Diplomarbeit

Modelle der klassischen Risikotheorie mit Verzinsung in diskreter und stetiger Zeit

ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien
unter Anleitung von

Ao. Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek

durch

Elke Fellner
0325180, E873

4810 Gmunden, Fliegerschulweg 21/18

28. April 2009

Danksagung

Ich möchte mich vor allem bei meinen Eltern *Gerlinde* und *Stefan Fellner* für die Unterstützung während meiner ganzen Studienlaufbahn und insbesondere während des Verfassens dieser Arbeit bedanken. Sie haben mir moralisch immer beigestanden und tragen somit großen Anteil an meinen bisherigen Erfolgen.

Ein besonderer Dank gilt meinem Diplomarbeitsbetreuer *Ao. Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek*, der mir während meiner Diplomarbeitsphase immer mit Rat und Tat zur Seite gestanden hat.

Zuletzt bedanke ich mich bei allen Freunden und Studienkollegen, die mir während meines Studiums helfend zu Seite gestanden haben.
Besonders danke ich *Sabine Wimmer* zur Verfügungstellung ihrer Unterlagen für den Beweis des Satzes 3.1.3.
Danke auch meinem Freund *Michael Forster*, der mich vor allem in den Tiefen der Diplomarbeitsphase unterstützt hat und auch als Korrekturleser fungierte.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Der Beginn der modernen Risikotheorie wird auf das Jahr 1909 datiert. In diesem Jahr präsentierte Filip Lundberg am 9. Internationalen Kongress der Aktuare in Wien das erste Modell eines Risikoprozesses. Erst zwanzig Jahre später formalisierte Cramèr die Ideen Lundbergs auf Basis der Wahrscheinlichkeitstheorie. Heute gilt die Risikotheorie als Fundament der Versicherungsmathematik. Sie basiert auf der mathematischen Stochastik sowie auf der Nutzen- und Entscheidungstheorie. Einige Bereiche der Risikotheorie stehen in engem Zusammenhang zur Bayes Statistik, zur Spieltheorie und zur Warteschlangentheorie. [10]
Besonders in jüngster Zeit hat die Ruintheorie unter Einbezug von Zinsen bei Versicherungsmathematikern immer mehr an Bedeutung gewonnen. Aus diesem Grund werde ich mich in meiner Arbeit vor allem mit diesem Thema auseinandersetzen.

Diese Diplomarbeit basiert hauptsächlich auf den beiden Artikeln „Ruin problems for a discrete time risk model with random interest rate“ von Hailiang Yang und Lihong Zhang [19] und „Optimal dividend strategy in the compound poisson model with constant interest“ von Ying Fang und Rong Wu [9].

Im zweiten Kapitel wird ein diskretes Risikomodell mit zufälliger Zinsrate betrachtet. Durch Verwendung der Martingaltechniken kann sowohl die Konvergenz des diskontierten Risikoprozesses bewiesen werden, als auch ein Ausdruck für die Ruinwahrscheinlichkeit inklusive deren Grenzen erhalten werden. Des weiteren wird die Verteilung des Risikos unmittelbar nach Ruin, vor Ruin, die gemeinsame Verteilung des Risikos kurz vor und nach Ruin und die Verteilung der Ruinzeit betrachtet.
Im zweiten Teil des Kapitels wird ein Vergleich mit dem diskreten Risikomo-

dell ohne Zinsen angestrebt.

Im dritten Kapitel wird gezeigt, dass in einem Risikomodell in stetiger Zeit der optimale Funktionswert der Dividenden durch die Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung charakterisiert werden kann. Im Falle eines exponentiell verteilten Schadenverlaufs ist zu sehen, dass die optimale Dividendenstrategie eine Threshold Strategie ist. Somit kann die Laplace Transformation der Ruinzeit gemäß einer Threshold Strategie berechnet werden. Weiters spielen in diesem Kapitel Kummers konfluente hypergeometrische Gleichung und konfluente hypergeometrische Funktionen eine wichtige Rolle.
Analog zum zweiten Kapitel wird auch hier ein Vergleich zum Risikomodell in stetiger Zeit ohne Zinsen gezogen.

Kapitel 2

Ruin im diskreten Risikomodell

2.1 Die Ruinproblematik mit zufälliger Zinsrate im diskreten Risikomodell

Dieses Kapitel orientiert sich an dem Artikel „Ruin problems for a discrete time risk model with random interest rate“ von Hailiang Yang und Lihong Zhang [19]. Wir unterscheiden zwei möglichen Sichtweisen in der Risikotheorie. Einerseits die versicherungsmathematische Sicht, in der die Ruinwahrscheinlichkeit das Hauptforschungsgebiet der Risikotheorie ist, andererseits die mathematische Sicht, in der die Ruintheorie in engem Verhältnis zur Warteschlangentheorie steht. Beide Sichtweisen sind in ihrer Gesamtheit an wissenschaftlichen Methoden (Methodik) gleich und meistens kann ein und dasselbe Resultat in beiden Gebieten nur mit unterschiedlichen Interpretationen verwendet werden.
Die in diesem Artikel verwendeten Notationen New better than used (NBU) Verteilungen und New worse than used (NWU) Verteilungen spielen eine wichtige Rolle in der Zuverlässigkeitstheorie.
Die große Anzahl kürzlich erschienener Publikationen belegt, dass die Ruintheorie unter Einbezug von Zinsen ein aktuelles Forschungsgebiet der Versicherungsmathematik ist, z.B. hat Cai in zwei sehr interessanten Artikeln ([3] und [4]) die Ruinwahrscheinlichkeit im diskreten Modell mit zufälliger Zinsrate betrachtet, unter der Voraussetzung, dass die Zinsrate zuerst eine u.i.v. Folge und später ein autoregressives Zeitreihenmodell darstellt. Dadurch erhielt man die Lundberg-Ungleichungen für die Ruinwahrscheinlichkeit. Ein Jahr danach schafften es Cai und Dickson [5] die exponentielle Form der Obergrenze für die Ruinwahrscheinlichkeit im Sparre Andersen Modell mit Zinsen zu finden.

2.1.1 Das Modell und einige Annahmen

Einige wichtige Notationen:

U_n	...	Risiko eines Versicherungsunternehmens am Ende einer Periode n
C_n	...	vereinnahmte Prämien eines Versicherungsunternehmens zu Beginn der Periode n
X_n	...	bezahlte Schäden am Ende des Intervalls n
R_n	...	short-term Zinsrate im Intervall n

Die Risikodynamik ist gegeben durch

$$U_n = (U_{n-1} + C_n)(1 + R_n) - X_n, \tag{2.1}$$

wobei $C_1,\ldots,C_n$, genauso wie $X_1,\ldots,X_n$ und $R_1,\ldots,R_n$ Folgen von u.i.v nichtnegativen Zufallsvariablen sind. Vorausgesetzt die Bedingungen des Nettogewinns (= Differenz zwischen betrieblichen Leistungen und Kosten) sind erfüllt, gilt:

$$\mathbb{E}((1 + R)^{-1}X) \leq \mathbb{E}(C) < \infty,$$

wobei X die selbe Verteilung wie X_i und C die selbe Verteilung wie C_i hat. Sei u nun das Anfangskapital des Versicherungsunternehmens, dann kann das oben beschriebene Modell, wie folgt umgeschrieben werden:

$$U_n = \frac{1}{H_n}\left[u + \sum_{k=1}^{n}(C_k - X_k(1 + R_k)^{-1})H_{k-1}\right], \tag{2.2}$$

wobei $H_n = \prod_{i=1}^{n}(1 + R_i)^{-1}$ der diskontierte Faktor mit $H_0 = 1$ ist.

Definition 2.1.1. Die Ruinwahrscheinlichkeit eines Versicherungsunternehmens mit Anfangskapital u ist wie folgt definiert:

$$\psi(u) = P(\inf_{n\geq 0} U_n < 0|U_0 = u) = P(T < \infty|U_0 = u). \tag{2.3}$$

T ist die Ruinzeit, d.h.

$$T = \inf\{n \geq 0; U_n < 0\}, \tag{2.4}$$

wobei $T = \infty$, falls $U_n \geq 0$ für alle $n \geq 0$.

Wir betrachten nun einige verwandte Verteilungen:

$$G(u,q) = P(|U_T| \leq q | U_0 = u). \tag{2.5}$$

G(u,q) bezeichnet die Verteilung des Risikos unmittelbar nach Ruin. Ähnlich ist die Verteilung des Risikos unmittelbar vor Gewinn

$$F(u,p) = P(U_{T-} \leq p | U_0 = u), \tag{2.6}$$

$T-$ bezeichnet die Zeit vor Ruin.

$$H(u,p,q) = P(U_{T-} \leq p, |U_T| \leq q | U_0 = u) \tag{2.7}$$

ist die gemeinsame Verteilung des Risikos unmittelbar vor und nach Ruin, mit positiven reellen Zahlen p und q.

2.1.2 Konvergenz des diskontierten Risikoprozesses und dazugehörige Ergebnisse

In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass, für alle $n \geq 1$, C_n und X_n unabhängig von $\{R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}\}$ sind.
Sei $V_n = H_n U_n - u$ die Differenz zwischen diskontiertem Risiko und Anfangsrisiko.

Theorem 1. *Es existiert eine integrierbare Zufallsvariable V_∞, sodass fast überall*

$$V_n \to V_\infty. \tag{2.8}$$

Weiters gilt

$$\mathbb{E}[V_\infty] = \mathbb{E}\left[C - \frac{X}{1+R}\right] \frac{h}{1-h}, \tag{2.9}$$

mit $h = \mathbb{E}[(1+R)^{-1}]$, wobei $0 < h < 1$ ist.

Beweis. $V_n = H_n U_n - u = \sum_{k=1}^{n} \left[(C_k - X_k(1+R_k)^{-1}) \prod_{i=1}^{k-1} (1+R_i)^{-1} \right]$ und es sei $\mathcal{F}_n = \sigma\{C_i, X_i, R_i, 1 \leq n\}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[V_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] &= V_{n-1} + \mathbb{E}\left[(C_n - X_n(1+R_n)^{-1} \prod_{i=1}^{n-1} (1+R_i)^{-1} | \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&= V_{n-1} + H_{n-1} \mathbb{E}\left[(C_n - X_n(1+R_n)^{-1}) | \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&= V_{n-1} + H_{n-1} \left[\mathbb{E}(C_n) - \mathbb{E}(X_n(1+R_n)^{-1}) \right].
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass $\mathbb{E}((1+R)^{-1}X) \leq \mathbb{E}(C)$, gilt

$$\mathbb{E}(C_n) - \mathbb{E}\left[X_n(1+R_n)^{-1}\right] \geq 0.$$

Dann folgt $\mathbb{E}(V_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq V_{n-1}$. Somit ist $\{V_n, n \geq 0\}$ ein Submartingal. Verwenden wir die Unabhängigkeitsannahme des bedingten Erwartungswertes dann gilt

$$\begin{aligned}
\sup_n \mathbb{E}|V_n| &\leq \sup_n \left\{ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|(C_k - X_k(1+R_k)^{-1}) \prod_{i=1}^{k-1} (1+R_i)^{-1}| \right\} \\
&\leq \sup_n \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|(C_k + X_k(1+R_k)^{-1}) \prod_{i=1}^{k-1} (1+R_i)^{-1}| \\
&= \sup_n \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[C_k + X_k(1+R_k)^{-1})\right] \mathbb{E}(\prod_{i=1}^{k-1} (1+R_i)^{-1}) \\
&= \mathbb{E}\left[C + X(1+R)^{-1}\right] \sup_n \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{E}\left[(1+R_i)^{-1}\right])^{k-1}.
\end{aligned}$$

Sei $\mathbb{E}\left[(1+R)^{-1}\right] = h$, da die Zufallsavariable R_i positiv ist, gilt $0 < h < 1$. Aus diesem Grund kann die rechte Seite der obigen Gleichung wie folgt geschrieben werden,

$$\mathbb{E}\left[C + X(1+R)^{-1}\right] \sup_n \sum_{k=1}^{n} h^{k-1} \leq \mathbb{E}\left[C + X(1+R)^{-1}\right] \frac{h}{1-h} < \infty.$$

Beruhend auf dem Martingal-Konvergenz-Satz [12] existiert eine integrierbare Zufallsvariable V_∞, sodass $V_n \to V_\infty$ fast überall. Weiters ist es einfach zu zeigen, dass

$$\mathbb{E}\left[V_\infty\right] = \mathbb{E}\left[C + X(1+R)^{-1}\right] \frac{h}{1-h}.$$

Somit ist das Theorem 1 bewiesen. □

Tatsächlich können wir die charakteristische Funktion von V_∞ finden. Angenommen V_∞ besitzt die Verteilungsfunktion $F_\infty(.)$, dann kann die Ruinwahrscheinlichkeit in Termen von $F_\infty(.)$ ausgedrückt werden.

Theorem 2. *Unter den oben genannten Annahmen erhalten wir folgenden Ausdruck:*

$$\psi(u) = \frac{F_\infty(-u)}{\mathbb{E}[F_\infty(-U_T|T < \infty)]}. \tag{2.10}$$

Beweis. Sei $Z_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(C_k - X_k(1+R_k)^{-1})H_{k-1}$, dann gilt für alle $n > 0$

$$u + V_\infty = u + V_n + Z_n = (H_n^{-1}(u+V_n) + H_n^{-1}Z_n)H_n = (U_n + H_n^{-1}Z_n)H_n.$$

Es ist offentsichtlich, dass das Ereignis $[T < \infty]$ das Ereignis $[u + V_\infty < 0]$ enthält, dann gilt für $T < \infty$

$$P(u + V_\infty < 0) = P((U_T + H_T^{-1}Z_T)H_T < 0, T < \infty).$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass $H_T^{-1}Z_T \stackrel{d}{=} V_\infty$, deshalb ist

$$\begin{aligned} F_\infty(-u) &= P(u + V_\infty < 0) \\ &= P((U_T + H_T^{-1}Z_T)H_T < 0 | T < \infty)P(T < \infty) \\ &= P(H_T^{-1}Z_T < -U_T | T < \infty)P(T < \infty) \\ &= \mathbb{E}\left[F_\infty(-U_T | T < \infty)\right]\psi(u). \end{aligned}$$

Somit ist der Beweis des Theorems 2 vollständig. □

Bemerkung. Falls $F_\infty(0) > 0$ ist, weil $U_T < 0$ und $F_\infty(x) \leq 1$ ist, dann gilt

$$F_\infty(-u) \leq \psi(u) \leq \frac{F_\infty(-u)}{F_\infty(0)}.$$

Wir sagen eine Verteilungsfunktion $F(x)$ ist eine NWU-Verteilung, wenn $F(x)$ eine Dichtefunktion einer nichtnegativen Zufallsvariable ist und $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, und $\bar{F}(x)\bar{F}(y) \leq \bar{F}(x+y)$ für $x \geq 0$ und $y \geq 0$ erfüllt. Andererseits gilt, $F(x)$ ist eine NBU-Verteilung, falls $\bar{F}(x)\bar{F}(y) \geq \bar{F}(x+y)$ für $x \geq 0$ und $y \geq 0$ ist.

Proposition 1. *Es gelten folgende Resultate:*

1. *Falls die Verteilungsfunktion von X NBU ist, dann gilt*

$$\psi(u) \geq \frac{F_\infty(-u)}{\mathbb{E}[F_\infty(X)]}. \tag{2.11}$$

2. *Falls die Verteilungsfunktion von X NWU ist, dann gilt*

$$\psi(u) \leq \frac{F_\infty(-u)}{\mathbb{E}[F_\infty(X)]}. \tag{2.12}$$

3. *Falls die Verteilungsfunktion von X exponentiell ist, dann gilt*

$$\psi(u) = \frac{F_\infty(-u)}{\mathbb{E}[F_\infty(X)]}. \tag{2.13}$$

Beweis. Um die drei Teile der Proposition zu beweisen, genügt es, wenn wir uns den Punkt 1. anschauen, da 2. genau wie 1. zu beweisen ist und 3. nichts anderes als eine direkte Folgerung aus 1. und 2. ist.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[F_\infty(-U_T|T<\infty)\right] &= P(V_\infty < -U_T|T<\infty) \\ &= P(V_\infty < -U_{T-} + X|X > U_{T-}) \\ &= P(X > V_\infty + U_{T-}|X > U_{T-}), \end{aligned}$$

wobei U_{T-} das Risiko vor Ruin bezeichnet. Aus der Definition wissen wir, dass $U_{T-} > 0$ ist.
Falls $V_\infty \geq 0$, da die Verteilungsfunktion von X NBU ist, gilt:

$$P(X > V_\infty + U_{T-}|X > U_{T-}) \leq P(X > V_\infty) = \mathbb{E}\left[F_\infty(X)\right].$$

Falls $V_\infty < 0$, gilt

$$\mathbb{E}\left[F_\infty(-U_T|T<\infty)\right] \leq P(X > V_\infty) = \mathbb{E}\left[F_\infty(X)\right].$$

Aus dem Theorem 2, erhalten wir

$$\psi(u) \geq \frac{F_\infty(-u)}{\mathbb{E}\left[F_\infty(X)\right]}$$

und somit ist der 1.Teil der Proposition gezeigt. □

2.1.3 Rekursive Formeln oder Gleichungen für die Ruinfunktionen

Wir nehmen an, wir haben drei zufällige Folgen $\{C_n; n = 1, 2, \dots\}$, $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ und $\{R_n; n = 1, 2, \dots\}$, die unabhängig voneinander sind.
Sei $W_n = -\left[C_n - X_n(1+R_n)^{-1}\right]$, dann kann das in diesem Artikel betrachtete Modell, folgendermaßen geschrieben werden:

$$U_n = \frac{1}{H_n}\left\{u - \sum_{k=1}^{n} W_k H_{k-1}\right\}, \tag{2.14}$$

wobei $\{W_n, n = 1, 2, ...\}$ eine unabhängig identisch zufällige Folge ist. Beachte, dass W_k unabhängig von H_{k-1} für alle $k \geq 1$, ist.

Zuerst bestimmen wir die Verteilung von W_n. Bezeichne $A(z)$ die Verteilungsfunktion von W, dann gilt,

$$\begin{aligned} A(z) &= P(W \leq z) = P(X(1+R)^{-1} - C \leq z) = \mathbb{E}\left[F_X((1+R)(z+C))\right] \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} F_X((1+r)(z+c))dF_C(c)dF_R(r). \end{aligned}$$

Wir werden auch die gemeinsame Funktion von W und R brauchen, im Folgenden bezeichnet als $B(s,t)$.

$$\begin{aligned} B(s,t) &= P(W \leq s, R \leq t) = P(X(1+R)^{-1} - C \leq s, R \leq t) \\ &= \int_0^t \mathbb{E}\left[F_X((s+C)(1+r))\right] dF_R(r) \\ &= \int_0^t \int_0^{+\infty} F_X((s+c)(1+r)) dF_C(c) dF_R(r), \end{aligned}$$

wobei $F_X(.)$, $F_C(.)$ und $F_R(.)$ die Verteilungen der Zufallsvariablen X, C und R bezeichnen. Das verwendete Integral ist das Lebesgue-Stieltjes-Integral.
Sei T die Ruinzeit, dann gilt

$$T = \inf\{n > 0 : U_n < 0\} = \inf\{n > 0 : \sum_{k=1}^{n} W_k H_{k-1} < u\}.$$

Die folgenden Gleichungen sind nützlich um numerische Werte für die Ruinfunktion berechnen zu können.

Die gemeinsame Verteilung des Risikos kurz vor und unmittelbar nach Ruin

Wir erinnern uns, dass

$$H(u,p,q) = P(U_{T-} \leq p, |U_T| \leq q | U_0 = u),$$

mit positiven reellen Zahlen p und q.
Wir betrachten nun die Funktion,

$$H_1(u,p,q) = P(U_T \leq -q, U_{T-} > p, T < \infty | U_0 = u).$$

$H_1(u,p,q)$ bezeichnet die gemeinsame Verteilung des Risikos unmittelbar vor und nach Ruin ist.
Allgemein wissen wir, dass $S_n = \sum_{i=1}^{n} W_i H_{i-1}$ und $U_n = \frac{1}{H_n}(u - S_n)$. Weiters gilt

$$\begin{aligned} U_k \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{H_k}(u - S_k) \geq 0 \Leftrightarrow S_k \leq u \\ U_k > p &\Leftrightarrow \frac{1}{H_k}(u - S_k) > p \Leftrightarrow u - S_k > pH_k \Leftrightarrow S_k < u - pH_k \\ U_n \leq -q &\Leftrightarrow S_n \geq u + qH_n \end{aligned}$$

somit können wir schreiben

$$\begin{aligned}&\{T=n, U_{n-1}>p, U_n\le -q\}=\\&\{U_1\ge 0, U_2\ge 0,\ldots,U_{n-2}\ge 0, U_{n-1}>p, U_n\le -q\}=\\&\{S_1\le u,\ldots,S_{n-2}\le u, S_{n-1}<u-pH_{n-1}, S_n\ge u+qH_n\}\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}H_1(u,p,q) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(U_T\le -q, U_{T-1}>p, T=n|U_0=u)\\&= \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n\ge u+\frac{q}{(1+R_1)\ldots(1+R_n)},\\&\qquad\quad S_{n-1}<u-\frac{p}{(1+R_1)\ldots(1+R_{n-1})},\\&\qquad\quad S_{n-2}\le u,\ldots,S_1\le u)\\&= \sum_{n=1}^{\infty} h_n(u,p,q),\end{aligned}$$

mit

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} W_iH_{i-1}, \qquad S_0=0$$

und

$$\begin{aligned}h_n(u,p,q) &= P(U_T\le -q, U_{T-1}>p, T=n|U_0=u)\\&= P(S_n\ge u+\frac{q}{(1+R_1)\ldots(1+R_n)},\\&\qquad S_{n-1}<u-\frac{p}{(1+R_1)\ldots(1+R_{n-1})},\\&\qquad S_{n-2}\le u,\ldots,S_1\le u).\end{aligned}$$

Somit wissen wir

$$\begin{aligned}h_1(u,p,q) &= P(S_1\ge u+\frac{q}{(1+R_1)}, S_0<u-p)\\&= P(W_1\ge u+\frac{q}{(1+R_1)}, 0<u-p)\\&= \begin{cases}\int_0^{+\infty}(1-A(u+\frac{q}{1+r}-))dF_R(r), & p<u\\ 0, & p\ge u\end{cases}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
h_2(u,p,q) &= P(S_2 \geq u + \frac{q}{(1+R_1)(1+R_2)}, S_1 < u - \frac{p}{1+R_1}) \\
&= P\left[W_1 + \frac{W_2}{1+R_1} \geq u + \frac{q}{(1+R_1)(1+R_2)}, W_1 < u - \frac{p}{1+R_1}\right] \\
&= \int_{r=0}^{\infty}\int_{c=0}^{\infty}\int_{w=-c}^{u-\frac{p}{1+r}} P\left[W_1 + \frac{W_2}{1+R_1} \geq u + \frac{q}{(1+R_1)(1+R_2)},\right. \\
&\qquad \left. W_1 < u - \frac{p}{1+R_1} | R_1 = r, C_1 = c, W_1 = w\right] \\
&\qquad dF_{W_1}(w|r,x)dF_C(c)dF_R(r) \\
&= \int_{r=0}^{\infty}\int_{c=0}^{\infty}\int_{w=-c}^{u-\frac{p}{1+r}} P\left[W_1 + \frac{W_2}{1+R_1} \geq u + \frac{q}{(1+R_1)(1+R_2)},\right. \\
&\qquad \left. W_1 < u - \frac{p}{1+R_1}\right] dF_{W_1}(w|r,c)dF_C(c)dF_R(r) \\
&= \int_{r=0}^{\infty}\int_{c=0}^{\infty}\int_{w=-c}^{u-\frac{p}{1+r}} P\left[W_2 \geq (u-w)(1+r) + \frac{q}{(1+R_2)}\right] \\
&\qquad \underbrace{dF_{W_1}}_{\circledast}(w|r,c)dF_C(c)dF_R(r)
\end{aligned}$$

Hier ist $\circledast$ die Verteilungsfunktion von W_1 bedingt auf $R_1 = r$, $C_1 = c$, d.h.

$$P[W_1 \leq w|C_1 = c, R_1 = r] = P\left[-\left(C_1 - \frac{X_1}{1+R_1}\right) \leq w|C_1 = x, R_1 = r\right] =$$
$$= P\left[-\left(C - \frac{X_1}{1+r}\right) \leq w\right] = P[X_1 \leq (w+c)(1+r)] = F_X\left((w+c)(1+r)\right)$$

Die gesuchte bedingte Verteilungsfunktion ist $w \mapsto F_X\left((w+c)(1+r)\right)$, mit dieser müssen wir integrieren! Yang und Zhang verwenden eine etwas verkürzte Schreibweise dafür, $w \mapsto y$).
Analog dazu erhalten wir für $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
h_n(u,p,q) &= \int_{r=0}^{\infty}\int_{c=0}^{\infty}\int_{w=-c}^{u} h_{n-1}\left((u-x)(1+r), p, q\right) \\
&\qquad dF_X\left((x+c)(1+r)\right) dF_C(c)dF_R(r)
\end{aligned}$$

Somit ergeben sich folgende Ergebnisse:

1. Sei $p < u$, dann haben wir

$$
\begin{aligned}
H_1(u,p,q) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n(u,p,q) \\
&= \int_0^{+\infty} \left(1 - A(u + \frac{q}{1+r}-)\right) dF_R(r) \\
&+ \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-c}^{u-\frac{p}{1+r}} P\left[W_2 \geq (u-x)(1+r) + \frac{q}{(1+R_2)}\right] \\
&\qquad dF_X\left((x+c)(1+r)\right) dF_C(c) dF_R(r) \\
&+ \sum_{n=3}^{\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{\infty}\int_{-c}^{u} h_{n-1}\left((u-x)(1+r),p,q\right) \\
&\qquad dF_X\left((x+c)(1+r)\right) dF_C(c) dF_R(r) \\
&= \int_0^{\infty} \left(1 - A(u + \frac{q}{1+r}-)\right) dF_R(r) \\
&+ \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{w=-c}^{u-\frac{p}{1+r}} h_1\left((u-x)(1+r),p,q\right) \\
&\qquad dF_X\left((x+c)(1+r)\right) dF_C(c) dF_R(r) \\
&+ \sum_{n=3}^{\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{\infty}\int_{w=-c}^{u} h_{n-1}\left((u-x)(1+r),p,q\right) \\
&\qquad dF_X\left((x+c)(1+r)\right) dF_C(c) dF_R(r) \\
&= \int_0^{\infty} \left(1 - A(u + \frac{q}{1+r}-)\right) dF_R(r) \\
&+ \int_0^{+\infty}\int_0^{\infty}\int_{-c}^{u} \sum_{n=1}^{\infty} h_n\left((u-x)(1+r),p,q\right) \\
&\qquad dF_X\left((x+c)(1+r)\right) dF_C(c) dF_R(r),
\end{aligned}
$$

somit erfüllt $H_1(u,p,q)$

$$
\begin{aligned}
H_1(u,p,q) &= \int_0^{\infty} \left(1 - A(u + \frac{q}{1+r}-)\right) dF_R(r) \\
&+ \int_0^{+\infty}\int_0^{\infty}\int_{-c}^{u} H_1\left((u-x)(1+r),p,q\right) \\
&\qquad dF_X\left((x+c)(1+r)\right) dF_C(c) dF_R(r).
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

2. Sei $p \geq u$,

$$\begin{aligned} H_1(u,p,q) &= h_1(u,p,q) + \sum_{n=2}^{\infty} h_n(u,p,q) \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{+\infty} \int_{-c}^{u-\frac{p}{1+r}} P\left[W_2 \geq (u-x)(1+r) + \frac{q}{(1+R_2)}\right] \\ &\qquad dF_X\left((x+c)(1+r)\right) dF_C(c) dF_R(r) \\ &+ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-c}^{u} \sum_{n=2}^{\infty} h_n\left((u-x)(1+r),p,q\right) \\ &\qquad dF_X\left((x+c)(1+r)\right) dF_C(c) dF_R(r) \end{aligned}$$

somit gilt

$$\begin{aligned} H_1(u,p,q) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{-c}^{u} H_1\left((u-x)(1+r),p,q\right) \\ &\qquad dF_X\left((x+c)(1+r)\right) dF_C(c) dF_R(r). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Die Verteilung des Risikos unmittelbar vor Ruin

Aus der Definition der Funktion $F(u,p)$ ist bekannt, dass

$$F(u,p) = \psi(u) - P\left(U_{T-} > p, T < \infty | U_0 = u\right) = \psi(u) - F_1(u,p).$$

Setzen wir in der Formel (2.16) $q = 0$, dann haben wir für $p \geq u$

$$\begin{aligned} F_1(u,p) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-c}^{u} F_1\left((u-x)(1+r),p\right) \\ &\qquad dF_X\left((x+c)(1+r)\right) dF_C(c) dF_R(r). \end{aligned}$$

Setzen wir $q = 0$ in (2.15), dann haben wir für $p < u$

$$\begin{aligned} F_1(u,p) &= 1 - A(u) \\ &+ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-c}^{u} F_1\left((u-x)(1+r),p\right) \\ &\qquad dF_X\left((x+c)(1+r)\right) dF_C(c) dF_R(r). \end{aligned}$$

Die Verteilung des Risikos unmittelbar nach Ruin

Wir erinnern uns, dass

$$\begin{aligned} G(u,q) &= P\left(|U_T| \leq q | U_0 = u\right) = P\left(-q \leq U_T < 0 | U_0 = u\right) \\ &= \psi(u) - P(U_t < -q | U_0 = u) = \psi(u) - G_1(u,q). \end{aligned}$$

Sei $p = 0$ in (2.15)

$$\begin{aligned} G_1(u,q) &= \int_0^\infty \left(1 - A(u + \frac{q}{1+r}-)\right) dF_R(r) \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-c}^u G_1\left((u-x)(1+r), q\right) \\ &\qquad dF_X\left((x+c)(1+r)\right) dF_C(c) dF_R(r). \end{aligned}$$

Somit haben wir die Gleichung bestimmt, welche durch die Verteilung des Risikos unmittelbar nach Ruin erfüllt ist.

Rekursive Formel für die Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit

Wir definieren die endliche Ruinwahrscheinlichkeit wie folgt:

$$\psi_n(u) = P(T \leq n).$$

Daraus ergibt sich die Gegenwahrscheinlichkeit der Ruinwahrscheinlichkeit vor oder zum Zeitpunkt n

$$\varphi_n(u) = 1 - \psi_n(u) = P(T > n).$$

Yang und Zhang verweisen hier auf die beiden Artikel von Cai [3] [4] und Sun und Yang [17], aus denen hervorgeht, dass

$$\psi_1(u) = 1 - \varphi_1(u) = 1 - A(u),$$

$$\begin{aligned} \psi_2(u) &= 1 - \varphi_2(u) \\ &= 1 - \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-c}^u \psi_1\left((u-x)(1+r)\right) \\ &\qquad dF_X\left((x+c)(1+r)\right) dF_C(c) dF_R(r), \end{aligned}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned} \psi_n(u) &= 1 - \varphi_n(u) \\ &= 1 - \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-c}^u \psi_{n-1}\left((u-x)(1+r)\right) \\ &\qquad dF_X\left((x+c)(1+r)\right) dF_C(c) dF_R(r). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Sei $Q_n(u) = P(T = n)$ die Ruinwahrscheinlichkeitsverteilung. Dann erhalten wir aus der obigen rekursiven Formel

$$\begin{aligned}
Q_1(u) &= P(T = 1) = P(T > 0) - P(T > 1) = 1 - A(u), \\
Q_2(u) &= P(T = 2) = P(T > 1) - P(T > 2) \\
&= P\left(W_1 \leq u, W_1 + \frac{W_2}{(1 + R_1)} > u\right) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-x}^{u} Q_1\left((u - x)(1 + r)\right) \\
&\qquad dF_X\left((x + c)(1 + r)\right) dF_C(c) dF_R(r),
\end{aligned}$$

Somit gilt für alle $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
Q_n(u) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-x}^{u} Q_{n-1}\left((u - x)(1 + r)\right) \\
&\qquad dF_X\left((x + c)(1 + r)\right) dF_C(c) dF_R(r) \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Gleichung für die Ruinwahrscheinlichkeit bei unendlichem Horizont

Theorem 3. *Die Ruinwahrscheinlichkeit bei unendlichem Horizont erfüllt folgende Gleichung*

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= 1 - A(u) \\
&+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-c}^{u} \psi\left((u - x)(1 + r)\right) \\
&\qquad dF_X\left((x + c)(1 + r)\right) dF_C(c) dF_R(r) \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Beweis. Setzen wir in (2.15) $p = 0$ und $q = 0$, erhalten wir das Ergebnis. □

2.2 Vergleich mit dem diskreten Risikomodell ohne Zinsen

2.2.1 Das Modell und einige Annahmen

Wir verwenden die gleiche Notation wie im Fall mit Zinsen und erhalten somit die Risikodynamik

$$U_n = (U_{n-1} + C_n) - X_n, \qquad (2.20)$$

wobei $C_1, \ldots, C_n$ und $X_1, \ldots, X_n$ Folgen von u.i.v. Zufallsvariablen sind. Vorausgesetzt die Bedingungen des Nettogewinns sind erfüllt, gilt

$$\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(C) < \infty. \tag{2.21}$$

Der Risikoprozess ist im diskreten Fall ohne Zinsen gegeben durch

$$U_n = u + \sum_{k=1}^{n} (C_k - X_k). \tag{2.22}$$

Die Ruinwahrscheinlichkeit eines Versicherungsunternehmens mit Anfangskapital u ist

$$\psi(u) = P\left[T < \infty\right] \tag{2.23}$$

und die Ruinzeit

$$T = \inf\left\{n \geq 0 : U_n < 0\right\} \tag{2.24}$$

wobei $T = \infty$ falls $U_n \geq 0$ für alle $n \geq 0$. Die Verteilungen des Risikos unmittelbar nach, kurz vor, sowie kurz vor als auch unmittelbar nach Ruin verändern sich von ihrer Form her nicht, d.h.

$$\begin{aligned} G(u,q) &= P(|U_T| \leq q | U_0 = u) && (2.25)\\ F(u,p) &= P(U_{T-} \leq p | U_0 = u) && (2.26)\\ H(u,p,q) &= P(U_{T-} \leq p, |U_T| \leq q | U_0 = u). && (2.27) \end{aligned}$$

2.2.2 Konvergenz des diskontierten Risikoprozesses und dazugehörige Ergebnisse

Sei $V_n = U_n - u$ die Differenz zwischen Risikoprozess und Anfangskapital.

Theorem 4. *Es existiert eine integrierbare Zufallsvariable V_∞, sodass*

$$V_n \rightarrow V_\infty$$

Weiters gilt

$$\mathbb{E}[V_\infty] = \mathbb{E}[C - X]$$

Die Ruinwahrscheinlichkeit kann analog dem Fall mit Zinsen in Termen von $F_\infty(.)$ ausgedrückt werden.

Theorem 5. *Unter der Annahme, dass V_∞ die Verteilungsfunktion $F_\infty(.)$ hat, lautet die Ruinwahrscheinlichkeit*

$$\psi(u) = \frac{F_\infty(-u)}{\mathbb{E}[F_\infty(-U_T|T<\infty)]}. \tag{2.28}$$

Theorem 6. *Falls $F_\infty(0) > 0$ ist, weil $U_T < 0$ und $F_\infty(x) \leq 1$ ist, dann gilt*

$$F_\infty(-u) \leq \psi(u) \leq \frac{F_\infty(-u)}{F_\infty(0)}.$$

Weiters gilt auch in diesem Fall folgende Proposition:

Proposition 2. *Es gelten folgende Resultate:*

1. *Falls die Verteilungsfunktion von X NBU ist, dann gilt*

$$\psi(u) \geq \frac{F_\infty(-u)}{\mathbb{E}[F_\infty(X)]}. \tag{2.29}$$

2. *Falls die Verteilungsfunktion von X NWU ist, dann gilt*

$$\psi(u) \leq \frac{F_\infty(-u)}{\mathbb{E}[F_\infty(X)]}. \tag{2.30}$$

3. *Falls die Verteilungsfunktion von X exponentiell ist, dann gilt*

$$\psi(u) = \frac{F_\infty(-u)}{\mathbb{E}[F_\infty(X)]}. \tag{2.31}$$

2.2.3 Rekursive Formeln oder Gleichungen für die Ruinfunktionen

Angenommen, wir haben zwei zufällige Folgen $\{C_n, n = 1, 2, \dots\}$ und $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$, die unabhängig voneinander sind, und $W_n = X_n - C_n$, dann kann unser Risikomodell wie folgt umgeschrieben werden

$$U_n = u - \sum_{k=1}^{n} W_k, \tag{2.32}$$

wobei $\{W_n, n = 1, 2, \dots\}$ eine u.i.v. Folge ist. $A(z)$ sei die Verteilungsfunktion von W_n,

$$\begin{aligned} A(z) &= P(W \leq z) = P(X - C \leq z) = \mathbb{E}\left[F_X(z + C)\right] \\ &= \int_0^{+\infty} F_X(z+c)dF_C(c) \end{aligned}$$

Bezeichne T die Ruinzeit, dann gilt

$$T = \inf\{n > 0 : U_n < 0\} = \left\{ n > 0 : \sum_{k=1}^{n} W_n < u \right\}. \tag{2.33}$$

Die gemeinsame Verteilung des Risikos kurz vor und unmittelbar nach Ruin

Ist $p < u$, dann haben wir

$$\begin{aligned} H_1(u,p,q) &= (1 - A(u+q-)) \\ &+ \int_0^\infty \int_{-c}^{u} H_1((u-x),p,q) dF_X(x+c) dF_C(c). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Ist $p \geq u$, dann haben wir

$$H_1(u,p,q) = \int_0^\infty \int_{-c}^{u} H_1((u-x),p,q) dF_X(x+c) dF_C(c). \tag{2.35}$$

Die Verteilung des Risikos unmittelbar vor Ruin

Wir unterscheiden zwischen $p \geq u$

$$F_1(u,p) = \int_0^\infty \int_{-c}^{u} F_1((u-x),p) dF_X(x+c) dF_C(c)$$

und $p < u$

$$F_1(u,p) = (1 - A(u)) + \int_0^\infty \int_{-c}^{u} F_1((u-x),p) dF_X(x+c) dF_C(c).$$

Die Verteilung des Risikos unmittelbar nach Ruin

$$G_1(u,q) = (1 - A(u+q-)) + \int_0^\infty \int_{-c}^{u} G_1((u-x),q) dF_X(x+c) dF_C(c).$$

Rekursive Formeln für die Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit

Wie wir bereits im Fall mit Zinsen gesehen haben, kann die Ruinwahrscheinlichkeit wie folgt geschrieben werden:

$$\psi_1(u) = 1 - \varphi_1(u) = 1 - A(u),$$

$$\begin{aligned}\psi_2(u) &= 1-\varphi_2(u)\\ &= 1-\int_0^\infty\int_{-c}^u \psi_1(u-x)dF_X(x+c)dF_C(c),\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}\psi_n(u) &= 1-\varphi_n(u)\\ &= 1-\int_0^\infty\int_{-c}^u \psi_{n-1}(u-x)dF_X(x+c)dF_C(c). \qquad (2.36)\end{aligned}$$

Ist $Q_n(u) = P(T = n)$ die Ruinwahrscheinlichkeitsverteilung, dann erhalten wir aus den obigen rekursiven Formel für $n \geq 2$

$$\begin{aligned}Q_1(u) &= 1-A(u)\\ Q_2(u) &= \int_0^\infty\int_{-c}^u Q_{n-1}(u-x)dF_X(x+c)dF_C(c).\end{aligned}$$

Gleichung für die Ruinwahrscheinlichkeit bei unendlichem Horizont

Theorem 7. *Die Ruinwahrscheinlichkeit bei unendlichem Horizont erfüllt folgende Gleichung*

$$\psi(u) = 1-A(u)+\int_0^\infty\int_{-c}^u \psi(u-x)dF_X(x+c)dF_C(c). \qquad (2.37)$$

Kapitel 3

Dividenden im stetigen Risikomodell

3.1 Optimale Dividendenstrategie im zusammengesetzten Poissonmodell mit konstantem Zins

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit dem Problem der optimalen Dividendenstrategie im zusammengesetzten Poissonmodell mit konstantem Zins. Die hier gebrachten Ergebnisse wurden aus dem Artikel „Optimal dividend strategy in the compound poisson model with constant interest" von Ying Fang und Rong Wu [9] entnommen.
Das optimale Dividendenproblem geht zurück auf Bruno de Finetti [8], der seinen Artikel 1957 erstmals auf dem 15. Internationalen Kongress für Aktuare in New York präsentierte. Das Problem in der klassischen Risikotheorie besteht darin die Ruinwahrscheinlichkeit zu berechnen. Man erhofft, dass es zu keinem Ruin kommt, somit wächst das Risiko auf unbestimmte Zeit. Da dies jedoch nicht realistisch ist, schlug De Finetti vor, dass ein Unternehmen versuchen sollte den Erwartungswert des gegenwärtigen Wertes aller Dividenden vor Eintreffen möglichen Ruins zu maximieren. Er zeigte, dass unter der Annahme, dass das Risiko eines Unternehmens ein diskreter Prozess mit Stufen +1 und -1 ist, die optimale Dividendenzahlungsstrategie eine Threshold Strategie ist. Eine Threshold Strategie ist, wenn das Risiko ein gewisses Level erreicht und die Prämien nicht länger in einen Risikoprozess gehen, sondern als Dividenden an Aktionäre ausbezahlt werden. Zuletzt zeigte De Finetti wie das optimale Grenzlevel ermittelt werden kann.
Folglich wurde nun das Problem, eine optimale Dividendenstrategie zu finden

auf das stetige Risikomodell ausgeweitet.

3.1.1 Das Risikomodell und beschränkte Dividendenzahlung

Das Risiko eines Versicherungsunternehmens zum Zeitpunkt $t \geq 0$ wird beschrieben durch $U(t)$, wobei $U(0) = u$ das Anfangskapital ist. Da das Risiko in der Zukunft nicht bekannt ist, wird $U(t)$ als stetiger stochastischer Prozess betrachtet. Werden keine Dividenden ausbezahlt, dann sei das Risiko zum Zeitpunkt t gegeben durch

$$U(t) = ue^{rt} - c\int_0^t e^{rs}ds - \int_0^t e^{r(t-s)}dS(s) \tag{3.1}$$

mit

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

$c > 0\ldots$	Prämienrate
$r \geq 0\ldots$	konstante Zinsrate
$S(t)$ ...	Gesamtschadenprozess zum Zeitpunkt t
$N(t)$ ...	Anzahl der Schäden bis zum Zeitpunkt t
X_i ...	Schadengröße
$P(x)$ ...	Verteilungsfunktion
$p(x)$ ...	Wahrscheinlichkeitsdichte, mit $p(0) = 0$

$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ ... zusammengesetzter Poissonprozess
$\{N(t), t \geq 0\}$ ... Poissonprozess mit Intensität λ
$\{X_i, i = 1, 2, \ldots\}$ ... Folge von u.i.v nicht negativen Zufallsvariablen

Weiters sind $\{X_i, i = 1, 2, \ldots\}$ und $\{N(t), t \geq 0\}$ unabhängig.

Wir erweitern nun dieses Modell. Angenommen, das Versicherungsunternehmen sei eine Aktiengesellschaft. Es werden Dividenden gemäß einer Dividendenstrategie an die Aktionäre ausbezahlt. Bezeichne $D(t)$ die angesammelten Dividenden bezahlt im Intervall $(0, t)$. Es wird angenommen, dass die Dividendenzahlung keinen Einfluss auf das Geschäft hat. Somit ist der modifizierte Risikoprozess $\tilde{U}(t)$ gegeben durch

$$\tilde{U}(t) = U(t) - \int_0^t e^{r(t-s)}dD(s). \tag{3.2}$$

Die diskontierte Zinsrate $\delta > 0$ sollte vom Zins r unterschieden werden. Laut Fang und Wu [9] ist $\delta > r$ und im Fall von Ruin werden keine weiteren Dividenden ausbezahlt. Bezeichne D den gegenwärtigen Wert aller Dividenden bis Ruin

$$D = \int_0^T e^{-\delta t} dD(t), \tag{3.3}$$

wobei

$$T = \inf\{t \geq 0 : \tilde{U}(t) < 0\}$$

die Ruinzeit des modifizierten Risikoprozesses ist.
Das Ziel des Unternehmens ist die Maximierung des Erwartungswertes der Zufallsvariable D. $V(u)$ bezeichne den Erwartungswert von D

$$V(u) = \mathbb{E}[D|\tilde{U}(0) = u]. \tag{3.4}$$

Zusätzlich führen wir eine Beschränkung des Dividendenstroms ein: wir nehmen an, dass die Dividenden mit einer dynamischen Rate $\alpha(t)$ zum Zeitpunkt t ausbezahlt werden. Der stochastische Prozess $\alpha(t)$ wird Kontrollprozess genannt und kann nur im Intervall $[0, \alpha]$ für $0 < \alpha < c$ varieren.
Unter diesen zusätzlichen Bedingungen diskutieren wir nun das Optimierungsproblem.

3.1.2 Die Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung

In diesem Teil zeigen wir, dass der optimale Funktionswert von Dividenden durch die Hamilton-Jacobi-Bellmann (HJB) Gleichung charakterisiert werden kann.
Sei

$$\tilde{V}(u) = \sup_{\alpha(.)} V(u) \tag{3.5}$$

das Supremum über alle akzeptablen Dividendenstrategien. $\tilde{V}(u)$ bezeichne den optimalen Funktionswert. Das folgende Theorem ist bekannt aus der stochastischen Kontrolltheorie (siehe Fleming und Soner [11]).

Lemma 3.1.1. *Die Funktion $\tilde{V}(u)$ erfüllt die HJB-Gleichung:*

$$\begin{aligned} &Max_{0 \leq \alpha_0 \leq \alpha}[(1 - \tilde{V}'(u))\alpha_0] + (ur + c)\tilde{V}'(u) - (\lambda + \delta)\tilde{V}(u) \\ &+\lambda \int_0^u \tilde{V}(u - x)p(x)dx = 0, \qquad u \geq 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Theorem 8.

$$\mathbb{E}[\int_0^T e^{-\delta t}\alpha(t)dt|\tilde{U}(0) = u] \leq V(u), \quad u \geq 0. \tag{3.7}$$

Somit ist die Strategie mit V(u), die die HJB-Gleichung (3.6) erfüllt, tatsächlich eine optimale Strategie.

Wir beweisen nicht, dass die optimale Wertefunktion die HJB-Gleichung erfüllt, sondern wählen einen anderen Zugang: Wir leiten die HJB-Gleichung heuristisch her, und zeigen dann in einem Verifikationstheorem (in Anhang A zu finden), dass eine Lösung dieser Gleichung die optimale Wertefunktion ist.

3.1.3 Threshold Strategie - Schwellenstrategie

Dieses Kapitel setzt sich zusammen aus der Diskussion über Threshold Strategien und explizite Ergebnisse im Falle einer exponentiell verteilten Schadenmenge.
Eine sogenannte Threshold Strategie (auf Deutsch Schwellenstrategie) ist eine Dividendenstrategie, die Dividenden gemäß einer Schwelle ausbezahlt. Diese Schwelle bezeichnen wir in unserem Fall mit b. Liegt nun das Risiko unter der Schwelle b, d.h. $\tilde{U}(t) < b$, werden keine Dividenden ausbezahlt. Übersteigt das Risiko jedoch die Schwelle b, d.h. $\tilde{U}(t) > b$, werden die Dividenden zur maximalen Rate α ausbezahlt. Sei $V(u, b)$ der Erwartungswert des gegenwärtigen Wertes aller Dividenden bis Ruin. Wir betrachten ein infinitesimales Zeitintervall $[0, t]$, abhängig ob ein Schaden im Intervall eintritt, und die Menge des Schadens, falls er eintritt. Dann erhalten wir $V(u, b)$ als eine Funktion von u, die die folgenden Integro-Differentialgleichungen erfüllt:

$$(ur + c)V'(u, b) - (\lambda + \delta)V(u, b) + \lambda \int_0^u V(u - x, b)p(x)dx = 0, \qquad u < b, \tag{3.8}$$

$$(ur + c - \alpha)V'(u, b) - (\lambda + \delta)V(u, b) + \lambda \int_0^u V(u - x, b)p(x)dx + \alpha = 0, \qquad u > b, \tag{3.9}$$

mit den Grenzbedingungen

$$cV'(0, b) - (\lambda + \delta)V(0, b) = 0, \tag{3.10}$$

$$V(b-, b) = V(b+, b) \tag{3.11}$$

Die Herleitungen der Integro-Differentialgleichungen (3.8) und (3.9) sind im Anhang B zu finden.
Sei $u = 0$ in (3.8), dann erhalten wir die Grenzbedingung (3.10). Um die Grenzbedingung (3.11) zu erhalten, zeigen wir zuerst, dass $V(u,b)$ stetig in $u = b$ ist. Für $0 \leq u < b$, sei τ_b die Zeit des ersten Überschreitens des Risikoprozesses der Grenze b durch u. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} V(u,b) &= \mathbb{E}^u[\int_0^T e^{-\delta t} dD(t) I(\tau_b < T)] \\ &= V(b,b)\mathbb{E}^u[e^{-\delta\tau_b} I(\tau_b < T)] \leq V(b,b). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Bezeichne t_b die Zeit zur der das Risiko b erreichen würde, falls keine Schäden wären, das heißt, $ue^{rt^b} + c\int_0^{t_b} e^{rs} ds = b$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} V(u,b) &\geq \mathbb{E}^u[\int_0^T dD(t) I(\tau_b < T, \tau_b = t_b)] \\ &= V(b,b)e^{-\delta t_b} P(T_1 > t_b) \\ &= e^{-(\lambda+\delta)t_b} V(b,b). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Geht $u \nearrow b(t_b \to 0)$ in (3.12) und (3.13), dann erhalten wir

$$V(b-,b) = V(b,b).$$

Im Fall $u = b$ betrachten wir ein infinitesimales Zeitintervall $[0,t]$ und es gilt

$$\begin{aligned} V(b,b) &= \mathbb{E}[\int_0^t e^{-\delta s}\alpha I(\tilde{U}(s) \geq b) ds | \tilde{U}(0) = b] \\ &+ e^{-\delta t}\{e^{-\lambda t} V(\theta(b,t),b) + \mathbb{E}[V(\tilde{U}(t),b) I(N(t) = 1, \\ &\qquad T > t) | \tilde{U}(0) = b)]\} + O(t) \end{aligned}$$

mit

$$\theta(b,t) = be^{rt} + (c-\alpha)\int_0^t e^{r(t-s)} ds.$$

Aus dieser Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} V(b,b) &\geq e^{-(\lambda+\delta)t} V(\theta(b,t),b) + O(t), \\ V(b,b) &\leq \int_0^t e^{-\delta s}\alpha ds + e^{-\delta t}\{e^{-\lambda t} V(\theta(b,t),b) + \mathbb{E}[V(\tilde{U}(t),b) I(N(t) = 1, \\ &\qquad T > t) | \tilde{U}(0) = b]\} + |O(t)|. \end{aligned}$$

Geht dann $t \downarrow 0$ erhalten wir

$$V(b+,b) = V(b,b).$$

Die Integro-Differentialgleichungen (3.8) und (3.9) bestimmen zusammen mit den Grenzbedingungen die Funktion $V(u,b)$, eine explizite Lösung kann jedoch für beliebige Schadenmeldungen nicht gefunden werden.

Exponentiell verteilte Schadenmenge

Im Folgenden betrachten wir den Spezialfall einer exponentiell verteilten Schadenmenge

$$p(x) = \beta e^{-\beta x}$$

Wenden wir den Operator $\left(\frac{d}{du} + \beta\right)$ jeweilig auf die Integro- Differentialgleichungen (3.8) und (3.9) an, ergeben sich die folgenden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}(ur+c)V''(u,b) + (\beta(ur+c) + r - \lambda - \delta)V'(u,b)\\ -\beta\delta V(u,b) = 0, \quad u < b \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}(ur+c-\alpha)V''(u,b) + (\beta(ur+c-\alpha) + r - \lambda - \delta)V'(u,b)\\ -\beta\delta V(u,b) + \beta\alpha = 0, \quad u > b. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Um diese beiden Differentialgleichungen zu erhalten, müssen wir wie folgt vorgehen. Wir beginnen damit das Integral in Gleichung (3.8) abzuleiten:

$$(ur+c)V'(u,b) - (\lambda+\delta)V(u,b) + \lambda \underbrace{\int_0^u V(u-x,b)p(x)dx}_{\circledast} = 0, \quad u < b$$

$$\begin{aligned}
\circledast \frac{d}{du}[\int_0^u V(u-x)p(x)dx] &= \frac{d}{du}[\int_0^u V(u-x)\beta e^{-\beta x}dx] \\
&= \frac{d}{du}[-\int_u^0 V(y)\beta e^{-\beta(u-y)}dy] \\
&= \frac{d}{du}[\beta e^{-\beta u}\int_0^u V(y)e^{\beta y}dy] \\
&= (\beta e^{-\beta u})'\int_0^u V(y)e^{\beta y}dy \\
&\quad +\beta e^{-\beta u}\underbrace{[\int_0^u V(y)e^{\beta y}dy]'}_{V(u)e^{\beta u}} \\
&= -\beta\int_0^u V(y)e^{-\beta(u-y)}dy + \beta V(u) \\
&= -\beta[\int_0^u V(u-x)\beta e^{-\beta x}dx] + \beta V(u)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{du}[\int_0^u V(u-x)p(x)dx] = -\beta[\int_0^u V(u-x)\beta e^{-\beta x}dx] + \beta V(u)$$

Leiten wir nun die gesamte Gleichung ab, erhalten wir

$$\begin{aligned}(ur+c)'V'(u,b) &+ (ur+c)V''(u,b) - (\lambda+\delta)V'(u,b) \\ &+ \lambda\left[\beta V(u) - \beta\int_0^u V(u-x)p(x)dx\right] = 0\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}rV'(u,b) &+ (ur+c)V''(u,b) - (\lambda+\delta)V'(u,b) \\ &+ \lambda\left[\beta V(u,b) - \beta\int_0^u V(u-x,b)p(x)dx\right] = 0.\end{aligned}$$

Addieren wir dazu die mit β multiplizierte Integro-Differentialgleichung (3.8), erhalten wir

$$\begin{aligned}&rV'(u,b) + (ur+c)V''(u,b) - (\lambda+\delta)V'(u,b) + \lambda\beta V(u,b) \\ &-\lambda\beta\int_0^u V(u-x,b)p(x)dx + \beta(ur+c)V'(u,b) - \beta(\lambda+\delta)V(u,b) \\ &+\lambda\beta\int_0^u V(u-x,b)p(x)dx = 0.\end{aligned}$$

Somit ist

$$(ur+c)V''(u,b) + (\beta(ur+c) + r - \lambda - \delta)V'(u,b) - \beta\delta V(u,b) = 0, \qquad u < b$$

Bei analoger Vorgehensweise erhalten wir aus (3.9)

$$\begin{aligned}(ur+c-\alpha)V''(u,b) + (\beta(ur+c-\alpha) + r - \lambda - \delta)V'(u,b)& \\ -\beta\delta V(u,b) + \beta\alpha = 0, \quad u > b.&\end{aligned}$$

Laut Paulsen und Gjessing [15] können (3.14) und (3.15), für $r > 0$, in eine konfluente hypergeometrische Gleichung umgewandelt werden.
Wenn $u < b$ ist, definieren wir $y = -\frac{\beta}{r}(ur+c)$ und die Funktion $f(y) = V(u,b)$.

$$\begin{aligned}y = -\frac{\beta}{r}(ur+c) &= -\beta u - \frac{\beta c}{r} \longrightarrow (ur+c) = -\frac{ry}{\beta} \\ V(u,b) &= f(-\beta u - \frac{\beta c}{r}) \\ V'(u,b) &= -\beta f'(-\beta u - \frac{\beta c}{r}) \\ V''(u,b) &= \beta^2 f''(-\beta u - \frac{\beta c}{r})\end{aligned}$$

Eingesetzt in (3.14) ergibt

$$\begin{aligned}
&(ur+c)\beta^2 f''(-\beta u - \frac{\beta c}{r}) + [\beta(ur+c) + r - \lambda - \delta]\,(-\beta) f'(-\beta u - \frac{\beta c}{r}) \\
&\qquad -\beta\delta f(-\beta u - \frac{\beta c}{r}) = 0 \\
&-\frac{ry}{\beta}\beta^2 f''(y) + \left[\beta(-\frac{ry}{\beta}) + r - \lambda - \delta\right](-\beta) f'(y) - \beta\delta f(y) = 0.
\end{aligned}$$

Dividieren wir die obige Gleichung durch $(-\beta r)$ erhalten wir die konfluente hypergeometrische Gleichung

$$yf''(y) + \left[-y + 1 - \frac{\lambda+\delta}{r}\right] f'(y) + \frac{\delta}{r} f(y) = 0.$$

Unter Zuhilfenahme der Formel für konfluente hypergeometrische Gleichung (siehe Abramowitz und Stegun [1] [1])

$$z\frac{d^2w}{dz^2} + (b-z)\frac{dw}{dz} - aw = 0,$$

erhalten wir die allgemeine Lösung dieser Gleichung. In unserem Fall ist $a = -\frac{\delta}{r}$, $b = 1 - \frac{\lambda+\delta}{r}$ und $z = y$, d.h.

$$\begin{aligned}
f(y) &= Ay^{\frac{\lambda+\delta}{r}} e^y M\left(1 + \frac{\delta}{r}, 1 + \frac{\lambda+\delta}{r}, -y\right) \\
&\quad + By^{\frac{\lambda+\delta}{r}} e^y U\left(1 + \frac{\delta}{r}, 1 + \frac{\lambda+\delta}{r}, -y\right),
\end{aligned}$$

mit A und B als willkürliche Konstanten. $M(a,b,z)$ und $U(a,b,z)$ werden konfluente hypergeometrische Funktionen der 1. und 2. Art genannt (siehe mehr Details in Abramowitz und Stegun [1]). Somit lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3.14)

$$\begin{aligned}
V(u,b) &= f\left(-\beta u - \frac{\beta c}{r}\right) = \\
&= A\left(-\beta\left(u + \frac{c}{r}\right)\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} e^{-\beta(u+\frac{c}{r})} M\left(1 + \frac{\delta}{r}, 1 + \frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(u + \frac{c}{r}\right)\right) \\
&\quad + B\left(-\beta\left(u + \frac{c}{r}\right)\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} e^{-\beta(u+\frac{c}{r})} U\left(1 + \frac{\delta}{r}, 1 + \frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(u + \frac{c}{r}\right)\right)
\end{aligned}$$

[1] im Artikel „Optimal dividend strategy in the compound poisson model with constant interest“ von Ying Fang und Rong Wu fälschlicherweise zitiert als ABRAMOWITZ, MILTON; IRENE, A.S.: *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* United States Department of Commerce, U.S. Government Printing Office: Washington, D.C., 1972.

Umgeformt und in die richtige Form gebracht, erhalten wir

$$\begin{aligned} V(u,b) &= \underbrace{A(-\beta)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} e^{-\frac{\beta c}{r}}}_{A_1} \left(u+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} e^{-\beta u} \\ &\qquad \times M\left(1+\frac{\delta}{r}, 1+\frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(u+\frac{c}{r}\right)\right) \\ &\quad + \underbrace{B(-\beta)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} e^{-\frac{\beta c}{r}}}_{B_1} \left(u+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} e^{-\beta u} \\ &\qquad \times U\left(1+\frac{\delta}{r}, 1+\frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(u+\frac{c}{r}\right)\right), \\ &\quad u < b \end{aligned} \tag{3.16}$$

Für die Gleichung (3.15) ist die konstante Funktion $\frac{\alpha}{\delta}$ eine partikuläre Lösung. Merke, dass für alle Dividendenstrategien, V(u,b) nicht über $\frac{\alpha}{\delta}$ hinausgeht, der gegenwärtige Wert einer ewigen Rente mit stetigen Zahlungen zur Rate α. Aus diesen Bedingungen erhalten wir die allgemeine Lösung der Gleichung (3.15), wie folgt:

Lösung von (3.15) = $\underbrace{\text{Partikuläre Lösung}}_{=\frac{\alpha}{\delta}} + \underbrace{\text{Allgemeine homogene Lösung}}_{\text{wie (3.14) mit } c \mapsto c-\alpha}$

Wir benötigen jetzt dazu folgende zwei Sätze:

Satz 3.1.2. *$V(u,b)$ ist beschränkt durch $\frac{\alpha}{\delta}$.*

Beweis. Um eine Abschätzung für $V(u,b)$ zu finden, nehmen wir an, dass das Unternehmen mit einer maximalen Rate $\bar{\alpha}$ zahlt und es nie zu Ruin kommt, d.h. für $\alpha(t) \leq \bar{\alpha}$ gilt

$$\begin{aligned} V(u,b) = \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-\delta t} \underbrace{\alpha(t)dt}_{dD(t)} |\tilde{U}(0) = u\right] &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{\delta t}\bar{\alpha}dt\right] \\ &= \frac{\bar{\alpha}}{\delta}. \end{aligned}$$

Somit ist $V(u,b)$ beschränkt durch $\frac{\bar{\alpha}}{\delta}$. □

Noch zu überlegen ist, dass der Lösungsteil mit $M(\ldots,\ldots,\ldots)$ unbeschränkt ist, d.h. $V(u,b)$ konvergiert gegen $\frac{\bar{\alpha}}{\delta}$ für $u \to \infty$.

Satz 3.1.3. *$V(u,b)$ konvergiert gegen $\frac{\alpha}{\delta}$ für $u \to \infty$.*

Beweis. [18]
Wir betrachten die Strategie $U(t) = \alpha$. Da $u \to \infty$, konvergiert die Ruinzeit τ^α gegen unendlich. Deshalb konvergieren $\lim_{u\to\infty} e^{-\delta\tau^\alpha} = 0$ und $\mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau^\alpha}\right]$ wegen der dominierenden Konvergenz gegen 0. Mit dieser Strategie ist der Wert der Dividenden

$$V^\alpha(u,b) = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^\alpha} e^{-\delta t}\alpha dt\right] = \frac{\alpha}{\delta}\left(1 - \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau^\alpha}\right]\right)$$

und konvergiert gegen $\frac{\alpha}{\delta}$ für $u \to \infty$. Einerseits ist $V(u,b) \geq V^\alpha(u,b)$ und es folgt, dass der $\lim_{u\to\infty} V(u,b) \geq \frac{\alpha}{\delta}$ ist, andererseits ist $V(u,b)$ beschränkt durch $\frac{\alpha}{\delta}$ und deshalb gilt $\lim_{u\to\infty} V(u,b) = \frac{\alpha}{\delta}$. □

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} V(u,b) &= A_2\left(u + \frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} e^{-\beta u} \\ &\quad \times U\left(1 + \frac{\delta}{r}, 1 + \frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(u + \frac{c-\alpha}{r}\right)\right) + \frac{\alpha}{\delta}, \\ & u > b. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Um nun A_1, B_1 und A_2 bestimmen zu können, benötigen wir drei Bedingungen, deren Herleitungen in Anhang C zu finden sind.

1. Aus der Grenzbedingung (3.10) erhalten wir

$$\begin{aligned} A_1\frac{\lambda}{r+\lambda+\delta} M\left(1 + \frac{\delta}{r}, 2 + \frac{\lambda+\delta}{r}, \frac{\beta c}{r}\right) & \\ + B_1 U\left(1 + \frac{\delta}{r}, 2 + \frac{\lambda+\delta}{r}, \frac{\beta c}{r}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

2. Aus der zweiten Grenzbedingung $V(b-,b) = V(b+,b)$ unter Zuhilfenahme von (3.16) und (3.17) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\left(b + \frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} \left[A_1 M\left(1 + \frac{\delta}{r}, 1 + \frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(b + \frac{c}{r}\right)\right)\right. \\ &\qquad \left. + B_1 U\left(1 + \frac{\delta}{r}, 1 + \frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(b + \frac{c}{r}\right)\right)\right] \\ &= \left(b + \frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} A_2 U\left(1 + \frac{\delta}{r}, 1 + \frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(b + \frac{c-\alpha}{r}\right)\right) \\ &\qquad + \frac{\alpha}{\delta} e^{\beta b}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

3. Um die dritte Bedingung zu erhalten, betrachten wir das Integral in (3.9)

$$\begin{aligned}\int_0^u V(u-x,b)p(x)dx &= \int_0^u V(x,b)p(u-x)dx \\ &= \int_0^b V(x,b)p(u-x)dx \\ &\quad + \int_b^u V(x,b)p(u-x)dx.\end{aligned}$$

Setzen wir nun (3.16) und (3.17) in (3.9) ein, haben wir

$$\begin{aligned}&-A_2 r\left(u+\frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\alpha+\lambda}{r}+1} U\left(1+\frac{\delta}{r},2+\frac{\lambda+\delta}{r},\beta\left(u+\frac{c-\alpha}{r}\right)\right) \\ &+\lambda\int_b^u A_2\left(x+\frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\alpha+\lambda}{r}} \\ &\qquad \times U\left(1+\frac{\delta}{r},1+\frac{\lambda+\delta}{r},\beta\left(x+\frac{c-\alpha}{r}\right)\right)dx \\ &= \frac{\lambda\alpha}{\beta\delta}e^{\beta b}-\lambda\int_0^b V(x,b)e^{\beta x}dx.\end{aligned}$$

Geht jetzt $u \downarrow b$, dann erhalten wir die dritte Bedingung

$$\begin{aligned}-r\left(b+\frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}+1} U^{\delta}_{2b\alpha}A_2 &= \frac{\lambda\alpha}{\beta\delta}e^{\beta b}-\lambda\int_0^b\left(x+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}}\tilde{M}_{\delta}dxA_1 \\ &\quad -\lambda\int_0^b\left(x+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}}\tilde{U}_{\delta}dxB_1,\end{aligned} \tag{3.20}$$

Um die Notation in der Regel zu vereinfachen, verwenden wir folgende Abkürzungen:

$$\begin{aligned}\tilde{M}^{\delta} &= \lambda\int_0^b\left(x+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} M\left(1+\frac{\delta}{r},1+\frac{\lambda+\delta}{r},\beta\left(x+\frac{c}{r}\right)\right)dx, \\ \tilde{U}^{\delta} &= \lambda\int_0^b\left(x+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} U\left(1+\frac{\delta}{r},1+\frac{\lambda+\delta}{r},\beta\left(x+\frac{c}{r}\right)\right)dx, \\ M^{\delta}_{nxy} &= M\left(1+\frac{\delta}{r},n+\frac{\lambda+\delta}{r},\beta\left(x+\frac{c-y}{r}\right)\right), \\ U^{\delta}_{nxy} &= U\left(1+\frac{\delta}{r},n+\frac{\lambda+\delta}{r},\beta\left(x+\frac{c-y}{r}\right)\right),\end{aligned}$$

für $n \in \{1,2\}$, $x \in \{0,b\}$ und $y \in \{c,\alpha\}$.

Somit haben wir die drei Bedingungen gegeben durch

$$\frac{\lambda}{r+\lambda+\delta} M^{\delta}_{20c} A_1 + U^{\delta}_{20c} B_1 = 0,$$

$$\left(b+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} \left[M^{\delta}_{1bc} A_1 + U^{\delta}_{1bc} B_1\right] = \left(b+\frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} U^{\delta}_{1b\alpha} A_2 + \frac{\alpha}{\delta} e^{\beta b},$$

$$\tilde{M}^{\delta} A_1 + \tilde{U}^{\delta} B_1 = r\left(b+\frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}+1} U^{\delta}_{2b\alpha} A_2 + \frac{\lambda\alpha}{\beta\delta} e^{\beta b}.$$

Das ist nichts anderes als das Lösen von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten. Folglich erhalten wir die Lösungen für die Werte A_1, B_1 und A_2

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\zeta(b)}{\omega(b)-\rho(b)}, \\ B_1 &= \frac{\eta(b)}{\omega(b)-\rho(b)}, \\ A_2 &= \frac{\beta\delta\tilde{M}^{\delta} A_1 + \beta\delta\tilde{U}^{\delta} B_1 - \lambda\alpha e^{\beta b}}{\beta\delta r U^{\delta}_{2b\alpha}(b+\frac{c-\alpha}{r})^{\frac{\lambda+\delta}{r}+1}}, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \zeta(b) &= \alpha(r+\lambda+\delta)e^{\beta b} U^{\delta}_{20c}\left[\beta(br+c-\alpha)U^{\delta}_{2b\alpha} - \lambda U^{\delta}_{1b\alpha}\right], \\ \omega(b) &= \beta\delta U^{\delta}_{1b\alpha}\left[\lambda M^{\delta}_{20c}\tilde{U}^{\delta} - (r+\lambda+\delta)U^{\delta}_{20c}\tilde{M}^{\delta}\right], \\ \rho(b) &= \beta\delta\left(b+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} (br+c-\alpha)U^{\delta}_{2b\alpha} \\ &\quad \times\left[\lambda M^{\delta}_{20c} U^{\delta}_{1bc} - (r+\lambda+\delta)U^{\delta}_{20c} M^{\delta}_{1bc}\right], \\ \eta(b) &= \alpha\lambda e^{\beta b} M^{\delta}_{20c}\left[\lambda U^{\delta}_{1b\alpha} - \beta(br+c-\alpha)U^{\delta}_{2b\alpha}\right]. \end{aligned}$$

3.1.4 Optimale Dividendenstrategie für exponentielle Schäden

In diesem Kapitel zeigen wir, dass für eine exponentiell verteilte Schadendichte die optimale Dividendenstrategie tatsächlich eine Threshold Strategie ist. Diese Idee stammt von Gerber und Shiu [13]. In ihrem Artikel zeigten sie, dass die optimale Dividendenstrategie eine Threshold Strategie für eine exponentiell verteilte Schadenmenge im klassischen Risikomodell ist. Wir nehmen an, dass diese Folgerung auch im klassischen Risikomodell mit Zinsen gültig ist. Um das zu bestätigen, versuchen wir eine optimale Threshold

b^* zu finden, sodass $V(u, b^*)$ die Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung (3.6) erfüllt.
Da A_1, B_1 und A_2 abhängig von b sind, schreiben wir in diesem Kapitel $A_1(b), B_1(b)$ und $A_2(b)$. Beachte, dass $V(u, 0)$ kleiner als $\frac{\alpha}{\delta}$ ist, der gegenwärtige Wert einer ewigen Rente mit Dividendenrate α. Aus (3.17) folgt, dass $A_2(0) < 0$ ist und

$$\begin{aligned} V'(u,0) &= -A_2(0)\left(u + \frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}-1} e^{-\beta u} \\ &\quad \times U\left(\frac{\delta}{r}, \frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(u + \frac{c-\alpha}{r}\right)\right), \qquad (3.21) \\ V''(u,0) &= A_2(0)\left(u + \frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}-2} e^{-\beta u} \\ &\quad \times U\left(\frac{\delta}{r} - 1, \frac{\lambda+\delta}{r} - 1, \beta\left(u + \frac{c-\alpha}{r}\right)\right). \qquad (3.22) \end{aligned}$$

Wir erhalten $V''(u, 0) < 0$ für alle $u \geq 0$, d.h. $V'(u, 0)$ ist eine strikt fallende Funktion bezüglich u. Deshalb gilt, wenn $V'(0+, 0) \leq 1$ ist, erhalten wir

$$V'(u,0) < 1, \qquad \text{für} \quad u > 0.$$

In diesem Fall setzen wir die Threshold Strategie mit $b^* = 0$ fest, dann erfüllt $V(u, b^*) = V(u, 0)$ die Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung (3.6).
Wenn $V'(0+, 0) > 1$ ist, dann ist b^* die Lösung der Gleichung $V'(b+, b) = 1$. Wir können zeigen, dass so ein b^* existiert und es $b^* > 0$ erfüllt.
Aus (3.17) erhalten wir

$$V'(b+,b) = -A_2(b)\left(b + \frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}-1} e^{-\beta b} U\left(\frac{\delta}{r}, \frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(b + \frac{c-\alpha}{r}\right)\right).$$

Sei nun

$$\begin{aligned} h(b) &= -A_2(b)\left(b + \frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}-1} U\left(\frac{\delta}{r}, \frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(b + \frac{c-\alpha}{r}\right)\right), \\ g(b) &= e^{\beta b}. \end{aligned}$$

dann ist $V'(b^*+, b^*) = 1$ äquivalent zu $h(b^*) = g(b^*)$.
Beachte, das sowohl $h(b)$ als auch $g(b)$ stetige Funktionen mit folgenden Bedingungen sind

$$\begin{aligned} h(0) = V'(0+,0) > 1, &\qquad g(0) = 1, \\ \lim_{b\to+\infty} g(b) = +\infty, &\qquad \lim_{b\to+\infty} h(b) = 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Bedingungen folgt die Lösung.
Aus (3.8) und (3.9) erhalten wir

$$(b^*r + c)V'(b^*-, b^*) = (b^*r + c - \alpha)V'(b^*+, b^*) + \alpha.$$

Dies zeigt, dass $V'(b^*-, b^*)$ ein gewichteter Durchschnitt von $V'(b^*+, b^*)$ und 1 ist. Deshalb sind beide Mengen $V'(b^*-, b^*)$ und $V'(b^*+, b^*)$ entweder kleiner als 1, größer als 1 oder gleich 1. Aus dieser Tatsache erhalten wir, dass

$$V'(b^*-, b^*) = V'(b^*+, b^*) = 1. \tag{3.23}$$

Es bleibt jetzt nur noch zu prüfen, ob

$$\begin{aligned} V'(u, b^*) &> 1, \qquad \text{für} \qquad u < b^*, \\ V'(u, b^*) &< 1, \qquad \text{für} \qquad u > b^* \end{aligned}$$

ist.
Wenn $u > b^*$ ist, haben wir

$$\begin{aligned} V''(u, b^*) &= A_2(b^*)\left(u + \frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}-2} e^{-\beta u} \\ &\quad \times U\left(\frac{\delta}{r} - 1, \frac{\lambda+\delta}{r} - 1, \beta\left(u + \frac{c-\alpha}{r}\right)\right) < 0, \end{aligned} \tag{3.24}$$

d.h $V'(u, b^*)$ ist eine strikt fallende Funktion bezüglich u. Deshalb gilt

$$V'(u, b^*) < V'(b^*, b^*) = 1, \qquad u > b^*. \tag{3.25}$$

Wenn $u < b^*$ ist, gilt

$$\begin{aligned} V'(u, b^*) &= A_1(b^*)\frac{\lambda+\delta}{r}\left(u + \frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}-1} e^{-\beta u} M\left(\frac{\delta}{r}, \frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(u + \frac{c}{r}\right)\right) \\ &\quad - B_1(b^*)\left(u + \frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}-1} e^{-\beta u} U\left(\frac{\delta}{r}, \frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(u + \frac{c}{r}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} V'(b^*-, b) &= 1, \\ cV'(0, b^*) - (\lambda+\delta)V(0, b^*) &= 0, \end{aligned}$$

erhalten wir $A_1(b^*) > 0, B_1(b^*) < 0$. Durch zweimaliges Ableiten von (3.26) bezüglich erhalten wir

$$V'''(u, b^*) > 0.$$

Deshalb ist $V'''(u, b^*)$ eine strikt wachsende Funktion für $u < b^*$. Aus (3.14), (3.15) und (3.23) erhalten wir

$$(b^*r + c)V''(b^*-, b^*) = (b^*r + c - \alpha)V''(b^*+, b^*).$$

Merke, dass aus (3.25) $V''(b^*+, b^*) \leq 0$ folgt, dann erhalten wir

$$V''(u, b^*) < V''(b^*-, b^*) \leq 0, \qquad \text{für} \quad u < b^*.$$

D.h. $V'(u, b^*)$ ist eine strikt fallende Funktion für $u < b^*$ und es gilt

$$V'(u, b^*) > V'(b^*-, b^*) = 1, \qquad \text{für} \quad u < b^*. \tag{3.27}$$

Schlussendlich können wir zeigen, dass $V(u, b^*)$ tatsächlich die Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung (3.6) ist.

Theorem 9. *Die optimale Threshold b^* erfüllt die folgende Gleichung*

$$V'(b^*+, b^*) = 1.$$

Um einen geschlossenen Ausdruck für b^* zu bekommen, können wir diese Gleichung lösen. Im Allgemeinen jedoch gibt es keine analytische Lösung. Wir sollte uns daher auf numerische Berechnungen berufen.

3.1.5 Laplace Transformation der Ruinzeit gemäß einer Threshold Strategie

Hier studieren wir die Laplace Transformation zur Ruinzeit bezüglich einer Threshold Strategie. Wie in Kapitel 3.1.4, nehmen wir an, dass die Dividenden gemäß einer Threshold Strategie mit Parametern α und b gezahlt werden. Bezeichne

$$L(u, b) = \mathbb{E}\left[e^{-\gamma T} | \tilde{U}(0) = u\right] \tag{3.28}$$

die Laplace Transformierte der Verteilung der Ruinzeit. Als eine Funktion von u, erfüllt $L(u, b)$ die folgenden Integro-Differential-Gleichungen:

$$\begin{aligned} &(ur + c)L'(u, b) - (\lambda + \gamma)L(u, b) \\ &\qquad + \lambda \int_0^u L(u - x, b)p(x)dx + \lambda \bar{P}(u) = 0, \quad u < b \qquad (3.29) \\ &(ur + c - \lambda)L'(u, b) - (\lambda + \gamma)L(u, b) \\ &\qquad + \lambda \int_0^u L(u - x, b)p(x)dx + \lambda \bar{P}(u) = 0, \quad u > b \qquad (3.30) \end{aligned}$$

mit den Grenzbedingungen

$$cL'(0,b) - (\lambda+\gamma)L(0,b) + \lambda = 0, \tag{3.31}$$
$$L(b-,b) = L(b+,b), \tag{3.32}$$
$$L(+\infty,b) = 0. \tag{3.33}$$

Es folgt aus (3.29), (3.30) und (3.23) dass

$$(br+c)L'(b-,b) = (br+c-\alpha)L'(b+,b) \tag{3.34}$$

ist. Deshalb ist $L'(u,b)$ nicht stetig in $u=b$. Im Rest dieses Kapitels berechnen wir $L(u,b)$ wenn, wie in Kapitel 3.1.4, die individuellen Schadenmengen exponentiell verteilt sind. $L(u,b)$ erfüllt somit die folgenden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
&(ur+c)L''(u,b) - (\beta(ur+c)+r-\lambda+\gamma)L'(u,b)\\
&\qquad -\beta\gamma L(u,b) = 0, \qquad u<b, &(3.35)\\
&(ur+c-\alpha)L''(u,b) - (\beta(ur+c-\alpha)+r-\lambda+\gamma)L'(u,b)\\
&\qquad -\beta\gamma L(u,b) = 0, \qquad u>b. &(3.36)
\end{aligned}$$

Dieselbe Methode wie in Kapitel 3.1.4 verwendend, konvertieren wir die Differentialgleichungen (3.35) und (3.36) in eine konfluente hypergeometrische Gleichung. Mit den Grenzbedingungen (3.31)-(3.33) erhalten wir die folgenden Lösungen:

$$\begin{aligned}
L(u,b) &= D_1\left(u+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\gamma}{r}} e^{-\beta u} M\left(1+\frac{\gamma}{r}, 1+\frac{\lambda+\gamma}{r}, \beta\left(u+\frac{c}{r}\right)\right)\\
&\quad +D_2\left(u+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\gamma}{r}} e^{-\beta u} U\left(1+\frac{\gamma}{r}, 1+\frac{\lambda+\gamma}{r}, \beta\left(u+\frac{c}{r}\right)\right), u<b,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
L(u,b) &= D_3\left(u+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\gamma}{r}}\\
&\quad e^{-\beta u} U\left(1+\frac{\gamma}{r}, 1+\frac{\lambda+\gamma}{r}, \beta\left(u+\frac{c-\alpha}{r}\right)\right), u>b.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

mit

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \frac{\lambda(r+\lambda+\gamma)\pi(b)}{\beta c(\phi(b)-\varphi(b))}, \\
D_2 &= \frac{\lambda}{\beta c U^{\gamma}_{20c}}\left(\frac{r}{c}\right)^{\frac{\lambda+\gamma}{r}} - \frac{\lambda M^{\gamma}_{20c}}{(r+\lambda+\gamma)} D_1, \\
D_3 &= \frac{\tilde{U}^{\gamma} D_2 + \tilde{M}^{\gamma} D_1}{r\left(b+\frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\gamma}{r}+1} U^{\gamma}_{2b\alpha}} + \frac{\lambda}{\beta r\left(b+\frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\gamma}{r}+1} U^{\gamma}_{2b\alpha}}, \\
\pi(b) &= c U^{\gamma}_{1ba} U^{\gamma}_{20c} + \left(\frac{r}{c}\right)^{\frac{\lambda+\gamma}{r}} U^{\gamma}_{1ba} \tilde{U}^{\gamma} \\
&\quad - \left(\frac{r}{c}\right)^{\frac{\lambda+\gamma}{r}} (rb+c-\alpha)\left(b+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\gamma}{r}} U^{\gamma}_{2b\alpha} U^{\gamma}_{1bc}, \\
\phi(b) &= (rb+c-\alpha)\left(b+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\gamma}{r}} U^{\gamma}_{2b\alpha}\left[(r+\lambda+\gamma) U^{\gamma}_{20c} M^{\gamma}_{1bc} - \lambda M^{\gamma}_{20c} U^{\gamma}_{1bc}\right], \\
\varphi(b) &= U^{\gamma}_{1b\alpha}\left[(r+\lambda+\gamma)\tilde{M}^{\gamma} U^{\gamma}_{20c} - \lambda \tilde{U}^{\gamma} M^{\gamma}_{20c}\right].
\end{aligned}
$$

Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir

$$
\begin{aligned}
\tilde{M}^{\gamma} &= \lambda \int_0^b \left(x+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\gamma}{r}} M\left(1+\frac{\gamma}{r}, 1+\frac{\lambda+\gamma}{r}, \beta\left(x+\frac{c}{r}\right)\right) dx, \\
\tilde{U}^{\gamma} &= \lambda \int_0^b \left(x+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\gamma}{r}} U\left(1+\frac{\gamma}{r}, 1+\frac{\lambda+\gamma}{r}, \beta\left(x+\frac{c}{r}\right)\right) dx, \\
M^{\gamma}_{nxy} &= M\left(1+\frac{\gamma}{r}, n+\frac{\lambda+\gamma}{r}, \beta\left(x+\frac{c-y}{r}\right)\right), \\
U^{\gamma}_{nxy} &= U\left(1+\frac{\gamma}{r}, n+\frac{\lambda+\gamma}{r}, \beta\left(x+\frac{c-y}{r}\right)\right),
\end{aligned}
$$

für $n \in \{1,2\}$, $x \in \{0,b\}$ und $y \in \{c,\alpha\}$.

Theorem 10. *In unserem Risikomodell* $(0 < \alpha < c)$ *ist die Ruinwahrscheinlichkeit* $\psi(u)$ *immer kleiner als 1. Der Beweis ist im Buch von Asmussen [2] zu finden. Wir können* $\psi(u)$ *auch aus* $L(u,b)$ *mit Limes* $\gamma \to 0$ *erhalten. Merke, dass*

$$L(u,b) = \mathbb{E}\left[e^{-\gamma T} | \tilde{U}(0) = u\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\gamma T} I(T<\infty) | \tilde{U}(0) = u\right].$$

Durch das dominierende Konvergenz Theorem erhalten wir

$$\lim_{\gamma \to 0} L(u,b) = \psi(u).$$

Somit erhalten wir die geschlossenen Ausdrücke für $\psi(u)$ aus (3.37) und (3.38).

3.2 Vergleich mit der optimalen Dividendenstrategie im zusammengesetzten Poissonmodell ohne Zinsen

Dieses Kapitel basiert auf dem Artikel „On optimal dividend strategy in the compound poisson model“ von Hans U. Gerber und Elias S. W. Shiu [13].

3.2.1 Das Modell

Das Risiko eines Versicherungsunternehmens zum Zeitpunkt $t \geq 0$ wird beschrieben durch $U(t)$, wobei $U(0) = u$ das Anfangskapital ist. Daraus ergibt sich die Annahme

$$U(t) = u + ct - S(t), \qquad t \geq 0. \tag{3.39}$$

Hier sind ct die erhaltenen Prämien im Intervall $(0, t)$. Der Gesamtschaden $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ ist ein zusammengesetzter Poissonprozess $N(t)$ mit Schadenintensität α, d.h. $\mathbb{E}[N(t)] = \alpha t$, und Schadengröße X_i. $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ ist unabhängig identisch verteilt und unabhängig von $\{N(t), t \geq 0\}$.
Wie vorhin erweitern wir auch dieses Modell. Angenommen, das Unternehmen zahlt Dividenden an ihre Aktionäre gemäß einer Strategie. Für die angesammelten Dividenden, bezahlt zum Zeitpunkt t, verwenden wir das Symbol $D(t)$. $\tilde{U}(t)$ sei der Risikoprozess weniger den Dividendenzahlungen bis zum Zeitpunkt t

$$\tilde{U}(t) = U(t) - D(t), \qquad t \geq 0. \tag{3.40}$$

Sei D der gegenwärtige Wert aller Dividenden bis Ruin

$$D = \int_0^T e^{-\delta} dD(t) \tag{3.41}$$

$\delta > 0$ ... diskontierte Zinsrate

und

$$T = \inf \left\{ t \geq 0 | \tilde{U}(t) < 0 \right\}$$

die Ruinzeit. Das Ziel des Unternehmens ist die Maximierung des Erwartungswertes der Zufallsvariable D. Wir betrachten dieses Optimierungsproblem unter der Bedingung, dass nur Dividendenstrategien mit begrenzter

Dividendenrate akzeptabel sind. Diese Höchstgrenze sei eine positive Konstante α. Wir nehmen an, dass $\alpha \in [0, c]$ ist, d.h. die Höchstgrenze ist immer geringer als die Prämienrate. Somit gilt

$$dD(t) \leq \alpha dt.$$

3.2.2 Die Hamilton-Jacobi-Bellmann Gleichung

Bezeichne

$$\tilde{V}(u) = \sup_{\alpha(.)} V(u)$$

das Supremum über alle akzeptablen Dividenstrategien. Das Anfangskapital u ist gegeben durch

$$u = \tilde{U}(0) = U(0).$$

Lemma 3.2.1. *Die Funktion $\tilde{V}(u)$ erfüllt die HJB-Gleichung*

$$\begin{aligned} Max_{0 \leq \alpha_0 \leq \alpha}[\alpha_0 + (c - \alpha_0)\tilde{V}'(u)] - (\lambda + \delta)\tilde{V}(u) \\ +\lambda \int_0^u \tilde{V}(u - x)p(x)dx = 0, \quad u \geq 0. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Diese Gleichung kann durch das „Dynamische Bellmann Programmierungsprinzip“ erklärt werden. Wir betrachten ein kleines Zeitintervall zwischen 0 und dt, $dt > 0$, und die folgende Dividendenstrategie. Es wird angenommen, dass zwischen den Zeitpunkten 0 und t Dividenden mit einer Rate α_0 gezahlt werden, und sodann, eine optimale Strategie angewendet wird. Bedingend darauf, ob es einen Schaden in diesem Zeitintervall gibt und auf die Menge der möglichen Schäden, sehen wir, dass der Erwartungswert des gegenwärtigen Wertes aller Dividenden bis Ruin

$$\alpha_0 t + e^{-\delta t}\left[(1 - \lambda t)\tilde{V}(u + (c - \alpha_0)t) + \lambda t \int_0^u \tilde{V}(u - x)p(x)dx\right] + o(t),$$

ist, was nichts anderes ist als

$$\begin{aligned} \tilde{V}(u) + \Big[\alpha_0 + (c - \alpha_0)\tilde{V}'(u) - (\lambda + \delta)\tilde{V}(u) \\ +\lambda \int_0^u \tilde{V}(u - x)p(x)dx\Big]\, t + o(t). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Da $\tilde{V}(u)$ der optimale Wert ist, muss er gleich dem maximalen Wert der Gleichung (3.43) sein, mit $\alpha_0 \in [0, \alpha]$. Daraus folgt, dass der Ausdruck in den eckigen Klammern von (3.43) gleich 0 sein muss, und wir daraus die Gleichung (3.42) erhalten. Der zu maximierende Wert in der Gleichung (3.42) ist der Term $[\alpha_0(1-\tilde{V}'(u))]$ für $\alpha_0 \in [0, \alpha]$. Somit ist die optimale Dividendenrate zum Zeitpunkt 0

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0 \quad \text{falls} \quad \tilde{V}'(u) > 1, \\ \alpha_0 &= \alpha \quad \text{falls} \quad \tilde{V}'(u) < 1. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Falls $\tilde{V}'(u) = 1$ ist, kann die Dividendenrate α_0 jeden beliebigen Wert zwischen 0 und α annehmen. Zum Zeitpunkt $t \in (0, T)$ ist die optimale Dividendenrate gegeben durch

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0 \quad \text{falls} \quad \tilde{V}'(\tilde{U}(t)) > 1, \\ \alpha_0 &= \alpha \quad \text{falls} \quad \tilde{V}'(\tilde{U}(t)) < 1. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Das heißt, falls $\tilde{V}'(\tilde{U}(t)) > 1$ ist, muss ein Unternehmen keine Dividenden ausbezahlen, sondern kann das Kapital im Unternehmen lassen, und wird somit als *effizient* bezeichnet. Hingegen für $\tilde{V}'(\tilde{U}(t)) < 1$ ist ein Unternehmen *ineffizient* und sollte daher so viele Dividenden wie möglich ausbezahlen. Die Entscheidung zwischen Reinvestition und Dividendenauszahlung ist ein klassisches Problem in der Finanzwirtschaft. Hiermit haben wir eine Lösung für das stetige Zeitmodell geliefert.

Verifikationstheorem

Sei $V(u) = \mathbb{E}[D]$, eine Funktion des Anfangskapitals u, eine gegebene Dividendenstrategie. Wir nehmen an, dass $V(u)$ die HJB Gleichung (3.42) erfüllt. Betrachten wir nun eine andere Dividendenstrategie mit Dividendenrate α_0 und Risiko $\tilde{U}(t)$ zum Zeitpunkt t, dann behaupten wir,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\delta t}\alpha_0(t)dt|\tilde{U}(0) = u\right] \leq V(u). \tag{3.46}$$

Daraus folgt $V(u) = \tilde{V}(u)$, und somit ist die gegebene Strategie optimal.

Beweis. Der Beweis ohne Zinsen verläuft analog zu dem mit Zinsen, der in Anhang A zu finden ist. □

3.2.3 Threshold Strategie

Für eine Konstante b gilt, wenn $\tilde{U}(t) < b$ ist, werden keine Dividenden ausbezahlt, wenn jedoch $\tilde{U}(t) > b$ werden Dividenden zur maximalen Rate α

ausbezahlt. Eine optimale Dividendenstrategie ist somit immer dann ansprechend, wenn die Lösung der HJB Gleichung (3.42) die folgende Eigenschaft erfüllt

$$\tilde{V}'(u) \;=\; \begin{cases} > 1 & \text{für} \quad u < b \\ < 1 & \text{für} \quad u > b \end{cases} \tag{3.47}$$

Sei $V(u,b)$ der Erwartungswert des gegenwärtigen Wertes aller Dividenden bis Ruin, mit Anfangskapital u und einer Schwelle b. Dann erfüllt $V(u,b)$ folgende Integro-Differentialgleichung

$$cV'(u,b)-(\lambda+\delta)V(u,b)+\lambda\int_0^u V(u-x,b)p(x)dx = 0, \qquad 0 < u < b, \tag{3.48}$$

$$\alpha + (c-\alpha)V'(u,b) - (\lambda+\delta)V(u,b) + \lambda\int_0^u V(u-x,b)p(x)dx = 0, \qquad u > b. \tag{3.49}$$

Beide Gleichungen können auf die gleiche Art und Weise, wie im Fall mit Zinsen, siehe Anhang A, erhalten werden.
Für $u \to \infty$, nähert sich $V(u,b)$ dem gegenwärtigen Wert einer ewigen Rente mit stetigen Zahlungen zur Rate α.

$$\lim_{x\to\infty} V(u,b) = \frac{\alpha}{\delta}. \tag{3.50}$$

Letztlich folgt aus

$$e^{-\frac{(\delta+\lambda)x}{c}} V(b,b) < V(b-x,b) < V(b,b), \qquad 0 < x \leq b, \tag{3.51}$$

dass $V(u,b)$ eine stetige Funktion im Punkt $u = b$ ist. Dadurch und zusammen mit den Formeln (3.48) - (3.51) bestimmen wir die Funktion $V(u,b)$, $u \geq 0$. Die Ableitung $V'(u,b)$ ist nicht notwendig stetig in $u = b$. Tatsächlich folgt aus den Gleichungen (3.48) und (3.49)

$$cV'(b-,b) = (c-\alpha)V'(b+,b) + \alpha.$$

Die Integro-Differentialgleichung

$$ch'(u) - (\lambda+\delta)h(u) + \lambda\int_0^u h(u-x)p(x)dx = 0, \quad u > 0, \tag{3.52}$$

hat, abgesehen von einem konstanten Faktor, eine eindeutige Lösung $h(u)$. Daraus und aus Gleichung (3.48) folgt, dass

$$V(u,b) = \gamma h(u), \qquad 0 \leq u \leq b, \tag{3.53}$$

ist, wobei γ unabhängig von u ist.

Exponentielle Schadendichte

Wir nehmen an, die individuelle Schadenmengen seien exponentiell verteilt,

$$p(x) = \beta e^{-\beta x}, \qquad x > 0.$$

Es existiert eine Grenze b, sodass es eine Threshold Strategie gibt. Die optimale Strategie im Fall $0 < u < b$ ist keine Dividenden zu zahlen. Um eine eindeutige Lösung für h zu finden, leiten wir (3.52) ab.

$$ch''(u) - (\lambda + \delta)h'(u) + \lambda \frac{d}{du} \int_0^u h(u - x)p(x)dx = 0.$$

Zuerst differenzieren wir das Integral wie im Fall mit Zinsen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} \int_0^u h(u-x)p(x)dx &= \frac{d}{du} \int_0^u h(y)p(u-y)dy \\
&= \frac{d}{dx} \int_0^u h(y)\beta e^{-\beta(u-y)}dy \\
&= -\beta(\beta e^{-\beta u}) \int_0^u h(y)e^{\beta y}dy + \beta h(u) \\
&= -\beta \int_0^u h(y)e^{-\beta(u-y)}dy + \beta h(u) \\
&= -\beta[\int_0^u h(u-x)\beta e^{-\beta x}dx] + \beta h(u)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{du}[\int_0^u h(u-x)p(x)dx] = -\beta[\int_0^u h(u-x)\beta e^{-\beta x}dx] + \beta h(u)$$

Somit erhalten wir

$$ch''(u) - (\lambda + \delta)h'(u) + \lambda\beta(h(u) - \int_0^u h(u-x)p(x)dx = 0.$$

Addieren wir dazu wieder die mit β multiplizierte Integro Differentialgleichung, gilt

$$ch''(u) - (c\beta - \lambda - \delta)h'(u) - \beta\delta h(u) = 0.$$

Das ist eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese lösen wir mit dem exponentiellen Ansatz:

$$h(u) = C_0 e^{ru} + C_1 e^{su}, \tag{3.54}$$

wobei $r > 0$ und $s < 0$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$c\zeta^2 - (c\beta - \lambda - \delta)\zeta - \beta\delta = 0 \tag{3.55}$$

sind. Der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (3.55) ist gleich $\beta\lambda$ für $\zeta = -\beta$ und $-\beta\delta$ für $\zeta = 0$. Da die Prämienrate c positiv ist, folgt dass die negative Wurzel der quadratischen Gleichung zwischen $-\beta$ und 0 liegt, d.h. $-\beta < s < 0$. Deshalb ist $\beta + s$ positiv. Ersetzen wir (3.54) in Gleichung (3.52) und setzen den Koeffizienten von $e^{-\beta u}$ gleich 0, erhalten wir

$$\lambda\beta\left(\frac{C_0}{r+\beta} + \frac{C_1}{s+\beta}\right) = 0.$$

Somit ist $h(u)$ proportional zu $(r+\beta)e^{ru} - (s+\beta)e^{su}$. Daraus und aus (3.53) kennen wir jetzt den Wert von $V(u,b)$, ausgenommen einem konstanten Faktor γ.

$$V(u,b) = \gamma\left[(r+\beta)e^{ru} - (s+\beta)e^{su}\right] \qquad 0 \le u \le b, \tag{3.56}$$

wobei γ unabhängig von x ist.
Im begrenzten Fall $\alpha = c$ folgt aus (3.53), dass

$$\gamma = \frac{1}{(r+\beta)re^{ru} - (s+\beta)se^{su}} \tag{3.57}$$

das mit der Formel aus Gerber und Shiu (1998) übereinstimmt.
Den Operator $\left(\frac{d}{du} + \beta\right)$ auf die Gleichung (3.49) angewendet und umgeordnet, führt uns zu einer inhomogenen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned}(c-\alpha)V''(u,b) + \left[\beta(c-\alpha) - \lambda - \delta\right]V'(u,b) - \beta\delta V(u,b)\\ +\beta\alpha = 0, \quad u > b.\end{aligned} \tag{3.58}$$

Der homogene Teil dieser Differentialgleichung kann wieder durch den exponential Ansatz gelöst werden

$$V(u,b)_{hom} = D_0e^{vu} + D_1e^{wu}$$

wobei $u > 0$ und $v < 0$ die Wurzel von

$$(c-\alpha)\zeta^2 + \left[\beta(c-\alpha) - \lambda - \delta\right]\zeta - \beta\delta = 0. \tag{3.59}$$

sind. Es ist leicht zu sehen, dass

$$V(u,b) = \frac{\alpha}{\delta}$$

die partikuläre Lösung ist. Daraus erhalten wir die allgemeine Lösung

$$V(u,b) = \frac{\alpha}{\delta} + D_0 e^{vu} + D_1 e^{wu}.$$

Um nun D_0 und D_1 bestimmen zu können, benötigen wir die beiden Sätze analog dem stetigen Fall mit Zinsen.

Satz 3.2.2. *$V(u,b)$ ist beschränkt durch $\frac{\alpha}{\delta}$.*

Satz 3.2.3. *$V(u,b)$ konvergiert gegen $\frac{\alpha}{\delta}$ für $x \to \infty$.*

Aus dem letzten Satz folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} V(u,b) &= \lim_{u\to\infty} \left(\frac{\alpha}{\delta} + D_0 e^{vu} + D_1 e^{wu}\right) \\
&= \frac{\alpha}{\delta} + D_0 \underbrace{\lim_{u\to\infty} e^{vu}}_{\to\infty} + \underbrace{D_1 \lim_{u\to\infty} e^{wu}}_{\to 0}.
\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass

$$D_0 = 0$$

ist und führt dazu, dass

$$D_1 < 0$$

ist. Zusammengefasst bedeutet das

$$V(u,b) = \frac{\alpha}{\delta} + D_1 e^{wu}$$

mit $v < 0$ und $D_1 < 0$. Um nun γ und D_1 bestimmen zu können, brauchen wir zwei Bedingungen. Aus der Stetigkeitsbedingung

$$V(b-,b) = V(b+,b)$$

folgt

$$\gamma \left[(r+\beta)e^{rb} - (s+\beta)e^{sb}\right] = \frac{\alpha}{\delta} D_1 e^{wb}. \tag{3.60}$$

Für die zweite Bedingung betrachten wir, das Faltungsintegral in (3.49) und können es wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned}
\int_0^u V(x,b)p(u-x)dx &= \gamma \int_0^b \left[(r+\beta)e^{ru} - (s+\beta)e^{su}\right] p(u-x)dx + \\
&\quad + \int_b^u \left[\frac{\alpha}{\delta} + D_1 e^{wu}\right] p(u-x)dx \\
&= \beta e^{-\beta u} \left\{ \gamma \left(e^{(\beta+r)b} - e^{(\beta+s)b}\right) + \frac{\alpha}{\delta}\frac{1}{\beta}\left(e^{\beta u} - e^{\beta b}\right) \right. \\
&\quad \left. + D_1 \frac{1}{\beta+w}\left[e^{(\beta+w)u} - e^{(\beta+w)b}\right] \right\}.
\end{aligned}$$

Da alle anderen Terme in (3.49) $e^{-\beta u}$ nicht einschließen, setzen wir den Koeffizienten von $e^{-\beta u}$ gleich 0 und kürzen dann den Faktor $\beta e^{\beta b}$, und erhalten somit unsere zweite Bedingung:

$$\gamma\left(e^{rb} - e^{sb}\right) + \frac{\alpha}{\delta\beta} - \frac{De^{wb}}{\beta + w} = 0. \tag{3.61}$$

Aus den Gleichungen (3.60) und (3.61) folgt,

$$\gamma = \frac{-w}{\beta}\frac{\alpha}{\delta}\frac{1}{(r-w)e^{rb} - (s-w)e^{sb}}.$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned} V(u,b) &= \frac{-w}{\beta}\frac{\alpha}{\delta}\frac{(\beta + r)e^{ru} - (\beta + s)e^{su}}{(r-w)e^{rb} - (s-w)e^{sb}}, \quad 0 \leq u \leq b, && (3.62) \\ V(u,b) &= \frac{\alpha}{\delta}\left[1 - e^{w(u-b)}\right] + V(b,b)e^{w(u-b)}, \quad u \geq b. && (3.63) \end{aligned}$$

Falls $u = 0$ und $b = 0$ sind, dann gilt

$$V(0,0) = \frac{-w}{\beta}\frac{\alpha}{\delta}. \tag{3.64}$$

Wie wir wissen, ist u eine negative Wurzel von (3.59), es ist dann leicht zu sehen, dass $0 < \frac{-w}{\beta} < 1$ ist und deshalb $V(0,0) < \frac{\alpha}{\delta}$ gilt. Der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (3.59) ist negativ, wenn $\zeta = 0$ und positiv, wenn $\zeta = -\beta$. Deshalb gilt $-\beta < w < 0$.

3.2.4 Optimale Dividendenstrategie für exponentielle Schäden

In einigen Situationen ist die optimale Dividendenstrategie eine Threshold Strategie. Bezeichne b^* die optimale Schwelle, dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Falls

$$\tilde{V}'(u,0) < 1 \quad \text{für} \quad u > 0, \tag{3.65}$$

   ist, dann ist die Threshold Strategie mit $b^* = 0$ optimal.

2. Falls die optimale Strategie eine Threshold Strategie mit $b^* > 0$ ist, muss gelten

$$\begin{aligned} \tilde{V}'(u,b^*) &> 1 \quad \text{für} \quad u < b^*, && (3.66) \\ \tilde{V}'(u,b^*) &< 1 \quad \text{für} \quad u > b^*. && (3.67) \end{aligned}$$

Lösen wir die Gleichung $cV'(b-,b) = (c-\alpha)V'(b+b)+\alpha$ nach $V'(b-,b)$ auf, erhalten wir

$$V'(b-,b) = \left(1 - \frac{\alpha}{c}\right) V'(b+,b) + \frac{\alpha}{c}.$$

Daraus erkennen wir, dass $V'(b-,b)$ ein gewichteter Durchschnitt von $V'(b+,b)$ und 1 ist. Deshalb sind die beiden Mengen $V(b-,b)$ und $V(b+,b)$ kleiner 1, grösser 1 oder gleich 1. Aus dieser Tatsache folgt aus den Ungleichungen (3.66) und (3.67)

$$\tilde{V}'(b^*-,b^*) = 1 \tag{3.68}$$

$$\tilde{V}'(b^*+,b^*) = 1 \tag{3.69}$$

Somit kann die optimale Strategie b^* aus einer dieser beiden äquivalenten Gleichungen berechnet werden.

Optimale Dividendenstrategie für exponentielle Schäden

In diesem Teil zeigen wir, dass für eine exponentielle Schadendichte, die optimale Dividendenstrategie tatsächliche eine Threshold Strategie ist. Zuerst leiten wir (3.63) ab und erhalten

$$V'(u,b) = (-w)\left[\frac{\alpha}{\delta} - V(b,b)\right] e^{w(u-b)}, \quad u > b. \tag{3.70}$$

Es ist $b^* = 0$, falls die Bedingung (3.65) erfüllt ist, oder äquivalent, falls

$$(-w)\left[\frac{\alpha}{\delta} - V(0,0)\right] \leq 1, \tag{3.71}$$

ist, das aufgrund von (3.65) nichts anderes ist als

$$(-w)\frac{\alpha}{\delta}\left[1 + \frac{w}{\beta}\right] \leq 1. \tag{3.72}$$

Nun nehmen wir an, dass die Ungleichheitszeichen in (3.71) und (3.72) von $\leq$ in $>$ geändert werden. Aus (3.69) und (3.70) erhalten wir die Bedingung für b^*:

$$(-w)\left[\frac{\alpha}{\delta} - V(b^*,b^*)\right] = 1,$$

d.h., b^* ist die Lösung der Gleichung

$$V(b^*,b^*) = \frac{\alpha}{\delta} + \frac{1}{w}. \tag{3.73}$$

Daraus und aus Gleichung (3.65) folgt

$$V(u, b^*) = \frac{\alpha}{\delta} + \frac{1}{u} e^{w(u-b^*)}, \qquad u \geq b^*.$$

Was übrig bleibt, ist zu zeigen, dass die Bedingungen (3.66) und (3.67) erfüllt sind. Die Bedingung (3.67) ist einfach zu zeigen, da aus (3.73) folgt, dass

$$V'(u, b^*) = e^{w(u-b^*)} < 1 \quad \text{für} \quad u > b^*.$$

Um zu zeigen, dass die Bedingung (3.66) erfüllt ist, zeigen wir, dass

$$V''(u, b^*) < 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq u < b^*. \tag{3.74}$$

Die Gleichung (3.56) zweimal abgeleitet ergibt

$$V''(u, b) = \gamma \left[r^2(r+\beta)e^{ru} - s^2(s+\beta)e^{su} \right]$$

für $0 < u < b$. Das ist eine wachsende Funktion, da es die Differenz einer wachsenden und fallenden Funktion ist. Damit ist der maximale Wert in $u = b$ für $0 \leq u \leq b$ erreicht. Folglich ist die Ungleichung (3.74) äquivalent zur Bedingung

$$V''(b^*-, b^*) \leq 0. \tag{3.75}$$

Betrachten wir sowohl $ch''(u) + (\beta c - \lambda - \delta)h'(u) - \beta\delta(u)$, indem wir $h(u)$ durch $V(u, b^*)$ ersetzen, und (3.68), dann erhalten wir

$$cV''(b^*, b^*) = \beta\delta V(b^*, b^*) - (\beta c - \lambda - \delta),$$

und analog dazu erhalten wir

$$(c - \alpha)V''(b^*, b^*) = \beta\delta V(b^*, b^*) - (\beta c - \lambda - \delta).$$

Folglich ist (3.75) gleich der Bedingung

$$V''(b^*+, b^*) \leq 0,$$

was sicherlich stimmt, da wegen (3.73)

$$V''(b^*+, b^*) = -w^2 \left[\frac{\alpha}{\delta} - \underbrace{V(b^*, b^*)}_{\frac{\alpha}{\delta}\frac{1}{w}} \right] = w.$$

Schlussendlich, um eine geschlossene Form für die optimal Threshold b^* zu erhalten, können wir (3.73), (3.68) oder (3.69) nach b^* lösen. Alternativ bestimmen wir den Wert von b, der die Gleichung (3.62) maximiert. Das führt zu

$$b^* = \frac{1}{r-s} \ln \left(\frac{s^2 - us}{r^2 - ur} \right). \tag{3.76}$$

3.2.5 Laplace Transformation der Ruinzeit gemäß einer Threshold Strategie

Wie im Kapitel 3.2.3 über Threshold Strategien, nehmen, wir an, dass Dividenden gemäß einer Threshold Strategie mit Parametern $\alpha < c$ und $b > 0$ gezahlt werden. Bezeichne

$$L(u,b) = \mathbb{E}\left[e^{-\gamma T}|\tilde{U}(0) = u\right], \quad u \geq 0 \tag{3.77}$$

den erwarteten gegenwärtigen Wert von 1 fällig zur Ruinzeit. Als eine Funktion von γ ist diese Menge die Laplace Transformierte der Verteilung der Ruinzeit. Als eine Funktion von u, erfüllt $L(u,b)$ die folgenden Integro-Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} cL'(u,b) - (\lambda+\gamma)L(u,b) + \lambda \int_0^u L(u-x,b)p(x)dx & \\ +\lambda\left[1 - P(u)\right] = 0, \quad 0 < u < b, & \qquad (3.78) \\ (c-\alpha)L'(u,b) - (\lambda+\gamma)L(u,b) + \lambda \int_0^u L(u-x,b)p(x)dx & \\ +\lambda\left[1 - P(u)\right] = 0, \quad u > b. & \qquad (3.79) \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$\lim_{u\to\infty} L(u,b) = 0,$$

und $L(u,b)$ ist stetig in $u = b$. Die Funktion $L(u,b)$ kann durch folgende Bedingungen bestimmt werden. Aus Gleichung (3.78) und (3.79) folgt, dass

$$cL'(b-,b) = (c-\alpha)L'(b+,b). \tag{3.80}$$

Daher ist $L'(u,b)$ nicht stetig in $u = b$. Im begrenzten Fall $\alpha = c$ wird aus Bedingung (3.80)

$$L'(b-,b) = 0.$$

Im Rest dieses Kapitels berechnen wir $L(u,b)$ für den Fall, dass $p(x)$ exponentiell verteilt ist (siehe Kapitel 3.2.3, Exponentielle Schadendichte). D.h. wir wenden den Operator $\left(\frac{d}{du} + \beta\right)$ auf die Gleichung (3.78) und (3.79) an, und sehen, dass $L(u,b)$ die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} cL''(u,b) + (\beta c - \lambda - \gamma)L'(u,b) & \\ -\beta\delta L(u,b) = 0, \quad 0 < u < b. & \qquad (3.81) \\ (c-\alpha)L''(u,b) + (\beta c - \lambda - \gamma)L'(u,b) & \\ -\beta\delta L(u,b) = 0, \quad u > b & \qquad (3.82) \end{aligned}$$

erfüllt. (3.81) ist eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung und kann mit Hilfe des Exponentialansatzes gelöst werden. Daher haben wir

$$L(u,b) = C_0 e^{ru} + C_1 e^{su} \tag{3.83}$$

wobei C_0 und C_1 bestimmt werden müssen, und r und s gleich wie in Kapitel 6 sind, also die Lösungen der charakteristischen Gleichung (3.55). Setzen wir sowohl (3.83) in (3.81) ein als auch den Koeffizienten von $e^{-\beta x}$ gleich 0, dann erhalten wir

$$\frac{\beta}{\beta + r} C_0 + \frac{\beta}{\beta + s} C_1 = 1. \tag{3.84}$$

(3.82) ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. In Hinblick auf $\lim_{u\to\infty} L(u,b) = 0$ erhalten wir

$$L(u,b) = De^{wu}, \quad u \geq b, \tag{3.85}$$

wobei der Koeffizient D zu bestimmen ist und w die negative Lösung der charakteristischen Gleichung (3.59) ist. Die Stetigkeit der Funktion $L(u,b)$ in $u = b$ führt zu der Bedingung, dass

$$C_0 e^{rb} + C_1 e^{sb} = De^{wb}. \tag{3.86}$$

ist. Schlußendlich ersetzen wir (3.83) und (3.85) in (3.82), das zur Bedingung

$$\frac{e^{rb}}{\beta + r} C_0 + \frac{e^{sb}}{\beta + s} C_1 = \frac{e^{wb}}{\beta + w} D. \tag{3.87}$$

führt. Die Gleichungen (3.84), (3.86) und (3.87) sind drei Bedingungen, um C_0, C_1 und D bestimmen zu können. Es kann wie folgt gelöst werden. Multiplizieren wir (3.87) mit $(\beta + u)$ und subtrahieren wir die erhaltene Gleichung von (3.86), dann erhalten wir

$$\frac{r - w}{\beta + r} e^{rb} C_0 + \frac{s - w}{\beta + s} e^{sb} C_1 = 0. \tag{3.88}$$

Die Gleichungen (3.84) und (3.88) sind zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und können somit ganz einfach gelöst werden, d.h.

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{\beta + r}{\beta} \frac{e^{sb}(w - s)}{e^{rb}(r - w) + e^{sb}(w - s)}, \\ C_1 &= \frac{\beta + s}{\beta} \frac{e^{rb}(r - w)}{e^{rb}(r - w) + e^{sb}(w - s)} \end{aligned}$$

Dann wird aus (3.83)

$$L(u,b) = \frac{1}{\beta} \frac{(\beta + r)(w - s)e^{ru+sb} + (\beta + s)(r - w)e^{su+rb}}{(r - w)e^{rb} + (w - s)e^{sb}} \tag{3.89}$$

Im Partikulären heißt das

$$L(b,b) = \frac{1}{\beta} \frac{(r - s)(\beta + w)}{(r - w)e^{-sb} + (w - s)e^{-rb}}.$$

Damit können wir $L(u,b)$ für $u \geq b$ ausdrücken als

$$L(u,b) = L(b,b)e^{w(u-b)}, \quad u \geq b. \tag{3.90}$$

Anhang A

HJB via Verifikationstheorem

Der Risikoprozess $U(t)$ ist gegeben durch

$$U(t) = ue^{rt} + c\int_0^t e^{r(t-s)}ds - \int_0^t e^{r(t-s)}dS(s)$$

mit $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$.
Bemerkung: $\int_0^t e^{rs}ds = \int_0^t e^{r(t-s)}ds$
Weiters wissen wir

$$\tilde{U}(t) = U(t) - \int_0^t e^{r(t-s)}dD(s).$$

Die Dividenden sind gegeben durch

$$D(t) = \int_0^t \alpha_0(s)ds,$$

wobei $\alpha_0(t), t \geq 0$ adaptiert, cadlag und $0 \leq \alpha_0(t) \leq \alpha$ ist. Eingesetzt in den modifizierten Risikoprozess erhalten wir

$$\tilde{U}(t) = U(t) - \int_0^t e^{r(t-s)}\alpha_0(s)ds.$$

Das Ganze nun auch in $U(t)$ eingesetzt, ergibt

$$\tilde{U}(t) = ue^{rt} + c\int_0^t e^{r(t-s)}ds - \int_0^t e^{r(t-s)}dS(s) - \int_0^t e^{r(t-s)}\alpha_0(s)ds.$$

Umgeformt ergibt das nichts anderes als

$$\tilde{U}(t) = e^{rt}\left[u + \int_0^t e^{-rs}(c - \alpha_0(s))ds - \int_0^t e^{-rs}dS(s)\right].$$

Sei V zunächst eine beliebige C^1-Funktion (später sehen wir, dass V die Wertefunktion aller Dividenden ist). Dann haben wir

$$Z(t) = e^{-\delta t} V(\tilde{U}(t)) + \int_0^t e^{-\delta s} \alpha_0(s) ds.$$

Verwenden wir nun die Ito-Formel für Prozesse mit Sprüngen [6], erhalten wir

$$Z(t) = Z(0) + A(t) + M(t)$$

$$\begin{aligned}
A(t) &= \int_0^t e^{-\delta s} \Big[\Big(1 - V'(\tilde{U}(s-))\Big) \alpha_0(s) + \Big(r\tilde{U}(s-) + c\Big) V'(\tilde{U}(s-)) \\
&\qquad -(\lambda + \delta) V(\tilde{U}(s-)) + \lambda \int_0^\infty V(\tilde{U}(s-) - x) p(x) dx \Big] ds \\
M(t) &= \sum_{i=1}^{N(t)} e^{-\delta T_i} \Big[V(\tilde{U}(s-) - X_i) - V(\tilde{U}(s-)) \Big] \\
&\qquad - \int_0^t \int_0^\infty \Big[V(\tilde{U}(s-) - x) - V(\tilde{U}(s-)) \lambda p(x) dx \Big] ds
\end{aligned}$$

Hier ist M ein Martingal. Angenommen V ist eine beschränkte Lösung der HJB-Gleichung, dann nehmen wir das Supremum über $A(t)$

$$\begin{aligned}
&\sup_{0 \le \alpha_0 \le \alpha} \left[(1 - V'(u)) \alpha_0 \right] + (ru + c) V'(u) - (\lambda + \delta) V(u) \\
&\qquad + \lambda \int_0^\infty V(u - x) p(x) dx = 0.
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\Big(1 - V'(\tilde{U}(s-))\Big) \alpha_0(s) + (ru + c) V'(\tilde{U}(s-)) - (\lambda + \delta) V(\tilde{U}(s-)) \\
&\qquad + \lambda \int_0^\infty V(\tilde{U}(s-) - x) p(x) dx \le 0,
\end{aligned}$$

deshalb ist $A(t) \le 0$ und es folgt $A(T \wedge t) \le 0$, d.h. A gestoppt zur Ruinzeit T.
$\{M(t), t \ge 0\}$ ist ein Martingal $\Rightarrow$ $\{M(T \wedge t), t \ge 0\}$ ist auch ein Martingal. Wegen $M(0) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[M(T \wedge t)] = 0$. Also gilt

$$\mathbb{E}[Z(T \wedge t)] = \underbrace{Z(0)}_{=V(u)} + \underbrace{\mathbb{E}[A(T \wedge t)]}_{\le 0} + \underbrace{\mathbb{E}[M(T \wedge t)]}_{=0} \Rightarrow \mathbb{E}[Z(T \wedge t)] \le V(u)$$

Beachte

$$\mathbb{E}\left[Z(T \wedge t)\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\delta(T\wedge t)}V(\tilde{U}(T \wedge t))\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge t} e^{-\delta s}\alpha_0(s)ds\right]$$

Nun lassen wir $t \to \infty$ gehen. Für den ersten Teil der Gleichung gilt

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{-\delta(T\wedge t)}V(\tilde{U}(T \wedge t))\right] = 0$$

dann haben wir

1. wenn $T < \infty \Rightarrow V(\tilde{U}(T)) = 0$
2. wenn $T = \infty \Rightarrow T \wedge t \to \infty \Rightarrow e^{-\delta(T\wedge t)}V(\tilde{U}(T \wedge t)) \to 0$, weil V beschränkt ist.

Weiters haben wir für den zweiten Teil der Gleichung, wenn $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^{T\wedge t} e^{-\delta s}\alpha_0 a(s)ds\right] = \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^{t} e^{-\delta s}\alpha_0(s)ds\right]}_{\mathbb{E}[D]}.$$

Bemerkung: $D = D^{u,\alpha_0}$.
Somit wissen wir jetzt

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}\left[D^{u,\alpha_0}\right] \leq 0 \\ \tilde{V}(u) = \sup_{\alpha_0(.)} \mathbb{E}\left[D^{u,\alpha_0}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \tilde{V}(u) \leq V(u).$$

Um nun die Ungleichung in die andere Richtung beweisen zu können, nehmen wir an eine Funktion $\varphi(u)$ zu finden, sodass

$$(1 - V'(u))\,\varphi(u) + (ru + c)V'(u) - (\lambda + \delta)V(u) + \lambda \int_0^{\infty} V(u - x)p(x)dx = 0$$

wobei $\alpha_0^* = \varphi(\tilde{U}(s-)$ eine zulässige Strategie ist. Dann gilt

$$\mathbb{E}\left[D^{u,\alpha_0^*}\right] = V(u) \Rightarrow \tilde{V}(u) \geq V(u).$$

Insgesamt gilt nun

$$\tilde{V}(u) = V(u).$$

und somit ist die gegebene Strategie optimal.

Anhang B

Threshold Strategie

Um die beiden Integro-Differentialgleichungen (3.8) und (3.9) zu erhalten, gibt es zwei Möglichkeiten. Erstens mit Hilfe des Differential Arguments, bei dem das Risiko in einem kleinen Zeitintervall betrachtet wird, oder zweitens durch den Erneuerungsprozess, der in Abhängigkeit von der Zeit die Anzahl der Ereignisse eines bestimmten Typs, die bis zum Zeitpunkt t eingetreten sind, zählt.
Wir verwenden das Buch „Aspects of Risk Theory“ von Grandell [14], in dem sowohl das Differential Argument als auch der Erneuerungsprozess im Falle ohne Zinsen erklärt werden, und wenden genau das auf die Herleitung mit Zinsen an.

Differential-Argument

Angenommen U ist ein klassische Risikoprozeß. Laut Cramèr [7] ist es dann ein einfacher Weg, unter Verwendung des Differential Arguments, eine Gleichung für φ zu bekommen. Wir betrachten U in einem kleinem Zeitintervall $(0, \Delta)$ mit $\Delta \to 0$, und unterscheiden zwischen vier möglichen Fällen:

1. es tritt kein Schaden im Intervall $(0, \Delta)$ ein,

2. es tritt ein Schaden im Intervall $(0, \Delta)$ ein, aber die zu bezahlende Menge verursacht keinen Ruin,

3. es tritt ein Schaden im Intervall $(0, \Delta)$ ein, und die zu bezahlende Menge verursacht Ruin, und

4. mehr als ein Schaden tritt im Intervall $(0, \Delta)$ ein.

Wir betrachten jeden dieser vier Fälle für $0 < u < b$ und $u > b$. Zuvor aber noch einige wichtige Bemerkungen.

Die Klein-o-Notation von Bachmann und Landau

$$f(\Delta) = o(\Delta) :\Longleftrightarrow \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(\Delta)}{\Delta} = 0.$$

Asymptotische Wahrscheinlichkeiten im Poissonprozess
Kein Schaden

$$P\left[N(\Delta) = 0\right] = e^{\lambda\Delta} = 1 + \lambda\Delta + o(\Delta)$$

weil

$$\lim_{\Delta \to 0} \Delta^{-1}(e^{\lambda\Delta} - 1 - \lambda\Delta) = 0.$$

Ein Schaden

$$P\left[N(\Delta) = 1\right] = \lambda\Delta e^{\lambda\Delta} = \lambda\Delta + o(\Delta).$$

Mehr als ein Schaden

$$P\left[N(\Delta) > 1\right] = 1 + o(\Delta),$$

was leicht aus $P\left[N(\Delta) > 1\right] = 1 - P\left[N(\Delta) = 0\right] - P\left[N(\Delta) = 1\right]$ folgt.

Asymptotische Verzinsung

$$\begin{aligned} e^{r\Delta} &= 1 + r\Delta + o(\Delta) \\ \int_0^\Delta e^{rs} ds &= \frac{e^{r\Delta} - 1}{r} = \Delta + o(\Delta) \\ \int_0^\Delta e^{-\delta s} ds &= \frac{1 - e^{-\delta\Delta}}{\delta} = \Delta + o(\Delta) \end{aligned}$$

Beginnen wir mit $0 < u < b$.

1. Kein Schaden passiert in $(0, \Delta]$, dann ist die Wahrscheinlichkeit gegeben durch

$$e^{-\lambda\Delta} = 1 - \lambda\Delta + o(\Delta)$$

Wir betrachten Δ so klein, dass der Risikoprozess $\tilde{U}$ die Schwelle b bis zum Zeitpunkt Δ nicht erreichen kann. Somit gibt es keine Dividenden in $(0,\Delta]$ und der Risikoprozess $\tilde{U}$ hat den Wert

$$\begin{aligned}
\tilde{U}(\Delta) &= ue^{r\Delta} + c\int_0^\Delta e^{rs}ds = ue^{r\Delta} + c\frac{e^{r\Delta}-1}{r} \\
&= \left(u+\frac{c}{r}\right)e^{r\Delta} - \frac{c}{r} \\
&= \left(u+\frac{c}{r}\right)(1+r\Delta+o(\Delta)) - \frac{c}{r} \\
&= u+\frac{c}{r}+\left(u+\frac{c}{r}\right)r\Delta + o(\Delta) - \frac{c}{r} \\
&= u+(ru+c)\Delta+o(\Delta) \\
&= u+o(1)
\end{aligned}$$

Die neue Position ist

$$\varphi_1(\Delta,u) = u+(ru+c)\Delta+o(\Delta)$$

Allgemein wissen wir, dass

$$V(u+z) = V(u)+V'(u)z+o(z).$$

In unserem Fall haben wir $z=\varphi_1(\Delta,u)-u$ und daraus folgt

$$\begin{aligned}
V(\varphi_1(\Delta,u)) &= V(u)+V'(u)(\varphi_1(\Delta,u)-u)+o(\varphi_1(\Delta,u)-u) \\
&= V(u)+V'(u)\left[(ru+c)\Delta+o(\Delta)\right]+o(\Delta) \\
&= V(u)+(ru+c)V'(u)\Delta+o(\Delta)
\end{aligned}$$

Abgezinst ergibt das Ganze

$$\begin{aligned}
e^{-\delta\Delta}V(\varphi_1(\Delta,u)) &= \left[1-\delta\Delta+o(\Delta)\right]\left[V(u)+(ru+c)V'(u)\Delta+o(\Delta)\right] \\
&= V(u)+\left[(ru+c)V'(u)-\delta V(u)\right]\Delta+o(\Delta)
\end{aligned}$$

Die abgezinsten erwarteten zukünftigen Dividenden sind somit

$$e^{-\delta\Delta}V(\varphi_1(\Delta,u)) = V(u)+\left[(ru+c)V'(u)-\delta V(u)\right]\Delta+o(\Delta)$$

2. Ein Schaden tritt im Intervall $(0,\Delta]$ ein, aber es kommt zu keinem Ruin. Die Vorgehensweise ist die gleiche wie im vorherigen Fall ohne Schaden. Die Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch

$$\lambda\Delta e^{-\lambda\Delta} = \lambda\Delta+o(\Delta)$$

Die neue Position ist

$$\varphi_1(\Delta, u) - y = V(u-y) + o(1)$$

Die abgezinsten erwarteten zukünftigen Dividenden sind

$$e^{-\delta\Delta} \int_0^{\varphi_1(\Delta,u)} V(\varphi_1(\Delta,u) - y)p(y)dy = \int_0^u V(u-y)p(y)dy + o(1)$$

3. Ein Schaden passiert in $(0, \Delta]$ und Ruin tritt ein, d.h. es werden überhaupt keine Dividenden gezahlt.

4. Tritt mehr als ein Schaden ein, ist die Wahrscheinlichkeit gegeben durch

$$1 - e^{-\lambda\Delta} - \lambda\Delta e^{-\lambda\Delta} = o(\Delta)$$

Die erwarteten zukünftigen Dividenden sind somit beschränkt.

Aus der Tatsache, dass $\tilde{U}$ stationäre und unabhängige Inkremente besitzt, wissen wir, dass V differenzierbar ist. Alle vier Fälle zusammengesetzt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
V(u) &= [1 - \lambda\Delta + o(\Delta)]\left[V(u) + ((ru+c)V'(u) - \delta V(u))\,\Delta + o(\Delta)\right] \\
&\quad + [\lambda\Delta + o(\Delta)]\left[\int_0^u V(u-y)p(y)dy + o(1)\right] \\
&\quad +0 \\
&\quad +o(\Delta) \\
&= V(u) + \Big\{-\lambda V(u) + (ru+c)V'(u) - \delta V(u) + \\
&\qquad \lambda \int_0^u V(u-y)p(y)dy\Big\}\Delta + o(\Delta).
\end{aligned}$$

Subtrahieren wir $V(u)$, dividieren durch Δ, und lassen $\Delta \to 0$ gehen, ergibt es

$$(ru+c)V'(u) - (\lambda+\delta)V(u) + \lambda \int_0^u V(u-y)p(y)dy = 0.$$

Das Gleiche ist nun anwendbar für den Fall, dass $u > b$ ist

1. Kein Schaden passiert in $(0, \Delta]$, dann ist die Wahrscheinlichkeit gegeben durch

$$e^{-\lambda\Delta} = 1 - \lambda\Delta + o(\Delta)$$

Durch den Risikoprozess

$$\tilde{U}(t) = ue^{rt} + c\int_0^t e^{rs}ds - \alpha\int_0^t e^{r(t-s)}ds$$

erhalten wir die neue Position

$$\varphi(\Delta, u) = u + (ru + c - \alpha)\Delta + o(\Delta)$$

Die gegenwärtigen Dividenden sind

$$\alpha\int_0^\Delta e^{-\delta s}ds = \alpha\Delta + o(\Delta)$$

und die abgezinsten erwarteten zukünfitgen Dividenden sind

$$e^{-\delta\Delta}V(\varphi(\Delta, u)) = V(u) + [(ru + c - \alpha)V'(u) - \delta V(u)]\,\Delta + o(\Delta)$$

2. Tritt ein Schaden im Intervall $(0, \Delta]$ ein, aber er führt nicht zu Ruin, dann ist die Wahrscheinlichkeit gegeben durch

$$\lambda\Delta e^{-\lambda\Delta} = \lambda\Delta + o(\Delta)$$

und die gegenwärtigen Dividenden durch

$$\alpha\int_0^\Delta e^{-\delta s}ds = \alpha\Delta + o(\Delta)$$

Die neue Position ist

$$\varphi(\Delta, u) = u + o(\Delta)$$

Somit sind die zukünftigen Dividenden

$$\begin{aligned} V(u) &= [1 - \lambda\Delta + o(\Delta)]\,[(\alpha\Delta + o(\Delta)) + V(u) + ((ru + c - \alpha)V'(u) \\ &\quad -\delta V(u))\,\Delta + o(\Delta)] \\ &\quad + [\lambda\Delta + o(\Delta)]\left[(\alpha\Delta + o(\Delta)) + \int_0^u V(u-y)p(y)dy + o(\Delta)\right] \\ &\quad +o(\Delta) \\ &= V(u) + [\alpha + (ru + c - \alpha)V'(u) - \delta V(u)]\,\Delta - \lambda V(u)\Delta + \\ &\quad \lambda\Delta\int_0^u V(u-y)p(y)dy + 0 \end{aligned}$$

Durch Umformen, durchdividieren durch Δ und $\Delta \to 0$ erhalten wir die Gleichung

$$\alpha + (ru + c - \alpha)V'(u) - (\lambda + \delta)V(u) + \lambda\int_0^u V(u-y)p(y)dy = 0.$$

Grandell merkt in seinem Buch an, dass das Differential-Argument zur Herleitung der Integrodifferentialgleichung mathematisch unbefriedigend sei, und benützt daher ein Erneuerungsargument.

Erneuerungsargument

Wir betrachten die Zeit vor dem ersten Schaden, also $0 \le t < T_1$. Da gilt

$$\tilde{U}(t) = ue^{rt} + c\int_0^t e^{rs}ds - \alpha \int_0^t e^{r(t-s)} I[\tilde{U}(s) > b]ds,$$

weil vom zusammengesetzten Poissonprozess S noch kein Beitrag kommt. Beginnen wir mir $0 < u < b$. Wir unterscheiden zwei Fälle. Erstens, $\tilde{U}$ bleibt bis zum ersten Schaden unterhalb von b. Dann gilt $\tilde{U}(t) = \zeta_1$, wobei

$$\zeta_1 = ue^{rt} + c\int_0^t e^{rs}ds = \left(u + \frac{c}{r}\right)e^{rt} - \frac{c}{r}$$

In diesem Fall werden bis T_1 keine Dividenden bezahlt. Zweitens, $\tilde{U}$ trifft b vor dem ersten Schaden. Das geschieht zum Zeitpunkt

$$h = \frac{1}{r}\log\frac{br + c}{ur + c}.$$

Bis h werden keine Dividenden bezahlt, von h bis T_1 werden Dividenden mit Rate α ausbezahlt. Also ist $\tilde{U}(t) = \zeta_2$, wobei

$$\zeta_2 = ue^{rt} + c\int_0^t e^{rs}ds - \alpha\int_h^t e^{r(t-s)}ds = \left(u + \frac{c}{r}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{br + c}\right)e^{rt} - \frac{c - \alpha}{r},$$

und es ergibt sich ein Dividendenbeitrag von

$$\alpha\int_h^t e^{-\delta s}ds = \frac{\alpha}{\delta}(e^{-\delta h} - e^{-\delta t}).$$

Wir betrachten nun $u > b$. Dann werden von 0 bis T_1 Dividenden bezahlt und $\tilde{U}(t) = \zeta_3$, wobei

$$\zeta_3 = ue^{rt} + c\int_0^t e^{rs}ds - \alpha\int_0^t e^{r(t-s)}ds = \left(u + \frac{c - \alpha}{r}\right)e^{rt} - \frac{c - \alpha}{r},$$

und es ergibt sich ein Dividendenbeitrag von

$$\alpha\int_0^t e^{-\delta s}ds = \frac{\alpha}{\delta}(1 - e^{-\delta t}).$$

Sei $0 < u < b$ und $0 \le t \le T_1$.

$$\begin{aligned}
\tilde{U}(t) &= ue^{rt} + c\int_0^t e^{rs}ds \\
h &= \frac{1}{r}\log\frac{br + c}{ur + c} \\
\tilde{U}(t) = ue^{rt} &+ c\int_0^t e^{rs}ds - \alpha\int_h^t e^{r(t-s)}ds
\end{aligned}$$

Sei $u > b$

$$\tilde{U}(t) = ue^{rt} \quad + \quad c\int_0^t e^{rs}ds - \alpha\int_0^t e^{r(t-s)}ds$$

Für $0 < u < b$ erhalten wir

$$\begin{aligned} V(u) \quad &= \quad \int_0^h \int_0^{\zeta_1} e^{-\delta t}V(\zeta_1 - y)p(y)dy\lambda e^{-\lambda t}dt \\ &+\alpha\int_h^\infty \int_h^t e^{-\delta s}ds\lambda e^{-\lambda t}dt \\ &+\int_h^\infty \int_0^{\zeta_2} e^{-\delta t}V(\zeta_2 - y)p(y)dy\lambda e^{-\lambda t}dt \end{aligned}$$

Für $u > b$ erhalten wir

$$\begin{aligned} V(u) \quad &= \quad \int_0^\infty \int_0^{\zeta_3} e^{-\delta t}V(\zeta_3 - y)p(y)dy\lambda e^{-\lambda t}dt \\ &+\alpha\int_h^\infty \int_0^t e^{-\delta s}ds\lambda e^{-\lambda t}dt \end{aligned}$$

Im ersten Integral substituieren wir $s = \zeta_1$, das zweite berechnet sich elementar und im dritten substituieren wir $s = \zeta_2$. Das ergibt mit

$$\eta_1 = \frac{1}{r}\log\left(\frac{rs+c}{ru+c}\right), \quad \eta_2 = \frac{1}{r}\log\left(\frac{rs+c-\alpha}{ru+c}\frac{br+c}{br+c-\alpha}\right)$$

dann folgt, bereits vereinfacht

$$\begin{aligned} V(u) \quad &= \quad \frac{\alpha}{\lambda+\delta}e^{-(\lambda+\delta)h} + \int_u^b \int_0^s V(s-y)p(y)\lambda e^{-(\lambda+\delta)\eta_1}dy\frac{ds}{rs+c} \\ &\times \int_b^\infty \int_0^s V(s-y)p(y)\lambda e^{-(\lambda+\delta)\eta_2}dy\frac{ds}{rs+c-\alpha} \end{aligned}$$

η_1 und η_2 eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned} e^{-(\lambda+\delta)\frac{1}{r}\log\left(\frac{rs+c}{ru+c}\right)} \quad &= \quad \left(\frac{ru+c}{rs+c}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} = \frac{(ru+c)^{\frac{\lambda+\delta}{r}}}{(rs+c)^{\frac{\lambda+\delta}{r}}} \\ e^{-(\lambda+\delta)\frac{1}{r}\log\left(\frac{rs+c-\alpha}{ru+c}\frac{br+c}{br+c-\alpha}\right)} \quad &= \quad \left(\frac{ru+c}{rs+c-\alpha}\frac{br+c-\alpha}{br+c}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} \end{aligned}$$

Das Gleiche machen wir jetzt mit $h = \frac{1}{r}\log\left(\frac{br+c}{ur+c}\right)$

$$e^{-(\lambda+\delta)h} = e^{-(\lambda+\delta)\frac{1}{r}\log\left(\frac{br+c}{ur+c}\right)} = \frac{(ur+c)^{\frac{\lambda+\delta}{r}}}{(br+c)^{\frac{\lambda+\delta}{r}}}$$

Eingesetzt in die Gleichung $V(u)$ haben wir

$$
\begin{aligned}
V(u) &= (ru+c)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} \left[\frac{\alpha}{\lambda+\delta} \frac{1}{(br+c)^{\frac{\lambda+\delta}{r}}} \right. \\
&\quad + \lambda \int_b^u \int_0^s V(s-y)p(y)dy \frac{ds}{(rs+c)^{\frac{\lambda+\delta}{r}+1}} \\
&\quad \left. + \lambda \left(\frac{br+c-\alpha}{br+c} \right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} \int_b^\infty \int_0^s V(s-y)p(y)dy \frac{ds}{(rs+c-\alpha)^{\frac{\lambda+\delta}{r}+1}} \right]
\end{aligned}
$$

Differenziert nach u ergibt das

$$
V'(u) = \frac{\lambda+\delta}{r}(ru+c)^{\frac{\lambda+\delta}{r}-1} r \, [\ldots] + (ru+c)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} \left[-\lambda \int_0^u \frac{V(u-y)p(y)}{(ru+c)^{\frac{\lambda+\delta}{r}+1}} dy \right]
$$

Umgeformt und auf eine Seite gebracht, erhalten wir genau die Gleichung (3.8)

$$
(ru+c)V'(u) - (\lambda+\delta)V(u) + \lambda \int_0^u V(u-y)p(y)dy
$$

Analoge Vorgehensweise für $u > b$.

Anhang C

Einige Formeln für konfluente hypergeometrische Funktionen

Wie bereits von vorhin bekannt, lautet die konfluente hypergeometrische Gleichung

$$z\frac{d^2w}{dz^2} + (b-z)\frac{dw}{dz} - aw = 0.$$

Näher nachzulesen ist das im Buch „Confluent hypergeometric functions“ von Lucy Joan Slater [16].
Konfluente hypergeometrische Funktionen haben viele nützliche rekursive Relationsformeln. Im Folgenden betrachten wir nur einen kleinen Teil derer, die im Artikel von Fang und Wu [9] verwendet wurden.

$$\begin{aligned}
M'(a,b,z) &= \frac{a}{b}M(a+1,b+1,z),\\
U'(a,b,z) &= -aU(a+1,b+1,z),\\
(b-a)M(a,b+1,z) &= bM(a,b,z) - bM'(a,b,z),\\
U(a,b+1,z) &= U(a,b,z) - U'(a,b,z),\\
(b-1)M(a-1,b-1,z) &= (b-1-z)M(a,b,z) + zM'(a,b,z),\\
U(a-1,b-1,z) &= (1-b+z)U(a,b,z) - zU'(a,b,z).
\end{aligned}$$

Diese Formeln und eine Fülle anderer Resultate sind im Buch von Abramowitz und Stegun [1] zu finden. Zum leichteren Verständnis für die folgenden Berechnungen, nummerieren wir die genannten rekursiven Relationsformeln von oben nach unten mit 1 bis 6 durch.
Um A_1, B_1 und A_2 bestimmen zu können, brauchen wir drei Bedingungen:

1. Aus Rechnung (3.10) folgt (3.18)
   Vereinfachen wir zuerst die Gleichung (3.16) wie folgt

$$V_1(u) = A_1F_1(u) + B_1G_1(u)$$

mit

$$\begin{aligned} F_1(u) &= z^{b-1}e^{-\beta u}M(a,b,\beta z), \\ G_1(u) &= z^{b-1}e^{-\beta u}U(a,b,\beta z) \end{aligned}$$

Hier ist b nicht der Threshold, sondern eine Hilfsgröße.
In unserem Fall ist $a = 1 + \frac{\delta}{r}, b = 1 + \frac{\lambda+\delta}{r}, z = u + \frac{c}{r}$ und $z_0 = \frac{c}{r}$.
Die erste Ableitung von $F_1(u)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F_1'(u) &= (b-1)z^{b-2}e^{-\beta u}M(a,b,\beta z) - \beta z^{b-1}e^{-\beta u}M(a,b,\beta z) \\ &\quad +\beta z^{b-1}e^{-\beta u}M'(a,b,\beta z) \\ &= z^{b-1}e^{-\beta u}\left[\left(\frac{b-1}{z} - \beta\right)M(a,b,\beta z) + \beta M'(a,b,\beta z)\right] \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Grenzbedingung (3.10) und mit Hilfe der Regel 3 erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{c}{r}F_1'(0) - \frac{\lambda+\delta}{r}F_1(0) &= z_0^{b-1}\left[(b-1-\beta z_0)M(a,b,\beta z_0)\right. \\ &\quad \left. +\beta z_0 M'(a,b,\beta z_0)\right] - (b-1)z_0^{b-1}M(a,b,\beta z_0) \\ &= -z_0^{b-1}\left[\beta z_0 M(a,b,\beta z_0) - \beta z_0 M'(a,b,\beta z_0)\right] \\ &= -\frac{\beta z_0^b}{b}\left[bM(a,b,\beta z_0) - bM'(a,b,\beta z_0)\right] \\ &= -\frac{\beta z_0^b}{b}(b-a)M(a,b+1,z) \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die Grenzbedingung (3.10) an der Stelle 0 mit r und setzen wir die Werte für a, b und z ein, haben wir

$$\begin{aligned} cF_1'(0) - (\lambda+\delta)F_1(0) &= -\beta\left(\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}+1}\frac{\lambda}{r+\lambda+\delta} \\ &\quad \times M\left(1+\frac{\delta}{r}, 2+\frac{\lambda+\delta}{r}, \frac{\beta c}{r}\right) \end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung, unter Zuhilfenahme der Regel 4, erfolgt nun für U

$$\begin{aligned} \frac{c}{r}G_1'(0) - \frac{\lambda+\delta}{r}G_1(0) &= -\beta z_0^b\left[U(a,b,\beta z_0) - U'(a,b,\beta z_0)\right] \\ &= -\beta z_0^b U(a,b+1,z) \end{aligned}$$

Multipliziert mit r und eingesetzt für a, b und z ergibt

$$cG_1'(0) - (\lambda+\delta)G_1(0) = -\beta\left(\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}+1}U\left(1+\frac{\delta}{r}, 2+\frac{\lambda+\delta}{r}, \frac{\beta c}{r}\right)$$

Gemeinsam betrachtet folgt nun

$$\begin{aligned}
&cV'(0) - (\lambda+\delta)V(0) = \\
&\quad = c\left[A_1F_1'(0) + B_1G_1'(0)\right] - (\lambda+\delta)\left[A_1F_1(0) + B_1G_1(0)\right] \\
&\quad = \left[cF_1'(0) - (\lambda+\delta)F_1(0)\right]A_1 + \left[cG_1'(0) - (\lambda+\delta)G_1(0)\right]B_1 \\
&\quad = -\beta\left(\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}+1}\frac{\lambda}{r+\lambda+\delta}M\left(1+\frac{\delta}{r}, 2+\frac{\lambda+\delta}{r}, \frac{\beta c}{r}\right)A_1 \\
&\qquad -\beta\left(\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}+1}U\left(1+\frac{\delta}{r}, 2+\frac{\lambda+\delta}{r}, \frac{\beta c}{r}\right)B_1 = 0
\end{aligned}$$

Umgeformt und vereinfacht erhalten wir die Gleichung (3.18)

$$\frac{\lambda}{r+\lambda+\delta}M\left(1+\frac{\delta}{r}, 2+\frac{\lambda+\delta}{r}, \frac{\beta c}{r}\right)A_1 + U\left(1+\frac{\delta}{r}, 2+\frac{\lambda+\delta}{r}, \frac{\beta c}{r}\right)B_1 = 0.$$

2. Die zweite Bedingung ist ganz leicht nachzuvollziehen.

3. Aus Rechnung (3.9) folgt (3.20)
   Vereinfachen wir zuerst die Gleichung (3.17) wie folgt

$$V_2(u) = A_2F_2(u) + \frac{\alpha}{\delta}$$

mit

$$F_2(u) \quad = \quad z^{b-1}e^{-\beta u}U(a, b, \beta z)$$

In unserem Fall ist $a = 1 + \frac{\delta}{r}, b = 1 + \frac{\lambda+\delta}{r}$ und $z = u + \frac{c-\alpha}{r}$. Die erste Ableitung von $F_2(u)$ ist gegeben durch

$$F_2'(u) = z^{b-1}e^{-\beta u}\left[\left(\frac{b-1}{z} - \beta\right)U(a, b, \beta z) + \beta U'(a, b, \beta z)\right]$$

Die bereits berechneten Werte, unter Berücksichtigung der Regel 4, in die folgende Formel eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned}
zF_2'(u) - (b-1)F_2(u) &= z^b e^{-\beta u}\left[\left(\frac{b-1}{z} - \beta\right)U(a, b, \beta z) + \right. \\
&\quad \left. \beta U'(a, b, \beta z)\right] - (b-1)z^{b-1}e^{-\beta u}U(a, b, \beta z) \\
&= -z^{b-1}e^{-\beta u}\left[\beta z U(a, b, \beta z) - \beta z U(a, b, \beta z)\right] \\
&= -\beta z^b e^{-\beta u}U(a, b+1, \beta z)
\end{aligned}$$

Setzen wir nun die Werte für a, b und z ein und multiplizieren die ganze Gleichung mit r, dann erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&(ru + c - \alpha)F_2'(u) - (\lambda+\delta)F_2(u) = \\
&-r\left(u + \frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}+1} e^{-\beta u}\beta U\left(1+\frac{\delta}{r}, 2+\frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(u+\frac{c-\alpha}{r}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Betrachten wir nun (3.9) für $u \downarrow b$, gilt

$$
(br + c - \alpha)V_2'(b) - (\lambda+\delta)V_2(b) + \lambda\int_0^b V_1(b-x)\beta e^{-\beta x}dx + \alpha.
$$

Wir versuchen nun unsere Formel der obigen anzupassen, indem wir einsetzen, was wir bereits wissen,

$$
\begin{aligned}
&-r\left(b+\frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}+1} e^{-\beta b}U\left(1+\frac{\delta}{r}, 2+\frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(b+\frac{c-\alpha}{r}\right)\right)A_2 \\
&+\lambda\int_0^b \left[A_1F_1(x) + B_1G_1(x)\right]\beta e^{-\beta(b-x)}dx + \alpha = 0
\end{aligned}
$$

Subtrahieren wir nun $(\lambda+\delta)\dfrac{\alpha}{\delta}$ und multiplizieren dann das Ganze mit $\dfrac{e^{\beta b}}{\beta}$, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&-r\left(b+\frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}+1} U\left(1+\frac{\delta}{r}, 2+\frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(b+\frac{c-\alpha}{r}\right)\right)A_2 \\
&= \frac{\lambda\alpha}{\delta}e^{\beta b} - \lambda\left[A_1\int_0^b F_1(x)e^{\beta x}dx + B_1\int_0^b G_1(x)e^{\beta x}dx\right]
\end{aligned}
$$

Die einzelnen Werte eingesetzt und umgeformt, haben wir

$$
\begin{aligned}
&-r\left(b+\frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}+1} U\left(1+\frac{\delta}{r}, 2+\frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(b+\frac{c-\alpha}{r}\right)\right)A_2 \\
&+\lambda\int_b^u A_2\left(x+\frac{c-\alpha}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} \\
&\qquad \times U\left(1+\frac{\delta}{r}, 1+\frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(x+\frac{c-\alpha}{r}\right)\right)dx \\
&= \frac{\lambda\alpha}{\beta\delta} - \lambda\int_0^b V(x,b)e^{\beta x}dx.
\end{aligned}
$$

Somit haben wir Gleichung (3.20).

Optimale Dividendenstrategie für exponentielle Schäden

Berechnung der ersten und zweiten Ableitung in (3.21) und (3.22).
Berechnen wir $F_2'(u)$ wie vorhin, dann erhalten wir im allgemeinen Fall, unter Zuhilfenahme der Regel 6

$$\begin{aligned} V_2'(u) &= -A_2 z^{b-2} e^{-\beta u}\left[(1-b+\beta z)U(a,b,\beta z) - \beta z U'(a,b,\beta z)\right] \\ &= -A_2 (u + \frac{c-\alpha}{r})^{\frac{\lambda+\delta}{r}-1} e^{-\beta u} U\left(\frac{\delta}{r}, \frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(u + \frac{c-\alpha}{r}\right)\right) \end{aligned}$$

Durch analoges Rechnen erhalten wir die Gleichung (3.22). Man kann sagen, wir ersetzen $(a,b) \mapsto (a-1, b-1)$.
Dieselbe Vorgehensweise ist gefragt, um auf die Gleichung (3.26) zu kommen. Der einzige Unterschied ist die Verwendung der Regel 5.

$$V_1'(u) = A_1 F_1'(u) + B_1 G_1'(u)$$

Wie wir bereits von vorhin wissen, sind die Ableitungen von F_1 und G_1 gegeben durch

$$\begin{aligned} F_1'(u) &= z^{b-1} e^{-\beta u}\left[\left(\frac{b-1}{z} - \beta\right) M(a,b,\beta z) + \beta M'(a,b,\beta z)\right] \\ G_1'(u) &= z^{b-1} e^{-\beta u}\left[\left(\frac{b-1}{z} - \beta\right) U(a,b,\beta z) + \beta U'(a,b,\beta z)\right] \end{aligned}$$

Die Werte a, b und z eingesetzt und die Regel 5 verwendend, ergibt

$$\begin{aligned} V_1'(u) &= A_1 \frac{\lambda+\delta}{r}\left(u + \frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}-1} e^{-\beta u} M\left(\frac{\delta}{r}, \frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(u + \frac{c}{r}\right)\right) \\ &\quad - B_1 \left(u + \frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}-1} e^{-\beta u} U\left(\frac{\delta}{r}, \frac{\lambda+\delta}{r}, \beta\left(u + \frac{c}{r}\right)\right). \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] Abramowitz, Milton; Stegun, Irene A.: *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* United States Department of Commerce, U.S. Government Printing Office: Washington, D.C., 1972.

[2] Asmussen, Søren: *Ruin Probabilities.* World Scientific: Singapore 2000.

[3] Cai, Jun: *Discrete time risk models under rates of interest.* Probability Engineering and Informational Sciences. 2002a, 16(3): 309-324.

[4] Cai, Jun: *Ruin probabilities with dependent rates of interest.* Journal of Applied Probability. 2002b, 39(2): 312-323.

[5] Cai, Jun; Dickson, David C.M.: *Upper bounds for ultimate ruin probabilities in the Sparre Andersen model with interest.* Insurance: Mathematics & Economics. 2003, 32: 61-71.

[6] Cont, Rama; Tankov, Peter: *Financial modelling with jump processes.* Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. 2004, xvi, 535 pp.

[7] Cramèr, Harald: *On the Mathematical Theory of Risk.* Skandia Jubilee Volume, Stockholm, 1930.

[8] De Finetti, Bruno: *Su un'impostazione alternativa dell teoria colletiva del rischio.* Transactions of the XVth International Congress of Actuaries, 1957

[9] Fang, Ying; Wu, Rong: *Optimal dividend strategy in the compound poisson model with constant interest.* Stochastic Models 23 (2007), no. 1, 149-166.

[10] Farny, Dieter: *Handwörterbuch der Versicherung : HdV.* Versicherungswirtsch., 1988.

[11] Fleming, Wendell H.; Soner, H. Mete: *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions.* Springer Verlag: New York, 1993.

[12] Gerber, Hans U.: *An Introduction to Mathematical Risk Theory.* S.S.Huebner Foundation: Philadelphia 1979, 42-43.

[13] Gerber, Hans U.; Shiu, Elias S.W.: *On optimal dividend strategy in the compound poisson model.* North American Actuarial Journal. 2006, 10 (2), 76-93.

[14] Grandell, Jan.: *Aspects of Risk Theory.* Springer: Berlin 1991.

[15] Paulsen, Jostein; Gjessing, Håkon K.: *Optimal choice of dividend barriers for a risk process with stochastic return on investments.* Insurance: Mathematics and Economics 1997, 20, 215-223.

[16] Slater, Lucy Joan: *Confluent hypergeoemtric functions.* Cambridge University Press. New York 1960, xi+247 pp.

[17] Sun, Lijuan; Yang, Hailiang: *Ruin theory in a discrete time risk model with interest income.* British Actuarial Journal. Vol. 9, Part III, 637-652, 2003.

[18] Wimmer, Sabine: *On optimal and threshold dividend strategies for four different risk models.* Diplomarbeit, TU Wien.

[19] Yang, Hailiang; Zhang, Lihong: *Ruin problems for a discrete time risk model with random interest rate.* Mathematical Methods of Operations Research 63 (2006), no. 2, 287-299.