TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

VIENNA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

DIPLOMARBEIT

DIE AUSSERGEWÖHNLICHE WELT DER FIBONACCI ZAHLEN

ausgeführt am Institut

Analysis und Scientific Computing

der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von Ao. Univ. Prof. Mag. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger

durch

Birgit Mahringer
Hütteldorferstraße 297/9
1140 Wien

Datum   Studentin

„Ich, Birgit MAHRINGER, erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit *selbstständig verfasst habe* und nur die ausgewiesenen Hilfsmittel verwendet habe. Diese Arbeit wurde daher weder an einer anderen Stelle eingereicht (z.B. für andere Lehrveranstaltungen) noch von anderen Personen (z.B. Arbeiten von anderen Personen aus dem Internet) vorgelegt.

Wien, im April 2009

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT

Bei der Suche nach einem geeigneten Thema für meine Diplomarbeit stand ich anfangs vor einem großen Problem. Da ich nach meinem Studium Lehrerin werde, wollte ich nicht irgendein beliebiges mathematisches Thema auswählen, sondern ich wollte einen Bereich bzw. ein Thema finden, der bzw. das die Kinder in der Schule später einmal so fesselt und für das sie sich selbst genauso begeistern können wie ich auch. Genau diesen für mich wichtigten Aspekt, konnte ich bei den Fibonacci Zahlen bzw. dem Goldenen Schnitt finden.

Gleich zu Beginn stieß ich auf die Werke von *Nikolaĭ Nikolaevich Worobjow* („Die Fibonaccischen Zahlen") und auf jenes von *Albrecht Beutelspacher* („Der Goldene Schnitt"). Im Laufe meiner Diplomarbeit wurden diese zwei Werke zu meinen ständigen Wegbegleitern. Beide Werke beinhalten die grundlegendsten Informationen zu meiner Thematik. Auch in der vierteljährlich erscheinenden Zeitschrift „Fibonacci Quarterly" konnte ich zahlreiche Anregungen und weitere interessante Ergebnisse im Zusammenhang mit meinem Thema finden.

Das erste Kapitel widme ich der Person Leonardo da Pisano (später auch Leonardo Fibonacci) selbst. Dabei werden die wichtigsten Stationen seines Lebensweges und der Inhalt seines bis in die heutige Zeit wichtigsten Werkes „Liber Abbaci" näher betrachtet.
Im zweiten Kapitel werden die Fibonacci Zahlen näher beleuchtet. War ihm die Bedeutung dieser Zahlenfolge bei der Findung eigentlich bewusst? Wie ist die Zahlenfolge definiert (rekursive bzw. explizite Definition) bzw. welche zahlentheoretischen Eigenschaften weist diese auf. Wie sind die Fibonacci Zahlen mit den Binomialkoeffizienten verbunden? All diese Fragen und noch viele mehr werden im zweiten Kapitel behandelt.
Im dritten Kapitel wird die Thematik rund um den Goldenen Schnitt näher untersucht. Dabei werden die exakte Definition bzw. die Konstruktion des Goldenen Schnittes, die Definition von φ und diverse geometrische Begriffe erläutert. Auch der Zusammenhang mit den Fibonacci Zahlen wird in diesem Kapitel näher erläutert.

Ein großes Augenmerk lege ich auf das abschließende vierte Kapitel. Es ist kaum zu glauben, in welcher Vielfalt die Fibonacci Zahlen bzw. der Goldene Schnitt in der Biologie, der Architektur, der Kunst oder in der Musik auftauchen. Genau diesen Bereichen bzw. Anwendungen widme ich mein letztes Kapitel.

Es ist kaum möglich das komplette Wissen rund um die Fibonacci Zahlen/Folgen bzw. den Goldenen Schnitt, deren Zusammenhang und deren Auftreten in einer Diplomarbeit zusammenzufassen. Leonardo Fibonacci führt in seinem Buch „Liber Abaci“ dazu folgende Meinung an: „Sollte ich etwas mehr oder weniger Wichtiges zufällig vergessen haben, so bitte ich, möge mir verziehen werden, weil es ja niemand gibt, der ohne Fehler ist und in allen Dingen und überall erfahren ist.“[1]

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die zum Gelingen dieser Diplomarbeit beigetragen haben.
Ein besonderer Dank gilt meiner ganzen Familie, die immer an mich geglaubt, mir die nötige Unterstützung und den familiären Rückhalt gewährt hat und die mir die Möglichkeit gegeben hat ein finanziell sorgenfreies Studium zu absolvieren.
Weiters bedanke ich mich bei all meinen Freunden und Freundinnen für die moralische und tatkräftige Unterstützung während meiner Studiumszeit.
Zuletzt gilt mein besonderer Dank Frau Prof. Mag. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger für die gute Betreuung, ihr Entgegenkommen und ihre freundliche Unterstützung im Entstehungsprozess dieser Diplomarbeit. Danke!

Birgit Mahringer
Wien, April 2009.

---

[1] [SIG]

Folgende mathematische Bezeichnungen werden in dieser Diplomarbeit verwendet:

$\overline{AB}$	Strecke mit den beiden Endpunkten A und B
$\|AB\|$	Länge der Strecke $\overline{AB}$
(a)	Folge a
ggT(a,b)	größter gemeinsamer Teiler der beiden Zahlen a und b
a$\|$b	a teilt b bzw. a ist ein Teiler von b bzw. b ist ein Vielfaches von a

Folgende Abkürzungen werden in der Diplomarbeit verwendet:

Abb.	Abbildung
bzw.	beziehungsweise
dh	das heißt
Jh.	Jahrhundert
oBdA	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
Tab.	Tabelle
usw.	und so weiter
v. Chr.	vor Christus
vgl.	vergleiche
zB	zum Beispiel

1 LEONARDO DA PISANO

Das Wissen für dieses erste Kapitel rund um das Leben von Leonardo da Pisano wurde aus folgenden Werken entnommen: [BIN], [CAN], [LIN], [IJON], [GRI], [SIG], [FIBO2]

1.1 Sein Leben (ca. 1180–1250)

Über das Leben von *Leonardo da Pisano* (Leonardo von Pisa) ist bis heute nicht viel bekannt, außer das er zu den bedeutendsten Mathematikern des Mittelsalters zählt. Alle weiteren biographischen Daten, welche die Grundlagen der heutigen Erkenntnisse darstellen, stammen aus seinem Buch „Liber Abbaci“ bzw. aus einem Dokument der Kommune von Siena.[2]

Abb. 1 Leonardo da Pisano

Leonardo da Pisano, wurde um ca. 1180 als Sohn von *Guilielmo Bonacci* in Pisa geboren. Bis heute ist Leonardo eher unter dem Namen Leonardo Fibonacci bekannt, welcher aus der Bezeichnung „filius Bonacci“ bzw. „figlio di Bonacci“ entstand, was im Italienischen soviel heißt wie „Sohn des Bonacci“.[3]
Leonardos Vater war Kaufmann in Pisa, der vor allem mit arabischen Ländern aus Nordafrika Handel betrieb, bis er als Handelsvertreter ins nordöstliche Algerien, nach Bugia, ins heutige Bejaja, entsandt wurde. Noch vor der Jahrhundertwende ließ der Vater seinen Sohn zu sich kommen, um ihn bei sich in den verschiedensten Bereichen der Mathematik von Rechenmeistern unterrichten zu lassen. Hier lernte er erstmals die „zehn Ziffern der Inder“ (das heutige für uns bekannte indo-arabische Zahlensystem – Ziffern 0 bis 9)

[2] [WFIBO]
[3] [IJON]

kennen. Seine Kenntnisse und sein Wissen vertiefte er durch Handelsreisen mit seinem Vater nach Ägypten, Griechenland, Sizilien und in die Provence und durch das Studium von Euklids Werken.
Fibonacci beendete seine diversen Reisen um 1200 und kehrte in seine Geburtsstadt Pisa zurück. Dort fing er auch bald an, sein komplettes mathematisches Wissen, vor allem jenes über das indische Zahlensystem, in seinem bekanntesten Werk, dem „Liber Abbaci" aufzuschreiben. Da es zu Lebzeiten Leonardos noch keine Schreibmaschinen gab, wurden alle Bücher handgeschrieben, wodurch wiederum die meisten seiner Werke heute nicht mehr erhalten sind. So auch ein Werk, in dem er Kommentare zum zehnten Buch der Elemente Euklids aufgeschrieben haben soll. Nur von insgesamt fünf Büchern bzw. Briefen gibt es heute noch Kopien.

Leonardo lebte einige Zeiten am Hof von *Kaiser Friedrich II*. (1194–1250). Dort lernte er unter anderem den Astrologen *Michael Scotus* (1175–1235), den Philosophen *Theodorus Physicus* (lebte im 13. Jahrhundert) und *Dominicus Hispanus* (2. Hälfte des 13. Jh) kennen, welche von nun an zu ständigen Wegbegleitern wurden. Während dieser Zeit wurden ihm immer wieder Aufgaben, Probleme und Herausforderungen von *Kaiser Friedrich II*. als auch von Magister *Johannes aus Palermo* zugetragen, die er versuchte zu lösen.
Einige dieser gelösten Probleme schrieb Leonardo in seinem Buch „Flos" (1225) auf, welches er Kardinal *Raniero Capocci von Viterbo* widmete. Die Hauptaufgabe lag in der Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Weiters versuchte er, drei in arithmetischer Progression (ist eine mathematische Zahlenfolge, bei der die Differenz zweier benachbarter Folgendglieder konstant ist[4]) folgende Quadratzahlen zu finden, die die Gleichung $x^2 - y^2 = y^2 - z^2$ lösen.
Kaiser Friedrich II. widmete er das Buch „Liber quadratorum" (1225). Wie der Titel bereits beschreibt, beschäftigt sich das Werk überwiegend mit Quadratzahlen. Fibonacci beweist unter anderem die Formel $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Weitere interessante Erkenntnisse aus diesem Werk sind, dass $x^4 - y^4$ nie eine Quadratzahl sein kann bzw. dass es kein x und y gibt, sodass sowohl $x^2 + y^2$ als auch $x^2 - y^2$ Quadratzahlen sind.

[4] [WARI]

Weiters schrieb er im Jahre 1220 das Buch „Practica Geometrie“, welches er seinem Freund und Lehrer *Dominicus Hispanus* widmete. In diesem Buch versucht er die Lösung der unbestimmten Gleichung $x^2 + a = y^2$ zu finden.
Sein fünftes und letztes erhaltene Dokument ist ein Brief an *Theodorus Physicus*. Das Entstehungsdatum dieses Briefes ist jedoch unbekannt.

Nach 1228 gibt es nur mehr ein einziges Dokument, in dem Leonardo Fibonacci namentlich erwähnt wird. In einem Dekret der Kommune von Pisa vom Jahre 1240, werden Leonardo da Pisano ein Jahressaldo von zwanzig Pfund Pfennigen zuzüglich einiger Naturalien für seine Verdienste als Steuerschätzer und Rechenmeister gewährt.
Die Todesumstände Leonardos sind bis heute noch ungeklärt. Entweder starb Fibonacci beim Bürgerkrieg in Pisa oder er begleitete *Kaiser Friedrich II.* auf dessen Kreuzzug um kam dabei ums Leben.
Nimmt man als Geburtsjahr 1180 und als Sterbejahr 1250 an, so erreichte Leonardo Fibonacci für damalige Verhältnisse mit 70 Jahren ein sehr beachtliches hohes Alter.

Zu Lebzeiten Fibonaccis war kaum jemand an seinen Werken bzw. seinen Kenntnissen interessiert und er wurde von der Öffentlichkeit weitgehend ignoriert. Erst mit der Wiederentdeckung der Zahlentheorie in der Zeit von *Pierre de Fermat* (1608–1665) wurde man auf die vielfältigen und weitreichenden Erkenntnisse Fibonaccis erneut aufmerksam.
Um heute seine Persönlichkeit zu würdigen befindet sich im Kreuzgang des historischen Friedhofes Campa Santo in Pisa eine Statue von Leonardo da Pisano.

1.2 Fibonacci Quarterly

Verner Emil Hoggat Jr. (1921–1980) und *Alfred Brousseau* (1907–1988) gründeten 1963 die Association Fibonacci, um dem immer mehr aufkommenden Interesse über die Fibonacci Zahlenfolge gerecht zu werden.

Kurz darauf wurde das erste Mal die Zeitschrift Fibonacci Quarterly herausgegeben. In ihr werden neue Resultate, neue auftretende Probleme, aktuelle Forschungsergebnisse bzw. innovative Ideen rund um das Thema der Fibonacci Zahlen erläutert. Dazu gibt es einen fixen Pool von 42 WissenschaftlerInnen und eingeladene populäre MathematikerInnen und WissenschaftlerInnen, die jedes Mal aufs Neue darum gebeten werden, ihr Wissen in Artikeln aufzuschreiben und diese in der Zeitschrift zu veröffentlichen.

1.3 Liber Abbaci

Liber Abbaci hat viele Bedeutungen, die wahrscheinlichste im Zusammenhang mit dem Titel des Buches, ist jene der „Rechenkunst".[5]
Nachdem Leonardo Fibonacci von seinen Reisen mit seinem Vater wieder nach Pisa zurückgekehrt ist, beginnt er mit dem Schreiben dieses Werkes. Darin behandelt er vor allem die Verwendung der indu-arabischen Ziffern. Er führt jedoch auch die negativen Zahlen, als Ausdruck für Schulden, ein, beschäftigt sich mit der Primfaktorenzerlegung oder mit Mischaufgaben.
Das „Liber Abbaci" zählt wohl zu seinem bekanntesten und von seiner Wichtigkeit zum populärsten Werk seiner kompletten Sammlung. Die erste Fassung entstand 1202 und öffnete Leonardo die Türen zum Hof von *Kaiser Friedrich II*. Dort schrieb er auch 1228 die zweite und bis heute erhaltene Fassung, welche bereits Kürzungen und Ergänzungen beinhaltet. Diese zweite Fassung widmet er seinem besten Freund am Hof dem Astrologen *Michael Scotus*.
Laut dem Internetportal ijon[6] liegt die Besonderheit dieses Buches nicht in der Schwierigkeit der gestellten Aufgaben, sondern vielmehr in den mathematisch sehr exakt geführten Beweisen und Begründungen der gestellten Aufgaben. Weiters geht es weit über das Wissen der Allgemeinheit im Mittelalter hinaus. Die späteren Mathematiker, wie etwa *Leonhard Euler* (1707–1783), nahmen aus diesem Werk sowohl Aufgaben als auch Lösungsmethoden heraus, die sie wiederum in ihren Büchern weiter verwendeten.

---
[5] [LÜN]
[6] [IJON]

Das Buch hat 459 Seiten und wird in 15 Kapitel unterteilt. Dabei ist für Leonardo Fibonacci das 12. Kapitel (wieder in neun Abschnitte eingeteilt) das Wichtigste, indem er sich mit sehr vielen Problemen mannigfaltiger Art beschäftigt. Immerhin widmet er diesem gleich 152 Seiten.

Die fünfzehn Kapitel führen folgende Überschriften:[7]

1. Von der Kenntnis der neun[8] Zahlenzeichen der Inder und wie mittels derselben jede Zahl anzuschreiben sei; ferner welche Zahlen und wie sie durch die Hände behalten werden können, sowie die Einführung des Abacus → dieses Kapitel beschreibt unter anderem, wie jede einzelne Zahl von 1 bis 9999 mit den zehn Fingern dargestellt werden kann
2. Vom Vervielfachen ganzer Zahlen
3. Vom Zusammenzählen ganzer Zahlen
4. Von dem Abziehen kleinerer Zahlen von größeren
5. Von dem Teilen ganzer Zahlen
6. Vom Vervielfachen ganzer Zahlen mit Brüchen → dieses Kapitel beinhaltet den Euklidischen Algorithmus zum Auffinden des größten gemeinsamen Teilers.
7. Vom Zusammenzählen, Abziehen und Teilen der Zahlen mit Brüchen und von der Zerlegung vielfacher Teile in einzelne
8. Von der Auffindung der Preise der Waren nach der längeren Weise → beinhaltet die Umrechnung von Währungen, Maßen und Gewichten
9. Von dem Umtauschen der Waren und ähnlichen Dingen
10. Von der Genossenschaft unter Gesellschaftern → behandelt Rechenaufgaben zu Viehfutter, Baumschlag und Nahrung und der Gewinnaufteilung unter Gesellschaftern
11. Von der Mischung der Münzen
12. Von der Auflösung vieler Aufgaben, die wir als mannigfache bezeichnen
13. Von der Regel Elchatayn und wie durch dieselbe fast alle mannigfache Aufgaben des Abacus gelöst werden
14. Von der Auffindung der Quadrat- und Kubikwurzeln und von deren gegenseitiger Vervielfachung, Teilung und Abziehung sowie von der

[7] [CAN]
[8] lt. der Kapitelüberschrift von Fibonaccis „Liber Abacci“

Behandlung der mit ganzen Zahlen verbundenen Wurzelgrößen und ihrer Wurzeln

15. Von den Regeln, die zur Geometrie gehören und von den Aufgaben der Aljebra und Almuchabala (Fibonacci verstand unter den beiden Begriffen aljebra und almuchabala die „Theorie der quadratischen Gleichungen“[9])

Im 12. Kapitel werden einige sehr interessante, heute in der Schule wichtige Themen bzw. allgemein lustige Rätsel, behandelt:

- die Summierung arithmetischer Reihen
- Zahlenproportionen und Systeme von linearen Gleichungen
- Proportionen bei Bäumen
- Findung von Geldbörsen und dem erhaltenen Finderlohn
- Kauf von Pferden
- Zinsaufgaben
- Kaninchenaufgabe → sie bildet die Grundlage für die im 2. Kapitel behandelte Fibonacci Folge
- Lustige Rateaufgaben, wie zB: Sieben alte Frauen gehen nach Rom, jede von ihnen hat sieben Maulesel, jeder Maulesel trägt sieben Säcke, jeder Sack enthält sieben Laib Brot, bei jedem Brot sind sieben Messer, jedes Messer hat sieben Scheiden. Was ist die Gesamtzahl von allen genannten Werten? (7 + 49 + 343 + 2401 + 16807 + 117649 = 137256)
- Die Verdopplung auf dem Schachbrett – Aufgaben rund um die Zahl $2^{64} - 1$

Im 13., 14. und 15. Kapitel widmet sich Leonardo den Quadrat- und Kubikwurzeln. Dabei beschreibt Leonardo ein Näherungsverfahren zur Auffindung irrationaler Kubikwurzeln. Weiters findet er im 15. Kapitel die Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$.

[9] [LÜN]

2 DIE FIBONACCI ZAHLEN

2.1 Das Kaninchenproblem

In *Leonardo da Pisanos* bekanntestem Werk „Liber Abaci“ befinden sich in Kapitel 12 eine Reihe mathematischer Aufgaben ersten Grades.[10] Auf Seite 283 des Buches kann man jene Rechenaufgabe, die Kaninchenaufgabe, die zur Findung der Fibonacci Zahlenfolge führte, finden.

Im Original (auf Latein) lautet die Fragestellung folgendermaßen:[11]
Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur?
“Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circundatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno.
cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant.“

bzw. ins Deutsche übersetzt:

Wie viele Kaninchenpaare erzeugt ein einziges Paar in einem Jahr?
„Ein Mann hält ein Kaninchenpaar an einem Ort, der gänzlich von Mauern umgeben ist. Wir wollen nun wissen, wie viele Paare von ihnen in einem Jahr gezüchtet werden können, wenn die Natur es so eingerichtet hat, dass diese Kaninchen jeden Monat ein weiteres Paar zur Welt bringen und damit im zweiten Monat nach ihrer Geburt beginnen.“

Leonardo beantwortete die Frage durch logisches Denken und kam dabei auf folgende Lösung:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, …

[10] damit sind lt. Fibonacci sehr einfache Gleichungen (zB a + x = b) gemeint
[11] [SIG]

Grafisch kann dies folgendermaßen veranschaulicht werden:

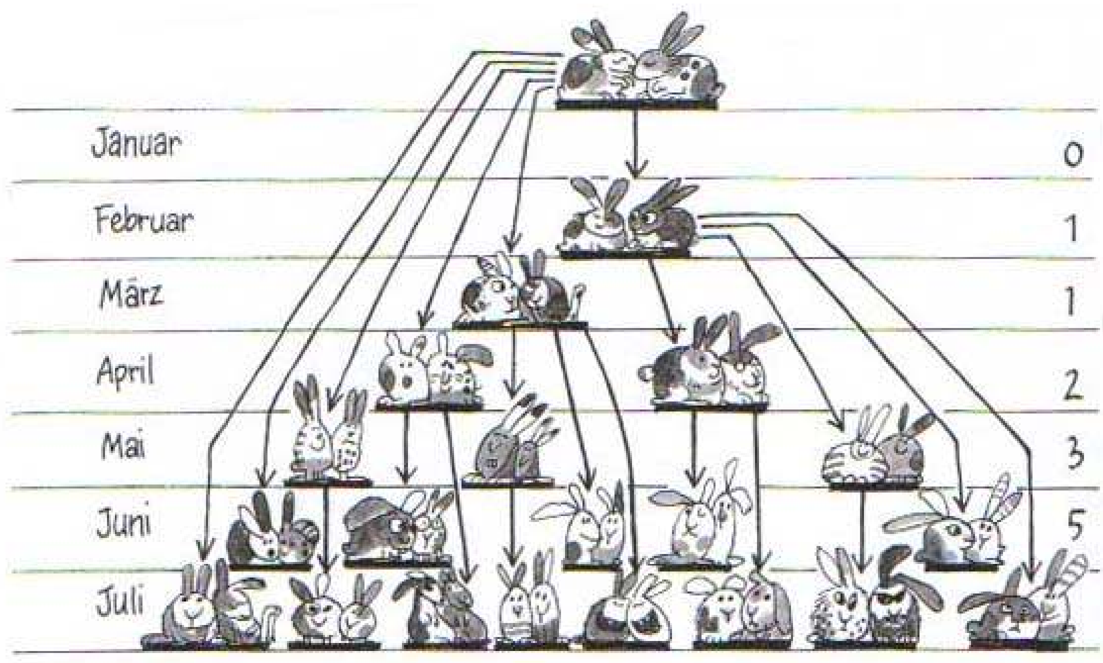


Abb. 2 grafische Darstellung der Kaninchenpopulation

Damit war die Fibonacci Folge gefunden. Leonardo selbst erforschte die Eigenschaften dieser jedoch nicht. Er gab nur die im nächsten Abschnitt (vgl. Abschnitt 2.2 Rekursive Definition) erwähnte rekursive Definition zur Ermittlung der Kaninchenpaare an.

Erst im 19. Jahrhundert entdeckte der französische Mathematiker *Edouard Lucas* (1842–1891) die Besonderheiten der Zahlen bzw. der Zahlenfolge. Er erforschte diese und gab ihr zu Ehren seines Erfinders, den Namen Fibonacci Zahlen bzw. Fibonacci Zahlenfolge.

2.2 Rekursive Definition

Die durch die beiden Anfangswerte

$$F_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad F_1 = 1$$

und dem Rekursionsgesetz

$$\mathbf{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}} \qquad \text{oder} \qquad \mathbf{F_{n+2} = F_{n+1} + F_n}$$

definierte Zahlenfolge heißt **Fibonacci Zahlenfolge**.

Die ersten 100 Folgenglieder der Fibonacci Zahlenfolge sind im Anhang (siehe Abschnitt 5.1 Die ersten 100 Fibonacci Zahlen) angeführt.

Diese Art der Definition nennt man **rekursiv**. Hierbei kann das nächste Folgenglied nur dann berechnet werden, wenn man die vorangehenden Folgenglieder bereits kennt. Das heißt möchte man zB F_{1000} berechnen, muss man erst alle vorangehenden Fibonacci Zahlen F_0 bis F_{999} berechnen, damit man zum Abschluss F_{1000} ermitteln kann.
Im Gegensatz dazu ist es bei einer **expliziten** Definition immer möglich, jedes beliebige Folgenglied F_n direkt aus der angegebenen Formel für ein gegebenes n zu berechnen. Eine explizite Formel für die Fibonaccizahlen wird im nächsten Abschnitt (vgl. Abschnitt 2.3 Explizite Definition – Formel von Moivre-Binet) näher erläutert.

Es gibt natürlich sehr viele Verallgemeinerungen der Fibonacci Zahlen. Die wichtigsten Verallgemeinerungen werden im Abschnitt 2.6 Verallgemeinerte Fibonacci Zahlenfolgen näher beschrieben.

2.3 Explizite Definition – Formel von Moivre-Binet

Das Bildungsgesetz zur expliziten Berechnung der Fibonacci Zahlen entdeckten unabhängig voneinander 1730 *Abraham de Moivre* (1667–1754) bzw. 1843 *Jacques Philippe Marie Binet (*1786–1856). *Daniel Bernoulli* (1700–1782) und *Leonhard Euler* kannten auch bereits das Ergebnis.[12]

Die Fibonacci Zahlen lassen sich direkt mittels

$$F_n = \frac{\varphi^n - \overline{\varphi}^n}{\varphi - \overline{\varphi}}, \quad n \in Z$$ [13]

berechnen, wobei φ und $\overline{\varphi}$ die beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ sind. Setzt man

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ und } \overline{\varphi} = 1 - \varphi = -\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ein, dann erhält man die explizite Formel von Moivre-Binet:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Die Formel kann auch mittels der Matrizenrechnung und dem Eigenwertproblem in der Linearen Algebra bzw. mit dem charakteristischen Polynom hergeleitet werden.

Die Besonderheit der Formel liegt darin, dass sich für jedes beliebige n die irrationalen Terme gegenseitig so aufheben, dass zum Schluss immer ein ganzzahliger Wert herauskommt.

---

12 [WFIBF]
13 Beweis siehe [WFIBF]

2.4 *Eigenschaften der Fibonacci Zahlenfolge*

So unregelmäßig wie die Fibonacci Folge auf den ersten Blick erscheint, ist sie nicht. In ihr stecken eine Menge interessanter Eigenschaften, welche in diesem Abschnitt gezeigt und zusammengefasst werden.

2.4.1 Summenformeln

- ***die Summe der Fibonacci Zahlen bis F_n***

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1,$$

Beweis:[14]

$F_1 = F_3 - F_2$ wegen $F_3 = F_2 + F_1$

$F_2 = F_4 - F_3$

……

$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$

$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$

Durch gliedweises Addieren auf beiden Seiten erhält man folgende Teleskopsumme:

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - F_2.$$

Da laut Definition $F_2 = 1$ ist, ist die Summe aller Fibonacci Zahlen bis F_n gleich $F_{n+2} - 1$.

q.e.d.

[14] [BIN]

- ***die Summe der ungeraden Fibonacci Zahlen bis F_{2n-1}***

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

<u>*Beweis:*</u>[15]

$F_1 = F_2$

$F_3 = F_4 - F_2$

$F_5 = F_6 - F_4$

…

$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$

Durch gliedweise Addition erhält man schließlich die oben angeführte Behauptung.

q.e.d.

- ***die Summe der geraden Fibonacci Zahlen bis F_{2k}***

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

<u>*Beweis:*</u>[16]

Wie wir wissen, ist die Summe aller Fibonacci Zahlen bis 2n gleich $F_{2n+2} - 1$. Subtrahiert man hiervon nun die Summe aller ungeraden Fibonacci Zahlen (F_{2n}), so erhält man:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n - (F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1}) = F_{2n+2} - 1 - F_{2n}$$

[15] [BIN]
[16] [BIN]

Nach Zusammenfassen der einzelnen Glieder bekommt man folgendes Ergebnis:

$$F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

q.e.d.

- ***alternierende Summe der Fibonacci Zahlen***

$$\mathbf{F_1 - F_2 + F_3 - \ldots + (-1)^{m+1} F_m = (-1)^{m+1} F_{m-1} + 1}$$

Beweis:[17]

Um diese Eigenschaft zu zeigen, subtrahiert man zu Beginn einmal von den ungeraden Zahlen die geraden Zahlen.

$$F_1 - F_2 + F_3 - \ldots + F_{2n-1} - F_{2n} = F_{2n} - (F_{2n+1} - 1) = -F_{2n-1} + 1$$

Addiert man auf beiden Seiten der Gleichung F_{2n+1}, so kommt man zu:

$$F_1 - F_2 + F_3 - \ldots + F_{2n-1} - F_{2n} + F_{2n+1} = -F_{2n-1} + 1 + F_{2n+1} = F_{2n} + 1$$

Als Ausdruck für alternierende Summen erhalten wir aus den beiden Zeilen oben nun die folgende Behauptung:

$$F_1 - F_2 + F_3 - \ldots + (-1)^{m+1} F_m = (-1)^{m+1} F_{m-1} + 1$$

q.e.d.

---

[17] [WORO]

2.4.2 Additionsformeln

- $\boldsymbol{F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}}$

Diese Additionsformel kann mit Hilfe der vollständigen Induktion nach m sehr leicht bewiesen werden.

Beweis:[18]
Für m = 1 gilt

$$F_{n+1} = F_{n-1}F_1 + F_nF_2 = F_{n-1} + F_n$$

Diese Aussage ist laut Definition der Fibonacci Zahlen richtig.

Für m = 2 gilt

$$F_{n+2} = F_{n-1}F_2 + F_nF_3 = F_{n-1} + 2F_n = F_{n-1} + F_n + F_n = F_{n+1} + F_n$$

Damit ist der erste Schritt des Beweises getan. Nun folgt der Induktionsschluss. Angenommen, die Behauptung ist richtig für m = k und für m = k + 1, so beweisen wir nun, dass sie auch für m = k + 2 gilt.

m = k: $F_{n+k} = F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}$
m = k + 1: $F_{n+k+1} = F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2}$

Addiert man diese beiden Gleichungen gliedweise, so erhält man

$$F_{n+k+2} = F_{n-1}F_{k+2} + F_nF_{k+3}$$

was wiederum zu beweisen war.

q.e.d.

[18] [WORO]

- ***$F_{2n} = F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2$***

Setzt man in die oben bewiesene Additionsformel nun m = n, so ergibt sich die nächste wichtige Formel:

$$F_{2n} = F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1})$$

Diese Formel besagt, dass das Zahlenglied F_{2n} immer durch F_n teilbar ist.

Wegen $F_n = F_{n+1} – F_{n-1}$ kann man die obige Formel umschreiben in

$$F_{2n} = (F_{n+1} – F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$$

Wie man sehen kann, ist die Differenz der Quadrate zweier Fibonacci Zahlen, deren Indizes sich um zwei unterschieden, immer wieder eine Fibonacci Zahl.

Setzt man wiederum in der ersten Additionsformel gleich m = 2n so erhält man

$$F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n – F_{n-1}^3$$

2.4.3 Summe von Quadraten

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$$

Beweis:[19]
Es gilt

$F_k^2 = F_k(F_{k+1} – F_{k-1}) = F_kF_{k+1} – F_kF_{k-1}$
Durch Addieren erhält man

[19] [WORO]

$F_1^2 = F_1F_2$

$F_2^2 = F_2F_3 – F_1F_2$

$F_3^2 = F_3F_4 – F_2F_3$

……

$$F_n^2 = F_nF_{n+1} – F_{n-1}F_n$$

q.e.d.

2.4.4 Identitäten

- ***Identität von Catalan***

Die Identität von Catalan besagt, dass

$$\mathbf{F_n^2 – F_{n+k}F_{n-k} = (- 1)^{n-k} F_k^2}$$

Ist. Einen Spezialfall der Catalan Identität bildet die Simpson bzw. Cassini Identität.

- ***Simpson Identität***

$$\mathbf{F_{n+1}F_{n-1} – F_n^2 = (- 1)^n \quad n \geq 2}$$

Diese Identität besagt, dass das Quadrat jeder Zahl (ab der zweiten) um eins kleiner oder größer ist als das Produkt der vorhergehenden und der nachfolgenden Zahl.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe von vollständiger Induktion nach n.

Beweis:[20]
Für n = 2 gilt

$$F_3*F_1 - F_2^2 = 2*1 - 1^2 = 1 = (-1)^2$$

Sei die Aussage richtig für n > 2, so zeigen wir, dass die Behauptung auch für n + 1 gilt.

$$\begin{aligned} F_{n+2}*F_n - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} + F_n)*F_n - F_{n+1}^2 = \\ = F_{n+1}(F_n - F_{n+1}) + F_n^2 &= F_{n+1}(F_n - F_{n+1}) + F_{n+1}F_{n-1} - (-1)^n = \\ &= F_{n+1}(\underbrace{F_n + F_{n-1} - F_{n+1}}_{=0}) + (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

q.e.d.

- ***Identität von d'Ocagne***

$$\mathbf{F_mF_{n+1} - F_nF_{m+1} = (-1)^nF_{m-n}}$$

2.4.5 Weitere interessante Eigenschaften[21]

Im Zusammenhang mit den Fibonacci Zahlen gibt es noch eine Fülle von interessanten Formeln. Einige seien hier noch zusätzlich ohne Beweis angeführt.

$$\mathbf{F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} = F_n^4 - 1}$$

$$\mathbf{F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n} - F_n^3}$$

[20] [BEU]
[21] [IJON]

Die folgende Formel ist für Summen der Gestalt kF_k gedacht:

$$\sum_{k=1}^{n} kF_k = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$$

2.5 Teilbarkeitsregeln von Fibonacci Zahlen

Der größte gemeinsame Teiler zweier Fibonacci Zahlen ist jene Fibonacci Zahl, deren Index der größte gemeinsame Teiler der Indizes der beiden Zahlen ist.

Für $m, n \in N$ gilt:

$$ggT(F_n, F_m) = F_{ggT(m,\, n)}$$

<u>*Beweis:*</u>[22]
Zu Beginn zeigen wir den Spezialfall, dass $F_n|F_{kn}$ (für k > 0). Dies funktioniert mit Hilfe der vollständigen Induktion nach k. k = 1 ist klar. Nach der Additionsformel (vgl. 2.4.2 Additionsformel) ist

$$F_{(k+1)n}=F_{kn-1}F_n+F_{kn}F_{n+1}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist nun F_n ein Teiler von F_{kn}.

Um den ggT zweier Zahlen ermitteln zu können, benötigt man den Euklidischen Algorithmus. Ist oBdA m ≥ n, kann man folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} m &= q_0n + r_1 \text{ mit } r_1 < n \qquad q_i \in N \\ n &= q_1r_1 + r_2 \text{ mit } r_2 < r_1 \\ r_1 &= q_2r_2 + r_3 \text{ mit } r_3 < r_2 \\ &\dots \\ r_{k-1} &= q_kr_k \end{aligned}$$

[22] [IJON]

r_k ist damit der ggT der beiden Zahlen m und n. Genauer gesagt, ist

$$ggT(m, n) = ggT(n, r_1) = ggT(r_1, r_2) = ggT(r_2, r_3) = \ldots$$

Wendet man diesen euklidischen Algorithmus nun auf die beiden Fibonacci Zahlen F_n und F_{n-1} an, so ist stets $q_i = 1$ (aufgrund des Rekursionsgesetzes $F_n = F_{n-1} + F_{n-2};\ \frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$) und die r_i durchlaufen die Fibonacci Zahlen nach unten: F_n und F_{n-1} sind teilerfremd. Insbesondere sind auch F_n und F_{kn-1} teilerfremd.

Sind nun r_i und q_i wie oben gerade beschrieben, kann man folgendermaßen schreiben ($m = q_0n + r_1$; $n = q_1r_1 + r_2$)

$$\begin{aligned}
ggT(F_m, F_n) &= ggT(F_{q_0n+r_1}, F_n) && \text{Additionsformel (vgl. 2.4.2)} \\
&= ggT(F_{q_0n-1}F_{r_1} + F_{q_0n}F_{r_1+1}, F_n) && F_n | F_{q_0n},\ k = q_0, \rightarrow F_{q_0n}F_{r_1+1} \text{ fällt weg} \\
&= ggT(F_n, F_{q_0n-1}F_{r_1}) && F_n \text{ und } F_{q_0n-1} \text{ sind teilerfremd} \\
&= ggT(F_n, F_{r_1})
\end{aligned}$$

Fährt man auf diese Art und Weise fort, so erhält man:

$$ggT(F_m, F_n) = ggT(F_n, F_{r_1}) = ggT(F_{r_1}, F_{r_2}) = \ldots$$

Zum Schluss erhält man die oben getätigte Aussage:

$$ggT(F_m, F_n) = F_{ggT(m, n)}$$

q.e.d.

Weitere wichtige Teileigenschaften von Fibonacci Zahlen sind:

- $n|m \Rightarrow F_n|F_m$
- F_n, F_{n-1} und F_{n+1} sind teilerfremd
- $ggT(m, n) = 1 \Rightarrow F_n*F_m|F_{nm}$
- $F_n \in P \Rightarrow n = 4$ oder $n \in P$

Die Umkehrung des letzten Punktes gilt nicht. Ein Gegenbeispiel dazu ist: 19 ist eine Primzahl, aber $F_{19} = 4181 = 37*113$ ist keine Primzahl.
Die Frage, ob unter den Fibonacci Zahlen endlich oder unendlich viele Primzahlen sind, ist bis heute noch ungeklärt.

Es gibt auch einige wichtige Teilbarkeitsregeln für Fibonacci Zahlen. Die wichtigsten davon sind:

- F_n ist gerade $\Rightarrow$ $3|n$
- $3|F_n \Rightarrow 4|n$
- $4|F_n \Rightarrow 6|n$
- $5|F_n \Rightarrow 5|n$
- $7|F_n \Rightarrow 8|n$

2.6 Zahlenfolgen mit ähnlichen Rekursionsvorschriften

2.6.1 Generalisierte Fibonacci Folge

Definiert man eine Zahlenfolge nur durch die Rekursionsvorschrift

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

so erhält man die **generalisierten** oder **verallgemeinerten Fibonacci Zahlen**, wobei die ersten beiden Glieder der Folge jeweils beliebig gewählt werden und die weiteren Glieder mit Hilfe dieser obigen Rekursion berechnet werden können.

Fast alle Eigenschaften bzw. Beziehungen der Fibonacci Zahlen gelten auch für die generalisierten Fibonacci Zahlen.

Die Fibonacci bzw. die Lucas Zahlenfolge (vgl. Abschnitt 2.6.2 Lucas Zahlenfolge) sind eigentlich Spezialfälle der generalisierten Fibonacci Zahlenfolge.

2.6.2 Lucas Zahlenfolge

Die Lucas Zahlenfolge hängt sehr eng mit der Fibonacci Zahlenfolge zusammen. Sie wird durch die beiden Anfangswerte

$$L_1 = 1 \quad \text{und} \quad L_2 = 3$$

und dem gleichen Rekursionsgesetz wie bei den Fibonacci Zahlen

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

gebildet.

Es gibt zahlreiche Formeln, die die Zusammenhänge zwischen der Lucas- und der Fibonacci Zahlenfolge beschreiben. Diese werden in dieser Arbeit jedoch nicht näher erläutert.

2.6.3 Tribonacci bzw. Quadranacci Folge

Die durch die drei (bzw. vier) Anfangswerte

$$T_0 = 0,\ T_1 = 1 \text{ und } T_2 = 2 \text{ bzw. } (T_3 = 3)$$

und durch das Rekursionsgesetz

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}\ (+\ T_{n-4}) \text{ für } n \geq 3\ (n \geq 4)$$

gebildete Folge nennt man **Tribonacci Folge** (bzw. **Quadranacci / Tetranacci Folge**).

2.7 *Fibonacci Zahlen und Binomialkoeffizienten*

Kaum zu glauben, aber es besteht auch ein Zusammenhang zwischen den Binomialkoeffizienten und den Fibonacci Zahlen. Jede Fibonacci Zahl kann mit Hilfe der Binomialkoeffizienten dargestellt werden:

$$F_n = 2^{1-n} * \left[\binom{n}{0} + 5\binom{n}{3} + 5^2\binom{n}{5} + 5^3\binom{n}{7} + \ldots\right]$$

Ordnet man die Binomialkoeffizienten in einem Dreieck an, so erhält man das Pascalsche Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & \ldots & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & \ldots & & & \end{array}$$

Die Linien, die die Zeilen des Pascalschen Dreiecks unter 45° schneiden, heißen **aufsteigende Diagonalen des Pascalschen Dreiecks**. Summiert man jeweils die Zahlen, die auf einer aufsteigenden Diagonale liegen, so kommt man zu folgenden erstaunlichen Resultat:

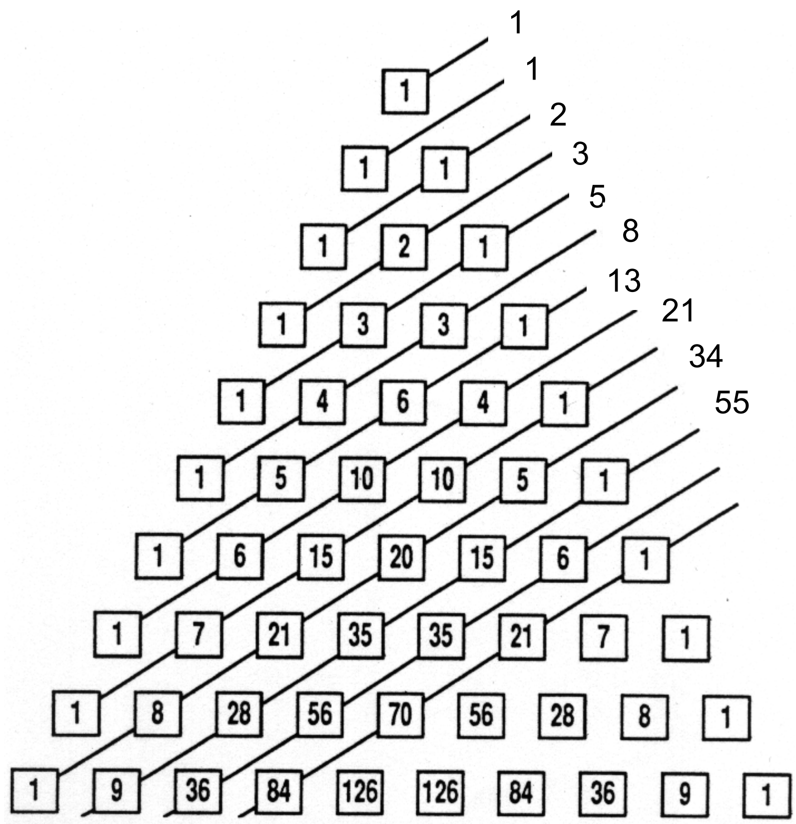


Abb. 3 Pascalsches Dreieck

Die Summe der Zahlen ergeben immer Fibonacci Zahlen.

Beweis:[23]

Die erste und zweite aufsteigende Diagonale besteht nur aus der Zahl eins, also F_1 und F_2. Es genügt zu zeigen, dass die Summe der Zahlen der (n-2)-ten und der (n-1)-ten gleich der Summe der Zahlen auf der n-ten Diagonale sind. Die (n-2)-te Diagonale enthält die Zahlen

$$\binom{n-3}{0}, \binom{n-4}{1}, \binom{n-5}{2}, \ldots$$

[23] [BIN]

Die (n-1)-te Diagonale enthält die Zahlen

$$\binom{n-2}{0},\quad \binom{n-3}{1},\quad \binom{n-4}{2},\ \ldots$$

Die Summe all dieser Zahlen ist daher:

$$\binom{n-2}{0}+\left[\binom{n-3}{0}+\binom{n-3}{1}\right]+\left[\binom{n-4}{1}+\binom{n-4}{2}\right]+\ldots$$

Allgemein gilt für Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n-2}{0}=\binom{n-1}{0}=1 \quad \text{und}$$

$$\binom{k}{i}+\binom{k}{i+1}=\frac{k(k-1)\ldots(k-i+1)}{1*2*\ldots*i}+\frac{k(k-1)\ldots(k-i+1)(k-i)}{1*2*\ldots*(i+1)}=$$

$$=\frac{k(k-1)\ldots(k-i+1)}{1*2*\ldots*i}*(1+\frac{k-i}{i+1})=$$

$$=\frac{k(k-1)\ldots(k-i+1)}{1*2*\ldots*i}*\frac{i+1+k-i}{i+1}=$$

$$=\frac{(k+1)k(k-1)\ldots(k-i+1)}{1*2*\ldots*i*(i+1)}=\binom{k+1}{i+1}$$

Für die oben berechnete Summe erhalten wir nun:

$$\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\ldots$$

Diese Summe entspricht genau der Summe der Zahlen auf der n-ten Diagonale.

q.e.d.

2.8 Das Zeckendorf Theorem

Die folgende sehr interessante Eigenschaft wurde nach dessen Entdecker, dem belgischen Mathematiker *Edouard Zeckendorf* (1901–1983), benannt. Sie besagt:

Jede natürliche Zahl N lässt sich eindeutig als Summe voneinander verschiedener, nicht direkt aufeinander folgender, Fibonacci Zahlen schreiben. Das heißt, es gibt für jedes N eine eindeutige Darstellung und zwar in der Form

$$N = \sum_{i=1}^{k} c_i F_i \qquad c_i \in \{0,1\};\ \forall i : c_i c_{i+1} = 0$$

Die entstehende Folge (c), bestehend nur aus Nullen und Einsen, wird als Zeckendorf-Sequenz bezeichnet. Da aufeinander folgende Fibonacci Zahlen ausgeschlossen sind, können keine zwei Einsen in einer Zeckendorf-Sequenz unmittelbar hintereinander stehen.[24]

2.9 Der geometrische Trugschluss

Teilt man ein Quadrat mit der Seitenlänge 13 so auf, wie in der folgenden Abbildung angegeben und setzt es zu einem neuen Rechteck mit den Seitenlängen 8 und 21 zusammen, so kann man ein komisches und zugleich sehr spannendes Phänomen beobachten. Dazu berechnet man die beiden

[24] [WFIBF]

Flächeninhalte: für das Quadrat ergibt dies 13² = 169 und für das Rechteck 8 * 21 = 168

WAS IST DA PASSIERT BZW. WO IST DER 1 CM² HINGEKOMMEN?

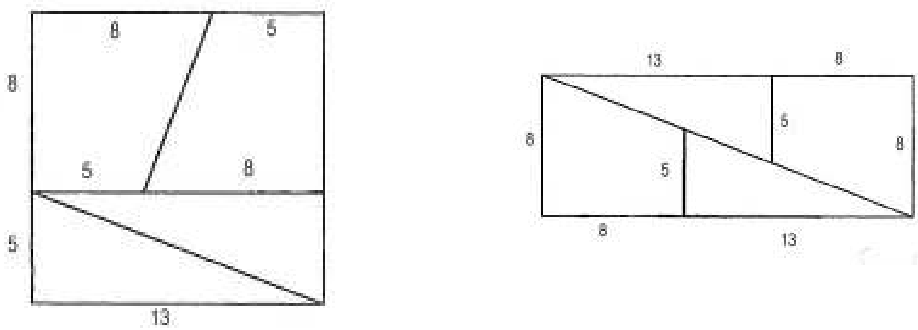


Abb. 4 Quadrat und Rechteck des geometrischen Trugschlusses

Man kann diesen Trugschluss jedoch auch verallgemeinern. Dieser Trugschluss kann nämlich mit jedem Quadrat vorgenommen werden, dessen Seitenlänge eine Fibonacci Zahl F_n ist. Da F_n die Summe der Fibonacci Zahlen F_{n-1} und F_{n-2} ist, kann man das Quadrat entsprechend aufteilen und wieder zu einem Rechteck zusammensetzen.[25]

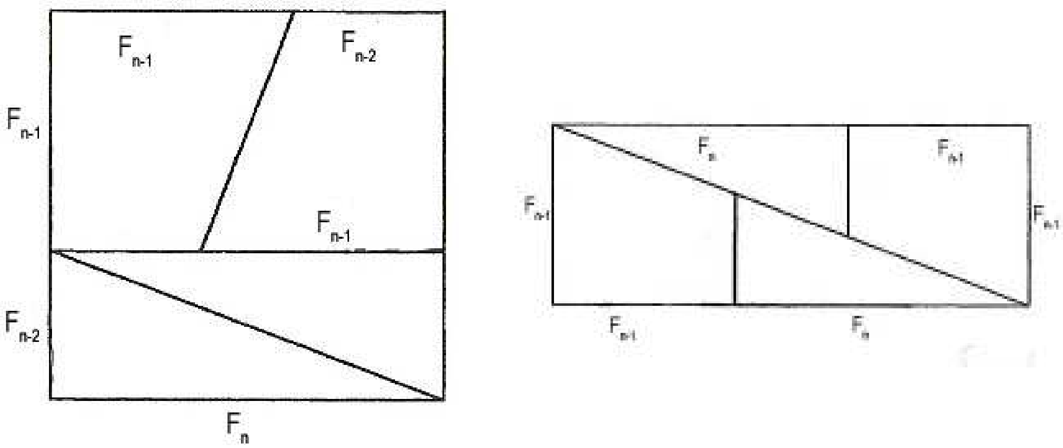


Abb. 5 Quadrat und Rechteck mit allgemeinen Fibonacci Zahlen

[25] [BEU]

Der Flächeninhalt des Quadrats ist F_n^2, der des Rechtecks ergibt sich als

$$(F_n + F_{n-1}) * F_{n-1} = F_{n+1} * F_{n-1}$$

Wie man sehen kann, unterscheiden sich diese beiden Flächeninhalte immer nur durch eine einzige Einheit (vgl. 2.4.4 Simpson Identität).
Der einzige Fehler kann nur darin liegen, dass das „Rechteck" eigentlich gar keines ist. Dies ist auch der Fall, denn beim Rechteck passen die Schnitte an den Diagonalen nicht 100-%-ig zusammen. Je nach verwendete Fibonacci Zahlen überlappen sich die einzelnen Teile dort mehr oder weniger bzw. es bleibt eine kleine, kaum sichtbare, Lücke übrig. Diese Lücke bzw. das überlappte Stück ergeben den Flächeninhalt der einen Einheit.

Die einzige Möglichkeit, ein Quadrat genauso wie oben zu zerschneiden, jedoch mit dem Unterschied, dass die Teile anschließend zu einem Rechteck zusammenpassen, besteht darin, die Seiten im Goldenen Schnitt zu teilen. Der Flächeninhalt ist dann in beiden Fällen gleich φ^2.

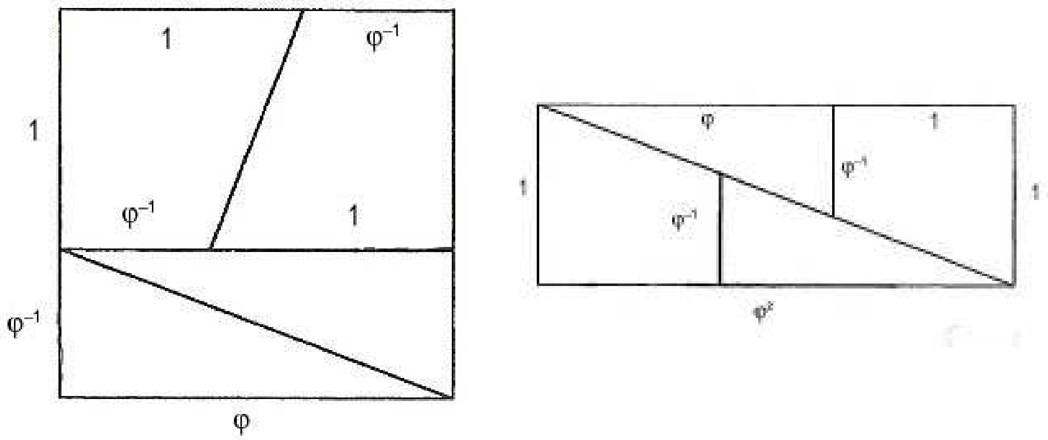


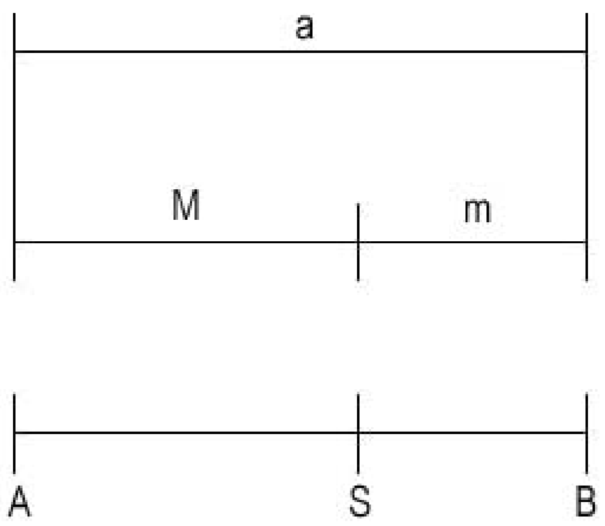
Abb. 6 Quadrat und Rechteck allgemeiner Beweis

3 DER GOLDENE SCHNITT

3.1 Definition des Goldenen Schnitts

Sei $\overline{AB}$ eine Strecke mit der Länge a. Ein Punkt S teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis des Goldenen Schnitts, falls sich die größere Teilstrecke (Major M) zur kleineren Teilstrecke (Minor m) genauso verhält, wie die Gesamtstrecke zum größeren Teil M.[26]

$$\mathbf{M : m = a : M}$$



Man kann auch den exakten Wert des Goldenen Schnitts ausrechnen. a ist laut Definition gleich M + m

[26] [PRE]

S teilt $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt[27]

$\Leftrightarrow$	$am = M^2$	(Definition des Goldenen Schnitts)
$\Leftrightarrow$	$(M + m)m = M^2$	(Einsetzen von $a = M + m$)
$\Leftrightarrow$	$M/m + 1 = (M/m)^2$	(Division durch m^2)
$\Leftrightarrow$	$(M/m)^2 - M/m - 1 = 0$	

Nach Lösen dieser quadratischen Gleichung (in der Unbekannten M/m) erhält man folgende zwei Lösungen und damit den exakte Wert des Goldenen Schnitts:

$$\frac{M}{m} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Da sowohl M als auch m positiv sind, kann die Lösung unserer Gleichung ebenfalls nur positiv sein. Die Lösung ist damit:

$$\frac{M}{m} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398874989484820458683436563811772030 9\ldots$$

Genau die gleiche Zahl wird zur expliziten Berechnung der Fibonacci Zahlen verwendet (vgl. Abschnitt 2.3 Explizite Berechnung – Formel von Moivre-Binet).

Im Anhang wird die Zahl φ mit 1764 Nachkommastellen angeführt (vgl. Abschnitt 5.2 φ auf 1764 Nachkommastellen).

Da viele Werke von *Phidias* (500–432 v. Chr.) das Verhältnis des Goldenen Schnitts beinhalten, führt der amerikanische Mathematiker *Mark Barr* die Bezeichnung φ (Phi) ein. $\overline{\varphi}$ wird für die zweite Lösung der Gleichung ($\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$) verwendet.

[27] [BEU]

In der Mathematik wird die Bezeichnung φ in vielerlei Hinsicht verwendet. Es kann damit

- der Vorgang der Teilung (S teilt die die Strecke $\overline{AB}$ im Goldenen Schnitt)
- der Teilungspunkt S oder
- die Zahl φ selbst

gemeint sein.

Um überprüfen zu können, ob ein Punkt auf einer Strecke die Strecke im Verhältnis des Goldenen Schnitts teilt, muss das Verhältnis der längeren Seite zur kürzeren Seite gleich 1,618 sein.

3.2 Geschichte und Bedeutung

Wer den Goldenen Schnitt wirklich entdeckt hat, ist bis heute noch unklar. Klar ist jedoch, dass 450 v. Chr. *Hippasos von Metapont* (lebte im späten 6. und frühen 5. Jahrhundert v. Chr.) als erster den Goldenen Schnitt an einem geometrischen Objekt erkannt hat. Er bemerkte das besondere Teilungsverhältnis der Diagonalen in einem Pentagramm. Jede Diagonale wird durch den Schnittpunkt mit den anderen Diagonalen in zwei Teile, einem kleineren und einem größeren, geteilt. Dabei verhält sich die größere zur kleineren Teilstrecke genauso wie die gesamte Diagonale zum größeren Teil der Diagonale.[28]

Die erste wissenschaftlich erhaltene Beschreibung des Goldenen Schnittes stammt von *Euklid von Alexandria* (365–300 v. Chr.). Euklid stieß bei den Untersuchungen für sein Buch über die fünf platonischen Körper auf das besondere Teilungsverhältnis. Er führte die Bezeichnung „Teilung im inneren und äußeren Verhältnis“ ein. Die Erkenntnisse von Euklid wurden zB beim Bau des Partheontempels in die Tat umgesetzt.

[28] [DRU]

In der Renaissance beschäftigten sich die Menschen sehr viel mit dem Goldenen Schnitt. Am bedeutendsten unter ihnen war sicher der Franziskanermönch *Luca Pacioli di Borgo San Sepolcro* (1445–1514). Er entdeckte beim Studium von Euklids Werken den Goldenen Schnitt und schrieb sein Wissen in zwei Büchern nieder. Das erste Werk beinhaltet den mathematischen Zugang zum Goldenen Schnitt, das zweite Werk hingegen behandelt bereits den Bezug zu Architektur, Kunst und zum menschlichen Körper.[29] *Luca Pacioli di Borgo* bat *Leonardo da Vinci* (1452–1519) um die Zeichnungen und Illustrationen in diesem Werk. Das berühmte Werk des vitruvianischen Menschen stammt aus diesem Buch. Luca gab der Teilung damals den Namen „göttliche Teilung“.

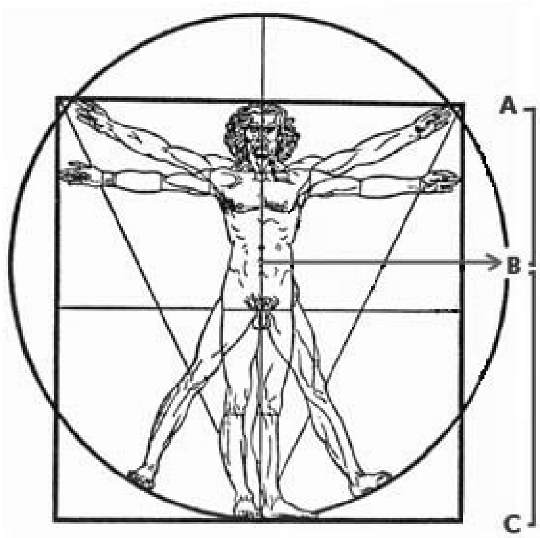


Abb. 7 Vitruvianischer Mensch

Die Renaissancezeit stellt die Blütezeit des Goldenen Schnittes dar. Viele Bauwerke, wie zB der Kölner Dom oder die Kathedrale Notre Dame de Paris, welche beide die goldenen Proportionen beinhalten, wurden gebaut. Bei den Malern war *Leonardo da Vinci* der bekannteste Vertreter.

Die erste exakte Berechnung des Goldenen Schnittes von ungefähr 1,6180340 führte 1957 der Tübinger Professor *Michael Maestlin* (1550–1631) durch. Er verfasste einen Brief an seinen Schüler *Johannes Kepler* (1571–1630), indem er diese Rechnung festhielt.

[29] [WGOL]

Die Bedeutung des Goldenen Schnittes in der Kunst und Wissenschaft nahm nach dem 17. Jahrhundert deutlich ab. Es gab jedoch immer wieder Autoren, die sich der Besonderheit des Goldenen Schnittes annahmen. So etwa *Adolf Zeising* (1810–1876), der in seinem Werk „Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers“ das Verhältnis des Goldenen Schnittes im menschlichen Körper suchte und schließlich auch überall fand.[30]
Der Rumäne *Matila Costiesco Ghyka* (1881–1965) verfasste mehrere Bücher, in denen er den Goldenen Schnitt als Geheimnis des Universums anführt und zahlreiche Beispiele aus der Natur erwähnt.[31]

1835 verwendete *Martin Ohm* (1792–1872; Bruder vom deutschen Physiker Georg Simon Ohm) die Bezeichnung des Goldenen Schnitts in einem mathematischen Lehrbuch zum ersten Mal.

Heute noch sind sich die WissenschaftlerInnen über die besondere Bedeutung des Goldenen Schnitts bewusst. Das Prinzip der einfachen, natürlichen und zugleich so besonderen Streckenteilung verblüfft bzw. fasziniert immer wieder von neuem.

Warum der Goldenen Schnitt bis heute so viel Anklang findet bzw. warum die Menschen den Goldenen Schnitt mit Schönheit verbinden, ist unklar. Selbst *Albrecht Beutelspacher* erkannte bereits, dass trotz vieler eindrucksvoller Beispiele und vieler theoretischer Untersuchungen eine einfache und rationale Erklärung für einen Zusammenhang zwischen Goldenen Schnitt und Ästhetik bis heute nicht gefunden wurde. [32]

3.3 Charakterstische Eigenschaften von φ

- $\varphi^2 = \varphi + 1$

Diese Aussage folgt unmittelbar aus der Definition des Goldenen Schnitts.

---

30 [SCHO]
31 [WGOL]
32 [BEU]

Beweis:[33]

Multipliziert man die Gleichung ($\varphi^2 = \varphi + 1$) mit $\frac{1}{\varphi}$, so ergibt sich:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

also

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1.$$

Daraus erhält man wiederum:

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

q.e.d.

- $\varphi + \frac{\boldsymbol{1}}{\varphi} = \sqrt{\boldsymbol{5}}$

Diese Formel kann man ganz leicht aus der vorherigen Eigenschaft herleiten.

Beweis:[34]

$$\varphi + \frac{1}{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}$$

q.e.d.

- ***φ^2 und jede ganzzahlige Potenz von φ lassen sich als Linearkombination von φ und 1 darstellen.***

Beispiel:

$$\varphi^4 - \varphi^{-2} = \varphi^2 * \varphi^2 - \frac{1}{\varphi} * \frac{1}{\varphi} = (\varphi+1)*(\varphi+1) - (\varphi-1)*(\varphi-1) =$$

$$= \varphi^2 + 2\varphi + 1 - (\varphi^2 - 2\varphi + 1) = 4\varphi.$$

---

[33] [BEU]
[34] [BEU]

- $\varphi^{n+2} + \varphi^{n+1} = \varphi^{n}$ (siehe [GIES])

Geht man von der Grundgleichung

$$\varphi^2 + \varphi = 1$$

aus und multipliziert diese mit φ, so erhält man

$$(\varphi^2 + \varphi) * \varphi = \varphi$$
$$\varphi^3 + \varphi^2 = \varphi$$

Wendet man dieses Verfahren nun öfters an, so erhält man erneut

$$\varphi^4 + \varphi^3 = \varphi^2 \text{ bzw.}$$
$$\varphi^5 + \varphi^4 = \varphi^3$$

Allgemein kann man sagen, dass gilt:

$$\varphi^{n+2} + \varphi^{n+1} = \varphi^{n}$$

- $\bar{\varphi} = -\frac{1}{\varphi}$

Beweis:[35]

$$\bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi$$

Laut Definition ist

$$\varphi = \frac{M}{m} = \frac{a}{m} = \frac{m+M}{m} = 1 + \frac{M}{m} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

[35] [WGOL]

Eingesetzt in die obige Formel ergibt dies

$$\bar{\varphi} = 1 - \varphi = 1 - (1 + \frac{1}{\varphi}) = -\frac{1}{\varphi}$$

q.e.d.

Ausgerechnet ist $\bar{\varphi}$ gleich -0,618033988… Man kann sehen, dass $\bar{\varphi}$ bis auf die Stelle vor dem Komma ziffierngleich mit φ ($\varphi - 1 = -\bar{\varphi}$) ist. Man sagt, dass $\bar{\varphi}$ die algebraisch konjugierte Zahl zu φ ist.

- $\boldsymbol{\frac{a}{m} = \varphi + 1}$

Beweis:[36]

Aus der Definition des Goldenen Schnittes ergibt sich:

$$
\begin{array}{lll}
 & M^2 = am & \\
\Leftrightarrow & (a - m)^2 = am & \text{(Einsetzen von } M = a - m\text{)} \\
\Leftrightarrow & (\frac{a-m}{m})^2 = \frac{a}{m} = \frac{a-m}{m} + 1 & \text{(Division durch } m^2\text{)} \\
\Leftrightarrow & \frac{a-m}{m} = \varphi & \text{(Hilfssatz: } \varphi^2 = \varphi + 1\text{)} \\
\Leftrightarrow & \frac{a}{m} = \frac{a-m}{m} + 1 = \varphi + 1 &
\end{array}
$$

q.e.d.

[36] [BEU]

3.4 Kettenbruchdarstellung

Bei Kettenbrüchen handelt es sich um die Simplifizierung des ursprünglichen Verhältnisses durch eine Aufschlüsselung in mehrere einfache Brüche. Der Zähler jedes einzelnen Bruches ist die Zahl eins. Im Bezug zur Zahl eins ist demnach jedes rationale Verhältnis darstellbar.[37]

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots + a_n}}}}.$$

Endet der Kettenbruch nach einer gewissen Anzahl von a_n, so nennt man diesen endlich. Interessanter sind jedoch die unendlichen Kettenbrüche. Wie der Name bereits sagt, enden diese Kettenbrüche nie.

Alle irrationalen Zahlen kann man in Form eines Kettenbruches an ihren tatsächlichen Wert mehr oder weniger exakt approximieren. Die Zahl, die mit Hilfe jenes Kettenbruches dargestellt wird, welcher nur aus lauter Einsen besteht, wird dabei als die irrationalste aller irrationalen Zahlen bezeichnet.

Auch die Zahl φ selbst ist eine irrationale Zahl. Wie wir wissen, gilt die folgende Beziehung:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

durch wiederholte Anwendung ergibt sich nun:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

[37] [STE]

Eine andere Ausdrucksweise für die gleiche Formel ist.[38]

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}$$

Wie wir nun sehen können, handelt es sich bei der Zahl φ genau um die oben bereits beschriebene **irrationalste aller irrationalen Zahlen**.[39] Bricht man diese Kettenbruchzerlegung an einer beliebigen Stelle ab, so erhält man stets einen Bruch aus zwei aufeinander folgenden Fibonacci Zahlen.

Zahlen, deren unendliche Kettenbruchdarstellung ab irgendeiner Stelle nur noch Einsen enthalten, bezeichnet man als **noble Zahlen**. Damit ist der Goldene Schnitt auch die nobelste Zahl.[40]

3.5 Konstruktionsarten bzw. -verfahren

Unter Konstruktionsverfahren versteht man in der Geometrie Verfahren, die sich auf die Verwendung von Zirkel und Lineal beschränken. Im Allgemeinen unterscheidet man zwei verschiedene Konstruktionsarten:[41]

- **Konstruktion des inneren Goldenen Schnitts**: die Strecke $\overline{AB}$ ist gegeben und man sucht einen Punkt S, der diese gegebenen Strecke im Goldenen Schnitt teilt (Konstruktion 1 und 2)

- **Konstruktion des äußeren Goldenen Schnitts**: es ist die Strecke $\overline{AS}$ gegeben und man sucht einen Punkt B derart, dass S die Strecke $\overline{AB}$ im Goldenen Schnitt teilt (Konstruktion 3 und 4)

[38] [STE]
[39] [STE]
[40] [WGOL]
[41] [BEU]

1. Konstruktion

- Man errichte auf der Strecke $\overline{AB}$ im Punkt B eine Senkrechte mit |AB|/2 (Punkt C)
- Der Kreis um C mit dem Radius |CB| schneidet $\overline{AC}$ im Punkt D
- Der Kreis um A mit dem Radius |AD| schneidet $\overline{AB}$ im Verhältnis des Goldenen Schnitts

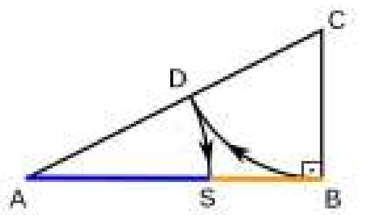


Abb. 8 Konstruktion 1

2. Konstruktion (Verfahren nach Euklid)

- Man errichte auf der Strecke $\overline{AB}$ im Punkt A eine Senkrechte mit |AB|/2 (Punkt C)
- Der Kreis um C mit dem Radius |CB| schneidet die Verlängerung von $\overline{AC}$ im Punkt D
- Der Kreis um A mit dem Radius |AD| teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis des Goldenen Schnitts

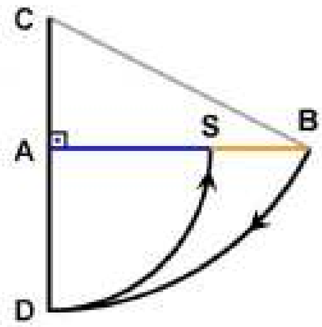


Abb. 9 Konstruktion 2
(Verfahren nach Euklid)

3. Konstruktion (Konstruktion nach Odom, 1982)

- Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck mit dem Umkreis K
- A und S sind die zwei Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten
- Die Verlängerung der Mittelparallele $\overline{AS}$ schneidet den Kreis im Punkt B. S teilt nun die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis des Goldenen Schnitts

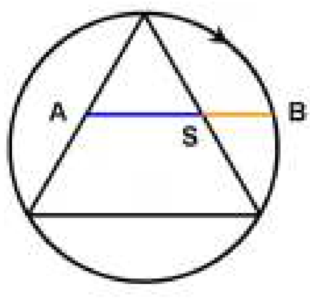


Abb. 10 Konstruktion 3
(Verfahren nach Odom)

Bei diesem Verfahren kann man auch mit der Strecke $\overline{AS}$ beginnen. Man konstruiere über der halben Strecke $\overline{AS}$ das in S rechtwinklige Dreieck mit dem Umkreismittelpunkt (Höhe: $\overline{AS}/2$, 2. Kathete: $\overline{AS}$).

4. Konstruktion

- Man errichte auf der Strecke $\overline{AS}$ im Punkt S eine Senkrechte mit der Länge |AS|
- Der Kreis um den Mittelpunkt M von $\overline{AS}$ mit dem Radius |MC| schneidet die Verlängerung von $\overline{AS}$ im Punkt B. S teilt nun $\overline{AB}$ im Verhältnis des Goldenen Schnitts

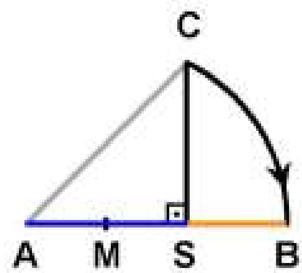


Abb. 11 Konstruktion 4

3.6 Der Goldene Zirkel

Im 19. Jahrhundert wurde der Goldene Zirkel das erste Mal verwendet. Er ist ein Zeichen- und Vermessungsinstrument, mit dem man einerseits entscheiden kann, ob ein Punkt eine vorgegebenen Strecke im Verhältnis des Goldenen Schnitts teilt und andererseits den Goldenen Punkt gleich selbst bestimmen kann.[42] Das einfachste Modell ist der **Reduktionszirkel** (vgl. Abb. 12 Reduktionszirkel). Seine beiden Schenkel sind x-förmig nach oben zu einem zweiten Zirkel verlängert. Die Schenkellängen sind so gewählt, dass das Verhältnis der beiden eingestellten Abschnitte den des Goldenen Schnitts bildet. Der erste Zirkel dieser Art wurde bei Ausgrabungen in Pompeji gefunden.

[42] [BEU]

Abb. 12 Reduktionszirkel

3.7 *Geometrische Betrachtungen*

3.7.1 Das Goldenes Dreieck

Ein Dreieck wird als **Goldenes Dreieck** bezeichnet, wenn es einerseits gleichschenklig ist und andererseits die Längen der Schenkel zur Länge der Grundseite des Dreiecks im Verhältnis des Goldenen Schnittes ($\varphi : 1$) zueinander stehen.[43] Die Seitenlängen betragen somit a und zweimal φa.

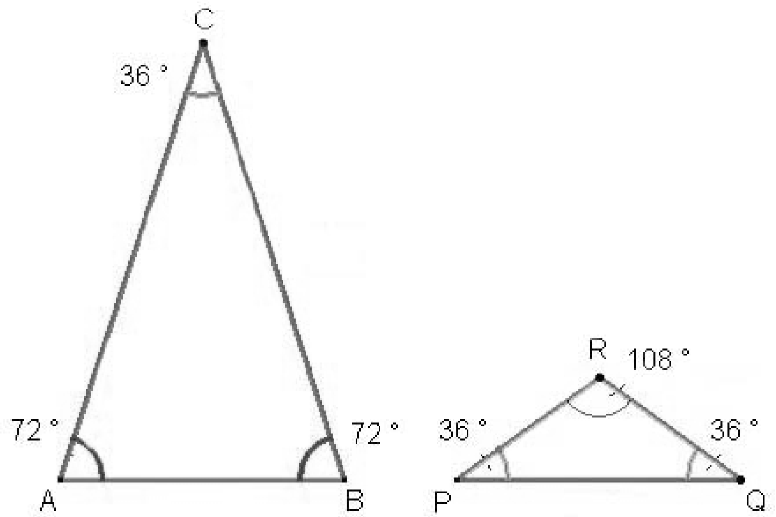


Abb. 13 Goldene Dreiecke

[43] [BEU]

Die Konstruktion des Goldenen Dreiecks kann mit Zirkel und Lineal erfolgen (vgl. Abschnitt 3.3 Konstruktion nach Odom). Das Goldene Dreieck kommt im Pentagon und im Pentagramm vor.

3.7.2 Die regulären Fünfecke – Pentagramm, Pentagon

Das reguläre Fünfeck ist jenes mathematische Objekt, das den größten Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt aufweist. Vor allem beim Pentagramm, einem der ältesten magischen Symbole der Welt, steht jede Strecke bzw. Teilstrecke zu einer anderen Strecke im Verhältnis des Goldenen Schnittes.[44] Insgesamt kann man das Phänomen des Goldenen Verhältnisses zehnmal finden.

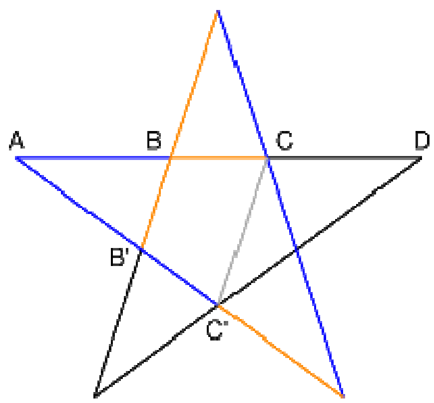


Abb. 14 Pentagramm

Die Strecken, die von Spitze zur Spitze führen, schneiden sich genau im Golden Schnitt. In der Mitte des Pentagramms kann man ebenso ein regelmäßiges Fünfeck finden, das Pentagon. Hierbei sind alle Seiten und die Diagonalen gleich lang bzw. alle Innenwinkel gleich groß, nämlich 108°. Die Diagonalen teilen sich paarweise im Goldenen Verhältnis.

[44] [WGOL]

Im Pentagramm bzw. im Pentagon findet man viele verschiedene Goldene Dreiecke. Zum Beispiel bildet jede Sternspitze des Pentagramms ein Goldenes Dreieck.

Die folgenden exemplarischen Abbildungen zeigen das zahlreiche Vorkommen des Goldenen Dreiecks im Pentagramm bzw. im Pentagon.

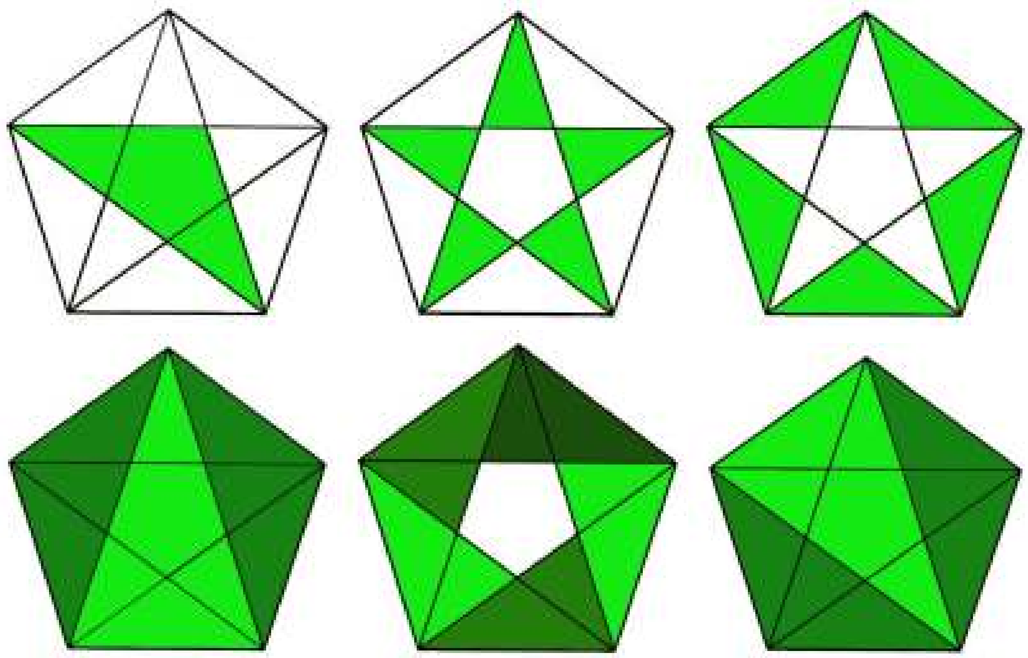


Abb. 15 Pentagon mit eingeschriebenen Goldenen Dreiecken

3.7.3 Das Goldenes Rechteck

Ein Rechteck wird als **Goldenes Rechteck** bezeichnet, wenn die Längen der beiden Seiten im Verhältnis des Goldenen Schnittes (φ : 1) stehen.[45]
Die Konstruktion des Goldenen Rechtecks kann mit Zirkel und Lineal erfolgen (vgl. Abschnitt 3.3 Konstruktion Nr. 4).

[45] [BEU]

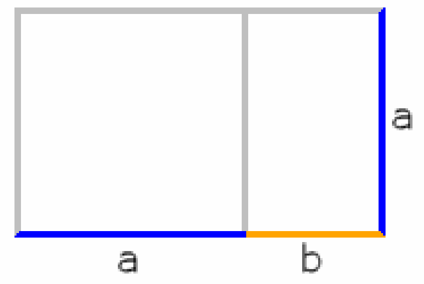


Abb. 16 Goldenes Rechteck

Wenn man von einem beliebigen goldenen Rechteck das größtmögliche Quadrat abspaltet, entsteht wieder ein neues goldenes Rechteck. Dieses „kleinere“ Rechteck hat nun die Seitenlängen a und φa – a (= b).

Die fünf platonischen Körper (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder) bestehen immer aus Goldenen Dreiecken, Rechtecken bzw. Fünfecken.

3.7.4 Die Goldene Spirale

Bei der Konstruktion einer Goldenen Spirale geht man ganz zu Beginn von einem Goldenen Rechteck aus. Dieses Rechteck wird in das größtmögliche Quadrat und wiederum einem Goldenen Rechteck unterteilt. Das kleinere Rechteck wird erneut in das größtmögliche Quadrat bzw. ein Goldenes Rechteck unterteilt. Dieses Verfahren kann beliebig lange wiederholt werden. Wichtig dabei ist jedoch, dass die Quadrate immer auf der linken Seite des Rechtecks abgeschnitten werden.
Zeichnet man nun mit Hilfe eines Zirkels in jedes Quadrat einen Viertelkreis, so erhält man die **Goldene Spirale**. Der Radius jedes Viertelkreises ändert sich bei jedem Quadrat genau um den Faktor φ.

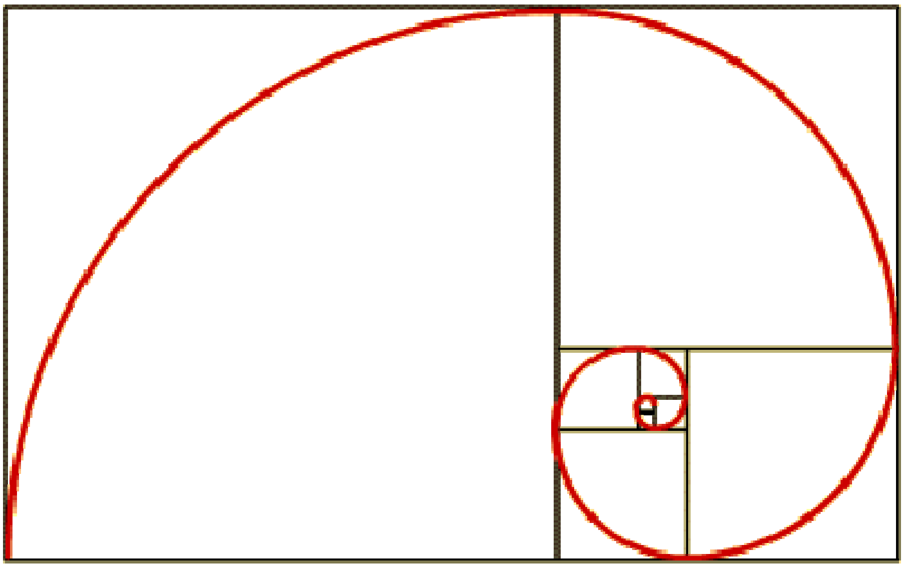


Abb. 17 Goldene Spirale

In der Natur kann man die Goldene Spirale bei einigen Tierarten mit schneckenförmigen Kalkgehäusen, wie zB der Nautilus (vgl. Abschnitt 4.2.1 Tierwelt), beobachten.

3.7.5 Der Goldene Winkel

Den **Goldenen Winkel** Φ erhält man, indem man die 360° des Vollkreises im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilt.[46] Dadurch erhält man zwei verschiedene Winkel, einen größeren Φ_1 und einen kleineren Φ_2.

$$\Phi_1 = \frac{360°}{\varphi} = 222{,}5°$$

$$\mathbf{\Phi_2} = \mathbf{360° - \frac{360°}{\varphi} = 137{,}5°}$$

46 [WGOL]

In der Praxis wird der kleinere der beiden Winkel (Φ_2) als der Goldene Winkel bezeichnet.

Der Goldene Winkel findet in der Natur häufig Anwendung. Vor allem die Blattstängel von Blumen stehen in einem Winkel von 137,5° zueinander. Dadurch wird der optimale Lichteinfall für Blätter garantiert (vgl. Abschnitt 4.2.4 Phyllotaxis – Blattanordnung).

3.8 Zusammenhang Fibonacci Zahlen und Goldener Schnitt

Den immer wieder auftauchenden Zusammenhang zwischen den Fibonacci Zahlen und dem Goldenen Schnitt kann man auf verschiedenste Art und Weise, sowohl geometrisch als auch rechnerisch, zeigen. Genau dieser Zusammenhang wird nun in den beiden folgenden Abschnitten dargestellt.

3.8.1 Geometrischer Zusammenhang

Den geometrischen Zusammenhang kann man mit Hilfe der Goldenen Spirale zeigen:
Die Konstruktion beginnt diesmal allerdings von innen. Man zeichnet zwei Quadrate mit der Seitenlänge eins, daran wird ein Quadrat mit der Seitenlänge zwei angehängt, dann wieder eines mit der Seitenlänge drei, anschließend welche mit den Seitenlängen fünf, acht, dreizehn, usw.[47]
Wie man sehen kann, entsteht eine Goldene Spirale und die Seitenlängen der Quadrate entsprechen immer jenen von Fibonacci Zahlen.

[47] [GIES]

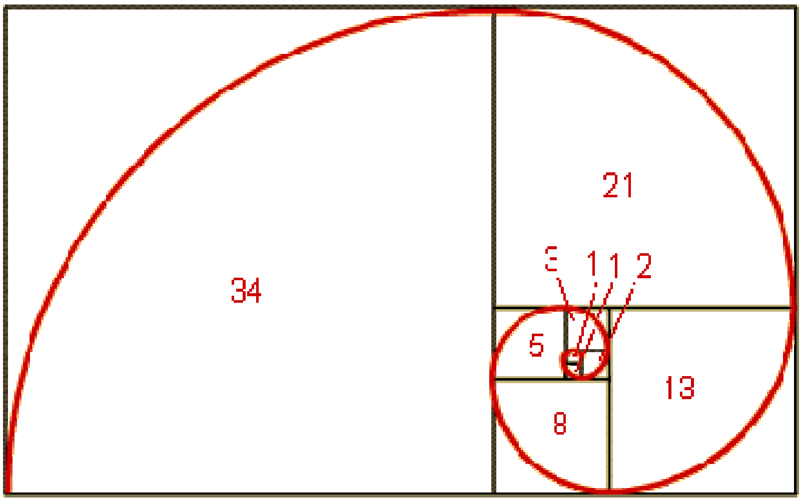


Abb. 18 geometrischer Zusammenhang zwischen Fibonacci Zahlen und Goldenem Schnitt

3.8.2 Rechnerischer Zusammenhang

Die Grundgleichung kann umgeschrieben werden in

$$1-\varphi=\varphi^2$$

Zieht man nun auf beiden Seiten φ ab und wendet die Formel ($\varphi^{n+2}+\varphi^{n+1}=\varphi^{n}$) an, so erhält man

$$1-2\varphi=\varphi^2-\varphi=\varphi^3$$

Addiert man nun diese zwei Gleichungen, so kommt man zu folgendem Ergebnis

$$2-3\varphi=\varphi^2-\varphi^3$$

Wie wir ja wissen, ist $\varphi^2-\varphi^3=\varphi^4$. Durch eine erneute Addition der beiden letzten Gleichungen erhält man

$$3-5\varphi=-\varphi^3+\varphi^4=-\varphi^5$$

Dieses Verfahren kann beliebig oft fortgesetzt werden. Die Ergebnisse lauten:

$$5-8\varphi=\varphi^{6}$$

$$8-13\varphi=-\varphi^{7}$$

$$13-21\varphi=\varphi^{8}$$

Wie man sehen kann, erscheinen nach und nach immer Fibonacci Zahlen.
Allgemein kann man sagen, dass

$$F_{n-1}=F_{n}*\varphi=(-\varphi)^{n}$$

Der zweite rechnerische Zusammenhang sieht folgendermaßen aus. Zuerst betrachten wir einmal das Verhältnis zweier aufeinander folgender Fibonacci Zahlen.

Nenner	**Zähler**	**Verhältnis**	**Abweichung zu φ in %**
1	1	1,000000	-38,1966
1	2	2,000000	23,6068
2	3	1,500000	-7,2949
3	5	1,666667	3,00566
5	8	1,600000	-1,11456
8	13	1,625000	0,43052
13	21	1,615385	-0,16374
21	34	1,619048	0,06265
34	55	1,617647	-0,02392
55	89	1,618182	0,00914
89	144	1,617977	-0,00349
144	233	1,618056	0,00133

Tab. 1 Quotienten zweier aufeinander folgender Fibonacci Zahlen

Die Vermutung ist, dass das Verhältnis zweier aufeinander folgender Fibonacci Zahlen gegen den Goldenen Schnitt strebt.

Beweis:[48]

Nach der Rekursionsgleichung lässt sich der Quotient zweier aufeinander folgender Fibonacci Zahlen folgendermaßen berechnen

$$
\begin{aligned}
& F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\
\Rightarrow \quad & \frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \\
& = 1 + \frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}} \\
& = 1 + \frac{1}{1 + \frac{F_{n-3}}{F_{n-2}}} \\
& = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{F_{n-2}}{F_{n-3}}}} \\
& = \ldots
\end{aligned}
$$

Dieser Wert ist aber nichts anderes als ein Näherungswert für den Goldenen Schnitt. Daraus folgt, dass der Quotient zweier aufeinander folgender Fibonacci Zahlen für $n \to \infty$ gegen den Goldenen Schnitt konvergiert.

q.e.d.

48 [MATH]

4 Die Fibonacci Zahlen und der Goldene Schnitt im täglichen Leben

Das Vorkommen der Fibonacci Zahlen bzw. des Goldenen Schnitts im täglichen Leben wurde von vielen ForscherInnen untersucht. Dabei kamen diese zu erstaunlichen und außergewöhnlichen Ergebnissen. Es ist kaum zu glauben, wie oft wir im täglichen Leben mit diesen beiden Besonderheiten konfrontiert werden und es eigentlich nicht bewusst wahrnehmen.
In diesem Kapitel werden nun einige Bereiche genauer betrachtet.

4.1 Architektur bzw. Kunst

4.1.1 Architektur

Die Proportionen des Goldenen Schnitts wurden früher vermutlich oft unbewusst verwendet. Heute dagegen wird bewusst auf dieses Verhältnis zurückgegriffen, da es Menschen als Ausdruck der Vollkommenheit bzw. Schönheit emfpinden.

Beispiele für die wahrscheinlich unbewusste Verwendung des Goldenen Schnitts stellen der Parthenon Tempel auf der Athener Akropolis, die Kathedrale Notre Dame de Paris, der Dom von Florenz oder die Torhalle in Lorsch dar. WissenschaftlerInnen haben diese Bauwerke auf das besondere Teilungsverhältnis untersucht und wurden fündig. Da man in den Bauplänen keinen Hinweis auf die Verwendung des besonderen Teilungsverhältnisses fand, geht man heute davon aus, dass den Bauherren nicht bewusst war, welches Verhältnis sie verwendeten.

Die **Kuppel des Dom von Florenz** (vgl. Abb. 19 Kuppel des Dom von Florenz) ist, wie oben bereits beschrieben, ein gutes Beispiel dafür. Die ursprünglichen Maße betragen für die Höhe der Kuppel 144 Bracci (1 Braccio = 58,4 cm) und für den Ansatz der Kuppelwölbung 89 Bracci. Damit teilt der Kuppelansatz die Gesamthöhe im Verhältnis 89 : 55, also fast genau im Verhältnis (siehe Abschnitt 3.8.2 Rechnersicher Zusammenhang – Tab. 2 Quotienten zweier aufeinander folgender Fibonacci Zahlen) des Goldenen Schnitts.[49]

Abb. 19 Kuppel des Dom von Florenz

Ein weiteres Beispiel ist der **Parthenon Tempel in Athen**. Phidias zeichnete damals die Pläne zu diesem Bauwerk.
Die Vorderfront des Tempels passt perfekt in die eines Goldenen Rechtecks. Die Höhe des Unterbaus (beinhaltet die Säulen plus die Stufen) verhält sich zu der Höhe des Überbaus (reicht vom Giebel bis zu den tragenden Säulen) wie 1 : 1,618 und die dorischen Säulen im Vordergrund sind ebenfalls nach diesem Verhältnis angeordnet (vgl. Abb. 20 Parthenon Tempel in Athen).

[49] [STE]

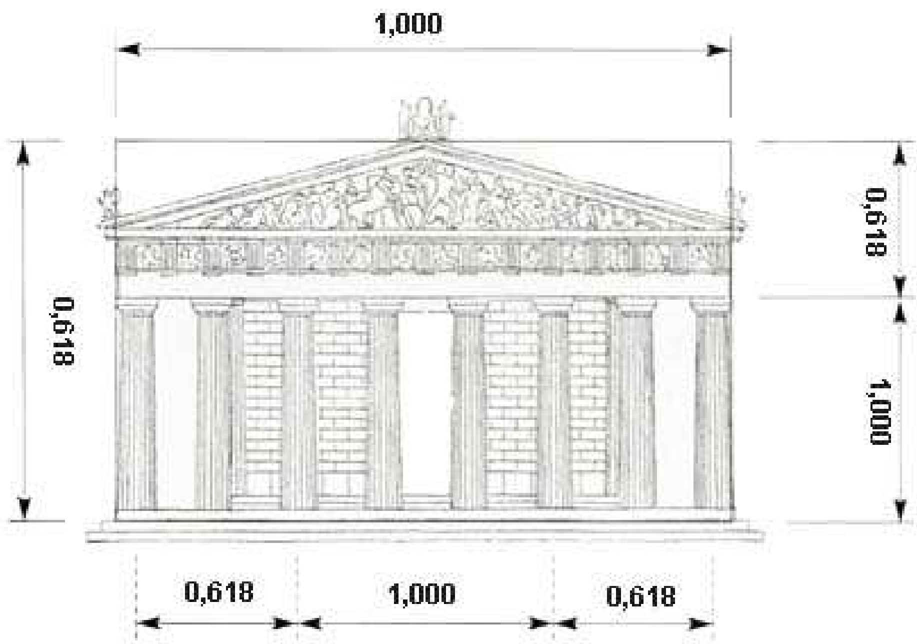


Abb. 20 Parthenon Tempel in Athen

Sogar in der **Cheopspyramide**, auch **große Pyramide von Gizeh** genannt, die vor mehr als 6000 Jahren erbaut wurde, finden sich die Proportionen der Zahl Phi immer wieder. Die Cheopspyramide ist Ausdruck der hoch stehenden Kultur der Ägypter. Ihre nahezu perfekte Ausrichtung nach den vier Himmelsrichtungen und die mehrfache Wiederholung bestimmter Größenverhältnisse in ihrem Aufbau lassen darauf schließen, dass sie nach vorher kalkulierten geometrischen Prinzipien gebaut wurde.[50]

Der Neigungswinkel der Cheopspyramide ist $\alpha = 51°50'$. Der Kosinus dieses Winkels beträgt 0,618. Auch das Verhältnis der Länge der Pyramidenseite zur Hälfte der Pyramidenbasis ist genau 1,618.

[50] [KAP]

Abb. 21 Cheopspyramide

Der **Konstantinbogen in Rom** ist eine Fundgrube an Goldenen Proportionen. Der Gesamtumriss des Triumphbogens entspricht denen von zwei Goldenen Rechtecken. Auch in der Vertikalen und in der Horizontalen wurde das Verhältnis beim Bau berücksichtigt (vgl. Abb. 4.22 Konstantinbogen in Rom).[51]

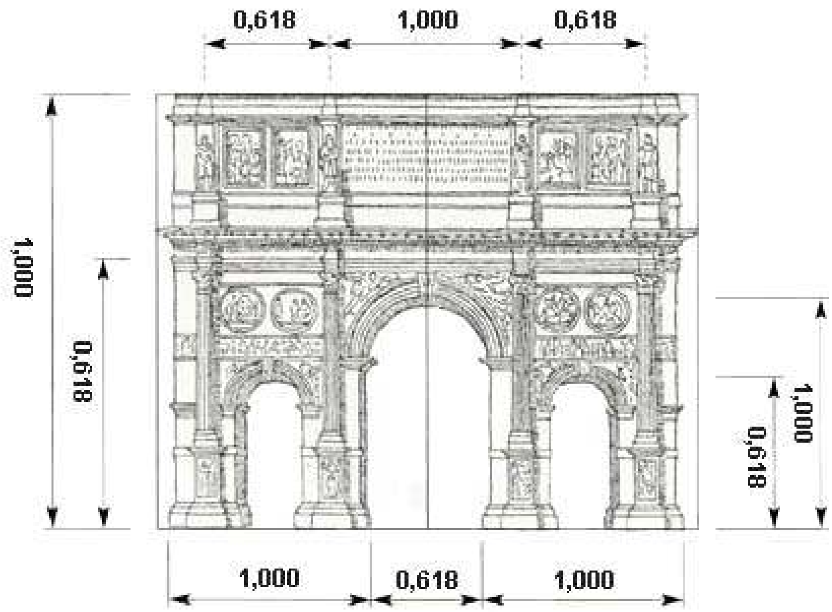


Abb. 22 Konstantinbogen in Rom

51 [BERN]

Weitere berühmte Bauwerke sind die Steinmonumente bei Salisbury in England, die **Stonehenge,** oder das **Leipziger Rathaus**, bei dem bewusst das Verhältnis des Goldenen Schnitts beim Bau umgesetzt wurde. Dabei teilt der Turm die Länge des Leipziger Rathaus im Verhältnis 1 : φ.

Abb. 23 Rathaus in Leipzig

Der Architekt *Le Corbusier* (1887–1965) verwendete beim Bau seiner Objekte in vielfältigster Weise den Goldenen Schnitt. Zwei Beispiele dazu sind die Kapelle **Notre-Dame-du-Haut** in Ronchamp (vgl. Abb. 25 Querschnitt des Notre-Dame-du-Haut) und die **Unité d'Habitation** in Marseille (vgl. Abb. 26 Unité d'Habitation in Marseille).

Abb. 24 Notre-Dame-du-Haut

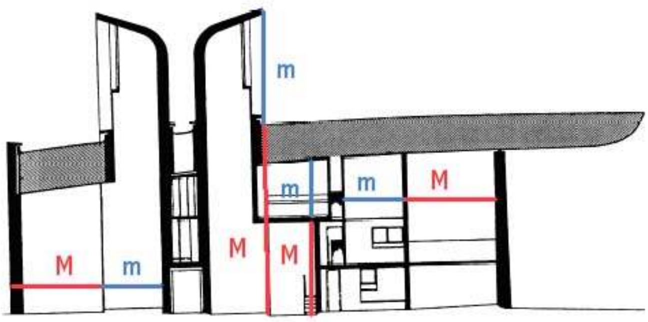


Abb. 25 Querschnitt der Kapelle Notre-Dame-du-Haut

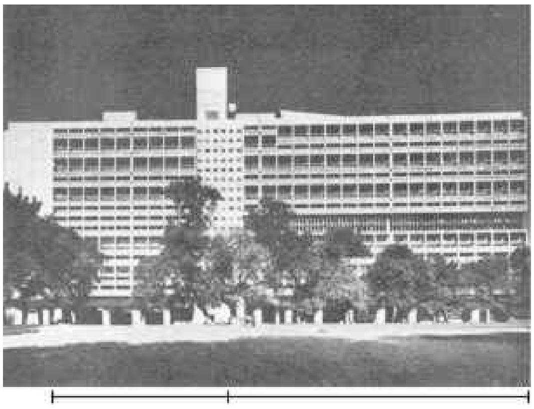


Abb. 26 Unité d'Habitation in Marseille

Die Proportionen des Goldenen Schnitts können auch im **korinthischen Kapitell** gefunden werden. Dabei umgibt der Goldene Schnitt das Kapitell wie eine Aura (vgl. Abb. 27 Korinthisches Kapitell).[52]

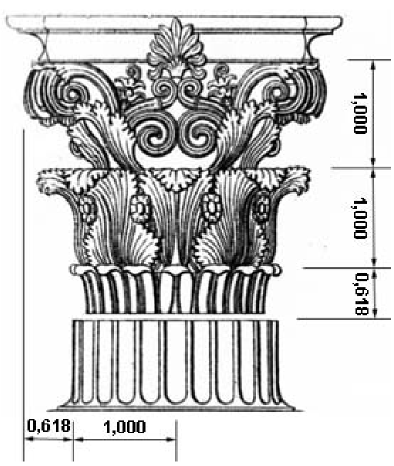


Abb. 27 Korinthisches Kapitell

[52] [KAP]

4.1.2 Kunst

An vielen Gemälden bzw. Plastiken konnte der Goldene Schnitt nachgewiesen werden. Dabei zeigen sich vor allem im Grundaufbau der Gemälde die Proportionen des Goldenen Schnitts. So zum Beispiel in *Leonardo da Vincis* **„Das Abendmahl“**, *Albrecht Dürers* **„Selbstbildnis“** oder *Raffaels* (1483–1520) **„Die Sixtinische Kapelle“**.

Albrecht Dürer (1471–1528) beschäftigte sich sehr stark mit den mathematischen Grundlagen der menschlichen Gestalt. Allerdings wird der Goldene Schnitt in seinen theoretischen Abhandlungen nicht erwähnt, obwohl er in vielen seiner Werke nachweisbar ist, wie zB im "**Selbstbildnis im Pelzrock**" (um 1500 entstanden).

- der Kopf mit den langen Haaren bildet ein Dreieck (vgl. Abb. 28 Selbstbildnis von Albrecht Dürer)
- die Basis dieses Dreiecks teilt die Höhe des Bildes im Goldenen Schnitt
- die Linie trifft in der Mitte mit der Spitze des weißen Hemds zusammen
- die senkrechten Linien, die das Gesicht einrahmen, teilen die Breite des Bildes im Goldenen Schnitt

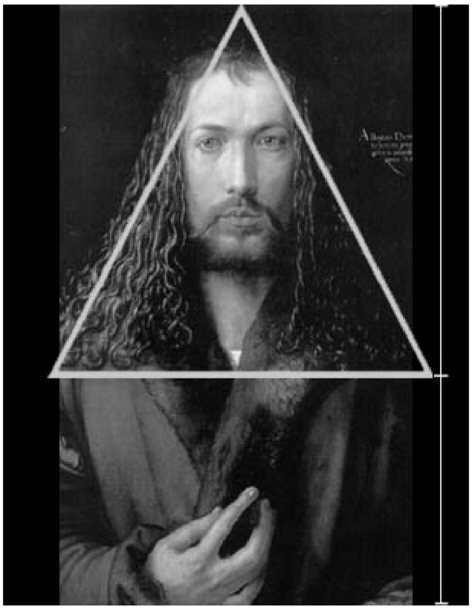


Abb. 28 Selbstbildnis von Albrecht Dürer

Leonardo da Vinci war mit dem Goldenen Schnitt sehr eng vertraut. Da er ja die Abbildungen zu *Luca Paciolos* Werk (vgl. Abschnitt 3.1 Geschichte und Bedeutung) anfertigte, ist es nicht unwahrscheinlich, das Leonardo die Proportionen bei der Gestaltung seiner Bilder heranzog. So wurde auch sein bekanntestes Werk **„Mona Lisa"** dahingehend untersucht. Es gibt mehrere Meinungen darüber:

Einige sagen, dass sich in das Bild ein Goldenes Dreieck einschreiben lässt, dessen Basislänge der Bildrahmen ist. *Friedrich Schulz* schreibt, dass die drei Hauptfelder der Mona Lisa, nämlich

- die untere Schattenseite der Loggia
- das besonnte bräunliche Mittelfeld von der Brüstung der Loggia bis zur Silhouette der Vorgebirge und
- die in blaugrünen Dunst gehüllte Hochgebirgszone

mit Hilfe des Goldenen Schnitts proportioniert worden sind. [53]

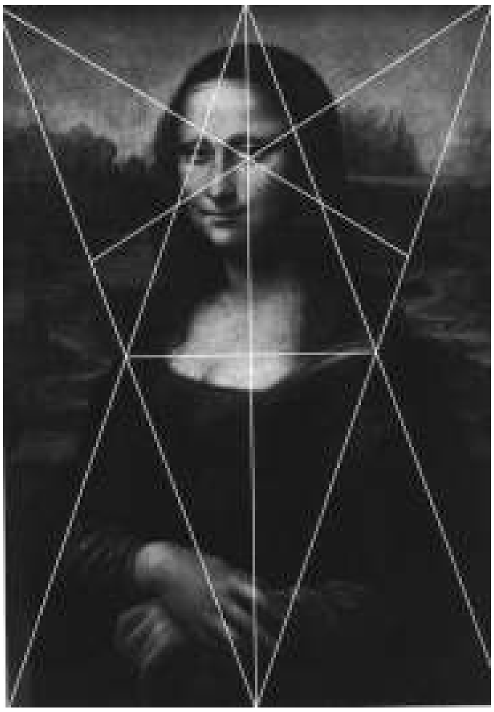


Abb. 29 Mona Lisa

[53] [SCHU]

Einige Künstler der Neuzeit, wie etwa *Piet Mondrian* (1872–1944), *Paul Signac* (1863–1965), *Georges Seurat* (1859–1891) oder aber *Hergé* (1907–1983) setzten bei ihren Gemälden bewusst die Proportionen des Goldenen Schnitts ein.

Aber auch in der Fotografie wird das Verhältnis von 1,618 des öfteren verwendet. Zwei Beispiele sollen hier nur exemplarisch gezeigt werden:

Abb. 30 Fotografien in der Neuzeit

Der Goldene Schnitt wird in diesen beiden Bildern durch die beiden relativen Anteile 62% und 38% der Bildbreite bzw. -höhe näherungsweise dargestellt.

Ein sehr lustiges und zugleich interessantes Beispiel ist **Obelix** aus der Zeichentrickserie Asterix und Obelix. 1961 entwarf *Alberto Uderzo* (1927 geboren) die Figur Obelix und setzte dabei bewusst auf die Proportionen des Goldenen Schnitts (vgl. Abb. 31 Obelix).

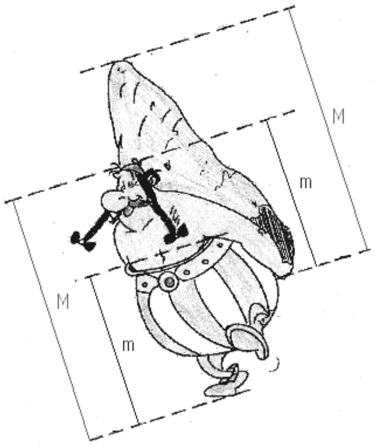


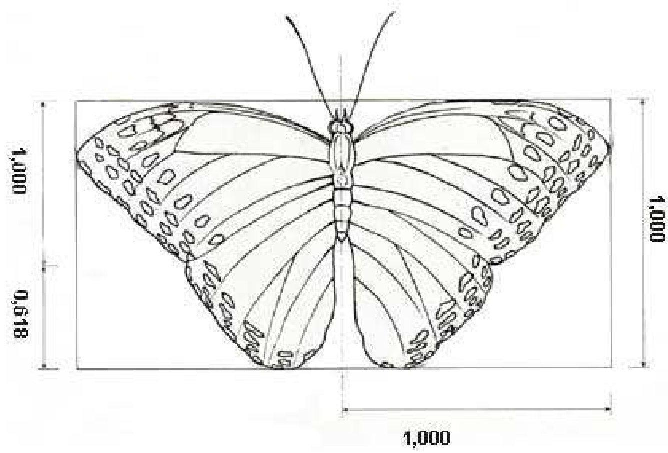
Abb. 31 Obelix

4.2 Natur

4.2.1 Tierwelt

Man glaubt es kaum, aber bei sehr vielen Lebewesen der Tierwelt kann man verschiedenste Ausprägungen des Goldenen Schnitts bewundern.

So wurde festgestellt, dass sich bei einigen **Schmetterlingen** (wie zB dem Trauermantel, dem Himmelsfalter, dem Schwalbenschwanz, dem Tagpfauenauge, usw.) die einzelnen Flügel im Verhältnis 1 : φ teilen (vgl. Abb. 32 Himmelsfalter).



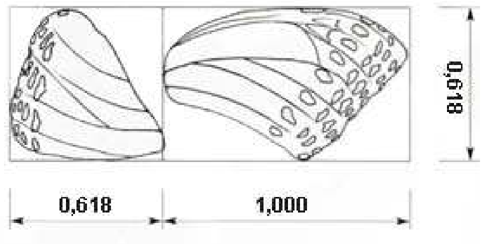


Abb. 32 Himmelsfalter

Auch bei einigen Käferarten, wie zB dem **Hirschkäfer**, wurde Erstaunliches nachgewiesen. So verhält sich der Hinterleib zum Vorderleib genauso wie der Vorderleib zum Geweih, nämlich genau im Goldenen Schnitt (vgl. Abb. 33 Hirschkäfer).[54]

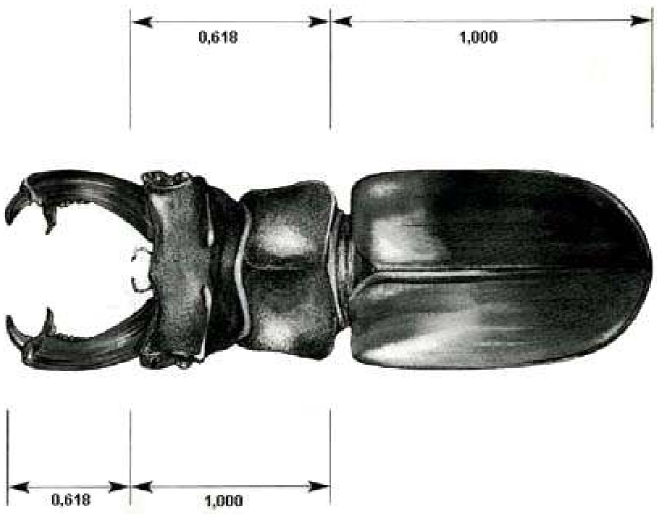


Abb. 33 Hirschkäfer

Auch bei Lebewesen im Wasser macht dieses Phänomen keinen Halt. Man kann es kaum glauben, aber auch beim **Hummer** finden sich diese Proportionen wieder. Der gesamte Körper des Hummers (sogar bis in die vordersten Zangen) ist auf diesem Verhältnis aufgebaut (vgl. Abb. 34 Hummer).

[54] [KAP]

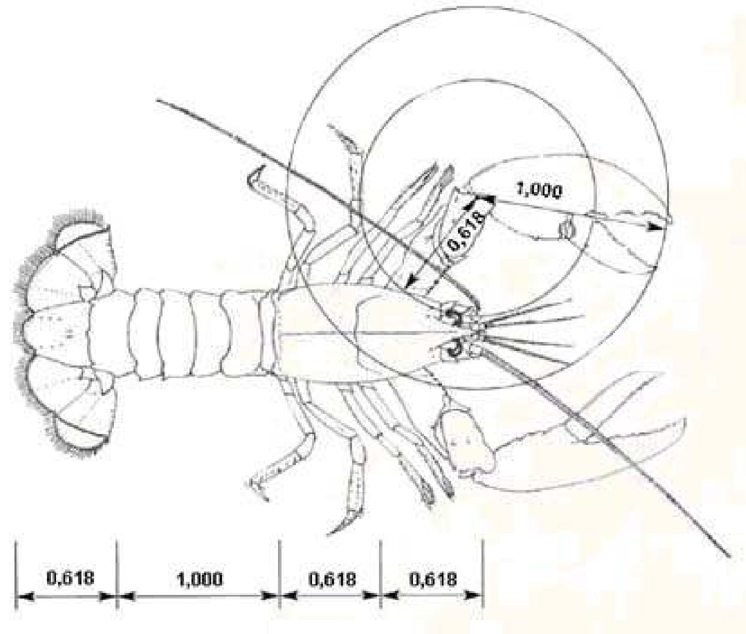


Abb. 34 Hummer

Der Umriss der **Seezunge** kann in zwei Goldene Rechtecke eingeschrieben werden (vgl. Abb. 35 Seezunge).

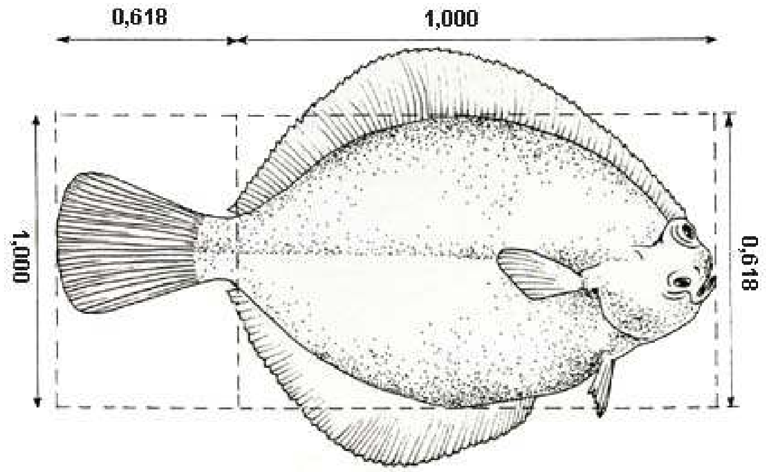


Abb. 35 Seezunge

Auch die Goldene Spirale ist in der Tierwelt oft vertreten. So wird zB die Schale der **Seeschnecke Nautilus** aus einer Goldenen Spirale gebildet (vgl. Abb. 4.5 Seeschnecke Nautilus).

Abb. 36 Seeschnecke Nautilus

4.2.2 Sonnenblumen

Betrachtet man die Samenkörner einer Sonnenblume genauer, so kann man feststellen, dass die Kerne immer in einer spiralförmigen Linie angeordnet sind. Dabei bilden sie zwei Gruppen von Spiralen, die einen sind im Urzeigersinn (rechtsdrehende Spiralen) und die anderen sind gegen den Uhrzeigersinn (linksdrehende Spiralen) gekrümmt (vgl. Abb. 37 Sonnenblumenspiralen).

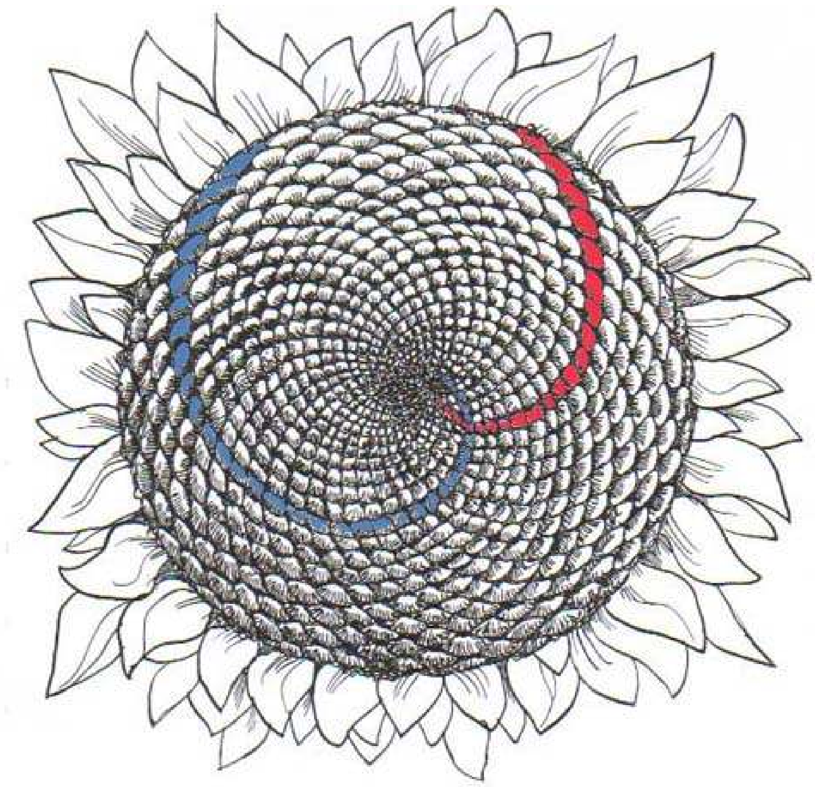


Abb. 37 Sonnenblumenspiralen

Zählt man nun diese links- und rechtsdrehenden Spiralen, so stellt man fest, dass es sich in ca. 95 % aller Fälle um zwei aufeinander folgende Fibonacci Zahlen handelt. [55]
In den meisten Fällen erhält man beim Zählen im äußeren Bereich der Sonnenblumen 34 und 55 Spiralen, bei etwas größeren Exemplaren auch 55 und 89. Es gibt jedoch auch Sonnenblumen mit 89 und 144 Spiralen.
Im November 1951 berichtete ein Ehepaar aus New York, dass sie auf ihrer Farm in Vermont eine Mammut-Sonnenblume mit 144 und 233 Spiralen gefunden hätten.[56]

Unsere Sonnenblume in Abbildung 37 enthält 21 rechtsdrehende und 34 linksdrehende Spiralen.

4.2.3 Ananas und Fichtenzapfen

Auch bei der Anordnung der Schuppen bei **Fichtenzapfen**, der Anordnung der Außenzellen bei der **Ananas** oder bei der Anordnung der Stacheln bei **Kakteen** treten immer wieder Fibonacci Zahlen auf.

Betrachtet man diese Objekte etwas genauer, so kann man genauso wie bei Sonnenblumen sowohl links- als auch rechtsdrehende Spiralen erkennen. Wenn man nun die Anzahl der Spiralen bestimmt, handelt es sich dabei immer um zwei aufeinander folgende Fibonacci Zahlen (vgl. Abb. 38 Spiralenbildung der Ananas).

[55] [IJON]
[56] [BIN]

Abb. 38 Spiralbildung der Ananas

4.2.4 Phyllotaxis – Blattanordnung

Das wahrscheinlich interessanteste Beispiel für die Umsetzung des Goldenen Schnitts in der Natur findet man bei der Anordnung der Blätter (Phyllotaxis) und in den Blütenständen mancher Pflanzen.

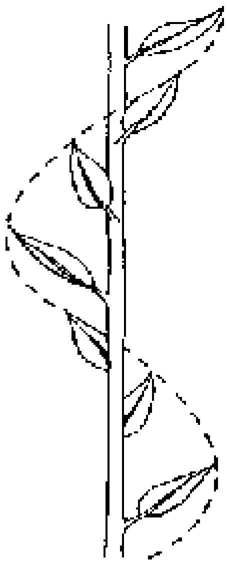


Abb. 39 Blattanordnung bei Pflanzen

In der Natur kann man folgendes Phänomen beobachten:[57]

- bei der Ulme oder der Linde stehen die Blätter eines Zweiges abwechselnd auf der einen und auf der entgegen gesetzten Seite; dies wird **1/2-Phyllotaxis** genannt
- bei der Buche oder der Haselnuss kommt es zu einer schraubenartigen Drehung um ein Drittel; dies ist eine **1/3-Phyllotaxis**
- Aprikose, Apfelbaum und Eiche weisen eine **2/5-Phyllotaxis** auf
- Pappel und Birnbaum bilden eine **3/8-Phyllotaxis** und
- Weide und Mandelbaum eine **5/13-Phyllotaxis**

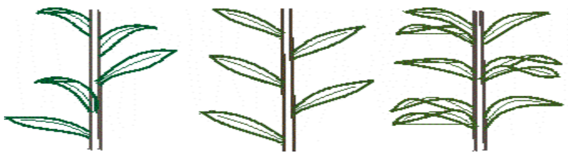


Abb. 40 1/3-, 1/2- und 3/8-Phyllotaxis

Dies kann nun unendlich fortgesetzt werden. Man kann sehen, dass es sich bei Zähler und Nenner der Brüche immer um Fibonacci Zahlen handelt.

Bei Sonnenblumen, Kohlarten, Palmenarten und bei den Blütenblättern der Rose kann man ähnliches beobachten.
Bei diesen Pflanzen teilt der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Blättern den Vollkreis von 360° im Goldenen Schnitt. Dabei handelt es sich um den Goldenen Winkel von 137,5° (vgl. Abb. 41 Blattstand).

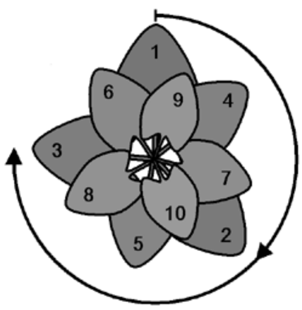


Abb. 40 Blattstand

[57] [BEU]

Ob es sich dabei um einen reinen Zufall handelt oder nicht, kann man nicht sagen. Für den/die BotanikerInnen ist allerdings interessant, dass all diese Blätter schlussendlich so angeordnet sind, dass eine optimale Zufuhr an Sonnenlicht gewährleistet wird.

4.2.5 Blatt- und Blütenformen

Der Goldene Schnitt tritt natürlich auch bei den Blatt- und Blütenformen auf. Darunter sind vor allem jene Blatt- und Blütenformen zu nennen, die die Form eines regelmäßigen Fünfecks aufweisen. Wie in Abschnitt 3.7.2 beschrieben, ist der Goldene Schnitt mit diesen Fünfecksformen sehr eng verbunden. Zu nennen sind die **Akeleiblüte**, die **Glockenblume** oder die **Heckenrose**.

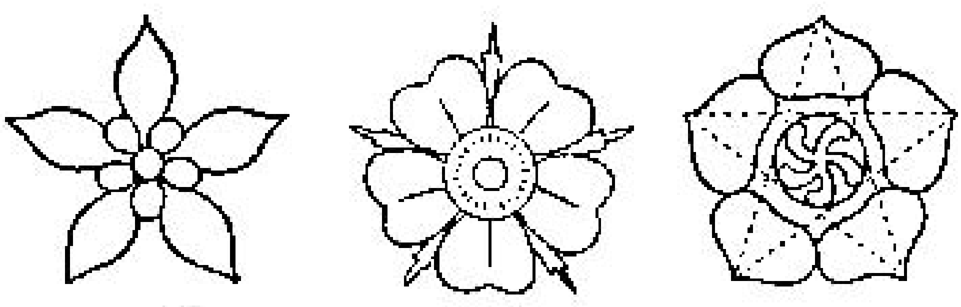


Abb. 41 Akeleiblüte, Glockenblume und Heckenrose

Auch beim Efeublatt stehen die beiden Blattachsen a und b im Verhältnis des Goldenen Schnitts (vgl. Abb. 43 Efeublatt).

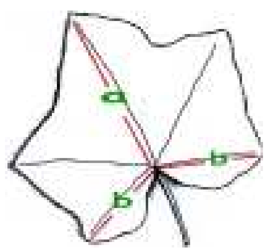


Abb. 42 Efeublatt

4.2.6 Der menschliche Körper

Ist der Mensch auch nach dem Grundprinzip der Proportionen des Goldenen Schnitts aufgebaut? Einige WissenschaftlerInnen vermuteten dies. Der deutsche Mediziner *Adolf Zeising* (1810–1876) war einer der größten Verfechter dieser Theorie. So vermaß er zahlreiche menschliche Körper und schrieb 1854 die Erkenntnisse in seinem bekanntesten Buch „Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers“ nieder.
Er erkannte, dass der Bauchnabel den menschlichen Körper oder der Ellbogen bzw. das Kniegelenk den Arm bzw. das Bein im Verhältnis des Goldenen Schnitts teilen.
Dies fasste er in der folgenden Abbildung zusammen. Dabei stellen M jeweils den Major und m den Minor der jeweiligen Längen dar.

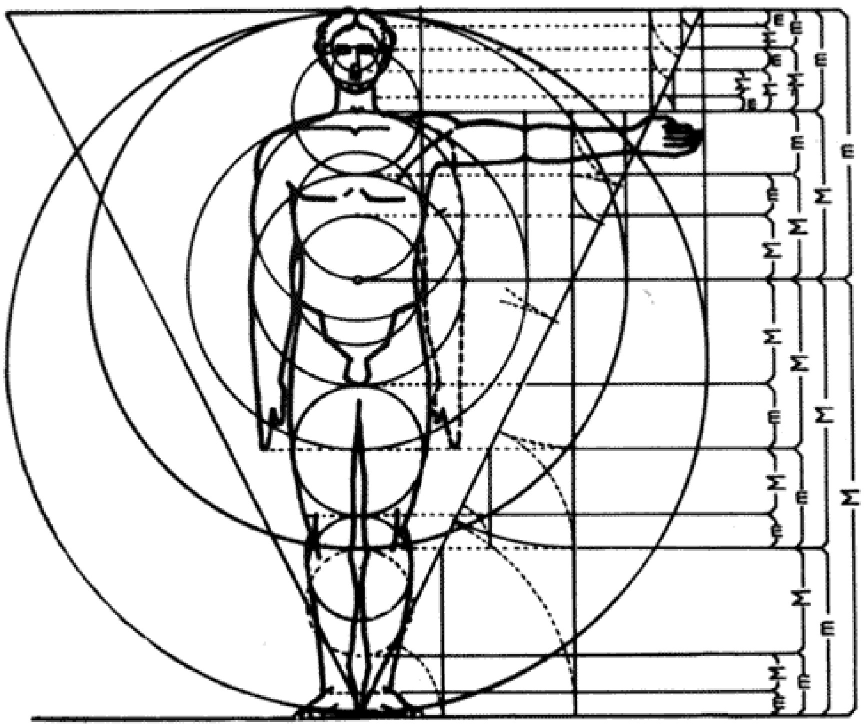


Abb. 43 Der Goldene Schnitt beim Menschen

Einige dieser Ergebnisse sind sehr bemerkenswert. Bei einigen Untersuchungen jedoch bezweifeln die WissenschaftlerInnen die Korrektheit und Sinnhaftigkeit. Einige Beispiele dazu sind:

- die Brauen teilen die Strecke zwischen Haaransatz und Kinn im Goldenen Schnitt oder
- oberes und unteres Fingerglied stehen im Verhältnis des Goldenen Schnitts[58]

Auch *Leonardo da Vinci* stellte in seiner Proportionsstudie (1485–1490) nach Vitruv einen Mann proportionsgerecht dar (vgl. Abb. 45 Proportionsstudie nach da Vinci). Diese besagt, dass der ideale Mensch genau in ein Quadrat und in einen Kreis passt.
An dieser Zeichnung lässt sich gut erkennen, dass sich in der menschlichen Anatomie zahlreiche Strecken messen lassen, die im Verhältnis des Goldenen Schnitts geteilt werden. Dies erkannte *da Vinci* und setzte es sogleich in einigen seiner Bildern um (vgl. Abb. 29 Mona Lisa).

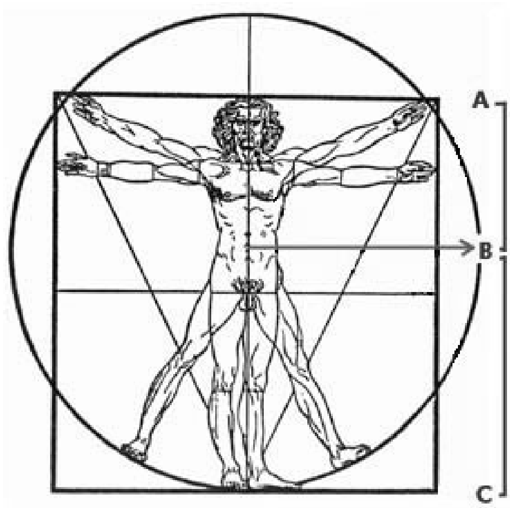


Abb. 44 Proportionsstudie nach da Vinci

Sogar im menschlichen Ohr lässt sich dieses Merkmal finden. Die Ohrmuschel ist in der Form der Goldenen Spirale aufgebaut. Verdeutlicht wird dies im folgenden Bild (vgl. Abb. 46 menschliches Ohr).

Abb. 45
menschliches Ohr

[58] [PFEI]

Heute finden die Proportionen des Goldenen Schnitts vor allem in der modernen Schönheitschirurgie oder der Zahnmedizin praktische Anwendung. Ein besonderes schönes Gebiss ist so definiert, wenn sich die Breiten der ersten beiden oberen Schneidezähne im Verhältnis 1 : 1,618 zueinander verhalten (vgl. Abb. 47 perfektes Verhältnis der Schneidezähne).[59]

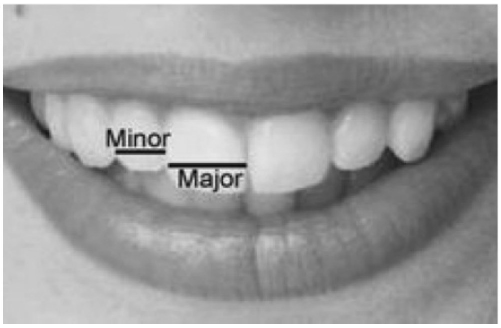


Abb. 46 perfektes Verhältnis der Schneidezähne

4.3 Musik

4.3.1 Komposition

Innerhalb der Kompositionen kann der Goldene Schnitt in zwei verschiedenen Arten auftreten. Einerseits können zwei Töne (genauer gesagt ihre Frequenzen) ein goldenes Verhältnis haben und andererseits kann die Komposition eines Stückes aus Teilen bestehen, deren Längen sich wie der Goldene Schnitt verhalten.[60]

Im ersten Fall, wenn die Frequenzen zweier Töne im Verhältnis zweier Fibonacci Zahlen (meistens 8 : 5) zueinander stehen, dann bilden sie eine kleine Sext. Deshalb werden bei Kompositionen bzw. bei Zweiklängen des öfteren kleine Sexten verwendet.

---
59 [WGOL]
60 [BEU]

Ein besonderes Beispiel für die Komposition mit Hilfe des Goldenen Schnitts bildet das Stück **Sonate für zwei Klaviere und Schlagzeug** von *Béla Bartók* (1881–1945). In diesem Musikstück wurden der Goldene Schnitt und die Fibonacci Zahlen sehr häufig als Gestaltungsprinzip eingesetzt. Die gesamte Sonate ist in vier Sätze eingeteilt. Sie dauert genau 6432 Achtelnoten lang; der zweite Satz beginnt nach 2975 Achtelnoten. Dies entspricht genau dem Verhältnis des Goldenen Schnitts (6432 * 0,618 = 3974,9). Auch der Anfang der Reprise im ersten Satz teilt die Satzlänge genau in diesem Verhältnis.[61]

Nach 1945 verwendeten einige Komponisten bewusst diese besonderen Proportionen. So etwa *Karlheinz Stockhausen* (1928–2007) in seinem **Klavierstück IX** oder etwa *Gérard Griseys* (1946–1998).

4.3.2 Instrumentenbau

Der Goldene Schnitt wird aufgrund seiner Besonderheit und seiner Schönheit auch im Musikinstrumentenbau verwendet. Vor allem im Geigenbau wird dieser benutzt um besondere Klangschönheit und Klangfülle zu erreichen. Angeblich soll der berühmte Geigenbauer *Antonio Stradivari* (1648–1737) beim Bau seiner Geigen den Goldenen Schnitt dazu verwendet haben, um die optimale Position der F-Löcher zu ermitteln.

[61] [BEU]

5 ANHANG

5.1 Die ersten 100 Fibonacci Zahlen

F_{0}	=	0
F_{1}	=	1
F_{2}	=	1
F_{3}	=	2
F_{4}	=	3
F_{5}	=	5
F_{6}	=	8
F_{7}	=	13
F_{8}	=	21
F_{9}	=	34
F_{10}	=	55
F_{11}	=	89
F_{12}	=	144
F_{13}	=	233
F_{14}	=	377
F_{15}	=	610
F_{16}	=	987
F_{17}	=	1 597
F_{18}	=	2 584
F_{19}	=	4 181
F_{20}	=	6 765
F_{21}	=	10 946
F_{22}	=	17 711
F_{23}	=	28 657
F_{24}	=	46 368
F_{25}	=	75 025
F_{26}	=	121 393
F_{27}	=	196 418
F_{28}	=	317 811
F_{29}	=	514 229
F_{30}	=	832 040
F_{31}	=	1 346 269
F_{32}	=	2 178 309
F_{33}	=	3 524 578
F_{34}	=	5 702 887
F_{35}	=	9 227 465
F_{36}	=	14 930 352
F_{37}	=	24 157 817
F_{38}	=	39 088 169
F_{39}	=	63 245 986
F_{40}	=	102 334 155
F_{41}	=	165 580 141
F_{42}	=	267 914 296
F_{43}	=	433 494 437
F_{44}	=	701 408 733
F_{45}	=	1 134 903 170
F_{46}	=	1 836 311 903
F_{47}	=	2 971 215 073
F_{48}	=	4 807 526 976
F_{49}	=	7 778 742 049
F_{50}	=	12 586 269 025
F_{51}	=	20 365 011 074
F_{52}	=	32 951 280 099
F_{53}	=	53 316 291 173
F_{54}	=	86 267 571 272
F_{55}	=	139 583 862 445
F_{56}	=	225 851 433 717
F_{57}	=	365 435 296 162

F_{58}	=	591 286 729 879	F_{80}	=	23 416 728 348 467 700
F_{59}	=	956 722 026 041	F_{81}	=	37 889 062 373 143 900
F_{60}	=	1 548 008 755 920	F_{82}	=	61 305 790 721 611 600
F_{61}	=	2 504 730 781 961	F_{83}	=	99 194 853 094 755 500
F_{62}	=	4 052 739 537 881	F_{84}	=	160 500 643 816 367 000
F_{63}	=	6 557 470 319 842	F_{85}	=	259 695 496 911 123 000
F_{64}	=	10 610 209 857 723	F_{86}	=	420 196 140 727 490 000
F_{65}	=	17 167 680 177 565	F_{87}	=	679 891 637 638 612 000
F_{66}	=	27 777 890 035 288	F_{88}	=	1 100 087 778 366 100 000
F_{67}	=	44 945 570 212 853	F_{89}	=	1 779 979 416 004 710 000
F_{68}	=	72 723 460 248 141	F_{90}	=	2 880 067 194 370 820 000
F_{69}	=	117 669 030 460 994	F_{91}	=	4 660 046 610 375 530 000
F_{70}	=	190 392 490 709 135	F_{92}	=	7 540 113 804 746 350 000
F_{71}	=	308 061 521 170 129	F_{93}	=	12 200 160 415 121 900 000
F_{72}	=	498 454 011 879 264	F_{94}	=	19 740 274 219 868 200 000
F_{73}	=	806 515 533 049 393	F_{95}	=	31 940 434 634 990 100 000
F_{74}	=	1 304 969 544 928 660	F_{96}	=	51 680 708 854 858 300 000
F_{75}	=	2 111 485 077 978 050	F_{97}	=	83 621 143 489 848 400 000
F_{76}	=	3 416 454 622 906 710	F_{98}	=	135 301 852 344 707 000 000
F_{77}	=	5 527 939 700 884 760	F_{99}	=	218 922 995 834 555 000 000
F_{78}	=	8 944 394 323 791 460	F_{100}	=	354 224 848 179 262 000 000
F_{79}	=	14 472 334 024 676 200			

Tab. 2 Die ersten 100 Fibonacci Zahlen

5.2 φ auf 1764 Nachkommastellen

φ **≈ 1,**

6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486270526046281890244970720720418939113748475408807538689175212663862223536931793180060766726354433389086595939582905638322661319282902678806752087668925017116962070322210432162695486262963136144381497587012203408058879544547492461856953648644492410443207713449470495658467885098743394422125448770664780915884607499887240076521705751797883416625624940758906970400028121042762177111777805315317141011704666599146697987317613560067087480710131795236894275219484353056783002287856997829778347845878228911097625003026961561700250464338243776486102838312683303724292675263116533924731671112115881863851331620384005221657912866752946549068113171599343235973494985090409476213222981017261070596116456299098162905552085247903524060201727997471753427775927786256194320827505131218156285512224809394712341451702237358057727861600868838295230459264787801788992199027077690389532196819861514378031499741106926088674296226757560523172777520353613936210767389376455606060592165894667595519004005559089502295309423124823552122124154440064703405657347976639723949499465845788730396230903750339938562102423690251386804145779956981224457471780341731264532204163972321340444494873023154176768937521030687378803441700939544096279558986787232095124268935573097045095956844017555198819218020640529055189349475926007348522821010881946445442223188913192946896220023014437702699230078030852611807545192887705021096842493627135925187607778846658361502389134933331223105339232136243192637289106705033992822652635562090297986424727597725655086154875435748264718141451270006023890162077732244994353088999095016803281121943204819643876758633147985719113978153978074761507722117508269458639320456520989698555678141069683728840587461033

LITERATURVERZEICHNIS

[BEU] Beutelspracher A. / Petri B. (1996). *Der Goldene Schnitt*. Wien: BI Wissenschaftsverlag.

[BIN] Binek P. (1984). *Die Fibonacci-Zahlen und ihre Anwendungen*. Hausarbeit an der Technische Universität Wien.

[BRU] Bruch H. (1989). *Hommage à Fibonacci*. Piesport: Ottenhausen.

[CAN] Cantor M. (1965). *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik Zweiter Band Vom Jahre 1200 bis zum Jahre 1668*. Stuttgart: Teubner Verlagsgesellschaft.

[DAH] Dahl K. / Nordqvist S. (1996). *Zahlen, Spiralen und magische Quadrate Mathe für jeden.* Hamburg: Oetinger Verlag.

[ENZ] Enzensberger M. (1997). *Der Zahlenteufel. Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor Mathematik haben.* München: dtv.

[GRI] Grimm R. E. (1973). The Autobiography of Leonardo Pisano. *Fibonacci Quarterly*, 11 (1), 99ff.

[KAP] Kaphammel G. (2000). *Der goldene Schnitt Harmonische Proportionen.* Braunschweig: Kaphammel.

[LÜN] Lüneburg H. (1993). *Leonardo Pisano Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers (2. Auflage)*. Wien: BI Wissenschaftsverlag.

[PFEI] Pfeifer F. X. (1969). *Der goldene Schnitt und seine Erscheinungsformen in Mathematik, Natur und Kunst*. Wiesbaden: Sändig Reprint.

[RICH] Richter P. H. / Scholz H.-J. (1991). Der Goldene Schnitt in der Natur. In Küppers B.-O. (Hrsg.), *Ordnung aus dem Chaos* (S. 175-214). München: Piper.

[SCHU] Schulz G. F. (1976). *Leonardo Da Vinci*. München: Schuler Verlagsgesellschaft

[SIG] Sigler L. E. (2003). *Fibonacci's Liber Abaci*. *Leonardo Pisaono's Book of Calculation*. Berlin: Springer.

[STE] Stelzner R. (2003). Der goldene Schnitt und das Mysterium der Schönheit. Eine naturwissenschaftlich-philosophische Abhandlung. *Tycho de Brahe Jahrbuch*. Niefern-Öschelbronn: Tycho-Brahe-Verlag.

[SCHO] Van der Schoot A. (2005). *Die Geschichte des goldenen Schnitts*. Stuttgart: Frommann-Holzboog.

[UBAY] http://did.mat.uni-bayreuth.de/mmlu/goldenerschnitt/lu/
Zugriff am 3. April 2009

[WAL] Walser H. (2003). *Der Goldene Schnitt* (4. Auflage). Leipzig: Eagle.

[WORO] Worobjow N. N. (1954). *Die Fibonaccischen Zahlen*. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Internetquellen

[BERN] http://www.dr-bernhard-peter.de/Goldsch/seite74.htm
Zugriff am 27. März 2009

[DRU] http://himpsl.htldornbirn.vol.at/hotpotatoes/mathe/Goldener_Schnitt_Lueckentext_Druck.doc
Zugriff am 11. März 2009

[FIBO] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Printonly/Fibonacci.html
Zugriff am 11. Februar 2009

[FIBO2] http://www.zahlenjagd.at/fibonacc.html
Zugriff am 11. Februar 2009

[GESG] http://home.schule.at/teacher/art/Gestaltung/Geschichte.html#Zweig15
Zugriff am 11. März 2009

[GIES] http://www.uni-giessen.de/~g013
Zugriff am 27. Februar 2009

[IJON] http://www.ijon.de/mathe/fibonacci/index.html
Zugriff am 11. Februar 2009

[KUN] http://www.michael-holzapfel.de/themen/goldenerschnitt/gs-arch-kunst/gs-arch-kunst.htm
Zugriff am 2. April 2009

[MATH] http://www.mathe-seiten.de/fibonacci.pdf
Zugriff am 13. März 2009

[PRE] http://www.math.uni-magdeburg.de/reports/2003/pre_gold_schnitt.pdf
Zugriff am 12. März 2009

[WARI] http://de.wikipedia.org/wiki/Arithmetische_Folge
Zugriff am 11. März 2009

[WFIBO] http://de.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci
Zugriff am 6. Februar 2009

[WFIBF] http://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge
Zugriff am 6. Februar 2009

[WGOL] http://de.wikpedia.org/wiki/Goldener_Schnitt
Zugriff am 6. Februar 2009