DIPLOMARBEIT

Untersuchung fraktaler Strukturen mittels Martingalmethoden

Ausgeführt am Institut für
Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie, E107
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von
Univ.-Prof. Dr. Wolfgang Wertz

durch
Daniel Koffler
Costagasse 5/16
1150 Wien

Datum

Unterschrift (Student)

Vorwort

Den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit bildet das 15. Kapitel des Buches „Fractal Geometry“ von Kenneth Falconer [12], in welchem der Autor andeutet wie Martingalmethoden bei der Dimensionsbestimmung zufälliger fraktaler Strukturen eingesetzt werden können. Seine Voraussetzungen können zwar noch abgeschwächt werden, wesentliche Beweisideen sind aber bereits aufgezeigt. Weitere Untersuchungen zum Thema fand ich bei Graf [13], Mauldin und Williams [18], Falconer [11] und Edgar [7].

Von mathematischer Seite ist für das Leser dieser Arbeit kein Vorwissen über Fraktale vorausgesetzt, es werden zwar Resultate aus der Theorie deterministischer Fraktale verallgemeinert, in Beweisen allerdings niemals verwendet. Mit entsprechendem Vorwissen fällt der Zugang zur hier vorgestellten Theorie aber sicher leichter. Die Grundlagen in sehr kompakter Form findet man bei Hutchinson [16] oder ausführlicher z.B. bei Edgar [8].

Vorausgesetzt werden elementare Kenntnisse über Wahrscheinlichkeitstheorie (speziell über Martingale), Maßtheorie, Funktionalanalysis und Topologie.

Im 1. Kapitel der vorliegenden Arbeit werden die Grundideen der Dimensionsuntersuchung unter etwas schwächeren Voraussetzungen als bei Falconer anhand zufälliger Cantormengen vorgestellt. Die dort gezeigten Beispiele werden im Weiteren verwendet um neu eingeführte Begriffe zu motivieren oder Gegenbeispiele zu konstruieren.

Im 2. Kapitel wird zunächst ein sehr allgemeiner Apparat zur Beschreibung zufälliger Fraktale aufgebaut und dann der für die weitere Arbeit interessante Fall der „statistischen Selbstähnlichkeit“ vorgestellt, eine Verallgemeinerung der in Hutchinsons grundlegender Arbeit [16] über deterministische Fraktale verwendeten Selbstähnlichkeit.

Im 3. Kapitel werden Martingalmethoden verwendet um die fast sichere Dimension solcher statistisch selbstähnlicher Mengen zu studieren. Ein wesentliches Resultat ist die Verallgemeinerung der Ähnlichkeitsdimension aus der Theorie der deterministischen Fraktale. Ohne Zufall kann die Hausdorffdimension einer selbstähnlichen Menge als jenes s_0 bestimmt werden, welches die Gleichung

$$\sum_i \mathrm{Lip}(S_i)^{s_0} = 1$$

löst, wobei $\mathrm{Lip}(S_i)$ den hier deterministischen Ähnlichkeitskoeffizienten der Abbildung S_i bezeichnet. Dieses Resultat wird für statistisch selbstähnliche Mengen verallgemeinert, in Satz 3.20 ergibt sich die Hausdorffdimension fast sicher als jenes s_0, welches die Gleichung

$$\mathbb{E} \sum_i \mathrm{Lip}(S_i)^{s_0} = 1$$

löst, wobei die Erwartung den Ähnlichkeitskoeffizenten betrifft, der hier zufällig ist. Dieses Resulat sieht dem deterministischen sehr ähnlich, allerdings tritt in Zufallskonstruktionen ein interessantes Phänomen auf, welches im Satz 3.21 beschrieben wird. Sobald nämlich wirklich Zufall im Spiel ist, verschwindet die Eigenschaft s_0-Menge zu sein, d.h. wird eine statistisch selbstähnliche Menge A mit dem Hausdorffmaß ihrer Dimension s_0 gemessen, so gilt fast sicher

$$\mathscr{H}^{s_0}(A) = 0,$$

während für selbstähnliche Mengen A in der Theorie deterministischer Fraktale immer

$$0 < \mathscr{H}^{s_0}(A) < \infty$$

gilt.

Im 4. Kapitel wird eine Anwendung martingaltheoretischer Methoden bei der Untersuchung deterministischer Fraktale aufgezeigt, genauer wird gezeigt, dass zwei deterministische Cantormengen selber Dimension nicht bi-Lipschitz-Äquivalent sein müssen und einige notwendige Forderungen für bi-Lipschitz-Äquivalenz abgeleitet, wobei der Martingalkonvergenzsatz eine wichtige Rolle spielt.

Eine Auflistung zitierter Sätze mit Verweis auf Beweise, genaue Ausarbeitung topologischer Probleme und einige notationsaufwendige Beweisdetails finden sich um den Textfluss nicht zu stören im Anhang. Außerdem findet der Leser auf den letzten Seiten ein Verzeichnis der wichtigsten verwendeten Notationen.

Herzlicher Dank ergeht an Prof. Wertz für die intensive Betreuung, Bereitstellung von Materialien, Anregungen und konstruktive Kritik.

Daniel Koffler
Wien, April 2009

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Motivation

1.1 Einleitung

Im Kapitel 2 wird eine sehr allgemeine Konstruktionsmethode für zufällige Fraktale untersucht. Diese Untersuchung erweist sich als sehr technisch und intuitiv nicht leicht verständlich. Darum soll in diesem Kapitel zuerst ein Spezialfall untersucht werden, der dann im Weiteren zur Veranschaulichung neuer Begriffe und Konstruktionen diesen soll. Der mit Fraktalen bereits gut vertraute Leser kann, so er möchte, dieses Kapitel überspringen, es wird in den späteren Kapiteln zwar auf das Beispiel, nicht jedoch auf Definitionen oder Sätze aus diesem Kapitel verwiesen.

Definition 1.1
Man beginne die folgende Konstruktion mit der Menge $C_0 = [0, 1]$. Für die Menge C_1 entferne man aus C_0 das mittlere Drittel, also $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Für C_n entferne man aus jedem der 2^{n-1} Intervalle von C_{n-1} wieder das mittlere Drittel, C_2 ist also beispielsweise

$$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Die triadische Cantormenge ist definiert als der Durchschnitt all dieser Mengen C_n, also

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Bemerkung 1.1
Mathematisch „schöner" ist die Konstruktion der Cantormenge als Fixpunkt des iterierten Funktionensystems $F = (f_L, f_R)$ mit $f_L(x) = \frac{x}{3}$ und

$f_R(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$, also

$$C = \lim_{n\to\infty} F^n([0,1]).$$

Vergleiche Hutchinson [16] Beispiel 3.3. (1) für die Existenz des Grenzwertes.

Wie kann man diese Konstuktion nun „verzufälligen“? Die Methode, welche im Folgenden untersucht wird, schneidet in jedem Schritt aus jedem Teilintervall der Vorgängermenge ein Intervall aus. Anders als bei der oben definierten Cantormenge soll aber nicht immer das mittlere Drittel, sondern ein Teilintervall zufälliger Länge und Position entfernt werden, konkret

$$C_1 = C_0 \backslash (X, 1-Y)$$

wobei X und Y Zufallsgrößen sind mit $X+Y < 1$. Im Weiteren soll aus jedem der verbleibenden Teilintervalle wieder ein zufälliges Stück entfernt werden, wobei die Auswahl der „Ähnlichkeitskoeffizienten“, also des Verhältnis der Größe eines neuen Teilstückes zu seinem Vorgänger, in jedem Schritt und für jedes Intervall unabhängig, aber bezüglich der selben Verteilung erfolgen soll.

Dies ist keineswegs die einzige denkbare Vorgehensweise, andere Methoden werden zum Beispiel in der Diplomarbeit von Veronika Dinhobl [6] diskutiert.

1.2 Eine zufällige Cantormenge

Konstruktion $E = \{L, R\}$ sei das Alphabet bestehend aus zwei Buchstaben (links, rechts), W sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem offenen Dreieck

$$T = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 1\}.$$

Für jedes $\alpha \in E^*$ (d.h. für jedes Wort endlicher Länge, vgl. Definition 2.3) sei $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha \in E^*}$ eine Familie unabhängige Zufallsgrößen mit Verteilung W. Daraus sei rekursiv, beginnend mit dem leeren Wort Λ, definiert:

$$a_\Lambda = 0, b_\Lambda = 1, u_\Lambda = 1.$$

Angenommen für $\alpha \in E^*$ seien a_α, b_α und $u_\alpha = b_\alpha - a_\alpha$ bereits definiert, dann setze folgendermaßen fort:

$$u_{\alpha * L} = u_\alpha x_\alpha, a_{\alpha * L} = a_\alpha, b_{\alpha * L} = a_\alpha + u_{\alpha * L},$$
$$u_{\alpha * R} = u_\alpha y_\alpha, a_{\alpha * R} = b_\alpha - u_{\alpha * R}, b_{\alpha * R} = b_\alpha.$$

Jetzt setze für $k \in \mathbb{N}$:

$$C_0 = [a_\Lambda, b_\Lambda] = [0,1]$$
$$C_k = \bigcup_{|\alpha|=k} [a_\alpha, b_\alpha].$$

Es gilt $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$ und die zufällige Cantormenge ergibt sich aus

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

Bemerkung 1.2
$C \in \mathcal{K}([0,1])$, also eine kompakte Teilmenge von $[0,1]$.

Die Selbstähnlichkeit der Cantormenge wird für diese randomisierte Konstruktion zu statistischer Selbstähnlichkeit abgewandelt, d.h. wenn man sich ein iteriertes Funktionensystem aus den zwei zufällige Ähnlichkeitsabbildungen

$$F := (f_L(t) = x_\Lambda t, f_R(t) = 1 - y_\Lambda(1-t))$$

definiert und auf C anwendet, so gilt zwar nicht wie im deterministischen Fall $F(C) = C$, aber immerhin dass die Verteilung von C aufgefasst als Maß auf $\mathcal{K}([0,1])$ gleich derjenigen von $f_L^{-1}[C_L]$ und $f_R^{-1}[C_R]$ wobei $C_L := C \cap [a_L, b_L]$ und analog $C_R := C \cap [a_R, b_R]$.

Beispiele Es sollen einige spezielle Auswahlen von W untersucht werden. Der Wert s_0 wird sich im späteren als die fast sichere Hausdorff-Dimension von C herausstellen.

1. Wählt man für W das Dirac-Maß in (1/3,1/3) wird die Konstuktion deterministisch und man erhält die gewöhnliche Cantormenge aus Definition 1.1.

2. Sei W das Maß mit Masse 1/2 im Punkt (1/4,1/4) und Masse 1/2 in (1/8,1/8), z.B. entscheidet in jedem Schritt eine faire Münze, ob auf 1/4 oder 1/8 der vorigen Länge gekürzt wird. Es gilt unter Ausnützung der Symmetrie ($x_\alpha = y_\alpha$) sowie der unhängigen identischen Verteilung der Zufallsvariablen x_α:

$$\mathbb{E}\lambda(C_k) = \mathbb{E}\left[\sum_{|\alpha|=k} u_\alpha\right] = 2^k \mathbb{E}u_\alpha = 2^k(\mathbb{E}x_L)^k = (\frac{6}{16})^k = (\frac{3}{8})^k.$$

Analog berechnet man:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|\alpha|=k} u_\alpha^s\right] = 2^k \mathbb{E} u_\alpha^s = 2^k \mathbb{E}(x_\Lambda^s x_{\alpha_1}^s x_{\alpha_1\alpha_2}^s \ldots x_{\alpha_1\ldots\alpha_k}^s) =$$

$$\stackrel{u.a.}{=} 2^k \left(\frac{1}{2}[(\frac{1}{4})^s + (\frac{1}{8})^s]\right)^k = \left((\frac{1}{4})^s + (\frac{1}{8})^s\right)^k =: \Phi(s)^k.$$

$\Phi(s)$ ist stetig und monoton fallend in s,$s_0 := \imath(s : \Phi(s) = 1)$. Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \Phi(s)^k = \begin{cases} \infty & : & s < s_0 \\ 1 & : & s = s_0. \\ 0 & : & s > s_0 \end{cases}$$

Bestimmt man s_0 für dieses Beispiel numerisch ergibt sich $\approx 0,4057$.

3. Entspreche W einer Gleichverteilung auf dem offenen Dreieck T ($W = 2\lambda_2$) wobei mit λ_2 das 2-dimensionale Lebesgue-Maß eingeschränkt auf T gemeint ist.

   Sucht man den Exponenten s_0 welcher für s eingesetzt die Gleichung

$$\mathbb{E}_W(x_\Lambda^s + y_\Lambda^s) = \int_T (x^s + y^s) d2\lambda_2(x,y) = 1$$

erfüllt, erhält man

$$\int_T (x^s + y^s) d2\lambda(x,y) = 2 \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1-y} (x^s + y^s) dx dy = \frac{4}{(s+1)(s+2)}$$

Also gilt

$$s_0^2 + 3s_0 - 2 = 0$$

und daher

$$s_0 = (-3 + \sqrt{17})/2 \approx 0,5616.$$

Existenz Allgemein sei $\Phi(s) := \int_T (x^s + y^s) dW(x,y)$, dann gilt

$$\mathbb{E}\left[\sum_{|\alpha|=k} u_\alpha^s\right] = \Phi(s)^k. \tag{1.1}$$

Dies zeigt man durch Induktion nach k unter Ausnützung der Unabhängigkeit wie im 2. Beispiel, wo auch die nun folgende Argumentation bereits angedeutet wurde:
$\Phi(s)$ ist stetig und streng monoton fallend.
$\Phi(0) = 2$ und $\Phi(1) = \int_T (x+y) dW(x,y) < 1$ da $x + y < 1$. Daher gibt es einen eindeutigen Wert $s_0 \in (0,1)$ mit $\Phi(s_0) = 1$.

Martingaleigenschaft

Satz 1.2
Sei $s_0 = \imath_s(\Phi(s) = 1)$ [1],

$$X_k = \sum_{|\alpha|=k} u_\alpha^{s_0}$$

und sei

$$\mathcal{F}_k = \sigma((x_\alpha, y_\alpha) : |\alpha| < k).$$

Dann ist $\mathscr{X} := (X_k, \mathcal{F}_k)$ *ein nichtnegatives Martingal und konvergiert daher fast sicher gegen eine Zufallsvariable* X_∞.
Zusatz: X_k *ist ein* L^2 *beschränktes Martingal, daher gilt* $\mathbb{E}X_\infty = \mathbb{E}X_0$.

Beweis: X_k ist eine endliche Summe $\mathcal{F}_k$ messbarer Funktionen, also auch $\mathcal{F}_k$ messbar. Der Prozess ist damit adaptiert.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{k+1}|\mathcal{F}_k) &= \sum_{|\alpha|=k} \mathbb{E}(u_{\alpha*L}^{s_0} + u_{\alpha*R}^{s_0}|\mathcal{F}_k) \\
&= \sum_{|\alpha|=k} \mathbb{E}(u_\alpha^{s_0}(x_\alpha^{s_0} + y_\alpha^{s_0})|\mathcal{F}_k) \\
&= \sum_{|\alpha|=k} u_\alpha^{s_0} \underbrace{\mathbb{E}(x_\alpha^{s_0} + y_\alpha^{s_0})}_{\Phi(s_0)=1} = X_k.
\end{aligned}$$

Damit ist die Martingaleigenschaft gezeigt.
Die Konvergenz folgt aus dem 1. Doob'schen Konvergenzsatz, siehe Satz A.5.

[1] $\imath_s$ bedeutet in Worten: „Dasjenige s, für das $(\ldots)$ erfüllt ist.

Für den Zusatz soll bewiesen werden, dass

$$\mathbb{E}[X_k^2] = 1 + (\mathbb{E}[(x_\alpha^{s_0} + y_\alpha^{s_0})^2] - 1) \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(2s_0)^j.$$

Dies zeigt man durch Induktion nach k:
Der Anfang für $k = 0$:

$$\mathbb{E}(X_0^2) = u_\Lambda = 1.$$

Für den Induktionsschritt berechnet man:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_k^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{|\alpha|=k} u_\alpha^{s_0}\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{|\alpha|=k-1} u_\alpha^{s_0}(x_\alpha^{s_0} + y_\alpha^{s_0})\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}[(x_\alpha^{s_0} + y_\alpha^{s_0})^2]\mathbb{E}\left[\sum_{|\alpha|=k-1} u_\alpha^{2s_0}\right] + \\
&\quad +\mathbb{E}\left[\sum_{\substack{|\alpha|=|\beta|=k-1 \\ \alpha\neq\beta}} u_\alpha^{s_0} u_\beta^{s_0} \mathbb{E}(x_\alpha^{s_0} + y_\alpha^{s_0})\mathbb{E}(x_\beta^{s_0} + y_\beta^{s_0})\right] \\
&= \mathbb{E}[(x_\alpha^{s_0} + y_\alpha^{s_0})^2]\mathbb{E}\left[\sum_{|\alpha|=k-1} u_\alpha^{2s_0}\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{|\alpha|=k-1} u_\alpha^{2s_0}\right] + \mathbb{E}[X_{k-1}^2] \\
&= 1 + (\mathbb{E}[(x_\alpha^s + y_\alpha^s)^2] - 1) \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(2s_0)^j.
\end{aligned}$$

Die dritte Gleichheit verwendet die Unabhängigkeit von x_α und u_α, bzw. von x_α und x_β für $\alpha \neq \beta$. Die vierte Gleichheit verwendet die Definition von s_0, also $\mathbb{E}(x_\alpha^{s_0} + y_\alpha^{s_0}) = 1$ und ergänzt durch durch Addition von $\mathbb{E}[\sum_{|\alpha|=k-1} u_\alpha^{2s_0}] - \mathbb{E}[\sum_{|\alpha|=k-1} u_\alpha^{2s_0}]$ auf vollständiges Quadrat, die letzte Gleichheit verwendet (1.1) und die Induktionsannahme.

Da $\Phi(2s_0) < 1$ konvergiert die geometrische Reihe und man hat eine feste obere Schranke, also ist X_k ein L^2-beschränktes Martingal und konvergiert wegen dem Zusatz im Satz von Doob auch in L^2 gegen X_∞. Speziell gilt die Konvergenz auch in L_1 und damit $\mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_\infty$.

$\square$

Obere Schrake für Dimension

Satz 1.3
Sei C eine Cantormenge, die von einem Maß W erzeugt wird und $s_0 = \imath_s(\Phi(s) = 1)$. Dann gilt $\dim_H C \leq s_0$ fast sicher.

Beweis: Unter Weiterverwendung der Notation von Satz 1.2 sei

$$X_\infty := \lim_{k\to\infty} X_k,$$

laut ebendiesem Satz existiert X_∞ und ist endlich. Es gilt

$$\mathbb{E} \sum_{|\alpha|=k} u_\alpha = \Phi(1)^k \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Wegen des Satzes von Lebesgue gilt

$$\mathbb{E} \left[\lim_{k\to\infty} \sum_{|\alpha|=k} u_\alpha \right] = 0$$

und daher

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{|\alpha|=k} u_\alpha = 0 \text{ fast sicher.} \tag{1.2}$$

Bezeichne $\varepsilon_k := \max\{u_\alpha : |\alpha| = k\}$, dann folgt $\varepsilon_k \to 0$ fast sicher. Für festes k wird C überdeckt von den Intervallen $[a_\alpha, b_\alpha]$ mit $\alpha = k$ und es gilt:

$$\mathscr{H}^{s_0}_{\varepsilon_k}(C) \leq \sum_{|\alpha|=k} u_\alpha^{s_0} = X_k. \tag{1.3}$$

Für $k \to \infty$ erhält man

$$\mathscr{H}^{s_0}(C) \leq \lim_{k\to\infty} X_k = X_\infty < \infty$$

fast sicher. Daraus folgt $\dim_H(C) \leq s_0$ wiederum fast sicher.

□

Untere Schrake für Dimension Einen direkten Beweis für eine untere Schranke der Hausdorffdimension mittels Potenzialmethoden findet man z.B. bei Edgar [7]. In dieser Arbeit kann die untere Schrake später aus dem allgemeinen Fall deduziert werden.

1.3 Die eindimensionale Cantormenge

Hier soll eine Menge definiert werden, die der Cantormenge auf dem ersten Blick ähnlich sieht. Später wird diese Menge zur Veranschaulichung von Einschränkungen in der Konstruktion dienen.

Definition 1.4 (eindimensionale Cantormenge)
Sei $\alpha \in (0, \frac{1}{3})$ fest gewählt. Man beginne die folgende Konstruktion mit der Menge $\widetilde{C}_0 = [0, 1]$. Für die Menge $\widetilde{C}_1$ entferne man aus $\widetilde{C}_0$ das Mittelstück der Länge α, also $\widetilde{C}_1 = [0, \frac{1-\alpha}{2}] \cup [\frac{1+\alpha}{2}, 1]$. Für $\widetilde{C}_n$ entferne man aus jedem der 2^{n-1} Intervalle ein Mittelstück der Länge α^n.

Die eindimensionale Cantormenge ist definiert als der Durchschnitt all dieser Mengen $\widetilde{C}_n$, also
$$\widetilde{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{C}_n. \tag{1.4}$$

Folgender Satz hilft die Namensgebung zu begründen, es gilt nämliche $\dim_H(\widetilde{C}) = 1$.

Satz 1.5
Es gilt $\lambda(\widetilde{C}) = 1 - \frac{\alpha}{1-2\alpha} > 0$.

Beweis:

$$\lambda(\widetilde{C}) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\alpha^k = 1 - \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (2\alpha)^k = 1 - \frac{\alpha}{1-2\alpha}.$$

□

Kapitel 2

Zufällige Fraktale

2.1 Der Raum $(\mathcal{K}(X), \eta)$

2.1.1 Hausdorffabstand

Im Folgenden sei (X, d) immer ein metrischer Raum.

Definition 2.1
$A, B \subseteq X$. Es bezeichne

$$\delta(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

den Durchmesser der Menge A. Weiters bezeichne

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

$$d(x, B) := d(\{x\}, B)$$

$$d(\emptyset, \emptyset) := 0$$

Dann heißt

$$e(A, B) := \sup\{d(x, B) : x \in A\}$$

der Exzess von A über B.

$$\eta(A, B) := \max(e(A, B), e(B, A))$$

heißt Hausdorffabstand oder -distanz.

Im Anhang B sind einige Eigenschaften des Hausdorffabstandes bewiesen.

2.1.2 Der Raum $\mathcal{K}(X)$

Satz 2.2
(X, d) sei metrischer Raum. $\mathcal{K}(X)$ bezeichne alle nichtleeren kompakten Teilmengen von X. Dann ist $(\mathcal{K}(X), \eta)$ metrischer Raum. Ist (X,d) vollständig, so ist auch $(\mathcal{K}(X), \eta)$ vollständig. Ist (X,d) separabel, so ist auch $(\mathcal{K}(X), \eta)$ separabel.

Beweis: Im Anhang C.

□

2.1.3 Alphabete, Wörter und Ketten

Definition 2.3
Sei $N \in \mathbb{N}$

$$E := E(N) := \{e_0, \dots, e_{N-1}\}$$

heißt endliches Alphabet. O.B.d.A. kann $E = E(N) = \{0, \dots, N-1\}$ angenommen werden. Jedes

$$\alpha := \alpha_0 \dots \alpha_{k-1} \text{ mit } \alpha_j \in E \qquad \forall j \in \{0, \dots, k-1\}$$

heißt Wort,

$$|\alpha| := k$$

heißt Länge des Wortes , Λ bezeichne das leere Wort. ($|\Lambda| = 0$)

$$\begin{aligned}
E^k := E^k(N) &:= \{\alpha : |\alpha| = k \wedge \alpha_i \in E(N) \quad \forall i \leq k-1\} \\
E^* := E^*(N) &:= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E^k(N) \\
E^\infty := E^\infty(N) &:= \{\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots : \alpha_i \in E \ \forall i \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

E soll mit der diskreten Topologie versehen werden, E^k, E^* und E^∞ mit der Produkttopologie. Nach dem Satz von Tychonoff ist E^∞ kompakt (siehe A.1). Jedes $\alpha \in E^\infty$ heißt Kette. Eine Operation $*$ sei wie folgt für $\alpha \in E^*$ und $\beta \in E^* \cup E^\infty$ definiert:

$$\alpha * \beta = \alpha_0 \dots \alpha_{|\alpha|-1}\beta_0\beta_1 \dots$$

$*$ „hängt also β an α an".

Weiters gelten die folgenden Notationen:

$$\alpha|n = \alpha_0 \dots \alpha_{n-1}$$
$$\alpha \prec \beta \Leftrightarrow \beta||\alpha| = \alpha$$

$\prec$ definiert eine Halbordnung auf $E^* \cup E^\infty$. Als Sprechweise wird „α geht β voran“ verwendet.

Motivation 1
Bei der zufälligen Cantormenge wurde das Alphabet $E = \{L, R\}$ verwendet um die Richtung anzudeuten. Genausogut hätte man natürlich $E = \{0, 1\}$ verwenden können.

Bemerkung 2.1
In der Theorie der deterministischen Fraktale versieht man den Raum E^∞ gerne mit einer Ultrametrik (vgl. [7]), die durch die Ähnlichkeitsfaktoren der Funktionen des IFS bestimmt wird. Da diese Ähnlichkeitsfaktoren bei in der hier untersuchten Konstruktion im Allgemeinen zufällig sind, macht dies in diesem Kontex keinen Sinn.

Bemerkung 2.2
$\#E^k = N^k \Rightarrow \#E^* =$ abzählbar ∞
$\#E^\infty = \#\mathbb{R} = \aleph_1$, wobei $\#A$ die Mächtigkeit der Menge A bezeichnet.

Definition 2.4
Eine Teilmenge $\Gamma \subseteq E^*$ heißt Überdeckung (von E^∞), falls für jedes $\alpha \in E^\infty$ ein $\beta \in \Gamma$ existiert, welches α vorangeht ($\beta \prec \alpha$). Wenn dieses β eindeutig bestimmt ist, heißt Γ minimal. Bezeichne Min die Menge aller minimalen Überdeckungen von E^∞. Als Sprechweise gelte „$\Gamma \in$ Min ist eine Verfeinerung von $H \in$ Min“, geschrieben $H \prec \Gamma$ wenn es für jedes $\gamma \in \Gamma$ ein (eindeutiges) $\eta \in H$ gibt mit $\eta \prec \gamma$, also ein η, welches γ vorangeht.

Bemerkung 2.3
Der Begriff Überdeckung lässt sich leicht rechtfertigen: Bezeichne für $\alpha \in E^*$

$$[\alpha] := \{\beta \in E^\infty : \alpha \prec \beta\}. \tag{2.1}$$

Aufgrund einer elementarer Eigenschaft der Produkttopologie, nämlich dass die

$$\prod_{j \in I} O_j$$

wobei $O_j \in \mathcal{T}_j$ und für alle bis auf endlich viele $O_j = X_j$ gilt, eine Basis für $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$ bilden, gilt $[\alpha] \in \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$ und daher ist $[\alpha]$ offen.

Sei nun $\Gamma \in$ Min. Dann gilt

$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} [\alpha] \supseteq E^\infty$$

d.h. die $[\alpha]$ bilden eine offene Überdeckung von E^∞.

2.1.4 Con(X) als topologischer Raum

Definition 2.5
Für eine Funktion $S : X \to X$ sei

$$\mathrm{Lip}(S) = \sup\left\{ \frac{d(Sx, Sy)}{d(x,y)} \,\middle|\, x, y \in X, x \neq y \right\}$$

die kleinste, nichtnotwendigerweise endliche Lipschitzkonstante. S heißt Kontraktion, falls $\mathrm{Lip}(S) < 1$. Con(X) bezeichne die Menge aller Kontraktionen auf X.

Definition 2.6
(X, d) sei ein vollständiger metrischer Raum. Dann heißt $(S_0, \ldots, S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(X)^N$ ein iteriertes Funktionensystem (IFS).

Motivation 2
Zur Konstruktion der triadischen Cantormenge kann man das iterierte Funktionensystem $(\frac{x}{3}, \frac{x}{3} + \frac{2}{3}) \in \mathrm{Con}([0,1])^2$ *verwenden.*

Definition 2.7
Sei X eine Menge, (Y, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{T}$ die von d induzierte Topologie. Bezeichne $\mathcal{F}(X, Y)$ die Menge aller Abbildungen $f : X \to Y$ und

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{F}(X,Y) & \to & \prod_{x\in X} Y \\ f & \mapsto & (f(x))_{x\in X} \end{cases}.$$

Definiere eine Topologie $\mathcal{V}$ auf $\mathcal{F}(X, Y)$ wie folgt: $O \subseteq \mathcal{F}(X, Y)$ gehört zu $\mathcal{V}$ genau dann wenn $\phi(O) \in \prod_{x\in X} \mathcal{T}$. Dann heißt $\mathcal{V}$ Topologie der punktweisen Konvergenz.

Bemerkung 2.4
ϕ ist ein Homöomorphismus von $(\mathcal{F}(X, Y), \mathcal{V})$ auf $(\prod_{x\in X} Y, \prod_{x\in X} \mathcal{T})$.
Der Name ergibt sich, da $f_n \to f$ bezüglich $\mathcal{V}$ genau dann, wenn $\forall x \in X : f_n(x) \to f(x)$ in der Metrik d.

Satz 2.8
Sei (X,d) ein vollständiger, separabler, metrischer Raum mit endlichem Durchmesser. Dann ist Con(X) *versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ein separabler, metrisierbarer Raum, der die abzählbare Vereinigung von vollständigen, metrisierbaren Teilmengen und daher ein Suslin-Raum ist.*

Beweis: Im Anhang D.

□

Im Weiteren wird folgender Raum eine wichtige Rolle spielen:

Definition 2.9
Sei (X,d) ein vollständiger, separabler, metrischer Raum mit endlichem Durchmesser und $\Omega = \Omega(X,N) = (\mathrm{Con}(X)^N)^{E^*(N)}$. Die Elemente von Ω werden wie folgt notiert:

$$\mathscr{S} = (\mathscr{S}_\alpha)_{\alpha \in E^*}$$

wobei

$$\mathscr{S}_\alpha = (S_{\alpha*0}, \dots, S_{\alpha*N-1}) \in \mathrm{Con}(X)^N$$

und

$$\mathscr{S}_\Lambda = (S_0, \dots, S_{N-1}).$$

$\Omega_0 = \Omega_0(X,N)$ bezeichne alle $\mathscr{S}$ aus Ω für welche für alle $\alpha \in E^\infty$ gilt:

$$\lim_{q\to\infty} \prod_{n=1}^{q} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n}) = 0.$$

Bemerkung 2.5
Ein Element von Ω ist also derart beschaffen, dass jedem Wort ein iteriertes Funktionensystem zugeordnet ist.

Motivation 3
Für die zufällige Cantormenge ist $\Omega = (\mathrm{Con}([0,1])^2)^{E^*}$, $E = \{L,R\}$. Ein Element $\mathscr{S} \in \Omega$ besteht aus abzählbar vielen iterierten Funktionensystemen, einem für jedes Wort.
Später wird der triadischen Cantormenge das Element $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_\alpha)_{\alpha\in E^*}$ mit

$$\mathscr{S}_\alpha = (S_{\alpha*L}, S_{\alpha*R}) = \left(\frac{x}{3}, \frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right) \quad \forall \alpha \in E^* \tag{2.2}$$

„zugeordnet“ sein. $\mathrm{Lip}(S_\alpha) = \frac{1}{3}$ $\forall \alpha \in E^*$ *und damit gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n}) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 0 \qquad \forall \alpha \in E^\infty$$

Es gilt also $\mathscr{S} \in \Omega_0$.
Für das 2. Beispiel auf Seite 8 werden diejenigen $\mathscr{S}$ für die gilt:

$$\mathscr{S}_\alpha = (S_{\alpha*L}, S_{\alpha*R}) \in \left\{ \left(\frac{x}{4}, \frac{3+x}{4} \right), \left(\frac{x}{8}, \frac{7+x}{8} \right) \right\} \forall \alpha \in E^* \tag{2.3}$$

interessant sein. Es gilt also je nach Wahl $\mathrm{Lip}(S_\alpha) = \frac{1}{4}$ *oder* $\mathrm{Lip}(S_\alpha) = \frac{1}{8}$, *jedenfalls aber* $\mathrm{Lip}(S_\alpha) \leq \frac{1}{4}$ $\forall \alpha \in E^* \backslash \{\Lambda\}$. *Für jedes solches* $\mathscr{S}$ *gilt*

$$\lim_{k \to \infty} \prod_{n=1}^{k} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n}) \leq \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{4} \right)^k = 0 \qquad \forall \alpha \in E^\infty$$

und damit $\mathscr{S} \in \Omega_0$.
Für die eindimensionale Cantormenge sehen die iterierten Funktionensysteme folgendermaßen aus:

$$\mathscr{S}_\alpha = \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^{|\alpha|+1}} \right) x, 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^{|\alpha|+1}} \right) (1-x) \right] \tag{2.4}$$

Auch dieses $\mathscr{S}$ *liegt in* Ω_0.
Sei $0 < C < 1$ *fest. Definiere* $\mathscr{S}$ *wie folgt:* $\mathscr{S}_\alpha = (S_{\alpha_L}, S_{\alpha_R}) = (C^{\frac{1}{|\alpha|^2}} x, 1)$
Offensichtlich gilt $\mathscr{S} \in \Omega$. *Für* $\alpha = LLL\ldots$, *also die Kette die nur aus dem Buchstaben L besteht, gilt:*

$$\lim_{k \to \infty} \prod_{n=1}^{k} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n}) = \lim_{k \to \infty} \prod_{n=1}^{k} C^{\frac{1}{n^2}} = \lim_{k \to \infty} e^{\left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} \log(C) \right)} > 0$$

Damit ist $\mathscr{S} \notin \Omega_0$.

Lemma 2.10
Sei $\mathscr{S} \in \Omega_0$ *beliebig gewählt. Dann gibt es für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $q_0 \in \mathbb{N}$, *derart, dass für alle* $q \geq q_0$ *und alle* $\alpha \in E^{q+1}$ *gilt:*

$$\prod_{n=1}^{q} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n}) < \varepsilon.$$

Beweis: Für den Beweis nützt man die Kompaktheit von E^∞. Für $q \in \mathbb{N}$ definiere

$$U_q := \left\{ \alpha \in E^\infty \,\middle|\, \prod_{n=1}^{q} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n}) < \varepsilon \right\}$$

und

$$U'_q = \bigcup_{\alpha \in U_q} [\alpha|q] \tag{2.5}$$

(für Notation vgl. Bemerkung 2.3 auf Seite 16). Dann gilt $U_q = U'_q$: $\subseteq$ ist trivial, für $\supseteq$ beachte man, dass die Eigenschaft in U_q enthalten zu sein nur von den ersten q Zeichen der Kette abhängt. Somit lässt sich U_q als Vereinigung offener Mengen schreiben und ist somit offen in E^∞.

Da $\mathscr{S} \in \Omega_0$, bilden die Mengen $(U_q)_{q\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von E^∞. Aus der Definition ist klar, dass $U_q \subseteq U_{q+1}$. Aus der Kompaktheit von E^∞ folgt die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung und damit $E^\infty = U_q$ für hinreichend großes q.

$\square$

Hilfssatz 2.11
Für alle $\mathscr{S} \in \Omega$ gilt

$$\bigcap_{q\in\mathbb{N}} \bigcup_{\alpha\in E^{q+1}} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)} = \bigcup_{\alpha\in E^\infty} \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)}. \quad (2.6)$$

Beweis: Zuerst die Richtung $\supseteq$
Sei $x \in \bigcup_{\alpha\in E^\infty} \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)}$
dann existiert ein $\alpha \in E^\infty$:

$$x \in \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)} \subseteq \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \bigcup_{\alpha\in E^{q+1}} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)}$$

da $\alpha|q+1 \in E^{q+1}$ für alle $q \in \mathbb{N}$.

Um $\subseteq$ zu zeigen, sei $x \in \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \bigcup_{\alpha\in E^{q+1}} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)}$, dann folgt:

$\forall q \quad \exists \alpha_q : x \in \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)}$ und damit sind die Mengen

$$B_q := \bigcup_{\alpha\in E^{q+1}: x\in\overline{S_{\alpha|1}\circ\ldots\circ S_{\alpha|q+1}(X)}} [\alpha]$$

nichtleer. B_q ist als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen (sogar kompakt) in E^∞ (Topologie wie in 2.3). Da $S_\alpha(X) \subseteq X$ gilt

$$x \in \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1} \circ S_{\alpha|q+2}(X)} \subseteq \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)}$$

und damit $B_q \supseteq B_{q+1}$. Dies impliziert die endliche Durchschnittseigenschaft der Familie $(B_q)_{q\in\mathbb{N}}$ (vgl. A.3) und damit

$$\bigcap_{q\in\mathbb{N}} B_q \neq \emptyset.$$

Wähle $\alpha \in \bigcap_{q\in\mathbb{N}} B_q$ beliebig, dann gilt $x \in \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)}$ und damit

$$x \in \bigcup_{\alpha\in E^\infty} \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)}.$$

□

Satz 2.12
Für alle $\mathscr{S} \in \Omega_0$ *ist die Menge*

$$K = K(\mathscr{S}) := \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \bigcup_{\alpha\in E^{q+1}} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)} \tag{2.7}$$

kompakt. Für jede Familie $(K_\alpha)_{\alpha\in E^*}$ *in* $\mathcal{K}(X)$ *gilt*

$$K(\mathscr{S}) = \lim_{q\to\infty} \bigcup_{\alpha\in E^{q+1}} S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(K_\alpha) \tag{2.8}$$

wobei der Limes bezüglich des Hausdorffabstandes η *zu verstehen ist.*

Beweis: Wegen der Vollständigkeit von $(\mathcal{K}(X), \eta)$ braucht nur die Cauchyeigenschaft von

$$\left(\bigcup_{\alpha\in E^{q+1}} S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(K_\alpha) \right)_{q\in\mathbb{N}}$$

gezeigt werden, um die Existenz eines Grenzwertes in $\mathcal{K}(X)$ sicherzustellen. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Aufgrund der Definition von Lip (in Definiton 2.5) gilt offensichtlich: (δ wie in Definition 2.1 eingeführt bezeichne den Durchmesser)

$$\delta(S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)) \leq \left(\prod_{n=1}^{q+1} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n}) \right) \delta(X).$$

Wegen Lemma 2.10 und $\delta(X) < \infty$ gibt es ein $q_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass die rechte Seite für alle $q \geq q_0$ und alle $\alpha \in E^{q+1}$ kleiner als ε wird. Sei nun $r > q \geq q_0$ beliebig. Es ist zu zeigen, dass

$$\eta\left(\underbrace{\bigcup_{\alpha\in E^{q+1}} S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(K_\alpha)}_{=:A}, \underbrace{\bigcup_{\beta\in E^{r+1}} S_{\beta|1} \circ \ldots \circ S_{\beta|r+1}(K_\beta)}_{=:B} \right) < \varepsilon \tag{2.9}$$

Hierzu schätzt man jeweils den Exzess ab.
Für beliebiges Ω und $x \in \Omega$ bzw. $A_i \subseteq \Omega$ gilt folgende (triviale) Ungleichung:

$$d(x, \bigcup_{i\in I} A_i) \leq d(x, A_i). \quad \forall i \in I \tag{2.10}$$

Man wähle nun ein beliebiges $\tau \in E^{r+1}$ mit $\alpha \prec \tau$, dann gilt wegen (2.10) für alle $\alpha \in E^{q+1}$ und alle $x \in S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(K_\alpha)$

$$d(x, B) \leq d(x, S_{\tau|1} \circ \ldots \circ S_{\tau|r+1}(K_\tau)) = d(x, S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(L)),$$

wobei $L = S_{\tau|q+1} \circ \ldots \circ S_{\tau|r+1}(K_\tau)$.
Da $x \in S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)$ gilt

$$d(x, S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(L)) \leq \delta(S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)) < \varepsilon$$

und damit $e(A, B) < \varepsilon$. Die Abschätzung für $e(B, A) < \varepsilon$ funktioniert ganz analog.

Da $\eta(A, B) = \max(e(A, B), e(B, A))$ ist (2.9) gezeigt und es existiert

$$K' = \lim_{q \to \infty} \bigcup_{\alpha \in E^{q+1}} S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(K_\alpha)$$

in $\mathcal{K}(X)$.
Weiters ist

$$K = K' \tag{2.11}$$

zu zeigen, zuerst $\supseteq$:
Für alle $q \in \mathbb{N}$ und alle $r \geq q$ gilt trivialerweise

$$\bigcup_{\alpha \in E^{r+1}} S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(K_\alpha) \subseteq \bigcup_{\beta \in E^{q+1}} \overline{S_{\beta|1} \circ \ldots \circ S_{\beta|q+1}(X)}. \tag{2.12}$$

Da die rechte Seite als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist, gilt (2.12) auch für den Grenzwert und da die Gleichung für alle q gilt, folgt:

$$K' \subseteq K = \bigcap_{q \in \mathbb{N}} \bigcup_{\beta \in E^{q+1}} \overline{S_{\beta|1} \circ \ldots \circ S_{\beta|q+1}(X)}.$$

Um die Inklusion $\subseteq$ in (2.11) zu zeigen, sei angenommen, dass $K' \subsetneq K$. Dann gibt es ein $x \in K \backslash K'$ und wegen der Definition von K und Hilfssatz 2.11 ein $\alpha \in E^\infty$ derart, dass für alle $q \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x \in \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)}.$$

Für hinreichend großes q gilt:

$$\frac{1}{2} d(x, K') > \delta(S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)).$$

Daher ist $S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(K_\alpha) \subseteq B_{\frac{1}{2}d(x,K')}(x)$, der Kugel mit Mittelpunkt x und Radius $\frac{1}{2}d(x, K')$. Daraus folgt aber

$$\eta\left(K', \bigcup_{\beta \in E^{q+1}} S_{\beta|1} \circ \ldots \circ S_{\beta|q+1}(K_\beta)\right) \geq \frac{1}{2}d(x, K') > 0$$

und damit für hinreichend große q ein Widerspruch. (2.11) ist also gezeigt und der Beweis erbracht.

□

Bemerkung 2.6
In Hilfssatz 2.11 wurde gezeigt, dass für alle $\mathscr{S} \in \Omega$ gilt:

$$\bigcap_{q \in \mathbb{N}} \bigcup_{\alpha \in E^{q+1}} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)} = \bigcup_{\alpha \in E^\infty} \bigcap_{q \in \mathbb{N}} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)}.$$

Ist $\mathscr{S} \in \Omega_0$ ist die Menge

$$\bigcap_{q \in \mathbb{N}} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)}$$

für jedes $\alpha \in E^\infty$ einelementig, da wegen der Definition von Ω_0 der Durchmesser der Menge 0 ist. Das heißt in Worten, dass für festes $\mathscr{S} \in \Omega_0$ jeder Kette $\alpha \in E^\infty$ ein eindeutiger Punkt x zugeordnet ist. Man sagt auch α addressiert x. Umgekehrt hat jedes $x \in K(\mathscr{S})$ mindestens eine solche Adresse α (siehe Hilfssatz 2.11). Die Abbildung, die jedem $\alpha \in E^\infty$ diesen Punkt zuweist, ist eine stetige Abbildung von E^∞ nach $K(\mathscr{S})$

Motivation 4
Hier lässt sich die bereits in Motivation 3 angedeutete Zuordnung eines Elements aus Ω zu einer kompakten Menge interpretieren. Die Abbildung $\Omega_0 \to \mathcal{K}(X)$ mit $\mathscr{S} \mapsto K(\mathscr{S})$ ist wohldefiniert (ab Satz 2.30 wird die Abbildung Ψ heißen). Nimmt man das $\mathscr{S}$ aus (2.2) so ist $K(\mathscr{S})$ die triadische Cantormenge. Für jede Wahl von $\mathscr{S}$ wie in (2.3) erhält man eine Realisierung der zufälligen Cantormenge aus dem 2. Beispiel auf Seite 8.

Man beachte speziell noch die Reihenfolge, in der die Abbildungen angewandt werden! Es soll ja in jedem Schritt aus jedem Teilstück des vorigen Schrittes ein Mittelstück entfernt werden, also im ersten Schritt das Intervall $[0, 1]$ in zwei Intervalle $[0, x]$ und $[y, 1]$ zerteilt werden. Das macht man indem man zwei Abbildungen S_L und S_R anwendet. Im nächsten Schritt soll jedes der beiden Intervalle weiter zerlegt werden. Also das Intervall $[0, x]$ in *zwei Intervalle $[0,k]$ und $[l,x]$. Dies würde NICHT gelingen, wenn man die Abbildungen S_{LL} und S_{LR} auf das Intervall $[0,x]$ anwendet, dann erhielte man zwar ein Intervall $[0,k]$, das zweite Intervall würde aber zu weit nach rechts rutschen. Dieses Problem behebt man, indem man S_{LL} und S_{LR} zuerst anwendet. Der zweite Iterationsschritt kann also als*

$$S_L(S_{LL}(X) \cup S_{LR}(X)) \cup S_R(S_{RL}(X) \cup S_{RR}(X))$$

geschrieben werden. So erhält man tatsächlich das gewünschte Resultat.

2.1.5 Hausdorffmaß und Hausdorffdimension

Definition 2.13
Sei $\mathscr{C}_\varepsilon = \{A \subseteq X : \delta(A) \leq \varepsilon\}$ und $\mathscr{U}_\varepsilon(A) = \{(C_i)_{i\geq 1} : C_i \in \mathscr{C}_\varepsilon \wedge \bigcup_{i\geq 1} C_i \supseteq A\}$

Weiters sei $h : [0,\infty] \to (0,\infty]$ monoton wachsend und rechtsstetig. Es bezeichne

$$\mathscr{H}_\varepsilon^h(A) = \inf\{\sum_i h(\delta(C_i)) : (C_i)_{i\geq 1} \in \mathscr{U}_\varepsilon(A)\}.$$

Dann heißt

$$\mathscr{H}^h(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{H}_\varepsilon^h(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \inf\{\sum_i h(\delta(C_i)) : (C_i)_{i\geq 1} \in \mathscr{U}_\varepsilon(A)\}$$

das h-dimensionale Hausdorffmaß. Wählt man $h(t) = t^s \quad (0 \leq s < \infty)$ so schreibt man kurz $\mathscr{H}^s$ für $\mathscr{H}^{t\mapsto t^s}$ und spricht vom s-dimensionalen Hausdorffmaß.

Definition 2.14
Für $A \subseteq X$ heißt

$$\dim_H(A) = \imath_t(\mathscr{H}^s(A) = \infty \ \ \forall s < t \wedge \mathscr{H}^s(A) = 0 \ \ \forall s > t)^1$$

die Hausdorffdimension von A.

Bemerkung 2.7
$\mathscr{H}^h(A)$ ist äußeres Maß, genauer: Das nach Methode II erzeugte äußere Maß zur Belegungsfunktion $\varphi = h(\delta(C))$ mit $\delta(\emptyset) = 0$. Für Details und ausführlichere Motivation siehe Rodgers[19] oder Wieger[21].

[1] $\imath_s$ bedeutet in Worten: „Dasjenige s, für das (...) erfüllt ist.

2.1.6 Abschätzungen für $\mathscr{H}^s(K(\mathscr{S}))$

Satz 2.15
Sei $\mathscr{S} \in \Omega_0$ gegeben. Dann gilt für alle $s > 0$:

$$\mathscr{H}^s(K(\mathscr{S})) \leq \delta(X)^s \sup_{\Gamma_0 \in \mathrm{Min}} \inf \left\{ \sum_{\alpha\in\Gamma} \prod_{\rho=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|\rho})^s | \Gamma \in \mathrm{Min}, \Gamma \succ \Gamma_0 \right\}.$$

Beweis: Es gilt $K = K(\mathscr{S}) := \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \bigcup_{\alpha\in E^{q+1}} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)}$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Lemma 2.10 gibt es ein $q \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $\alpha \in E^*$ mit $|\alpha| \geq q$ gilt

$$\delta(X) \prod_{\rho=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|\rho}) \leq \varepsilon. \tag{2.13}$$

Sei $\Gamma \in \mathrm{Min}, \Gamma \succ E^q$ beliebig. Dann gilt

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Gamma} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha||\alpha|}(X)}$$

und

$$\delta(\overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha||\alpha|}(X)}) \leq \delta(X) \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n}) \leq \varepsilon.$$

Daher gilt

$$\mathscr{H}^s_\varepsilon(K) \leq \sum_{\alpha\in\Gamma} \delta(\overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha||\alpha|}(X)})^s \leq \delta(X)^s \sum_{\alpha\in\Gamma} \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n})^s. \tag{2.14}$$

Da $\Gamma \succ E^q$ beliebig war folgt:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}^s_\varepsilon(K) &\leq \inf \left\{ \delta(X)^s \sum_{\alpha\in\Gamma} \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n})^s \,|\Gamma \in \mathrm{Min}, \Gamma \succ E^q \right\} \\
&\leq \delta(X)^s \sup_{\Gamma_0 \in \mathrm{Min}} \inf \left\{ \sum_{\alpha\in\Gamma} \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n})^s \,|\Gamma \in \mathrm{Min}, \Gamma \succ \Gamma_0 \right\}.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt für alle $\varepsilon > 0$.

□

Motivation 5

In Satz 1.3 wurde die hier verwendete Argumentation bereits angedeutet, man vergleiche speziell (2.13) mit (1.2) und (2.14) mit (1.3).

Definition 2.16

Sei (X, d) metrischer Raum, eine Abbildung $f : X \to X$ heißt Ähnlichkeitsabbildung wenn eine Konstante C gibt, die $d(Sx, Sy) = C\, d(x, y) \;\; \forall x, y \in X$ erfüllt.

Bemerkung 2.8

Offensichtlich gilt für jede Ähnlichkeitsabbildung $S \in \mathrm{Con}(X)$: $\mathrm{Lip}(S) = C$.

Für die Abschätzung nach unten werden die Voraussetzungen verschärft.

Satz 2.17

Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ eine kompakte Menge mit nichtleerem Inneren $\overset{\circ}{X}$. Sei $\mathscr{S} \in \Omega_0$ so, dass für alle $\alpha \in E^*$ und alle $\rho, \rho' \in \{0, \ldots, N-1\}$ die Abbildung $S_{\alpha*\rho}$ eine Ähnlichkeitsabbildung ist und für $\rho \neq \rho'$ gilt:

$$S_{\alpha*\rho}(\overset{\circ}{X}) \cap S_{\alpha*\rho'}(\overset{\circ}{X}) = \emptyset. \tag{2.15}$$

Dann gibt es eine Konstante $c > 0$, die nur von X und der Dimension d abhängt und für alle $s \geq 0$ gilt:

$$c\,\delta(X)^s \sup_{\Gamma_0 \in \mathrm{Min}} \inf \left\{ \sum_{\alpha \in \Gamma} \mathrm{Lip}(S_\alpha)^d \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n})^s \,\middle|\, \Gamma \in \mathrm{Min}, \Gamma \succ \Gamma_0 \right\} \leq \mathscr{H}^s(K(\mathscr{S})).$$

Beweis: Da X als kompakt vorausgesetzt und das stetige Bild kompakter Mengen kompakt ist gilt (die rechte Seite benötigt keinen Abschluss):

$$K = K(\mathscr{S}) = \bigcap_{q \in \mathbb{N}} \bigcup_{\alpha \in E^{q+1}} S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X).$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und sei $(U_i)_{1 \leq i \leq m}$ eine offene Überdeckung von K mit $\delta(U_i) \leq \varepsilon\delta(X)$ und $U_i \cap K \neq \emptyset$ für $i = 1, \ldots, m$. Definiere

$$\begin{aligned} \Gamma_i \;\;=\;\; & \Big\{ \alpha \in E^* \,\Big|\, S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha||\alpha|}(X) \cap K \cap U_i \neq \emptyset, \\ & \quad \delta(X) \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n}) < \delta(U_i) \leq \delta(X) \prod_{n=1}^{|\alpha|-1} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n}) \Big\}. \end{aligned}$$

Die letzte Bedingung stellt sicher, dass $\alpha, \beta \in \Gamma_i$ ($\alpha \neq \beta$) unvergleichbar sind, d.h. es gilt weder $\alpha \prec \beta$ noch $\beta \prec \alpha$. Wegen Voraussetzung (2.15) dieses Satzes impliziert dies für $\alpha, \beta \in \Gamma_i$ ($\alpha \neq \beta$):

$$S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha||\alpha|}(\mathring{X}) \cap S_{\beta|1} \circ \ldots \circ S_{\beta||\beta|}(\mathring{X}) = \emptyset. \tag{2.16}$$

Wegen Bemerkung 2.8 auf Seite 26 gilt für alle $\alpha \in \Gamma_i$,

$$\delta(S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha||\alpha|}(X)) = \delta(X) \prod_{n=1}^{|\alpha|} \operatorname{Lip}(S_{\alpha|n}) < \delta(U_i)$$

und daher

$$\begin{aligned} S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha||\alpha|}(X) &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^d | d(x, U_i \cap K) < \delta(U_i)\} \\ &\subseteq B_{2\delta(U_i)}(x_i) \;\; \forall x_i \in U_i \cap K, \end{aligned} \tag{2.17}$$

wobei $B_r(x)$ die offene Kugel mit Radius r um x bezeichnet. λ^d bezeichne das d-dimensionale Lebesguemaß. Da alle Abbildungen in $\mathscr{S}$ Ähnlichkeitsabbildungen sind, gilt

$$\lambda^d\left(S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha||\alpha|}(\mathring{X})\right) = \lambda^d(\mathring{X}) \prod_{n=1}^{|\alpha|} \operatorname{Lip}(S_{\alpha|n})^d. \tag{2.18}$$

Setzt man die Formeln (2.16),(2.17) und (2.18) und die Definion von Γ_i zusammen erhält man

$$\begin{aligned} (2\delta(U_i))^d \lambda^d(B_1(0)) &= \lambda^d(B_{2\delta(U_i)}(x_i)) \\ &\underset{(2.16),(2.17)}{\geq} \sum_{\alpha \in \Gamma_i} \lambda^d(S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha||\alpha|}(\mathring{X})) \\ &\underset{(2.18)}{=} \sum_{\alpha \in \Gamma_i} \lambda^d(\mathring{X}) \prod_{n=1}^{|\alpha|} \operatorname{Lip}(S_{\alpha|n})^d \\ &\underset{(2.16)}{\geq} \frac{1}{\delta(X)^d} \sum_{\alpha \in \Gamma_i} \lambda^d(\mathring{X}) \delta(U_i)^d \operatorname{Lip}(S_\alpha)^d \end{aligned}$$

und daher

$$\sum_{\alpha \in \Gamma_i} \operatorname{Lip}(S_\alpha)^d \leq \frac{\delta(X)^d 2^d \lambda^d(B_1(0))}{\lambda^d(\mathring{X})} =: \frac{1}{c}.$$

Weiters schätzt man ab:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \delta(U_i)^s &\geq \sum_{i=1}^{m} \max_{\alpha\in\Gamma_i} \delta(X)^s \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n})^s \\
&\geq \sum_{i=1}^{m} \frac{\sum_{\alpha\in\Gamma_i} \mathrm{Lip}(S_\alpha)^d}{\sum_{\alpha\in\Gamma_i} \mathrm{Lip}(S_\alpha)^d} \delta(X)^s \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n})^s \\
&\geq c\delta(X)^s \sum_{i=1}^{m} \sum_{\alpha\in\Gamma_i} \mathrm{Lip}(S_\alpha)^d \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n})^s. \\
&\geq c\delta(X)^s \sum_{\alpha\in\cup\Gamma_i} \mathrm{Lip}(S_\alpha)^d \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n})^s \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Direkt oder mittels (2.6) erkennt man, dass $\bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$ eine Überdeckung (von E^∞) ist. Diese wird nun wie folgt zu einer Minimalüberdeckung reduziert:

$$\Gamma = \left\{\alpha \in \bigcup \Gamma_i | \forall \beta \in \bigcup \Gamma_i : \beta \prec \alpha \Rightarrow \beta = \alpha\right\}.$$

Weiters definiere

$$\Gamma_\varepsilon = \left\{ \alpha \in E^* \left| \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n}) < \varepsilon \leq \prod_{n=1}^{|\alpha|-1} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n}) \right. \right\}.$$

Auch Γ_ε ist eine Minimalüberdeckung und es gilt $\Gamma_\varepsilon \prec \Gamma$, da $\delta(U_i) \leq \varepsilon\delta(X)$ gewählt war.
Aus (2.19) erhält man:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \delta(U_i)^s &\geq c\delta(X)^s \sum_{\alpha\in\Gamma} \mathrm{Lip}(S_\alpha)^d \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n})^s \\
&\geq c\delta(X)^s \inf \left\{ \sum_{\alpha\in\Gamma'} \mathrm{Lip}(S_\alpha)^d \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n})^s \,\middle|\, \Gamma' \in \mathrm{Min}, \Gamma' \succ \Gamma_\varepsilon \right\}.
\end{aligned}$$

Da K kompakt ist und (U_i) eine beliebige offene Überdeckung von K mit $\delta(U_i) \leq \varepsilon$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}^s(K) &\geq \mathscr{H}^s_\varepsilon(K) \qquad (2.20) \\
&\geq c\delta(X)^s \inf \left\{ \sum_{\alpha\in\Gamma'} \mathrm{Lip}(S_\alpha)^d \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n})^s \,\middle|\, \Gamma' \in \mathrm{Min}, \Gamma' \succ \Gamma_\varepsilon \right\}.
\end{aligned}$$

Sei $\Gamma_0 \in \text{Min}$ beliebig. Da $\text{Lip}(S_\beta) > 0$ für alle $\beta \in E^*$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\varepsilon < \min \left\{ \prod_{n=1}^{|\alpha|} \text{Lip}(S_{\alpha|n}) | \alpha \in \Gamma_0 \right\}.$$

Daraus folgt $\Gamma_0 \prec \Gamma_\varepsilon$. Daher folgt aus (2.20) die Behauptung.

□

Bemerkung 2.9
Eigentlich würde in Satz 2.17 die folgende schwächere Forderung genügen: $X \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $\mathscr{S} \in \Omega_0$ und es existiere eine Borelmenge $W \subseteq X$ mit positivem Lebesguemaß die $S_{\alpha*\rho}(W) \subset W$ und $S_{\alpha*\rho}(W) \cap S_{\alpha*\rho'}(W) = \emptyset$ wenn $\rho \neq \rho'$ für alle $\alpha \in E^*$ und $\rho, \rho' \in \{0, \ldots, N-1\}$ erfüllt.

Definition 2.18
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt halbstetig von unten (oben) im Punkt $a \in X$, wenn für alle $k < f(a)$ $(h > f(a))$ eine Umgebung $V \in \mathcal{T}$ existiert mit $k < f(x)$ $(h > f(x))$ für alle $x \in V$. f heißt halbstetig von unten (oben) wenn sie in jedem Punkt von X halbstetig von unten (oben) ist.

Bemerkung 2.10
Eine reellwertige Funktion ist stetig dann und nur dann wenn sie halbstetig von oben und halbstetig von unten ist.

Beispiel 2.1
In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist eine Indikatorfunktion $\mathbb{I}_A$ genau dann halbstetig von unten, wenn $A \in \mathcal{T}$, also A offen ist.

Hilfssatz 2.19
Sei $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von Funktionen, die alle in $a \in X$ halbstetig von unten sind. Dann ist

$$g := \sup_{i \in I} f_i(a) \tag{2.21}$$

halbstetig von unten in a.

Beweis: Sei $k < g(a)$ dann gibt es einen Index $i \in I$ mit $h < f_i(a) \leq g(a)$. Wegen der Halbstetigkeit von unten von f_i gibt es eine Umgebung $V \in \mathcal{T}$ derart, dass $k < f_i(x)$ für alle $x \in V$ und daher $k < g(x)$ für alle $x \in V$.

□

Bemerkung 2.11
g heißt die obere Einhüllende von $(f_i)_{i\in I}$

Folgerung 2.20
Die obere Einhüllende einer Familie von stetigen reellwertigen Funktionen auf einem Raum X ist halbstetig von unten.

Lemma 2.21
Die Funktion $\mathrm{Lip} : \mathrm{Con}(X) \to [0,1]$ *ist halbstetig von unten.*

Beweis: Zur Erinnerung: $\mathrm{Con}(X)$ ist versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. $\mathrm{Lip}(S) = \sup\left\{ \frac{d(Sx,Sy)}{d(x,y)} \middle| x, y \in X, x \neq y \right\}$ und somit wegen Folgerung 2.20 als obere Einhüllende stetiger Funktionen halbstetig von unten.

□

2.2 Ein Maß auf $\mathcal{K}(X)$

In diesem Abschnitt findet der Zufall Einzug in die Konstruktion und zwar zu Beginn erstmals bei der Auswahl von Iterierten Funktionensystemen aus Ω. Wieder bezeichne $\Omega = (\mathrm{Con}(X)^N)^{E^*}$ versehen mit der Produkttopologie. Da E^* abzählbar ist, sind die Borelmengen von Ω gleich der Produktsigmaalgebra der Borelmengen von $\mathrm{Con}(X)$.

Definition 2.22
Es sei μ ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathrm{Con}(X)^N$.
μ^{E^*} bezeichne das Produktmaß auf Ω.
$(\mu^{E^*})^N$ bezeichne das Produkt der μ^{E^*} auf Ω^N.

Bemerkung 2.12
Die Wahl von μ^{E^*} als Produktmaß lässt sich als Unabhängigkeitsforderung interpretieren: Die $\mathscr{S}_\alpha$ sollen unabhängig identisch nach μ verteilt sein.

Bemerkung 2.13
Sei $\mathscr{S} \in \Omega$, dann gilt $\mu(\mathscr{S}) = 0$ oder $= 1$.

Motivation 6
Bei der Konstruktion der zufälligen Cantormenge wurde das ein Maß W definiert, nach welchem die Kontraktionsfaktoren der beiden Abbildungen eines iterierten Funktionensystems auf dem Dreieck T verteilt sind. Im Folgenden sei eine Idee vorgestellt, wie man diese Wahl von T formal auf die hier angeführte Konstruktion übertragen kann.

Das Maß μ arbeitet direkt auf dem Raum $\mathrm{Con}(X)^N$ der iterierten Funktionensysteme, man möchte aber das Maß W vorgeben, also μ aus der Vorgabe von W konstruieren. Dazu definiere eine Abbildung f: $T \to \mathrm{Con}(X)^2$ mit $(x, y) \mapsto [t \mapsto (x \cdot t, 1 - y(1 - t))]$ und wähle für μ das Bildmaß unter dieser Abbildung. Da bei der Konstruktion der zufälligen Cantormenge gefordert wurde, dass (x_α, y_α) unabhängig identisch nach W verteilt sind, geht man auf Ω wie in obiger Definition einfach zum Produktmaß über.

Für die Konstruktion der zufälligen Cantormengen stößt man also auf keinerlei Schwierigkeiten. Allerdings scheidet an dieser Stelle die eindimensionale Cantormenge aus, da hier in jedem Schritt ein anderes (Dirac-) Maß verwendet wurde, also die Auswahl der iterierten Funktionensysteme nicht für alle α nach der selben Verteilung erfolgt. Mit dem selben Argument scheidet auch das Beispiel für ein $\mathscr{S} \in \Omega \backslash \Omega_0$ aus Motivation 3 aus.

Die im Folgenden definierte Funktion φ setzt mehrere iterierte Funktionensysteme zu einem zusammen, konkret werden N Elemente aus Ω und ein Element aus $\mathrm{Con}(X)^N$ benötigt, um ein neues Element aus Ω zu bilden. Später wird öfters φ^{-1} verwendet, um iterierte Funktionensysteme zu zerstückeln.

Definition 2.23
Definiere eine Funktion $\varphi : \mathrm{Con}(X)^N \times \Omega^N \to \Omega$ wie folgt:

$$\varphi((S_0, \ldots, S_{N-1}), (\mathscr{S}^{(0)}, \ldots, \mathscr{S}^{(N-1)})) = \mathscr{S},$$

wobei

$$\mathscr{S}_\emptyset = (S_0, \ldots, S_{N-1})$$

und für $\alpha \in E^*, n \in \{0, \ldots, N-1\}$

$$\mathscr{S}_{n*\alpha} = \mathscr{S}_\alpha^{(n)}.$$

Motivation 7
Im Fall der zufälligen Cantormenge bestimmt (S_L, S_R) was im ersten Iterationsschritt passiert. $\mathscr{S}^{(L)}$ entscheidet, wie die Feinstruktur des Bildes von S_L aussieht. Analog bestimmt $\mathscr{S}^{(R)}$ wie $S_R([0, 1])$ weiter zerlegt wird.

Lemma 2.24
φ aus voriger Definition ist borelmessbar und für $B \in \mathfrak{B}(\Omega)$ gilt:

$$\mu \otimes (\mu^{E^*})^N(\varphi^{-1}(B)) = \mu^{E^*}(B).$$

Beweis: Die Messbarkeit von φ ist klar.
Die zweite Aussage folgt aus den elementaren Eigenschaften des Produktmaßes (Satz von Fubini).

$\square$

Das folgende Lemma und der nachfolgende Satz erklären, warum es (fast sicher) keine Einschränkung war, nur $\mathscr{S}$ aus Ω_0 zu betrachten, wenn man die Maße wie in diesem Abschnitt wählt.

Lemma 2.25
Sei $g : \mathrm{Con}(X)^N \to [0,1)$ *eine borelmessbare Abbildung. Dann ist*

$$\Omega_g := \left\{ \mathscr{S} \in \Omega | \forall \alpha \in E^\infty : \prod_{n=1}^{\infty} g(S_{(\alpha|n-1)*0}, \ldots, S_{(\alpha|n-1)*(N-1)}) = 0 \right\}$$

eine Borelmenge mit $\mu^{E^*}(\Omega_g) = 1$.

Beweis: Anders geschrieben gilt

$$\Omega_g = \left\{ \mathscr{S} | \forall m \in \mathbb{N}\ \forall \alpha \in E^\infty\ \exists q \in \mathbb{N} : \prod_{n=1}^{q} g(S_{(\alpha|n-1)*0}, \ldots, S_{(\alpha|n-1)*(N-1)}) < \frac{1}{m} \right\}.$$

Wenn man die Kompaktheit von E^∞ genauso wie im Beweis von Lemma 2.10 verwendet, erhält man

$$\begin{aligned} \Omega_g &= \left\{ \mathscr{S} | \forall m \in \mathbb{N} \exists q \in \mathbb{N} \forall \alpha \in E^q : \prod_{n=1}^{q} g(S_{(\alpha|n-1)*0}, \ldots, S_{(\alpha|n-1)*(N-1)}) < \frac{1}{m} \right\} \\ &= \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{q\in\mathbb{N}} \bigcap_{\alpha\in E^q} \underbrace{\left\{ \mathscr{S} \left| \prod_{n=1}^{q} g(S_{(\alpha|n-1)*0}, \ldots, S_{(\alpha|n-1)*(N-1)}) < \frac{1}{m} \right. \right\}}_{:=A}. \end{aligned}$$

A ist offensichtlich eine Borelmenge und somit ist Ω_g als abzählbare Vereinigung bzw. Durchschnitt von Borelmengen selbst eine Borelmenge.

Für $a > 0$ sei

$$B_a = \left\{ \mathscr{S} \in \Omega | \exists \alpha \in E^\infty : \prod_{n=1}^{\infty} g(S_{(\alpha|n-1)*0}, \ldots, S_{(\alpha|n-1)*(N-1)}) \geq a \right\}.$$

Mittels der selben Technik wie oben identifiziert man B_a als Borelmenge. Definiere $p : (0,1) \to [0,1]$ als $p(a) = \mu^{E^*}(B_a)$. Dann ist p eine monoton fallende Funktion. Wenn es noch gelingt nachzuweisen, dass p identisch verschwindet ($p \equiv 0$), ist der Beweis erbracht, da $\Omega_g = \Omega \setminus \bigcup_{a>0} B_a$.

Aus Lemma 2.24 folgt für alle $a \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}
p(a) &= \mu \otimes (\mu^{E^*})^N \Bigg(\Big\{ ((S_0, \ldots, S_{N-1}), (\mathscr{S}^{(0)}, \ldots, \mathscr{S}^{(N-1)})) \Big| \\
&\qquad \exists \alpha \in E^\infty \ \exists \rho \in \{0, \ldots, N-1\} : \\
&\qquad g(S_0, \ldots, S_{N-1}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} g(S^{(\rho)}_{(\alpha|n-1)*0}, \ldots, S^{(\rho)}_{(\alpha|n-1)*(N-1)}) \geq a \Big\} \Bigg) \\
&\leq \sum_{\rho=0}^{N-1} \mu \otimes (\mu^{E^*})^N \Bigg(\Big\{ ((S_0, \ldots, S_{N-1}), (\mathscr{S}^{(0)}, \ldots, \mathscr{S}^{(N-1)})) \Big| \exists \alpha \in E^\infty : \\
&\qquad g(S_0, \ldots, S_{N-1}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} g(S^{(\rho)}_{(\alpha|n-1)*0}, \ldots, S^{(\rho)}_{(\alpha|n-1)*(N-1)}) \geq a \Big\} \Bigg) \\
&\leq N \mu(\{(S_0, \ldots, S_{N-1}) | g(S_0, \ldots, S_{N-1}) \geq a\}) p(a). \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Da $g < 1$ gibt es ein $b \in (0,1)$ mit

$$\mu(\{(S_0, \ldots, S_{N-1}) | g(S_0, \ldots, S_{N-1}) \geq b\}) < \frac{1}{N}.$$

Wegen (2.22) mit $a = b$ gilt

$$p(b) = 0.$$

Definiere $\gamma = \inf\{a \in (0,1) | p(a) = 0\}$. Angenommen es gelte $\gamma > 0$, dann gibt es ein $a > \gamma$ mit $a \cdot b < \gamma$. Wie vorher gilt dann

$$\begin{aligned}
p(ab) &\leq \sum_{\rho=0}^{N-1} \mu \otimes (\mu^{E^*})^N \Bigg(\Big\{ ((S_0, \ldots, S_{N-1}), (\mathscr{S}^{(0)}, \ldots, \mathscr{S}^{(N-1)})) \Big| \exists \alpha \in E^\infty : \\
&\qquad g(S_0, \ldots, S_{N-1}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} g(S^{(\rho)}_{(\alpha|n-1)*0}, \ldots, S^{(\rho)}_{(\alpha|n-1)*(N-1)}) \geq ab \Big\} \Bigg).
\end{aligned}$$

Da $a > \gamma$ gilt $p(a) = 0$. Das führt auf

$$p(ab) \leq N \mu(\{(S_0, \ldots, S_{N-1}) | g(S_0, \ldots, S_{N-1}) \geq b\}) p(ab),$$

woraus $p(ab) = 0$ folgt. Ein Widerspruch. Daher gilt $\gamma = 0$ und damit $p \equiv 0$.

□

Satz 2.26
Die Menge $\Omega_0 = \left\{ \mathscr{S} \in \Omega | \, \forall \alpha \in E^\infty : \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n}) = 0 \right\}$ *ist eine Borelmenge mit* $\mu^{E^*}(\Omega_0) = 1$.

Beweis: Man wähle als Funktion $g : \mathrm{Con}(X)^N \to [0,1)$ als $g(S_0, \ldots, S_{N-1}) = \max_{0 \leq \rho \leq N-1} \mathrm{Lip}(S_\rho)$ und verwende diese in Lemma 2.25.

□

Lemma 2.27
Für alle $m \in \mathbb{N}$ *ist die Abbildung* $\mathrm{Con}(X)^m \to \mathrm{Con}(X), (S_0, \ldots, S_{m-1}) \mapsto S_0 \circ \ldots \circ S_{m-1}$ *stetig.*

Beweis: Es genügt den Beweis für $m = 2$ zu führen.
Seien $\varepsilon > 0, (S_0^{(0)}, S_1^{(0)}) \in \mathrm{Con}(X)^2$ und $x \in X$ gegeben.
Für alle $(S_0, S_1) \in \mathrm{Con}(X)^2$ für welche sowohl $d(S_1 x, S_1^{(0)} x) < \frac{\varepsilon}{2}$ als auch $d(S_0 \circ S_1^{(0)} x, S_0^{(0)} \circ S_1^{(0)} x) < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt, erhält man

$$\begin{aligned} d(S_0 \circ S_1 x, S_0^{(0)} \circ S_1^{(0)} x) &\leq d(S_0 \circ S_1 x, S_0 \circ S_1^{(0)} x) + d(S_0 \circ S_1^{(0)} x, S_0^{(0)} \circ S_1^{(0)} x) \\ &\leq \mathrm{Lip}(S_0) d(S_1 x, S_1^{(0)} x) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Daher ist die Abbildung $\mathrm{Con}(X)^2 \to X, (S_0, S_1) \mapsto S_0 \circ S_1 x$ stetig. Da $\mathrm{Con}(X)$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versehen ist, ist auch die Abbildung $\mathrm{Con}(X)^2 \to \mathrm{Con}(X), (S_0, S_1) \mapsto S_0 \circ S_1$ stetig und damit folgt die Behauptung.

□

Lemma 2.28
Die Abbildung $\mathrm{Con}(X) \times \mathcal{K}(X), (S, K) \mapsto S(K)$ *ist stetig.*

Beweis: Für $S, T \in \mathrm{Con}(X)$ und $K, L \in \mathcal{K}(X)$ gilt wegen der Dreiecksungleichung sowie Hilfssatz B.8:

$$\begin{aligned} \eta(S(K), T(L)) &\leq \eta(S(K), S(L)) + \eta(S(L), T(L)) \\ &\leq \mathrm{Lip}(S)\eta(K, L) \\ &\quad + \sup(\{d(Sx, T(L)) | x \in L\} \cup \{d(S(L), Tx) | x \in L\}) \\ &\leq \mathrm{Lip}(S)\eta(K, L) + \sup(\{d(Sx, Tx) | x \in L\}). \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und es seien $T \in \mathrm{Con}(X)$ und $L \in \mathcal{K}(X)$ fest. Wegen der Kompaktheit von L gibt es $x_1, \ldots, x_k \in L$ derart, dass

$$L \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_1) \cup \ldots \cup B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_k).$$

Für alle $S \in \mathrm{Con}(X)$ mit $d(Sx_p, Tx_p) < \frac{\varepsilon}{3}, p \in \{1, \ldots, k\}$ und alle $x \in L \cap B_{\frac{\varepsilon}{3}}(x_p)$ gilt

$$\begin{aligned} d(Sx, Tx) &\leq d(Sx, Sx_p) + d(Sx_p, Tx_p) + d(Tx_p, Tx) \\ &< \mathrm{Lip}(S) d(x, x_p) + \frac{\varepsilon}{3} + \mathrm{Lip}(T) d(x_p, x) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

und daher

$$\sup\{d(Sx, Tx) | x \in L\} \leq \varepsilon.$$

Daher gilt für alle $S \in \mathrm{Con}(X)$ mit $d(Sx_p, Tx_p) < \frac{\varepsilon}{3} (p \in \{1, \ldots, k\})$ und für alle $K \in \mathcal{K}(X)$ mit $\eta(K, L) < \varepsilon$:

$$\eta(S(K), T(L)) < 2\varepsilon.$$

$\square$

Lemma 2.29
Die Abbildung $\mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X), (K, L) \mapsto K \cup L$ ist stetig.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und $K, L \in \mathcal{K}(X)$ fest. Für $\bar{K}, \bar{L} \in \mathcal{K}(X)$ mit $\eta(K, \bar{K}) < \varepsilon \wedge \eta(L, \bar{L}) < \varepsilon$ gilt mit Hilfssatz B.9:

$$\eta(K \cup L, \bar{K} \cup \bar{L}) \underbrace{\leq}_{B.9} \max\{\eta(K, \bar{K}), \eta(L, \bar{L})\} < \varepsilon$$

und damit die Stetigkeit der Abbildung.

$\square$

Satz 2.30
Sei $\widetilde{K} \in \mathcal{K}(X)$ beliebig. Eine Abbildung $\Psi : \Omega \to \mathcal{K}(X)$ sei definiert als:

$$\Psi(\mathscr{S}) = \begin{cases} \bigcap_{q \in \mathbb{N}} \bigcup_{\alpha \in E^{q+1}} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha||\alpha|}(X)} & : \mathscr{S} \in \Omega_0 \\ \widetilde{K} & : \mathscr{S} \notin \Omega_0 \end{cases} \tag{2.23}$$

Dann ist Ψ borelmessbar.

Beweis: Nach Satz 2.12 ist Ψ wohldefiniert.

Aus den Lemmata 2.27 2.28 und 2.29 folgt für alle $q \in \mathbb{N}$ und jede Familie $(K_\alpha)_{\alpha \in E^*}$ die Stetigkeit der Abbildung

$$\Omega \to \mathcal{K}, \mathscr{S} \mapsto \bigcup_{\alpha \in E^{q+1}} S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha||\alpha|}(K_\alpha). \tag{2.24}$$

Wegen Satz 2.12 ist die Abbildung Ψ in Ω_0 der punktweise Grenzwert einer Folge von borelmessbaren Funktionen. Nach Satz 2.26 ist Ω_0 eine Borelmenge, daher folgt die Behauptung.

□

Definition 2.31
Für ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathrm{Con}(X)^N$ sei P_μ das Bildmaß von μ^{E^*} bei der Abbildung Ψ, d.h. für jede Borelmenge $B \subseteq \mathcal{K}(X)$ gilt $P_\mu(B) = \mu^{E^*}(\Psi^{-1}(B))$.

2.2.1 P_μ ist das einzige μ-selbstähnliche Maß auf $\mathcal{K}(X)$

Das Bildmaß P_μ beschreibt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung aus dem Raum $\mathcal{K}(X)$, den kompakten Teilmengen von X. Wählt man für μ ein Diracmaß im Massepunkt $(S_0, \ldots, S_{N-1})$, so ist auch P_μ ein Diracmaß in einem Massepunkt $K \in \mathcal{K}(X)$ und es gilt

$$K = \bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(K).$$

K ist also ein Fixpunkt des IFS $(S_0, \ldots, S_{N-1})$, man spricht im Fall von Ähnlichkeitsabbildungen S_i auch von einer selbstähnlichen Menge K (bezüglich $(S_0, \ldots, S_{N-1})$). (Siehe auch Theorie über deterministische Fraktale)
Ist μ ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß, so gilt dies nicht mehr, aber es gilt statistische Selbstähnlichkeit, die im Folgenden konkretisiert wird.

Definition 2.32
Sei μ wieder ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathrm{Con}(X)^N$. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathcal{K}(X)$ heißt μ-statistisch selbstähnlich (oder kurz μ-selbstähnlich), wenn für jede Borelmenge $B \subseteq \mathcal{K}(X)$,

$$\begin{aligned} P(B) \quad = \quad & \mu \otimes P^N \Bigg(\Bigg\{ ((S_0, \ldots, S_{N-1}), (K_0, \ldots, K_{N-1})) \\ & \in \mathrm{Con}(X)^N \times \mathcal{K}(X)^N \Bigg| \bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(K_p) \in B \Bigg\} \Bigg). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Motivation 8
Auf Seite 8 wurde im Absatz unter Bemerkung 1.2 diese Begriffsbildung bereits am Beispiel der Cantormenge angedeutet.

Lemma 2.33
Sei $\kappa : \mathcal{K}(X) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ eine borelmessbare Abbildung. Dann gilt für jedes μ-selbstähnliche Maß P auf $\mathcal{K}(X)$:

$$\int \kappa dP = \int \int \kappa \left(\bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(K_p) \right) dP^N(K_0, \dots, K_{N-1}) d\mu(S_0, \dots, S_{N-1}).$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Definition.

□

Definition 2.34
Es bezeichne $\mathcal{P}(\mathcal{K}(X))$ die Menge aller Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{K}(X)$. Definiere $T_\mu : \mathcal{P}(\mathcal{K}(X)) \to \mathcal{P}(\mathcal{K}(X))$ wie folgt:

$$[T_\mu(Q)](B)=\mu \otimes Q^N \left(\left\{ ((S_0, \dots, S_{N-1}), (K_0, \dots, K_{N-1})) \middle| \bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(K_p) \in B \right\} \right).$$

Bemerkung 2.14
Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P \in \mathcal{P}(\mathcal{K}(X))$ ist μ-selbstähnlich dann und nur dann, wenn $T_\mu(P) = P$, also wenn P ein Fixpunkt von T_μ ist.

Definition 2.35
Seien $\mu_n, \mu (n \in \mathbb{N})$ Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße. Dann heißt die Folge μ_n schwach konvergent gegen μ, in Zeichen $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu, \ \forall f \in C_b(X, \mathscr{B}),$$

also für alle stetigen, beschränkten Funktionen f.

Satz 2.36
Sei μ ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathrm{Con}(X)^N$. Dann ist P_μ das einzige μ-statistisch selbstähnliche Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{K}(X)$. Weiters konvergiert für jedes $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{K}(X))$ die Folge $(T_\mu^n(Q))_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen P_μ.

Beweis:

- $T_\mu(P_\mu) = P_\mu$, also P_μ ist μ-selbstähnlich:
  Definiere $\widetilde{\varphi} : \mathrm{Con}(X)^N \times \mathcal{K}(X)^N \to \mathcal{K}(X)$ als:

$$\widetilde{\varphi}((S_0, \ldots, S_{N-1}), (K_0, \ldots, K_{N-1})) = \bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(K_p).$$

  Wegen der Lemmata 2.28 und 2.29 ist $\widetilde{\varphi}$ stetig. Weiters gilt für jedes $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{K}(X))$: $T_\mu(Q)$ ist das Bildmaß von $\mu \otimes Q^N$ bei der Abbildung $\widetilde{\varphi}$. Die Abbildung $\varphi : \mathrm{Con}(X)^N \times \Omega^N \to \Omega$ sei definiert wie in Definition 2.23 und die Abbildung $\widetilde{\Psi} : \mathrm{Con}(X)^N \times \Omega^N \to \mathrm{Con}(X)^N \times \mathcal{K}(X)^N$ sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Psi}((S_0, \ldots, S_{N-1}), (\mathscr{S}^{(0)}, \ldots, \mathscr{S}^{(N-1)}))\\ &= ((S_0, \ldots, S_{N-1}), (\Psi(\mathscr{S}^{(0)}), \ldots, \Psi(\mathscr{S}^{(N-1)})))\end{aligned}$$

  wobei Ψ definiert ist wie in 2.30. Dann gilt $\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\Psi} = \Psi \circ \varphi$ (Details sind im Anhang ausgeführt [Lemma D.1]) und damit

$$\widetilde{\Psi}^{-1} \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = (\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\Psi})^{-1} = (\Psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \Psi^{-1}.$$

  $\mu \otimes P_\mu^N$ ist das Bildmaß von $\mu \otimes (\mu^{E^*})^N$ bei der Abbildung $\widetilde{\Psi}$. Nach Lemma 2.24 gilt μ^{E^*} ist das Bildmaß von $\mu \otimes (\mu^{E^*})^N$ bei der Abbildung φ. Da $P_\mu = \mu^{E^*} \circ \Psi^{-1}$ gilt:

$$\begin{aligned}T_\mu(P_\mu) &= \mu \otimes P_\mu^N\, \widetilde{\varphi}^{-1} = \mu \otimes (\mu^{E^*})^N\, \widetilde{\Psi}^{-1} \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = \\ &= \mu \otimes (\mu^{E^*})^N\, \varphi^{-1} \circ \Psi^{-1} = \mu^{E^*} \circ \Psi^{-1} = P_\mu.\end{aligned}$$

- Es gilt $\lim_{n\to\infty} T_\mu^n(Q) = P_\mu$:
  Sei $A \subseteq \mathcal{K}(X)$ abgeschlossen. Mittels Induktion zeigt man

$$\begin{aligned}[T_\mu^n(Q)](A) &= \mu^{E^*} \otimes Q^{E^*}(\{(\mathscr{S}, (K_\alpha)_{\alpha\in E^*}) \in \Omega \times \mathcal{K}(X)^{E^*} \mid \\ &\qquad \bigcup_{\alpha\in E^n} S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|n}(K_\alpha) \in A\}).\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}[T_\mu^n(Q)](A) = \\
&\quad = \inf_m \sup_{n\geq m} \mu^{E^*}\otimes Q^{E^*}(\{(\mathscr{S},(K_\alpha)_{\alpha\in E^*})| \bigcup_{\alpha\in E^n} S_{\alpha|1}\circ\ldots\circ S_{\alpha|n}(K_\alpha)\in A\}) \\
&\quad \leq \mu^{E^*}\otimes Q^{E^*}(\bigcap_m\bigcup_{n\geq m}\{(\mathscr{S},(K_\alpha)_{\alpha\in E^*})| \bigcup_{\alpha\in E^n} S_{\alpha|1}\circ\ldots\circ S_{\alpha|n}(K_\alpha)\in A\}) \\
&\quad \leq \mu^{E^*}\otimes Q^{E^*}(\{(\mathscr{S},(K_\alpha)_{\alpha\in E^*})\in\Omega_0\times\mathcal{K}(X)^{E^*} \\
&\qquad\qquad | \lim_{n\to\infty}\bigcup_{\alpha\in E^n} S_{\alpha|1}\circ\ldots\circ S_{\alpha|n}(K_\alpha)\in A\})
\end{aligned}$$

Wegen Satz 2.12 und der Definition von Ψ wird der letzte Ausdruck zu

$$\mu^{E^*}\otimes Q^{E^*}(\{(\mathscr{S},(K_\alpha)_{\alpha\in E^*})\in\Omega_0\times\mathcal{K}(X)^{E^*}|\Psi(\mathscr{S})\in A\})$$

was wiederum $\mu^{E^*}(\Psi^{-1}(A))$ entspricht. Wegen der Definition von P_μ ist damit

$$\limsup_{n\to\infty}[T_\mu^n(Q)](A)\leq P_\mu(A)$$

gezeigt. Dies gilt für jede beliebige abgeschlossene Menge A aus $\mathcal{K}(X)$. Es gilt $T_\mu^n(Q)(X)=1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ und daher ist wegen des Portmanteau-Theorems (siehe Satz A.6) gezeigt, dass $(T_\mu^n(Q))_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen P_μ konvergiert.

- Eindeutigkeit:
  Da $(T_\mu^n(Q))_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen P_μ konvergiert ist P_μ notwendigerweise der einzige Fixpunkt von T_μ.

□

2.3 Trägermengen des Maßes P_μ

Zuerst soll der Begriff „Trägermenge präzisiert werden, danach wird eine hinreichende Bedingung für die Trägermengeneigenschaft einer Menge $A\subseteq\mathcal{K}(X)$ vorgestellt.
Im Folgenden bezeichne μ ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathrm{Con}(X)^N$.

Definition 2.37
Sei $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ ein fopologischer Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Menge A heißt Trägermenge des Maßes μ, falls A μ-messbar ist und $\mu(A)=1$. Der Durchschnitt aller abgeschlossenen Trägermengen heißt auch der Träger von μ.

Bemerkung 2.15
Die Forderung gröber im folgenden Satz bedeutet nicht notwendigerweise echt gröber, die Topologien können auch gleich sein.

Satz 2.38
Sei $A \subseteq \mathcal{K}(X)$ eine nichtleere Menge und d_A eine beschränkte Metrik auf A, sodass (A, d_A) ein vollständiger metrischer Raum ist, dessen Topologie gröber ist als die von der Hausdorff-Metrik induzierte. Die folgenden beiden Bedingungen seinen für $(S_0, \ldots, S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(X)^N$ μ-fast sicher erfüllt:

1. $\forall K_0, \ldots, K_{N-1} \in A : \bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(K_p) \in A$.
2. $\exists c \in (0,1)\ \forall K_0, \ldots, K_{N-1} \in A\ \ \forall L_0, \ldots, L_{N-1} \in A :$

$$d_A\left(\bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(K_p), \bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(L_p)\right) \leq c \max_{0 \leq p \leq N-1} d_A(K_p, L_p).$$

Dann ist A Trägermenge von P_μ.

Beweis: Sei $W \subseteq \mathrm{Con}(X)^N$ eine Borelmenge mit $\mu(W) = 1$ derart, dass für alle $(S_0, \ldots, S_{N-1}) \in W$ die Bedingungen 1. und 2. erfüllt sind. Definiere $g : \mathrm{Con}(X)^N \to [0,1)$ als:

$$g(S_0, \ldots, S_{N-1}) = \begin{cases} \sup\left\{ \frac{d_A\left(\bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(K_p), \bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(L_p)\right)}{\max_{0 \leq p \leq N-1} d_A(K_p, L_p)} \,\middle|\, (K_p), (L_p) \in A^N, (K_p) \neq (L_p) \right\}, & \text{falls}(S_0, \ldots, S_{N-1}) \in W, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ ist wie jede Metrik stetig ist bezüglich dem Produkt der Topologie, welche von ihr induziert wird. Da die Topologie, welche von der Hausdorffmetrik induziert wird feiner ist, ist d_A auch bezüglich dem Produkt dieser Topologie stetig. Mit Hilfssatz 2.19 erhält man daraus, dass die Einschränkung von g auf W halbstetig von unten ist. Da W eine Borelmenge ist, impliziert dies, dass g messbar ist.

Sei V_g die Menge aller $\mathscr{S} \in W^{E^*}$ für die $\forall \alpha \in E^\infty$

$$\prod_{n=1}^{\infty} g(S_{(\alpha|n-1)*0}, \ldots, S_{(\alpha|n-1)*(N-1)}) = 0.$$

Wegen der Wahl von W als Trägermenge von μ folgt aus Lemma 2.25, dass $\mu^{E^*}(V_g) = 1$.

Sei nun $K \in A$ beliebig. Als nächstes soll gezeigt werden, dass für $\mathscr{S} \in V_g$

$$\left(\bigcup_{\alpha \in E^{q+1}} S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(K) \right)_{q \in \mathbb{N}} \tag{2.26}$$

eine Cauchyfolge in (A, d_A) ist.

Seien $\mathscr{S} \in V_g$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wie im Beweis von Lemma 2.10 zeigt man die Existenz eines $q_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall \alpha \in E^{q_0} : \prod_{n=1}^{q_0} g(S_{(\alpha|n-1)*0}, \ldots, S_{(\alpha|n-1)*(N-1)}) < \varepsilon.$$

Für $q > m \geq q_0$ gilt somit

$$\begin{aligned}
d_A & \left(\bigcup_{\alpha \in E^{m+1}} S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|m+1}(K), \bigcup_{\alpha \in E^{q+1}} S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(K) \right) \\
= \quad & d_A \Bigg(\bigcup_{n=0}^{N-1} S_n(\bigcup_{\alpha \in E^m} S_{n*(\alpha|1)} \circ \ldots \circ S_{n*(\alpha|m+1)}(K)), \\
& \qquad \bigcup_{n=0}^{N-1} S_n(\bigcup_{\alpha \in E^{q+1}} S_{n*(\alpha|1)} \circ \ldots \circ S_{n*(\alpha|q+1)}(K)) \Bigg) \\
\underbrace{\leq}_{2.} \quad & g(S_0, \ldots, S_{N-1}) \max_{0 \leq n \leq N-1} d_A \Bigg(\bigcup_{\alpha \in E^m} S_{n*(\alpha|1)} \circ \ldots \circ S_{n*(\alpha|m)}(K), \\
& \qquad \bigcup_{\alpha \in E^q} S_{n*(\alpha|1)} \circ \ldots \circ S_{n*(\alpha|q)}(K) \Bigg).
\end{aligned}$$

Mittels Induktion folgert man die Existenz eines $\tau \in E^{m+1}$ mit

$$\begin{aligned}
d_A & \left(\bigcup_{\alpha \in E^{m+1}} S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|m+1}(K), \bigcup_{\alpha \in E^{q+1}} S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(K) \right) \\
\leq \quad & \prod_{n=1}^{m+1} g(S_{(\tau|n)*0}, \ldots, S_{(\tau|n)*(N-1)}) d_A \left(K, \bigcup_{\kappa \in E^{q-m}} S_{(\tau|q+1)*\kappa(K)} \right) \\
\leq \quad & \varepsilon \delta_A(A)
\end{aligned}$$

wobei $\delta_A(A)$ den (endlichen) Durchmesser des Raumes (A, d_A) bezeichnet. Damit ist die Cauchyeigenschaft der Folge gezeigt.

Da (A, d_A) vollständig ist, konvergiert die Folge aus (2.26) in (A, d_A). Wenn zusätzlich gilt, dass $\mathscr{S} \in \Omega_0$, dann konvergiert die obere Folge bezüglich der Hausdorffmetrik η gegen $\Psi(\mathscr{S})$. Da die von d_A induzierte Topologie gröber als die von η induzierte war, folgt das die beiden Grenzwerte übereinstimmen und daher $\Psi(\mathscr{S}) \in A$ (für μ^{E*} fast alle $\mathscr{S}$, da $\mu^{E*}(\Omega_0) = 1$). Da Ω und $\mathcal{K}(X)$ Suslin-Räume sind und Ψ messbar ist folgt, dass A bezüglich $\mu^{E^*} \circ \Psi^{-1} = P_\mu$ messbar ist und $P_\mu(A) = 1$ erfüllt.

□

Folgerung 2.39
Der Träger der Maßes P_μ ist gleich dem Durchschnitt aller nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen A von $\mathcal{K}(X)$, sodass μ-fast alle $(S_0, \ldots, S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(X)^N$ und für alle $(K_0, \ldots, K_{N-1}) \in A^N$,

$$\bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(K_p) \in A \tag{2.27}$$

gilt.

Beweis: Zuerst gilt es, die Voraussetzung von Satz 2.38 zu zeigen:
Da A abgeschlossen ist, ist $(A, \eta_{|A})$ vollständiger metrischer Raum, die Topologie ist die Spurtopologie, also genau die von der Haussdorf-Metrik induzierte.
Voraussetzung 1. ist gefordert. Für 2. sei $(S_0, \ldots, S_{N-1})$ fest und $c := \max_p(\mathrm{Lip}(S_p))$, dann gilt $\forall K_0, \ldots, K_{N-1} \in A \ \forall L_0, \ldots, L_{N-1} \in A :$

$$\eta\left(\bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(K_p), \bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(L_p)\right) \leq \eta\left(S_p(K_p), S_p(L_p)\right) \leq c \max_p \eta(K_p, L_p).$$

Die erste Ungleichung ist der Hilfssatz B.9 und die Zweite der Hilfssatz B.8. Wegen Satz 2.38 ist jedes abgeschlossene A mit den geforderten Eigenschaften Trägermenge von P_μ. Da der Satz 2.38 nur eine hinreichende Bedingung für eine Menge liefert, Trägermenge zu sein, der Durchschnitt also nicht notwendigerweise über alle Trägermengen gebildet wird, muss noch gezeigt werden, dass der Träger selbst Bedingung (2.27) erfüllt:
Sei also A der Träger von P_μ, dann gilt

$$\begin{aligned} 1 = P_\mu(A) \quad = \quad & \mu \otimes P_\mu^N \Big\{ (S_0, \ldots, S_{N-1}) \times (K_0, \ldots, K_{N-1}) \\ & \in \mathrm{Con}(X)^N \times \mathcal{K}(X)^N | \bigcup_p S_p(K_p) \in A \Big\}. \end{aligned}$$

In Worten bedeutet die rechte Seite, dass die Menge $\{(K_0, \ldots, K_{N-1}) : \bigcup_p S_p(K_p) \in A; \quad \mu\big((S_0, \ldots, S_{N-1})\big)\text{-fast sicher}\}$ bezüglich P_μ^N Maß 1 hat, also A^N enthält. Damit gilt (2.27) für den Träger und der Beweis ist erbracht.

□

Im Folgenden sollen zwei Anwendungen aufgezeigt werden, die Trägermenge einer Konstruktion einzugrenzen. Auf topologische Beweisführung wird hier ausnahmsweise verzichtet, Referenzen sind angegeben.

Beispiel 2.2 (Zufällige stetige Funktionen)
Sei E ein kompakter Teilraum des $\mathbb{R}^d$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $X = [a,b] \times E$ versehen mit der euklidischen Metrik d. Es bezeichne $\mathscr{C}_g([a,b], E)$ den Raum aller Graphen stetiger Funktionen von $[a,b]$ nach E mit der Supremumsmetrik. Sei (A, d_A) ein nichtleerer abgeschlossenen Teilraum von $\mathscr{C}_g([a,b], E)$ (also d_A wieder die Supremumsmetrik). Weiters sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathrm{Con}(X)^N$, sodass μ-f.s. die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $S_p = S_p^1 \times S_p^2$ wobei $S_p^1(]a,b[) \cap S_{p'}^1(]a,b[) = \emptyset$ für $p \neq p'$.
2. Für alle $K_0, \ldots, K_{N-1} \in A$: $\bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(K_p) \in A$.

Dann ist A Trägermenge von P_μ.

Beweis: Die Metrik d_A induziert die selbe Topologie auf A, wie die Hausdorffmetrik. Einen Beweis hierfür findet man bei Kuratowski [17] Vol I., Seite 223, Theorem 7. Kuratoski bezeichnet $(\mathcal{K}(X), \eta)$ mit $(2^{\mathscr{X}})_m$, sein $\mathscr{E}^{\mathscr{X}} \cap \Phi(\mathscr{X}, \mathscr{E})$ wurde hier als $\mathscr{C}_g(X, E)$ eingeführt. (A, d_A) ist außerdem offensichtlich ein beschränkter, vollständiger, metrischer Raum. Um Satz 2.38 anwenden zu können, muss noch die Bedingung 2. nachgewiesen werden.

Dazu seinen $(K_p)_{p\in\{0,\ldots,N-1\}}$ und $(L_p)_{p\in\{0,\ldots,N-1\}}$ in A gegeben. Für diejenigen $(S_0, \ldots, S_{N-1})$, welche 1. und 2. erfüllen, soll

$$d_A\left(\bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(K_p), \bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(L_p)\right) \leq \max_{0\leq p\leq N-1} \mathrm{Lip}(S_p) \max_{0\leq p\leq N-1} d_A(K_p, L_p)$$

gezeigt werden.

Wegen 2. sind $\bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(K_p)$ bzw. $\bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(L_p)$ Graphen stetiger Funktionen auf $[a,b]$. $\bigcup_{p=0}^{N-1} S_p^1(]a,b[)$ ist dicht in $[a,b]$, daher genügt es zu zeigen, dass für alle $x \in \bigcup_{p=0}^{N-1} S_p^1(K_p)$, alle y für die $(x,y) \in \bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(K_p)$ und alle z für die $(x,z) \in \bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(L_p)$

$$\|y-z\| \leq \max_{0\leq p\leq N-1} \operatorname{Lip}(S_p) \max_{0\leq p\leq N-1} d_A(K_p, L_p)$$

gilt ($\|.\|$ bezeichne die euklidische Norm).

Sei also $x \in S_p^1(]a,b[)$. Dann folgt aus 1. $(x,y) \in S_p(K_p)$ und $(x,z) \in S_p(L_p)$. Es gibt ein $(u,v) \in K_p$ mit $S_p(u,v) = (x,y)$. Da L_p ein Graph ist, gibt es ein eindeutiges $w \in E$ mit $(u,w) \in L_p$. Es ist $S_p(u,w) = (S_p^1(u), S_p^2(w)) = (x, S_p^2(w))$. Da auch $\bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(L_p)$ ein Graph ist, folgt $S_p^2(w) = z$. Dies ergibt:

$$\begin{aligned}
\|y-z\| &= \|S_p^2(v) - S_p^2(w)\| \\
&= \|S_p(u,v) - S_p(u,w)\| \\
&\leq \operatorname{Lip}(S_p)\|(u,v)-(u,w)\| \\
&\leq \operatorname{Lip}(S_p) d_A(K_p, L_p).
\end{aligned}$$

Aus Satz 2.38 folgt nun die Behaupung.

□

Anschließend ein kurzes konkretes Beispiel:
Sei $[a,b] = [0,1] = E$ und $A = \{f \in \mathscr{C}([0,1],[0,1]) | f(0) = 0, f(1) = 1\}$. Sei ν das normierte Lebesguemaß auf dem Dreieck $\Delta = \{(x_1,x_2) \in [0,1]^2 | x_1 + x_2 \leq 1\}$. Für $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \Delta$ definiere die Kontraktionen

$$\begin{aligned}
S_0^{x_1,x_2,y_1,y_2}(u,v) &= (x_1 u, (1-y_2)v), \\
S_1^{x_1,x_2,y_1,y_2}(u,v) &= (x_1 + (1-u)(1-x_1-x_2), 1-y_2+(1-v)(y_1+y_2-1)), \\
S_2^{x_1,x_2,y_1,y_2}(u,v) &= (1-x_2+ux_2, y_1+v(1-y_1)).
\end{aligned}$$

Sei μ das Bildmaß von $\nu \otimes \nu$ bei der Abbildung

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (S_0^{x_1,x_2,y_1,y_2}, S_1^{x_1,x_2,y_1,y_2}, S_2^{x_1,x_2,y_1,y_2}).$$

Dann erfüllt μ die Bedingungen 1. und 2., daher ist das zugehörige Maß P_μ auf A konzentriert, man erhält also mit dieser Konstruktion fast sicher eine stetige Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.

Beispiel 2.3 (Zufällige Kurven)
Hier wird der Begriff Kurve für ein stetiges Bild des Intervalles $[0, 1]$ verwendet.

Sei $E \subset \mathbb{R}^d$ kompakt versehen mit der eukidischen Metrik. Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathrm{Con}(E)^N$ derart, dass es Punkte $a, b \in E$ und für μ-fast alle $(T_0, \ldots, T_{N-1}) \in \mathrm{Con}(E)^N$ gilt: $T_0(a) = a, T_{N-1}(b) = b$ und $T_p(b) = T_{p+1}(a)$ $(p = 0, \ldots, N-2)$. Dann gilt für μ-fast alle $K \in \mathcal{K}(E)$: „K ist eine Kurve die a mit b verbindet“.

Beweis: Sei $X = [0, 1] \times E$ versehen mit der euklidischen Metrik. Definiere eine stetige Funktion $\varphi : \mathrm{Con}(E)^N \to \mathrm{Con}(X)^N$ als

$$\varphi(T_0, \ldots, T_{N-1}) = (S_0, \ldots, S_{N-1})$$

mit

$$S_p(x, y) = (\frac{1}{N}x + \frac{p}{N}, T_p y).$$

Weiters definiere $\bar{\mu} = \mu \circ \varphi^{-1}$.

Für

$$A = \{f \in \mathscr{C}([0, 1]), E)|f(0) = a, f(1) = b\}$$

überprüft man leicht, dass die Bedingungen 1. und 2. aus dem vorigen Beispiel für $\bar{\mu}$-fast alle $(S_0, \ldots, S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(X)$ erfüllt sind, also ist A Trägermenge von $P_{\bar{\mu}}$. Definiere eine borelmessbare Funktion $\eta : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{E}$ als

$$\eta(K) = \{y \in E | \exists x \in [0, 1] : (x, y) \in K\}.$$

Mit Satz 2.36 kann man $P_\mu = P_{\bar{\mu}} \circ \eta^{-1}$ nachprüfen.

Daher ist $\{\eta(K)|K \in A\}$ Trägermenge von P_μ und jedes $\eta(K)$ ist eine Kurve, die a mit b verbindet.

$\square$

Bemerkung 2.16
Dieses Resultat ist eine stochastische Version des Resultats von Hutchinson [16], Seite 730f.

Kapitel 3

Dimensionsuntersuchung

3.1 Exkurs: Ähnlichkeitsdimension

Der folgende Begriff kommt aus der Theorie der deterministischen Fraktale, entspricht also dem Einsatz eines Diracmaßes μ in der hier vorgestellten Konstruktion.

Definition 3.1
Seien S_p $(p \in E^1)$ Ähnlichkeitsabbildungen und $\mu = \delta_{(S_0,\ldots,S_{N-1})}$. Dann heißt

$$\dim_A = \imath_s \left(\sum_{p \in E^1} \mathrm{Lip}(S_p)^s = 1 \right)$$

die Ähnlichkeitsdimension von $K = \bigcap_{q \in \mathbb{N}} \bigcup_{\alpha \in E^{q+1}} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)}$.

Die folgende Bedingung an ein iteriertes Funktionensystem, nicht zuviel zu Überlappen wurde von Hutchinson [16] eingeführt.

Definition 3.2
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Für das iterierte Funktionensystem $(S_0, \ldots, S_{N-1})$ existiere eine offene Menge G sodass gilt:

- $S_p(G) \cap S_{p'}(G) = \emptyset$ für $p \neq p'$
- $S_p(G) \subseteq G \;\; \forall p \in E^1$

Dann sagt man $(S_0, \ldots, S_{N-1})$ erfüllt die offene Mengenbedingung (OMB).

Diese beiden Begriffe zusammengesetzt ermöglichen ein einfache Berechnung der Hausdorffdimension von K, es gilt nämlich:

Satz 3.3
Seien S_p, $p \in E^1$ Ähnlichkeitsabbildungen, $\mu = \delta_{(S_0,\ldots,S_{N-1})}$ und die offene Mengenbedingung sei erfüllt. Dann gilt

$$s_0 := \dim_A(K) = \dim_H(K).$$

Zusätzlich gilt $0 < \mathscr{H}^{s_0}(K) < \infty$.

Dieses Resultat wird im folgenden für zufällige Fraktale verallgemeinert. Es wird sich zeigen, dass dies in einem gewissen Rahmen möglich ist, und die Dimension fast sicher

$$\jmath_s\left(\sum_{p\in E^1} \mathbb{E}\,\mathrm{Lip}(S_p)^s = 1\right)$$

ist. Der obrige Satz kann fast aus diesem Resultat deduziert werden, es wird etwas mehr als die OMB gefordert, konkret dass man für G das Innere von X wählen kann.

Interessant ist, dass der Zusatz verlorengeht sobald wirklich Zufall im Spiel ist. Dann gilt nämlich sogar

$$\mathscr{H}^{s_0}(K) = 0 \text{ fast sicher.}$$

Auch dieses auf Graf [13] zurückgehende Resultat wird im folgenden vorgestellt.

3.2 Wahrscheinlichkeitstheoretische Vorbereitung

In diesem Kapitel sei $g : \mathrm{Con}(X) \to [0, 1)$ eine borelmessbare Funktion. Wie im vorigen Kapitel sei $\Omega = (\mathrm{Con}(X)^N)^{E^*}$ und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathrm{Con}(X)^N$. Für $\Gamma \subset E^*$ und $s > 0$ definiere eine Funktion $f_{\Gamma,s} : \Omega \to \mathbb{R}_+$ als

$$\begin{aligned} f_{\Gamma,s}(\mathscr{S}) &= \sum_{\alpha\in\Gamma}\prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^s \\ f_{\emptyset,s} &\equiv 1. \end{aligned}$$

Für $f_{E^q,s}$ wird die kürzere Schreibweise $f_{q,s}$ verwendet.

Motivation 9
Im Folgenden wird es um die Verallgemeinerung von Satz 1.2 gehen. Als Funktion g wird später konkret die Funktion Lip *verwendet. Wählt man* $s = 1$

und $g = \mathrm{Lip}$ so gibt $f_{q,1}(\mathscr{S})$ die Länge der zufälligen Cantormenge, die von $\mathscr{S}$ erzeugt wird, nach q Schritten an. Vorsicht ist geboten, da diese Interpretation nur für Ähnlichkeitsabbildungen S_α richtig ist. Die im Satz 1.2 definierte Zufallsvariable X_k kann man folgendermaßen umschreiben:

$$X_k = \sum_{|\alpha|=k} u_\alpha^{s_0} = \sum_{\alpha\in E^k} \prod_{n=1}^{k} x_{\alpha|n}^{s_0} = \sum_{\alpha\in E^k} \prod_{n=1}^{k} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n})^{s_0} = f_{q,s_0}.$$

Satz 3.4
Die Funktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$,

$$s \mapsto \int \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^s d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1})$$

(wobei $0^0 = 0$) ist monoton fallend. Wenn

$$\int \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^0 d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) > 1 \tag{3.1}$$

gilt, dann existiert ein eindeutiger Wert $s_0 > 0$ sodass

$$\int \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) = 1.$$

Beweis: Da $g(S_p) \in [0, 1)$ ist $g(S_p)^s$ monoton fallend in s. Die Monotonie der Funktion folgt aus der Monotonie der Summanden.

Wegen (3.1) kann die Funktion nicht konstant 0 sein und ist daher in s sogar streng monoton fallend. Offensichtlich ist die Funktion stetig und es gilt

$$\lim_{s\to\infty} \int \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^s d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) = 0,$$

also existiert eine Stelle s_0, an der die Funktion den Wert 1 annimmt.

□

Definition 3.5
Es bezeichne $s_0 = s_0(g)$ die Stelle aus dem vorigen Satz, an der gilt:

$$\int \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) = 1. \tag{3.2}$$

Motivation 10
Auch diese Funktion wurde bereits im Motivationskapitel eingeführt und dort mit $\Phi(s)$ bezeichnet.

Bemerkung 3.1
(3.2) lässt sich schreiben als

$$\mathbb{E}\sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} = 1.$$

Für festes $\alpha \in E^*$ gilt dann

$$\mathbb{E}\sum_{p=0}^{N-1} g(S_{\alpha * p})^{s_0} = 1, \tag{3.3}$$

da auf $\Omega = (\mathrm{Con}(X)^N)^{E^*}$ immer das Produktmaß μ^{E^*} verwendet wird.

Definition 3.6
Es bezeichne $D^q = \bigcup_{r=0}^q E^r$ also alle Wörter α mit $0 \le |\alpha| \le q$. Für $\alpha \in E^* \backslash \{\Lambda\}$ seien Funktionen $\pi_\alpha : \Omega \to \mathrm{Con}(X)$ definiert als

$$\mathscr{S} \mapsto S_\alpha.$$

Wähle eine beliebige Abbildung $S \in \mathrm{Con}(X)$ und setzte

$$\pi_\Lambda : \mathscr{S} \mapsto S,$$

also konstant. Definiere weiters

$$\mathscr{F}_k = A_\sigma\left(\bigcup_{\alpha\in D^k} \pi_\alpha^{-1}\right).$$

$\mathscr{F}_k$ ist also die kleinste σ-Algebra, bezüglich der die Abbildungen π_α mit $|\alpha| \le k$ messbar sind.

Bemerkung 3.2

$$\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\},$$

da π_Λ konstant.

Motivation 11
Sei B eine Borelmenge von $\mathrm{Con}(X)$. *Wie sieht dann* $\pi_\alpha^{-1}(B)$ *konkret aus? Es ist diejenige Borelmenge auf* Ω, *die in der „α-Koordinate“ die Menge B stehen hat, und sonst jeweils ganz* $\mathrm{Con}(X)$, *also*

$$\mathrm{Con}(X) \times \mathrm{Con}(X) \times \ldots \times \underbrace{B}_{\alpha\text{-Koordinate}} \times \ldots \times \mathrm{Con}(X) \times \ldots .$$

Man spricht in diesem Zusammenhang auch oft von Zylindermengen, da man sich die Form wie einen Zylinder vorstellen kann. Eine Koordinate ist „eingeschränkt“, die anderen jeweils die ganze „Achse“.

Die σ-Algebra $\mathscr{F}_k$ beobachtet anschaulich nur, was sich in den Koordinaten α mit $|\alpha| \leq k$ abspielt, anhand der Cantormengen könnte man sich das so vorstellen, dass erst die ersten k Iterationsschritte durchgeführt sind und die übrigen Kontraktionsfaktoren erst „gezogen“ werden.

Vergleicht man die σ-Algebren $\mathscr{F}_k$ mit der Filtration $\mathcal{F}_k$ aus Satz 1.2, so erkennt man einen Unterschied. Die $\mathscr{F}_k$ werden von den π_α erzeugt, die $\mathcal{F}_k$ von $\mathrm{Lip} \circ \pi_\alpha$. *Trotzdem sind die σ-Algebren gleich, da für die zufällige Cantormenge die Abbildung allein durch den Index α (Richtung) und den Kontraktionsfaktor (Stauchung) festgelegt wird, weiß man z.B. dass die Abbildung S_{LRLL} den Kontraktionsfaktor a hat, ist $S_{LRLL}(x) = \frac{ax}{3}$, es macht also in dem konkreten Fall keinen Unterschied.*

Satz 3.7
Sei

$$\int \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^0 d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) > 1$$

und $s_0 = s_0(g)$ und $\mathscr{F}_q$ wie in den obigen Definitionen. Dann ist für jedes $p \in \mathbb{N}$, f_{q,s_0} ein p-fach integrierbares Martingal bezüglich $(\mathscr{F}_q)_{q\in\mathbb{N}}$, welches μ-fast sicher und in L^p gegen eine Funktion $f = f^{(g)}$ konvergiert. Wenn für μ-fast alle $(S_0, \ldots, S_{N-1})$ gilt, dass $g(S_p) > 0$ für $p \in \{0, \ldots, N-1\}$, dann gilt $f > 0$ fast sicher.

Beweis: Zuerst soll gezeigt werden, dass f_{q,s_0} $\mathscr{F}_q$-messbar ist. Dazu muss man die Funktion nur umschreiben

$$f_{q,s_0}(\mathscr{S}) = \sum_{\alpha\in E^q} \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} = \sum_{\alpha\in E^{q+1}} \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(\pi_{\alpha|n}(\mathscr{S}))^{s_0}$$

und man erhält die $\mathscr{F}_q$-Messbarkeit aus der $\mathscr{F}_q$-Messbarkeit der π_α für $|\alpha| \leq q$.

Die $(\mathscr{F}_q)_{q\in\mathbb{N}}$ bilden eine Filtration und damit ist der Prozess $(f_{q,s_0}, \mathscr{F}_q)_{q\in\mathbb{N}}$ adaptiert. Es gilt die Martingaleigenschaft zu zeigen. Sei also $q \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(f_{q+1,s_0}|\mathscr{F}_q) &= \mathbb{E}\left(\sum_{\alpha\in E^{q+1}} \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} | \mathscr{F}_q\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{\alpha\in E^{q}} \sum_{p=0}^{N-1} \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} g(S_{\alpha * p})^{s_0} | \mathscr{F}_q\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{\alpha\in E^{q}} \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} \sum_{p=0}^{N-1} g(S_{\alpha * p})^{s_0} | \mathscr{F}_q\right) \\
&= \sum_{\alpha\in E^{q}} \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} \mathbb{E}\left(\sum_{p=0}^{N-1} g(S_{\alpha * p})^{s_0} | \mathscr{F}_q\right) \\
&= f_{q,s_0} \mathbb{E}\left(\sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} | \mathscr{F}_q\right) \\
&= f_{q,s_0} \underbrace{\mathbb{E}\left(\sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0}\right)}_{=1}.
\end{aligned}
$$

Für die zweite Gleichheit wird der letzte Buchstabe „abgespalten“, in der vierten Gleichheit geht die $\mathscr{A}_q$-Messbarkeit aller Terme, die nur von Wörtern der Länge kleiner q abhängen. Die fünfte Gleichheit wurde in vorhergehender Bemerkung 3.3 erklärt und für die sechste Gleichheit hängt der Term im Erwartungswert nicht mehr von α ab, also reduziert sich der bedingte Erwartungswert zu einer normalen Erwartung.

Hieraus folgt auch, dass f_{q,s_0} L^1-beschränkt ist, da für alle $q \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}f_{q,s_0} = 1$ gilt. Bis jetzt wurde gezeigt, dass $(f_{q,s_0}, \mathscr{F}_q)_{q\in\mathbb{N}}$ ein L^1-beschränktes Martingal ist.

Mittels Induktion nach $k \in \mathbb{N}$ soll nun die L^p-Beschränktheit gezeigt werden. Der Induktionsanfang für $k = 1$ ist schon erledigt.

Sei also $k > 1$ und für alle $m < k$, $(f_{q,s_0})_{q\in\mathbb{N}}$ L^m-beschränkt. Definiere $M = \sup\{\|f_{q,s_0}\|_m \,|q \in \mathbb{N}, m < k\}$, wobei $\|.\|_m$ die L^m-Norm bezeichnet.

$$
\begin{aligned}
\|f_{q+1,s_0}\|_k^k &= \int f_{q+1,s_0}^k(\mathscr{S})d\mu^{E^*}(\mathscr{S}) \\
&= \int \left(\sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} \underbrace{\sum_{\alpha\in E^q} \prod_{n=2}^{|\alpha|+1} g(S_{p*\alpha|n})^{s_0}}_{=f_{q,s_0}(\mathscr{S}^{(p)})} \right)^k d\mu^{E^*}(\mathscr{S}) \\
&= \int \left(\sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} f_{q,s_0}(\mathscr{S}^{(p)}) \right)^k d\mu \otimes (\mu^{E^*})^N (\varphi^{-1}(\mathscr{S})) \\
&= \int\int \left(\sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} f_{q,s_0}(\mathscr{S}^{(p)}) \right)^k d(\mu^{E^*})^N(\mathscr{S}^{(0)},\ldots,\mathscr{S}^{(N-1)}) \\
&\qquad d\mu(S_0,\ldots,S_{N-1}) \\
&= \sum_{v_0+\ldots+v_{N-1}=k} \frac{k!}{v_0!\ldots v_{N-1}!} \int (g(S_0)^{v_0}\cdot\ldots\cdot g(S_{N-1})^{v_{N-1}})^{s_0} \\
&\quad \cdot \|f_{q,s_0}\|_{v_0}^{v_0}\cdot\ldots\cdot\|f_{q,s_0}\|_{v_{N-1}}^{v_{N-1}} d\mu(S_0,\ldots,S_{N-1}) \\
&= \int (g(S_0)^{ks_0}+\ldots+g(S_{N-1})^{ks_0})d\mu(S_0,\ldots,S_{N-1})\,\|f_{q,s_0}\|_k^k \\
&\quad + \sum_{\substack{v_0+\ldots+v_{N-1}=k \\ v_0,\ldots,v_{N-1}<k}} \frac{k!}{v_0!\ldots v_{N-1}!} \int (g(S_0)^{v_0}\cdot\ldots\cdot g(S_{N-1})^{v_{N-1}})^{s_0} \\
&\quad \cdot \|f_{q,s_0}\|_{v_0}^{v_0}\cdot\ldots\cdot\|f_{q,s_0}\|_{v_{N-1}}^{v_{N-1}}.
\end{aligned}
$$

Die erste Gleichheit ist die Definition der L^k Norm. Die zweite Gleichheit ist die Definition von f_{q+1,s_0}, wobei diesmal der erste Buchstabe abgespalten wird. Unter der Schleife wird die Notation aus Lemma 2.24 verwendet, welches bei der dritten Gleichheit angewand wird. Für die vierte Gleichheit wird der Satz von Fubini benützt. Für die fünfte Gleichheit wird die k-te Potenz ausmultipliziert und die inneren Integrale werden wieder als Norm geschrieben($v_i \in \mathbb{N}$). Die sechste Gleichheit zerlegt die Summe in zwei Teile: Einen indem ein $v_i = k$ ist und den Rest.

Der rechte Ausdruck enthält noch immer k-Norm-Ausdrücke, allerdings konnte das q um Eins reduziert werden. Mittels Rückwärtsinduktion nach q

arbeitet man sich bis 1 herunter und erhält:

$$\begin{aligned}
\|f_{q+1,s_0}\|_k^k &= \left(\int (g(S_0)^{ks_0} + \ldots + g(S_{N-1})^{ks_0}) d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1})\right)^q \|f_{1,s_0}\|_k^k \\
&\quad + \sum_{\substack{v_0+\ldots+v_{N-1}=k \\ v_0,\ldots,v_{N-1}<k}} \left(\frac{k!}{v_0! \ldots v_{N-1}!} \cdot \right. \\
&\quad \cdot \int g(S_0)^{v_0 s_0} \cdot \ldots \cdot g(S_{N-1})^{v_{N-1} s_0} d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) \\
&\quad \cdot \left[\sum_{\kappa=0}^{q-1} \left(\int (g(S_0)^{ks_0} + \ldots + g(S_{N-1})^{ks_0}) d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) \right)^\kappa \right. \\
&\quad \left.\left. \cdot \|f_{q-\kappa,s_0}\|_{v_0}^{v_0} \cdot \ldots \cdot \|f_{q-\kappa,s_0}\|_{v_{N-1}}^{v_{N-1}} \right] \right) \\
&\leq \left(\int (g(S_0)^{ks_0} + \ldots + g(S_{N-1})^{ks_0}) d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1})\right)^q \|f_{1,s_0}\|_k^k \\
&\quad + M^k \int (g(S_0)^{s_0} + \ldots + g(S_{N-1})^{s_0})^k d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) \\
&\quad \cdot \sum_{\kappa=0}^{q-1} \left(\int (g(S_0)^{ks_0} + \ldots + g(S_{N-1})^{ks_0}) d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) \right)^\kappa .
\end{aligned}$$

Da $0 \leq f_{1,s_0} \leq N$ und wegen der Wahl von s_0 derart, dass

$$\int (g(S_0)^{ks_0} + \ldots + g(S_{N-1})^{ks_0}) d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) < 1$$

(Monotonie aus Satz 3.4) folgt die L^k-Beschränktheit. Wegen dem Konvergenzsatz für L^p-Martingale folgt die Existenz eines $f \in L^k$ sodass $(f_{q,s_0})_{q\in\mathbb{N}}$ μ^{E^*}-fast sicher und in $L^k(\Omega)$ gegen dieses f konvergiert.
Es bleibt zu zeigen, dass $f > 0$ μ^{E^*}-fast sicher, gegeben dass $g(S_p) > 0$ für μ-fast alle $(S_0, \ldots, S_{N-1})$. Zuerst folgendes Lemma:

Lemma 3.8
Es gelten die Annahmen und die Bezeichnung f aus dem vorigen Satz. Für $\alpha, \beta \in E^*$ sei $\mathscr{S}^\alpha$ definiert als

$$\mathscr{S}^\alpha_\beta = \mathscr{S}_{\alpha*\beta}.$$

Dann sind für μ^{E^*}-fast alle $\mathscr{S}$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. *Für alle* $\alpha \in E^*$: $\lim_{q\to\infty} f_{q,s_0}(\mathscr{S}^\alpha) = f(\mathscr{S}^\alpha)$.

2. *Für alle Minimalüberdeckungen* $\Gamma \subseteq E^*$ *gilt*

$$f(\mathscr{S}) = \sum_{\alpha\in\Gamma} \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} f(\mathscr{S}^\alpha).$$

Beweis: Es bezeichne N die Nullmenge, auf der nicht $\lim_{q\to\infty} f_{q,s_0}(\mathscr{S}) = f(\mathscr{S})$ gilt und $N_\alpha = \{\mathscr{S} \in \Omega : \mathscr{S}^\alpha \in N\}$, dann gilt 1. auf

$$\left(\bigcup_{\alpha\in E^*} N_\alpha\right)^c. \tag{3.4}$$

1. ist also gezeigt, wenn es gelingt N_α als Nullmenge zu identifizieren, da E^* abzählbar ist.

Dazu überlegt man sich, dass

$$\Omega = (\mathrm{Con}(X)^N)^{E^*} = (\mathrm{Con}(X)^N)^{\alpha*E^*} \times (\mathrm{Con}(X)^N)^{E^*\setminus\alpha*E^*}$$

wobei mit $\alpha{*}E^*$ alle endlichen Wörter, denen das Wort α vorangeht, gemeint sind. Wenn man N_α derart zerlegt, erhält man:

$$\mu(N_\alpha) \le \mu(N \times \widetilde{\Omega}) = \mu(N) = 0,$$

wobei $\widetilde{\Omega} = (\mathrm{Con}(X)^N)^{E^*\setminus\alpha*E^*}$.

Für den Beweis von 2. sei Γ minimal und es sei $\mathscr{S} \in \Omega$ so, dass 1. erfüllt ist. Für alle $q \in \mathbb{N}$ mit $\Gamma \prec E^q$ gilt:

$$\begin{aligned}
f_{q,s_0}(\mathscr{S}) &= \sum_{\alpha\in E^q} \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} \\
&= \sum_{\alpha\in\Gamma} \sum_{\beta\in E^{q-|\alpha|}} \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} \prod_{p=1}^{q-|\alpha|} g(S_{\alpha*(\beta|p)})^{s_0} \\
&= \sum_{\alpha\in\Gamma} \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} \sum_{\beta\in E^{q-|\alpha|}} \prod_{p=1}^{q-|\alpha|} g(S_{\alpha*(\beta|p)})^{s_0} \\
&= \sum_{\alpha\in\Gamma} \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} f_{q-|\alpha|,s_0}(\mathscr{S}^\alpha).
\end{aligned}$$

Jetzt geht man auf beiden Seiten zum Grenzwert $q \to \infty$ über erhält man die Behauptung des Lemmas.

□

Fortsetzung des Beweises von Satz 3.7
Es war noch zu zeigen, dass $f > 0$ μ^{E^*}-fast sicher, gegeben dass $g(S_p) > 0$ für μ-fast alle $(S_0, \ldots, S_{N-1})$.

Dazu verwendet man die Lemmata 2.24 und 3.8:

$$\begin{aligned}\mu^{E^*}(\{\mathscr{S}|f(\mathscr{S}) = 0\}) &= \mu \otimes (\mu^{E^*})^N \Bigg(\Bigg\{((S_0, \ldots, S_{N-1}), (\mathscr{S}^{(0)}, \ldots, \mathscr{S}^{(N-1)})) \\ &\qquad \Bigg| \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} f(\mathscr{S}^{(p)}) = 0\Bigg\}\Bigg) \\ &= \mu \otimes (\mu^{E^*})^N(\{((S_0, \ldots, S_{N-1}), (\mathscr{S}^{(0)}, \ldots, \mathscr{S}^{(N-1)})) \\ &\qquad |\forall p \in E : g(S_p)^{s_0} f(\mathscr{S}^{(p)}) = 0\}).\end{aligned}$$

Da $g(S_p) > 0$ für μ-fast alle $(S_0, \ldots, S_{N-1})$ folgt:

$$\mu^{E^*}(\{\mathscr{S}|f(\mathscr{S}) = 0\}) = (\mu^{E^*}(\{\mathscr{S}|f(\mathscr{S}) = 0\}))^N.$$

Also gilt $\mu^{E^*}(\{\mathscr{S}|f(\mathscr{S}) = 0\}) = 0$ oder $= 1$.
Da aber $\mathbb{E}(f) = \mathbb{E}(f_{q,s_0}) = 1$ scheidet die Möglichkeit „$= 1$“ aus und es folgt

$$\mu^{E^*}(\{\mathscr{S}|f(\mathscr{S}) = 0\}) = 0.$$

□

Motivation 12
In Satz 1.2 wurde die Funktion X_k bereits als L^2-Martingal identifiziert. Jetzt hat sie sich sogar als L^k-Martingal für beliebiges $k \in \mathbb{N}, k \neq 0$ herausgestellt.

Folgerung 3.9
Sei $\int \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^0 d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) > 1$ und $s_0 = s_0(g)$. Dann gilt für μ^{E^*}-fast alle $\mathscr{S} \in \Omega$:

$$\sup_{\Gamma_0 \in \mathrm{Min}} \inf\{f_{\Gamma,s_0}(\mathscr{S})|\Gamma \in \mathrm{Min}, \Gamma \succ \Gamma_0\} < \infty.$$

Beweis:

Für μ^{E^*}-fast alle $\mathscr{S}$ gilt:

$$\sup_{\Gamma_0\in\mathrm{Min}} \inf\{f_{\Gamma,s_0}(\mathscr{S})|\Gamma \in \mathrm{Min}, \Gamma \succ \Gamma_0\} \leq \sup_{q_0\in\mathbb{N}} \inf_{q\geq q_0} f_{q,s_0}(\mathscr{S}) = f(\mathscr{S}).$$

Da $\int f d\mu^{E^*} < \infty$ wegen Satz 3.7 folgt die Behauptung.

□

Das nächste Ziel ist das Finden einer unteren Schranke für

$$\liminf_{f_q,t}$$

für $t < s_0$.

Lemma 3.10
Sei $\int \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^0 d\mu(S_0,\ldots,S_{N-1}) > 1$. $f = f^{(g)}$ sei definiert wie in Satz 3.7. Dann existiert zu $t < s_0 = s_0(g)$ für μ^{E^*}-fast alle $\mathscr{S} \in \Omega$ ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle α in E^* mit $|\alpha| \geq m$ gilt:

$$\prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} f(\mathscr{S}^\alpha) \leq \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^t.$$

Beweis: Seien $\alpha \in E^*$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig.
Wegen der Chebyshev-Markov'schen Ungleichung (Satz A.4) gilt:

$$\begin{aligned}
&\mu^{E^*}\left(\left\{\mathscr{S}\,\middle|\, \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0-t} f(\mathscr{S}^\alpha) > 1\right\}\right)\\
\leq\ & \int \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{k(s_0-t)} f(\mathscr{S}^\alpha)^k d\mu^{E^*}(\mathscr{S})\\
=\ & \int \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{k(s_0-t)} d\mu^{E^*}(\mathscr{S}) \int f(\mathscr{S})^k d\mu^{E^*}(\mathscr{S}).
\end{aligned}$$

Das Integral darf aufgespalten werden, da $\mathscr{S}^\alpha$ nicht von $S_{\alpha|n}$ abhängt.

Geht man auf der linken Seite zur Vereinigung aller $\alpha \in E^q$ über und verwendet die Subaddidivität des Maßes, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&\mu^{E^*}\left(\left\{\mathscr{S}\,\middle|\, \exists\alpha \in E^q : \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0-t} f(\mathscr{S}^\alpha) > 1\right\}\right)\\
\leq\ & \int \sum_{\alpha\in E^q} \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{k(s_0-t)} d\mu^{E^*}(\mathscr{S}) \int f(\mathscr{S})^k d\mu^{E^*}(\mathscr{S}).
\end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k(s_0 - t) > s_0$ ergibt sich:

$$\int \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{k(s_0-t)} d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) < 1. \tag{3.5}$$

Wegen der Definition von μ^{E^*} als Produktmaß gilt:

$$\int \sum_{\alpha \in E^q} \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{k(s_0-t)} d\mu^{E^*}(\mathscr{S}) = \left[\int \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{k(s_0-t)} d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) \right]^q$$

und $\int f^k d\mu^{E^*} < \infty$ aus Satz 3.7 folgt:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \mu^{E^*} \left(\left\{ \mathscr{S} \middle| \exists \alpha \in E^q : \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0-t} f(\mathscr{S}^\alpha) > 1 \right\} \right) < \infty.$$

Jetzt folgt aus dem Lemma von Borel-Cantelli

$$\mu^{E^*} \left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{q \geq m} \left\{ \mathscr{S} \middle| \exists \alpha \in E^q : \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0-t} f(\mathscr{S}^\alpha) > 1 \right\} \right) = 0.$$

Nimmt man das Komplement der Menge auf der linken Seite, folgt die Behauptung des Lemmas.

$\square$

Satz 3.11
Sei $\int \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^0 d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) > 1$. Für $t < s_0 = s_0(g)$ und μ^{E^*}-fast alle $\mathscr{S} \in \Omega$ gilt:

$$\sup_{\Gamma_0 \in \mathrm{Min}} \inf \{ f_{\Gamma,t}(\mathscr{S}) | \Gamma \in \mathrm{Min}, \Gamma \succ \Gamma_0 \} \geq f(\mathscr{S}).$$

Beweis: $\mathscr{S} \in \Omega$ erfülle die folgenden Bedingungen:

$$\exists m \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha \in E^* : |\alpha| \geq m \Rightarrow \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} f(\mathscr{S}^\alpha) \leq \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^t \tag{3.6}$$

$$\forall \Gamma \in \mathrm{Min} : f(\mathscr{S}) = \sum_{\alpha \in \Gamma} \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n}) f(\mathscr{S}^\alpha). \tag{3.7}$$

Dann erhält man für alle $\Gamma \in \mathrm{Min}$ mit $\Gamma \succ E^m$,

$$f(\mathscr{S}) = \sum_{\alpha\in\Gamma}\prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} f(\mathscr{S}^\alpha) \leq \sum_{\alpha\in\Gamma}\prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{t} = f_{\Gamma,t}(\mathscr{S}),$$

und damit

$$f(\mathscr{S}) \leq \sup_{\Gamma_0\in\mathrm{Min}} \inf\{f_{\Gamma,t}(\mathscr{S})|\Gamma \succ \Gamma_0\}.$$

Aus den Lemmata 3.8 und 3.10 erhält man, dass μ^{E^*}-fast alle $\mathscr{S}$ (3.6) und (3.7) erfüllen und damit ist der Satz bewiesen.

□

Satz 3.12
Es gelte für μ-fast alle $(S_0,\ldots,S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(X)^N$ und $p \in E^1$, $g(S_p) > 0$. Sei $t < s_0 = s_0(g)$ und $d \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt für μ^{E^*}-fast alle $\mathscr{S}$:

$$\sup_{\Gamma_0}\inf\left\{\sum_{\alpha\in\Gamma} g(S_\alpha)^d \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^t | \Gamma \in \mathrm{Min}, \Gamma \succ \Gamma_0\right\} > 0.$$

Beweis: Wegen Lemma 2.24 und da alle $g(S_p) > 0$ sind gilt:

$$\begin{aligned}
& \mu^{E^*}\left(\left\{\mathscr{S}\middle| \sup_{\Gamma_0}\inf_{\Gamma\succ\Gamma_0}\sum_{\alpha\in\Gamma} g(S_\alpha)^d \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^t = 0\right\}\right) \\
= \quad & \mu\otimes(\mu^{E^*})^N\Bigg(\Bigg\{((S_0,\ldots,S_{N-1}),(\mathscr{S}^{(0)},\ldots,\mathscr{S}^{(N-1)}))\Bigg| \\
& \qquad \sup_{\Gamma_0}\inf_{\Gamma\succ\Gamma_0}\sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^t \sum_{\alpha:p*\alpha\in\Gamma} g(S^{(p)}_\alpha)^d \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S^{(p)}_{\alpha|n})^t = 0\Bigg\}\Bigg) \\
= \quad & \mu\otimes(\mu^{E^*})^N\Bigg(\Bigg\{((S_0,\ldots,S_{N-1}),(\mathscr{S}^{(0)},\ldots,\mathscr{S}^{(N-1)}))\Bigg| \\
& \qquad \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^t \sup_{\overline{\Gamma_0}}\inf_{\Gamma\succ\overline{\Gamma_0}}\sum_{\alpha\in\Gamma} g(S^{(p)}_\alpha)^d \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S^{(p)}_{\alpha|n})^t = 0\Bigg\}\Bigg) \\
= \quad & \left[\mu^{E^*}\left(\left\{\mathscr{S}\middle| \sup_{\overline{\Gamma_0}}\inf_{\Gamma\succ\overline{\Gamma_0}}\sum_{\alpha\in\Gamma} g(S_\alpha)^d \prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^t = 0\right\}\right)\right]^N
\end{aligned}$$

und damit kann

$$\mu^{E^*}\left(\left\{\mathscr{S}\,\middle|\,\sup_{\Gamma_0}\inf_{\Gamma\succ\Gamma_0}\sum_{\alpha\in\Gamma}g(S_\alpha)^d\prod_{n=1}^{|\alpha|}g(S_{\alpha|n})^t=0\right\}\right)$$

nur $= 0$ oder $= 1$ sein. Wenn es noch gelingt, den Fall „=1 "auszuschließen, ist der Beweis erbracht.

Da $\int\sum_{p=0}^{N-1}g(S_p)^t d\mu(S_0,\dots,S_{N-1})>1$ gibt es ein $\xi>0$ derart, dass

$$\int_A\sum_{p=0}^{N-1}g(S_p)^t d\mu(S_0,\dots,S_{N-1})>1, \tag{3.8}$$

wobei $A=\{(S_0,\dots,S_{N-1})|g(S_p)\geq\xi, p\in E\}$.
Definiere $g_\xi:\mathrm{Con}(X)\to[0,1)$ als:

$$g_\xi(S)=\begin{cases}0 & : \quad g(S)<\xi\\ g(S) & : \quad g(S)\geq\xi\end{cases}.$$

Dann folgt aus (3.8) $s_0(g_\xi)>t$. Bezeichne $f^{(\xi)}=f^{(g_\xi)}$. Für alle $\mathscr{S}\in\Omega$ gilt:

$$\begin{aligned}\sup_{\Gamma_0}\inf_{\Gamma\succ\Gamma_0}\sum_{\alpha\in\Gamma}g(S_\alpha)^d\prod_{n=1}^{|\alpha|}g(S_{\alpha|n})^t &\geq \sup_{\Gamma_0}\inf_{\Gamma\succ\Gamma_0}\sum_{\alpha\in\Gamma}g_\xi(S_\alpha)^d\prod_{n=1}^{|\alpha|}g(S_{\alpha|n})^t\\ &\geq \xi^d\sup_{\Gamma_0}\inf_{\Gamma\succ\Gamma_0}\sum_{\alpha\in\Gamma}\prod_{n=1}^{|\alpha|}g_\xi(S_{\alpha|n})^t\\ &\geq f^{(\xi)}(\mathscr{S}).\end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung gilt laut Satz 3.11. Nach Satz 3.7 ist $\int f^{(\xi)}d\mu^{E^*}>0$ und damit gilt mit positiver Wahrscheinlichkeit:

$$\sup_{\Gamma_0}\inf_{\Gamma\succ\Gamma_0}\sum_{\alpha\in\Gamma}g(S_\alpha)^d\prod_{n=1}^{|\alpha|}g(S_{\alpha|n})^t>0.$$

Damit scheidet die Möglichkeit „= 1" aus und die Behauptung ist bewiesen.

□

Definition 3.13
Für $\Gamma\subseteq E^*$ sei

$$|\Gamma|=\max\{|\alpha|:\alpha\in\Gamma\}.$$

Lemma 3.14
Wieder sei $\int \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^0 d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) > 1$ *und* $s_0 = s_0(g)$. *Für* $n \in \mathbb{N}$ *definiere Funktionen* $h_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *als*

$$h_n(\mathscr{S}) = \inf\{f_{\Gamma,s_0}(\mathscr{S}) | \Gamma \in \mathrm{Min}, \Gamma \neq \{\Lambda\}, |\Gamma| \leq n\}.$$

Dann ist $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton nichtsteigende Folge von borelmessbaren Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall \mathscr{S} \in \Omega : h_{n+1}(\mathscr{S}) = \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} \min(1, h_n(\mathscr{S}^p))$.
2. $h := \inf_{n\in\mathbb{N}} h_n = \inf_{\Gamma\in\mathrm{Min}\setminus\{\Lambda\}} f_{\Gamma,s_0} \geq 0$.
3. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   - (a) $h > 0$ *auf einer Menge mit positivem Maß* μ^{E^*}.
   - (b) $h > 0$ μ^{E^*}*-fast sicher.*
   - (c) $\sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} = 1$ μ*-fast sicher.*

Beweis: Das Infimum reellwertiger messbarer Funktionen ist wieder messbar (vgl. z.B. Halmos [15], S.84, Theorem A). Die Monotonie erkennt man, da die Mengen, über welche das Infimum gebildet wird bezüglich $\subseteq$ monoton wachsend sind.
1. Für $\Gamma \in \mathrm{Min}$ und $p \in E^1$ sei

$$\Gamma(p) = \{\alpha \in E^* | p * \alpha \in \Gamma\}.$$

Es soll gezeigt werden, dass $\Gamma(p) \in \mathrm{Min}$: Sei $\beta \in E^\infty$ und $p \in E$ beliebig und $\gamma = \gamma_0\gamma_1 \ldots \gamma_m$ das eindeutige Element aus Γ, welches $p * \beta$ vorangeht. Dann ist $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_m$ ein Element aus $\Gamma(p)$, welches β vorangeht. Leicht überprüft man die Eindeutigkeit, denn gebe es ein zweites Element δ, welches β vorangeht, ginge $p * \delta$ dem Wort $p * \beta$ voran und wäre wegen der Minimalüberdeckungseigenschaft von Γ somit gleich γ. Also ist $\Gamma(p)$ selbst wieder Minimalüberdeckung.
Weiters gilt für alle $\mathscr{S}$:

$$f_{\Gamma,s_0}(\mathscr{S}) = \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} f_{\Gamma(p),s_0}(\mathscr{S}). \tag{3.9}$$

Mit dieser Identität erhält man:

$$\begin{aligned}
h_{n+1}(\mathscr{S}) &= \inf\{f_{\Gamma,s_0}(\mathscr{S})|\Gamma \in \mathrm{Min}, \Gamma \neq \{\Lambda\}, |\Gamma| \leq n+1\} \\
&= \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} \inf\{f_{\Gamma(p),s_0}(\mathscr{S}^p)|\Gamma \in \mathrm{Min}, \Gamma \neq \{\Lambda\}, |\Gamma| \leq n+1\} \\
&= \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} \min(1, \inf\{f_{\overline{\Gamma},s_0}(\mathscr{S}^p)|\overline{\Gamma} \in \mathrm{Min}, \overline{\Gamma} \neq \{\Lambda\}, |\overline{\Gamma}| \leq n\}) \\
&= \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} \min(1, h_n(\mathscr{S}^p)).
\end{aligned}$$

2. ist trivial.
3. (a) $\Rightarrow$ (c)
Aus 1. und 2. erhält man die folgende Gleichheit für alle $\mathscr{S} \in \Omega$:

$$h(\mathscr{S}) = \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} \min(1, h(\mathscr{S}^p)). \tag{3.10}$$

Da $g < 1$ folgt aus (3.10), dass h durch $N(= \#E^1)$ beschränkt und daher μ^{E^*}-integrierbar ist. Unter Anwendung von Lemma 2.24 und (3.10) erhält man

$$\begin{aligned}
\int h d\mu^{E^*} &= \int\int \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} \min(1, h(\mathscr{S}^p)) \\
&\qquad\qquad d(\mu^{E^*})^N(\mathscr{S}^{(0)}, \ldots, \mathscr{S}^{(N-1)}) d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) \\
&= \sum_{p=0}^{N-1} \int g(S_p)^{s_0} d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) \int \min(1, h(\mathscr{S})) d(\mu^{E^*})(\mathscr{S}).
\end{aligned}$$

Wegen der Definition von s_0 gilt aber

$$\sum_{p=0}^{N-1} \int g(S_p)^{s_0} d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) = 1.$$

Es folgt

$$\int h d\mu^{E^*} = \int \min(1, h_n) d\mu^{E^*}$$

und daher

$$h \leq 1 \qquad \mu^{E^*}\text{-f.s.}$$

Dies setzt man in (3.10) ein und erhält für μ-fast alle $(S_0, \ldots, S_{N-1})$ und $(\mu^{E^*})^N$-fast alle $(\mathscr{S}^{(0)}, \ldots, \mathscr{S}^{(N-1)})$:

$$\sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} h(\mathscr{S}^{(p)}) = h(\mathscr{S}) \leq \operatorname{ess\,sup} h =: \eta.$$

Wegen (a) gilt $\eta > 0$, also dividiert man die Gleichung durch η und da $h \leq \eta$ μ^{E^*}-fast sicher führt dies auf

$$\sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} \leq 1 \qquad \mu\text{-f.s.}$$

Nun gilt aber $\sum_{p=0}^{N-1} \int g(S_p)^{s_0} d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) = 1$ und daher bereits

$$\sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} = 1 \qquad \mu\text{-f.s.}$$

(c) $\Rightarrow$ (b)
Da $\sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} = 1$ für μ-fast alle $(S_0, \ldots, S_{N-1})$ gilt

$$h_1 = 1 \qquad \mu^{E^*}\text{-f.s.}$$

und damit nach 1.

$$h_n = 1 \qquad \mu^{E^*}\text{-f.s.}$$

und daher

$$h = 1 \qquad \mu^{E^*}\text{-f.s.}$$

(b) $\Rightarrow$ (a) ist trivial.

$\square$

Satz 3.15
Wieder sei $\int \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^0 d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) > 1$ und $s_0 = s_0(g)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $\sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} = 1$ *μ-fast sicher.*

2. $\sup_{\Gamma_0 \in \mathrm{Min}} \inf\{f_{\Gamma,s_0}(\mathscr{S}) | \Gamma \in \mathrm{Min}, \Gamma \succ \Gamma_0\} > 0$ *für μ^{E^*}-fast alle $\mathscr{S}$.*

3. $\mu^{E^*}(\{\mathscr{S} | \sup_{\Gamma_0} \inf_{\Gamma \succ \Gamma_0} f_{\Gamma,s_0}(\mathscr{S}) > 0\}) > 0.$

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2.:
Folgende Behauptung wird mittels Induktion nach $n = |\Gamma|$ bewiesen:

$$f_{\Gamma,s_0} = 1 \qquad \mu^{E^*}\text{-f.s.}$$

Für $n = 0$ sei an daran erinnert, dass $f_{\{\Lambda\},s_0} = 1$ definiert war. Für den Schritt $n \to n+1$ gilt unter der Notation aus dem Beweis von Satz 3.14 offensichtlich:

$$|\Gamma(p)| = |\Gamma| - 1$$

und damit:

$$f_{\Gamma,s_0}(\mathscr{S}) = \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} f_{\Gamma(p),s_0}(\mathscr{S}) = \sum_{p=0}^{N-1} g(S_p)^{s_0} = 1. \tag{3.11}$$

Die erste Gleichheit kam schon unter Nummer (3.9) vor, die Zweite ist der Induktionsschritt und die Dritte wurde vorausgesetzt. Damit folgt

$$\sup_{\Gamma_0} \inf_{\Gamma \succ \Gamma_0} f_{\Gamma,s_0} = 1 \qquad \mu^{E^*}\text{-f.s.}$$

2. $\Rightarrow$ 3. ist trivial.
3. $\Rightarrow$ 1.: Sei $\Gamma_0 \in \text{Min}$ fest gewählt.
Für $\Gamma \succ \Gamma_0$ und $\alpha \in \Gamma_0$ sei $\Gamma_\alpha = \{\beta \in E^* | \alpha * \beta \in \Gamma\}$, also in der Notation des Beweises von Lemma 3.14 $\Gamma_\alpha = \big[[\Gamma(\alpha_{|\alpha|})](\alpha_{|\alpha-1|})\dots\big](\alpha_1)$ und somit auch eine Minimalüberdeckung. h sei wie in Lemma 3.14, dann gilt für alle $\mathscr{S} \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
\inf_{\Gamma \succ \Gamma_0} f_{\Gamma,s_0}(\mathscr{S}) &= \inf_{\Gamma \succ \Gamma_0} \sum_{\alpha \in \Gamma_0} \left[\left(\prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} \right) \sum_{\beta \in \Gamma_\alpha} \prod_{p=1}^{|\beta|} g(S_{\alpha*(\beta|p)})^{s_0} \right] \\
&= \sum_{\alpha \in \Gamma_0} \left[\left(\prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} \right) \inf_{\Gamma \succ \Gamma_0} \sum_{\beta \in \Gamma_\alpha} \prod_{p=1}^{|\beta|} g(S_{\alpha*(\beta|p)})^{s_0} \right] \\
&= \sum_{\alpha \in \Gamma_0} \left[\left(\prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} \right) \min(1, \inf_{\Gamma \in \text{Min} \setminus \{\Lambda\}} f_{\Gamma,\alpha}(\mathscr{S}^\alpha)) \right] \\
&= \sum_{\alpha \in \Gamma_0} \left[\left(\prod_{n=1}^{|\alpha|} g(S_{\alpha|n})^{s_0} \right) \min(1, h(\mathscr{S}^\alpha)) \right].
\end{aligned}$$

Die erste Gleichheit ist der selbe Schritt wie in (3.11), $|\alpha|$ mal hintereinander ausgeführt. Die dritte Gleichheit gilt wegen Lemma 3.14 Punkt 2.

3. ist vorausgesetzt, also gibt es eine Borelmenge $B \in \Omega$ mit $\mu^{E^*}(B) > 0$ so, dass es für alle $\mathscr{S} \in B$ ein Γ_0 mit $\inf_{\Gamma \succ \Gamma_0} f_{\Gamma,s_0}(\mathscr{S}) > 0$ existiert. Die obrigen Überlegungen liefern, dass es für jedes solches $\mathscr{S} \in B$ ein $\Gamma_0 \in \mathrm{Min}$ und ein $\alpha \in \Gamma_0$ gibt mit $h(\mathscr{S}^\alpha) > 0$. Für alle $\alpha \in E^*$ sei $\Omega(\alpha) = \{\mathscr{S} | h(\mathscr{S}^\alpha) > 0\}$.

Da $B \subseteq \bigcup_{\alpha \in E^*} \Omega(\alpha)$ folgt, dass $\mu^{E^*}(\bigcup_{\alpha \in E^*} \Omega(\alpha)) > 0$, also gibt es ein $\alpha \in E^*$ mit $\mu^{E^*}(\Omega(\alpha)) > 0$. Da $\mu^{E^*}(\Omega(\alpha)) = \mu^{E^*}(\{\mathscr{S} | h(\mathscr{S}) > 0\})$ folgt mit Lemma 3.14 die Äquivalenz.

□

3.3 Hausdorff-Dimension von P_μ-zufälligen Fraktalen

3.3.1 Existenz

Zuerst sollen Bedingungen hergeleitet werden, unter welchen P_μ-fast alle Mengen K die selbe Hausdorffdimension besitzen. Die folgende Notation wurde in Definition 2.13 eingeführt.

Lemma 3.16
Sei $t \in \mathbb{R}_+$ und $\rho > 0$ fest. Dann sind die folgenden Abbildungen von $\mathcal{K}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ borelmessbar:

1. $K \mapsto \mathscr{H}^t_\rho(K)$.
2. $K \mapsto \mathscr{H}^t(K)$.
3. $K \mapsto \dim_H(K)$.

Beweis: 1. Seien $K_0 \in \mathcal{K}(X)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gibt es eine endliche offene Überdeckung $(G_n)_n$ von K_0 mit $\delta(G_n) \leq \rho \;\; \forall n$ (δ bezeichne wieder den Durchmesser) mit

$$\sum_n \delta(G_n)^t < \mathscr{H}^t_\delta(K_0) + \varepsilon < \infty.$$

Sei $G = \bigcup_n G_n$ und $\rho' = d(K, X \backslash G) > 0$.
Für alle $K \in \mathcal{K}(X)$ mit $\eta(K_0, K) < \rho'$ gilt $K \subseteq G$ und damit ist $(G_n)_n$ auch offene Überdeckung von K und daher

$$\mathscr{H}^t_\rho(K) < \sum_n \delta(G_n)^t < \mathscr{H}^t_\delta(K_0) + \varepsilon.$$

Damit ist die Funktion in 1. halbstetig von oben und somit borelmessbar.
2. gilt wegen der Darstellung $\mathscr{H}^t(K) = \sup_n \mathscr{H}^t_{\frac{1}{n}}(K)$ und 1.
3. Für $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\{K \in \mathcal{K}(X) | \dim_H(K) > t\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{K \in \mathcal{K}(X) | \mathscr{H}^{t+\frac{1}{n}}(K) > 0\}$$

und damit folgt die Aussage direkt aus 2.

□

Satz 3.17
Für μ-fast alle $(S_0, \ldots, S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(X)^N$ und alle $p \in E$ existiere ein $c > 0$ mit $d(S_p(x), S_p(y)) \geq cd(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Sei $t \in \mathbb{R}_+$ fest. Dann gilt für P_μ:

1. $P_\mu(\{K \in \mathcal{K}(X) | \mathscr{H}^t(K) = 0\}) = 0$ *oder* $= 1$
2. $P_\mu(\{K \in \mathcal{K}(X) | \mathscr{H}^t(K) = \infty\}) = 0$ *oder* $= 1$

Beweis: In Satz 2.36 wurde P_μ als einziges μ-selbstähnliches Maß auf $\mathcal{K}(X)$ charakterisiert, wegen dieser Eigenschaft gilt nun:

$$\begin{aligned} P_\mu(\{K|\mathscr{H}^t(K) = 0\}) &= \mu \otimes P_\mu^N\Bigg(\Bigg\{((S_0, \ldots, S_{N-1}), (K_0, \ldots, K_{N-1}))\Bigg| \\ &\qquad \mathscr{H}^t\left(\bigcup_{p=0}^{N-1} S_p(K_p)\right) = 0\Bigg\}\Bigg) \\ &= \mu \otimes P_\mu^N\Bigg(\Bigg\{((S_0, \ldots, S_{N-1}), (K_0, \ldots, K_{N-1}))\Bigg| \\ &\qquad \mathscr{H}^t\Bigg((S_p(K_p) = 0) \text{ für } p \in E^1\Bigg)\Bigg\}\Bigg). \end{aligned}$$

Wegen der Annahme gilt μ-fast sicher und für alle p, dass $\mathscr{H}^t(S_p(K_p)) = 0$ dann und nur dann, wenn $\mathscr{H}^t(K_p) = 0$. Das führt auf

$$P_\mu(\{K|\mathscr{H}^t(K) = 0\}) = [P_\mu(\{K|\mathscr{H}^t(K) = 0\})]^N$$

und damit ist 1. bewiesen. Der Beweis für 2. erfolgt analog.

□

Folgerung 3.18
Unter den Annahmen von Satz 3.17 existiert ein $s \geq 0$ derart, dass

$$\dim_H(K) = s$$

für P_μ-fast alle $K \in \mathcal{K}(X)$.

Beweis: Definiere

$$s = \inf\{t \geq 0 | \mathscr{H}^t(K) = 0 \text{ für } P_\mu\text{-fast alle } K \in \mathcal{K}(X)\}.$$

Falls $s = \infty$ gilt jedenfalls $\dim_H(K) \leq s$. Sei also $s < \infty$. Dann gibt es wegen der Definition von s eine monoton fallende Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \to s$ für $n \to \infty$ und $\mathscr{H}^{t_n}(K) = 0$ für μ-fast alle $K \in \mathcal{K}(X)$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Definiton der Hausdorffdimension folgt damit aber bereits, dass $\dim_H(K) \leq s$ für P_μ-fast alle $K \in \mathcal{K}(X)$. Wenn $s = 0$ gilt, ist der Beweis bereits erbracht. Sei also $s > 0$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge positiver reeller Zahlen mit $t_n \to s$ für $n \to \infty$. Wegen Satz 3.17 Punkt 1. und der Definion von s gilt $\mathscr{H}^{t_n}(K) > 0$ P_μ-fast sicher. Daraus folgt aber wiederum $\dim_H(K) \geq s$ für P_μ-fast alle K und damit die Behauptung.

□

3.3.2 Obere Schranke

Das nächste Ziel ist die konkrete Berechnung dieser fast sicheren Hausdorffdimension aus dem vorigen Abschnitt. Dazu soll zuerst ohne viele Einschränkungen eine obere Schranke hergeleitet werden. Die in den vorigen Abschnitten allgemein eingeführte Funktion g wird nun konkret durch die Funktion Lip ersetzt.

Satz 3.19
Sei $\int \sum_{p=0}^{N-1} \mathrm{Lip}(S_p)^0 d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) > 1$, und sei $s_0 = s_0(\mathrm{Lip})$, also

$$\int \sum_{p=0}^{N-1} \mathrm{Lip}(S_p)^{s_0} d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) = 1.$$

Dann gilt $\mathscr{H}^{s_0}(K) < \infty$ und damit $\dim_H(K) \leq s_0$ für P_μ-fast alle $K \in \mathcal{K}(X)$.

Beweis: Sei $\Psi : \Omega \to \mathcal{K}(X)$ definiert wie in Satz 2.30. Laut Definition ist $P_\mu = \mu^{E^*} \circ \Psi^{-1}$ und damit genügt es $\mathscr{H}^{s_0}(\Psi(\mathscr{S})) < \infty$ für μ^{E^*}-fast alle $\mathscr{S}$ zu zeigen. Nach den Sätzen 2.26 und 2.15 gilt

$$\mathscr{H}^{s_0}(\Psi(\mathscr{S})) \leq \delta(X)^{s_0} \sup_{\Gamma_0} \inf_{\Gamma \succ \Gamma_0} f_{\Gamma, s_0}(\mathscr{S})$$

für μ^{E^*}-fast alle $\mathscr{S}$. Wegen Folgerung 3.9 ist der rechte Ausdruck μ^{E^*}-fast sicher endlich.

$\square$

Motivation 13
Man vergleiche den Beweis mit Satz 1.3.

3.3.3 Untere Schranke

Für die untere Schranke müssen zusätzliche Bedingungen gestellt werden. Als erstes wird der Raum X als Teilraum des $\mathbb{R}^d$ spezifiziert. Weiters sollen aus $\mathrm{Con}(X)$ nur Ähnlichkeitsabbildungen ausgewählt werden. Außerdem benötigt man eine Bedingung, die sicherstellt, dass die Bilder der S_p nicht überlappen. Im deterministischen Fall verwendet man Hutchinsons „Offene Mengen Bedingung“, zu der es viel Theorie gibt. Im nichtdeterministischen Fall beschränkt man sich auf iterierte Funktionensysteme, die sich im Sinne von 2. des folgenden Satzes nicht überlappen. Die untere Schranke ist noch zu beweisen, die obere wird aus dem vorigen Kapitel übernommen.

Satz 3.20 (Mauldin-Williams)
Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ kompakt mit nichtleerem Inneren ($\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$) und sei d die Euklidische Metrik auf X. Für μ-fast alle $(S_0, \ldots, S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(X)^N$ seinen die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $\forall p \in \{0, \ldots, N-1\} : S_p$ *ist Ähnlichkeitsabbildung.*

2. $\forall p, p' \in \{0, \ldots, N-1\} : p \neq p' \Rightarrow S_p(\overset{\circ}{X}) \cap S_{p'}(\overset{\circ}{X}) = \emptyset.$

Sei $s_0 \geq 0$ so, dass

$$\int \sum_{p=0}^{N-1} \mathrm{Lip}(S_p)^{s_0} d\mu(S_0, \ldots, S_{N-1}) = 1.$$

Dann gilt $\dim_H(K) = s_0$ *für P_μ-fast alle $K \in \mathcal{K}(X)$.*

Beweis: Im Satz 3.19 wurde bereits $\dim_H(K) \leq s_0$ für P_μ-fast alle $K \in \mathcal{K}(X)$ gezeigt. Um die andere Ungleichung zu beweisen, muss

$$\mathscr{H}^t(K) > 0 \text{ für } P_\mu\text{-f.a. } K \in \mathcal{K}(X)$$

für alle $t < s_0$ gezeigt werden. Wegen der Definition von P_μ ist dies äquivalent zu

$$\mathscr{H}^t(\Psi(\mathscr{S})) > 0 \text{ für } \mu^{E^*}\text{-f.a. } \mathscr{S} \in \Omega. \tag{3.12}$$

wobei Ψ wieder wie in Satz 2.30 definiert ist. Die Bedingungen 1. und 2. stellen sicher, dass die Bedingungen von Satz 2.17 für μ^{E^*}-fast alle $\mathscr{S} \in \Omega$ erfüllt sind. Aus ebendiesem Satz erhält man nur die Existenz eines $c > 0$ derart, dass

$$c\delta(X)^t \sup_{\Gamma_0} \inf_{\Gamma \succ \Gamma_0} \sum_{\alpha \in \Gamma} \mathrm{Lip}(S_\alpha)^d \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n})^t \leq \mathscr{H}^t(\Psi(\mathscr{S})). \tag{3.13}$$

Wegen der Voraussetzung 1. gilt $\mathrm{Lip}(S_p) > 0, p \in E^1$ für μ-fast alle $(S_0, \ldots, S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(X)^N$. Daher kann man den Satz 3.12 anwenden und erhält, dass die linke Seite in (3.13) für μ^{E^*}-fast alle $\mathscr{S}$ positiv ist. Damit ist (3.12) gezeigt und der Satz bewiesen.

□

3.3.4 Berechnung des Hausdorffmaßes

Hier erfolgt die schon im Exkurs zu Beginn des Kapitels angedeutete Berechnung des Hausdorffmaßes. Die Bedingung im folgenden Satz schließt u.a. den deterministischen Fall aus.

Satz 3.21 (Graf)
Es seinen die Bedingungen von Satz 3.20 erfüllt. Es gelte

$$\mu\left(\left\{(S_0, \ldots, S_{N-1}) \,\middle|\, \sum_{p=0}^{N-1} \mathrm{Lip}(S_p)^{s_0} \neq 1\right\}\right) > 0.$$

Dann gilt $\mathscr{H}^{s_0}(K) = 0$ für P_μ-fast alle $K \in \mathcal{K}(X)$.

Beweis: Wegen der Definition von P_μ muss

$$\mathscr{H}^{s_0}(\Psi(\mathscr{S})) = 0 \text{ für } \mu^{E^*}\text{-f.ü. } \mathscr{S} \in \Omega. \tag{3.14}$$

gezeigt werden. Aus den Sätzen 2.15 und 2.26 folgert man

$$\mathscr{H}^t(\Psi(\mathscr{S})) \leq \delta(X)^{s_0} \sup_{\Gamma_0} \inf_{\Gamma \succ \Gamma_0} \sum_{\alpha \in \Gamma} \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n})^{s_0}$$

für μ^{E^*}-fast alle $\mathscr{S}$. Jetzt folgt aus Satz 3.15 die Gleichheit in (3.14) und damit die Behauptung.

□

Motivation 14
Anhand der zufälligen Cantormenge kann man sich veranschaulichen, dass die Bedingung des vorigen Satzes nicht nur den deterministischen Fall ausschließt: Es sei $0 < \alpha < \beta < 1$, $\alpha + \beta < 1$ *und*

$$\mu((\alpha, \beta)) = \mu((\beta, \alpha)) = \frac{1}{2}.$$

Dann gilt

$$\alpha^{s_0} + \beta^{s_0} = 1$$

und damit

$$\mu\left(\left\{(S_0, \ldots, S_{N-1}) \middle| \sum_{p=0}^{N-1} \mathrm{Lip}(S_p)^{s_0} \neq 1\right\}\right) = 0.$$

Auch dieser Fall wurde also im Satz von Graf ausgeschlossen.

Satz 3.22
Es gelten die Annahmen aus Satz 3.20. Es existiere ein $\xi > 0$ *derart, dass* $\mathrm{Lip}(S_p) \geq \xi$ *für* $p \in E^1$ *und* μ*-fast alle* $(S_0, \ldots, S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(X)^N$*. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. $\sum_{p=0}^{N-1} \mathrm{Lip}(S_p)^{s_0} = 1$ *für* μ*-fast alle* $(S_0, \ldots, S_{N-1}) \in \mathrm{Con}(X)^N$.
2. $\mathscr{H}^{s_0}(K) > 0$ *für* P_μ*-f.ü.* $K \in \mathcal{K}(X)$.
3. $P_\mu(\{K \in \mathcal{K}(X) | \mathscr{H}^{s_0}(K) > 0\}) > 0$.

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2. Wegen der Definition von P_μ muss

$$\mathscr{H}^t(\Psi(\mathscr{S})) > 0 \text{ für } \mu^{E^*}\text{-f.ü. } \mathscr{S} \in \Omega. \tag{3.15}$$

gezeigt werden. Wegen der Sätze 2.17 und 2.26 existiert ein $c > 0$ so, dass

$$c\delta(X)^{s_0} \sup_{\Gamma_0} \inf_{\Gamma \succ \Gamma_0} \sum_{\alpha \in \Gamma} \mathrm{Lip}(S_\alpha)^d \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n})^{s_0} \leq \mathscr{H}^{s_0}(\Psi(\mathscr{S})).$$

für μ^{E^*}-fast alle $\mathscr{S} \in \Omega$. Mit der Annahme des Satzes führt dies auf

$$c\, \xi^d \delta(X)^{s_0} \sup_{\Gamma_0} \inf_{\Gamma \succ \Gamma_0} \sum_{\alpha \in \Gamma} \prod_{n=1}^{|\alpha|} \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n})^{s_0} \leq \mathscr{H}^{s_0}(\Psi(\mathscr{S})).$$

wieder für μ^{E^*}-fast alle $\mathscr{S} \in \Omega$. Mit Satz 3.15 ist (3.15) bewiesen.
2. $\Rightarrow$ 3. ist trivial.
3. $\Rightarrow$ 1. folgt direkt aus Satz 3.21.

$\square$

3.4 Sierpińskis Universalkurve

Als Sierpińskis Universalkurve bezeichnet man die folgende Konstruktion:

Definition 3.23
Man beginne mit dem Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$ und Teile es in 9 gleichgroße Quadrate und entferne das Mittlere. Wiederhole diesen Vorgang in jedem der 8 verbliebenen Quadrate. Den Grenzwert dieser Konstruktion bezeichnet man als die (deterministische) Sierpińskische Universalkurve.

Bemerkung 3.3
Leicht kann man diese Grenzmenge mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Modell untersuchen und erhält für die Dimension den Grenzwertes:

$$\imath_s\{8 \cdot (\frac{1}{3})^s = 1\} = \frac{\log(8)}{\log(3)} \approx 1.8928$$

Im folgenden Absatz soll kurz die mathematische Bedeutung dieser Kurve beschrieben werden, wobei auf Beweise verzichtet wird.

Exkurs über die topologische Bedeutung In der Topologie gibt es mehrere ganzzahlige Dimensionsbegriffe, eine detailierte Einführung in dieses Thema findet man zum Beispiel bei Edgar [8]. Eine solche Begriffsbildung soll kurz angedeutet werden:

Man nehme eine Struktur und überdecke sie mit „kleinen“ offenen Mengen. Ist dies disjunkt möglich, also derart, dass je zwei verschiedene dieser überdeckenden Mengen miteinander leeren Schnitt haben, so spicht man von einer 0-dimensionalen Stuktur. Ein nichttriviales Beispiel hierfür ist die Cantormenge, die man für jedes $\varepsilon > 0$ disjunkt mit offen Mengen von Durchmesser kleiner ε überdecken kann. (In einer allgemeinen, topologischen Definition brauch man natürlich keine Metrik). Eine Struktur heißt n-dimensional, wenn sie derart überdeckt werden kann, dass $n + 2$ überdeckende Mengen leeren Schnitt haben (und dies für $n + 1$ Mengen noch nicht gilt).

Definition 3.24
Eine 1-dimensionale (im oben angedeuteten Sinn), lokal zusammenhängende Struktur heißt S-Kurve, wenn es keine lokal trennenden Punkte gibt, d.h. die Struktur bleibt lokal zusammenhängend, wenn man einen Punkt entfernt.

Bemerkung 3.4
Dies ist nicht die Originaldefinition, aber laut einer Arbeit von Whyburn [20] zur Originaldefinition äquivalent.

Mit dieser Definition kann man die Begiffsbildung Universalkurve erklären, es gilt nämlich folgender auf Sierpiński zurückgehender Satz (hier ohne Beweis):

Satz 3.25
Jede S-Kurve ist homeomorph zur Sierpińskischen Universalkurve.

Verzufälligung Es soll diese Konstruktion nun verzufälligt werden: Dazu wählt man vier unabhängige Zufallszahlen (x_0, x_1, x_2, x_3) aus $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, in späterer Rechnung wird Gleichverteilung angenommen und verwendet diese als Ähnlichkeitsfaktoren für die Quadrate in den Ecken, die Abbildungen dazu sehen folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
S_0(x,y) &= (x \cdot x_0, y \cdot x_0) \\
S_1(x,y) &= (1 - x \cdot x_1, y \cdot x_1) \\
S_2(x,y) &= (x \cdot x_2, 1 - y \cdot x_2) \\
S_3(x,y) &= (1 - x \cdot x_3, 1 - y \cdot x_3)
\end{aligned}$$

Jetzt setzte zwischen je zwei dieser Quadrate ein weiteres Quadrat ein, wobei eine Seite den Rand von $[0,1] \times [0,1]$ berühren soll. Diese haben jeweils eine Seitenlänge $< \frac{1}{3}$, die Abbildungen dazu:

$$\begin{aligned}
S_4(x,y) &= (x_0 + x \cdot (1 - x_0 - x_1), y \cdot (1 - x_0 - x_1)) \\
S_5(x,y) &= (x \cdot (1 - x_0 - x_2), x_0 + y \cdot (1 - x_0 - x_2)) \\
S_6(x,y) &= (1 - x \cdot (1 - x_1 - x_3), x_1 + y \cdot (1 - x_1 - x_3)) \\
S_7(x,y) &= (x_2 + x \cdot (1 - x_2 - x_3), 1 - y \cdot (1 - x_2 - x_3))
\end{aligned}$$

Führt man den ersten Iterationsschritt aus, erhält man eine „zufällige Schweizerfahne“.

Man kann für die Grenzmenge dieser Konstruktion zeigen, dass sie eine S-Menge und damit homeomorph zur deterministischen Sierpińskischen Universalkurve ist.

Hier soll noch die Dimension berechnet werden. Offensichtlich sind die Bedingungen von Satz 3.20 erfüllt, es muss also noch jenes s_0 bestimmt werden, welches die folgende Gleichung löst:

$$\begin{aligned}
1 &= 4\left(6\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} x^{s_0} dx\right) + 4\left(6\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 6\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (1-x-y)^{s_0} dy dx\right) \\
&= \frac{24}{s_0+1}\left[\frac{1}{2^{s_0+1}} - \frac{1}{3^{s_0+1}} + \frac{2}{s_0+2}\left(\frac{1}{3^{s_0+1}} - \frac{1}{6^{s_0+1}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Numerisch erhält man $s_0 \approx 1,8947$.

3.5 Ausblick

Zum Abschluss soll noch ein kurzer Überblick über weitere Möglichkeiten zur Verallgemeinerung und Vertiefung gegeben werden.

3.5.1 Unendliche Alphabete

In der Arbeit von R.D. Mauldin und S.C. Williams [18] wird auf die Voraussetzung, dass das Alphabet E endlich sein muss, verzichtet. Bei ihnen kann $E = \mathbb{N}$, also abzählbar unendlich gewählt werden. Ein mögliches Beispiel, dessen Konstruktion im hier diskutierten Modell nicht möglich wäre aus dieser Arbeit (Example 4.5):

Beispiel 3.1
Man beginne mit dem Intervall $K_\emptyset = [0,1]$ und wähle eine Zufallszahl Z in $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, sodass $W(Z = n) = 2^{-n}$, danach teile das Intervall $[0,1]$ in 2^{n^2+n} Intervalle

$$K_p = \left[\frac{2p}{2^{n^2+n}}, \frac{(2p+1)}{2^{n^2+n}}\right],$$

für $p = 0, \ldots, 2^{n^2+n-1}$, anschließend wiederhole diese Konstruktion auf jedem der Teilintervalle. Diese Angabe könnte man leicht in das hier beschriebene Modell übersetzen, dürfte man unendliche Alphabete verwenden. Mauldin und Williams verwenden dieses Beispiel um eine zufällige Cantormenge der Dimension 1 zu erzeugen und ein Problem aufzuzeigen, nämlich dass die Funktion aus Satz 3.4 (mit $g = \mathrm{Lip}$), in der Motivation und bei Mauldin und Williams mit Φ bezeichnet, springen kann. In diesem konkreten Beispiel gibt es keinen Wert s_0 mit $\Phi(s_0) = 1$, denn es gilt:

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{1}{2^{n^2+n}}\right)^s 2^{n^2+n-1}.$$

Also gilt $\Phi(s) = +\infty$ für $s < 1$ und $\Phi(1) = \frac{1}{2}$.

Mauldin und Williams zeigen, dass in diesem und ähnlichen Fällen die Hausdorffdimension der Menge K fast sicher demjenigen Wert s_0 mit $\Phi(s_0) \leq 1 \wedge \Phi(s) > 1 \ \forall s < s_0$ entspricht, also im Beispiel $\dim_H(K) = 1$ fast sicher gilt.

3.5.2 Kompaktheit

M. Arbeiter zeigt in seiner Arbeit [1], dass die Voraussetzung der Kompaktheit abgeschwächt werden kann. Dazu führt er den Begriff der Trägerdimension (carring dimension) ein.

Definition 3.26
Ein Radonmaß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B})$ hat Trägerdimension s_0, in Zeichen $\dim_C \mu = s_0$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Es gibt eine Borelmenge B mit $\mu(B^c) = 0$ und $\dim_H(B) \leq s_0$
- Aus $\mu(B) > 0$ folgt $\dim_H(B) \geq s_0$.

Indem er diesen Begriff auf den fast sicheren Grenzwert einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen anwendet, gelingt es ihm die in dieser Arbeit gestellte Forderung nach einem kompakten Teilraum des $\mathbb{R}^d$ fallen zu lassen.

3.5.3 Messen in der Dimension s_0

Der Satz 3.21 liefert das etwas unbefridigende Ergebnis, dass das Maß $\mathscr{H}^{s_0}$ auf Mengen K nicht greift, also fast sicher $\mathscr{H}^{s_0}(K) = 0$ gilt. Wünscheswert wäre es, Mengen gleicher Dimension trotzdem Messen zu können, also innerhalb einer Dimension Mengen nach Größe zu unterscheiden. Eine Möglichkeit hierfür haben Graf, Mauldin und Williams [14] gefunden, indem sie das durch die Belegungsfunktion

$$h(t) = t^{s_0} (\log |\log(t)|)^\theta$$

für eine Konstante θ, in vielen Fällen $\theta = 1 - (s_0/d)$ definierte Hausdorffmaß verwenden (d kommt von verwendeten Raum $\mathbb{R}^d$). Dann gilt in vielen Fällen

$$0 < \mathscr{H}^h(K) < \infty.$$

Dieses Maß greift also und ermöglicht Größenvergleiche innerhalb der Dimension.

Kapitel 4

Bi-Lipschitz-Äquivalenz

In diesem Kapitel wird der $\mathbb{R}^n$ immer mit der Euklidischen Norm $|.|$ versehen.

Die Topologie kann man betrachen als das Studium der Äquivalenzklassen von Mengen unter Homeomophismen, einen ähnlichen Ansatz kann man auch in der fraktalen Geometrie versuchen, nämlich fraktale Geometrie als Studium der Äquivalenzklassen von Mengen unter bi-Lipschitzstetigen Abbildungen anzusehen. Bei der Beantwortung einer Frage nach Lipschitzäquivalenz von Mengen werden, vielleicht etwas überraschend da deterministische Fraktale untersucht werden, Martingalmethoden, genauer der Satz von Doob, eine wichtige Rolle spielen.

Definition 4.1
Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $\Phi : X \to Y$ heißt bi-Lipschitzstetig auf X, wenn Konstanten $C_1, C_2 \in (0, \infty)$ existieren, sodass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$C_1|x-y| \leq |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq C_2|x-y|. \tag{4.1}$$

Zwei Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen Lipschitzäquivalent, wenn eine solche Abbildung Φ existiert mit $\Phi(X) = Y$.

Wie im Folgenden gezeigt wird, erhalten bi-Lipschitzstetige Abbildungen die Hausdorffdimension:

Satz 4.2
Sei $\Phi : A \to \mathbb{R}^n$ bi-Lipschitzstetig auf A, dann gilt für alle $B \subseteq A$ und alle $s > 0$:

$$C_1^s \mathscr{H}^s(B) \leq \mathscr{H}^s(\Phi(B)) \leq C_2^s \mathscr{H}^s(B).$$

Beweis: Zuerst die obere Schranke:
$\delta(A)$ bezeichne wieder den Durchmesser, $\mathscr{U}_\varepsilon(A)$ sei wie in Definition 2.13,

dann gilt für $C \subseteq A$ trivialerweise

$$\delta(C) \leq C_2\delta(C).$$

Wähle $(C_i)_{i\geq 1} \in \mathscr{U}_\varepsilon$. Da auf $\bigcup_i C_i$ die bi-Lipschitzbedingung nicht erfüllt sein muss, wähle $(C_i \cap A)_{i\geq 1}$ als Überdeckung. Es ergibt sich die folgende Abschätzung:

$$\mathscr{H}_\varepsilon^s(\Phi(B)) \leq \sum_i \delta(\Phi(C_i \cap A))^s \leq \sum_i C_2^s \delta(C_i)^s = C_2^s \sum_i \delta(C_i)^s.$$

Geht man rechts zum Infimum über, erhält man

$$\mathscr{H}_\varepsilon^s(\Phi(B)) \leq C_2^s \mathscr{H}^s(B)$$

und damit die obere Schranke. Für die untere Schranke braucht man die folgende Überlegung:
Eine (bi-)Lipschitzstetige Funktion Φ ist immer injektiv, denn gelte $\Phi(x) = \Phi(y)$ für $x \neq y$, wäre

$$0 < |x-y| \leq \frac{1}{C_1}|\Phi(x) - \Phi(y)| = 0$$

ein Widerspruch. Damit ist $\Phi : A \to \Phi(A)$ bijektiv und Φ^{-1} hat Lipschitzkonstante $\frac{1}{C_1}$.
Also gilt mit Hilfe der Abschätzung der oberen Schranke:

$$\mathscr{H}^s(B) = \mathscr{H}(\Phi^{-1}\Phi(B)) \leq \frac{1}{C_1^s}\mathscr{H}(\Phi(B)).$$

□

Folgerung 4.3
Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und Φ bi-Lipschitzstetig, dann gilt

$$\dim_H(A) = \dim_H(\Phi(A)).$$

Man kann die Frage nun umdrehen und Fragen, ob zwei Mengen ähnlicher Struktur mit der selben Hausdorffdimension auch Lipschitzäquivalent sein müssen. Diese Frage wird im Folgenden zum Negativen beantwortet werden. Es wird sich die Cantormenge, im Folgenden mit E bezeichnet, als nicht Lipschitzäquivalent zu einer Menge F erweisen, deren Konstruktion ähnlich der Cantormenge verläuft.

Definition 4.4
Es bezeichne $F(\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1})$ eine N-teilige Cantormenge mit Ähnlichkeitsfakoren $\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1}$, d.h. in jedem Konstruktionsschritt wird jedes Intervall in N einander nicht überlappende Teilintervalle mit α_i-facher Länge des Vorgängerintervalls zerlegt.

Bemerkung 4.1

- „Eine“ N-teilige Cantormenge, da die genaue Position der Intervalle nicht vorgegeben ist.
- Eine $F(1/3, 1/3)$-Menge wäre die klassische Cantormenge.
- Es gilt $\dim_H F(\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1}) = \imath_s(\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i^s = 1)$. (Ähnlichkeitsdimension)

Satz 4.5
Es sei $\beta = 3^{-\log 3/\log 2}$, $E = F(1/3, 1/3)$ und $F = F(\beta, \beta, \beta)$. Dann existiert keine bi-Lipschitzstetige Funktion Φ: $E \to F$.

Bemerkung 4.2
Die Wahl von β ist derart, dass

$$s_0 := \dim_H E = \dim_H F = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Ohne Beweis sei noch angemerkt, dass $\mathscr{H}^{s_0}(E) = \mathscr{H}^{s_0}(F) = 1$.

Beweis: Angenommen es gäbe eine bi-Lipschitzstetige Funktion Φ, also gelte (4.1).

Mit einem Intervall X des k-ten Iterationsschrittes von E soll eine Menge $E \cap X$ bezeichnet werden, wobei X eines der 2^k Intervalle der Länge 3^{-k} ist, die im k-ten Iterationsschritt bei der Konstruktion der Cantormenge entstehen. Analog bezeichne ein Intervall Y des k-ten Iterationsschrittes von F eine Menge $F \cap Y$, wobei Y eines der 3^k Intervalle der Länge β^k im k-ten Schritt der Konstrukion von F bezeichne. Es gilt

$$\mathscr{H}^{s_0}(X \cap E) = \lambda(E)$$

und analog

$$\mathscr{H}^{s_0}(Y \cap F) = \lambda(F).$$

Definiere für $k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $m(k) \in \mathbb{N}$ als diejenige natürliche Zahl, sodass

$$\beta^{m(k)} < C_1 3^{-k} \le \beta^{m(k)-1}. \tag{4.2}$$

Es soll die bi-Lipschitzstetigkeit von Φ ausgenützt werden, um zu zeigen, dass für ein Intervall X des k-ten Iterationsschrittes von E das Bild $\Phi(X)$ die Vereinigung von n Intervallen des $m(k)$-ten Iterationsschrittes von F ist, wobei $n \in \mathbb{N}$

$$3^{m(k)}2^{-k}C_1 \leq n \leq 3^{m(k)}2^{-k}C_2 \tag{4.3}$$

erfüllt.
Um dies einzusehen, sei zuerst bemerkt, dass wenn $\Phi(X)$ einen Punkt eines Intervalles Y des $m(k)$-ten Iterationsschrittes von Y enthält, bereits $Y \subseteq \Phi(X)$ gilt, denn wenn nicht gäbe es Punkte $x \in X$ und $x' \in E \backslash X$ mit $\Phi(x), \Phi(x') \in Y$ und

$$\beta^{m(k)} = \delta(Y) \geq |\Phi(x) - \Phi(x')| \geq C_1|x - x'| \geq C_1 3^{-k}$$

im Widerspruch zu (4.2). Die Grenzen für n erhält man, da laut Satz 4.2 gilt

$$C_1 \leq \frac{\mathscr{H}^{s_0}(\Phi(X))}{\mathscr{H}^{s_0}(X)} = \frac{n3^{-m(k)}}{2^{-k}} \leq C_2. \tag{4.4}$$

Es gelingt mittels (4.2) und (4.3) auch eine gleichmäßige Abschätzung für n bezüglich k, es gilt nämlich

$$C_1^{1-\frac{\log 2}{\log 3}} \leq n \leq 3C_1^{-\frac{\log 2}{\log 3}}C_2.$$

Durchgerechnet werden soll hier nur die obere Schranke, die Untere berechnet man analog, bzw. wird sie für den Beweis nicht benötigt, man könnte auch 0 als triviale untere Schranke verwenden.

$$\begin{aligned} n &\leq 3^{m(k)}2^{-k}C_2 \\ &= 3 \cdot 3^{(m(k)-1)\frac{\log 3}{\log 2}\frac{\log 2}{\log 3}}2^{-k}C_2 \\ &= 3 \cdot \beta^{-(m(k)-1)\frac{\log 2}{\log 3}}2^{-k}C_2 \\ &\leq 3C_1 3^{k\frac{\log 2}{\log 3}}2^{-k}C_2 \\ &= 3C_1^{-\frac{\log 2}{\log 3}}C_2. \end{aligned}$$

Die erste Abschätzung ist (4.3), bei der ersten Gleichheit wird ein 3er abgespalten und der Exponent mal „1“ gerechnet, in der zweiten Gleichheit wird die Definition von β eingesetzt, anschließend wird mit der rechten Ungleichung (negativer Exponent!) aus (4.2) abgeschätzt. Die letzte Gleichheit benützt die Identität $3^{k\frac{\log 2}{\log 3}} = 2^k$.

Für $k \in \mathbb{N}$ definiere Funktionen $g_k : E \to \mathbb{R}$ als

$$g_k(x) = \frac{\mathscr{H}^{s_0}(\Phi(X))}{\mathscr{H}^{s_0}(X)} \tag{4.5}$$

wobei X das Intervall das k-ten Iterationsschrittes von E ist mit $x \in X$. g_k ist also konstant auf jedem Intervall des k-ten Iterationsschrittes von E. Es bezeichne X_L und X_R die beiden verschiedenen Intervalle des $k+1$-ten Iterationsschrittes von E mit $X_L, X_R \subseteq X$ und $x_L \in X_L$ bzw. $x_R \in X_R$, dann gilt:

$$\begin{aligned} g_k(x) &= 2^k \mathscr{H}^{s_0}(\Phi(X)) \\ &= \frac{1}{2}\left[2^{k+1}\mathscr{H}^{s_0}(\Phi(X_L)) + 2^{k+1}\mathscr{H}^{s_0}(\Phi(X_R))\right] \\ &= \frac{1}{2}[g_{k+1}(x_L) + g_{k+1}(x_R)] \\ &= \mathscr{H}^{s_0}(X)^{-1}\int_X g_{k+1}(x)d\mathscr{H}^{s_0}(x). \end{aligned}$$

Damit bildet die Folge $(g_k)_{k\geq 0}$ ein nichtnegatives Martingal und konvergiert daher fast sicher gegen eine Funktion g. Wähle einen Konvergenzpunkt x mit $g_k(x) \to c$. Wegen (4.4) und (4.5) gilt $C_1 \leq c \leq C_2$ und

$$g_k(x) = 2^k 3^{-m(k)} n \tag{4.6}$$

wobei n (4.3) erfüllt. Daher gilt

$$\frac{g_{k+1}(x)}{g_k(x)} = \frac{2^{k+1}3^{-m(k+1)}n'}{2^k 3^{-m(k)}n} = \frac{2n'}{3^{m(k+1)-m(k)}n}$$

wobei $n, n' \in [C_1^{1-\frac{\log 2}{\log 3}}, 3C_1^{-\frac{\log 2}{\log 3}}C_2]$ und $m(k+1) - m(k)$ ist wegen (4.2) beschränkt für alle k. Daher kann $g_{k+1}/g_k(x)$ nur endlich viele verschiedene Werte annehmen und da die Folge g_k gegen einen Grenzwert ungleich 0 konvergiert, folgt das $g_k(x) = c$ für schließlich alle k gelten muss. Wegen (4.6) muss es also Werte n_k geben mit

$$c = g_k(x) = 2^k 3^{-m(k)} n_k,$$

also ist $c \in \mathbb{Q}$, stelle $c = p/q$ mit $p, q > 0$, $ggT(p,q) = 1$, also koprim dar.

Es gilt also $2^k 3^{-m(k)} n_k = p/q$ für hinreichend großes k, also

$$2^k n_k q = 3^{m(k)} p,$$

also ist p für beliebig großes k durch 2^k teilbar, was natürlich unmöglich ist. Damit ergibt sich ein Widerspruch und die Hypothese Φ könne bi-Lipschitzstetig gewählt werden ist falsch.

□

Folgerung 4.6
$F(\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1})$ und $F(\alpha_{\pi(0)}, \ldots, \alpha_{\pi(N-1)})$ sind bi-Lipschitzäquivalent, wobei $\pi \in S_N$ eine beliebige Permutation.

Beweis: Translationen sind bi-Lipschitzstetig mit $C_1 = C_2 = 1$.

□

Aus dem vorigem Beweis lassen sich folgende notwendige Bedingungen für die Lipschitzäquivalenz ablesen:

Folgerung 4.7
Es seien $F := F(\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1})$ und $F' := F(\beta_0, \ldots, \beta_{M-1})$ bi-Lipschitzäquivalent. Dann gilt:

1. $\dim_H(F) = \dim_H(F') = s$.

2. *Es gibt positive ganze Zahlen p, q mit*

$$\begin{aligned} \mathrm{semigp}(\alpha_0^p, \ldots, \alpha_{N-1}^p) &\subseteq \mathrm{semigp}(\beta_0, \ldots, \beta_{M-1}) \text{ und} \\ \mathrm{semigp}(\beta_0^q, \ldots, \beta_{M-1}^q) &\subseteq \mathrm{semigp}(\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1}). \end{aligned}$$

   semigp *bezeichne die Unterhalbgruppe von $(\mathbb{R}^+, \times)$ welche von $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1})$ erzeugt wird.*

3. $\mathbb{Q}(\alpha_0^{s_0}, \ldots, \alpha_{N-1}^{s_0}) = \mathbb{Q}(\beta_0^{s_0}, \ldots, \beta_{M-1}^{s_0})$
   $\mathbb{Q}(\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1})$ bezeichnet den von $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1})$ erzeugten rationalen Körper.

Beweis: Wird nicht im Detail ausgeführt:

1. ist klar, wegen Folgerung 4.3.

2. und 3. kann man aus dem Beweis des vorigen Satzes herauslesen, denn wären sie nicht erfüllt ergäbe sich analog ein Widerspruch.

□

Anhang A

Sammlung zitierter Sätze

Hier findet der Leser wichtige im Text zitierte Sätze mit Literaturverweisen.

Satz A.1 (Tychonoff)
Sei $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$ *eine Familie kompakter Räume.*
Dann ist auch $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \mathcal{T}_i)$ *kompakt.*

Beweis: In jedem (guten) Buch über Funktionalanalysis, z.B. Bachman [2].

□

Definition A.2
Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Menge. $(A_i)_{i\in I}$ hat die *endliche Durchschnittseigenschaft*, wenn für je endlich viele $i_1, \dots, i_n \in I$ stets $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} \neq \emptyset$ ist.

Satz A.3
Sei $(X, \mathcal{T})$ *topologischer Raum, dann sind äquivalent:*

- $(X, \mathcal{T})$ *ist kompakt.*
- *Jede Familie abgeschlossener Mengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft hat nichtleeren Durchschnitt.*

Satz A.4 (Chebyshev-Markovsche-Ungleichung)
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *ein beliebiger Maßraum. Für jede meßbare numerische Funktion* f *auf* Ω *und jedes Paar reeller Zahlen* $p > 0, \alpha > 0$ *gilt:*

$$\mu(\{|f| \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha^p} \int |f|^p d\mu. \tag{A.1}$$

Bemerkung A.1
In der Literatur wird die Bezeichnung Chebyshev-Ungleichung oft nur für den Spezialfall $p = 2, f = X - \mathbb{E}(X)$ verwendet (z.B. [15])

Beweis: Wegen der Messbarkeit von f liegt $[|f| \geq \alpha]$ in $\mathscr{A}$ und es gilt

$$\int |f|^p d\mu \geq \int_{[|f| \geq \alpha]} |f|^p d\mu \geq \int_{[|f| \geq \alpha]} \alpha^p d\mu = \alpha^p \mu([|f| \geq \alpha]).$$

□

Satz A.5 (Erster Doob'scher Konvergenzsatz)
Jedes Supermartingal $(X_n, \mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ welches der Bedingung (L^1-Beschränktheit)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < +\infty$$

genügt, konvergiert fast sicher gegen eine integrierbare $\mathscr{F}_\infty$-messbare Zufallsvariable X_∞.
Zusatz: Falls für $p > 1$ sogar

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|^p) < +\infty$$

konvergieren die X_n auch im p-ten Mittel gegen X_∞.

Beweis: Z.B. bei Bauer [4], der Zusatz ist Aufgabe 4. auf Seite 414.

□

Satz A.6 (Portmanteau-Theorem)
Es sei X ein metrischer Raum und μ_n, μ Borelmaße. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.
2. *Für jede gleichmäßig stetige, beschränkte Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gilt*
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f d\mu_n = \int_X f d\mu.$$
3. *Es ist $\lim_{n\to\infty} \mu_n(X) = \mu(X)$ und für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ gilt*
$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \leq \mu(A).$$

4. *Es ist* $\lim_{n\to\infty} \mu_n(X) = \mu(X)$ *und für jede offene Menge* $U \subseteq X$ *gilt*

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \geq \mu(U).$$

Beweis: Findet man zum Beispiel bei Elstrodt [9], 4.10.

□

Bemerkung A.2
Die Bedingung 2. wird auch als vage Konvergenz bezeichnet.

Satz A.7
In einem metrischen Raum (X, d) *gilt:*

- $A \subseteq X$ *ist kompakt* $\Leftrightarrow$ A *ist totalbeschränkt und vollständig*

- $A \subseteq X$ *kompakt* $\Leftrightarrow$ A *ist folgenkompakt (d.h. jede Folge in* A *hat eine Häufungspunkt)*

Beweis: In jedem Funktionalanalysis-Standardwerk.

□

Anhang B

Hilfssätze zum Hausdorffabstand

In den nachfolgenden Hilfssätzen werden einige wichtige Eigenschaften von Exzess und Hausdorffabstand zusammengefasst.

Definition B.1
Sei $A \subseteq X, \delta > 0$, dann heißt die Menge

$$A_\delta := \{x \in X : \exists y \in A : d(x,y) \leq \delta\} \tag{B.1}$$

die δ-Umgebung von A.

Bemerkung B.1
Ohne Beweis sei angemerkt, dass

$$\eta(A,B) = \inf\{\delta > 0 : A \subseteq B_\delta \wedge B \subseteq A_\delta\}.$$

Bemerkung B.2
Es gelte $\inf \emptyset := \infty, \sup \emptyset := 0$ Für $A, B \neq \emptyset$ gilt

$$\eta(A,B) \leq \infty,$$

$$e(A,\emptyset) = d(x,\emptyset) = \infty,$$
$$e(\emptyset,B) = \sup \emptyset = 0.$$

Hilfssatz B.2
Seien $x, y \in X$ beliebig, $A \neq \emptyset$. Dann gilt die folgende „Dreiecksungleichung“:

$$d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A). \tag{B.2}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $z \in A : d(y,z) < \varepsilon + d(y,A)$ und daher gilt
$$d(x,A) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + d(y,A) + \varepsilon.$$
Für $\varepsilon \to 0$ erhält man die Behauptung.

□

$\overline{A}$ bezeichne den Abschluss von A

Hilfssatz B.3

Sei $A \subseteq X$ nichtleer, dann gilt für alle $x \in X$:
$$d(x,A) = d(x,\overline{A}).$$

Beweis: $d(x,A) \geq d(x,\overline{A})$ ist trivial.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann existiert ein $y_\varepsilon \in \overline{A} : d(x,y_\varepsilon) \leq d(x,A) + \frac{\varepsilon}{2}$ und es gibt ein $z_\varepsilon \in A : d(y_\varepsilon, z_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt $\exists z_\varepsilon \in A : d(x,z_\varepsilon) < d(x,\overline{A}) + \varepsilon$. Zusammengefasst ergibt das
$$d(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\} < d(x,\overline{A}) + \varepsilon,$$
also erhält man für $\varepsilon \to 0 : d(x,A) \leq d(x,\overline{A})$.

□

Hilfssatz B.4

Es gilt für $A, B \in X$:

1. $e(A,B) = e(A,\overline{B})$.
2. $e(A,B) = e(\overline{A},B)$.
3. $e(A,B) = e(\overline{A},\overline{B})$.

Beweis:

1. Direkte Folgerung aus dem Hilfssatz B.3.
2. Funktioniert genau wie der Beweis von B.3, nur dass man die Dreiecksungleichung (B.2) verwenden muss: Hier ist die Richtung $e(A,B) \leq e(\overline{A},B)$ trivial. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann existiert ein $x_\varepsilon \in \overline{A} : e(\overline{A},B) \leq d(x_\varepsilon,B) + \frac{\varepsilon}{2}$, weiters gibt es ein $y_\varepsilon \in A : d(x_\varepsilon,y_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Jetzt wendet man (B.2) an und erhält
$$\begin{aligned} e(\overline{A},B) &< d(x_\varepsilon,B) + \frac{\varepsilon}{2} \leq d(x_\varepsilon,y_\varepsilon) + d(y_\varepsilon,B) + \frac{\varepsilon}{2} < d(y_\varepsilon,B) + \varepsilon \\ &\leq \sup\{d(y,B) : y \in A\} + \varepsilon = e(A,B) + \varepsilon \end{aligned}$$
und damit für $\varepsilon \to 0$ die gewünschte Ungleichung.

3. Aus 1. und 2. folgt:

$$e(\overline{A}, \overline{B}) = e(A, \overline{B}) = e(A, B).$$

□

Satz B.5
Für $A, B \subseteq X$ gilt:

$$e(A,B) = 0 \overbrace{\Longleftrightarrow}^{1} A \subseteq \overline{B} \overbrace{\Longleftrightarrow}^{2} \overline{A} \subseteq \overline{B}$$

Beweis: Die Äquivalenz 2 ist wegen des Hilfssatzes B.4 klar.
Für die Äquivalenz 1 betrachtet man zuerst die Richtung $\Rightarrow$:
$e(A, B) = 0$ ist vorausgesetzt, wegen Hilfssatz B.4 folgt $e(A, \overline{B}) = 0$ woraus wegen der Definition des Exzesses wiederum $d(x, \overline{B}) = 0 \;\; \forall x \in A$ folgt. Sei $x \in A$ fest gewählt, dann folgt aus der Definition von $d(x, \overline{B})$ die Existenz einer Folge $(x_n)_{n \geq 0} : x_n \in \overline{B} : d(x, x_n) < \frac{1}{n}$, also $x_n \to x$. Da $\overline{B}$ abgeschlossen ist, folgt $x \in \overline{B}$ und damit $A \subseteq \overline{B}$.
Bleibt die Richtung $\Leftarrow$ zu zeigen:
Es sei $A \subseteq \overline{B}$. Dann ist $d(x, \overline{B}) = 0 \;\; \forall x \in A$ und damit $e(A, \overline{B}) = 0$. Mit Hilfssatz B.4 folgt $e(A, B) = 0$ und damit die Behauptung.

□

Folgerung B.6
Es gilt:

$$\eta(A, B) = 0 \Longleftrightarrow \overline{A} = \overline{B}.$$

Hilfssatz B.7
Für $A, B, C \in X$ gilt die folgende Ungleichung:

$$e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C).$$

Beweis: Die Ungleichung ist trivial für $e(A, B) + e(B, C) = \infty$, sei also $e(A, B) + e(B, C) < \infty$. $\forall y \in B, \;\; \forall z \in C$ gilt:

$$d(x, C) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $y \in B : d(x, y) \leq d(x, B) + \frac{\varepsilon}{2}$. Weiters gibt es ein $z \in C$ mit $d(y, z) < d(y, C) + \frac{\varepsilon}{2}$, kombiniert man diese Abschätzungen erhält man

$$d(x, C) < d(x, B) + \frac{\varepsilon}{2} + d(y, C) + \frac{\varepsilon}{2} \leq e(A, B) + e(B, C) + \varepsilon.$$

Es ergibt sich

$$e(A,B) < e(A,B) + e(B,C) + \varepsilon$$

und damit für $\varepsilon \to 0$ die behauptete Ungleichung.

$\square$

Hilfssatz B.8
Sei (X,d) ein metrischer Raum, $f : X \to X$ eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor r, d.h. $d(f(x), f(y)) \leq rd(x,y) \quad \forall x,y \in X$ (vgl. Definition 2.5). Dann gilt für alle $B, C \in \mathcal{K}(X)$

$$\eta(f(B), f(C)) \leq r\eta(B,C).$$

Beweis: Es bezeiche $C_\delta := \{x \in X : \exists y \in A : d(x,y) \leq \delta\}$ die δ-Umgebung von C. Sei $\delta > \eta(B,C)$, dann gilt nach Bemerkung B.1

$$B \subseteq C_\delta \wedge C \subseteq B_\delta.$$

Sei $x \in B_\delta$ dann existiert ein $y \in B$ sodass $d(y,x) \leq \delta$ und da $d(f(x), f(y)) \leq rd(x,y) \leq r\delta$ folgt $f(x) \in (f(B))_{r\delta}$. Somit gilt

$$f(C) \subseteq f(B_\delta) \subseteq f(B)_{r\delta}.$$

Analog zeigt man $f(B) \subseteq (f(C))_{r\delta}$ und damit $\eta(f(B), f(C)) \leq r\delta$. Lässt man nun δ von oben gegen $\eta(B,C)$ streben erhält man die Behauptung.

$\square$

Hilfssatz B.9
Seien $B_i, C_i \in \mathcal{K}(X) \ \ (i = 1, \ldots, N-1)$, dann gilt

$$\eta(\bigcup_i B_i, \bigcup_i C_i) \leq \max_i \eta(B_i, C_i).$$

Beweis: Sei $\delta > \max_i \eta(B_i, C_i) \Rightarrow B_i \subseteq (C_i)_\delta \wedge C_i \subseteq (B_i)_\delta$
$\Rightarrow B_i \subseteq \bigcup_i (C_i)_\delta \wedge C_i \subseteq \bigcup_i (B_i)_\delta$
$\Rightarrow \bigcup_i B_i \subseteq \bigcup_i (C_i)_\delta \wedge \bigcup_i C_i \subseteq \bigcup_i (B_i)_\delta$
$\Rightarrow \eta(\bigcup_i B_i, \bigcup_i C_i) \leq \delta.$

$\square$

Anhang C

Die Vollständigkeit von $(\mathcal{K}(X), \eta)$

Schritt für Schritt soll hier der folgende Satz bewiesen werden:

Satz C.1
(X, d) sei metrischer Raum. $\mathcal{K}(X)$ bezeichne alle nichtleeren kompakten Teilmengen von X. Dann ist $(\mathcal{K}(X), \eta)$ metrischer Raum. Ist (X,d) vollständig, so ist auch $(\mathcal{K}(X), \eta)$ vollständig. Ist (X,d) separabel, so ist auch $(\mathcal{K}(X), \eta)$ separabel.

Der Grund, warum man den Raum $\mathcal{K}(X)$ verwendet, also nur kompakte Mengen betrachtet, ist die schöne Struktur. Man erhält einen metrischen Raum. Aus Hilfssatz B.5 sieht man, dass die Eigenschaft „$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$" der Metrik verloren ginge, würde man alle Teilmengen von X betrachen. Wie im Folgenden gezeigt wird, erhält man auch keinen metrischen Raum mehr, wenn man alle abgeschlossenen Teilmengen von X mit dem Hausdorffabstand versieht.

Definition C.2
Sei X eine Menge und $d : X \times X \to [0, \infty]$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

1. $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \;\; \forall x, y, z \in X$.

Dann heißt d eine erweiterte Metrik auf X.
Gilt $d : X \times X \to [0, \infty)$ spricht man von einer Metrik.

Satz C.3
Der Hausdorffabstand η ist eine erweiterte Metrik auf

$$\mathscr{F}(X) := \{A \subseteq X : A \neq \emptyset \wedge A = \overline{A}\},$$

den abgeschlossenen Teilmengen von X.

Beweis: Es müssen die Metrikaxiome nachgeprüft werden:
1. gilt wegen Folgerung B.6.
2. ist trivial
Für 3. verwendet man die Ungleichung aus Hilfssatz B.7:

$$e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C) \leq \eta(A, B) + \eta(B, C).$$

$$e(C, A) \leq e(C, B) + e(B, A) \leq \eta(A, B) + \eta(B, C).$$

Zusammengesetzt ergibt sich

$$\eta(A, C) = \max\{e(A, C), e(C, A)\} \leq \eta(A, B) + \eta(B, C).$$

□

Folgerung C.4
Der Hausdorffabstand η ist eine Metrik auf

$$\mathcal{K}(X) := \{A \subseteq X : A \neq \emptyset \wedge A \textit{ kompakt}\},$$

den kompakten Teilmengen von X.

Beweis: Leicht überlegt man sich die Ungleichung

$$e(A, B) \leq \delta(A) + d(A, B).$$

Da für $A \in \mathcal{K}(X)$ wegen der Kompaktheit $\delta(A) < \infty$ gilt, folgt:

$$\eta(A, B) \leq \max(\delta(A) + d(A, B), \delta(B) + d(B, A)) < \infty.$$

Die restlichen Axiome folgen aus Satz C.3.

□

Hilfssatz C.5
Die Abbildung $x \mapsto d(x, A)$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis: Leicht überlegt man sich die Ungleichung

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$$

Damit erhält man:

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

und

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$$

und damit die gleichmäßige Stetigkeit.

□

Es gelte $\inf \emptyset = \infty$

Satz C.6 (Ausdehnungssatz für Cauchyfolgen)
(X, d) sei metrischer Raum, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Cauchyfolge in $(\mathscr{F}^0, \eta)$, wobei $\mathscr{F}^0$ alle abgeschlossenen Teilmengen von X bezeiche ($\emptyset \in \mathscr{F}^0$). $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen und (x_{n_k}) sei eine Cauchyfolge in X mit $x_{n_k} \in A_{n_k} \forall k$.
Dann existiert eine Cauchyfolge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $y_n \in A_n$ und $y_{n_k} = x_{n_k}$ $\forall n, k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Zuerst soll gezeigt werden, dass o.B.d.A: $A_n \neq \emptyset$ angenommen werden kann.
Wegen der Cauchyeigenschaft existiert ein $n_0 : \eta(A_n, A_m) < 1 \forall n, m \geq n_0$. Da $x_{k_n} \in A_{n_k}$ ist $A_{n_k} \neq \emptyset$ und damit existiert ein $k > n_0$ mit $A_k \neq \emptyset$. Angenommen es existiere ein $l > n_0$ mit $A_l = \emptyset$, dann wäre $\eta(A_k, A_l) = \inf \emptyset = \infty$ ein Widerspruch zur Cauchyeigenschaft. Also gilt $A_n \neq \emptyset \ \ \forall n > n_0$. O.B.d.A. sei $n_0 = 0$.
Als nächstes soll eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruiert und ihre Cauchyeigenschaft nachgewiesen werden: Sei $\varepsilon > 0$:
Für $n \in \{0, 1, \ldots, n_0 - 1\}$ $\ \exists y_n \in A_n$:

$$d(x_{n_1}, y_n) \leq d(x_n, A_n) + \frac{\varepsilon}{6}.$$

Für $k > 0$: $\forall n \in \{n_{k-1} + 1, \ldots, n_k - 1\}$ $\ \exists y_n \in A_n$:

$$d(x_{n_k}, A_n) + \frac{\varepsilon}{6}.$$

Wähle diese y_n für die gesuchte Folge und definiere die noch fehlenden $y_{n_k} := x_{n_k}$.

Es gilt die Cauchyeigenschaft dieser Folge zu zeigen: Wegen den Cauchyeigenschaft der beiden Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein $N(\varepsilon)$ sodass $\forall n,m,n_k,n_l \geq N(\varepsilon)$:

$$d(x_{n_k},x_{n_l}) < \frac{\varepsilon}{3} \wedge \eta(A_m,A_n) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Gibt man $m,n \geq n_0$ vor und wähle k,l derart, dass $n_{k-1}+1 \leq m \leq n_k$ und $n_{l-1}+1 \leq n \leq n_l$ erhält man wie folgt die Cauchyeigenschaft:

$$\begin{aligned} d(y_m,y_n) &\leq d(y_m,x_{n_k}) + d(x_{n_k},x_{n_l}) + d(x_{n_l},y_n) \\ &\leq d(x_{n_k},A_m) + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} + d(x_{n_l},A_n) + \frac{\varepsilon}{6} \\ &\leq e(A_{n_k},A_m) + e(A_{n_l},A_n) + \frac{2\varepsilon}{3} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Hilfssatz C.7
Seien $A,B \in \mathscr{F}$, dann gibt es ein $a \in A$ und ein $b \in B$ mit $\eta(A,B) = d(a,b)$.

Beweis: O.B.d.A. sei $\eta(A,B) = e(A,B)$, wegen der gleichmäßigen Stetigkeit aus Hilfssatz C.5 existiert ein $a : d(a,B) = \sup d(a,B) = e(A,B)$. Ebenso findet am ein $b : d(a,b) = \inf d(a,b) = d(a,B) = e(A,B)$.

□

Satz C.8
Seien $A_n, A \in \mathscr{F}$ und es gelte $A_n \to A$ bezüglich des Hausdorffabstandes η. Dann gilt:

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k} = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} \{x \in X : d(x,A_k) \leq \varepsilon\}.$$

Beweis: Für die erste Gleichheit soll $A \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$ gezeigt werden:
Sei $x \in A$, es gilt

$$d(x,A_n) \leq e(A,A_n) \leq \eta(A,A_n)$$

und da $A_n \to A$ existiert ein $N(\varepsilon)$ mit

$$d(x,A_n) < \varepsilon \ \ \forall n > N(\varepsilon).$$

Daraus folgt für alle $\varepsilon > 0$, dass

$$d(x, \bigcup_{n>N(\varepsilon)} A_n) < \varepsilon$$

und damit

$$d(x, \bigcup_{n>N(\varepsilon)} A_n) = 0,$$

also $x \in \overline{\bigcup_{n>N(\varepsilon)} A_n}$.

Um die Inklusion $A \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$ zu beweisen, sei $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$ fest. Es soll $A_n \to A \cup \{x\}$ gezeigt werden, woraus wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes $A = A \cup \{x\}$ und damit $x \in A$ folgt.
Es gilt

$$e(A_n, A \cup \{x\}) \leq e(A_n, A) \to 0$$

da $A_n \to A$.

$$e(A, A_n) = \max(e(A, A_n), e(\{x\}, A_n))$$

wobei $e(A, A_n) \to 0$, also bleibt zu zeigen, dass $e(\{x\}, A_n) \to 0$.
Da die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist sie auch Cauchyfolge, damit existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ mit $\eta(A_k, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k, m > N(\varepsilon)$. Da $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$ gilt speziell $x \in \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$ und deshalb gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in \bigcup_{k\geq n} A_k : d(x, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Es gibt also ein $k_n \geq n : y_n \in A_{k_n}$ und $d(x, A_{k_n}) \leq d(x, y_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit gilt $\forall n > N(\varepsilon)$

$$d(x, A_n) \leq d(x, A_{k_n}) + e(A_{k_n}, A_n) \leq d(x, A_{k_n}) + \eta(A_{k_n}, A_n) < \varepsilon$$

und damit die Behauptung.

Für die zweite Gleichheit definiere

$$C_k^\varepsilon := \{x \in X : d(x, A_k) \leq e(A, A_k)\}$$

und

$$D := \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} C_k^\varepsilon = \bigcap_{\varepsilon>0} \liminf_{k\to\infty} C_k^\varepsilon.$$

Damit lautet die zweite Gleichheit $A = D$. Es soll zuerst $A \subseteq D$ gezeigt werden.
Sei $x \in A$, dann gilt dass $d(x, A_k) \leq e(A, A_k) \to 0$, das heißt zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $N(\varepsilon)$ sodass für alle $k > N(\varepsilon)$ gilt $e(A, A_k) < \varepsilon$ und damit $d(x, A_k) \leq \varepsilon$. Damit gilt $\forall \varepsilon > 0 : x \in \liminf_{k\to\infty} C_k^\varepsilon$, da x in schließlich allen C_k^ε enthalten ist.
Bleibt $D \subseteq A$ zu zeigen:
Sei $x \in D$, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$, sodass für alle $k > N(\varepsilon)$ gilt, dass $e(x, A_k) \leq \varepsilon$.

$$e(A \cup \{x\}, A_k) = \max(e(A, A_k), e(x, A_k)) = \max(e(A, A_k), d(x, A_k)) \to 0$$

für $k \to \infty$.
Wegen der Konvergenz der $A_n \to A$ gilt auch

$$e(A_k, A \cup \{x\}) \to 0.$$

Zusammengesetz ergibt sich

$$\eta(A_k, A \cup \{x\}) \to 0$$

woraus wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes $x \in A$ folgt.

□

Hilfssatz C.9
Sei $A \in \mathcal{K}(X)$*, dann gilt*

$$A_\delta = \{x \in X : d(x, A) \leq \delta\} =: B$$

Beweis: Es sei an die Notation die in (B.1) eingeführt wurde erinnert:

$$A_\delta := \{x \in X : \exists y \in A : d(x, y) \leq \delta\}$$

Zuerst soll $A_\delta \subseteq B$ gezeigt werden:
Sei $x \in A_\delta$, dann existiert ein $y \in A$ mit $d(x, y) \leq \delta$, woraus

$$d(x, A) \leq d(x, y) \leq \delta$$

folgt und damit $x \in B$.
Bleibt $B \subseteq A_\delta$ zu zeigen:
Sei $x \in B$, wegen der Definition von B gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in A$ mit $d(x, y_n) \leq \delta + \frac{1}{n}$, da A kompakt ist, enthält die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $n_k \to \infty$ streng monoton wachsend, die gegen ein $y \in A$ konvergiert. Also gilt $d(y, y_{n_k}) < \varepsilon$ für alle $k \geq K(\varepsilon)$. Damit gilt

$$d(x, y) \leq d(x, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y) < d(x, A) + \frac{1}{n_k} + \varepsilon \leq \delta + \frac{1}{n_k} + \varepsilon$$

und damit

$$d(x, y) < \delta + \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$, woraus

$$d(x, y) \leq \delta$$

und damit $x \in A_\delta$ folgt.

□

Bemerkung C.1
Dieser Hilfssatz identifierziert die rechte Seite der Gleichung im Satz C.8 als $\{\dots\} = (A_k)_\varepsilon$ falls A_k kompakt.

Hilfssatz C.10
Sei X vollständig und A_n eine η-Cauchyfolge mit $A_n \in \mathscr{F}$, es existiere eine Teilfolge $A_{n_k} : A_{n_k} \neq \emptyset$ für alle $k \geq 0$. Dann ist

$$B := \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k} \neq \emptyset.$$

Beweis: O.B.d.A. sei $A_k \neq \emptyset$. Sei $\varepsilon > 0$, für alle $k \geq 1$ existiert ein $N_k(\varepsilon)$: $\eta(A_k, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^k} \forall m, n \geq N_k(\varepsilon)$. Definiere eine Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} : n_k \geq N_k(\varepsilon)$ und n_k streng monoton wachsend. Konstruiere eine Folge x_{n_k} beginnend mit $x_{n_0} \in A_{n_0}$ beliebig. Für $j > 0$ wähle $x_{n_j} \in A_{n_j}$, sodass $d(x_{n_j}, x_{n_{j-1}}) < \frac{\varepsilon}{2^{j-1}}$. Leicht identifierziert man x_{n_k} als Cauchyfolge. Definiere nun

$$C := \{x \in X : \exists (x_{n_j})_{j\geq 0}, x_{n_j} \in A_{n_j} \forall j : x_{n_j} \to x\}$$

und

$$C^* := \{x \in X : \exists (x_n)_{n\geq 0}, x_n \in A_n \forall n : x_n \to x\}$$

Es soll nun gezeigt werden, dass

$$B \supseteq C = C^*.$$

Trivialerweise gilt $C^* \subseteq C$, wegen des Ausdehnungssatzes für Cauchyfolgen (Satz C.6) gilt auch $C \subseteq C^*$ und damit $C = C^*$.

Sei $x \in C = C^*$, dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in A_n, x_n \to x, x_k \in \bigcup_{l\geq n} A_l \forall k \geq n, \forall n \geq 1$. Daher gilt $\lim_{k\to\infty} x_k \in \overline{\bigcup_{l\geq n} A_l}$ und damit $x \in B$.

□

Bemerkung C.2
Man könnte sogar $B = C$ zeigen.

Definition C.11
(X, d) sei ein metrischer Raum, dann heißt eine Menge $A \subset X$ totalbeschränkt, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1 \dots, x_n \in X$ existieren, sodass

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K_\varepsilon(x_i)$$

gilt, wobei $K_\varepsilon(x_i) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$, also die Kugel mit Radius ε und Mittelpunkt x_i.

Ohne Beweis sei auf folgenden bekannten Zusammenhang hingewiesen:

Hilfssatz C.12
In einem metrischen Raum (X, d) *gilt für eine Menge* $A \subseteq X$*:*

$$A \text{ ist kompakt } \Longleftrightarrow A \text{ ist abgeschlossen und totalbeschränkt.}$$

Dieser Zusammenhang wird nun genützt, um die Vollständigkeit von $\mathcal{K}(X)$ zu zeigen. Zuerst wird gezeigt, dass jede Cauchyfolge abgeschlossener Mengen bezüglich des Hausdorffabstandes konvergiert, anschließend wird die Totalbeschränktheit dieses Grenzwertes für Folgen totalbeschränkter Mengen gezeigt. Damit erhält man für Folgen kompakter Mengen einen kompakten Grenzwert.

Satz C.13
(X, d) *sei vollständig, dann ist auch* $(\mathscr{F}, \eta)$ *vollständig.*

Beweis: $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei Cauchyfolge in $(\mathscr{F}, \eta)$, dann gilt wegen des vorigen Hilfssatzes $B = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\bigcup_{k \in n} A_k} \neq \emptyset$.
Es soll $B = \lim_{n \to \infty} A_n$ gezeigt werden. Bezeichne (x_{n_k}) die Folge aus dem vorigen Beweis, dann gilt:

$$d(x_{n_0}, x_{n_k}) \leq d(x_{n_0}, x_{n_1}) + \ldots + d(x_{n_{k-1}}, x_{n_k}) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\varepsilon}{2^{i-1}} \leq 4\varepsilon.$$

Daraus folgt $d(x_{n_0}, x) \leq 4\varepsilon$ und damit auch $x \in C \subseteq B$, woraus

$$d(x_{n_0}, B) \leq d(x_{n_0}, x) \leq 4\varepsilon$$

folgt. x_{n_0} war aber in A_{n_0} beliebig gewählt, also gilt auch

$$d(A_{n_0}, B) = \sup_{x_{n_0} \in A_{n_0}} d(x_{n_0}, B) \leq 4\varepsilon.$$

Wegen der Cauchyeigenschaft gilt $\eta(A_n, A_m) \leq \varepsilon$ für alle $m, n \geq N(\varepsilon)$, setzt man dies zusammen erhält man

$$e(A_n, B) \leq \eta(A_n, A_{n_0}) + e(A_{n_0}, B) \leq 5\varepsilon$$

also gilt $e(A_n, B) \to 0$.
Sei $\varepsilon > 0$, $N(\varepsilon)$ derart, dass $\eta(A_n, A_m) \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$. Aus $x \in B$ folgt $x \in \overline{\bigcup_{k \geq N(\varepsilon)} A_k}$ und damit gibt es ein $n_0 \geq N(\varepsilon)$ und ein

$y \in A_{n_0} : d(x, y) < \varepsilon$.
Damit gilt für $k \geq N(\varepsilon)$:

$$d(x, A_k) \leq d(x, A_{n_0}) + \eta(A_{n_0}, A_k) \leq d(x, y) + \eta(A_{n_0}, A_k) \leq 2\varepsilon.$$

Damit erhält man für $k \geq N(\varepsilon)$

$$e(B, A_k) \leq \sup_{x \in B} d(x, A_k) \leq 2\varepsilon.$$

Also gilt auch $e(B, A_k) \to 0$ und damit $\eta(B, A_k) \to 0$.

□

Lemma C.14
Sei (X, d) vollständig. Es bezeichne $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{F}$ alle abgeschlossenen, totalbeschränkten Teilmengen von X, dann ist $\mathscr{T}$ abgeschlossen in $\mathscr{F}$ bezüglich η.

Beweis: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{F}$, die gegen $A \in \mathscr{F}$ konvergiert. Es ist die Totalbeschränktheit des Grenzwertes A zu zeigen, hierfür wähle man $\varepsilon > 0$ beliebig. Da A_n totalbeschränkt ist, existiert $I_n = \{1, \ldots, p_n\}$ und es existieren $x_1, \ldots, x_{p_n} \in A_n$, sodass $A_n \subseteq \bigcup_{i \in I_n} K_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$. Für hinreichend großes n gilt wegen der Konvergenz der A_n:

$$d(x, A_n) \leq e(A, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

und damit

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I_n} K_{\varepsilon}(x_i).$$

Also ist auch der Grenzwert A totalbeschränkt.

□

Folgerung C.15
(X, d) sei vollständig, dann ist auch $(\mathcal{K}(X), \eta)$ vollständig.

Beweis: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathcal{K}(X), \eta)$. Wegen Hilfssatz C.12 sind die (A_n) abgeschlossen und totalbeschränkt. Aus Satz C.13 erhält man die Existenz und Abgeschlossenheit, aus Lemma C.14 die Totalbeschränktheit und damit die Kompaktheit des Grenzwertes.

□

Satz C.16
Sei (X, d) separabel, dann ist auch $(\mathcal{K}(X), \eta)$ separabel.

Beweis: Sei $C \subseteq X$ eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge. $E(X)$ bezeichne die Menge aller endlichen Teilmengen von C. Klarerweise ist $E(X)$ höchstens abzählbar. Es soll gezeigt werden, dass $E(X)$ dicht in $(\mathcal{K}(X), \eta)$ ist.
Sei $A \in \mathcal{K}(X)$ und $\varepsilon > 0$. Da A totalbeschränkt ist, gibt es $y_1, \ldots, y_k \in X : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} K_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_j), A \cap K_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_j) \neq \emptyset$. Da C dicht in X liegt findet man $x_1, \ldots, x_k \in C : d(x_j, y_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle j.
Damit gilt aber auch $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} K_{\varepsilon}(x_j)$ und $\{x_1, \ldots, x_k\} \in E(X)$. Muss noch gezeigt werden, dass $\eta(A, B) < \varepsilon$:
Sei $x \in A$, dann gibt es ein $j : d(x, x_j) < \varepsilon$, daher gilt $d(x, B) < \varepsilon$ und damit

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) \leq \varepsilon.$$

Sei umgekehrt $x_j \in B$, dann gilt $d(y_j, x_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ und es gibt ein $z \in A : d(z, y_j) < \frac{\varepsilon}{2}$. Also gilt $d(x_j, A) \leq \varepsilon$ und damit

$$e(B, A) = \max_{j} d(x_j, A) \leq \varepsilon.$$

Zusammengenommen folgt $\eta(A, B) \leq \varepsilon$.

□

Damit sind alle Behauptungen aus Satz C.1 bewiesen.

Anhang D

Beweisdetails

Hilfssatz D.1
Im Beweis von Satz 2.36 gilt $\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\Psi} = \Psi \circ \varphi$.

Lemma D.2
Sei (X, d) *metrischer Raum,* $f : X \to X$ *stetig,* $A_n \subseteq X$ *kompakt, nichtleer und monoton fallend, dann gilt:*

$$f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(A_n).$$

Beweis: Die Inklusion $\subseteq$ ist trivial.

Für $\supseteq$ sei

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(A_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{y \in X : \exists x \in A_n : f(x) = y\}$$

Dann gibt es eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f(y_n) = x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen der Monotonie der A_n gilt $y_n \in A_0 \, \forall n$. Da A_0 kompakt ist, existiert eine Folge $k_n \in \mathbb{N}$ sodass die Teilfolge y_{k_n} konvergiert und wegen der Stetigkeit von f gilt:

$$x = f(y_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} f(y_{k_n}) = f(\lim_{n\to\infty} y_{k_n}).$$

Da die $y_{k_n} \in A_{k_n}$ gewählt waren, folgt $\lim_{n\to\infty} y_{k_n} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{k_n}$ und damit wegen der Monotonie auch in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Also folgt $x \in f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.

$\square$

Bemerkung D.1
Die Voraussetzung stetig ist notwendig: Sei $X = [-1, 1], f(0) = 0, f(x) = 1$ für $x \neq 0$ und $A_n := [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ Dann ist $f(\cap A_n) = \{0\}$ und $\cap f(A_n) = \{0, 1\}$

Beweis:[von Hilfssatz D.1]
Sei $((S_0,\ldots,S_{N-1}),(\mathscr{S}^{(0)},\ldots,\mathscr{S}^{(N-1)})) \in \mathrm{Con}(X)^N \times \Omega^N$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{array}{cl}
 & \widetilde{\varphi}\circ\widetilde{\Psi}((S_0,\ldots,S_{N-1}),(\mathscr{S}^{(0)},\ldots,\mathscr{S}^{(N-1)})) \\
= & \widetilde{\varphi}((S_0,\ldots,S_{N-1}),(\Psi(\mathscr{S}^{(0)}),\ldots,\Psi(\mathscr{S}^{(N-1)}))) \\
= & \bigcup_{p=0}^{N-1} S_p \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \bigcup_{\alpha\in E^{q+1}} \overline{(S^{(p)}_{\alpha|1}\circ\ldots\circ S^{(p)}_{\alpha||\alpha|}(X))} \\
\overbrace{=}^{Lemma D.2} & \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \bigcup_{\alpha\in E^{q+1}} \bigcup_{p=0}^{N-1} \overline{(S_p\circ S^{(p)}_{\alpha|1}\circ\ldots\circ S^{(p)}_{\alpha||\alpha|}(X))} \\
\overbrace{=}^{(*)} & \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \bigcup_{\beta_0*\alpha\in E^{q+2}} \overline{(S_{\beta_0}\circ S^{(\beta_0)}_{\alpha|1}\circ\ldots\circ S^{(\beta_0)}_{\alpha||\alpha|}(X))} \\
= & \Psi\circ\varphi((S_0,\ldots,S_{N-1}),(\mathscr{S}^{(0)},\ldots,\mathscr{S}^{(N-1)}))
\end{array}$$

(*)Das erste Zeichen der in der Vereinigung gewählten Wörter wird mit β_0, das restliche Wort mit α bezeichnet.

Da das stetige Bild kompakter Mengen kompakt ist, macht der Abschlussoperator keine Probleme.

□

Anhang E

Zur Struktur des Con(X)

Ziel dieses Abschnittes ist es, den folgenden Satz zu beweisen. Auf dem Weg dorthin wird bewusst auf größt mögliche Allgemeinheit verzichtet, um die Stuktur des Con(X), die für diese Arbeit wichtig ist, möglichst direkt zu betrachten.

Satz E.1
Sei (X,d) ein vollständiger, separabler, metrischer Raum mit endlichem Durchmesser. Dann ist Con(X) *versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ein separabler, metrisierbarer Raum, der die abzählbare Vereinigung von vollständigen metrisierbaren Teilmengen und daher ein Suslin-Raum ist.*

Bemerkung E.1
Unter obrigen Voraussetzungen ist (X, d) auch kompakt.

Definition E.2
Ein topologischer Raum heißt polnisch, wenn es eine seine Topologie definierende, vollständige Metrik gibt und wenn diese Topologie eine abzählbare Basis hat. Für metrisierbare Räume ist die Existenz einer dichten, abzählbaren Teilmenge äquivalent zur Exsistenz einer abzählbaren Basis.
Ein topologischer Raum heißt Suslin-Raum, wenn er das stetige Bild eines polnischen Raums ist.

Bemerkung E.2
Ist ein Raum abzählbare Vereinigung von polnischen Räumen, so ist er ein Suslinraum, für einen Beweis hierfür siehe zum Beispiel Bourbaki [5] IX, §6.3, Prop.8.

Definition E.3
$(X, d), (Y, d')$ seinen metrische Räume, $f, f_n : X \to Y$ Funktionen.
Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion f, in Zeichen $f_n \to f$, falls

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X \;\; \exists N(\varepsilon, x) : d'(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \;\; \forall n \geq N(\varepsilon, x).$$

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion f, in Zeichen $f_n \rightrightarrows f$ falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) : d'(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \;\; \forall n \geq N(\varepsilon) \;\; \forall x \in X.$$

Bemerkung E.3
Trivialerweise gilt:

$$[f_n \rightrightarrows f] \Longrightarrow [f_n \to f]$$

$\mathrm{Con}(X)$ selbst wird sich im Folgenden als nicht vollständig herausstellen, allerdings kann man eingrenzen, wie Grenzfunktionen von Cauchyfolgen von Kontraktionen in einem größeren, vollständigen Raum aussehen würden:

Hilfssatz E.4
Sei (X, d) *metrischer Raum. Es bezeichne*

$$\mathrm{Con}(X)_n = \{S \in \mathrm{Con}(X) : \mathrm{Lip}(S) \leq \frac{n-1}{n}\}$$

mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Weiters bezeichne

$$\overline{\mathrm{Con}(X)} = \{S \textit{ stetig} : \mathrm{Lip}(S) \leq 1\}$$

ebenfalls mit der Topologie der punktweisen Konvergenz.
Dann sind die Räume $\mathrm{Con}(X)_n$ *und* $\overline{\mathrm{Con}(X)}$ *vollständig.*

Beweis: Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathrm{Con}(X)_n$, mit $S_n \to f$ in X^X. Dann ist zu zeigen, $f \in \mathrm{Con}(X)_n$:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \lim_{n\to\infty} (S_n(x), S_n(y)) \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{Lip}(S_n) d(x, y) \\ &\leq \sup_n \mathrm{Lip}(S_n) d(x, y) \leq \frac{n-1}{n} d(x, y) \end{aligned}$$

Die erste Gleichheit gilt wegen der Stetigkeit der Metrik.
Ganz analog verläuft die Argumentation für Folgen in $\overline{\mathrm{Con}(X)}$.

$\square$

Bemerkung E.4
Con(X) ist nicht abgeschlossen, da für Folgen in Con(X) $\sup_n \mathrm{Lip}(S_n) = 1$ im obrigen Beweis gelten kann. Für die „Grenzfunktion“ f also $\mathrm{Lip}(f) = 1$ und damit $f \notin \mathrm{Con}(X)$ gelten könnte. Diese Funktionen mit Lipschitzkonstante 1 sind die einzigen möglichen Grenzwerte für Cauchyfolgen außerhalb von Con(X).

Als nächstes soll die Frage beantwortet werden, warum man Con(X) eigentlich mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versieht und nicht zum Beispiel die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, die bekanntlich „schönere“ Eigenschaften liefert, verwendet:

Satz E.5
Sei (X, d) kompakter metrischer Raum. Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Con(X) *und $f \in \overline{\mathrm{Con}(X)}$, dann gilt:*

$$[S_n \to f] \Longleftrightarrow [S_n \rightrightarrows f]$$

Beweis: Die Richtung $\Longleftarrow$ ist trivial.
Für $\Longrightarrow$ sei $\varepsilon > 0$ und wähle δ, sodass $\varepsilon - 2\delta > 0$.
Überdecke nun X mit Kugeln $K_\delta(x)$. Wegen der Kompaktheit von X gibt es eine endliche Indexmenge I, sodass die Kugeln $K_\delta(y), y \in I$ bereits X überdecken. Es bezeichne

$$N(\varepsilon) = \max_{y\in I}\{N(\varepsilon - 2\delta, y)\}$$

wobei $N(\varepsilon, x)$ wie in der Definition der punktweisen Konvergenz zu verstehen ist.
Sei nun $x \in X$ beliebig, dann gibt es ein $y \in I$ mit $d(x, y) < \delta$ und es gilt $\forall n \geq N(\varepsilon)$ wegen der Dreiecksungleichung und da sowohl S_n als auch f Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante ≤ 1 sind:

$$d(S_n(x), f(x)) \leq \underbrace{d(S_n(x), S_n(y))}_{<\delta} + \underbrace{d(S_n(x), f(x))}_{\leq\varepsilon-2\delta} + \underbrace{d(f(x), f(y))}_{\leq\delta} < \varepsilon.$$

Damit gilt aber bereits die gleichmäßige Konvergenz.

□

Folgerung E.6
Sei (X, d) kompakter metrischer Raum. Dann sind auf Con(X) *die Topologie der punktweisen Konvergenz und die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz äquivalent.*

Beweis: Folgt aus dem obrigen Satz, zusammen mit der Feststellung, dass Cauchyfolgen in $\mathrm{Con}(X)$ nur gegen Funktionen in $\overline{\mathrm{Con}(X)}$ konvergieren können, wie im obrigen Hilfssatz gezeigt wurde.

□

Damit gestaltet sich die Frage nach der Metrisierbarkeit einfacher, denn die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz ist äquivalent zu der von der Supremumsmetrik

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$$

induzierten. Speziell wurde mit den obrigen Sätzen bereits die Vollständigkeit und Metrisierbarkeit der Räume $\mathrm{Con}_n(X)$ gezeigt, jetzt sollen diese sogar als polnische Räume identifiziert werden:

Den Beweis für folgenden Satz findet man zum Beispiel bei Kuratowski [17].

Satz E.7
Es sei X ein kompakter metrischer Raum und Y ein separabler metrischer Raum, dann ist der Raum Y^X separabel.

Satz E.8
Sei (X,d) wie in Satz E.1.
Dann sind die Räume $\mathrm{Con}(X)_n$ und $\mathrm{Con}(X)$ separabel.

Beweis: X^X ist separabel bzgl. Supremumsmetrik, damit gibt es eine abzählbare Basis, damit haben die Teilräume $\mathrm{Con}(X)_n$ und $\mathrm{Con}(X)$ auch abzählbare Basis, konkret $A \cap \mathrm{Con}(X)_n$ für $A \in \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis des X^X.

□

Folgerung E.9
Die Räume $\mathrm{Con}(X)_n$ sind polnische Räume, $\mathrm{Con}(X)$ ist Suslinraum.

Beweis: $\mathrm{Con}(X)$ lässt sich als abzählbare Vereinigung von polnischen Räumen schreiben und ist damit Suslinraum.

$$\mathrm{Con}(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Con}(X)_n$$

□

Literaturverzeichnis

[1] Arbeiter, M.: *Random Recursive Construction of Self-Similar Fractal Measures. The Noncompact Case.*, Probab.Th.Rel.Fields 88, 497-520, 1991

[2] Bachman, G. und Lawrence, N.: *Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1966

[3] Barnsley, M.F.: *Fraktale - Theorie und Praxis der Deterministischen Geometrie*, Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg 1995

[4] Bauer, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie* 5. Auflage, de Gruyter, Berlin 2002

[5] Bourbaki, N.: *Elements of Mathematics, General Topology 2*, 1966

[6] Dinhobl, Veronika: *Zufällige Fraktale*, Diplomarbeit, TU Wien

[7] Edgar, G.A.: *Integral, Probability, and Fractal Measures* Springer-Verlag, New York, 1998

[8] Edgar, G.A.: *Measure, Topology, and Fractal Geometry* Springer-Verlag, New York, 2. Aufl. 2007

[9] Elstrodt, J.: *Maß- und Integrationstheorie* 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2005

[10] Falconer, K.: *Techniques in Fractal Geometry* Wiley, 1997

[11] Falconer, K.: *Probabilistic Methods in Fractal Geometry* Progress in Probability Vol. 35, 1995

[12] Falconer, K.: *Fractal Geometry* Wiley, 2003

[13] Graf, S.: *Statistically Self-Similar Fractals*, Probab.Th.Rel.Fields 74, 357-392, 1987

[14] Graf, S., Mauldin, R.D. und Williams, S.C.: *The Exact Hausdorff Dimension in Random Recursive Constructions*, Memoirs of the American Mathematical Society 381, 1988

[15] Halmos, P.R.: *Measure Theory* Van Nostrand, New York, 1950

[16] Hutchinson, J.E.: *Fractals and Self Similarity* Indiana University Mathematics Journal, Vol.30, No.5, 1981

[17] Kuratowski, K.: *Topology* Academic Press, New York 1966

[18] Mauldin, R.D und Williams, S.C.: *Random Recursive Constructions: Asymptotic Geometric and Topological Properties*, Transactions of the American Mathematical Society 295,325-346 1986

[19] Rogers, C.A.: *Hausdorff Measures* Cambridge University Press 1970

[20] Whyburn, G.T.: *Topological characterization of the Sierpiński curve.* Fund. Math. 45 (1958), 320-324.

[21] Wieger, Verena: *Fraktale, Maße, Dimension*, Diplomarbeit, TU Wien

Index

Anhang F

Notation

$\delta(.)$-Durchmesser einer Menge

$e(.,.)$-Exzess

$\eta(.,.)$-Hausdorffabstand

$\mathcal{K}(X)$-Raum aller nichtleeren kompakten Teilmengen von X.

α-Ein Wort oder eine Kette aus Buchstaben eines Alphabetes E.

α_n-Der n-te Buchstabe eines Wortes α.

$|\alpha|$-Die Länge des Wortes α.

$\alpha * \beta$-β wird an α angehängt, diese bilden einen neues Wort bzw. Kette.

$\alpha|n$-Das Wort, dass aus den ersten n Buchstaben von α besteht.

$\alpha \prec \beta$-α geht β voran, also $\beta||\alpha| = \alpha$.

E^n-Alle Wörter der Länge n.

E^*-Alle endlichen Wörter.

E^∞-Alle Ketten (unendliche Wörter).

$[\alpha]$-Alle Ketten, die mit der Zeichenfolge α beginnen.

Min-Alle Minimalüberdeckungen.

$\Gamma \prec H$-H ist verfeinerung von Γ.

Lip(.)-Die kleinste Lipschitzkonstante einer Abbildung.

Con(X)-Der Raum aller Kontraktionen von X nach X.

$\Omega = \Omega(X, N)$ - Bezeichnet den Raum $(\mathrm{Con}(X)^N)^{E^*}$.

$\mathscr{S} = (\mathscr{S}_\alpha)_{\alpha \in E^*}$- Ein Element aus Ω, wobei $S_\alpha = (S_0, \ldots, S_{N-1})$.

$\Omega_0 =$ Alle $\mathscr{S} \in \Omega$ mit $\lim_{q\to\infty} \prod_{n=1}^q \mathrm{Lip}(S_{\alpha|n}) = 0$.

$K = K(\mathscr{S}) := \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \bigcup_{\alpha \in E^{q+1}} \overline{S_{\alpha|1} \circ \ldots \circ S_{\alpha|q+1}(X)}$

$\mathscr{C}_\varepsilon = \{A \subseteq X : \delta(A) \leq \varepsilon\}$

$\mathscr{U}_\varepsilon(A) = \{(C_i)_{i\geq 1} : C_i \in \mathscr{C}_\varepsilon \wedge \bigcup_{i\geq 1} C_i \supseteq A\}$

$\mathscr{H}_\varepsilon^h(A) = \inf\{h(\delta(C_i)) : (C_i)_{i\geq 1} \in \mathscr{U}_\varepsilon(A)\}$

$\mathscr{H}^s$-Das s-dimensionale Hausdorffmaß.

$\dim_H(.)$ - Hausdorffdimension.

$\mathscr{S}^{(0)}$ - siehe Definition 2.23

$\dim_A$ - Ähnlichkeitsdimension

δ_x - Diracmaß im Punkt x

$|\Gamma|$ - Die Länge des längsten Wortes einer Überdeckung