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \langle K(\lambda_p,\mu_q)x_p, y_q\rangle_G. \tag{5.5}$$

Um zu zeigen, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}}$ wohldefiniert ist, nehmen wir an, dass f auch eine andere Darstellung besitzt. Sei also $f = \sum_{p=1}^m K(\lambda_p,\cdot)x_p = \sum_{p=1}^\ell K(\zeta_p,\cdot)z_p$, dann gilt

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}} &= \sum_{p=1}^\ell \sum_{q=1}^n \langle K(\zeta_p,\mu_q)z_p, y_q\rangle_G = \sum_{q=1}^n \Big\langle \sum_{p=1}^\ell K(\zeta_p,\mu_q)z_p, y_q\Big\rangle_G = \sum_{q=1}^n \langle f(\mu_q), y_p\rangle_G = \\ &= \sum_{q=1}^n \Big\langle \sum_{p=1}^m K(\lambda_p,\mu_q)x_p, y_q\Big\rangle_G = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \langle K(\lambda_p,\mu_q)x_p, y_q\rangle_G = \langle f, g\rangle_{\mathcal{D}}.\end{aligned}$$

Wegen $K(\lambda,\mu)^* = K(\mu,\lambda)$ für alle $\lambda,\mu \in \Omega$ gilt Entsprechendes, wenn g eine andere Darstellung hat. Also ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}}$ wohldefiniert und man überprüft leicht, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}}$ in der ersten Komponente linear ist. Weiters gilt für alle $\lambda,\mu \in \Omega$ und alle $x, y \in G$

$$\langle K(\lambda,\mu)x, y\rangle_G = \langle x, K(\lambda,\mu)^*y\rangle_G = \langle x, K(\mu,\lambda)y\rangle_G = \overline{\langle K(\mu,\lambda)y, x\rangle_G},$$

woraus $\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}} = \overline{\langle g, f\rangle_{\mathcal{D}}}$ für alle $f, g \in \mathcal{D}$ folgt. Da K laut Voraussetzung positiv ist, gilt außerdem

$$\langle f, f\rangle_{\mathcal{D}} = \sum_{p,q=1}^m \langle K(\lambda_p,\lambda_q)x_p, x_q\rangle_G \geq 0, \quad \forall\, f \in \mathcal{D},$$

womit $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}}$ eine positiv semidefinite Hermite'sche Sesquilinearform ist. Angenommen es ist $\langle f, f\rangle_{\mathcal{D}} = 0$ für ein $f = \sum_{p=1}^m K(\lambda_p,\cdot)x_p \in \mathcal{D}$. Dann folgt mit Hilfe der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung $\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}} = 0$ für alle $g \in \mathcal{D}$. Sind $\mu \in \Omega$ und $y \in G$ beliebig, und setzt man $g := K(\mu,\cdot)y$, so erhält man

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}} = \sum_{p=1}^m \langle K(\lambda_p,\mu)x_p, y\rangle_G = \langle f(\mu), y\rangle_G = 0, \quad \forall\, \mu \in \Omega, y \in G,$$

also $f(\mu) = 0$ für alle $\mu \in \Omega$. Damit ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}}$ sogar positiv definit. Der Raum $(\mathcal{D}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}})$ besitzt also eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Hilbertraum-Vervollständigung, welche wir im Folgenden mit $(\hat{\mathcal{D}}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\hat{\mathcal{D}}})$ bezeichnen.

(2) Nun wollen wir zeigen, dass für jedes $\lambda \in \Omega$ der lineare Operator $E_\lambda : \mathcal{D} \to G : f \mapsto f(\lambda)$ beschränkt ist. Sei dazu $\lambda \in \Omega$ beliebig aber fest gewählt und $f = \sum_{p=1}^m K(\zeta_p,\cdot)x_p \in \mathcal{D}$. Dann folgt für alle $y \in G$ aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned}\langle E_\lambda f, y\rangle_G &= \sum_{p=1}^m \langle K(\zeta_p,\lambda)x_p, y\rangle_G = \langle f, K(\lambda,\cdot)y\rangle_{\mathcal{D}} \leq \|f\|_{\mathcal{D}} \|K(\lambda,\cdot)y\|_{\mathcal{D}} = \\ &= \|f\|_{\mathcal{D}} \sqrt{\langle K(\lambda,\cdot)y, K(\lambda,\cdot)y\rangle_{\mathcal{D}}} = \|f\|_{\mathcal{D}} \sqrt{\langle K(\lambda,\lambda)y, y\rangle_G} \leq \|f\|_{\mathcal{D}} \|y\|_G \sqrt{\|K(\lambda,\lambda)\|}.\end{aligned}$$

Setzt man $y = E_\lambda f$, so folgt daraus

$$\|E_\lambda\| \leq \sqrt{\|K(\lambda,\lambda)\|}.$$

Es existiert also eine eindeutige lineare Fortsetzung von E_λ auf $\hat{\mathcal{D}}$, welche wir mit $\hat{E}_\lambda$ bezeichnen. D.h. es ist $\hat{E}_\lambda \in \mathcal{L}(\hat{\mathcal{D}}, G)$ und $\hat{E}_\lambda|_\mathcal{D} = E_\lambda$.

(3) Wir betrachten nun die Einbettung

$$\hat{E} : \begin{cases} \hat{\mathcal{D}} & \to & \mathfrak{F}(\Omega, G) \\ f & \mapsto & \big(\lambda \mapsto \hat{E}_\lambda f\big). \end{cases}$$

Aus der Linearität von $\hat{E}_\lambda$ folgt leicht die Linearität von $\hat{E}$. Für $f \in \mathcal{D}$ gilt $\hat{E}f = (\lambda \mapsto \hat{E}_\lambda f) = (\lambda \mapsto E_\lambda f) = f$, womit $\hat{E}|_\mathcal{D} = I_\mathcal{D}$. Da $\mathcal{D}$ in $\hat{\mathcal{D}}$ dicht liegt, folgt aus obigen Überlegungen weiters

$$\big\langle \hat{E}_\lambda f, y\big\rangle_G = \big\langle f, K(\lambda, \cdot)y\big\rangle_{\hat{\mathcal{D}}}, \quad \forall\, \lambda \in \Omega, f \in \hat{\mathcal{D}}, y \in G.$$

Ist nun $\hat{E}_\lambda f = 0$ für ein $f \in \hat{\mathcal{D}}$, so folgt daraus, dass $f = 0$ sein muss. Die Abbildung $\hat{E}$ ist also injektiv. Setzt man $\mathcal{H} := \operatorname{ran} \hat{E}$ und definiert auf $\mathcal{H}$ das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mathcal{H}$ durch

$$\big\langle \hat{E}f, \hat{E}g\big\rangle_\mathcal{H} := \big\langle f, g\big\rangle_{\hat{\mathcal{D}}}, \quad \forall\, f, g \in \hat{\mathcal{D}},$$

so ist $\mathcal{H}$ ein funktionaler Hilbertraum auf Ω und $\hat{E} : \hat{\mathcal{D}} \to \mathcal{H}$ unitär. Weiters stimmt für alle $\lambda \in \Omega$ das Punktauswertungsfunktional $E(\lambda) : \mathcal{H} \to G : \hat{E}f \mapsto \big(\hat{E}f\big)(\lambda)$ wegen $\big(\hat{E}f\big)(\lambda) = \hat{E}_\lambda f$ mit dem Operator $\hat{E}_\lambda \circ \hat{E}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, G)$ überein und ist somit stetig. Der Raum $\mathcal{H}$ ist also ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern. Wegen $\hat{E}|_\mathcal{D} = I_\mathcal{D}$ ist $K(\lambda, \cdot)x \in \mathcal{H}$ für alle $\lambda \in \Omega$ und alle $x \in G$. Außerdem gilt für alle $\lambda \in \Omega, x \in G$ und $\hat{E}f \in \mathcal{H}$

$$\big\langle E(\lambda)\hat{E}f, x\big\rangle_G = \big\langle \hat{E}_\lambda f, x\big\rangle_G = \big\langle f, K(\lambda, \cdot)x\big\rangle_{\hat{\mathcal{D}}} = \big\langle \hat{E}f, \hat{E}K(\lambda, \cdot)x\big\rangle_\mathcal{H} = \big\langle \hat{E}f, K(\lambda, \cdot)x\big\rangle_\mathcal{H}.$$

Nach Lemma 5.2.6 ist K somit der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}$.

(4) Um die Eindeutigkeit zu zeigen, seien $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1})$ und $(\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_2})$ zwei Hilberträume mit reproduzierendem Kern K. Laut Lemma 5.2.7 (ii) enthalten beide Räume den Raum $\mathcal{D}$ als dichten linearen Teilraum. Wegen der Eigenschaft (RK2) ist auf diesem das jeweilige innere Produkt gegeben durch (5.5). Also ist $\operatorname{id} : (\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1}) \to (\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_2}) : f \mapsto f$ eine Isometrie. Es existiert also eine eindeutige isometrische Fortsetzung von id auf $\mathcal{H}_1$, welche wir mit $\widehat{\operatorname{id}}$ bezeichnen. Für $\lambda \in \Omega$ seien $E_1(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, G)$ und $E_2(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, G)$ die Punktauswertungfunktionale. Dann gilt $(E_2(\lambda) \circ \widehat{\operatorname{id}})|_\mathcal{D} = E_1(\lambda)|_\mathcal{D}$, woraus $E_2(\lambda) \circ \widehat{\operatorname{id}} = E_1(\lambda)$ folgt. Für $f \in \mathcal{H}_1$ gilt demnach $\big(\widehat{\operatorname{id}}f\big)(\lambda) = E_2(\lambda) \circ \widehat{\operatorname{id}}f = E_1(\lambda)f = f(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Omega$, also ist $\widehat{\operatorname{id}} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ die Identität. □

Definition 5.2.9. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $j \in \{1, \dots, n\}$ definieren wir die koanalytischen Funktionen $\overline{z}_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \overline{\lambda}_j$. Außerdem definieren wir $M_{\overline{z}_j} : \mathfrak{F}(\Omega, G) \to \mathfrak{F}(\Omega, G) : f \mapsto \overline{z}_j \cdot f$ und setzen $\mathbf{M}_{\overline{z}} := (M_{\overline{z}_1}, \dots, M_{\overline{z}_n})$.

Definition 5.2.10. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für eine offene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{A}}(\Omega, G)$ den Vektorraum aller G-wertigen koanalytischen Funktionen auf Ω. Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt *koanalytischer funktionaler Hilbertraum* auf Ω, falls er ein linearer Teilraum von $\overline{\mathfrak{A}}(\Omega, G)$ ist.

Lemma 5.2.11. *Sei $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $\Delta \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Weiters sei $\mathbf{T} \in \mathcal{A}_k^n(\Delta)$ und $\Gamma : \Delta \to \mathcal{L}(\ell_k^2, H)$ analytisch mit $\ker \Gamma(\lambda) = \{0\}$ und $\operatorname{ran} \Gamma(\lambda) = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}$ für alle $\lambda \in \Delta$. Dann existiert ein eindeutiger RKHS $\mathcal{H}_\Gamma \subseteq \overline{\mathfrak{A}}(\Delta, \ell_k^2)$, dessen reproduzierender Kern gegeben ist durch K_Γ (siehe Definition 5.1.13) und ein unitärer Operator $U_\Gamma \in \mathcal{L}(H, \mathcal{H}_\Gamma)$, sodass $U_\Gamma T_j^* = M_{\overline{z}_j} U_\Gamma$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.*
D.h. $\mathbf{T}^*$ ist komponentenweise unitär äquivalent zum n-Tupel $(M_{\overline{z}_1}|_{\mathcal{H}_\Gamma}, \dots, M_{\overline{z}_n}|_{\mathcal{H}_\Gamma}) \in \mathcal{L}^n(\mathcal{H}_\Gamma)$.

Beweis. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$U_\Gamma : \begin{cases} H & \to & \overline{\mathfrak{A}}(\Delta, \ell_k^2) \\ x & \mapsto & \big(\lambda \mapsto \Gamma(\lambda)^* x\big). \end{cases}$$

Um zu zeigen, dass U_Γ wohldefiniert ist, sei $x \in H$ beliebig. Für $\lambda \in \Delta$ ist $\Gamma(\lambda)^* \in \mathcal{L}(H, \ell_k^2)$, also $\Gamma(\lambda)^* x \in \ell_k^2$. Weiters folgt aus Lemma 1.3.3, dass die Abbildung $\Gamma(\cdot)^* x : \Delta \to \ell_k^2 : \lambda \mapsto \Gamma(\lambda)^* x$ konanlytisch ist, da $\Gamma : \Delta \to \mathcal{L}(\ell_k^2, H)$ analytisch ist.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass U_Γ injektiv ist. Angenommen es gilt $U_\Gamma x = 0 \in \overline{\mathfrak{A}}(\Delta, \ell_k^2)$ für ein $x \in H$. Es ist also $\Gamma(\lambda)^* x = 0 \in \ell_k^2$ für alle $\lambda \in \Delta$, und damit

$$\left\langle \Gamma(\lambda)^* x, \xi \right\rangle_{\ell_k^2} = \left\langle x, \Gamma(\lambda)\xi \right\rangle_H = 0, \quad \forall\, \lambda \in \Delta, \xi \in \ell_k^2.$$

Da für alle $\lambda \in \Delta$ aber $\operatorname{ran} \Gamma(\lambda) = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}$ und laut Korollar 5.1.7 außerdem $\operatorname{cls} \bigcup \{\ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} : \lambda \in \Delta\} = H$ ist, muss $x = 0$ sein.

Sei nun $\mathcal{H}_\Gamma := \operatorname{ran} U_\Gamma$ und das Skalarprodukt darauf definiert durch

$$\left\langle U_\Gamma x, U_\Gamma y \right\rangle_\Gamma := \langle x, y \rangle_H, \quad \forall\, x, y \in H.$$

Damit wird $\mathcal{H}_\Gamma$ zu einem Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $U_\Gamma \in \mathcal{L}(H, \mathcal{H}_\Gamma)$ zu einem unitären Operator. Weiters ist für $\lambda \in \Delta$ das Punktauswertungsfunktional $E(\lambda) : \mathcal{H}_\Gamma \to \ell_k^2 : f \mapsto f(\lambda)$ stetig, denn zu $f \in \mathcal{H}_\Gamma$ existiert ein $x \in H$, sodass $f = U_\Gamma x$, womit

$$\|f(\lambda)\|_{\ell_k^2} = \|\Gamma(\lambda)^* x\|_{\ell_k^2} \le \|\Gamma(\lambda)^*\| \cdot \|x\|_H = \|\Gamma(\lambda)\| \cdot \|U_\Gamma x\|_\Gamma = \|\Gamma(\lambda)\| \cdot \|f\|_\Gamma$$

gilt. Es ist also $\|E(\lambda)\| \le \|\Gamma(\lambda)\|$ für alle $\lambda \in \Delta$.

Sei nun $j \in \{1, \dots, n\}$ beliebig aber fest gewählt. Dann ist für alle $\lambda \in \Delta$ und $\xi \in \ell_k^2$ laut Voraussetzung $\Gamma(\lambda)\xi \in \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} \subseteq \ker(T_j - \lambda_j I)$, also $T_j \Gamma(\lambda)\xi = \lambda_j \Gamma(\lambda)\xi$. Damit gilt für alle $\lambda \in \Delta$ und $x \in H$

$$\begin{aligned} \big(U_\Gamma T_j^* x\big)(\lambda) &= \Gamma(\lambda)^* T_j^* x = \big(T_j \Gamma(\lambda)\big)^* x = \big(\lambda_j \Gamma(\lambda)\big)^* x = \\ &= \overline{\lambda}_j \Gamma(\lambda)^* x = \overline{\lambda}_j \big(U_\Gamma x\big)(\lambda) = \big(M_{\overline{z}_j} U_\Gamma x\big)(\lambda) \end{aligned}$$

Also gilt $U_\Gamma T_j^* = M_{\overline{z}_j} U_\Gamma$ und damit $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_\Gamma} = U_\Gamma T_j^* U_\Gamma^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Gamma)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $K_\Gamma : \Delta \times \Delta \to \mathcal{L}(\ell_k^2) : (\lambda, \mu) \mapsto \Gamma(\mu)^* \Gamma(\lambda)$ der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}_\Gamma$ ist. Laut Lemma 5.2.6 reicht es zu zeigen, dass K_Γ die Eigenschaften (RK1) und (RK2) erfüllt. Seien dazu $\lambda \in \Delta$ und $\xi \in \ell_k^2$ beliebig aber fest gewählt. Dann gilt für alle $\mu \in \Delta$ zunächst $K_\Gamma(\lambda, \mu)\xi = \Gamma(\mu)^* \Gamma(\lambda)\xi = \big(U_\Gamma \Gamma(\lambda)\xi\big)(\mu)$, womit die Funktion $K_\Gamma(\lambda, \cdot)\xi = U_\Gamma \Gamma(\lambda)\xi$ ein Element von $\mathcal{H}_\Gamma$ ist. Ist nun $f \in \mathcal{H}_\Gamma$ und $x \in H$, sodass $f = U_\Gamma x$, dann gilt

$$\begin{aligned} \left\langle f(\lambda), \xi \right\rangle_{\ell_k^2} &= \left\langle \big(U_\Gamma x\big)(\lambda), \xi \right\rangle_{\ell_k^2} = \left\langle \Gamma(\lambda)^* x, \xi \right\rangle_{\ell_k^2} = \\ &= \left\langle x, \Gamma(\lambda)\xi \right\rangle_H = \left\langle U_\Gamma x, U_\Gamma \Gamma(\lambda)\xi \right\rangle_\Gamma = \left\langle f, K_\Gamma(\lambda, \cdot)\xi \right\rangle_\Gamma. \end{aligned}$$

□

Korollar 5.2.12. *Sei $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Zwei n-Tupel $\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{T}} \in \mathcal{A}_k^n(\Omega)$ sind genau dann komponentenweise unitär äquivalent, wenn die n-Tupel $\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_\Gamma}$ und $\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_{\tilde{\Gamma}}}$ komponentenweise unitär äquivalent sind.*

Beweis. Da laut Lemma 5.2.11 die n-Tupel $\mathbf{T}^*$ und $\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_\Gamma}$ bzw. $\tilde{\mathbf{T}}^*$ und $\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_{\tilde{\Gamma}}}$ komponentenweise unitär äquivalent sind, folgt die Aussage direkt aus obigem Lemma. □

Im restlichen Teil dieser Arbeit wollen wir der Frage nachgehen, unter welchen Bedingungen an einen Kern $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(\ell_k^2)$ ein funktionaler Hilbertraum $\mathcal{H}$ auf Ω existiert, sodass für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ die Einschränkung $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}}$ ein Element von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist und das n-Tupel $(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}})^*$ ein Element von $\mathcal{B}_k^n(\Omega)$ ist. Das nächste Lemma ist bereits ein erster Schritt in diese Richtung.

Sei $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle_G)$ wieder ein beliebiger Hilbertraum über $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gewählt und $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen.

Lemma 5.2.13. *Für eine Abbildung $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(G)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es existiert ein eindeutiger RKHS $\mathcal{H}$, sodass K der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}$ ist und es gilt $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ für alle $j \in \{1,\dots,n\}$.

(ii) Es gibt eine Konstante $C > 0$, sodass für je endlich viele $\lambda^0,\dots,\lambda^m \in \Omega$ und $x_0,\dots,x_m \in G$

$$\sum_{p,q=0}^{m} \left\langle \lambda^p - \lambda^0, \lambda^q - \lambda^0 \right\rangle_{\mathbb{C}^n} \left\langle K(\lambda^p,\lambda^q)x_p, x_q \right\rangle_G \le C \sum_{p,q=0}^{m} \left\langle K(\lambda^p,\lambda^q)x_p, x_q \right\rangle_G .$$

In diesem Fall ist $\{K(\lambda,\cdot)x : x \in G\} \subseteq \ker \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}})^*-\lambda}$ für alle $\lambda \in \Omega$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sei K der reproduzierende Kern des Hilbertraumes $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$. Dann gilt für alle $\lambda \in \Omega, x \in G, f \in \mathcal{H}$ und $j \in \{1,\dots,n\}$

$$\left\langle f, M_{\overline{z}_j}^* K(\lambda,\cdot)x \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle M_{\overline{z}_j} f, K(\lambda,\cdot)x \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \overline{\lambda}_j f(\lambda), x \right\rangle_G = \left\langle f, \lambda_j K(\lambda,\cdot)x \right\rangle_{\mathcal{H}},$$

woraus $\{K(\lambda,\cdot)x : x \in G\} \subseteq \bigcap_{j=1}^n \ker\big((M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}})^* - \lambda_j I_{\mathcal{H}}\big) = \ker \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}})^*-\lambda}$ für alle $\lambda \in \Omega$ folgt. Weiters gilt damit für alle $\lambda \in \Omega$ und $x \in G$

$$\left\|\mathfrak{D}_{\mathbf{M}_{\overline{z}}^*}\right\| = \sup_{f \in \mathcal{H}} \frac{\left\|\mathfrak{D}_{\mathbf{M}_{\overline{z}}^*} f\right\|_{\mathcal{H}^n}}{\|f\|_{\mathcal{H}}} \ge \frac{\left\|\mathfrak{D}_{\mathbf{M}_{\overline{z}}^*} K(\lambda,\cdot)x\right\|_{\mathcal{H}^n}}{\|K(\lambda,\cdot)x\|_{\mathcal{H}}} = \frac{\left\|\mathfrak{D}_\lambda K(\lambda,\cdot)x\right\|_{\mathcal{H}^n}}{\|K(\lambda,\cdot)x\|_{\mathcal{H}}} = \|\lambda\|_2 = \|\mathfrak{D}_\lambda\|,$$

also $\sup_{\lambda \in \Omega} \|\mathfrak{D}_\lambda\| \le \|\mathfrak{D}_{\mathbf{M}_{\overline{z}}^*}\|$. Sind nun $\lambda^0,\dots,\lambda^m \in \Omega$ und $x_0,\dots,x_m \in G$ beliebig, und setzt man $f := \sum_{p=0}^m K(\lambda^p,\cdot)x_p$, dann folgt daraus mit Hilfe der Eigenschaft (RK2)

$$\begin{aligned}
&\sum_{p,q=0}^{m} \left\langle \lambda^p - \lambda^0, \lambda^q - \lambda^0 \right\rangle_{\mathbb{C}^n} \left\langle K(\lambda^p,\lambda^q)x_p, x_q \right\rangle_G = \\
&\qquad = \sum_{p,q=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j^p - \lambda_j^0)\overline{(\lambda_j^q - \lambda_j^0)} \left\langle K(\lambda^p,\cdot)x_p, K(\lambda^q,\cdot)x_q \right\rangle_{\mathcal{H}} = \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{n} \Big\langle \sum_{p=0}^{m} (\lambda_j^p - \lambda_j^0) K(\lambda^p,\cdot)x_p, \sum_{q=0}^{m} (\lambda_j^q - \lambda_j^0) K(\lambda^q,\cdot)x_q \Big\rangle_{\mathcal{H}} = \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{n} \Big\| (M_{\overline{z}_j}^* - \lambda_j^0) \sum_{p=0}^{m} K(\lambda^p,\cdot)x_p \Big\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\|\mathfrak{D}_{\mathbf{M}_{\overline{z}}^* - \lambda^0} f\right\|_{\mathcal{H}^n}^2 \le \\
&\qquad \le \left\|\mathfrak{D}_{\mathbf{M}_{\overline{z}}^* - \lambda^0}\right\|^2 \cdot \|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\|\mathfrak{D}_{\mathbf{M}_{\overline{z}}^*} - \mathfrak{D}_{\lambda^0}\right\|^2 \cdot \|f\|_{\mathcal{H}}^2 \le \big(2\left\|\mathfrak{D}_{\mathbf{M}_{\overline{z}}^*}\right\|\big)^2 \cdot \|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \\
&\qquad = 4\left\|\mathfrak{D}_{\mathbf{M}_{\overline{z}}^*}\right\|^2 \sum_{p,q=0}^{m} \left\langle K(\lambda^p,\lambda^q)x_p, x_q \right\rangle_G .
\end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Wir zeigen zunächst durch vollständige Induktion nach m, dass K ein positiver Kern ist. Für $m = 0$ gilt laut Voraussetzung $\langle K(\lambda,\lambda)x, x\rangle \ge 0$ für alle $\lambda \in \Omega$ und alle $x \in G$. Sei also $m \in \mathbb{N}$ beliebig und gelte

$$\sum_{p,q=1}^{m} \left\langle K(\lambda^p,\lambda^q)x_p, x_q \right\rangle_G \ge 0, \quad \forall\ \lambda^1,\dots,\lambda^m \in \Omega, x_1,\dots,x_m \in G.$$

Dann folgt für alle $\lambda^0,\dots,\lambda^m \in \Omega$ und $x_0,\dots,x_m \in G$

$$\begin{aligned}
C \sum_{p,q=0}^{m} \left\langle K(\lambda^p,\lambda^q)x_p, x_q \right\rangle_G &\ge \sum_{p,q=1}^{m} \langle \lambda^p - \lambda^0, \lambda^q - \lambda^0 \rangle_{\mathbb{C}^n} \left\langle K(\lambda^p,\lambda^q)x_p, x_q \right\rangle_G = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{p,q=1}^{m} \left\langle K(\lambda^p,\lambda^q)(\lambda_j^p - \lambda_j^0)x_p, (\lambda_j^q - \lambda_j^0)x_q \right\rangle_G \ge 0.
\end{aligned}$$

Damit ist K ein positiver Kern auf $\Omega \times \Omega$. Nach Satz 5.2.8 existiert also ein eindeutiger RKHS $\mathcal{H}$, sodass K der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}$ ist.

Um die zweite Aussage zu zeigen, sei $\lambda^0 \in \Omega$ beliebig aber fest gewählt und $x_0 := 0 \in G$. Wir betrachten den laut Lemma 5.2.7 dichten Teilraum $\mathcal{D} := \operatorname{span}\{K(\lambda, \cdot)x : \lambda \in \Omega, x \in G\}$ von $\mathcal{H}$ und definieren für $j \in \{1, \dots, n\}$ die linearen Abbildungen $Z_j : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ durch

$$Z_j\big(K(\lambda, \cdot)x\big) := (\lambda_j - \lambda_j^0)K(\lambda, \cdot)x, \quad \forall\, \lambda \in \Omega, x \in G.$$

Aus der Gültigkeit von Punkt (*ii*) und der Eigenschaft (RK2) folgt

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \sum_{p=1}^{m} (\lambda_j^p - \lambda_j^0)K(\lambda^p, \cdot)x_p, \sum_{q=1}^{m} (\lambda_j^q - \lambda_j^0)K(\lambda^q, \cdot)x_q \Big\rangle_{\mathcal{H}} \leq \\
&\qquad \leq \sum_{i=1}^{n} \Big\langle \sum_{p=1}^{m} (\lambda_i^p - \lambda_i^0)K(\lambda^p, \cdot)x_p, \sum_{q=1}^{m} (\lambda_i^q - \lambda_i^0)K(\lambda^q, \cdot)x_q \Big\rangle_{\mathcal{H}} = \\
&\qquad = \sum_{p,q=0}^{m} \big\langle \lambda^p - \lambda^0, \lambda^q - \lambda^0 \big\rangle_{\mathbb{C}^n} \big\langle K(\lambda^p, \lambda^q)x_p, x_q \big\rangle_G \leq C \sum_{p,q=0}^{m} \big\langle K(\lambda^p, \lambda^q)x_p, x_q \big\rangle_G = \\
&\qquad = C\Big\langle \sum_{p=1}^{m} K(\lambda^p, \cdot)x_p, \sum_{q=1}^{m} K(\lambda^q, \cdot)x_q \Big\rangle_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

womit die Abbildungen $Z_j, j = 1, \dots, n$ beschränkt sind. Es existieren also eindeutige beschränkte lineare Fortsetzungen von Z_j auf $\mathcal{H}$, die wir mit $\hat{Z}_j$ bezeichnen. D.h. es gilt $\hat{Z}_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\hat{Z}_j|_{\mathcal{D}} = Z_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Um den Beweis abzuschließen, zeigen wir, dass $(\hat{Z}_j + \lambda_j^0 I)^* = M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}}$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Seien dazu $f \in \mathcal{H}$ und $g = \sum_{p=1}^{m} K(\lambda^p, \cdot)x_p \in \mathcal{D}$ beliebig. Dann gilt wegen der Eigenschaft (RK2)

$$\big\langle M_{\overline{z}_j} f, g \big\rangle_{\mathcal{H}} = \Big\langle \overline{z}_j \cdot f, \sum_{p=1}^{m} K(\lambda^p, \cdot)x_p \Big\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{p=1}^{m} \big\langle \overline{\lambda}_j^p f(\lambda^p), x_p \big\rangle_G$$

und

$$\big\langle f, (Z_j + \lambda_j^0 I)g \big\rangle_{\mathcal{H}} = \Big\langle f, \sum_{p=1}^{m} \lambda_j^p K(\lambda^p, \cdot)x_p \Big\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{p=1}^{m} \big\langle \overline{\lambda}_j^p f(\lambda^p), x_p \big\rangle_G,$$

was die Behauptung zeigt. Es ist also $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. □

Lemma 5.2.14. *Seien K bzw. $\tilde{K}$ die reproduzierenden Kerne der RKHS $\mathcal{H}_K$ bzw. $\mathcal{H}_{\tilde{K}}$. Es gelte:*

- *Für alle $\lambda \in \Omega$ ist* $\ker K(\lambda, \lambda) = \ker \tilde{K}(\lambda, \lambda) = \{0\}$.
- *Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ ist $M_j := M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_K} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_K)$ und $\tilde{M}_j := M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{K}})$.*
- *Für alle $\lambda \in \Omega$ ist $\{K(\lambda, \cdot)x : x \in G\} = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{M}^* - \lambda}$ und $\{\tilde{K}(\lambda, \cdot)x : x \in G\} = \ker \mathfrak{D}_{\tilde{\mathbf{M}}^* - \lambda}$.*

Falls es einen Operator $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{K}}, \mathcal{H}_K)$ gibt, sodass $X\tilde{M}_j = M_j X$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, dann existiert eine Abbildung $\Phi_{X^*} : \Omega \to \mathcal{L}(G)$, sodass

(i) $X^* K(\lambda, \cdot)x = \tilde{K}(\lambda, \cdot)\Phi_{X^*}(\lambda)x$ *für alle $\lambda \in \Omega$ und alle $x \in G$.*

(ii) $\big(Xf\big)(\lambda) = \Phi_{X^*}(\lambda)^* f(\lambda)$ *für alle $f \in \mathcal{H}_{\tilde{K}}$ und alle $\lambda \in \Omega$.*

(iii) Es existiert ein $C > 0$, sodass für je endlich viele $\lambda^1, \dots, \lambda^m \in \Omega$ und $x_1, \dots, x_m \in G$ die folgende Ungleichung gilt

$$\sum_{p,q=1}^{m} \big\langle \Phi_{X^*}(\lambda^q)^* \tilde{K}(\lambda^p, \lambda^q)\Phi_{X^*}(\lambda^p)x_p, x_q \big\rangle_G \leq C \sum_{p,q=1}^{m} \big\langle K(\lambda^p, \lambda^q)x_p, x_q \big\rangle_G.$$

Gilt umgekehrt die Ungleichung aus Punkt (iii) für eine Abbildung $\Phi : \Omega \to \mathcal{L}(G)$, so gibt es einen eindeutigen Operator $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{K}}, \mathcal{H}_K)$, sodass $X\tilde{M}_j = M_j X$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Beweis. Für $\lambda \in \Omega$ bezeichnen wir mit $E(\lambda) : \mathcal{H}_K \to G : f \mapsto f(\lambda)$ bzw. $\tilde{E}(\lambda) : \mathcal{H}_{\tilde{K}} \to G : f \mapsto f(\lambda)$ die Punktauswertungsfunktionale auf $\mathcal{H}_K$ bzw. $\mathcal{H}_{\tilde{K}}$. Nach Lemma 5.2.6 gilt $K(\lambda, \mu) = E(\mu)E(\lambda)^*$ und $\tilde{K}(\lambda, \mu) = \tilde{E}(\mu)\tilde{E}(\lambda)^*$ für alle $\lambda, \mu \in \Omega$. Für alle $\lambda \in \Omega$ ist laut Lemma 5.2.7 und laut Voraussetzung $\ker E(\lambda)^* = \ker \tilde{E}(\lambda)^* = \{0\}$ und $\operatorname{ran} E(\lambda)^* = \{E(\lambda)^* x : x \in G\} = \{K(\lambda, \cdot)x : x \in G\} = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{M}^*-\lambda}$, sowie $\operatorname{ran} \tilde{E}(\lambda)^* = \ker \mathfrak{D}_{\tilde{\mathbf{M}}^*-\lambda}$. Da $\ker \mathfrak{D}_{\mathbf{M}^*-\lambda}$ und $\ker \mathfrak{D}_{\tilde{\mathbf{M}}^*-\lambda}$ als abgeschlossene Teilräume von Hilberträumen ebenfalls vollständig sind, sind die Operatoren $E(\lambda)^*$ und $\tilde{E}(\lambda)^*$ nach dem Satz von der offenen Abbildung stetig invertierbar.

Sei zunächst $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{K}}, \mathcal{H}_K)$ und gelte $X\tilde{M}_j = M_j X$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Wir bezeichnen mit I_K bzw. $I_{\tilde{K}}$ die Identitäten auf $\mathcal{H}_K$ bzw. $\mathcal{H}_{\tilde{K}}$. Dann gilt für $\lambda \in \Omega$

$$X^*(M_j^* - \lambda_j I_K) = (\tilde{M}_j^* - \lambda_j I_{\tilde{K}})X^*, \quad \forall\, j \in \{1, \dots, n\},$$

woraus $X^*(\ker \mathfrak{D}_{\mathbf{M}^*-\lambda}) \subseteq \ker \mathfrak{D}_{\tilde{\mathbf{M}}^*-\lambda}$ folgt. Wir definieren nun die Abbildung

$$\Phi_{X^*} : \left\{ \begin{array}{lll} \Omega & \to & \mathcal{L}(G) \\ \lambda & \mapsto & (\tilde{E}(\lambda)^*)^{-1} \circ X^* \circ E(\lambda)^*. \end{array} \right.$$

Die Gültigkeit von Punkt (i) ist damit klar. Für den zweiten Punkt seien $f \in \mathcal{H}_{\tilde{K}}, \lambda \in \Omega$ und $x \in G$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} \big\langle (Xf)(\lambda), x \big\rangle_G &= \big\langle Xf, K(\lambda, \cdot)x \big\rangle_{\mathcal{H}_K} = \big\langle f, X^* K(\lambda, \cdot)x \big\rangle_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}} = \\ &= \big\langle f, \tilde{K}(\lambda, \cdot)\Phi_{X^*}(\lambda)x \big\rangle_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}} = \big\langle f(\lambda), \Phi_{X^*}(\lambda)x \big\rangle_G = \big\langle \Phi_{X^*}(\lambda)^* f(\lambda), x \big\rangle_G. \end{aligned}$$

Seien nun $\lambda^1, \dots, \lambda^m \in \Omega$ und $x_1, \dots, x_m \in G$ beliebig. Wir setzen $f := \sum_{p=1}^m K(\lambda^p, \cdot)x_p$ und erhalten aus der Eigenschaft (RK2)

$$\begin{aligned} \sum_{p,q=1}^m \big\langle \Phi_{X^*}(\lambda^q)^* \tilde{K}(\lambda^p, \lambda^q) \Phi_{X^*}(\lambda^p) x_p, x_q \big\rangle_G &= \sum_{p,q=1}^m \big\langle \tilde{K}(\lambda^p, \lambda^q) \Phi_{X^*}(\lambda^p) x_p, \Phi_{X^*}(\lambda^q) x_q \big\rangle_G = \\ &= \sum_{p,q=1}^m \big\langle \tilde{K}(\lambda^p, \cdot) \Phi_{X^*}(\lambda^p) x_p, \tilde{K}(\lambda^q, \cdot) \Phi_{X^*}(\lambda^q) x_q \big\rangle_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}} = \\ &= \sum_{p,q=1}^m \big\langle X^* K(\lambda^p, \cdot) x_p, X^* K(\lambda^q, \cdot) x_q \big\rangle_{\mathcal{H}_K} = \|X^* f\|^2 \leq \\ &\leq \|X^*\|^2 \|f\|_{\mathcal{H}_K}^2 = \|X\|^2 \sum_{p,q=1}^m \big\langle K(\lambda^p, \lambda^q) x_p, x_q \big\rangle_G. \end{aligned}$$

Sei umgekehrt $\Phi : \Omega \to \mathcal{L}(G)$ eine Abbildung, welche die Ungleichung in Punkt (iii) erfüllt. Wir betrachten wieder den laut Lemma 5.2.7 dichten Teilraum $\mathcal{D}_K := \operatorname{span}\{K(\lambda, \cdot)x : \lambda \in \Omega, x \in G\}$ von $\mathcal{H}_K$ und definieren die lineare Abbildung $Y : \mathcal{D}_K \to \mathcal{H}_{\tilde{K}}$ durch

$$Y\big(K(\lambda, \cdot)x\big) := \tilde{K}(\lambda, \cdot)\Phi(\lambda)x, \quad \forall\, \lambda \in \Omega, x \in G.$$

Aus der Gültigkeit von Punkt (iii) und der Eigenschaft (RK2) folgt nun leicht die Beschränktheit der Abbildung Y, denn für $\lambda^1, \dots, \lambda^p \in \Omega$ und $x_1, \dots, x_p \in G$ gilt

$$\begin{aligned} \Big\langle \sum_{p=1}^m \tilde{K}(\lambda^p, \cdot)\Phi(\lambda^p)x_p, \sum_{q=1}^m \tilde{K}(\lambda^q, \cdot)\Phi(\lambda^q)x_q \Big\rangle_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}} &= \sum_{p,q=1}^m \big\langle \Phi_{X^*}(\lambda^q)^* \tilde{K}(\lambda^p, \lambda^q) \Phi_{X^*}(\lambda^p) x_p, x_q \big\rangle_G \leq \\ &\leq C \sum_{p,q=1}^m \big\langle K(\lambda^p, \lambda^q) x_p, x_q \big\rangle_G = C \Big\langle \sum_{p=1}^m K(\lambda^p, \cdot)x_p, \sum_{q=1}^m K(\lambda^q, \cdot)x_q \Big\rangle_{\mathcal{H}_K}. \end{aligned}$$

Es existiert also eine eindeutige beschränkte lineare Fortsetzung von Y auf $\mathcal{H}_K$, die wir mit $\hat{Y}$ bezeichnen. D.h. es ist $\hat{Y} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_K, \mathcal{H}_{\tilde{K}})$ und $\hat{Y}|_{\mathcal{D}_K} = Y$.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass $\hat{Y}^* \tilde{M}_j = M_j \hat{Y}^*$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Dazu bemerken wir, dass für beliebige $f \in \mathcal{H}_{\tilde{K}}, \lambda \in \Omega$ und $x \in G$

$$\begin{aligned}\big\langle (\hat{Y}^* f)(\lambda), x \big\rangle_G &= \big\langle \hat{Y}^* f, K(\lambda,\cdot)x \big\rangle_{\mathcal{H}_K} = \big\langle f, \hat{Y} K(\lambda,\cdot)x \big\rangle_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}} = \\ &= \big\langle f, \tilde{K}(\lambda,\cdot)\Phi(\lambda)x \big\rangle_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}} = \big\langle f(\lambda), \Phi(\lambda)x \big\rangle_G = \big\langle \Phi(\lambda)^* f(\lambda), x \big\rangle_G\end{aligned}$$

gilt. Es ist also

$$\big(M_j \hat{Y}^* f\big)(\lambda) = \overline{\lambda}_j \Phi(\lambda)^* f(\lambda) = \Phi(\lambda)^* \overline{\lambda}_j f(\lambda) = \Phi(\lambda)^* \big(\tilde{M}_j f\big)(\lambda) = \big(\hat{Y}^* \tilde{M}_j f\big)(\lambda),$$

was die Behauptung zeigt. Die Abbildung $X := \hat{Y}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{K}}, \mathcal{H}_K)$ hat also alle gewünschten Eigenschaften und ist eindeutig bestimmt durch $\big(Xf\big)(\cdot) = \Phi(\cdot)^* f(\cdot)$ für alle $f \in \mathcal{H}_{\tilde{K}}$. □

Bemerkung 5.2.15. Seien K und $\tilde{K}$ zwei positive Kerne auf $\Omega \times \Omega$, welche die Voraussetzungen von Lemma 5.2.14 erfüllen. Angenommen die n-Tupel $\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_K}$ und $\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}}$ sind komponentenweise unitär äquivalent und $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_K, \mathcal{H}_{\tilde{K}})$ ist der zugehörige unitäre Operator, dann existiert laut obigem Lemma eine Abbildung $\Phi_{U^*} : \Omega \to \mathcal{L}(G)$, sodass $\Phi_{U^*}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Omega$ invertierbar ist und für alle $\lambda, \mu \in \Omega$

$$\begin{aligned}K(\lambda,\mu) &= E(\mu)E(\lambda)^* = E(\mu)UU^*E(\lambda)^* = (U^*E(\mu)^*)^*U^*E(\lambda)^* = \\ &= (\tilde{E}(\mu)^*\Phi_{U^*}(\mu))^*\tilde{E}(\lambda)^*\Phi_{U^*}(\lambda) = \Phi_{U^*}(\mu)^*\tilde{E}(\mu)\tilde{E}(\lambda)^*\Phi_{U^*}(\lambda) = \Phi_{U^*}(\mu)^*\tilde{K}(\mu,\lambda)\Phi_{U^*}(\lambda)\end{aligned}$$

gilt. Das folgende Lemma ist eine Umkehrung dieser Aussage.

Lemma 5.2.16. *Sei $\mathcal{H}_K$ ein RKHS mit reproduzierendem Kern K. Weiters sei $\Phi : \Omega \to \mathcal{L}(G)$, sodass $\Phi(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Omega$ invertierbar ist. Dann ist*

$$\tilde{K} : \begin{cases} \Omega \times \Omega & \to \quad \mathcal{L}(G) \\ (\lambda,\mu) & \mapsto \quad \Phi(\mu)^* K(\lambda,\mu) \Phi(\lambda) \end{cases}$$

ein positiver Kern auf $\Omega \times \Omega$ und der Operator

$$U : \begin{cases} \mathcal{H}_K & \to \quad \mathcal{H}_{\tilde{K}} \\ f & \mapsto \quad \big(\lambda \mapsto \Phi(\lambda)^* f(\lambda)\big) \end{cases}$$

unitär, wobei wir mit $\mathcal{H}_{\tilde{K}}$ den zu $\tilde{K}$ gehörigen RKHS bezeichnen.
Ist außerdem $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_K} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_K)$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$, so gilt $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}} = U M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_K} U^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{K}})$.

Beweis. Dass $\tilde{K}$ ein positiver Kern auf $\Omega \times \Omega$ ist folgt leicht aus der Annahme, dass K ein positiver Kern ist und $\Phi(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Omega$ invertierbar ist. Laut Satz 5.2.8 existiert also ein eindeutiger RKHS $\mathcal{H}_{\tilde{K}}$ mit Kern $\tilde{K}$. Wir betrachten wieder die laut Lemma 5.2.7 dichten Teilräume

$$\mathcal{D}_K := \operatorname{span}\{K(\lambda,\cdot)x : \lambda \in \Omega, x \in G\} \quad \text{und} \quad \mathcal{D}_{\tilde{K}} := \operatorname{span}\{\tilde{K}(\lambda,\cdot)x : \lambda \in \Omega, x \in G\}$$

von $\mathcal{H}_K$ bzw. $\mathcal{H}_{\tilde{K}}$ und definieren den linearen Operator $V : \mathcal{D}_{\tilde{K}} \to \mathcal{H}_K$ durch

$$V\big(\tilde{K}(\lambda,\cdot)x\big) := K(\lambda,\cdot)\Phi(\lambda)x, \quad \forall \lambda \in \Omega, x \in G.$$

Für beliebige $\lambda^1, \dots, \lambda^m \in \Omega$ und $x_1, \dots, x_m \in G$ gilt nun

$$\begin{aligned}\Big\| V\Big(\sum_{p=1}^m \tilde{K}(\lambda^p,\cdot)x_p\Big)\Big\|_{\mathcal{H}_K}^2 &= \Big\|\sum_{p=1}^m K(\lambda^p,\cdot)\Phi(\lambda^p)x_p\Big\|_{\mathcal{H}_K}^2 = \\ &= \sum_{p,q=1}^m \big\langle K(\lambda^p,\lambda^q)\Phi(\lambda^p)x_p, \Phi(\lambda^q)x_q\big\rangle_G = \\ &= \sum_{p,q=1}^m \big\langle \tilde{K}(\lambda^p,\lambda^q)x_p, x_q\big\rangle_G = \Big\|\sum_{p=1}^m \tilde{K}(\lambda^p,\cdot)x_p\Big\|_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}}^2,\end{aligned}$$

womit V isometrisch ist. Folglich existiert eine eindeutige isometrische Fortsetzung von V auf $\mathcal{H}_{\tilde{K}}$, welche wir mit $\hat{V}$ bezeichen. D.h. es ist $\hat{V} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{K}}, \mathcal{H}_K)$ und $\hat{V}|_{\mathcal{D}_{\tilde{K}}} = V$. Da $\hat{V}$ eine Isometrie ist, ist $\operatorname{ran} \hat{V}$ abgeschlossen. Wegen $\operatorname{ran} \hat{V} \supseteq \mathcal{D}_K$ muss also $\operatorname{ran} \hat{V} = \mathcal{H}_K$ sein, womit $\hat{V}$ ein unitärer Operator ist.

Für $f \in \mathcal{H}_K, \lambda \in \Omega$ und $x \in G$ gilt nun

$$\begin{aligned}\big\langle \big(\hat{V}^* f\big)(\lambda), x\big\rangle_G &= \big\langle \hat{V}^* f, \tilde{K}(\lambda, \cdot)x\big\rangle_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}} = \big\langle f, \hat{V}\big(\tilde{K}(\lambda, \cdot)x\big)\big\rangle_{\mathcal{H}_K} = \\ &= \big\langle f, K(\lambda, \cdot)\Phi(\lambda)x\big\rangle_{\mathcal{H}_K} = \big\langle f(\lambda), \Phi(\lambda)x\big\rangle_G = \big\langle \Phi(\lambda)^* f(\lambda), x\big\rangle_G.\end{aligned}$$

Definiert man den unitären Operator $U := \hat{V}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_K, \mathcal{H}_{\tilde{K}})$, so gilt

$$Uf = \big(\zeta \mapsto \Phi(\zeta)^* f(\zeta)\big), \quad \forall\ f \in \mathcal{H}_K.$$

Falls $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_K} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_K)$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, dann gilt für alle $f \in \mathcal{H}_K$ und alle $\lambda \in \Omega$

$$\big(UM_{\overline{z}_j} f\big)(\lambda) = \Phi(\lambda)^* \overline{\lambda}_j f(\lambda) = \overline{\lambda}_j \Phi(\lambda)^* f(\lambda) = \big(M_{\overline{z}_j} U f\big)(\lambda),$$

woraus die letzte Behauptung folgt. □

5.3 Verallgemeinerte Bergman-Kerne

Im Folgenden sei wieder $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gewählt und $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und nichtleer. Weiters sei $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle_G)$ ein beliebiger Hilbertraum über $\mathbb{C}$.

Definition 5.3.1. Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Wir nennen eine Funktion $f : \Omega \times \Omega \to X$ *sesquianalytisch*, falls sie in der ersten Variable analytisch und in der zweiten Variable koanalytisch ist. D.h. falls die Funktion $\hat{f} : \Omega \times \Omega^* \to X : (\lambda, \mu) \mapsto f(\lambda, \overline{\mu})$ analytisch ist. Dabei fassen wir $\Omega \times \Omega^* = \{(\lambda, \overline{\mu}) : \lambda, \mu \in \Omega\}$ als (offene) Teilmenge von $\mathbb{C}^{2n}$ auf.

Bemerkung 5.3.2. Ist $f : \Omega \times \Omega \to X$ eine sesquianalytische Funktion und $\hat{f} : \Omega \times \Omega^* \to X : (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto f(\lambda_1, \overline{\lambda}_2)$, so existiert für jedes Paar $(w_1, w_2) \in \Omega \times \Omega$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ die Ableitung

$$\begin{aligned}\partial^{(\alpha,\beta)} \hat{f}(w_1, \overline{w}_2) &= \partial^{(\alpha,0)} \partial^{(0,\beta)} \big(f(\cdot, \bar{\cdot})\big)(w_1, \overline{w}_2) = \\ &= \partial^{(\alpha,0)} \overline{\partial}^{(0,\beta)} f(w_1, w_2) \in X.\end{aligned}$$

Ist $r > 0$, sodass $D_r^{2n}(w_1, w_2) = D_r^n(w_1) \times D_r^n(w_2) \subseteq \Omega \times \Omega$, dann gilt laut Lemma 1.2.17 für alle $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Omega \times \Omega$

$$\begin{aligned}f(\lambda_1, \lambda_2) = \hat{f}(\lambda_1, \overline{\lambda}_2) &= \sum_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^{(\alpha,\beta)} \hat{f}(w_1, \overline{w}_2)}{(\alpha, \beta)!} (\lambda_1 - w_1)^\alpha (\overline{\lambda}_2 - \overline{w}_2)^\beta = \\ &= \sum_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^n} \frac{\partial^{(\alpha,0)} \overline{\partial}^{(0,\beta)} f(w_1, w_2)}{\alpha! \beta!} (\lambda_1 - w_1)^\alpha (\overline{\lambda}_2 - \overline{w}_2)^\beta,\end{aligned}$$

wobei diese Mehrfachpotenzreihe absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $D_r^{2n}(w_1, w_2)$ konvergiert.

Bemerkung 5.3.3. Um für $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ eine Matrix der Gestalt $(M_{\alpha,\beta})_{0 \leq \alpha, \beta \leq \rho}$ notieren zu können, benötigt man eine Totalordnung der Menge $\mathbb{N}_0^n$. Wir werden hierfür stets die kolexikographische Ordnung verwenden. Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ aus $\mathbb{N}_0^n$ gilt dabei

$$\begin{aligned}\alpha \leq^{kolex} \beta \quad :\Leftrightarrow \quad & \big(\alpha = \beta\big) \vee \big(\alpha_n < \beta_n\big) \vee \\ & \vee \Big(\exists\ m \in \{1, \ldots, n-1\} : \big(\forall\ j \in \{m+1, \ldots, n\} : \alpha_j = \beta_j\big) \wedge \big(\alpha_m < \beta_m\big)\Big).\end{aligned}$$

Definition 5.3.4. Für einen sesquianalytischen Kern K auf $\Omega \times \Omega$ definieren wir für $w \in \Omega$ und $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ die Operatormatrix $\mathfrak{M}(K, w, \rho)$ durch

$$\mathfrak{M}(K, w, \rho)_{\beta,\alpha} := \partial^{(\alpha,0)} \bar{\partial}^{(0,\beta)} K(w, w), \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq \rho.$$

Wir nennen einen sesquianalytischen Kern K *regulär*, falls für alle $w \in \Omega$ und alle $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ die Operatormatrix $\mathfrak{M}(K, w, \rho)$ positiv semidefinit ist.

Lemma 5.3.5. *Sei $\mathcal{H}$ ein koanalytischer funktionaler Hilbertraum auf Ω und $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(G)$ der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}$. Dann gilt:*

(i) Die Abbildung K ist sesquianalytisch.

(ii) Für alle $w \in \Omega, x \in G$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist $\partial^{(\alpha,0)} K(w, \cdot)x : \Omega \to G : \mu \mapsto \partial^{(\alpha,0)} K(w, \mu)x$ ein Element von $\mathcal{H}$ und für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt

$$\big\langle \bar{\partial}^\alpha f(w), x \big\rangle_G = \big\langle f, \partial^{(\alpha,0)} K(w, \cdot)x \big\rangle_{\mathcal{H}}.$$

(iii) Ist Ω zusammenhängend, so gilt $\operatorname{cls}\big\{\partial^{(\alpha,0)} K(w, \cdot)x : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, x \in G\big\} = \mathcal{H}$ für alle $w \in \Omega$ und $\operatorname{cls}\{K(\lambda, \cdot)x : \lambda \in \Delta, x \in G\} = \mathcal{H}$ für jede offene nichtleere Teilmenge Δ von Ω.

(iv) Ist Ω zusammenhängend und G ein separabler Hilbertraum, so ist auch $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum.

(v) Der Kern K ist regulär, d.h. für alle $w \in \Omega$ und alle $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq \rho} \big\langle \partial^{(\alpha,0)} \bar{\partial}^{(0,\beta)} K(w, w) x_\alpha, x_\beta \big\rangle_G \geq 0, \quad \forall\ x_0, \ldots, x_\rho \in G.$$

Beweis. (i) Wir betrachten die Abbildung $E : \Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{H}, G) : \lambda \mapsto E(\lambda)$, wobei wir für $\lambda \in \Omega$ mit $E(\lambda)$ wieder das Punktauswertungsfunktional bezeichnen. Um zu zeigen, dass diese Abbildung koanalytisch ist, müssen wir zeigen, dass die Abbildung $\hat{E} : \Omega^* \to \mathcal{L}(\mathcal{H}, G) : \lambda \mapsto E(\overline{\lambda})$ analytisch ist. Laut Lemma 1.1.5 ist dies äquivalent dazu, dass für alle $f \in \mathcal{H}$ die Funktion

$$\hat{E}(\cdot)f : \Omega^* \to G : \lambda \mapsto E(\overline{\lambda})f = f(\overline{\lambda})$$

analytisch ist. Das gilt aber, da laut Voraussetzung $\mathcal{H} \subseteq \overline{\mathfrak{A}}(\Omega, G)$. Für festes $\mu \in \Omega$ ist also die Funktion $K(\mu, \cdot) : \Omega \to \mathcal{L}(G) : \lambda \mapsto K(\mu, \lambda) = E(\lambda)E(\mu)^*$ koanalytisch. Aus Lemma 1.3.3 folgt, dass die Abbildung $E(\cdot)^* : \Omega \to \mathcal{L}(G, \mathcal{H}) : \lambda \mapsto E(\lambda)^*$ analytisch ist. Für festes $\mu \in \Omega$ ist also die Funktion $K(\cdot, \mu) : \Omega \to \mathcal{L}(G) : \lambda \mapsto K(\lambda, \mu) = E(\mu)E(\lambda)^*$ analytisch.

(ii) Seien $w \in \Omega, x \in G$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig. Da die Abbildung $E(\cdot)^*x : \Omega \to \mathcal{H} : \lambda \mapsto E(\lambda)^*x$ laut Punkt (i) analytisch ist, existiert die Ableitung $\partial^\alpha\big(E(\cdot)^*x\big)(w) \in \mathcal{H}$, und für $\mu \in \Omega$ gilt

$$\begin{aligned} \partial^\alpha\big(E(\cdot)^*x\big)(w)(\mu) &= E(\mu)\partial^\alpha\big(E(\cdot)^*x\big)(w) = \partial^\alpha\big(E(\mu)E(\cdot)^*x\big)(w) = \\ &= \partial^\alpha\big(K(\cdot, \mu)x\big)(w) = \partial^{(\alpha,0)} K(w, \mu)x. \end{aligned}$$

Die Funktion $\partial^{(\alpha,0)} K(w, \cdot)x : \Omega \to G : \mu \mapsto \partial^{(\alpha,0)} K(w, \mu)x$ ist also ein Element von $\mathcal{H}$. Für $f \in \mathcal{H}$ gilt somit

$$\begin{aligned} \big\langle \bar{\partial}^\alpha f(w), x \big\rangle_G &= \bar{\partial}^\alpha \big\langle E(\cdot)f, x \big\rangle_G(w) = \bar{\partial}^\alpha \big\langle f, E(\cdot)^*x \big\rangle_{\mathcal{H}}(w) = \\ &= \big\langle f, \partial^\alpha\big(E(\cdot)^*x\big)(w) \big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle f, \partial^{(\alpha,0)} K(w, \cdot)x \big\rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

(iii) Sei $w \in \Omega$ beliebig und $f \in \operatorname{span}\big\{\partial^{(\alpha,0)} K(w, \cdot)x : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, x \in G\big\}^\perp$, dann gilt

$$\big\langle \bar{\partial}^\alpha f(w), x \big\rangle_G = \big\langle f, \partial^{(\alpha,0)} K(w, \cdot)x \big\rangle_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n, x \in G.$$

Es ist also $\bar{\partial}^\alpha f(w) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Da f koanalytisch und Ω zusammenhängend ist, folgt daraus, dass $f = 0$ sein muss.

Ist $\Delta \subseteq \Omega$ nichtleer und offen und $f \in \operatorname{span}\{K(\lambda,\cdot)x : x \in G, \lambda \in \Delta\}^\perp$, so gilt

$$\langle f(\lambda), x\rangle_G = \langle f, K(\lambda,\cdot)x\rangle_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall\, x \in G, \lambda \in \Delta,$$

also $f(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \Delta$. Da f koanalytisch und Ω zusammenhängend ist, folgt daraus, dass $f = 0$ sein muss.

(*iv*) Sei $w \in \Omega$ beliebig und A eine abzählbare dichte Teilmenge von G. Dann folgt aus den Überlegungen zu Punkt (*iii*), dass $\operatorname{span}\big\{\partial^{(\alpha,0)}K(w,\cdot)x : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, x \in A\big\}$ dicht liegt in $\mathcal{H}$. Nach Lemma 3.3.9 ist $\mathcal{H}$ somit separabel.

(*v*) Seien $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ und $w \in \Omega$ beliebig. Des Weiteren sei $x_\alpha \in G$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq \alpha \leq \rho$. Wegen $K(\lambda,\mu) = E(\mu)E(\lambda)^*$ für alle $\lambda,\mu \in \Omega$, gilt zunächst für $j \in \{1,\dots,n\}$

$$\begin{aligned}\partial_j K(\lambda,\mu) &= \lim_{h\to 0} \frac{E(\mu)E(\lambda + he_j)^* - E(\mu)E(\lambda)^*}{h} = E(\mu)\partial_j\big(E(\cdot)^*\big)(\lambda)\\ \text{und}\quad \bar{\partial}_{n+j} K(\lambda,\mu) &= \lim_{h\to 0} \frac{E(\mu + \bar{h}e_j)E(\lambda)^* - E(\mu)E(\lambda)^*}{h} = \bar{\partial}_j\big(E(\cdot)\big)(\mu)E(\lambda)^*.\end{aligned}$$

Daraus erhält man für $i,j \in \{1,\dots,n\}$ und $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{N}_0$ die Gültigkeit von

$$\partial_j^{\alpha_1}\bar{\partial}_{n+i}^{\alpha_2} K(\lambda,\mu) = \bar{\partial}_i^{\alpha_2}\big(E(\cdot)\big)(\mu)\partial_j^{\alpha_1}\big(E(\cdot)^*\big)(\lambda),$$

und damit für $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$

$$\partial^{(\alpha,0)}\bar{\partial}^{(0,\beta)} K(\lambda,\mu) = \bar{\partial}^\beta\big(E(\cdot)\big)(\mu)\partial^\alpha\big(E(\cdot)^*\big)(\lambda).$$

Mit Hilfe von Punkt (*ii*) ergibt sich nun für $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq \alpha,\beta \leq \rho$

$$\begin{aligned}\big\langle \partial^{(\alpha,0)}\bar{\partial}^{(0,\beta)} K(w,w)x_\alpha, x_\beta\big\rangle_G &= \big\langle \bar{\partial}^\beta\big(E(\cdot)\big)(w)\partial^\alpha\big(E(\cdot)^*\big)(w)x_\alpha, x_\beta\big\rangle_G =\\ &= \big\langle E(\cdot)\partial^\alpha\big(E(\cdot)^*\big)(w)x_\alpha, \partial^\beta\big(E(\cdot)^*x_\beta\big)(w)\big\rangle_{\mathcal{H}} =\\ &= \big\langle \partial^\alpha\big(E(\cdot)^*x_\alpha\big)(w), \partial^\beta\big(E(\cdot)^*x_\beta\big)(w)\big\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Lemma 5.3.6. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Des Weiteren sei $\mathcal{H}$ ein koanalytischer RKHS auf Ω mit reproduzierendem Kern $K : \Omega\times\Omega \to \mathcal{L}(G)$. Dann existiert zu jeder nichtleeren offenen Teilmenge Δ von Ω ein eindeutiger koanalytischer RKHS $\mathcal{H}_\Delta$, dessen Kern gegeben ist durch $K|_{\Delta\times\Delta}$. Die Einschränkungsabbildung*

$$R_\Delta : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & \mathcal{H}_\Delta \\ f & \mapsto & f\big|_\Delta \end{array}\right.$$

ist dabei ein unitärer Operator. Ist darüber hinaus $M_{\bar{z}_j}|_{\mathcal{H}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ für ein $j \in \{1,\dots,n\}$, so gilt $M_{\bar{z}_j}|_{\mathcal{H}_\Delta} = R_\Delta M_{\bar{z}_j}|_{\mathcal{H}} R_\Delta^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Delta)$.

Beweis. Sei $\Delta \subseteq \Omega$ nichtleer und offen. Wir betrachten die Einschränkungsabbildung

$$R_\Delta : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & \overline{\mathfrak{A}}(\Delta, G) \\ f & \mapsto & f\big|_\Delta. \end{array}\right.$$

Diese ist offensichtlich linear. Um zu zeigen, dass sie injektiv ist, gelte $R_\Delta f = f|_\Delta = 0$ für ein $f \in \mathcal{H} \subseteq \overline{\mathfrak{A}}(\Omega, G)$. Da f koanalytisch und Ω zusammenhängend ist, folgt daraus $f(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \Omega$, also $f = 0$.

Sei nun $\mathcal{H}_\Delta := \operatorname{ran} R_\Delta$ und das Skalarprodukt darauf definiert durch

$$\langle f|_\Delta, g|_\Delta \rangle_{\mathcal{H}_\Delta} := \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, f, g \in \mathcal{H}.$$

Damit wird $\mathcal{H}_\Delta$ zu einem Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $R_\Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_\Delta)$ zu einem unitären Operator. Um zu zeigen dass $\mathcal{H}_\Delta$ ein RKHS mit reproduzierendem Kern $K|_{\Delta\times\Delta}$ ist, reicht es laut Lemma 5.2.6 zu zeigen, dass $K|_{\Delta\times\Delta}$ die Eigenschaften (RK1) und (RK2) erfüllt. Seien hierfür $\lambda \in \Delta$ und $x \in G$ beliebig aber fest gewählt. Da K der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}$ ist, ist die Funktion $K(\lambda,\cdot)x : \Omega \to G : \mu \mapsto K(\lambda,\mu)x$ ein Element von $\mathcal{H}$. Damit ist aber die Funktion $R_\Delta(K(\lambda,\cdot)x) = K(\lambda,\cdot)x|_\Delta : \Delta \to G : \mu \mapsto K(\lambda,\mu)x$ ein Element von $\mathcal{H}_\Delta$. Für beliebiges $f \in \mathcal{H}$ gilt weiters

$$\langle f|_\Delta, K(\lambda,\cdot)x|_\Delta \rangle_{\mathcal{H}_\Delta} = \langle f, K(\lambda,\cdot)x \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f(\lambda), x \rangle_G = \langle (f|_\Delta)(\lambda), x \rangle_G,$$

womit die Eigenschaften (RK1) und (RK2) gezeigt sind. Laut Satz 5.2.8 ist $\mathcal{H}_\Delta$ eindeutig bestimmt.

Angenommen $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ für ein $j \in \{1,\dots,n\}$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{H}$ und alle $\lambda \in \Delta$

$$\big(R_\Delta M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}} f\big)(\lambda) = \big(M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}} f\big)(\lambda) = \overline{\lambda}_j \cdot f(\lambda) = \overline{\lambda}_j \cdot \big(R_\Delta f\big)(\lambda) = \big(M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_\Delta} R_\Delta f\big)(\lambda),$$

was die letzte Behauptung zeigt. □

Satz 5.3.7. *Sei $K : \Omega\times\Omega \to \mathcal{L}(G)$ ein sesquianalytischer Kern und $w \in \Omega$, sodass die Operatormatrix $\mathfrak{M}(K,w,\rho)$ für alle $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ positiv semidefinit ist. Weiters sei $r > 0$, sodass $\overline{D_r^n(w)} \subset \Omega$ und $\Delta_w := D_r^n(w)$. Dann existiert ein eindeutiger koanalytischer RKHS $\mathcal{H}_w$ auf Δ_w, sodass $K|_{\Delta_w\times\Delta_w}$ der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}_w$ ist.*

Beweis. (1) Wir betrachten den linearen Raum

$$\mathcal{D}_w := \operatorname{span}\left\{\partial^{(\alpha,0)}K(w,\cdot)x : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, x \in G\right\} \subseteq \overline{\mathfrak{A}}(\Delta_w, G)$$

und definieren für $f = \sum\limits_{0\le\alpha\le\rho} \partial^{(\alpha,0)}K(w,\cdot)x_\alpha$ und $g = \sum\limits_{0\le\beta\le\tau} \partial^{(\beta,0)}K(w,\cdot)y_\beta$ aus $\mathcal{D}_w$

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}_w} := \sum_{0\le\alpha\le\rho}\sum_{0\le\beta\le\tau} \langle \partial^{(\alpha,0)}\,\partial^{(0,\beta)}K(w,w)x_\alpha, y_\beta\rangle_G. \tag{5.6}$$

Um zu zeigen, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}_w}$ wohldefiniert ist, nehmen wir an, dass f die beiden Darstellungen $f = \sum\limits_{0\le\alpha\le\rho} \partial^{(\alpha,0)}K(w,\cdot)x_\alpha = \sum\limits_{0\le\alpha\le\sigma} \partial^{(\alpha,0)}K(w,\cdot)\tilde{x}_\alpha$ besitzt. Aus

$$\bar{\partial}^{(0,\beta)}\partial^{(\alpha,0)}K(w,w)x = \bar{\partial}^\beta\big(\zeta \mapsto \partial^{(\alpha,0)}K(w,\zeta)x\big)(w), \quad \forall\, x \in G \tag{5.7}$$

folgt die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}_w} &= \sum_{0\le\alpha\le\sigma}\sum_{0\le\beta\le\tau} \langle \partial^{(\alpha,0)}\bar{\partial}^{(0,\beta)}K(w,w)\tilde{x}_\alpha, y_\beta\rangle_G = \\
&= \sum_{0\le\beta\le\tau}\Big\langle \sum_{0\le\alpha\le\sigma} \bar{\partial}^\beta\big(\partial^{(\alpha,0)}K(w,\cdot)\tilde{x}_\alpha\big)(w), y_\beta\Big\rangle_G = \\
&= \sum_{0\le\beta\le\tau}\Big\langle \bar{\partial}^\beta\Big(\sum_{0\le\alpha\le\sigma} \partial^{(\alpha,0)}K(w,\cdot)\tilde{x}_\alpha\Big)(w), y_\beta\Big\rangle_G = \\
&= \sum_{0\le\beta\le\tau}\Big\langle \bar{\partial}^\beta\Big(\sum_{0\le\alpha\le\rho} \partial^{(\alpha,0)}K(w,\cdot)x_\alpha\Big)(w), y_\beta\Big\rangle_G = \langle f, g\rangle_{\mathcal{D}_w}.
\end{aligned}$$

Wegen $K(\lambda,\mu)^* = K(\mu,\lambda)$ für alle $\lambda,\mu \in \Omega$ gilt Entsprechendes, wenn g eine andere Darstellung hat. Also ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}_w}$ wohldefiniert, und man überprüft leicht, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}_w}$ in der ersten Komponente linear ist. Weiters gilt für alle $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $x,y \in G$

$$\begin{aligned}
\left\langle \partial^{(\alpha,0)}\overline{\partial}^{(0,\beta)}K(w,w)x,y\right\rangle_G &= \partial^{(\alpha,0)}\overline{\partial}^{(0,\beta)}\Big((\zeta,\xi)\mapsto \left\langle K(\zeta,\xi)x,y\right\rangle_G\Big)(w,w) = \\
&= \overline{\partial}^{(0,\beta)}\partial^{(\alpha,0)}\Big((\zeta,\xi)\mapsto \left\langle x,K(\zeta,\xi)^*y\right\rangle_G\Big)(w,w) = \\
&= \overline{\partial}^{(0,\beta)}\partial^{(\alpha,0)}\Big((\zeta,\xi)\mapsto \left\langle x,K(\xi,\zeta)y\right\rangle_G\Big)(w,w) = \\
&= \overline{\partial}^{(\beta,0)}\partial^{(0,\alpha)}\Big((\xi,\zeta)\mapsto \left\langle x,K(\xi,\zeta)y\right\rangle_G\Big)(w,w) = \\
&= \left\langle x,\partial^{(\beta,0)}\overline{\partial}^{(0,\alpha)}K(w,w)y\right\rangle_G = \overline{\left\langle \partial^{(\beta,0)}\overline{\partial}^{(0,\alpha)}K(w,w)y,x\right\rangle}_G,
\end{aligned}$$

woraus $\langle f,g\rangle_{\mathcal{D}_w} = \overline{\langle g,f\rangle}_{\mathcal{D}_w}$ für alle $f,g \in \mathcal{D}_w$ folgt. Da laut Voraussetzung außerdem

$$\left\langle f,f\right\rangle_{\mathcal{D}_w} = \sum_{0\le\alpha,\beta\le\rho}\left\langle \partial^{(\alpha,0)}\overline{\partial}^{(0,\beta)}K(w,w)x_\alpha,x_\beta\right\rangle_G \ge 0, \quad \forall\ f\in\mathcal{D}_w$$

gilt, ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}_w}$ eine positiv semidefinite Hermite'sche Sesquilinearform.

Angenommen es ist $\langle f,f\rangle_{\mathcal{D}_w} = 0$ für ein $f = \sum_{0\le\alpha\le\rho}\partial^{(\alpha,0)}K(w,\cdot)x_\alpha \in \mathcal{D}_w$, dann folgt aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung $\langle f,g\rangle_{\mathcal{D}_w} = 0$ für alle $g \in \mathcal{D}_w$. Sind $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ und $y \in G$ beliebig, und setzt man $g := \partial^{(\beta,0)}K(w,\cdot)y$, so erhält man mit Hilfe von (5.7)

$$\begin{aligned}
\left\langle f,g\right\rangle_{\mathcal{D}_w} &= \sum_{0\le\alpha\le\rho}\left\langle \partial^{(\alpha,0)}\overline{\partial}^{(0,\beta)}K(w,w)x_\alpha,y\right\rangle_G = \\
&= \left\langle \overline{\partial}^\beta\Big(\sum_{0\le\alpha\le\rho}\partial^{(\alpha,0)}K(w,\cdot)x_\alpha\Big)(w),y\right\rangle_G = \left\langle \overline{\partial}^\beta f(w),y\right\rangle_G = 0.
\end{aligned}$$

Also gilt $\overline{\partial}^\beta f(w) = 0$ für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, woraus $f(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \Delta_w$ folgt. Demnach ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}_w}$ sogar positiv definit. Der Raum $(\mathcal{D}_w,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}_w})$ besitzt somit eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Hilbertraum-Vervollständigung, welche wir mit $(\hat{\mathcal{D}}_w,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\hat{\mathcal{D}}_w})$ bezeichnen.

(2) Als nächstes wollen wir zeigen, dass der lineare Operator $E_\lambda : \mathcal{D}_w \to G : f \mapsto f(\lambda)$ für jedes $\lambda \in \Delta_w$ beschränkt ist. Hierfür betrachten wir zunächst die Menge $\mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)$ aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}_0^n$. Diese bildet zusammen mit der Inklusion $\subseteq$ eine gerichtete Menge. Für $\lambda \in \Delta_w$ und $\Lambda \in \mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)$ definieren wir den Operator $K_{\lambda,\Lambda} : G \to \hat{\mathcal{D}}_w$ durch

$$K_{\lambda,\Lambda}x := \sum_{\alpha\in\Lambda}\frac{(\lambda-w)^\alpha}{\alpha!}\,\partial^{(\alpha,0)}K(w,\cdot)x, \quad \forall\ x\in G.$$

Aus der Definition des Skalarprodukts auf $\hat{\mathcal{D}}_w$ und mit Hilfe der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung erhält man für beliebiges $x \in G$

$$\begin{aligned}
\left\|K_{\lambda,\Lambda}x\right\|^2_{\hat{\mathcal{D}}_w} &= \sum_{\alpha,\beta\in\Lambda}\left\langle \frac{(\lambda-w)^\alpha(\overline{\lambda}-\overline{w})^\beta}{\alpha!\beta!}\,\partial^{(\alpha,0)}\overline{\partial}^{(0,\beta)}K(w,w)x,x\right\rangle_G \le \\
&\le \sum_{\alpha,\beta\in\Lambda}\left\|\frac{(\lambda-w)^\alpha(\overline{\lambda}-\overline{w})^\beta}{\alpha!\beta!}\,\partial^{(\alpha,0)}\overline{\partial}^{(0,\beta)}K(w,w)\right\|_{\mathcal{L}(G)}\|x\|^2_G\,.
\end{aligned}\tag{5.8}$$

Also ist $K_{\lambda,\Lambda} \in \mathcal{L}(G,\hat{\mathcal{D}}_w)$ für alle $\lambda \in \Delta_w$ und alle $\Lambda \in \mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)$. Um zu zeigen, dass $(K_{\Lambda,\lambda})_{\Lambda\in\mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)}$ ein Cauchy-Netz ist, bemerken wir zunächst, dass für $\lambda,\mu \in \Delta_w$

$$K(\lambda,\mu) = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}_0^n\times\mathbb{N}_0^n}\frac{(\lambda-w)^\alpha(\overline{\mu}-\overline{w})^\beta}{\alpha!\beta!}\,\partial^{(\alpha,0)}\overline{\partial}^{(0,\beta)}K(w,w)$$

gilt, wobei diese Mehrfachpotenzreihe absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\Delta_w \times \Delta_w$ konvergiert (vgl. Bemerkung 5.3.2). Sei nun $\lambda \in \Delta_w$ beliebig aber fest gewählt. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $\Lambda^\varepsilon \subset \mathbb{N}_0^{2n}$, sodass

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}_0^{2n}\setminus\Lambda^\varepsilon} \left\| \frac{(\lambda - w)^\alpha (\overline{\lambda} - \overline{w})^\beta}{\alpha!\beta!} \, \partial^{(\alpha,0)} \overline{\partial}^{(0,\beta)} K(w,w) \right\|_{\mathcal{L}(G)} < \varepsilon. \tag{5.9}$$

Sei Λ_ε eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}_0^n$, für die $\Lambda^\varepsilon \subseteq \Lambda_\varepsilon \times \Lambda_\varepsilon$ gilt. Sind nun $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)$ mit $\Lambda_1 \supseteq \Lambda_2 \supseteq \Lambda_\varepsilon$, so ist $\Lambda_1 \setminus \Lambda_2 \subseteq \mathbb{N}_0^n \setminus \Lambda_\varepsilon$ und damit $(\Lambda_1\setminus\Lambda_2) \times (\Lambda_1\setminus\Lambda_2) \subseteq \mathbb{N}_0^{2n}\setminus\Lambda^\varepsilon$. Daraus folgt mit Hilfe der Gleichungen (5.8) und (5.9)

$$\left\| K_{\lambda,\Lambda_1} x - K_{\lambda,\Lambda_2} x \right\|^2_{\hat{\mathcal{D}}_w} = \left\| K_{\lambda,(\Lambda_1\setminus\Lambda_2)} x \right\|^2_{\hat{\mathcal{D}}_w} \le \varepsilon \cdot \|x\|_G^2, \quad \forall\, x \in G.$$

Sind allgemeiner $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)$ mit $\Lambda_1, \Lambda_2 \supseteq \Lambda_\varepsilon$, so ist $\Lambda_1, \Lambda_2 \supseteq (\Lambda_1 \cap \Lambda_2) \supseteq \Lambda_\varepsilon$, womit

$$\left\| K_{\lambda,\Lambda_1} x - K_{\lambda,\Lambda_2} x \right\|_{\hat{\mathcal{D}}_w} \le 2\sqrt{\varepsilon}\, \|x\|_G, \quad \forall\, x \in G$$

gilt. Das Netz $(K_{\lambda,\Lambda})_{\Lambda\in\mathfrak{f}(N_0^n)}$ ist also ein Cauchy-Netz in $\mathcal{L}(G, \hat{\mathcal{D}}_w)$. Da $\lambda \in \Delta_w$ beliebig war, existiert demnach für jedes $\lambda \in \Delta_w$ der Limes $K_\lambda := \lim_{\Lambda\in\mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)} K_{\lambda,\Lambda} \in \mathcal{L}(G, \hat{\mathcal{D}}_w)$.

Als nächstes zeigen wir, dass

$$\|K_\lambda\|^2 \le \|K(\lambda,\lambda)\|, \quad \forall\, \lambda \in \Delta_w$$

gilt. Seien dazu $\lambda, \mu \in \Delta_w$ und $x, y \in G$ beliebig, dann ist

$$\begin{aligned}
\left\langle K_\lambda x, K_\mu y \right\rangle_{\hat{\mathcal{D}}_w} &= \lim_{\Lambda\in\mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)} \left\langle K_{\lambda,\Lambda} x, K_{\mu,\Lambda} y \right\rangle_{\hat{\mathcal{D}}_w} = \\
&= \lim_{\Lambda\in\mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)} \sum_{\alpha,\beta\in\Lambda} \left\langle \frac{(\lambda - w)^\alpha (\overline{\mu} - \overline{w})^\beta}{\alpha!\beta!} \, \partial^{(\alpha,0)} \overline{\partial}^{(0,\beta)} K(w,w) x, y \right\rangle_G = \\
&= \left\langle K(\lambda,\mu) x, y \right\rangle_G,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

woraus die Behauptung mit Hilfe der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgt.

Um schließlich zu zeigen, dass für jedes $\lambda \in \Delta_w$ der Operator E_λ beschränkt ist, wählen wir $f = \sum_{\alpha\in\Lambda} \frac{1}{\alpha!} \partial^{(\alpha,0)} K(w,\cdot) x_\alpha \in \mathcal{D}_w$ beliebig. Dann gilt für alle $\lambda \in \Delta_w$ und alle $y \in G$

$$\begin{aligned}
\left\langle E_\lambda f, y \right\rangle_G &= \sum_{\alpha\in\Lambda} \left\langle \frac{1}{\alpha!} \partial^{(\alpha,0)} K(w,\lambda) x_\alpha, y \right\rangle_G \\
&= \sum_{\alpha\in\Lambda} \left\langle \frac{1}{\alpha!} \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^n} \frac{(\overline{\lambda} - \overline{w})^\beta}{\beta!} \, \overline{\partial}^{(0,\beta)} \partial^{(\alpha,0)} K(w,w) x_\alpha, y \right\rangle_G = \\
&= \lim_{M\in\mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)} \sum_{\alpha\in\Lambda} \sum_{\beta\in M} \left\langle \frac{(\overline{\lambda} - \overline{w})^\beta}{\alpha!\beta!} \partial^{(\alpha,0)} \overline{\partial}^{(0,\beta)} K(w,w) x_\alpha, y \right\rangle_G = \\
&= \lim_{M\in\mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)} \left\langle f, K_{\lambda,M} y \right\rangle_{\hat{\mathcal{D}}_w} = \left\langle f, K_\lambda y \right\rangle_{\hat{\mathcal{D}}_w} \le \|f\|_{\hat{\mathcal{D}}_w} \cdot \|K_\lambda\| \cdot \|y\|_G .
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Daraus folgt

$$\|E_\lambda\| \le \|K_\lambda\| \le \sqrt{\|K(\lambda,\lambda)\|}, \quad \forall\, \lambda \in \Delta_w,$$

womit E_λ auf kompakten Teilmengen von Δ_w sogar gleichmäßig beschränkt ist. Für alle $\lambda \in \Delta_w$ existiert also eine eindeutige beschränkte lineare Fortsetzung von E_λ auf $\hat{\mathcal{D}}_w$, welche wir mit $\hat{E}_\lambda$ bezeichnen. D.h. es ist $\hat{E}_\lambda \in \mathcal{L}(\hat{\mathcal{D}}_w, G)$ und $\hat{E}_\lambda|_{\mathcal{D}_w} = E_\lambda$.

(3) Wir betrachten nun die Einbettung

$$\hat{E} : \begin{cases} \hat{\mathcal{D}}_w & \to & \mathfrak{F}(\Delta_w, G) \\ f & \mapsto & \big(\lambda \mapsto \hat{E}_\lambda f\big). \end{cases}$$

Aus der Linearität von $\hat{E}_\lambda$ folgt leicht die Linearität von $\hat{E}$. Weiters gilt $\hat{E}|_{\mathcal{D}_w} = I_{\mathcal{D}_w}$, denn für $f \in \mathcal{D}_w$ gilt $\hat{E}_\lambda f = E_\lambda f = f(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Delta_w$, womit $\hat{E}f = f$ ist. Als nächstes wollen wir zeigen, dass $\hat{E}$ injektiv ist. Dazu bemerken wir zunächst, dass aus (5.11) die Gültigkeit von

$$\big\langle \hat{E}_\lambda f, y \big\rangle_G = \big\langle f, K_\lambda y \big\rangle_{\hat{\mathcal{D}}_w}, \quad \forall\, f \in \hat{\mathcal{D}}_w, \lambda \in \Delta_w, y \in G \tag{5.12}$$

folgt, da $\mathcal{D}_w$ dicht liegt in $\hat{\mathcal{D}}_w$. Ist nun $f \in \hat{\mathcal{D}}_w$ und gilt $\hat{E}_\lambda f = 0$ für alle $\lambda \in \Delta_w$, so gilt für alle $\lambda \in \Delta_w$ und alle $y \in G$

$$\begin{aligned} 0 = \big\langle y, \hat{E}_\lambda f \big\rangle_G = \big\langle K_\lambda y, f \big\rangle_{\hat{\mathcal{D}}_w} &= \lim_{\Lambda \in \mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)} \big\langle K_{\lambda,\Lambda} y, f \big\rangle_{\hat{\mathcal{D}}_w} = \\ &= \lim_{\Lambda \in \mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)} \sum_{\alpha \in \Lambda} \Big\langle \frac{1}{\alpha!} \partial^{(\alpha,0)} K(w,\cdot) y, f \Big\rangle_{\hat{\mathcal{D}}_w} (\lambda - w)^\alpha, \end{aligned}$$

wobei letztere Mehrfachpotenzreihe absolut konvergiert. Die laut Lemma 1.2.13 analytische Funktion

$$h : \begin{cases} \Delta_w & \to & \mathbb{C} \\ \lambda & \mapsto & \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} b_\alpha (\lambda - w)^\alpha \end{cases}$$

mit $b_\alpha := \big\langle \frac{1}{\alpha!} \partial^{(\alpha,0)} K(w,\cdot) y, f \big\rangle_{\hat{\mathcal{D}}_w}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$, stimmt also mit der Nullfunktion überein. Aus Korollar 1.2.14 folgt $b_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha h(w) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $y \in G$ ist also $\big\langle \frac{1}{\alpha!} \partial^{(\alpha,0)} K(w,\cdot) y, f \big\rangle_{\hat{\mathcal{D}}_w} = 0$. Da $\mathcal{D}_w$ in $\hat{\mathcal{D}}_w$ dicht liegt, muss $f = 0$ sein. Dies zeigt, dass die Einbettung $\hat{E} : \hat{\mathcal{D}}_w \to \mathfrak{F}(\Delta_w, G)$ injektiv ist.

Setzt man $\mathcal{H}_w := \operatorname{ran} \hat{E}$ und definiert auf $\mathcal{H}_w$ das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_w}$ durch

$$\big\langle \hat{E}f, \hat{E}g \big\rangle_{\mathcal{H}_w} := \big\langle f, g \big\rangle_{\hat{\mathcal{D}}_w}, \quad \forall\, f, g \in \hat{\mathcal{D}}_w,$$

so ist $\mathcal{H}_w$ ein funktionaler Hilbertraum auf Δ_w und $\hat{E} : \hat{\mathcal{D}}_w \to \mathcal{H}_w$ unitär. Weiters stimmt das Punktauswertungsfunktional $E(\lambda) : \mathcal{H}_w \to G : \hat{E}f \mapsto \big(\hat{E}f\big)(\lambda)$ wegen $\big(\hat{E}f\big)(\lambda) = \hat{E}_\lambda f$ für alle $\lambda \in \Delta_w$ mit dem Operator $\hat{E}_\lambda \circ \hat{E}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_w, G)$ überein und ist somit stetig. Der Hilbertraum $\mathcal{H}_w$ ist also ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern.

(4) Nun wollen wir zeigen, dass der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}_w$ mit $K|_{\Delta_w \times \Delta_w}$ übereinstimmt. Da $\hat{E}$ unitär ist, gilt

$$E(\mu)E(\lambda)^* = \big(\hat{E}_\mu \hat{E}^*\big) \circ \big(\hat{E}_\lambda \hat{E}^*\big)^* = \hat{E}_\mu \hat{E}_\lambda^*, \quad \forall\, \lambda, \mu \in \Delta_w.$$

Aus (5.12) folgt weiters $\hat{E}_\lambda^* = K_\lambda$ für alle $\lambda \in \Delta_w$, wodurch mit Hilfe von (5.10)

$$\big\langle E(\mu)E(\lambda)^* x, y \big\rangle_G = \big\langle \hat{E}_\mu \hat{E}_\lambda^* x, y \big\rangle_G = \big\langle \hat{E}_\lambda^* x, \hat{E}_\mu^* y \big\rangle_{\hat{\mathcal{D}}_w} = \big\langle K_\lambda x, K_\mu y \big\rangle_{\hat{\mathcal{D}}_w} = \big\langle K(\lambda,\mu) x, y \big\rangle_G$$

für alle $\lambda, \mu \in \Delta_w$ und alle $x, y \in G$ gilt. Also ist $E(\mu)E(\lambda)^* = K(\lambda,\mu)$ für alle $\lambda, \mu \in \Delta_w$, was die Behauptung zeigt. Laut Satz 5.2.8 ist $\mathcal{H}_w$ eindeutig bestimmt.

(5) Zum Abschluss des Beweises zeigen wir, dass $\mathcal{H}_w$ sogar ein koanalytischer funktionaler Hilbertraum ist. Eine Abbildung $\hat{E}f \in \mathcal{H}_w$ ist laut Korollar 1.1.6 genau dann koanalytisch, wenn für jedes $x \in G$ die Funktion

$$\big\langle \big(\hat{E}f\big)(\cdot), x \big\rangle_G : \Delta_w \to \mathbb{C} : \lambda \mapsto \big\langle \big(\hat{E}f\big)(\lambda), x \big\rangle_G$$

koanalytisch ist. Wegen

$$\big\langle \big(\hat{E}f\big)(\lambda), x\big\rangle_G = \big\langle E(\lambda)\big(\hat{E}f\big), x\big\rangle_G = \big\langle \hat{E}f, E(\lambda)^* x\big\rangle_{\mathcal{H}_w} = \big\langle \hat{E}f, \hat{E}\hat{E}_\lambda^* x\big\rangle_{\mathcal{H}_w} = \big\langle f, K_\lambda x\big\rangle_{\hat{\mathcal{D}}_w}$$

ist dies äquivalent dazu, dass die Abbildung

$$K_{(\cdot)}x : \begin{cases} \Delta_w & \to \quad \hat{\mathcal{D}}_w \\ \lambda & \mapsto \quad K_\lambda x = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{(\lambda-w)^\alpha}{\alpha!}\, \partial^{(\alpha,0)} K(w,\cdot)x \end{cases}$$

analytisch ist. Dies folgt aber direkt aus Lemma 1.2.13. Also ist $\mathcal{H}_w \subseteq \overline{\mathfrak{A}}(\Delta_w, G)$. □

Bemerkung 5.3.8. (i) Sei $K : \Omega\times\Omega \to \mathcal{L}(G)$ ein regulärer sesquianalytischer Kern. Für jedes $w\in\Omega$ wählen wir $r>0$, sodass $\overline{D_r^n(w)} \subset \Omega$ und definieren für den Rest dieses Abschnitts den Raum $\mathcal{H}_w$ als jenen koanalytischen RKHS, dessen reproduzierender Kern gegeben ist durch $K|_{D_r^n(w)\times D_r^n(w)}$.

(ii) Ist $\mathcal{H}$ ein koanalytischer RKHS auf Ω, so stimmt für jedes $w\in\Omega$ der Hilbertraum $\mathcal{H}_w$ mit dem Hilbertraum $\mathcal{H}_{D_r^n(w)}$ überein (vergleiche Lemma 5.3.6).

(iii) Für $\lambda\in\Delta_w := D_r^n(w)$ und $\Lambda \in \mathfrak{f}(N_0^n)$ sei der Operator $K_{\lambda,\Lambda} \in \mathcal{L}(G, \hat{\mathcal{D}}_w)$ wieder gegeben durch

$$K_{\lambda,\Lambda}x := \sum_{\alpha\in\Lambda} \frac{(\lambda-w)^\alpha}{\alpha!}\, \partial^{(\alpha,0)}K(w,\cdot)x, \quad \forall\, x\in G$$

und $K_\lambda := \lim_{\Lambda\in\mathfrak{f}(N_0^n)} K_{\lambda,\Lambda} \in \mathcal{L}(G,\hat{\mathcal{D}}_w)$. Des Weiteren sei $K(\lambda,\cdot) : G \to \mathcal{H}_w : x \mapsto K(\lambda,\cdot)x$. Wie im Beweis von Satz 5.3.7 folgt, dass $K(\lambda,\cdot)$ beschränkt ist. Betrachtet man wieder die Einbettung $\hat{E} : \hat{\mathcal{D}}_w \to \mathcal{H}_w$ so gilt $K(\lambda,\cdot) = \hat{E}\circ K_\lambda$, denn für alle $x\in G$ und alle $\mu\in\Delta_w$ ist einerseits

$$K(\lambda,\mu)x = \lim_{\Lambda\in\mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)} \sum_{\alpha\in\Lambda} \frac{(\lambda-w)^\alpha}{\alpha!}\, \partial^{(\alpha,0)}K(w,\mu)x,$$

da K sesquianalytisch ist und andererseits

$$\begin{aligned}\big(\hat{E}K_\lambda x\big)(\mu) &= \hat{E}_\mu K_\lambda x = \hat{E}_\mu \lim_{\Lambda\in\mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)} K_{\lambda,\Lambda}x = \lim_{\Lambda\in\mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)} \hat{E}_\mu K_{\lambda,\Lambda}x = \lim_{\Lambda\in\mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)} E_\mu K_{\lambda,\Lambda}x \\ &= \lim_{\Lambda\in\mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)} \sum_{\alpha\in\Lambda} \frac{(\lambda-w)^\alpha}{\alpha!}\, \partial^{(\alpha,0)}K(w,\mu)x.\end{aligned}$$

Lemma 5.3.9. *Sei $K : \Omega\times\Omega\to\mathcal{L}(G)$ ein sesqianalytischer Kern und $w\in\Omega$ beliebig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die Operatormatrix $\mathfrak{M}(K,w,\rho)$ ist für alle $\rho\in\mathbb{N}_0^n$ positiv semidefinit und für $j\in\{1,\dots,n\}$ ist $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_w} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_w)$.

(ii) Es gibt eine Konstante $C_w>0$, sodass für alle $\rho\in\mathbb{N}_0^n$ und alle $x_0,\dots,x_\rho\in G$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \sum_{e_j\le\alpha,\beta\le\rho} \Big\langle \frac{1}{(\alpha-e_j)!(\beta-e_j)!}\, \partial^{(\alpha-e_j,0)}\overline{\partial}^{(0,\beta-e_j)}K(w,w)x_\alpha, x_\beta\Big\rangle_G &\le \\ \le C_w \sum_{0\le\alpha,\beta\le\rho} \Big\langle \frac{1}{\alpha!\beta!}\, \partial^{(\alpha,0)}\overline{\partial}^{(0,\beta)}K(w,w)x_\alpha, x_\beta\Big\rangle_G&.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sei $w\in\Omega$ beliebig aber fest gewählt und $r>0$, sodass $\overline{D_r^n(w)} \subseteq \Omega$. Wir setzen wieder $\Delta_w := D_r^n(w)$ und und betrachten den laut Satz 5.3.7 eindeutig bestimmten koanalytischen funktionalen Hilbertraum $\mathcal{H}_w$ auf Δ_w, dessen reproduzierende Kern gegeben ist durch $K|_{\Delta_w \times \Delta_w}$. Laut Lemma 5.2.13 ist $\{K(\lambda, \cdot)x : x \in G\} \subseteq \ker \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\bar{z}}|_{\mathcal{H}_w})^* - \lambda}$ für alle $\lambda \in \Delta_w$, also gilt

$$\big(M^*_{\bar{z}_j} - \lambda_j\big)K(\lambda, \cdot)x = 0, \quad \forall\, \lambda \in \Delta_w, x \in G, j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{5.14}$$

Wir wollen nun durch vollständige Induktion zeigen, dass daraus

$$\frac{1}{\alpha!}\big(M^*_{\bar{z}_j} - \lambda_j\big)\partial^{(\alpha,0)}K(\lambda, \cdot)x = \begin{cases} \frac{1}{(\alpha-e_j)!}\,\partial^{(\alpha-e_j,0)}K(\lambda, \cdot)x & , \alpha_j > 0 \\ 0 & , \alpha_j = 0 \end{cases} \tag{5.15}$$

für alle $\lambda \in \Delta_w, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, x \in G$ und alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ folgt. Seien dazu $x \in G$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig aber fest gewählt. Wir betrachten die Abbildung $E(\cdot)^* : \Delta_w \to \mathcal{L}(G, \mathcal{H}_w) : \lambda \mapsto E(\lambda)^*$, wobei wir für $\lambda \in \Delta_w$ mit $E(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_w, G)$ das Punktauswertungsfunktional bezeichnen. Im Beweis von Lemma 5.3.5 haben wir gezeigt, dass die Abbildung $E(\cdot)^*$ analytisch ist und

$$\partial^{(\alpha,0)}K(\lambda, \cdot)x = \partial^\alpha\big(E(\cdot)^*x\big)(\lambda), \quad \forall\, \lambda \in \Delta_w, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, x \in G$$

gilt. Insbesondere ist $K(\lambda, \cdot)x = E(\lambda)^*x$ für alle $\lambda \in \Delta_w$ und alle $x \in G$. Ist nun $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha_j = 0$, so folgt aus (5.14)

$$\frac{1}{\alpha!}\big(M^*_{\bar{z}_j} - \lambda_j\big)\partial^\alpha\big(E(\cdot)^*x\big)(\lambda) = \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha\big(M^*_{\bar{z}_j} - p_j(\cdot)\big)\big(E(\cdot)^*x\big)(\lambda) = 0,$$

wobei wir mit $p_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ die Projektion auf die j-te Koordinate bezeichnen. Wegen (5.14) gilt

$$0 = \partial_j\big(M^*_{\bar{z}_j} - p_j(\cdot)\big)\big(E(\cdot)^*x\big)(\lambda) = -E(\lambda)^*x + \big(M^*_{\bar{z}_j} - \lambda_j\big)\frac{\partial}{\partial z_j}\big(E(\cdot)^*\big)(\lambda), \quad \forall\, \lambda \in \Delta_w,$$

also ist $\big(M^*_{\bar{z}_j} - \lambda_j\big)\partial_j\big(E(\cdot)^*\big)(\lambda) = E(\lambda)^*x$ für alle $\lambda \in \Delta_w$. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha_j = 1$ folgt daraus wegen $\alpha! = \Pi_{i=1}^n \alpha_i! = (\alpha - e_j)!$ die Gültigkeit von (5.15).

Ist nun $m \in \mathbb{N}$ und gilt (5.15) für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha_j < m$, so folgt zunächst für $\lambda \in \Delta_w$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(m-2)!}\,\partial_j^{m-1}\big(E(\cdot)^*x\big)(\lambda) = \\ &\qquad = \partial_j\left(\zeta \mapsto \frac{1}{(m-2)!}\partial_j^{m-2}\big(E(\cdot)^*x\big)(\zeta)\right)(\lambda) = \\ &\qquad = \partial_j\left(\zeta \mapsto \frac{1}{(m-1)!}\big(M^*_{\bar{z}_j} - \zeta_j\big)\partial_j^{m-1}\big(E(\cdot)^*x\big)(\zeta)\right)(\lambda) = \\ &\qquad = -\frac{1}{(m-1)!}\,\partial_j^{m-1}\big(E(\cdot)^*x\big)(\lambda) + \frac{1}{(m-1)!}\big(M^*_{\bar{z}_j} - \lambda_j\big)\partial_j^m\big(E(\cdot)^*x\big)(\lambda) \end{aligned}$$

und damit $\big(M^*_{\bar{z}_j} - \lambda_j\big)\partial_j^m\big(E(\cdot)^*\big)(\lambda) = m \cdot \partial_j^{m-1}\big(E(\cdot)^*x\big)(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Delta_w$. Wegen $\frac{m!}{(m-1)!} = m$ folgt daraus die Gültigkeit von (5.15) auch für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha_j = m$, wenn man auf beiden Seiten der letzten Gleichung den Operator $\partial^{\alpha - m\cdot e_j}$ anwendet.

Ist nun $f = \sum_{0 \le \alpha \le \rho} \frac{1}{\alpha!}\partial^{(\alpha,0)}K(w, \cdot)x_\alpha \in \mathcal{D}_w$ beliebig, so gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n \sum_{e_j \le \alpha, \beta \le \rho} \Big\langle \frac{1}{(\alpha-e_j)!(\beta-e_j)!}\,\partial^{(\alpha-e_j,0)}\bar{\partial}^{(0,\beta-e_j)}K(w,w)x_\alpha, x_\beta\Big\rangle_G = \\ &\qquad = \sum_{j=1}^n \sum_{e_j \le \alpha, \beta \le \rho} \Big\langle \frac{1}{(\alpha-e_j)!}\,\partial^{(\alpha-e_j,0)}K(w, \cdot)x_\alpha, \frac{1}{(\beta-e_j)!}\,\partial^{(\beta-e_j,0)}K(w, \cdot)x_\beta\Big\rangle_{\mathcal{H}_w} = \\ &\qquad = \sum_{j=1}^n \big\|\big(M^*_{\bar{z}_j} - w_j\big)f\big\|^2_{\mathcal{H}_w} = \big\|\mathfrak{D}_{\mathbf{M}^*_{\bar{z}} - w}f\big\|^2_{\mathcal{H}_w^n} \le \big\|\mathfrak{D}_{\mathbf{M}^*_{\bar{z}} - w}\big\|^2\,\|f\|^2_{\mathcal{H}_w} = \\ &\qquad = \big\|\mathfrak{D}_{\mathbf{M}^*_{\bar{z}} - w}\big\|^2 \sum_{0 \le \alpha, \beta \le \rho}\Big\langle \frac{1}{\alpha!\beta!}\,\partial^{(\alpha,0)}\bar{\partial}^{(0,\beta)}K(w,w)x_\alpha, x_\beta\Big\rangle_G. \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* Wir zeigen zunächst durch vollständige Induktion nach $|\rho| = \sum_{j=1}^{n} \rho_j$, dass die Operatormatrix $\mathfrak{M}(K, w, \rho)$ für alle $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ positiv semidefinit ist. Für $\rho = 0 \in \mathbb{N}_0^n$ steht auf der linken Seite von (5.13) kein Summand, womit $0 \leq \langle K(w,w)x, x\rangle_G$ für alle $x \in G$ gilt. Für $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\rho| = 1$ ist $\rho = e_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ und damit

$$C_w \sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq e_j} \left\langle \frac{1}{\alpha!\beta!} \partial^{(\alpha,0)} \bar{\partial}^{(0,\beta)} K(w,w)x_\alpha, x_\beta \right\rangle_G \geq \left\langle K(w,w)x_{e_j}, x_{e_j} \right\rangle_G \geq 0,$$

für alle $x_0, x_{e_j} \in G$. Ist nun $m \in \mathbb{N}$ und die Operatormatrix $\mathfrak{M}(K, w, \rho)$ für alle $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\rho| < m$ positiv semidefinit, so ist wegen $|\rho - e_j| = |\rho| - 1$ die Operatormatrix $\mathfrak{M}(K, w, \rho - e_j)$ für jedes $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\rho| = m$ und alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ positiv semidefinit. Mit (5.13) folgt daraus, dass für jedes $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\rho| = m$ auch die Operatormatrix $\mathfrak{M}(K, w, \rho)$ positiv semidefinit ist.

Die Operatormatrix $\mathfrak{M}(K, w, \rho)$ ist also für jedes $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ positiv semidefinit, womit es nach Satz 5.3.7 einen eindeutigen koanalytischen funktionalen Hilbertraum $\mathcal{H}_w$ auf Δ_w gibt, sodass $K|_{\Delta_w \times \Delta_w}$ der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}_w$ ist. Wir betrachten wieder die dichte Teilmenge

$$\mathcal{D}_w := \operatorname{span}\left\{\partial^{(\alpha,0)} K(w, \cdot)x : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, x \in G\right\} \subseteq \overline{\mathfrak{A}}(\Delta_w, G)$$

von $\mathcal{H}_w$ und definieren für $j \in \{1, \ldots, n\}$ die linearen Operatoren $Z_j : \mathcal{D}_w \to \mathcal{H}_w$ durch

$$Z_j\left(\tfrac{1}{\alpha!}\, \partial^{(\alpha,0)} K(w, \cdot)x\right) := \begin{cases} \frac{1}{(\alpha - e_j)!}\, \partial^{(\alpha - e_j, 0)} K(w, \cdot)x & , \alpha_j > 0 \\ 0 & , \alpha_j = 0 \end{cases} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, x \in G.$$

Aus der Ungleichung (5.13) folgt direkt, dass diese Operatoren beschränkt sind. Es existieren also eindeutige beschränkte lineare Fortsetzungen von Z_j auf $\mathcal{H}_w$, welche wir mit $\hat{Z}_j$ bezeichnen. Für $\lambda \in \Delta_w$ und $\Lambda \in \mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)$ definieren wir wieder $K_{\lambda,\Lambda} \in \mathcal{L}(G, \hat{\mathcal{D}}_w)$ durch

$$K_{\lambda,\Lambda}x := \sum_{\alpha \in \Lambda} \frac{(\lambda - w)^\alpha}{\alpha!}\, \partial^{(\alpha,0)} K(w, \cdot)x, \quad \forall\, x \in G.$$

Dann gilt für alle $\lambda \in \Delta_w$ und alle $x \in G$ (vgl. Bemerkung 5.3.8)

$$\begin{aligned}
\hat{Z}_j K(\lambda, \cdot)x &= \lim_{\Lambda \in \mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)} Z_j K_{\lambda,\Lambda}x = \lim_{\Lambda \in \mathfrak{f}(\mathbb{N}_0^n)} \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda \\ \alpha_j > 0}} \frac{(\lambda - w)^\alpha}{(\alpha - e_j)!}\, \partial^{(\alpha - e_j, 0)} K(w, \cdot)x = \\
&= (\lambda_j - w_j) \lim_{\Lambda \in \mathfrak{f}(N_0^n)} \sum_{\substack{\alpha \in \Lambda \\ \alpha_j > 0}} \frac{(\lambda - w)^{(\alpha - e_j)}}{(\alpha - e_j)!} \partial^{(\alpha - e_j, 0)} K(w, \cdot)x = \\
&= (\lambda_j - w_j) K(\lambda, \cdot)x.
\end{aligned}$$

Wir erhalten für jedes $f \in \mathcal{H}_w$

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{Z}_j^* f, K(\lambda, \cdot)x \right\rangle_{\mathcal{H}_w} &= \left\langle f, \hat{Z}_j K(\lambda, \cdot)x \right\rangle_{\mathcal{H}_w} = (\overline{\lambda}_j - \overline{w}_j) \left\langle f, K(\lambda, \cdot)x \right\rangle_{\mathcal{H}_w} = \\
&= (\overline{\lambda}_j - \overline{w}_j) \left\langle f(\lambda), x \right\rangle_G = \left\langle \big((M_{\overline{z}_j} - \overline{w}_j I) f\big)(\lambda), x \right\rangle_G = \\
&= \left\langle (M_{\overline{z}_j} - \overline{w}_j I) f, K(\lambda, \cdot)x \right\rangle_{\mathcal{H}_w},
\end{aligned}$$

wobei wir mit $I \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_w)$ die Identität bezeichnen. Da die Menge $\{K(\lambda, \cdot)x : \lambda \in \Delta_w, x \in G\}$ laut Lemma 5.2.7 ebenfalls dicht liegt in $\mathcal{H}_w$, folgt daraus, dass $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_w} = \hat{Z}_j^* + \overline{w}_j I \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_w)$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. $\square$

Lemma 5.3.10. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Seien $\mathcal{H}_K$ bzw. $\mathcal{H}_{\tilde{K}}$ zwei koanalytische funktionale Hilberträume auf Ω mit reproduzierenden Kernen K bzw. $\tilde{K}$. Es gelte*

- *Für alle $\lambda \in \Omega$ ist* $\ker K(\lambda,\lambda) = \ker \tilde{K}(\lambda,\lambda) = \{0\}$.
- *Für alle $j \in \{1,\dots,n\}$ ist $M_j := M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_K} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_K)$ und $\tilde{M}_j := M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{K}})$.*
- *Für alle $\lambda \in \Omega$ ist $\{K(\lambda,\cdot)x : x \in G\} = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{M}^*-\lambda}$ und $\{\tilde{K}(\lambda,\cdot)x : x \in G\} = \ker \mathfrak{D}_{\tilde{\mathbf{M}}^*-\lambda}$.*

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es existiert ein Operator $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{K}}, \mathcal{H}_K)$, sodass $X\tilde{M}_j = M_j X$ für alle $j \in \{1,\dots,n\}$.

(ii) Es gibt eine analytische Abbildung $\Phi : \Omega \to \mathcal{L}(G)$ und eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $\lambda \in \Omega, \rho \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $x_0,\dots,x_\rho \in G$

$$\sum_{0\le\alpha,\beta\le\rho} \Big\langle \sum_{0\le\sigma\le\alpha}\sum_{0\le\tau\le\beta} \frac{\big(\partial^{(\beta-\tau)}\Phi(\lambda)\big)^*}{(\beta-\tau)!} \frac{\partial^{(\sigma,0)}\overline{\partial}^{(0,\tau)}\tilde{K}(\lambda,\lambda)}{\sigma!\tau!} \frac{\partial^{(\alpha-\sigma)}\Phi(\lambda)}{(\alpha-\sigma)!} x_\alpha, x_\beta \Big\rangle_G \le \\ \le C \sum_{0\le\alpha,\beta\le\rho} \Big\langle \frac{1}{\alpha!\beta!}\partial^{(\alpha,0)}\overline{\partial}^{(0,\beta)}K(\lambda,\lambda)x_\alpha, x_\beta\Big\rangle_G. \tag{5.16}$$

(iii) Es gibt eine analytische Abbildung $\Phi : \Omega \to \mathcal{L}(G)$, eine Konstante $C > 0$ und ein $w \in \Omega$, sodass für dieses w die Ungleichung (5.16) *für alle $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $x_0,\dots,x_\rho \in G$ gilt.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Wir bezeichnen für $\lambda \in \Omega$ mit $E(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_K, G)$ und $\tilde{E}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{K}}, G)$ wieder die Punktauswertungsfunktionale und definieren die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \Omega & \to & \mathcal{L}(G) \\ \lambda & \mapsto & \big(\tilde{E}(\lambda)^*\big)^{-1} \circ X^* \circ E(\lambda)^*. \end{cases}$$

In Lemma 5.2.14 haben wir gezeigt, dass diese Abbildung wohldefiniert ist. Aus Lemma 5.3.5 wissen wir, dass die Abbildungen $E(\cdot)^* : \Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_K, G) : \lambda \mapsto E(\lambda)^*$ und $\tilde{E}(\cdot)^* : \Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{K}}, G) : \lambda \mapsto \tilde{E}(\lambda)^*$ analytisch sind. Aus den Lemmata 1.1.9 und 1.1.8 folgt, dass die Abbildung Φ ebenfalls analytisch ist. Weiters gilt $X^*E(\lambda)^* = \tilde{E}(\lambda)^*\Phi(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Omega$. Aus der Leibniz'schen Regel (siehe Lemma 1.2.20) folgt daraus

$$X^*\partial^\alpha\big(E(\cdot)^*\big)(\lambda) = \sum_{0\le\sigma\le\alpha} \frac{\alpha!}{\sigma!(\alpha-\sigma)!}\partial^\sigma\big(\tilde{E}(\cdot)^*\big)(\lambda)\partial^{\alpha-\sigma}\Phi(\lambda),$$

für alle $\lambda \in \Omega$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Weiters bemerken wir wieder, dass

$$\partial^\alpha\big(E(\cdot)^*x\big)(\lambda) = \partial^{(\alpha,0)}K(\lambda,\cdot)x \quad \text{und} \quad \partial^\alpha\big(\tilde{E}(\cdot)^*x\big)(\lambda) = \partial^{(\alpha,0)}\tilde{K}(\lambda,\cdot)x$$

für alle $\lambda \in \Omega, x \in G$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt.

Insgesamt ergibt sich damit für $f := \sum_{0\le\alpha\le\beta}\frac{1}{\alpha!}\partial^{(\alpha,0)}K(\lambda,\cdot)x_\alpha \in \mathcal{D}_\lambda$

$$\sum_{0\le\alpha,\beta\le\rho} \Big\langle \sum_{0\le\sigma\le\alpha}\sum_{0\le\tau\le\beta} \frac{\big(\partial^{(\beta-\tau)}\Phi(\lambda)\big)^*}{(\beta-\tau)!} \frac{\partial^{(\sigma,0)}\overline{\partial}^{(0,\tau)}\tilde{K}(\lambda,\lambda)}{\sigma!\tau!} \frac{\partial^{(\alpha-\sigma)}\Phi(\lambda)}{(\alpha-\sigma)!} x_\alpha, x_\beta \Big\rangle_G = \\ = \sum_{0\le\alpha,\beta\le\rho} \Big\langle X^*\frac{1}{\alpha!}\partial^{(\alpha,0)}K(\lambda,\cdot)x_\alpha, X^*\frac{1}{\beta!}\partial^{(\beta,0)}K(\lambda,\cdot)x_\beta\Big\rangle_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}} = \|X^*f\|^2_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}} \le \\ \le \|X^*\|^2\,\|f\|^2_{\mathcal{H}_K} = \|X^*\|^2 \sum_{0\le\alpha,\beta\le\rho} \Big\langle \frac{1}{\alpha!\beta!}\partial^{(\alpha,0)}\overline{\partial}^{(0,\beta)}K(\lambda,\lambda)x_\alpha, x_\beta\Big\rangle_G.$$

für alle $\lambda \in \Omega, \rho \in \mathbb{N}_0^n$ und $x_0, \dots, x_\rho \in G$. Die Inklusion $(ii) \Rightarrow (iii)$ ist trivial.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sei $\Phi : \Omega \to \mathcal{L}(G)$ analytisch, $C > 0$ und $w \in \Omega$, sodass für alle $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $x_0, \dots, x_\rho \in G$ die Ungleichung (5.16) gilt. Wir betrachten den laut Lemma 5.3.5 dichten Teilraum

$$\mathcal{D}_w := \operatorname{span}\Big\{\partial^{(\alpha,0)} K(w,\cdot)x : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, x \in G\Big\} = \operatorname{span}\big\{\partial^\alpha\big(E(\cdot)^* x\big)(w) : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, x \in G\big\}$$

von $\mathcal{H}_K$ und definieren die lineare Abbildung $Y : \mathcal{D}_w \to \mathcal{H}_{\tilde{K}}$ durch

$$Y\Big(\partial^\alpha\big(E(\cdot)^* x\big)(w)\Big) := \partial^\alpha\big(\tilde{E}(\cdot)^*\Phi(\cdot)x\big)(w), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, x \in G.$$

Analog zu obigen Überlegungen gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $x \in G$

$$\partial^\alpha\big(\tilde{E}(\cdot)^*\Phi(\cdot)x\big)(w) = \sum_{0 \le \sigma \le \alpha} \frac{\alpha!}{\sigma!(\alpha-\sigma)!}\, \partial^{(\sigma,0)}\tilde{K}(w,\cdot)\partial^{\alpha-\sigma}\Phi(w)x,$$

womit aus der Ungleichung (5.16) folgt, dass der Operator Y beschränkt ist. Es existiert also eine eindeutige beschränkte lineare Fortsetzung von Y auf $\mathcal{H}_K$, welche wir mit $\hat{Y}$ bezeichnen. D.h. es ist $\hat{Y} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_K, \mathcal{H}_{\tilde{K}})$ und $\hat{Y}|_{\mathcal{D}_w} = Y$.

Um den Beweis abzuschließen wollen wir zeigen, dass $\hat{Y}^*\tilde{M}_j = M_j\hat{Y}^*$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Dazu sei $r > 0$, sodass $\overline{D_r^n(w)} \subset \Omega$. Dann gilt für alle $\lambda \in D_r^n(w)$ und alle $x \in G$

$$\begin{aligned}\hat{Y}E(\lambda)^*x &= \hat{Y}\bigg(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{(\lambda-w)^\alpha}{\alpha!}\,\partial^\alpha\big(E(\cdot)^*x\big)(w)\bigg) = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{(\lambda-w)^\alpha}{\alpha!}\,\partial^\alpha\big(\tilde{E}(\cdot)^*\Phi(\cdot)x\big)(w) = \tilde{E}(\lambda)^*\Phi(\lambda)x,\end{aligned}$$

also ist $\hat{Y}E(\lambda)^* = \tilde{E}(\lambda)^*\Phi(\lambda)$ für alle $\lambda \in D_r^n(w)$. Da die Abbildungen $\hat{Y}E(\cdot)^* : \Omega \to \mathcal{L}(G, \mathcal{H}_{\tilde{K}})$ und $\tilde{E}(\cdot)^*\Phi(\cdot) : \Omega \to \mathcal{L}(G, \mathcal{H}_{\tilde{K}})$ analytisch sind, folgt daraus mit Hilfe von Korollar 1.2.19 die Gültigkeit von

$$E(\lambda)\hat{Y}^* = \Phi(\lambda)^*\tilde{E}(\lambda), \quad \forall\, \lambda \in \Omega.$$

Für alle $f \in \mathcal{H}_{\tilde{K}}, j \in \{1, \dots, n\}$ und alle $\lambda \in \Omega$ gilt also

$$E(\lambda)\hat{Y}^*\tilde{M}_j f = \Phi(\lambda)^*\tilde{E}(\lambda)\tilde{M}_j f = \overline{\lambda}_j\Phi(\lambda)^*\tilde{E}(\lambda)f = \overline{\lambda}_j E(\lambda)\hat{Y}^* f = E(\lambda)M_j\hat{Y}^* f,$$

womit der Punkt (i) für $X := \hat{Y}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{K}}, \mathcal{H}_K)$ gilt. □

Definition 5.3.11. Wir nennen eine Abbildung $\Phi : \Omega \to \mathcal{L}(G)$ eine *analytische Kern-Transformation*, falls Φ analytisch und $\Phi(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Omega$ invertierbar ist.

Lemma 5.3.12. *Sei $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(G)$ ein regulärer sesquianalytischer Kern und $\Phi : \Omega \to \mathcal{L}(G)$ eine analytische Kern-Transformation. Dann ist auch*

$$\tilde{K} : \left\{\begin{array}{ccc} \Omega \times \Omega & \to & \mathcal{L}(G) \\ (\lambda, \mu) & \mapsto & \Phi(\mu)^* K(\lambda, \mu)\Phi(\lambda) \end{array}\right.$$

ein regulärer sesquianalytscher Kern.

Beweis. Da Φ laut Voraussetzung analytisch ist, folgt aus Lemma 1.3.3, dass die Abbildung $\Phi(\cdot)^* : \Omega \to \mathcal{L}(G) : \lambda \mapsto \Phi(\lambda)^*$ koanalytisch ist. Mit K ist also auch $\tilde{K}$ sesquianalytisch.

Um zu zeigen, dass $\tilde{K}$ regulär ist, sei $w \in \Omega$ beliebig aber fest gewählt und $r > 0$, sodass $\overline{D_r^n(w)} \subseteq \Omega$ gilt. Wir setzen wieder $\Delta_w := D_r^n(w)$. Laut Satz 5.3.7 existiert ein eindeutiger koanalytischer funktionaler Hilbertraum $\mathcal{H}_w$ mit reproduzierendem Kern $K|_{\Delta_w \times \Delta_w}$. Daraus folgt, dass der Kern $K|_{\Delta_w \times \Delta_w}$ positiv ist. Laut Lemma 5.2.16 ist damit auch $\tilde{K}|_{\Delta_w \times \Delta_w}$ ein positiver Kern, und es existiert ein unitärer Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_w, \tilde{\mathcal{H}}_w)$, wobei wir mit $\tilde{\mathcal{H}}_w$ den zu $\tilde{K}|_{\Delta_w \times \Delta_w}$ gehörigen RKHS bezeichnen. Zu jedem $f \in \tilde{\mathcal{H}}_w$ gibt es also ein $g \in \mathcal{H}_w$, sodass $f = Ug$. Damit ist $\tilde{\mathcal{H}}_w$ auch ein koanalytischer funktionaler Hilbertraum, womit die Operatormatrix $\mathfrak{M}(\tilde{K}|_{\Delta_w \times \Delta_w}, w, \rho) = \mathfrak{M}(\tilde{K}, w, \rho)$ laut Lemma 5.3.5 für alle $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ positiv semidefinit ist. Da $w \in \Omega$ beliebig war, ist $\tilde{K}$ somit regulär. □

Definition 5.3.13. Sei $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(G)$ ein regulärer sesquianalytischer Kern und $w \in \Omega$ beliebig. Wir nennen einen Kern $K_w : \Delta_w \times \Delta_w \to \mathcal{L}(G)$ eine *Normalisierung* von K bei w, falls $\Delta_w \subseteq \Omega$ eine offene Umgebung von w ist und es eine analytische Kern-Transformation $\Phi : \Delta_w \to \mathcal{L}(G)$ gibt, sodass

$$K_w(\lambda, \mu) = \Phi(\mu)^* K(\lambda, \mu) \Phi(\lambda) \quad \text{und} \quad K_w(\lambda, w) = I_G, \quad \forall\, \lambda, \mu \in \Delta_w$$

gilt, wobei wir mit $I_G \in \mathcal{L}(G)$ die Identität auf G bezeichnen.

Proposition 5.3.14. *Sei $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle_G)$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(G)$ positiv, d.h. es gelte $\langle Tx, x \rangle_G \geq 0$ für alle $x \in G$. Dann existiert eine eindeutige Quadratwurzel S von T, d.h. ein positiver Operator $S \in \mathcal{L}(G)$, sodass $S \circ S = T$.*

Beweis. Siehe [6], Korollar 1.4.13. □

Lemma 5.3.15. *Sei $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(G)$ ein regulärer sesquianalytischer Kern und $w \in \Omega$. Dann gilt*

(a) Genau dann existiert eine Normalisierung von K bei w, wenn $K(w, w)$ invertierbar ist.

(b) Sind K_1, K_2 zwei Normalisierungen von K bei w, dann gibt es eine offene Umgebung $\Delta \subseteq \Omega$ von w und einen unitären Operator $W \in \mathcal{L}(G)$, sodass $K_1(\lambda, \mu) = W^* K_2(\lambda, \mu) W$ für alle $\lambda, \mu \in \Delta$.

Beweis. (*a*) Ist K_w eine Normalisierung von K bei w und $\Phi : \Delta_w \to \mathcal{L}(G)$ eine analytische Kern-Transformation, sodass

$$K_w(\lambda, \mu) = \Phi(\mu)^* K(\lambda, \mu) \Phi(\lambda) \quad \text{und} \quad K_w(\lambda, w) = I_G, \quad \forall\, \lambda, \mu \in \Delta_w$$

gilt, so ist $K(w, w) = (\Phi(w)^*)^{-1} K_w(w, w) \Phi(w)^{-1} = (\Phi(w)^*)^{-1} \Phi(w)^{-1}$ invertierbar.

Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass $K(w, w)$ invertierbar ist. Wir bezeichnen mit $\operatorname{Inv}\big(\mathcal{L}(G)\big)$ die Menge der invertierbaren Operatoren aus $\mathcal{L}(G)$. Aus der Funktionalanalysis ist bekannt (siehe z.B. [6], Lemma 1.1.9), dass diese Menge offen ist. Des Weiteren ist die Abbildung $K(\cdot, w) : \Omega \to \mathcal{L}(G) : \lambda \mapsto K(\lambda, w)$ laut Voraussetzung analytisch und daher auch stetig. Da $K(w, w)$ invertierbar ist, existiert somit eine offene Umgebung Δ_w von w, sodass $K(\lambda, w)$ für alle $\lambda \in \Delta_w$ invertierbar ist. Nach Lemma 1.1.9 ist mit $K(\cdot, w)$ auch die Abbildung $K(\cdot, w)^{-1} : \Delta_w \to \mathcal{L}(G) : \lambda \mapsto K(\lambda, w)^{-1}$ analytisch.

Nun ist der Operator $K(w, w) \in \mathcal{L}(G)$ positiv, da wir vorausgesetzt haben, dass der Kern K regulär ist und daher

$$\big\langle K(\lambda, \lambda) x, x \big\rangle_G \geq 0, \quad \forall\, \lambda \in \Omega, x \in G$$

gilt. Nach Proposition 5.3.14 existiert also eine Quadratwurzel $K(w, w)^{1/2}$ von $K(w, w)$. D.h. es ist $K(w, w)^{1/2} \in \mathcal{L}(G)$ positiv mit $K(w, w)^{1/2} K(w, w)^{1/2} = K(w, w)$. Da $K(w, w)$ invertierbar ist, muss $K(w, w)^{1/2}$ bijektiv sein. Aus dem Satz von der offenen Abbildung folgt, dass die Inverse $\big(K(w, w)^{1/2}\big)^{-1}$ ebenfalls stetig ist.

Wir definieren nun die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \Delta_w & \to \quad \mathcal{L}(G) \\ \lambda & \mapsto \quad K(\lambda, w)^{-1} K(w, w)^{1/2} \end{cases}$$

und betrachten den Kern

$$K_w : \begin{cases} \Delta_w & \to & \mathcal{L}(G) \\ (\lambda, \mu) & \mapsto & \Phi(\mu)^* K(\lambda, \mu) \Phi(\lambda). \end{cases}$$

Nach obigen Überlegungen ist Φ analytisch und $\Phi(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Delta_w$ invertierbar. Die Abbildung Φ ist also eine analytische Kern-Transformation. Außerdem gilt für alle $\lambda \in \Delta_w$

$$\begin{aligned} K_w(\lambda, w) = \Phi(w)^* K(\lambda, w) \Phi(\lambda) &= \big(K(w,w)^{-1} K(w,w)^{1/2}\big)^* K(\lambda, w) K(\lambda, w)^{-1} K(w,w)^{1/2} = \\ &= K(w,w)^{1/2} K(w,w)^{-1} K(w,w)^{1/2} = I_G, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ für alle $T \in \operatorname{Inv}\big(\mathcal{L}(G)\big)$ und jeder positive Operator selbstadjungiert ist. Der Kern K_w ist also eine Normalisierung von K bei w.

(b) Seien $K_1 : \Delta_1 \times \Delta_1 \to \mathcal{L}(G)$ und $K_2 : \Delta_2 \times \Delta_2 \to \mathcal{L}(G)$ zwei Normalisierungen von K bei w. Es gibt also analytische Abbildungen $\Phi : \Delta_1 \to \mathcal{L}(G)$ und $\Psi : \Delta_2 \to \mathcal{L}(G)$, sodass

$$K_1(\lambda, \mu) = \Phi(\mu)^* K(\lambda, \mu) \Phi(\lambda) \quad \text{und} \quad K_2(\lambda, \mu) = \Psi(\mu)^* K(\lambda, \mu) \Psi(\lambda), \quad \forall\, \lambda, \mu \in \Delta_1 \cap \Delta_2$$

gilt. Für $\Delta := \Delta_1 \cap \Delta_2$ gilt

$$K_1(\lambda, \mu) = \Phi(\mu)^* \big(\Psi(\mu)^*\big)^{-1} K_2(\lambda, \mu) \Psi(\lambda)^{-1} \Phi(\lambda), \quad \forall\, \lambda, \mu \in \Delta.$$

Definiert man die Abbildung $\Theta : \Delta \to \mathcal{L}(G) : \lambda \mapsto \Psi(\lambda)^{-1}\Phi(\lambda)$, so ist $\Theta(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Delta$ invertierbar, und es gilt

$$K_1(\lambda, \mu) = \Theta(\mu)^* K_2(\lambda, \mu) \Theta(\lambda), \quad \forall\, \lambda, \mu \in \Delta.$$

Da K_1 und K_2 Normalisierungen von K bei w sind, gilt weiters

$$I_G = K_1(\lambda, w) = \Theta(w)^* K_2(\lambda, w) \Theta(\lambda) = \Theta(w)^* \Theta(\lambda), \quad \forall\, \lambda \in \Delta,$$

woraus $\Theta(\lambda) = \big(\Theta(w)^*\big)^{-1}$ für alle $\lambda \in \Delta$ folgt. Setzt man also $W := \Theta(w)$, so ist $W \in \mathcal{L}(G)$ unitär und erfüllt die gewünschte Eigenschaft. □

Lemma 5.3.16. *Seien $\mathcal{H}_K$ bzw. $\mathcal{H}_{\tilde{K}}$ zwei koanalytische funktionale Hilberträume auf Ω mit reproduzierenden Kernen K bzw. $\tilde{K}$. Es gelte*

- *Für alle $\lambda \in \Omega$ sind $K(\lambda, \lambda)$ und $\tilde{K}(\lambda, \lambda)$ invertierbar.*
- *Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ ist $M_j := M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_K} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_K)$ und $\tilde{M}_j := M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{K}})$.*
- *Für alle $\lambda \in \Omega$ ist $\{K(\lambda, \cdot)x : x \in G\} = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{M}^* - \lambda}$ und $\{\tilde{K}(\lambda, \cdot)x : x \in G\} = \ker \mathfrak{D}_{\tilde{\mathbf{M}}^* - \lambda}$.*

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es existiert ein unitärer Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_K, \mathcal{H}_{\tilde{K}})$, sodass $UM_j = \tilde{M}_j U$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

(ii) Es existiert eine analytische Kern-Transformation $\Phi : \Omega \to \mathcal{L}(G)$, sodass

$$\tilde{K}(\lambda, \mu) = \Phi(\mu)^* K(\lambda, \mu) \Phi(\lambda), \quad \forall\, \lambda, \mu \in \Omega.$$

(iii) Es gibt Normalisierungen K_w von K und $\tilde{K}_w$ von $\tilde{K}$ bei einem $w \in \Omega$ und einen unitären Operator $W \in \mathcal{L}(G)$, sodass $\tilde{K}_w(\lambda, \mu) = W^* K_w(\lambda, \mu) W$ für alle λ, μ in einer offenen Umgebung von w.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Diese Inklusion folgt aus Lemma 5.2.14 (siehe auch Bemerkung 5.2.15).

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sei $w \in \Omega$ beliebig aber fest gewählt. Nach Lemma 5.3.15 existieren Normalisierungen K_w von K und $\tilde{K}_w$ von $\tilde{K}$ bei w. Wir bezeichnen mit $\Psi : \Delta_w \to \mathcal{L}(G)$ bzw. $\tilde{\Psi} : \tilde{\Delta}_w \to \mathcal{L}(G)$ die zugehörigen analytischen Kern-Transformationen. D.h. für $\Delta := \Delta_w \cap \tilde{\Delta}_w$ gilt

$$K_w(\lambda,\mu) = \Psi(\mu)^* K(\lambda,\mu)\Psi(\lambda) \quad \text{und} \quad \tilde{K}_w(\lambda,\mu) = \tilde{\Psi}(\mu)^*\tilde{K}(\lambda,\mu)\tilde{\Psi}(\lambda), \quad \forall\, \lambda,\mu \in \Delta.$$

Laut Voraussetzung gilt nun

$$\tilde{K}_w(\lambda,\mu) = \tilde{\Psi}(\mu)^* \underbrace{\Phi(\mu)^* K(\lambda,\mu)\Phi(\lambda)}_{=\tilde{K}(\lambda,\mu)} \tilde{\Psi}(\lambda), \quad \forall\, \lambda,\mu \in \Delta,$$

womit $\tilde{K}_w$ auch eine Normalisierung von K bei w ist. Laut Lemma 5.3.15 existiert ein unitärer Operator $W \in \mathcal{L}(G)$, sodass $\tilde{K}_w(\lambda,\mu) = W^* K_w(\lambda,\mu) W$ für alle $\lambda,\mu \in \Delta$ gilt.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Seien $\Psi : \Delta_w \to \mathcal{L}(G)$ und $\tilde{\Psi} : \tilde{\Delta}_w \to \mathcal{L}(G)$ analytische Kern-Transformationen, sodass

$$K_w(\lambda,\mu) = \Psi(\mu)^* K(\lambda,\mu)\Psi(\lambda) \quad \text{und} \quad \tilde{K}_w(\lambda,\mu) = \tilde{\Psi}(\mu)^*\tilde{K}(\lambda,\mu)\tilde{\Psi}(\lambda), \quad \forall\, \lambda,\mu \in \Delta_w \cap \tilde{\Delta}_w$$

gilt, und sei $W \in \mathcal{L}(G)$ unitär, sodass $\tilde{K}_w(\lambda,\mu) = W^* K_w(\lambda,\mu) W$ für alle λ,μ in einer offenen Umgebung Δ' von w gilt. Wir wählen $r > 0$, sodass $\Delta := D_r^n(w) \subseteq \Delta_w \cap \tilde{\Delta}_w \cap \Delta'$ gilt, und definieren die Abbildung

$$\Theta : \begin{cases} \Delta & \to \quad \mathcal{L}(G) \\ \lambda & \mapsto \quad \tilde{\Psi}(\lambda) W^* \Psi(\lambda)^{-1}. \end{cases}$$

Klarerweise ist $\Theta(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Delta$ invertierbar. Nach den Lemmata 1.1.9 und 1.1.8 ist Θ analytisch. Weiters gilt für alle $\lambda,\mu \in \Delta$

$$\begin{aligned} \Theta(\mu)^*\tilde{K}(\lambda,\mu)\Theta(\lambda) &= (\Psi(\mu)^*)^{-1} W \tilde{\Psi}(\mu)^* \tilde{K}(\lambda,\mu)\tilde{\Psi}(\lambda) W^* \Psi(\lambda)^{-1} = \\ &= (\Psi(\mu)^*)^{-1} W \tilde{K}_w(\lambda,\mu) W^* \Psi(\lambda)^{-1} = \\ &= (\Psi(\mu)^*)^{-1} K_w(\lambda,\mu) \Psi(\lambda)^{-1} = K(\lambda,\mu). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Da die Kerne K und $\tilde{K}$ laut Voraussetzung regulär sind, existieren laut Satz 5.3.7 eindeutige koanalytische funktionale Hilberträume $\mathcal{H}_w$ und $\tilde{\mathcal{H}}_w$, sodass $K|_{\Delta\times\Delta}$ der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}_w$ und $\tilde{K}|_{\Delta\times\Delta}$ der reproduzierende Kern von $\tilde{\mathcal{H}}_w$ ist. Nach Lemma 5.3.6 existieren unitäre Operatoren $R_\Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_K, \mathcal{H}_w)$ und $\tilde{R}_\Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\tilde{K}}, \tilde{\mathcal{H}}_w)$, sodass für alle $j \in \{1,\dots,n\}$

$$M_{\bar{z}_j}|_{\mathcal{H}_w} = R_\Delta M_{\bar{z}_j}|_{\mathcal{H}_K} R_\Delta^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_w) \quad \text{und} \quad M_{\bar{z}_j}|_{\tilde{\mathcal{H}}_w} = \tilde{R}_\Delta M_{\bar{z}_j}|_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}} \tilde{R}_\Delta^* \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}_w).$$

Weiters existiert wegen (5.17) laut Lemma 5.2.16 ein unitärer Operator $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_w, \tilde{\mathcal{H}}_w)$, sodass $V M_{\bar{z}_j}|_{\mathcal{H}_w} = M_{\bar{z}_j}|_{\tilde{\mathcal{H}}_w} V$ für alle $j \in \{1,\dots,n\}$. Insgesamt erhalten wir

$$\tilde{R}_\Delta^* V R_\Delta M_{\bar{z}_j}|_{\mathcal{H}_K} = \tilde{R}_\Delta^* V M_{\bar{z}_j}|_{\mathcal{H}_w} R_\Delta = \tilde{R}_\Delta^* M_{\bar{z}_j}|_{\tilde{\mathcal{H}}_w} V R_\Delta = M_{\bar{z}_j}|_{\mathcal{H}_{\tilde{K}}} \tilde{R}_\Delta^* V R_\Delta,$$

woraus die Behauptung für den unitären Operator $U := \tilde{R}_\Delta^* V R_\Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_K, \mathcal{H}_{\tilde{K}})$ folgt. □

Lemma 5.3.17. *Sei $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(G)$ ein regulärer sesquianalytischer Kern und $w \in \Omega$. Weiters sei $C_w > 0$, sodass für alle $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $x_0,\dots,x_\rho \in G$ die Ungleichung* (5.13) *aus Lemma 5.3.9* (ii) *für K gilt. Ist $\Phi : \Delta \to \mathcal{L}(G)$ eine analytische Kern-Transformation mit $w \in \Delta$ und definiert man $\tilde{K}(\lambda,\mu) := \Phi(\mu)^* K(\lambda,\mu)\Phi(\lambda)$ für alle $\lambda,\mu \in \Delta$, so gilt die Ungleichung* (5.13) *auch für den Kern $\tilde{K}$.*

Beweis. Sei $C_w > 0$, sodass die Ungleichung (5.13) für alle $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $x_0, \ldots, x_\rho \in G$ gilt. Weiters sei $\Phi : \Delta \to \mathcal{L}(G)$ eine analytische Kern-Transformation mit $w \in \Delta$ und der Kern $\tilde{K}$ auf $\Delta \times \Delta$ definiert durch $\tilde{K}(\lambda, \mu) := \Phi(\mu)^* K(\lambda, \mu)\Phi(\lambda)$ für alle $\lambda, \mu \in \Delta$.

Sei $r > 0$, sodass $\overline{D_r^n(w)} \subseteq \Delta$ und $\mathcal{H}_w$ jener koanalytische funktionale Hilbertraum, dessen reproduzierender Kern gegeben ist durch $K|_{D_r^n(w) \times D_r^n(w)}$. Dann folgt aus Lemma 5.3.9, dass $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_w} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_w)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Da $\tilde{K}$ laut Lemma 5.3.12 ebenfalls ein regulärer sesquianalytischer Kern ist, existiert ein eindeutiger koanalytischer funktionaler Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}}_w$, dessen reproduzierender Kern gegeben ist durch $\tilde{K}|_{\Delta \times \Delta}$.

Nach Lemma 5.2.16 existiert nun ein unitärer Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_w, \tilde{\mathcal{H}}_w)$, sodass $M_{\overline{z}_j}|_{\tilde{\mathcal{H}}_w} = UM_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_w} U^* \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}_w)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Aus Lemma 5.3.9 folgt, dass die Ungleichung (5.13) auch für den Kern $\tilde{K}|_{\Delta \times \Delta}$ und damit natürlich auch für den Kern $\tilde{K}$ gilt. □

Definition 5.3.18. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und M ein linearer Teilraum von X. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt *nach unten beschränkt* auf M, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass

$$\|Tx\|_Y \geq C \|x\|_X, \quad \forall\, x \in M.$$

Lemma 5.3.19. *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist T genau dann nach unten beschränkt auf X, wenn T injektiv und* $\operatorname{ran} T$ *abgeschlossen ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Laut Voraussetzung existiert eine Konstante $C > 0$, sodass $\|Tx\|_Y \geq C\|x\|_X$ für alle $x \in X$. Damit ist T klarerweise injektiv. Sei nun $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge aus $\operatorname{ran} T$ und $y := \lim_{n\in\mathbb{N}} y_n$. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$, sodass $y_n = Tx_n$, wobei

$$\|Tx_n - Tx_m\|_Y = \|T(x_n - x_m)\|_Y \geq C \|x_n - x_m\|_X, \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Für $x := \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$ gilt dann $y = \lim_{n\in\mathbb{N}} Tx_n = Tx \in \operatorname{ran} T$, womit $\operatorname{ran} T$ abgeschlossen ist.

($\Leftarrow$) Da $\operatorname{ran} T \subseteq Y$ als abgeschlossener Teilraum eines Banachraumes ebenfalls vollständig ist, folgt aus dem Satz von der offenen Abbildung, dass $T : X \to \operatorname{ran} T$ offen ist. Damit ist $T^{-1} : \operatorname{ran} T \to X$ stetig und

$$\|x\|_X = \left\|T^{-1}Tx\right\|_X \leq \|T^{-1}\| \cdot \|Tx\|_Y, \quad \forall\, x \in X.$$

□

Lemma 5.3.20. *Sei $\mathcal{H}_K$ ein koanalytischer funktionaler Hilbertraum auf Ω mit reproduzierendem Kern K. Weiters sei $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_K} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_K)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $K(w, w)$ für ein $w \in \Omega$ invertierbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Der Operator $\mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_K})^* - w}$ ist auf $\{K(w, \cdot)x : x \in G\}^\perp$ nach unten beschränkt.

(ii) Der Operator $\mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^* - w}$ ist auf $\{K(w, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}^\perp$ nach unten beschränkt.

(iii) Es existiert eine Normalisierung $\tilde{K}$ von K bei w und eine Konstante $C_w > 0$, sodass für jedes $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $x_0, \ldots, x_\rho \in G$

$$\begin{aligned} &C_w \sum_{0<\alpha,\beta\leq\rho} \left\langle \frac{1}{\alpha!\beta!}\, \partial^{(\alpha,0)}\overline{\partial}^{(0,\beta)}\tilde{K}(w, w)x_\alpha, x_\beta \right\rangle_G \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{e_j\leq\alpha,\beta\leq\rho} \left\langle \frac{1}{(\alpha - e_j)!(\beta - e_j)!}\, \partial^{(\alpha-e_j,0)}\overline{\partial}^{(0,\beta-e_j)}\tilde{K}(w, w)x_\alpha, x_\beta \right\rangle_G. \end{aligned} \tag{5.18}$$

In diesem Fall sind die Teilräume $\{K(w, \cdot)x : x \in G\} \subseteq \mathcal{H}_K$ und $\{K(w, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\} \subseteq \mathcal{H}_w$ abgeschlossen.

Beweis. (*i*) $\Leftrightarrow$ (*ii*) Sei $r > 0$, sodass $\overline{D_r^n(w)} \subseteq \Omega$ und $\Delta_w := D_r^n(w)$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{H}_w$ wieder jenen koanalytischen funktionalen Hilbertraum, dessen Kern durch $K|_{\Delta_w \times \Delta_w}$ gegeben ist. Nach Lemma 5.3.6 existiert ein unitärer Operator $R_w \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_K, \mathcal{H}_w)$, sodass $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_w} = R_w M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_K} R_w^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_w)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, was aber äquivalent ist zu

$$\left[(M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_w})^* - w_j I_{\mathcal{H}_w}\right] R_w = R_w \left[(M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_K})^* - w_j I_{\mathcal{H}_K}\right], \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Der Operator $\mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_K})^* - w}$ ist also genau dann auf $\{K(w, \cdot)x : x \in G\}^\perp$ nach unten beschränkt, wenn der Operator $\mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^* - w}$ auf $R_w \left(\{K(w, \cdot)x : x \in G\}^\perp\right)$ nach unten beschränkt ist. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} f \in \{K(w, \cdot)x : x \in G\}^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad \left\langle f, K(w, \cdot)x \right\rangle_{\mathcal{H}_K} = 0, \forall\, x \in G \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \Big\langle R_w f, \underbrace{R_w K(w, \cdot)x}_{= K(w, \cdot)x|_{\Delta_w}} \Big\rangle_{\mathcal{H}_w} &= 0, \forall\, x \in G \quad \Leftrightarrow \quad R_w f \in \{K(w, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}^\perp, \end{aligned}$$

also ist $R_w \left(\{K(w, \cdot)x : x \in G\}^\perp\right) = \{K(w, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}^\perp$. Des Weiteren gilt $R_w\big(\{K(w, \cdot)x : x \in G\}\big) = \{K(w, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}$, woraus folgt, dass $\{K(w, \cdot)x : x \in G\}$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $\{K(w, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}$ abgeschlossen ist.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) Da $K(w, w)$ invertierbar ist, existiert laut Lemma 5.3.15 eine Normalisierung $\tilde{K}$ von K bei w. D.h. es existiert eine offene Umgebung $\Delta \subseteq \Omega$ von w und eine analytische Kern-Transformation $\Phi : \Delta \to \mathcal{L}(G)$, sodass

$$\tilde{K}(\lambda, \mu) = \Phi(\mu)^* K(\lambda, \mu) \Phi(\lambda) \quad \text{und} \quad \tilde{K}(\lambda, w) = I_G, \quad \forall\, \lambda, \mu \in \Delta.$$

Sei $r > 0$, sodass $\overline{D_r^n(w)} \subseteq \Delta$ und $\Delta_w := D_r^n(w)$. Weiters sei $\mathcal{H}_w$ jener koanalytische funktionale Hilbertraum, dessen Kern gegeben ist durch $K|_{\Delta_w \times \Delta_w}$. Nach Lemma 5.3.12 ist mit $K|_{\Delta_w \times \Delta_w}$ auch $\tilde{K}|_{\Delta_w \times \Delta_w}$ ein regulärer sesquianalytischer Kern, womit es einen koanalytischen RKHS $\tilde{\mathcal{H}}_w$ gibt, sodass $\tilde{K}|_{\Delta_w \times \Delta_w}$ der reporduzierende Kern von $\tilde{\mathcal{H}}_w$ ist. Laut Lemma 5.2.16 ist der Operator

$$V : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{H}_w & \to & \tilde{\mathcal{H}}_w \\ f & \mapsto & \Phi(\cdot)^* f(\cdot) := \big(\lambda \mapsto \Phi(\lambda)^* f(\lambda)\big) \end{array} \right.$$

unitär und es gilt $M_{\overline{z}_j}|_{\tilde{\mathcal{H}}_w} = V M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_w} V^* \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}_w)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Analog zu obigen Überlegungen folgt, dass $\mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^* - w}$ genau dann auf $\{K(w, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}^\perp$ nach unten beschränkt ist, wenn $\mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\tilde{\mathcal{H}}_w})^* - w}$ auf $V\left(\{K(w, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}^\perp\right)$ nach unten beschränkt ist. Weiters gilt

$$\begin{aligned} V\left(\{K(w, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}^\perp\right) &= \{V(K(w, \cdot)x|_{\Delta_w}) : x \in G\}^\perp = \{\Phi(\cdot)^* K(w, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}^\perp = \\ &= \{\Phi(\cdot)^* K(w, \cdot)\Phi(w)x|_{\Delta_w}) : x \in G\}^\perp = \{\tilde{K}(w, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}^\perp \end{aligned}$$

da $\Phi(w) \in \mathcal{L}(G)$ invertierbar ist. Analog erhält man

$$V\left(\{K(w, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}\right) = \{\tilde{K}(w, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\},$$

womit $\{K(w, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $\{\tilde{K}(w, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}$ abgeschlossen ist.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass

$$\{\tilde{K}(w, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}^\perp = \operatorname{cls}\left\{\partial^{(\alpha,0)}\tilde{K}(w, \cdot)y|_{\Delta_w} : \alpha \in \mathbb{N}_0^n \backslash \{(0, \ldots, 0)\}, y \in G\right\}. \tag{5.19}$$

Aus $\tilde{K}(\lambda, w) = I_G$ für alle $\lambda \in \Delta_w$, folgt $\partial^{(\alpha,0)}\tilde{K}(w, w) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n \backslash \{0\}$. Es gilt also

$$\left\langle \partial^{(\alpha,0)}\tilde{K}(w, \cdot)y, \tilde{K}(w, \cdot)x \right\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_w} = \left\langle \partial^{(\alpha,0)}\tilde{K}(w, w)y, x \right\rangle_G = 0, \quad \forall\, x, y \in G, \alpha \in \mathbb{N}_0^n \backslash \{0\},$$

was die Inklusion „$\supseteq$“ zeigt. Für die andere Inklusion sei $f \in \{\tilde{K}(w,\cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}^{\perp}$ beliebig. Wir wissen, dass die Teilmenge $\tilde{\mathcal{D}}_w := \operatorname{span}\left\{\partial^{(\alpha,0)}\tilde{K}(w,\cdot)y : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, y \in G\right\}$ dicht liegt in $\tilde{\mathcal{H}}_w$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $f_\varepsilon = \sum_{\alpha\in\Lambda_\varepsilon} \partial^{(\alpha,0)}\tilde{K}(w,\cdot)y_\alpha^\varepsilon \in \tilde{\mathcal{D}}_w$ mit $\|f - f_\varepsilon\|_{\tilde{\mathcal{H}}_w} < \varepsilon$. Definiert man $g_\varepsilon := \sum_{\substack{\alpha\in\Lambda_\varepsilon\\ \alpha\neq 0}} \partial^{(\alpha,0)}\tilde{K}(w,\cdot)y_\alpha^\varepsilon$, so gilt

$$\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{\tilde{\mathcal{H}}_w} = \begin{cases} \left\|\tilde{K}(w,\cdot)y_0^\varepsilon\right\|_{\tilde{\mathcal{H}}_w} & , 0 \in \Lambda_\varepsilon \\ 0 & , 0 \notin \Lambda_\varepsilon. \end{cases}$$

Falls $0 \in \Lambda_\varepsilon$ gilt aber

$$\left\|\tilde{K}(w,\cdot)y_0^\varepsilon\right\|_{\tilde{\mathcal{H}}_w}^2 = \left\langle \tilde{K}(w,\cdot)y_0^\varepsilon, \tilde{K}(w,\cdot)y_0^\varepsilon\right\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_w} = \left\langle \tilde{K}(w,w)y_0^\varepsilon, y_0^\varepsilon\right\rangle_G = \|y_0^\varepsilon\|_G^2$$

und $y_0^\varepsilon = f_\varepsilon(w)$. Aus der Cauchy-Schwarz’schen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}\left\langle f_\varepsilon(w), f_\varepsilon(w)\right\rangle_G &= \left\langle f_\varepsilon, \tilde{K}(w,\cdot)f_\varepsilon(w)\right\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_w} = \left\langle f - f_\varepsilon, \tilde{K}(w,\cdot)f_\varepsilon(w)\right\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_w} \leq \\ &\leq \|f - f_\varepsilon\|_{\tilde{\mathcal{H}}_w} \left\|\tilde{K}(w,\cdot)f_\varepsilon(w)\right\|_{\tilde{\mathcal{H}}_w} < \varepsilon \cdot \|f_\varepsilon(w)\|_G\,,\end{aligned}$$

also $\|\tilde{K}(w,\cdot)y_0^\varepsilon\|_{\tilde{\mathcal{H}}_w} = \|y_0^\varepsilon\|_G = \|f_\varepsilon(w)\|_G < \varepsilon$. Insgesamt ergibt sich damit

$$\|f - g_\varepsilon\|_{\tilde{\mathcal{H}}_w} = \|f - f_\varepsilon + f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{\tilde{\mathcal{H}}_w} \leq \|f - f_\varepsilon\|_{\tilde{\mathcal{H}}_w} + \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{\tilde{\mathcal{H}}_w} < 2\varepsilon.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $g_\varepsilon \in \operatorname{span}\left\{\partial^{(\alpha,0)}\tilde{K}(w,\cdot)y : \alpha \in \mathbb{N}_0^n\setminus\{0\}, y \in G\right\}$, sodass $\|f - g_\varepsilon\|_{\tilde{\mathcal{H}}_w} < 2\varepsilon$. Daraus folgt $f \in \operatorname{cls}\left\{\partial^{(\alpha,0)}\tilde{K}(w,\cdot)y : \alpha \in \mathbb{N}_0^n\setminus\{0\}, y \in G\right\}$, also die Inklusion „$\subseteq$“.

Aus Lemma 5.2.13 wissen wir, dass $\{\tilde{K}(w,\cdot)x : x \in G\} \subseteq \ker \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\tilde{\mathcal{H}}_w})^*-w}$ gilt. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 5.3.9 folgt schließlich für $f = \sum_{0\leq\alpha\leq\rho} \frac{1}{\alpha!}\,\partial^{(\alpha,0)}\tilde{K}(w,\cdot)x_\alpha \in \tilde{\mathcal{D}}_w$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{e_j\leq\alpha,\beta\leq\rho}&\left\langle \frac{1}{(\alpha-e_j)!(\beta-e_j)!}\,\partial^{(\alpha-e_j,0)}\overline{\partial}^{(0,\beta-e_j)}\tilde{K}(w,w)x_\alpha, x_\beta\right\rangle_G = \\ &= \left\|\mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\tilde{\mathcal{H}}_w})^*-w}f\right\|_{\tilde{\mathcal{H}}_w}^2 \geq C\,\|f\|^2 = C\left\|\sum_{0<\alpha\leq\rho}\frac{1}{\alpha!}\,\partial^{(\alpha,0)}\tilde{K}(w,\cdot)x_\alpha\right\|_{\tilde{\mathcal{H}}_w}^2 = \qquad (5.20)\\ &= C\sum_{0<\alpha,\beta\leq\rho}\left\langle\frac{1}{\alpha!\beta!}\,\partial^{(\alpha,0)}\overline{\partial}^{(0,\beta)}\tilde{K}(w,w)x_\alpha, x_\beta\right\rangle_G.\end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)* Ist $\tilde{K}$ eine Normalisierung von K bei w, für welche die Ungleichung (5.18) gilt, so folgt aus (5.20), dass $\mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\tilde{\mathcal{H}}_w})^*-w}$ auf $\operatorname{cls}\left\{\partial^{(\alpha,0)}\tilde{K}(w,\cdot)y : \alpha \in \mathbb{N}_0^n\setminus\{0\}, y \in G\right\}$ nach unten beschränkt ist. Wegen (5.19) ist $\mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\tilde{\mathcal{H}}_w})^*-w}$ somit auf $\{\tilde{K}(w,\cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}^{\perp}$ nach unten beschränkt.

Es bleibt zu zeigen, dass $\{\tilde{K}(w,\cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\} \subseteq \tilde{\mathcal{H}}_w$ abgeschlossen ist. Dazu betrachten wir den linearen Operator $\tilde{K}(w,\cdot) : G \to \tilde{\mathcal{H}}_w : x \mapsto \tilde{K}(w,\cdot)x|_{\Delta_w}$. Wegen

$$\left\|\tilde{K}(w,\cdot)x|_{\Delta_w}\right\|_{\tilde{\mathcal{H}}_w}^2 = \left\langle \tilde{K}(w,\cdot)x|_{\Delta_w}, \tilde{K}(w,\cdot)x|_{\Delta_w}\right\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_w} = \left\langle \tilde{K}(w,w)x, x\right\rangle_G = \langle x, x\rangle_G = \|x\|_G^2\,,$$

ist der Operator $\tilde{K}(w,\cdot) \in \mathcal{L}(G, \tilde{\mathcal{H}}_w)$ eine Isometrie, womit $\operatorname{ran}\tilde{K}(w,\cdot) = \{\tilde{K}(w,\cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}$ abgeschlossen ist. $\square$

Definition 5.3.21. Wir nennen einen sesquianalytischen Kern $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(G)$ einen *verallgemeinerten Bergman-Kern*, falls

(BK1) Zu jedem $w \in \Omega$ existiert eine Konstante $c_w > 0$, sodass für alle $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $x_0, \dots, x_\rho \in G$

$$c_w \sum_{j=1}^{n} \sum_{e_j \leq \alpha, \beta \leq \rho} \left\langle \frac{1}{(\alpha - e_j)!(\beta - e_j)!} \, \partial^{(\alpha - e_j, 0)} \overline{\partial}^{(0, \beta - e_j)} K(w, w) x_\alpha, x_\beta \right\rangle_G \leq$$
$$\leq \sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq \rho} \left\langle \frac{1}{\alpha! \beta!} \, \partial^{(\alpha, 0)} \overline{\partial}^{(0, \beta)} K(w, w) x_\alpha, x_\beta \right\rangle_G$$

(BK2) Zu jedem $w \in \Omega$ existiert eine Normalisierung K_w von K bei w und eine Konstante $C_w > 0$, sodass für alle $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $x_0, \dots, x_\rho \in G$

$$\sum_{0 < \alpha, \beta \leq \rho} \left\langle \frac{1}{\alpha! \beta!} \, \partial^{(\alpha, 0)} \overline{\partial}^{(0, \beta)} K_w(w, w) x_\alpha, x_\beta \right\rangle_G \leq$$
$$\leq C_w \sum_{j=1}^{n} \sum_{e_j \leq \alpha, \beta \leq \rho} \left\langle \frac{1}{(\alpha - e_j)!(\beta - e_j)!} \, \partial^{(\alpha - e_j, 0)} \overline{\partial}^{(0, \beta - e_j)} K_w(w, w) x_\alpha, x_\beta \right\rangle_G.$$

Lemma 5.3.22. *Sei $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(G)$ ein verallgemeinerter Bergman-Kern und $w \in \Omega$. Weiters sei $r > 0$, sodass $\overline{D_r^n(w)} \subseteq \Omega$ und $\Delta_w := D_r^n(w)$. Dann gilt:*

(i) Der Operator $K(w, w) \in \mathcal{L}(G)$ ist invertierbar.

(ii) Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ ist $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_w} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_w)$.

(iii) Für alle $\lambda \in \Delta_w$ ist $\{K(\lambda, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\} = \ker \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^* - \lambda}$.

(iv) Für alle $\lambda \in \Delta_w$ ist $\operatorname{ran} \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^* - \lambda} \subseteq \mathcal{H}_w^n$ abgeschlossen.

Beweis. Mit Hilfe von Lemma 5.3.9 folgt aus der Eigenschaft (BK1), dass die Operatormatrix $\mathfrak{M}(K, w, \rho)$ für alle $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ positiv semidefinit ist. Laut Satz 5.3.7 existiert somit ein eindeutiger koanalytischer RKHS $\mathcal{H}_w$, sodass $K|_{\Delta_w \times \Delta_w}$ der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}_w$ ist. Aus Lemma 5.3.9 folgt weiters, dass $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_w} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_w)$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Aus Lemma 5.2.13 erhält man daraus die Gültigkeit von

$$\{K(\lambda, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\} \subseteq \ker \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^* - \lambda}, \quad \forall \, \lambda \in \Delta_w. \tag{5.21}$$

Aus der Eigenschaft (BK2) und Lemma 5.3.15 folgt zunächst, dass $K(\lambda, \lambda) \in \mathcal{L}(G)$ für alle $\lambda \in \Omega$ invertierbar ist. Sei nun $\mu \in \Delta_w$ beliebig aber fest gewählt und $\delta > 0$, sodass $\overline{D_\delta^n(\mu)} \subset \Delta_w$. Wir setzen $\Delta_\mu := D_\delta^n(\mu)$ und bezeichnen mit $\mathcal{H}_\mu$ jenen koanalytischen RKHS, dessen reproduzierender Kern gegeben ist durch $K|_{\Delta_\mu \times \Delta_\mu}$. Wegen der Eigenschaft (BK2) können wir o.B.d.A. annehmen, dass es zu $\mu \in \Omega$ eine Normalisierung K_μ von $K|_{\Delta_w \times \Delta_w}$ bei μ und eine Konstante $C_\mu > 0$ gibt, sodass für alle $\rho \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $x_0, \dots, x_\rho \in G$

$$\sum_{0 < \alpha, \beta \leq \rho} \left\langle \frac{1}{\alpha! \beta!} \, \partial^{(\alpha, 0)} \overline{\partial}^{(0, \beta)} K_\mu(\mu, \mu) x_\alpha, x_\beta \right\rangle_G \leq$$
$$\leq C_\mu \sum_{j=1}^{n} \sum_{e_j \leq \alpha, \beta \leq \rho} \left\langle \frac{1}{(\alpha - e_j)!(\beta - e_j)!} \, \partial^{(\alpha - e_j, 0)} \overline{\partial}^{(0, \beta - e_j)} K_\mu(\mu, \mu) x_\alpha, x_\beta \right\rangle_G.$$

Aus Lemma 5.3.20 folgt damit, dass $\mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^* - \mu}$ auf $\{K(\mu, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}^\perp$ nach unten beschränkt und $\{K(\mu, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\} \subseteq \mathcal{H}_w$ abgeschlossen ist.

Ist nun $f = f_1 + f_2 \in \ker \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^*-\mu}$ mit $f_1 \in \{K(\mu,\cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}$ und $f_2 \in \{K(\mu,\cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}^\perp$, so gilt wegen (5.21)

$$0 = \left\|\mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^*-\mu} f\right\|_{\mathcal{H}_w^n} = \left\|\mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^*-\mu} f_2\right\|_{\mathcal{H}_w^n} \geq C_\mu \left\|f_2\right\|_{\mathcal{H}_w}$$

für eine Konstante $C_\mu > 0$, womit $f_2 = 0$ sein muss. Also ist $f \in \{K(\mu,\cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}$ und damit $\ker \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^*-\mu} \subseteq \{K(\mu,\cdot)x|_{\Delta_w} : x \in G\}$. Wegen Lemma 5.3.19 ist $\operatorname{ran} \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^*-\mu} \subseteq \mathcal{H}_w^n$ abgeschlossen. Da $\mu \in \Delta_w$ beliebig war, zeigt dies die Behauptung. □

Satz 5.3.23. *Sei $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann gilt*

(a) Für $\mathbf{T} \in \mathcal{A}_k^n(\Omega)$ ist K_Γ (siehe Definition 5.1.13) ein verallgemeinerter Bergman-Kern.

(b) Ist $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(\ell_k^2)$ ein verallgemeinerter Bergmann-Kern und $w \in \Omega$ beliebig, so gilt $(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^* \in \mathcal{A}_k^n(\Delta_w)$.

Beweis. (*a*) Sei $\mathbf{T} \in \mathcal{A}_k^n(\Omega)$. Dann existiert eine analytische Funktion $\Gamma : \Omega \to \mathcal{L}(\ell_k^2, H)$, sodass

$$\ker \Gamma(\lambda) = \{0\} \quad \text{und} \quad \operatorname{ran} \Gamma(\lambda) = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}, \quad \forall\, \lambda \in \Omega.$$

Definiert man $K_\Gamma : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(\ell_k^2)$ durch $K_\Gamma(\lambda,\mu) := \Gamma(\mu)^*\Gamma(\lambda)$, so gilt $K_\Gamma(\lambda,\mu)^* = K_\Gamma(\mu,\lambda)$, womit K_Γ ein sesquianalytischer Kern auf $\Omega \times \Omega$ ist. Laut Lemma 5.2.11 existiert ein eindeutiger koanalytischer RKHS $\mathcal{H}_\Gamma$, dessen reproduzierender Kern gegeben ist durch K_Γ und ein unitärer Operator $U_\Gamma \in \mathcal{L}(H, \mathcal{H}_\Gamma)$, sodass $U_\Gamma T_j^* = M_{\overline{z}_j} U_\Gamma$ für alle $j \in \{1,\ldots,n\}$. Der unitäre Operator U_Γ ist dabei gegeben durch

$$U_\Gamma : \begin{cases} H & \to & \mathcal{H}_\Gamma \\ x & \mapsto & (\lambda \mapsto \Gamma(\lambda)^* x). \end{cases}$$

Daraus folgt einerseits, dass K_Γ regulär ist (siehe Lemma 5.3.5), und andererseits, dass $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_\Gamma} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Gamma)$ für alle $j \in \{1,\ldots,n\}$. Nach Lemma 5.3.9 erfüllt K_Γ somit bereits die Eigenschaft (BK1).

Als nächstes wollen wir zeigen, dass $K_\Gamma(\lambda,\lambda) \in \mathcal{L}(\ell_k^2)$ für alle $\lambda \in \Delta_w$ invertierbar ist. Sei dazu $\lambda \in \Delta_w$ beliebig aber fest gewählt. Ist $x \in \ker K_\Gamma(\lambda,\lambda)$, so gilt

$$0 = \left\langle K_\Gamma(\lambda,\lambda)x, x\right\rangle_{\ell_k^2} = \left\langle \Gamma(\lambda)^*\Gamma(\lambda)x, x\right\rangle_{\ell_k^2} = \left\langle \Gamma(\lambda)x, \Gamma(\lambda)x\right\rangle_H = \left\|\Gamma(\lambda)x\right\|_H^2,$$

woraus $x = 0$ folgt, da $\ker \Gamma(\lambda) = \{0\}$ gilt. Weil $\operatorname{ran} \Gamma(\lambda) = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}$ abgeschlossen ist, gilt $(\ker \Gamma(\lambda)^*)^\perp = \operatorname{ran} \Gamma(\lambda)$, also $\operatorname{ran} \Gamma(\lambda)^* = \operatorname{ran} \Gamma(\lambda)^*|_{\operatorname{ran}\Gamma(\lambda)} = \operatorname{ran} K_\Gamma(\lambda,\lambda)$. Nun ist aber $\{0\} = \ker \Gamma(\lambda) = (\operatorname{ran} \Gamma(\lambda)^*)^\perp$, womit $\operatorname{ran} \Gamma(\lambda)^*$ dicht liegt in ℓ_k^2. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Bild ist $\operatorname{ran} \Gamma(\lambda)^*$ aber abgeschlossen, da $\operatorname{ran} \Gamma(\lambda)$ abgeschlossen ist. Insgesamt erhält man $\operatorname{ran} K_\Gamma(\lambda,\lambda) = \ell_k^2$. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist $K_\Gamma(\lambda,\lambda)$ somit stetig invertierbar.

Um den Beweis von Punkt (a) abzuschließen, reicht es laut Lemma 5.3.20 zu zeigen, dass der Operator $\mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_\Gamma})^*-\lambda}$ auf $\{K(\lambda,\cdot)x : x \in \ell_k^2\}^\perp$ nach unten beschränkt ist. Dazu bemerken wir zunächst, dass aus

$$T_j - \lambda_j I_H = U_\Gamma^* \left[(M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_\Gamma})^* - \lambda_j I_{\mathcal{H}_\Gamma}\right] U_\Gamma, \quad \forall\, j \in \{1,\ldots,n\} \tag{5.22}$$

die Gültigkeit von $U_\Gamma\big(\ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}\big) = \ker \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_\Gamma})^*-\lambda}$ folgt und damit

$$\begin{aligned}\{K(\lambda,\cdot)x : x \in \ell_k^2\} &= \{\Gamma(\cdot)^*\Gamma(\lambda)x : x \in \ell_k^2\} = \{U_\Gamma\Gamma(\lambda)x : x \in \ell_k^2\} = \\ &= U_\Gamma\big(\operatorname{ran} \Gamma(\lambda)\big) = U_\Gamma\big(\ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda}\big) = \ker \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_\Gamma})^*-\lambda}\end{aligned}$$

gilt. Weiters folgt aus (5.22), dass $\operatorname{ran} \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_\Gamma})^*-\lambda} \subseteq \mathcal{H}_\Gamma^n$ abgeschlossen ist, da $\operatorname{ran} \mathfrak{D}_{\mathbf{T}-\lambda} \subseteq H^n$ laut Voraussetzung abgeschlossen ist. Nach Lemma 5.3.19 ist der Operator $\mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_\Gamma})^*-\lambda}$ also auf $(\ker \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_\Gamma})^* - \lambda})^\perp$ nach unten beschränkt. Laut Lemma 5.3.20 erfüllt K_Γ somit auch die Forderung (BK2).

(*b*) Sei $K : \Omega \times \Omega \to \mathcal{L}(\ell_k^2)$ ein verallgemeinerter Bergman-Kern und $w \in \Omega$ beliebig. Sei wieder $r > 0$, sodass $\overline{D_r^n(w)} \subseteq \Omega$ und $\Delta_w := D_r^n(w)$. Dann existiert laut Lemma 5.3.22 ein koanalytischer RKHS $\mathcal{H}_w$, sodass $K|_{\Delta_w \times \Delta_w}$ der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}_w$ ist und $M_{\overline{z}_j}|_{\mathcal{H}_w} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_w)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Nach Lemma 5.3.22 ist für $\lambda \in \Delta_w$

$$\ker \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^* - \lambda} = \{K(\lambda, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in \ell_k^2\},$$

und $\operatorname{ran} \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^* - \lambda} \subseteq \mathcal{H}_w^n$ abgeschlossen. Mit Lemma 5.3.5 folgt daraus

$$\operatorname{cls} \bigcup \{\ker \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^* - \lambda} : \lambda \in \Delta\} = \operatorname{cls}\{K(\lambda, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in \ell_k^2, \lambda \in \Delta\} = \mathcal{H}_w,$$

womit die Punkte (A1) und (A3) erfüllt sind. Für den Punkt (A2) betrachten wir für $\lambda \in \Delta_w$ das Punkauswertungfunktional $E(\lambda) : \mathcal{H}_w \to \ell_k^2 : f \mapsto f(\lambda)$ und definieren die Abbildung

$$\Gamma_w : \left\{ \begin{array}{ccc} \Delta & \to & \mathcal{L}(\ell_k^2, \mathcal{H}_w) \\ \lambda & \mapsto & E(\lambda)^*. \end{array} \right.$$

Diese ist laut Lemma 5.3.5 analytisch und für $\lambda \in \Delta_w$ gilt

$$\begin{aligned} &\ker \Gamma(\lambda) = \ker E(\lambda)^* = \ker K(\lambda, \lambda) = \{0\} \quad \text{und} \\ &\operatorname{ran} \Gamma(\lambda) = \{E(\lambda)^* x : x \in \ell_k^2\} = \{K(\lambda, \cdot)x|_{\Delta_w} : x \in \ell_k^2\} = \ker \mathfrak{D}_{(\mathbf{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^* - \lambda}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist also $(\mathcal{M}_{\overline{z}}|_{\mathcal{H}_w})^* \in \mathcal{A}(\Delta_w)$. □

Bemerkung 5.3.24. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet. Ist $\mathbf{T} \in \mathcal{B}_k^n(\Omega)$, so existiert laut Satz 5.1.4 zu jedem $w \in \Omega$ eine analytische Funktion $\Gamma_w : \Delta_w \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^k, H)$, sodass

$$\operatorname{ran} \Gamma_w(\lambda) = \ker \mathfrak{D}_{\mathbf{T} - \lambda} \quad \text{und} \quad \Gamma_w(w)^* \Gamma_w(\lambda) = I_{\mathbb{C}^k}, \quad \forall\, \lambda \in \Delta_w.$$

Setzt man wieder $K_{\Gamma_w}(\lambda, \mu) := \Gamma_w(\mu)^* \Gamma_w(\lambda)$ für alle $\lambda, \mu \in \Delta_w$, so ist K_{Γ_w} also selbst eine Normalisierung von K_{Γ_w} bei w. Zwei n-Tupel $\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{T}} \in \mathcal{B}_k^n(\Omega)$ (mit $k \in \mathbb{N}$) sind also laut Lemma 5.3.16 genau dann komponentenweise unitär äquivalent, wenn es einen Punkt $w \in \Omega$ und einen unitären Operator $W \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k)$ gibt, sodass $K_{\tilde{\Gamma}_w}(\lambda, \mu) = W^* K_{\Gamma_w}(\lambda, \mu) W$ für alle λ, μ in einer gewissen Umgebung von w, wenn man Γ_w und $\tilde{\Gamma}_w$ so wählt wie in Satz 5.1.4.

Literaturverzeichnis

[1] COWEN, Michael J. ; DOUGLAS, Ronald G.: Complex geometry and operator theory. In: *Acta Math.* 141 (1978), Nr. 3-4, S. 187–261. – ISSN 0001-5962

[2] COWEN, Michael J. ; DOUGLAS, Ronald G.: Operators possessing an open set of eigenvalues. In: *Functions, series, operators, Vol. I, II (Budapest, 1980)* Bd. 35. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1983, S. 323–341. – ISBN 0-444-86508-X

[3] CURTO, Raúl E. ; SALINAS, Norberto: Generalized Bergman kernels and the Cowen-Douglas theory. In: *Amer. J. Math.* 106 (1984), Nr. 2, S. 447–488. – ISSN 0002-9327

[4] HEUSER, Harro: *Funktionalanalysis: Theorie und Anwendung.* 3., durchgesehene Auflage. Stuttgart : B. G. Teubner, 1992. – ISBN 3-519-22206-X

[5] KALTENBÄCK, Michael: *Analysis auf Mannigfaltigkeiten.* – Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 2010/2011

[6] KALTENBÄCK, Michael: *Funktionalanalysis 2.* – Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 2011/2012

[7] KALTENBÄCK, Michael ; PARAPATITS, Lukas: *Harmonische Funktionen.* – Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 2009/2010

[8] KLEINERT, Maximilian: *Ausgewählte Kapitel aus der Operatortheorie.* – Skriptum zur Vorlesung von Michael Kaltenbäck

[9] KRANTZ, Steven G.: *Function theory of several complex variables.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001. – Reprint of the 1992 edition. – ISBN 0-8218-2724-3

[10] WELLS, Raymond O.: *Graduate Texts in Mathematics.* Bd. 65: *Differential Analysis on Complex Manifolds.* Third Edition. New York : Springer, 2008. – With a new appendix by Oscar Garcia-Prada. – ISBN 978-0-387-73891-8

[11] WORACEK, Harald: *Komplexe Analysis.* – Skriptum zur Vorlesung im Sommersemester 2011