

DISSERTATION

Wellige Wassersprünge bei nicht voll ausgebildeter turbulenter Zuströmung

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der technischen Wissenschaften unter der Leitung von

Em.O.Univ.Prof. Dr. Dr.h.c. Wilhelm Schneider
E322
Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

Mag. Richard JURISITS
Matr.-Nr. 8800043
Pappenheimgasse 54-56/2/26, A-1200 Wien

Wien, 14. Juni 2012

Danksagung

Der unbezweifellich größte Dank für das Zustandekommen und den erfolgreichen Abschluß der vorliegenden Arbeit gebührt meinem Betreuer Prof. Wilhelm Schneider. Er hat nicht nur die wesentlichen Ideen auf- und eingebracht, sondern mich auch im Zuge des Arbeitsprozesses in die Schule der seriösen und effektiven Grundlagenforschung eingeweiht. Neben dem Fachwissen über die Strömungsmechanik im Allgemeinen und den welligen Wassersprung im Besonderen war er es, der mir vorbildhaft beigebracht hat, wie wissenschaftliches Arbeiten funktioniert. Anhand seiner intensiven Betreuung konnte man lernen, wie Personalführung bei einer produktiven, leistungsorientierten Zusammenarbeit aussehen soll. Aus diesem Grund war die zeitweise langwierige und mühevoll Arbeit letztlich sehr lehrreich und mit viel Freude erfüllt.

Großen Dank möchte ich auch Prof. Alfred Kluwick aussprechen, der freundlicherweise die Aufgabe des Zweitbegutachters übernommen hat.

Ein wesentlicher Dank gebührt aber auch meinen Kollegen des Instituts für Strömungsmechanik, die zum Teil sehr wichtige Anstöße zu dieser Arbeit geleistet haben, mich bei Problemen der Numerik oder des Layouts unterstützt oder sich durch Diskussionen eingebracht haben. Hier ist besonderes Prof. Herbert Steinrück hervorzuheben, der mit dem Entstehungsprozess der vorliegenden Arbeit immer eng verbunden war und mich auf verschiedenfache Weise tatkräftig unterstützt hat. Weiters seien erwähnt: Dr. Thomas Loimer, DI Christoph Buchner, Dr. Ulrich Schoisswohl, DI Guido Fuchs, DI Edwin Oswald, Dr. Roland Aigner, DI Thomas Müllner und DI Markus Müllner.

Dank gebührt weiters der freundlichen finanziellen Unterstützung durch Androsch International Management Consulting (AIC).

Richard Jurisits

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	iv
Abstract	v
Symbolverzeichnis	vi
1 Einleitung	1
2 Grundgleichungen und Randbedingungen für große Reynolds-Zahlen, lange Wellenlängen und Froude-Zahlen nahe 1	7
2.1 Problemstellung	7
2.2 Grundgleichungen und Randbedingungen für große Reynolds-Zahlen und lange Wellenlängen	8
2.3 Entwicklung für Froude-Zahlen nahe 1	11
2.4 Diskussion der Bestimmungsgleichung für die Störung der freien Oberfläche	15
3 Allgemeine Eigenschaften und Analyse der Bestimmungsgleichung (2.52) bzw. (2.54) für die Störung der freien Oberfläche	18
3.1 Einfache analytische Lösungen	18
3.2 Verhalten in der Nähe des Referenzpunktes ($X \rightarrow 0$)	19
3.3 Verhalten weit stromab ($X \rightarrow \infty$)	20
3.4 Äquivalenz mit System von 3 Differentialgleichungen erster Ordnung . .	23
3.5 Algebraische Eigenschaften des Polynoms $q(H; R, S)$	24
3.6 Einfluss der Anfangsbedingungen auf wellige Lösungen	25
3.7 Analytische Lösungen für $\beta=0$	26
3.8 Kriterium für wellige Lösungen	28
3.9 Transformation auf Γ -freie Gleichungen	30
3.10 Äquivalenz der transformierten Gleichung (3.59) mit System von 3 Differentialgleichungen erster Ordnung und transformierte Anfangsbedingungen	32
3.11 Algebraische Eigenschaften des Polynoms $q(\xi; \mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ und Kriterium für wellige Lösungen	33
3.12 Hydraulische Theorie und Vergleich mit quasi-eindimensionaler Näherung	34
4 Numerische Lösungen der Bestimmungsgleichung für die Störung der freien Oberfläche und Vergleich mit hydraulischer Theorie	39
4.1 Lösungen mit Übergang zu horizontalem Flüssigkeitsspiegel	39

4.2	Lösungen mit beschränktem Gültigkeitsbereich	43
4.3	Lösungen mit Übergang zu voll ausgebildeter Abströmung	45
5	Lösungen der Bestimmungsgleichung für die Störung der freien Oberfläche mittels der Methode der mehrfachen Variablen	48
5.1	Versagen der regulären Entwicklung nach β	48
5.2	Allgemeine Lösung	49
5.3	Diskussion der allgemeinen Lösung	54
5.4	Asymptoten für $X \rightarrow \infty$	63
5.5	Elimination der Ortskoordinate, Differentialgleichung für die Amplitude als Funktion der mittleren Aus- lenkung (Phasenebene)	67
5.6	Universelle Lösungen der Γ -freien Gleichungen	69
5.7	Universelles Diagramm der Anfangsbedingungen für wellige Lösungen . .	75
6	Vergleich der Ergebnisse der asymptotischen Theorie mit Messergebnissen	83
6.1	Bestimmung der Parameter und Anfangsbedingungen der asymptotischen Theorie aus experimentellen Daten	83
6.2	Auslenkung der Oberfläche als Funktion der Längskoordinate	89
6.3	Schubspannungsprofil	99
	Zusammenfassung	102
	Literaturverzeichnis	105
	Lebenslauf	109

Kurzfassung

Wir betrachten eine turbulente, ebene Strömung mit freier Oberfläche in einem um einen kleinen Winkel α gegen die Horizontale geneigten Kanal in leicht überkritischem Ausgangszustand $Fr_r = 1 + \frac{3}{2}\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, welche die Ausbildung eines welligen Wassersprunges ermöglicht. In diesem Fall tritt eine wellige Oberflächenstruktur mit in Strömungsrichtung langsam abfallenden Amplituden und Wellenlängen auf.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Beschreibung dieser Strömung im Rahmen einer asymptotischen Theorie, wobei von dem überkritischen Zuströmzustand als Referenzzustand (Grundzustand) ausgegangen wird. Dieser Referenzströmungszustand kann beliebig, insbesondere auch nicht voll ausgebildet sein, solange die Abweichung von einem voll ausgebildeten Zustand klein ist, so wie dies in zahlreichen Experimenten der Fall ist. Eine asymptotische Entwicklung der Grundgleichungen nach dem Parameter ε , die die Notwendigkeit einer Turbulenzmodellierung vermeidet und dennoch den Einfluss schwacher turbulenter Dissipation berücksichtigt, führt zu folgender Bestimmungsgleichung für die Störung der Flüssigkeitshöhe H_1 als Funktion der Längskoordinate X :

$$H_{1XXX}(X) + [H_1(X) - 1] H_{1X}(X) - \beta H_1(X) + \gamma = 0.$$

Die dimensionslosen Konstanten β bzw. γ beschreiben die turbulente Dissipation bzw. den Antrieb infolge einer Abweichung des Referenzzustandes von dem der voll ausgebildeten Strömung.

Der Hauptteil der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit dem Erfassen des vollständigen Lösungsfeldes dieser Gleichung und der Bestimmung von Kriterien für Anfangsbedingungen und Parameterwerte, bei denen ein welliger Wassersprung auftritt.

Eine numerische Analyse der obigen Bestimmungsgleichung ergibt, dass abströmseitig drei verschiedene Lösungstypen möglich sind, unter anderem auch Lösungen, die nicht beliebig weit stromab fortgesetzt werden können. Im Rahmen einer Entwicklung der Gleichung nach β mithilfe der Methode der mehrfachen Variablen werden unterschiedliche Lösungsverhalten erklärt und Bedingungen für das jeweilige Auftreten der drei Lösungstypen abgeleitet. Das wesentliche Ergebnis ist ein vom Parameter γ unabhängiges, universelles Phasendiagramm, das alle möglichen Lösungstypen erfasst, sowie ein vom Parameter γ unabhängiges Diagramm für die Anfangsbedingungen. Mit diesen beiden Diagrammen lassen sich das Auftreten und der Verlauf welliger Lösungen vorhersagen. Im Vergleich mit dem Experiment werden gute Übereinstimmungen zwischen der asymptotischen Theorie und Labormessungen erzielt. Insbesondere wird der von der Theorie vorhergesagte Übergang zu voll ausgebildeter Strömung weit stromab infolge eines welligen Wassersprunges bei bestimmten, nicht voll ausgebildeten Zuströmbedingungen im Experiment bestätigt.

Abstract

We consider a turbulent, two-dimensional free-surface flow in a channel with small slope α in a slightly supercritical initial state $Fr_r = 1 + \frac{3}{2}\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, allowing for the formation of an undular hydraulic jump. If this is the case, the surface develops a wavy shape with amplitudes and wave lengths that decay but slowly in the main flow direction.

The present work concerns the description of this flow on the basis of an asymptotic theory, starting from the supercritical state of the oncoming flow as a reference state (ground state). This reference state may be chosen arbitrarily, in particular also as a non-fully developed state, provided the deviation from a fully developed state is small, as this is the case in many experiments. An asymptotic expansion of the basic equations in terms of the parameter ε , thereby avoiding the necessity of turbulence modelling but accounting for the effect of weak turbulent dissipation, leads to the following master equation for the disturbance of the surface height H_1 as a function of the downstream coordinate X :

$$H_{1XXX}(X) + [H_1(X) - 1] H_{1X}(X) - \beta H_1(X) + \gamma = 0.$$

The non-dimensional constants β and γ describe the turbulent dissipation and the forcing due to deviations from fully-developed flow in the reference state, respectively.

The main part of the present work is devoted to capturing the complete field of solutions of this equation and the derivation of criteria for undular jumps to occur.

Numerical solutions of the above equation show that downstream three different cases of solutions are possible. Among those are solutions which fail to exist arbitrarily far downstream. A multiple scales expansion of the master equation in terms of β is performed. Two different length scales are introduced, accounting for the slowly changing amplitudes and wave lengths as well as for the rapidly changing surface undulations. It is explained why some solutions fail to exist far downstream. Conditions for the occurrence of each of the three types of solutions are derived. The major outcomes of the asymptotic theory is a universal phase diagram independent of the parameter γ containing all possible types of solutions, and a γ -independent diagram for the initial conditions. With both diagrams it is possible to predict the occurrence and the progress of an undular solution.

In comparison with experimental data good agreement between the asymptotic theory and laboratory measurements is found. In particular the predicted transition to fully developed flow far downstream in course of an undular hydraulic jump resulting from specific non fully-developed conditions of the oncoming flow is confirmed by experiment.

Symbolverzeichnis

Lateinische Buchstaben

A, B	Kopplungsparameter	[-]	Seite 12
b	transformierter Parameter, Dämpfung durch turbulente Dissipation	[-]	Seite 31
\bar{b}	Kanalbreite	[m]	Seite 84
\bar{C}_0, \bar{C}_1	Grundzustand und höhere Ordnungen der asymptotischen Entwicklung von \bar{C} nach ε	[-]	Seite 14
$\tilde{\tilde{C}}$	konstante Hilfsgröße	[-]	Seite 74
\tilde{C}	konstante Hilfsgröße	[-]	Seite 19
\tilde{C}	konstante Hilfsgröße	[-]	Seite 74
$\tilde{\tilde{C}}_1, \tilde{\tilde{C}}_2, \dots$	konstante Hilfsgrößen	[-]	Seite 19
$\tilde{C}, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots$	konstante Hilfsgrößen	[-]	Seite 19
C	konstante Hilfsgröße	[-]	Seite 64
c	konstante Hilfsgröße	[-]	Seite 18
C^+, \bar{C}	Hilfsgrößen im Geschwindigkeitsüberlappungsgesetz	[-]	Seite 10
c_f	Kanalbodenreibungsbeiwert	[-]	Seite 34
C	Kurve in den Diagrammen Abbildung 5.6 und 5.7	[-]	Seite 72
\hat{D}	Hilfsgrösse im asymptotischen Widerstandsgesetz	[-]	Seite 84
\mathfrak{D}	Diskriminante des Polynoms q	[-]	Seite 33
\mathfrak{d}	dimensionslose Amplitude der Höhenglenkungen (transformierte Variable)	[-]	Seite 70
D	Diskriminante des Polynoms q	[-]	Seite 24
D_{-1}, D_0, D_1	Punkte in den Diagrammen Abbildung 5.6 und 5.7	[-]	Seite 72
D_h	hydraulischer Durchmesser	[m]	Seite 84
Fr	Froude-Zahl	[-]	Seite 10
Fr_0	Kennzahl in der hydraulischen Näherung	[-]	Seite 34
Fr_{τ}	Froude-Zahl am Referenzpunkt, gebildet mit der Schubspannungsgeschwindigkeit	[-]	Seite 10
$f(s, \zeta), g(s, \zeta)$	Hilfsfunktionen	[-]	Seite 76
g	Schwerebeschleunigung	[m/s ²]	Seite 9

Symbolverzeichnis

\mathfrak{S}_1	transformierte dimensionslose Flüssigkeitshöhenstörung in erster Ordnung der asymptotischen Entwicklung nach ε	[-]	Seite 31
$\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3$	geordnete Nullstellen des Polynoms q	[-]	Seite 33
$\mathfrak{S}_{10}, \mathfrak{S}_{11}, \dots$	Grundzustand und höhere Ordnungen von \mathfrak{S}_1 (transformierte Variable) in der Entwicklung nach der Methode der mehrfachen Variablen	[-]	Seite 69
\mathfrak{h}_m	dimensionslose mittlere Höhengauslenkung (transformierte Variable)	[-]	Seite 70
$\tilde{H}^{(1)}, \tilde{H}^{(2)}, \dots$	höhere Ordnungen der Entwicklung von H_1 für $X \rightarrow \infty$	[-]	Seite 20
$\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3$	komplexe (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) und reelle (\tilde{h}_3) Nullstellen des Polynoms q	[-]	Seite 28
$\tilde{H}_{10}, \tilde{H}_{11}, \dots$	Grundzustand und höhere Ordnungen von H_1 in der regulären Entwicklung nach ε	[-]	Seite 48
H	dimensionslose Flüssigkeitshöhe	[-]	Seite 9
h	Flüssigkeitshöhe, vom Kanalboden aus gemessen	[m]	Seite 9
H_0, H_1, H_2	Grundzustand und höhere Ordnungen der dimensionslosen Flüssigkeitshöhe in der Entwicklung nach ε	[-]	Seite 12
h_1, h_2, h_3	geordnete Nullstellen des Polynoms q	[-]	Seite 23
H_1^{\max}, H_1^{\min}	lokales Maximum bzw. Minimum von H_1	[-]	Seite 74
$H_{1,p}$	Partikulärlösung der linearisierten Gleichung (2.54)	[-]	Seite 19
H_{10}, H_{11}, \dots	Grundzustand und höhere Ordnungen von H_1 in der Entwicklung nach der Methode der mehrfachen Variablen	[-]	Seite 50
h_{hyd}	Flüssigkeitshöhe in der hydraulischen Näherung	[m]	Seite 34
h_m	dimensionslose mittlere Höhengauslenkung	[-]	Seite 68
$H_{\text{hyd}1}$	dimensionslose Flüssigkeitshöhenstörung in der hydraulischen Näherung	[-]	Seite 36
H_{q1}	dimensionslose Flüssigkeitshöhenstörung in der quasi-eindimensionalen Näherung	[-]	Seite 36
$K(m)$	vollständiges elliptisches Integral 1.Art mit dem Parameter m	[-]	Seite 27
k	Hilfsparameter	[-]	Seite 75
l	charakteristische Wellenlänge	[m]	Seite 9
m	Parameter	[-]	Seite 69
\bar{m}	Parameter	[-]	Seite 26
\vec{n}	Einheitsvektor normal auf die Flüssigkeitsoberfläche	[-]	Seite 11
n	„Manningscher Koeffizient“	[-]	Seite 85
O	Landausches Ordnungssymbol	[-]	Seite 11

Symbolverzeichnis

o	Landausches Ordnungssymbol	[-]	Seite 20
P	dimensionsloser Flüssigkeitsdruck	[-]	Seite 9
p	Flüssigkeitsdruck	[Pa]	Seite 9
$q(\mathfrak{h}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S})$	Polynomfunktion der transformierten \mathfrak{h} , mit den Parametern \mathfrak{R} und \mathfrak{S}	[-]	Seite 33
$q(H, R, S)$	Polynomfunktion von H , mit den Parametern R und S	[-]	Seite 23
$\mathfrak{R}(\mathfrak{x})$	transformierte Hilfsfunktion	[-]	Seite 32
$\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \dots$	Grundzustand und höhere Ordnungen von \mathfrak{R} (transformierte Variable) in der Entwicklung nach der Methode der mehrfachen Variablen	[-]	Seite 69
Re_D	Reynoldszahl, gebildet mit dem hydraulischen Durchmesser D_h	[-]	Seite 84
Re_{τ}	Reynolds-Zahl, gebildet mit der Schubspannungsgeschwindigkeit am Referenzpunkt	[-]	Seite 10
Re_{τ}	Reynolds-Zahl, gebildet mit der Schubspannungsgeschwindigkeit	[-]	Seite 10
$\tilde{R}_0, \tilde{R}_1, \dots$	Grundzustand und höhere Ordnungen von R in der regulären Entwicklung nach ε	[-]	Seite 48
$R(X)$	Hilfsfunktion	[-]	Seite 23
R_0, R_1, \dots	Grundzustand und höhere Ordnungen von R in der Entwicklung nach der Methode der mehrfachen Variablen	[-]	Seite 50
$\mathfrak{S}(\mathfrak{x})$	transformierte Hilfsfunktion	[-]	Seite 32
$\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1, \dots$	Grundzustand und höhere Ordnungen von \mathfrak{S} (transformierte Variable) in der Entwicklung nach der Methode der mehrfachen Variablen	[-]	Seite 69
$\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \dots$	Grundzustand und höhere Ordnungen von S in der regulären Entwicklung nach ε	[-]	Seite 48
s	ganzzahliger Parameter	[-]	Seite 31
$S(X)$	Hilfsfunktion	[-]	Seite 23
S_0, S_1, \dots	Grundzustand und höhere Ordnungen von S in der Entwicklung nach der Methode der mehrfachen Variablen	[-]	Seite 50
$-\overline{u'v'}$	kinematische Reynoldssche Scheinschubspannung, dividiert durch die Flüssigkeitsdichte ρ	$[\text{m}^2/\text{s}^2]$	Seite 9
ΔU	dimensionsloser Geschwindigkeitsdefekt im Referenzquerschnitt	[-]	Seite 12
\bar{u}_r	volumetrisch über den Referenzquerschnitt gemittelte Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung	[m/s]	Seite 9
$\overline{u'^2}$	kinematische Reynoldssche Scheinnormalspannung, dividiert durch die Flüssigkeitsdichte ρ	$[\text{m}^2/\text{s}^2]$	Seite 9

Symbolverzeichnis

U, u	dimensionslose bzw. dimensionsbehaftete Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung	$[-, \text{m/s}]$	Seite 9
U_0, U_1, U_2	Grundzustand und höhere Ordnungen der dimensionslosen Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung in der Entwicklung nach ε	$[-]$	Seite 12
U_S	dimensionslose Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung an der Flüssigkeitsoberfläche	$[-]$	Seite 10
U_τ	dimensionslose Schubspannungsgeschwindigkeit	$[-]$	Seite 9
u_τ	Schubspannungsgeschwindigkeit	$[\text{m/s}]$	Seite 9
\dot{V}	Volumenstrom pro Kanalbreite	$[\text{m}^2/\text{s}]$	Seite 9
$\frac{\dot{V}}{v^2}$	kinematische Reynoldssche Scheinnormalspannung, dividiert durch die Flüssigkeitsdichte ρ	$[\text{m}^2/\text{s}^2]$	Seite 9
V, v	dimensionslose bzw. dimensionsbehaftete Geschwindigkeit normal zur Hauptströmungsrichtung	$[-, \text{m/s}]$	Seite 9
\mathfrak{X}	transformierte Koordinate in Hauptströmungsrichtung	$[-]$	Seite 31
X	dimensionslose Koordinate in Hauptströmungsrichtung	$[-]$	Seite 9
x	Koordinate in Hauptströmungsrichtung	$[\text{m}]$	Seite 9
X_0	konstante Verschiebung der Koordinate X	$[-]$	Seite 21
X_{m1}	dimensionslose X -Koordinate des ersten Wellenmaximums	$[-]$	Seite 99
Y	dimensionslose Koordinate normal zur Hauptströmungsrichtung	$[-]$	Seite 9
y	Koordinate normal zur Hauptströmungsrichtung	$[\text{m}]$	Seite 9
z, \tilde{z}	Hilfsvariable	$[-]$	Seite 21
Z_1	Punkt in den Diagrammen Abbildung 5.6 und 5.7	$[-]$	Seite 72
Z_{-1}^A	Punkt in den Diagrammen Abbildung 5.6 und 5.7	$[-]$	Seite 73
Z_{-1}^F	Punkt in den Diagrammen Abbildung 5.6 und 5.7	$[-]$	Seite 72

Griechische Buchstaben

α	Neigungswinkel des Kanalbodens gegenüber der Horizontalen	$[-]$	Seite 7
β	Parameter, Dämpfung durch turbulente Dissipation	$[-]$	Seite 15

Symbolverzeichnis

Δ	dimensionslose Amplitude der Höhenauslenkungen	[-]	Seite 68
δ	Streckungsparameter	[-]	Seite 9
ε	Störparameter, Abweichung vom kritischen Strömungszustand	[-]	Seite 12
η	Transformierte Variable	[-]	Seite 76
η_0	Anfangsbedingung der transformierten Variablen η	[-]	Seite 76
Γ	Parameter, Abweichung vom voll ausgebildeten Strömungszustand im Referenzquerschnitt	[-]	Seite 17
γ	Parameter, Abweichung vom voll ausgebildeten Strömungszustand im Referenzquerschnitt	[-]	Seite 15
κ	Von Kàrmànsche Konstante	[-]	Seite 10
λ	konstante Hilfsgröße	[-]	Seite 19
ν	kinematische Viskosität	$[\text{m}^2/\text{s}]$	Seite 10
Ω	langsam veränderliche Ortsvariable in der Entwicklung nach der Methode der mehrfachen Variablen	[-]	Seite 49
ω	Hilfsfunktion in der Entwicklung nach der Methode der mehrfachen Variablen	[-]	Seite 49
ρ	Flüssigkeitsdichte	$[\text{kg}/\text{m}^3]$	Seite 9
τ, τ_w	kinematische Reynoldssche Scheinschubspannung bzw. Wandschubspannung	$[Pa]$	Seite 9
θ	Winkel zwischen Normaleneinheitsvektor auf die Flüssigkeitsoberfläche und y -Achse	[-]	Seite 11
ϑ	Hilfsvariable	[-]	Seite 54
$\tilde{\zeta}_0, \tilde{\eta}_0$	Transformierte von ζ_0 bzw. η_0	[-]	Seite 81
ζ	Transformierte Variable	[-]	Seite 75
ζ_0	Anfangsbedingung der transformierten Variablen ζ	[-]	Seite 76

hochgestellte Indizes

—	zeitgemittelte Größe	Seite 9
'	mittlere Abweichung einer Größe vom zeitgemittelten Wert	Seite 9

Indizes

r	Position im Referenzquerschnitt	Seite 9
S	Position an der Flüssigkeitsoberfläche	Seite 10
W	Position an der Kanalwand	Seite 9

Kapitel 1

Einleitung

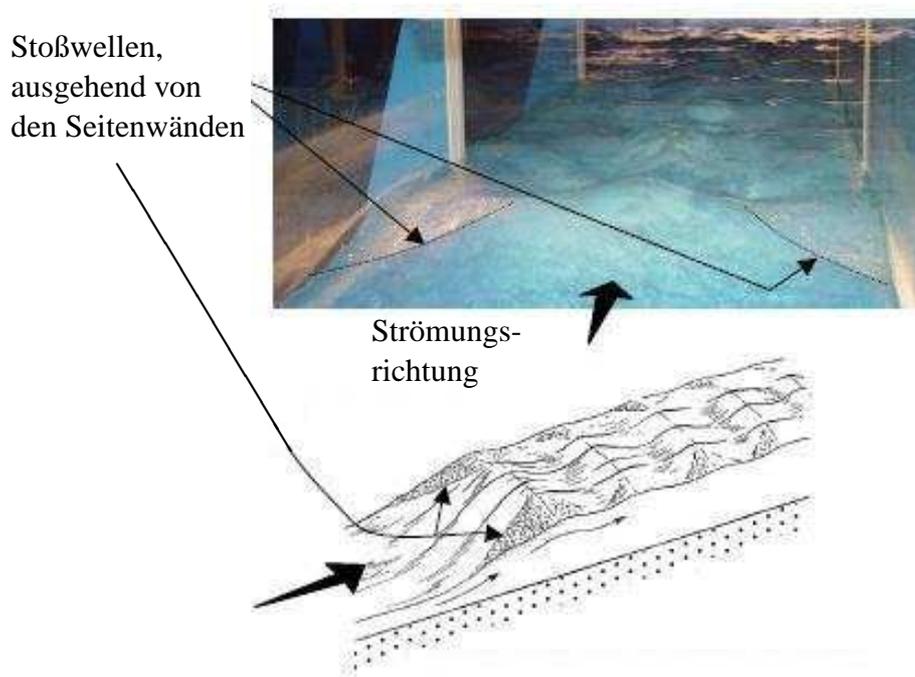


Abbildung 1.1: Welliger Wassersprung in einem Laborexperiment [44], $Fr = 1,49$.

Wir wenden uns in der vorliegenden Arbeit der Beschreibung eines welligen Wassersprunges (welligen hydraulischen Sprunges) in einer turbulenten Strömung zu. Dieses Phänomen tritt in Kanalströmungen einer inkompressiblen Flüssigkeit mit freier Oberfläche auf, bei der die Froude-Zahl knapp über dem Wert 1 liegt, siehe Abbildung 1.1. Dabei nimmt die Oberfläche ab einer bestimmten Stelle eine wellige Form an, die stationär ist, wobei die charakteristische Wellenlänge viel grösser und die Amplituden viel kleiner sind als die Flüssigkeitstiefe. Die Amplituden und Wellenlängen nehmen in Hauptströmungsrichtung langsam ab. Die Strömung geht dabei von einem überkritischen, schießenden Zustand vor dem Sprung in einen unterkritischen Zustand weit stromab über, wobei kinetische Energie dissipiert wird. Die mittlere Flüssigkeitshöhe weit stromab ist dabei grösser als die der Zuströmung, siehe [15, 22, 55].

Ausgelöst wird ein welliger Sprung beispielsweise durch Veränderung der Boden- oder Wandreibung, durch Veränderung der Kanalneigung, durch am Boden angebrachte Hindernisse oder durch Kanalverengungen. In Laborexperimenten werden die Strömungsverhältnisse meist weit stromab mit einer von oben in die Flüssigkeit eintauchenden bzw. von unten aus dem Boden herausragenden, vertikal verschiebbaren Schneide, die als Schütz bzw. Wehr fungiert, geregelt. Diese Beeinflussung der unterkritischen Strömung breitet sich dann bis zum Anfangspunkt (engl. „toe“) des welligen Sprunges aus, während die überkritische Zuströmung davon unbeeinflusst bleibt. Auf diese Weise wird durch Verschieben der Schneide der Anfangspunkt des welligen Sprunges verschoben.

Wir werden in der hier vorliegenden Arbeit das Phänomen des welligen Wassersprunges zweidimensional betrachten. Wir sehen also von vorhandenen dreidimensionalen Effekten, resultierend von den Einflüssen der seitlichen Begrenzungswände, ab, von denen z.B. „Stosswellen“¹ ausgehen (siehe Abbildung 1.1). Die wesentliche Aufgabe besteht in der Bestimmung der Oberflächenkontur und des Strömungsfeldes bei gegebenen Zuströmbedingungen.

Wir orientieren uns bei der Formulierung unserer Überlegungen an vorangegangenen Arbeiten [26, 51, 52], in denen eine asymptotische Theorie für den welligen Wassersprung entwickelt wurde. Dabei wurde auf Ergebnisse der Turbulenzasymptotik [23, 1] zurückgegriffen, mithilfe derer Ergebnisse ermöglicht werden, die unabhängig von jeglicher Turbulenzmodellierung sind. Diesen großen Vorteil wollen wir auch in der hier vorliegenden Arbeit nützen. Eine gestraffte Version dieser Arbeit ist in [34] zu finden.

Die in [26, 51, 52] abgeleiteten Ergebnisse sind allerdings nur für Fälle gültig, bei denen die Strömung von einem asymptotisch weit stromauf vorhandenen voll ausgebildeten Zustand ausgeht. Weder bei in natürlichen Gewässern auftretenden welligen Wassersprüngen noch bei jenen in Laborexperimenten kann jedoch immer davon ausgegangen werden, dass die überkritische Zuströmung bei Entstehung des welligen Sprunges voll ausgebildet turbulent ist. In Experimenten (siehe z.B. [44, 43]) wird zwar näherungsweise ein solcher Zustand erreicht, indem die Zuströmung eine derart lange Vorlaufstrecke durchläuft, dass die vom Kanalboden vertikal zur Hauptströmungsrichtung sich aufbauende Grenzschicht bis zum Anfangspunkt des welligen Sprunges die Oberfläche erreicht hat, jedoch entspricht dies nicht der konventionellen Definition einer voll ausgebildeten Strömung, bei der sämtliche Zustandsgrößen der Strömung sich in Strömungsrichtung nicht mehr ändern. Wir werden daher in der vorliegenden Arbeit eine Theorie formulieren, die auch nicht voll ausgebildete Zuströmzustände zulässt. Die Abweichung vom voll ausgebildeten Zustand in einem gewissen Referenzzustand wird dabei ebenfalls asymptotisch formuliert, wobei ein zusätzlicher Parameter diese Abweichung quantifiziert. Für konkrete Fälle im Labor muss dieser aus den Zustandsgrößen der Strömung bestimmt werden. Der in den Arbeiten [26, 51, 52] angenommene, asymptotisch weit stromauf voll ausgebildete Zuströmzustand hat zur Konsequenz, dass die sich ergebenden Lösungen asymptotisch weit stromab nicht voll ausgebildet sind. Unter anderem ist es Gegenstand der vorliegenden Arbeit, mögliche nicht-voll ausgebildete Referenzzustände anzugeben, die auf voll ausgebildete Abströmzustände führen.

Weiters ist es Ziel dieser Arbeit, herauszufinden, wie gross die Störungen in einer leicht überkritischen, turbulenten Strömung sein müssen, sodass ein welliger Wassersprung aus-

¹„shock waves“ in der englischsprachigen Literatur; es handelt sich hierbei nicht um Stosswellen im Sinne der Gasdynamik.

gelöst wird.

In Kapitel 2 werden die Grundgleichungen und Randbedingungen aufgestellt und in einer asymptotischen Betrachtung für grosse Reynoldszahlen, große Wellenlängen und Froude Zahlen nahe bei 1 entwickelt, ohne dass auf eine Turbulenzmodellierung zurückgegriffen werden muss. Das Ergebnis ist eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung für die Störung der Flüssigkeitshöhe, mithilfe derer die wellige Oberflächenstruktur des Wassersprungs und andere Zustandsgrößen der Strömung bei weitestgehenden Freiheiten betreffend den Zuströmzustand beschrieben werden kann. Diese Bestimmungsgleichung wird in weiterer Folge gelöst und analysiert.

Kapitel 3 widmet sich den allgemeinen Eigenschaften dieser Bestimmungsgleichung, einfache Lösungen werden präsentiert und Umformulierungen vorgenommen. Weiters wird ein Vergleich mit der eindimensionalen hydraulischen Theorie angestellt.

Kapitel 4 widmet sich den numerischen Lösungen dieser Bestimmungsgleichung und den dabei auftretenden unterschiedlichen Lösungstypen.

Kapitel 5 befasst sich mit einer asymptotischen Lösung dieser Bestimmungsgleichung nach der Methode der mehrfachen Variablen. Dies hat den Zweck, einerseits das Auftreten der unterschiedlichen Lösungstypen besser verstehen zu können, andererseits aber auch dient sie dazu, Kriterien abzuleiten, die das Auftreten bestimmter Lösungstypen anhand der Wahl bestimmter Parameter vorhersagen. Universelle, d.h. von den eingehenden Parametern möglichst unabhängige Diagramme für die Lösungskurven und die Bedingungen, die zum Auftreten eines welligen Sprunges eines bestimmten Typs führen, werden präsentiert.

In den aktuelleren experimentellen Arbeiten zum welligen Wassersprung werden meist Oberflächen-, Geschwindigkeits-, Druck- und Reynoldssche Scheinspannungsprofile angegeben, aber auch Wellenlängen(veränderungen) und Amplituden(veränderungen).

Als gesicherte Ergebnisse gelten die folgenden:

Wellige Wassersprünge treten im Allgemeinen bis zu einer Obergrenze der Froude-Zahl von etwa 3 bis 4 auf [14]. Bei nahezu voll ausgebildeter Strömung im Ausgangszustand (in dem die Grenzschichtdicke die Flüssigkeitsoberfläche erreicht hat) beträgt die Obergrenze der Froude-Zahl für die Ausbildung eines welligen Wassersprunges 1,7 [43, 15, 54]. Die wellige Struktur der Oberfläche, deren Amplituden und die Wellenlängen in Hauptströmungsrichtung langsam abnehmen, ist weder rein sinusförmig noch rein von der Form der Cosinus-amplitudinis- (cn-) Funktion [3], [14]. Weiters steht fest, dass sich die Druckverteilung in der gesamten Strömung von der hydrostatischen nur gering unterscheidet. Die stärksten Abweichungen von einer hydrostatischen Verteilung treten dabei an den lokalen Maximal- und Minimalwerten der Flüssigkeitshöhe auf, siehe [13].

Reibungseinflüsse sind bei einem welligen hydraulischen Sprung sehr gering; es werden sogar wellige Sprünge in horizontalen Kanälen gemessen [43, 44, 45]. Andererseits sind Reibungseinflüsse auch nicht vollständig vernachlässigbar, da jeder (wellige und nicht wellige) Wassersprung mit Dissipation verbunden ist.

Abströmseitig erreicht die Strömung in vielen in der Natur und in hydraulischen Anwendungen auftretenden Fällen den sogenannten Zustand des „tiefen Wassers“, also einen im Mittel horizontalen Flüssigkeitsspiegel, wie er beispielsweise beim Münden der Kanalströmung in ein grosses stehendes Gewässer (See) weit stromab auftritt. Neueste experimentelle Untersuchungen [24] zeigen, dass auch ein Strömungszustand möglich ist, der abströmseitig auf eine im Mittel konstante, verglichen mit der Zuströmhöhe grössere Flüs-



Abbildung 1.2: Welliger Schwall (engl. „bore“) im Fluss Dordogne in Frankreich, aus [4]. Strömungsrichtung von rechts nach links, Ausbreitung des Schwalls von links nach rechts. Der wellige Schwall stellt einen bewegten welligen Sprung dar, im Gegensatz zum in der vorliegenden Arbeit ausschliesslich behandelten stationären welligen Sprung.

sigkeitshöhe führt und demnach asymptotisch weit stromab voll ausgebildet ist. Dies ist nur möglich, wenn die Strömung aus einem Zustand vor dem welligen Sprung resultiert, der *nicht* voll ausgebildet ist, da ohne Vernachlässigung von Reibungseffekten bei Erhaltung des Volumenstromes nur *eine* bestimmte Flüssigkeitshöhe im voll ausgebildeten Zustand möglich ist, vgl. [15]. Diesen interessanten Fall werden wir in der vorliegenden Arbeit ausführlich analysieren.

Von Seiten der theoretischen Beschreibung eines Wassersprunges wird die aus Anwendungen in der Gerinnehydraulik bekannte eindimensionale, sogenannte hydraulische Theorie [15, 55] verwendet. Diese Theorie beschränkt sich auf graduell veränderliche Strömungsverhältnisse und vermag schwach gekrümmte Oberflächenprofile einer Kanalströmung zu beschreiben. Sie versagt allerdings in der Nähe des kritischen Strömungszustandes, wo stärkere Oberflächenkrümmungen auftreten, und ist daher nicht imstande, Oberflächenkontur eines welligen Wassersprunges zu beschreiben.

Erste zweidimensionale Beschreibungen des welligen Wassersprunges gehen zurück bis ins Jahr 1935 [36]. In [36] wird ein welliger Oberflächenverlauf abgeleitet, der exakt periodisch mit abklingender Amplitude in Hauptströmungsrichtung ist. Diese exakte Periodizität widersprach allerdings den experimentellen Beobachtungen [8].

Ein wesentlicher Fortschritt wurde in der Arbeit [6] (1954) erzielt. Die Autoren stellen fest, dass im Rahmen einer zweidimensionalen, reibungsfreien Theorie kein (stetiger) Übergang von einem überkritischen auf einen unterkritischen Strömungszustand möglich ist. Eine solche Theorie lässt nur eine sogenannte Solitärwelle zu, die weit stromab keine Veränderung der Flüssigkeitshöhe gegenüber der des Zuströmzustandes ergibt. Dies ist, wie in [26] festgestellt wurde, eine Konsequenz der Erhaltung des Impulses und des Volumenstromes, da jeder hydraulische Sprung mit viskoser Dissipation verbunden ist.

In der Arbeit [33] (1972) wird die Analogie zwischen welligem Wassersprung und welligem Schwall (engl. „bore“, siehe Abbildung 1.2) benützt, um mit asymptotischen Methoden ein Bestimmungsgleichung für die Oberfläche eines welligen Wassersprunges in

laminarer Strömung abzuleiten. Für die Berücksichtigung von Turbulenzeffekten wird die Annahme eines nicht-Newtonschen Fließgesetzes vorgeschlagen, die wiederum auf eine Bestimmungsgleichung derselben mathematischen Struktur führt. Dass diese Annahme jedoch zu falschen Ergebnissen für turbulente Strömungen führt, wurde in [26] (2003) nachgewiesen. Bemerkenswert dabei ist, dass im Unterschied zu laminarer Strömung bei turbulenten Strömungen Dissipationsvorgänge nicht über einen Term beschrieben werden, der eine zweite Ableitung enthält (Burgers-Gleichung) [58, 40], sondern dass ein linearer Störterm turbulente Dissipationsvorgänge beschreibt. Setzt man diesen Störterm gleich Null, so ergibt sich die Solitärwellenlösung.

In den Arbeiten [5, 31, 41] wurden verschiedene ad-hoc-Approximationen vorgenommen, um die wellige Oberflächenstruktur zu erfassen. Die Ergebnisse bedienen sich starker Vereinfachungen der Grundgleichungen und sind infolgedessen nur von eingeschränkter Gültigkeit. In [5] wird die Oberflächenkontur eines welligen Wassersprunges auf Basis einer Energiegleichung bestimmt, die die turbulente Dissipation vernachlässigt. Dementsprechend wird die Dämpfung der Amplituden der welligen Oberfläche nicht wiedergegeben. In [31] wird die Flüssigkeitsoberfläche durch einen unstetigen Verlauf mit einem Übergang von einer Solitärwellenlösung auf eine cnoidale Wellenlösung („cn-wave“) beschrieben, der die dissipativen Energieverluste infolge des welligen Sprunges auf einen Punkt konzentriert. Dies hat zur Folge, dass der Einfluss der turbulenten Dissipation zwar über die ersten Wellenlängen korrekt erfasst wird, das Abklingverhalten weiter stromab jedoch damit nicht bestimmt werden kann.

In der semi-empirischen Beschreibung eines welligen Wassersprunges in der Arbeit [41] werden ausgehend von einer Energiegleichung Erweiterungen durch empirische Parameter berücksichtigt, um den Einfluss der vom Kanalboden herrührenden Scherkräfte und die damit verbundene Dissipation zu erfassen.

Ein anderer Zugang zur Beschreibung der welligen Oberfläche des turbulenten Wassersprunges stammt aus Überlegungen, bei denen nicht die Bewegungsgleichungen der Strömungsmechanik direkt den Ausgangspunkt bilden, sondern die Korteweg-De Vries-Gleichung oder die Burgers-Gleichung [58] als Modellgleichung den Ausgangspunkt bildet, die durch Hinzunahme verschiedener Störterme erweitert werden [51, 27, 20, 21, 19, 30, 42]. Die Arbeiten [42, 51] untersuchen Erweiterungen, die den Einfluss der Viskosität sowohl in laminarer als auch turbulenter Strömung erfassen sollen. Der Störterm für den turbulenten Fall führt dabei auf eine Korteweg-De Vries-Burgers-Gleichung. In den Arbeiten [20, 28, 42, 50, 29, 17, 18, 7, 16] werden Erweiterungen eingeführt, die eine mit der Strömung veränderliche Topographie („Hindernisse“) und/oder einen veränderlichen Bodenreibungsbeiwert beschreiben sollen. Die Arbeit [30] untersucht eine Erweiterung für die Beschreibung von Strömungen über ein stufenförmiges Hindernis nahe dem kritischen Punkt, in dem die Froude-Zahl gleich Eins ist. In [11] wird der Einfluss einer Stromlinienkrümmung untersucht. In der Arbeit [21] wird ein Modell für eine reibungsfreie Strömung untersucht, das das instationäre Verhalten eines welligen Schwallts beschreiben soll. Die Arbeit [2] betrachtet verallgemeinerte, zeitabhängige Erweiterungen der Burgers und der Korteweg-De Vries-Burgers-Gleichung und gibt aus gruppentheoretischen Überlegungen abgeleitete Lösungen an. Die Übersichtsartikel [27, 10] enthalten eine Zusammenfassung unterschiedlichster, in der Literatur untersuchter Erweiterungen der Korteweg-De Vries-Gleichung.

Arbeiten, die das Phänomen des welligen Wassersprunges mit den Mitteln der numeri-

schen Strömungsmechanik zu beschreiben versuchen, sind sehr rar. In [32] wurde unter Verwendung der kommerziellen Software CFX bei Ermittlung einer numerischen Lösung in der Nähe des kritischen Punktes von Komplikationen wie z.B. Konvergenzschwierigkeiten berichtet, dennoch wurden Ergebnisse erzielt, die über jene der eindimensionalen Theorie hinausgehen. Die berechneten lokalen Maximal- und Minimalwerte der Flüssigkeitshöhe stimmen jedoch nur begrenzt mit den in [44] angegebenen, im Experiment beobachteten Werten überein.

Kapitel 2

Grundgleichungen und Randbedingungen für große Reynolds-Zahlen, lange Wellenlängen und Froude-Zahlen nahe 1

2.1 Problemstellung

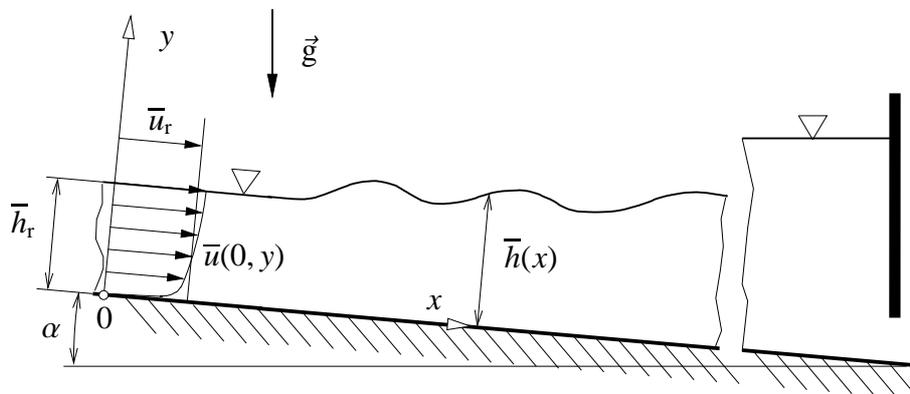


Abbildung 2.1: Welliger Wassersprung bei nicht voll ausgebildeter turbulenter Zuströmung.

Wir betrachten eine zweidimensionale, turbulente, im zeitlichen Mittel stationäre Kanalströmung mit einer freien Oberfläche wie in Abbildung 2.1 dargestellt. Der Kanalboden ist konstant um den kleinen Winkel α gegenüber der Horizontalen in Strömungsrichtung abwärts geneigt. Oberflächenspannungseffekte werden aufgrund einer geringen Krümmung der Oberfläche ebenso vernachlässigt wie dynamische Einflüsse durch die Bewegung der darüberliegenden Luft, deren Dichte viel kleiner als die der Flüssigkeit ist.

Die Reynolds-Zahl sei hinreichend groß, sodass das Strömungsfeld im Rahmen einer asymptotischen Betrachtung in eine Defektschicht und eine viskose Unterschicht unterteilt werden kann [23, 46, 1]. Die Dicke der viskosen Unterschicht nimmt dabei asymptotisch mit zunehmender Reynolds-Zahl ab. Für die viskose Unterschicht existiert eine uni-

verselle Lösung („universelles Wandgesetz“), daher betrachten wir ausschliesslich die turbulente Defektschicht. Die Geschwindigkeit an einer bestimmten Stelle y in einem Strömungsquerschnitt weicht dabei um einen kleinen Geschwindigkeitsdefekt von der mittleren Geschwindigkeit in diesem Strömungsquerschnitt ab. Mit zunehmender Reynolds-Zahl wird der Geschwindigkeitsdefekt kleiner.

In den folgenden Bezeichnungen kennzeichnen Querstriche über den Größen die Zeitmitteilung, Apostrophe kennzeichnen die Abweichung der Größen von diesem zeitgemittelten Zustand. Die zeitgemittelten Größen sind dabei zeitunabhängig.

Wir wählen einen Referenzpunkt vor oder am Anfangspunkt des welligen Sprunges, in dem der Ursprung des Koordinatensystems liegt. Alle physikalischen Größen werden für eine dimensionslosen Formulierung der Bestimmungsgleichungen auf die entsprechenden Werte im Referenzquerschnitt bezogen. In diesem Referenzquerschnitt bei $x = 0$ ist die Strömung nicht notwendigerweise voll ausgebildet turbulent, wenngleich die Abweichungen von einem voll ausgebildeten Zustand klein sein sollen. Diese Freiheit in der Festlegung des Referenzzustandes trägt der Tatsache Rechnung, dass weder bei in der Natur auftretenden noch den im Labor erzeugten welligen Wassersprüngen sichergestellt werden kann, dass die Strömung an einer bestimmten Stelle voll ausgebildet ist. Wie wir später in Kapitel 6 zeigen werden, ist bei Labormessungen [24] keineswegs garantiert, dass der experimentell ermittelte Kanalwiderstand ein Kräftegleichgewicht in der Strömung bei gegebener Kanalneigung hervorruft. Wir werden im Rahmen der folgenden asymptotischen Theorie präzisieren, wie im Referenzzustand die Abweichung von einem voll ausgebildeten turbulenten Strömungszustand quantifiziert werden kann und wie groß diese Abweichung im Rahmen dieser Theorie sein darf.

Ein grundsätzliches Problem bei der Behandlung turbulenter Strömungen stellt das Schliessungsproblem der Grundgleichungen in der nach Reynolds gemittelten Form dar, das üblicherweise zum Einsatz von Turbulenzmodellen zwingt. Es wird jedoch eine Stärke der hier entwickelten asymptotischen Theorie sein, dass die Ergebnisse frei von jeder Turbulenzmodellierung sind.

Ein welliger Wassersprung bei nahezu voll ausgebildeten Strömungsverhältnissen tritt bei Froude-Zahlen zwischen 1 bis maximal ca. 1,7 auf. Wir werden daher im Folgenden eine Theorie präsentieren, die für asymptotisch nahe bei 1 liegende Froude-Zahlen und überkritische Zuströmbedingungen im Referenzquerschnitt gültig ist.

2.2 Grundgleichungen und Randbedingungen für große Reynolds-Zahlen und lange Wellenlängen

Die in diesem Abschnitt vorgenommenen Umformungen und Entwicklungen der Grundgleichungen orientieren sich stark an der Vorgängerarbeit [26] und sind im Wesentlichen auch in [34] zu finden. Wir formulieren die Grundgleichungen in dimensionsloser Form

mittels folgender Festlegungen:

$$\bar{h}_r := \bar{h}(x=0), \quad \bar{u}_r := \frac{\dot{V}(x=0)}{\bar{h}_r}, \quad (2.1)$$

$$\delta := \frac{\bar{h}_r}{l}, \quad X := \delta \frac{x}{\bar{h}_r}, \quad Y := \frac{y}{\bar{h}_r}, \quad (2.2)$$

$$\bar{H}(X) := \frac{\bar{h}(x)}{\bar{h}_r}, \quad P(X, Y) := \frac{\bar{p}(x, y)}{\rho g \bar{h}_r}, \quad (2.3)$$

$$\bar{U}(X, Y) := \frac{\bar{u}(x, y)}{\bar{u}_r}, \quad \bar{V}(X, Y) := \delta^{-1} \frac{\bar{v}(x, y)}{\bar{u}_r}, \quad (2.4)$$

$$\tau(x, y) := -\rho \overline{u'v'}(x, y), \quad \tau_w(x) \equiv \rho u_\tau^2(x) := -\rho \overline{u'v'}(x, y)|_{y=0}, \quad (2.5)$$

$$\tau_{w,r} \equiv \rho u_{\tau r}^2 := -\rho \overline{u'v'}(x, y)|_{x=y=0}, \quad U_\tau(X) := \frac{u_\tau(x)}{u_{\tau r}}, \quad (2.6)$$

$$\overline{U'V'}(X, Y) = \frac{\overline{u'v'}(x, y)}{u_{\tau r}^2}, \quad \overline{U'^2}(X, Y) = \frac{\overline{u'^2}(x, y)}{u_{\tau r}^2}, \quad \overline{V'^2}(X, Y) = \frac{\overline{v'^2}(x, y)}{u_{\tau r}^2}. \quad (2.7)$$

Dabei bezeichnen x und y die kartesischen Koordinaten in Hauptströmungsrichtung und normal dazu. Querstriche über den Symbolen kennzeichnen (über einen hinreichend großen Zeitraum) gemittelte Größen, und Apostrophe kennzeichnen die entsprechenden zeitlichen Fluktuationen um den Mittelwert. Der Index r bezeichnet stets Größen im Referenzquerschnitt bei $x=X=0$, und der Index w bezeichnet Größen an der Kanalwand bei $y=Y=0$. Weiters bedeuten h die Flüssigkeitshöhe vom Kanalboden $y=0$ aus gemessen, \dot{V} den Volumenstrom pro Kanalbreite (in m^2/s), l eine charakteristische Wellenlänge der welligen Oberfläche des Wassersprunges, p den Druck, ρ die Dichte, g die Schwerebeschleunigung, \bar{u} und \bar{v} die (mittleren) Geschwindigkeiten in Hauptströmungsrichtung und normal dazu, τ die (turbulente) kinematische Reynoldssche Scheinschubspannung, sowie $\rho u'^2$ und $\rho v'^2$ die kinematischen Reynoldsschen Scheinnormalspannungen. Alle angegebenen Materialzustandsgrößen beziehen sich dabei auf die Flüssigkeit. \bar{u}_r stellt dabei die volumetrisch über den Referenzquerschnitt gemittelte Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung dar, u_τ wird als Schubspannungsgeschwindigkeit bezeichnet. Die dimensionslosen Größen werden also mit großgeschriebenen Buchstaben bezeichnet, mit Ausnahme von \dot{V} für den Volumenstrom.

Die Grundgleichungen in dimensionsloser Form lauten nun:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial Y} = 0, \quad (2.8)$$

$$\text{Fr}_r^2 \left(\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial X} + \frac{\alpha}{\delta} - \frac{\text{Fr}_{\tau r}^2}{\delta} \left(\delta \frac{\partial \overline{U'^2}}{\partial X} + \frac{\partial \overline{U'V'}}{\partial Y} \right), \quad (2.9)$$

$$\delta^2 \text{Fr}_r^2 \left(\bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial X} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} - 1 - \text{Fr}_{\tau r}^2 \left(\delta \frac{\partial \overline{U'V'}}{\partial X} + \frac{\partial \overline{V'^2}}{\partial Y} \right), \quad (2.10)$$

mit den Froude-Zahlen

$$\text{Fr}_r := \bar{u}_r / \sqrt{g \bar{h}_r}, \quad \text{Fr}_{\tau r} := u_{\tau r} / \sqrt{g \bar{h}_r}. \quad (2.11)$$

Im asymptotischen Grenzfall sehr großer Reynoldszahlen ist die viskose Unterschicht sehr dünn. In diesem Fall lautet die Randbedingung für die Geschwindigkeitskomponente normal zur Hauptströmungsrichtung am Boden

$$\bar{V}(X, 0) = 0, \quad (2.12)$$

und die Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung muss eine asymptotische Anpassungsbedingung an die viskose Unterschicht erfüllen. Demzufolge lautet die Gleichung für die dimensionslose Geschwindigkeitskomponente in X -Richtung an der Oberfläche

$$\bar{U}_s(X) \equiv \bar{U}(X, \bar{H}) = \frac{\text{Fr}_{\tau\tau}}{\text{Fr}_r} U_\tau \left[\frac{1}{\kappa} \ln(\text{Re}_{\tau\tau} U_\tau \bar{H}) + C^+ + \bar{C}(X) \right], \quad (2.13)$$

$$\bar{C}(X) = \int_0^{\bar{H}} \left(\frac{\text{Fr}_r}{\text{Fr}_{\tau\tau} U_\tau} \frac{\partial \bar{U}}{\partial Y} - \frac{1}{\kappa Y} \right) dY \quad (2.14)$$

(siehe [23], Seite 574). Dabei wurde der in [23] für die Poiseuille-Strömung in der Kanalmittelebene abgeleitete Ausdruck für die Strömungsgeschwindigkeit aufgrund der Spiegelsymmetrie bezüglich der Kanalmittelebene hier für den offenen Kanal für die Geschwindigkeit an der freien Oberfläche übernommen. Die Größe C^+ ist eine Funktion der Bodenrauigkeit und nimmt z.B. bei hydraulisch glatten Oberflächen den Wert 5 an. $\bar{C}(x)$ in (2.14) kann mit Hilfe eines Turbulenzmodells oder aus empirischen Daten ermittelt werden. Wie wir jedoch später zeigen werden, wird keine der beiden Größen explizit in das Ergebnis der asymptotischen Rechnung eingehen. Die Reynolds-Zahlen sind dabei definiert über

$$\text{Re}_\tau = \frac{u_\tau \bar{h}_r}{\nu}, \quad \text{Re}_{\tau\tau} = \frac{u_{\tau\tau} \bar{h}_r}{\nu}. \quad (2.15)$$

Weiters müssen die Reynoldsschen Scheinspannungen die asymptotische Anpassungsbedingung

$$-\overline{U'V'} = U_\tau^2 \quad \text{für } Y \rightarrow 0 \quad (2.16)$$

erfüllen.

Auf der Flüssigkeitsoberfläche sind die kinematische und die dynamische Randbedingung zu erfüllen. Die kinematische Randbedingung lautet in dimensionsloser Form (siehe z.B. [34])

$$\bar{V}(X, \bar{H}) = \bar{U}(X, \bar{H}) \frac{d\bar{H}}{dX}. \quad (2.17)$$

Diese Bedingung legt fest, dass die gemittelte freie Oberfläche eine Stromlinie des gemittelten Geschwindigkeitsfeldes ist und *definiert* die mittlere Flüssigkeitsoberfläche. Die dynamische Randbedingung lautet in dimensionsbehafteter Form (siehe z.B. [39], S. 4 und S. 602)

$$\begin{pmatrix} \left[-\bar{p} - \rho \overline{u'^2} \right] & \left[-\rho \overline{u'v'} \right] \\ \left[-\rho \overline{u'v'} \right] & \left[-\bar{p} - \rho \overline{v'^2} \right] \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.18)$$

und beschreibt das Kräftegleichgewicht an der freien Oberfläche bei Vernachlässigung der Oberflächenspannung und molekular-viskoser Spannungen (siehe [39], S.12). \vec{n} stellt den

Normaleneinheitsvektor auf die Oberfläche dar, der den Winkel ϑ mit der y -Achse einschließt, d.h. $\tan \vartheta = d\bar{h}/dx$. (2.18) beschreibt verschwindende turbulente Scheintangentialspannungen und ein Gleichgewicht von Reynoldsschen Normalspannungen mit dem Umgebungsdruck an der Oberfläche, der Null gesetzt wird.

Nach Beobachtungen im Experiment sind die Wellenlängen eines welligen Wassersprunges wesentlich grösser als die Wassertiefe, also $\delta \ll 1$, daher werden wir im Folgenden eine Entwicklung nach δ durchführen. Unter der Voraussetzung langer Wellenlängen, also

$$\frac{d\bar{h}}{dx} = \delta \frac{d\bar{H}}{dX} \ll 1 \quad (2.19)$$

ergibt sich für (2.18) in dimensionsloser Formulierung nach $\delta \ll 1$ entwickelt das Ergebnis [26, 25]

$$\begin{aligned} & \left[-\bar{P}(X, \bar{H}) - \text{Fr}_{\tau}^2 \overline{U'^2}(X, \bar{H}) \right] \left[-\delta \frac{d\bar{H}}{dX} + O(\delta^3) \right] + \\ & + \left(-\text{Fr}_{\tau}^2 \overline{U'V'}(X, \bar{H}) \right) \left[1 + O(\delta^2) \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} & \left[-\bar{P}(X, \bar{H}) - \text{Fr}_{\tau}^2 \overline{V'^2}(X, \bar{H}) \right] \left[1 + O(\delta^2) \right] + \\ & + \left(-\text{Fr}_{\tau}^2 \overline{U'V'}(X, \bar{H}) \right) \left[-\delta \frac{d\bar{H}}{dX} + O(\delta^3) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.3 Entwicklung für Froude-Zahlen nahe 1

Um in weiterer Folge die Notwendigkeit einer Turbulenzmodellierung zu vermeiden, werden die Gleichungen (2.8)-(2.10) sowie (2.12), (2.13), (2.17) und (2.18) einer asymptotischen Entwicklung für kleine Abweichungen vom kritischen Strömungszustand unterzogen. Die Froude-Zahl im leicht überkritischen Referenzzustand bei $X=0$ ist

$$\text{Fr}_r := \bar{u}_r / \sqrt{g\bar{h}_r} = 1 + \frac{3}{2}\varepsilon, \quad (2.22)$$

wobei $0 < \varepsilon \ll 1$. Der Faktor $3/2$ in (2.22) dient der Vereinfachung der weiter unten abgeleiteten Gleichungen. Neben dem kleinen Parameter ε gibt es noch zwei weitere kleine Parameter, α und Fr_{τ} , deren relative Grösse zu ε festgelegt werden muss. Dies geschieht mittels folgender Kopplungen

$$\delta = 3\sqrt{\varepsilon}, \quad (2.23)$$

$$A = \alpha/\varepsilon^2 = O(1), \quad (2.24)$$

$$B = (\text{Fr}_{\tau}/\varepsilon)^2 = O(1), \quad (2.25)$$

wobei der Faktor 3 in (2.23) wieder der Vereinfachung der in Folge abgeleiteten Gleichungen dient. Die Kopplung gemäß Gleichung (2.25) erfolgt wie in [26] und resultiert aus der Forderung, dass die Grösse der Reynoldsschen Scheinspannungen einerseits so bemessen

ist, dass das Nichtvorhandensein von welligen Lösungen wie in der reibungsfreien Theorie vermieden wird und andererseits keine Turbulenzmodellierung erforderlich ist. Die Festlegungen (2.24) und (2.25) implizieren, dass α und Fr_τ^2 von gleicher Größenordnung sind. Im Falle einer voll ausgebildeten, turbulenten Strömung gilt $\alpha = \text{Fr}_\tau$, und es wird angenommen, dass im nicht voll ausgebildeten Referenzzustand nur asymptotisch kleine Abweichungen von diesem Wert auftreten. Das bedeutet, dass die Strömung nicht beliebig stark vom voll ausgebildeten Zustand abweichen darf. Dies werden wir weiter unten in Gleichung (2.53) noch präzisieren.

Der Entwicklungsansatz für die unbekanntenen Größen lautet:

$$\overline{H}(X, \varepsilon, \alpha, \text{Fr}_\tau) = H_0(A, B) + \varepsilon H_1(X; A, B) + \varepsilon^2 H_2(X; A, B) + O(\varepsilon^3), \quad (2.26)$$

$$\overline{U}(X, Y, \varepsilon, \alpha, \text{Fr}_\tau) = U_0(Y; A, B) + \varepsilon U_1(X, Y; A, B) + \varepsilon^2 U_2(X, Y; A, B) + O(\varepsilon^3), \quad (2.27)$$

und analogen Ansätzen für die Größen $\overline{V}(X, Y, \varepsilon, \alpha, \text{Fr}_\tau)$, $\overline{P}(X, Y, \varepsilon, \alpha, \text{Fr}_\tau)$, $\overline{U'V'}(X, Y, \varepsilon, \alpha, \text{Fr}_\tau)$, $\overline{U'^2}(X, Y, \varepsilon, \alpha, \text{Fr}_\tau)$, $\overline{V'^2}(X, Y, \varepsilon, \alpha, \text{Fr}_\tau)$ und $\overline{C}(X, \varepsilon, \alpha, \text{Fr}_\tau)$.

Entscheidend für die Gültigkeit der asymptotischen Entwicklung ist unter anderem die Festlegung eines Grundzustandes, d.h. des Strömungszustandes im Referenzquerschnitt bei $x = X = 0$. Die Strömung ist dort leicht überkritisch, annähernd parallel zum Boden, mittlere Geschwindigkeit und Flüssigkeitshöhe nehmen dort ihre Referenzwerte an, und das Geschwindigkeitsprofil (die Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung als Funktion von y) weicht um einen kleinen Geschwindigkeitsdefekt von der volumetrisch gemittelten Referenzgeschwindigkeit ab. Die Abweichung der Vertikalgeschwindigkeit vom Wert 0 und die der Horizontalgeschwindigkeit vom Wert u_r sind von der Größe der als klein angenommenen Schubspannungsgeschwindigkeit $u_{\tau\tau}$. Die dimensionslosen Geschwindigkeiten im Referenzquerschnitt lauten daher gemäss (2.4) und (2.11)

$$\overline{U}(0, Y) = 1 + \text{Fr}_\tau \Delta U(Y), \quad (2.28)$$

$$\overline{V}(0, Y) = O(\text{Fr}_\tau / \delta). \quad (2.29)$$

Die Grösse $\Delta U = O(1)$ stellt dabei den dimensionslosen Geschwindigkeitsdefekt der Strömung im Referenzquerschnitt dar, für den gilt

$$\int_0^1 \Delta U(Y) dY = 0. \quad (2.30)$$

Dies ist eine Konsequenz der Definition von \overline{u}_r in (2.1) als volumetrisch gemittelte Geschwindigkeit. Aus den Gleichungen (2.25), (2.26), (2.27), (2.8) und (2.12) folgt für den Grundzustand der Entwicklung

$$H_0 = 1, \quad U_0 = 1, \quad V_0 = 0. \quad (2.31)$$

Weiters wird dem *Grundzustand* unterstellt, dass er voll ausgebildet turbulent ist. Das bedeutet, dass die Strömungsgrößen in $O(1)$ der Entwicklung unabhängig von der Koordinate in Hauptströmungsrichtung sind. Dies ist durch Gleichung (2.31) für die Höhenauslenkung und Geschwindigkeitskomponenten bereits sichergestellt, und weiters muss für die Reynoldsschen Scheinspannungen

$$\overline{(U'V')}_{(0)}(Y) = Y - 1 \quad (2.32)$$

gelten. Das lineare Scheinschubspannungsprofil erfüllt dabei die Randbedingung in Gleichung (2.16) in $O(1)$, d.h. $(\overline{U'V'})_0(0) = 1$, sowie die Randbedingung $(\overline{U'V'})_0(1) = 0$, die aus einer Entwicklung von Gleichung (2.20) in $O(\varepsilon^2)$ resultiert.

Die Entwicklung der Bewegungsgleichungen in X - und Y -Richtung, Gleichungen (2.9) und (2.10), sowie der dynamischen Randbedingung, Gleichungen (2.20) und (2.21) nach ε ergibt mithilfe der Ergebnisse in Gleichung (2.31) in $O(1)$

$$P_0(Y) = 1 - Y. \quad (2.33)$$

Diese Voraussetzungen, Gleichungen (2.31) und (2.32) sowie das Ergebnis (2.33) für die Grundströmung zeigen, dass in niedrigster Ordnung der asymptotischen Entwicklung die Strömung einer voll ausgebildeten turbulenten Strömung (mit einem Kräftegleichgewicht zwischen Gewicht- und Reibungskräften) entspricht: Die Druckverteilung ist hydrostatisch, und das Profil der Reynoldsschen Scheinschubspannungen ist linear. Ein leicht überkritischer Referenzzustand gemäß (2.22) mit kleinen positiven, aber endlichen Werten von ε ergibt dann eine Abweichung von diesem voll ausgebildeten Grundzustand als dessen Störung in höherer Ordnung der Entwicklung nach ε .

Aus der Entwicklung der Gleichungen (2.9), (2.10), (2.20) und (2.21) nach ε ergibt in $O(\varepsilon)$ mithilfe der Gleichungen (2.31) bis (2.33)

$$U_{1X} + P_{1X} = 0, \quad (2.34)$$

$$P_1(X) = H_1(X). \quad (2.35)$$

Aus (2.28) folgt mit dem Entwicklungsansatz (2.27) und (2.25) für die Abweichung der Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung vom Grundzustand („Geschwindigkeitsdefekt“)

$$\varepsilon U_1(0, Y) = Fr_{\tau} \Delta U(Y) = \varepsilon \sqrt{B} \Delta U(Y). \quad (2.36)$$

Die Entwicklung der Bewegungsgleichung in X -Richtung, Gleichung (2.9), der Kontinuitätsbedingung Gleichung (2.8) sowie der kinematischen Randbedingung (2.17) bis zur $O(\varepsilon)$ ergibt zusammen mit den Gleichungen (2.35) und (2.36)

$$U_1(X, Y) = -H_1(X) + \sqrt{B} \Delta U(Y), \quad V_1(X, Y) = H_{1X}(X) Y. \quad (2.37)$$

Entwickelt man die dynamische Randbedingung in X -Richtung bis zu $O(\varepsilon^3)$, so erhält man

$$(\overline{U'V'})_1(X, 1) = -H_1(X). \quad (2.38)$$

Weiters müssen noch die Gleichungen (2.13) und (2.14) entwickelt werden. Für den Referenzzustand folgt, da gemäß Gleichungen (2.3) und (2.7) die Flüssigkeitshöhe auf den Wert der Flüssigkeitshöhe im Referenzpunkt und die Reynoldsschen (turbulenten) Scheinspannungen auf den Wert der Scheinspannungen am Kanalboden im Referenzpunkt bezogen werden, dass

$$H_1(0) = 0, \quad (2.39)$$

$$(\overline{U'V'})_1(0, 0) = 0, \quad \overline{C}_1(0) = 0. \quad (2.40)$$

Die Entwicklung von Gleichung (2.13) bis zur $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ergibt

$$\begin{aligned}
 1 + \varepsilon U_1(X, 1) &= \frac{\text{Fr}_\tau}{\text{Fr}_r} \left[\frac{1}{\kappa} \ln(\text{Re}_\tau) + C^+ + \bar{C}_0 \right] + \\
 &+ \varepsilon \frac{\text{Fr}_\tau}{\text{Fr}_r} \left\{ -\frac{1}{2} (\overline{U'V'})_1(X, 0) \left[\frac{1}{\kappa} \ln(\text{Re}_\tau) + C^+ + \bar{C}_0 \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\kappa} \left(H_1(X) - \frac{1}{2} (\overline{U'V'})_1(X, 0) \right) + \bar{C}_1(X) \right\}, \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

sodass mit den Gleichungen (2.36), (2.39) und (2.40) für den Referenzzustand folgt

$$1 + \varepsilon \sqrt{B} \Delta U(1) = \frac{\text{Fr}_\tau}{\text{Fr}_r} \left[\frac{1}{\kappa} \ln(\text{Re}_\tau) + C^+ + \bar{C}_0 \right]. \quad (2.42)$$

Diese Gleichung liefert einen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit an der Flüssigkeitsoberfläche und der Schubspannung am Kanalboden (Wandschubspannung) im Referenzquerschnitt. Setzt man Gleichung (2.42) in die für beliebige $X \geq 0$ gültige Entwicklung, Gleichung (2.41), ein, so ergibt sich in $\mathcal{O}(\varepsilon)$ mithilfe von Gleichung (2.37) unter Beachtung von $\mathcal{O}(\text{Fr}_\tau/\text{Fr}_r) = \mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$(\overline{U'V'})_1(X, 0) = 2H_1(X). \quad (2.43)$$

In weiterer Folge treten die empirischen Konstanten κ , C^+ und \bar{C}_0 nicht mehr auf. Dies liegt an der hier vorgenommenen Festlegung des Referenzzustandes der asymptotischen Entwicklung. Die Bestimmung der absoluten physikalischen Größen des Referenzzustandes erfordert die Hinzunahme empirischer Konstanten oder alternativ einer Turbulenzmodellierung. Beispielsweise erfordert die Bestimmung der Geschwindigkeit an der Flüssigkeitsoberfläche im Referenzquerschnitt $\bar{u}(x=0, y=h_r)$ gemäss Gleichungen (2.4) und (2.13) die Werte von κ , C^+ und $\bar{C}(X=0)$. Die *Abweichungen* von diesem Grundzustand, d.h. die gesuchten Störungsgrößen erster Ordnung im Rahmen der asymptotischen Entwicklung, sind davon allerdings *unabhängig*. $H_1(X)$ selbst bleibt jedoch im Rahmen der ersten Ordnung der Entwicklung unbekannt.

Die Ergebnisse (2.37) bis (2.43) zeigen, dass auch in erster Ordnung der asymptotischen Entwicklung nach ε der Druck immer noch hydrostatisch verteilt ist: Eine Vergrößerung der Flüssigkeitshöhe um den Wert εH_1 erhöht die Flüssigkeitssäule um diesen Betrag und erhöht infolgedessen den hydrostatischen Druck an einer festen Stelle Y im selben Ausmaß. In analoger Weise verschiebt eine Vergrößerung der Flüssigkeitshöhe die lineare Verteilung der Reynoldsschen Scheinspannungen so, dass deren Betrag am Boden, d.i. der Wandschubspannung, entsprechend erhöht wird.

Die Herleitung der Gleichungen für die Berechnung der Störungsgrößen zweiter Ordnung ist aufwändiger. Die Entwicklung der Bewegungsgleichung in X -Richtung (2.9) ergibt in $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ unter Verwendung der Ergebnisse der Entwicklung niedrigerer Ordnung, Gleichungen (2.31) bis (2.43), sowie unter Beachtung, dass der Grundzustand der asymptotischen Entwicklung nicht von X abhängt

$$\begin{aligned}
 U_{2X}(X, Y) + P_{2X}(X, Y) &= \\
 &= -3U_{1X}(X, Y) - U_1(X, Y)U_{1X}(X, Y) - V_1(X, Y)U_{1Y}(X, Y) - \\
 &\quad -3\gamma - \beta(\overline{U'V'})_{1Y}(X, Y), \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

mit den beiden neuen Parametern

$$\beta := \frac{1}{3}B \sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{3}\text{Fr}_\pi^2 \varepsilon^{-3/2}, \quad (2.45)$$

$$\gamma := \frac{B-A}{9\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{9}(\text{Fr}_\pi^2 - \alpha) \varepsilon^{-5/2}. \quad (2.46)$$

Die Entwicklung der Bewegungsgleichung in Y -Richtung (2.10) bis zu $O(\varepsilon^2)$ ergibt kombiniert mit Gleichung (2.37)

$$P_{2Y}(X, Y) = -9H_{1XX}(X)Y - B(\overline{V'^2})_{0Y}(Y). \quad (2.47)$$

Anschließende Integration nach Y von 0 bis 1, Kombination mit der dynamischen Randbedingung (2.21) und Verwendung der Resultate der Entwicklung niedrigerer Ordnung ergibt

$$P_2(X, Y) - H_2(X) = \frac{9}{2}H_{1XX}(X)(1 - Y^2) - B(\overline{V'^2})_0(Y), \quad (2.48)$$

womit die Unbekannte P_2 in Gleichung (2.44) eliminiert werden kann. Unter Verwendung der Kontinuitätsbedingung (2.8) ergibt sich

$$\begin{aligned} -V_{2Y}(X, Y) + H_{2X}(X) &= -\frac{9}{2}H_{1XXX}(X)(1 - Y^2) - \\ &\quad -U_{1X}(X, Y)(3 + U_1(X, Y)) - V_1(X, Y)U_{1Y}(X, Y) - \\ &\quad -3\gamma - \beta(\overline{U'V'^2})_{1Y}(X, Y). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Die so erhaltene Gleichung kann nach Y von 0 bis 1 integriert werden, und mithilfe von (2.12), (2.30) und (2.43) ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} V_2(X, 1) &= H_{2X}(X) + 3H_{1XXX}(X) - \\ &\quad -H_{1X}(X) \left[3 - H_1(X) - \sqrt{B}\Delta U(1) \right] + \\ &\quad + 3(\gamma - \beta H_1(X)). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Die kinematische Randbedingung liefert in $O(\varepsilon^2)$

$$V_2(X, 1) = H_{2X}(X) - \left[2H_1(X) - \sqrt{B}\Delta U(1) \right] H_{1X}(X). \quad (2.51)$$

(2.50) und (2.51) ergeben zusammen die Verträglichkeitsbedingung

$$H_{1XXX}(X) + [H_1(X) - 1]H_{1X}(X) - \beta H_1(X) + \gamma = 0, \quad (2.52)$$

die als Bestimmungsgleichung für die Störung der Flüssigkeitshöhe dient. Diese Gleichung wurde erstmalig in [48] präsentiert.

2.4 Diskussion der Bestimmungsgleichung für die Störung der freien Oberfläche

Gleichung (2.52) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung in X . Vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet handelt es sich um die stationäre Form einer Korteweg-de Vries-Gleichung [47], die um den Term $(-\beta H_1 + \gamma)$ erweitert ist.

Diese Gleichung enthält Terme, die eine halbe Größenordnung kleiner ($\beta \propto \varepsilon^{1/2}$) und Terme, die eine halbe Größenordnung größer ($\gamma \propto \varepsilon^{-1/2}$) sind als die restlichen Terme, die von $O(1)$ sind, siehe (2.45) und (2.46). Sie ist in diesem Sinne als gleichmäßig gültige Differentialgleichung aufzufassen (vgl. [47, 56]). Die Äquivalenz der Lösungsmannigfaltigkeit dieser gleichmäßig gültigen Differentialgleichung mit jener bei einer asymptotischen Entwicklung bei strikter Trennung der Größenordnungen nach halbzahligen Potenzen des Entwicklungsparameters ε wurde für $\gamma=0$ und spezielle Anfangsbedingungen in [52] gezeigt.

Ein Vergleich mit [26] zeigt, dass Gleichung (2.52) der dortigen Gleichung (27) mit $\gamma=0$ entspricht. Numerische Lösungen von (2.52) mit $\gamma=0$ in [26] haben gezeigt, dass diese Gleichung imstande ist, wellige Oberflächen zu beschreiben. Der Parameter β beschreibt dabei die Dämpfung der Amplitude der welligen Oberfläche, eine Dämpfung, die gemäß der Definition von β in (2.45) durch Reynoldssche Scheinspannungen erzeugt wird. Es gilt also stets $\beta > 0$. Der Einfluß dieser Viskositätseffekte infolge der turbulenten Scheinspannungen ist zwar gering, wird jedoch $\beta = 0$ gesetzt, so ergibt sich keine wellige Lösung, sondern eine nichtperiodische Solitonlösung (vgl. [51]).

Bemerkenswert ist, dass Gleichung (2.52) keinerlei Terme mit einer zweiten Ableitung von H_1 enthält, so wie das bei der Burgers-Gleichung der Fall ist. Die Burgers-Gleichung beschreibt schwach dissipative nichtlineare Wellenvorgänge, während hingegen bei der Korteweg-De Vries-Gleichung dissipative Effekte keine Rolle spielen [47, 58]. Der Einfluß der Dissipation in Gleichung (2.52) erfolgt also ausschliesslich über den Störterm ($-\beta H_1 + \gamma$) als Folge der turbulenten Reynoldsschen Scheinspannungen, während hingegen bei laminarer Strömung Störterme proportional zur zweiten Ableitung in H_1 oder auch integrale Terme dissipative Effekte berücksichtigen (siehe [33], [37]).

Der Parameter γ , definiert in Gleichung (2.46), misst die Abweichung des Zustandes der Strömung im Referenzquerschnitt bei $X=0$ von einem voll ausgebildeten turbulenten Zustand. Ist $\gamma=0$, so gilt $A=B$ bzw. $\alpha = Fr_{\tau}^2$ oder auch $\tau_{wr}/\rho = u_{\tau}^2 = g\alpha\bar{h}_r$ (mit τ_{wr} als Wandschubspannung im Referenzquerschnitt). In diesem Fall herrscht Kräftegleichgewicht in der Strömung zwischen Gewichtskraft und Bodenreibungskraft im Referenzquerschnitt. Gilt zusätzlich, dass $H_{1X}(0)=0$, so folgt $V(0, Y) \equiv 0$ und die Strömung ist dort (lokal) voll ausgebildet turbulent.

Der Parameter γ spielt dabei die Rolle eines dynamischen Antriebes: Ist $\gamma > 0$, so ist die Strömung gegenüber einem voll ausgebildeten Zustand verzögert, ist hingegen $\gamma < 0$, so beschleunigt die Strömung. Mittels des Parameters γ kann daher die Abweichung eines unter Laborbedingungen hergestellten Zuströmzustandes, aus dem ein hydraulischer Sprung resultiert, von einem voll ausgebildeten Zustand quantifiziert werden. Für den Fall eines horizontalen Kanalbodens gilt $\gamma > 0$. Aus den Kopplungen der kleinen Parameter α , Fr_{τ}^2 und ε über die $O(1)$ -Größen A und B in (2.24) und (2.25) folgt, dass Abweichungen von einem Zustand, in dem Kräftegleichgewicht im Referenzzustand herrscht, mit Annäherung an den kritischen Strömungszustand ($\varepsilon \rightarrow 0$) verschwinden müssen. In diesem Grenzfall geht die Strömung in den voll-ausgebildeten Grundzustand der asymptotischen Entwicklung über.

Wie aus den folgenden Untersuchungen ersichtlich wird (siehe Kapitel 4 und 6), sind wellige Lösungen von Gleichung (2.52) durch Werte von $|\gamma|$ gekennzeichnet, die in der

Größenordnung von β oder darunter liegen. Dies legt die Einführung des Parameters

$$\Gamma := \gamma/\beta \quad (2.53)$$

nahe, der dann anstelle von γ zur Untersuchung des Grenzfalles $\beta \rightarrow 0$ herangezogen wird, siehe Kapitel 5. Die Bestimmungsgleichung (2.52) schreibt sich damit

$$H_{1XXX}(X) + [H_1(X) - 1] H_{1X}(X) - \beta [H_1(X) - \Gamma] = 0. \quad (2.54)$$

Bezüglich der zur Lösung von Gleichung (2.54) notwendigen Anfangsbedingungen gilt im Referenzpunkt $X = 0$ nach Gleichung (2.39) $H_1(0) = 0$. Die beiden restlichen Anfangsbedingungen $H_{1X}(0)$ und $H_{1XX}(0)$ bleiben jedoch im Rahmen der asymptotischen Herleitung von (2.54) unbestimmt.

Aus den Gleichungen (2.31), (2.26) und (2.27) folgt für die Froude-Zahl

$$\text{Fr}(X) = \frac{\bar{u}_r}{\sqrt{g\bar{h}_r}} \frac{(1 + \varepsilon U_{1m}(X))}{\sqrt{1 + \varepsilon H_1(X)}}, \quad (2.55)$$

wobei

$$U_{1m}(X) := \frac{1}{H(X)} \int_0^{H(X)} U_1(X, Y) dY. \quad (2.56)$$

Daraus folgt mit (2.22), (2.37) und (2.30), dass

$$\text{Fr}(X) = 1 + \frac{3}{2}\varepsilon(1 - H_1(X)) \quad (2.57)$$

bis auf Terme höherer Ordnung in ε . Das bedeutet, dass der Wert $H_1(X) = 1$ dem kritischen Strömungszustand mit $\text{Fr} = 1$ entspricht.

Für voll ausgebildete Strömung stromab ist es erforderlich, dass $\Gamma > 1 \neq 0$. Aufgrund des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik ist bei einem Wassersprung nur ein Übergang von über- zu unterkritischer Strömung möglich, da nur in diesem Fall die Energiedissipation positiv ist [54, 55]. Das bedeutet für den Wertebereich von H_1 , dass der Wert im überkritischen Referenzzustand mit $H_1(0) = 0 < 1$ (und $\text{Fr}_r = 1 + \frac{3}{2}\varepsilon$) in einen Wert im unterkritischen abströmseitigen Zustand mit $H_1 > 1$ übergeführt werden muss. Wie wir später in Abschnitt 3.3 zeigen werden, ist asymptotisch abströmseitig nur *eine* Asymptote mit *konstanter* Flüssigkeitshöhe $H_1 = \Gamma$ möglich. Für voll ausgebildete, unterkritische Strömung weit stromab muss daher gelten: $\text{Fr}|_{X \rightarrow \infty} = 1 - \frac{3}{2}\varepsilon(\Gamma - 1) < 1$ und $\Gamma > 1$ mit $\Gamma = \mathcal{O}(1)$.

Für den Fall des horizontalen Kanalbodens hingegen muss nach (2.46), (2.53) und (2.45) gelten: $\Gamma = 1/3\varepsilon$.

Kapitel 3

Allgemeine Eigenschaften und Analyse der Bestimmungsgleichung (2.52) bzw. (2.54) für die Störung der freien Oberfläche

3.1 Einfache analytische Lösungen

Der spezielle Fall $\gamma = \beta\Gamma = 0$ zusammen mit der speziellen Anfangsbedingung $H_1 \rightarrow 0$ für $X \rightarrow -\infty$ wurde in [51] analytisch und in [26] numerisch untersucht. Dieser Fall entspricht einem voll-ausgebildeten turbulenten Referenzzustand asymptotisch weit stromauf.

In unserer Arbeit sind die Anfangsbedingungen für Gleichung (2.54) an einem beliebig wählbaren, aber fixierten Referenzpunkt $X = 0$ vorzugeben, wobei nach (2.39) $H_1(0) = 0$ sein muss.

Gleichung (2.54) besitzt stets die Partikulärlösung

$$H_1 \equiv \Gamma \tag{3.1}$$

für beliebiges Γ , sowie für den Spezialfall $\Gamma = 1$ die Lösung

$$H_1 = \beta X + c \tag{3.2}$$

mit einer beliebigen Konstante c . Die Anfangsbedingung (2.39) wird allerdings nur für die spezielle Wahl von $\Gamma = 0$ im ersten Fall und $c = 0$ im zweiten Fall erfüllt, die weiteren Anfangsbedingungen sind dadurch bereits festgelegt. In beiden Fällen beschreiben die Lösungen keine wellige Oberfläche. Die Lösung $H_1 \equiv 0$ für $\Gamma = 0$ beschreibt den trivialen Fall, wonach die Strömung in ihrem leicht überkritischen, voll-ausgebildeten turbulenten Zustand verbleibt. Die Lösung $H_1 = \beta X$ für $\Gamma = 1$ beschreibt eine horizontale Flüssigkeitsoberfläche, also eine Oberfläche, die im gewählten Koordinatensystem der dimensionsbehafteten Variablen den Anstieg α besitzt: Nach (2.2), (2.3), (2.23), (2.26) und (2.45) gilt nämlich in erster Näherung

$$\frac{d\bar{h}}{dx} = 3\varepsilon^{3/2} \frac{dH_1}{dX} = \text{Fr}_\pi^2 = \alpha. \tag{3.3}$$

Gleichung (2.54) lässt sich für $\beta \ll 1$ für die folgenden zwei Fälle um $H_1 = \Gamma$ linearisieren. Ein Ansatz $\tilde{C} \exp(\lambda X)$ für die Lösung der homogenen Differentialgleichung und die Partikulärlösung $H_{1,p} = \Gamma$ ergeben bei

(1) Linearisierung um $H_1 = \Gamma \neq 1$ und Entwicklung nach β :

$$\begin{aligned} H_1 = \Gamma + \tilde{C}_1 \exp \left\{ \left[\sqrt{1-\Gamma} + \frac{\beta}{2(1-\Gamma)} + O(\beta^2) \right] X \right\} + \\ + \tilde{C}_2 \exp \left\{ \left[-\sqrt{1-\Gamma} + \frac{\beta}{2(1-\Gamma)} + O(\beta^2) \right] X \right\} + \\ + \tilde{C}_3 \exp \left\{ \left[-\beta/(1-\Gamma) + O(\beta^2) \right] X \right\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

(2) Linearisierung um $H_1 = \Gamma = 1$:

$$\begin{aligned} H_1 = 1 + \tilde{\tilde{C}}_1 \exp \{ \beta^{1/3} X \} + \\ + \tilde{\tilde{C}}_2 X \exp \{ \beta^{1/3} X \} + \\ + \tilde{\tilde{C}}_3 X^2 \exp \{ \beta^{1/3} X \}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

wobei die \tilde{C}_i und $\tilde{\tilde{C}}_i$ ($i = 1, 2, 3$) jeweils unbestimmte Konstanten bezeichnen. Die Linearisierung um $H_1 = \Gamma \neq 1$ zeigt, dass in der Nähe von $H_1 = \Gamma$ für $\Gamma > 1$ periodische Lösungen möglich sind. Dies ist nicht der Fall für $\Gamma \leq 1$.

3.2 Verhalten in der Nähe des Referenzpunktes ($X \rightarrow 0$)

Im speziellen Fall von $\Gamma = 0$ (voll-ausgebildete Zuströmung) kann zur Charakterisierung der Lösung für $X \rightarrow 0$ in der Nähe des Referenzpunktes, in dem $H_1(0) = 0$ gilt, die um $H_1 = 0$ linearisierte Lösung (3.4) mit $\Gamma = 0$ herangezogen werden. Die Bedingung, dass in Gleichung (3.4) (mit $\Gamma = 0$) $H_1(X) \rightarrow 0$ für $X \rightarrow 0$ erfordert eine Kombination der Konstanten \tilde{C}_1 , \tilde{C}_2 und \tilde{C}_3 , die in Summe 0 ergibt. Sollen weiters $H_{1X}(X) \rightarrow 0$ und $H_{1XX}(X) \rightarrow 0$ für $X \rightarrow 0$, so bleibt nur die triviale Lösung $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = \tilde{C}_3 = 0$.

Da jedoch Gleichung (2.54) eine autonome Differentialgleichung darstellt, sind ihre allgemeinen Lösungen nur bis auf eine beliebige, additive Konstante bestimmt; das bedeutet, dass sich die Anfangsbedingung $H_1 = 0$ in einem asymptotischen Sinne erfüllen lässt, wenn man den Referenzpunkt X_0 von seinem ursprünglichen Wert 0 nach $-\infty$ verschiebt. Die Lösung nach Gleichung (3.4) verlangt dann, dass $\tilde{C}_1 = 0$, und es gilt weiters

$$\begin{aligned} X \rightarrow -\infty : \quad H_1(X) &\sim \tilde{C}_2 \exp \left\{ \left[-1 + \beta/2 + O(\beta^2) \right] X \right\} \rightarrow 0, \\ H_{1X}(X) &\sim \left[1 + \beta/2 + O(\beta^2) \right] H_1(X) \rightarrow 0, \\ H_{1XX}(X) &\sim \left[1 + \beta + O(\beta^2) \right] H_1(X) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Diese asymptotische Erfüllung der Anfangsbedingung $H_1 = 0$ ist jener schon oben erwähnte, in [26, 51] untersuchte Fall.

Im Fall von $\Gamma \neq 0$ zeigt ein einfacher Potenzreihenansatz

$$H_1(X) = \tilde{\tilde{C}}_1 X + \tilde{\tilde{C}}_2 X^2 + \tilde{\tilde{C}}_3 X^3 + \dots \quad (3.7)$$

für $X \rightarrow 0$ und Einsetzen in in Gleichung (2.54), dass wieder (vgl. Diskussion in Abschnitt 2.4) die Neigung $\tilde{C}_1 = H_{1X}(0)$ und Krümmung $\tilde{C}_2 = \frac{1}{2}H_{1XX}(0)$ im Referenzpunkt unbestimmt bleiben. Damit erhebt sich die Frage, bei welchen Werten der beiden verbleibenden Anfangsbedingungen durch Gleichung (2.54) ein welliger Wassersprung beschrieben wird und bei welchen nicht. Die Antwort werden wir erst nach einer asymptotischen Entwicklung der Gleichung nach der Methode der mehrfachen Variablen in Abschnitt 5.7 geben können.

3.3 Verhalten weit stromab ($X \rightarrow \infty$)

Für $X \rightarrow \infty$ kann man durch Einsetzen in (2.54) erkennen, dass zwei Strömungszustände asymptotisch abströmseitig möglich sind. Erstens stellt

$$H_1 = \beta X + o(X) \quad (3.8)$$

eine asymptotische Lösung dar, wenngleich sie nicht gleichmässig gültig ist, da sie für $X \rightarrow \infty$ unbeschränkt ist. Eine solche Lösung wurde bereits in [51] und [26] gefunden. Wie in (3.3) gezeigt stellt sie eine Oberfläche mit horizontalem Flüssigkeitsspiegel dar. Ein möglicher asymptotisch abströmseitiger Strömungszustand ist also der „Übergang ins tiefe Wasser“, also z.B. das Münden des Kanals in einen See.

Der durch (3.8) beschriebene Strömungszustand ist (in niedrigster Ordnung) von Γ unabhängig. Jedoch ist nicht klar, welche Anfangsbedingungen für diesen abströmseitigen Zustand notwendig sind und ob auch diese unabhängig von Γ sind. Eine endgültige Antwort auf beide Fragen werden wir erst in Abschnitt 5.7 geben können.

Zweitens erfüllt auch

$$H_1 = \Gamma + o(1) \quad (3.9)$$

asymptotisch die Gleichung (2.54). Diese Lösung beschreibt eine konstante Flüssigkeitshöhe parallel zum Boden, und nach (2.37)-(2.43) einen voll ausgebildeten Strömungszustand asymptotisch weit stromab. Aus den am Ende von Abschnitt 2.4 genannten Gründen kann ein solcher Zustand allerdings nur für $\Gamma > 1$ auftreten.

In beiden Fällen lässt sich Gleichung (2.54) für kleine Abweichungen vom asymptotisch abströmseitigen Zustand entwickeln. Im Fall der Asymptote Gleichung (3.8) führt der Ansatz

$$H_1 = \beta X + \tilde{H}^{(1)} + \tilde{H}^{(2)} \quad (3.10)$$

mit $\tilde{H}^{(1)} = o(\beta X)$ und $\tilde{H}^{(2)} = o(\tilde{H}^{(1)})$ auf

$$\tilde{H}_{XXX}^{(1)} + (\beta X - 1) \tilde{H}_X^{(1)} - \beta(1 - \Gamma) = 0. \quad (3.11)$$

Nimmt man nun an, dass der Term $\tilde{H}_{XXX}^{(1)}$ für $X \rightarrow \infty$ gegen die anderen vernachlässigbar ist, so folgt

$$\tilde{H}^{(1)} = (1 - \Gamma) \ln(\beta X - 1) + \tilde{C} \quad (3.12)$$

als asymptotische Korrektur zur horizontalen Oberfläche in erster Ordnung, die eine unbestimmte Konstante \tilde{C} enthält. Die angenommene Vernachlässigung des Terms $\tilde{H}_{XXX}^{(1)}$ wird

durch die erhaltene Lösung gerechtfertigt.

Für die Korrektur von H_1 in zweiter Ordnung folgt die Gleichung

$$\tilde{H}_{XXX}^{(2)} + (\beta X + \tilde{H}^{(1)} - 1) \tilde{H}_X^{(2)} + \tilde{H}_X^{(1)} \tilde{H}^{(2)} = 0. \quad (3.13)$$

Vernachlässigt man in dieser Gleichung den Term $\tilde{H}_X^{(1)} \tilde{H}^{(2)}$, was durch die weiter unten erhaltene Lösung für $\tilde{H}^{(2)}$ gerechtfertigt wird, so stellt (3.13) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Funktion $f := \tilde{H}_X^{(2)}$ dar. Ersetzt man auch noch die Variable X in Gleichung (3.13) durch die Variable \tilde{z} nach der Vorschrift

$$-\beta^{2/3} \tilde{z} := \beta X + (1 - \Gamma) \ln(\beta X - 1) + \tilde{C} - 1, \quad (3.14)$$

so ergibt sich mit (3.12) bis auf Terme $O((\beta^{2/3} \tilde{z})^{-2})$

$$\left(1 - \frac{2(1 - \Gamma)}{\beta^{2/3} \tilde{z}}\right) f_{\tilde{z}\tilde{z}} - \tilde{z} f = 0. \quad (3.15)$$

Bis auf Terme der Ordnung $O((\beta^{2/3} \tilde{z})^{-2})$ ergibt sich mit der neuerlichen Variablenersetzung

$$z := \tilde{z} + 2(1 - \Gamma)/\beta^{2/3} \quad (3.16)$$

die Airysche Differentialgleichung

$$f_{zz} - z f = 0, \quad (3.17)$$

deren Lösung die Airy-Funktion $\text{Ai}(z)$ ist, siehe [3], S.446. Durch Integration und unter Verwendung der für asymptotisch große Argumente gültigen Beziehung für die Airy-Funktion (siehe [3], S.448) erhält man

$$\tilde{H}^{(2)} = \tilde{\tilde{C}} \beta^{1/2} [\beta X - (1 - \Gamma) \ln(\beta X)]^{-3/4} \cos \left[\frac{2}{3} \beta^{-1} (\beta X - (1 - \Gamma) \ln(\beta X))^{3/2} \right]. \quad (3.18)$$

wobei $\tilde{\tilde{C}}$ eine unbestimmte Konstante darstellt. Mit den beiden Teillösungen (3.12) und (3.18) ergibt sich $\tilde{H}_X^{(1)} \tilde{H}^{(2)} / \tilde{H}^{(1)} \tilde{H}_X^{(2)} \sim \beta (\beta X)^{-3/2} \ln^{-1}(\beta X - 1) \rightarrow 0$, sodass die weiter oben vorgenommene Vernachlässigung des Terms $\tilde{H}_X^{(1)} \tilde{H}^{(2)}$ a posteriori gerechtfertigt wird.

Die asymptotische Korrektur in zweiter Ordnung liefert also infolge der Berücksichtigung der dritten Ableitung der Höhenstörung in (3.13) das asymptotische Frequenzverhalten der welligen Oberfläche.

Sowohl $\tilde{\tilde{C}}$ in (3.18) als auch \tilde{C} in (3.12) stellen willkürliche Konstanten dar, bis auf die die Lösungen unbestimmt bleiben. Diese Konstanten müssten durch die Vorgabe von Anfangsbedingungen an einer bestimmten Position festgelegt werden, was jedoch bei asymptotischen Lösungen nicht möglich ist.

Für den Fall der Asymptote der voll-ausgebildeten Strömung für $X \rightarrow \infty$ ist das Ergebnis der Linearisierung in (3.4) heranzuziehen. Ist dann $\Gamma > 1$ (wie für einen Strömungszustand weit stromab notwendig ist), so lautet die Lösung

$$H_1 = \Gamma + \tilde{\tilde{C}} \exp[-\beta X / 2(\Gamma - 1)] \cos \left[\sqrt{\Gamma - 1} (X - X_0) \right]. \quad (3.19)$$

Auch diese Lösung enthält zwei nicht näher bestimmbare Konstanten $\tilde{\tilde{C}}$ und X_0 . Die Nullstellen der Cosinusfunktion in (3.19) sind jedoch von $\tilde{\tilde{C}}$ unabhängig und allein durch die

Wahl von X_0 bestimmt. Das asymptotische Frequenzverhalten der welligen Oberfläche tritt in (3.19) bereits in der Korrektur erster Ordnung auf, da die dritte Ableitung der Höhenstörung bereits in dieser Ordnung in (3.4) berücksichtigt ist. In (3.12) und (3.18) hingegen tritt das asymptotische Frequenzverhalten erst in zweiter Ordnung der asymptotischen Korrektur auf.

Analoges gilt für den Einfluss des Parameters Γ auf das asymptotische Frequenzverhalten: In (3.19) geht dieser in erster Ordnung in den Ausdruck für die Frequenz ein, wohingegen er in (3.18) erst in zweiter Ordnung im Ausdruck für die Frequenz in Erscheinung tritt.

3.4 Äquivalenz mit System von 3 Differentialgleichungen erster Ordnung

Durch zweimalige formale Integration nach X kann Gleichung (2.54) in ein äquivalentes System von drei Differentialgleichungen erster Ordnung umgewandelt werden (siehe [51]). Einmalige Integration von (2.54) ergibt

$$H_{1XX} + \frac{1}{2}H_1^2 - H_1 = R \quad (3.20)$$

mit der unbekanntem Funktion $R(X)$, welche die Differentialgleichung $R_X = \beta(H_1 - \Gamma)$ erfüllen muss. Multiplikation von Gleichung (3.20) mit H_{1X} und nochmalige Integration ergibt

$$\frac{1}{2}(H_{1X})^2 + \frac{1}{6}H_1^3 - \frac{1}{2}H_1^2 - RH_1 = S \quad (3.21)$$

mit einer weiteren unbekanntem Funktion $S(X)$, welche die Differentialgleichung $S_X = -\beta H_1(H_1 - \Gamma)$ zu erfüllen hat. Das Gleichungssystem lautet also

$$H_{1X}^2 = -\frac{1}{3}H_1^3 + H_1^2 + 2(RH_1 + S) \geq 0, \quad (3.22)$$

$$R_X = \beta(H_1 - \Gamma), \quad (3.23)$$

$$S_X = -\beta H_1(H_1 - \Gamma). \quad (3.24)$$

Das auf der rechten Gleichungsseite von (3.22) auftretende Polynom in H_1 bezeichnen wir mit $q(H; R, S) = -H^3 + 3H^2 + 6RH + 6S$, in dem R und S als Parameter auftreten. Obwohl R und S selbst Funktionen von X sind, die aus dem gekoppelten Gleichungssystem (3.22)-(3.24) zu bestimmen sind, ist ihre Betrachtung als Parameter in q insofern gerechtfertigt, als sie als *unabhängige* Funktionen in Gleichung (3.22) eingehen. Die algebraischen Eigenschaften dieses Polynoms sind im nächsten Abschnitt 3.5 angegeben. Wie wir in Abschnitt 3.7 zeigen werden, lassen sich die Lösungen von (3.22)-(3.24) für den Fall $\beta=0$ anhand der von den Nullstellen h_1 , h_2 und h_3 des Polynoms q angenommenen Werte klassifizieren. Obwohl die Betrachtung des reibungsfreien Falles ($\beta=0$) für die Beschreibung des welligen Wassersprunges unzureichend ist, treten einige der Lösungen von Gleichung (2.54) im Fall $\beta=0$ auch im Fall $\beta \neq 0$ bei der Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen in Kapitel 5 wieder auf.

Die rechnerische Behandlung des Gleichungssystems (3.22)-(3.24) anstelle von Gleichung (2.54) hat einige Vorteile: Erstens sind numerische Lösungsverfahren für das Differentialgleichungssystem erster Ordnung einfacher als jene für die Differentialgleichung dritter Ordnung. Zweitens bildet (3.22)-(3.24) die Basis für eine asymptotische Behandlung nach der Methode der mehrfachen Variablen; dies wird in Abschnitt 5.2 durchgeführt. Drittens lassen sich aus den analytischen Eigenschaften des in Gleichung (3.22) auftretenden Polynoms bereits Aussagen über die für eine wellige Lösung notwendigen Anfangsbedingungen $H_X(0)$ und $H_{XX}(0)$ treffen (siehe Abschnitt 3.6) sowie ein notwendiges Kriterium für die Welligkeit einer vorhandenen Lösung ableiten (siehe Abschnitt 3.8).

3.5 Algebraische Eigenschaften des Polynoms $q(H; R, S)$

Das auf der rechten Gleichungsseite von (3.22) auftretende Polynom in H_1 mit den Parametern R und S ist definiert als

$$q(H; R, S) := -H^3 + 3H^2 + 6RH + 6S, \quad (3.25)$$

für dessen Nullstellen h_1, h_2 und h_3 gilt

$$q(H; R, S) = (H - h_1)(H - h_2)(h_3 - H). \quad (3.26)$$

h_1, h_2 und h_3 hängen von R und S ab. Ob diese Nullstellen reell und voneinander verschieden sind, lässt sich nach elementaren Formeln [9] anhand der Diskriminante $D(R, S)$ entscheiden, die sich für obiges Polynom ergibt zu:

$$D(R, S) = (1 + 3R + 3S)^2 - (1 + 2R)^3, \quad (3.27)$$

oder auch

$$D(h_1, h_2, h_3) = -\frac{1}{108} [(h_1 - h_2)(h_1 - h_3)(h_2 - h_3)]^2. \quad (3.28)$$

Das Kriterium für das Vorhandensein von mindestens zwei reellen, voneinander verschiedenen Nullstellen lautet

$$D \leq 0, \quad (3.29)$$

wobei im Fall dreier voneinander verschiedener Nullstellen das Ungleichheitszeichen gilt. Im Fall, dass h_1, h_2 und h_3 reell sind, genügen sie den folgenden Relationen

$$h_1 \leq h_2 \leq h_3 \quad (\text{geordnet}), \quad (3.30)$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = 3, \quad (3.31)$$

$$h_1^{-1} + h_2^{-1} + h_3^{-1} = -R/S, \quad (3.32)$$

$$h_1 h_2 h_3 = 6S, \quad (3.33)$$

oder alternativ zu (3.32) und (3.33) unter Verwendung von (3.30) und (3.31):

$$R = \frac{1}{6}(h_2^2 + h_2 h_3 + h_3^2 - 3(h_2 + h_3)), \quad (3.34)$$

$$S = \frac{1}{6}(3 - h_2 - h_3)h_2 h_3. \quad (3.35)$$

Die Umkehrung zu (3.34) und (3.35) für die Darstellung von $h_1(R, S)$, $h_2(R, S)$ und $h_3(R, S)$ lautet mit $\text{sgn} := \text{sign}(1 + 3R + 3S)$ und $\cos \varphi := |1 + 3R + 3S| / |1 + 2R|^{3/2} > 0$:

$$h_1 = 1 - 2\sqrt{|1 + 2R|} \cos \left[\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}(\text{sgn} + 1)\pi + \varphi \right) \right], \quad (3.36)$$

$$h_2 = 1 - 2\text{sgn} \sqrt{|1 + 2R|} \cos \left[\frac{1}{3}(\pi + \varphi) \right], \quad (3.37)$$

$$h_3 = 1 + 2\sqrt{|1 + 2R|} \cos \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}(\text{sgn} - 1)\pi + \varphi \right) \right]. \quad (3.38)$$

Der Grenzfall $D=0$, der den Bereich reeller von dem komplexwertiger Nullstellen trennt, entsteht nach (3.28) beim Zusammenfallen von $h_1 = h_2$ oder $h_2 = h_3$ (oder dem Zusammen-

fallen aller drei Nullstellen). Diese Fälle lassen sich durch folgende Parameterdarstellungen für R und S beschreiben ($1 \leq t < \infty$):

$$h_1 = h_2 : \quad R = \frac{1}{8}(t-3)(t+1), \quad (3.39)$$

$$S = \frac{1}{24}t(t-3)^2, \quad (3.40)$$

$$h_2 = h_3 : \quad R = \frac{1}{2}t(t-2), \quad (3.41)$$

$$S = -\frac{1}{6}t^2(2t-3). \quad (3.42)$$

Im Fall dreier identischer Nullstellen $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ gilt $(R, S) = (-1/2, 1/6)$.

3.6 Einfluss der Anfangsbedingungen auf wellige Lösungen

Unser Interesse gilt dem Auffinden von welligen Lösungen von (3.22)-(3.24), also von Lösungen, die quasiperiodische Eigenschaften mit veränderlicher Amplitude und veränderlicher „Frequenz“ in X -Richtung aufweisen. So wie $R(X)$ und $S(X)$ Funktionen der Koordinate X sind, ist dies gemäss Gleichungen (3.36)-(3.36) auch für die Nullstellen $h_1(X)$, $h_2(X)$ und $h_3(X)$ des Polynoms q der Fall. Aus Gleichung (3.22) folgt, dass für jene Werte von H_1 , an dem das Polynom q auf der rechten Gleichungsseite den Wert 0 annimmt (also an den Nullstellen), Extremwerte von H_1 vorliegen. Ein notwendiges Kriterium für eine wellige Lösung ist das Vorhandensein von zumindest zwei voneinander verschiedenen, reellen Nullstellen des Polynoms q , sowie ein Anfangswert $H_1(0) = 0$, der zwischen diesen beiden Nullstellen liegt, also Nullstellen unterschiedlichen Vorzeichens. Nur dann nämlich verläuft die Lösung H_1 von (3.22)-(3.24) zwischen diesen Extremwerten und weist eine (quasi)periodische (wellige) Gestalt auf. Nach Abschnitt 3.5 muss für das Vorhandensein von mindestens zwei verschiedenen, reellen Nullstellen die Diskriminante $D \leq 0$ sein.

Die Anfangsbedingungen am Referenzpunkt $X = 0$ sind gegeben durch $H_1(0) = 0$, $H_{1X}(0)$ und $H_{1XX}(0)$. Es folgt aus Gleichungen (3.20) und (3.21) für die Anfangsbedingungen von R und S

$$R(0) = H_{1XX}(0), \quad (3.43)$$

$$S(0) = \frac{1}{2}[H_{1X}(0)]^2 \geq 0. \quad (3.44)$$

Für den Fall mindestens zweier voneinander verschiedener, reeller Nullstellen folgt aus der Anfangsbedingung (2.39), den Gleichungen (3.44) und (3.30) sowie der für Quasiperiodizität notwendigen Forderung, dass $H_1(0) = 0$ zwischen diesen beiden verschiedenen Nullstellen liegt, dass bei $X = 0$ gilt $h_1(0) \leq 0$. Daraus folgt weiters mit (3.44) und (3.33), dass

$$h_1(0) \leq h_2(0) \leq 0 \leq h_3(0) \quad (3.45)$$

und mit (3.32) und (3.33) folgt

$$R(0) = H_{1XX}(0) \geq 0. \quad (3.46)$$

Diese Bedingungen für die für eine wellige Lösung notwendigen Anfangsbedingungen lassen sich in einem Diagramm $[H_{1XX}(0), H_{1X}(0)]$ darstellen, siehe Abbildung 3.2 auf Seite 29. Unter den Voraussetzungen (3.44) und (3.46) sind also nur Werte im roten Bereich in der oberen Halbebene als gültige Anfangsbedingungen zulässig, sodass Gleichung (2.54) wellige Lösungen aufweist. Der Parameter m ist dabei definiert als

$$m := \frac{h_3 - h_2}{h_3 - h_1}. \quad (3.47)$$

Isolinien von m sind in Abbildung 3.2 dargestellt. Für zusammenfallende Nullstellen $h_1 = h_2$ ist $m = 1$, dieser Grenzfall ist als seitliche Begrenzungslinien des roten und blauen Bereiches ersichtlich. Für $h_2 = h_3$ ist $m = 0$, jener Grenzfall ist als untere Begrenzungslinie des blauen Bereiches ersichtlich. Alle drei Nullstellen fallen im Ursprung zusammen.

In dem in Abbildung 3.2 blau dargestellten Bereich sind jene Anfangsbedingungen zu finden, die ebenfalls zu welligen Lösungen von (2.54) führen, jedoch nicht die Anfangsbedingung (2.39) erfüllen. Diese Lösungen sind aufgrund dessen unbrauchbar. Auf den in Abbildung 3.2 dargestellten Grenzkurven fallen zwei oder alle drei Nullstellen des Polynoms q zusammen. Durch die analytische Bedingung des Zusammenfallens der Nullstellen lässt sich mit (3.43) und (3.44) eine Parameterdarstellung für diese Kurven finden, die in den Gleichungen (3.39)-(3.42) angegeben ist.

3.7 Analytische Lösungen für $\beta = 0$

Obwohl der Sonderfall $\beta = 0$ (keine Dissipation) in Gleichung (2.54) keine welligen Lösungen zulässt, sind die analytischen Lösungen, die dieser Fall ermöglicht, von Nutzen bei der asymptotischen Entwicklung der Gleichung für $\beta \neq 0$, die in Kapitel 5 durchgeführt wird. Im Fall $\beta = 0$ und endlichen Werten von Γ folgt aus (3.23) und (3.24), dass $R = \text{const.}$ und $S = \text{const.}$, das heisst, dass die unbekannt Funktionen R und S konstante Werte annehmen, die durch die Anfangsbedingungen (3.43) und (3.44) festgelegt sind. Der Parameter Γ tritt in diesen konstanten Werten für R und S nicht auf.

In Abhängigkeit von den in Abschnitt 3.5 eingeführten Nullstellen h_1 , h_2 und h_3 , die dann allesamt ebenfalls konstant sind, lassen sich exakte Lösungen von (3.22)-(3.24) angeben (siehe [3], S. 597): Das Kriterium für die Klassifikation der unterschiedlichen Lösungstypen ist durch die Diskriminante $D(R, S)$, definiert in Gleichung (3.27), gegeben. Wir listen die unterschiedlichen Lösungstypen im folgenden auf.

(I) $D \leq 0$, alle drei Nullstellen sind reell.

Es folgt aus Glgn. (3.22) und (3.26), dass entweder $H_1(X) \leq h_1 \leq h_2 \leq h_3$ oder $h_1 \leq h_2 \leq H_1(X) \leq h_3$ gilt.

(1) $H_1 \leq h_1$

(a) $q(H, R, S)$ hat drei verschiedene reelle Nullstellen $h_1 \neq h_2 \neq h_3$. Es gilt $D(R, S) < 0$, $0 < m < 1$ mit dem in (3.47) definierten Parameter m :

$$H_1 = h_2 + (h_2 - h_1) \text{cn}^{-2} \left[\frac{\sqrt{3 - 2h_1 - h_2}}{2\sqrt{3}} (X - X_0) | m \right], \quad (3.48)$$

wobei $\text{cn}(\cdot|m)$ der Cosinus amplitudinis (eine der zwölf Jacobischen elliptischen Funktionen) ist. Die cn -Funktion ist periodisch mit Periode $4K(m)$, wobei $K(m)$ das vollständige elliptische Integral 1. Art mit dem Parameter m ist (siehe [3], S. 590). X_0 wird durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Die Lösung (3.48) ist nicht periodisch, da sie an periodisch wiederkehrenden Stellen singular ist.

- (b) $q(H, R, S)$ besitzt zwei reelle doppelte ($h_1 = h_2$) und eine reelle einfache (h_3) Nullstelle. Es gilt $D(R, S) = 0, m = 1$:

$$H_1 = \text{const} = h_1 = h_2. \quad (3.49)$$

- (c) $q(H, R, S)$ besitzt eine reelle einfache (h_1) und zwei reelle doppelte ($h_2 = h_3$) Nullstellen. Es gilt $D(R, S) = 0, m = 0$:

$$H_1 = h_2 - 3(h_2 - 1) \cos^{-2} \left[\frac{\sqrt{h_2 - 1}}{2} (X - X_0) \right]. \quad (3.50)$$

(3.50) ist nicht periodisch.

- (2) $h_2 \leq H_1 \leq h_3$

- (a) $q(H, R, S)$ hat drei verschiedene reelle Nullstellen $h_1 \neq h_2 \neq h_3$. Es gilt $D(R, S) < 0, 0 < m < 1$:

$$H_1 = h_2 + (h_3 - h_2) \text{cn}^2 \left[\frac{\sqrt{h_3 - h_2}}{2\sqrt{3}} (X - X_0) | m \right]. \quad (3.51)$$

(3.51) ist eine periodische Lösung mit Periode $2K(m)$.

- (b) $q(H, R, S)$ besitzt zwei reelle doppelte ($h_1 = h_2$) und eine reelle einfache (h_3) Nullstelle. Es gilt $D(R, S) = 0, m = 1$:

$$H_1 = h_2 + 3(1 - h_2) \text{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{1 - h_2}}{2} (X - X_0) \right]. \quad (3.52)$$

(3.52) ist eine aperiodische Lösung, die sogenannte Solitonenlösung (Einzelwelle). (3.52) enthält den Spezialfall $h_1 = h_2 = 0, h_3 = 3, R = S = 0, H_1 = 3 \text{sech}^2 \left[\frac{1}{2} (X - X_0) \right]$. Diese Lösung ist nur mit asymptotischen Anfangsbedingungen $[H_1, H_{1X}, H_{1XX}] \rightarrow (0, 0, 0)$ bei $X_0 \rightarrow -\infty$ erfüllbar, was einer voll ausgebildeten turbulenten, reibungsfreien Strömung asymptotisch weit stromauf aus Sicht des ersten Wellenmaximums entspricht.

- (c) $q(H, R, S)$ besitzt eine reelle einfache (h_1) und zwei reelle doppelte ($h_2 = h_3$) Nullstellen. Es gilt $D(R, S) = 0, m = 0$:

$$H_1 = \text{const.} = h_2 = h_3. \quad (3.53)$$

Im Grenzübergang $h_1 \rightarrow h_2, m \rightarrow 1$ gilt $\text{cn}(\cdot|m) \rightarrow \text{sech}(\cdot)$ (siehe [3], S. 571), und die Lösung (3.51) geht in (3.52), die Lösung (3.48) in die triviale Lösung (3.49) über. Im Grenzübergang $h_2 \rightarrow h_3, m \rightarrow 0$ gilt $\text{cn}(\cdot|m) \rightarrow \cos(\cdot)$, und die Lösung (3.51) geht in die triviale Lösung (3.53), die Lösung (3.48) in (3.50) über.

(II) $D > 0$, $q(H, R, S)$ hat zwei komplexe (\tilde{h}_1 und \tilde{h}_2) und eine reelle (\tilde{h}_3) Nullstelle.

$$H = \tilde{h}_3 - \frac{3}{2} \frac{\tilde{h}_3 - 1}{2\tilde{m} - 1} \frac{1 - \operatorname{cn} \left[\sqrt{\frac{\tilde{h}_3 - 1}{2(2\tilde{m} - 1)}} (X - X_0) | \tilde{m} \right]}{1 + \operatorname{cn} \left[\sqrt{\frac{\tilde{h}_3 - 1}{2(2\tilde{m} - 1)}} (X - X_0) | \tilde{m} \right]} \quad (3.54)$$

mit dem Parameter $\tilde{m} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[1 + \left(\frac{2}{3} \operatorname{Im}(\tilde{h}_1) / (\tilde{h}_3 - 1) \right)^2 \right]^{-1/2} \right\}$. Für $\operatorname{Im}(\tilde{h}_1) = -\operatorname{Im}(\tilde{h}_2) \rightarrow 0$ geht $\tilde{m} \rightarrow 1$ oder 0 mit den entsprechenden Grenzfällen der cn -Funktion. Alle diese Lösungen sind aperiodisch.

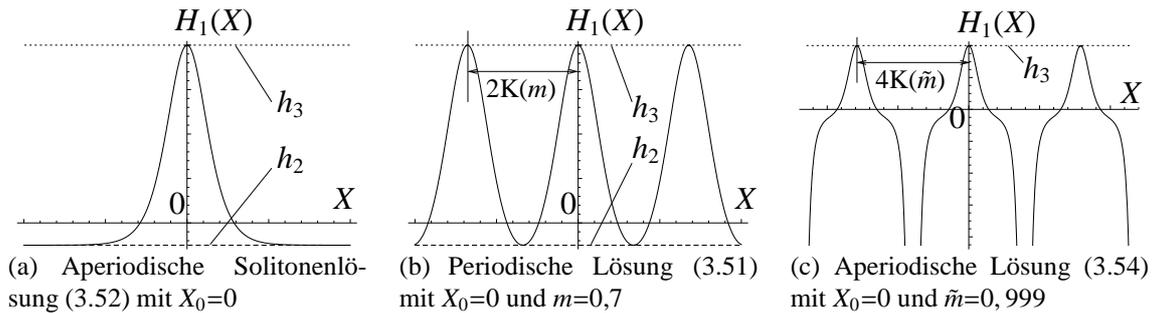


Abbildung 3.1: Skizzen ausgewählter Lösungen von (2.54) bei $\beta=0$

In Bild 3.1(a) ist die aperiodische Solitonenlösung (3.52) dargestellt. Die Amplitude der Einzelwelle beträgt $h_3 - h_2$, und die Lösung nähert sich für $X \rightarrow \pm\infty$ dem Wert h_2 an.

Bild 3.1(b) zeigt die periodische Lösung (3.51). Die Amplitude der Welle beträgt $h_3 - h_2$, und die Periodenlänge beträgt $2K(m)$. Diese Lösung besitzt keine Asymptote, berührt aber in periodischem Abstand die waagerechten Einhüllenden h_2 (unten) und h_3 (oben).

In Bild 3.1(c) ist die aperiodische Lösung (3.54) dargestellt. Diese Lösung besitzt periodisch auftretende Singularitäten und Maxima der Höhe h_3 (mit der Periodenlänge $4K(m)$) und hat keine Asymptote.

Alle Fälle ausser (3.51) stellen aperiodische Lösungen dar und sind daher zur Beschreibung des welligen Wassersprunges nicht geeignet. Der Grenzfall $h_1 \rightarrow h_2$ in (3.51) stellt den Übergang zu einer Einzelwelle (Solitärwelle) mit „unendlich langer“ Periode dar. Der Grenzfall $h_2 \rightarrow h_3$ in (3.51) stellt den Übergang zu welligen Lösungen mit verschwindender Amplitude dar.

(3.51) ist also die einzige periodische Lösung, die bei der asymptotischen Lösung von Gleichung (2.54) im Fall eines kleinen, aber endlichen β in Abschnitt 5.2 wieder auftreten wird. Die notwendige Bedingung für ihre Existenz sind drei reelle, voneinander verschiedene Nullstellen h_1 , h_2 und h_3 . Ein endlicher Wert von β führt dabei zu einer Modulation der Lösung (3.51), bei der sich die Werte von h_1 , h_2 und h_3 sowie Frequenz und Amplitude langsam verändern, wie in Abschnitt 5.2 gezeigt werden wird.

3.8 Kriterium für wellige Lösungen

Das notwendige Kriterium für die Existenz einer welligen Struktur der Lösung $H_1(X)$ in (2.54) für den gesamten Lösungsverlauf lautet also: Es müssen 3 reelle, voneinander

verschiedene Nullstellen $h_1(X)$, $h_2(X)$ und $h_3(X)$ des Polynoms q vorhanden sein oder äquivalent: es muss $D(R(X), S(X)) < 0$ mit D aus (3.27) gelten. Dabei muss D echt kleiner als Null sein, da nach Abschnitt 3.7 der Grenzfall $D = 0$ (mit $\beta = 0$ und Nullstellen $h_1 = h_2 = 0$ oder $h_2 = h_3 = 0$) keine quasiperiodischen (welligen) Lösungen zulässt. Die Werte für h_1 , h_2 und h_3 sowie für R und S sind dabei durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

Die Bedingung $D < 0$ lässt sich für die Anfangsbedingungen unter Verwendung von (3.44) und (3.46) auf Bedingungen für $H_{1XX}(0)$ und $H_{1X}(0)$ umformulieren, die in Abbildung 3.2 graphisch dargestellt sind. Hierbei führen Werte der Anfangsbedingungen im roten Bereich zu welligen Lösungen, Werte auf den Grenzkurven $m = (0, 1)$ stellen die aperiodischen Grenzfälle dar, und Anfangswerte ausserhalb erlauben keine welligen Lösungen.

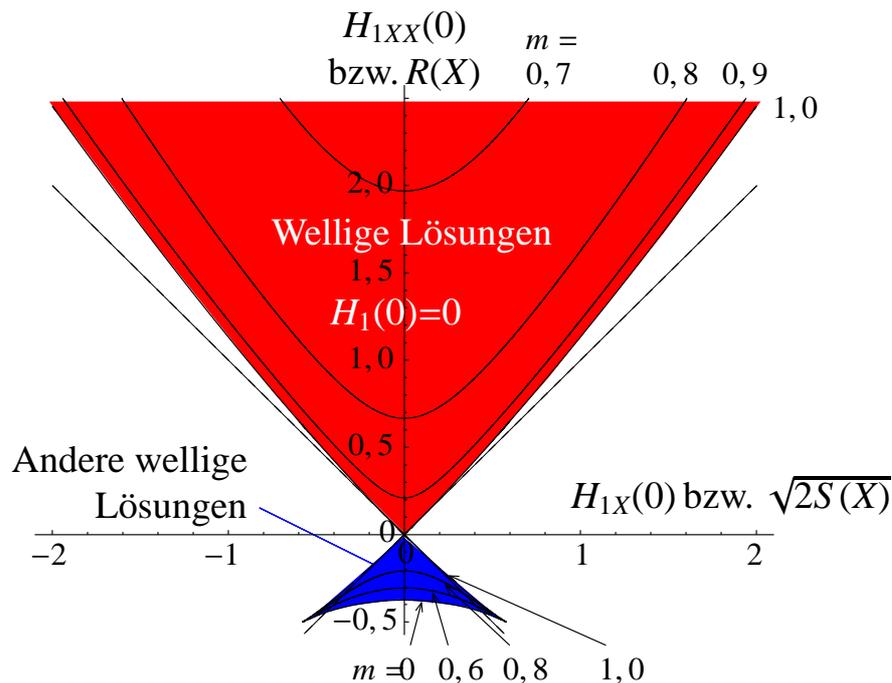


Abbildung 3.2: Bereiche gültiger Anfangsbedingungen $H_{1X}(0)$ und $H_{1XX}(0)$ bzw. gültiger Werte $R(X)$, $S(X)$ für wellige Lösungen von (2.54). Der Parameter m ist definiert in Gleichung (3.47)

Nach (3.43), (3.44) und (3.46) ist die Bedingung $D < 0$ für die Anfangsbedingungen $R(0) = 0$ und beliebiges $S(0) \geq 0$ (dies entspricht der Abszisse in Abbildung 3.2) niemals erfüllt, das bedeutet, dass ein welliger Wassersprung nur aus einer im Referenzpunkt positiv gekrümmten Oberfläche entstehen kann.

Ist $\beta \neq 0$ in (3.23) und (3.24), so bleiben $R(X)$ und $S(X)$ im Verlauf der Lösung $H_1(X)$ nicht mehr konstant. Gleichung (3.22) sowie die algebraischen Eigenschaften des Polynoms q bleiben davon jedoch unbeeinflusst. Das Kriterium für wellige Lösungen $D < 0$ bleibt daher für den gesamten Lösungsverlauf von $H_1(X)$ gültig. Das heisst, dass eine graphische Darstellung von $D(R, S) < 0$ mit D gemäß Gleichung 3.27 als Kriterium für die Existenz einer welligen Lösung auch für Werte $X > 0$ gültig ist. Ersetzt man die in Abbildung 3.2 aufgetragenen Grössen $[H_{1X}(0), H_{1XX}(0)]$ durch $[\sqrt{2S(X)}, R(X)]$ für beliebige $X > 0$, so bleibt die Darstellung des Bereiches jener Werte von $R(X)$ und $\sqrt{2S(X)}$, die zu welligen Lösungen $H_1(X)$ gehören, unverändert (der rote Bereich), und der blaue Bereich kommt

als Wertebereich für wellige Lösungen hinzu, da im Allgemeinen $H_1(X) \neq 0$ für $X > 0$, wodurch die Bedingung (3.46) entfällt und auch Werte in der unteren Halbebene zulässig sind. In diesem Fall ist die Darstellung wie in Abbildung 3.2 allerdings ungeeignet, da negative Werte von $S(X)$ nicht eingezeichnet werden können.

Diese Schwierigkeit lässt sich mit einem Übergang zur direkten Darstellung $[R(X), S(X)]$ jener Werte, die zu welligen Lösungen führen, beheben. Jedoch sind so wie $H_1(X)$ auch $R(X)$ und $S(X)$ sowie die Nullstellen $h_1(X)$, $h_2(X)$ und $h_3(X)$ selbst Teil der Lösung des Problems. Eine direkte Berechnung der Lösung und die Darstellung des Verlaufes der Lösungskurve in einem Diagramm $[R(X), S(X)]$ ist jedoch noch ausständig. Wir verzichten daher auf eine Darstellung der Werte $[R(X), S(X)]$, die für wellige Lösungen notwendig sind. Infolgedessen bleibt noch unklar, ob eine Lösung, deren Anfangswerte $H_{1X}(0)$ und $H_{1XX}(0)$ im Bereich für wellige Lösungen liegt, auch für alle weiteren Werte von $X > 0$ im Bereich für wellige Lösungen bleibt. Wir werden später in Kapitel 5 mit Abbildung 5.6 eine entsprechend verallgemeinerte Darstellung angeben, die bei gegebenen Anfangsbedingungen eine Vorhersage über den gesamten Lösungsverlauf zulässt.

Weiters ist nicht auszuschliessen, dass im Verlauf der Lösungsfunktion $H_1(X)$ bei Lösung des Gleichungssystems (3.22)-(3.24) Werte von R und S auftreten, bei denen die Nullstellen von q und H_1 selbst komplex werden (siehe (3.20) und (3.21)). Anders ausgedrückt bedeutet das, dass die Werte $[R(X), S(X)]$ den Bereich für wellige Lösungen (mit reellen Nullstellen $h_1(X)$, $h_2(X)$ und $h_3(X)$) verlassen. Komplexe Werte von H_1 sind natürlich physikalisch bedeutungslos, und der Wertebereich für $R(X)$ und $S(X)$ ist entsprechend zu beschränken.

Eine Darstellung der Diskriminante D als Funktion von H_1 , H_{1X} und H_{1XX} ergibt sich, indem man in (3.27) die Unbekannten R und S gemäß (3.20) und (3.21) ersetzt

$$\begin{aligned} D(H_1, H_{1X}, H_{1XX}) = & \frac{9}{4}H_{1X}^4 - 8H_{1XX}^3 - \\ & -3(H_1 - 1)^2[(H_1 - 1)H_{1X}^2 + H_{1XX}^2] - \\ & -9(H_1 - 1)H_{1X}^2H_{1XX}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Das notwendige Kriterium für wellige Lösungen $D < 0$ lässt sich damit ausschliesslich durch $H_1(X)$ und dessen Ableitungen darstellen. Daraus ist zu erkennen, dass zum Beispiel der Fall $H_1 = H_{1X} = H_{1XX} = 0$ einen jener Grenzfälle darstellt, bei dem eine aperiodische Lösung in eine periodische übergeht und umgekehrt.

Wie wir in Kapitel 5 zeigen werden, ist die Berechnung einer Lösung $(H_1(X), R(X), S(X))$ im Rahmen einer asymptotischen Entwicklung nach der Methode der mehrfachen Variablen möglich. Dabei tritt das Problem auf, dass die Lösungskurven von Γ abhängig sind. Es besteht jedoch die Möglichkeit, den Parameter Γ aus (2.54) bzw. aus (3.22)-(3.24) mittels einer geeigneten Transformation zu eliminieren.

3.9 Transformation auf Γ -freie Gleichungen

Mithilfe einer linearen Transformation $H_1 \rightarrow \xi_1$ ist es möglich, den Parameter Γ aus der Bestimmungsgleichung für die freie Oberfläche (2.54) zu eliminieren. Dabei treten in Abhängigkeit von Γ drei Fälle auf, die wir mit dem neuen Parameter s unterscheiden

wollen. Es ist

$$\begin{aligned} s = +1 : & \quad \Gamma < 1, \\ s = 0 : & \quad \Gamma = 1, \\ s = -1 : & \quad \Gamma > 1. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Für den jeweiligen Fall gilt folgende Transformationsvorschrift:

$$\Gamma \neq 1, \quad s = \pm 1 : \quad \mathfrak{H}_1(\mathfrak{X}) = (H_1(X) - \Gamma) / |\Gamma - 1|, \quad \mathfrak{X} := \sqrt{|\Gamma - 1|} X, \tag{3.57}$$

$$\Gamma = 1, \quad s = 0 : \quad \mathfrak{H}_1(\mathfrak{X}) = H_1 - 1, \quad \mathfrak{X} := X. \tag{3.58}$$

Mit dieser Transformation ergibt sich die zu (2.54) transformierte Gleichung:

$$\mathfrak{H}_{1\mathfrak{X}\mathfrak{X}\mathfrak{X}} + (\mathfrak{H}_1 - s)\mathfrak{H}_{1\mathfrak{X}} - \mathfrak{b}\mathfrak{H}_1 = 0, \tag{3.59}$$

mit der Transformationsvorschrift für β gemäß

$$\Gamma \neq 1, \quad s = \pm 1 : \quad \mathfrak{b} := \beta / |\Gamma - 1|^{3/2}, \tag{3.60}$$

$$\Gamma = 1, \quad s = 0 : \quad \mathfrak{b} := \beta. \tag{3.61}$$

Man beachte: Für den speziellen Fall $\Gamma = 0$ ist $s = 1$ und $\mathfrak{H}_1(\mathfrak{X}) = H_1(X)$.

Gleichung (3.59) hat für $s = 1$ dieselbe Struktur wie die in [51], [26] untersuchte Gleichung. Verglichen mit Gleichung (2.54) besitzt (3.59) dieselbe Struktur wie (2.54) für den Fall $\Gamma = 0$, jedoch sind die Anfangswerte $[H_1(X=0)=0, H_{1X}(X=0), H_{1XX}(X=0)]$ im Allgemeinen verschieden von $(\mathfrak{H}_1(\mathfrak{X}=0), \mathfrak{H}_{1\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}=0), \mathfrak{H}_{1\mathfrak{X}\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}=0))$.

Die Transformation der Anfangsbedingungen $H_1(0)=0, H_{1X}(0)$ und $H_{1XX}(0)$ lautet:

$$\begin{aligned} \Gamma \neq 1, \quad s = \pm 1 : \quad \mathfrak{H}_1(0) &= -\Gamma / |\Gamma - 1|, & \mathfrak{H}_{1\mathfrak{X}}(0) &= H_{1X}(0) / |\Gamma - 1|^{3/2}, \\ & & \mathfrak{H}_{1\mathfrak{X}\mathfrak{X}}(0) &= H_{1XX}(0) / (\Gamma - 1)^2, \end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned} \Gamma = 1, \quad s = 0 : \quad \mathfrak{H}_1(0) &= -1 & \mathfrak{H}_{1\mathfrak{X}}(0) &= H_{1X}(0), \\ & & \mathfrak{H}_{1\mathfrak{X}\mathfrak{X}}(0) &= H_{1XX}(0). \end{aligned} \tag{3.63}$$

Daraus ist ersichtlich, dass nur im speziellen Fall $\Gamma = 0$ die Anfangsbedingungen im transformierten und untransformierten Fall gleich sind: Dann gilt $H_1(X=0) = \mathfrak{H}_1(\mathfrak{X}=0) = 0$, $H_{1X}(X=0) = \mathfrak{H}_{1\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}=0)$ und $H_{1XX}(X=0) = \mathfrak{H}_{1\mathfrak{X}\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}=0)$.

Die in den Abschnitten 3.4 bis 3.8 vorgenommenen Umformungen der Gleichung (2.54) und das Aufstellen von Kriterien für wellige Lösungen kann nun in analoger Weise für Gleichung (3.59) für die entsprechend transformierten Größen durchgeführt werden. Die entsprechenden Formeln sind in den beiden folgenden Abschnitten zusammengefasst. Im Falle von $\Gamma = 0$ ($s = 1$) gehen die Formeln für die transformierten Größen in die entsprechenden Formeln für die untransformierten Größen über. Im Falle von $s = 1$ und $1 > \Gamma \neq 0$ gehen nur jene Formeln für die transformierten Größen in die entsprechenden Formeln für die untransformierten Größen über, in die die Anfangsbedingungen nicht involviert sind, also alle in den folgenden zwei Abschnitten angegebenen Formeln mit Ausnahme von (3.73)-(3.76).

3.10 Äquivalenz der transformierten Gleichung (3.59) mit System von 3 Differentialgleichungen erster Ordnung und transformierte Anfangsbedingungen

Analog zu Abschnitt 3.4 kann man für die transformierte Gleichung (3.59) aus Abschnitt 3.9 ein äquivalentes Gleichungssystem von drei Differentialgleichungen erster Ordnung finden,

$$\mathfrak{H}_{1x}^2 = -\frac{1}{3}\mathfrak{H}_1^3 + s\mathfrak{H}_1^2 + 2(\mathfrak{R}\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{S}); \quad (3.64)$$

$$\mathfrak{R}_x = b\mathfrak{H}_1; \quad (3.65)$$

$$\mathfrak{S}_x = -b\mathfrak{H}_1^2, \quad (3.66)$$

mit den analog zu $R(X)$ und $S(X)$ definierten Größen und $\mathfrak{R}(x)$ und $\mathfrak{S}(x)$. Dabei gilt

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{H}_{1xx} + \mathfrak{H}_1 \left[\frac{1}{2}\mathfrak{H}_1 - s \right], \quad (3.67)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2}\mathfrak{H}_{1x}^2 - \frac{1}{6}\mathfrak{H}_1^2 [2\mathfrak{H}_1 - 3s] - \mathfrak{H}_{1xx}\mathfrak{H}_1 \quad (3.68)$$

wobei \mathfrak{H}_1 , \mathfrak{H}_{1x} und \mathfrak{H}_{1xx} mit (3.57) bis (3.58) auf die ursprünglichen, untransformierten Größen zurückgeführt werden können:

$$\Gamma \neq 1, \quad s = \pm 1: \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{(\Gamma - 1)^2} \left[H_{1xx} + H_1 \left(\frac{1}{2}H_1 - 1 \right) - \frac{1}{2} \left((\Gamma - 1)^2 - 1 \right) \right], \quad (3.69)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{|\Gamma - 1|^3} \left[\frac{1}{2}H_{1x}^2 - (H_1 - \Gamma)H_{1xx} + \frac{1}{6}(H_1 - \Gamma)^2(3 - 2H_1 - \Gamma) \right], \quad (3.70)$$

$$\Gamma = 1, \quad s = 0: \quad \mathfrak{R} = H_{1xx} + \frac{1}{2}(H_1 - 1)^2, \quad (3.71)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2}H_{1x}^2 - (H_1 - 1)H_{1xx} - \frac{1}{3}(H_1 - 1)^3. \quad (3.72)$$

Die Anfangsbedingungen transformieren sich analog. Mit den Formeln (3.62) bis (3.63) für $\mathfrak{H}_1(0)$, $\mathfrak{H}_{1x}(0)$ und $\mathfrak{H}_{1xx}(0)$ können die Anfangsbedingungen für die transformierten Größen auf die Anfangsbedingungen der ursprünglichen, untransformierten Größen zurückgeführt werden:

$$\Gamma \neq 1, \quad s = \pm 1: \quad \mathfrak{R}(0) = \frac{1}{(\Gamma - 1)^2} \left[H_{1xx}(0) + \Gamma \left(1 - \frac{1}{2}\Gamma \right) \right], \quad (3.73)$$

$$\mathfrak{S}(0) = \frac{1}{|\Gamma - 1|^3} \left[\frac{1}{2}H_{1x}^2(0) + \Gamma H_{1xx}(0) + \frac{1}{2}\Gamma^2 \left(1 - \frac{1}{3}\Gamma \right) \right], \quad (3.74)$$

$$\Gamma = 1, \quad s = 0: \quad \mathfrak{R}(0) = H_{1xx}(0) + \frac{1}{2}, \quad (3.75)$$

$$\mathfrak{S}(0) = \frac{1}{2}H_{1x}^2(0) + H_{1xx}(0) + \frac{1}{3}. \quad (3.76)$$

3.11 Algebraische Eigenschaften des Polynoms $q(\mathfrak{h}; \mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ und Kriterium für wellige Lösungen

Das auf der rechten Gleichungsseite von (3.64) auftretende Polynom in \mathfrak{h}_1 bezeichnen wir mit

$$q(\mathfrak{h}; \mathfrak{R}, \mathfrak{S}) := -\mathfrak{h}^3 + 3s\mathfrak{h}^2 + 6\mathfrak{R}\mathfrak{h} + 6\mathfrak{S}, \quad (3.77)$$

mit den Nullstellen \mathfrak{h}_1 , \mathfrak{h}_2 und \mathfrak{h}_3 , die von \mathfrak{R} und \mathfrak{S} abhängen. Ob diese Nullstellen reell und voneinander verschieden sind, lässt sich wieder anhand der Diskriminante $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ entscheiden, die wie folgt aussieht:

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}) = (s + 3s\mathfrak{R} + 3\mathfrak{S})^2 - (s^2 + 2\mathfrak{R})^3. \quad (3.78)$$

Im Fall, dass die drei Nullstellen reell sind, gilt $\mathfrak{D} \leq 0$ und

$$\mathfrak{h}_1 \leq \mathfrak{h}_2 \leq \mathfrak{h}_3 \quad (\text{geordnet}), \quad (3.79)$$

$$\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_3 = 3s, \quad (3.80)$$

$$\mathfrak{h}_1^{-1} + \mathfrak{h}_2^{-1} + \mathfrak{h}_3^{-1} = -\mathfrak{R}/\mathfrak{S}, \quad (3.81)$$

$$\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_3 = 6\mathfrak{S}, \quad (3.82)$$

siehe [9], oder alternativ zu (3.81) und (3.82) unter Verwendung von (3.79) und (3.80):

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{6}(\mathfrak{h}_2^2 + \mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_3 + \mathfrak{h}_3^2 - 3s(\mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_3)), \quad (3.83)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{6}(3s - \mathfrak{h}_2 - \mathfrak{h}_3)\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_3. \quad (3.84)$$

Der Grenzfall $\mathfrak{D} = 0$, der den Bereich reeller von den komplexwertigen Nullstellen trennt, entsteht beim Zusammenfallen von $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$ oder $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_3$ (oder dem Zusammenfallen aller drei Nullstellen). Diese Fälle lassen sich durch folgende Parameterdarstellungen für \mathfrak{R} und \mathfrak{S} beschreiben ($s \leq t < \infty$):

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2 : \quad \mathfrak{R} = 2(t - s)^2 - \frac{1}{2}s^2, \quad (3.85)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{6}(2t - 3s)^2(4t - 3s), \quad (3.86)$$

$$\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_3 : \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{2}(t - s)^2 - \frac{1}{2}s^2, \quad (3.87)$$

$$\mathfrak{S} = -\frac{1}{6}t^2(2t - 3s). \quad (3.88)$$

Im Fall dreier identischer Nullstellen $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_3 = s$ gilt $(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}) = (-s^2/2, s/6)$.

Wir werden auf die Ergebnisse dieses Abschnitts in Abschnitt 5.7 wieder zurückkommen, wenn wir den Bereich jener Anfangsbedingungen abgrenzen, die auf wellige Lösungen von Gleichung (3.59) führen.

3.12 Hydraulische Theorie und Vergleich mit quasi-eindimensionaler Näherung

Für praktische Anwendungen bei Kanalströmungen mit freien Oberflächen wird oft eine stationäre, eindimensionale Betrachtung herangezogen, bei der die Zustandsgrößen nur von der x -Koordinate abhängen, die wir hier als hydraulische Theorie bezeichnen wollen [15, 54, 57]. Im Rahmen einer solchen Theorie ist es allerdings nicht möglich, einen welligen Wassersprung zu beschreiben. Dieser stellt einen Grenzfall einer schnell veränderlichen Strömung (engl. „rapidly varying flow“) dar, siehe [57] S. 694, bei der die Annahmen der hydraulischen Theorie nicht erfüllt sind.

Wir wollen uns der hydraulischen Theorie nicht nur zu Vergleichszwecken bedienen, sondern auch deshalb, um aus dieser Aufschlüsse über die bislang fehlenden, eindeutigen Anfangsbedingungen $H_{1X}(0)$ und $H_{1XX}(0)$ für die aus der zweidimensionalen Betrachtung resultierenden asymptotischen Theorie (Gleichung (2.54)) zu erhalten, die einen welligen Sprung ermöglichen. Die hydraulische Theorie liefert bei gegebenen Werten von Flüssigkeitshöhe und Froude-Zahl bestimmte Werte für die Neigung und Krümmung der Oberfläche. Unter der Annahme, dass der überkritische Strömungszustand an einer bestimmten Stelle $x \geq 0$ vor Einsetzen eines welligen Wassersprungs sowohl durch die hydraulische Theorie als auch durch die in Kapitel 2 dargelegte asymptotische Theorie beschrieben werden kann, kann man den Wert von Flüssigkeitshöhe, -steigung und -krümmung an dieser Stelle von der hydraulischen Theorie, die selbst keine welligen Oberflächen beschreiben kann, in Gleichung (3.55) einsetzen und überprüfen, ob damit das Kriterium für wellige Lösungen von Gleichung (2.54) erfüllt ist. Damit erhält man eine Aussage darüber, ob und aus welchen überkritischen Strömungszuständen, beschrieben nach der hydraulischen Theorie, ein welliger Wassersprung, beschrieben durch Gleichung (2.54) der zweidimensionalen Theorie, resultieren kann.

Bezeichnet u die Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung x , h_{hyd} die Höhe der Oberfläche vom Kanalboden aus gemessen, α die konstante Neigung des Kanalbodens und c_f den (nicht notwendigerweise konstanten) Bodenreibungsbeiwert, so lautet die Bewegungsgleichung nach der hydraulischen Theorie (siehe [57], S. 716, 717, [15], S. 218 ff.)

$$u \frac{du}{dx} + g \frac{dh_{\text{hyd}}}{dx} = g\alpha - \frac{c_f}{2} \frac{u^2}{h_{\text{hyd}}}, \quad (3.89)$$

die mit der Kontinuitätsbedingung

$$\frac{d(uh_{\text{hyd}})}{dx} = 0 \quad (3.90)$$

auf folgende Form gebracht werden kann (vgl. [57], S. 717)

$$\frac{dh_{\text{hyd}}}{dx} = \frac{c_f}{2} \frac{\text{Fr}_0^2 - \text{Fr}^2}{1 - \text{Fr}^2}, \quad (3.91)$$

mit den Definitionen

$$\text{Fr} := u / \sqrt{gh_{\text{hyd}}}, \quad \text{Fr}_0 := \sqrt{2\alpha/c_f}. \quad (3.92)$$

Im Falle voll-ausgebildeter Strömung ist $\text{Fr} = \text{Fr}_0$, der kritische Strömungszustand herrscht bei $\text{Fr} = 1$, und der Übergang ins tiefe Wasser findet beim Übergang zu $\text{Fr} = 0$ statt.

Anhand von Gleichung (3.91) lassen sich Oberflächenprofile für verschiedene Fälle der Zuströmung klassifizieren. Enthalten ist dabei auch der Fall des horizontalen Kanals mit $Fr_0 = 0$. Diese Fälle sind z.B. in Abbildung (9-2) von [15] dargestellt.

Nach (3.91) gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} Fr > 1 \text{ und } Fr > Fr_0 \\ \text{oder} \\ Fr < 1 \text{ und } Fr < Fr_0 \end{array} \right\} \quad \frac{dh_{\text{hyd}}}{dx} > 0 \text{ und } \frac{dFr}{dx} < 0, \quad (3.93)$$

$$\left\{ Fr \neq 1 \text{ und } Fr = Fr_0 \right\} \quad \frac{dh_{\text{hyd}}}{dx} = 0 \text{ und } Fr = Fr_0 = \text{const}, \quad (3.94)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Fr > 1 \text{ und } Fr < Fr_0 \\ \text{oder} \\ Fr < 1 \text{ und } Fr > Fr_0 \end{array} \right\} \quad \frac{dh_{\text{hyd}}}{dx} < 0 \text{ und } \frac{dFr}{dx} > 0. \quad (3.95)$$

Dies ergibt eine in Tabelle 3.1 dargestellte Übersicht über alle möglichen (nichttrivialen) Fälle.

		$Fr > 1$	$Fr < 1$	$Fr = Fr_r, Fr_0 = Fr_{0r}$
$Fr > Fr_0$	$Fr_0 < 1$	$Fr \rightarrow 1$		$\Gamma > 0$
	$Fr_0 > 1$	$Fr \rightarrow Fr_0$	$Fr \rightarrow 0$	$\Gamma < 0$
$Fr < Fr_0$				

Tabelle 3.1: Qualitatives Strömungsverhalten nach der hydraulischen Theorie

Daraus ist zu entnehmen, dass im Falle des horizontalen Kanals ($Fr_0 = 0$) die Strömung in jedem Fall dem kritischen Strömungszustand $Fr \rightarrow 1$ entgegenstrebt.

Der Zustand des tiefen Wassers ($Fr = 0$) ist nur aus einem unterkritischen Strömungszustand mit $Fr < 1$ erreichbar.

Ein voll-ausgebildeter Strömungszustand ($Fr = Fr_0$) kann nur aus überkritischen Strömungszuständen mit $Fr > 1$ erreicht werden.

Die letzte Spalte gibt dabei das Vorzeichen des Parameters Γ in Gleichung (2.54) an, wenn die angegebenen Strömungsverhältnisse im Referenzpunkt der zweidimensionalen Theorie herrschen. Dies folgt aus Gleichung (3.100) weiter unten.

Um Gleichung (3.91) mit der Bestimmungsgleichung für die freie Oberfläche (2.54) aus der asymptotischen zweidimensionalen Theorie zu vergleichen, muss (3.91) in analoger Weise entdimensionalisiert und um den kritischen Referenzzustand $Fr_r = 1 + \frac{3}{2}\varepsilon$ entwickelt werden. Nach der in Gleichungen (2.5), (2.6) und (2.11) eingeführten Notation ist

$$c_f(x) := \frac{2\tau_w(x)}{\rho \bar{u}_r^2} = 2 \left(\frac{u_\tau(x)}{\bar{u}_r} \right)^2 = 2 \left(\frac{Fr_\tau(x)}{Fr_r} \right)^2. \quad (3.96)$$

Mit den Gleichungen (2.22), (2.24), (2.25), (2.45), (2.46) und (2.53) erhält man

$$Fr_{rr} = \sqrt{\frac{c_{fr}}{2}} \left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon \right), \quad (3.97)$$

$$\beta = \frac{c_{fr}}{6\varepsilon^{3/2}} \left[1 + 3\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right], \quad (3.98)$$

$$\Gamma = \frac{1}{3\varepsilon} \left[1 - 2\frac{\alpha}{c_{fr}} + 3\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right], \quad (3.99)$$

wobei $c_{fr} := c_f(x=0)$. Eine Kombination der Gleichungen (2.22), (3.92), (3.96), (3.99) und (2.45) ergibt bis auf Terme höherer Ordnung

$$Fr_r^2 - Fr_{0r}^2 = 3\Gamma\varepsilon, \quad (3.100)$$

sodass aus den Größenverhältnissen der Froude-Zahlen im Referenzzustand auf das Vorzeichen von Γ geschlossen werden kann. Dies ist in Tabelle 3.1, letzte Spalte dargestellt. Nach der hydraulischen Theorie ist also nur mit Werten $\Gamma < 0$ der Zustand des tiefen Wassers erreichbar, und nur mit Werten $\Gamma > 0$ kann der kritische Zustand erreicht werden.

Damit können in Gleichung (3.91) nach Entdimensionalisierung die Größen $h_{hyd}(X)$, $c_f(X)$ und $Fr(X)$ entwickelt werden. Es ist

$$Fr^2 = 1 + 3(1 - H_1)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (3.101)$$

$$c_f/c_{fr} = 1 - 2H_1\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (3.102)$$

und mit (2.2), (2.3), (2.45), (2.46) und (2.53) folgt als Ergebnis eine Bestimmungsgleichung für die Störung der freien Oberfläche nach der hydraulischen Theorie:

$$(H_{hyd1} - 1)H_{hyd1X} - \frac{5}{3}\beta H_{hyd1} + \beta\Gamma = 0. \quad (3.103)$$

Der Unterschied dieser Gleichung zu (2.54) ist der fehlende Term H_{1XXX} sowie der hier auftretende Faktor $\frac{5}{3}$ vor dem Term $-\beta H_1$.

Wir wollen nun diese Bestimmungsgleichung mit einer quasi-eindimensionalen Näherung von Gleichung (2.54) vergleichen. Eine solche Näherung kann erzielt werden, indem man eine Koordinatenstreckung $\tilde{X} := \beta X$ ($\beta \ll 1$) durchführt. Mit $d/dX = \beta d/d\tilde{X}$ und der Vernachlässigung von Termen der $O(\beta^2)$ ergibt sich für (2.54)

$$(H_{q1} - 1)H_{q1\tilde{X}} - (H_{q1} - \Gamma) = 0, \quad (3.104)$$

wobei wir für die Störung der dimensionslosen Flüssigkeitshöhe in der quasi-eindimensionalen Näherung die eigene Bezeichnungsweise H_{q1} eingeführt haben. Im Vergleich mit Gleichungen (3.103) und (2.54) fällt der Term H_{1XXX} in der hydraulischen und quasi-eindimensionalen Theorie weg.

Die Lösungen der beiden Gleichungen (3.103) und (3.104) mit den Anfangsbedingungen $H_{hyd1}(0) = 0$ und $H_{q1}(0) = 0$ können implizit angegeben werden:

$$H_{hyd1}(X) + \left(\frac{3}{5}\Gamma - 1\right) \ln \left| 5H_{hyd1}(X)/3\Gamma - 1 \right| = 5\beta X/3 \quad (3.105)$$

$$H_{q1}(X) + (\Gamma - 1) \ln \left| H_{q1}(X)/\Gamma - 1 \right| = \beta X \quad (3.106)$$

wobei wir statt \tilde{X} wieder βX eingeführt haben. Die beiden Lösungen sind für verschiedene Γ -Werte in Abbildung 3.3 dargestellt.

Die Werte $\Gamma = 5/3$ bzw. $\Gamma = 1$ stellen jene Grenzfälle in der hydraulischen bzw. quasi-eindimensionalen Theorie dar, ab denen für größere Werte von Γ die überkritische Strömung stets einem kritischen Zustand zustrebt ($Fr_r > 1 > Fr_{0r}$, $Fr \rightarrow 1$), für kleinere, aber positive Werte von Γ strebt die überkritische Strömung stets einem überkritischen, vollausgebildeten Zustand zu ($Fr_r > Fr_{0r} > 1$, $Fr \rightarrow Fr_0$), und für negative Werte von Γ strebt die überkritische Strömung einem vollausgebildeten über- oder unterkritischen Zustand zu ($Fr_{0r} > Fr_r > 1$, $Fr \rightarrow Fr_0$), vgl. Tabelle 3.1. Im Falle des Übergangs zu vollausgebildeter

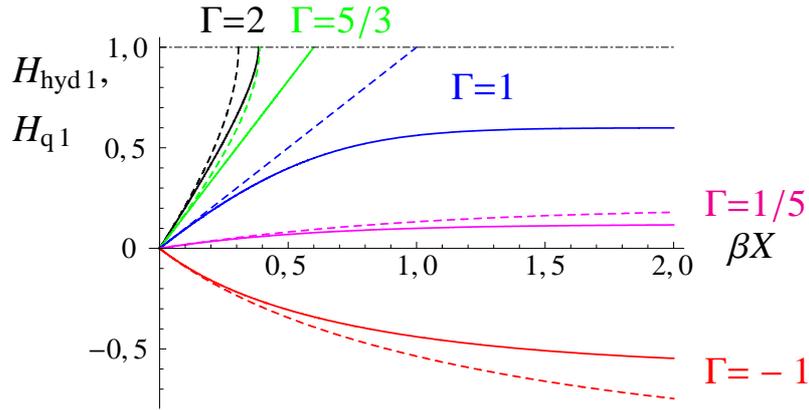


Abbildung 3.3: Profile der Oberflächenstörungen nach der hydraulischen Theorie (3.105) (durchgezogene Kurven) und nach der quasi-eindimensionalen Näherung (3.106) (strichlierte Kurven)

Strömung beträgt der Wert der Flüssigkeitshöhenstörung asymptotisch weit stromab $3\Gamma/5$ bzw. Γ nach der hydraulischen bzw. quasi-eindimensionalen Theorie.

Aus den Lösungen (3.105) und (3.106) folgen unmittelbar Werte für die Neigung und Krümmung der Oberfläche. Diese Werte lauten am Referenzpunkt

$$H_{\text{hyd}1}(0) = 0 \qquad H_{q1}(0) = 0 \qquad (3.107)$$

$$H_{\text{hyd}1X}(0) = \beta\Gamma \qquad H_{q1X}(0) = \beta\Gamma \qquad (3.108)$$

$$H_{\text{hyd}1XX}(0) = \beta^2\Gamma(\Gamma - \frac{5}{3}) \qquad H_{q1XX}(0) = \beta^2\Gamma(\Gamma - 1) \qquad (3.109)$$

Setzt man die Werte für die Neigung und Krümmung der Oberfläche, die aus (3.105) und (3.106) folgen, in Gleichung (3.55) ein, so folgt

$$\begin{aligned} D(H_{\text{hyd}1}) &= -\frac{1}{3}\beta^2(H_{\text{hyd}1} - 1)(5H_{\text{hyd}1} - 3\Gamma)^2 \\ &+ \beta^4 \frac{(5H_{\text{hyd}1} - 3\Gamma)^2}{108(H_{\text{hyd}1} - 1)^4} \left[-100 + 99\Gamma^2 + 75H_{\text{hyd}1}(H_{\text{hyd}1} + 4) - 30\Gamma(9H_{\text{hyd}1} + 2) \right] \\ &+ O(\beta^6) \end{aligned} \qquad (3.110)$$

$$\begin{aligned} D(H_{q1}) &= -3\beta^2(H_{q1} - 1)(H_{q1} - \Gamma)^2 \\ &+ \beta^4 \frac{3(H_{q1} - \Gamma)^2}{4(H_{q1} - 1)^4} \left[-4 + 11\Gamma^2 + 3H_{q1}(H_{q1} + 4) - 2\Gamma(9H_{q1} + 2) \right] \\ &+ O(\beta^6) \end{aligned} \qquad (3.111)$$

Für überkritische Strömung (also bei Werten von $H_{\text{hyd}1}$ bzw. H_{q1} zwischen 0 und 1) folgt in führender Ordnung in β sowohl für die hydraulische Theorie als auch die quasi-eindimensionale Näherung, dass stets $D > 0$, unabhängig von Γ . Daraus folgt, dass weder aus der hydraulischen noch aus der quasi-eindimensionalen Lösung (3.105) bzw. (3.106) Strömungszustände resultieren, die als Ausgangszustand (z.B. als Anfangsbedingungen für Gleichung (2.54)) zu einer welligen Lösung nach der zweidimensionalen Theorie führen. Das bedeutet, dass leicht überkritische, turbulente Kanalströmungen mit nur langsam veränderlichen Strömungsverhältnissen keinen welligen Wassersprung zulassen, solange

Allgemeine Eigenschaften und Analyse der Bestimmungsgleichung (2.52) bzw. (2.54)
für die Störung der freien Oberfläche

eine eindimensionale Betrachtung zutreffend ist. Ein solcher muss durch eine wie auch immer geartete plötzliche Störung der Strömung oder durch zweidimensionale Effekte ausgelöst werden.

Kapitel 4

Numerische Lösungen der Bestimmungsgleichung für die Störung der freien Oberfläche und Vergleich mit hydraulischer Theorie

4.1 Lösungen mit Übergang zu horizontalem Flüssigkeitsspiegel

Gleichung (2.54) lässt sich bei der Vorgabe von Anfangsbedingungen $H_1(0)=0$, $H_{1X}(0)$ und $H_{1XX}(0)$ direkt numerisch integrieren. Dabei treten drei unterschiedliche Klassen von Lösungen zutage, die wir hier systematisch auflisten wollen.

Die Berechnung der in diesem Unterkapitel dargestellten numerischen Lösungen erfolgte (ausser in eigens erwähnten Fällen) mittels der Software MATHEMATICA 6.0.1.0 unter Einsatz eines impliziten Runge-Kutta-Verfahrens bei konstanter Schrittweite mit mindestens 1000 Schritten.

Die erste Klasse von Lösungen ist jene, bei denen weit stromab ein Übergang zu einem horizontalen Flüssigkeitsspiegel festgestellt werden kann, also $H_1 \sim \beta X$ für $X \rightarrow \infty$ (siehe Abschnitt 3.1, Gleichung (3.2) ff. sowie Abschnitt 3.3). Abbildung 4.1 zeigt einige Beispiele für verschiedenen Werte von Γ bei festen Werten von β und den Anfangsbedingungen. Zur Veranschaulichung des Einflusses des Parameters β auf die Lösungen ist zusätzlich die Solitonenlösung der reibungsfreien Theorie (3.52) eingezeichnet, die die Lösung von Gleichung (2.54) für den Fall $\beta = 0$ darstellt. Deren Parameter h_2 lässt sich aus den Anfangsbedingungen mit (3.43) und (3.44) und anschließender Berechnung der Nullstellen des Polynoms (3.25) ermitteln. Die Solitonenlösung erfüllt jedoch nicht die vorgegebenen Anfangsbedingungen und ist nur bis auf eine willkürliche Verschiebung in X festgelegt, wobei hier $X_0=4,18$ gewählt wurde, sodass die ersten Kurvenmaxima von reibungsfreier und reibungsbehafteter Theorie in etwa übereinstimmen. Im Phasendiagramm erscheint die Solitonenlösung als homokliner Orbit.

Bei den Lösungskurven in Abbildung 4.1(a) ist das asymptotische Verhalten weit stromab nicht zu erkennen. Dies ist jedoch der Abbildung 4.1(b) zu entnehmen, die die Lösungskurven über längere Distanzen hin zeigt. Alle Kurven streben unabhängig vom Wert von

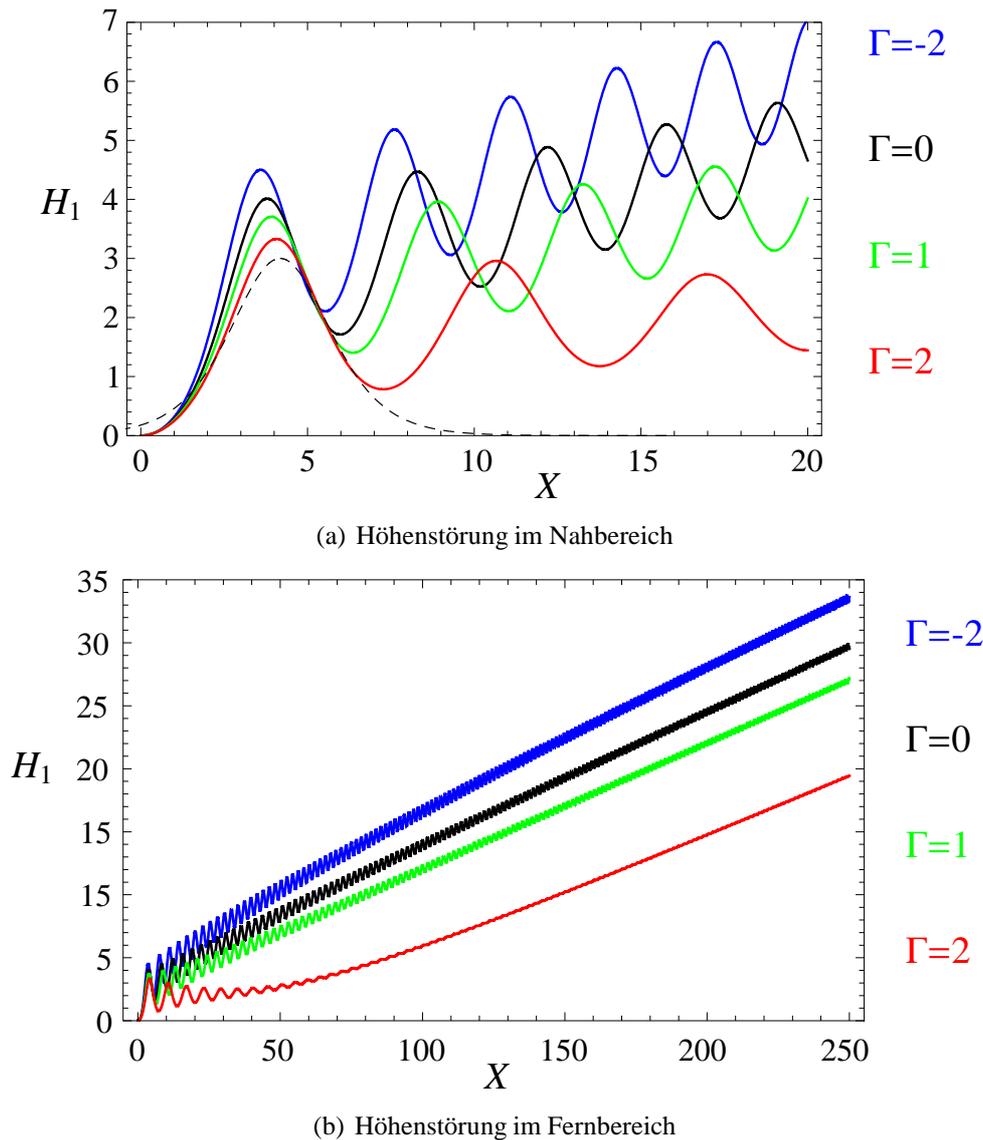


Abbildung 4.1: Höhenstörungen aus der numerischen Lösung von Gleichung (2.54) mit der Asymptote $H_1 \sim \beta X$ für $X \rightarrow \infty$. $\beta=0,1$, $H_1(0)=0$, $H_{1X}(0)=0,01$, $H_{1XX}(0)=0,5$. Die strichlierte Kurve stellt die Solitonlösung (3.52) dar.

Γ einer konstanten Neigung β entgegen. Diese Asymptoten sind jedoch um Konstanten bezüglich der Abszisse verschoben, die umso größer sind, je größer Γ ist. Weiters ist zu erkennen, dass größere Werte von Γ eine stärkere Dämpfung der welligen Struktur bewirken, was im Einklang mit der Definition von $\Gamma = \gamma/\beta$ mit (2.46) auf höhere turbulente Dissipation zurückzuführen ist. Ein ähnlicher Einfluss auf die Dämpfung ist durch höhere Werte von β feststellbar, wie schon in [26, 51] festgestellt wurde.

Die hier präsentierten Lösungen, die einen Übergang ins tiefe Wasser beschreiben, ähneln allesamt den Lösungen für $\Gamma=0$ in [26, 51]. Ist die Lösungsfunktion $H_1(X)$ bekannt, so lässt sich das Auftreten dieser welligen numerischen Lösungen von (2.54) verstehen, indem man Gleichung (3.55) als Kriterium für die Existenz von welligen Lösungen heranzieht. Aus den Werten des Lösungsvektors (H_1, H_{1X}, H_{1XX}) kann das Vorzeichen von D

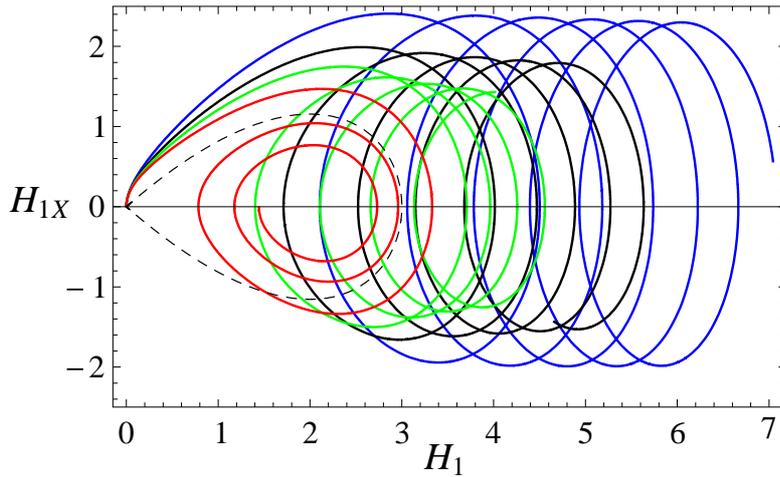


Abbildung 4.2: Phasendiagramm der Lösungen aus Abbildung 4.1(a).

für den gesamten Lösungsverlauf direkt berechnet werden.

Die in Abbildungen 4.1 und 4.2 dargestellten Lösungen erfüllen bei $X = 0$ und für alle $X > 0$ das notwendige Kriterium $D < 0$, daher sind diese Lösungen wellig. Die in [26, 51] gewählten Anfangsbedingungen $0 < H_1(0) \ll 1$, $H_{1X}(0) = 0$ und $H_{1XX}(0) = 0$, die anstelle der asymptotischen Randbedingung $H_1 \rightarrow 0$ für $X \rightarrow -\infty$ für die numerische Integration verwendet werden, führen allerdings auf $D = 0$, also den aperiodischen Grenzfall.

Integriert man jedoch von diesem Anfangszustand aus Gleichung (2.54), so folgt nach dem ersten Integrationsschritt ΔX :

$$H_1(\Delta X) = H_1(0) + \Delta X H_{1X}(0) + \mathcal{O}(\Delta X^2) = H_1(0), \quad (4.1)$$

$$H_{1X}(\Delta X) = H_{1X}(0) + \Delta X H_{1XX}(0) + \mathcal{O}(\Delta X^2) = 0, \quad (4.2)$$

$$H_{1XX}(\Delta X) = H_{1XX}(0) + \Delta X H_{1XXX}(0) + \mathcal{O}(\Delta X^2) = \Delta X \beta (H_1(0) - \Gamma) \quad (4.3)$$

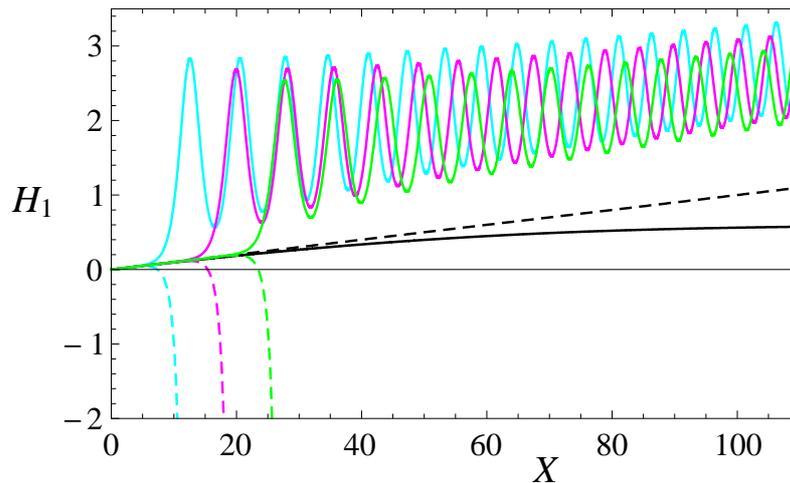
und durch Einsetzen in (3.55), dass $D(H_1(\Delta X), H_{1X}(\Delta X), H_{1XX}(\Delta X)) < 0$, wenn nur $\beta \Gamma \Delta X < 3/8 [1 - 2H_1(0)]$. Das bedeutet, dass das Kriterium für eine wellige Lösung nach dem ersten (ausreichend kleinen) Integrationsschritt bereits erfüllt ist, wenn z.B. wie in [26, 51] $\Gamma = 0$ ist. Obwohl die in [26, 51] gestellten asymptotischen Anfangsbedingungen streng genommen keine wellige Lösung zulassen, so wird bedingt durch die numerische Integration auch in diesen Fällen eine wellige Lösung erhalten.

Analog führt eine kleine (positive oder negative) Störung der Krümmung der flachen Oberfläche $H_1(0) = 0$, $H_{1X}(0) = 0$, $|H_{1XX}(0)| \ll 1$ auf $D = -H_{1XX}(0)^2 [3 + 8H_{1XX}(0)] < 0$. Aus (3.46) folgt aber, dass nur Werte $H_{1XX}(0) > 0$ zu welligen Lösungen führen. Abbildung 4.3 zeigt Lösungen von Gleichung (2.54) in Abhängigkeit unterschiedlicher Anfangsbedingungen bei festen Parametern $\beta = 0, 01$ und $\Gamma = 1$.

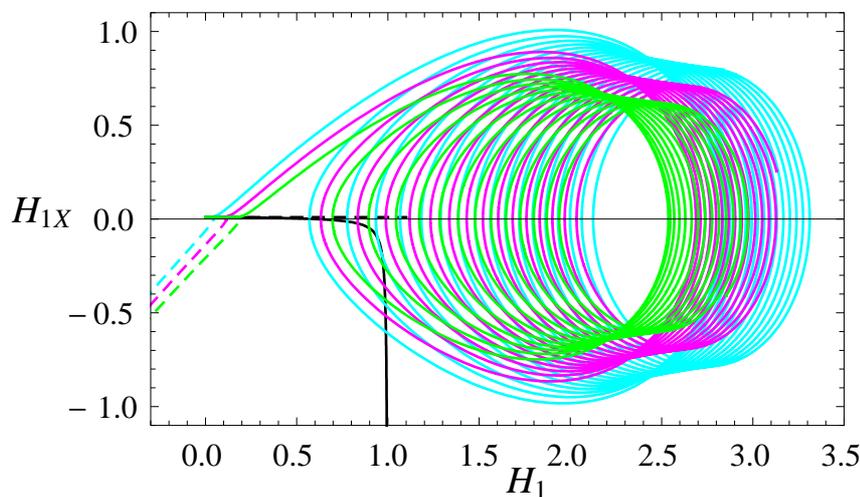
Als Anfangsbedingungen wurden die aus den Gleichungen (3.107)-(3.109) folgenden Werte für Neigung und Krümmung am Referenzpunkt nach der hydraulischen Theorie $H_1(0) = 0$, $H_{1X}(0) = 0, 01$ und $H_{1XX}(0) = -6, 7 \cdot 10^{-5}$ bzw. nach der quasi-eindimensionalen Theorie $H_1(0) = 0$, $H_{1X}(0) = 0, 01$ und $H_{1XX}(0) = 0$ vorgeschrieben. Aus Abbildung 4.3 ist anhand der durchgezogenen Lösungskurven zu entnehmen, dass bei kleinen, aber positiven Abweichungen der anfänglichen Oberflächenkrümmung gegenüber dem Wert 0 der

quasi-eindimensionalen Theorie eine wellige Lösung auftritt, deren erster Wellenberg bei kleineren Abweichungen von 0 weiter nach rechts verschoben ist. Zum Vergleich sind die bei betragsmässig gleicher, aber negativer Störung der anfänglichen Oberflächenkrümmung strichliert eingezeichneten Lösungskurven dargestellt, die nach den Feststellungen in Abschnitt 3.8 zu keiner welligen Struktur führen.

Zusätzlich sind zum Vergleich die Lösungen nach der quasi-eindimensionalen und nach der hydraulischen Theorie eingezeichnet, siehe Gleichungen (3.106) und (3.105), die beide keinen welligen Sprung der Oberfläche zulassen. Die Lösung nach der hydraulischen



(a) Höhenstörung



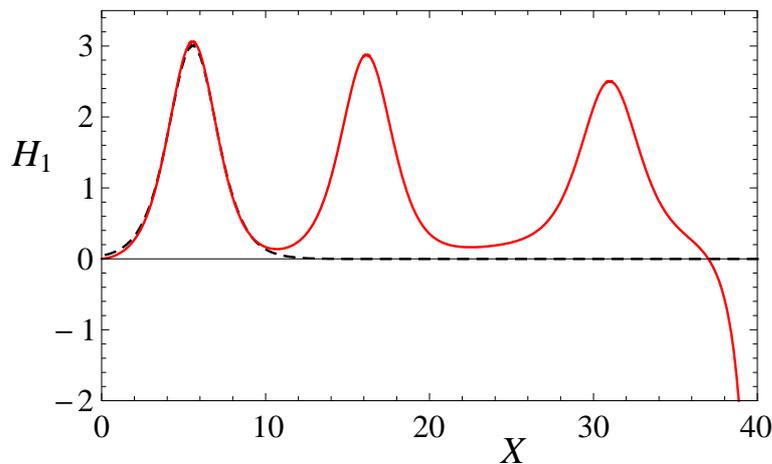
(b) Phasendiagramm

Abbildung 4.3: Numerische Lösungen von Gleichung (2.54) mit $\Gamma = 1$, $\beta = 0,01$, $H_1(0) = 0$, $H_{1X}(0) = 0,01$ und verschiedenen Werten von $H_{1XX}(0)$: $H_{1XX}(0) = 10^{-4}$ (durchgezogen) bzw. $H_{1XX}(0) = -10^{-4}$ (strichliert), $H_{1XX}(0) = 10^{-7}$ (durchgezogen) bzw. $H_{1XX}(0) = -10^{-7}$ (strichliert), $H_{1XX}(0) = 10^{-10}$ (durchgezogen) bzw. $H_{1XX}(0) = -10^{-10}$ (strichliert). Die schwarz strichlierte Kurve stellt die Lösung (3.2) (mit $c=0$) dar, die sich in diesem Fall mit der Lösung der quasi-eindimensionalen Theorie (3.106) deckt. Die schwarz durchgezogene Kurve stellt die Lösung nach der hydraulischen Theorie (3.105) dar.

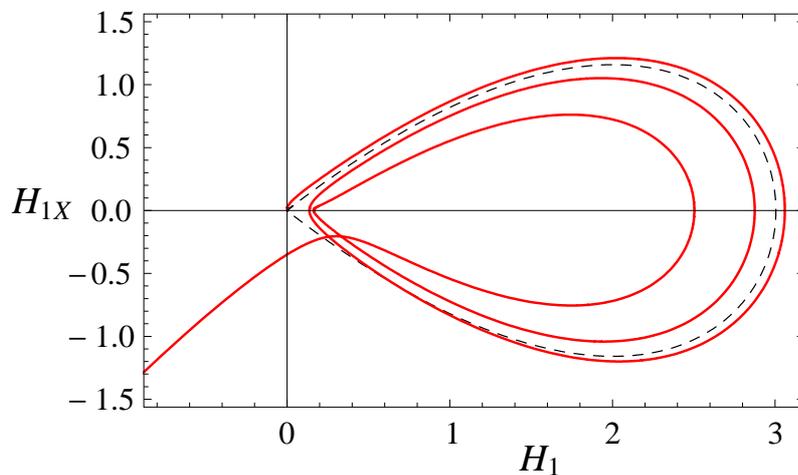
Theorie nähert sich asymptotisch dem Wert $3/5$ an, während durch die spezielle Wahl von $\Gamma = 1$ die Lösung nach der quasi-eindimensionalen Theorie mit der speziellen sprungfreien Lösung (3.2) (mit $c=0$) der vollen Gleichung (2.54) zusammenfällt.

4.2 Lösungen mit beschränktem Gültigkeitsbereich

Zur zweiten Klasse der numerischen Lösungen von Gleichung (2.54) zählen jene, deren Gültigkeitsbereich in X -Richtung beschränkt ist. Abbildung 4.4 zeigt eine solche Lösung bei einer speziellen Wahl der Parameter und der Anfangsbedingungen.



(a) Höhenstörung



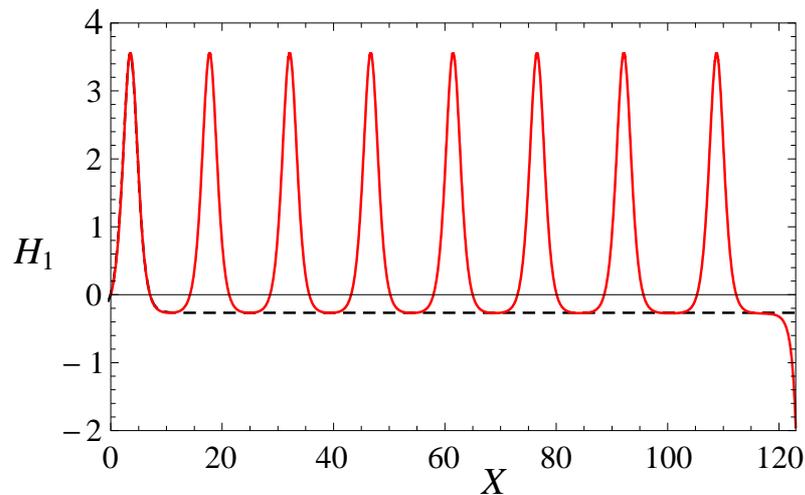
(b) Phasendiagramm

Abbildung 4.4: Numerische Lösung von Gleichung (2.54) mit beschränktem Gültigkeitsbereich: $\Gamma = 2$, $\beta = 0,01$, $H_1(0) = 0$, $H_{1X}(0) = 0,02$ und $H_{1XX}(0) = 0,085$. Die schwarz strichlierte Kurve stellt die Solitonenlösung (3.52) dar.

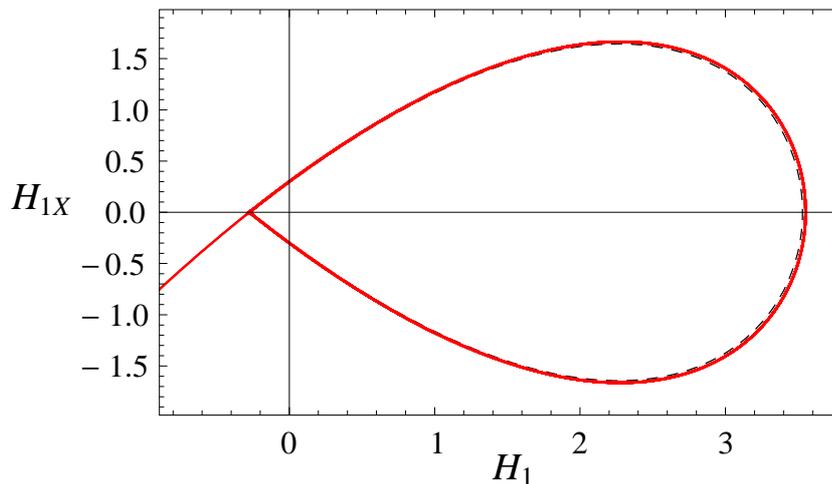
Zur Orientierung ist schwarz strichliert die Solitonenlösung (3.52) der reibungsfreien Theorie eingezeichnet, deren Parameter h_2 sich aus den gestellten Anfangsbedingungen

berechnen lässt, wobei die Solitonenlösung selbst die Anfangsbedingungen nicht erfüllt. Die willkürliche Verschiebung in X wurde in Abbildung 4.4(a) zu $X_0 = 5,56$ gewählt, so dass die ersten Maxima der reibungsfreien und der reibungsbehafteten Theorie in etwa zusammenfallen.

Zu erkennen ist, dass die Lösung nach drei Wellenbergen schliesslich in einer Singularität $H_1 \rightarrow -\infty$ endet. Dies hängt damit zusammen, dass das notwendige Kriterium für wellige Lösungen $D < 0$ (D kann mittels Gleichung (3.55) bestimmt werden), das für die Anfangsbedingungen erfüllt ist, ab einem gewissen X -Wert nicht mehr erfüllt ist. Aus Kenntnis der Anfangsbedingungen alleine ist allerdings das Abbrechen der Lösung nicht vorhersagbar. Die Frage, bei welchen Anfangsbedingungen abbrechende Lösungen auftreten, werden wir erst in Abschnitt 5.7 mittels Abbildung 5.7 beantworten können.



(a) Höhenstörung



(b) Phasendiagramm

Abbildung 4.5: Numerische Lösung von Gleichung (2.54) mit beschränktem Gültigkeitsbereich: $\Gamma = 3$ und $\beta = 10^{-6}$ $H_1(0) = 0$, $H_{1X}(0) = 0,3$ und $H_{1XX}(0) = 0,314$. Die schwarz strichlierte Kurve stellt die Solitonenlösung (3.52) dar. Für $0 < X \lesssim 10$ sind die beiden Lösungen nahezu identisch.

Abbildung 4.5 zeigt ebenfalls eine Lösung mit beschränktem Gültigkeitsbereich, bei der bis zum Abbruch der Lösung ein längerer Bereich mit einer welligen Struktur durchlaufen wird. Die hier dargestellte Lösungsfunktion liegt sehr nahe an der entsprechenden Solitonenlösung der reibungsfreien Theorie. Die Verschiebung der Solitonenfunktion in Abbildung 4.5(a) beträgt $X_0 = 3,5$.

Ein Vergleich der Lösungen von Abschnitt 4.1 mit der Lösung in Abbildung 4.5 wirft die Frage auf, ob eine Lösung, die vermeintlich asymptotisch zu einem horizontalen Flüssigkeitsspiegel führt, also für die das Kriterium für wellige Lösungen über lange Distanzen hinweg erfüllt bleibt, bei Integration über ein ausreichend langes Integrationsintervall irgendwann in einer Singularität endet, d.h. das Kriterium ab einem $X \gg 1$ nicht mehr erfüllt ist. Diese Frage ist aus der Betrachtung der numerischen Lösungen von (2.54) nicht unmittelbar zu beantworten. Die Antwort werden wir erst in Abschnitt 5.7 geben können.

4.3 Lösungen mit Übergang zu voll ausgebildeter Abströmung

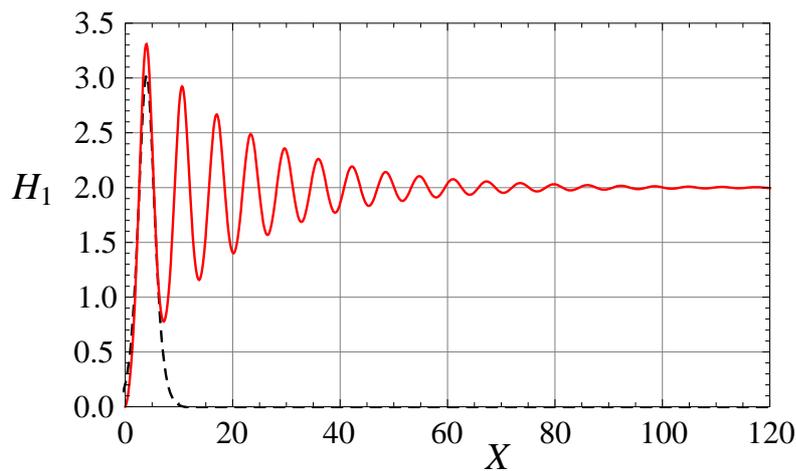
Eine andere Klasse von numerischen Lösungen von Gleichung (2.54) umfasst jene Lösungen, die asymptotisch weit stromab ($X \rightarrow \infty$) in den voll ausgebildeten Strömungszustand mit $H_1 = \Gamma$ übergehen. Infolge des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik muss jedoch die Störung der Flüssigkeitshöhe weit stromab, $H_1 > 1$ sein, siehe Abschnitt 3.1, das heisst, dass diese Lösungen nur für Parameterwerte $\Gamma > 1$ auftreten. Abbildung 4.6 zeigt beispielhaft ein Ergebnis.

Zur der in Abbildung 4.6 dargestellten Lösung ist festzustellen, dass sie nicht wie die Lösungen aus den Abschnitten 4.1 und 4.2 aus einem Anfangswertproblem erhalten werden kann. Dies hat folgenden Grund: Für Werte von H_1 in der Nähe von Γ kann Gleichung (2.54) um Γ linearisiert werden, die allgemeine Lösung für diesen Fall ist in Gleichung (3.4) angegeben. Diese Lösung enthält für $\Gamma > 1$ eine Exponentialfunktion mit positivem Exponenten proportional zu β . Bei der Berechnung einer Lösung von Gleichung (2.54) für $\Gamma > 1$ als Anfangswertproblem führen daher numerische Fehler bei fortschreitender Integration in X in der Nähe von $H_1 = \Gamma$ stets auf diesen exponentiell anwachsenden Lösungsast. Die Lösung zweigt dann von der exakten Lösung mit der Asymptote $H = \Gamma$ ab und nähert sich der Asymptote $H_1 \sim \beta X$ an. Lösungen mit dem asymptotischen Verhalten $H_1 \rightarrow \beta X$ zweigen bei numerischen Fehlern hingegen nicht auf andere Lösungsäste ab, da Abweichungen von der Asymptote in diesem Fall nur von logarithmischer Grösse sind. Dies kann der Lösung der um $H_1 = \beta X$ linearisierten Gleichung entnommen werden kann, siehe Gleichung (3.12).

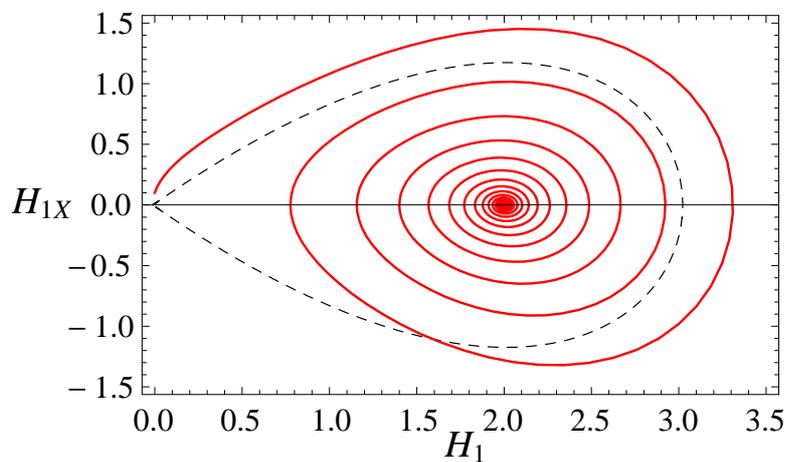
Die Auswirkung der mit X exponentiell anwachsenden Abweichungen von $H_1 = \Gamma$ kann in Abbildung 4.1 anhand der Lösung für $\Gamma = 2$ beobachtet werden, die sich ab dem Wert $X \approx 30$ durch ein starkes Anwachsen der mittleren Höhe bemerkbar machen.

Für das Auffinden von Lösungen von Gleichung (2.54) mit der Asymptote $H_1 \rightarrow \Gamma$ reformulieren wir die Aufgabenstellung daher als Randwertproblem. Durch die Randbedingung $H_1 = \Gamma$ am rechten Ende des Integrationsintervalls, das zu diesem Zwecke ausreichend groß gewählt werden muss, wird der asymptotische Wert der Lösung erzwungen.

Für die Lösung in Abbildung 4.6 wurden zwei Randbedingungen bei $X = 0$, nämlich $H_1(0) = 0$ und $H_{1X}(0) = 0,1$, sowie eine Randbedingung asymptotisch weit stromab ge-



(a) Höhenstörung



(b) Phasendiagramm

Abbildung 4.6: Numerische Lösung von Gleichung (2.54) mit Übergang zu voll ausgebildeter Strömung: $\Gamma = 2$, $\beta = 0,1$, $H_1(0) = 0$, $H_{1X}(0) = 0,1$ und $H_1(130) = 2$. Die schwarz strichlierte Kurve stellt die Solitonenlösung (3.52) dar.

stellt. Im Rahmen des endlichen numerischen Integrationsbereiches wurde das rechte Intervallende zu $X = 130$ gewählt und an dieser Stelle der asymptotische Wert der Flüssigkeitshöhe, $H_1(130) = 2$ vorgeschrieben. Der Wahl des Wertes $X = 130$ für das rechte Ende des Integrationsbereiches wurde dabei so getroffen, dass einerseits Abweichungen vom asymptotischen Wert $H_1 = 2$ im Rahmen der numerischen Rechnung hinreichend klein sind und andererseits der Rechenaufwand begrenzt bleibt.

Zur numerischen Berechnung wurde im Rahmen der Software MATLAB 7.5.0 als Randwertlöser die Funktion `bvp4c` verwendet, die auf einem Kollokationsverfahren basiert. Der Integrationsbereich erstreckte sich auf $X \in [0, 130]$, es wurden ca. 2300 Stützstellen verwendet, die variable Schrittweite in X -Richtung betrug zwischen 0,02 und 0,25, das Residuum der Lösung betrug 10^{-6} , und als Schätzfunktion für H_1 wurde die konstante

Funktion 2 vorgegeben.

In Abbildung 4.6 ist zur Orientierung zusätzlich wieder die Solitonenlösung (3.52) der reibungsfreien Theorie dargestellt, wobei eine Verschiebung $X_0 = 3,95$ gewählt wurde, sodass ihr Maximum mit dem ersten Maximum Lösung der reibungsbehafteten Theorie in etwa zusammenfällt. Der in der Solitonenlösung auftretende Parameter h_2 wurde wie folgt berechnet: Aus der Randbedingung $H_{1X}(0) = 0,1$ sowie dem numerisch ermittelten Ergebnis $H_{1XX}(0) = 0,4570$ für die in Abbildung 4.6 dargestellte Lösung von Gleichung (2.54) wurden mittels Gleichungen (3.43) und (3.44) die Werte für $R(0)$ und $S(0)$ berechnet. Anschließend wurden diese Werte für die Parameter R und S des Polynoms (3.25) eingesetzt und die drei (geordneten) Nullstellen h_1 , h_2 und h_3 berechnet. Die zweitgrößte Nullstelle ergab somit den Wert für h_2 , mit dem die Solitonenlösung in Abbildung 4.6 bestimmt wurde.

Ein Übergang der Strömung zu konstanter Flüssigkeitshöhe $H_1 = \Gamma$ stellt ebenso einen Übergang zu voll ausgebildeter Strömung dar, wie aus Gleichungen (2.37) folgt. Im Phasendiagramm, Abbildung 4.6(b), tritt der Punkt $(\Gamma, 0)$ als Strudelpunkt in Erscheinung, vgl. [9], S.551. Die Solitonenlösung ist schwarz strichliert als homokliner Orbit dargestellt.

Kapitel 5

Lösungen der Bestimmungsgleichung für die Störung der freien Oberfläche mittels der Methode der mehrfachen Variablen

5.1 Versagen der regulären Entwicklung nach β

Um Aufschluß über die Lösungsmannigfaltigkeiten von Gleichung (2.54) bzw. (2.52) und die Auswirkung der Anfangsbedingungen und des Parameters Γ bzw. γ auf die Lösung zu erhalten, wollen wir eine asymptotische Entwicklung von Gleichung (2.54) nach dem kleinen Parameter $\beta \ll 1$ durchführen. Der Parameter Γ sei im Rahmen dieser Entwicklung auf einen willkürlichen, aber festen Wert fixiert.

Wir betrachten das zu (2.54) äquivalente Differentialgleichungssystem (3.22)-(3.24). Der Ansatz für eine reguläre Entwicklung lautet

$$H_1 = \tilde{H}_{10} + \beta \tilde{H}_{11} + O(\beta^2), \quad (5.1)$$

$$R = \tilde{R}_0 + \beta \tilde{R}_1 + O(\beta^2), \quad (5.2)$$

$$S = \tilde{S}_0 + \beta \tilde{S}_1 + O(\beta^2), \quad (5.3)$$

und ergibt in $O(1)$ unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (2.39), (3.43) und (3.44)

$$\tilde{H}_{10X}^2 = -\frac{1}{3}\tilde{H}_{10}^3 + \tilde{H}_{10}^2 + 2\tilde{R}_0\tilde{H}_{10} + 2\tilde{S}_0 = \frac{1}{3}q(\tilde{H}_{10}; \tilde{R}_0, \tilde{S}_0), \quad (5.4)$$

$$\tilde{R}_0 \equiv H_{1XX}(0) = \text{const}, \quad (5.5)$$

$$\tilde{S}_0 \equiv \frac{1}{2}H_{1X}^2(0) = \text{const}, \quad (5.6)$$

mit dem in (3.25) definierten Polynom q . In $O(\beta)$ ergibt sich

$$\tilde{H}_{10X}\tilde{H}_{11X} + \left(\frac{1}{2}\tilde{H}_{10} - 1\right)\tilde{H}_{10}\tilde{H}_{11} = \tilde{R}_1\tilde{H}_{10} + \tilde{S}_1, \quad (5.7)$$

$$\tilde{R}_{1X} = H_{10} - \Gamma, \quad (5.8)$$

$$\tilde{S}_{1X} = -H_{10}(H_{10} - \Gamma). \quad (5.9)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems führt ganz analog wie in [51] auf eine Lösung mit dem asymptotischen Verhalten

$$H_{11} \sim H_{10X} e^{2X} \sim e^X \quad (5.10)$$

für $X \rightarrow \infty$ und stellt also eine nicht gleichmässig gültige Lösung dar. Daher wenden wir zur Bestimmung einer asymptotischen Lösung von Gleichung (2.54) die Methode der mehrfachen Variablen im folgenden Abschnitt an, und orientieren uns an der in [51] eingeschlagenen Vorgangsweise.

5.2 Allgemeine Lösung

Analog zu [51] kann (2.54) mit der Methode der mehrfachen Variablen (siehe [47]) gelöst werden. Mit dem Erhalt einer solchen Lösung durch asymptotische Entwicklung nach dem kleinen Parameter β wollen wir Einblick in das verschiedenartige Verhalten der Lösungen erhalten, das wir anhand der numerischen Lösungen kennengelernt haben. Darüberhinaus besteht das Ziel, analytische Kriterien zu finden, mithilfe derer das Auftreten eines welligen Wassersprunges vorhergesagt werden kann.

Der Inhalt dieses und der nächsten beiden Abschnitte wurde erstmalig in [35] präsentiert. Wir betrachten das zu (2.54) äquivalente Gleichungssystem (3.22)-(3.24). Bei Anwendung der Methode der mehrfachen Variablen wird angenommen, dass die gesuchte Lösungsfunktion die Periodizitätseigenschaften einer gedämpft periodischen Schwingung hat. Strenge Periodizität kann von $H_1(X)$ allerdings nicht angenommen werden. Aus diesem Grund führen wir für die unabhängige Variable X eine Transformation auf die unabhängige Variable ξ durch, sodass $H_1(\xi)$ die Periodizitätseigenschaften einer gedämpft periodischen Schwingung mit Periode 1 in ξ besitzt. Eine formale Definition von ξ werden wir erst weiter unten in Gleichung (5.41) angeben, die gleichzeitig als Formel für die Berechnung von ξ bei gegebenem X dient.

Nun führen wir nach der Methode der mehrfachen Variablen zur „schnellen“ Variablen ξ eine zusätzliche unabhängige, „langsame“ Variable Ω ein, die wie folgt definiert ist:

$$\Omega := \beta\xi, \quad (5.11)$$

$$\omega := \frac{d\xi}{dX} = \frac{d\Omega}{d(\beta X)} \geq 0. \quad (5.12)$$

Mit der Variablen ξ sollen dabei die schnell variierenden, rein periodischen Eigenschaften, mit Ω hingegen die langsam veränderlichen Eigenschaften wie Dämpfung der Amplitude und Periodenänderung von H_1 erfasst werden. Die Grösse ω beschreibt die relative Frequenz der Welligkeit der Funktion $H_1(X)$, d.i. die Veränderung der Ortsvariable ξ , bezüglich der die Funktion H_1 die Wellenlänge 1 besitzt, im Verhältnis zur Veränderung der Ortsvariablen X . Die Festlegung eines positiven Vorzeichens für ω ist willkürlich und bedingt stets positive Werte von ξ und Ω bei positiven Werten von X .

Wir setzen nun die gesuchten Lösungsfunktionen für (3.22)-(3.24) wie folgt an:

$$H_1(X, \beta) = H_{10}(\xi, \Omega) + \beta H_{11}(\xi, \Omega) + \dots, \quad (5.13)$$

$$R(X, \beta) = R_0(\xi, \Omega) + \beta R_1(\xi, \Omega) + \dots, \quad (5.14)$$

$$S(X, \beta) = S_0(\xi, \Omega) + \beta S_1(\xi, \Omega) + \dots \quad (5.15)$$

Die geforderten Periodizitätseigenschaften lauten also

$$H_{1n}(\xi + 1, \Omega) = H_{1n}(\xi, \Omega), \quad (5.16)$$

$$R_n(\xi + 1, \Omega) = R_n(\xi, \Omega), \quad (5.17)$$

$$S_n(\xi + 1, \Omega) = S_n(\xi, \Omega), \quad (5.18)$$

für alle $n \geq 0$. Entwickelt man die Gleichungen (3.22)-(3.24) für H_1 , R und S nach β nach der Methode der mehrfachen Variablen, so ist zu beachten, dass an Stelle der Variablen X nun zwei unabhängige Variable, ξ und Ω treten. Dementsprechend ist wegen Gleichung (5.12) an Stelle der Ableitung nach X

$$\frac{d}{dX} = \omega \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \Omega} \right) \quad (5.19)$$

zu setzen. Man erhält so in $\mathcal{O}(1)$:

$$\omega^2 \left(\frac{\partial H_{10}}{\partial \xi} \right)^2 = -\frac{1}{3} H_{10}^3 + H_{10}^2 + 2R_0 H_{10} + 2S_0 = \frac{1}{3} q(H_{10}; R_0, S_0), \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial R_0}{\partial \xi} = \frac{\partial S_0}{\partial \xi} = 0. \quad (5.21)$$

q ist das bereits in (3.25) definierte Polynom. Das bedeutet, dass R_0 und S_0 ausschliesslich Funktionen von Ω sind. In $\mathcal{O}(\beta)$ erhält man

$$\omega \left(\frac{\partial R_1}{\partial \xi} + \frac{dR_0}{d\Omega} \right) = H_{10} - \Gamma, \quad (5.22)$$

$$\omega \left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi} + \frac{dS_0}{d\Omega} \right) = -H_{10} (H_{10} - \Gamma). \quad (5.23)$$

Diese beiden Gleichungen können nach ξ über eine Periode integriert werden. Dabei fallen die Unbekannten R_1 und S_1 aufgrund ihrer Periodizitätseigenschaft (5.17) und (5.18) weg:

$$\frac{dR_0}{d\Omega} = \omega^{-1} \int_0^1 (H_{10} - \Gamma) d\xi, \quad (5.24)$$

$$\frac{dS_0}{d\Omega} = -\omega^{-1} \int_0^1 H_{10} (H_{10} - \Gamma) d\xi. \quad (5.25)$$

(5.20) kann als Transformationsformel dazu benützt werden, um in den Integralen anstatt ξ die neue Integrationsvariable H_{10} selbst einzuführen, d.h.

$$\int_0^1 (\cdot) d\xi = 2\sqrt{3}\omega \int_{h_2}^{h_3} \frac{(\cdot) dh}{\sqrt{(h-h_1)(h-h_2)(h_3-h)}}, \quad (5.26)$$

wobei $h_1(R_0, S_0)$, $h_2(R_0, S_0)$ und $h_3(R_0, S_0)$ die als reell angenommenen, geordneten Nullstellen des Polynoms q sind, mit den schon bekannten Eigenschaften (3.30)-(3.33) (wobei jetzt R durch R_0 und S durch S_0 zu ersetzen ist). Der Faktor 2 rührt daher, dass dem Integral über eine volle Periode in ξ der doppelte Wert des Integrals über die Amplitude

von H_{10} entspricht, da diese sich innerhalb einer Periode nur langsam als Funktion von Ω ändert.

Somit lauten die Bestimmungsgleichung für die langsam veränderlichen $R_0(\Omega)$ und $S_0(\Omega)$

$$\frac{dR_0}{d\Omega} = 2\sqrt{3} J_1(R_0, S_0), \quad (5.27)$$

$$\frac{dS_0}{d\Omega} = -2\sqrt{3} J_2(R_0, S_0), \quad (5.28)$$

mit

$$J_i(R_0, S_0) := I_i(R_0, S_0) - \Gamma I_{i-1}(R_0, S_0) \quad i = (1, 2) \quad (5.29)$$

und

$$I_j := \int_{h_2}^{h_3} \frac{h^j dh}{\sqrt{(h-h_1)(h-h_2)(h_3-h)}} \quad j = (0, 1, 2). \quad (5.30)$$

Da die langsam Veränderlichen R_0 und S_0 eindeutig mit den Nullstellen h_1 , h_2 und h_3 zusammenhängen (siehe Gleichungen (3.31), (3.34) und (3.35)), kann man die Gleichungen (5.27) und (5.28) auf Bestimmungsgleichungen für die langsam Veränderlichen h_1 , h_2 und h_3 umformulieren. Es ergeben sich

$$\frac{1}{6}(2h_2 + h_3 - 3)(h_2 - h_3) \frac{dh_2}{d\Omega} = 2\sqrt{3}(h_2 J_1 - J_2) \quad (5.31)$$

$$\frac{1}{6}(2h_3 + h_2 - 3)(h_3 - h_2) \frac{dh_3}{d\Omega} = 2\sqrt{3}(h_3 J_1 - J_2) \quad (5.32)$$

als Bestimmungsgleichungen für die langsam Veränderlichen $h_2(\Omega)$ und $h_3(\Omega)$. Dabei kann $h_1(\Omega)$ stets mithilfe von (3.31) berechnet werden.

Aus Gleichung (5.26) folgt eine Bestimmungsgleichung für die bislang unbestimmte Frequenz ω :

$$\omega^{-1} = 2\sqrt{3} \int_{h_2}^{h_3} \frac{dh}{\sqrt{(h-h_1)(h-h_2)(h_3-h)}} = 2\sqrt{3} I_0(R_0, S_0). \quad (5.33)$$

Nach [3], S. 597, Gleichung (17.4.69) kann man das Integral I_0 auch darstellen als

$$I_0 = \frac{2K(m)}{\sqrt{h_3 - h_1}}, \quad (5.34)$$

mit dem schon in Abschnitt 3.7, Gleichung (3.48) ff. eingeführten vollständigen elliptischen Integral 1. Art $K(m)$ und dem Parameter $m = \frac{h_3 - h_2}{h_3 - h_1}$. Auch die Integrale I_1 und I_2 lassen sich auf elementare elliptische Funktionen zurückführen (siehe [51]).

Die Gleichungen (5.20), (5.27) und (5.28) ergeben zusammen ein Gleichungssystem, aus dem die Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen berechnet werden kann. Dabei ist die Gleichung (5.20) von den beiden anderen entkoppelt, die langsam Veränderlichen R_0 und S_0 können unabhängig von H_{10} berechnet werden.

Vergleicht man das Gleichungssystem (5.20), (5.27) und (5.28), das wir hier mittels der Methode der mehrfachen Variablen erhalten haben, mit dem Gleichungssystem (3.22), (3.23) und (3.24) für den schon früher in Abschnitt 3.7 untersuchten Fall $\beta = 0$ oder auch mit dem Gleichungssystem (5.4)-(5.6), das wir aus der regulären Entwicklung in Abschnitt 5.1 erhalten haben, so kann man feststellen, dass R und S im Fall $\beta = 0$ bzw. \tilde{R}_0

und \tilde{S}_0 bei der regulären Entwicklung konstante Werte annehmen, R_0 und S_0 nach der Methode der mehrfachen Variablen hingegen langsam veränderlich und vom Parameter Γ abhängig sind. Diese beiden Funktionen liefern also die gesuchten langsam veränderlichen Welligkeitseigenschaften der Oberfläche bei einem welligen Wassersprung. In die Berechnung von H_{10} gehen jedoch R_0 und S_0 nur als Parameterfunktionen ein, die autonom durch zwei unabhängige Differentialgleichungen bestimmt sind.

Tatsächlich bedeutet die implizite Voraussetzung einer welligen Lösung, wie sie durch Anwendung Methode der mehrfachen Variablen getroffen wurde, dass das Kriterium $D < 0$ mit D aus (3.27) mit den langsam Veränderlichen R_0 und S_0 erfüllt sein muss, d.h.

$$D(R_0, S_0) < 0 \quad (5.35)$$

ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer welligen Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen. Das heisst aber, dass die oben verwendeten Nullstellen h_1, h_2 und h_3 reell sein müssen. Dann können wir formal die Lösung des Falles $\beta = 0$, d.h. Gleichungen (3.51)-(3.53), verwenden, um auch für den Fall $\beta \neq 0$ und beliebige, endliche Werte von Γ eine allgemeine Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen anzugeben. Diese lautet

$$H_{10} = h_2 + (h_3 - h_2) \operatorname{cn}^2 [2\operatorname{K}(m)(\xi - \xi_0)|m] , \quad (5.36)$$

wobei hier h_2 und h_3 nicht konstant, sondern langsam veränderliche Funktionen von Ω sind. Diese Lösung geht im Falle zusammenfallender Nullstellen in die entsprechenden Grenzfälle (3.52) bzw. (3.53) über. Aus den analytischen Eigenschaften von $\operatorname{K}(m)$ (siehe [3], S. 591)

$$\operatorname{K}(m \rightarrow 0) \rightarrow \frac{\pi}{2} , \quad (5.37)$$

$$\operatorname{K}(m \rightarrow 1) \rightarrow \infty , \quad (5.38)$$

folgen mit dem Zusammenfallen der Nullstellen auch die folgenden Grenzen für die Werte von ω :

$$m|_{h_1 \rightarrow h_2} \rightarrow 1 \quad \omega|_{h_1 \rightarrow h_2} \rightarrow 0 , \quad (5.39)$$

$$m|_{h_2 \rightarrow h_3} \rightarrow 0 \quad \omega|_{h_2 \rightarrow h_3} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \sqrt{3(h_3 - 1)} , \quad (5.40)$$

wobei (5.33) und (5.34) verwendet wurden. Das Zusammenfallen von h_1 und h_2 stellt auch die Gültigkeitsgrenze der Transformation mit dem Übergang zu unendlich langer Wellenlänge dar.

Es lässt sich auch unter Verwendung der analytischen Eigenschaften des Cosinus amplitudinis (siehe [3], S.573) und unter Verwendung von (5.33) direkt verifizieren, dass (5.36) die Gleichung (5.20) erfüllt.

Zu beachten ist, dass h_1, h_2 und h_3 und damit auch m in (5.36) von R_0 und S_0 abhängen, also Funktionen von Ω sind. In (5.36) stellt $h_3 - h_2$ die (langsam veränderliche) Amplitude und $(h_2 + h_3)/2$ die (langsam veränderliche) mittlere Auslenkung der Höhenstörung der welligen Oberfläche dar. Die (langsam veränderliche) Periode der cn^2 -Funktion ist gegeben durch $2\operatorname{K}(m)$; dies garantiert die Periode der Länge 1 der Lösung (5.36) als Funktion von ξ .

Die Kombination der Gleichungen (5.12) und (5.33) ermöglicht das Umrechnen von den Variablen ξ und Ω auf die ursprüngliche Variable X gemäß

$$\frac{dX}{d\xi} = \beta \frac{dX}{d\Omega} = \omega^{-1} = 2\sqrt{3}I_0(R_0, S_0), \quad (5.41)$$

sodass damit die Lösung (5.36) nach der Methode der mehrfachen Variablen als Funktion von X dargestellt werden kann. Gleichung (5.41) kann simultan mit den Gleichungen (5.27) und (5.28) gelöst werden. Wir verwenden $X(\xi=0, \Omega=0)=0$ und verzichten dabei auf eine willkürliche Verschiebung zwischen ursprünglicher Koordinatenachse X und der Koordinatenachse der transformierten Variablen der asymptotischen Entwicklung ξ und Ω . Gleichung (5.41) kann als Definitionsgleichung für die Variable ξ aufgefasst werden. Nun müssen noch die gegebenen Anfangsbedingungen $H_1(0)=0$, $H_{1X}(0)$ und $H_{1XX}(0)$ auf entsprechende Anfangsbedingungen für die Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen umgerechnet werden. Aus $H_1(0)=0$ folgt unmittelbar

$$H_{10}(\xi=0, \Omega=0) = 0. \quad (5.42)$$

Dies liefert zusammen mit (5.36) eine Gleichung für das bislang unbestimmte ξ_0

$$\xi_0 := -\frac{\text{sign}[H_{1X}(0)]}{2K(m)} \text{cn}^{-1} \left[\sqrt{\frac{h_2}{h_2-h_3}} \Big| m \right] \Big|_{\Omega=0}, \quad (5.43)$$

wobei cn^{-1} die Umkehrfunktion zum Cosinus amplitudinis darstellt. Hierbei tritt das Vorzeichen von $H_{1X}(0)$ auf. Der Grund dafür liegt darin, dass Gleichung (5.42) den Wert von ξ_0 nur bis auf das Vorzeichen bestimmt. Unterschiedliche Vorzeichen von ξ_0 in (5.36) bewirken zueinander phasenverschobene Lösungsfunktionen. Erst die Eindeutigkeit des Vorzeichens von ξ_0 durch die Berücksichtigung des Vorzeichens von $H_{1X}(0)$ führt zu einer Eindeutigkeit in der Lösung (5.36).

Weiters zeigt (5.43), dass $H_{10} = 0$ nur für Werte $h_2(0) < 0$ erfüllbar ist.

Für die Anfangsbedingungen folgt mittels (5.19)

$$H_{1X}(0) = \omega \frac{\partial H_{10}}{\partial \xi}(\xi=0, \Omega=0) + O(\beta), \quad (5.44)$$

$$H_{1XX}(0) = \omega^2 \frac{\partial^2 H_{10}}{\partial \xi^2}(\xi=0, \Omega=0) + O(\beta). \quad (5.45)$$

Damit folgt einerseits direkt aus (5.20) sowie andererseits durch Differenzieren von (5.36) nach ξ (für $\partial H_{10}/\partial \xi \neq 0$)

$$R_0(\Omega=0) = \omega^2 \frac{\partial^2 H_{10}}{\partial \xi^2}(\xi=0, \Omega=0) + O(\beta) = H_{1XX}(0) + O(\beta), \quad (5.46)$$

$$S_0(\Omega=0) = \frac{1}{2}\omega^2 \left[\frac{\partial H_{10}}{\partial \xi}(\xi=0, \Omega=0) \right]^2 + O(\beta) = \frac{1}{2}H_{1X}^2(0) + O(\beta) \geq 0. \quad (5.47)$$

Aus (5.42) und (5.36) folgt, dass $h_2(0) \leq 0 < h_3(0)$, und aus den algebraischen Eigenschaften der Nullstellen (3.30)-(3.33) (mit R durch R_0 und S durch S_0 ersetzt) folgt analog zur Vorgangsweise in Kapitel (3.7), dass

$$R_0(\Omega=0) = H_{1XX}(0) + O(\beta) \geq 0. \quad (5.48)$$

Damit kann die Lösung (5.36) nun berechnet werden. Um die Integrale I_j in (5.30) numerisch besser auswerten zu können, wird der Integrand folgender Transformation unterworfen (siehe [51]):

$$h = \frac{1}{2} [h_2 + h_3 - (h_2 - h_3) \sin \vartheta] , \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} , \quad (5.49)$$

sodass sich die Integrale darstellen lassen als

$$I_j := \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\left\{ \frac{1}{2} [h_2 + h_3 + (h_3 - h_2) \sin \vartheta] \right\}^j d\vartheta}{\sqrt{-2h_1 + h_2 + h_3 + (h_3 - h_2) \sin \vartheta}} , \quad j = (0, 1, 2) . \quad (5.50)$$

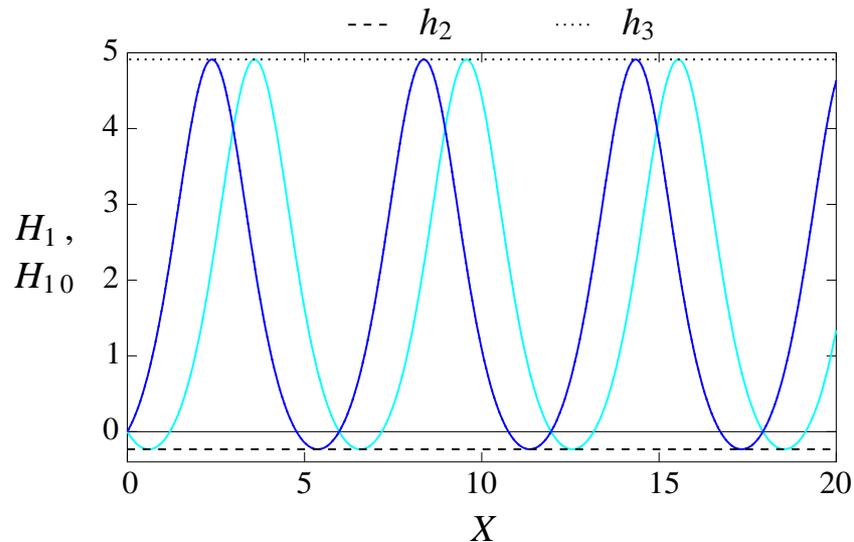
5.3 Diskussion der allgemeinen Lösung

Formal besitzt die Lösung (5.36) große Ähnlichkeit mit der asymptotischen Lösung in [51] bei asymptotischen Anfangsbedingungen. In [51] musste jedoch die für $X \geq 0$ bestimmte Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen mit der Lösung aus einer regulären Entwicklung für $X < 0$ mittels eines Patchings vereint werden, ohne dass eine asymptotische Anpassung beider Entwicklungen im Sinne von [56] möglich war. Bei der Lösung (5.36) ist dies nicht notwendig, da die Anfangsbedingungen hier am (fixen) Referenzpunkt bei $X=0$ vorgegeben werden. Das Problem hier liegt darin, gültige Anfangsbedingungen für die Existenz einer Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen zu finden.

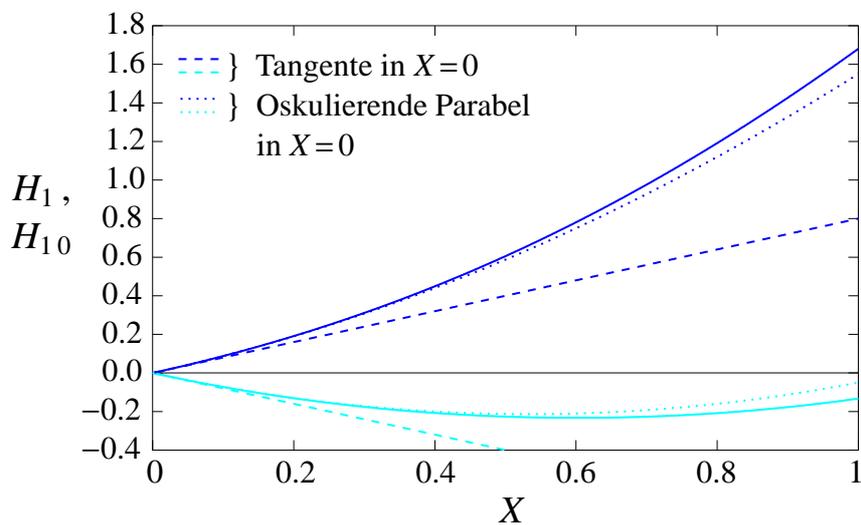
Bei der Berechnung der im Folgenden dargestellten Lösungen nach der Methode der mehrfachen Variablen wurden (ausser in eigens erwähnten Fällen) die Gleichungen (5.27) und (5.28) für gegebene Anfangsbedingungen numerisch gelöst und aus den erhaltenen Werten für R_0 und S_0 die Funktion H_1 mittels (5.36) bestimmt. Die Berechnung erfolgte (ausser in eigens erwähnten Fällen) mittels der Software MATHEMATICA 6.0.1.0, wobei ein implizites Runge-Kutta-Verfahren bei konstanter Schrittweite mit mindestens 1000 Schritten verwendet wurde.

Abbildung 5.1 zeigt einen Vergleich der numerischen Lösung von Gleichung (2.54) mit der entsprechenden Lösungen nach der Methode der mehrfachen Variablen (5.36) für unterschiedliche Anfangsbedingungen. Die dunkelblau durchgezogene Kurve stellt die numerische Lösung H_1 von Gleichung (2.54) mit $\beta = 10^{-6}$, $\Gamma = -3$, $H_1(0) = 0$, $H_{1X}(0) = 0,8$ und $H_{1XX}(0) = 1,5$ dar, die sich mit Lösung H_{10} aus (5.36) mit den entsprechenden Werten für die Anfangsbedingungen in Gleichungen (5.46) und (5.47) überdeckt. Analog überdecken sich die beiden hellblau durchgezogen dargestellten Lösungen, deren Anfangsbedingungen sich von denen der dunkelblau dargestellten Lösungen nur durch ein unterschiedliches Vorzeichen von $H_{1X}(0)$ unterscheiden. Dieser Unterschied bewirkt nur eine Phasenverschiebung der welligen Lösung.

Im Fall der Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen ist X selbst ein Teil der Lösung, der aus der Integration der Gleichung (5.41) erhalten wurde. Die langsam Veränderlichen h_2 und h_3 stellen dabei die Einhüllenden des welligen Verlaufes von H_{10} dar, siehe Gleichung (5.36). Sie wurden so bestimmt, dass die Gleichungen (5.27) und (5.28) mit den Anfangsbedingungen in Gleichungen (5.46) und (5.47) integriert wurden, die daraus gewonnenen langsam Veränderlichen R_0 und S_0 an Stelle von R und S in (3.25) eingesetzt wurden und daraus die Nullstellen h_1 , h_2 und h_3 berechnet wurden. Der Integrationsbereich erstreckte sich auf $\Omega \in [0, 3,34 \cdot 10^{-6}]$. Abbildung 5.1(b) zeigt, dass die



(a) Verlauf der Lösungen

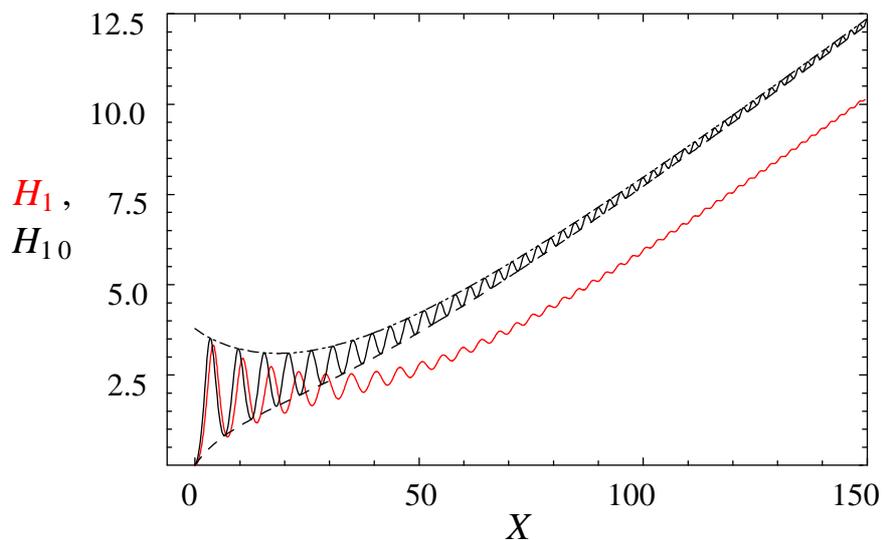


(b) Erfüllung der Anfangsbedingungen

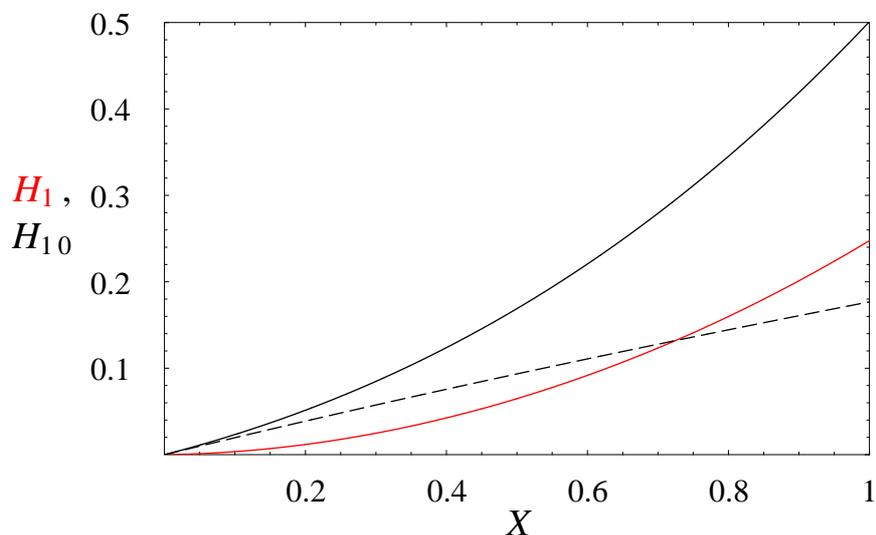
Abbildung 5.1: Numerische Lösung H_1 von Gleichung (2.54) und Lösung H_{10} nach der Methode der mehrfachen Variablen (5.36) im Vergleich. Parameterwerte und Anfangsbedingungen: $\beta = 10^{-6}$, $\Gamma = -3$, $H_1(0) = 0$, $H_{1XX}(0) = 1,5$ und $H_{1X}(0) = 0,8$ (dunkelblau durchgezogene Kurve: Lösung H_1 , die sich mit Lösung H_{10} überdeckt) bzw. $H_{1X}(0) = -0,8$ (hellblau durchgezogene Kurve: Lösung H_1 , die sich mit Lösung H_{10} überdeckt). Die jeweiligen Lösungen H_1 und H_{10} sind in dieser Darstellung voneinander ununterscheidbar. Die strichlierte bzw. punktierte Kurve in 5.1(a) stellt die obere bzw. untere Einhüllende der Lösung H_{10} dar, siehe Gleichung (5.36). Die strichlierten bzw. punktierten Kurven in 5.1(b) stellen die zu den jeweiligen Anfangsbedingungen gehörigen Tangenten bzw. oskulierenden Parabeln dar.

Lösungen nach der Methode der mehrfachen Variablen als Funktion von ξ und Ω , für die die Anfangsbedingungen in Gleichungen (5.42), (5.46) und (5.47) durch die Werte von $H_1(X=0)$, $H_{1X}(X=0)$ und $H_{1XX}(X=0)$ vorgegeben wurden, umgerechnet mithilfe von Gleichung (5.41) auf Funktionen von X die entsprechenden Anfangsbedingungen $H_1(X=0)$, $H_{1X}(X=0)$ und $H_{1XX}(X=0)$ erfüllen. Zur Orientierung sind die entsprechenden Tangenten und oskulierenden Parabeln im Punkt $X=0$ eingezeichnet.

Abbildung 5.2 zeigt den Vergleich der numerischen Lösung von Gleichung (2.54) aus Abbildung 4.1 (rote Kurve) mit der entsprechenden Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen. Der Integrationsbereich erstreckte sich auf $\Omega \in [0, 11,5]$. Dabei ist zu erkennen, dass zwar das asymptotische Verhalten von H_{1X} durch die Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen erfasst wird, jedoch weicht der Absolutwert der Höhenstörung beträchtlich von der numerischen Lösung ab. Der Grund dafür liegt einerseits darin, dass die Genauigkeit der asymptotischen Lösung mit der Grösse des Entwicklungs-



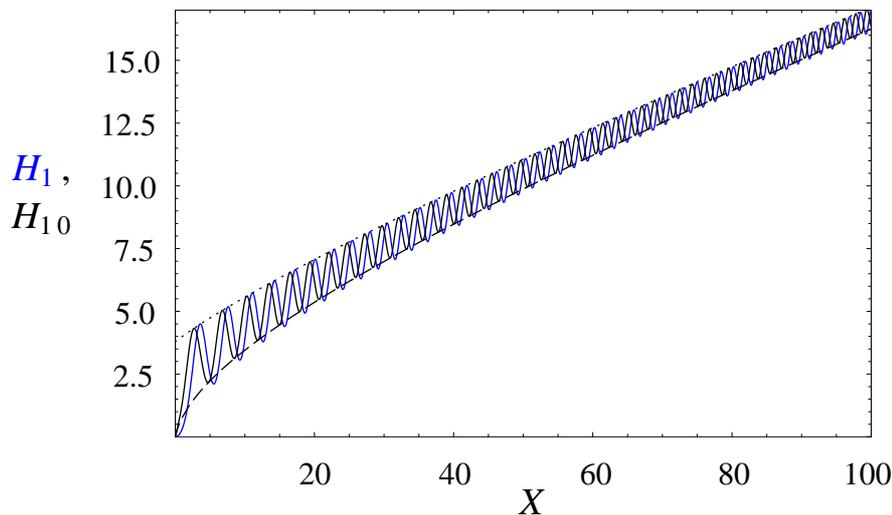
(a) Verlauf der Lösungen



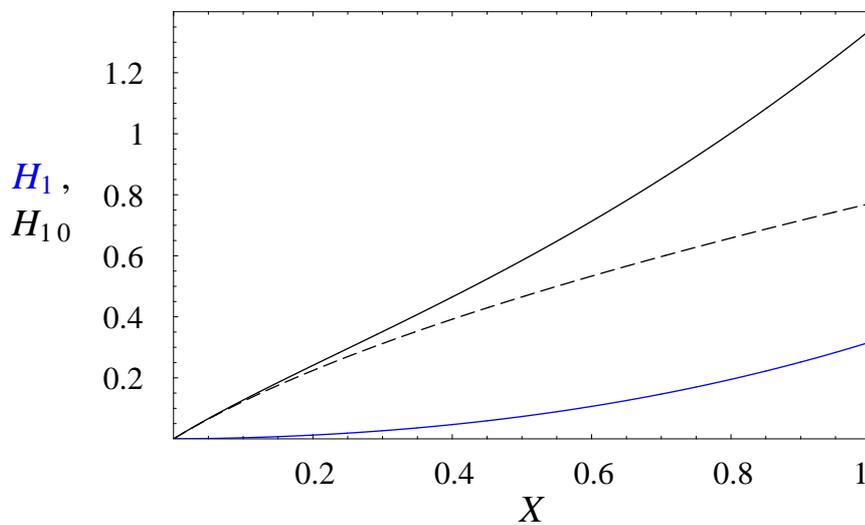
(b) Nichterfüllung der Anfangsbedingungen

Abbildung 5.2: Vergleich der numerischen Lösung H_1 von Gleichung (2.54) (rote Kurve) aus Abbildung 4.1 mit der Lösung H_{10} nach der Methode der mehrfachen Variablen, Gleichung (5.36) (schwarz durchgezogene Kurve). Parameterwerte und Anfangsbedingungen: $\beta = 0,1$, $\Gamma = 2$, $H_1(0) = 0$, $H_{1X}(0) = 0,01$ und $H_{1XX}(0) = 0,5$. Die langsam Veränderlichen h_2 bzw. h_3 sind strichliert bzw. strichpunktirt dargestellt.

parameters β korreliert; die Genauigkeit ist im Fall der Lösung in Abbildung 5.1 höher ist als in jener in Abbildung 5.2. Dies erklärt aber noch nicht die starken Abweichungen zwischen den beiden Lösungen. Ein anderes Problem stellen die Anfangsbedingungen dar, die von der Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen nicht erfüllt werden, wie Abbildung 5.2(b) zeigt. Wir werden dies im Folgenden anhand des nächsten Beispiels in Abbildung 5.3 erläutern.



(a) Verlauf der Lösungen



(b) Nichterfüllung der Anfangsbedingungen

Abbildung 5.3: Vergleich der numerischen Lösung H_1 von Gleichung (2.54) (blaue Kurve) aus Abbildung 4.1 mit der Lösung H_{10} nach der Methode der mehrfachen Variablen, Gleichung (5.36) (schwarz durchgezogene Kurve). Parameterwerte und Anfangsbedingungen: $\beta = 0,1$, $\Gamma = -2$, $H_1(0) = 0$, $H_{1X}(0) = 0,01$ und $H_{1XX}(0) = 0,5$. Die langsam Veränderlichen h_2 bzw. h_3 sind strichliert bzw. punktiert dargestellt.

Abbildung 5.3 zeigt den Vergleich der numerischen Lösung von Gleichung (2.54) aus Abbildung 4.1 (blaue Kurve) mit der entsprechenden Lösung nach der Methode der mehr-

fachen Variablen. Der Integrationsbereich erstreckte sich auf $\Omega \in [0, 16,5]$. Auch hier erfüllt die Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen, für die als Funktion von ξ und Ω die Anfangsbedingungen in Gleichungen (5.42), (5.46) und (5.47) durch die Werte von $H_1(X=0)$, $H_{1X}(X=0)$ und $H_{1XX}(X=0)$ vorgegeben wurden, nicht die entsprechenden Anfangsbedingungen $H_{1X}(X=0)$ und $H_{1XX}(X=0)$, wenn man sie mithilfe von Gleichung (5.41) auf eine Funktion von X umrechnet. Dies liegt daran, dass die Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen stets zwischen den beiden Einhüllenden h_2 und h_3 liegen muss, diese aber keinen ausreichend flachen Anstieg bei $X=0$ zulassen, um die Anfangsbedingung $H_{1X}(0)=0,01$ erfüllen zu können.

Tatsächlich folgt für Anfangsbedingungen $H_{1X}(0) \ll 1$ aus Gleichung (5.47), dass $S_0(0) \ll 1$ und daraus mit Gleichungen (3.35), (3.30) und der für die Erfüllung der Anfangsbedingung $H_1(0)=0$ notwendigen Bedingung $h_2(0) < 0$, dass $h_2(0) \ll 1$. Die Werte von $h_2(0)$ in Abbildungen 5.2 und 5.3 sind entsprechend verschwindend klein im Vergleich zu jenen in Abbildung 5.1.

Für $H_{1X}(0) \ll 1$ und $H_{1XX}(0) = O(1)$ lässt sich die Grössenordnung von dh_2/dX abschätzen: Nach Gleichungen (5.47), (3.30) und (3.33) folgt für die Integrale I_j in (5.30) und J_j in (5.29), dass diese von der Grössenordnung 1 sind. Verwendet man die auf die langsam Veränderliche h_2 umgeschriebene Bestimmungsgleichung nach der Methode der mehrfachen Variablen (5.31), so folgt für kleine h_2 näherungsweise

$$\frac{dh_2}{d\Omega} \approx \frac{12\sqrt{3}J_2}{h_3(h_3-3)}, \quad (5.51)$$

und mit (5.41) und (5.34) folgt

$$\frac{dh_2}{dX} \approx -\frac{6}{h_3(h_3-3)} \frac{J_2}{I_0} \beta. \quad (5.52)$$

Demnach folgt für Anfangsbedingungen $H_{1X}(0) \ll 1$ und $H_{1XX}(0) = O(1)$, dass $h_2(0) \ll 1$ und $dh_2/dX(0) = O(\beta)$. Das bedeutet, dass die in den Beispielen in Abbildungen 5.2 und 5.3 vorgeschriebenen Werte für $H_{1X}(0)$ der Oberflächenneigung am Referenzpunkt, die um eine Grössenordnung kleiner sind als der Wert für β , von der auf die ursprüngliche Ortsvariable X umgerechneten Lösung $H_{10}(X)$ nach der Methode der mehrfachen Variablen nicht erfüllt werden kann, da deren Funktionswerte gemäß Gleichung (5.36) immer größer oder gleich h_2 sind. Diese Nichterfüllung der Anfangsbedingungen durch die Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen bewirkt in den Beispielen in Abbildungen 5.2 und 5.3 eine zu große Steigung im Referenzpunkt und infolgedessen eine konstante Verschiebung in X -Richtung für $X \ll 1$ gegenüber den numerischen Lösungen von (2.54), die die vorgegebenen Anfangsbedingungen korrekt wiedergeben.

Analoges gilt für den Fall $H_{1X}(0) \ll 1$ und $H_{1XX}(0) \ll 1$. Nach Gleichungen (5.46) und (5.47) ergibt sich in diesem Fall $R_0(0) \ll 1$ und $S_0(0) \ll 1$, und infolgedessen ist $I_0 \gg 1$, während die beiden anderen Integrale I_1 und I_2 aus Gleichung (5.30) von Grössenordnung 1 sind. Mit den Gleichungen (3.30)-(3.30) folgt dann $h_1(0) \ll 1$, $h_2(0) \ll 1$ und $h_3 \approx 3$, also $m \approx 1$ mit m aus Gleichung (3.47). Bei diesen Anfangsbedingungen nähert sich die Lösung (5.36) an den Grenzfall der aperiodischen Solitärwellenlösung des reibungsfreien Falles an, d.h. die Wellenlänge wird sehr groß gegen 1 und die Amplitude nähert sich dem Wert 3 an. Aus Gleichung (5.31) folgt in diesem Fall, dass $dh_2/d\Omega \gg 1$ und weiters mit Gleichung (5.41), dass (bei festgehaltenem β) $dh_2/dX \gg 1$. Das bedeutet, dass auch in diesem

Fall die Lösung (5.36), umgerechnet auf die ursprüngliche Variable X , die Anfangsbedingungen nicht korrekt wiedergeben kann.

Dass die Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen im Falle kleiner Werte von $H_{1X}(0)$ die Anfangsbedingungen nicht erfüllt, bedeutet jedoch nicht, dass sie inkorrekt wäre. Vielmehr widersprechen obige Annahmen für die Anfangsbedingungen $H_{1X}(0) \ll 1$ oder/und $H_{1XX}(0) \ll 1$ der Voraussetzung, dass die Unbekannten in der asymptotischen Entwicklung als Funktionen der $O(1)$ anzusehen sind, vergleiche Gleichungen (5.46) und (5.47). Kleine Werte für die Anfangsbedingung(en) $H_{1X}(0) \ll 1$ oder/und $H_{1XX}(0) \ll 1$ verlangen einen anderen asymptotischen Lösungsansatz als in Gleichungen (5.1)-(5.3), in dem die Größenordnung der Unbekannten $R(\Omega)$ und $S(\Omega)$ in Bezug auf β festgelegt werden muss, wobei eine Veränderlichkeit der Unbekannten in der Entwicklung nach β erst in Ordnung β oder in höherer Ordnung auftritt.

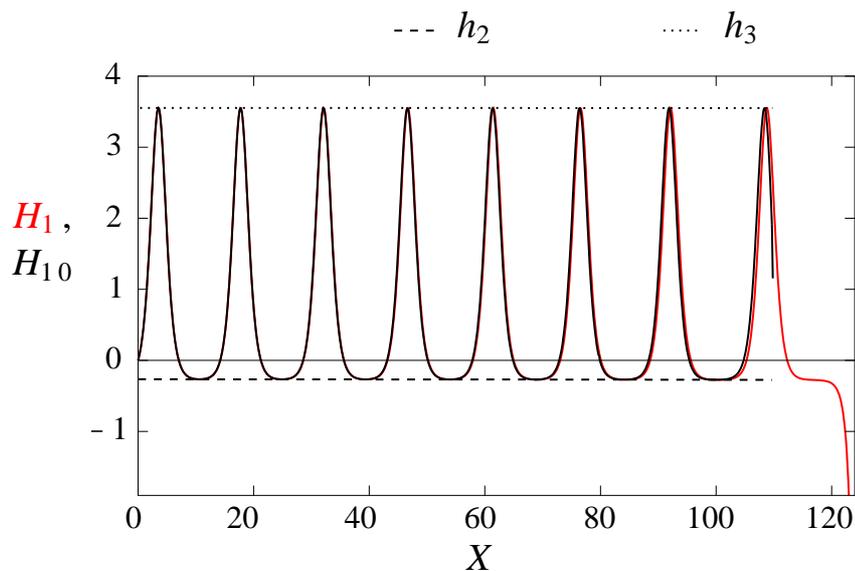
Wir halten also fest, dass die Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen die Anfangsbedingungen sehr kleiner Werte der Oberflächenneigung $H_{1X}(0) \ll 1$ und/oder sehr kleiner Werte der Oberflächenkrümmung $H_{1XX}(0) \ll 1$ am Referenzpunkt nicht richtig wiedergibt, wenn $H_{1X}(0) \ll \beta$ oder/und $H_{1XX}(0) \ll \beta$.

Der Grenzfall einer Lösung (5.36) mit einer am Referenzpunkt verschwindenden Amplitude $[h_3(0) - h_2(0)] \ll 1$ ist unmöglich, da sich in diesem Fall die Bedingungen $h_2(0) < 0 < h_3(0)$ und (3.31) für $X=0$ nicht gemeinsam erfüllen lassen.

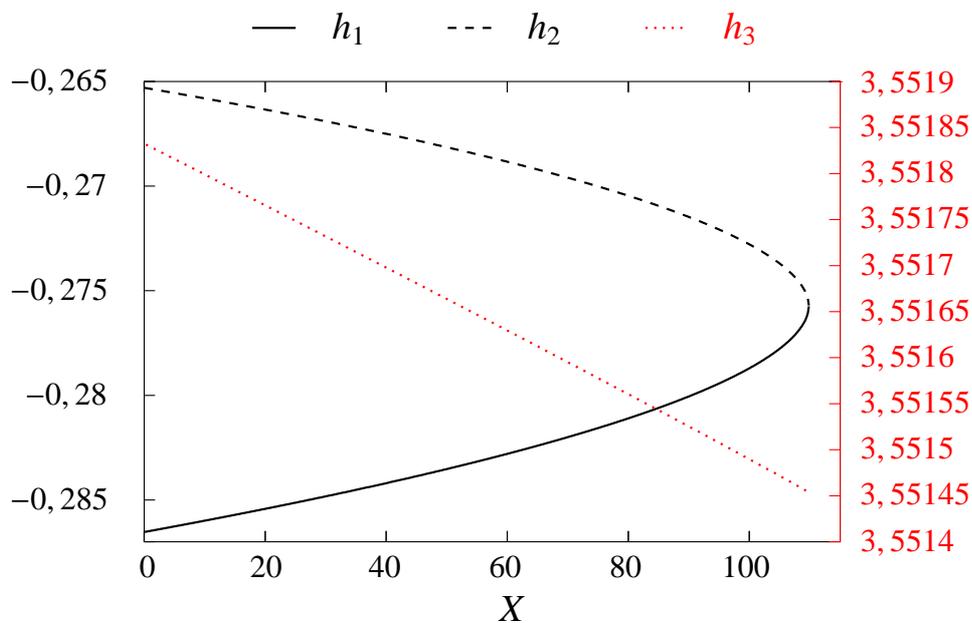
Abbildung 5.4(a) zeigt den Vergleich einer numerischen Lösung mit beschränktem Gültigkeitsbereich mit der entsprechenden Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen. Die numerische Lösung von Gleichung (2.54) ist rot durchgezogen, die Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen, Gleichung (5.36), ist schwarz durchgezogen eingezeichnet. Die Übereinstimmung zwischen beiden Lösungen ist sehr gut, sogar bis unmittelbar vor Ende der schwarz durchgezogenen Lösung. Der Grund für das Abbrechen der Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen ist in Abbildung 5.4(b) zu erkennen, die die langsam Veränderlichen h_1 , h_2 und h_3 durch eine gestreckte Ordinatenkala detaillierter zeigt.

Die Integration der Gleichungen für die langsam Veränderlichen (5.27) und (5.28) bricht beim Wert von $\Omega = 7,33 \cdot 10^{-6}$, $X = 109,8$ und $m = 0,9999$ ab. Die Nullstellen h_1 und h_2 laufen bis zum Abbruch der Lösung zusammen und nehmen dann die Werte des aperiodischen Grenzfalles an. Setzt man die numerische Berechnung der Nullstellen des Polynoms q weiter fort, so werden diese komplex, und die Lösung (5.36) verliert ihre Gültigkeit. Die direkte numerische Integration von Gleichung (2.54), deren Lösung in Abbildung 5.4(a) rot durchgezogen dargestellt ist, geht noch etwas weiter über die Abbruchstelle der Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen hinaus, bricht aber dann ebenso in Form einer Singularität ab. Die Lösungskurve ähnelt in diesem Bereich jener exakten Lösung in Gleichung (3.54), die wir im Falle komplexer Nullstellen für den Fall $\beta = 0$ gefunden haben, siehe Abbildung 3.1.

Die numerischen Lösungen aus Abbildung 4.3 lassen sich durch die Methode der mehrfachen Variablen überhaupt nicht erfassen, da in diesen Fällen das notwendige und hinreichende Kriterium $D(R_0(0), S_0(0)) < 0$ bei $X=0$ bereits am Referenzpunkt nicht erfüllt ist, also keine reellen Werte $h_1(0)$, $h_2(0)$ oder $h_3(0)$ vorhanden sind. Dass die direkte numerische Integration von Gleichung (2.54) dennoch Lösungen zulässt, liegt daran, dass in Abhängigkeit von der Grösse der Schrittweite wellige Lösungen erhalten werden können, auch wenn das Kriterium $D < 0$ nicht erfüllt ist, siehe Abschnitt 4.1, Gleichungen



(a) Vergleich der Lösungen



(b) Detail der langsam Veränderlichen

Abbildung 5.4: Vergleich der numerischen Lösung H_1 von Gleichung (2.54) (rot durchgezogene Kurve) aus Abbildung 4.5 mit der Lösung H_{10} nach der Methode der mehrfachen Variablen, Gleichung (5.36) (schwarz durchgezogene Kurve). Parameterwerte und Anfangsbedingungen: $\beta = 10^{-6}$, $\Gamma = 3$, $H_1(0) = 0$, $H_{1X}(0) = 0,3$ und $H_{1XX}(0) = 0,314$. In Abbildung 5.4(b) sind die langsam Veränderlichen h_1 , h_2 und h_3 mit einer im Vergleich zu Abbildung 5.4(a) gestreckten Ordinate dargestellt. Dabei gilt die schwarze Ordinatenskala für die schwarzen Kurven (h_1 und h_3) und die rote Ordinatenskala für die rot strichlierte Kurve (h_3).

(4.3) ff..

Abbildung 5.5 zeigt einen Vergleich der numerischen Lösung aus Abbildung 4.6 mit einem Übergang zu voll ausgebildet turbulenter Strömung weit stromab mit der entspre-

chenden Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen. So wie die numerische Lösung der vollen Gleichung (2.54), die wir in Abschnitt 4.3 präsentiert haben, muss auch die numerische Lösung der Gleichungen (5.41), (5.27) und (5.28) für die Unbekannten $X(\Omega)$, $R_0(\Omega)$ und $S_0(\Omega)$ nach der Methode der mehrfachen Variablen als Lösung eines Randwertproblems formuliert werden. Im Zuge der Bestimmung der Lösung hat sich jedoch herausgestellt, dass anstelle der Gleichungen (5.27) und (5.28) die umformulierten Gleichungen (5.31) und (5.32) für die Bestimmung der langsam Veränderlichen besser geeignet sind.

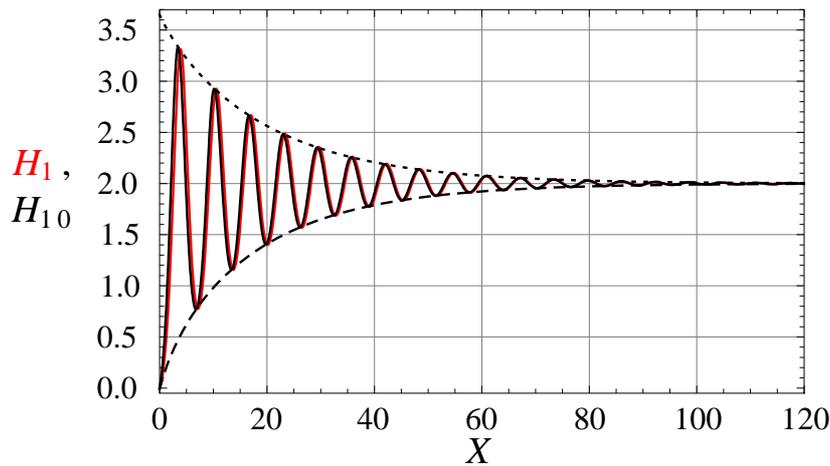
Als Integrationsintervall wurde $\Omega \in [0, 2]$ gewählt, wobei zwei Randbedingungen bei $\Omega=0$ und eine Randbedingung bei $\Omega=2$ gestellt wurde, und zwar

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, \\ h_2(0) &= -0,01108, \\ h_3(2) &= \Gamma \left[1 + \exp\left(-2\pi/(\Gamma - 1)^{3/2}\right) \right] = 2,003735. \end{aligned} \quad (5.53)$$

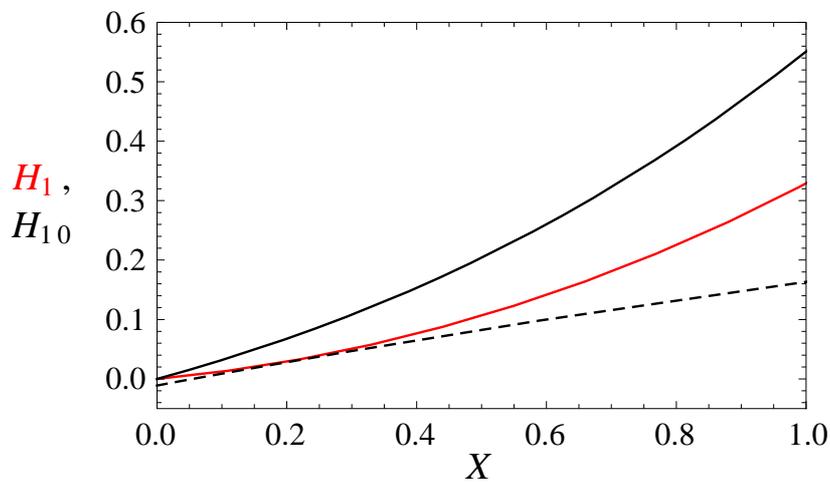
Die Wahl des Wertes 2 für das rechte Ende des Integrationsintervalls hat folgende Gründe: Die sich aus Bestimmung der langsam Veränderlichen h_2 und h_3 ergebende Lösung (5.36) nach der Methode der mehrfachen Variablen reicht, wenn sie mittels Gleichung (5.41) als Funktion von X dargestellt wird, so weit, dass ein Vergleich mit der direkten numerischen Lösung von Gleichung (2.54) aus Abbildung 4.6(a) möglich ist, und zwar ergibt sich $X(2) = 127,01$. Weiters bedingt die Wahl dieses Wertes, dass der Wert von h_3 an dieser Stelle näherungsweise durch den für große Ω -Werte gültigen asymptotischen Wert ersetzt werden kann. Diesen asymptotischen Grenzfall für h_3 werden wir erst weiter unten in Abschnitt 5.4 angeben, und zwar greifen wir hier auf die Gleichungen (5.59) und (5.67) vor, die bei einer Wahl der unbestimmten Konstanten $C=4$ und $\Gamma = 2$ den in (5.53) angegebenen Wert für $h_3(2)$ liefern. Die Abweichung vom für $\Omega \rightarrow \infty$ gültigen Wert $h_3 = \Gamma = 2$ ist bei $\Omega=2$ bereits so gering, dass die Verwendung des asymptotischen Näherungswertes gerechtfertigt ist. Schliesslich bedingt die Wahl des Wertes 2 für das rechte Ende des Integrationsintervalles, dass der Rechenaufwand in vertretbarem Ausmaß bleibt. Die in (5.53) angegebene Randbedingung $X(0)=0$ folgt der in Gleichung (5.41) ff. getroffenen Festlegung. Der Wert für $h_2(0)$ in (5.53) wurde aus den Resultaten der numerischen Lösung aus Abbildung 4.6 mit der Randbedingung $H_{1X}(0) = 0,1$ und dem dort errechneten Wert von $H_{1XX}(0) = 0,4570$ gewonnen, mithilfe derer aus den Gleichungen (5.46) und (5.47) $R(0)$ und $S(0)$ und damit die Nullstellen des Polynoms q in (3.25) berechnet werden können, sodass der Wert für $h_2(0) = -0,01108$ folgt.

Zur numerischen Berechnung wurde im Rahmen der Software MATLAB 7.5.0 als Randwertlöser die Funktion `bvp4c` verwendet, die auf einem Kollokationsverfahren basiert, wobei ca. 400 Stützstellen verwendet wurden. Die Schrittweite wurde dabei adaptiv angepasst, und das Residuum der Lösung betrug 10^{-6} . Der Rechenaufwand für die Ermittlung der Lösung betrug in etwa 5 Stunden bei einer AMD Athlon Dual Core 64 Bit CPU mit 1024 kB Cache und einer 3 GHz Taktung.

Als vorgegebene Schätzfunktionen für X , h_2 und h_3 waren in diesem Fall im Unterschied zur direkten numerischen Lösung der Gleichung (2.54) konstante Funktionen nicht ausreichend. Wir haben zum Erhalt der Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen in Abbildung 5.5 die für große Ω -Werte gültigen asymptotischen Grenzfälle der Lösungen für $X(\Omega)$, $h_2(\Omega)$ und $h_3(\Omega)$ verwendet, die wir erst im weiter unten folgenden Abschnitt



(a) Vergleich der Lösungen



(b) Nichterfüllung der Anfangsbedingungen

Abbildung 5.5: Vergleich der numerischen Lösung H_1 von Gleichung (2.54) (rote Kurve) aus Abbildung 4.6) mit der Lösung H_{10} nach der Methode der mehrfachen Variablen (5.36) (schwarz durchgezogene Kurve). Parameterwerte: $\beta = 0,1$, $\Gamma = 2$. Randbedingungen für H_1 : $H_1(0) = 0$, $H_{1X}(0) = 0,1$ und $H_1(130) = 2$. Randbedingungen für H_{10} : $X(\Omega = 0) = 0$, $h_2(0) = -0,01108$ und $h_3(2) = 2,003735$. Die strichlierte Kurve stellt die langsam Veränderliche h_2 , die punktierte Kurve h_3 dar. Abbildung 5.5(b) zeigt einen vergrößerten Ausschnitt in der Nähe des Referenzpunktes, wo die Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen, dargestellt als Funktion von X , die vorgegebenen Randbedingungen nicht erfüllt.

5.4 präsentieren werden, und zwar wurden die in Gleichungen (5.68), (5.69) und (5.70) angegebenen Funktionen mit $C = 4$ als Schätzfunktionen für die Lösungen der Gleichungen (5.41), (5.31) und (5.32) vorgegeben. Mit den so berechneten langsamen Veränderlichen $X(\Omega)$, $h_2(\Omega)$ und $h_3(\Omega)$ kann die Lösungsfunktion H_{10} in (5.36) als Funktion der ursprünglichen Variablen X dargestellt und mit der direkten numerischen Lösung H_1 von Gleichung (2.54) verglichen werden.

In Abbildung 5.5 ist ersichtlich, dass der Verlauf von Amplitude und Frequenzänderung von der Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen im Vergleich mit der direkten numerischen Lösung von Gleichung (2.54) sehr gut wiedergegeben wird. Abbildung

5.5(b) zeigt, dass die Abweichungen zwischen beiden Lösungen aus der Nichterfüllung der Anfangsbedingungen durch die Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen resultiert, ähnlich wie dies in den Beispielen in Abbildungen 5.2 und 5.3 der Fall war.

Anhand der asymptotisch für große X -Werte gültigen Darstellung für h_2 und h_3 , Gleichungen (5.69) und (5.70), ist ersichtlich, dass das numerische Randwertproblem auf der rechten Seite des Integrationsintervalls einen erhöhten Rechenaufwand verursacht: Für $X \rightarrow \infty$ gilt $h_2 \rightarrow \Gamma$ und $h_3 \rightarrow \Gamma$, sodass aus den Gleichungen (3.34) und (3.35) folgt, dass $R_0 \rightarrow \Gamma(\Gamma/2 - 1)$ und $S_0 \rightarrow -\Gamma^2(\Gamma/3 - 1/2)$, und mit Gleichung (3.27) ergibt sich für die Diskriminante $D \rightarrow 0$. Der Übergang zu voll ausgebildeter Strömung stellt also den Übergang zu einem Grenzfall einer aperiodischen, in diesem Fall einer konstanten Lösung dar.

5.4 Asymptoten für $X \rightarrow \infty$

Wie in Abschnitt 3.3 gezeigt wurde, besitzt Gleichung (2.54) Lösungen mit der Asymptote $H_1 = \Gamma$ für $X \rightarrow \infty$. Auch die Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen (5.36) besitzt im Grenzfall großer Ω -Werte eine entsprechende Asymptote. Lässt man nämlich $h_2, h_3 \rightarrow \Gamma$ gehen, so folgt aus Gleichung (5.50)

$$I_j \rightarrow \pi \Gamma^j / \sqrt{3(\Gamma - 1)}, \quad j = (0, 1, 2), \quad (5.54)$$

und mit (5.29), (5.27) und (5.28)

$$\frac{dR_0}{d\Omega} \rightarrow 0, \quad \frac{dS_0}{d\Omega} \rightarrow 0, \quad (5.55)$$

sodass die langsam Veränderlichen asymptotisch die konstanten Werte

$$R_0 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma(\Gamma - 2), \quad S_0 \rightarrow \frac{1}{6}\Gamma^2(3 - 2\Gamma), \quad (5.56)$$

annehmen, wie aus (3.34) und (3.35) folgt. Nach (5.54) ist dies im reellen Wertebereich allerdings nur für $\Gamma > 1$ möglich, das heisst, dass es sich bei den durch $h_2 \rightarrow \Gamma$ und $h_3 \rightarrow \Gamma$ beschriebenen asymptotischen Strömungszuständen um abströmseitige Zustände mit großen Koordinatenwerten handeln muss. Dies steht im Einklang mit dem asymptotischen Wert für die Ortskoordinate X , denn mit $\Omega \rightarrow \infty$ geht auch

$$X = 2\sqrt{3}\beta^{-1} \int_0^\Omega I_0(\Omega) d\Omega \rightarrow \infty. \quad (5.57)$$

Weiters kann man h_2 und h_3 um diesen asymptotischen Zustand entwickeln. Aus einem Ansatz

$$h_2 = \Gamma + h_2^{(1)} + \dots, \quad (5.58)$$

$$h_3 = \Gamma + h_3^{(1)} + \dots, \quad (5.59)$$

mit $\Gamma = \mathcal{O}(1)$, $h_2^{(1)} = o(1)$ und $h_3^{(1)} = o(1)$ folgt für die Integrale I_i und J_i

$$I_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3(\Gamma-1)}} \left[1 + \frac{1}{4(\Gamma-1)} \left(-(h_3^{(1)} + h_2^{(1)}) + \right. \right.$$

Lösungen der Bestimmungsgleichung für die Störung der freien Oberfläche mittels der Methode der mehrfachen Variablen

$$\begin{aligned} & \left. \frac{3}{8} \frac{1}{\Gamma-1} (h_3^{(1)} + h_2^{(1)})^2 + \frac{1}{48} \frac{1}{\Gamma-1} (h_3^{(1)} - h_2^{(1)})^2 \right] + \dots, \quad (5.60) \\ I_1 = & \frac{\pi\Gamma}{\sqrt{3}(\Gamma-1)} \left[1 + \frac{1}{4(\Gamma-1)} \left(\frac{\Gamma-2}{\Gamma} (h_3^{(1)} + h_2^{(1)}) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4(\Gamma-1)} - \frac{1}{\Gamma} \right) (h_3^{(1)} + h_2^{(1)})^2 + \frac{1}{48} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{24(\Gamma-1)} - \frac{1}{6\Gamma} \right) (h_3^{(1)} - h_2^{(1)})^2 \right) \right] + \dots, \quad (5.61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{\pi\Gamma^2}{\sqrt{3}(\Gamma-1)} \left[1 + \frac{3\Gamma-4}{4\Gamma(\Gamma-1)} (h_3^{(1)} + h_2^{(1)}) + \right. \\ & \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\Gamma^2} + \frac{3}{8(\Gamma-1)^2} - \frac{1}{\Gamma(\Gamma-1)} \right) (h_3^{(1)} + h_2^{(1)})^2 + \\ & \left. \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\Gamma^2} + \frac{1}{24(\Gamma-1)^2} - \frac{1}{3\Gamma(\Gamma-1)} \right) (h_3^{(1)} - h_2^{(1)})^2 \right] + \dots, \quad (5.62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_1 = I_1 - \Gamma I_0 = & \frac{\pi}{2\sqrt{3}(\Gamma-1)} \left[(h_3^{(1)} + h_2^{(1)}) - \frac{1}{4(\Gamma-1)} \left((h_3^{(1)} + h_2^{(1)})^2 + \frac{1}{6} (h_3^{(1)} - h_2^{(1)})^2 \right) \right] + \dots, \quad (5.63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 = I_2 - \Gamma I_1 = & \frac{\pi\Gamma}{2\sqrt{3}(\Gamma-1)} \left[(h_3^{(1)} + h_2^{(1)}) + \right. \\ & \left. \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{2(\Gamma-1)} \right) \left((h_3^{(1)} + h_2^{(1)})^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{6(\Gamma-1)} \right) (h_3^{(1)} - h_2^{(1)})^2 \right) \right] + \dots. \quad (5.64) \end{aligned}$$

Setzt man diese in die Bestimmungsgleichungen (5.31) und (5.32) ein und addiert bzw. subtrahiert die Gleichungen jeweils, so ergibt sich

$$\frac{d(h_3^{(1)} + h_2^{(1)})}{d\Omega} = \frac{2\pi}{(\Gamma-1)^{3/2}} (h_3^{(1)} + h_2^{(1)}) + \dots, \quad (5.65)$$

$$\frac{d(h_3^{(1)} - h_2^{(1)})}{d\Omega} = -\frac{\pi}{(\Gamma-1)^{3/2}} (h_3^{(1)} - h_2^{(1)}) + \dots. \quad (5.66)$$

Aus Integration der ersten Gleichung folgt mir den Randbedingungen $h_2^{(1)} \rightarrow 0$ und $h_3^{(1)} \rightarrow 0$ für $\Omega \rightarrow \infty$, dass $h_3^{(1)} = -h_2^{(1)}$. Aus Integration der zweiten Gleichung und der Gleichung (5.41) folgt

$$h_3^{(1)} = -h_2^{(1)} = C/2 \exp \left[-\pi\Omega/(\Gamma-1)^{3/2} \right], \quad (5.67)$$

$$X = \frac{2\pi}{\beta\sqrt{\Gamma-1}} \Omega + \dots, \quad (5.68)$$

wobei wir wieder die Anfangsbedingung $X(\xi=0)=0$ mit $\Omega = \beta\xi$ verwendet haben. Damit folgt also für $\Omega, X \rightarrow \infty$

$$h_2 = \Gamma - C/2 \exp \left[-\beta X/2(\Gamma-1) \right] + \dots, \quad (5.69)$$

$$h_3 = \Gamma + C/2 \exp \left[-\beta X/2(\Gamma-1) \right] + \dots, \quad (5.70)$$

mit einer unbestimmten Konstanten C .

Damit lässt sich die Lösung für die Höhenstörung nach der Methode der mehrfachen Variablen (5.36) für diesen Grenzfall angeben. Der langsam veränderliche Parameter m , definiert in Gleichung (3.47), ergibt sich bis auf Terme höherer Ordnung zu

$$m = C/3(\Gamma-1) \exp \left[-\beta X/2(\Gamma-1) \right] + \dots. \quad (5.71)$$

Damit folgt aus den asymptotischen Eigenschaften des in (5.36) auftretenden elliptischen Integrals $K(m)$ (siehe [3], S.591, 17.3.11) sowie des Cosinus amplitudinis (siehe [3], S.573, 16.13.2) bis auf Terme höherer Ordnung

$$H_{1,0} = \Gamma + h_3^{(1)} \cos \left[2\pi \left(1 + \frac{h_3^{(1)} - h_2^{(1)}}{3(\Gamma - 1)} + \dots \right) (\xi - \xi_0) \right] + \dots, \quad (5.72)$$

wobei wir Gleichung (5.67) verwendet haben. Mit $\Omega = \beta\xi$ und Gleichung (5.68) ist

$$X = \frac{2\pi}{\sqrt{\Gamma - 1}} \xi, \quad (5.73)$$

sodass die Lösung für die Höhenstörung nach der Methode der mehrfachen Variablen (5.36) im asymptotischen Fall $\Omega, X \rightarrow \infty$ in führender Ordnung lautet:

$$H_{1,0} = \Gamma + C \exp[-\beta X/2(\Gamma - 1)] \cos \left[\sqrt{\Gamma - 1}(X - X_0) \right] + \dots, \quad (5.74)$$

wobei wir $X_0 = 2\pi\xi_0/\sqrt{\Gamma - 1}$ gesetzt haben. Das bedeutet, dass im asymptotischen Grenzfall des Übergangs zu voll ausgebildeter Strömung die Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen für $\Omega \rightarrow \infty$ das gleiche asymptotische Verhalten zeigt wie die asymptotische Lösung der vollen Gleichung (2.54) für $X \rightarrow \infty$, vergleiche Gleichung (3.19). Dabei treten wieder zwei Konstanten C und X_0 auf, die aufgrund der asymptotischen Gültigkeit von Gleichung (5.74) unbestimmt bleiben.

Die andere in Abschnitt 3.3 präsentierte Asymptote $H_1 = \beta X$ für $X \rightarrow \infty$ von Gleichung (2.54) wird von der Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen (5.36) ebenfalls im Grenzfall großer Ω -Werte entsprechend wiedergegeben. Für das asymptotische Verhalten $h_2, h_3 \rightarrow \beta X$ folgt unter Verwendung von Gleichung (3.31) für den Parameter m aus Gleichung (3.47), dass $m \rightarrow 0$ und aus Gleichung (5.37) folgt $K(m) \rightarrow \pi/2$. Für diesen asymptotischen Fall kann man Gleichung (5.41) unter Verwendung von Gleichung (5.34) integrieren, und es folgt

$$\beta X \rightarrow (3\pi\Omega)^{2/3}, \quad (5.75)$$

sodass im Grenzfall $X \rightarrow \infty$ auch $\Omega \rightarrow \infty$. Demnach folgt für h_1, h_2 und h_3

$$h_1 \rightarrow -2(3\pi\Omega)^{2/3}, \quad (5.76)$$

$$h_2, h_3 \rightarrow (3\pi\Omega)^{2/3}. \quad (5.77)$$

Dies ergibt für die Integrale I_j in der Gestalt (5.50)

$$I_j \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{3}} (3\pi\Omega)^{(2j-1)/3}, \quad j = (0, 1, 2), \quad (5.78)$$

und mit (5.29), (5.27) und (5.28) folgt

$$R_0 \rightarrow \frac{1}{2}(3\pi\Omega)^{4/3}, \quad (5.79)$$

$$S_0 \rightarrow -\frac{1}{3}(3\pi\Omega)^2. \quad (5.80)$$

Man kann nun die Bestimmungsgleichungen (5.31) und (5.32) für h_2 und h_3 um diesen asymptotischen Zustand entwickeln. Aus einem Ansatz

$$h_2 = (3\pi\Omega)^{2/3} + h_2^{(1)} + \dots, \quad (5.81)$$

$$h_3 = (3\pi\Omega)^{2/3} + h_3^{(1)} + \dots, \quad (5.82)$$

mit $h_2^{(1)} = o(\Omega^{2/3})$ und $h_3^{(1)} = o(\Omega^{2/3})$ folgt für die Integrale I_i und J_i

$$I_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}(3\pi\Omega)^{1/3}} \left\{ 1 - \frac{1}{4}(3\pi\Omega)^{-2/3} \left[(h_3^{(1)} + h_2^{(1)}) + \frac{3}{8}(3\pi\Omega)^{-4/3} \left((h_3^{(1)} + h_2^{(1)})^2 + \frac{1}{18}(h_3^{(1)} - h_2^{(1)})^2 \right) \right] \right\} + \dots, \quad (5.83)$$

$$I_1 = \frac{\pi(3\pi\Omega)^{1/3}}{\sqrt{3}} \left\{ 1 + \frac{1}{4}(3\pi\Omega)^{-2/3} \left[4 + \left(1 - (3\pi\Omega)^{-2/3} \right) (h_3^{(1)} + h_2^{(1)}) - \frac{1}{8}(3\pi\Omega)^{-2/3} \left((h_3^{(1)} + h_2^{(1)})^2 + \frac{1}{2}(h_3^{(1)} - h_2^{(1)})^2 \right) \right] \right\} + \dots, \quad (5.84)$$

$$I_2 = \frac{\pi(3\pi\Omega)}{\sqrt{3}} \left\{ 1 + \frac{1}{4}(3\pi\Omega)^{-2/3} \left[8 + \left(3 + 2(3\pi\Omega)^{-2/3} \right) (h_3^{(1)} + h_2^{(1)}) + (3\pi\Omega)^{-2/3} \left(4 + \frac{3}{8}(h_3^{(1)} + h_2^{(1)})^2 + \frac{17}{48}(h_3^{(1)} - h_2^{(1)})^2 \right) \right] \right\} + \dots, \quad (5.85)$$

$$J_1 = I_1 - \Gamma I_0 = \frac{\pi(3\pi\Omega)^{1/3}}{\sqrt{3}} \left\{ 1 + \frac{1}{4}(3\pi\Omega)^{-2/3} \left[4(1 - \Gamma) + (h_3^{(1)} + h_2^{(1)}) - \frac{1}{2}(3\pi\Omega)^{-2/3} \left((1 - \Gamma)(h_3^{(1)} + h_2^{(1)}) + \frac{1}{4} \left((h_3^{(1)} + h_2^{(1)})^2 + \frac{1}{2}(h_3^{(1)} - h_2^{(1)})^2 \right) \right) \right] \right\} + \dots, \quad (5.86)$$

$$J_2 = I_2 - \Gamma I_1 = \frac{\pi(3\pi\Omega)}{\sqrt{3}} \left\{ 1 + \frac{1}{4}(3\pi\Omega)^{-2/3} \left[4(2 - \Gamma) + 3(h_3^{(1)} + h_2^{(1)}) + (3\pi\Omega)^{-2/3} \left((1 - \Gamma) - \left(1 - \frac{\Gamma}{2} \right) (h_3^{(1)} + h_2^{(1)}) + \frac{3}{8} \left((h_3^{(1)} + h_2^{(1)})^2 + \frac{17}{48}(h_3^{(1)} - h_2^{(1)})^2 \right) \right) \right] \right\} + \dots, \quad (5.87)$$

Beim Einsetzen der Ansätze (5.82) in die Bestimmungsgleichungen (5.31) und (5.32) zeigt sich, dass die Gleichungen in führender Ordnung, i.e. in $\mathcal{O} \left[(3\pi\Omega)^{1/3} (h_3^{(1)} + h_2^{(1)}) \right]$ identisch erfüllt sind. In nächster Ordnung folgen zwei Gleichungen für $dh_2^{(1)}/d\Omega$ und $dh_3^{(1)}/d\Omega$, die jeweils einmal addiert und einmal subtrahiert folgende Gleichungen ergeben:

$$\frac{d(h_3^{(1)} + h_2^{(1)})}{d\Omega} = \frac{4\pi(1 - \Gamma)}{3\pi\Omega} + \dots, \quad (5.88)$$

$$\frac{d(h_3^{(1)} - h_2^{(1)})}{d\Omega} = -\frac{3\pi}{2(3\pi\Omega)} (h_3^{(1)} - h_2^{(1)}) + \dots. \quad (5.89)$$

Aus Integration dieser Gleichungen und der Gleichung (5.41) folgt

$$h_2^{(1)} + h_3^{(1)} = \frac{4}{3}(1 - \Gamma) \ln(3\pi\Omega) + \tilde{C} + \dots, \quad (5.90)$$

$$h_3^{(1)} - h_2^{(1)} = \tilde{C} (3\pi\Omega)^{-1/2} + \dots, \quad (5.91)$$

$$\beta X = (3\pi\Omega)^{2/3} + \dots, \quad (5.92)$$

wobei wir die Anfangsbedingung $X(\xi = 0) = 0$ mit $\Omega = \beta\xi$ verwendet haben. Damit folgt also für Ω , $X \rightarrow \infty$

$$h_2 = h_3 = \beta X + (1 - \Gamma) \ln(\beta X) + \tilde{C}/2 + \dots, \quad (5.93)$$

$$h_3 - h_2 = \tilde{C} (\beta X)^{-3/4} + \dots, \quad (5.94)$$

mit den unbestimmten Konstanten \tilde{C} und $\tilde{\tilde{C}}$.

Da der langsam veränderliche Parameter m aus Gleichung (3.47) im Grenzfall der Asymptote des tiefen Wassers gegen 0 geht, kann man die asymptotische Lösung für die Höhenstörung nach der Methode der mehrfachen Variablen (5.36) unter Verwendung von (5.34), (5.90) und (5.91) sowie den asymptotischen Eigenschaften des Cosinus amplitudinis (siehe [3], S.573, 16.13.2) bis auf Terme höherer Ordnung schreiben als

$$H_{1,0} = (3\pi\Omega)^{2/3} + \frac{2}{3}(1 - \Gamma) \ln(3\pi\Omega) + \tilde{C}/2 + \tilde{\tilde{C}}(3\pi\Omega)^{-1/2} \cos \left\{ 2\pi \left(1 + (1 - \Gamma) \frac{\ln[(3\pi\Omega)^{2/3}]}{(3\pi\Omega)^{2/3}} \right)^{1/2} \xi + \dots \right\} + \dots \quad (5.95)$$

Mit (5.92) lautet nun die Lösung für die Höhenstörung nach der Methode der mehrfachen Variablen (5.36) im asymptotischen Fall $\Omega, X \rightarrow \infty$ bis auf Terme höherer Ordnung:

$$H_{1,0} = \beta X + (1 - \Gamma) \ln(\beta X) + \tilde{C}/2 + \tilde{\tilde{C}}(\beta X)^{-3/4} \cos \left[\frac{2}{3}\beta^{-1}(\beta X)^{3/2} + \dots \right] + \dots \quad (5.96)$$

Das bedeutet, dass im asymptotischen Grenzfall des Übergangs zu tiefem Wasser die Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen für $\Omega \rightarrow \infty$ das gleiche asymptotische Verhalten zeigt wie die asymptotische Lösung der vollen Gleichung (2.54) für $X \rightarrow \infty$, vergleiche Gleichungen (3.8), (3.12) und (3.18). Dabei treten wieder zwei Konstanten \tilde{C} und $\tilde{\tilde{C}}$ auf, die aufgrund der asymptotischen Gültigkeit von Gleichung (5.96) unbestimmt bleiben.

Interessant dabei ist, dass der Korrekturterm $(1 - \Gamma) \ln(\beta X)$ darüber entscheidet, ob eine wellige Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen existiert: Setzt man (5.93) in (3.34) und (3.35) ein und überprüft das Kriterium für die Existenz einer welligen Lösung $D < 0$ mit D aus Gleichung (3.27), so ergibt sich bis auf Terme höherer Ordnung

$$D = [1 - (1 - \Gamma) \ln(\beta X)] (\beta X)^5 + \dots, \quad (5.97)$$

sodass nur für $\Gamma < 1$ eine wellige Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen im asymptotischen Grenzfall des Übergangs zu tiefem Wassers möglich ist. Andererseits ist dann die Bedingung $\Gamma < 1$ auch hinreichend für die Existenz eines welligen Strömungszustandes weit stromab.

5.5 Elimination der Ortskoordinate, Differentialgleichung für die Amplitude als Funktion der mittleren Auslenkung (Phasenebene)

Die Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen ist durch die Gleichungen (5.36), (5.27), (5.28) und (5.41) sowie durch die Angabe von Anfangsbedingungen vollständig bestimmt. Die als Funktionen von Ω langsam Veränderlichen R_0, S_0 und X können dabei unabhängig von der schnell mit ξ veränderlichen Lösung $H_{1,0}$ berechnet werden; diese treten in Lösung (5.36) als Parameter in Erscheinung. Mit der Bestimmung von R_0 und S_0

sind aber nach Abschnitt 3.5 auch h_1 , h_2 und h_3 und damit auch die Periode $2K(m)$ sowie die mittlere Auslenkung

$$h_m := (h_2 + h_3)/2 \quad (5.98)$$

und die Amplitude

$$\Delta := h_3 - h_2 \quad (5.99)$$

der Lösung bestimmt. Wesentlich zur Charakterisierung des Lösungsverlaufes ist also die Bestimmung der langsam Veränderlichen, d.i. die Lösung der Gleichungen (5.27), (5.28) und (5.41) oder alternativ der Gleichungen (5.31), (5.32) und (5.41). Durch entsprechende Addition bzw. Subtraktion und einige Umformungen kann man die beiden Gleichungen (5.31) und (5.32) auf die entsprechenden Gleichungen für die in (5.98) und (5.99) eingeführten langsam Veränderlichen h_m und Δ umschreiben. Diese lauten dann:

$$\frac{dh_m}{d\Omega} = 6\sqrt{3} \frac{J_2 + (2h_m - 3)J_1}{9(1 - h_m)^2 - \Delta^2/4}, \quad (5.100)$$

$$\frac{d\Delta}{d\Omega} = 6\sqrt{3} \frac{12(h_m - 1)(h_m J_1 - J_2) - \Delta^2 J_1}{[9(1 - h_m)^2 - \Delta^2/4] \Delta}. \quad (5.101)$$

Die in Gleichung (5.30) eingeführten Integrale I_i , aus denen die J_i aufgebaut sind, lassen sich damit wie folgt ausdrücken

$$I_i = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{[h_m + (\Delta/2) \sin \vartheta]^i d\vartheta}{\sqrt{3(h_m - 1) + (\Delta/2) \sin \vartheta}}, \quad i = (0, 1, 2). \quad (5.102)$$

Man kann die Gleichungen für die langsam Veränderlichen nun vereinfachen, indem man die Ortskoordinate Ω eliminiert und die Amplitude Δ als Funktion der mittleren Auslenkung h_m der Störung der welligen Oberfläche in einem Phasenraum darstellt. Aus Gleichungen (5.100) und (5.101) folgt

$$\frac{d\Delta}{dh_m} = \frac{12(h_m - 1)(h_m J_1 - J_2) - \Delta^2 J_1}{[J_2 + (2h_m - 3)J_1] \Delta}. \quad (5.103)$$

Die Grenzfälle der aperiodischen Lösungen sind beim Zusammenfallen von $h_2 = h_3$ (konstante Lösung) und von $h_1 = h_2$ (Solitonenlösung) zu finden, oder gleichbedeutend: $\Delta = 0$ (konstante Lösung) bzw. $\Delta = \pm 6(h_m - 1)$ (Solitonenlösung). Ersterer Fall stellt einen singulären Punkt der Differentialgleichung (5.103) dar: Aus (5.102) folgt nämlich, dass mit $\Delta = 0$ automatisch $J_2/J_1 = h_m = h_2 = h_3$ gilt, sodass alle Terme im Zähler und Nenner von (5.103) verschwinden.

Die Lösungen für die langsam Veränderlichen können somit in einem Phasendiagramm (h_m, Δ) dargestellt werden. Der Anfangspunkt einer jeweiligen Lösung wird aus der Angabe der Anfangsbedingungen $H_1(0) = 0$, $H_{1X}(0)$ und $H_{1XX}(0)$ berechnet, indem mit diesen aus (5.46) und (5.47) $R_0(0)$ und $S_0(0)$ ermittelt wird, aus diesen die Nullstellen des Polynoms $q(h, R_0(0), S_0(0))$ in Gleichung (3.25) ermittelt werden und mittels diesen dann die Werte für $h_m(0)$ und $\Delta(0)$ berechnet werden. Aus den Werten der langsam Veränderlichen entlang der Lösungskurve ergibt sich auch die mit diesen Werten parametrisierte schnell veränderliche Lösung (5.36).

Der Nachteil dieser Darstellung ist allerdings, dass die Lösungskurven alle den Parameter Γ über die Integrale J_i in (5.103) enthalten. Um eine universelle, d.h. von Γ unabhängige

Darstellung der langsam Veränderlichen zu erhalten, wenden wir obige Vorgehensweise auf die in Abschnitt (3.9) hergeleiteten transformierten, von Γ unabhängigen Gleichungen an. Wir beginnen mit der allgemeinen Lösung dieser transformierten Gleichungen nach der Methode der mehrfachen Variablen.

5.6 Universelle Lösungen der Γ -freien Gleichungen

Ausgehend vom zu Gleichungen (3.22)-(3.24) äquivalenten, aber formal von Γ unabhängigen Gleichungssystem (3.64)-(3.66) entwickeln wir die Gleichungen in analoger Vorgehensweise zu Abschnitt 5.2 nach der Methode der mehrfachen Variablen. Dabei sind in Abhängigkeit von Γ die drei Fälle nach Gleichungen (3.57) und (3.58) zu unterscheiden. Der Zusammenhang zwischen der langsamen und der schnell veränderlichen Variablen ist wieder durch Gleichung (5.11) gegeben, die Definitionsgleichung für die schnell veränderliche Variable ξ werden wir weiter unten in Gleichung (5.110) angeben. Der zu (5.13)-(5.15) analoge Lösungsansatz zur Lösung der Gleichungen (3.64)-(3.66) lautet:

$$\mathfrak{H}_1(\mathfrak{X}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{H}_{10}(\xi, \Omega) + \mathfrak{b} \mathfrak{H}_{11}(\xi, \Omega) + \dots, \quad (5.104)$$

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{R}_0(\xi, \Omega) + \mathfrak{b} \mathfrak{R}_1(\xi, \Omega) + \dots, \quad (5.105)$$

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{X}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{S}_0(\xi, \Omega) + \mathfrak{b} \mathfrak{S}_1(\xi, \Omega) + \dots. \quad (5.106)$$

Die Funktionen in (5.104)-(5.106) werden als periodisch in ξ mit der Periode 1 vorausgesetzt. Eine Rechnung analog zu jener in Abschnitt 5.2 durchgeführten ergibt eine allgemeine Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen

$$\mathfrak{H}_{10} = \mathfrak{h}_2 + (\mathfrak{h}_3 - \mathfrak{h}_2) \operatorname{cn}^2 [2\mathbf{K}(\mathfrak{m})(\xi - \xi_0)|\mathfrak{m}]. \quad (5.107)$$

Die in (5.107) auftretenden \mathfrak{h}_2 und \mathfrak{h}_3 sind die Nullstellen des Polynoms q in Gleichung (3.77) mit den in Abschnitt 3.11 aufgelisteten Eigenschaften.

Die Gleichungen für die langsam Veränderlichen \mathfrak{R}_0 , \mathfrak{S}_0 und \mathfrak{X} lauten

$$\frac{d\mathfrak{R}_0}{d\Omega} = 2\sqrt{3} I_1(\mathfrak{R}_0, \mathfrak{S}_0), \quad (5.108)$$

$$\frac{d\mathfrak{S}_0}{d\Omega} = -2\sqrt{3} I_2(\mathfrak{R}_0, \mathfrak{S}_0), \quad (5.109)$$

$$\frac{d\mathfrak{X}}{d\xi} = \mathfrak{b} \frac{d\mathfrak{X}}{d\Omega} =: \omega^{-1} = 2\sqrt{3} I_0(\mathfrak{R}_0, \mathfrak{S}_0), \quad (5.110)$$

mit den in (5.30) definierten Integralen I_i . Dabei dient Gleichung (5.110) als Definitionsgleichung für die schnell veränderliche Variable ξ und die langsam veränderliche Frequenz ω . Die Gleichungen (5.108) und (5.109) sind im Unterschied zu (5.27) und (5.28) formal von Γ unabhängig. Die implizite Abhängigkeit der Lösungen von Γ ergibt sich über die Abhängigkeit von \mathfrak{b} (siehe (3.60)-(3.61)) sowie die Abhängigkeit der Anfangsbedingungen (3.62)-(3.63) von Γ .

Ganz analog zum untransformierten Fall gehen auch in die Lösung (5.107) als Parameter die langsam Veränderlichen ein, die selbst unabhängig mittels der Gleichungen (5.108) und (5.109) berechnet werden müssen. Auch hier können die Gleichungen für \mathfrak{R}_0 und \mathfrak{S}_0

durch Gleichungen für h_2 und h_3 ersetzt werden, diese lauten

$$\frac{1}{6}(2h_2 + h_3 - 3s)(h_2 - h_3) \frac{dh_2}{d\Omega} = 2\sqrt{3}(h_2 I_1 - I_2), \quad (5.111)$$

$$\frac{1}{6}(2h_3 + h_2 - 3s)(h_3 - h_2) \frac{dh_3}{d\Omega} = 2\sqrt{3}(h_3 I_1 - I_2). \quad (5.112)$$

$h_1(\Omega)$ kann dabei mithilfe von (3.80) berechnet werden.

Analog zum untransformierten Fall kann man eine mittlere Auslenkung

$$h_m := (h_2 + h_3)/2 \quad (5.113)$$

und eine Amplitude

$$d := h_3 - h_2 \quad (5.114)$$

für die transformierten Grössen einführen und die beiden Gleichungen (5.111) und (5.112) auf entsprechende Gleichungen für die langsam Veränderlichen h_2 und h_3 umformen, mit dem Ergebnis

$$\frac{dh_m}{d\Omega} = 6\sqrt{3} \frac{I_2 + (2h_m - 3s)I_1}{9(s - h_m)^2 - d^2/4}, \quad (5.115)$$

$$\frac{dd}{d\Omega} = 6\sqrt{3} \frac{12(h_m - s)(h_m I_1 - I_2) - d^2 I_1}{[9(s - h_m)^2 - d^2/4] d}. \quad (5.116)$$

Die Integrale I_i haben dabei die Gestalt

$$I_i = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{[h_m + (d/2) \sin \vartheta]^i d\vartheta}{\sqrt{3}(h_m - s) + (d/2) \sin \vartheta}, \quad i = (0, 1, 2). \quad (5.117)$$

Eliminiert man aus den Gleichungen (5.115) und (5.116) die langsame „Orts“-variable Ω , so erhält man eine Darstellung im Phasenraum:

$$\frac{dd}{dh_m} = \frac{12(h_m - s)(h_m I_1 - I_2) - d^2 I_1}{[I_2 + (2h_m - 3s)I_1] d}, \quad (5.118)$$

analog zu (5.103) im untransformierten Fall. Der Parameter s unterscheidet die in Gleichung (3.56) definierten Fälle.

Wie schon in Abschnitt 3.9 festgestellt wurde und wie aus dem Vergleich der Gleichungen (5.115), (5.116), (5.117) und (5.118) mit den Gleichungen (5.100), (5.101), (5.102) und (5.103) zu erkennen ist, decken sich im Falle von $s = 1$ ($\Gamma < 1$) die Formeln für den untransformierten Fall mit jenen des transformierten Falles.

Der Zusammenhang zwischen den transformierten Größen h_m , d , \mathfrak{R} und \mathfrak{S} lautet

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \frac{1}{2} [(h_m - s)^2 - s^2] + \frac{1}{24} d^2, \\ \mathfrak{S} &= \frac{1}{6} (3s - 2h_m) (h_m^2 - \frac{1}{4} d^2). \end{aligned} \quad (5.119)$$

Die Lösungen von Gleichung (5.118) für die langsam Veränderlichen d und h_m liefern in einem Phasendiagramm (h_m , d) universelle (d.h. von Γ unabhängige) Kurven. Der zulässige Wertebereich für d und h_m ergibt sich aus Gleichungen (3.79)- (3.82):

$$0 \leq d \leq 6(h_m - s), \quad (5.120)$$

$$s \leq h_m < \infty. \quad (5.121)$$

Dies ist ein Ausschnitt des ersten Quadranten, begrenzt nach unten durch die Linie $\delta = 0$ und nach oben durch $\delta = 6(h_m - s)$. Analog zum untransformierten Fall ergeben sich die Grenzfälle der aperiodischen Lösungen beim Zusammenfallen von $h_2 = h_3$ (konstante Lösung) und von $h_1 = h_2$ (Solitonenlösung), oder gleichbedeutend: $\delta = 0$ (konstante Lösung) und $\delta = 6(h_m - s)$ (Solitonenlösung). Für $\delta = 0$ folgt aus (5.117), dass $I_2/I_1 = h_m = h_2 = h_3$, sodass alle Terme im Zähler und Nenner von (5.118) verschwinden.

Das bedeutet, dass die Begrenzungsgeraden für den erlaubten Bereich an Werten, das heisst für auf wellige Lösungen führende Werte (h_m, δ) im ersten Quadranten auch gleichzeitig die Grenzfälle der aperiodischen Lösungen markieren. Beide Geraden schneiden sich im Punkt $(h_m, \delta) = (s, 0)$, in dem alle drei Nullstellen $h_1 = h_2 = h_3 = s$ zusammenfallen. Wir wollen nun die singulären Punkte der Differentialgleichung (5.118) untersuchen, die offensichtlich entlang der Begrenzungsgeraden zu finden sind (siehe [9]). Ein (trivialer) singulärer Punkt ist der Punkt $(h_m, \delta) = (0, 0)$, für den die Integrale I_i sowie Zähler und Nenner der rechten Seite von Gleichung (5.118) identisch verschwinden.

Für den ersten nichttrivialen Grenzfall entwickeln wir Gleichung (5.118) nach $\delta \ll h_m = O(1)$. Dabei ergibt sich für die Integrale I_i in der Darstellung (5.117)

$$I_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}(h_m - s)} \left(1 + \frac{1}{192} \frac{\delta^2}{(h_m - s)^2} \right) + \dots, \quad (5.122)$$

$$I_1 = \frac{\pi h_m}{\sqrt{3}(h_m - s)} \left(1 + \frac{1}{192} \frac{(3h_m - 4s)\delta^2}{(h_m - s)^2 h_m} \right) + \dots, \quad (5.123)$$

$$I_2 = \frac{\pi h_m^2}{\sqrt{3}(h_m - s)} \left(1 + \frac{1}{192} \frac{(17h_m^2 - 40s h_m + 24)\delta^2}{(h_m - s)^2 h_m^2} \right) + \dots. \quad (5.124)$$

Diese ergeben eingesetzt in (5.118) bis auf Terme höherer Ordnung

$$\frac{d\delta}{dh_m} = - \left(\frac{1}{2h_m} + \frac{1}{4(h_m - s)} \right) \delta + \dots. \quad (5.125)$$

Die singulären Punkte lauten daher $(h_m, \delta) = \{(0, 0), (s, 0)\}$.

Nach [9] entscheiden die konstanten Koeffizienten bei Linearisierung von Zähler und Nenner in (5.118) um den singulären Punkt darüber, in welche Klasse ein singulärer Punkt fällt. Wie man sich leicht überzeugen kann, sind in diesem Fall beide singuläre Punkte Sattelpunkte, durch die zwei Lösungskurven hindurchgehen.

Der zweite nichttriviale Grenzfall folgt aus Entwicklung von Gleichung (5.118) nach $(h_m - s) \ll \delta = O(1)$, welche wir hier jedoch nicht durchführen wollen, weil die kritischen Punkte für diesen Fall anhand der numerischen Lösungen von Gleichung (5.118), die wir in der folgenden Abbildung präsentieren werden, direkt ersichtlich sind.

Abbildung 5.6 zeigt das Lösungsfeld von Gleichung (5.118). Die Fälle $s = +1, 0$ bzw. -1 oder auch $\Gamma < 1, \Gamma = 1$ bzw. $\Gamma > 1$ sind in den Farben blau, grün bzw. rot dargestellt. Die durchgezogenen Kurven sind Lösungskurven von Gleichung (5.118). Die strichlierten Kurven stellen die obere Gültigkeitsgrenze in (5.120) für den erlaubten, das heisst auf wellige Lösungen führenden Bereich der dargestellten Größen h_m und δ dar, auf denen jeweils die Nullstellen h_1 und h_2 zusammenfallen. Die Abszisse repräsentiert die für die drei unterschiedlichen Fälle gemeinsame untere Gültigkeitsgrenze in (5.120), auf der die Nullstellen h_2 und h_3 zusammenfallen.

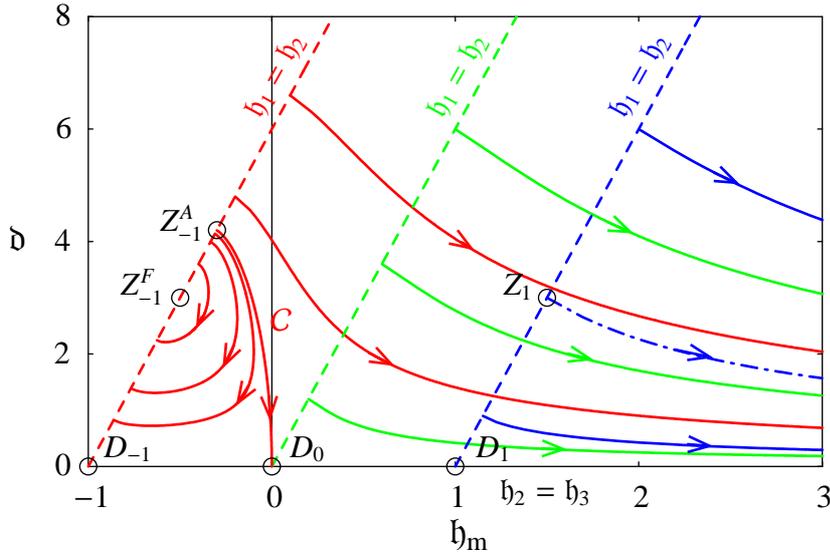


Abbildung 5.6: Amplitude gegen mittlere Auslenkung der welligen Oberflächenstörung in der transformierten Darstellung. Lösungsfeld von Gleichung (5.118). Fall $\Gamma < 1$ (blaue Kurven), Fall $\Gamma = 1$ (grüne Kurven) und Fall $\Gamma > 1$ (rote Kurven). Die durchgezogenen Kurven stellen Lösungskurven dar, die strichlierten Linien begrenzen zusammen mit der Abszisse den für wellige Lösungen möglichen Wertebereich. Spezielle Punkte sind eingeringt dargestellt.

Spezielle Punkte in diesem Lösungsfeld sind eingeringt dargestellt. Dabei sind die singulären Punkte mit $D_{-1}(-1, 0)$, $D_0(0, 0)$, $D_1(1, 0)$ und $Z_{-1}^A(-1/2, 3)$ bezeichnet. Der Punkt Z_{-1}^F ist ein Mittelpunkt, während alle anderen dieser vier singulären Punkte Sattelpunkte sind.

In den drei Punkten auf der Abszisse $D_{-1}(-1, 0)$, $D_0(0, 0)$ und $D_1(1, 0)$ fallen jeweils alle drei Nullstellen $h_1 = h_2 = h_3 = s$ für die Fälle $s = -1$, $s = 0$ und $s = 1$ zusammen. Der Punkt D_0 stellt gleichzeitig für die rot dargestellten Kurven den voll ausgebildeten Strömungszustand weit stromab dar, wobei $\Gamma > 1$ sein muss, vergleiche die Diskussion am Ende von Abschnitt 2.4. Tatsächlich folgt aus den Gleichungen (3.69) und (3.70) für den Fall $\Gamma > 1$ und $H_1 \rightarrow \Gamma$, $H_{1X} \rightarrow 0$ und $H_{1XX} \rightarrow 0$, dass

$$\begin{aligned} \Re &\rightarrow 0, & \Im &\rightarrow 0, \\ h_m &\rightarrow 0, & d &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.126)$$

Alle Kurven, die rechts aus dem Diagrammbereich laufen, münden asymptotisch in den Zustand des tiefen Wassers (siehe Abschnitt 4.1), alle roten Kurven, die von der Grenzgeraden $d = 6(h_m + 1)$ ausgehen und wieder in diese münden, sind Lösungen mit beschränktem Gültigkeitsbereich (siehe Abschnitt 4.2). Die spezielle Lösung, die in den voll ausgebildeten Zustand weit stromab in $D_0(0, 0)$ mündet (siehe Abschnitt 4.3), trennt gleichzeitig den Bereich der Anfangswerte, die auf Lösungen, die in den Zustand des tiefen Wassers münden, von jenen Anfangswerten, die auf Lösungen mit einem beschränkten Gültigkeitsbereich führen. Diese Lösung ist in Abbildung 5.6 mit C bezeichnet.

Die strichpunktierte, blau dargestellte Lösung, die vom Punkt $Z_1(3/2, 3)$ ausgeht, stellt jene spezielle Lösung dar, die aus einem voll ausgebildeten Referenzströmungszustand weit stromauf resultiert, falls $\Gamma = 0$. In diesem Fall voll ausgebildeter Strömung weit stromauf folgt bei $H_1 = 0$, $H_{1X} \rightarrow 0$ und $H_{1XX} \rightarrow 0$ mit den Gleichungen (3.69) und (3.70) oder auch

mit den Gleichungen (3.79) bis (3.82), dass

$$\begin{aligned} \Re &\rightarrow 0, & \Im &\rightarrow 0, \\ \mathfrak{h}_m &\rightarrow 3/2, & \mathfrak{d} &\rightarrow 3. \end{aligned} \quad (5.127)$$

Dieser Punkt ist in Abbildung 5.6 mit Z_1 bezeichnet.

Die in Abbildung 5.6 dargestellten, aus Integration von (5.118) gewonnenen Lösungen wurden mit folgenden Anfangsbedingungen berechnet:

$(\mathfrak{h}_m(0), \mathfrak{d}(0)) = (\mathfrak{h}_m(0), 6(\mathfrak{h}_m(0) - s) - 10^{-4})$, wobei für $\mathfrak{h}_m(0)$ folgende Werte vorgegeben wurden:

- Blaue Kurven ($s = 1, \Gamma < 1$): $\mathfrak{h}_m(0) = 2, 1,5, 1,115$ (von rechts oben nach links unten),
- grüne Kurven ($s = 0, \Gamma = 1$): $\mathfrak{h}_m(0) = 1, 0,6, 0,2$ (von rechts oben nach links unten) und
- rote Kurven ($s = -1, \Gamma > 1$): $\mathfrak{h}_m(0) = 0,1, -0,2, -0,31, -0,333, -0,4$ (von rechts oben nach links unten, ausgenommen die spezielle Lösung, die in den Punkt $(0, 0)$ mündet).

Bei der Berechnung der speziellen Lösung, die in den Punkt $D_0(0, 0)$ mündet, ergeben sich numerische Schwierigkeiten aufgrund des unbegrenzt anwachsenden Anstieges der Kurve zum Punkt D_0 hin. Aufgründdessen wurde statt (5.118) die entsprechende inverse Gleichung für $d\mathfrak{h}_m/d\mathfrak{d}$ nach \mathfrak{d} integriert, ausgehend von der Anfangsbedingung $(\mathfrak{d}(0), \mathfrak{h}_m(0)) = (10^{-4}, 0)$. Als Ergebnis dieser Integration ergibt sich für den Ausgangspunkt, der weit stromab auf voll ausgebildete Strömung führt, der Punkt $Z_{-1}^A(-3/10, 21/5)$. In diesem Punkt fallen die Nullstellen $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$ zusammen, was dem Übergang zu einer welligen Lösung mit unendlich langer Periodenlänge entspricht. Dieser Ausgangspunkt beschreibt jedoch keine voll ausgebildete Strömung in einem Referenzpunkt weit stromauf, da dafür $\Gamma = 0$ erforderlich wäre. Für Anfangsbedingungen, die durch den Punkt Z_{-1}^A beschrieben werden, ist hingegen $\Gamma > 1$ erforderlich, das bedeutet nicht voll ausgebildete Strömung im Referenzpunkt. Diese widersprüchlichen Eigenschaften der durch die Methode der mehrfachen Variablen beschriebenen Strömungsverhältnisse im Referenzpunkt bei Übergang zur Begrenzungsgerade $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$ spiegelt die schon in Abschnitt 5.3 beschriebene Unzulässigkeit von Anfangsbedingungen $\mathfrak{S}_{1;x}(0) \ll \beta$ und/oder $\mathfrak{S}_{1;x;x}(0) \ll \beta$ im Rahmen der asymptotischen Theorie wieder.

Auch bei den drei roten Kurven, die ausgehend von der rot strichlierten Grenzgeraden wieder in diese hineinmünden, wurde zusätzlich zu Gleichung (5.118) abschnittsweise die inverse Gleichung integriert, um unendlich anwachsende Anstiege zu vermeiden.

Die Kurven wurden mit der Software MATHEMATICA 6.0.1.0 berechnet, wobei ein implizites Runge-Kutta-Verfahren bei konstanter Schrittweite mit mindestens 1000 Schritten bis zum maximalen Wert $\mathfrak{h}_m = 10$ (ausserhalb des in Abbildung (5.6) dargestellten Bereiches) verwendet wurde.

Gleichung (5.118) beinhaltet im Grenzfall wieder die Asymptoten weit stromab, die wir schon in Abschnitt 5.4 berechnet haben. Aus den Transformationsformeln (3.57) und

(3.58), der allgemeinen Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen der transformierten Gleichung (5.107) sowie den Definitionen (5.113) und (5.114) folgt, dass

$$\Gamma \neq 1, \quad s = \pm 1 : \quad h_m = |\Gamma - 1| \mathfrak{h}_m + \Gamma, \quad \Delta = |\Gamma - 1| \mathfrak{d}, \quad (5.128)$$

$$\Gamma = 1, \quad s = 0 : \quad h_m = \mathfrak{h}_m + 1, \quad \Delta = \mathfrak{d}. \quad (5.129)$$

Im asymptotischen Grenzfall $h_m = \beta X + o(\beta X)$ gilt $\mathfrak{h}_m = \text{const.} \beta X + o(\beta X)$ mit $\text{const.} > 0$, sodass mit Gleichung (5.125) für (5.118) bis auf Terme höherer Ordnung folgt

$$\frac{d\mathfrak{d}}{d\mathfrak{h}_m} = -\frac{3}{4} \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{h}_m} + \dots \quad (5.130)$$

Dies ergibt die Lösung

$$\mathfrak{d} = \tilde{C} \mathfrak{h}_m^{-3/4} + \dots, \quad (5.131)$$

die den früher gefundenen asymptotischen Grenzfall der Lösungen (5.93) und (5.94) der untransformierten Gleichungen beinhaltet.

Im Grenzfall $h_m = \Gamma + o(1)$ gilt $\mathfrak{h}_m = 0 + o(1)$, sodass sich (5.118) für alle drei zu unterscheidenden Fälle rücktransformiert auf die ursprünglichen Variablen bis auf Terme höherer Ordnung schreibt

$$\frac{d\Delta}{dh_m} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta}{h_m - \Gamma} + \dots \quad (5.132)$$

Diese Gleichung ergibt das asymptotische Lösungsverhalten für jenen Grenzfall, der schon im untransformierten Fall in Gleichungen (5.65) bis (5.70) beschrieben wurde. Die Lösung lautet

$$\Delta = \tilde{\tilde{C}} (h_m - \Gamma)^{-1/2} + \dots \quad (5.133)$$

Die Größen der transformierten mittleren Höhe \mathfrak{h}_m und der transformierten Amplitude \mathfrak{d} lassen sich wie folgt veranschaulichen: Die lokalen Maxima und Minima der Störung der Höhengauslenkung liegen in transformierter Darstellung auf den Einhüllenden \mathfrak{h}_3 und \mathfrak{h}_2 beziehungsweise auf h_3 und h_2 in untransformierter Darstellung. Die Größe \mathfrak{h}_m ist laut Definition in Gleichung (5.113) als arithmetisches Mittel des lokalen Maximums \mathfrak{h}_3 und des lokalen Minimums \mathfrak{h}_2 der Funktion \mathfrak{H}_{10} zu bilden, die Größe \mathfrak{d} ist laut Definition in Gleichung (5.114) als Differenz des lokalen Maximums \mathfrak{h}_3 vom lokalen Minimum \mathfrak{h}_2 der Funktion \mathfrak{H}_{10} zu bilden. Der Zusammenhang zwischen der transformierten Oberflächenstörung \mathfrak{H}_{10} und der untransformierten Oberflächenstörung H_{10} ist in Gleichungen (3.57) und (3.58) angegeben. Bezeichnen wir daher mit H_1^{\max} und H_1^{\min} jeweils ein lokales Maximum und Minimum der entdimensionalisierten Störung der Oberfläche eines welligen Wassersprunges, die zueinander benachbart sind, so gilt näherungsweise

$$\mathfrak{h}_m = \frac{1}{2} k \left(H_1^{\max} + H_1^{\min} - 2\Gamma \right), \quad (5.134)$$

$$\mathfrak{d} = k \left(H_1^{\max} - H_1^{\min} \right), \quad (5.135)$$

mit

$$k = \begin{cases} |\Gamma - 1|^{-1} & \text{für } \Gamma \neq 1, \quad s = \pm 1, \\ 1 & \text{für } \Gamma = 1, \quad s = 0. \end{cases} \quad (5.136)$$

Die in den beiden Gleichungen (5.134) und (5.135) beinhaltete Näherung bezieht sich dabei ausschliesslich auf die angenommene langsame Veränderlichkeit von Amplitude und mittlerer Höhengauslenkung im Rahmen der Methode der mehrfachen Variablen, sodass die beiden Gleichungen im asymptotischen Grenzfall eines verschwindenden β -Wertes exakt gültig werden. Mit den Gleichungen (5.134) und (5.135) können aus den im Experiment gemessenen maximalen und minimalen Höhengauslenkungen die transformierte Amplitude und transformierte mittlere Höhe (unter Zuhilfenahme von Gleichungen (2.3) und (2.26)) direkt berechnet werden.

5.7 Universelles Diagramm der Anfangsbedingungen für wellige Lösungen

Abbildung 5.6 enthält alle möglichen universellen (d.h. von Γ unabhängigen) Lösungen, aus denen bei gegebenem Γ mithilfe der in Abschnitt 5.6 angegebenen Formeln die Lösungen des untransformierten Falles rückgerechnet werden können. Aus der Abbildung kann aber noch nicht entnommen werden, welche Anfangsbedingungen zu welligen Lösungen führen. Wir wollen solche Anfangsbedingungen nun ebenfalls in einem universellen (d.h. von Γ unabhängigen) Diagramm darstellen.

Der Bereich gültiger Anfangsbedingungen, also solcher, von denen ausgehend eine Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen vorhanden ist, muss im Diagramm (h_m , δ) jedenfalls zwischen den beiden Geraden $\delta = 6(h_m - s)$ und $\delta = 0$ im ersten Quadranten liegen, da Werte ausserhalb nicht mit den geforderten Eigenschaften (3.79) und (3.80) für die reellen Nullstellen vereinbar sind. Auf ersterer Geraden fällt h_1 mit h_2 zusammen, auf zweiterer Geraden fällt h_2 mit h_3 zusammen. In diesen beiden Fällen ergeben sich die in (3.85), (3.86) und (3.87), (3.88) erwähnten Parameterdarstellungen für die Werte von \Re und \Im .

Führt man die Abkürzung

$$\zeta = \sqrt{s^2 + 2\Re} \quad (5.137)$$

ein und eliminiert man aus den Gleichungen (3.85) bis (3.88) den Parameter t , so ergeben sich für die beiden Fälle die Darstellung

$$h_2 = h_3 : \quad \Im = \frac{1}{6}(s + \zeta)^2(s - 2\zeta) =: f(s, \zeta), \quad (5.138)$$

$$h_1 = h_2 : \quad \Im = \frac{1}{6}(s - \zeta)^2(s + 2\zeta) =: g(s, \zeta). \quad (5.139)$$

Aus den Gleichungen (5.119)-(5.121) folgt, dass $\Re \geq -s^2/2$ und daraus, dass stets $\zeta \geq 0$ gilt, also insbesondere, dass ζ nur reelle Werte annimmt. Weiters gilt stets $f(s, \zeta) \leq g(s, \zeta)$. Gleichungen (5.138) und (5.139) stellen für jeden möglichen Fall $s = \pm 1, 0$ zwei, also insgesamt sechs Grenzkurven dar, die man nun in ein (ζ, \Im) -Diagramm einzeichnen könnte, um den Bereich möglicher Anfangsbedingungen für wellige Lösungen nach der Methode der mehrfachen Variablen abzugrenzen. Man kann jedoch zur weiteren Vereinfachung nützen, dass die beiden Funktionen f und g auf den rechten Gleichungsseiten folgende Antisymmetrieeigenschaft besitzen:

$$f(s, \zeta) = -g(-s, \zeta). \quad (5.140)$$

Das bedeutet, dass jeweils beide Begrenzungskurven für den Fall $s = \pm 1$ mit den beiden Begrenzungskurven des Falles $s = \mp 1$ zusammenfallen, wenn man für verschiedene Werte von $s = \pm 1$ statt $\mathfrak{S}(\zeta)$ entsprechend $\mp \mathfrak{S}(\zeta)$ in einem Diagramm aufträgt. Definiert man

$$s = \pm 1 : \quad \eta := -s\mathfrak{S}, \quad (5.141)$$

$$s = 0 : \quad \eta := \mathfrak{S}, \quad (5.142)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$s = 0, -1, \quad \Gamma \geq 1 : \quad \eta := \mathfrak{S}, \quad (5.143)$$

$$s = 1, \quad \Gamma < 1 : \quad \eta := -\mathfrak{S}, \quad (5.144)$$

so kann man vier (statt der obigen sechs) Begrenzungskurven

$$s = +1 \text{ und } s = -1, \quad \Gamma \neq 1 : \quad f(-1, \zeta) \leq \eta \leq g(-1, \zeta), \quad (5.145)$$

$$s = 0, \quad \Gamma = 1 : \quad f(0, \zeta) \leq \eta \leq g(0, \zeta), \quad (5.146)$$

angeben, die den Bereich möglicher Anfangsbedingungen für wellige Lösungen nach der Methode der mehrfachen Variablen in einem (ζ, η) -Diagramm abgrenzen. Diese Abgrenzung entspricht den Begrenzungen durch die Abszisse und die drei geneigten strichlierten Geraden in Abbildung 5.6 für die jeweiligen Fälle $s=0, \pm 1$.

Die Bedingungen in Gleichungen (5.145) und (5.146) sind allerdings für die Werte der Anfangsbedingungen genauso zu erfüllen wie für den gesamten Verlauf der welligen Lösung in der transformierten Darstellung. Wir bezeichnen mit

$$\zeta_0 = \zeta(\Omega=0), \quad \eta_0 = \eta(\Omega=0) \quad (5.147)$$

die transformierten *Anfangsbedingungen* der Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen. Die für eine wellige Lösung notwendigen und hinreichenden Anfangsbedingungen müssen dann noch die Bedingungen in Gleichungen (5.47) und (5.48) der untransformierten Variablen erfüllen. Setzt man diese Bedingungen in die Gleichungen (3.73) bis (3.76) ein, so ergeben sich über (5.141) und (5.142) entsprechend Bedingungen für ζ_0 und η_0 , denen die Anfangsbedingungen für die transformierten Variablen genügen müssen. Diese lauten:

$$s = \pm 1, \quad \Gamma \neq 1 : \quad \zeta_0 \geq |\Gamma - 1|^{-1}, \quad (5.148)$$

$$s = 0, \quad \Gamma = 1 : \quad \zeta_0 \geq 1, \quad (5.149)$$

und

$$s = 1, \quad \Gamma < 1 : \quad \eta_0 \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\Gamma - 1} \right) \zeta_0^2 - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{(\Gamma - 1)^3} \right), \quad (5.150)$$

$$s = -1, \quad \Gamma > 1 : \quad \eta_0 \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\Gamma - 1} \right) \zeta_0^2 - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{(\Gamma - 1)^3} \right), \quad (5.151)$$

$$s = 0, \quad \Gamma = 1 : \quad \eta_0 \geq \frac{1}{2} \zeta_0^2 - \frac{1}{6}. \quad (5.152)$$

Diese Bedingungen hängen explizit von Γ ab. Dies war zu erwarten, denn der Vorteil, Γ formal aus den Bestimmungsgleichungen für H_1 zu eliminieren, geht auf Kosten dessen, dass Γ in den transformierten Anfangsbedingungen wieder auftritt, siehe Gleichungen (3.62) bis (3.66).

Um dennoch eine universelle, von Γ unabhängige Darstellung der Anfangsbedingungen zu erhalten, kann man die Bedingungen (5.150)-(5.152) für entsprechende Grenzfälle von Γ anschreiben, die für die Anfangswerte von ζ_0 und η_0 als obere bzw. untere Schranken mindestens erfüllt sein müssen. Aus den Ungleichungen (5.148) und (5.149) folgt, dass mindestens

$$s = \pm 1, \quad \Gamma \neq 1 : \zeta_0 > 0, \quad (5.153)$$

$$s = 0, \quad \Gamma = 1 : \zeta_0 > 1 \quad (5.154)$$

gelten muss, und die mit (5.148) und (5.149) abgeschätzten Ungleichungen (5.150)-(5.152) ergeben

$$s = 0, -1, \quad \Gamma \geq 1 : \quad \eta_0 > \frac{1}{2}\zeta_0^2 - \frac{1}{6}, \quad (5.155)$$

$$s = 1, \quad \Gamma < 1 : \quad \eta_0 < \frac{1}{2}\zeta_0^2 - \frac{1}{6} \quad (5.156)$$

als Minimalerfordernis.

Insbesondere folgt aus den Gleichungen (5.145)-(5.152), dass im Fall von $|\Gamma| \gg 1$ immer wellige Lösungen möglich sind.

Aus den Bedingungen in den Gleichungen (5.148)-(5.152) folgt weiters, dass für die Grenzfälle $\Gamma \rightarrow 1+$ und $\Gamma \rightarrow 1-$ keine welligen Lösungen möglich sind, was den wichtigen Schluss zulässt, dass der Fall $\Gamma = 1$ nicht durch einen Grenzübergang $\Gamma \rightarrow 1$ aus den Formeln für $\Gamma \neq 1$ erhalten werden kann.

Die transformierten Anfangsbedingungen ζ_0 und η_0 lassen sich mithilfe der Gleichungen (5.137), (5.141), (5.142) sowie (3.73)-(3.76) direkt aus den untransformierten Anfangsbedingungen $H_1(0)=0$, $H_{1X}(0)$ und $H_{1XX}(0)$ bestimmen:

$$\zeta_0 = \begin{cases} |\Gamma - 1|^{-1} \sqrt{1 + 2H_{1XX}(0)} & \text{für } \Gamma \neq 1, \\ \sqrt{1 + 2H_{1XX}(0)} & \text{für } \Gamma = 1, \end{cases} \quad (5.157)$$

$$\eta_0 = \begin{cases} \frac{1}{2}|\Gamma - 1|^{-3} \left[H_{1X}^2(0) + 2\Gamma H_{1XX}(0) - \frac{1}{3}\Gamma^2(\Gamma - 3) \right] & \text{für } \Gamma \neq 1, \\ \frac{1}{2}H_{1X}^2(0) + H_{1XX}(0) + \frac{1}{3} & \text{für } \Gamma = 1. \end{cases} \quad (5.158)$$

Das universelle Diagramm der notwendigen und hinreichenden Anfangsbedingungen für wellige Lösungen nach der Methode der mehrfachen Variablen für die transformierten Größen ist in Abbildung 5.7 dargestellt. Eine Übersicht über die dabei auftretenden Grenzkurven für η entsprechend den Gleichungen (5.145)-(5.146) und (5.155)-(5.156) bietet Tabelle 5.1.

Die für eine wellige Lösung notwendigen und hinreichenden Anfangsbedingungen sind in den eingefärbten Bereichen zu finden, während Werte ausserhalb zu keinen welligen Lösungen führen. Die in den Gleichungen (5.155) und (5.156) auftretende Grenze $\eta_0 = \frac{1}{2}\zeta_0^2 - \frac{1}{6}$, die unterschiedliche Bereiche der Anfangsbedingungen für wellige Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter Γ trennt, ist in Abbildung 5.7 als schwarz strichlierte Kurve eingezeichnet. Werte oberhalb dieser Kurve sind nur für Werte von $\Gamma > 1$ (roter und grüner Bereich) oder $\Gamma = 1$ (grüner Bereich) möglich, Werte unterhalb dieser Kurve sind

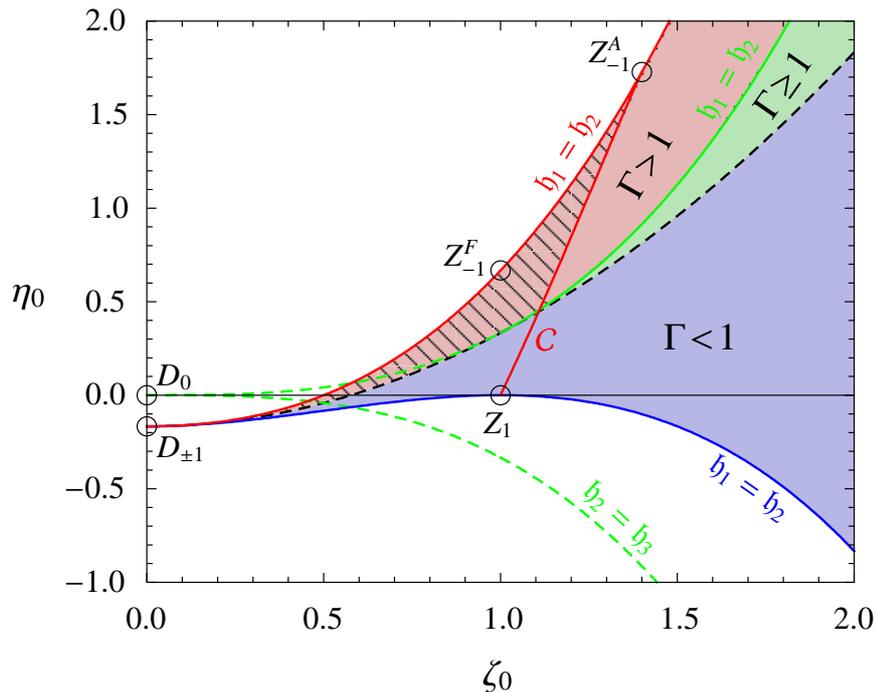


Abbildung 5.7: Karte der Anfangsbedingungen in der transformierten Darstellung. Farbige Bereiche kennzeichnen Anfangswerte, die zu welligen Lösungen führen, zusammen mit den dafür notwendigen Wertebereichen von Γ . Ausserhalb des farbigen Bereiches sind keine welligen Lösungen möglich. Der schraffierte Bereich kennzeichnet Lösungen mit beschränktem Gültigkeitsbereich. Anfangsbedingungen, die auf der Kurve C liegen, führen auf voll ausgebildete Strömung weit stromab. Alle anderen Anfangsbedingungen im farbigen Bereich ergeben Lösungen, die ins tiefe Wasser führen.

nur für Werte von $\Gamma < 1$ (blauer Bereich) möglich.

Die vom Punkt $D_{\pm 1}(0, -1/6)$ ausgehende rote Kurve $(\zeta_0, g(-1, \zeta_0))$ ist jene obere Grenzkurve aus Gleichung (5.145) bei $\Gamma \neq 1$ für zu welligen Lösungen führenden Werten der Anfangsbedingungen, die der in Abbildung 5.6 rot strichlierten Grenzkurve entspricht. Da die Werte dieser roten Kurve stets über jenen der schwarz strichlierten Kurve liegen, kann diese Grenzkurve nur für den Fall $s = -1$ und $\Gamma > 1$ gelten. Nach Tabelle 5.1 ist dies

	$s = -1, \Gamma > 1$	$s = 1, \Gamma < 1$	$s = 0, \Gamma = 1$
untere Grenz- kurve, $\eta_0(\zeta_0) =$	$\frac{1}{2}\zeta_0^2 - \frac{1}{6}$	$f(-1, \zeta_0) =$ $-\frac{1}{6}(\zeta_0 - 1)^2(2\zeta_0 + 1)$	$\frac{1}{2}\zeta_0^2 - \frac{1}{6}$
entspricht	$H_{1X}(0) = H_{1XX}(0) = 0,$ $\Gamma \rightarrow \infty$	$b_1 = b_2$	$H_{1X}(0) = H_{1XX}(0) = 0$
obere Grenz- kurve, $\eta_0(\zeta_0) =$	$g(-1, \zeta_0) =$ $\frac{1}{6}(\zeta_0 + 1)^2(2\zeta_0 - 1)$	$\frac{1}{2}\zeta_0^2 - \frac{1}{6}$	$g(0, \zeta_0) = \frac{1}{3}\zeta_0^3$
entspricht	$b_1 = b_2$	$H_{1X}(0) = H_{1XX}(0) = 0,$ $\Gamma \rightarrow -\infty$	$b_1 = b_2$

Tabelle 5.1: Grenzkurven der transformierten Anfangsbedingung $\eta_0(\zeta_0)$ nach den Fallunterscheidungen $s = \pm 1, 0$.

nur für den Fall zusammenfallender Nullstellen $h_1 = h_2$ möglich. Diese Grenzkurve ist in Tabelle 5.1 entsprechend rot eingefärbt.

Die ebenfalls vom Punkt $D_{\pm 1}(0, -1/6)$ ausgehende blaue Kurve $(\zeta_0, f(-1, \zeta_0))$ ist die untere Grenzkurve aus Gleichung (5.145) bei $\Gamma \neq 1$ für zu welligen Lösungen führenden Werten der Anfangsbedingungen, die der in Abbildung 5.6 blau strichlierten Grenzkurve entspricht. Da die Werte dieser blauen Kurve stets unter jenen der schwarz strichlierten Kurve liegen, kann diese Grenzkurve nur für den Fall $s = 1$ und $\Gamma < 1$ gelten. Nach Tabelle 5.1 ist dies wieder nur für den Fall zusammenfallender Nullstellen $h_1 = h_2$ möglich. Diese Grenzkurve ist in Tabelle 5.1 entsprechend blau eingefärbt.

Analog sind die vom Punkt $D_0(0, 0)$ ausgehenden grünen Kurven $(\zeta_0, \pm f(0, \zeta_0))$ die untere bzw. obere Grenzkurve aus Gleichung (5.146) bei $\Gamma = 1$ für zu welligen Lösungen führenden Werten der Anfangsbedingungen, die in Abbildung 5.6 der grün strichlierten Grenzkurve bzw. der Abszisse entsprechen. Nach Gleichung (5.154) kommen in diesem Fall nur Werte von ζ_0 größer Eins in Frage, weswegen die beiden grünen Grenzkurven für kleinere ζ_0 -Werte strichliert dargestellt sind. Nach Tabelle 5.1 fallen entlang der oberen grünen Grenzkurve die Nullstellen $h_1 = h_2$ zusammen, auf der unteren fällt $h_2 = h_3$ zusammen. Da die Werte der grünen Kurven für $\zeta_0 > 1$ jeweils stets über bzw. unter jenen der schwarz strichlierten Kurve liegen, welche nach Gleichung (5.152) η_0 nach unten begrenzt, kommt für den Fall $s = 0$ und $\Gamma = 1$ nur die obere der beiden grünen Grenzkurven als obere Begrenzung von η_0 in Frage, während die untere grüne Kurve ausserhalb der auf wellige Lösungen führenden Anfangsbedingungen liegt. Dementsprechend sind die in Tabelle 5.1 grün eingefärbten Grenzkurven nur für den Fall der oberen Grenzkurve für $\zeta_0 \geq 1$ durchgezogen dargestellt, und sonst strichliert. Die untere Grenze der auf wellige Lösungen führenden Anfangsbedingungen ist im Fall $s = 0$ und $\Gamma = 1$ durch die schwarz strichlierte Kurve gegeben.

Die in Abbildung 5.7 zusätzlich eingezeichnete rote Kurve zwischen den Punkten Z_1 und Z_{-1}^A , die mit C bezeichnet wurde, stellt unter anderen eine Grenzkurve für den Bereich von Anfangsbedingungen für Lösungen mit beschränktem Gültigkeitsbereich dar. Die Grenzkurve C für die transformierten *Anfangsbedingungen* wurde aus jener *Lösungskurve* ermittelt, die in einen Zustand voll ausgebildeter Strömung weit stromab führt. Die Funktionswerte dieser Kurve wurden aus den Werten der Kurve C in Abbildung 5.6 ermittelt, indem die Variablen h_m und δ auf die Variablen ζ_0 und η_0 umgerechnet wurden. Über die bei der numerischen Integration auftretenden Schwierigkeiten wurden bereits in Abschnitt 5.6 berichtet, siehe Seite 73. Aus den Bedingungen (5.153)-(5.156) und $\Gamma > 1$ folgt, dass jene Anfangsbedingungen, die auf wellige Lösungen mit beschränktem Gültigkeitsbereich führen, im schraffierten Bereich liegen. Dieser wird begrenzt durch die obere rote Grenzkurve, die Kurve C und die schwarz strichlierte Kurve $\eta_0 = \zeta_0^2/2 - 1/6$, bzw. in den Eckpunkten durch die Punkte $D_{\pm 1}$, Z_{-1}^A und Z_1 .

Spezielle Punkte sind in Abbildung 5.6 eingeringt dargestellt, wobei die Bezeichnungen der Punkte zwischen Abbildung 5.6 und 5.7 korrespondieren. Die beiden Punkte auf der Ordinate $D_{\pm 1}(0, -1/6)$ und $D_0(0, 0)$ kennzeichnen den Fall dreier zusammenfallender Nullstellen $h_1 = h_2 = h_3 = s$, entsprechen also den linken Eckpunkten der drei Dreiecksbereiche in Abbildung 5.6 für die Fälle $s = \pm 1, 0$. Tatsächlich folgt im Fall dreier zusammenfallender Nullstellen, dass $h_m = s$ und $\delta = 0$, sodass sich mit den Gleichungen (5.119), (5.137), (5.141) und (5.142)

$$\zeta_0 = 0, \quad \eta_0 = -s^2/6 \quad (5.159)$$

ergibt. Der Punkt $Z_1(1, 0)$ auf der Abszisse kennzeichnet den voll ausgebildeten Strömungszustand weit *stromauf*, entspricht also dem Punkt Z_1 in Abbildung 5.6, in dem $s = 1$, $\Gamma = 0$, $H_1 = 0$, $H_{1X} \rightarrow 0$ und $H_{1XX} \rightarrow 0$ gilt. Bei voll ausgebildeter Strömung weit *stromauf* gelten die Gleichungen (5.127), sodass mit Gleichungen (5.137) und (5.141)

$$\zeta_0 = 1, \quad \eta_0 = 0 \quad (5.160)$$

folgt. Der Fall voll ausgebildeter Strömung weit *stromab* mit $s = -1$ und $\Gamma > 1$ führt mit den Gleichungen (5.126), (5.137) und (5.141) auf dieselben Werte von ζ_0 und η_0 , die aber wegen der Notwendigkeit von $\Gamma < 1$ entlang der blauen Kurve in Abbildung 5.7 nicht möglich sind, also nicht als *Anfangsbedingungen* zugelassen sind, die auf wellige Lösungen führen.

Der Punkt $Z_{-1}^A(7/5, 216/125)$ in Abbildung 5.7, in dem sich die beiden roten Kurven schneiden, entspricht dem Punkt Z_{-1}^A in Abbildung 5.6, dessen Werte für die Anfangsbedingungen auf voll ausgebildete Strömung weit *stromab* führen und in dem selbst die Nullstellen $h_1 = h_2$ zusammenfallen. Tatsächlich ergeben die in Abschnitt 5.6, Seite 73 erhaltenen Werte für $h_m = -3/10$ und $\delta = 21/5$ in diesem Punkt mittels der Gleichungen (5.119), (5.137), (5.141) und (5.142)

$$\zeta_0 = 7/5 = 1,4, \quad \eta_0 = 216/125 = 1,728. \quad (5.161)$$

Des weiteren führen auch alle anderen Werte der transformierten Anfangsbedingungen, die auf der Kurve C und im rot eingefärbten Bereich liegen, auf voll ausgebildete Strömung weit *stromab*. Das Stück der Kurve C im blau eingefärbten Bereich kommt für Anfangsbedingungen, die auf voll ausgebildete Strömung weit *stromab* führen, nicht in Frage, da hierfür $\Gamma > 1$ notwendig wäre.

Der Punkt $Z_{-1}^F(1, 2/3)$ entspricht dem Mittelpunkt Z_{-1}^F in Abbildung 5.6. Tatsächlich führen die in Abschnitt 5.6, Seite 72 erhaltenen Werte für $h_m = -1/2$ und $\delta = 3$ in diesem Punkt mittels der Gleichungen (5.119), (5.137), (5.141) und (5.142) auf

$$\zeta_0 = 1, \quad \eta_0 = 2/3. \quad (5.162)$$

Eine wichtige Folgerung aus Abbildung 5.7 ist, dass nicht beliebige Werte auf den Lösungskurven in Abbildung 5.6 auch als Anfangsbedingung für wellige Lösungen genommen werden können. Vielmehr bietet die Kombination der Abbildungen 5.6 und 5.7 die Möglichkeit, Anfangsbedingungen für wellige Lösungen zu finden und zu klassifizieren und das Verhalten der Strömung in ihrem weiteren Verlauf vorherzusagen.

Die Einschränkung für die Anfangsbedingungen, die als Grenze schwarz strichliert in Abbildung 5.7 eingezeichnet ist, stellt nur ein Minimalerfordernis an die Anfangsbedingungen dar, wenn ein bestimmter Γ -Wert gegeben ist. Genauer sind bei gegebenem Γ für die Anfangsbedingungen die Gleichungen (5.148) bis (5.152) notwendigerweise zu erfüllen, um eine wellige Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen zu erhalten. Diese Bedingungen waren aus den ursprünglichen Bedingungen (5.47) und (5.48) hervorgegangen. Das System von Ungleichungen (5.148) bis (5.152) lässt sich noch weiter vereinfachen, indem man die Variablen ζ_0 und η_0 erneut nach folgender Vorschrift

transformiert:

$$\tilde{\zeta}_0^2 = \begin{cases} \zeta_0^2 & \text{für } \Gamma = 1, \\ [1 + (\Gamma - 1)^{-1}] \zeta_0^2 & \text{für } \Gamma \neq 1, \end{cases} \quad (5.163)$$

$$\tilde{\eta}_0 = \begin{cases} \eta_0 & \text{für } \Gamma = 1, \\ \eta_0 + [6(\Gamma - 1)^3]^{-1} & \text{für } \Gamma \neq 1. \end{cases} \quad (5.164)$$

Mit diesen neuen Variablen lauten die Ungleichungen (5.148) bis (5.152) einfach

$$\tilde{\zeta}_0 \geq 1, \quad (5.165)$$

$$\tilde{\eta}_0 \begin{cases} \leq & \frac{1}{2}\tilde{\zeta}_0^2 - \frac{1}{6} \text{ für } \Gamma < 1, \\ \geq & \text{für } \Gamma \geq 1. \end{cases} \quad (5.166)$$

Es ergibt sich hier für $\tilde{\eta}_0(\tilde{\zeta}_0)$ wieder die schon in (5.155) und (5.156) für $\eta_0(\zeta_0)$ aufgetretene Funktion als Grenzkurve. Die Ungleichungen (5.165) und (5.166) bilden gemeinsam mit den Ungleichungen (5.145)-(5.146) ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Anfangsbedingungen, die zu welligen Lösungen führen.

Die für wellige Lösungen notwendig zu erfüllenden Ungleichungen für die Anfangsbedingungen (5.148) bis (5.152) oder alternativ (5.165) und (5.166) schreiben sich allerdings nur für die transformierten Grössen derart umständlich. Ursprünglich waren diese aus den Bedingungen $H_1(0) = 0$, $H_{1X}(0)$ reell und $H_{1XX}(0) \geq 0$ hervorgegangen und sind mit diesen äquivalent.

Zusammenfassend ergibt sich damit folgende Vorgehensweise, um bei gegebenen, reellen Werten der Anfangsbedingungen $H_1(0) = 0$, $H_{1X}(0)$, $H_{1XX}(0)$ und gegebenen Werten des Parameters Γ wellige Lösungen nach der Methode der mehrfachen Variablen zu identifizieren und zu klassifizieren:

- (1) Es muss $H_{1XX}(0) > 0$ sein.¹ Falls keine positive Krümmung der Oberflächenstörung als Anfangsbedingung vorliegt, ist keine wellige Lösung möglich. Auch der aperiodische Grenzfall $H_{1XX}(0) = 0$ führt zu keiner welligen Lösung.
- (2) Bestimmung der Grössen $\Re(0)$ und $\Im(0)$ anhand der Formeln (3.73)-(3.76) unter Beachtung der Fallunterscheidung entsprechend dem Wert von Γ .
- (3) Bestimmung der Grössen ζ_0 und η_0 nach den Formeln (5.137), (5.141) und (5.142).
- (4) Überprüfen, ob und in welchen der farbigen Bereiche ζ_0 und η_0 in Abbildung 5.7 fällt. Falls die Werte von ζ_0 und η_0 ausserhalb der farbigen Bereiche liegen ist keine wellige Lösung möglich.
- (5) Klassifizierung der Anfangsbedingungen anhand des farbigen Bereiches, in den ζ_0 und η_0 in Abbildung 5.7 fällt:
 - (a) Blauer Bereich, $\Gamma < 1$: Es ergibt sich eine Lösung, die ins tiefe Wasser führt (blaue Lösungskurven in Abbildung 5.6)

¹Die Ungleichungen (5.165) und (5.166) für $\tilde{\zeta}_0$ und $\tilde{\eta}_0$ beziehungsweise die Ungleichungen (5.148) bis (5.152) für ζ_0 und η_0 sind dadurch bereits automatisch erfüllt.

- (b) Grüner Bereich, $\Gamma = 1$: Es ergibt sich eine Lösung, die ins tiefe Wasser führt (grüne Lösungskurven in Abbildung 5.6)
- (c) Grüner oder roter, nicht schraffierter Bereich, $\Gamma > 1$: Es ergibt sich eine Lösung, die ins tiefe Wasser führt (rote Lösungskurven in Abbildung 5.6, die rechts aus dem Diagramm laufen)
- (d) Roter, schraffierter Bereich, $\Gamma > 1$: Es ergibt sich eine Lösung mit beschränktem Gültigkeitsbereich (rote Lösungskurven in Abbildung 5.6, die in die rot strichlierte Gerade münden).
- (e) Rote Kurve C in rotem Bereich, $\Gamma > 1$: Es ergibt sich eine Lösung, die in den voll ausgebildet turbulenten Zustand weit stromab mündet (rote Lösungskurve C in Abbildung 5.6, die in den Punkt Z_1 mündet).
- (f) Eine der anderen roten, blauen oder grünen Kurven: Aperiodischer Grenzfall, der zu keiner welligen Lösung führt.

Nach der Identifikation gültiger Anfangsbedingungen und der Klassifikation empfiehlt sich für die (numerische) Berechnung der jeweiligen Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen die untransformierte Darstellung, also die Lösung des Gleichungssystems (5.27), (5.28), (5.36) und (5.41).

Wir werden die hier beschriebene Vorgehensweise der Bestimmung der Parameter und Anfangsbedingungen, die zu welligen Lösungen führen, anhand konkreter, dem Experiment entnommenen Daten im nächsten Abschnitt durchführen und auf diese Weise die Vorhersage der asymptotischen Theorie mit dem Experiment vergleichen.

Kapitel 6

Vergleich der Ergebnisse der asymptotischen Theorie mit Messergebnissen

6.1 Bestimmung der Parameter und Anfangsbedingungen der asymptotischen Theorie aus experimentellen Daten

Der dimensionslose Parameter ε der asymptotischen Theorie wird gemäß (2.22) aus der Abweichung der Froude-Zahl im Referenzpunkt vom kritischen Wert 1 berechnet:

$$\varepsilon = \frac{2}{3}(\text{Fr}_r - 1), \quad (6.1)$$

wobei die Referenz-Froude-Zahl aus dem (im Laborexperiment üblicherweise gemessenen) Volumenstrom \dot{V} pro Kanalbreite b und der Referenzflüssigkeitshöhe \bar{h}_r folgt:

$$\text{Fr}_r = \dot{V} / \sqrt{g\bar{h}_r^3}. \quad (6.2)$$

Die zur Entdimensionalisierung der Geschwindigkeiten notwendige, volumetrisch gemittelte Geschwindigkeit in X-Richtung im Referenzpunkt folgt aus

$$\bar{u}_r = \dot{V} / \bar{h}_r. \quad (6.3)$$

Die beiden dimensionslosen Parameter β und Γ in Gleichung (2.54) werden gemäss den Definitionen in (2.45), (2.46) und (2.53),

$$\beta = \text{Fr}_{\tau r}^2 / 3\varepsilon^{3/2}, \quad (6.4)$$

$$\Gamma = (1 - \alpha / \text{Fr}_{\tau r}^2) / 3\varepsilon \quad (6.5)$$

berechnet. $\text{Fr}_{\tau r}$ hängt dabei mit dem Bodenreibungsbeiwert c_{fr} und der Wandschubspannung τ_{wr} im Referenzpunkt zusammen über (vgl. (3.96))

$$c_{fr} = 2\tau_{wr} / \rho\bar{u}_r^2 = 2(\text{Fr}_{\tau r} / \text{Fr}_r)^2. \quad (6.6)$$

	Rauheitskennzahl	\hat{D}
hydraulisch glatt	0 bis 5	-0,08
Übergangsbereich	5 bis 70	0,1 bis -7
vollrauh	≥ 70	≤ -7

Tabelle 6.1: Werte für den Parameter \hat{D} in (6.8) bei unterschiedlichen Rauheiten, nach [23], S. 419-423. Definition von \hat{D} nach [23], S. 594, Definition der Rauheitskennzahl nach [23], S. 419.

Der Bodenreibungsbeiwert c_{fr} kann aus einem Widerstandsgesetz für die turbulente Kanalströmung bestimmt werden. Dabei tritt im Falle eines rechteckigen Kanalquerschnitts (wie meist im Laborexperiment vorhanden) der hydraulische Durchmesser D_h und die daraus gebildete Reynolds-Zahl Re_D auf:

$$D_h = \frac{4b\bar{h}_r}{2\bar{h}_r + b}, \quad Re_D = \frac{D_h\bar{u}_r}{\nu}, \quad (6.7)$$

wobei ν die kinematische Viskosität bedeutet. Für die Bestimmung des Bodenreibungsbeiwertes wurden die beiden folgenden Widerstandsgesetze herangezogen:

1. Asymptotisch gültiges Widerstandsgesetz („Überlappungsgesetz“) für die vollausgebildete, turbulente Kanalströmung, siehe [23] S. 594:

$$\sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{1}{\kappa} \ln \sqrt{\frac{c_f}{2}} Re_D + \hat{D}, \quad (6.8)$$

mit $\kappa=0,41$ und einem Parameter \hat{D} , der von der Bodenrauheit des Kanals abhängt. Wir verwenden im Folgenden ausschliesslich den Wert $\hat{D} = -0,08$ für hydraulisch glatte Böden. Andere Vergleichswerte sind in Tabelle 6.1 angeführt.

Das asymptotische Widerstandsgesetz (6.8) hat allerdings nur im Fall einer vollausgebildeten Strömung Gültigkeit, kann also für die vorliegende Theorie zur Bestimmung der Strömungsgrößen im Referenzquerschnitt streng genommen nur im Falle von $\Gamma=0$ im asymptotischen Grenzfall $H_1(0) \rightarrow 0$, $H_{1X}(0) \rightarrow 0$ und $H_{1XX}(0) \rightarrow 0$ herangezogen werden. Wir ziehen (6.8) dennoch auch für andere Fälle mit $\Gamma \neq 0$ zur Berechnung von c_{fr} heran, da, wie anhand von Tabelle 6.2 ersichtlich wird, Abweichungen vom vollausgebildeten Strömungszustand im Rahmen der Messungenauigkeit von experimentell ermittelten Bodenreibungsbeiwerten liegen. Die generelle Verwendung von (6.8) ist im Rahmen der vorliegenden asymptotischen Theorie dadurch gerechtfertigt, dass Abweichungen von c_{fr} vom Wert für den vollausgebildeten Zustand mit $\Gamma = 0$ nach (6.6) nur von $O(\varepsilon)$ sind. Dies wird anhand der Werte belegt, die sich aus dem Experiment für Γ ergeben (siehe Tabelle 6.2). Wir werden daher für den Vergleich mit den im folgenden Abschnitt betrachteten Experimenten das Widerstandsgesetz in (6.8) für hydraulisch glatte Böden zur Berechnung des Kanalwiderstands heranziehen, wenn nähere Angaben zum Kanalwiderstand fehlen.

2. Empirisches Widerstandsgesetz („Manningsche Formel“), siehe [53] S. 454 bzw. [57] S. 699:

$$c_f = 2g(4/D_h)^{1/3}n^2. \quad (6.9)$$

Dabei bedeutet n den sogenannten „Manningschen Koeffizienten“, der empirisch bestimmt wird. Die Formel (6.9) ist bezüglich der physikalischen Dimensionen inkonsistent, vergleiche die Diskussion in [57] S. 699; in der angegebenen Form ist (6.9) nur gültig, wenn die dimensionsbehafteten Größen auf der rechten Gleichungsseite in SI-Einheiten angegeben werden.

Für die Gültigkeit des empirischen Widerstandsgesetzes (6.9) ist zwar das Vorhandensein einer voll-ausgebildeten Strömung im Referenzquerschnitt nicht notwendig, jedoch besteht der Nachteil seiner Anwendung darin, dass bei der experimentellen Bestimmung von n große Messfehler auftreten, wie anhand der Tabelle 6.2 ersichtlich wird.

Die Tabelle 6.2 enthält die mit den Formeln (6.1)-(6.9) berechneten dimensionslosen Größen der asymptotischen Theorie für die Laborexperimente von [24, 31], bei denen für $Fr_r \leq 1,7$ (siehe [15]) wellige Wassersprünge beobachtet wurden. Die Bestimmung von c_{fr} , β und Γ erfolgte in zwei Varianten, nämlich nach Gleichung (6.8) mithilfe des asymptotischen Widerstandsgesetzes und nach Gleichung (6.9) mithilfe der „Manningschen Formel“. Die Klassifikation der Kanalneigungen in stark geneigt, kritisch geneigt, schwach geneigt und horizontal wurde dabei aus [24] übernommen und bezieht sich auf eine bei vorhandenem Volumenstrom gegenüber voll-ausgebildeter Strömung stärkerer, gleicher, geringerer und gar keiner Kanalneigung. Diese Klassifikation lässt sich auf die Berechnung einer kritischen Flüssigkeitshöhe bei gegebenem Volumenstrom nach der hydraulischen Theorie zurückführen, mit der die tatsächlich vorhandene Zuströmhöhe verglichen wird, siehe [15]. Diese Klassifikation der welligen Sprünge wird durch den Parameter Γ recht gut wiedergegeben. Dabei beschreibt der Wert $\Gamma = 0$ eine kritische Kanalneigung, während starke bzw. schwache oder gar keine Kanalneigungen durch negative bzw. positive Γ -Werte beschrieben werden, vgl. Gleichung (6.5).

Soweit bekannt liegen die Messungenauigkeiten bei der Messung des Volumenstromes \dot{V} im Prozentbereich, viel grössere Ungenauigkeiten in der Größenordnung von ca. 10% jedoch treten bei der Messung des Manningfaktors n auf (die in Tabelle 6.2 angegebenen Schwankungsbreiten beziehen sich ausschliesslich auf Ungenauigkeiten bei der Messung des Manningfaktors). Schon erstere gehen sehr empfindlich in die Ergebnisse der asymptotischen Theorie ein, wie bereits in [25] festgestellt wurde. Zweitere jedoch bewirken eine besonders starke Ungenauigkeit der Γ -Werte für den geneigten Kanal, wobei die Ungenauigkeit umso grösser ist, je stärker dieser geneigt ist. Dies ist unmittelbar aus (6.5) verständlich, wo der Einfluss einer Ungenauigkeit des Bodenreibungsbeiwertes umso größere Schwankungen von Γ bewirkt, je größer α ist. Insbesondere verschwinden die aus der Widerstandsmessung resultierenden Ungenauigkeiten für Γ im Fall des horizontalen Kanals, bei dem $\alpha = 0$ ist, da in diesem Fall c_{fr} nicht in die Berechnung von Γ eingeht.

Weiters ist der Tabelle 6.2 zu entnehmen, dass die Anwendung des asymptotischen Widerstandsgesetzes (6.8) auch in den Fällen $\Gamma \neq 0$ und ohne Bezugnahme auf spezielle Anfangsbedingungen gerechtfertigt ist, da die sich jeweils ergebenden Werte für Γ im Vergleich zu den nach Gleichung (6.9) berechneten Γ -Werten innerhalb der Schwankungsbreite liegen, die durch Messungenauigkeiten des Manningfaktors bedingt ist.

Die in Tabelle 6.2 unter [Hutter orig.] aufgelisteten Daten wurden aus Messungen in [31]

Nr.	Neigung	α [10 ⁻³]	h_r [cm]	\dot{V} [dm ² /s]	Re_r [10 ⁴]	Fr_r	ε	nach Gleichung (6.8)			nach Gleichung (6.9)		
								c_{fr} [10 ⁻³]	β	Γ	c_{fr} [10 ⁻³]	β	Γ
Case 10	stark	5,88	9,57	9,92	1,07	0,0463	3,72	0,0713	-12,69	3,73 ± 1,66	0,0715 ± 0,0318	-12,65 ± 9,05	
03-1-7	stark	3,41	7,19	6,50	1,08	0,0504	4,12	0,0702	-2,86	4,23 ± 1,88	0,0721 ± 0,0321	-2,60 ± 4,20	
Case 1	stark	3,07	8,71	8,70	1,08	0,0533	3,81	0,0601	-2,39	3,83 ± 1,70	0,0605 ± 0,0269	-2,34 ± 3,91	
03-2-6	stark	3,07	7,71	7,45	1,11	0,0737	3,91	0,0402	-1,24	3,96 ± 1,76	0,0407 ± 0,0181	-1,16 ± 2,59	
Case 5	stark	3,55	8,89	9,25	1,11	0,0761	3,76	0,0371	-2,27	3,81 ± 1,69	0,0375 ± 0,0167	-2,19 ± 2,99	
02-12-10	stark	3,07	9,19	9,93	1,14	0,0917	3,72	0,0289	-1,00	3,77 ± 1,68	0,0293 ± 0,0130	-0,93 ± 2,08	
Case 4	stark	3,55	8,24	8,68	1,17	0,1142	3,80	0,0225	-1,05	3,89 ± 1,73	0,0230 ± 0,0102	-0,96 ± 1,77	
Case 2	stark	4,03	8,08	8,70	1,21	0,1391	3,80	0,0178	-1,09	3,91 ± 1,74	0,0183 ± 0,0082	-0,99 ± 1,54	
02-12-9	stark	3,70	8,62	9,93	1,25	0,1682	3,71	0,0141	-0,54	3,84 ± 1,71	0,0146 ± 0,0065	-0,46 ± 1,11	
03-2-1	stark	4,52	6,97	7,45	1,29	0,1946	3,90	0,0126	-0,67	4,07 ± 1,81	0,0132 ± 0,0059	-0,57 ± 1,04	
02-12-1	stark	4,20	8,26	9,93	1,33	0,2233	3,71	0,0104	-0,41	3,88 ± 1,73	0,0109 ± 0,0049	-0,32 ± 0,83	
Hutter (adapt.)	stark	3,27	8,10	9,93	1,37	0,2497	3,88	0,0098	0,14	4,24 ± 1,89	0,0107 ± 0,0048	0,24 ± 0,50	
Case 6	stark	5,88	7,68	9,25	1,39	0,2584	3,75	0,0092	-0,81	3,96 ± 1,76	0,0097 ± 0,0043	-0,70 ± 0,91	
Case 3	stark	5,32	7,36	8,70	1,39	0,2602	3,79	0,0092	-0,58	4,01 ± 1,78	0,0097 ± 0,0043	-0,48 ± 0,80	
03-2-2	stark	5,32	6,57	7,45	1,41	0,2745	3,89	0,0090	-0,45	4,14 ± 1,84	0,0096 ± 0,0043	-0,35 ± 0,71	
02-12-2	stark	4,83	7,90	9,93	1,43	0,2849	3,70	0,0083	-0,33	3,93 ± 1,75	0,0088 ± 0,0039	-0,24 ± 0,64	
Case 9	stark	6,13	7,77	9,93	1,46	0,3088	3,70	0,0077	-0,59	3,95 ± 1,76	0,0082 ± 0,0037	-0,49 ± 0,71	
03-2-3	stark	6,13	6,19	7,45	1,54	0,3625	3,88	0,0071	-0,30	4,21 ± 1,87	0,0077 ± 0,0034	-0,20 ± 0,51	
03-7-6	kritisch	2,75	8,73	9,07	1,12	0,0815	3,78	0,0341	-0,63	3,83 ± 1,70	0,0345 ± 0,0153	-0,57 ± 2,13	
03-7-7	kritisch	2,74	8,24	9,07	1,22	0,1492	3,77	0,0163	0,07	3,89 ± 1,73	0,0168 ± 0,0075	0,13 ± 0,96	
03-7-8	kritisch	2,73	7,70	9,07	1,35	0,2365	3,76	0,0100	0,29	3,96 ± 1,76	0,0105 ± 0,0047	0,35 ± 0,48	
03-7-1	kritisch	2,78	7,50	9,25	1,44	0,2915	3,74	0,0082	0,32	3,99 ± 1,77	0,0087 ± 0,0039	0,37 ± 0,35	
03-7-2	kritisch	2,77	6,97	9,25	1,60	0,4029	3,74	0,0063	0,35	4,07 ± 1,81	0,0068 ± 0,0030	0,39 ± 0,20	

Tabelle 6.2: Experimente zum welligen Wassersprung nach [24] und [31] und zugeordnete dimensionslose Parameter der asymptotischen Theorie. Die Nummerierung wurde von den Autoren übernommen. Unter „Hutter (adapt.)“ wurde gegenüber den Originaldaten aus [31] der Wert für die Kanalneigung adaptiert, siehe die Ausführungen auf Seite 89. Die Bestimmung der Parameter erfolgte nach Gleichung (6.8) (asymptotisch gültiges Widerstandsgesetz) und alternativ nach Gleichung (6.9) (empirisches Widerstandsgesetz, „Manningsche Formel“). Die Schwankungsbreiten beziehen sich ausschliesslich auf Ungenauigkeiten bei der Messung des Manningfaktors.

Nr.	Neigung	α [10 ⁻³]	h_r [cm]	\dot{V} [dm ² /s]	Re_r [10 ⁴]	Fr_r	ε	nach Gleichung (6.8)			nach Gleichung (6.9)		
								c_{fr} [10 ⁻³]	β	Γ	c_{fr} [10 ⁻³]	β	Γ
03-5-1	schwach	1,00	7,26	7,19	1,17	0,1153	3,93	0,0230	1,82	4,03 ± 1,79	0,0236 ± 0,0105	1,85 ± 0,48	
03-6-5	schwach	1,00	8,65	9,93	1,25	0,1638	3,71	0,0145	1,33	3,84 ± 1,70	0,0150 ± 0,0066	1,35 ± 0,31	
03-5-4	schwach	1,00	6,93	7,19	1,26	0,1718	3,92	0,0145	1,31	4,08 ± 1,81	0,0151 ± 0,0067	1,34 ± 0,27	
03-5-2	schwach	1,00	6,76	7,19	1,31	0,2037	3,92	0,0121	1,15	4,11 ± 1,83	0,0127 ± 0,0056	1,17 ± 0,21	
03-5-3	schwach	1,00	6,70	7,19	1,32	0,2154	3,92	0,0114	1,10	4,12 ± 1,83	0,0120 ± 0,0053	1,12 ± 0,20	
Hutter (orig.)	schwach	1,40	8,10	9,93	1,37	0,2497	3,88	0,0098	0,83	4,24 ± 1,89	0,0107 ± 0,0048	0,87 ± 0,21	
03-5-6	schwach	1,00	6,43	7,19	1,41	0,2715	3,91	0,0091	0,91	4,17 ± 1,85	0,0097 ± 0,0043	0,93 ± 0,14	
03-5-5	schwach	1,00	6,24	7,19	1,47	0,3147	3,91	0,0080	0,81	4,21 ± 1,87	0,0086 ± 0,0038	0,83 ± 0,11	
Case 8	schwach	1,00	7,71	9,93	1,48	0,3202	3,70	0,0075	0,78	3,96 ± 1,76	0,0080 ± 0,0035	0,80 ± 0,11	
03-6-1	schwach	1,00	7,52	9,93	1,54	0,3579	3,69	0,0068	0,72	3,99 ± 1,77	0,0073 ± 0,0033	0,73 ± 0,09	
03-5-7	schwach	1,00	5,97	7,19	1,57	0,3820	3,91	0,0068	0,69	4,26 ± 1,89	0,0074 ± 0,0033	0,71 ± 0,08	
03-6-2	schwach	1,00	7,24	9,93	1,63	0,4179	3,69	0,0060	0,63	4,03 ± 1,79	0,0066 ± 0,0029	0,65 ± 0,07	
03-5-8	schwach	1,00	5,56	7,19	1,75	0,5001	3,90	0,0056	0,55	4,35 ± 1,93	0,0063 ± 0,0028	0,57 ± 0,05	
98-17-1	horizontal	0,00	10,66	12,29	1,13	0,0848	3,59	0,0308	3,93	3,63 ± 1,61	0,0311 ± 0,0138	3,93 ± 0,00	
98-17-3	horizontal	0,00	10,32	12,29	1,18	0,1222	3,59	0,0196	2,73	3,66 ± 1,63	0,0200 ± 0,0089	2,73 ± 0,00	
00-15-9	horizontal	0,00	8,28	8,93	1,20	0,1307	3,78	0,0191	2,55	3,88 ± 1,73	0,0196 ± 0,0087	2,55 ± 0,00	
98-16-1	horizontal	0,00	8,45	9,23	1,20	0,1333	3,76	0,0185	2,50	3,86 ± 1,72	0,0190 ± 0,0085	2,50 ± 0,00	
99-17-1	horizontal	0,00	11,43	15,35	1,27	0,1788	3,46	0,0123	1,86	3,56 ± 1,58	0,0126 ± 0,0056	1,86 ± 0,00	
93-8-1	horizontal	0,00	8,13	9,28	1,28	0,1850	3,75	0,0128	1,80	3,90 ± 1,73	0,0133 ± 0,0059	1,80 ± 0,00	
93-9-1	horizontal	0,00	8,40	9,76	1,28	0,1869	3,72	0,0126	1,78	3,87 ± 1,72	0,0131 ± 0,0058	1,78 ± 0,00	
98-17-2	horizontal	0,00	9,66	12,29	1,31	0,2044	3,58	0,0110	1,63	3,72 ± 1,65	0,0115 ± 0,0051	1,63 ± 0,00	
93-11-5	horizontal	0,00	9,50	12,04	1,31	0,2084	3,59	0,0108	1,60	3,74 ± 1,66	0,0113 ± 0,0050	1,60 ± 0,00	
94-9-1	horizontal	0,00	8,77	11,00	1,35	0,2347	3,64	0,0098	1,42	3,82 ± 1,70	0,0102 ± 0,0046	1,42 ± 0,00	

Tabelle 6.2: Fortsetzung. Unter „Hutter (orig.)“ wurden im Unterschied zu „Hutter (adapt.)“ auf Seite 86 ausschliesslich Originaldaten aus [31] für die Bestimmung der Parameter herangezogen, siehe dazu die Ausführungen auf Seite 89.

Nr.	Neigung	α	h_r	\dot{V}	Re_r	Fr_r	ε	nach Gleichung (6.8)			nach Gleichung (6.9)		
		$[10^{-3}]$	[cm]	$[\text{dm}^2/\text{s}]$	$[10^4]$	c_{fr}		β	Γ	c_{fr}	β	Γ	
								$[10^{-3}]$			$[10^{-3}]$		
99-17-2	horizontal	0,00	10,85	15,35	1,37	0,2475	3,45	0,0088	1,35	$3,61 \pm 1,60$	$0,0092 \pm 0,0041$	$1,35 \pm 0,00$	
94-8-1	horizontal	0,00	7,80	9,38	1,37	0,2494	3,74	0,0094	1,34	$3,95 \pm 1,75$	$0,0100 \pm 0,0044$	$1,34 \pm 0,00$	
93-8-2	horizontal	0,00	7,63	9,28	1,41	0,2700	3,74	0,0088	1,23	$3,97 \pm 1,77$	$0,0093 \pm 0,0041$	$1,23 \pm 0,00$	
93-11-6	horizontal	0,00	9,00	12,04	1,42	0,2823	3,58	0,0081	1,18	$3,79 \pm 1,69$	$0,0085 \pm 0,0038$	$1,18 \pm 0,00$	
00-15-1	horizontal	0,00	7,30	8,93	1,44	0,2965	3,77	0,0081	1,12	$4,02 \pm 1,79$	$0,0087 \pm 0,0039$	$1,12 \pm 0,00$	
01-3-1	horizontal	0,00	6,14	6,98	1,46	0,3098	3,91	0,0081	1,08	$4,19 \pm 1,86$	$0,0087 \pm 0,0039$	$1,08 \pm 0,00$	
99-17-3	horizontal	0,00	10,33	15,35	1,48	0,3174	3,44	0,0070	1,05	$3,66 \pm 1,63$	$0,0074 \pm 0,0033$	$1,05 \pm 0,00$	
94-9-2	horizontal	0,00	8,25	11,00	1,48	0,3213	3,63	0,0073	1,04	$3,89 \pm 1,73$	$0,0078 \pm 0,0035$	$1,04 \pm 0,00$	
93-9-2	horizontal	0,00	7,56	9,76	1,50	0,3330	3,71	0,0072	1,00	$3,98 \pm 1,77$	$0,0078 \pm 0,0035$	$1,00 \pm 0,00$	
98-16-2	horizontal	0,00	7,28	9,23	1,50	0,3337	3,74	0,0073	1,00	$4,02 \pm 1,79$	$0,0078 \pm 0,0035$	$1,00 \pm 0,00$	
Case 7	horizontal	0,00	7,64	9,93	1,50	0,3338	3,70	0,0072	1,00	$3,97 \pm 1,76$	$0,0077 \pm 0,0034$	$1,00 \pm 0,00$	
93-11-7	horizontal	0,00	8,58	12,04	1,53	0,3528	3,58	0,0067	0,94	$3,84 \pm 1,71$	$0,0071 \pm 0,0032$	$0,94 \pm 0,00$	
(k.A.)	horizontal	0,00	8,06	10,97	1,53	0,3540	3,63	0,0067	0,94	$3,91 \pm 1,74$	$0,0073 \pm 0,0032$	$0,94 \pm 0,00$	
94-8-2	horizontal	0,00	7,24	9,38	1,54	0,3577	3,73	0,0069	0,93	$4,03 \pm 1,79$	$0,0074 \pm 0,0033$	$0,93 \pm 0,00$	
01-3-2	horizontal	0,00	5,94	6,98	1,54	0,3596	3,91	0,0072	0,93	$4,23 \pm 1,88$	$0,0077 \pm 0,0034$	$0,93 \pm 0,00$	
93-8-3	horizontal	0,00	7,17	9,28	1,54	0,3616	3,74	0,0068	0,92	$4,04 \pm 1,80$	$0,0074 \pm 0,0033$	$0,92 \pm 0,00$	
99-17-4	horizontal	0,00	10,03	15,35	1,54	0,3619	3,44	0,0063	0,92	$3,69 \pm 1,64$	$0,0067 \pm 0,0030$	$0,92 \pm 0,00$	
94-9-3	horizontal	0,00	7,95	11,00	1,57	0,3777	3,63	0,0064	0,88	$3,93 \pm 1,74$	$0,0069 \pm 0,0031$	$0,88 \pm 0,00$	
93-9-3	horizontal	0,00	7,16	9,76	1,63	0,4179	3,70	0,0060	0,80	$4,04 \pm 1,80$	$0,0066 \pm 0,0029$	$0,80 \pm 0,00$	
01-3-3	horizontal	0,00	5,69	6,98	1,64	0,4279	3,90	0,0063	0,78	$4,28 \pm 1,90$	$0,0069 \pm 0,0031$	$0,78 \pm 0,00$	
93-11-8	horizontal	0,00	8,15	12,04	1,65	0,4346	3,57	0,0057	0,77	$3,90 \pm 1,73$	$0,0062 \pm 0,0028$	$0,77 \pm 0,00$	
01-7-8	horizontal	0,00	4,96	5,80	1,68	0,4508	4,01	0,0062	0,74	$4,41 \pm 1,96$	$0,0068 \pm 0,0030$	$0,74 \pm 0,00$	

Tabelle 6.2: Fortsetzung.

ermittelt. Die unter [Hutter adapt.] angegebenen Daten stellen eine Modifikation dieser Messwerte dar, die mit den anderen Daten in Tabelle 6.2 nicht direkt vergleichbar sind, da sie nicht ausschliesslich aus den Messdaten in [31] ermittelt wurden. Bei den modifizierten Daten wurde ein adaptierter Wert der Kanalneigung herangezogen, aus dem sich ein modifizierter Wert für Γ ergibt. Der adaptierte Wert der Kanalneigung entstammt einer eigens auf das Experiment in [31] bezogenen, mit dem Finite-Volumen-Programmcode FLUENT 6.2.16 durchgeführten numerischen Rechnung. Diese Rechnung basiert auf einer Lösung der vollen, nach Reynolds gemittelten Bewegungsgleichungen unter Zuhilfenahme des $k - \varepsilon$ -Turbulenzmodells zur Berechnung der Reynoldsschen Scheinspannungen. Dabei wurde in einem zweidimensionalen Rechengebiet der Form eines Rechtecks der im Experiment gemessene Volumenstrom und die Höhe der Zuströmung fest vorgeschrieben und die Kanalneigung α so ermittelt, dass eine voll-ausgebildete Strömung (manifestiert durch ein in X -Richtung unveränderliches Geschwindigkeitsprofil) vorliegt. Mit dem so ermittelten Wert von $\alpha = 3,27 \cdot 10^{-3}$ wurden die Parameter der asymptotischen Theorie berechnet. Dass dennoch der in Tabelle 6.2 in Zeile [Hutter adapt.] eingetragene Wert für Γ vom Wert 0 für voll-ausgebildete Zuströmung abweicht, ist auf den Einfluss der Turbulenzmodellierung in der numerischen Rechnung zurückzuführen.

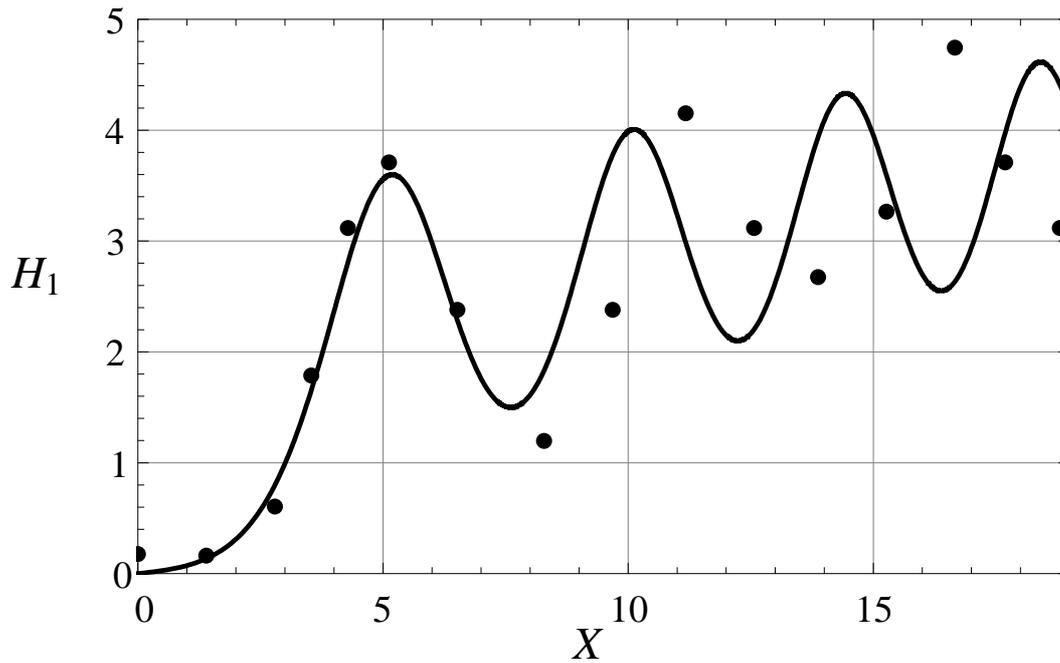
Das Experiment Case 8 in Tabelle 6.2 nimmt im Vergleich zu allen anderen aufgelisteten Fällen einen Sonderstatus ein: In diesem Experiment wurde nämlich ein Übergang zu einer voll-ausgebildeten Strömung weit stromab mit einer im Mittel konstanten Flüssigkeitshöhe beobachtet. Ein Vergleich der asymptotischen Theorie mit diesem speziellen Experiment folgt im nächsten Abschnitt.

Eine Überlegung betreffend die Größenordnung der Parameter der asymptotischen Theorie führt zu einer Beschränkung des Parameters β zu kleinen Werten hin: Laut Definition in (2.45) muss β von der Grössenordnung $O(\sqrt{\varepsilon})$ sein. In (2.44) ist damit der Term, der β als Koeffizienten enthält, um eine halbe Grössenordnung kleiner als die anderen Terme. Die Grössenordnung von β darf demnach keinesfalls die Ordnung $O(\varepsilon^{3/2})$ annehmen oder gar unterschreiten, da sonst bereits höhere Ordnungen der asymptotischen Entwicklungen grösser sind als der durch β in (2.44) berücksichtigte Term. Ein Blick auf die Tabelle 6.2 zeigt aber, dass dies für eine Vielzahl von Experimenten der Fall ist, und zwar bei jenen, deren Werte für ε verhältnismässig gross sind. Die Experimente, mit denen wir die Vorhersage der Theorie im Folgenden vergleichen wollen, stellen eine Auswahl mit möglichst kleinen Werten von ε dar, wengleich die vorausgesetzten Größenverhältnisse von den aus dem Experiment abgeleiteten Werten für β und ε nicht immer zutreffen.

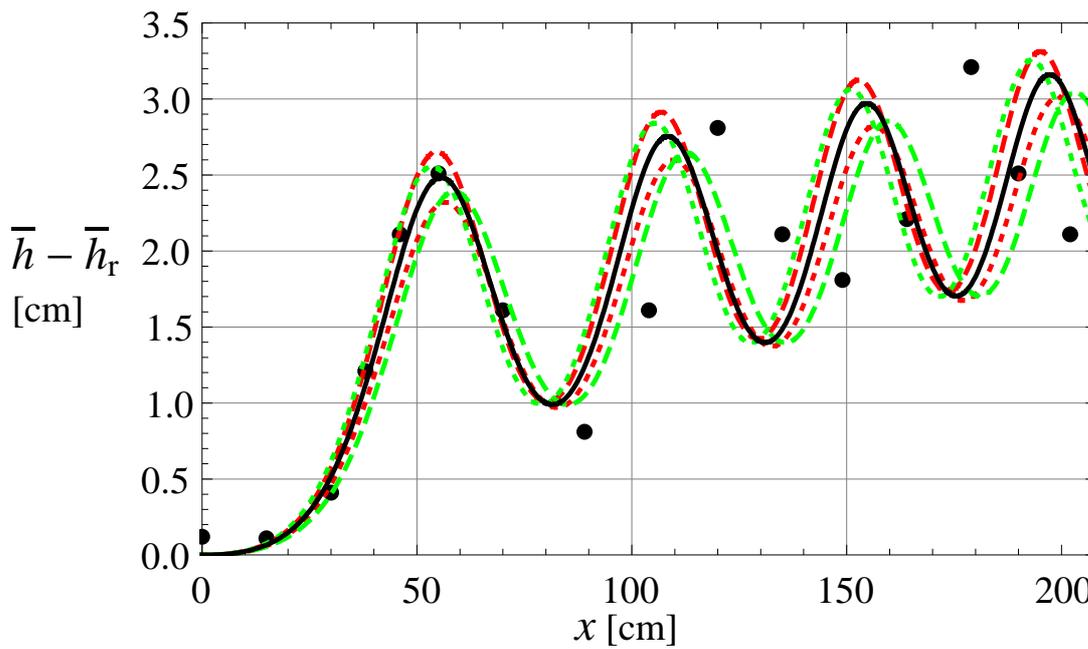
6.2 Auslenkung der Oberfläche als Funktion der Längskoordinate

Für die Experimente aus [24] Case 1 bis 10 (siehe Tabelle 6.2) wurden die gemessenen Oberflächenprofile von den Autoren zur Verfügung gestellt. Mit Ausnahme von Case 7 und 8 fallen alle diese in die Klassifikation eines welligen Wassersprunges bei starker Kanalneigung mit Werten von $\Gamma < 0$.

Nach Abschnitt 5.7 ist für diese Fälle nur ein Übergang ins tiefe Wasser möglich. Diese theoretische Vorhersage deckt sich mit den Beobachtungen im Experiment. Abbildung 6.1(a) zeigt die Oberflächenstörung H_1 berechnet mit Gleichung (2.54) (schwarz durch-



(a) dimensionslose Darstellung



(b) dimensionsbehaftete Darstellung

Abbildung 6.1: Höhengauslenkung im Vergleich mit dem Experiment Case 5 aus [24]. $\varepsilon=0,0761, \beta=0,0375$ und $\Gamma=-2,19$. In (a) sind die dimensionslosen Größen dargestellt. Die schwarz durchgezogene Kurve ist eine numerische Lösung der Gleichung (2.54) mit den Anfangsbedingungen $H_{1X}(0)=0$ und $H_{1XX}(0)=0,05$. Die schwarzen Punkte sind Messergebnisse. In (b) sind die entsprechenden dimensionsbehafteten Größen dargestellt. Die roten und grünen Kurven kennzeichnen dabei den Einfluss von Messungenauigkeiten. Rot strichliert: $1,01 \text{ V}$. Rot punktiert: $0,99 \text{ V}$. Grün strichliert: $1,1 \text{ n}$. Grün punktiert: $0,9 \text{ n}$.

gezogene Kurve) im Vergleich mit den Werten für die Oberflächenstörung, die gemäß Gleichungen (2.2) und (2.26) aus den in Experiment Case 5 gemessenen Flüssigkeitshöhen gewonnen wurden (schwarze Punkte). Die Parameterwerte wurden dabei mithilfe des Manningschen Widerstandsgesetzes (6.9) ermittelt, wobei die Messwerte für den Manningschen Faktor ebenfalls von den Autoren zur Verfügung gestellt wurden. Die Anfangsbedingungen wurden dabei zu

$$H_{1X}(0) = 0, \quad H_{1XX}(0) = 0,05 \quad (6.10)$$

gewählt. Die Wahl der Anfangsbedingung $H_{1X}(0)=0$ in Gleichung (6.10) trägt dem Umstand Rechnung, dass die Zuströmung im Experiment nahezu flach erfolgte. Der Wert für die Anfangskrümmung wurde so bemessen, dass der Ort des ersten Wellenmaximums X_{m1} der Lösungskurve von Gleichung (2.54) mit jenem aus dem Experiment zusammenfällt. Geringere Werte für die Anfangskrümmung bewirken eine kleine Verschiebung der numerisch berechneten Kurve in positiver X -Richtung, wobei die Form der Kurve unverändert bleibt.

Folgt man der auf Seite 81 ff. dargestellten Vorgehensweise zur Bestimmung des Lösungstypus aus der Vorgabe des Parameters $\Gamma = -2,19$ und der genannten Anfangsbedingungen, so ergeben sich folgende Werte für die transformierten Anfangsbedingungen

$$\zeta_0 = 0,329, \quad \eta_0 = -0,124. \quad (6.11)$$

Im Diagramm der universellen Anfangsbedingungen Abbildung 5.7 liegt dieser Punkt im blauen Bereich, es liegt also eine wellige Lösung vor, die weit stromab ins tiefe Wasser führt.

Während die gemessenen absoluten Werte der Höhe sowie die Amplituden von der asymptotischen Theorie sehr gut wiedergegeben werden, sind die Werte für die Wellenlängen etwas zu klein, d.h. der Abstand der X -Koordinate von erstem zu zweitem Maximum bzw. der Abstand von zweitem zu drittem Maximum wird durch die asymptotische Theorie um ca. 20% geringer wiedergegeben als im Experiment beobachtet.

In Abbildung 6.1(b) ist der analoge Vergleich zwischen Experiment (schwarze Punkte) und Theorie (schwarze Kurve) für dasselbe Experiment in dimensionsbehafteten Grössen dargestellt. Zusätzlich eingezeichnet sind die Einflüsse der Messungenauigkeiten auf das Ergebnis der asymptotischen Theorie. Die rot strichlierte Kurve kennzeichnet dabei die Veränderung der schwarz durchgezogenen Lösung von Gleichung (2.54) durch Veränderung der Parameterwerte bei Erhöhung des Volumenstromes \dot{V} um 1%, die rot punktierte Kurve bei Erniedrigung um 1%, was in etwa der Schwankungsbreite der Ungenauigkeit bei der Messung des Volumenstromes entspricht. Analog zeigen die grün strichlierte bzw. punktierte Kurve die Veränderung bei 10%iger Erhöhung bzw. Erniedrigung des Manningschen Faktors n im Widerstandsgesetz, was ebenfalls im Bereich der Messungenauigkeit des Manningschen Faktors liegt. Trotz unterschiedlicher Grössenordnungen dieser beiden Ungenauigkeiten zeigt sich, dass der Einfluss auf die Oberflächenkontur von etwa gleicher Grössenordnung ist.

Abbildung 6.2 zeigt die Ergebnisse des Experiments Case 5 aus [24] für die Auslenkung der mittleren Flüssigkeitshöhe im Vergleich zur asymptotischen Theorie und einer Lösung der vollständigen, nach Reynolds gemittelten Impulsgleichungen. Die Messpunkte sind schwarz eingezeichnet, die Höhenauslenkung \bar{H} nach der vorliegenden asymptotischen Theorie (blaue Kurve) wurde durch die Lösung der Gleichung (2.54) und mithilfe

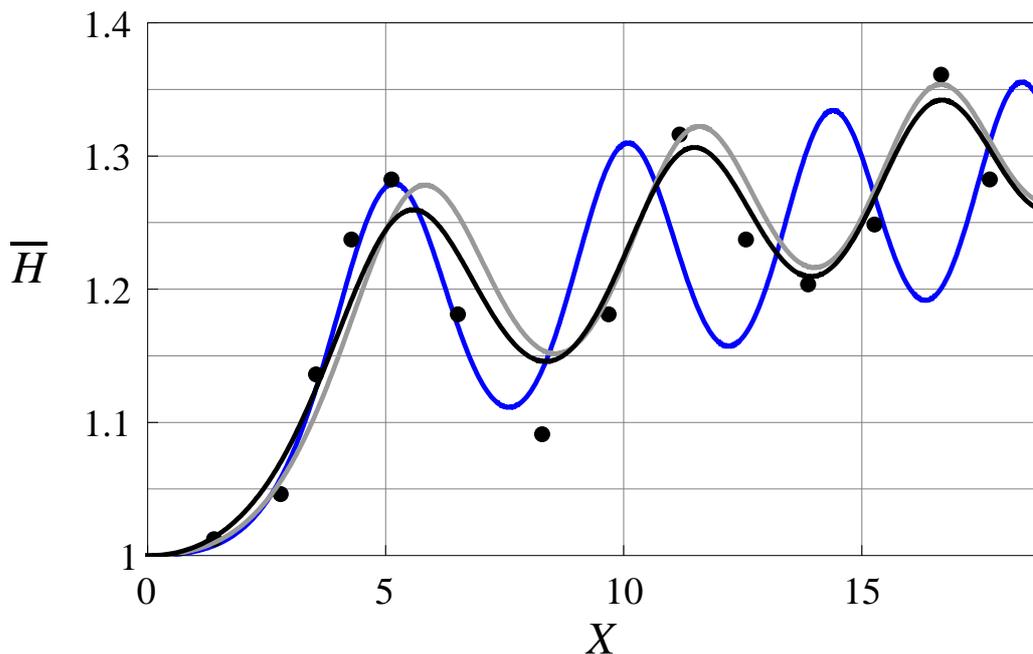


Abbildung 6.2: Höhenauslenkung im Vergleich zwischen der kombinierten asymptotisch-numerischen Iterationsroutine nach [49] und dem Experiment. Parameterwerte wie in Abbildung 6.1. Die schwarzen Punkte stellen Messergebnisse des Case 5 aus [24] dar. Die blaue Kurve basiert auf einer Lösung von Gleichung (2.54) mit den Parameterwerten und Anfangsbedingungen wie in Abbildung 6.1. Die graue Kurve ist das Ergebnis der Iterationsroutine, eine Lösung der vollständigen, nach Reynolds gemittelten Impulsgleichungen unter Verwendung des Reynoldsspannungs-Turbulenzmodelles mittels FLUENT. Die schwarze Kurve ist das analoge Ergebnis bei Verwendung des k-epsilon Turbulenzmodelles.

der Gleichungen (2.26) und (2.31) bestimmt. Die Parameterwerte und Anfangsbedingungen sind dabei dieselben wie in Abbildung 6.1. Die graue und schwarze Kurve wurde mittels einer Iterationsroutine ermittelt, die auf der Kombination einer asymptotischen Rechnung mit einer Lösung der vollen Bewegungsgleichungen für die turbulente Kanalströmung basiert, siehe [49].

Der asymptotische Teil der Iterationsroutine orientiert sich an [26], wobei Störungen konstanter Druckwerte an der Oberfläche (also Abweichungen von der dynamischen Randbedingung) im Rahmen der asymptotischen Theorie erfasst werden, die dann als Korrektiv für die Ermittlung einer numerischen Lösung der vollständigen, nach Reynolds gemittelten Impulsgleichungen dienen. Dadurch wird die Erfüllung der dynamischen Randbedingung iterativ erreicht.

Für die Berechnung der numerischen Lösung wurde der Finite-Volumen-Programmcode FLUENT 6.2.16 verwendet, wobei zur Bestimmung der Reynoldsschen Scheinspannungen ein Turbulenzmodell verwendet werden musste. Die graue Kurve repräsentiert das Ergebnis der Iterationsroutine bei Verwendung des Reynoldsspannungs-Turbulenzmodelles, die schwarze Kurve stellt das Ergebnis bei Verwendung des k-epsilon Turbulenzmodelles dar. Der Unterschied zwischen diesen beiden Kurven zeigt also den Einfluss der Turbulenzmodellierung auf die Lösung, der nicht sehr stark ist. Dies ist auf die hohe Reynoldszahl von $Re = 93.000$ zurückzuführen. Weiters werden von den Ergebnissen der Iterati-

onsroutine die Absolutwerte der Höhen, vor allem aber die Wellenlängen besser erfasst als von der rein asymptotischen Beschreibung. Dies liegt vor allem daran, dass zwar die Konvergenz bei der Iterationsroutine vom Störparameter ε abhängt, nicht aber das Ergebnis selbst, das von einer Lösung der vollen Bewegungsgleichungen herrührt. Die Berechnung des Oberflächenprofils mithilfe der asymptotischen Theorie aus [26] stellt eine asymptotische Korrektur der Oberfläche in $O(\varepsilon)$ dar, und Unterschiede zu dem im Experiment beobachteten Verlauf resultieren aus nicht berücksichtigten höheren Ordnungen.

Nach der in den vorhergehenden Kapiteln beschriebenen asymptotischen Theorie existiert die Möglichkeit, dass die Strömung infolge eines welligen Sprunges weit stromab in einen voll-ausgebildeten Zustand übergeht. Mit den in Abschnitt 3.9 eingeführten transformierten Grössen lassen sich diese Lösungen, die stromab auf voll-ausgebildete Strömung führen, als eine universelle Kurve zusammenfassen. Diese Kurve ist in Abbildung 5.6, die die transformierte Amplitude δ gegen die transformierte mittlere Höhenauslenkung h_m zeigt, als rote Kurve, die in den Punkt D_0 mündet, dargestellt. Nach der vorliegenden Theorie müssen dazu notwendigerweise Werte $\Gamma > 1$ vorhanden sein. Ein Vergleich mit Tabelle 6.2 zeigt, dass ein solcher Übergang nur in den Fällen eines schwach geneigten Kanals möglich ist.

Das Experiment Case 8 aus [24] ist das einzige uns bekannte, bei dem ein solcher Übergang zu voll-ausgebildeter Strömung weit stromab im Labor tatsächlich beobachtet wurde. Ein Blick in Tabelle 6.2 zeigt allerdings, dass die dort eingetragenen Γ -Werte 0,78 bzw. 0,80 betragen und laut Theorie die Strömung weit stromab zu einem Zustand des tiefen Wassers führen sollten. Da jedoch geringe Messungenauigkeiten zu großen Veränderungen des Wertes von Γ führen, muss angenommen werden, dass diese Γ -Werte in diesem Fall nicht die korrekten Verhältnisse wiedergeben. Aus diesem Grund wollen wir die Parameter für die asymptotische Theorie alternativ, und zwar ausgehend von dem im Experiment beobachteten Zustand weit stromab bestimmen. Nach (2.3), (2.26), (2.31) und (3.9) beträgt die konstante Flüssigkeitshöhe im voll-ausgebildeten Zustand weit stromab

$$h|_{x \rightarrow \infty} = (1 + \varepsilon \Gamma) h_r. \quad (6.12)$$

Die dem Experiment Case 8 zu entnehmende Flüssigkeitshöhe weit stromab beträgt $h|_{x \rightarrow \infty} \approx 1,67 h_r$. Wir wollen die experimentellen Ergebnisse mit der Theorie für zwei unterschiedliche Parametersätze vergleichen:

- (1) Parameterwerte basierend auf den originalen Messdaten im Referenzpunkt nach [24] gemäß Tabelle 6.2 wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, unter Verwendung des Manningschen Widerstandsgesetzes, Gleichung (6.9), mit dem experimentell bestimmten Wert des Manningfaktors n , mit Ausnahme des Wertes für Γ . Γ wird aus dem Messwert für die Flüssigkeitshöhe weit stromab bestimmt, also $\Gamma = 0,67/\varepsilon \approx 2,1$.

Die so errechneten Parameterwerte lauten: $\varepsilon = 0,320$, $\beta = 0,0086$, $c_f = 0,0043$.

- (2) Modifikation des Wertes ε auf $\varepsilon = 0,480$, Bestimmung der übrigen Parameterwerte gemäß Abschnitt 6.1, unter Verwendung des Manningschen Widerstandsgesetzes, Gleichung (6.9). Bestimmung von Γ wie in (1), also $\Gamma = 0,67/\varepsilon \approx 1,4$.

Die übrigen Parameterwerte lauten: $\beta = 0,0030$, $c_f = 0,0028$.

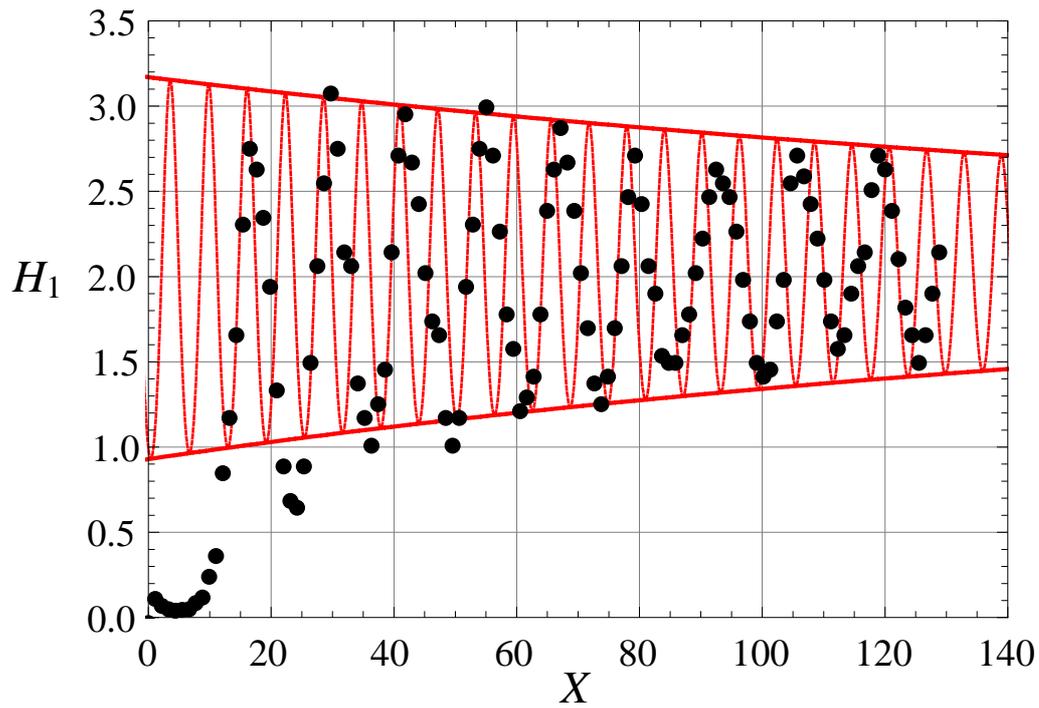
Die Abbildungen 6.3(a) und 6.3(b) zeigen die mit den Parametersätzen nach (1) bzw. (2) ermittelte Amplitude δ gegen die Höhengauslenkung h_m nach der Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen in transformierter Darstellung im Vergleich mit Messdaten. Die schwarz eingezeichneten Messpunkte wurden aus aufeinanderfolgenden Messwerten von Maxima und Minima ermittelt und gemäss Gleichungen (5.134)-(5.136) auf die transformierten Amplituden und transformierten Höhengauslenkungen umgerechnet.

In Diagramm 6.3(a) sind die theoretischen Werte der Amplitude in Abhängigkeit von der mittlerer Auslenkung im Vergleich zum Experiment für grössere Werte der Amplitude zu hoch. Bei den modifizierten Parameterwerten nach (2) wurde der Wert von ε so gewählt, dass der experimentell beobachtete Verlauf von Amplitude und Höhengauslenkung durch die Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen bestmöglich wiedergegeben wird, wobei Γ gemäß Gleichung (6.12) aus der im Experiment weit stromab beobachteten Flüssigkeitshöhe bestimmt wurde, also $\varepsilon \Gamma = 0,67$.

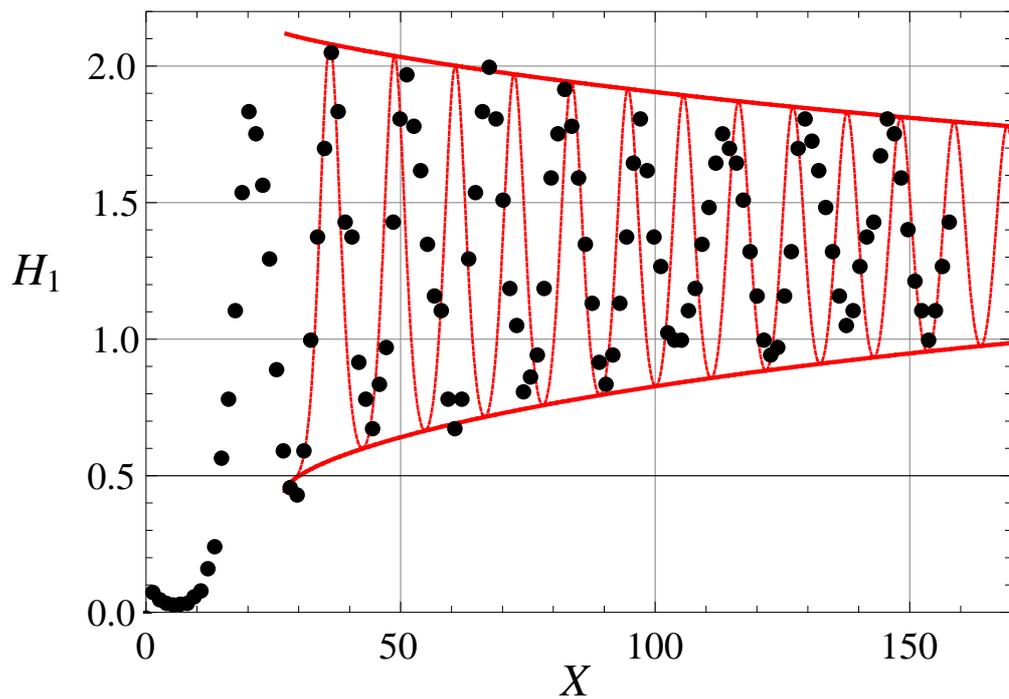
Die Abbildungen 6.4(a) bzw. 6.4(b) zeigen die Höhengauslenkungen nach der Methode der mehrfachen Variablen in untransformierter Darstellung, berechnet mit den Parametersätzen nach (1), Seite 93, bzw. (2), Seite 93, im Vergleich mit Messdaten nach [24] für das Experiment Case 8. Die Kurven für die Höhengauslenkung wurden aus der universellen Lösung nach der Methode der mehrfachen Variablen in der transformierten Darstellung gewonnen, wobei die Gleichungen (3.57), (3.60) und (5.110)-(5.118) verwendet wurden und die entsprechenden Differentialgleichungen für $dh_m/d\delta$, $d\mathfrak{X}/d\delta$ und $d\xi/d\delta$ mit eliminiertes Ortsvariable Ω gelöst wurden. Dabei wurde, analog zu Abschnitt 5.6, für die Berechnung der universellen Kurve mit Übergang zu voll-ausgebildeter Strömung im Phasendiagramm Abbildung 5.6, ausgehend von einem leicht gestörten Zustand voll-ausgebildeter Strömung stromauf integriert, mit den Anfangsbedingungen $(h_m, \delta) = (0, 0,01)$. Aus den transformierten langsam Veränderlichen wurde mittels (5.107) die transformierte schnell veränderliche Störung der Höhengauslenkung \mathfrak{S}_{10} ermittelt. Die so berechneten Grössen \mathfrak{X} , h_m , ξ und \mathfrak{S}_{10} wurden anschliessend mithilfe der Gleichungen (3.57), (3.60), (5.11), (5.113) und (5.114) auf die untransformierten Grössen umgerechnet. Dabei wurden die Gleichungen (3.57) und (3.60) nicht nur für die Umrechnung der transformierten auf die untransformierte Störung der Höhengauslenkung, sondern auch für die Umrechnung der Einhüllenden h_2 und h_3 auf h_2 und h_3 verwendet.

Während die Absolutwerte für die Höhengauslenkung festgelegt sind, ist die Lösung in X-Richtung um eine beliebige Konstante verschiebbar. Die Lösungen in Abbildungen 6.4(a) bzw. 6.4(b) wurden dabei so verschoben, dass das Abklingverhalten der Amplituden aus dem Experiment erfasst wird. Dies ist in Abbildung 6.4(a) für die originalen Parameterwerte nur begrenzt möglich, wie dies schon aus den transformierten Grössen in Abbildung 6.3(a) entnommen werden kann. Die Übereinstimmung in 6.4(b) bei Verwendung der modifizierten Parameter ist besser, analog zu der in Abbildung 6.3(b). Allerdings sind auch hier wie bereits bei obigem Vergleich mit dem Experiment Case 5 aus [24] die aus der Theorie bestimmten Wellenlängen zu kurz.

Abbildung 6.5 zeigt einen Vergleich des Profils der Höhengauslenkungen zwischen der asymptotischen Theorie (Lösungen von Gleichung (2.54)) und dem Experiment CD1 aus [12]. Die Messdaten sind als schwarze Punkte eingetragen. Die Parameterwerte wurden aus den experimentellen Daten wie in Abschnitt 6.1 beschrieben bestimmt, wobei für die Bestimmung des Kanalwiderstands das asymptotisch gültige Überlappungsgesetz für glatte Böden (Gleichung (6.8)) verwendet wurde, in Ermangelung näherer Informatio-



(a) Originalwerte



(b) Modifizierte Werte

Abbildung 6.4: Höhengauslenkung bei Übergang zu voll ausgebildeter Strömung weit stromab. Parameterwerte wie in Abbildung 6.3 (a) bzw. (b). Die rote wellige Kurve stellt die Lösung H_{10} nach der Methode der mehrfachen Variablen dar, die durch die Einhüllenden h_2 und h_3 nach unten bzw. oben begrenzt wird. Die schwarzen Punkte sind Messergebnisse des Case 8 aus [24].

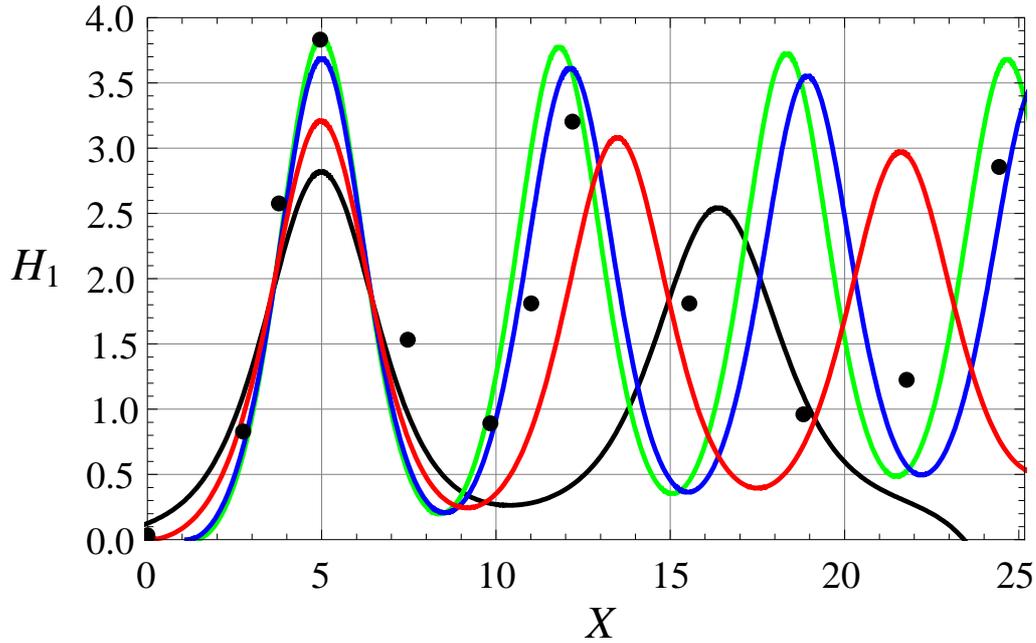


Abbildung 6.5: Höhenauslenkung im Vergleich mit dem Experiment von [12] und Einfluss der Anfangsbedingungen auf die asymptotische Lösung. $\varepsilon = 0,177$, $\beta = 0,0137$, $\Gamma = 1,88$. Die schwarzen Punkte stellen Messergebnisse des Experimentes CD1 aus [12] dar. Die Kurven sind Lösungen von Gleichung (2.54) mit den Anfangsbedingungen $H_{1X}(0) = 0$ (alle Kurven) und $H_{1XX}(0) = 0,17$ (rot), $H_{1XX}(0) = 0,57$ (grün), $H_{1XX}(0) = 0,46$ (blau), $H_{1XX}(0) = 0,035$ (schwarz).

nen zum Kanalwiderstand. Die Lösungen von (2.54) wurden für verschiedene Werte der Anfangsbedingungen $H_{1X}(0)$ und $H_{1XX}(0)$ gewonnen und anschliessend so in X -Richtung verschoben, dass die Position des ersten Maximums der Höhenauslenkung mit jener im Experiment übereinstimmt.

Auf diese Weise wird der Einfluss der Anfangsbedingungen auf die Absolutwerte der Höhenauslenkung und die Wellenlängen deutlich. Die rote und die schwarze Kurve wurden mit Anfangsbedingungen berechnet, die zu einem beschränkten Gültigkeitsbereich der Lösung führen. Dies ist für die schwarze Kurve aus dem in Abbildung 6.5 dargestellten Lösungsverlauf zu erkennen. Nach der auf Seite 81 ff. dargestellten Vorgehensweise zur Bestimmung des Lösungstypus aus dem Parameter Γ und den Anfangsbedingungen $H_{1X}(0)$ und $H_{1XX}(0)$ ergeben sich die in Tabelle 6.5 zusammengefassten Werte für die transformierten Anfangsbedingungen samt der aus Diagramm Abbildung 5.7 folgenden

Kurve in Abb. 6.5	$H_{1X}(0)$	$H_{1XX}(0)$	ζ_0	η_0	Klassifikation
grün	0	0,57	1,662	2,541	tiefes Wasser
blau	0	0,46	1,575	2,237	tiefes Wasser
rot	0	0,17	1,315	1,437	beschränkt
schwarz	0	0,035	1,175	1,065	beschränkt

Tabelle 6.5: Transformierte Anfangsbedingungen und Klassifikation der Lösungstypen der in Abbildung 6.5 dargestellten Lösungen.

Klassifikation des Lösungstypus nach dem Verhalten weit stromab.

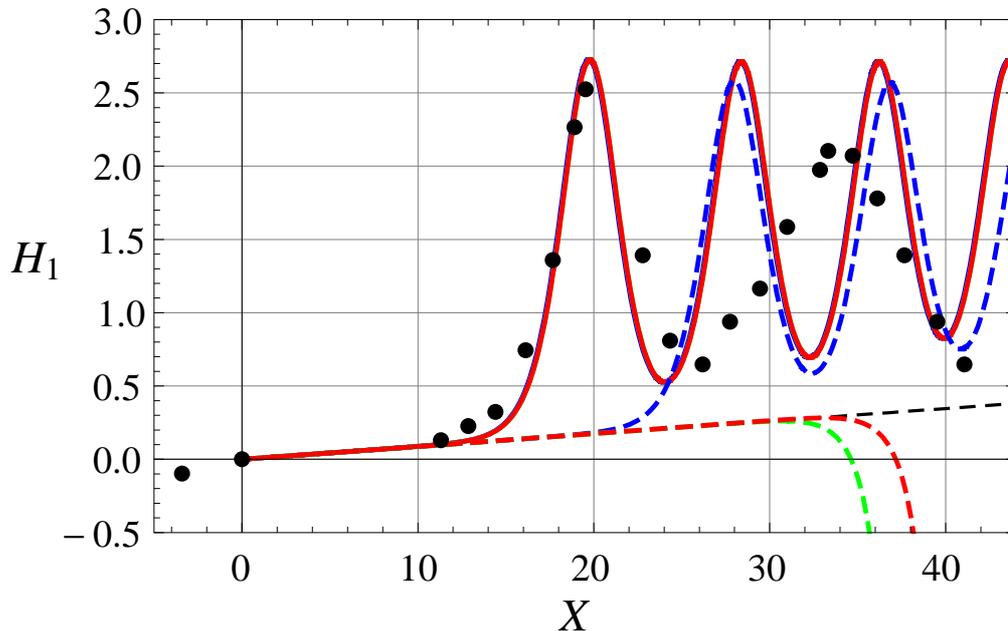


Abbildung 6.6: Höhenauslenkung im Vergleich mit dem Experiment aus [45] und Einfluss der Anfangsbedingungen und der numerischen Integration auf die asymptotische Lösung. Die Parameterwerte lauten $\varepsilon = 0,294$, $\beta = 0,00764$, $\Gamma = 1,13$ und $h_r = 10,5$ cm. Die schwarzen Punkte stellen Messergebnisse dar. Die Kurven sind Lösungen von Gleichung (2.54) mit der Anfangsbedingung $H_{1X}(0) = \beta \Gamma = 0,0087$, verschiedenen Werten der Anfangskrümmung und unterschiedlichen Integrationsbedingungen. Die schwarz strichlierte Kurve stellt die für $H_1 \ll 1$ gültige Näherungslösung $H_1 = \beta \Gamma X$ dar.

Ein Vergleich des Profils der Höhenauslenkungen zwischen Theorie und dem Experiment von [45], das in jener Arbeit in Fig. 11 (a) mit den Symbolen \square eingezeichnet ist, ist in Abbildung 6.6 dargestellt. Beim gemessenen Verlauf der Höhenauslenkungen (schwarze Punkte) ist zu beobachten, dass dieser anfänglich eine nahezu konstante Steigung und keine erkennbare Krümmung aufweist. Die Parameter wurden aus den Messwerten unter Verwendung des asymptotisch gültigen Überlappungsgesetzes für glatte Böden (Gleichung (6.8)) für den Kanalwiderstand und unter Bezugnahme auf den zweiten Messwert für die Höhenauslenkung als Referenzwert (die Autoren geben den dritten Messwert als Referenzwert an) berechnet.

Aus Abschnitt 4.1 ist bekannt (siehe Abbildung 4.3), dass Gleichung (2.54) für den speziellen Fall $\Gamma = 1$ Lösungen besitzt, die in der Nähe des Referenzpunktes $X = 0$ nahezu konstante Neigung $H_{1X} = \beta$ und sehr kleine Oberflächenkrümmungen H_{1XX} aufweisen. Der hier vorliegende Wert von $\Gamma = 1,13$ weicht nur wenig von 1 ab. Entwickelt man die Gleichung (2.54) für $H_1 \ll 1$, so zeigt sich, dass $H_1 = \beta \Gamma X$ eine Näherungslösung für kleine Werte von H_1 zur exakten sprunghfreien Lösung $H_1 = \beta X$ des Spezialfalles $\Gamma = 1$ ist. In Abbildung 6.6 sind nun Lösungen von (2.54) dargestellt, die nur gering von dieser Näherungslösung durch sehr kleine Werte der Anfangskrümmung abweichen. Die Näherungslösung selbst ist in Abbildung 6.6 schwarz strichliert dargestellt.

Die durchgezogenen Kurven wurden mit den festen Anfangsbedingungen $H_{1X}(0) = \beta \Gamma =$

0,0087 und $H_{1XX}(0) = 9,05 \cdot 10^{-6}$, und die *strichlierten* Kurven mit den Anfangsbedingungen $H_{1X}(0) = \beta\Gamma = 0,0087$ und $H_{1XX}(0) = 8,94 \cdot 10^{-6}$ berechnet. Die verschiedenen Farben der Kurven unterscheiden die verwendete Integrations-schrittweite oder die Wahl des verwendeten Integrationsverfahrens. Die roten Kurven wurden mittels eines impliziten Runge-Kutta-Verfahrens mit einer Anzahl von 10^3 Schritten und fester Schrittweite berechnet. Die grünen Kurven wurden mittels eines impliziten Runge-Kutta-Verfahrens mit einer Anzahl von 10^5 Schritten und fester Schrittweite berechnet. Die blauen Kurven wurde mittels einer automatischen Integrationsroutine in MATHEMATICA 6.0.1.0 und einer anfänglichen Schrittweite von $4 \cdot 10^{-5}$ berechnet.

Für die durchgezogenen Kurven ist erkennbar, dass die Integrationsbedingungen kaum Auswirkungen auf die Lösungen haben, die alle nahezu deckungsgleich sind. Die Anfangskrümmung $H_{1XX}(0) = 9,05 \cdot 10^{-6}$ wurde dabei so gewählt, dass die Lage des ersten Wellenmaximums in etwa mit dem des Experimentes zusammenfällt. Die asymptotische Theorie vermag hier die experimentell beobachtete, nahezu konstante Neigung des Oberflächenprofils in der Nähe des Referenzpunktes sehr gut wiederzugeben. Auch die Absolutwerte der Höhe des ersten Maximums und des ersten Minimums werden recht gut erfasst, nicht jedoch der weitere Verlauf der Höhen und die Wellenlängen.

Interessant ist auch der starke Einfluss der Wahl der Anfangskrümmung: Die *strichlierte* Kurve in einer bestimmten Farbe stellt jenes Höhenprofil dar, das bei Verwendung der gleichen numerischen Integrationsbedingung wie bei der *durchgezogenen* Kurve der gleichen Farbe gewonnen wurde, jedoch bei geringfügig kleinerer Anfangskrümmung $H_{1XX}(0) = 8,94 \cdot 10^{-6}$ als bei der entsprechenden durchgezogenen Kurve. Dies führt zu völlig andersartigen Kurven und zeigt die Sensibilität dieser Lösungen sowohl bezüglich der Wahl der Anfangskrümmung als auch der Wahl der Integrationsbedingungen. Dieses Verhalten lässt sich anhand der auf Seite 81 ff. dargestellten Vorgehensweise zur Bestimmung des Lösungstypus aus dem Parameter $\Gamma = 1,13$ und den in Abbildung 6.6 verwendeten Anfangsbedingungen verstehen. Gemäß Gleichungen (5.157) und (5.158) ergibt sich für die transformierten Anfangsbedingungen

$$\zeta_0 = 7,69, \quad \eta_0 = 181. \quad (6.13)$$

Im Diagramm der universellen Anfangsbedingungen Abbildung 5.7 liegt dieser Punkt fast an der Grenze des Gültigkeitsbereiches für wellige Lösungen (ausserhalb des in Abbildung 5.7 dargestellten Bereiches), i.e. der Kurve $g(-1, \zeta_0)$, die den Grenzfall zusammenfallender Nullstellen $h_1 = h_2$ darstellt, siehe Tabelle 5.1. Diese Kurve ist die in Abbildung 5.7 rot dargestellte, obere Grenzkurve. Geringe Abweichungen infolge kleiner Änderungen der Anfangsbedingung $H_{1XX}(0)$ oder geringfügig unterschiedlicher numerischer Berechnung führen daher an dieser Stelle zu einem anderen Lösungsverhalten.

6.3 Schubspannungsprofil

Abbildung 6.7 zeigt einen Vergleich der dimensionslosen Reynoldsschen Scheinschubspannungen als Funktion der Koordinate Y quer zur Hauptströmungsrichtung an der Stelle des ersten Wellenmaximums X_{m1} zwischen asymptotischer Theorie und dem Experiment Trial 1 in [38]. Die Messwerte sind als schwarze Punkte eingezeichnet, als Referenzwert für die Schubspannungen dient der Wert der Wandschubspannung im Referenzpunkt. Da

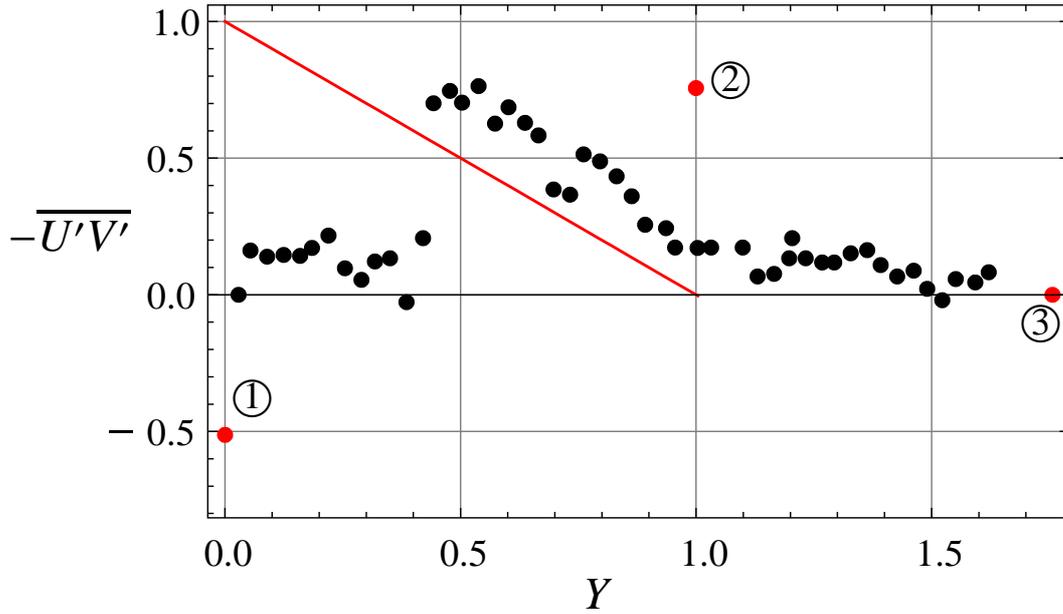


Abbildung 6.7: Vergleich der Verteilung der Reynoldsschen Scheinschubspannungen am Ort des ersten Wellenmaximums X_{m1} mit dem Experiment. $\varepsilon = 0,249$, $\beta = 0,0102$, $\Gamma = 0$. Die schwarzen Punkte stellen Messergebnisse des Trial 1 aus [38] dar. Die rot durchgezogene Gerade stellt das Ergebnis der asymptotischen Theorie bei Berücksichtigung von Termen bis zur $O(1)$ der Entwicklung nach ε dar. Die roten Punkte ①, ② und ③ stellen Ergebnisse bei Berücksichtigung von Termen bis zur $O(\varepsilon)$ dar.

für dieses Experiment keine Angaben zur Kanalneigung gemacht wurden, wurde hier gemäß dem experimentell ermittelten Schubspannungsprofil im Referenzpunkt, das nahezu dem einer voll-ausgebildeten Strömung entspricht, ein Wert $\Gamma = 0$ angenommen und mittels (2.46) und (2.53) der Neigungswinkel zu $\alpha = Fr_{\tau}^2 = 0,0038$ bestimmt. Zur Berechnung des Kanalwiderstandes wurde wieder das asymptotisch gültige Überlappungsgesetz für glatte Böden (Gleichung (6.8)) für den Kanalwiderstand verwendet. Die rot eingezeichnete Gerade ist das Ergebnis für die Scheinschubspannungen nach der vorliegenden asymptotischen Theorie bei Berücksichtigung von Termen bis $O(1)$ in der Entwicklung nach ε , also nach Gleichungen (2.5)-(2.7) und (2.32):

$$-\overline{U'V'}(X_{m1}, Y) = 1 - Y. \quad (6.14)$$

Die roten Punkte ①, ② und ③ stellen die theoretischen Ergebnisse für die Schubspannungen bei Berücksichtigung von Termen bis zur $O(\varepsilon)$ der asymptotischen Entwicklung dar, die aus dem Ergebnis für die turbulenten Scheinspannungen bis zur $O(\varepsilon)$ (also den Gleichungen (2.32) und (2.43)) gewonnen wurden. Die beiden Ergebnisse in Gleichung (2.43) stammen einerseits aus einer Entwicklung der dynamischen Randbedingung, Gleichung (2.20), um den Strömungsgrundzustand mit $\overline{H} = 1$, die auf ein Ergebnis für die turbulenten Scheinspannungen bei $Y=1$ führt, und andererseits aus einer Entwicklung der Strömungsgeschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung an der Flüssigkeitsoberfläche $\overline{U}_s(X)$, Gleichung (2.13), die über U_τ mit den turbulenten Scheinspannungen am Boden bei $Y=0$ verknüpft ist. Daher können bei Berücksichtigung von Termen bis $O(\varepsilon)$ der asymptotischen Entwicklung für die Scheinschubspannungen keine Profile, sondern nur

Werte an einzelnen Punkten Y angegeben werden.

Der Punkt ① bei $Y=0$ ergibt sich gemäß Gleichungen (2.5)-(2.7) und (2.43) zu

$$-\overline{U'V'}(X_{m1}, 0) = 1 - 2H_1(X_{m1}) \varepsilon, \quad (6.15)$$

und der Punkt ② bei $Y=1$ ergibt sich gemäß Gleichungen (2.5)-(2.7) und (2.43) zu

$$-\overline{U'V'}(X_{m1}, 1) = H_1(X_{m1}) \varepsilon. \quad (6.16)$$

Zur Darstellung in Abbildung 6.7 musste wieder eine Lösung für H_1 aus Gleichung (2.54) bestimmt werden, wobei $H_{1X}(0) = 0$ und eine kleine positive Störung der Oberflächenkrümmung im Referenzpunkt, $H_{1XX}(0) = 10^{-4}$, als Anfangsbedingungen vorgeschrieben wurden. Kleine Variationen in den Werten für die Oberflächenkrümmung im Referenzpunkt bewirkten eine kaum merkbare Veränderung von Lage und Höhe des ersten Wellenmaximums. Diese Höhe wurde zu $H_1(X_{m1}) = 3,04$ ermittelt.

Der Wert der Scheinschubspannung im dritten roten Punkt ③ bei $Y = 1 + \varepsilon H_1(X_{m1}) = 1,76$ wurde gemäß Gleichungen (2.5) und (2.43) zu

$$\begin{aligned} -\overline{U'V'}(X_{m1}, 1 + \varepsilon H_1(X_{m1})) &= -\overline{U'V'}_0(X_{m1}, 1) - \frac{\partial \overline{U'V'}_0(X_{m1}, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=1} H_1(X_{m1}) \varepsilon - \\ &\quad -\overline{U'V'}_1(X_{m1}, 1) \varepsilon = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

berechnet. Dies ist eine Folge der dynamischen Randbedingung, Gleichung (2.20), die besagt, dass die Scheinschubspannungen an der Flüssigkeitsoberfläche verschwinden. Aus Abbildung 6.7 ist zu entnehmen, dass die asymptotische Theorie in $\mathcal{O}(\varepsilon)$ gegenüber den gemessenen Schubspannungswerten am Boden zu kleine und bei $Y = 1$ zu große Werte liefert. Dies dürfte an dem relativ grossen Wert des Entwicklungsparameters $\varepsilon = 0,249$ liegen. Insbesondere wird durch die Theorie in $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ein Ablösen der Strömung am Kanalboden vorhergesagt. In diesem Falle treffen die als klein vorausgesetzten Abweichungen von einem voll-ausgebildeten Strömungszustand nicht mehr zu.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde eine turbulente, ebene Strömung mit freier Oberfläche in einem um einen kleinen Winkel α gegen die Horizontale geneigten Kanal betrachtet. Die betrachtete Strömung befindet sich in leicht überkritischem Zustand $Fr = 1 + \frac{3}{2}\varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll 1$), sodass die Ausbildung eines welligen Wassersprunges möglich ist.

Im Rahmen einer asymptotischen Theorie, die die Oberflächenspannung vernachlässigt, aber den Einfluss turbulenter Dissipation berücksichtigt, wurde der überkritische Zuströmzustand als Referenzzustand (Grundzustand) für die Entwicklung nach ε angenommen. Ein Parameter γ charakterisiert dabei die Abweichung des Referenzzustandes von einem voll ausgebildeten Zustand. Für $\gamma > 0$ wird die Strömung im Referenzzustand verzögert, für $\gamma < 0$ wird die Strömung im Referenzzustand beschleunigt, und im Falle von $\gamma = 0$ herrscht ein lokales Kräftegleichgewicht im Referenzquerschnitt zwischen Reibungs- und Gewichtskräften. Eine solche quantitative Beschreibung der Abweichung des Strömungszustandes von einem voll ausgebildeten Zustand mittels des Parameters γ erlaubt z.B. die Behandlung welliger Wassersprünge unter Laborbedingungen, bei denen der Zustand einer voll ausgebildeten Zuströmung nicht immer garantiert werden kann.

Die dimensionslos formulierten Impulsgleichungen in der nach Reynolds gemittelten Form sowie die kinematischen und dynamischen Randbedingungen wurden für lange Wellenlängen und große Reynoldszahlen entwickelt. Die in diesem Problem auftretenden kleinen Parameter sind das Verhältnis von Flüssigkeitshöhe zu Wellenlänge δ , der Kanalneigungswinkel α , die aus der turbulenten Scheinspannung im Referenzpunkt resultierende Größe Fr_{tr} , sowie die Abweichung vom voll ausgebildeten Strömungszustand γ . Diese Parameter wurden mit ε gekoppelt und die Bestimmungsgleichungen nach einem asymptotischen Ansatz für die unbekanntenen Strömungsgrößen nach ε um den kritischen Strömungszustand entwickelt. Die spezielle Wahl der Kopplung vermeidet die Notwendigkeit einer Turbulenzmodellierung, berücksichtigt aber einen schwachen Einfluss der turbulenten Dissipation. Die asymptotische Entwicklung ergibt die folgende Kompatibilitätsbedingung:

$$H_{1XXX}(X) + [H_1(X) - 1] H_{1X}(X) - \beta H_1(X) + \gamma = 0, \quad (2.52)$$

die eine Bestimmungsgleichung für die Störung der dimensionslosen Flüssigkeitshöhe H_1 in $O(\varepsilon)$ als Funktion der dimensionslosen Längskoordinate X darstellt. Dabei charakterisiert die positive Konstante $\beta \ll 1$ die turbulente Dissipation. Im Falle von $\gamma = 0$ reduziert sich diese Gleichung auf Gleichung (27) von [26], bei deren Herleitung ein voll ausgebildeter Zuströmzustand vorausgesetzt wurde. Abgesehen von der notwendigen Anfangsbedingung $H_1(0) = 0$ bleiben die beiden übrigen Anfangsbedingungen dieser Gleichung im Rahmen der asymptotischen Theorie frei.

Da wellige Lösungen von Gleichung (2.52) für Werte von $|\gamma|$ in der Größenordnung von β oder darunter vorliegen, wurde anstelle des Parameters γ der Parameter $\Gamma = \gamma/\beta$ eingeführt, um insbesondere den Grenzfall $\beta \rightarrow 0$ zu studieren.

Nach einer Untersuchung der Lösungen dieser Bestimmungsgleichung für die asymptotischen Grenzfälle weit stromab ($X \rightarrow \infty$) und in der Nähe des Referenzpunktes ($X \rightarrow 0$) sowie für spezielle Werte der Parameter wurden analytische Lösungen für den Spezialfall der reibungsfreien Strömung ($\beta = 0$) angegeben, siehe [53, 58]. Es wurden algebraische Kriterien aufgestellt, für welche Anfangsbedingungen $H_{1X}(0)$ und $H_{1XX}(0)$ wellige Lösungen vorliegen und für welche Werte der Höhenauslenkung $H_1(X)$ ($X \geq 0$) lokal wellige Lösungen vorhanden sind. Diese Kriterien sind in Diagramm 3.2, Seite 29, graphisch dargestellt. Eine wichtige Folgerung ist, dass für wellige Lösungen $H_{1XX}(0) > 0$ gelten muss. Aus diesen Kriterien alleine konnte aber noch nicht auf den weiteren Verlauf einer bestimmten Lösung geschlossen werden, also insbesondere, ob lokal wellige Lösungen beliebig weit stromab fortgesetzt werden können.

Für Höhenauslenkungen, die hinreichend weit weg vom kritischen Zustand $H_1 = 1$ sind, wurde eine eindimensionale, die sogenannte hydraulische Theorie [15] betrachtet, und mit einer quasi-eindimensionalen Näherung von obiger Bestimmungsgleichung verglichen. Beide Zugänge liefern zwar unterschiedliche Ergebnisse, aber keiner von beiden lässt wellige Lösungen für einen Wassersprung zu. Das Aufstellen von Übergangsbedingungen, die auf einen welligen Sprung führen, d.h. die Bestimmung vom Strömungszuständen aus einer vereinfachten eindimensionalen Betrachtung, die in der Nähe des kritischen Zustandes durch eine zweidimensionale Beschreibung fortgesetzt werden können, ist nicht möglich. Ein welliger Wassersprung kann daher nur durch rasch veränderliche Strömungsverhältnisse oder zweidimensionale Effekte hervorgerufen werden.

Eine numerische Analyse der Bestimmungsgleichung (2.54) zeigte, dass abströmseitig drei verschiedene wellige Lösungstypen möglich sind. Erstens gibt es Lösungen, bei denen die Strömung weit stromab in einen Zustand mit horizontaler Flüssigkeitsoberfläche übergeht ($H_1 \rightarrow \beta X$, Zustand des „tiefen Wassers“), zweitens gibt es Lösungen, bei der die Strömung in einen voll ausgebildeten Abströmzustand übergeht ($H_1 \rightarrow \Gamma$), und drittens gibt es Lösungen mit singulärem Verhalten, die nicht beliebig weit stromab fortgesetzt werden können (Lösungen mit beschränktem Gültigkeitsbereich). Für das Auftreten der letzteren beiden Lösungstypen muss der Parameter $\Gamma > 1$ sein.

Nach einer asymptotischen Entwicklung der Bestimmungsgleichung nach β nach der Methode der mehrfachen Variablen, die die langsame Veränderlichkeit der Amplituden und Wellenlängen und die schnelle Veränderlichkeit der Oberflächenauslenkungen als Funktion zweier unterschiedlich skalierten Längskoordinaten erfasst, wurde eine allgemeine Lösung analytisch angegeben. Diese beschreibt die Lösungen der exakten Gleichung mit großer Genauigkeit und liefert dieselben analytischen Lösungen der betrachteten Grenz- und Spezialfälle. Die auftretenden Beschränkungen des Gültigkeitsbereiches von Lösungen wird durch die Nichtfortsetzbarkeit der langsam veränderlichen Einhüllenden h_2 und h_3 der welligen Oberflächenauslenkung im reellen Wertebereich erklärt. Diese Nichtfortsetzbarkeit geht einher mit einem Übergang von einer quasi-periodischen (welligen) zu einer aperiodischen Lösung. Schlechte Übereinstimmungen mit den Lösungen der exakten Gleichung wird in jenen Fällen erzielt, bei denen die Anfangsbedingungen $H_{1X}(0)$ und $H_{1XX}(0)$ klein im Vergleich zum Parameter β sind, da in diesem Fall die in der asymptotischen Entwicklung vorausgesetzten Größenordnungen nicht erfüllt sind.

Um die Abhängigkeit der Lösungen vom Parameter Γ zu eliminieren, wurde die Bestimmungsgleichung (2.54) transformiert und auf drei unterschiedliche, von Γ unabhängige Gleichungen reduziert, die jeweils für die Fälle $\Gamma > 1$, $\Gamma = 1$ und $\Gamma < 1$ gelten. Eine Entwicklung dieser von Γ unabhängigen, transformierten Gleichungen nach der Methode der mehrfachen Variablen wurde analog zu der der untransformierten Gleichungen durchgeführt. Nach Elimination der langsam veränderlichen Ortskoordinate Ω aus den Gleichungen wurde als wesentliches Ergebnis ein vom Parameter Γ unabhängiges, universelles Phasendiagramm (Abbildung 5.6) erhalten, das die transformierte Amplitude δ in Abhängigkeit von der transformierten mittleren Höhenauslenkung h_m darstellt und das vollständige Lösungsfeld aller möglichen Lösungstypen erfasst. Weiters wurde ein Diagramm für die transformierten Anfangsbedingungen, η in Abhängigkeit von ξ , angegeben (Abbildung 5.7), das aus den analytischen Kriterien für wellige Lösungen der transformierten Gleichungen folgt. Es zeigt den Bereich möglicher Anfangsbedingungen für wellige Lösungen und trennt diese in die drei voneinander unterschiedlichen Lösungstypen. Durch Kombination beider Diagramme lässt sich bei gegebenen Anfangsbedingungen und Parameterwerten das Auftreten und der gesamte Verlauf einer welligen Lösung vorhersagen. Die Vorgehensweise zur Klassifikation einer Lösung bei gegebenen Anfangsbedingungen ist auf Seite 81 ff., Punkt (1)-(5) angegeben.

Im Vergleich mit dem Experiment erzielt die asymptotische Theorie gute Übereinstimmungen, wobei Verläufe des Oberflächenprofils und die Schubspannungsverteilung in einem bestimmten Kanalquerschnitt verglichen wurden. Naturgemäss werden für Fälle mit kleineren Werten des Störparameters ε vergleichsweise bessere Ergebnisse erzielt. Die aus dem Experiment abgeleiteten Parameter der Theorie hängen besonders stark von Messungenauigkeiten des Volumenstromes ab, weniger stark hingegen von der Messungenauigkeit des Bodenreibungsbeiwertes („Manningscher Faktor“), der allerdings auch stärkeren Schwankungen der Messwerte unterworfen ist. Der Bodenreibungsbeiwert kann mit guter Genauigkeit durch den asymptotisch für voll ausgebildete Strömung gültigen Wert des Kanalwiderstandes ersetzt werden.

Während die absoluten Werte für die Höhenauslenkung bzw. die Amplituden sehr gut wiedergegeben werden, ergibt die asymptotische Theorie tendenziell zu kleine Werte für die Wellenlängen. Dies ist auf die aus experimentellen Daten abgeleiteten Werte von β zurückzuführen, die im Verhältnis zu ε zu klein sind, sodass die in der Theorie vorausgesetzte Grössenordnung, dass β von der $O(\varepsilon^{1/2})$ ist, nicht erfüllt wird. Weiters kann auch der Parameter Γ nur ungenügend genau aus den experimentellen Daten bestimmt werden. Ein wesentliches Ergebnis ist ein von der Theorie vorhergesagter Übergang von einem nicht voll ausgebildeten Zuflösszustand zu voll ausgebildeter Strömung weit stromab. Dieses Ergebnis wird durch ein Laborexperiment von [24] durch gute Übereinstimmung bestätigt.

Literaturverzeichnis

- [1] Recent advances in boundary layer theory. A. Kluwick, Ed., CISM Courses and Lectures No.390, Springer, Wien New York.
- [2] A - -M , M., H , M. Group method solutions of the generalized forms of Burgers, Burgers-KdV and KdV equations with time-dependent variable coefficients. *Acta Mech.* 221 (2011).
- [3] A , M., S , I. *Handbook of Mathematical Functions*. 10th printing. Dover, New York, 1972.
- [4] Website. http://www.agoride.com/Surf/Focus/mascaret_12909_2_65.htm, zuletzt überprüft im Juni 2012.
- [5] A , V. M. Undular hydraulic jump. *J. Hydraulics Div.* 104 (1978).
- [6] B , T. B., L , M. J. On cnoidal waves and bores. *Proc. Roy. Soc.* A224 (1954).
- [7] B , B., V -B , J., D , F. Forced solitary waves and fronts past submerged obstacles. *Chaos* 15 (2005).
- [8] B" , P. Berechnung der Wasserspiegellage. *Forschungsarbeiten VDI* 284 (1927).
- [9] B , I. N., S , K. A., M , G., M" , H. *Taschenbuch der Mathematik*. 7. Auflage. Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2008.
- [10] C , J., S , Y. Bore formation, evolution and disintegration into solitons in shallow inhomogeneous channels. *Nonlin. Processes Geophys.* 10 (2003).
- [11] C -O , O., C , H. Near-critical free-surface flows: real fluid flow analysis. *Environ. Fluid Mech.*, DOI 10.1007/s10652-010-9192-x (2010).
- [12] C , H. Physical modelling of the flow field in an undular tidal bore. *J. Hydraulic Res.* 43 (2005).
- [13] C , H. Hydraulic jumps: bubbles and bores. In *16th Australasian fluid mechanics conference (AFMC)* (Gold Coast, Queensland, Australien, Dezember 2007), P. Jacobs et al, Ed., The University of Queensland, pp. 39–53.
- [14] C , H. Current knowledge in hydraulic jumps and related phenomena. a survey of experimental results. *Europ. J. Mech. B/Fluids* 28 (2009).

- [15] C , V. T. *Open-channel Hydraulics*. McGraw-Hill, Tokyo, 1959.
- [16] D , F., C , F. Stability of some stationary solutions to the forced KdV equation with one or two bumps. *J. Eng. Math.* 70 (2011).
- [17] D , F., V -B , J. Generalised critical free-surface flows. *J. Eng. Math.* 42 (2002).
- [18] D , F., V -B , J. Trapped waves between submerged obstacles. *J. Fluid Mech.* 509 (2004).
- [19] E , G., G , R., K , A. Analytic model for a weakly dissipative shallow-water undular bore. *Chaos* 15 (2004).
- [20] E , G., G , R., K , A. Evolution of solitary waves and undular bores in shallow-water flows over a gradual slope with bottom friction. *J. Fluid Mech.* 585 (2007).
- [21] E , G., G , R., S , N. Unsteady undular bores in fully nonlinear shallow-water theory. *Phys. Fluids* 18 (2006).
- [22] G , K. *Einführung in die Strömungsmechanik*. 6. Auflage. Vieweg, Braunschweig, 1991.
- [23] G , K., H , H. *Strömungsmechanik. Grundlagen der Impuls-, Wärme- und Stoffübertragung aus asymptotischer Sicht*. Vieweg, Braunschweig, 1992.
- [24] G , H., Y , Y., O , I. Effect of channel slope on flow characteristics of undular hydraulic jumps. In *River basin management III, third international conference on river basin management, WIT transactions on ecology and the environment* (Bologna, Italien, September 2005), C. A. Brebbia and J. S. A. do Carmo, Eds., vol. 83, WIT Press, Southampton, Boston, pp. 33–42. (Zusätzliche Daten wurde von den Autoren im Zuge persönlicher Kommunikation zur Verfügung gestellt).
- [25] G , W. *Der wellige Wassersprung in einer turbulenten Kanalströmung mit freier Oberfläche*. Dissertation, Technische Universität Wien, 2002.
- [26] G , W., S , W. The undular hydraulic jump in turbulent open channel flow at large Reynolds numbers. *Phys. Fluids* 15 (2003).
- [27] G , R. Korteweg-de Vries equation. In *Nonlinear waves in fluids: recent advances and modern applications* (Udine, Italien, September 2005), R. Grimshaw, Ed., CISM Courses and Lectures No.483, Springer, Wien New York, pp. 1–28.
- [28] G , R. Solitary waves propagating over variable topography. In *Tsunami and nonlinear waves* (2007), A. Kundu, Ed., Springer, Berlin Heidelberg, pp. 51–64.
- [29] G , R., S , N. Resonant flow of a stratified fluid over a topography. *J. Fluid Mech.* 169 (1986).

- [30] G , R., Z , D., C , K. Generation of solitary waves by transcritical flow over a step. *J. Fluid Mech.* 587 (2007).
- [31] H , W., H , K. On pseudo-uniform flow in open channel hydraulics. *Acta Mechanica* 53 (1984).
- [32] H , C., K , L. A numerical study on the free-surface channel flow over a bottom obstacle. In *Conference on modelling fluid flow (CMFF'06). The 13th international conference on fluid flow technologies* (Budapest, Ungarn, September 2006), pp. 500–506.
- [33] J , R. S. Shallow water waves on a viscous fluid - the undular bore. *Phys. Fluids* 15 (1972).
- [34] J , R., S , W. Undular hydraulic jumps arising in non-developed turbulent flows. *Acta Mech.*, DOI 10.1007/s00707-012-0666-4 (2012).
- [35] J , R., S , W., B , Y. S. A multiple-scales solution of the undular hydraulic jump problem. In *Sixth international congress on industrial applied mathematics (ICIAM07) and GAMM annual meeting* (Zürich, Schweiz, Dezember 2007), vol. 7, Proc. appl. math. mech. (PAMM), pp. 4120007–4120008.
- [36] K , W. *Hydromechanik II*. Springer, Berlin, 1934.
- [37] K , A., C , E., E , A., G , C. On the internal structure of weakly nonlinear bores in laminar high Reynolds number flow. *Acta Mechanica* 210 (2010).
- [38] L , J. M., H , D. F. Particle image velocity measurements of undular and hydraulic jumps. *J. Hydraulic Eng.* 132 (2006).
- [39] L , V. G. *Physicochemical Hydrodynamics*. Prentice-Hall, New York, 1962.
- [40] L , M. J. *Waves in Fluids*. Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
- [41] M , J. S., C , H. Characteristics of undular hydraulic jumps: experiments and analysis. *J. Hydraulic Eng.* 124 (1998).
- [42] M , S., G , R. The modulation of nonlinear periodic wavetrains by dissipative terms in the Korteweg-de Vries equation. *Wave Motion* 22 (1995).
- [43] O , I., Y , Y., G , H. Hydraulic condition for undular-jump formations. *J. Hydraulic Res.* 39 (2001).
- [44] O , I., Y , Y., G , H. Flow conditions of undular hydraulic jumps in horizontal rectangular channels. *J. Hydraulic Eng.* 129 (2003).
- [45] R , R., H , W. Non-breaking undular hydraulic jump. *J. Hydraulic Res.* 33 (1995).
- [46] S , H., G , K. *Grenzschicht-Theorie*. 10. Auflage. Springer, Berlin, 2006.

- [47] S. G. Monaghan, W. *Mathematische Methoden der Strömungsmechanik*. Vieweg, Braunschweig, 1978.
- [48] S. G. Monaghan, W. Near-critical free-surface flows. In *2nd Shanghai international symposium on nonlinear sciences and applications (NSA '05)* (Shanghai, China, Juni 2005).
- [49] S. G. Monaghan, W., J. V. Ferziger, R., B., Y. S. An asymptotic iteration method for the numerical analysis of near-critical free surface flows. In *Conference on modelling fluid flow (CMFF'09). The 14th international conference on fluid flow technologies* (Budapest, Ungarn, September 2009), J. Vad, Ed., vol. 1, pp. 364–371.
- [50] S. G. Monaghan, N. Dissipative effects on the resonant flow of a stratified fluid over a topography. *J. Fluid Mech.* 192 (1988).
- [51] S. G. Monaghan, H. Multiple scales analysis of the steady-state Korteweg-de Vries equation perturbed by a damping term. *ZAMM* 85 (2005).
- [52] S. G. Monaghan, H., S. G. Monaghan, W., G. Monaghan, W. A multiple scales analysis of the undular hydraulic jump in turbulent open channel flow. *Fluid Dyn. Res.* 33 (2003).
- [53] S. G. Monaghan, J. J. *Water Waves*. Interscience, New York, 1957.
- [54] S. G. Monaghan, V. L. *Handbook of Fluid Dynamics*. McGraw-Hill, New York, 1961.
- [55] T. G. Monaghan, E. *Fluidmechanik. Band 1 Grundlagen und elementare Strömungsvorgänge dichtebeständiger Fluide*. 4. Auflage. Springer, Berlin, 2008.
- [56] V. D. Monaghan, M. *Perturbation Methods in Fluid Dynamics*. Annotated edition. Parabolic Press, Stanford, 1975.
- [57] W. G. Monaghan, F. *Fluid Mechanics*. 6th edition. McGraw-Hill College, New York, 2009.
- [58] W. G. Monaghan, G. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley-Interscience, New York, 1974.

Lebenslauf

- 1970 geboren in Wien
- 1988 Matura (mit Auszeichnung) am Realgymnasium Glasergasse, Wien IX
- 1988 – 1996 Studium der theoretischen Physik und Mathematik an der Universität Wien
- 1991 Erhalt des Leistungsstipendiums der Universität Wien
- 1990 – 1995 Jährlicher Erhalt des Stipendiums aus dem Sondervermögen der Universität Wien für besonderen Studienerfolg
- 1996 Sponson zum Magister rerum naturalium (mit Auszeichnung) an der Universität Wien;
Diplomarbeit „Nuclear Matter at Finite Temperature in Real Time Formulation“ (Betreuung: A.o. Prof. Dr. Hans Baier)
- 1993 – 2000 Lektor für Mathematik am Institut für Mathematik und Statistik der Universität für Bodenkultur, Wien
- 1997 Zivildienst
- 1997 – 2004 Versicherungsmathematiker in der Wiener Städtischen Versicherungs AG sowie nebenberuflich in:
Arithmetica, Union Versicherungs AG und VBV Pensionskasse AG
- 2003 Karenz zur Betreuung des Sohnes Tizian, geb. 20.9.2001
- 2003 – 2004 Lektor für Mathematik an der Fachhochschule Burgenland
- 2004 – 2008 Universitätsassistent am Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung der Technischen Universität Wien
- 2008 – Universitätsassistent am Institut für Mechanik und Mechatronik sowie Forschungsassistent bei AIC Forschungsprojekte am Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung der Technischen Universität Wien