Die approbierte Originalversion dieser Dissertation ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (http://www.ub.tuwien.ac.at).

The approved original version of this thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/).

DISSERTATION

Präzise GPS-Positionierung schnell bewegter Objekte mit Hilfe der Kalman Filterung

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
Doktor der technischen Wissenschaften
am Institut für Geodäsie und Geophysik, Forschungsgruppe Höhere Geodäsie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Robert Weber
(Institut für Geodäsie und Geophysik, TU-Wien)

Zweitbegutachtung

Prof. Dr.-Ing. Asim Bilajbegovic
(Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden)

durch

Ing. Ella Schnur
Matrikelnummer: 0527062

Panoramaweg 2
D-79822 Titisee-Neustadt

Wien, im April 2009

Kurzfassung

Das Ziel der Doktoratarbeit ist die Bestimmung der geglätteten Trajektorie eines schnell bewegten Fahrzeugs auf Basis von GPS Code- und Phasenmessungen und die Überbrückung von kurzen Messdatenausfällen wegen Signalabschattungen mit Hilfe der Kalman Filterung. Für diesen Zweck wurde ein C++ Programm entwickelt, welches als Eingabeoptionen für Messdaten RINEX- und RTCM-Datenströme vorsieht. Geschätzt werden Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung des bewegten Rovers. Mit dem verwendeten Algorithmus lässt sich auch der Rover-Empfängeruhrfehler permanent überwachen. Zur Steigerung der Genauigkeit werden Beobachtungsdifferenzen zu einer lokalen Referenzstation gebildet und die so korrigierte Roverlösung der ‚Single-Point' - Lokalisierung gegenübergestellt.

Abstract

Accurate GPS positioning of rapidly moving objects using Kalman filtering

The target of the doctoral thesis is to determine the smoothed trajectory of a fast moving vehicle on the basis of GPS code- and phase-measurements, and the bridging of short measurement data losses due signal shading using the Kalman filtering. For this purpose a C++ program was developed. This program provides to serve the RINEX- and RTCM-data as input options for measurements. The coordinates, speed and acceleration of the moving rover were be estimated. It is also possible to permanently monitor the rover receiver clock with this algorithm. To increase the accuracy, observation differences to a local reference station were formed. The so-corrected solution of the rover has been compared to the ‚Single-Point' localization.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Global Positioning System	2
2.1	Aufbau des Systems	2
2.1.1	Das Raumsegment	2
2.1.2	Das Kontrollsegment	4
2.1.3	Das Nutzersegment	5
2.2	Absolutpositionierung	6
2.2.1	Positionierung mit Codemessungen	7
2.2.2	Positionierung mit Phasenmessungen	8
2.3	Relativpositionierung	9
2.3.1	Einfachdifferenzen	9
2.3.1.1	Einfachdifferenz der Codemessung	9
2.3.1.2	Einfachdifferenz der Phasenmessung	10
2.3.2	Doppeldifferenzen	10
2.3.2.1	Doppeldifferenz der Codemessung	11
2.3.2.2	Doppeldifferenz der Phasenmessung	11
2.3.3	Dreifachdifferenzen	12
2.4	Linearkombinationen	13
2.5	Fehlerquellen	13
2.5.1	Störungen durch die Ionosphäre	14
2.5.2	Störungen durch die Troposphäre	14
2.5.2.1	Modell nach Saastamoinen	15
2.5.3	Empfängeruhrfehler	16
2.5.4	Antennenphasenzentrum	16
2.5.5	Mehrwegeffekte	16
2.5.6	Phasensprünge	17
2.5.7	Relativistische Effekte	17
2.6	Satellitenbahn	17
2.6.1	Satellitenbahnfehler	18
2.6.2	Satellitenuhrfehler	18
2.7	International GPS Service	19
2.7.1	Präzise Bahndaten	19
2.7.1.1	Interpolation nach Lagrange	20
2.7.2	RINEX	21
3	Koordinatensysteme	23
3.1	Kartesische Koordinatensysteme	23
3.1.1	Conventional Inertial System (CIS)	23
3.1.2	Conventional Terrestrial System (CTS)	23
3.1.2.1	International Terrestrial Reference Frame (ITRF)	24
3.1.2.1.1	European Terrestrial Reference Frame (ETRF)	24
3.1.2.2	World Geodetic System 1984 (WGS84)	25
3.1.3	Geodätisches Datum	25

3.1.4	Transformation kartesicher Koordinatensysteme	25
3.1.4.1	Transformation ITRF → MGI	26
3.2	Ellipsoidisches geografisches Koordinatensystem	27
3.2.1	Transformation kartesischer Koordinaten in ellipsoidische Koordinaten	28
3.3	Gauss-Krüger Projektion	28
3.3.1	Das Österreichische Datum MGI	30
3.3.1.1	Das Bundesmeldenetz (BMN)	31
4	Kalman Filter	32
4.1	Historie	32
4.2	Systembeschreibung	32
4.3	Filteralgorithmus	33
4.3.1	Beschreibung der Filterkomponenten	34
4.3.2	Verträglichkeitstest	38
4.4	Praktische Beispiele	39
4.4.1	Statischer Fall	39
4.4.1.1	Simulierter kinematischer Fall mit konstanter Geschwindigkeit	40
4.4.1.2	Simulierter beschleunigter Fall mit konstanter Beschleunigung	41
4.4.2	Kinematischer Fall	42
5	Analyse der Messfahrten	45
5.1	Beschreibung der Messung	45
5.2	Code C/A	47
5.2.1	Glättung	47
5.2.2	Fehlende Messdaten	48
5.2.3	Unterschiedliches Systemrauschen und Beobachtungsrauschen	49
5.3	Code C/A und Ionosphärenfreie Linearkombination (C/A / P2)	51
6	Pseudoranges als Beobachtung in Kalman Filterung	54
6.1	Messdaten	54
6.1.1	Interpolation von Satellitendaten	55
6.1.2	Streckenreduktion	56
6.1.3	Verlauf der Messroute	57
6.2	Empfängeruhrfehler als Parameter	59
6.2.1	KF-Matrizen – Pseudorange Beobachtung	59
6.2.2	Beispiele	61
6.2.2.1	Messung fortlaufend vorhanden	61
6.2.2.2	Gelegentlicher Ausfall von Messdaten	66
6.3	Pseudorange-Differenzen	72
6.3.1	KF-Matrizen – Pseudorange Differenz Beobachtungen	72
6.3.2	Beispiele - Testfahrten	73
6.3.2.1	Messung fortlaufend vorhanden	73
6.3.2.2	Gelegentlicher Ausfall von Messdaten	79
7	Zusammenfassung	83
8	Ausblick	85

9 Anhang 86
9.1 Zusammenstellung von verwendeten Methoden 86
9.1.1 Koordinaten als Beobachtung 86
9.1.2 Pseudoranges als Beobachtung 86
9.1.3 Differenzen 87
9.2 Quantile der χ^2-Verteilung in Abhängigkeit von Sicherheitswahrscheinlichkeit und Freiheitsgrad 88
9.3 Gleichmäßig steigendes Beobachtungs- bzw. Systemrauschen 89
9.4 Tabellarische Auflistung von Werten eines Beispiel mit fortlaufend verfügbaren Messdaten 90
9.5 Tabellarische Auflistung von Werten eines Beispiels mit gelegentlich ausgefallenen Messdaten 94

Literatur- und Linkverzeichnis 98

Bildverzeichnis 100

Danksagung 103

Lebenslauf 104

1 Einleitung

Die GPS-Echtzeitpositionierung an der Erdoberfläche bewegter Objekte mit einer Genauigkeit weniger Zehnermeter ist heute mit einfachen Endgeräten möglich. Es werden eine Vielzahl von Navigationsgeräten am Markt angeboten, welche ohne weitere Hilfsmittel wie Korrekturdiensten diese Positionierungsaufgabe lösen. So können ortsunkundige Autofahrer sicher fremde Strecken im In- und Ausland befahren, Radfahrer ihre Route finden und Wanderer die nächste Unterkunft erreichen.

Die Aufgabenstellung wird allerdings wesentlich komplizierter, sobald die Genauigkeitsanforderungen im Submeter- oder Dezimeterbereich liegen und zudem Signalabschattungen wie Gebäude oder Bewaldung den permanenten Empfang einer ausreichenden Zahl von Satellitensignalen verhindert. Diese Arbeit befasst sich mit der präzisen GPS-Positionierung und der Überbrückung von Signalabschattungen.

Um die präzise Trajektorie des bewegten Fahrzeuges in Echtzeit zu bestimmen bietet sich als Modellierung die Kalman Filterung an. Der Kalman Filter wurde schon im Jahr 1960 vom Prof. Rudolf Kalman begründet und spielt zunehmend eine Rolle in fast allen technischen Bereichen. Durch eine Änderung der Gewichtung zwischen Messdaten und dem vom Algorithmus beschriebenen Prozess kann der Einfluss des Bewegungsmodells variabel gesteuert werden. Zum einen bewirkt der Kalman Filter eine Glättung der Trajektorie. Zum anderen kann er auch Parameter prädizieren, wenn Messungen wegen z.B. Signalabschattungen fehlen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein schon am Institut für Geodäsie und Geophysik existierendes C++ Programm zur Berechnung von GPS-Code-Positionen (4-dimensionaler Kugelschnitt) um die Kalman Filterung weiterentwickelt. Als Eingabedaten können im Postprocessing-Fall die Codepseudoranges beziehungsweise Phasenbeobachtungen aus einer RINEX Beobachtungsdatei verarbeitet werden. Die Satellitenkoordinaten und der Satellitenuhrfehler werden aus präzisen Bahndaten (sp3-Datei) eingelesen und für die Beobachtungstermine interpoliert. Die Streckenbeobachtungen werden vor der Filterung um die Signal-Verzögerung in der Troposphäre und der Ionosphäre (ionosphärenfreie Linearkombination) korrigiert. Mit diesen Eingangsdaten errechnet der Filter die Parameter: Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung des bewegten Objektes als auch den Empfängeruhrfehler. Um die Genauigkeit der Positionierung zu steigern können auch Differenzbeobachtungen zu einer Referenzstation verarbeitet werden. Für den Echtzeitfall wurde eine Datenschnittstelle zur Eingabe von RTCM-Messages geschaffen.

Im ersten Teil der Doktoratarbeit werden theoretische Grundlagen zum Thema GPS-Positionierung, Kalman Filterung und Koordinatentransformation erläutert. Im zweiten Teil werden praktische Beispiele und Ergebnisse anhand ausgewerteter Messfahrten präsentiert.

2 Global Positioning System

GPS ist die Kurzform für NAVSTAR GPS, welches für Navigation System with Time And Ranging Global Positioning System steht. Es ist ein satellitenbasiertes System, das mit Hilfe einer Konstellation von nominal 24 Satelliten dem Anwender eine genaue Position liefert. Es soll weltweit an jedem Ort, zu jeder Zeit und bei jedem Wetter, in der höchsten Genauigkeitsstufe eine Messgenauigkeit der horizontalen Position von besser als 13 m horizontal (95% Wahrscheinlichkeit), der Höhe von besser als 22 m (95%), der Geschwindigkeit von ca. 0,2 m/s und der Zeit von $\leq$ 100 ns ermöglichen (Kahmen, 2005).

2.1 Aufbau des Systems

Die gesamte GPS-Konfiguration umfasst drei grundlegende Segmente: das Raumsegment (Satelliten), das Kontrollsegment (Kontrollstationen) und das Nutzersegment (GPS-Empfänger).

2.1.1 Das Raumsegment

Das Raumsegment besteht aus mindestens 24 Satelliten, welche die Erde in einer Höhe von 20240 km umkreisen. Die Umlaufzeit beträgt 12 Stunden Sternzeit, was der 11 Stunden 58 Minuten Weltzeit entspricht. Die Satelliten liegen in 6 verschiedenen Bahnebenen, die um 55° zur Äquatorebene und um 60° gegeneinander geneigt sind. Durch diese Anordnung der Bahnen ergibt sich in kleinen bis mittleren Breiten eine optimale Schnittgeometrie. Der Einsatz von GPS in polnahen Gebieten ist aber dennoch problemlos möglich. Weiterhin gewährleistet diese Anordnung auch eine relativ stabile Konstellation, weil Störkräfte wie in erster Linie das Gravitationsfeld der Erde oder auch nicht-konservative Kräfte wie der Strahlungsdruck der Sonne im Mittel auf alle Satelliten gleich einwirken. Das System ist so aufgebaut, dass von jedem Punkt der Erde mindestens 4 Satelliten über einem Mindestelevationswinkel von 15° gleichzeitig beobachtet werden können.

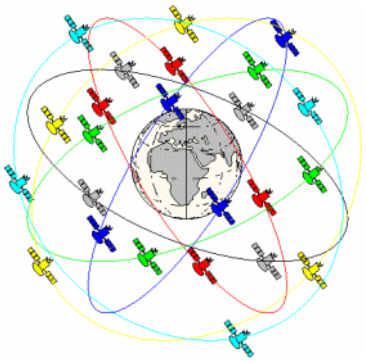


Abb. 2–1: GPS-Satellitenbahnen
http://www3.ltett.lu/webltett/departements/mathematiques/dossiers/gps/gps.html

Jeder GPS-Satellit hat mehrere hochgenaue Atomuhren an Bord, die mit einer Grundfrequenz von 10,23 MHz arbeiten. Die Satelliten senden permanent zwei Signale aus, die von dieser Grundfrequenz abgeleitet werden:

$$L1 = 154 \times 10{,}23MHz = 1575{,}42MHz(\lambda_1 = 19{,}029cm)$$
$$L2 = 120 \times 10{,}23MHz = 1227{,}60MHz(\lambda_2 = 24{,}421cm)$$

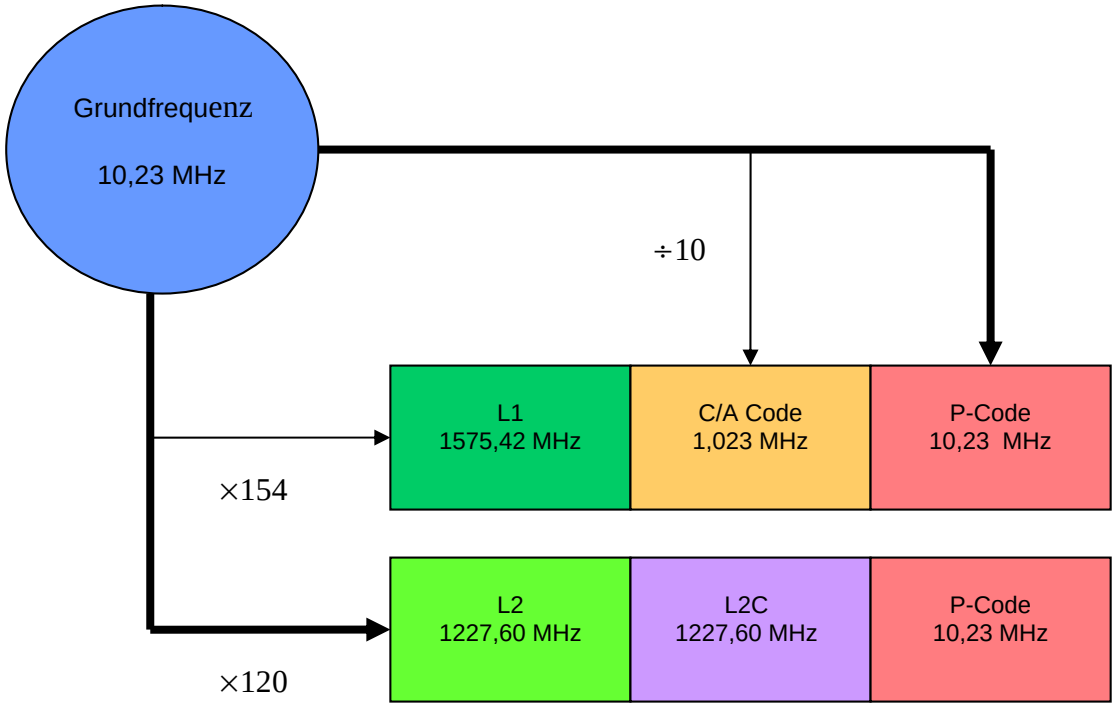


Abb. 2–2: GPS-Signalstruktur

Der Trägerwelle L1 sind sowohl der P-Code (Precise Code), als auch der C/A-Code (Coarse/Acquisition-Code) und ein Datensignal aufmoduliert. Der Trägerwelle L2 sind dagegen der P-Code, der L2C-Code (ziviles Signal) und das Datensignal aufgeprägt. Der L2C-Code ist zurzeit nur auf 7 Satelliten des IIR-M Blocks verfügbar. Den Satelliten IIR-M wurde auch M-Code auf den Frequenzen L1 und L2 aufmoduliert, der aber nur militärischen Zwecken dient. In der Zukunft soll sich die Frequenz F5 mit 1176,45 MHz geben, die sich gerade noch in der Testphase befindet.

Die Funktionen der Codes sind erstens die Identifikation der Satelliten und zweitens die Aufprägung von Zeitmarken um mit Hilfe der Laufzeit, die die Signale vom Satelliten bis zum Empfänger benötigen, die Distanz berechnen zu können.

Der P-Code dient der genauen Positionsbestimmung. Er hat eine Wiederholungsrate von 267 Tagen und eine Datenrate von 10,23 Mbps (Megabit pro Sekunde). Das heißt, dass Übergänge zwischen 0 und 1 mit einer Frequenz von 10,23 MHz erfolgen. Jeder Satellit sendet ein spezielles, 7 Tage dauerndes, Teilsegment des gesamten P-Codes aus. Die Teilsegmente sind verschiedenen Zeitabschnitten des

Gesamtmusters entnommen und unterscheiden sich daher. Sie werden jeden Samstag um Mitternacht zu Beginn einer GPS-Woche gestartet (Kahmen, 2005).

Der C/A-Code erlaubt eine etwas weniger genaue Distanzmessung. Er hat eine Wiederholungsrate von 1 ms und jeder Satellit hat sein eigenes Muster. Aufgrund der kürzeren Wiederholungsrate und der bekannten Struktur ist es für jeden Standardempfänger möglich den C/A-Code zu dekodieren (Kahmen, 2005).

Das Datensignal sendet alle Zusatzdaten, die für die Ortsbestimmung und Navigation benötigt werden. Die Datenrate beträgt 50 bps und die Übertragung eines Navigationssatzes dauert 30 Sekunden pro Satellit (Kahmen, 2005).

Selective Availability (SA) war bis zum 2. Mai 2000 der größte Faktor bei der Positionsgenauigkeit des GPS. Es war eine künstliche Verfälschung der vom Satelliten übermittelten Zeitmarken im L1 Signal, was zu Schwankungen in der Positionsbestimmung führte. Zusätzlich wurden die Ephemeridendaten ungenauer übertragen. Durch SA konnte eine Ungenauigkeit der Positionierung von 50 m bis 150 m mit einer Periodendauer von mehreren 10-er Minuten erreicht werden. Während bei eingeschalteter SA die Positionsgenauigkeit im Bereich von 100 Meter lag, wird jetzt eine Genauigkeit von ±20 Meter erreicht. Vor allem die Höhenbestimmung über GPS, die vorher praktisch unbrauchbar war, hat stark von der Abschaltung der SA profitiert.

Anti-Spoofing (AS) ist eine derzeit noch aktive Verschlüsselung des P-Codes. Der P-Code wird durch eine Überlagerung mit dem W-Code in einen Y-Code umgewandelt. Der verschlüsselte Code benötigt ein spezielles AS-Modul für jeden Empfängerkanal und ist nur für autorisiertes Personal mit speziellem Schlüssel zugänglich. Der P- bzw. Y-Code ist die Basis für die präzise militärische Positionsbestimmung. Seit 31. Januar 1994 ist das AS-System in Betrieb und der P-Code wird nur verschlüsselt als Y-Code ausgesendet. Zivilen Nutzern steht damit nur der C/A-Code zur Verfügung. Geodätische Zweifrequenzempfänger erlauben durch Korrelationstechniken allerdings auch heute den Zugriff auf die Trägerwelle auf L2, allerdings unter Verschlechterung des Signal / Rauschverhältnisses. In Zukunft werden auch GPS Standardempfänger bis zu 3 freie Codes anmessen können und die Verschlüsselung wird über den militärischen M-Code erfolgen, der erstmals mit den Satelliten der Serie IIR-M abgestrahlt wurde.

2.1.2 Das Kontrollsegment

Das Kontrollsegment besteht aus der Master Control Station in Colorado Springs und 5 Monitor Stations (Colorado Springs, Ascension Island, Diego Garcia, Kwajalein und Hawaii), die in etwa auf dem Äquator liegen. Es sollen in der Zukunft 17 Kontrollstationen mit 2 Master Control Stations geben. Die Aufgaben des Kontrollsegments bestehen in der Beobachtung und Kontrolle des Satellitensystems, in der Bestimmung der GPS Systemzeit, in der Prädiktion der Satelliten-Ephemeriden und der Uhrenparameter und in der periodischen Aufdatierung des Datensignals der

einzelnen Satelliten. Die Master Control Station sammelt die von den Kontrollstationen zu den Satelliten gemessenen Pseudodistanzmessungen und meteorologische Daten und berechnet daraus Uhrenparameter und die Parameter der zukünftigen Satellitenbahnen im Referenzsystem WGS84. Die so gewonnenen Informationen werden dann zurück an die vier mit Bodenantennen ausgestatteten Monitorstationen gesendet und an die Satelliten übertragen.

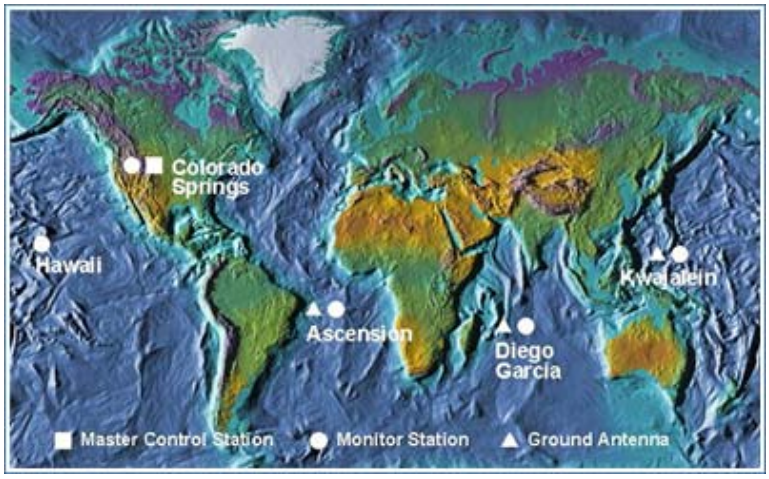


Abb. 2–3: GPS-Bodenstationen
www.freeflightsystems.com/gps_control.htm

2.1.3 Das Nutzersegment

Das Nutzer-Segment umfasst faktisch alle GPS-Empfänger, die für Vermessung und Navigation an Land, auf See und in der Luftfahrt, und vieles mehr in Verwendung stehen. GPS-Geräte bestehen im Allgemeinen aus einer Antenne zum Empfang der Satellitensignale, einem Modul zur Signalverarbeitung und einer Steuerungs- und Anzeigeneinheit.

Abb. 2–4: GPS-Empfänger
http://www.leica-geosystems.com

2.2 Absolutpositionierung

Alle mit GPS bestimmten Positionen basieren auf der Entfernungsmessung zwischen den Satelliten und dem GPS-Empfänger. Die Position des Empfängers liegt auf der Oberfläche einer imaginären Kugel, deren Mittelpunkt im Satelliten liegt und deren Radius der Entfernung zwischen dem Satelliten und dem Empfänger gleich ist. Durch den Schnitt dreier Kugeln (mit 3 Satelliten) können die Position und die Höhe des Empfängers bestimmt werden. Eine Annahme ist dabei aber, dass die Uhr im Empfänger exakt synchron mit der des Satelliten ist. Weil dies aber nicht der Fall ist, werden 4 Satelliten benötigt. Mathematisch formuliert müssen die Unbekannten X, Y, Z und t (Uhrenfehler) mit Hilfe von 4 Gleichungen bestimmt werden. Aufgrund von den durch den Uhrenfehler verfälschten Distanzen werden die ermittelten Entfernungen als Pseudoentfernungen (pseudo ranges) bezeichnet.

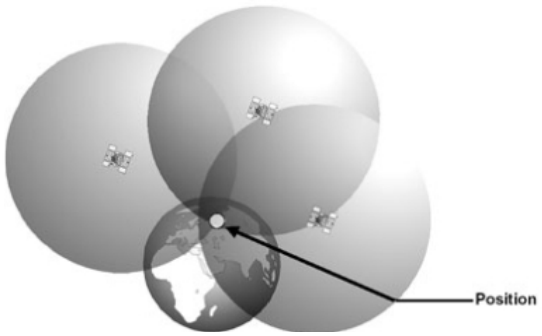


Abb. 2–5: GPS-Ortungsprinzip
http://theoxymoron.wordpress.com/2006/08/

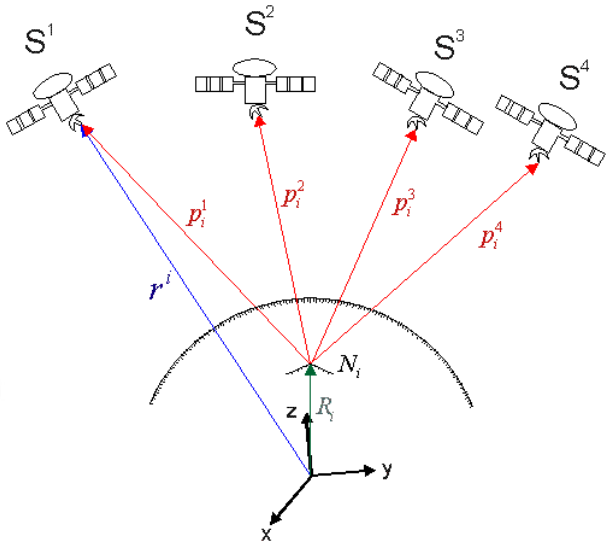


Abb. 2–6: Absolutpositionierung
http://www.tplusplus.de/geo/gps.html

Für die gemessene Pseudoentfernung PR_E^S zwischen einem Satelliten S und einem Empfänger E gilt:

$$PR_E^S = S_E^S + c \cdot (\Delta t_E - \Delta t^S) + \varepsilon \,. \tag{2.1}$$

Die einzelnen Komponenten haben folgende Bedeutung:

- S_R^S ist die geometrische Distanz, berechnet aus:

$$S_E^S = \sqrt{(X^S - X_E)^2 + (Y^S - Y_E)^2 + (Z^S - Z_E)^2} \;; \tag{2.2}$$

- $c \cdot (\Delta t_E - \Delta t^S)$ entspricht dem Produkt aus der Geschwindigkeit des übertragenen Signals (im Vakuum die Lichtgeschwindigkeit c) und der Differenz von Empfängeruhrfehler Δt_E und Satellitenuhrfehler Δt^S:

  Geschwindigkeit $\times$ Zeit = Entfernung;

- mit ε werden restliche Fehlereinflüsse bezeichnet.

2.2.1 Positionierung mit Codemessungen

Der GPS-Empfänger erzeugt basierend auf dem eigenen Zeitnormal einen zu den Satellitensignalen identischen Code. Die Korrelationseinheit vergleicht nun die beiden Codes und ermittelt, welche Zeitverschiebung der beiden Codesequenzen nötig ist, um eine möglichst hohe Korrelation zu erhalten.

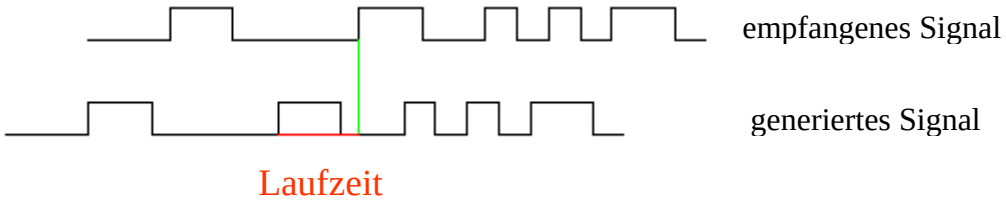


Abb. 2–7: GPS-Codemessung
http://www.tplusplus.de/geo/gps.html

Die dadurch ermittelte Differenz zwischen der Zeit, in der das Signal vom Satelliten ausgesendet und im Receiver empfangen wird, wird mit der Lichtgeschwindigkeit multipliziert. Um die Pseudoentfernung zu ermitteln, müssen natürlich auch noch Korrekturen aufgrund der atmosphärischen Verzögerung angebracht werden.

$$PR_E^S = S_E^S + c \cdot (\Delta t_E - \Delta t^S) + d_{ion} + d_{trop} + d_{orb} + \varepsilon\,, \qquad (2.3)$$

wobei: d_{ion} Distanzfehler durch Einflüsse der Ionosphäre, d_{trop} Distanzfehler durch Einflüsse der Troposphäre, d_{orb} Orbitfehler aufgrund fehlerhafter Bahndaten und ε zufällige Instrumentenfehler sind (Kahmen, 2005).

Bei Verwendung des C/A-Codes kann in der Entfernungsbestimmung ohne Berücksichtigung systematischer Fehleranteile (nur Coderauschen) eine Genauigkeit von ± 1 m erreicht werden. Bei Verwendung des P-Codes ist die Genauigkeit um etwa den Faktor 3 höher (Blumauer, 2005).

2.2.2 Positionierung mit Phasenmessungen

Durch den Satellitenoszillator werden zwei Trägerphasen L1 und L2 ausgesendet, deren resultierende Wellenlängen 19,029 cm und 24,421 cm sind. Die Phase (Abstand vom letzten Nulldurchgang) einer elektromagnetischen Welle lässt sich genauer als auf einen Millimeter bestimmen. Das ist eine um ein Vielfaches höhere Genauigkeit, als sie bei der Codemessung erreicht wird (Blumauer, 2005). Die Phase der ankommenden Welle wird mit einer vom Empfänger erzeugten Referenzphase verglichen. Aus der Differenz der beiden Phasen enthält man einen Bruchteil der Entfernung als Teil der Wellenlänge. Es muss allerdings zusätzlich bestimmt werden, wie viele volle Wellenzüge zwischen Satellit um Empfänger liegen. Um diese so genannten Mehrdeutigkeiten (Ambiguities) zu ermitteln, sind eine gute geometrische Verteilung der angemessenen Satelliten notwendig und die anderen Fehler müssen so weit wie möglich eliminiert werden.

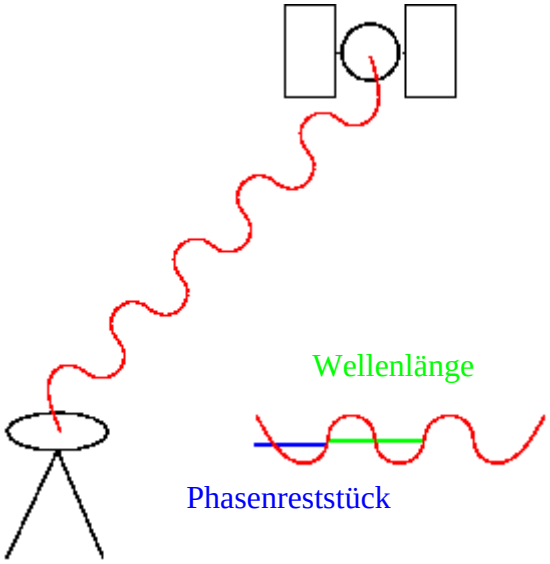


Abb. 2–8: GPS-Phasenmessung
http://www.tplusplus.de/geo/gps.html

Die Beobachtungsgröße PR_E^S ist bei der Phasenmessung die Differenz zwischen der ausgesendeten Trägerphase und der Phase des Empfängers.

$$PR_E^S = S_E^S + c \cdot (\Delta t_E - \Delta t^S) - d_{ion} + d_{trop} + d_{orb} + N_0 \cdot \lambda + \varepsilon \,, \tag{2.4}$$

wobei die λ Wellenlänge und N_0 die Mehrdeutigkeit ist, die als weitere Unbekannte auftritt (Kahmen, 2005). Der Laufzeitfehler in der Ionosphäre entspricht bei Codemessungen einer Verzögerung, bei der Phasenmessung allerdings einer Beschleunigung.

2.3 Relativpositionierung

Bei der relativen Positionierung sind mindestens zwei Empfänger im Einsatz, welche die Messungen simultan durchführen. Im einfachsten Fall werden die Koordinaten eines Neupunktes in Bezug auf einen Referenzpunkt bestimmt. In die Berechnungen werden nicht mehr die absoluten Beobachtungen, sondern Beobachtungsdifferenzen eingeführt und als Ergebnis treten nicht mehr absolute Positionen, sondern Vektoren (Basislinien) zwischen Beobachtungsstationen auf. Die Grundidee besteht darin, dass vielfältige Fehlereinflüsse, die bei Einzelmessungen mit gleichem Vorzeichen und Betrag auftreten, durch die Differenzbildung eliminiert werden können.

2.3.1 Einfachdifferenzen

Durch die Bildung von Einfachdifferenzen zwischen zwei Empfängern und einem Satelliten wird der Satellitenuhrfehler eliminiert. Bei kleinen Entfernungen zwischen den Empfängern (wenige Kilometer) fallen zudem die ionosphärischen und troposphärischen Laufzeitverzögerungen heraus, weil sie in der gleichen Größenordnung liegen.

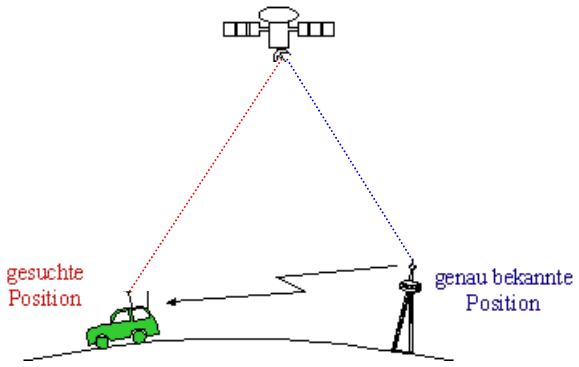


Abb. 2–9: Relativpositionierung: Einfachdifferenzen
www.tplusplus.de/geo/gps.html

2.3.1.1 Einfachdifferenz der Codemessung

Beobachtungsgleichung für den Empfänger:

$$PR_E^S = S_E^S + c \cdot \Delta t_E - c \cdot \Delta t^S + d_{ion}^{S-E} + d_{trop}^{S-E} + d_{orb}^{S-E} + \varepsilon_E^S .$$

Beobachtungsgleichung für die Referenzstation:

$$PR_{REF}^S = S_{REF}^S + c \cdot \Delta t_{REF} - c \cdot \Delta t^S + d_{ion}^{S-REF} + d_{trop}^{S-REF} + d_{orb}^{S-REF} + \varepsilon_{REF}^S .$$

Einfachdifferenz der Codemessung:

$$\Delta(PR_E^S - PR_{REF}^S) = (S_E^S - S_{REF}^S) + c\cdot(\Delta t_E - \Delta t_{REF}) - \cancel{c\cdot(\Delta t^S - \Delta t^S)} + \\ + (d_{ion}^{S-E} - d_{ion}^{S-REF}) + (d_{trop}^{S-E} - d_{trop}^{S-REF}) + (d_{orb}^{S-E} - d_{orb}^{S-REF}) + (\varepsilon_E^S - \varepsilon_{REF}^S)\,. \qquad (2.5)$$

2.3.1.2 Einfachdifferenz der Phasenmessung

Beobachtungsgleichung für den Empfänger:

$$PR_E^S = S_E^S + c\cdot\Delta t_E - c\cdot\Delta t^S - d_{ion}^{S-E} + d_{trop}^{S-E} + d_{orb}^{S-E} + N_0^{S-E}\cdot\lambda + \varepsilon_E^S\,.$$

Beobachtungsgleichung für die Referenzstation:

$$PR_{REF}^S = S_{REF}^S + c\cdot\Delta t_{REF} - c\cdot\Delta t^S - d_{ion}^{S-REF} + d_{trop}^{S-REF} + d_{orb}^{S-REF} + N_0^{S-REF}\cdot\lambda + \varepsilon_{REF}^S\,.$$

Einfachdifferenz der Phasenmessung:

$$\Delta(PR_E^S - PR_{REF}^S) = (S_E^S - S_{REF}^S) + c\cdot(\Delta t_E - \Delta t_{REF}) - \cancel{c\cdot(\Delta t^S - \Delta t^S)} + \\ + (d_{ion}^{S-REF} - d_{ion}^{S-E}) + (d_{trop}^{S-E} - d_{trop}^{S-REF}) + (d_{orb}^{S-E} - d_{orb}^{S-REF}) + \lambda\cdot(N_0^{S-E} - N_0^{S-REF}) + (\varepsilon_E^S - \varepsilon_{REF}^S)\,. \qquad (2.6)$$

2.3.2 Doppeldifferenzen

Die Doppeldifferenzen werden durch Subtraktion von Einfachdifferenzen zwischen zwei Satelliten und zwei Empfängern gebildet. Durch Doppeldifferenzbildung werden Satelliten- und Empfängeruhrfehler eliminiert. Doppeldifferenzen werden oft zur Koordinatenbestimmung in geodätischen Netzen verwendet.

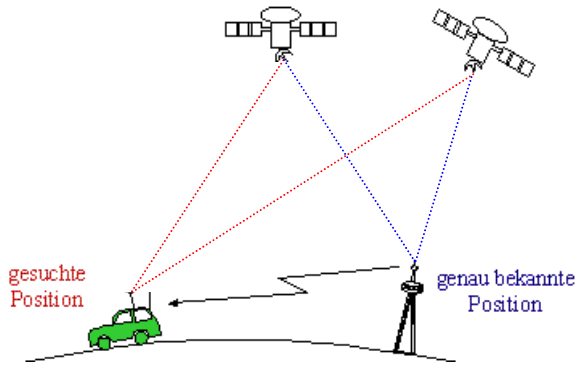


Abb. 2–10: Relativpositionierung: Doppeldifferenzen
www.tplusplus.de/geo/gps.html

2.3.2.1 Doppeldifferenz der Codemessung

Einfachdifferenz der Codemessung für den Satelliten Nr. 1:

$$\Delta(PR_E^{S1} - PR_{REF}^{S1}) = (S_E^{S1} - S_{REF}^{S1}) + c \cdot (\Delta t_E - \Delta t_{REF}) - \cancel{c \cdot (\Delta t^{S1} - \Delta t^{S1})} + \\ + (d_{ion}^{S1-E} - d_{ion}^{S1-REF}) + (d_{trop}^{S1-E} - d_{trop}^{S1-REF}) + (d_{orb}^{S1-E} - d_{orb}^{S1-REF}) + (\varepsilon_E^{S1} - \varepsilon_{REF}^{S1}).$$

Einfachdifferenz der Codemessung für den Satelliten Nr. 2:

$$\Delta(PR_E^{S2} - PR_{REF}^{S2}) = (S_E^{S2} - S_{REF}^{S2}) + c \cdot (\Delta t_E - \Delta t_{REF}) - \cancel{c \cdot (\Delta t^{S2} - \Delta t^{S2})} + \\ + (d_{ion}^{S2-E} - d_{ion}^{S2-REF}) + (d_{trop}^{S2-E} - d_{trop}^{S2-REF}) + (d_{orb}^{S2-E} - d_{orb}^{S2-REF}) + (\varepsilon_E^{S2} - \varepsilon_{REF}^{S2}).$$

Doppeldifferenz der Codemessung:

$$\Delta(\Delta(PR_E^{S2} - PR_{REF}^{S2}) - \Delta(PR_E^{S1} - PR_{REF}^{S1}) = \\ = (S_E^{S2} - S_E^{S1} - S_{REF}^{S2} + S_{REF}^{S2}) + \cancel{c \cdot (\Delta t_E - \Delta t_{REF})} - \cancel{c \cdot (\Delta t_E - \Delta t_{REF})} + \\ + (d_{ion}^{S2-E} - d_{ion}^{S1-E} - d_{ion}^{S2-REF} + d_{ion}^{S1-REF}) + (d_{trop}^{S2-E} - d_{trop}^{S1-E} - d_{trop}^{S2-REF} + d_{trop}^{S1-REF}) + \\ (d_{orb}^{S2-E} - d_{orb}^{S1-E} - d_{orb}^{S2-REF} + d_{orb}^{S1-REF}) + (\varepsilon_E^{S2} - \varepsilon_E^{S1} - \varepsilon_{REF}^{S2} + \varepsilon_{REF}^{S1}). \qquad (2.7)$$

2.3.2.2 Doppeldifferenz der Phasenmessung

Einfachdifferenz der Phasenmessung für den Satelliten Nr. 1:

$$\Delta(PR_E^{S1} - PR_{REF}^{S1}) = (S_E^{S1} - S_{REF}^{S1}) + c \cdot (\Delta t_E - \Delta t_{REF}) - \cancel{c \cdot (\Delta t^{S1} - \Delta t^{S1})} + \\ + (d_{ion}^{S1-REF} - d_{ion}^{S1-E}) + (d_{trop}^{S1-E} - d_{trop}^{S1-REF}) + (d_{orb}^{S1-E} - d_{orb}^{S1-REF}) + \lambda \cdot (N_0^{S1-E} - N_0^{S1-REF}) + (\varepsilon_E^{S1} - \varepsilon_{REF}^{S1}).$$

Einfachdifferenz der Phasenmessung für den Satelliten Nr. 2:

$$\Delta(PR_E^{S2} - PR_{REF}^{S2}) = (S_E^{S2} - S_{REF}^{S2}) + c \cdot (\Delta t_E - \Delta t_{REF}) - \cancel{c \cdot (\Delta t^{S2} - \Delta t^{S2})} + \\ + (d_{ion}^{S2-REF} - d_{ion}^{S2-E}) + (d_{trop}^{S2-E} - d_{trop}^{S2-REF}) + (d_{orb}^{S2-E} - d_{orb}^{S2-REF}) + \lambda \cdot (N_0^{S2-E} - N_0^{S2-REF}) + (\varepsilon_E^{S2} - \varepsilon_{REF}^{S2}).$$

Doppeldifferenz der Phasenmessung:

$$\begin{aligned}
&\Delta(\Delta(PR_E^{S2} - PR_{REF}^{S2}) - \Delta(PR_E^{S1} - PR_{REF}^{S1}) = \\
&= (S_E^{S2} - S_E^{S1} - S_{REF}^{S2} + S_{REF}^{S1}) + \cancel{c \cdot (\Delta t_E - \Delta t_{REF})} - \cancel{c \cdot (\Delta t_E - \Delta t_{REF})} + \\
&+ (d_{ion}^{S2-REF} - d_{ion}^{S1-REF} - d_{ion}^{S2-E} + d_{ion}^{S1-E}) + (d_{trop}^{S2-E} - d_{trop}^{S1-E} - d_{trop}^{S2-REF} + d_{trop}^{S1-REF}) + \\
&(d_{orb}^{S2-E} - d_{orb}^{S1-E} - d_{orb}^{S2-REF} + d_{orb}^{S1-REF}) + \lambda \cdot (N_0^{S2-E} - N_0^{S1-E} - N_0^{S2-REF} + N_0^{S1-REF}) + \\
&+ (\varepsilon_E^{S2} - \varepsilon_E^{S1} - \varepsilon_{REF}^{S2} + \varepsilon_{REF}^{S1}).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Verglichen mit der Basisbeobachtung liegt der Nachteil von Doppeldifferenzen in dem durch die Korrelation der Beobachtungen bedingten um den Faktor 2 höheren Signalrauschen.

2.3.3 Dreifachdifferenzen

Die Dreifachdifferenzen werden aus Messungen mit zwei Empfängern zu je zwei Satelliten in zwei Zeitepochen berechnet. Man erhält sie also aus der Differenz der zu unterschiedlichen Epochen gebildeten Doppeldifferenzen. Durch Dreifachdifferenzbildung werden Satelliten- und Empfängeruhrfehler und Mehrdeutigkeiten beseitigt. Das Ergebnis ist bei der Aufdeckung und Korrektur von „Cycle Slips“ sehr nützlich. Weil die Dreifachdifferenzen noch stärker korreliert sind, ist die Positionsbestimmung ungenauer. Die aus Dreifachdifferenzen errechneten Koordinaten lassen sich aber als gute Näherungswerte verwenden (Kahmen, 2005).

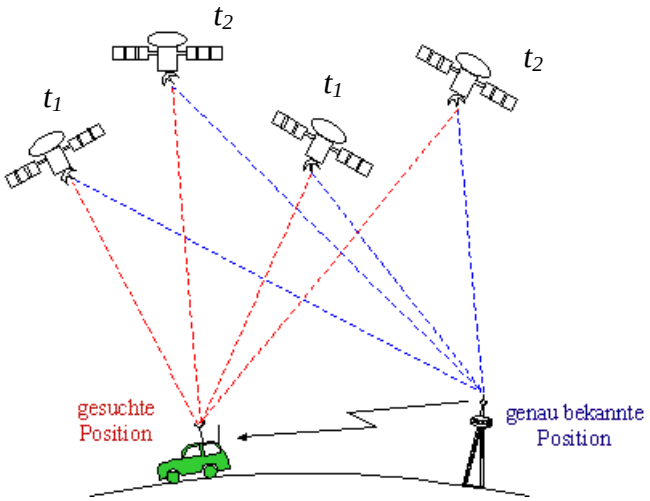


Abb. 2–11: Relativpositionierung: Dreifachdifferenzen
www.tplusplus.de/geo/gps.html

2.4 Linearkombinationen

Linearkombinationen bieten eine weitere Möglichkeit Fehlerquellen zu eliminieren. Sie können dann gebildet werden, wenn simultane Beobachtungen auf unterschiedlichen Frequenzen vorliegen. Die Linearkombination L_3 ist frei von Einflüssen der Ionosphäre und wird folgendermaßen gebildet:

$$L_3 = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot L_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot L_2 \,. \tag{2.9}$$

Mit Hilfe der geometriefreien Linearkombination L_4 kann direkt die ionosphärische Verzögerung berechnet werden:

$$L_4 = L_1 - L_2 \,. \tag{2.10}$$

Die Widelane Linearkombination (WL) L_5 eignet sich wegen ihrer relativ großen Wellenlänge von ca. 86 cm besonders für erste Mehrdeutigkeitslösungen:

$$L_5 = \frac{f_1}{f_1 - f_2} \cdot L_1 + \frac{-f_2}{f_1 - f_2} \cdot L_2 \,. \tag{2.11}$$

Wegen des hohen Messrauschens ist sie jedoch nicht für die Koordinatenberechnungen geeignet. Für diesen Zweck werden nach Einsetzen der gelösten WL-Ambiguities die verbleibenden Mehrdeutigkeiten mittels der ionosphärenfreien Narrowlane Linearkombination L_{53} bestimmt (Schuh, 1999).

2.5 Fehlerquellen

Die Streckenmessung aus Code- und Phasenbeobachtungen wird sowohl von systematischen als auch zufälligen Fehlern beeinflusst. Untenstehende Tabelle gibt eine grobe Abschätzung der Einzeleffekte.

Verzögerung durch die Ionosphäre	± 5 Meter
Troposphärische Verzögerung (Restfehler)	± 0.5 Meter
Satellitenbahnfehler	± 2.0 Meter
Satellitenuhrfehler	± 2 Meter
Mehrwegeeffekt	± 1 Meter

2.5.1 Störungen durch die Ionosphäre

Während sich Radiosignale im Weltall mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, breiten sich diese in der Ionosphäre und der Troposphäre mit geringerer Geschwindigkeit aus. Daraus folgt eine längere Laufzeit der Satellitensignale.

Die Ionosphäre liegt in einem Höhenbereich von etwa 50 km bis 1000 km. Sie ist der Teil der Atmosphäre, in dem freie Elektronen und Ionen durch die ionisierende Wirkung der Sonne gebildet werden. Bei Nacht ist der Einfluss der Ionosphäre gering. Tagsüber jedoch vergrößert die Sonne den ionosphärischen Effekt. Die Sonnenaktivität kann auch durch die Anzahl der Sonnenflecken charakterisiert werden und unterliegt einem 11-jährigen Zyklus. Von Zeit zu Zeit treten Eruptionen auf der Sonne auf, die ebenfalls eine Wirkung auf die Ionosphäre haben. Außerdem sind Signale von Satelliten mit niedriger Elevation stärker von der ionosphärischen Laufzeitverzögerung betroffen als Satellitensignale mit größerem Höhenwinkel. Das rührt daher, dass die Signale von niedrigen Satelliten einen längeren Weg durch die Atmosphäre zurücklegen müssen.
Der Einfluss auf die Ausbreitung von Wellen ist durch den totalen Elektronengehalt TEC (Total Electron Content) gegeben und der Elektronenengehalt wird in TECU (TEC units) gemessen, wobei 1 TECU $\triangleq 10^{16}$ freien Elektronen/m^2.
Die Ionosphäre ist für Mikrowellen ein dispersives Medium, also ist ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit frequenzabhängig. Die elektromagnetischen Wellen verlangsamen sich beim Durchgang der Ionosphäre umgekehrt proportional ihrer Frequenz zum Quadrat. Das bedeutet, dass sich elektromagnetische Wellen mit niedrigen Frequenzen stärker als solche mit hohen Frequenzen verlangsamen. Daher kann unter Vergleich der Ankunftszeiten der beiden Signale die ionosphärische Laufzeitverzögerung genau berechnet oder der ionosphärische Einfluss eliminiert werden. Dies erfolgt durch die Bildung der ionosphärenfreien Linearkombination L_3.

2.5.2 Störungen durch die Troposphäre

Die Troposphäre erstreckt sich von 0 km bis ca. 40 km Höhe. In der untersten Schicht von ca. 10 km spielen sich die Wettervorgänge ab. Für Mikrowellen ist die Troposphäre nicht dispersiv, d. h. die Verzögerung der Signale ist in diesem Spektralbereich frequenzunabhängig.

Der troposphärische Einfluss wird auf die Entfernungsmessung in eine trockene (Druck, Temperatur) und eine feuchte (Wasserdampf) Komponente zerlegt. Der durch die troposphärische Verzögerung verursachte Streckenfehler ist mit rund 2,3 m im Zenit kleiner als der Ionosphärenfehler. Der trockene Anteil lässt sich mit einfachen Modellen gut erfassen. Der feuchte Anteil ist schwierig modellierbar, weil sich die räumliche und zeitliche Verteilung des Partialdrucks des Wasserdampfes nur sehr schwer bestimmen lässt. Allerdings beeinflusst er die Gesamtkorrektur nur unwesentlich, da die Wirkung des feuchten Anteils nur etwa 10% von dem Einfluss des trockenen Anteils ausmacht (Kahmen, 2005).

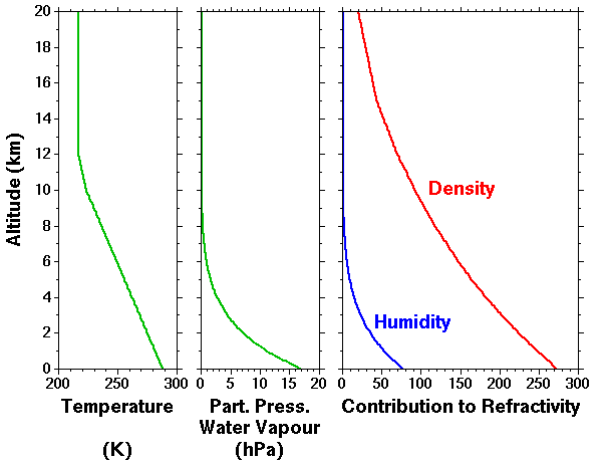


Abb. 2–12: Höhenprofil der Brechzahlen des trockenen (Density) und feuchten (Humidity) Anteils
http://mst.nerc.ac.uk/refract_index.html

2.5.2.1 Modell nach Saastamoinen

Das Modell nach Saastamoinen dient der Berechnung der Troposphärenkorrektur. Um es zu verwenden, benötigt man die Zenitdistanz der „Visur“ vom Empfänger zum Satelliten. Diese kann aus dem Skalarprodukt zwischen dem Ortsvektor des Beobachters und dem Vektor Beobachter-Satellit berechnet werden:

$$\cos z = \left\{ \begin{aligned} &\frac{X_E}{\sqrt{X_E^2+Y_E^2+Z_E^2}} * \frac{X^S - X_E}{\sqrt{\left(X^S-X_E\right)^2+\left(Y^S-Y_E\right)^2+\left(Z^S-Z_E\right)^2}} + \\ &+\frac{Y_E}{\sqrt{X_E^2+Y_E^2+Z_E^2}} * \frac{Y^S - Y_E}{\sqrt{\left(X^S-X_E\right)^2+\left(Y^S-Y_E\right)^2+\left(Z^S-Z_E\right)^2}} + \\ &+\frac{Z_E}{\sqrt{X_E^2+Y_E^2+Z_E^2}} * \frac{Z^S - Z_E}{\sqrt{\left(X^S-X_E\right)^2+\left(Y^S-Y_E\right)^2+\left(Z^S-Z_E\right)^2}} \end{aligned} \right\}. \qquad (2.12)$$

Die Standardatmosphäre wird durch folgende Funktionen für Temperatur $T\,[°K]$, Druck $P\,[mbar]$ und relative Feuchte $H\,[\%]$ in Abhängigkeit der Höhe h beschrieben:

$$\begin{aligned} T &= T_o - 0{,}0065\cdot\left(h-h_0\right) \\ P &= P_0\cdot\left(1-0{,}0000226\cdot\left(h-h_0\right)\right)^{5{,}225} \\ H &= H_0\cdot\exp\left(-0{,}0006396\cdot\left(h-h_0\right)\right). \end{aligned} \qquad (2.13)$$

Als Startwerte für die Temperatur, Luftdruck und relative Feuchte auf Meereshöhe h_0 werden üblicherweise die Größen $h_0 = 0\ m$, $T_0 = 20°C = 293°K$, $P_0 = 1013\ mbar$ und $H_0 = 50\%$ verwendet.

Die praktische Berechnunge der Troposphärenkorrektur nach Saastamoinen erfolgt schließlich mit:

$$e = \frac{H}{100} \cdot \exp\left(-37{,}2465 + 0{,}213166 \cdot T - 0{,}000256908 \cdot T^2\right)$$

$$d_{trop} = \frac{0{,}002277}{\cos z} \cdot \left(P + \left(\frac{1255}{T} + 0{,}05 \right) \cdot e - 1{,}16 \cdot \tan^2 z \right). \qquad (2.14)$$

2.5.3 Empfängeruhrfehler

Im Gegensatz zum Satellitenuhrfehler muss der Empfängeruhrfehler im Falle der Absolutpositionierung mit den Koordinaten als Unbekannte mitbestimmt werden.
Bei der relativen Positionierung können sowohl die Satelliten- als auch die Empfängerfehler durch Differenzbildung fast vollständig eliminiert werden.

2.5.4 Antennenphasenzentrum

Besonders wichtig für Antennen, welche für Positionierungen genutzt werden, ist die Stabilität des Antennenphasenzentrums, auf welches sich die bestimmten Positionen beziehen. Dieses elektrische Zentrum verschiebt sich jedoch geringfügig mit der Intensität und der Richtung der einfallenden Signale.
Beim Einsatz mehrerer Antennen gleichen Typs lassen sich die Fehler für die kurze Basislinie durch Differenzbildung fast vollständig eliminieren. Bei langen Basislinien oder Antennen unterschiedlichen Typs müssen die Antennen speziell kalibriert werden.

2.5.5 Mehrwegeeffekte

Mehrwegeeffekte treten auf, wenn sich die Antenne des Empfängers in der Nähe einer großen reflektierenden Oberfläche befindet, wie beispielsweise der eines Sees oder Gebäudes. Das Satellitensignal läuft dann nicht direkt zur Antenne, sondern trifft zunächst auf das nah gelegene Objekt, um dann auf die Antenne reflektiert zu werden. Es führt zu einem verfälschten Messergebnis: eine direkte und undirekte Welle überlagern sich und erzeugen ein Signal mit gleicher Frequenz, das aber eine Phasenverschiebung im Vergleich zum Originalsignal aufweist. Die Auswirkung auf die Entfernungsmessung liegt im Bereich von einigen Dezimetern bei Phasenmessungen und einigen Metern bei Codemessungen.
Multi-Path kann durch die Wahl geeigneter Beobachtungspunkte oder durch das Abschirmen der Antenne vermieden werden.

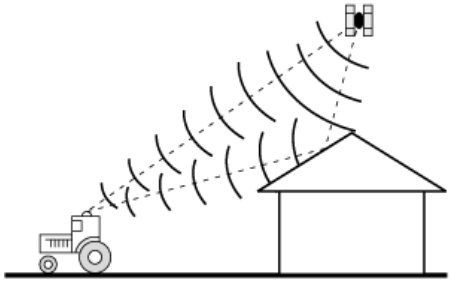


Abb. 2–13: Mehrwegeeffekte
www.ca.uky.edu/agc/pubs/pa/pa5/pa5.htm

2.5.6 Phasensprünge

Ein Phasensprung („Cycle Slip“) kann bei Phasenmessungen auftreten und stellt den Verlust einer ganzen Anzahl von Wellenlängen in der gemessenen Grundträgerphase dar. Er wird durch eine Signalunterberechung hervorgerufen.
Man kann die „Cycle Slips“ durch die Bildung von Dreifachdifferenzen oder mit Hilfe der Approximation von Messreihen durch Geraden oder Polynome höherer Ordnung aufdecken.

2.5.7 Relativistische Effekte

Die allgemeine Relativitätstheorie sagt, dass die Zeit umso langsamer vergeht, je stärker das Gravitationsfeld ist, dem man ausgesetzt ist. Dieser Effekt bewirkt, dass die Uhren der Satelliten etwas zu schnell zu laufen scheinen. Umgekehrt laufen alle relativ zur Referenzuhr bewegten Satellitenuhren scheinbar langsamer. Die aus diesen beiden Effekten resultierende Zeitverschiebung zum Beobachter auf der Erde wäre etwa 38 Mikrosekunden pro Tag und würde einen Gesamtfehler von etwa 10 Kilometern pro Tag ergeben. Um diesen Fehler zu korrigieren, werden die Frequenzen der Satellitenuhren, bevor sie in die Umlaufbahn gebracht werden, auf 10,229999995453 MHz anstatt 10,23 MHz eingestellt.

2.6 Satellitenbahn

Die drei Keplergesetze beschreiben genähert die Bewegung des Satelliten in seiner Bahn:

1. Die Bahn des Satelliten ist ein Kugelschnitt, in dessen einem Brennpunkt das Gravitationszentrum liegt.
2. Die vom Radiusvektor in gleichen Zeiträumen überstrichene Fläche ist konstant.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten sind proportional zu den dritten Potenzen der großen Halbachse (Kahmen, 2005).

Die vollständige Festlegung einer Keplerbahn erfolgt durch 6 Bahnelemente (Fragner, 1998):

- a große Halbachse der Bahnellipse,
- e numerische Exzentrizität,
- i Inklination, Neigung der Bahnebene zum Äquator,
- Ω Rektaszension des aufsteigenden Knoten.
- ω Argument des Perigäums,
- v wahre Anomalie.

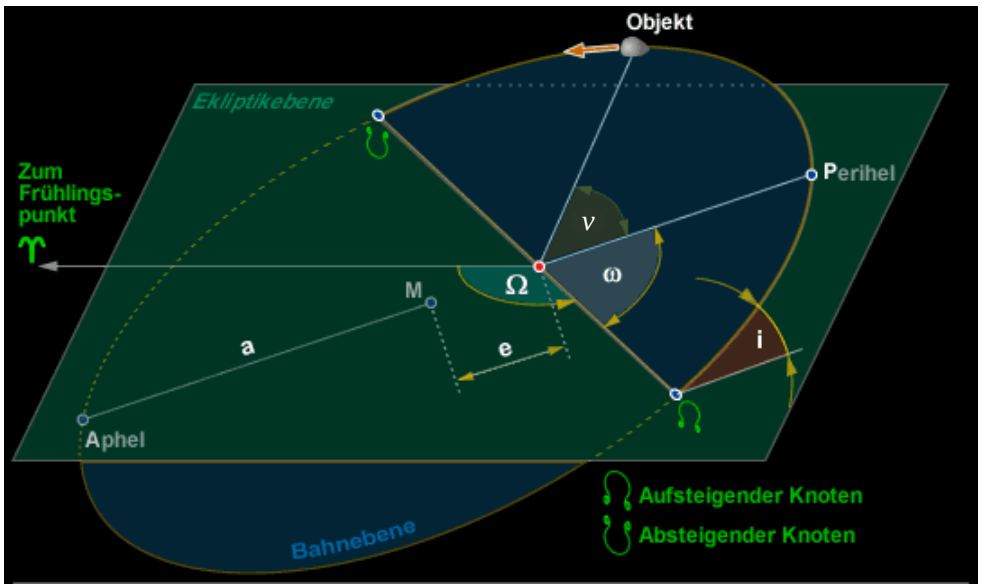


Abb. 2–14: Die Keplerelemente
www.greier-greiner.at/hc/bsp/bahnelemente/bahnelemente.htm

Der Satellit würde ohne das Auftreten von Störkräften seine Keplerellipse nicht verlassen. Die Störkräfte verändern aber dauernd die Bahn und verursachen Satellitenbahnfehler.

2.6.1 Satellitenbahnfehler

Die Umlaufbahnen der GPS-Satelliten werden von Gravitationskräften der Erde der Sonne, des Mondes und vielen weitern kleineren Störkräften beeinflusst. Deswegen müssen die Bahndaten regelmäßig kontrolliert und korrigiert werden. Die vom Satelliten übertragenen „broadcast“ Ephemeriden werden im Voraus berechnet und haben eine Genauigkeit von ca. $\pm$ 2,0 m.

2.6.2 Satellitenuhrfehler

Der Satellitenuhrfehler bezeichnet den Synchronisationsfehler zwischen den einzelnen Satellitenuhren und der GPS-Systemzeit. Die Satellitenuhrfehler werden in

der Hauptkontrollstation berechnet und dem Nutzer in „broadcast“ Informationen zur Verfügung gestellt. Die verbleibende Uhrenungenauigkeit der Satelliten macht einen Fehler von ca. 2 Meter aus.

2.7 International GPS Service

Die IGS ist eine Vereinigung von mehr als 200 Agenturen und Institutionen weltweit. Ihre Hauptaufgabe ist das Bereitstellen von GPS-Daten und der daraus abgeleiteten Produkte zur Unterstützung von geodätischen und geophysikalischen Forschungsarbeiten. Die Daten werden über ein Globales Netzwerk von IGS-Permanenstationen (ca. 400 Stationen im Januar 2009) in Datenzentren gesammelt und in Analysezentren verarbeitet (Blumauer, 2005).

Zu den IGS-Produkten gehören:

- Präzise Ephemeriden der GPS und GLONASS Satelliten
- Koordinaten der IGS Stationen und deren Geschwindigkeiten
- Uhrenkorrekturen für die GPS Satelliten
- Uhrenkorrekturen für die IGS Stationen
- Erdrotationsparameter
- Troposphärische Signalverzögerungswege für die Stationen
- Globale Karten des Elektronengehalts der Ionosphäre.

Die Produkte werden mit höchster Präzision erstellt. Sie sind aktuell, zuverlässig und für jedermann über Internet abrufbar: http://igscb.jpl.nasa.gov.

2.7.1 Präzise Bahndaten

Die International GPS Service stellt den Nutzern präzise Ephemeriden der Satelliten zur Verfügung. Sie werden in unterschiedlicher Genauigkeit und definierten Zeiten nach der Beobachtung angeboten. Die *Final Orbits* haben die höchste Genauigkeit (<5cm), sind allerdings erst nach 14 Tagen verfügbar. Die *Rapid Orbits* haben eine ähnliche Genauigkeit (<5cm) und stehen schon 17 Stunden nach dem Ende eines Beobachtungstagen zur Verfügung. Die *Ultra Rapid Orbits* werden 4-mal täglich auf Basis von stündlichen Beobachtungsdaten berechnet. Sowohl *Ultra Rapid Orbits* (Genauigkeit von ca. 10 cm) als auch *Broadcast Ephemeriden* (Genauigkeit von ca. 200 cm) sind in Echtzeit verfügbar (Blumauer, 2005).
Die präzisen Bahndaten sind in einem Standard Orbit Format (sp3) auf der Homepage von IGS abrufbar. Die Dateien werden nach GPS Wochen sortiert. Die sp3-Dateien liefern vor allem Satellitenkoordinaten in einem kartesischen erdfesten Koordinatenrahmen (ITRF) in [km], und die Satellitenuhrfehler in [microseconds]. Sie können aber auch die Geschwindigkeiten der Satelliten in [dm/s] beinhalten. Alle Werte werden in einem Zeitintervall von 15 Minuten zur Verfügung gestellt.

Eine genaue Beschreibung mit Beispielen von sp3 und anderen Formaten befindet sich auf der Homepage von IGS: http://igscb.jpl.nasa.gov/igscb/data/format/.

2.7.1.1 Interpolation nach Lagrange

Wenn die schnell bewegten Objekte mit GPS positioniert werden, sollen die Messdaten in einem möglichst kleinen Zeitintervall (von 0,1 bzw. 0,2 Sekunden) erfasst werden. Die Bahndaten dagegen werden in einem Zeitabstand von 15 Minuten geliefert. Diese Werte müssen interpoliert werden. Weil die GPS-Satelliten sich sehr schnell auf ihren ellipsoidischen Bahnen bewegen (ca. 3,4 km/s), schreiten sie innerhalb 15 Minuten eine wesentliche Strecke ab. Das Zeitintervall ist zu groß um eine lineare Interpolation durchführen zu können. Im Gegenteil dazu, betrachtet die Interpolation nach Langrange den Satellitenweg als eine Funktion und kann annähernd seinen elliptischen Charakter berücksichtigen.

Eine allgemeine Interpolationsfunktion nach Lagrange sieht folgendermaßen aus (Dreszer et al., 1971):

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}. \qquad (2.15)$$

Eine Interpolationsfunktion durch drei bekannte Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) nimmt folgenden Gestalt an:

$$L_2(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \qquad (2.16)$$

Es gibt eine Reihe von störenden Kräften die auf den Satelliten einwirken. Zu diesen Störkräften gehören u. a. die Abweichung des Schwerefeldes der Erde von einem Zentralfeld, der Reibungswiderstand der Hochatmosphäre, die Wirkung von Sonne und Mond, der direkte und reflektierte Strahlungsdruck der Sonne und die Gezeiten der Meere und der festen Erde (Schuh, 1999). Das Auftreten der Störbeschleunigungen bewirkt Veränderungen der Bahnelemente. Die Satellitenbahn weicht somit von einer idealen Ellipse ab. Aus diesem Grund soll eine Interpolation aus zehn bekannten Punkten durchgeführt werden. Damit wird eine Funktion des neunten Grades gebildet und der reelle Weg des Satelliten approximiert.

Zuerst wird die Zeit mit einem gewünschten Schritt von z. B. 0,2 Sekunden linear interpoliert. Danach werden die Satellitendaten in Abhängigkeit von der Zeit mit dem unten dargestellten Formel berechnet.

Eine Interpolationsfunktion des neunten Grades sieht folgendermaßen aus:

$$L_9(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8)(x-x_9)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)(x_0-x_5)(x_0-x_6)(x_0-x_7)(x_0-x_8)(x_0-x_9)} +$$

$$+ y_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8)(x-x_9)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_1-x_6)(x_1-x_7)(x_1-x_8)(x_1-x_9)} +$$

$$+ y_2 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8)(x-x_9)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_2-x_6)(x_2-x_7)(x_2-x_8)(x_2-x_9)} +$$

$$+ y_3 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8)(x-x_9)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_3-x_6)(x_3-x_7)(x_3-x_8)(x_3-x_9)} +$$

$$+ y_4 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8)(x-x_9)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)(x_4-x_6)(x_4-x_7)(x_4-x_8)(x_4-x_9)} +$$

$$+ y_5 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8)(x-x_9)}{(x_5-x_0)(x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4)(x_5-x_6)(x_5-x_7)(x_5-x_8)(x_5-x_9)} +$$

$$+ y_6 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_7)(x-x_8)(x-x_9)}{(x_6-x_0)(x_6-x_1)(x_6-x_2)(x_6-x_3)(x_6-x_4)(x_6-x_5)(x_6-x_7)(x_6-x_8)(x_6-x_9)} +$$

$$+ y_7 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_8)(x-x_9)}{(x_7-x_0)(x_7-x_1)(x_7-x_2)(x_7-x_3)(x_7-x_4)(x_7-x_5)(x_7-x_6)(x_7-x_8)(x_7-x_9)} +$$

$$+ y_8 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_9)}{(x_8-x_0)(x_8-x_1)(x_8-x_2)(x_8-x_3)(x_8-x_4)(x_8-x_5)(x_8-x_6)(x_8-x_7)(x_8-x_9)} +$$

$$+ y_9 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)(x-x_7)(x-x_8)}{(x_9-x_0)(x_9-x_1)(x_9-x_2)(x_9-x_3)(x_9-x_4)(x_9-x_5)(x_9-x_6)(x_9-x_7)(x_9-x_8)}. \quad (2.17)$$

2.7.2 RINEX

Das Receiver Independent Exchange Format (RINEX) ist ein international anerkanntes, empfängerunabhängiges, und von beinahe allen Herstellen unterstütztes ASCII-Austauschformat. Es dient als Standardformat für den Austausch von GPS-Beobachtungsdaten, Navigationsinformation und meteorologischer Messaufnahmen an den GPS-Referenzstationen. Aktuell gibt es somit mehrere Typen von RINEX Files, wobei für die vorliegende Arbeit vor allem das *RINEX: Observation Data File* von Bedeutung ist, da die Bahninformation über sp3-Dateien eingelesen

wurde.

Jede RINEX Datei besteht aus einem Header und einem Datensegment.

Das Observation Date File enthält die Näherungskoordinaten des Empfängers und vor allem die gemessenen Code-Pseudoranges und Phasenbeobachtungen zu jedem sichtbaren Satelliten in jeder Messepoche.

Es gibt folgende Arten Beobachtungstypen:

- L1, L2: Phasenmessungen auf L1 und L2
- C1 : Pseudorange mit C/A-Code auf L1
- P1, P2: Pseudorange mit P-Code auf L1 und L2
- D1, D2: Doppler-Frequenz auf L1 und L2
- S1, S2: Signal-/Rauschverhältnis auf L1 und L2
- L2C : Pseudorange mit L2C-Code auf L2.

Das zugehörige *GPS Navigation Message File* enthält dagegen unter anderem die Keplerelemente aller Satelliten im Zweistundentakt.

3 Koordinatensysteme

Ein Referenzsystem (reference system) ist eine ideale Definition eines Koordinatensystems. Ein Referenzrahmen (reference frame) dagegen ist die konkrete Realisierung eines Referenzsystems durch Fixpunkte mit ihren Koordinaten.
Ein raumfestes Referenzsystem bezieht sich auf eine Anzahl ausgewählter extragalaktischer Radioquellen (Quasaren) oder Sternen, die als ruhend gelten. Es realisiert ein Inertialsystem, das sich gleichförmig, unbeschleunigt bewegt (Newton'sche Axiom). Im Gegensatz dazu dreht sich ein erdfestes Referenzsystem mit der rotierenden Erde mit und ist an terrestrische Bezugspunkte (Fundamentalstationen) gebunden. Die Transformation zwischen den beiden Koordinatensystemen wird mit Hilfe von mehreren Rotationsmatrizen, die die Präzession und die Nutation der Erdrotationsachse, die Phase der Erdrotation sowie die Polbewegung berücksichtigen.

3.1 Kartesische Koordinatensysteme

Ein dreidimensionales orthogonales kartesisches Koordinatensystem besteht aus einem Ursprung und drei Koordinatenachsen, die normal aufeinander stehen und sich im Ursprung schneiden. Sein Maßstab wird durch normierte Einheitsvektoren definiert.

3.1.1 Conventional Inertial System (CIS)

Das Conventional Inertial System (CIS) ist ein raumfestes, nicht rotierendes, kartesisches Koordinatensystem. Sein Ursprung befindet sich im Geozentrum. Die Z-Achse stimmt mit der Drehimpulsachse der Erde (Celestial Ephemeris Pole (CEP)) zur Standardepoche J2000.0 (01. 01. 2000 12h UT) überein. Die X-Achse zeigt zum Frühlingspunkt und die Y-Achse liegt in der Ebene des Himmelsäquators, normal zur X-Achse.
Die Verwirklichung des CIS erfolgt als konventionelles kinematisches System oder als konventionelles dynamisches System.

3.1.2 Conventional Terrestrial System (CTS)

Das Conventional Terrestrial System (CTS) ist ein erdfestes, kartesisches Koordinatensystem, das mit der Erde rotiert. Sein Ursprung befindet sich im Geozentrum. Die Z-Achse weist in Richtung des Conventional International Origin (CIO), das den mittleren Pol der Jahre 1900 – 1905 repräsentiert. Die X-Achse ist die Schnittgerade zwischen dem Erdäquator und der Meridianebene von Greenwich. Die Y-Achse (normal zur X-Achse) liegt somit ebenfalls in der Äquatorebene und zeigt positiv in Richtung Osten.

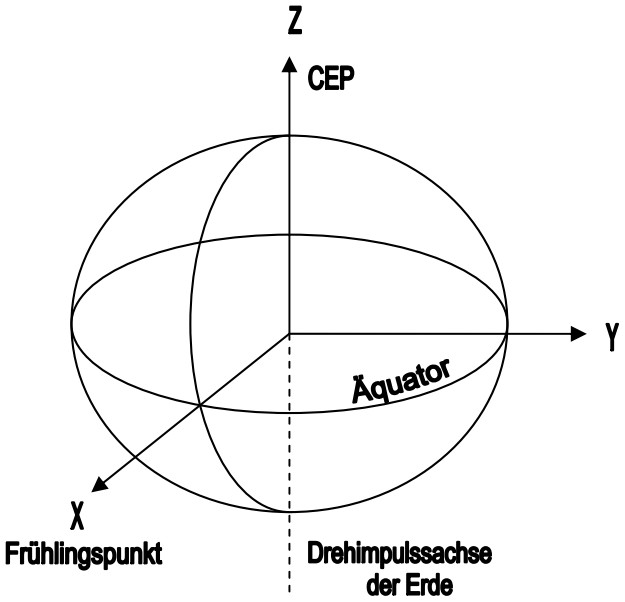


Abb. 3–1: Conventional Inertial System

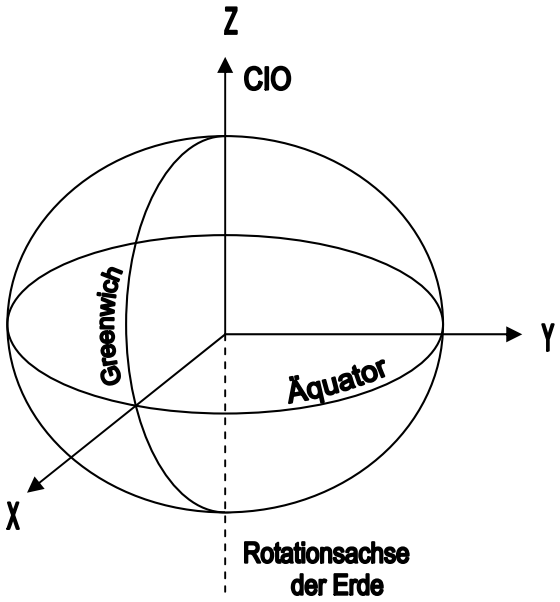


Abb. 3–2: Conventional Terrestrial System

3.1.2.1 International Terrestrial Reference Frame (ITRF)

Das International Terrestrial Reference Frame (ITRF) ist die Realisierung eines CTS (des International Terrestrial Reference System). Es stützt sich auf eine große Anzahl an Fundamentalstationen. Dieser Referenzrahmen ist eine Kombination aus den Lösungen der verschiedenen Beobachtungstechniken: Very Long Baseline Interferometrie (VLBI), Lunar Laser Ranging (LLR), Satellite Laser Ranging (SLR), Global Positioning System (GPS) und Doppler Orbitography and Radio-positioning Integrated by Satellite (DORIS). Aufgrund der Kontinentalplattenverschiebung (max. 8 cm/Jahr) entstehen Änderungen in den Koordinaten der Fundamentalstationen. Deswegen muss das ITRF regelmäßig neu berechnet werden. Die letzte Realisierung wird mit ITRF2005 bezeichnet und bezieht sich auf die Epoche 2000.0.

3.1.2.1.1 European Terrestrial Reference Frame (ETRF)

Das European Terrestrial Reference Frame (ETRF) ist die Realisierung eines CTS (des European Terrestrial Reference System). Das ETRS wurde auf Basis vom ITRF so festgelegt, dass die Bewegung der eurasischen Platte gegenüber dem globalen Bezugsrahmen (etwa 2 cm/Jahr) die Koordinaten der Fundamentalstationen auf der eurasischen Platte nicht mehr beeinflusst. Die letzte Realisierung wird mit ETRF2005 bezeichnet und vom ITRF2005 abgeleitet.

3.1.2.2 World Geodetic System 1984 (WGS84)

Das World Geodetic System 1984 entspricht einem CTS, und beruht auf den Parametern des geodätischen Referenzsystems 1980 (GRS80) inklusive einer harmonischen Entwicklung des Erdschwerefeldes bis zu Grad und Ordnung 180. Die Dimensionen des Ellipsoids sind so bemessen, dass das Quadrat der Summe aller Geoindulationen minimiert wird. Das Geoid liegt teilweise über, teilweise unter dem Ellipsoid, und zwar so, dass beide das gleiche Volumen einschließen.
Das WGS84 ist durch fünf weltweit verteilte Kontrollstationen realisiert. Es ist in verschiedenen Ausprägungen das Bezugssystem des GPS seit den frühen 80-er Jahren (Weber, 2005).

3.1.3 Geodätisches Datum

Unter dem Ausdruck „Geodätisches Datum“ versteht man alle Angaben, die sich auf ein Ellipsoid und seine Lagerung relativ zum Erdkörper beziehen und damit die Definition eines Koordinatensystems ermöglichen. Es werden 10 Parameter benötigt, um ein GD zu definieren: 7 Parameter für die geometrische Festlegung eines Koordinatensystems im Raum, 2 Parameter für die Größe und die Form des gewählten Referenzellipsoides und 1 Parameter für die Festlegung der lokalen Höhenbezugsfläche. Einige gut bekannte geodätische Datumen sind: WGS84, ITRF, ETRF, oder das in Österreich gebräuchliche MGI (Weber, 2005).

3.1.4 Transformation kartesischer Koordinatensysteme

In der Geodäsie setzt sich eine Koordinatentransformation aus einer Verschiebung des Koordinatenursprungs (Translation), einer oder mehreren Drehungen (Rotation) und einer Maßstabsänderung zusammen. Dazu werden 7 Parameter eines Geodätischen Datums für die geometrische Festlegung eines Koordinatensystems im Raum benötigt: 3 Lage-, 3 Orientierungsparameter und 1 Maßstab.
Die 7 Parameter Transformation kartesischer Koordinatensysteme wird in der Geodäsie auch die räumliche Helmert-Transformation genannt und entweder durch das Bursa-Wolf-Modell oder durch das Molodensky-Badekas-Modell beschrieben. In dem Bursa-Wolf-Modell wird die Drehung um den Ursprung des alten Systems vorgenommen und anschließend ein entsprechender Verschiebungsvektor addiert. In dem Molodensky-Badekas-Modell dagegen werden zuerst die Verschiebung und danach die Rotation durchgeführt. Werden zwei geozentrische Koordinatensysteme transformiert, ist das Bursa-Wolf-Modell optimal. Wenn aber ein lokales Koordinatensystem in ein geozentrisches Koordinatensystem transformiert wird, ist der Distanz des lokalen Ursprungs zum Geozentrum groß und es kann das Molodensky-Badekas-Modell mit Vorteil angewendet werden (Weber, 2005).

Die räumliche Helmert-Transformation hat folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} + (1+m) \cdot \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

wobei der Maßstabsfaktor üblicherweise in Einheiten von $1*10^{-6}$, also in ppm (mm/km) ausgedrückt wird.
Die Rotationsmatrix R setzt sich aus einzelnen Drehungen um die X-, Y- und Z-Achse zusammen (Schuh, 1999).

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega_x & \sin\omega_x \\ 0 & -\sin\omega_x & \cos\omega_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \cos\omega_y & 0 & -\sin\omega y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\omega_y & 0 & \cos\omega_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos\omega_z & \sin\omega_z & 0 \\ -\sin\omega_z & \cos\omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z\mathbf{R}_y\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} c\omega_y c\omega_z & s\omega_x s\omega_y c\omega_z + c\omega_x s\omega_z & -c\omega_x s\omega_y c\omega_z + s\omega_x s\omega_z \\ -c\omega_y s\omega_z & -s\omega_x s\omega_y s\omega_z + c\omega_x c\omega_z & c\omega_x s\omega_y s\omega_z + s\omega_x c\omega_z \\ s\omega_y & -s\omega_x c\omega_y & c\omega_x c\omega_y \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Wenn die Rotationswinkel sehr klein sind, dürfen die Cosinus gleich 1 und die Sinus gleich den Bögen gesetzt werden. Dadurch kann die allgemeine Rotationsmatrix folgende vereinfachte Form annehmen (Schuh, 1999):

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

3.1.4.1 Transformation ITRF → MGI

Um die GPS-Koordinaten des globalen Bezugssystems WGS84 genähert in das österreichische Landeskoordinatensystem zu transformieren, bedient man sich folgender 7 Parameter (Weber, 2005):

- die Verschiebungsvektoren: $\delta x = -575m \pm 7m$
  $\delta y = -93m \pm 5m$
  $\delta z = -466m \pm 7m$

- die Rotationswinkel: $\omega_x = +5{,}1'' \pm 0{,}1''$
  $\omega_y = +1{,}6'' \pm 0{,}3''$
  $\omega_z = +5{,}2'' \pm 0{,}1''$

– der Maßstabsfaktor: $m = -2{,}5\,ppm \pm 0{,}6\,ppm$.

Nach der Helmert-Transformation ergeben sich die kartesischen Landeskoordinaten. Es ist noch die Transformation in das geografische Koordinatensystem und die Verebnung mittels Gauss-Krüger Projektion durchzuführen.

3. 2 Ellipsoidisches geographisches Koordinatensystem

Ein Punkt auf bzw. über dem Rotationsellipsoid wird durch ellipsoidische Breite, ellipsoidische Länge und ellipsoidische Höhe angegeben. Die ellipsoidische Breite B (geographische Breite φ) ist ein Winkel, den die Flächennormale in einem Punkt des Ellipsoides mit der Äquatorebene bildet. Die ellipsoidische Länge L (geographische Länge λ) ist ein Winkel zwischen der Meridianebene eines Punktes und der Nullmeridianebene (Greenwich-Meridianebene). Die ellipsoidische Höhe H ist die Länge der Ellipsoidnormalen zwischen einem Punkt und dem Referenzellipsoid.
Ein mittleres Erdellipsoid ist das Rotationsellipsoid, das sich dem Geoid in seiner Gesamtheit maximal gut anpasst (zum Beispiel Geodätisches Referenzsystem 1980 (GRS80)). Im Gegensatz dazu passt sich ein Referenzellipsoid einem bestimmten Teil des Geoids an. Es gibt viele solcher Referenzellipsoide, die sich in ihrer Abmessungen und in der Lage ihrer Achsen im Erdkörper voneinander unterscheiden.

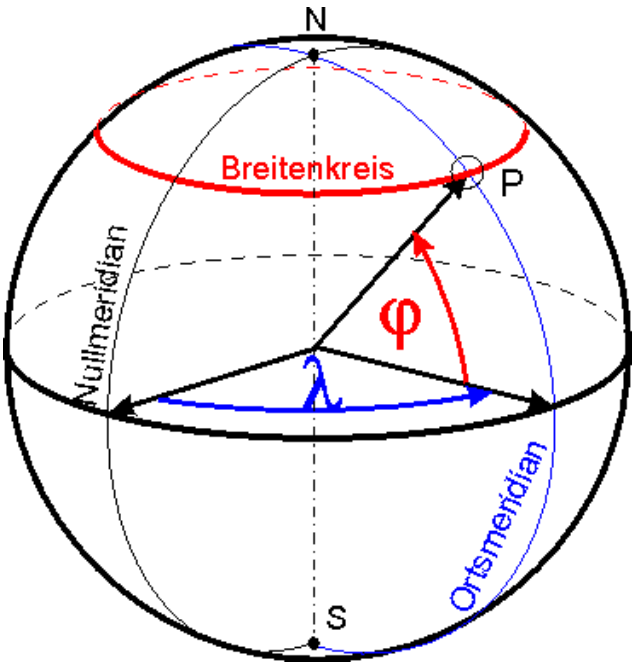


Abb. 3–3: Geographische Koordinaten
http://leifi.physik.uni-muenchen.de/web_ph12/grundwissen/12himmelskugel/koordinaten.htm

Die österreichische Landesvermessung bezieht sich auf das Bessel-Ellipsoid (Schuh, 1999):

a	=	6 377 397, 155 m	(große Halbachse)
b	=	6 356 078, 962 m	(kleine Halbachse)
c	=	6 398 786, 848 m	(Polkrümmungsradius)
f	=	0.00334277315367	(Abplattung)
e^2	=	0.00667437223115	(1. Exzentrität)
e'^2	=	0.00671921879852	(2. Exzentrität).

3.2.1 Transformation kartesischer Koordinaten in ellipsoidische Koordinaten

Zur Transformation kartesischer Koordinaten in ellipsoidische Koordinaten werden folgende Formeln benutzt:

$$L = \arctan\frac{Y}{X}, \quad r = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 B}},$$
$$B = \frac{1}{\arctan\left(\frac{r - e^2 \cdot N \cdot \cos B}{Z}\right)}, \quad H = \frac{r}{\cos B} - N, \tag{3.4}$$

wobei der Querkrümmungsradius N und die ellipsoidische Breite B iterativ berechnet werden.

3.3 Gauss-Krüger Projektion

Die Abbildung von Punkten der Oberfläche des Ellipsoides in die Ebene wird zur Darstellung in Karten und Plänen benötigt. Dazu ist eine mathematische Projektionsvorschrift nötig. In Österreich wird seit 1921 die Gauss-Krüger-Projektion verwendet. Sie stellt eine transversale Zylinderprojektion des Ellipsoides in die Ebene dar. Die Abbildung ist winkeltreu. Das bedeutet, dass ein Winkel im Urbild in den kleinsten Teilen dem Winkel im Abbild ist. Nur ein schmaler Streifen östlich und westlich des Berührmeridians wird abgebildet. Die Abbildung des Mittelmeridians ist streckentreu. Je größer aber der Abstand von ihm ist, desto größer wird die Streckenverzerrung. Diese beträgt 31 mm / 123 mm / 276 mm in einer Entfernung von 50 km / 100 km / 150 km vom Berührmeridian. Die Berechnungen wurden auf die Besselellipsoid in der Breite von 48° bezogen und für eine Streckenlänge von 1000 m durchgeführt.

Die x-Achse des GK-Koordinatensystems ist die ebene, geradlinige, längentreue Abbildung des jeweiligen Berührmeridians. Die x-Koordinaten werden positiv vom Äquator nach Norden gezählt. Die y-Achse ist die ebene, geradlinige Abbildung des Äquators. Die y-Koordinaten werden positiv nach Osten und negativ nach Westen gezählt.

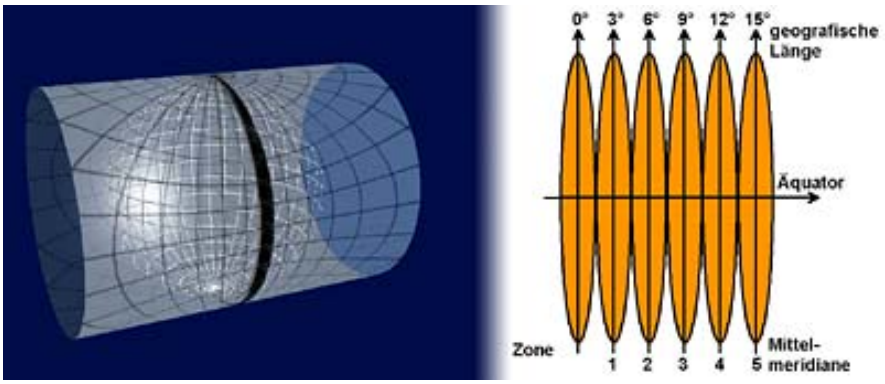


Abb. 3–4: Gauss-Krüger Projektion
http://www.kowoma.de/gps/geo/Grids.htm

Um die konforme Meridianstreifenprojektion nach Gauß-Krüger durchzuführen, werden zuerst die Koeffizienten zur Berechnung des Meridianbogens festgelegt (Weber, 2005):

$$\alpha = a\frac{\Pi}{180}(1-e^2)(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6)$$
$$\beta = \frac{1}{2}a(1-e^2)(\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6)$$
$$\gamma = \frac{1}{4}a(1-e^2)(\frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6)$$
$$\delta = \frac{1}{6}a(1-e^2)(\frac{35}{512}e^6)\,. \qquad (3.5)$$

Die Koeffizienten für das Bessel-Ellipsoid betragen (Schuh, 1999):

$$\alpha = 111120{,}6196m/°$$
$$\beta = 15988{,}6385m$$
$$\gamma = 16{,}7300m$$
$$\delta = 0{,}0218m\,.$$

Aus folgenden Näherungsformeln (Weber, 2005):

$$V = \sqrt{1+e'^2\cdot\cos^2 B}\,,$$
$$B_F = \arctan\left[\frac{\tan B}{\cos(\Delta L\cdot V)}\right],$$
$$V_F = \sqrt{1+e'^2\cdot\cos^2 B_F}\,,$$
$$p = \frac{1}{V_F}\cdot\tan\Delta L\cdot\cos B_F\,,\quad c = \frac{a^2}{b} \qquad (3.6)$$

lassen sich die ebenen konformen Koordinaten berechnen:

$$x = \alpha \cdot B_F - \beta \cdot \sin 2B_F + \gamma \cdot \sin 4B_F - \delta \cdot \sin 6B_F$$
$$y = c \cdot \ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right). \qquad (3.7)$$

3.3.1 Das Österreichische Datum MGI

Das Datum des Österreichischen Gebrauchssystems wurde gegen Ende des 19. Jh. vom Militargeographischen Institut (MGI) eingeführt. Es basiert auf einem Bessel-Ellipsoid, welches im Fundamentalpunkt am Hermannskogel in der Nähe von Wien gelagert ist.
Österreichische Landkarten basieren auf der transversalen Mercator Projektion (Gauß-Krüger) und auf der konformen Kegelprojekion von Lambert mit zwei isometrischen Parallelen. Aufgrund historischer und praktischer Gründe erfolgt die Längenzählung des MGI nicht von Greenwich, sondern von Ferro (die westlichste der Kanarischen Inseln), was genau 20° westlich des Bezugspunktes des astronomischen Observatoriums in Paris entspricht. Der Unterschied der geographischen Längen von Ferro und Greeenwich beträgt (Weber, 2005):

$$\Delta_{Gr} = \Delta_F - 17°40'00''.$$

Die auf Ferro bezogenen Berührmeridiane lauten M28 (28° östlich von Ferro, ~Landeck), M31 (~Salzburg) und M34 (Wien). In jedem der drei Meridianstreifen werden nun die Gebiete 1,5° östlich und westlich des Bezugsmeridians abgebildet.

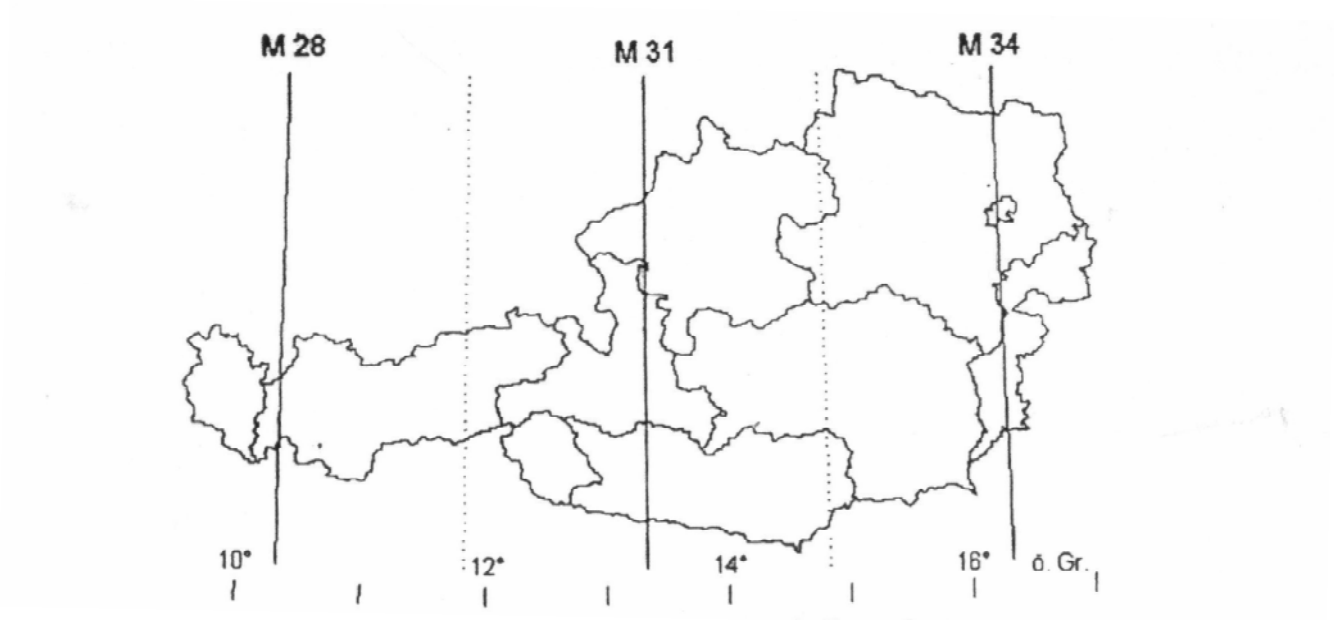


Abb. 3–5: Das österreichische Meridianstreifensystem (aus Weber, 2005)

3.3.1.1 Das Bundesmeldenetz (BMN)

Um negative Werte in den y-Koordinaten zu vermeiden wird abhängig vom Meridianstreifen ein bestimmter Betrag zu den y- Koordinaten addiert.
Die neuen Koordinaten werden in **Rechtswert** und **Hochwert** unbenannt. Sie bilden das österreichische Bundesmeldenetz.

Rechtswert	im M28:	R = y + 150 000 m
	im M31:	R = y + 450 000 m
	im M34:	R = y + 750 000 m

Hochwert: H = x – 5 000 000, 000 m.

In den Graphiken in den Kapiteln 5 und 6 sind die ebenen Koordinaten der Fahrzeugtrajektorien jeweils als Rechts- und Hochwert abgebildet.

4 Kalman Filter

4.1 Historie

Der Kalman Filter Algorithmus wurde im Jahr 1960 von Rudolf Kalman entwickelt. Prof. Rudolf Kalman wurde in Budapest geboren, wanderte jedoch in die USA. Er studierte am Massachusetts Institute of Technology. Im Jahr 1957 erhielt er seinen Doktor an der Columbia University. Von 1958 bis 1964 arbeitete er am Research Institute for Advanced Study und erhielt 1964 eine Professur an der Standford University. 1971 wechselte er als Direktor des Zentrums für mathematische Theorie an die University of Florida. Gleichzeitig übernahm er die Leitung des Zentrums für mathematische Theorie an der ETH Zürich. 1997 wurde er an der ETH Zürich emeritiert. Prof. Rudolf Kalman hat je einen Wohnsitz in Zürich und in Florida. Für seine Arbeit hat er bereits mehrere bedeutende wissenschaftliche Preise bekommen, darunter den Charles Stark Draper Prize 2008, einen der wichtigsten Preise in den Ingenieurwissenschaften und in diesen Disziplinen ähnlich bedeutend wie der Nobelpreis.

Abb. 4–1: Der emeritierte ETH-Mathematik-Professor Rudolf E. Kalman
http://www.ethlife.ethz.ch/archive_articles/080103-draperprize

4.2 Systembeschreibung

Der Kalman Filter trennt das Nutzsignal vom Störsignal. Es erlaubt einerseits die Nutzinformationen möglichst störungsfrei bereitzustellen und anderseits die Einwirkungen von Störungsgrößen zu untersuchen (Fragner, 1998).
Im Kalman Filter wird der wahrscheinlichste Wert prädiziert, also vorausberechnet, und dann mit dem tatsächlich gemessenen Wert verglichen. Die Differenz der beiden Werte wird Innovation genannt und dient der Korrektur des aktuellen Zustandes. Aufgrund der Korrektur wird die Systembeschreibung und dadurch die Vorausberechnung für den nächsten Ort immer präziser. Die prädizierten Parameter werden auch dann geliefert, wenn keine Beobachtungen verfügbar sind. Der entscheidende Vorteil des Kalman Filters gegenüber anderen stochastischen Schätzverfahren ist seine iterative Struktur, die ihn für den Einsatz in Echtzeitanwendungen qualifiziert.

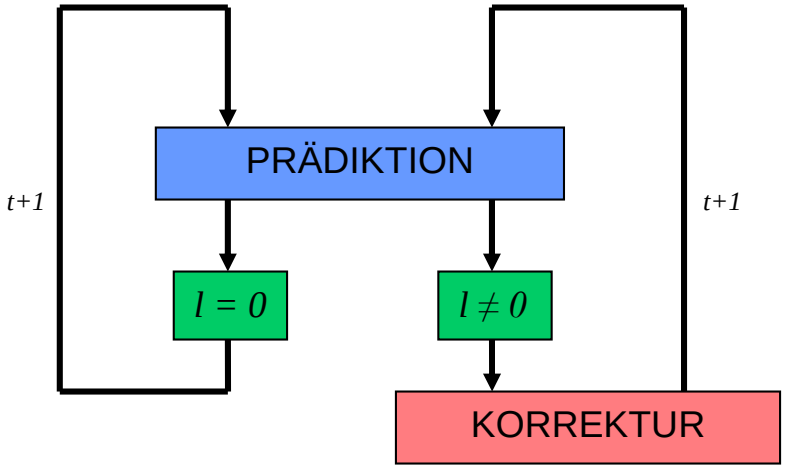


Abb. 4–2: Vereinfachte Darstellung der Kalman Filterung

Dank Kalmans Ideen erreichten viele Technologien eine unvorstellbare Genauigkeit. Erste große Anerkennung fand die Methode in der Luftfahrt und in militärischen Leit-, Navigations- und Kontrollsystemen. Der Kalman Filter wurde 1967 während des Apollo-Programms eingesetzt. Nach anfänglicher Skepsis wurde er rasch auf andere Systeme und Technologien aus fast allen Ingenieurzweigen übertragen. Der Kalman Filter hat so unter anderem weite Verbreitung in der Inertialnavigation gefunden. Er spielt zunehmend eine Rolle im Automobillbereich als Trackingfilter und findet natürlich Anwendung in der Navigation, beispielsweise zur Ermittlung der Fahrzeugspositionen oder zur Satellitenbahnbestimmung. Aber auch in Überwachungsmesssystemen oder in verschiedenen Arten von Radio-, Video- und Kommunikationsgeräten ist er implementiert. Immer wieder werden neue Anwendungen entdeckt, zum Beispiel hydrologische Modelle, Beobachtungen der Atmosphäre oder auch automatisierte Medikamentenabgabe.

4.3 Filteralgorithmus

Der Kalman Filter Algorithmus besteht aus zwei grundlegenden Modulen: Prädiktion und Korrektur. Die Beobachtungsgleichung verknüpft Messungen mit Zustandsgrößen des Prozesses. Solange keine Messungen vorliegen, also die Beobachtungsgleichung keinen Wert liefert, werden nur die Prädiktionsgleichungen benutzt. Treffen für einen Zeitpunkt Beobachtungen ein, tritt auch die zweite Formelgruppe in Aktion: die prädizierten Koordinaten werden mit den tatsächlich gemessenen Werten in der Innovation verglichen und die Korrekturen ermittelt. Die korrigierten Werte werden wieder in der Prädiktion der nächsten Epoche verwendet (Fragner, 1998).

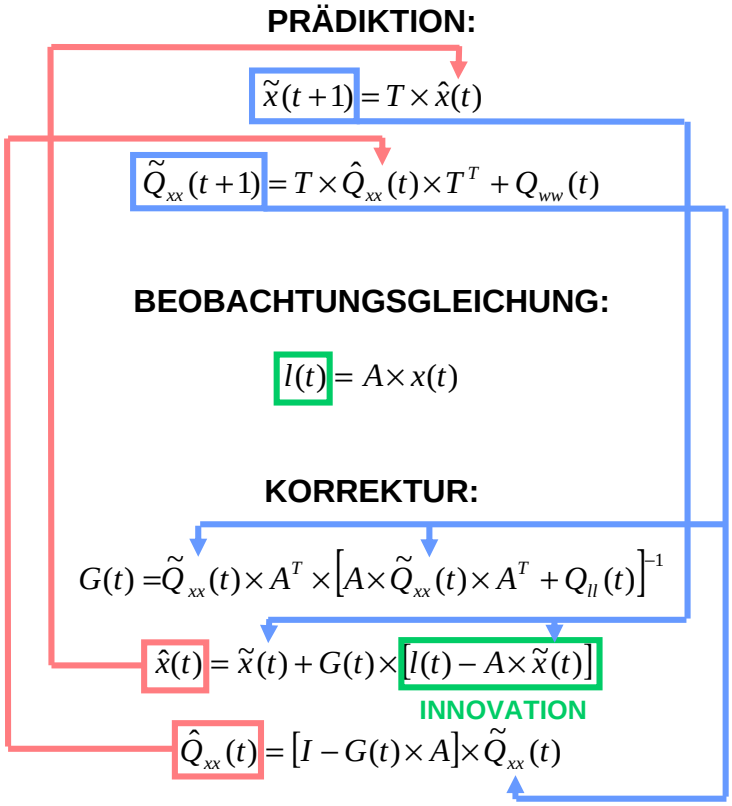


Abb. 4–3 Kalmanalgorithmus

4.3.1. Beschreibung der Filterkomponenten

Zustandsvektor *x*

statisch v=0 a=0	kinematisch v=const a=0	kinematisch beschleunigt a=const
$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$

Der Zustandsvektor setzt sich aus den folgenden Teilen zusammen: aus dem aktuellen Positionsvektor im statischen Fall, aus dem aktuellen Positionsvektor und

Geschwindigkeitsvektor im kinematischen Fall und zusätzlich noch aus dem Beschleunigungsvektor im beschleunigten Fall.
Pseudoranges als Beobachtungsgrößen erfordern zusätzlich die Schätzung des Empfängeruhrfehlers Δt_E. Im Fall von Phasen-Pseudoranges sind auch Mehrdeutigkeiten N als Parameter anzusetzen oder zumindest als konstante Streckenoffsets zu berücksichtigen. Die zeitlichen Ableitungen werden aber nur für die Positionen geschätzt.

Kovarianzmatrix des Zustandsvektors Q_{xx}

Die Kovarianzmatrix des Zustandsvektors liefert in jedem Berechnungsschritt die Standardabweichungen der im Zustandsvektor geschätzten Parameter. In der ersten Epoche werden allerdings nur Varianzen angegeben. Die gemischten Glieder (Kovarianzen) folgen ab der 2. Epoche aus dem Filteralgorithmus.

Statisch v=0 a=0	**kinematisch v=const a=0**
$\begin{bmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_y^2 & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_z^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} s_x^2 & s_{xy} & s_{xz} & s_{xv_x} & s_{xv_y} & s_{xv_z} \\ s_{yx} & s_y^2 & s_{yz} & s_{yv_x} & s_{yv_y} & s_{yv_z} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_z^2 & s_{zv_x} & s_{zv_y} & s_{xv_z} \\ s_{v_xx} & s_{v_xy} & s_{v_xz} & s_{v_x}^2 & s_{v_xv_y} & s_{v_xv_z} \\ s_{v_yx} & s_{v_yy} & s_{v_yz} & s_{v_yv_x} & s_{v_y}^2 & s_{v_yv_z} \\ s_{v_zx} & s_{v_zy} & s_{v_zz} & s_{v_zv_x} & s_{v_zv_y} & s_{v_z}^2 \end{bmatrix}$

Transitionsmatrix T

Statisch v=0 a=0	**kinematisch v=const a=0**	**kinematisch beschleunigt a=const**
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\tilde{x} = \hat{x}$	$\tilde{x} = \hat{x} + \hat{v} \times \Delta t$	$\tilde{x} = \hat{x} + \hat{v} \times \Delta t + \frac{1}{2} \times \hat{a} \times \Delta t^2$

Die Transitionsmatrix beschreibt das Bewegungsmodell, also den Übergang des Zustandsvektors von einem Zeitpunkt auf den nächsten. Sie dient der Berechnung der Prädiktion. Die Multiplikation der Transitionsmatrix mit dem Zustandsvektor ergibt den prädizierten Wert des Zustandsvektors in der nächsten Epoche. In der vorliegenden Arbeit wurden als Bewegungsmodelle: der statische Fall, die gleichförmige Bewegung und die konstant beschleunigte Bewegung behandelt.

Beobachtungsmatrix *A*

Die Beobachtungsmatrix beschreibt den linearisierten Zusammenhang zwischen dem Zustandsvektor und der Beobachtung. Ihre Dimension hängt von der Anzahl der Beobachtungsgrößen ab. In der ersten Entwicklungsstufe des Programms werden direkt Koordinaten beobachtet und damit folgt für A:

Statisch **v=0 a=0**	**kinematisch** **v=const a=0**	**kinematisch beschleunigt** **a=const**
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Systemrauschen Q_{ww}

Das Systemrauschen ist die Kovarianzmatrix des Störgrößenvektors. Dieser entsteht durch die nicht modellierbaren Störkräfte, die auf den bewegten Punkt wirken. Das Systemrauschen wird zur Berechnung der Prädiktion verwendet. Es spiegelt die Abweichung von der Systembeschreibung wieder. Ein großes Systemrauschen kann zu ungenauer Prädiktion führen.

Statisch **v=0 a=0**	**kinematisch** **v=const a=0**	**kinematisch beschleunigt a=const**
$\begin{bmatrix} s_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & s_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & s_z^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} s_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{v_x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{v_y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{v_z}^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} s_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{v_x}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{v_y}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{v_z}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{a_x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{a_y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{a_z}^2 \end{bmatrix}$

Gainmatrix *G*

Die Gainmatrix, auch Verstärkerungsmatrix genannt, legt die Gewichtung zwischen der Messung und der Prädiktion fest. Sie berechnet sich aus dem Beobachtungsrauschen und dem Fehlerverhalten der Parameter. Sie bestimmt, ob die geschätzten Parameter nahe der Prädiktion oder nahe der Messungen liegen. Eine große Gainmatrix ist Folge eines geringen Beobachtungsrauschen und/oder eines großen Systemrauschen – also eines verstärktes Einflusses von Messungen. Bei kleiner Gainmatrix dagegen steigt die Bedeutung der Prädiktion.

Beobachtungsvektor *l*

Der Beobachtungsvektor enthält die Beobachtungen. Im aktuellen Fall sind es Koordinaten, die sich automatisch aus der Multiplikation vom Zustandsvektor mit der Beobachtungsmatrix ergeben. Es könnten aber auch Pseudoranges sein [siehe Kapitel 6]. Dann hängt die Größe des Beobachtungsvektors von der Anzahl der sichtbaren Satelliten ab.

Beobachtungsrauschen Q_{ll}

Das Beobachtungsrauschen beschreibt die Genauigkeit der Beobachtungen. Es enthält die Standardabweichungen der eingehenden Beobachtungen. Im statischen Fall entspricht das Beobachtungsrauschen der Kovarianzmatrix des Zustandsvektors. Große Werte in Q_{ll} bedeuten, dass die Messungen unsicher sind. Als Reaktion darauf, steigt der Einfluss der Prädiktion, was sich in einer kleinen Gainmatrix äußert. Kleine Werte des Beobachtungsrauschens (im Verhältnis zum Systemrauschen) bedeuten, dass man den Messungen mehr als dem Modell vertrauen soll. Liegen als Beobachtungen die Koordinaten des Fahrzeuges vor, hat Q_{ll} in jedem gewählten Bewegungsmodell die Gestalt:

Statisch **v=0 a=0**	**kinematisch** **v=const a=0**	**kinematisch beschleunigt** **a=const**
$\begin{bmatrix} s_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & s_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & s_z^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} s_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & s_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & s_z^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} s_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & s_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & s_z^2 \end{bmatrix}$

4.3.2 Verträglichkeitstest

Ein Maß für die Verträglichkeit zwischen Prädiktion und Messungen ist vor allem die Innovation: $d = l - A \times \tilde{x}$, aber auch ein Glied der Gainmatrix: $D = A \times \tilde{Q}_{xx} \times A^T + Q_{ll}$. Die Testgröße θ (Theta) wird wie folgt berechnet:

$$\theta = d^T \times D^{-1} \times d \,. \tag{4.1}$$

Zu jeder Epoche, in der ein Update stattfinden soll, muss θ kleiner als das Quantil der Chi-Quadrat-Verteilung sein. Die Anzahl der Freiheitsgrade entspricht der Anzahl der Messungen pro Epoche.

Wenn die Koordinaten als Messgröße in den Kalman Filter gezogen werden, dann handelt es sich um die Anzahl der Koordinaten. Für drei Koordinaten und einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% soll $\theta < 7{,}81$ sein. Falls die Koordinaten direkt aus Pseudoranges gerechnet und gefiltert werden, entspricht die Anzahl der Freiheitsgrade der Anzahl der sichtbaren Satelliten: für vier Satelliten $\theta < 9{,}49$ und für sieben Satelliten $\theta < 14{,}07$ [siehe Anhang 9.2].

Schlägt der Test fehl, deutet dies darauf hin, dass es entweder grobe Fehler in der Beobachtung gibt, oder dass das Systemrauschen Q_{ww} bzw. das Beobachtungsrauschen Q_{ll} unpassend angesetzt wurde.

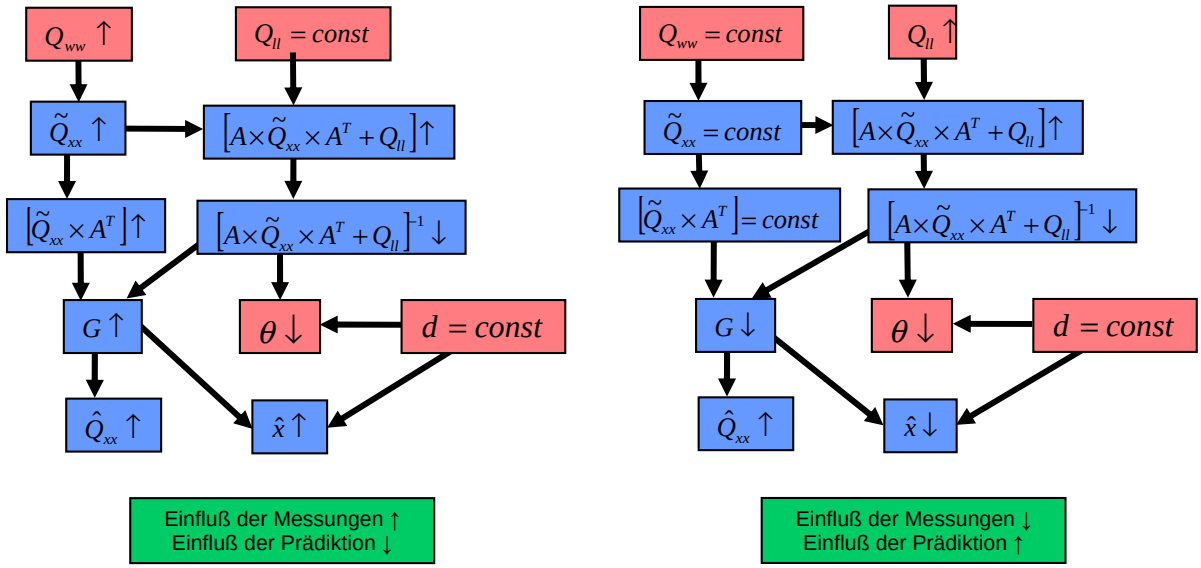


Abb. 4–4: Einfluss der Vergrößerung des System- bzw. Beobachtungsrauschens

Der Verträglichkeitstest ermöglicht zusätzlich eine Beobachtung der Zusammenhänge zwischen den einzelnen Matrizen. Den Wert von θ kann man verkleinern, indem man den Wert des Systemrauschen Q_{ww} erhöht. Dadurch steigt der Wert der

prädizierten Kovarianzmatrix des Zustandsvektors $\tilde{Q}_{xx}$ und schließlich die Gainmatrix G. Anderseits, wenn das Systemrauschen Q_{ww} konstant ist, bleibt auch die prädizierte Kovarianzmatrix des Zustandsvektors $\tilde{Q}_{xx}$ konstant. Die Erhöhung des Beobachtungrauschens Q_{ll} kann aber eine Minderung des Wertes der Gainmatrix G bewirken. Eine große Gainmatrix informiert den Kalman Filter, dass er mehr Gewicht den Messungen geben soll. Im Gegenteil dazu, bedeutet eine kleine Gainmatrix, dass die gefilterte Positionen mehr Informationen von der Prädiktion als von der Messung nehmen sollen. Die Grafik 4-4 bildet näher die oben beschriebenen Matrizenrelationen ab. Zusätzlich gibt es im Anhang 9.3 ein Beispiel in tabellarischer Form zu dieser Grafik.

4.4 Praktische Beispiele

4.4.1 Statischer Fall

Um die Wirkung des Kalman Filters in der GPS-Positionierung zu untersuchen, wurden auf einem Gebäude der Technischen Universität Wien vorerst statische Messungen durchgeführt. Die errechneten Einzelpositionen wurden in der Folge mit dem entwickelten KF-Programm gefiltert. Die Abbildung 4-5 zeigt die Rohkoordinaten und die gefilterten Koordinaten nach der Transformation und der Projektion in das österreichische Bundesmeldenetz (BMN). Die Wirkung der Kalman Filterung tritt in Form der Glättung der Positionen auf.

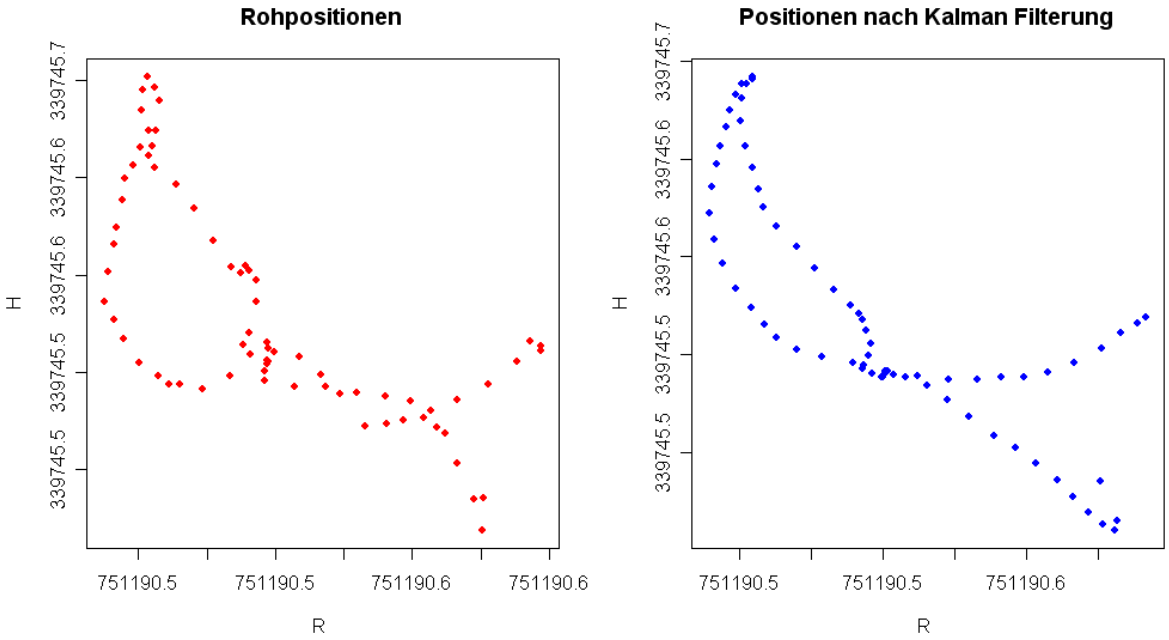


Abb. 4–5 Rohkoordinaten und gefilterte Koordinaten im BMN in [m] in einem statischen Fall

4.4.1.1 Simulierter kinematischer Fall mit konstanter Geschwindigkeit

Mit den zur Verfügung stehenden statischen Daten ist die Durchführung einer Simulation der kinematischen Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit möglich. Das kann durch die adäquate Änderung der Beobachtungsmatrix erreicht werden. Die neue Matrix *A* enthält somit Daten nicht nur in Koordinatenspalten, sondern auch in den Spalten für die Geschwindigkeit. Durch die Addition konstanter Wegstücke pro Beobachtungsepoche wird eine gleichförmige Geschwindigkeit eines Fahrzeuges simuliert.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + v \cdot \Delta t \\ x_3 &= x_2 + v \cdot \Delta t = x_1 + 2 \cdot v \cdot \Delta t \\ x_4 &= x_3 + v \cdot \Delta t = x_1 + 3 \cdot v \cdot \Delta t \\ x_n &= x_1 + (n-1) \cdot v \cdot \Delta t \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (n-1)\cdot\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (n-1)\cdot\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & (n-1)\cdot\Delta t \end{bmatrix}$$

Abb. 4–6 Beobachtungsmatrix in einem echten kinematischen Fall (links) und im simulierten kinematischen Fall (rechts)

Die modifizierte Beobachtungsmatrix wird ausschließlich in der Beobachtungsgleichung gebraucht. In den Gleichungen für die Prädiktion und Korrektur wird immer die klassische Matrix *A* verwendet.

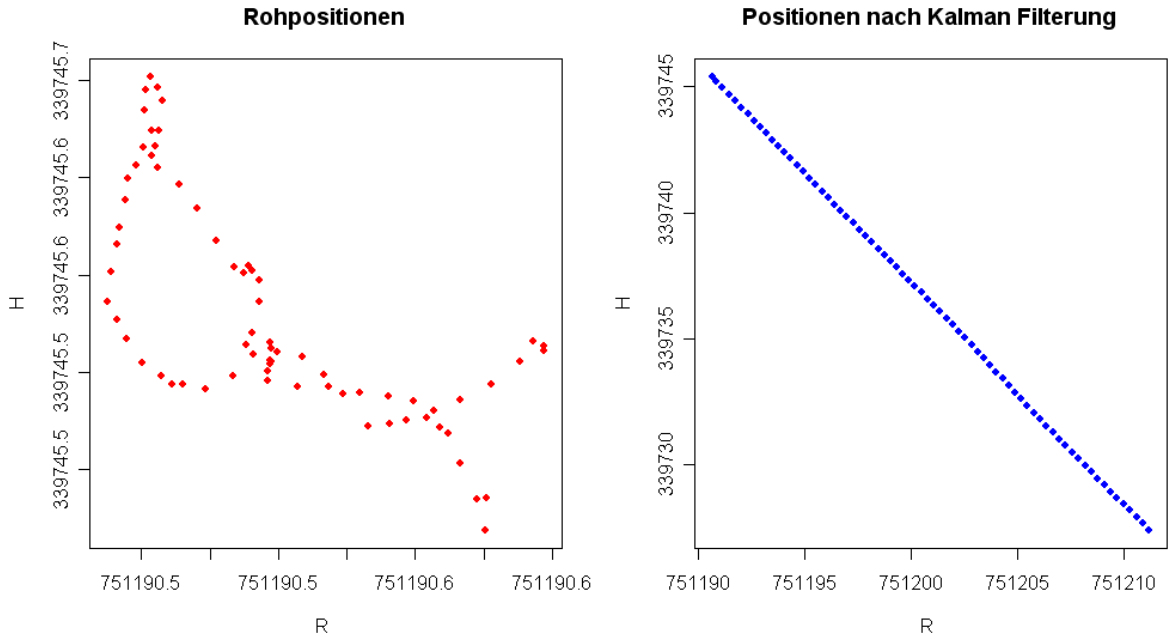


Abb. 4–7 Rohkoordinaten und gefilterte Koordinaten im BMN in [m] im simulierten kinematischen Fall

Die Abbildung 4-7 stellt das Ergebnis der Simulation dar. Wie es in einer gleichförmigen kinematischen Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit Fall ist, nehmen die Koordinatenwerte mit der Zeit symmetrisch zu. Aufgrund der präzisen statischen Messung sind die Abweichungen von einer idealen geraden Linie sehr klein.

4.4.1.2 Simulierter beschleunigter Fall mit konstanter Beschleunigung

Eine ähnliche Simulation wurde für einen Fall mit konstanter Beschleunigung durchgeführt. Auch hier wurde die Beobachtungsmatrix entsprechend geändert. Es wurden die Formeln für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung benutzt. Die Entfernungen zwischen den gefilterten Positionen werden immer größer, weil die Geschwindigkeit gleichförmig zunimmt.

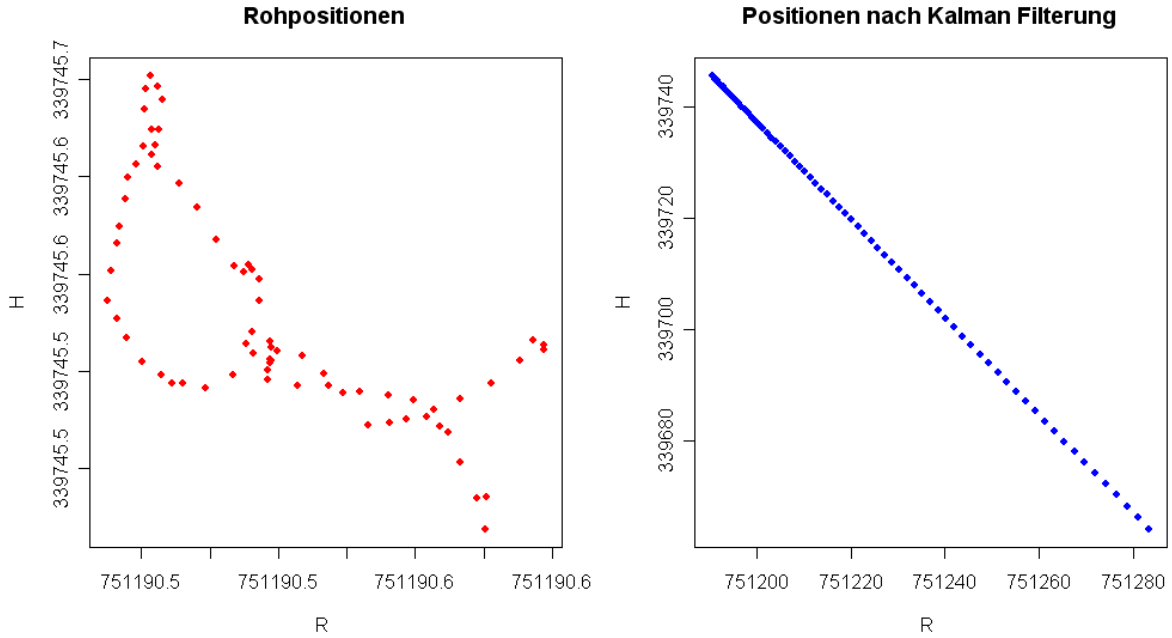


Abb. 4–8 Rohkoordinaten und gefilterte Koordinaten im BMN in [m] im simulierten beschleunigten Fall

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + v_1 \cdot \Delta t + a \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \\
v_2 &= v_1 + a \cdot \Delta t \\
x_3 &= x_2 + v_2 \cdot \Delta t + a \cdot \frac{\Delta t^2}{2} = x_1 + 2 \cdot v_1 \cdot \Delta t + 4 \cdot a \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \\
x_4 &= x_3 + v_3 \cdot \Delta t + a \cdot \frac{\Delta t^2}{2} = x_1 + 3 \cdot v_1 \cdot \Delta t + 9 \cdot a \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \\
x_n &= x_1 + (n-1) \cdot v_1 \cdot \Delta t + (n-1)^2 \cdot a \cdot \frac{\Delta t^2}{2}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abb. 4–9 Beobachtungsmatrix in einem echten beschleunigten Fall

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (n-1)\cdot\Delta t & 0 & 0 & (n-1)^2\cdot\frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (n-1)\cdot\Delta t & 0 & 0 & (n-1)^2\cdot\frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & (n-1)\cdot\Delta t & 0 & 0 & (n-1)^2\cdot\frac{\Delta t^2}{2} \end{bmatrix}$$

Abb. 4–10 Beobachtungsmatrix im simulierten beschleunigten Fall

4.4.2 Kinematischer Fall

Eine mit einem PKW im Juni 2006 durchgeführte kinematische Messung, auf die genauer im Kapitel 5 eingegangen wird, ermöglichte die Anwendung der Kalman Filterung auf reale Daten. Die GPS-Messdaten wurden mit einer zeitlichen Auflösung von 0,1 Sekunden aufgenommen und daraus vorerst zu jeder Epoche Fahrzeugpositionen berechnet. Damit ist gewährleistet, dass die Positionen schon voran intern durch den Empfänger gefiltert wurden. Diese Positionen dienten als Eingabe für die Filterung.

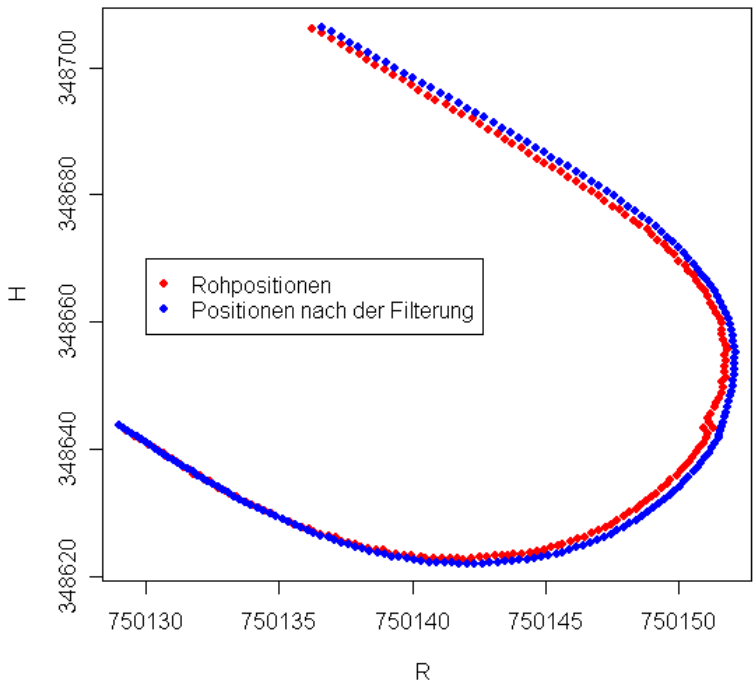


Abb. 4–11 Rohpositionen und gefilterte Koordinaten im BMN in [m]
in einem echten kinematischen Fall

Der in der Abbildung 4-11 präsentierte Ausschnitt der Messung stellt eine kurvige Trajektorie im BMN dar. Die rote Linie entspricht den wahren Messdaten. Die blaue Linie dagegen zeigt die gefilterten Positionen. Im Scheitel der Kurve kam es zu einem in der Grafik sichtbaren Rauschen. Dieses wurde fast vollständig durch die Filterung geglättet.

Der präsentierte Ausschnitt der Messung erfolgte in 18 Sekunden, was 180 Epochen entspricht. Die Abbildung 4-12 zeigt den gesamten Geschwindigkeitsverlauf des Fahrzeuges (grün) und dessen Beschleunigung (braun). Ausgehend vom stillstehenden Fahrzeug nahm dessen Geschwindigkeit und Beschleunigung auf der geradlinigen Trajektorie gleichmäßig zu. Das Auto fuhr dann in die Kurve mit einer Geschwindigkeit von ca. 6 $\frac{m}{s}$ und einer Beschleunigung von ca. 0,4 $\frac{m}{s^2}$. Mit ungefähr konstanter Geschwindigkeit und leicht fallender Beschleunigung legte das Fahrzeug die Krümmung des Weges zurück. Anschließend war die Strecke wieder geradlinig und der Fahrer konnte weiter beschleunigen bis die Geschwindigkeit von ca. 10 $\frac{m}{s}$ und eine Beschleunigung von ca. 0,8 $\frac{m}{s^2}$ erreicht wurde.

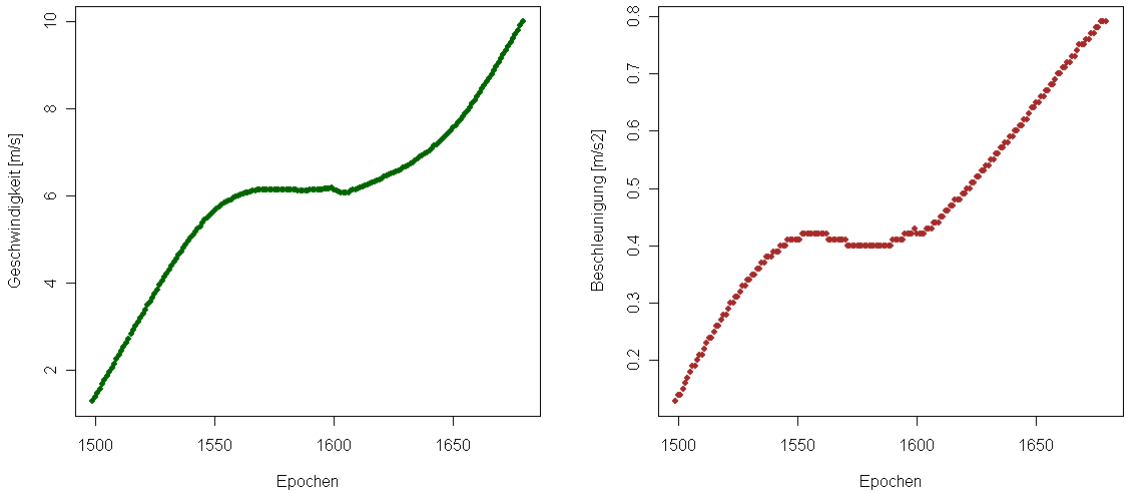


Abb. 4–12 Gesamtgeschwindigkeit und –beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit

Auf den Abbildungen 4-13 werden die kartesischen Komponenten der Fahrzeugpositionen in [m], Geschwindigkeiten in $\left[\frac{m}{s}\right]$ und Beschleunigungen in $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt. Eine Änderung des Hochwerts H und Rechtswerts R in der Zeit kann leicht nachvollzogen werden, wenn gleichzeitig die Trajektorie des Fahrzeugs in der Abbildung 4-11 mitverfolgt wird. Weil das Auto grundsätzlich in Richtung des steigenden Hochwerts abbiegt, nahm die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Hochwerts zu. Anschließend bewegte es sich in Gegenrichtung des Rechtswerts. Deswegen fiel die Geschwindigkeit und Beschleuni-

gung des Rechtswerts. Eine dritte Koordinate ist die Höhe h. In der Mitte der Krümmung der Trajektorie kam zu einem Sprung von ca. 2,5 Meter in vertikaler Richtung. Dieses Rauschen ist auch in der Abbildung 4-11 sichtbar. Die Grafik der Höhe zeigt, wie die Kalman Filterung eine Verbindung (blaue Punkte) zwischen verschobenen Messdaten herstellt. Das Kurventeil des Weges führte leicht bergab. Die Werte der Geschwindigkeit und Beschleunigung der Höhenkomponente nahmen dann ab. Negative Werte in den Komponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung sind zulässig. Sie beziehen sich auf die Bewegung relativ zu den Koordinatenachsen. Für die Berechnung der Gesamtgeschwindigkeit und Gesamtbeschleunigung werden allerdings nur die Absolutwerte herangezogen. Ein Beschleunigungsvektor in Gegenrichtung zum Geschwindigkeitsvektor kommt einer Abbremsung gleich.

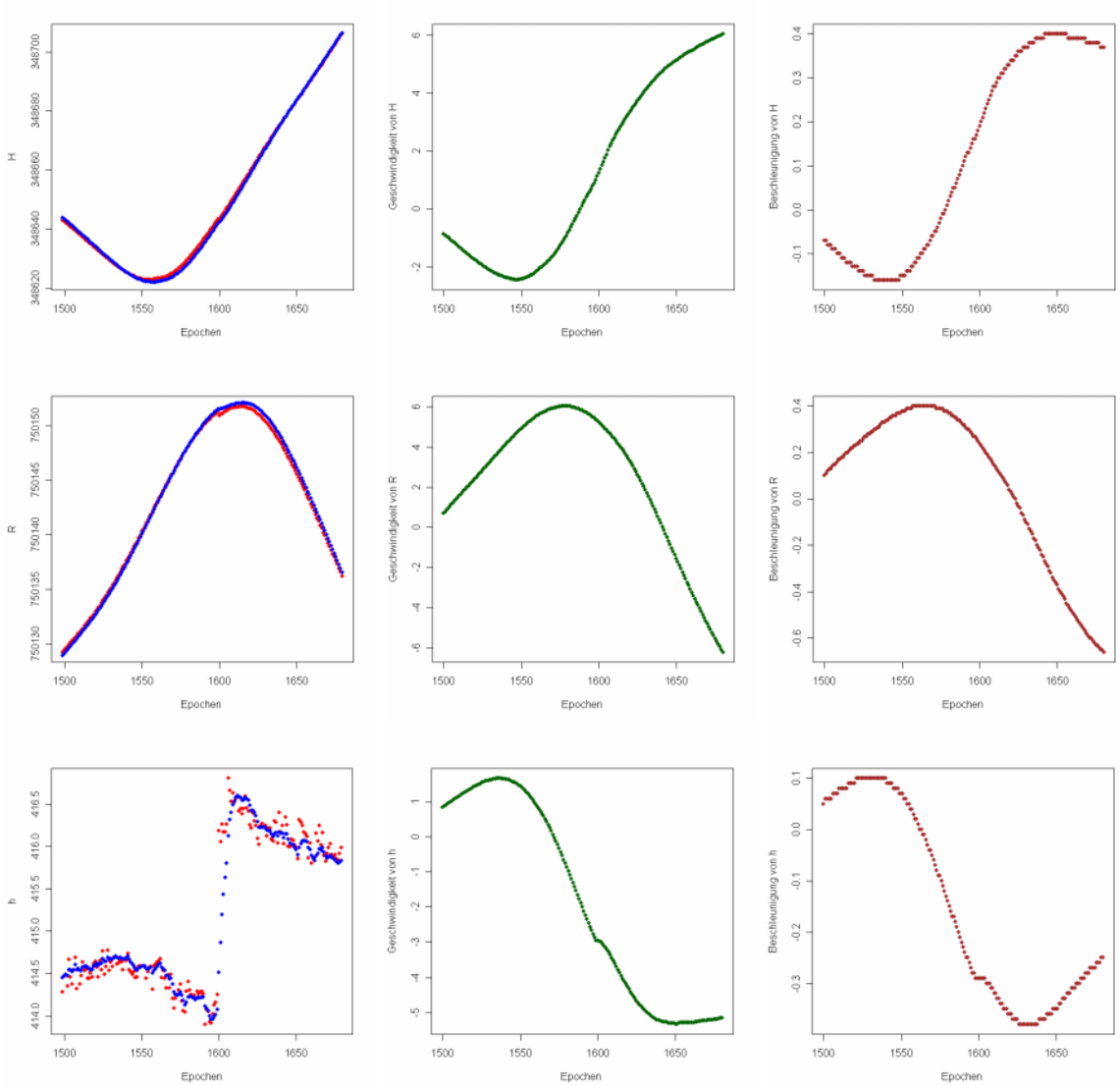


Abb. 4–13 Komponenten des Positionsvektors in $[m]$,
des Geschwindigkeitsvektors in $\left[\frac{m}{s}\right]$ und des Beschleunigungsvektors in $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

5. Analyse der Messfahrten

5.1 Beschreibung der Messung

Im Juni 2006 wurden Messfahrten am Kahlenberg in Wien durchgeführt. Die GPS-Antenne wurde am Dach eines Autos montiert und mit dem im Fahrzeug liegenden Empfänger durch das Schiebedach verbunden. Multipatheinflüsse durch das Dach des PKW waren bei dieser Anordnung allerdings nicht zu vermeiden. Die Aufnahme von Messdaten erfolgte in Zeitschritten von 0,1 Sekunden.

Abb. 5–1 Die kinematische Messung

Die Grafik 5-2 stellt die Gegend vom Kahlenberg dar. Die Messung fand vorwiegend auf dem Parkplatz Kahlenberg statt. Diese Wahl der Trasse ermöglichte die Aufnahme sowohl gerader als auch bogenförmiger Trajektorien mit weitgehend nicht abgeschatteten Signalempfang. Das Auto konnte dort sowohl mit konstanter Geschwindigkeit als auch beschleunigt fahren.
Zusätzlich wurde noch auf der Höhenstraße (in Richtung Leopoldsberg) gemessen, weil es sich hier um einen stark durch die Bäume abgeschatteten Weg handelte. Diese Messungen dienen der Prüfung des Filterverhaltens im Fall von Signalausfällen.

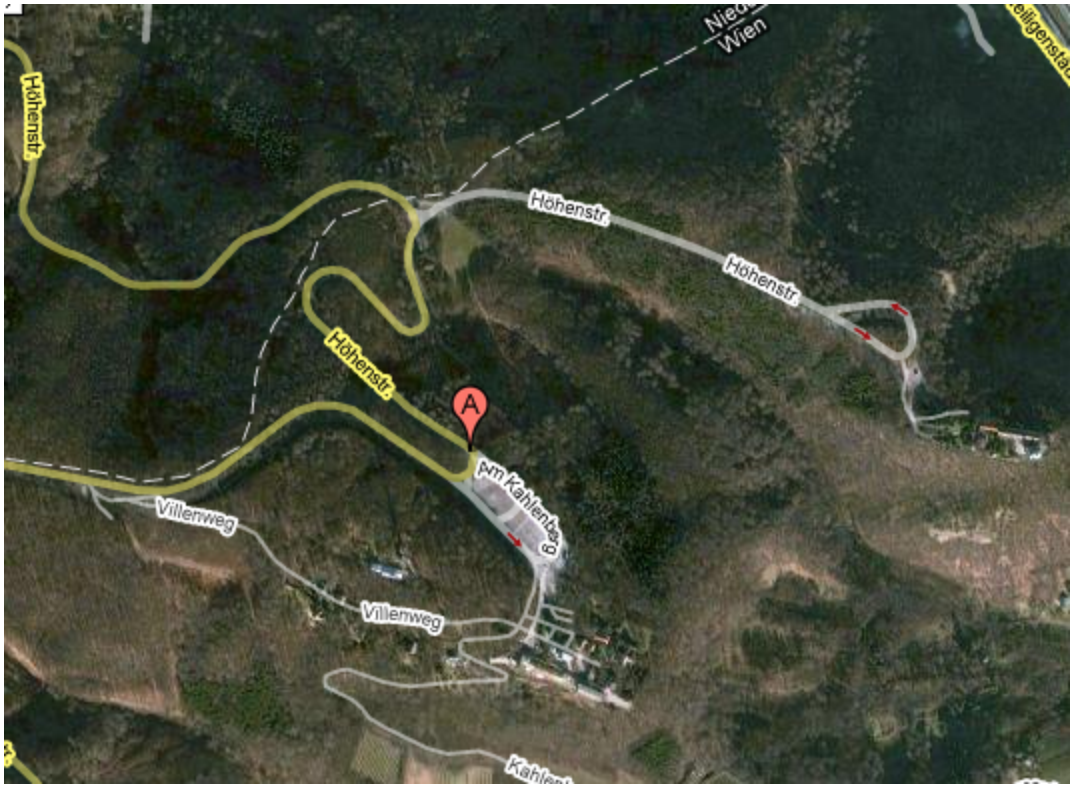


Abb. 5–2 Die kinematische Messung am Kahlenberg
Quelle:maps.google.de

Abb. 5–3 Blick vom Kahlenberg auf Wien
http://www.ciao.de

5.2 Code C/A

Die hier präsentierten Beispiele beziehen sich auf eine mit C/A-Code auf der Frequenz L1 aufgenommene GPS-Messung. Die Rohpositionen wurden durch eine Auswertung der Messdaten gewonnen und anschließend gefiltert. Die Grafiken werden im Bundesmeldenetz gezeigt.

5.2.1 Glättung

In jedem Beispiel, in dem Rohpositionen mit den gefilterten Koordinaten verglichen werden, ist klar zu sehen, dass die Filterung eine Glättung der Trajektorie verursacht. Der Einfluss der Filterung - also auch der Glättung - kann durch die Einstellung (Anpassung) des System- bzw. Beobachtungsrauschens gesteuert werden [siehe Kapitel 4.3.2 und Kapitel 5.2.3].

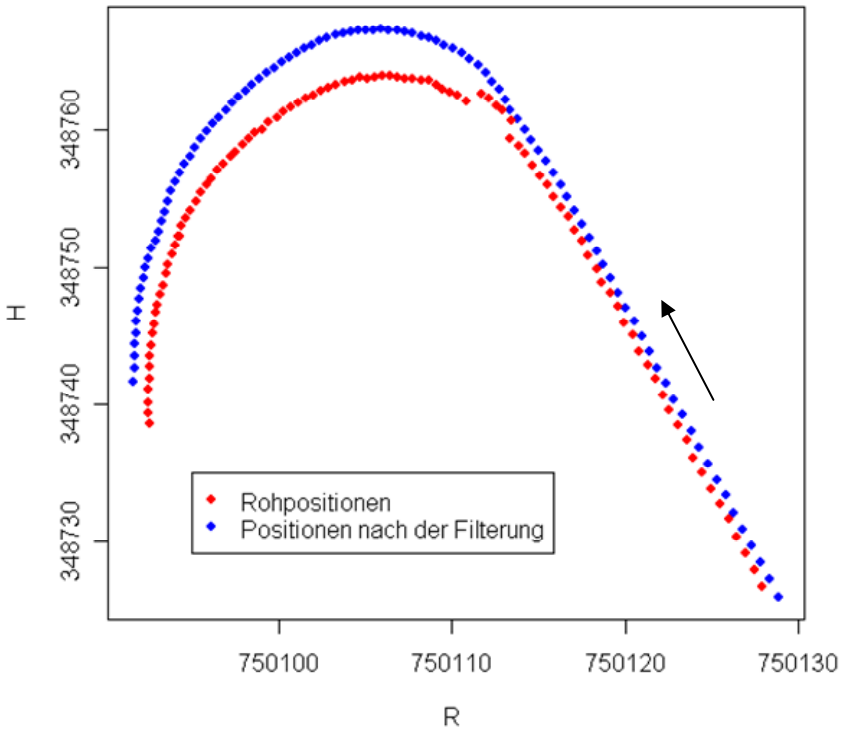


Abb. 5–4 Glättung der Trajektorie

In der Grafik 5-4 ist sehr schön das Verhalten des Filters für den Fall einer Unstetigkeit der eingehen Beobachtungen dokumentiert. Im Scheitel der Kurve sind die Messdaten (rot) zweimal sprunghaft versetzt. Diese Verschiebungen werden vom Filter stetig ausgeglichen, allerdings verursachen sie ein Ausschwingen der geschätzten Trajektorie (blau). Nach dem Kurvenausgang approximiert die Schätzung wieder die Messungen.

5.2.2 Fehlende Messdaten

Ein weiterer Vorteil der Kalman Filterung ist, dass er auch dann Werte der Parameter liefern kann, wenn keine Beobachtungen vorliegen, also wenn die Beobachtungsgleichung $l(t)$ gleich null ist. In diesem Fall werden nur die Prädiktionsgleichungen im Kalman Filter Algorithmus verwendet. Der durch die Beobachtung verbesserte Zustandsvektor soll in diesem Fall dem prädizierten Zustandsvektors $\hat{x}$ der gleichen Epoche identisch sein. In der nächsten Epoche wird er zur Berechnung des nächsten prädizierten Zustandsvektors $\tilde{x}$ verwendet.

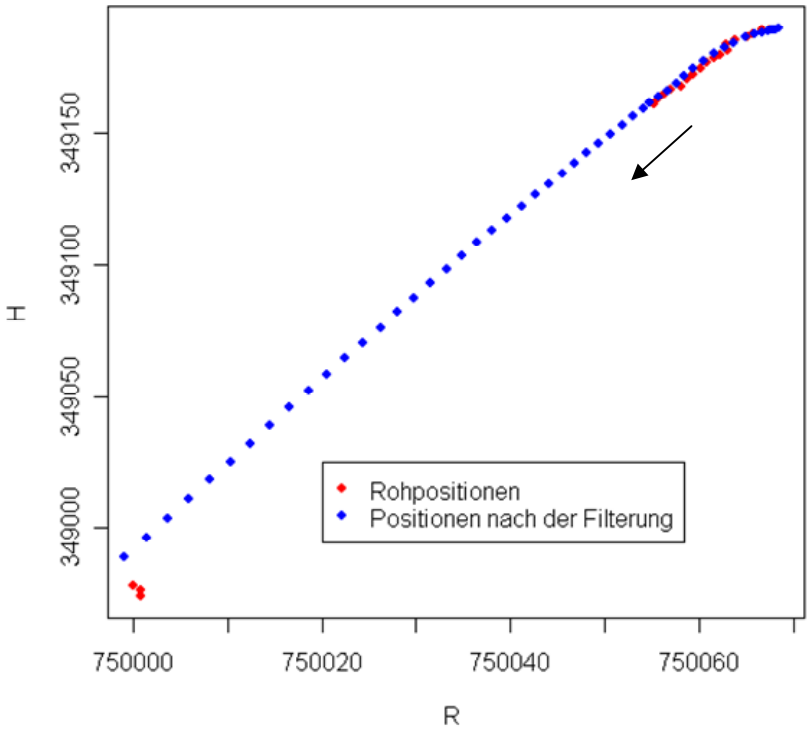


Abb. 5–5 Fehlende Messdaten

Die Abbildung 5-5 zeigt ein Beispiel, in dem die Messungen für über 200 Epochen ausgefallen sind. Innerhalb diesen 20 Sekunden änderte sich die Richtung der Autofahrt nur unwesentlich. Die Prädiktionsberechnungen liefen fast exakt ab und trafen beinahe die wieder zur Verfügung stehenden Messpositionen.

Die Grafik 5-6 stellt im Gegensatz dazu einen Fall dar, wenn es während des Datenausfalls zu einer Fahrtrichtungsänderung kam. Dementsprechend läuft die Prädiktion geradlinig weiter und ist nicht in der Lage der wahren Streckenwahl zu folgen. Ab der Aufnahme neuer Rohpositionen kommt es somit zu einem starken Schwenk in der Prädiktion. Je nach Modell des Systemrauschens erfolgt ein starker oder mehr geglätteter Bruch der prädizierten Trajektorie.

Der Kalman Filter spielt somit eine große Rolle zur Überbrückung von kurzen Messdatenausfällen. Er gewinnt die zur Prädiktion notwendige Information aus-

schließlich aus den vergangenen Epochen und dem implementierten Bewegungsmodell.

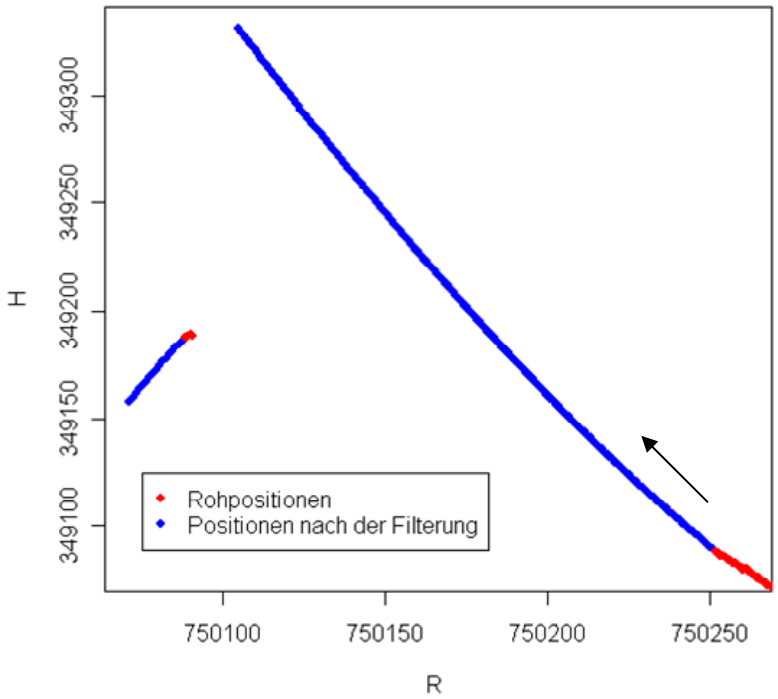


Abb. 5–6 Fehlende Messdaten

5.2.3 Unterschiedliches Systemrauschen und Beobachtungsrauschen

Durch Änderung des System- bzw. Beobachtungsrauschens kann man die Größe der Gainmatrix beeinflussen und damit die Gewichtung der Messung manipulieren [siehe Kapitel 4.3.2].

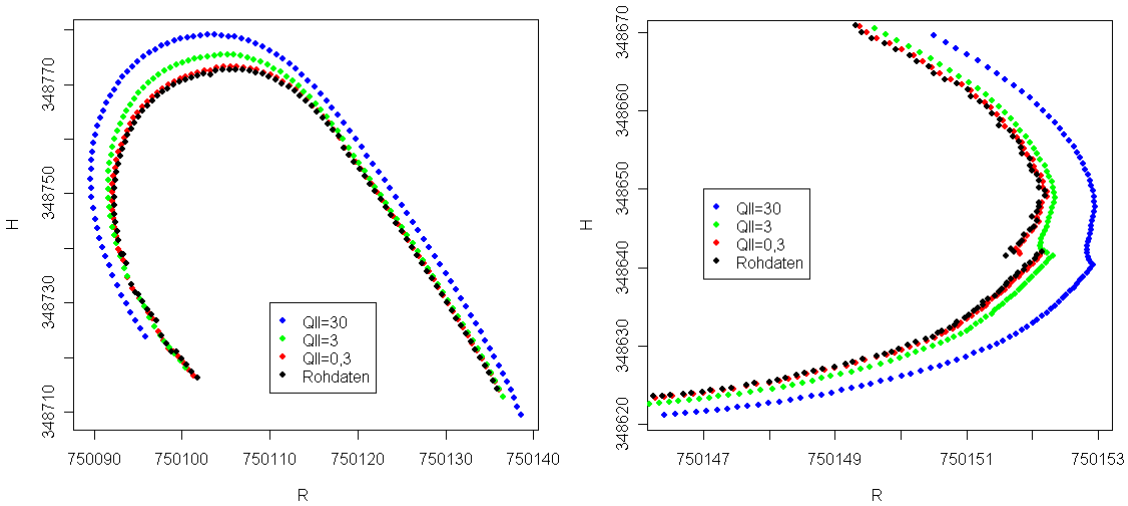


Abb. 5–7 Unterschiedliches Beobachtungsrauschen

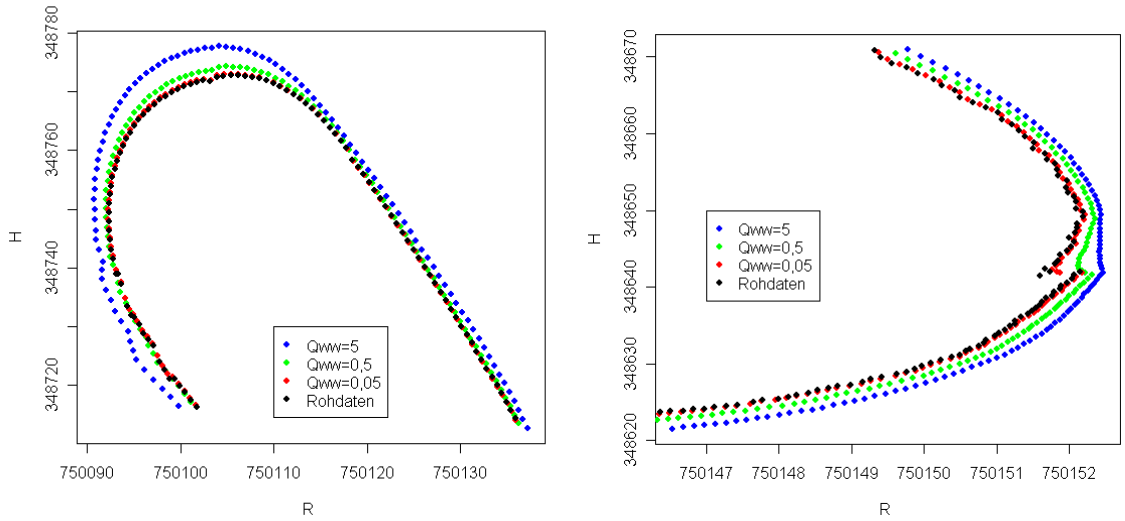


Abb. 5–8 Unterschiedliches Systemrauschen

Im Falle starken Beobachtungsrauschens (Matrix Q_{ll}), wie in der Grafik 5-7 gezeigt, steigt die Bedeutung der Prädiktion und damit der durch den Filter bewirkten Glättung. Das große Systemrauschen Q_{ww} informiert den Filter, dass die Messungen vertrauenswürdiger als das Modell sind. Deswegen werden die blauen Trajektorien in der Abbildung 5-8 zwar auch geglättet, jedoch immer noch etwas mit dem Messrauschen behaftet. Sowohl mit dem Beobachtungsrauschen als auch mit dem Systemrauschen steigt der Einfluss der Glättung der Trajektorie. Je größer diese ist, desto klarer kann man den Abstand zwischen Rohpositionen und gefilterten Positionen in den Grafiken erkennen. Infolgedessen wird die Genauigkeit der Positionsbestimmung schlechter.

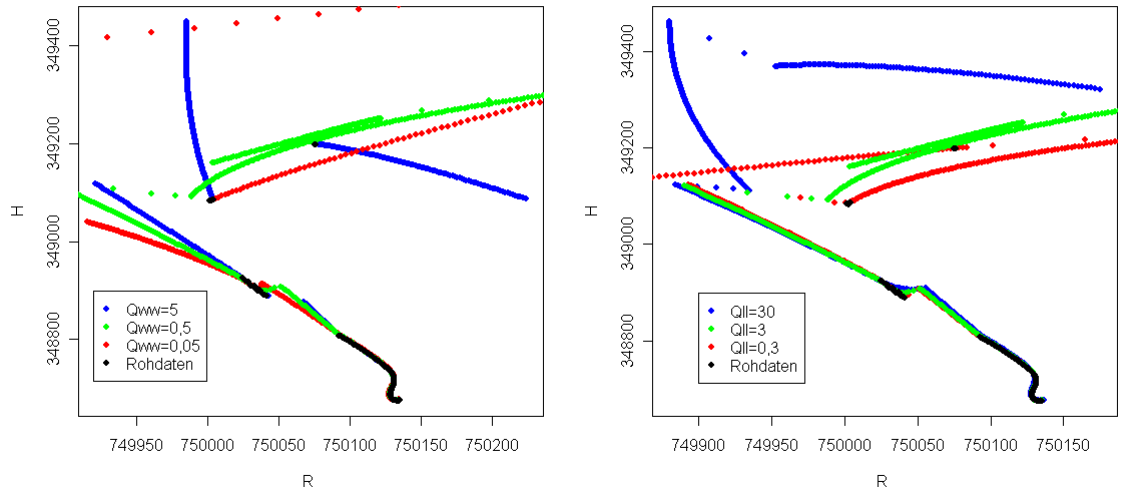


Abb. 5–9 Unterschiedliches System- (links) und Beobachtungsrauschen (rechts)

Die Abbildungen 5-9 sind auf den ersten Blick schwer interpretierbar. Sie zeigen den Einfluss der Kovarianzmatrizen im Fall eines Beobachtungsausfalls über einen

längeren Zeitraum. Die in der Abbildung dargestellte Situation ist besonders kompliziert, weil es nach dem Datenverlust zu einer Richtungsänderung der Messtrajektorie kam. Der Kalman Filter kann nur aus den vergangenen Epochen die Informationen gewinnen und deswegen die Bewegung nicht korrekt vorhersagen. Das zu große aber auch zu kleine System- bzw. Beobachtungsrauschen kann bewirken, dass es nach einem längeren Messdatenausfall zu einer viel zu großen Abweichung vom richtigen Weg kommen kann.

Aus den genannten Gründen: Glättung, Genauigkeit der Positionsbestimmung und Prädiktion bei Datenverlust ist es sehr wichtig für die zu behandelnde Anwendung eine realistische Einstellung des System- und Beobachtungsrauschen zu treffen.

5.3 Code C/A und Ionosphärenfreie Linearkombination (C/A / P2)

Durch die Bildung spezieller Linearkombination der beobachteten Code- oder Phasensignale [siehe auch Kapitel 2] können einige Fehlerquellen eliminiert werden. So ist die aus C1/P2 Codemessungen gebildete Linearkombination L_3 (2.9) frei von Einflüssen der Ionosphäre:

$$P_3 = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot C_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot P_2 \,. \tag{5.1}$$

C_1 ist die Pseudorange (C/A-Code) auf der Trägerwelle mit Frequenz $f_1 = 1575{,}42 MHz$ und P_2 die P-Code–Beobachtung auf der Frequenz $f_2 = 1227{,}60 MHz$.

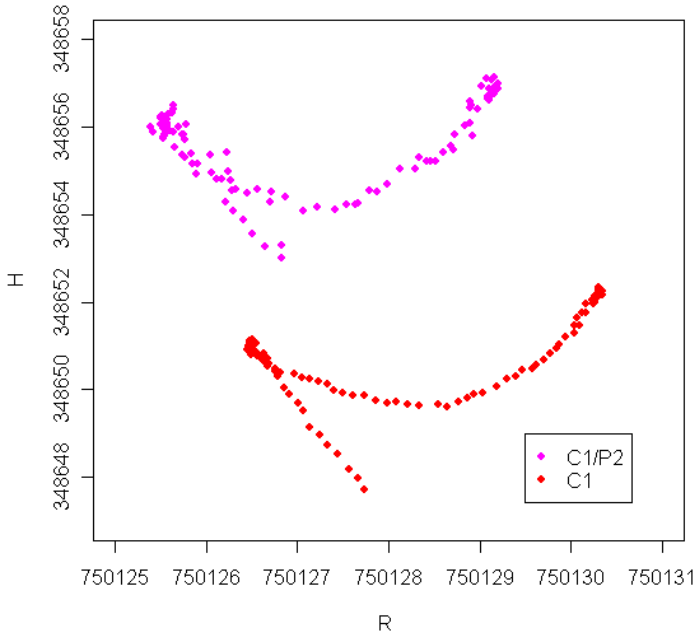


Abb. 5–10 Rohpositionen einer C1 und einer C1/P2 Messung im BMN in [m]

Die Abbildung 5-10 vergleicht die Rohkoordinaten einer Codemessung mit der gleichen Messung nach der Bildung der ionosphärenfreien Linearkombination C1/P2. Es fällt sofort die mehr oder minder konstante Verschiebung der beiden Trajektorien auf. Diese liegt an der ionosphärischen Verzögerung, die in der C1/P2 Kombination herausgefallen ist und für gleiche Zeiträume und gleiche Satellitenkonstellation faktisch als konstantes Produkt Streckenfehler×Satellitengeometrie auftritt. Die Trajektorie C1/P2 repräsentiert somit die wahre Fahrtstrecke im Gegensatz zur Trajektorie C1, die ausschließlich von der C/A-Code Messung stammt. Die Abbildung 5-11 zeigt die Abweichungen zwischen beiden Fahrwegen. Sie betragen gegen 5 Meter für den Hochwert, ca. 1 Meter für die Rechtswert-Koordinate und ca. 5,5 Meter für die Höhe. Gesamt ergibt sich eine Differenz von ungefähr 5 Meter in der Lage im BMN und 5,5 Meter in der Höhe.

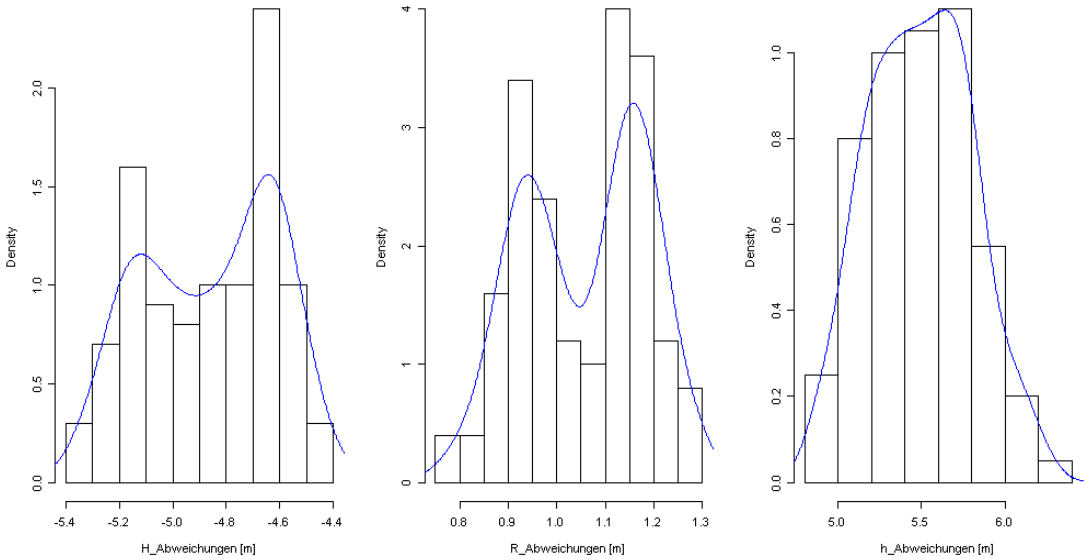


Abb. 5–11 Abweichungen zwischen Rohpositionen C1 und C1/P2

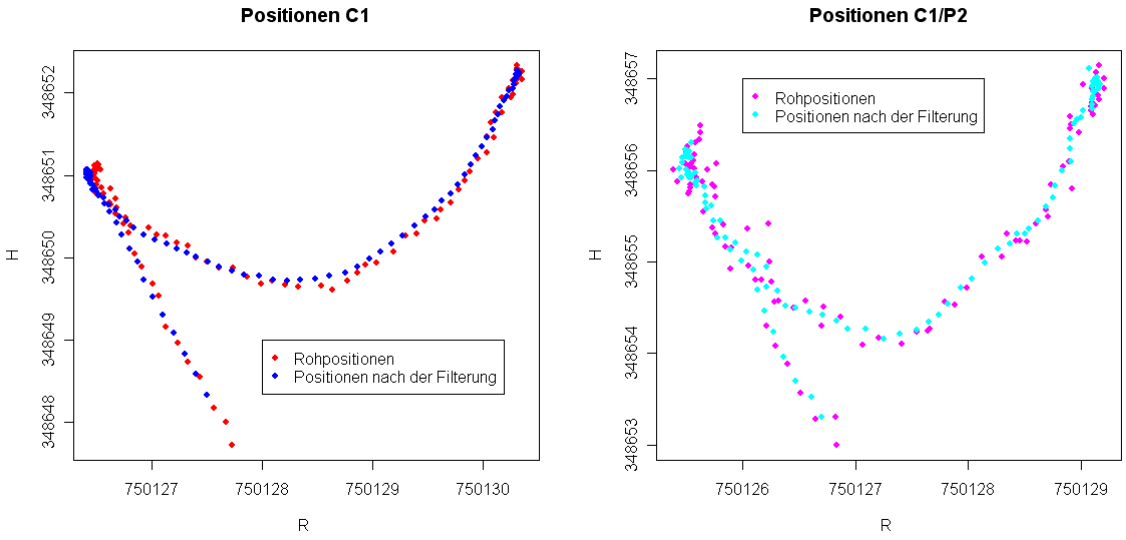


Abb. 5–12 Rohpositionen und Koordinaten nach der Kalman Filterung im BMN einer C/A (links) und einer C1/P2 Messung (rechts) in [m]

Die Standardabweichung einer Code C/A Messung beträgt ca. ±0,5 m, jene der P2-Code Messung rund ±0,3 m. Durch die Bildung einer Linearkombination werden die Produkte der Standardabweichungen mit ihren Vorfaktoren quadratisch aufsummiert. Damit ergibt sich für die Linearkombination C1/P2 eine 3-fach größere Standardabweichung als für die Basis-C1-Messung. Der Einfluss der größeren Standardabweichung ist in der Abbildung 5-10 nicht zu übersehen. Die Rohpositionen nach der Bildung einer Linearkombination C1/P2 sind deutlich mehr gestreut als die der C/A Messung. Deshalb wird auch die Trajektorie C1/P2 nach der Filterung deutlich mehr mit dem Rauschen behaftet. Dies ist in den Grafiken 5-12 und 5-13 klar zu erkennen.

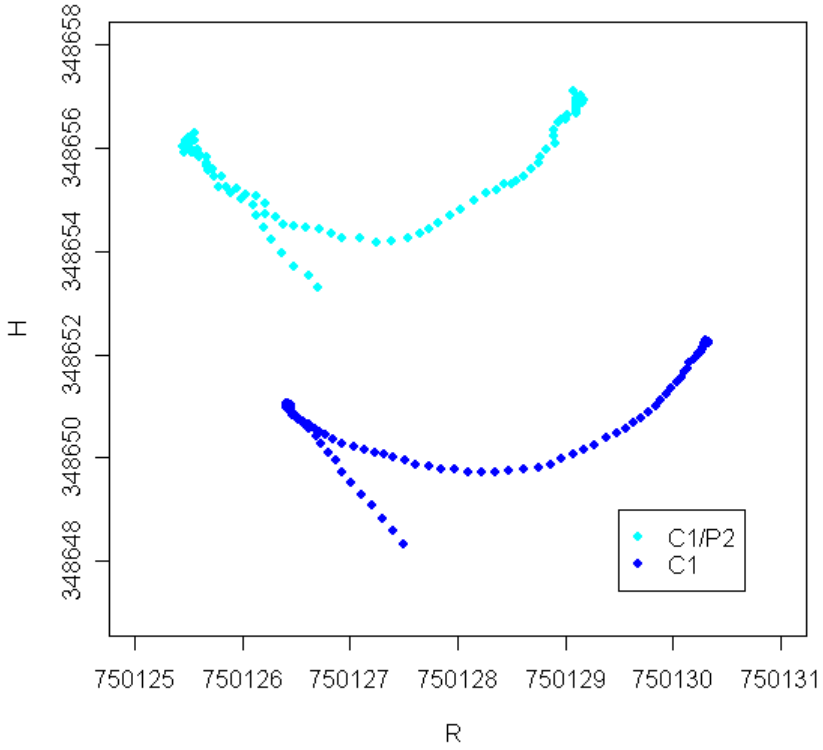


Abb. 5–13 Positionen nach der Kalman Filterung einer C1 und einer C1/P2 Messung im BMN in [m]

Die Anwendung einer Linearkombination C1/P2 ist also mit Vorteilen und Nachteilen behaftet. Somit wird das Auto zwar präziser positioniert, seine Trajektorie wird aber auch nach der Kalman Filterung als eine wesentlich weniger glatte Kurve ausgegeben als es im Fall einer C1-Codemessung allein wäre. Diese konnte aber durch geänderte Filtereinstellungen (Glättung = Verkleinerung des Systemrauschens bzw. erhöhtes Beobachtungsrauschen) kompensiert werden.

6. Pseudoranges als Beobachtung in Kalman Filterung

In allen bisher gezeigten Beispielen wurden bereits vorab mittels *Single-Point-Positioning* (Opitz et al., 2008) bestimmte Koordinaten des Empfängers als Beobachtungen verwendet. Im Kalmanfilter wurden die Fahrzeugpositionen bzw. auch die zugehörigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen geschätzt und im verbesserten Zustandsvektor als gefilterte Parameter ausgegeben.

Um allerdings in das KF-Modell direkt die beobachteten Code- und Phasenmessungen einfließen zu lassen, musste eine direkte Schnittstelle zu den RINEX Beobachtungsdateien geschaffen werden. Um das Programm auch in Echtzeit einsetzen zu können wurde zusätzlich eine RTCM-Eingabeschnittstelle realisiert. Vor der Filterung müssen die rohen Messdaten korrigiert und die Matrizen des Kalman Filters entsprechend geändert werden.

6.1 Messdaten

Die nötigen Messdaten werden von einem RINEX Observation File und einer sp3 Bahndatendatei bezogen.

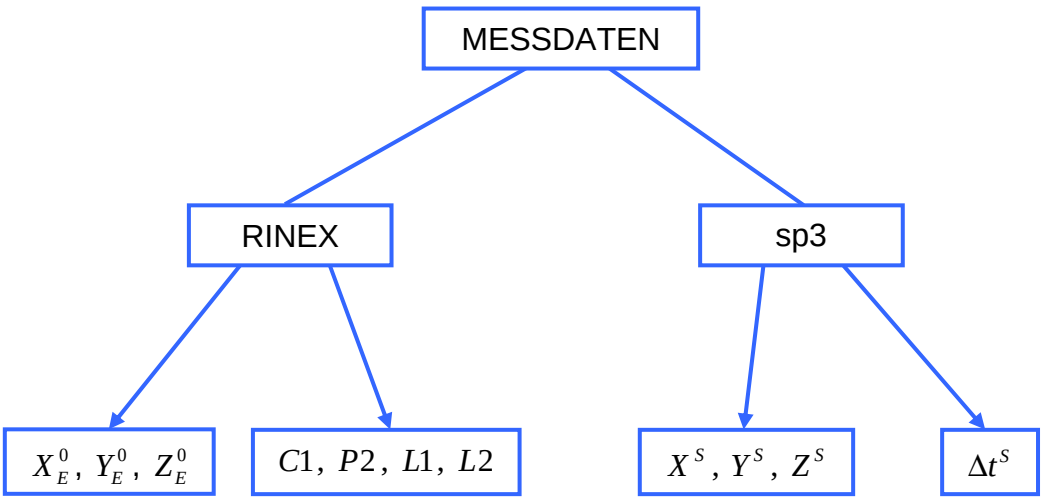


Abb. 6–1 Mess- und Bahndaten

Das RINEX File wird von der Roversoftware aus der binären Beobachtungsdatei erstellt. Es liefert Code- und Phasen-Pseudoranges zu jedem sichtbaren GPS-Satelliten als Beobachtungen für den Kalman Filter.
Die untersuchte kinematische Messung stammt aus dem Juni 2008 und wurde mit zwei Empfängern – einer Referenz und einem Rover – am Kahlenberg mit einer zeitlichen Auflösung von 0,2 Sekunden aufgenommen. Die Messung sollte zusätzlich die Möglichkeit bieten, Differenzen zu bilden um die Genauigkeit der Trajektorie zu steigern. Diese Differenzlösung wird allerdings erst ausführlich im Kapitel 6.3 behandelt. Die Abschnitte 6.1 und 6.2 befassen sich vorerst nur mit der Einzelpunkt-

positionierung unter Nutzung von Code- und Phasenbeobachtungen.
Die Satellitenkoordinaten und Satellitenuhrfehler stehen im Internet in nach GPS-Wochen geordneten sp3 Files zur Verfügung. Die Werte werden in einem Zeitintervall von 15 Minuten angegeben und müssen interpoliert werden.

6.1.1 Interpolation von Satellitendaten

Es wurden *Final Orbits*, also präzise Bahndaten der höchsten Genauigkeit (<5cm) genutzt. Die Satellitendaten wurden mittels einer Interpolation nach Lagrange mit zehn bekannten Punkten bestimmt [siehe Kapitel 2.7.1.1]. Sie wurden in Abhängigkeit von der Zeit berechnet. Die Zeit wurde linear mit einer der Messung adäquaten Schrittweite von 0,2 Sekunden interpoliert. In der Berechnung wurde eine Zeitverschiebung berücksichtigt, die der Laufzeit des Signals vom Satelliten zum Receiver entspricht. Sie beträgt ca. 0,08 Sekunden und wird grob durch Division der Pseudoentfernung durch die Lichtgeschwindigkeit ermittelt.

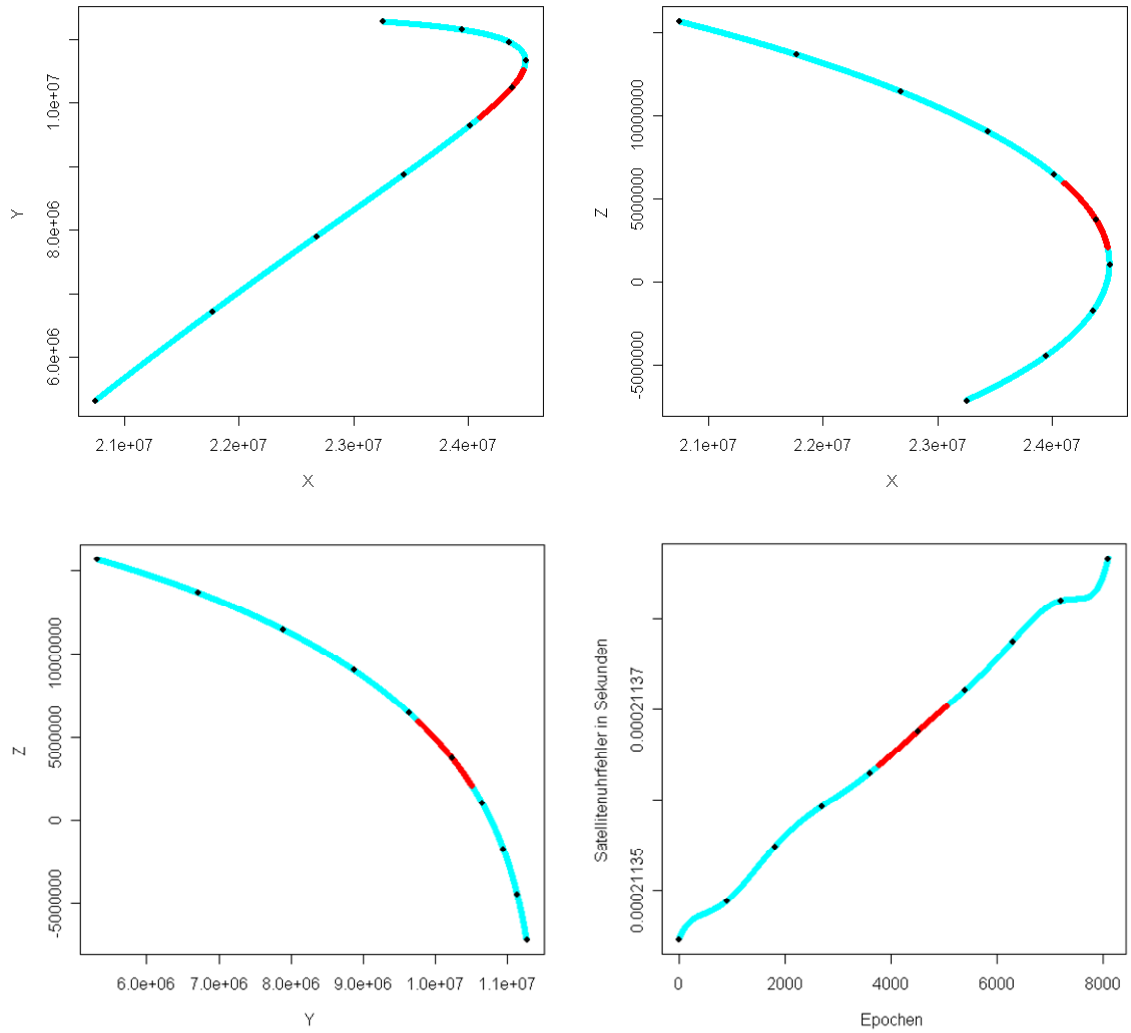


Abb. 6–2 Interpolierte Satellitendaten

Die Abbildung 6-2 zeigt die interpolierte Satellitenraumkurve in 3 Ebenenschnitten in [m] und den Satellitenuhrfehler in [s] des GPS-Satelliten PRN 03 für einen Zeitraum von 2 Stunden 15 Minuten. In jeder Teilgrafik entsprechen die schwarzen Punkte den zehn bekannten Positionen aus dem sp3 File. Die blaue Linie illustriert die 40.500 interpolierten Punkte. Sie entspricht einer Funktion, die möglichst präzise die Satellitenbahn widerspiegeln soll. Mit roter Farbe werden die Epochen markiert, während deren die Messung am Kahlenberg stattgefunden hat. Sie überdecken einen Zeitraum von ca. 25 Minuten. Das sind die eigentlichen Daten, die zur Kalman Filterung verwendet wurden.

6.1.2 Streckenreduktion

Die in einem RINEX File enthaltenen Pseudoranges sind mit systematischen und zufälligen Fehlern behaftet. Deren gesamte Wirkung auf die Streckenmessung beträgt im Normalfall einige Meter. Um einige dieser Fehlereinflüsse kann aber die Entfernungsmessung vorab korrigiert werden.

Die Gleichung für eine Codemessung (2.3) hat die Gestalt:

$$PR_E^S = S_E^S + c \cdot (\Delta t_E - \Delta t^S) + d_{ion} + d_{trop} + d_{orb} + \varepsilon \,,$$

wobei S_E^S die geometrische Strecke zwischen dem Empfänger und Satelliten, Δt_E den Empfängeruhrfehler, Δt^S den Satellitenuhrfehler, d_{ion} den Distanzfehler durch Einflüsse der Ionosphäre, d_{trop} den Distanzfehler durch Einflüsse der Troposphäre, d_{orb} den Orbitfehler und ε zufällige Instrumentenfehler bezeichnen.

Die Verzögerung durch die Ionosphäre kann durch die Bildung der ionosphärenfreien Linearkombination beseitigt werden, allerdings unter Verlust der Ganzzahligkeit der Mehrdeutigkeiten. Für eine Pseudorange mit C/A-Code auf L1 und P-Code auf L2, wird sie wie folgt gerechnet:

$$P3 = \frac{f_1^{\,2}}{f_1^{\,2} - f_2^{\,2}} \cdot C1 - \frac{f_2^{\,2}}{f_1^{\,2} - f_2^{\,2}} \cdot P2 \,. \tag{6.1}$$

Bei Verwendung von Phasenbeobachtungen nimmt die ionosphärenfreie Linearkombination die folgende Gestalt an (Trägerfrequenzen $f_1 = 1575{,}42 MHz$ und $f_2 = 1227{,}60 MHz$):

$$L3 = \frac{f_1^{\,2}}{f_1^{\,2} - f_2^{\,2}} \cdot L1 - \frac{f_2^{\,2}}{f_1^{\,2} - f_2^{\,2}} \cdot L2 \,. \tag{6.2}$$

Die Pseudoranges C1, P2, L1 und L2 sind dem RINEX File für jede Epoche zu entnehmen. Die Phasen-Pseudoranges L1 und L2 müssen noch mit den Wellenlän-

gen ($\lambda_1 = 19{,}029cm$ bzw. $\lambda_2 = 24{,}421cm$) multipliziert werden, um auf die metrische Einheit zu kommen. Bei der Verwendung von Phasen wird derzeit auf das Suchen von Mehrdeutigkeiten verzichtet (nicht als Parameter implementiert). Stattdessen wird ein konstanter Offset zwischen P3 und L3 bestimmt und von der Linearkombination L3 subtrahiert. Zunächst wird die Linearkombination P3 bzw. L3 um die Satellitenuhrfehler- und die Troposphärenkorrektur verbessert:

$$P3_{korrigiert} = P3 + c \cdot \Delta t^S + d_{trop} \,. \tag{6.3}$$

Die Satellitenuhrfehler in Nanosekunden werden im sp3 File in einem Zeitintervall von 15 Minuten angegeben. Sie müssen interpoliert werden. Der Satellitenuhrfehler in Sekunden multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit ergibt die gesuchte Streckenreduktion. Die Troposphärenkorrektur wird im Programm mit dem Modell nach Saastamoinen [siehe Kapitel 2.5.2.1] erfasst. Ihre Größe hängt vom Zenitwinkel zu dem Satelliten ab und kann ca. 2 Meter für einen Satelliten im Zenit und ca. 11 Meter für einen Zenitwinkel von $75°$ betragen.

Der Orbitfehler wird im Programm nicht explizit berücksichtigt. Die zufälligen Instrumentalfehler werden implizit in der Q_{ll}-Matrix berücksichtigt. Der Empfängeruhrfehler×Lichtgeschwindigkeit in [m] wird durch den Kalman Filter berechnet und im Zustandsvektor ausgegeben. Die Innovation ist die Differenz aus der wahren und der prädizierten Beobachtung:

$$Innovation = PR_E^S - S_E^S - c \cdot \Delta t_E \,. \tag{6.4}$$

6.1.3 Verlauf der Messroute

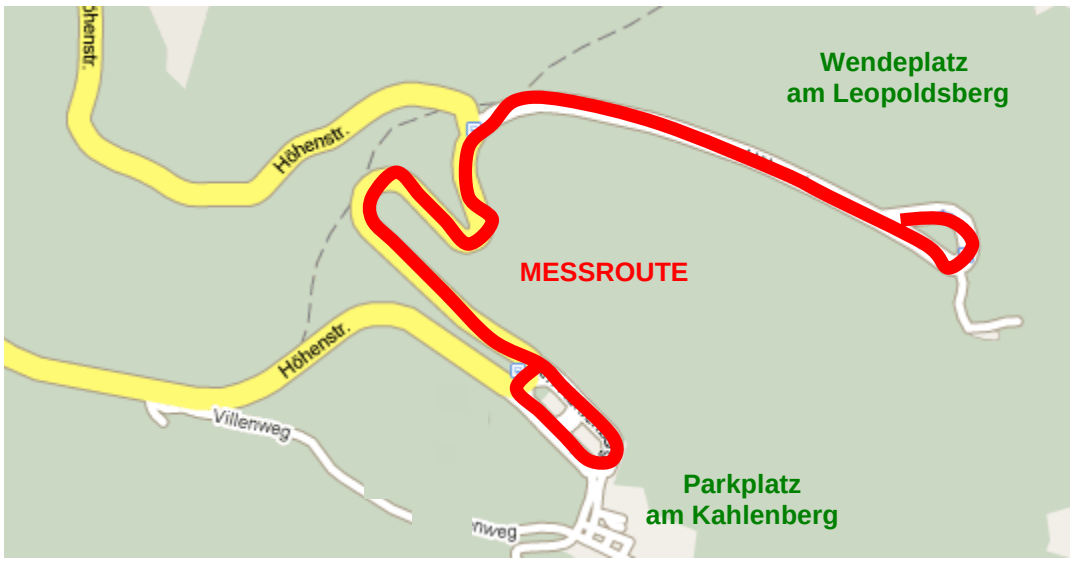


Abb. 6–3 Messroute

Der Beginn der Messung vom Juni 2008 fand am Parkplatz am Kahlenberg in Wien statt. Von dort aus führte die Route der Höhenstraße entlang bis zum Wendeplatz am Leopoldsberg und zurück zum Parkplatz am Kahlenberg. Die in der Abbildung 6-3 gezeigte Messroute wurde zweimal hin und zweimal zurück befahren.

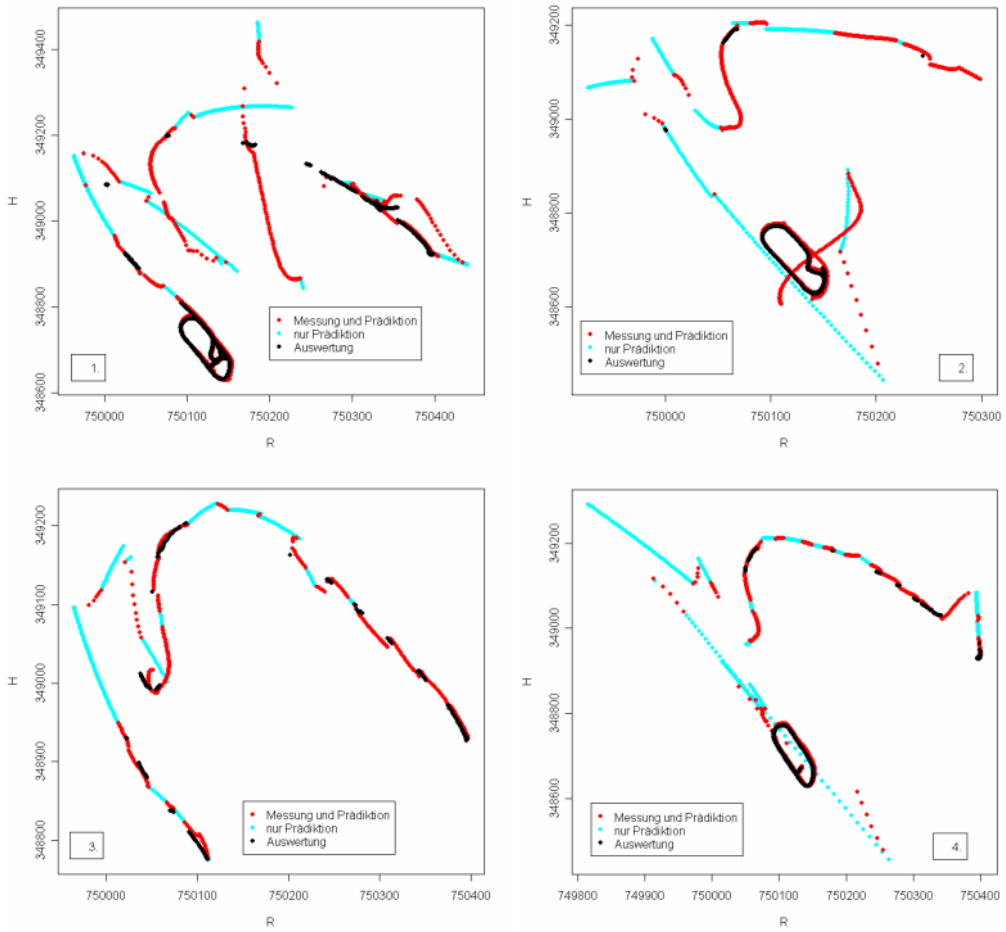


Abb. 6–4 Verlauf der Messung

Wie erwähnt wurden vorab undifferenzierte Beobachtungen verarbeitet. Die vier Grafiken auf der Abbildung 6-4 entsprechen den Ergebnissen der vier Befahrungen der Messroute. Vollständige Beobachtungen gab es direkt auf dem Parkplatz am Kahlenberg, da dort eine fast ungestörte Sicht zu den Satelliten gegeben war. Es konnten Pseudoranges von bis zu 7 Satelliten gleichzeitig aufgenommen werden. Mit schwarzen Punkten ist eine mittels des Auswertepaketes Leica Geo-Office Software errechnete Trajektorie eingezeichnet. Man erkennt schon aus den wenigen verfügbaren Punkten die Problematik des dort verwendeten Least-Squares Ansatzes bei wenigen Beobachtungsdaten. Die blauen und roten Punkte beschreiben die Trajektorie nach der Kalman Filterung. Die blauen Punkte beziehen sich auf Epochen, in denen keine Messungen vorlagen, also wenn am Rover weniger als vier Satelliten zur Verfügung standen. In diesen Epochen wurde die Position des Fahrzeugs ausschließlich prädiziert. Die roten Punkte bilden gefilterte Positionen für jene Epochen ab, in denen Messdaten zur Verfügung standen. Sie sind sowohl mit dem Einfluss der Messung als auch der Prädiktion behaftet. Man erkennt viele Epo-

chen mit Beobachtungsausfällen. Die Prädiktion kann nach einem Beobachtungsausfall stark von der tatsächlichen Lage des Fahrzeugs abweichen. In solchen Fällen kann die Innovation - der Unterschied zwischen der Messung und Prädiktion - beträchtlich hohe Werte ergeben. Am besten repräsentiert die Auswertung die Messfahrt 3 (links unten) die wahre befahrene Route.

6.2 Empfängeruhrfehler als Parameter

Die Nutzung von Pseudoranges im Kalman Filter erfordert eine zusätzliche Schätzung des Empfängeruhrfehlers. Für diesen Zweck müssen die Matrizen des Filters entsprechend angepasst werden.

6.2.1 KF- Matrizen – Pseudorange Beobachtung

Der Zustandsvektor x enthält die Parameter, die geschätzt werden, z. B.: X, Y, Z, $c \cdot \Delta t_E$, v_X, v_Y, v_Z, a_X, a_Y, a_Z, wobei $c \cdot \Delta t_E$ sich auf den Empfängeruhrfehler× Lichtgeschwindigkeit bezieht und wird in Metern herausgegeben. Die Dimension des Vektors entspricht somit der Anzahl der Parameter: $[1 \times 10]$. In der ersten Epoche werden Näherungswerte für die Roverkoordinaten verwendet, und alle anderen Parameter a priori auf Null gesetzt. Ab der zweiten Epoche werden alle Parameter durch den Kalman Filter berechnet.

Die Kovarianzmatrix des Zustandsvektors Q_{xx} $[10 \times 10]$ enthält die Standardabweichungen der im Zustandsvektor geschätzten Parameter, z. B.: $s_X^2 = s_Y^2 = s_Z^2 = 0{,}5\ m^2$, $s_{c \cdot \Delta t_E}^2 = 10\ m^2$, $s_{v_X}^2 = s_{v_Y}^2 = s_{v_Z}^2 = 0{,}1\ m^2/s^2$, $s_{a_X}^2 = s_{a_Y}^2 = s_{a_Z}^2 = 0{,}01\ m^2/s^4$. Alle Varianzen und Kovarianzen werden im Filter in den nachfolgenden Epochen laufend aufdatiert.

Die Beobachtungsmatrix A enthält die Ableitungen der Beobachtungsgleichung nach den Zustandsgrößen. Die Anzahl der Zeilen hängt von der Anzahl der beobachteten Satelliten ab: $[n \times 10]$.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{X^{S1} - X_E}{S_E^{S1}} & -\frac{Y^{S1} - Y_E}{S_E^{S1}} & -\frac{Z^{S1} - Z_E}{S_E^{S1}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{X^{S2} - X_E}{S_E^{S2}} & -\frac{Y^{S2} - Y_E}{S_E^{S2}} & -\frac{Z^{S2} - Z_E}{S_E^{S2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{X^{Sn} - X_E}{S_E^{Sn}} & -\frac{Y^{Sn} - Y_E}{S_E^{Sn}} & -\frac{Z^{Sn} - Z_E}{S_E^{Sn}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

Der Beobachtungsvektor l setzt sich aus Pseudoranges P3 zusammen. Je mehr Satelliten zur Verfügung stehen, desto größer wird seine Dimension: $[1 \times n]$.

Die Matrix des Beobachtungsrauschens Q_{ll} beschreibt die Genauigkeit der Beobachtungen und ist a priori eine Diagonalmatrix mit den Varianzen der Pseudoranges. Diese Werte werden für den in der Testfahrt genützten Empfänger konstant für alle Satelliten und alle Epochen $s^2 = 6\ m^2$ gesetzt. Die Dimension der Matrix ist durch die Anzahl der Satelliten bestimmt: $[n \times n]$.

Das Systemrauschen Q_{ww} $[10 \times 10]$ enthält Störgrößen von jenen Parametern, die im Zustandsvektor geschätzt werden. Die Varianzen werden wie folgt gesetzt:

$$s_X^2 = s_Y^2 = s_Z^2 = 0{,}5\ m^2,\quad s_{v_X}^2 = s_{v_Y}^2 = s_{v_Z}^2 = 0{,}002\ \ m^2/s^2,\quad s_{a_X}^2 = s_{a_Y}^2 = s_{a_Z}^2 = 0{,}0005\ \ m^2/s^4.$$

Sie werden konstant über alle Epochen angenommen. Bei steigenden Varianzen steigt die Abweichung der Schätzwerte von der Systembeschreibung.

Als Modell für die Fahrzeugbewegung wird ein kinematisches Modell mit konstanter Beschleunigung: $\tilde{x} = \hat{x} + \hat{v} \times \Delta t + \frac{1}{2} \times \hat{a} \times \Delta t^2$ angesetzt. Das Uhrverhalten wird ebenfalls sehr einfach modelliert. Es setzt die geschätzte Uhrkorrektur der Vorepoche dem prädizierten Wert der aktuellen Epoche gleich.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

In der Innovation wird die aus C1 und P2 gebildete ionosphärenfreie Linearkombination P3 mit der geometrischen Strecke verglichen. In diesem Schritt wird die Empfängeruhrkorrektur angebracht

$$Innovation = PR_E^S - S_E^S - c \cdot \Delta t_E\,. \tag{6.7}$$

6.2.2 Beispiele

Um die Wirkung der Prädiktion und die Zusammenhänge zwischen einzelnen Komponenten des Modells zu verdeutlichen, werden Beispiele zu einer kontinuierlich vorhandenen Messung und zu einer Messung mit zeitweise fehlenden Beobachtungen einzeln präsentiert.

Mit dem hier verwendeten Modell können keine Rohpositionen des Fahrzeugs ausgegeben werden. Die durch den Algorithmus errechneten Positionen werden jedes Mal mit den prädizierten Werten verglichen und jeweils als bereits gefilterte Daten geliefert.

6.2.2.1 Messung fortlaufend vorhanden

Die Abbildung 6-5 zeigt verschiedene Trajektorien. Im ersten Fall wurden reine C1-Code Pseudoranges verwendet. Im zweiten Fall wurde eine ionosphärenfreie Linearkombination C1/P2 gebildet. Im dritten Fall dagegen wurde eine ionosphärenfreie Linearkombination L1/L2 mit Offset zur Linearkombination C1/P2 angewandt. Die dargestellte Trajektorie bezieht sich auf einen Ausschnitt der Messung, der kurz nach dem Starten des Autos aufgenommen wurde. Diese Tatsache machen die Grafiken 6-6 und 6-7 noch anschaulicher. Sie zeigen sowohl den Verlauf der Geschwindigkeit und Beschleunigung, als auch des Hochwerts und Rechtswerts in Abhängigkeit von der Zeit.

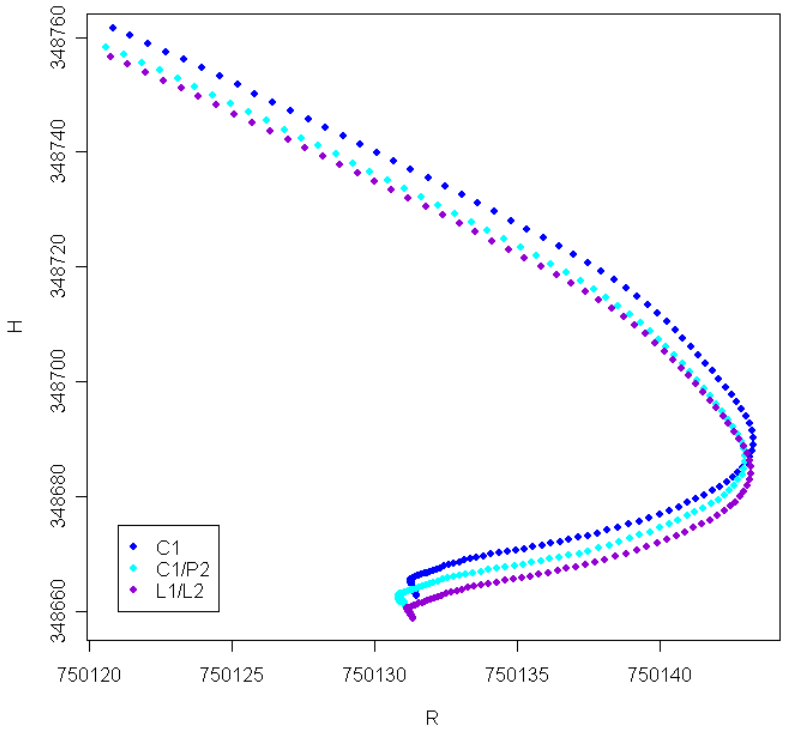


Abb. 6–5 Gefilterte Koordinaten im BMN in [m]

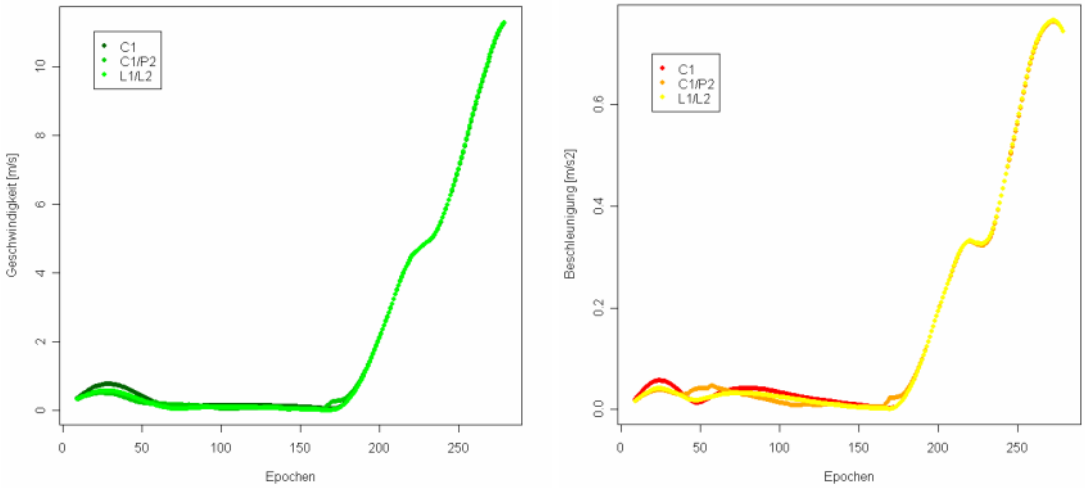


Abb. 6–6 Geschwindigkeit und Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit

Bis zu der ca. 175. Epoche, also etwa 35 Sekunden lang, änderte das Auto seine Position kaum. Seine Geschwindigkeit und Beschleunigung blieben damit nahezu Null. In diesem Zeitraum fuhr das Fahrzeug langsam rückwärts, um abzubiegen und die gewünschte Richtung zum Leopoldsberg zu folgen. Diese kurze Teilstrecke ist in der Abbildung 6-5 als ein kleiner Haken am Anfang der Trajektorie zu sehen. Danach begann die richtige Fahrt, die durch eine Steigerung der Geschwindigkeit und Beschleunigung gekennzeichnet war. In der Kurve (Stufe in der Beschleunigungskurve) wurde die Geschwindigkeit kurzfristig reduziert um anschließend wieder zu beschleunigen.

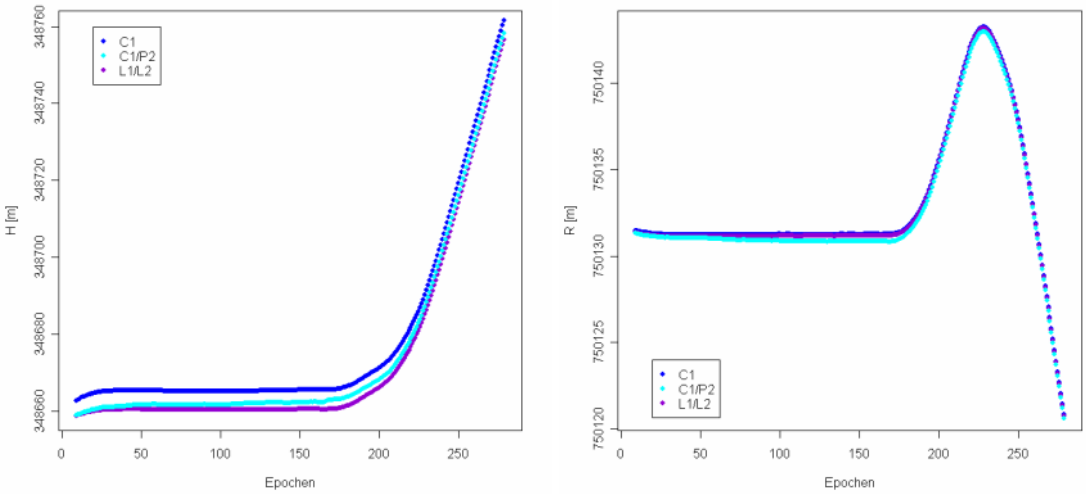


Abb. 6–7 Verlauf des Hochwerts und Rechtswerts in Abhängigkeit von der Zeit

Durch die Bildung der ionosphärenfreien Linearkombination steigt prinzipiell die Genauigkeit der Positionierung. Die Verwendung von Phasen bewirkt zusätzlich, dass die Trajektorie noch stärker geglättet wird (Wegfall des Code-Rauschens).

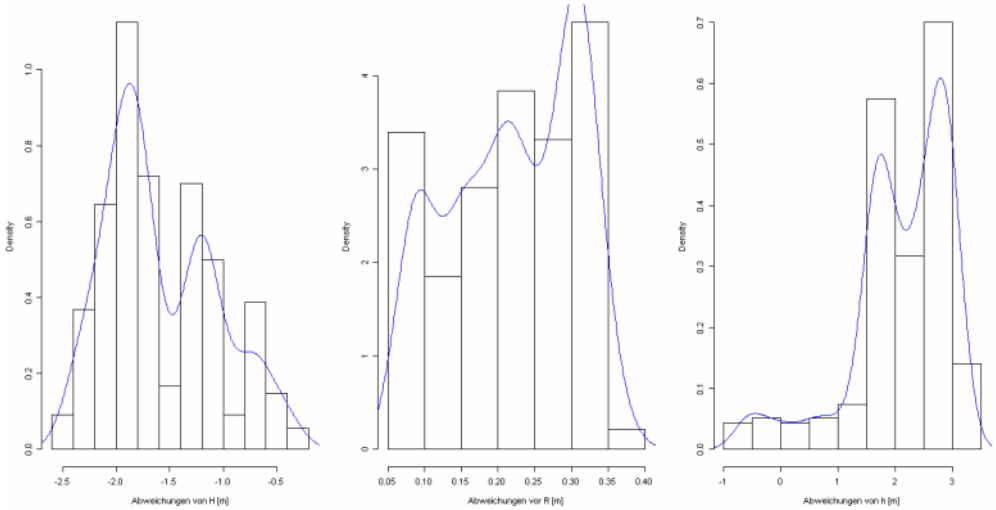


Abb. 6–8 Histogramme der gefilterten Koordinatendifferenzen einer C1/P2 und einer L1/L2 Messung

Die Abbildung 6-8 präsentiert Histogramme der Abweichungen zwischen Koordinaten im BMN der beiden Trajektorien: C1/P2 und L1/L2. Den Histogrammen können auch die Grafiken 6-9 zugeordnet werden, die im Prinzip desselben Abweichungen zeigen, diesmal aber in Abhängigkeit von der Zeit. Die Unterschiede betragen für die in der betrachteten Zeitspanne wirkende Verwendung von Phasen und die Geometrie der angemessenen Satelliten durchschnittlich 2,0 Meter für den Hochwert, 0,3 Meter für den Rechtswert und ca. 2,5 Meter in Höhenrichtung. In den Komponenten Höhe und Lage-Hochwert sieht man klar das Einschwingen des Filters.

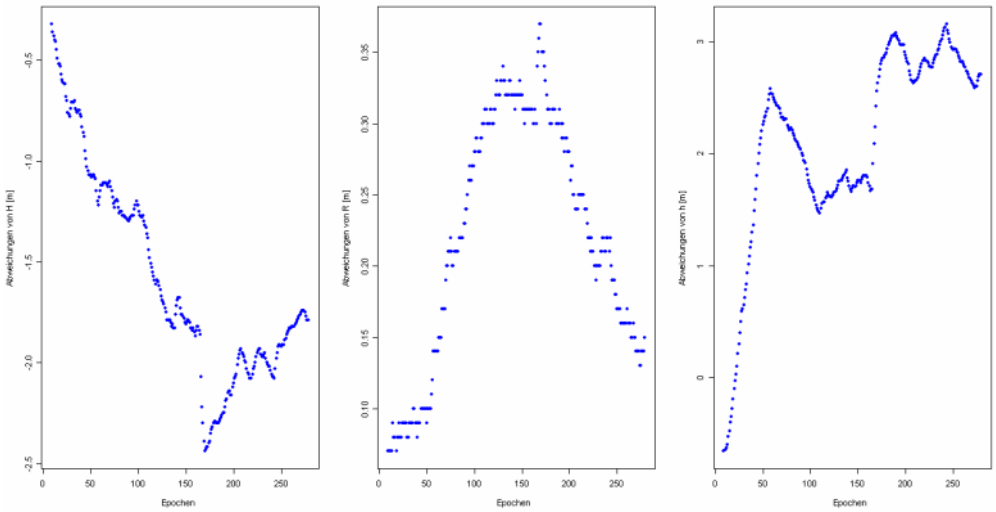


Abb. 6–9 Differenzen der gefilterten Koordinaten einer C1/P2 und einer L1/L2 Messung

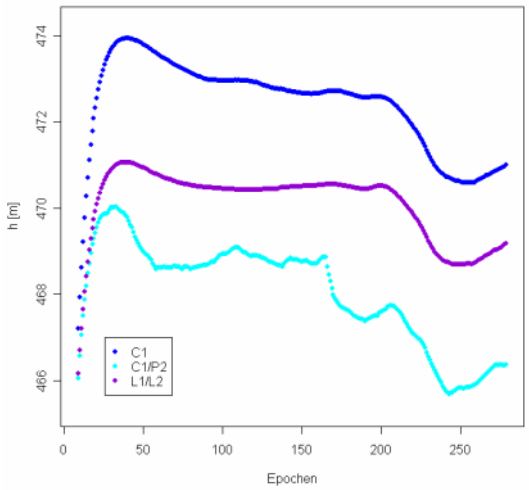


Abb. 6–10 Verlauf der Höhe in Abhängigkeit von der Zeit

Die Abbildung 6-10 zeigt das Verhalten der Höhenkoordinate im Detail. Durch den Einfluss des größeren Beobachtungsrauschens der Linearkombination P3 ist der Verlauf der Höhe der C1/P2 Messung deutlich mehr gestreut als in der C1 und L3 Messung.

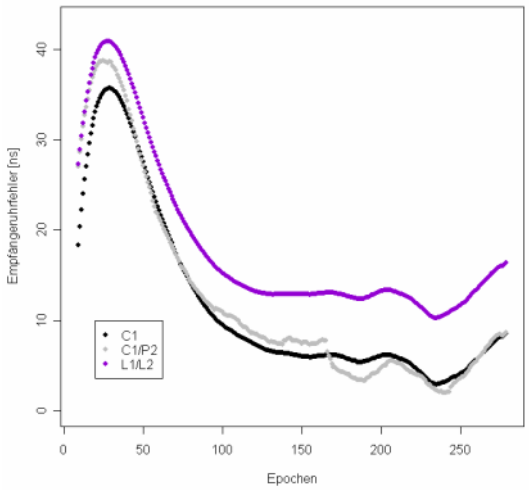


Abb. 6–11 Verlauf des Empfängeruhrfehlers in Abhängigkeit von der Zeit

Wie bereits erwähnt muss bei der Verwendung von Pseudoranges als Beobachtungen in der Kalman Filterung der Empfängeruhrfehler mitgeschätzt werden. Der in der Abbildung 6-11 gezeigte anfangs etwas große Empfängeruhrfehler normalisiert sich während der Fahrt des Autos und bleibt schließlich im ca. 10 Nanosekunden Bereich für C1 und C1/P2 und im ca. 15 Nanosekunden Bereich für L1/L2. Da eine Empfängeruhr in der Realität nicht ein derartiges kurzfristiges Driftverhalten zeigt, liegt nahe, dass das Ausschwingen zu Beginn mit einem Höhenfehler einhergeht, der hoch mit dem Uhrfehler korreliert ist. Ursachen dafür könnten das Einschwingverhalten des Filters, oder auch eine schlechte Satellitengeometrie sein.

Es fällt wieder auf, dass der Verlauf des ‚Receiver Clock Errors' der C1/P2 Messung deutlich verrauschter ist, als jener der C1 und L1/L2 Messung. Nach der Bildung einer Linearkombination summieren sich die Standardabweichungen nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz und liefern somit eine größere Streuung der im Kalman Filter geschätzten Parameter. Die Phasenlösung weist grundsätzlich höhere Genauigkeit und einen glatten Verlauf auf.

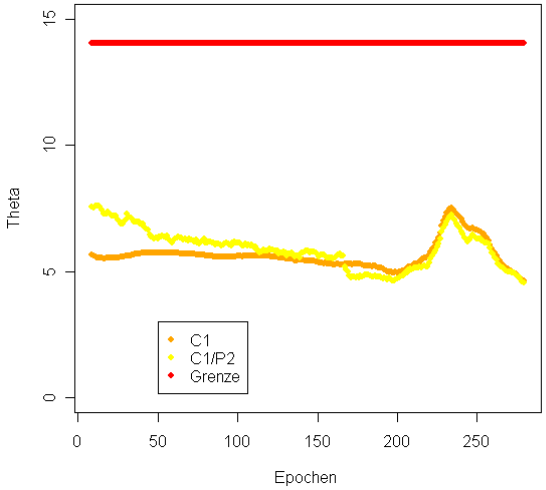


Abb. 6–12 Die Testgröße θ einer C1 und einer C1/P2 Messung

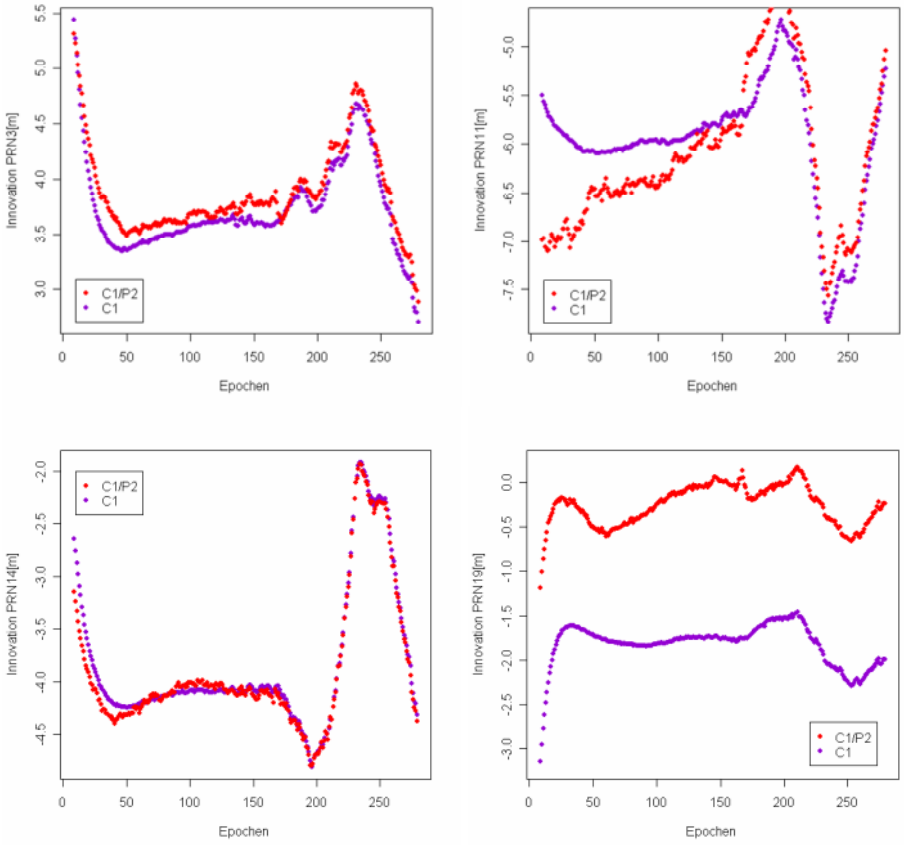


Abb. 6–13 Innovation der Distanz zu den GPS Satelliten PRN 03, PRN 11, PRN 14 und PRN 19

Die Innovation entspricht der Differenz zwischen der korrigierten Pseudorange und der geometrischen Strecke. Die Innovation zu den Satelliten PRN 03, 11, 14 und 19 wird in der Abbildung 6-13 gezeigt. Sie reagiert sensibel auf jegliche Fahrtrichtungsänderungen des Autos.

Die Innovation hat einen direkten Einfluss auf die Entwicklung der Testgröße θ. Das bedeutet, dass Schwankungen der Innovation (also auch der Form der Route selbst) die Akzeptanz des Verträglichkeitstests im Kalman Filter beeinflussen. Das in diesem Kapitel präsentierte Beispiel bezieht sich auf einen fast eine Minute langen Abschnitt der Messung, in dem es zu keinen Messdatenausfällen kam. Während dieser Zeit standen 7 GPS-Satelliten zur Verfügung. Den 7 Beobachtungen entspricht eine Thetagrenze von 14,07 [siehe Anhang 9.2]. Das Überschreiten dieser Grenze weißt darauf hin, dass entweder das Beobachtungs- oder Systemrauschen vergrößert werden soll. Dadurch kann der Filter rationeller arbeiten. Wie die Grafik 6-12 zeigt, reagiert θ zwar auf ein merkbares Anwachsen der Innovation, bleibt aber deutlich in den veranschlagten Grenzen. Die Situation könnte jedoch anders ablaufen, wenn wegen der schlechten Sicht zu den Satelliten viele Beobachtungen fehlten.

6.2.2.2 Gelegentlicher Ausfall von Messdaten

Die Abbildung 6-14 zeigt einen 100 Sekunden langen Abschnitt der Messung, während dessen es oftmals zu Unterbrechungen und damit einem Ausfall von Pseudorangebeobachtungen kam. Ähnlich wie im Kapitel 6.1.3, beschreiben die roten Punkte die gefilterten Positionen, in denen Messungen zur Verfügung standen. Alle in diesem Kapitel präsentierten Grafiken beziehen sich auf Pseudoranges nach Bildung der ionosphärenfreien Linearkombination C1/P2.

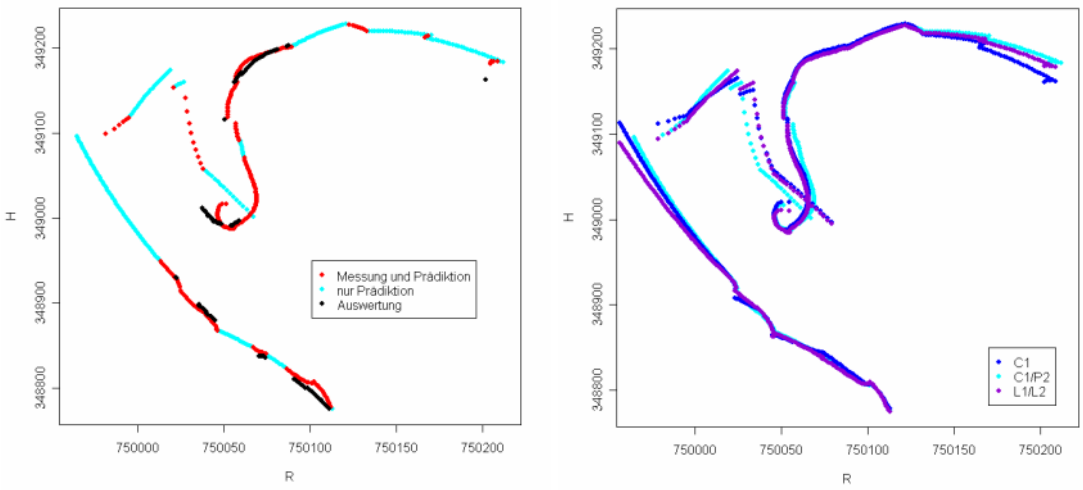


Abb. 6–14 Gefilterte Koordinaten im BMN in [m]

Der erste und der letzte Teil der dargestellten Route verliefen ungefähr geradlinig. Trotz der raren Zufuhr der Messdaten lieferte der Filter aus dem Zusammenspiel von reiner Prädiktion und der Einbindung weniger Streckenmessungen eine fast stetige Trajektorie, wenngleich auch die Kurven zum Fahrtbeginn nicht sauber reproduziert

werden konnten. Der mittlere Teil der Strecke ist reich an Kurven. Es ist nicht möglich, eine Fahrtrichtungsänderung vorherzusagen. Der Kalman Filter kann die Informationen nur aus vergangenen Epochen gewinnen. Dennoch repräsentiert die gefilterte Trajektorie die wahre Wegstrecke einigermaßen gut.

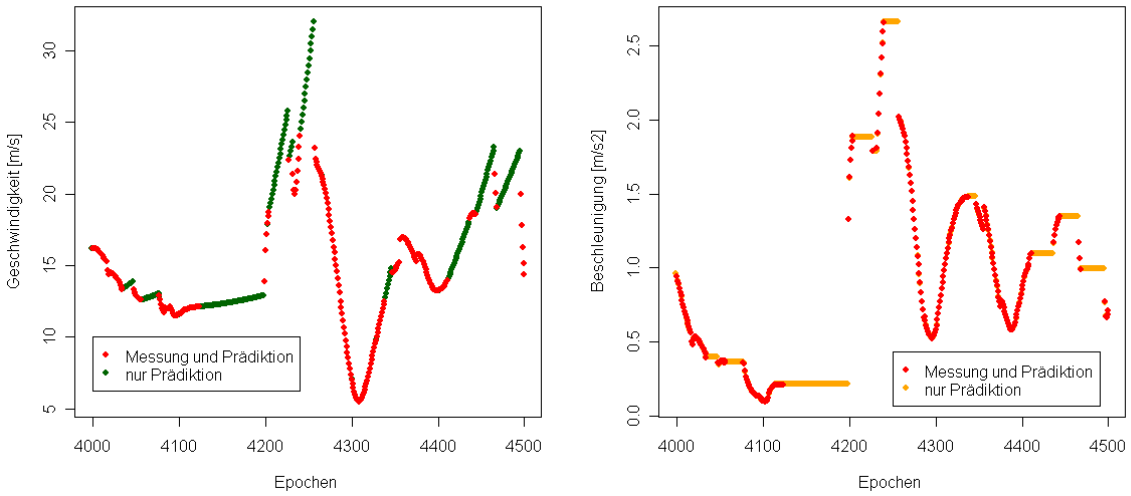


Abb. 6–15 Geschwindigkeit und Beschleunigung einer C1/P2 Messung in Abhängigkeit von der Zeit

Die Abbildungen 6-15 zeigen den Verlauf der Geschwindigkeit und Beschleunigung. Natürlich reagieren auch diese Parameter entsprechend dem Bewegungsmodell im Falle des Ausbleibens von Beobachtungen. Ohne Beobachtungen bewegt sich das Fahrzeug konstant beschleunigt weiter. Diese Information ist in der Transitionsmatrix enthalten.

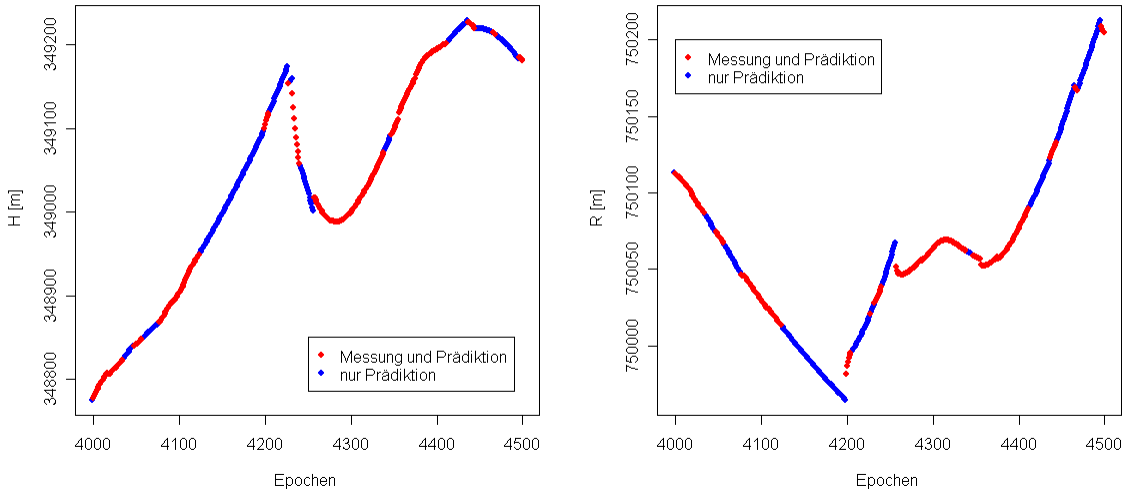


Abb. 6–16 Verlauf des Hochwerts und Rechtwerts einer C1/P2 Messung in Abhängigkeit von der Zeit

In der Grafik 6-16 wird die Entwicklung des Hochwerts und Rechtswerts in der Zeit präsentiert. Es lässt sich leicht erkennen, dass in den Kurven und bei lang andauerndem Beobachtungsausfall die Prädiktion schlecht abschneidet.

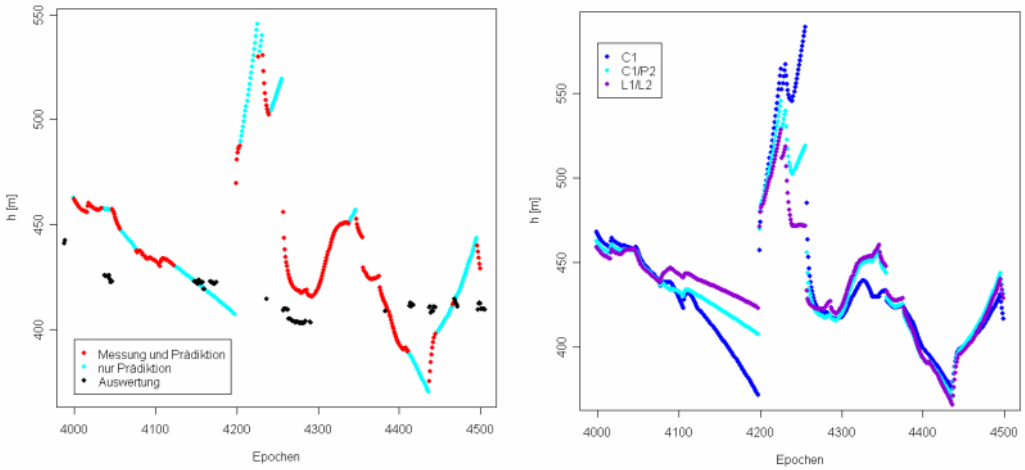


Abb. 6–17 Verlauf der Höhe in Abhängigkeit von der Zeit

Der Verlauf der Höhenkomponente wird in der Abbildung 6-17 dargestellt. Gegen Epoche 4150 bricht die Messinformation ab. Zur Epoche 4200 und 4250 sind einige Einzelmessungen verfügbar. Die prädizierten Werte weichen für eine Dauer von ca. 50 Epochen sprunghaft von der tatsächlichen Fahrzeughöhe ab. Es fällt auf, dass der Verlauf der Höhe aus L1/L2 Messung am wenigsten der falschen Prädiktion unterliegt. Das Auto befand sich während der gesamten Messfahrt in einem Höhenbereich von anfangs 460 m bis 390 m am Ende. Die schwarzen Punkte auf der linken Grafik 6-17 zeigen die Höhenlösung der in Postprocessing ausgewerteten C1/P2 Messung. Sie entsprechen etwa der wahren Höhentrajektorie.

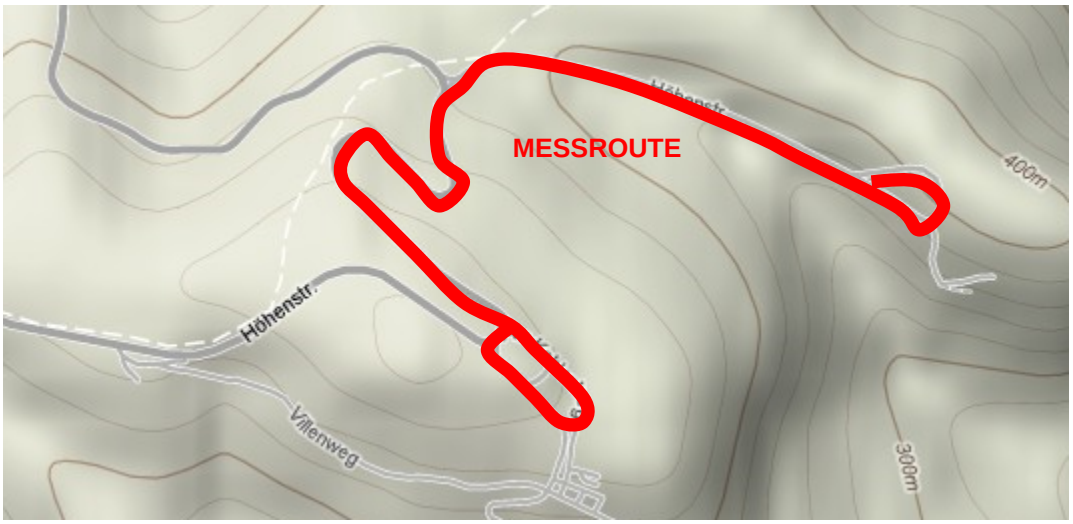


Abb. 6–18 Die Messroute auf einer topografischen Karte

Der wahre Verlauf der Trajektorie relativ zu den Höhenlinien wird in der Abbildung 6-18 präsentiert. Die Abweichungen von bis zu 50 m zwischen gefilterter und wahrer Höhe können nur mit einer extrem schlechten Schnittgeometrie, den häufigen Datenausfällen und der deshalb fehlerhaften Prädiktion von Empfängeruhrfehlern,

die sich in der Höhenkoordinate durchschlagen, erklärt werden. Der entsprechende Empfängeruhrfehler ist in der Abbildung 6-19 dargestellt.

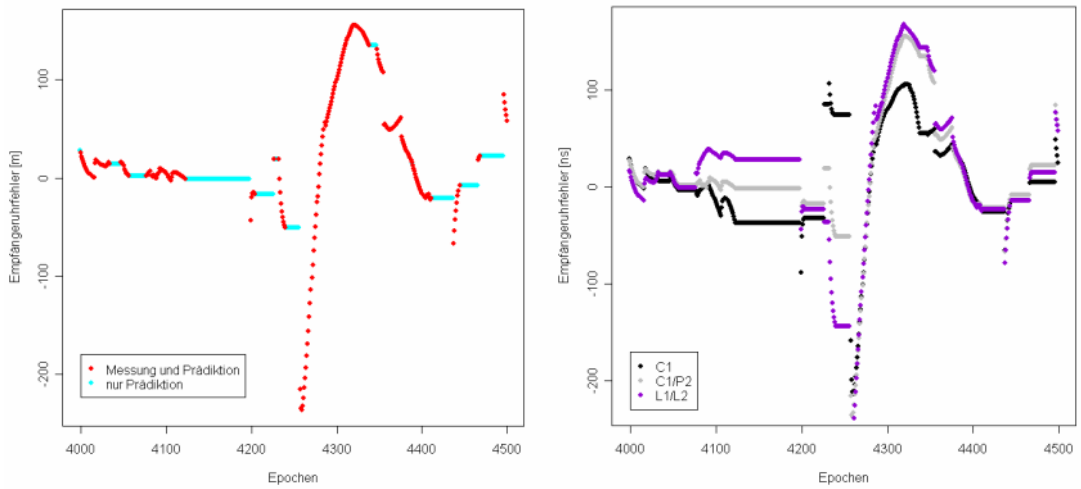


Abb. 6–19 Verlauf des Empfängeruhrfehlers in Abhängigkeit von der Zeit

Üblicherweise lässt sich der Empfängeruhrfehler durch einen ruhigen Verlauf repräsentieren. Im vorliegenden Fall gelingt dies auch bis zur Epoche 4200 recht gut. Doch dann zeigt sich - durch Beobachtungsverlust und vereinzelten Beobachtungen mit schlechter Schnittgeometrie - ein Sprung im Empfängeruhrfehler. Der ‚Receiver Clock Error' kann erst ab der Epoche 4400 vom Filter nach einem Einschwingvorgang wieder auf den korrekten Wert zurückgebracht werden. Es kommt also zwischen den Epochen 4200 und 4400 zu beachtlichen Abweichungen zwischen den gerade noch prädizierten Werten und den aus wieder verfügbaren Messgrößen abgeleiteten Werten. Das Auftreten von Abschattungen entlang einer kurvigen Trajektorie erschwert die richtige Berechnung sowohl der Koordinaten als auch des Empfängeruhrfehlers. Die schließlich fehlerhaften Höhen zwischen den Epochen 4200 und 4440 sind nur eine Folgeerscheinung.

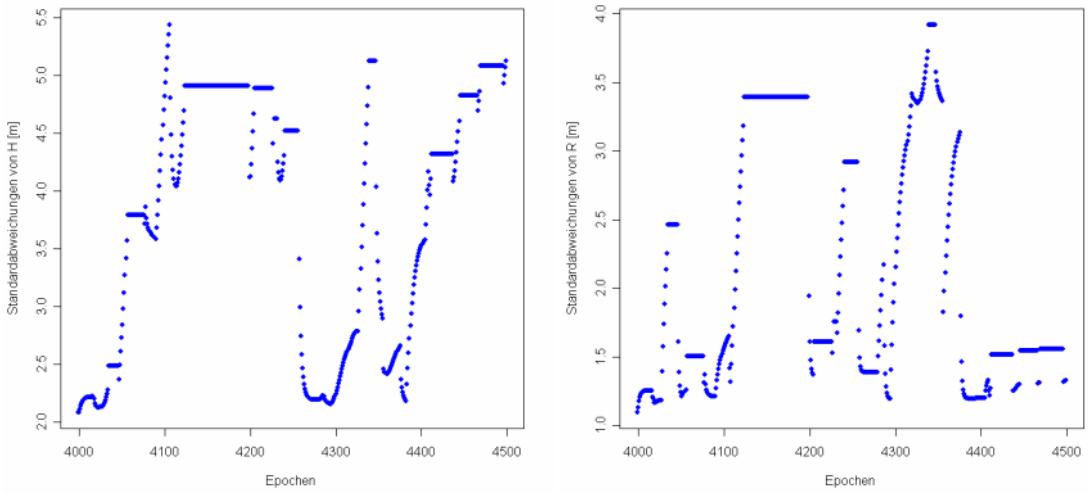


Abb. 6–20 Standardabweichungen des Hochwerts und Rechtswerts

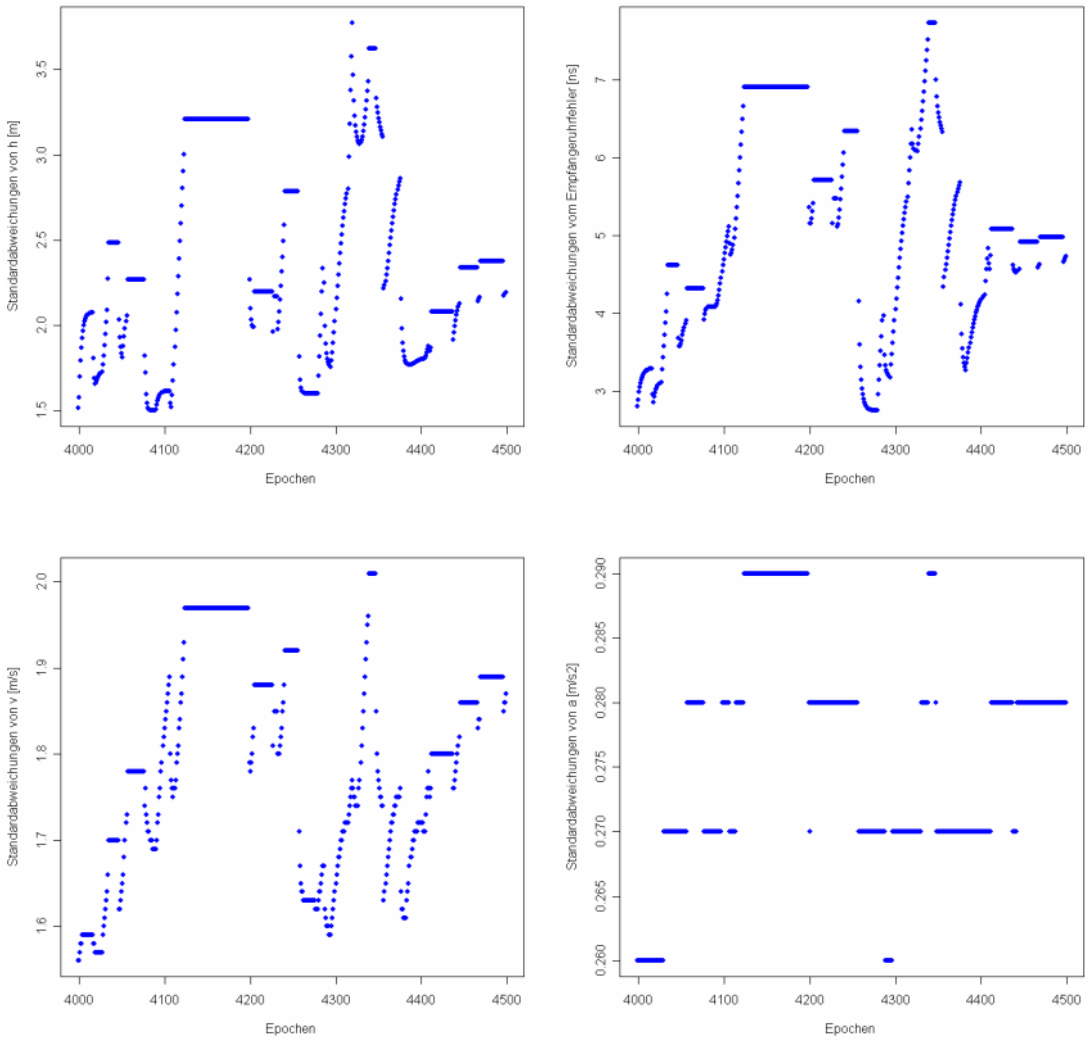


Abb. 6–21 Standardabweichungen der Höhe, des Empfängeruhrfehlers, der Gesamtgeschwindigkeit und –beschleunigung

Die Abbildungen 6-20 und 6-21 stellen die Standardabweichungen des Zustandsvektors im BMN dar. Die Standardabweichungen sind in der Regel der verbesserten Kovarianzmatrix des Zustandsvektors zu entnehmen. In den Epochen ohne vorliegende Beobachtung wurden die Werte aus der prädizierten Kovarianzmatrix des Zustandsvektors verwendet. Sie fallen dann etwa konstant aus. Liegen zu wenig Messungen pro Epoche vor (<4 aber ≥0), steigen die Standardabweichungen entsprechend der Addition des Systemrauschens.

Wenn keine Messungen vorliegen, werden nur die Prädiktionsgleichungen im Kalman Filter durchlaufen. Die Korrektur und somit auch die Innovation werden nicht berechnet. Dies ist auf der Grafik 6-22 zu sehen. Nach einem Beobachtungsverlust mit einer Fahrtrichtungsänderung kann sie kurzfristig sehr große Werte annehmen.

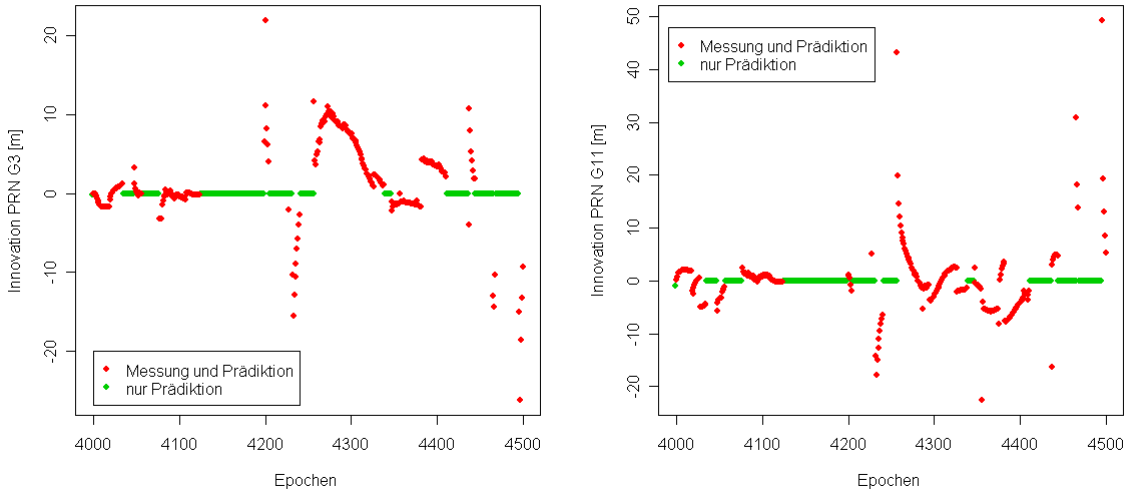


Abb. 6–22 Innovation der Distanz zu den GPS Satelliten PRN 03 und PRN 11 in Abhängigkeit von der Zeit

Der Innovation entsprechend verhält sich die Testgröße θ. Die »erlaubte« Thetagrenze ist von der Anzahl der sichtbaren Satelliten abhängig. Die sich ständig ändernde Satellitenanzahl wird in der Abbildung 6-23 (links) gezeigt. Der Grund dafür sind durch die Bäume verursachte Abschattungen.

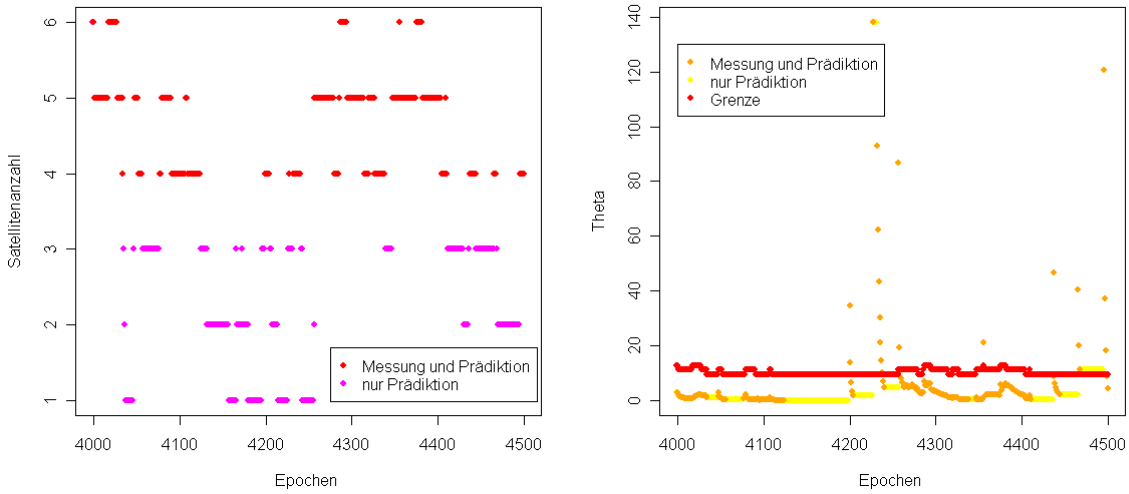


Abb. 6–23 Satellitenanzahl (links) und Testgröße θ (rechts)

Die Testgröße θ verläuft in der Grafik 6-23 (rechts) grundsätzlich unterhalb der veranschlagten Grenze. Wenn weniger als vier Satelliten zur Verfügung stehen, beträgt sie Null. Beim Vorliegen von Beobachtungen kann θ kurzfristig große Werte annehmen. Dies ist die Folge der großen Innovation, die aufgrund der Fahrtrichtungsänderung während des Beobachtungsausfalls entstand. Sie sind auch nachvollziehbar und zulässig. Es ist nur wichtig, dass die Testgröße unter »normalen Bedingungen« klein gehalten wird.

6.3 Pseudorange-Differenzen

In der Relativpositionierung werden zwei Empfänger – eine Referenz und ein Rover – benötigt. Nach diesem Prinzip wurde die Messung vom Juni 2008 am Kahlenberg in Wien durchgeführt. Durch die Bildung von Beobachtungsdifferenzen können vielfältige Fehlereinflüsse eliminiert werden. Bei Verwendung von Einfachdifferenzen (2.5) wird der Satellitenuhrfehler ausgeschlossen:

$$\Delta(PR_E^S - PR_{REF}^S) = (S_E^S - S_{REF}^S) + c \cdot (\Delta t_E - \Delta t_{REF}) - c \cdot (\Delta t^S - \Delta t^S) + \\ + (d_{ion}^{S-E} - d_{ion}^{S-REF}) + (d_{trop}^{S-E} - d_{trop}^{S-REF}) + (d_{orb}^{S-E} - d_{orb}^{S-REF}) + (\varepsilon_E^S - \varepsilon_{REF}^S)$$

Die Troposphärenkorrektur wirkt sowohl an der Referenz als auch am Rover auf die aus Pseudoranges C1 und P2 vom Satelliten zum Rover gebildete Linearkombination P3. Aufgrund der Differenzbildung wird aber der Einfluss der Troposphäre fast vollständig eliminiert. Diese Aussage gilt ebenso für Satellitenbahnfehler.

6.3.1 KF-Matrizen – Pseudorange Differenz Beobachtungen

Die Relativpositionierung liefert als Ergebnis nicht mehr absolute Positionen des Rovers, sondern die Basislinien zwischen dem Rover und der Referenz. Die Koordinaten werden in Bezug auf die Referenz bestimmt. Die feste Position der Referenz wurde entweder vorab im Referenzrahmen des Landessystems bestimmt oder ist genähert der Navigationslösung des Referenzempfängers zu entnehmen.

Der Zustandsvektor enthält also nicht mehr die Koordinaten des Rovers X, Y, Z und den Empfängeruhrfehler×Lichtgeschwindigkeit $c \cdot \Delta t$ in [m], sondern die Koordinaten- und Uhrdifferenzen zwischen dem Rover und der Referenz $\Delta X_{rov-ref}$, $\Delta Y_{rov-ref}$, $\Delta Z_{rov-ref}$, $c \cdot \Delta\Delta t_{rov-ref}$. Weil die Referenz sich nicht relativ zum Referenzsystem bewegt, treten im Zustandsvektor die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Rovers - und nicht ihre Differenzen - auf.

Die Prädiktion der Zusatndsgrößen erfolgt wieder mit dem im Vorkapitel angeführten kinematischen Modell wobei die Transitionsmatrix T unverändert bleibt.

Der Beobachtungsvektor l entsteht aus einer Subtraktion der aus Pseudoranges vom Satelliten zur Referenz gebildeten Linearkombination $P3_{ref}$ von der aus Pseudoranges vom Satelliten zum Rover geformten Linearkombination $P3_{rov}$:

$$l = P3_{rov} - P3_{ref} . \tag{6.8}$$

Es ist darauf zu achten, dass die Rover-Koordinate nun den Differenzvektor (Basislinie) zwischen Rover und der Referenzstation darstellt. Die Beobachtungsmatrix A bekommt nun folgende Gestalt:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\Delta X_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & \frac{\Delta Y_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & \frac{\Delta Z_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta X_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & \frac{\Delta Y_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & \frac{\Delta Z_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta X_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & \frac{\Delta Y_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & \frac{\Delta Z_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Das Code-Beobachtungsrauschen Q_{ll} kann nun auf max. 1 Meter verkleinert werden. Es beschreibt jetzt die Standardabweichungen der zwischen den Linearkombinationen gebildeten Differenzbeobachtung und nicht die Standardabweichung der Linearkombinationen selbst.

Das Systemrauschen Q_{ww} darf unverändert bleiben. Durch seine Modifizierung konnte man aber bewirken, dass sich die Ergebnisse mehr der Prädiktion oder der Messung nähern werden.

Die Empfängeruhrkorrektur (diesmal Differenz zur Referenzstationsuhrkorrektur) wird wieder in der Innovation berücksichtigt:

$$Innovation = l - S^S_{rov} + S^S_{ref} - c \cdot \Delta\Delta t_E \,. \quad (6.10)$$

Die Berechnung der Roverpositionen ergibt sich aus den im verbesserten Zustandsvektor enthaltenen Differenzen in Bezug auf die Referenz:

$$X_{rov} = \Delta X_{rov-ref} + X_{ref} \,. \quad (6.11)$$

Die Varianzen der Parameter des Zustandsvektors sind - vor allem durch das geringere Beobachtungsrauschen - im Allgemeinen kleiner als im Fall der Einzelpunktbestimmung.

6.3.2 Beispiele - Testfahrten

Die Messungen fanden am Parkplatz am Kahlenberg statt. Die statische Messung der Referenz und die kinematische Messung des Rovers wurden in Zeitintervallen von 0,2 Sekunden gespeichert.

6.3.2.1 Messung fortlaufend vorhanden

Die Abbildung 6-24 zeigt vier unterschiedliche Trajektorien, berechnet als Einzelpunktbestimmung mit C1-Code und mit der Linearkombination P3 und schließlich die Lösungen auf Basis von P3-Differenzbeobachtungen und L3-Differenzbeobachtungen zwischen Referenz und Rover.

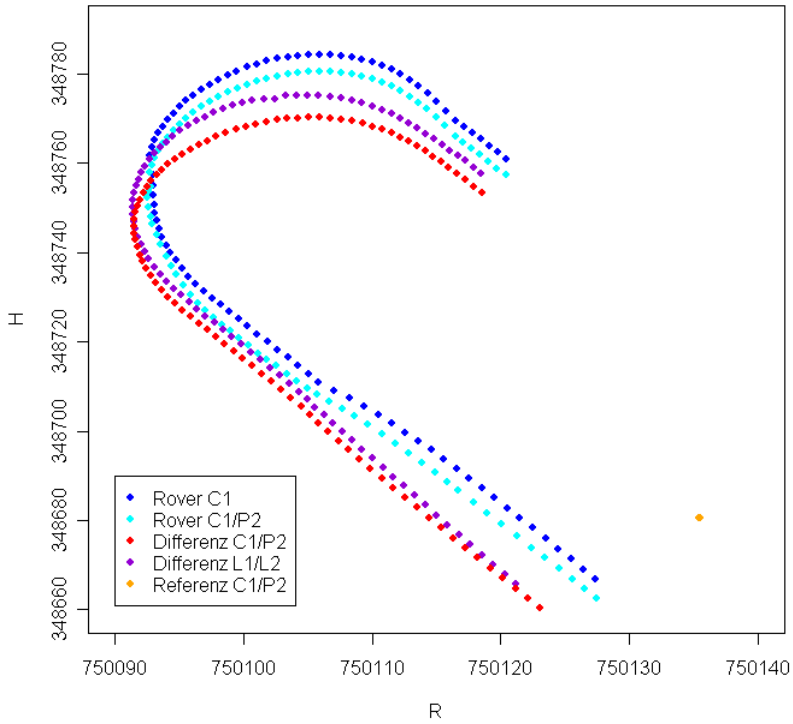
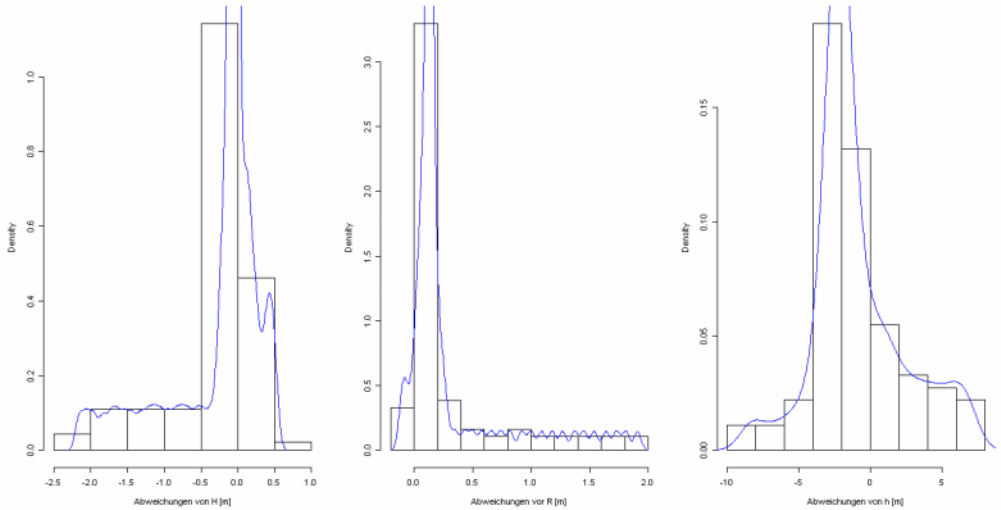


Abb. 6–24 Gefilterte Koordinaten im BMN in [m]

Die Referenzstation ist wegen ihres statischen Charakters nur als ein gelber Punkt auf der Grafik zu sehen. Die Trajektorien C1 und C1/P2 sind um durchschnittlich 2 Meter voneinander verschoben (Einfluss der Ionosphäre). Die C1/P2 Trajektorie ist somit näher wahren Fahrstrecke, allerdings noch mit systematischen Fehleranteilen behaftet. Die Differenzlösung C1/P2 ist um weitere 3-4 Meter versetzt. Differenzlösung L1/L2 dagegen um ca. 1 Meter rückwärts verschoben. Sie repräsentiert die Fahrstrecke im Koordinatenrahmen der Referenzkoordinate (= im vorliegenden Fall BMN).



6–25 Histogramme der Abweichungen zwischen den Trajektorien Differenz P3 und Differenz L3

Die Abbildung 6-25 stellt die Histogramme der Abweichungen zwischen den Trajektorien Differenz C1/P2 und Differenz L1/L2 dar. Die Abweichungen betragen im Schnitt -0,5 Meter in Richtung des Hochwerts, 0,2 Meter in Richtung des Rechtswerts und von ca. 4 Meter in der Höhe. Die Grafiken 6-26 spiegeln ebenfalls diese Verschiebungen wieder.

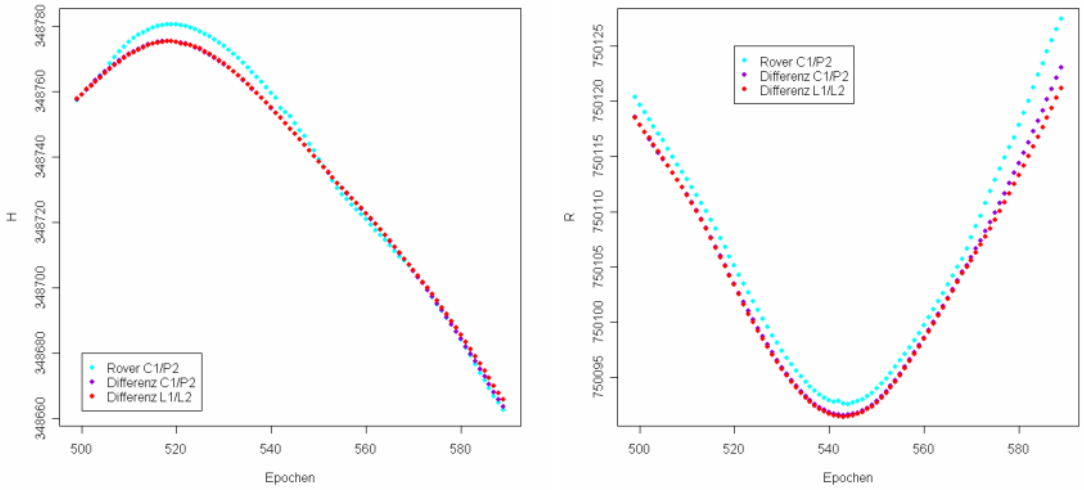


Abb. 6–26 Verlauf des Hochwerts und Rechtswerts in [m] in Abhängigkeit von der Zeit

Es fällt auf (Abbildung 6-24), dass die Trajektorien der Differenzen C1/P2 und L1/L2 ruhiger als Rover C1/P2 Lösung verlaufen. Durch eine Veränderung des System- bzw. des Beobachtungsrauschens kann der Grad der Glättung beeinflusst werden. Im konkreten Fall wurde das Beobachtungsrauschen der Differenz verkleinert.

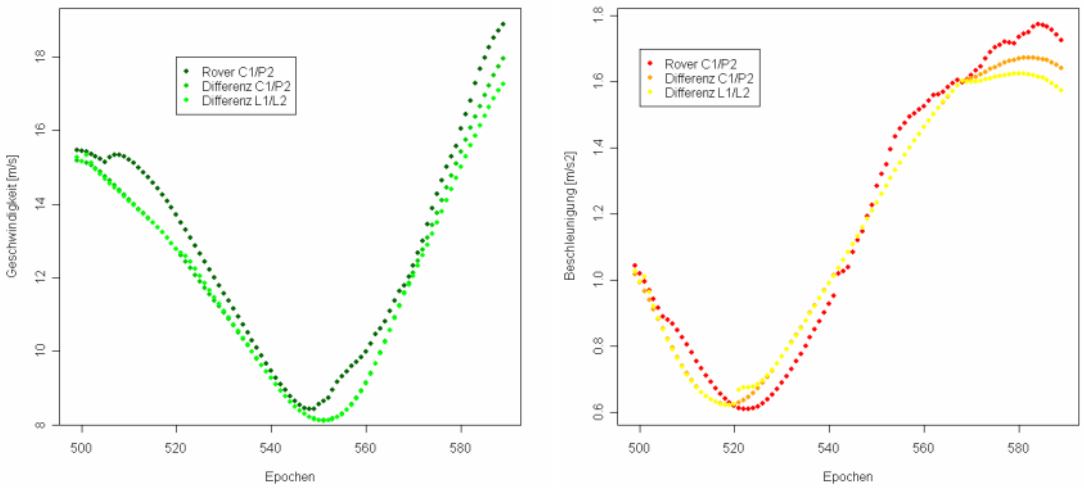


Abb. 6–27 Verlauf der Geschwindigkeit und Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit

Dementsprechend zeigen auch die abgeleiteten Geschwindigkeits- und Beschleunigungskurven der Differenzlösung einen glatten Verlauf. Während des gewählten Abschnitts der Messung durchfuhr das Fahrzeug eine Kurve (ca. 50. Epoche, Abb.

6-27), die durch Minima in der Geschwindigkeit von etwa 8 $\frac{m}{s}$ und der Beschleunigung von etwa 0,6 $\frac{m}{s^2}$ gekennzeichnet ist. Danach beschleunigte das Auto auf einer geradliniger Strecke mit bis zu 1,6 $\frac{m}{s^2}$ auf eine Geschwindigkeit von 19 $\frac{m}{s}$.

Nur Satelliten, die sowohl an der Referenz, als auch am Rover verfügbar sind, können zur Berechnung von Differenzen beitragen. Der Rover hatte eine gute Sicht wechselhaft mit bis zu 7 GPS-Satelliten: PRN 03, PRN 11, PRN 14, PRN 14, PRN 19, PRN 22, PRN 28 und PRN 32. Der Parkplatz ist teilweise mit Waldflächen umgeben, die der Referenz den Weg zu den Satelliten PRN 28 und PRN 32 abgeschatteten. Somit, gegen die Erwartung, verfügte die Referenz über eine geringere Anzahl von Satelliten wie der Rover.

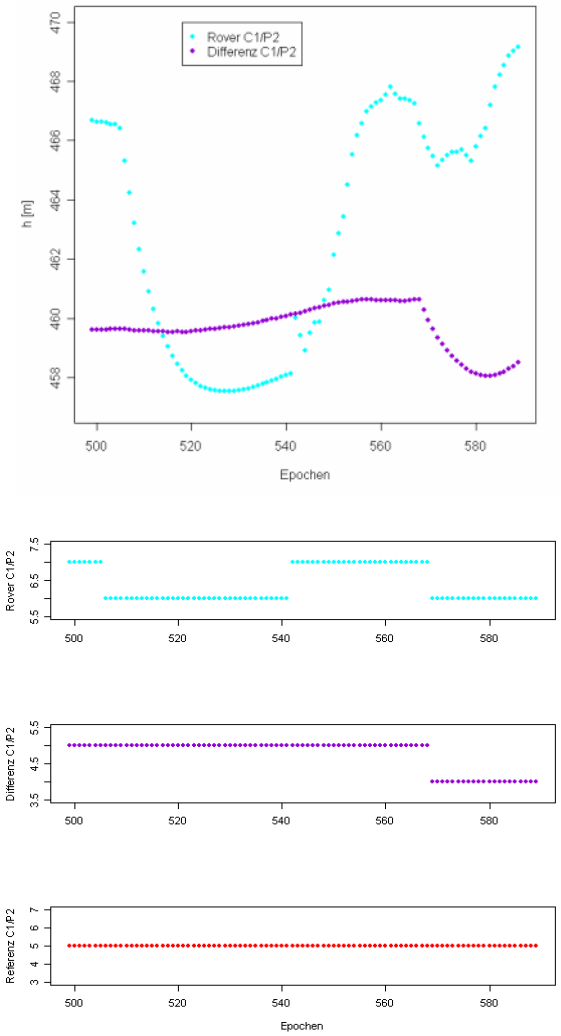


Abb. 6–28 Verlauf der Höhe und die verfügbare Satellitenanzahl

Es ist wichtig, der in der Abbildung 6-28 dargestellten Höhe die verfügbare Anzahl von Satelliten gegenüberzustellen. Die Schwankungen in der Entwicklung der Höhe spiegeln nämlich ganz eindeutig den Verlauf der Verfügbarkeit der Satelliten wider. In der Epoche 506 verlor der Rover den Kontakt zum Satelliten PRN 28. Infolgedessen verschob sich seine Höhenbestimmung um circa 10 Meter nach unten. Da der Satellit PRN 28 an der Referenzaufnahme nicht beobachtet wurde, trat keine deutliche Änderung im Verlauf der mittels Differenzen berechneten Höhe auf. Wenn nach etwa 10 Sekunden die Verfügbarkeit von Satelliten für den Rover wieder die Anzahl 7 erreichte, betrug die mittels ‚Single Point' C1/P2 bestimmte Höhe wieder ca. 422 Meter. Gegen Epoche 570 fiel der Satellit PRN 11 aus. Demzufolge musste er aus der Berechnung von beiden Trajektorien ausgeschlossen werden, obwohl die Referenz eine ununterbrochene Verbindung zu ihm hatte. Die Höhenbestimmung fiel in beiden Fällen um ca. 2 Meter. Es darf aber bemerkt werden, dass die Höhenbestimmung mittels Differenzbeobachtungen deutlich stabiler die wahre Parkplatzhöhe von ca. 416 m widerspiegeln konnte.

Die Abbildung 6-29 zeigt den Verlauf des Rover-Empfängeruhrfehlers aus einer ‚Single Point' Lösung und ähnlich der Referenz. Im Gegensatz zum Rover, bewegt sich die Referenz während der Messung nicht. Sie ist mit stetigen Verfügbarkeit von Satelliten kennzeichnet. Demzufolge verläuft ihr Empfängeruhrfehler sehr gleichmäßig.

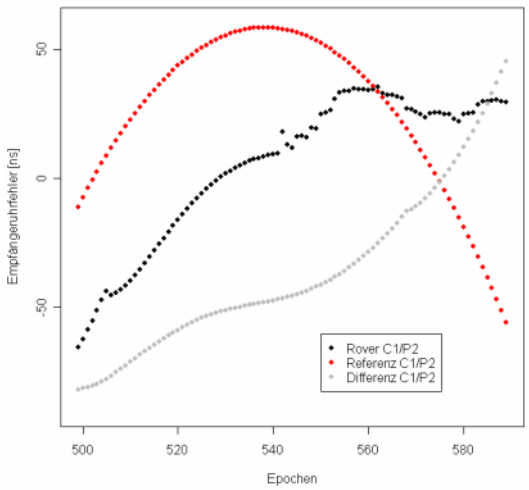


Abb. 6–29 Verlauf des Empfängeruhrfehlers in Abhängigkeit von der Zeit

Bei Verwendung von Differenzen im Kalman Algorithmus wird nicht der Empfängeruhrfehler selbst, sondern die Differenz zwischen dem ‚Receiver Clock Error' des Rovers und der Referenzstation gerechnet. Diese wird anschließend in der Innovation von der Differenz der Linearkombinationen abgezogen. Auf der Grafik 6-29 wurde zusätzlich der Verlauf der Differenz zwischen den beiden Empfängeruhrfehlers dargestellt. Sie ist dem Zustandsvektor einer Einzeldifferenz C1/P2 Lösung zu entnehmen.

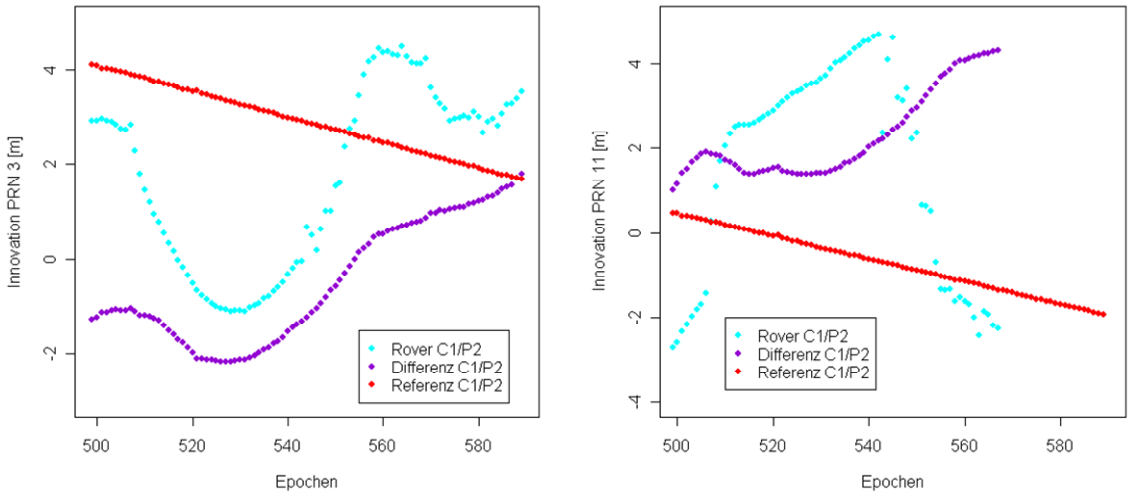


Abb. 6–30 Innovation der Distanz zu den Satelliten PRN 03 und PRN 11

Die Grafiken 6-30 stellen die Entwicklung der Innovation dar. Der Satellit PRN 03 stand alle 118 Sekunden zur Verfügung. Dadurch, dass die Innovation der Referenz ziemlich glatt verläuft, wird auch die Form der aus Differenzen berechneten Innovation ruhiger als die des Rovers C1/P2 ‚stand-alone' Lösung. Die Entwicklung von Innovationen zu allen Satelliten wird durch den Satellitenwechsel beeinflusst. Der Satellit PRN 11 war bis zur 568. Epoche dem Rover verfügbar. Im Zeitraum seiner Anwesenheit wurde die Innovation zu ihm nicht gerechnet. Die Innovation der Referenz wurde dagegen ununterbrochen ermittelt.

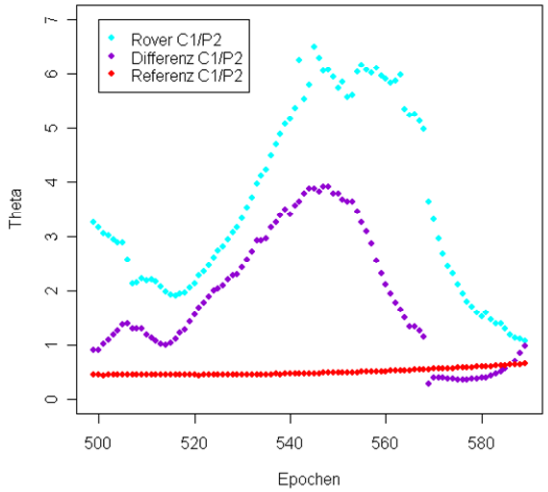


Abb. 6–31 Testgröße θ in Abhängigkeit von der Zeit

Die Testgröße θ besagt, ob die Werte des Beobachtungs- bzw. Systemrauschens korrekt gewählt wurden und ob die Filterung korrekt abläuft. Je mehr Satelliten beobachtet werden, desto größer darf die Theta sein. Ihr Verhalten hängt sowohl von der Satellitenanzahl, als auch von der Bewegung des Rovers ab. Um die 590.

Epoche bog das Auto in eine Kurve. Dies führte aufgrund der höheren Innovationen implizit zu einer Steigerung der Testgröße. Die Referenzmessung war statisch und wurde mit einer konstanten Satellitenverfügbarkeit aufgenommen. Aufgrund dessen ist ihre Theta sehr klein und beträgt ca. 0,5.

Die Standardabweichungen der Parameter des Zustandsvektors werden durch die Verfügbarkeit der Satelliten beeinflusst. Je weniger Pseudoranges zu den Satelliten aufgenommen wird, desto größer wird die Standardabweichung der geschätzten Parameter. Sie verhalten sich also genähert umgekehrt proportional der Satellitenanzahl.

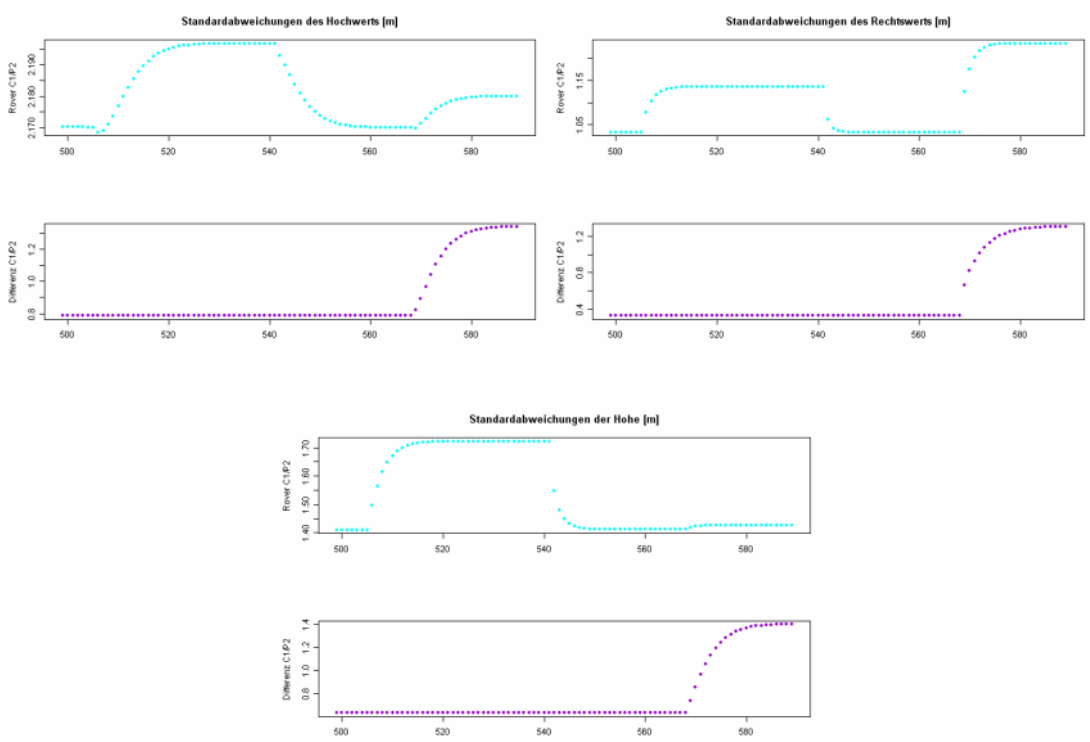


Abb. 6–32 Standardabweichungen der Parameter des Zustandvektors

6.3.2.2 Gelegentlicher Ausfall von Messdaten

Auf der Abbildung 6-33 wird ein 100 Epochen, also 20 Sekunden andauernder Ausschnitt einer Testfahrt präsentiert. Wie die Grafiken zeigen, waren in diesem Zeitraum dreimal Messdatenausfälle zu verzeichnen. Weil es sich aber um eine beinahe geradlinige Strecke handelt, wurden die fehlenden Messabschnitte weitgehend zufriedenstellend überbrückt. Während allerdings in der Abbildung 6-33 links wiedereinsetzende Beobachtungen nach Epochen ohne Messdaten zu offensichtlichen Unstetigkeiten in der Trajektorie führten, lieferte die Differenzlösung Positionen die mit dem Bewegungsmodell und der wahren Trajektorie völlig im Einklang standen (ruhiger Verlauf, Abb. 6-33 rechts).

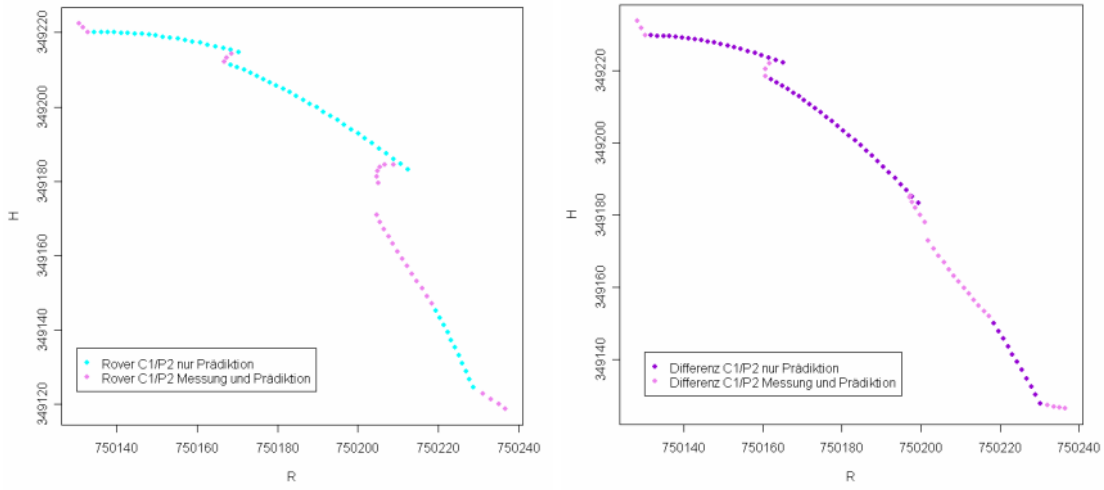


Abb. 6–33 Gefilterte Koordinaten im BMN des Rovers C1/P2 (links)
und der Differenz C1/P2 (rechts) in [m]

In der Grafik 6-34 kann noch genauer verfolgt werden, wie lang die Beobachtungsausfälle waren und welchen Einfluss sie auf die Entwicklung des Hochwerts und Rechtswerts ausübten. Während der 20 Sekunden langen Aufnahme gaben es nur drei sehr kurze Zeitabstände von ca. 1 Sekunde und ein 5 Sekunden langer Abschnitt mit ausreichender Anzahl von Satelliten. Dreimal – insgesamt 10 Sekunden lang - mussten ausschließlich die Prädiktionsgleichungen durchgeführt werden.

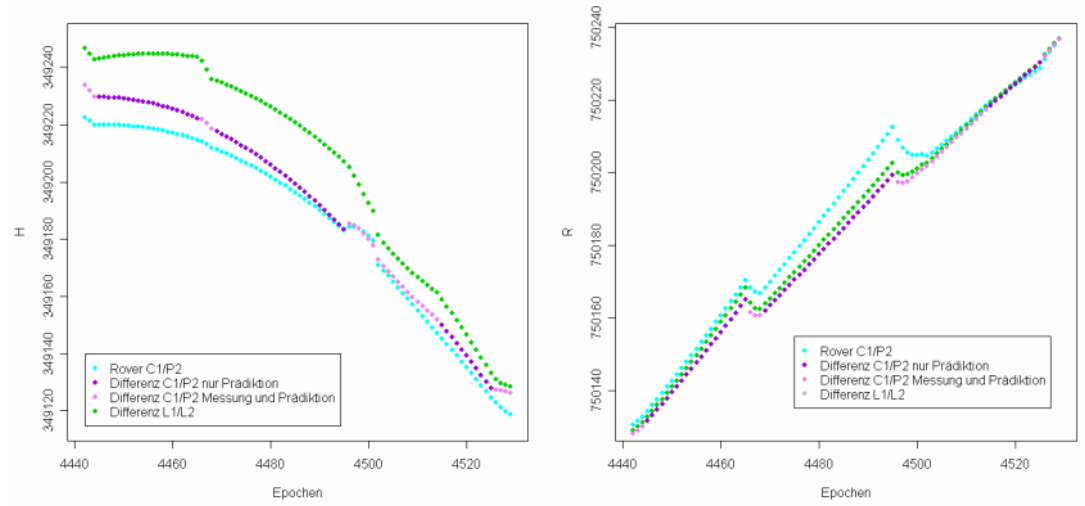


Abb. 6–34 Verlauf des Hochwerts und Rechtswerts in [m] in Abhängigkeit von der Zeit

In der Abb. 6-35 wird die Höhenbestimmung der Satellitenanzahl gegenübergestellt. Wie erwartet, standen an der Referenz mehr Satelliten zur Verfügung als am Rover. Das Fahrzeug fuhr entlang der von Wald umgebenen Höhenstraße entlang und war sehr oft Abschattungen ausgesetzt. Die Referenz hatte dagegen ganze Zeit eine gute Sicht zu den Satelliten: PRN 03, PRN 11, PRN 14, PRN 19, PRN 22 und PRN 32. Der Rover hatte den Kontakt max. zu folgenden vier GPS-Satelliten: PRN 11,

PRN 14, PRN 19 und PRN 32 und für einen 0,2 Sekunden langen Moment noch zu dem Satelliten PRN 22. In erster Linie verlor er die Sicht zu dem PRN 19 und später noch zusätzlich zu dem PRN 32. Aufgrund der unterschiedlich verfügbaren Satellitenanzahl konnte die Einzelpunktbestimmung (blaue Kurve in Abb. 6-35) mehr Stützpunkte aufweisen und es mussten Höhen prädiziert werden.

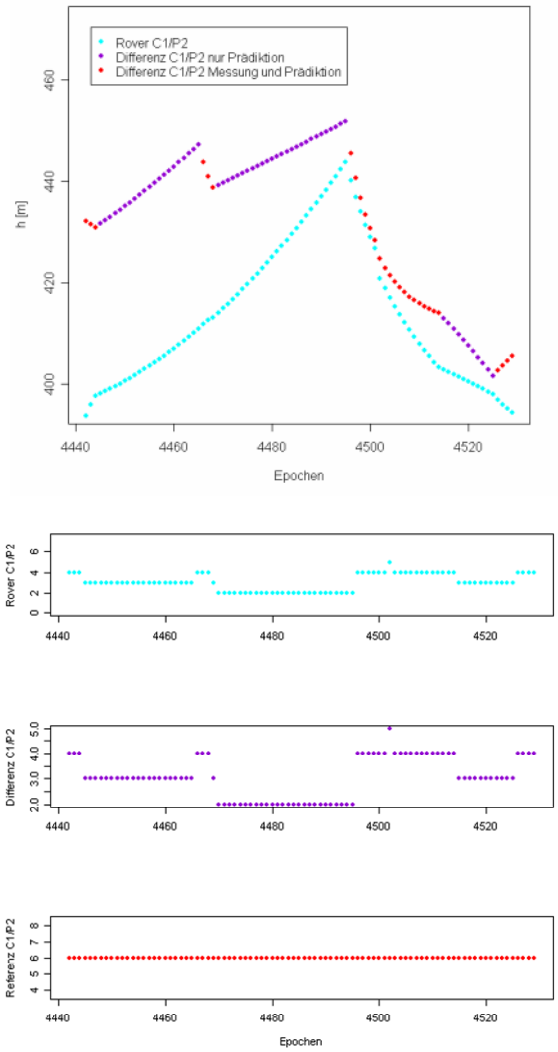


Abb. 6–35 Verlauf der Höhe und die verfügbare Satellitenanzahl

Die Differenzlösung stützt sich in der ersten Hälfte des Beobachtungszeitraums auf extrem wenig Messungen (rote Punkte) und so musste die Höhe an den Zwischenpunkten dem Bewegungsmodell folgen. Dennoch gab sie den Höhenverlauf der Trajektorie auf Grund der höheren Genauigkeit der Beobachtungen viel besser wieder (zuerst eben, dann abfallend). Im zweiten Teil der Fahrstrecke koinzidieren die Lösungen.

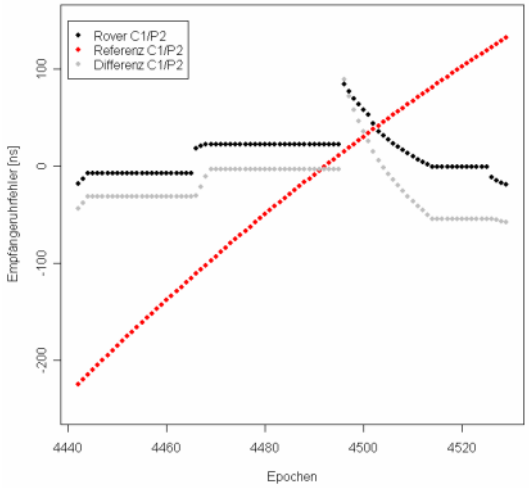


Abb. 6–36 Verlauf des Empfängeruhrfehlers in Abhängigkeit von der Zeit

Der Empfängeruhrfehler wird während des Beobachtungsausfalls nur prädiziert (schwarze Linien in Abb. 6-36). Er nimmt entsprechend der Modellannahme eines stabilen Uhrstandes einen konstanten Wert an. Der Empfängeruhrfehler der Referenz lief dagegen gleichmäßig steigend über alle hier präsentierten Epochen. Die Differenz zwischen den beiden Uhrenfehlern (graue Linie) wird dadurch etwas geglättet.

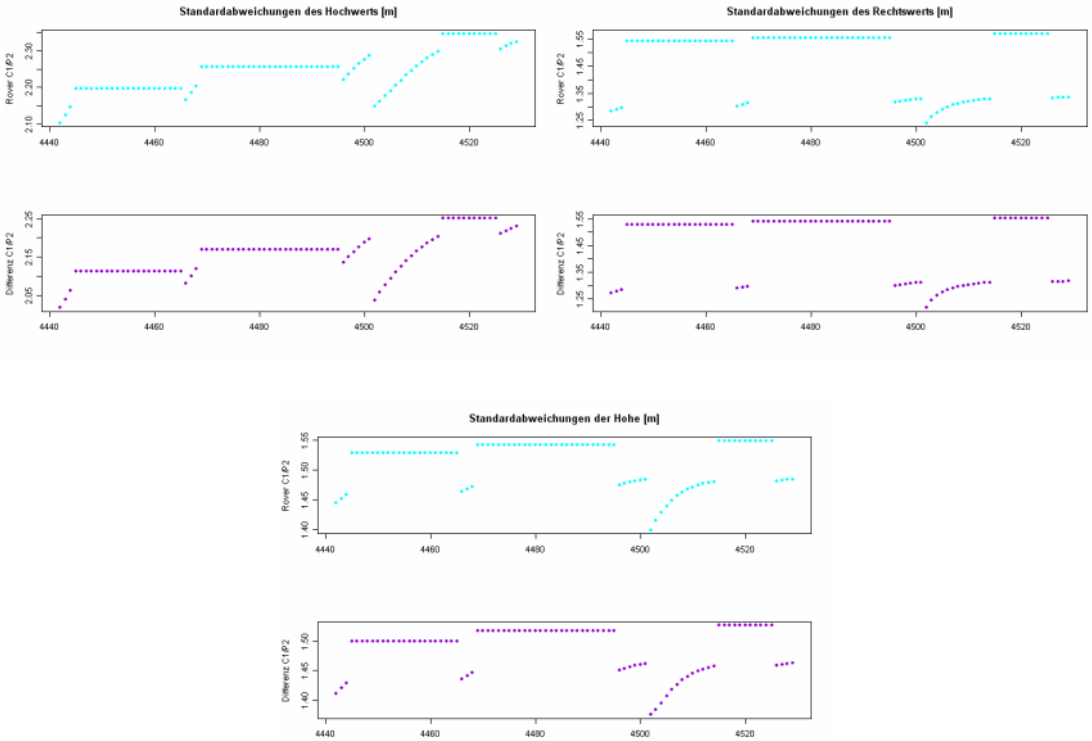


Abb. 6–37 Standardabweichung der Parameter des Zustandsvektors

7. Zusammenfassung

Ziel dieser Dissertation ist die präzise Bestimmung der Trajektorie eines schnell bewegten Fahrzeugs. Unter dem Begriff ‚schnell' sei eine Geschwindigkeit relativ zu einem erdfesten Tangentialkoordinatensystem verstanden, die es uns nicht mehr erlaubt Mehrdeutigkeiten der Phasenbeobachtungen sicher in Echtzeit zu lösen, sondern sich bestenfalls auf eine ionosphärenfreie Linearkombination der Phasenbeobachtungen stützt.

Für diesen Zweck wurde ein C++ Programm weiterentwickelt, das bereits ausgewertete GPS-Code-Positionen mithilfe der Kalman Filterung glättet. Das Prinzip des Kalman Filters besteht darin, die tatsächlich gemessenen Positionen mit jenen durch den Algorithmus prädizierten Koordinaten gewichtet abzugleichen. Als Ergebnis werden die korrigierten Werte des Zustandsvektors ermittelt. Schließlich bilden sie eine geglättete Trajektorie. Der Grad der Glättung kann durch eine Änderung des Beobachtungs- oder Systemrauschens beeinflusst werden. So wird entschieden, ob zur Berechnung der korrigierten Positionen mehr Informationen aus der Messung oder aus der Prädiktion gewonnen werden soll. Die Prädiktion wird nach dem Prinzip des in der Transitionsmatrix festgelegten Bewegungsmodells bestimmt. Im Rahmen der Arbeit wurden Bewegungsmodelle für die statische Positionierung, für eine gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit und für eine beschleunigte Bewegung implementiert. Als Parameter werden Position, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung im Zustandsvektor ausgegeben.

Ein Vorteil des Kalman Filters liegt darin, dass er auch dann arbeitet, wenn Messungen ausfallen. In diesem Fall werden ausschließlich die Prädiktionsgleichungen durchlaufen. Es werden also lediglich die im Modell enthaltenen Angaben benutzt, zu deren Bestimmung die vor kurzem noch vorhandenen Messdaten beigetragen haben. Diese Fähigkeit der Kalman Filterung - auch kurze Beobachtungsausfälle optimal zu überbrücken - wurde in dieser Arbeit für den Fall von abgeschatteter Sicht zu den Satelliten bei einer GPS-Positionierung näher untersucht. Die präsentierten Beispiele dokumentieren natürlich auch die Probleme im Falle von Fahrtrichtungsänderungen während der Beobachtungsausfalls. Es kommt dann zu großen Abweichungen zwischen den prädizierten und wahren Fahrzeugpositionen. Die Parameter approximieren aber bei Verfügbarkeit neuer Beobachtungen sehr schnell wieder die realen Werte. Wenn beim Messdatenausfall die Bewegung eines Fahrzeugs geradlinig ist und der während der letzten Verfügbarkeit von Messungen herausrechneten Fahrtrichtung, Geschwindigkeit und Beschleunigung entspricht, kann auch nach einem langen Beobachtungsausfalls eine beinahe präzise Prädiktion erfolgen.

Im Anschluss wurde das Programm dahingehend weiterentwickelt auch direkt die Pseudoranges zu den GPS-Satelliten als Beobachtungen verarbeiten zu können. Dafür wurden die online verfügbaren Satellitenkoordinaten und Satellitenuhrfehler eingelesen. Eine Interpolation nach Lagrange von Satellitendaten ermöglichte deren Anpassung an die in Zeitintervallen von 0,1 und 0,2 Sekunden durchgeführten

kinematischen Messungen. Aus dem Vergleich zwischen den wegen diverser Signalverzögerungen korrigierten Pseudoranges und der geometrischen Strecke vom Empfänger zum Satellit wurde die Innovation berechnet. Im Zustandsvektor werden erneut die gefilterten Positionen, Geschwindigkeit, und Beschleunigung und diesmal zusätzlich noch der Empfängeruhrfehler geschätzt. An dieser Stelle darf gesagt werden, dass der Kalman Filter in dieser Form mit einer integrierten GPS-Auswertung ausgestattet ist.

Zum Vergleich wurden zuerst nur die C1 Code-Pseudoranges und im Anschluss eine ionosphärenfreie Linearkombination C1/P2 für die Berechnung herangezogen. Die beiden Trajektorien unterscheiden sich durch die Eliminierung des Einflusses der Ionosphäre im wenigem Meterbereich. Auf Kosten der Genauigkeit in der Positionierung verlor die C1/P2 Trajektorie durch erhöhtes Beobachtungsrauschen allerdings etwas von ihrem glatten Charakter.

Die Durchführung der Messung mit zwei Empfängern – einem Rover und einer Referenz – erlaubt die Bildung von Beobachtungsdifferenzen und damit die Ausschaltung zeitlich und räumlich korrelierter Fehlereinflüsse. Durch die Anpassung des Kalman Filters an eine differenzielle Messung können für kurze Distanzen die bei der Verwendung der C1/P2 Linearkombination angegebenen Vorteile noch weiter optimiert werden. Die Trajektorie, die nach der Bildung der Differenzen zwischen Linearkombinationen C1/P2 zum Rover und zur Referenz gefiltert wurde, weist eine weitere Verschiebung um wenige Meter in der Lage auf. Die Differenzen bewirken eine Eliminierung des Einflusses des Satellitenuhr- und Bahnfehlers und der differentiellen troposphärischen Verzögerung und erlauben somit eine noch realistischere Positionierung.

Problematisch erwies sich bei der direkten Verarbeitung von Phasenmessdaten die Behandlung des initialen Phasen-Offsets und etwaiger Phasensprünge („Cycle Slips“). Derzeit ist ein sehr einfaches Modell zur Elimination einer Anfangs-Streckendifferenz zwischen Phasen- und Code-Lösung implementiert. „Cycle Slips“ werden durch erneutes Berechnen dieses Offsets behandelt, Ambiguities werden derzeit allerdings nicht als Parameter des Filters mitgeschätzt.

Dadurch wurde das Ziel der Dissertation erreicht. Ein schnell bewegtes Fahrzeug wird präzise positioniert. Die ermittelte Bewegungskurve ist mit wenig Rauschen behaftet. Kommt es aufgrund von Abschattungen zu kurzen Unterbrechungen in den Beobachtungen, wird die Berechnung einer möglichst realistischen Trajektorie trotzdem weitergeführt.

8. Ausblick

Die ursprüngliche Zielsetzung der Dissertation war die satellitengestützte Bestimmung von Skisprung-Trajektorien und deren statistische Analyse. Diese soll eine Korrelation zwischen dem Athlet und Sprungschanzengeometrie aufweisen. Wegen mangelndem Interesse von der Seite des Deutschen Skiverbandes wurde auf dieses Thema verzichtet. Die Doktoratarbeit nahm aufgrund dessen eine andere Richtung, blieb jedoch im Bereich der kinematischen Positionierung. Es ist aber darauf hinzuweisen, dass die in Rahmen der Dissertation durchgeführte Programmierung und gewonnene Erkenntnisse nach wie vor ihre Anwendung im Skispringen finden können.

Es wäre vorstellbar, die präzise Bestimmung einer geglätteten Trajektorie auch in anderen Sportarten einzusetzen, beispielsweise im Rudern, oder im Kajaksport. Die Sprungschanzen sind oft von Waldflächen umgeben. Die Seen und Flüsse ebenso. Die durch die Bäume verursachten Abschattungen zur Satellitensicht bewirken einen Ausfall von Beobachtungen. Diese könnten mit dem Kalman Filter überbrückt werden.

Aus Sicht der Navigation und der Vermessung ist die Weiterentwicklung des Programms in Richtung der Ermittlung von gefilterten Positionen in Echtzeit anzustreben. Es wurden hiezu bereits erste Schritte gesetzt in dem eine Schnittstelle zum Einlesen von RTCM-Messages implementiert wurde. Der Algorithmus ist dann auf einer am Fahrzeug befindlichen Plattform zu installieren die einerseits GPS-Messdaten des Rovers einliest und andererseits auch die von der Referenzstation gesandte RTCM Information verarbeitet.

Ein weiterer Schritt zur Steigerung der Genauigkeit der ermittelten Fahrzeugtrajektorie in den Sub-dm Bereich wurde ebenfalls bereits gesetzt. Die Nutzung der Phasenbeobachtungen an Stelle der Code-Pseudoranges liefert formal eine um den Faktor 100 höhere Genauigkeit der als Beobachtung genützten Streckenmessung. Es wurde bereits eine Schnittstelle zur Integration der ionosphärenfreien Phasenkombination geschaffen. Umzusetzen wäre allerdings noch die Erweiterung des Zustandsvektors zur Schätzung der initialen Mehrdeutigkeiten.

9. Anhang

9.1 Zusammenstellung von verwendeten Methoden

Alle hier dargestellten Matrizen beziehen sich auf eine beschleunigte Bewegung.

9.1.1 Koordinaten als Beobachtung

$$l = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Innovation = l - A \times x\,.$$

9.1.2 Pseudoranges als Beobachtung

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ c \cdot \Delta t_E \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$l = \begin{bmatrix} P3_E^{S1} + c \cdot \Delta t^S + d_{trop} \\ P3_E^{S2} + c \cdot \Delta t^S + d_{trop} \\ \vdots \\ P3_E^{Sn} + c \cdot \Delta t^S + d_{trop} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{X^{S1} - X_E}{S_E^{S1}} & -\frac{Y^{S1} - Y_E}{S_E^{S1}} & -\frac{Z^{S1} - Z_E}{S_E^{S1}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{X^{S2} - X_E}{S_E^{S2}} & -\frac{Y^{S2} - Y_E}{S_E^{S2}} & -\frac{Z^{S2} - Z_E}{S_E^{S2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{X^{Sn} - X_E}{S_E^{Sn}} & -\frac{Y^{Sn} - Y_E}{S_E^{Sn}} & -\frac{Z^{Sn} - Z_E}{S_E^{Sn}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Innovation = PR_E^S - S_E^S - c \cdot \Delta t_E .$$

9.1.3 Differenzen

$$x = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ c \cdot \Delta \Delta t_E \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\Delta X_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & \frac{\Delta Y_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & \frac{\Delta Z_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta X_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & \frac{\Delta Y_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & \frac{\Delta Z_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta X_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & \frac{\Delta Y_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & \frac{\Delta Z_{rov-ref}}{S_{rov-ref}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$l = \begin{bmatrix} P3_{rov}^{S1} + c \cdot \Delta t^S + d_{trop}^{S1-rov} - P3_{ref}^{S1} - c \cdot \Delta t^S - d_{trop}^{S1-ref} \\ P3_{rov}^{S2} + c \cdot \Delta t^S + d_{trop}^{S2-rov} - P3_{ref}^{S2} - c \cdot \Delta t^S - d_{trop}^{S2-ref} \\ \vdots \\ P3_{rov}^{Sn} + c \cdot \Delta t^S + d_{trop}^{Sn-rov} - P3_{ref}^{Sn} - c \cdot \Delta t^S - d_{trop}^{Sn-ref} \end{bmatrix},$$

$$Innovation = l - S_{rov}^S + S_{ref}^S - c \cdot \Delta \Delta t_E , \quad X_{rov} = \Delta X_{rov-ref} + X_{ref} .$$

9.2 Quantile der χ^2-Verteilung in Abhängigkeit von Sicherheitswahrscheinlichkeit und Freiheitsgrad

F(x)	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	**3,84**	5,02	6,63	7,88	10,83
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	**5,99**	7,38	9,21	10,60	13,82
3	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	**7,81**	9,35	11,34	12,84	16,27
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	**9,49**	11,14	13,28	14,86	18,47
5	0,41	0,55	0,83	1,14	1,61	9,24	**11,07**	12,83	15,09	16,75	20,51
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	**12,59**	14,45	16,81	18,55	22,46
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	**14,07**	16,01	18,48	20,28	24,32
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	**15,51**	17,53	20,09	21,95	26,12
9	1,73	2,09	2,70	3,32	4,17	14,68	**16,92**	19,02	21,67	23,59	27,88
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	**18,31**	20,48	23,21	25,19	29,59
11	2,60	3,05	3,82	4,58	5,58	17,28	**19,68**	21,92	24,73	26,76	31,26
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	**21,03**	23,34	26,22	28,30	32,91
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	**22,36**	24,74	27,69	29,82	34,53
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	**23,68**	26,12	29,14	31,32	36,12
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	**25,00**	27,49	30,58	32,80	37,70
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	**26,30**	28,85	32,00	34,27	39,25
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	**27,59**	30,19	33,41	35,72	40,79
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	**28,87**	31,53	34,81	37,16	42,31
19	6,84	7,63	8,91	10,18	11,65	27,20	**30,14**	32,85	36,19	38,58	43,82
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	**31,41**	34,17	37,57	40,00	45,31
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	**32,67**	35,48	38,93	41,40	46,80
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	**33,92**	36,78	40,29	42,80	48,27
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	**35,17**	38,08	41,64	44,18	49,73
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	**36,42**	39,36	42,98	45,56	51,18
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	**37,65**	40,65	44,31	46,93	52,62
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	**38,89**	41,92	45,64	48,29	54,05
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	**40,11**	43,19	46,96	49,65	55,48
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	**41,34**	44,46	48,28	50,99	56,89
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	**42,56**	45,72	49,59	52,34	58,30
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	**43,77**	46,98	50,89	53,67	59,70

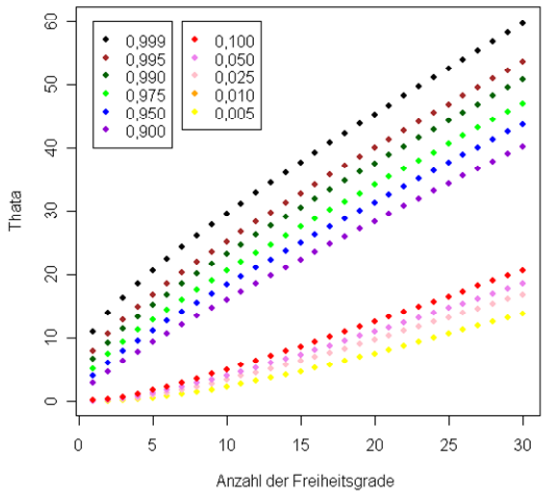


Abb. 9–1 Quantile der χ^2-Verteilung in Abhängigkeit von Sicherheitswahrscheinlichkeit

9.3 Gleichmäßig steigendes Beobachtungs- bzw. Systemrauschen

Die Angaben beziehen sich auf eine und derselbe Epoche jeweils aber mit unterschiedlichem Beobachtungs- bzw. Systemrauschen. Es wurden lediglich die ersten Zellen von hier präsentierten Matrizen bzw. Vektoren geplottet. Die Werte betreffen also alleinig die X-Koordinate im Koordinatensystem WGS84.

θ	$\theta_{\max}$	$\tilde{Q}_{ww}$	Q_{ll}	$\tilde{Q}_{xx}$	D	D^{-1}	G	d	$\hat{Q}_{xx}$	$\hat{x}$
15,54	7,81	0,5	**3,0**	1,60	4,60	0,22	0,35	-2,86	1,04	4081417,67
12,76	7,81	0,5	**4,0**	1,60	5,60	0,18	0,29	-2,86	1,14	4081417,85
10,83	7,81	0,5	**5,0**	1,60	6,60	0,15	0,24	-2,86	1,21	4081417,97
9,40	7,81	0,5	**6,0**	1,60	7,60	0,13	0,21	-2,86	1,26	4081418,06
8,31	7,81	0,5	**7,0**	1,60	8,60	0,12	0,19	-2,86	1,30	4081418,13
7,44	7,81	0,5	**8,0**	1,60	9,60	0,10	0,17	-2,86	1,33	4081418,19
15,54	7,81	**0,5**	3,0	1,60	4,60	0,22	0,35	-2,86	1,04	4081417,67
14,01	7,81	**1,0**	3,0	2,10	5,10	0,20	0,41	-2,86	1,23	4081417,49
12,76	7,81	**1,5**	3,0	2,60	5,60	0,18	0,46	-2,86	1,39	4081417,34
11,72	7,81	**2,0**	3,0	3,10	6,10	0,16	0,51	-2,86	1,52	4081417,21
10,83	7,81	**2,5**	3,0	3,60	6,60	0,15	0,55	-2,86	1,64	4081417,10
10,06	7,81	**3,0**	3,0	4,10	7,10	0,14	0,58	-2,86	1,73	4081417,01
9,40	7,81	**3,5**	3,0	4,60	7,60	0,13	0,61	-2,86	1,82	4081416,93
8,82	7,81	**4,0**	3,0	5,10	8,10	0,14	0,63	-2,86	1,89	4081416,86
8,31	7,81	**4,5**	3,0	5,60	8,60	0,14	0,65	-2,86	1,95	4081416,80
7,85	7,81	**5,0**	3,0	6,10	9,10	0,11	0,67	-2,86	2,01	4081416,75
7,44	7,81	**5,5**	3,0	6,60	9,60	0,10	0,69	-2,86	2,06	4081416,70

Erläuterungen:

θ	Testgröße Theta
$\theta_{\max}$	»zuläßige« Grenze der Testgröße Theta
Q_{ww}	Systemrauschen
Q_{ll}	Beobachtungsrauschen
$\tilde{Q}_{xx}$	prädizierte Kovarianzmatrix des Zustandsvektors
D	ein Glied der Gainmatrix $D = \left[A \times \tilde{Q}_{xx} \times A^T + Q_{ll}\right]$
D^{-1}	ein Glied der Gainmatrix $D^{-1} = \left[A \times \tilde{Q}_{xx} \times A^T + Q_{ll}\right]^{-1}$
G	Gainmatrix
d	Innovation
$\hat{Q}_{xx}$	verbesserte Kovarianzmatrix des Zustandsvektors
$\hat{x}$	verbesserter Zustandsvektor.

9.4 Tabellarische Auflistung von Werten eines Beispiels mit fortlaufend vorhandenen Messdaten

Die Tabellen berufen sich auf den im Kapitel 6.2.2.1 präsentierten Ausschnitt der C1/P2 Messung. Aus Umfangsgründen wird hier lediglich ein Teil des Beispiels aufgelistet.

Epoche	H	R	h	Δt	v	v	a	a	σ_v	σ_a
	$[m]$	$[m]$	$[m]$	$[ns]$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$\left[\frac{km}{h}\right]$	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	$\left[\frac{km}{h^2}\right]$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
150	348662.26	750130.85	468.40	7.4	0.07	0.24	0.00	0.02	1.19	0.02
151	348662.24	750130.86	468.41	7.6	0.06	0.21	0.00	0.02	1.19	0.02
152	348662.24	750130.86	468.42	7.6	0.05	0.19	0.00	0.02	1.19	0.02
153	348662.25	750130.87	468.43	7.6	0.05	0.19	0.01	0.02	1.19	0.02
154	348662.27	750130.88	468.40	7.4	0.06	0.21	0.01	0.02	1.19	0.02
155	348662.30	750130.88	468.38	7.4	0.06	0.23	0.01	0.02	1.19	0.02
156	348662.31	750130.88	468.37	7.4	0.07	0.24	0.01	0.02	1.19	0.02
157	348662.32	750130.88	468.37	7.4	0.06	0.23	0.00	0.02	1.19	0.02
158	348662.31	750130.88	468.37	7.4	0.06	0.22	0.00	0.02	1.19	0.02
159	348662.32	750130.87	468.37	7.4	0.06	0.21	0.00	0.02	1.19	0.02
160	348662.33	750130.88	468.38	7.4	0.06	0.20	0.00	0.02	1.19	0.02
161	348662.30	750130.88	468.43	7.7	0.04	0.15	0.00	0.02	1.19	0.02
162	348662.27	750130.88	468.47	7.8	0.03	0.11	0.00	0.02	1.19	0.02
163	348662.26	750130.87	468.51	7.8	0.02	0.08	0.01	0.02	1.19	0.02
164	348662.27	750130.87	468.51	7.8	0.02	0.08	0.00	0.02	1.19	0.02
165	348662.29	750130.87	468.51	7.8	0.02	0.09	0.00	0.02	1.19	0.02
166	348662.50	750130.85	468.28	6.5	0.09	0.33	0.01	0.02	1.19	0.02
167	348662.65	750130.84	468.10	6.0	0.14	0.51	0.01	0.04	1.19	0.02
168	348662.75	750130.83	467.95	5.7	0.18	0.64	0.01	0.05	1.19	0.02
169	348662.85	750130.82	467.78	5.2	0.22	0.79	0.02	0.07	1.19	0.02
170	348662.92	750130.82	467.64	4.8	0.25	0.89	0.02	0.08	1.19	0.02
171	348662.94	750130.84	467.57	4.8	0.26	0.92	0.02	0.08	1.19	0.02
172	348662.96	750130.86	467.51	4.6	0.26	0.94	0.02	0.08	1.19	0.02
173	348663.00	750130.88	467.45	4.5	0.27	0.97	0.02	0.08	1.19	0.02
174	348663.04	750130.91	467.40	4.4	0.28	1.00	0.02	0.08	1.19	0.02
175	348663.10	750130.95	467.36	4.3	0.29	1.04	0.02	0.09	1.19	0.02
176	348663.15	750130.99	467.34	4.3	0.30	1.07	0.02	0.09	1.19	0.02
177	348663.24	750131.04	467.32	4.2	0.31	1.12	0.03	0.09	1.19	0.02
178	348663.34	750131.10	467.30	4.1	0.33	1.20	0.03	0.10	1.19	0.02
179	348663.45	750131.17	467.29	4.0	0.36	1.29	0.03	0.11	1.19	0.02
180	348663.58	750131.26	467.27	4.0	0.39	1.41	0.03	0.13	1.19	0.02
181	348663.74	750131.34	467.23	3.8	0.44	1.58	0.04	0.14	1.19	0.02
182	348663.92	750131.44	467.19	3.7	0.49	1.76	0.04	0.16	1.19	0.02
183	348664.11	750131.54	467.16	3.6	0.54	1.94	0.05	0.18	1.19	0.02
184	348664.30	750131.65	467.13	3.6	0.60	2.15	0.06	0.20	1.19	0.02
185	348664.50	750131.78	467.11	3.4	0.66	2.38	0.06	0.22	1.19	0.02
186	348664.72	750131.91	467.09	3.4	0.73	2.61	0.07	0.24	1.19	0.02
187	348664.97	750132.05	467.07	3.4	0.80	2.87	0.07	0.27	1.19	0.02
188	348665.21	750132.21	467.07	3.4	0.88	3.16	0.08	0.30	1.19	0.02
189	348665.47	750132.38	467.04	3.3	0.96	3.46	0.09	0.33	1.19	0.02
190	348665.74	750132.56	467.03	3.3	1.05	3.78	0.10	0.36	1.19	0.02
191	348665.98	750132.76	467.05	3.6	1.14	4.09	0.11	0.38	1.19	0.02
192	348666.21	750132.97	467.07	3.7	1.23	4.42	0.11	0.41	1.19	0.02

193	348666.45	750133.19	467.08	3.8	1.32	4.76	0.12	0.44	1.19	0.02
194	348666.67	750133.44	467.12	4.0	1.43	5.13	0.13	0.48	1.19	0.02
195	348666.91	750133.71	467.14	4.1	1.54	5.53	0.14	0.51	1.19	0.02
196	348667.16	750133.99	467.15	4.1	1.65	5.95	0.15	0.55	1.19	0.02
197	348667.42	750134.28	467.16	4.2	1.77	6.38	0.16	0.59	1.19	0.02
198	348667.68	750134.57	467.16	4.3	1.89	6.81	0.17	0.62	1.19	0.02
199	348667.90	750134.88	467.21	4.6	2.01	7.22	0.18	0.66	1.19	0.02
200	348668.16	750135.18	467.25	4.8	2.12	7.64	0.19	0.69	1.19	0.02
201	348668.43	750135.49	467.27	4.9	2.24	8.07	0.20	0.73	1.19	0.02
202	348668.72	750135.81	467.29	5.0	2.36	8.50	0.21	0.76	1.19	0.02
203	348669.04	750136.13	467.30	5.0	2.48	8.93	0.22	0.79	1.19	0.02
204	348669.34	750136.47	467.35	5.3	2.60	9.37	0.23	0.82	1.19	0.02
205	348669.67	750136.81	467.38	5.4	2.73	9.81	0.24	0.86	1.19	0.02
206	348670.04	750137.15	467.39	5.5	2.85	10.26	0.25	0.89	1.19	0.02
207	348670.46	750137.48	467.38	5.5	2.97	10.69	0.25	0.92	1.19	0.02
208	348670.92	750137.83	467.37	5.5	3.10	11.15	0.26	0.95	1.19	0.02
209	348671.43	750138.20	467.33	5.4	3.23	11.64	0.27	0.98	1.19	0.02
210	348671.99	750138.56	467.30	5.3	3.37	12.14	0.28	1.01	1.19	0.02
211	348672.58	750138.92	467.26	5.2	3.50	12.61	0.29	1.04	1.19	0.02
212	348673.18	750139.28	467.22	5.2	3.64	13.09	0.30	1.07	1.19	0.02
213	348673.80	750139.63	467.17	5.1	3.76	13.53	0.31	1.10	1.19	0.02
214	348674.47	750139.97	467.10	4.9	3.88	13.97	0.31	1.12	1.19	0.02
215	348675.14	750140.31	467.03	4.8	4.00	14.39	0.32	1.14	1.19	0.02
216	348675.84	750140.63	466.96	4.6	4.10	14.77	0.32	1.16	1.19	0.02
217	348676.55	750140.93	466.89	4.5	4.20	15.11	0.33	1.17	1.19	0.02
218	348677.25	750141.22	466.83	4.3	4.29	15.43	0.33	1.18	1.19	0.02
219	348677.96	750141.51	466.78	4.3	4.37	15.72	0.33	1.19	1.19	0.02
220	348678.69	750141.77	466.74	4.2	4.44	15.99	0.33	1.19	1.19	0.02
221	348679.44	750142.01	466.72	4.1	4.50	16.21	0.33	1.19	1.19	0.02
222	348680.23	750142.22	466.68	4.0	4.55	16.39	0.33	1.19	1.19	0.02
223	348681.03	750142.41	466.64	3.9	4.60	16.55	0.33	1.18	1.19	0.02
224	348681.89	750142.58	466.62	3.9	4.64	16.70	0.33	1.17	1.19	0.02
225	348682.82	750142.73	466.58	3.8	4.69	16.87	0.32	1.17	1.19	0.02
226	348683.80	750142.86	466.53	3.7	4.73	17.03	0.32	1.17	1.19	0.02
227	348684.83	750142.94	466.48	3.6	4.77	17.16	0.32	1.16	1.19	0.02
228	348685.93	750142.98	466.41	3.4	4.80	17.28	0.32	1.16	1.19	0.02
229	348687.12	750142.97	466.30	3.1	4.84	17.42	0.32	1.16	1.19	0.02
230	348688.33	750142.92	466.20	2.9	4.88	17.55	0.33	1.17	1.19	0.02
231	348689.55	750142.83	466.12	2.8	4.91	17.66	0.33	1.18	1.19	0.02
232	348690.78	750142.71	466.04	2.6	4.94	17.78	0.33	1.19	1.19	0.02
233	348692.04	750142.55	465.97	2.6	4.98	17.92	0.34	1.21	1.19	0.02
234	348693.36	750142.37	465.88	2.3	5.03	18.12	0.34	1.24	1.19	0.02
235	348694.69	750142.17	465.81	2.3	5.10	18.35	0.35	1.28	1.19	0.02
236	348696.05	750141.96	465.72	2.1	5.18	18.63	0.37	1.32	1.19	0.02
237	348697.42	750141.74	465.66	2.1	5.26	18.95	0.38	1.36	1.19	0.02
238	348698.80	750141.51	465.60	2.1	5.36	19.30	0.39	1.41	1.19	0.02
239	348700.23	750141.27	465.52	2.0	5.48	19.71	0.41	1.46	1.19	0.02
240	348701.67	750141.02	465.45	2.0	5.60	20.15	0.42	1.52	1.19	0.02
241	348703.09	750140.76	465.40	2.0	5.72	20.59	0.44	1.57	1.19	0.02
242	348704.52	750140.49	465.37	2.1	5.85	21.05	0.45	1.62	1.19	0.02
243	348705.97	750140.21	465.33	2.1	5.98	21.54	0.46	1.67	1.19	0.02
244	348707.38	750139.93	465.36	2.6	6.11	21.99	0.48	1.72	1.19	0.02
245	348708.80	750139.62	465.37	2.8	6.24	22.48	0.49	1.76	1.19	0.02
246	348710.23	750139.29	465.41	3.0	6.38	22.96	0.50	1.81	1.19	0.02
247	348711.68	750138.92	465.43	3.2	6.52	23.48	0.52	1.86	1.19	0.02
248	348713.13	750138.53	465.46	3.3	6.67	24.01	0.53	1.91	1.19	0.02
249	348714.59	750138.11	465.47	3.5	6.82	24.57	0.55	1.97	1.19	0.02

Epoche	σ_H	σ_R	σ_{Lage}	σ_h	$\sigma_{\Delta t}$	d_{PRNG3}	d_{PRNG11}	d_{PRNG14}	d_{PRNG19}	θ
	$[m]$	$[m]$	$[m]$	$[m]$	$[ns]$	$[m]$	$[m]$	$[m]$	$[m]$	
150	2.17	1.03	2.40	1.40	3.13	3.77	-5.89	-4.14	0.02	5.65
151	2.17	1.03	2.40	1.40	3.13	3.77	-5.83	-4.14	0.02	5.59
152	2.17	1.03	2.40	1.40	3.13	3.77	-5.86	-4.17	0.00	5.64
153	2.17	1.03	2.40	1.40	3.13	3.79	-5.86	-4.17	0.01	5.66
154	2.17	1.03	2.40	1.40	3.13	3.77	-5.87	-4.16	0.01	5.65
155	2.17	1.03	2.40	1.40	3.13	3.80	-5.86	-4.12	0.01	5.62
156	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.80	-5.81	-4.09	-0.02	5.55
157	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.77	-5.83	-4.09	-0.03	5.55
158	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.77	-5.79	-4.10	-0.03	5.52
159	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.77	-5.82	-4.11	-0.05	5.55
160	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.79	-5.76	-4.09	-0.04	5.49
161	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.78	-5.81	-4.08	-0.04	5.52
162	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.75	-5.89	-4.11	-0.08	5.62
163	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.79	-5.90	-4.13	-0.06	5.66
164	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.82	-5.90	-4.13	-0.02	5.69
165	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.83	-5.81	-4.15	0.03	5.61
166	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.82	-5.80	-4.20	0.04	5.63
167	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.89	-5.44	-4.07	0.13	5.18
168	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.78	-5.35	-4.10	0.05	5.06
169	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.69	-5.30	-4.13	-0.03	4.99
170	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.68	-5.15	-4.11	-0.06	4.83
171	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.64	-5.05	-4.15	-0.13	4.73
172	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.60	-5.07	-4.22	-0.19	4.78
173	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.64	-5.07	-4.21	-0.19	4.79
174	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.67	-5.02	-4.21	-0.18	4.76
175	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.69	-5.02	-4.23	-0.21	4.78
176	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.72	-4.99	-4.21	-0.19	4.76
177	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.75	-5.02	-4.26	-0.20	4.84
178	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.78	-4.95	-4.28	-0.18	4.80
179	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.81	-4.91	-4.36	-0.15	4.84
180	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.85	-4.88	-4.39	-0.15	4.86
181	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.86	-4.89	-4.38	-0.14	4.86
182	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.92	-4.87	-4.37	-0.11	4.87
183	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.93	-4.83	-4.37	-0.12	4.83
184	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.93	-4.72	-4.41	-0.11	4.76
185	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.90	-4.73	-4.46	-0.14	4.79
186	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.98	-4.75	-4.41	-0.08	4.82
187	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.00	-4.70	-4.43	-0.09	4.80
188	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.98	-4.62	-4.50	-0.07	4.77
189	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.97	-4.58	-4.55	-0.06	4.77
190	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.99	-4.56	-4.53	-0.04	4.74
191	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.98	-4.50	-4.53	-0.03	4.69
192	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.90	-4.55	-4.62	-0.08	4.75
193	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.89	-4.47	-4.64	-0.06	4.70
194	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.90	-4.38	-4.70	-0.02	4.68
195	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.87	-4.39	-4.79	-0.03	4.74
196	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.83	-4.33	-4.80	-0.03	4.68
197	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.84	-4.29	-4.77	-0.01	4.63
198	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.85	-4.34	-4.73	-0.01	4.64
199	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.82	-4.40	-4.70	-0.04	4.65
200	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.85	-4.47	-4.69	-0.02	4.71
201	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.86	-4.51	-4.69	-0.02	4.75
202	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.89	-4.55	-4.67	-0.00	4.79

203	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.90	-4.63	-4.63	0.00	4.83
204	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.96	-4.61	-4.58	0.06	4.81
205	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	3.94	-4.74	-4.63	0.03	4.95
206	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.01	-4.76	-4.55	0.10	4.95
207	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.08	-4.90	-4.48	0.08	5.06
208	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.14	-4.89	-4.50	0.12	5.10
209	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.16	-4.80	-4.54	0.14	5.06
210	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.27	-4.87	-4.43	0.17	5.10
211	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.33	-4.94	-4.34	0.17	5.14
212	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.27	-4.95	-4.36	0.12	5.13
213	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.29	-5.04	-4.24	0.12	5.14
214	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.32	-5.10	-4.17	0.11	5.16
215	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.32	-5.11	-4.10	0.09	5.13
216	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.31	-5.27	-3.97	0.04	5.19
217	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.31	-5.36	-3.86	0.02	5.21
218	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.24	-5.40	-3.85	-0.06	5.20
219	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.24	-5.44	-3.76	-0.05	5.18
220	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.27	-5.62	-3.67	-0.09	5.33
221	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.28	-5.84	-3.56	-0.17	5.51
222	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.31	-6.00	-3.40	-0.18	5.62
223	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.34	-6.15	-3.29	-0.19	5.75
224	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.44	-6.22	-3.19	-0.21	5.82
225	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.55	-6.34	-3.09	-0.17	5.99
226	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.58	-6.44	-2.99	-0.18	6.07
227	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.64	-6.64	-2.81	-0.21	6.27
228	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.76	-6.90	-2.59	-0.22	6.58
229	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.80	-7.04	-2.46	-0.24	6.74
230	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.86	-7.16	-2.25	-0.26	6.84
231	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.84	-7.30	-2.11	-0.28	6.97
232	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.77	-7.43	-2.07	-0.38	7.10
233	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.79	-7.49	-1.98	-0.38	7.16
234	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.80	-7.54	-1.93	-0.41	7.23
235	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.79	-7.43	-1.93	-0.40	7.07
236	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.76	-7.41	-2.00	-0.42	7.04
237	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.70	-7.32	-2.03	-0.43	6.89
238	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.70	-7.26	-2.05	-0.43	6.80
239	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.66	-7.21	-2.09	-0.44	6.73
240	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.61	-7.11	-2.12	-0.45	6.58
241	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.52	-7.05	-2.23	-0.48	6.48
242	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.46	-6.96	-2.27	-0.50	6.35
243	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.43	-6.93	-2.31	-0.52	6.30
244	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.43	-6.83	-2.29	-0.50	6.15
245	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.31	-6.92	-2.40	-0.58	6.25
246	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.28	-7.01	-2.36	-0.60	6.33
247	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.25	-7.11	-2.32	-0.62	6.44
248	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.20	-7.13	-2.29	-0.63	6.42
249	2.17	1.03	2.40	1.41	3.13	4.16	-7.07	-2.29	-0.62	6.31

9.5 Tabellarische Auflistung von Werten eines Beispiels mit gelegentlich ausgefallenen Messdaten

Die Tabellen berufen sich auf den im Kapitel 6.2.2.2 präsentierten Ausschnitt der C1/P2 Messung. Aus Umfangsgründen wird hier lediglich ein Teil des Beispiels aufgelistet.

Epoche	H	R	h	Δt	v	v	a	a	σ_v	σ_a
	$[m]$	$[m]$	$[m]$	$[ns]$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$\left[\frac{km}{h}\right]$	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	$\left[\frac{km}{h^2}\right]$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
4000	348777.23	750112.26	461.75	25.7	16.21	58.35	0.94	3.38	1.56	0.02
4001	348779.58	750111.73	461.06	21.3	16.21	58.35	0.91	3.29	1.57	0.02
4002	348781.92	750111.23	460.41	18.8	16.19	58.30	0.89	3.19	1.58	0.02
4003	348784.22	750110.73	459.79	16.4	16.17	58.22	0.86	3.09	1.58	0.02
4004	348786.44	750110.21	459.22	14.1	16.14	58.11	0.83	3.00	1.59	0.02
4005	348788.57	750109.68	458.70	12.0	16.10	57.96	0.81	2.90	1.59	0.02
4006	348790.59	750109.13	458.22	10.1	16.04	57.76	0.78	2.81	1.59	0.02
4007	348792.51	750108.55	457.79	8.4	15.98	57.52	0.75	2.71	1.59	0.02
4008	348794.35	750107.95	457.41	6.8	15.91	57.26	0.73	2.62	1.59	0.02
4009	348796.11	750107.32	457.07	5.5	15.83	56.99	0.70	2.53	1.59	0.02
4010	348797.81	750106.66	456.76	4.3	15.75	56.70	0.68	2.45	1.59	0.02
4011	348799.46	750105.98	456.48	3.3	15.67	56.41	0.66	2.37	1.59	0.02
4012	348801.06	750105.28	456.22	2.5	15.59	56.12	0.64	2.29	1.59	0.02
4013	348802.62	750104.57	455.99	1.8	15.51	55.82	0.62	2.22	1.59	0.02
4014	348804.16	750103.85	455.78	1.1	15.42	55.52	0.60	2.14	1.59	0.02
4015	348805.67	750103.11	455.58	0.6	15.34	55.22	0.58	2.07	1.59	0.02
4016	348807.15	750102.34	455.40	0.0	15.26	54.94	0.56	2.01	1.59	0.02
4017	348805.62	750101.65	458.55	14.8	14.62	52.63	0.50	1.81	1.58	0.02
4018	348805.80	750100.85	459.97	18.4	14.36	51.68	0.48	1.73	1.58	0.02
4019	348806.19	750099.32	459.46	17.7	14.45	52.03	0.51	1.84	1.57	0.02
4020	348807.06	750098.12	459.01	16.7	14.49	52.17	0.52	1.88	1.57	0.02
4021	348808.09	750097.07	458.62	15.8	14.49	52.17	0.53	1.90	1.57	0.02
4022	348809.19	750096.08	458.26	15.0	14.47	52.11	0.53	1.89	1.57	0.02
4023	348810.33	750095.15	457.95	14.3	14.44	51.98	0.52	1.88	1.57	0.02
4024	348811.50	750094.26	457.68	13.7	14.39	51.80	0.52	1.86	1.57	0.02
4025	348812.66	750093.39	457.43	13.2	14.33	51.58	0.51	1.83	1.57	0.02
4026	348813.81	750092.55	457.20	12.7	14.26	51.32	0.50	1.80	1.57	0.02
4027	348814.97	750091.70	457.01	12.2	14.18	51.06	0.49	1.76	1.57	0.02
4028	348816.14	750090.85	456.76	11.6	14.12	50.84	0.48	1.74	1.59	0.02
4029	348817.27	750090.04	456.63	11.7	14.03	50.52	0.47	1.70	1.60	0.02
4030	348818.33	750089.28	456.61	11.8	13.92	50.10	0.46	1.66	1.61	0.02
4031	348819.33	750088.55	456.73	12.7	13.78	49.60	0.45	1.61	1.62	0.02
4032	348820.27	750087.86	456.98	14.0	13.62	49.03	0.43	1.57	1.63	0.02
4033	348821.19	750087.20	457.37	15.8	13.44	48.40	0.42	1.52	1.64	0.02
4034	348822.89	750086.65	457.46	13.8	13.33	47.98	0.39	1.42	1.66	0.02
4035	348824.34	750085.68	457.39	13.8	13.37	48.13	0.39	1.42	1.70	0.02
4036	348825.78	750084.69	457.32	13.8	13.41	48.29	0.39	1.42	1.70	0.02
4037	348827.21	750083.71	457.25	13.8	13.46	48.45	0.39	1.42	1.70	0.02
4038	348828.63	750082.71	457.17	13.8	13.50	48.61	0.39	1.42	1.70	0.02
4039	348830.05	750081.71	457.10	13.8	13.55	48.77	0.39	1.42	1.70	0.02
4040	348831.46	750080.71	457.03	13.8	13.59	48.93	0.39	1.42	1.70	0.02
4041	348832.86	750079.69	456.96	13.8	13.64	49.09	0.39	1.42	1.70	0.02
4042	348834.26	750078.68	456.89	13.8	13.68	49.25	0.39	1.42	1.70	0.02

4043	348835.65	750077.65	456.81	13.8	13.73	49.41	0.39	1.42	1.70	0.02
4044	348837.04	750076.62	456.74	13.8	13.77	49.58	0.39	1.42	1.70	0.02
4045	348838.42	750075.58	456.67	13.8	13.82	49.74	0.39	1.42	1.70	0.02
4046	348839.79	750074.54	456.60	13.8	13.86	49.91	0.39	1.42	1.70	0.02
4047	348840.04	750074.43	457.07	16.1	13.35	48.07	0.36	1.29	1.62	0.02
4048	348840.78	750073.82	456.39	15.5	13.14	47.31	0.35	1.25	1.62	0.02
4049	348841.41	750073.03	455.45	14.7	13.01	46.82	0.35	1.25	1.63	0.02
4050	348841.88	750072.16	454.36	13.5	12.90	46.45	0.36	1.28	1.64	0.02
4051	348842.11	750071.21	453.16	12.4	12.82	46.16	0.37	1.34	1.65	0.02
4052	348843.11	750070.46	451.94	8.4	12.73	45.84	0.37	1.33	1.66	0.02
4053	348844.18	750069.67	450.75	6.5	12.67	45.62	0.37	1.32	1.68	0.02
4054	348845.27	750068.85	449.61	4.8	12.63	45.47	0.36	1.31	1.70	0.02
4055	348846.38	750068.01	448.52	3.4	12.61	45.38	0.36	1.31	1.72	0.02
4056	348847.47	750067.15	447.48	2.0	12.59	45.33	0.37	1.32	1.73	0.02
4057	348848.55	750066.18	447.07	2.0	12.61	45.39	0.37	1.32	1.78	0.02
4058	348849.62	750065.20	446.66	2.0	12.63	45.46	0.37	1.32	1.78	0.02
4059	348850.68	750064.22	446.25	2.0	12.65	45.53	0.37	1.32	1.78	0.02
4060	348851.73	750063.24	445.83	2.0	12.67	45.60	0.37	1.32	1.78	0.02
4061	348852.77	750062.25	445.40	2.0	12.69	45.67	0.37	1.32	1.78	0.02
4062	348853.80	750061.26	444.97	2.0	12.71	45.75	0.37	1.32	1.78	0.02
4063	348854.82	750060.27	444.53	2.0	12.73	45.82	0.37	1.32	1.78	0.02
4064	348855.82	750059.27	444.08	2.0	12.75	45.90	0.37	1.32	1.78	0.02
4065	348856.82	750058.27	443.63	2.0	12.77	45.98	0.37	1.32	1.78	0.02
4066	348857.81	750057.27	443.17	2.0	12.79	46.06	0.37	1.32	1.78	0.02
4067	348858.78	750056.26	442.71	2.0	12.82	46.14	0.37	1.32	1.78	0.02
4068	348859.75	750055.25	442.24	2.0	12.84	46.22	0.37	1.32	1.78	0.02
4069	348860.71	750054.23	441.76	2.0	12.86	46.30	0.37	1.32	1.78	0.02
4070	348861.65	750053.21	441.28	2.0	12.89	46.39	0.37	1.32	1.78	0.02
4071	348862.59	750052.19	440.79	2.0	12.91	46.47	0.37	1.32	1.78	0.02
4072	348863.51	750051.16	440.30	2.0	12.93	46.56	0.37	1.32	1.78	0.02
4073	348864.42	750050.14	439.80	2.0	12.96	46.65	0.37	1.32	1.78	0.02
4074	348865.33	750049.10	439.29	2.0	12.98	46.74	0.37	1.32	1.78	0.02
4075	348866.22	750048.07	438.78	2.0	13.01	46.83	0.37	1.32	1.78	0.02
4076	348867.10	750047.03	438.26	2.0	13.03	46.92	0.37	1.32	1.78	0.02
4077	348867.94	750046.43	437.00	1.8	12.87	46.32	0.36	1.29	1.74	0.02
4078	348868.30	750045.90	436.24	3.1	12.60	45.37	0.35	1.28	1.76	0.02
4079	348870.81	750045.80	436.77	2.8	12.25	44.09	0.30	1.07	1.73	0.02
4080	348872.72	750045.45	437.05	5.1	12.00	43.19	0.26	0.95	1.72	0.02
4081	348874.50	750044.91	437.05	5.8	11.86	42.69	0.24	0.87	1.71	0.02
4082	348876.10	750044.30	437.06	7.2	11.74	42.25	0.22	0.81	1.71	0.02
4083	348878.24	750043.33	436.16	2.4	11.90	42.84	0.21	0.75	1.70	0.02
4084	348880.23	750042.39	435.33	0.8	12.03	43.31	0.20	0.71	1.70	0.02
4085	348881.85	750041.68	435.13	2.7	11.98	43.12	0.19	0.67	1.70	0.02
4086	348883.54	750040.90	434.81	2.1	11.97	43.10	0.18	0.63	1.69	0.02
4087	348885.27	750040.13	434.56	2.0	11.96	43.06	0.16	0.59	1.69	0.02
4088	348887.19	750039.21	433.96	0.1	12.07	43.44	0.16	0.57	1.69	0.02
4089	348888.94	750038.31	433.41	0.0	12.14	43.71	0.15	0.56	1.69	0.02
4090	348890.29	750037.70	433.68	3.2	11.99	43.15	0.14	0.51	1.69	0.02
4091	348891.26	750036.91	433.58	4.8	11.89	42.80	0.14	0.49	1.70	0.02
4092	348892.34	750036.11	433.44	5.1	11.82	42.56	0.13	0.48	1.72	0.02
4093	348892.97	750035.46	433.73	9.4	11.61	41.79	0.13	0.48	1.73	0.02
4094	348893.95	750034.71	433.82	9.6	11.50	41.39	0.13	0.48	1.75	0.02
4095	348895.28	750033.87	433.62	8.3	11.49	41.36	0.13	0.46	1.76	0.02
4096	348896.71	750033.03	433.38	7.8	11.49	41.38	0.12	0.44	1.78	0.02
4097	348898.16	750032.21	433.15	7.5	11.50	41.38	0.12	0.42	1.79	0.02
4098	348899.81	750031.36	432.82	6.3	11.54	41.54	0.11	0.39	1.81	0.02
4099	348901.38	750030.56	432.59	6.3	11.55	41.56	0.10	0.37	1.82	0.02

Epoche	σ_H	σ_R	σ_{Lage}	σ_h	$\sigma_{\Delta t}$	d_{PRNG3}	d_{PRNG11}	d_{PRNG14}	d_{PRNG19}	θ
	$[m]$	$[m]$	$[m]$	$[m]$	$[ns]$	$[m]$	$[m]$	$[m]$	$[m]$	
4000	2.09	1.13	2.38	1.58	2.88	-0.01	0.17	-5.53	-0.27	2.61
4001	2.11	1.17	2.48	1.70	2.98	-0.18	0.67	-5.67	-0.45	1.91
4002	2.14	1.20	2.45	1.79	3.05	-0.02	1.44	-4.73	-0.22	1.42
4003	2.16	1.22	2.48	1.87	3.10	-0.33	1.60	-4.27	-0.50	1.20
4004	2.17	1.23	2.49	1.92	3.14	-0.67	1.71	-3.84	-0.79	1.03
4005	2.19	1.24	2.52	1.96	3.17	-0.93	1.84	-3.44	-1.02	0.91
4006	2.19	1.24	2.52	2.00	3.20	-1.23	1.93	-3.07	-1.26	0.83
4007	2.20	1.25	2.53	2.02	3.22	-1.41	2.02	-2.74	-1.43	0.77
4008	2.21	1.25	2.54	2.04	3.24	-1.54	2.07	-2.43	-1.60	0.71
4009	2.21	1.25	2.54	2.05	3.25	-1.65	2.04	-2.12	-1.72	0.65
4010	2.21	1.25	2.54	2.06	3.26	-1.74	2.05	-1.86	-1.83	0.61
4011	2.22	1.25	2.55	2.06	3.27	-1.73	2.01	-1.63	-1.89	0.55
4012	2.22	1.25	2.55	2.07	3.28	-1.74	2.00	-1.43	-1.95	0.52
4013	2.22	1.25	2.55	2.07	3.28	-1.73	2.00	-1.30	-1.98	0.49
4014	2.22	1.25	2.55	2.07	3.28	-1.74	1.95	-1.21	-2.03	0.47
4015	2.22	1.25	2.55	2.08	3.29	-1.70	1.90	-1.05	-2.06	0.43
4016	2.22	1.25	2.55	2.08	3.29	-1.70	1.81	-0.91	-2.11	0.40
4017	2.21	1.20	2.51	1.81	2.96	-1.75	1.82	-0.89	-2.16	0.57
4018	2.20	1.20	2.51	1.69	2.85	-1.73	-1.83	-2.41	-2.47	0.96
4019	2.16	1.16	2.45	1.66	2.92	-0.83	-2.43	-2.23	-1.64	0.91
4020	2.14	1.16	2.43	1.66	2.98	-0.40	-1.39	-3.46	-1.38	1.19
4021	2.13	1.16	2.43	1.67	3.02	-0.09	-0.72	-4.02	-1.20	1.43
4022	2.13	1.17	2.43	1.69	3.04	0.14	-0.31	-4.31	-1.08	1.60
4023	2.13	1.17	2.43	1.70	3.06	0.30	-0.04	-4.56	-1.04	1.79
4024	2.13	1.18	2.44	1.71	3.08	0.43	0.20	-4.74	-1.03	1.94
4025	2.13	1.18	2.44	1.71	3.09	0.53	0.38	-4.85	-0.99	2.04
4026	2.13	1.18	2.44	1.72	3.10	0.56	0.47	-4.94	-1.03	2.13
4027	2.13	1.18	2.44	1.72	3.11	0.66	0.53	-4.96	-1.04	2.16
4028	2.14	1.39	2.55	1.77	3.28	0.72	-4.94	-1.02	2.76	1.72
4029	2.15	1.57	2.66	1.82	3.43	0.90	-4.91	-0.96	2.78	1.69
4030	2.17	1.73	2.78	1.88	3.57	0.90	-4.93	-1.06	2.68	1.70
4031	2.19	1.88	2.89	1.95	3.72	1.02	-4.83	-1.02	2.71	1.62
4032	2.21	2.01	2.99	2.01	3.87	1.05	-4.68	-1.02	2.69	1.53
4033	2.24	2.14	3.10	2.09	4.02	1.18	-4.58	-1.02	2.57	1.47
4034	2.28	2.25	3.20	2.27	4.24	1.25	-4.42	-1.06	0.96	0.77
4035	2.48	2.46	3.49	2.48	4.62	-	-	-	-	0.77
4036	2.48	2.46	3.49	2.48	4.62	-	-	-	-	0.77
4037	2.48	2.46	3.49	2.48	4.62	-	-	-	-	0.77
4038	2.48	2.46	3.49	2.48	4.62	-	-	-	-	0.77
4039	2.48	2.46	3.49	2.48	4.62	-	-	-	-	0.77
4040	2.48	2.46	3.49	2.48	4.62	-	-	-	-	0.77
4041	2.48	2.46	3.49	2.48	4.62	-	-	-	-	0.77
4042	2.48	2.46	3.49	2.48	4.62	-	-	-	-	0.77
4043	2.48	2.46	3.49	2.48	4.62	-	-	-	-	0.77
4044	2.48	2.46	3.49	2.48	4.62	-	-	-	-	0.77
4045	2.48	2.46	3.49	2.48	4.62	-	-	-	-	0.77
4046	2.48	2.46	3.49	2.48	4.62	-	-	-	-	0.77
4047	2.37	1.61	2.87	2.03	3.67	3.23	-5.72	0.03	0.65	2.94
4048	2.49	1.39	2.85	1.93	3.57	1.24	-4.21	0.34	1.07	1.38
4049	2.62	1.28	2.92	1.87	3.57	0.62	-3.57	0.35	1.97	0.93
4050	2.73	1.24	3.00	1.83	3.60	0.20	-3.34	0.24	2.48	0.78
4051	2.84	1.21	3.09	1.81	3.65	-0.07	-3.17	0.18	3.22	0.70
4052	2.98	1.22	3.22	1.87	3.72	-0.32	-3.18	0.12	1.75	0.38

4053	3.12	1.23	3.35	1.98	3.77	0.10	-2.11	0.65	2.19	0.19
4054	3.27	1.24	3,50	1.98	3.81	-0.01	-1.76	0.51	2.00	0.13
4055	3.42	1.25	3.64	2.02	3.86	-0.09	-1.45	0.40	1.80	0.09
4056	3.57	1.26	3.79	2.06	3.91	-0.09	-1.24	0.29	1.62	0.06
4057	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4058	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4059	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4060	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4061	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4062	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4063	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4064	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4065	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4066	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4067	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4068	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4069	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4070	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4071	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4072	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4073	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4074	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4075	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4076	3.78	1.50	4.07	2.26	4.31	-	-	-	-	0.06
4077	3.71	1.31	3.93	1.82	3.91	-3.20	2.37	1.33	1.35	0.71
4078	3.84	1.37	4.08	1.72	3.98	-3.21	1.69	3.11	0.52	0.78
4079	3.77	1.30	3.99	1.59	4.04	-3.16	1.23	-5.73	1.54	2.16
4080	3.71	1.26	3.92	1.54	4.06	-1.39	1.60	-3.61	2.12	0.93
4081	3.68	1.24	3.88	1.51	4.07	-0.89	1.22	-2.98	0.74	0.60
4082	3.66	1.22	3,86	1.50	4.08	-0.43	1.13	-2.35	1.00	0.39
4083	3.64	1.22	3.84	1.50	4.08	-0.24	0.93	-2.44	-4.44	0.38
4084	3.63	1.22	3.83	1.50	4.08	0.43	1.59	-1.46	-2.83	0.30
4085	3.62	1.21	3.82	1.50	4.08	0.22	1.38	-1.51	0.63	0.26
4086	3.61	1.21	3.81	1.50	4.08	-0.16	0.83	-1.89	-0.66	0.24
4087	3.60	1.21	3.80	1.50	4.08	0.01	0.90	-1.88	-0.40	0.24
4088	3.60	1.21	3.80	1.50	4.08	0.16	0.85	-1.70	-2.43	0.21
4089	3.59	1.21	3.79	1.50	4.08	0.38	1.03	-1.00	-1.42	0.13
4090	3.58	1.21	3.78	1.50	4.08	0.18	0.85	-1.21	2.83	0.13
4091	3.68	1.27	3.89	1.53	4.09	-0.25	0.24	1.66	-0.89	0.09
4092	3.78	1.33	4.01	1.55	4.12	-0.43	0.11	0.86	-1.15	0.03
4093	3.92	1.37	4.15	1.57	4.16	-0.32	0.30	3.94	-1.07	0.48
4094	4.04	1.41	4.28	1.58	4.23	-0.73	-0.13	1.30	-1.68	0.07
4095	4.18	1.44	4.42	1.59	4.30	-0.48	0.22	-0.63	-1.40	0.02
4096	4.31	1.47	4.46	1.60	4.37	-0.21	0.67	-0.61	-1.02	0.03
4097	4.44	1.50	4.69	1.60	4.45	-0.24	0.75	-0.55	-0.94	0.04
4098	4.57	1.52	4.82	1.61	4.53	-0.28	0.83	-1.45	-0.92	0.10
4099	4.70	1.54	4.95	1.61	4.61	-0.20	1.00	-0.56	-0.75	0.06

Literaturverzeichnis

Blumauer E.: Operative Auswertung kontinentaler und globaler GNSS Netze, Diplomarbeit am Institut für Geodäsie und Geophysik der Technischen Universität Wien, 2005.

Böhm J.: Physik der Atmosphäre, Skriptum zum Vorlesung, Institut für Geodäsie und Geophysik der Technischen Universität Wien, 2002.

Brammer K., Siffling G.: Kalman-Bucy-Filter: deterministische Beobachtung und stochastische Filterung, R. Oldenbourg Verlag, München Wien, 1989.

Dreszer J., Koch E., Kulesza Cz., Trajdos T., Wojdat M.: Matematyka. Poradnik inżyniera, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1971

Fragner E.: Satellitenbahnprädiktion unter Einbeziehung aktueller Laserdistanzmessungen, Diplomarbeit am Institut für Geodäsie und Geophysik der Technischen Universität Wien, 1998.

Hofmann-Wellenhof B., Lichtenberger W., Collins J.: Global Positioning System. Theory and Practice, Springer-Verlag KG, 4. komplett überarbeitete Auflage, 1997.

Kahmen, H.: Vermessungskunde, 20. völlig neu überarbeitete Auflage, de Gruyter Verlag, Berlin, New York, 2005.

Köhler B. U.: Konzepte der statischen Signalverarbeitung, Springer Berlin Heidelberg, 2005.

Lother G., Strehle J.: Ausgleichungrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Grundlagen und Anwendungen, Fakultät für Geoinformation der Hochschule München, 2007.

Schuh, H., Bretterbauer, K.: Höhere Geodäsie, Skriptum zum Vorlesung, Institut für Geodäsie und Geophysik der Technischen Universität Wien, 1999.

Schuh, H., Bretterbauer, K.: Kosmische Geodäsie, Skriptum zum Vorlesung, Institut für Geodäsie und Geophysik der Technischen Universität Wien, 1999.

Weber, R.: Koordinatensysteme, Skriptum zum Vorlesung, Institut für Geodäsie und Geophysik der Technischen Universität Wien, 2005.

Weber, R.: Satellitennavigationsdienste, Skriptum zum Vorlesung, Institut für Geodäsie und Geophysik der Technischen Universität Wien, 2004.

Linkverzeichnis

www.aviationcenter.ch

www.freeflightsystems.com/gps.htm

www.gik.uni-karlsruhe.de/uploads/media/Kapitel_3.1.pdf

http://gio.uni-muenster.de/beitraege/ausg96_1/schmitz_meth_gps/iwu-pap3.htm

http://igscb.jpl.nasa.gov/
www.kowoma.de/gps/index.htm

www.leica-geosystems.com

www.ngs.noaa.gov/CORS/Gpscal.html

www.swisstopo.admin.ch

www.tplusplus.de/geo/gps.html

http://www3.ltett.lu/webltett/departements/mathematiques/dossiers/gps/gps.html

Bildverzeichnis

2-1 GPS-Satellitenbahnen 2
2-2 GPS-Signalstruktur 3
2-3 GPS-Bodenstationen 5
2-4 GPS-Empfänger 5
2-5 GPS-Ortungsprinzip 6
2-6 Absolutpositionierung 6
2-7 GPS-Codemesung 7
2-8 GPS-Phasenmessung 8
2-9 Relativpositionierung: Einfachdifferenzen 9
2-10 Relativpositionierung: Doppeldifferenzen 10
2-11 Relativpositionierung: Dreifachdifferenzen 12
2-12 Höhenprofil der Brechzahlen des trockenen und feuchten Anteils 15
2-13 Mehrwegeeffekte 17
2-14 Die Keplerelemente 18

3-1 Conventional Inertial System 24
3-2 Conventional Terrestrial System 24
3-3 Geographische Koordinaten 27
3-4 Gauss-Krüger Projektion 29
3-5 Das österreichische Meridianstreifensystem 30

4-1 Der emeritierte ETH-Mathematik-Professor Rudolf E. Kalman 32
4-2 Vereinfachte Darstellung der Kalman Filterung 33
4-3 Kalmanalgorithmus 34
4-4 Einfluss der Vergrößerung des System- bzw. Beobachtungsrauschens 38
4-5 Rohkoordinaten und gefilterte Koordinaten im BMN in [m] in einem statischen Fall 39
4-6 Beobachtungsmatrix in einem echten kinematischen Fall (links) und im simulierten kinematischen Fall (rechts) 40
4-7 Rohkoordinaten und gefilterte Koordinaten im BMN in [m] im simulierten kinematischen Fall 40
4-8 Rohkoordinaten und gefilterte Koordinaten im BMN in [m] im simulierten beschleunigten Fall 41
4-9 Beobachtungsmatrix in einem echten beschleunigten Fall 42
4-10 Beobachtungsmatrix im simulierten beschleunigten Fall 42
4-11 Rohkoordinaten und gefilterte Koordinaten im BMN in [m] in einem echten kinematischen Fall 42
4-12 Gesamtgeschwindigkeit und –beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit 43
4-13 Komponenten des Positionsvektors in $[m]$, des Geschwindigkeitsvektors in $\left[\frac{m}{s}\right]$ und des Beschleunigungsvektors in $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ 44

5-1 Die kinematische Messung 45

5-2	Die kinematische Messung am Kahlenberg	46
5-3	Blick vom Kahlenberg auf Wien	46
5-4	Glättung der Trajektorie	47
5-5	Fehlende Messdaten	48
5-6	Fehlende Messdaten	49
5-7	Unterschiedliches Beobachtungsrauschen	49
5-8	Unterschiedliches Systemrauschen	50
5-9	Unterschiedliches System- (links) und Beobachtungsrauschen (rechts)	50
5-10	Rohpositionen einer C1 und einer C1/P2 Messung im BMN in [m]	51
5-11	Abweichungen zwischen Rohpositionen C1 und C1/P2	52
5-12	Rohpositionen und Koordinaten nach der Kalman Filterung im BMN einer C/A (links) und einer C1/P2 Messung (rechts) in [m]	52
5-13	Positionen nach der Kalman Filterung einer C1 und einer C1/P2 Messung im BMN in [m]	53
6-1	Mess- und Bahndaten	54
6-2	Interpolierte Satellitendaten	55
6-3	Messroute	57
6-4	Verlauf der Messung	58
6-5	Gefilterte Koordinaten im BMN in [m]	61
6-6	Geschwindigkeit und Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit	62
6-7	Verlauf des Hochwerts und Rechtswerts in Abhängigkeit von der Zeit	62
6-8	Histogramme der gefilterten Koordinatendifferenzen einer C1/P2 und einer L1/L2 Messung	63
6-9	Differenzen der gefilterten Koordinaten einer C1/P2 und einer L1/L2 Messung	63
6-10	Verlauf der Höhe in Abhängigkeit von der Zeit	64
6-11	Verlauf des Empfängeruhrfehlers in Abhängigkeit von der Zeit	64
6-12	Die Testgröße θ einer C1 und einer C1/P2 Messung	65
6-13	Innovation der Distanz zu den GPS Satelliten PRN 03, PRN 11, PRN 14 und PRN 19	65
6-14	Gefilterte Koordinaten im BMN in [m]	66
6-15	Geschwindigkeit und Beschleunigung einer C1/P2 Messung in Abhängigkeit von der Zeit	67
6-16	Verlauf des Hochwerts und Rechtswerts einer C1/P2 Messung in Abhängigkeit von der Zeit	67
6-17	Verlauf der Höhe in Abhängigkeit von der Zeit	68
6-18	Die Messroute auf einer topografischen Karte	68
6-19	Verlauf des Empfängeruhrfehlers in Abhängigkeit von der Zeit	69
6-20	Standardabweichungen des Hochwerts und Rechtswerts	69
6-21	Standardabweichungen der Höhe, des Empfängeruhrfehlers, der Gesamtgeschwindigkeit und –beschleunigung	70
6-22	Innovation der Differenz zu den GPS Satelliten PRN 03 und PRN 11 in Abhängigkeit von der Zeit	71
6-23	Satellitenanzahl (links) und Testgröße θ (rechts)	71
6-24	Gefilterte Koordinaten im BMN in [m]	74

6-25 Histogramme der Abweichungen zwischen den Trajektorien Differenz P3 und Differenz L3 74
6-26 Verlauf des Hochwerts und Rechtswerts in [m] in Abhängigkeit von der Zeit 75
6-27 Verlauf der Geschwindigkeit und Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit 75
6-28 Verlauf der Höhe und die verfügbare Satellitenanzahl .....
6-29 Verlauf des Empfängeruhrfehlers in Abhängigkeit von der Zeit 77
6-30 Innovation der Distanz zu den Satelliten PRN 03 und PRN 11 78
6-31 Testgröße θ in Abhängigkeit von der Zeit..... 78
6-32 Standardabweichungen der Parameter des Zustandsvektors..... 79
6-33 Gefilterte Koordinaten im BMN des Rovers C1/P2 (links) und der Differenz C1/P2 (rechts) in [m] 80
6-34 Verlauf des Hochwerts und Rechtswerts in [m] in Abhängigkeit von der Zeit 80
6-35 Verlauf der Höhe und die verfügbare Satellitenanzahl 81
6-36 Verlauf des Empfängeruhrfehlers in Abhängigkeit von der Zeit 82
6-37 Standardabweichungen der Parameter des Zustandsvektors..... 82

8-1 Quantile der χ^2-Verteilung in Abhängigkeit von Sicherheitswahrscheinlichkeit..... 88

Danksagung

Ich möchte mich ganz herzlich bei meinem Betreuer Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Robert Weber für seine großartige und in einer äußerst sympathischen Atmosphäre zugeteilte Unterstützung bedanken.

Ich sage Dank dem Prof. Dr.-Ing. Asim Bilajbegovic für das Begutachten meiner Arbeit und mir vor Jahren gegebene Empfehlung, an der Technischen Universität zu promovieren.

Ich danke dem Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Harald Schuh für ein herzliches Willkommen am Institut für Geodäsie und Geophysik.

Ich bin meinen Kollegen am Institut: Dipl.-Ing. Michael Opitz, Dipl.-Ing. Gottfried Thaler und Dipl.-Ing. Franz Blauensteiner zu Dank verpflichtet, die mich ganz freundlich unterstützt und mir sehr viel geholfen haben.

Ich habe meinen Eltern Maria und Henryk zu danken, die mir ganze Zeit zur Seite gestanden sind und meinem Vater für seine mathematische Unterstützung.

Ich bin meinen Schwiegereltern Rita und Ludwig für die Betreuung von meinem Sohn dankbar, die mir mehr Flexibilität geboten hat.

Ich verdanke meinem Mann Patrick für seinen Beitrag in die Sprachgestaltung meiner Dissertation und für Ermutigung und das konstante Kraftgeben, vor allem in Momenten der Verzweiflung und Resignation. Ohne Ihn würde diese Arbeit nicht zustande gekommen.

Lebenslauf

Ella Schnur
Panoramaweg 2
79822 Titisee-Neustadt
Deutschland

Persönliche Daten:

Geburtsname:	Elżbieta Puchalska
Geburtsdatum:	17.06.1980
Geburtsort:	Stettin (Szczecin) in Polen

Schulbildung:

1987-1995	Grundschule in Stettin
1995-1999	Lyzeum in Stettin
1999	Abitur
1999-2001	Berufsstudium in Stettin
2001	Diplom Techniker Geodät
2001-2005	Studium Geodäsie und Kartografie an der Landwirtschaftsakademie in Breslau (Wrocław)
2005	Diplom Vermessungsingenieur
2005-2009	Doktoratstudium an der Technischen Universität Wien Dissertationsgebiet: Vermessung und Geoinformation