DIPLOMARBEIT

Differenzengleichungen

Ausgeführt am Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von
Ao. Univ.Prof. DI Dr. techn. Helmut Länger

durch

Wedwig Chen
Siebensterngasse 46/3/15
1070 Wien

Wien, September 2015 ______________________

Danksagung

Ein großes Dankeschön geht an

... meinen Betreuer, Ao. Univ.Prof. DI Dr. techn. Helmut Länger, für die besonders tolle und kompetente Betreuung wie man sie sich nur wünschen kann, für die Geduld und hilfreiche Zusammenarbeit bis zur Fertigstellung meiner Diplomarbeit, sowie für die zahlreichen Stunden, die er in mich und meine Diplomarbeit investiert hat.

... meine Eltern, für die jahrelange Unterstützung und kontinuierlichen Beistand, und dafür dass Sie mir in jeder Lebenslage mit Rat und Tat beigestanden sind.

... meine langjährige Lebensgefährtin Susanne, die in guten und schlechten Zeiten zu mir gestanden ist, mit viel Liebe und gesunder Portion Motivation. Ohne Sie hätte ich das Alles nicht geschafft.

... meine Studienkollegen, die mit mir die Studienzeit durchgestanden haben, und die gemeinsame Zeit, die wir zusammen vor Prüfungen gelernt haben.

... meine Professoren, die mir geholfen haben meinen Horizont zu erweitern.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Der Differenzenoperator

Wir bezeichnen mit $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, mit $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null und mit $\mathbb{K}$ den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen oder den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Definition 1.1. Eine unendliche Folge $(y(k))_{k\in\mathbb{N}_0} := (y(0), y(1), y(2), \dots)$ von Elementen aus $\mathbb{K}$ ist formal definiert als eine Abbildung

$$y : \begin{cases} \mathbb{N}_0 & \longrightarrow \mathbb{K} \\ k & \longmapsto y(k) \end{cases} \tag{1.1}$$

die jedem Index $k \in \mathbb{N}_0$ ein Folgenglied $y(k) \in \mathbb{K}$ zuordnet.

Definition 1.2. Mit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} := \{y | y : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{K}\}$ wird die Menge aller unendlichen Folgen in $\mathbb{K}$ bezeichnet. Mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation bildet $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}, +, \cdot)$ einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$.
Sind $(x(k))_{k\in\mathbb{N}_0}, (y(k))_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ unendliche Folgen und $\alpha \in \mathbb{K}$, so gilt

- $(0, 0, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$
- $(x(k))_{k\in\mathbb{N}_0} + (y(k))_{k\in\mathbb{N}_0} = (x(k) + (y(k))_{k\in\mathbb{N}_0}$
- $\alpha(x(k))_{k\in\mathbb{N}_0} = (\alpha x(k))_{k\in\mathbb{N}_0}$

Auf dem Vektorraum $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}, +, \cdot)$ können drei Operatoren I, E und Δ von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ nach $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ definiert werden:

- $I(y(k))_k := (y(k))_k$
- $E(y(k))_k := (y(k+1))_k$
- $\Delta(y(k))_k := (y(k+1) - y(k))_k$

Der Operator I bezeichnet den **Identitäts-Operator**, E den **(Vorwärts-) Shift-Operator** und Δ den **(Vorwärts-) Differenzenoperator**. Zwischen diesen Operatoren besteht folgender Zusammenhang:

$$\Delta = E - I, \quad E = \Delta + I \text{ oder } I = E - \Delta$$

Definition 1.3. Sei $(y(k))_k \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit Elementen aus $\mathbb{K}$, dann bezeichnet

$$\Delta(y(k))_k = (y(k+1) - y(k))_k$$

die *erste Differenz* von $(y(k))_k$.

Bemerkung 1.1. Falls kein Anlass zu Verwechslungen besteht, können wir im Folgenden die Klammern weglassen, und schreiben $\Delta y(k)$ statt $\Delta(y(k))_k$.

Definition 1.4. Unter der *zweiten Differenz* von $(y(k))$ versteht man die erste Differenz der ersten Differenz, d.h.

$$\Delta^2 y(k) := \Delta(\Delta y(k)).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die *n-te Differenz* definiert als:

$$\Delta^n y(k) := \Delta(\Delta^{n-1} y(k)). \tag{1.2}$$

Sie lässt sich mit dem *binomischen Lehrsatz* darstellen als

$$\begin{aligned} \Delta^n y(k) &= (E - I)^n y(k) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-I)^i E^{n-i} y(k) \qquad (1.3) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i y(k + n - i). \end{aligned}$$

Im Folgenden zeigen wir, dass der Differenzenoperator Δ das diskrete Analogon des Differentialoperators D aus der Analysis ist.

Lemma 1.1. *Sei $(x(k)), (y(k)) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ und $a \in \mathbb{K}$, dann gilt*

a) Δ ist homogen: $\Delta(ay(k)) = a\Delta y(k)$

b) Δ ist additiv: $\Delta(x(k) + y(k)) = \Delta x(k) + \Delta y(k)$

Der Differenzenoperator Δ ist ein linearer Operator.

Beweis. a)

$$\begin{aligned} \Delta(ay(k)) &= (ay(k+1) - ay(k)) \\ &= a(y(k+1) - y(k)) = a\Delta y(k) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\Delta(x(k)+y(k)) =&(x(k+1)+y(k+1))-(x(k)+y(k))\\ =&(x(k+1)-x(k))+(y(k+1)-y(k))=\\ =&\Delta x(k)+\Delta y(k)\end{aligned}$$

□

Lemma 1.2. *Der Differenzenoperator Δ erfüllt das diskrete Analogon des Fundamentalsatzes der Analysis* [1] *für $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $a \leq b$.*

a) $\sum\limits_{k=a}^{b-1} \Delta y(k) = y(b) - y(a)$

b) $\Delta\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1} y(i)\right) = y(k)$

Beweis. a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=a}^{b-1} \Delta y(k) &= \Delta y(b-1) + \Delta y(b-2) + \cdots + \Delta y(a) =\\ &= [y(b)-y(b-1)] + [y(b-1)-y(b-2)] + \cdots + [y(a+1)-y(a)] =\\ &= y(b) - y(a)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\Delta\left(\sum_{i=0}^{k-1} y(i)\right) &= \sum_{i=0}^{k} y(i) - \sum_{i=0}^{k-1} y(i) =\\ &= [y(0)+\cdots+y(k)] - [y(0)+\cdots+y(k-1)] =\\ &= y(k)\end{aligned}$$

□

Lemma 1.3. *Seien $(x(k)), (y(k)) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$. Dann gelten folgende Rechenregeln für die erste Differenz von Produkt und Quotient:*

a) $\Delta(x(k)y(k)) = x(k)\Delta y(k) + Ey(k)\Delta x(k)$

b) $\Delta(x(k)/y(k)) = \big(y(k)\Delta x(k) - x(k)\Delta y(k)\big)/\big(y(k)Ey(k)\big)$

[1] Fundamentalsatz der Analysis:

a) $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$

b) $\frac{d}{dx}(\int_a^x f(t)dt) = f(x)$

Beweis. a)

$$\begin{aligned}\Delta(x(k)y(k)) &= x(k+1)y(k+1) - x(k)y(k)\\ &= x(k+1)y(k+1) - x(k)y(k+1)\\ &\quad + x(k)y(k+1) - x(k)y(k)\\ &= \Delta x(k)Ey(k) + x(k)\Delta y(k)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\Delta\frac{x(k)}{y(k)} &= \frac{x(k+1)}{y(k+1)} - \frac{x(k)}{y(k)}\\ &= \frac{y(k)x(k+1) - y(k+1)x(k)}{y(k)y(k+1)}\\ &= \frac{y(k)x(k+1) - y(k)x(k) + y(k)x(k) - y(k+1)x(k)}{y(k)y(k+1)}\\ &= \frac{y(k)\Delta x(k) - x(k)\Delta y(k)}{y(k)Ey(k)}\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.2. Die erste Differenz von einem Produkt bzw. Quotient entspricht daher der „Produktregel“ bzw. „Quotientenregel“, die aus der Analysis bekannt sind. Man beachte dabei das Auftreten des Shiftoperators **E** in Lemma 1.3.

Satz 1.4. *Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und q ein Polynom vom Grad m, und seien $a, b \in \mathbb{K}\backslash_{\{0\}}$. Es existiert dann ein Polynom r mit $(E - aI)(q(k)b^k) = r(k)b^k$, für das gilt*

$$grad(r) = \begin{cases} m-1 & \text{für } a = b\\ m & \text{für } a \neq b\end{cases}.$$

(*Dabei verstehen wir hier unter einem Polynom vom Grad* -1 *das Nullpolynom*).

Beweis. Sei das Polynom $q(k) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i k^i$ mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$ und $a_m \neq 0$ gegeben. Dann unterscheiden wir zwischen folgenden drei Fällen:

1. Fall: $m = 0$ und $a = b$.

$$(E - aI)(q(k)b^k) = (E - aI)(a_0 a^k) = a_0 a^{k+1} - a a_0 a^k = 0$$

2. Fall: $m > 0$ und $a = b$.
Dann gilt

$$
\begin{aligned}
(E - aI)(q(k)b^k) =& (E - aI)(a^k \sum_{i=0}^{m} a_i k^i) \\
=& a^{k+1} \sum_{i=0}^{m} a_i (k+1)^i - a^{k+1} \sum_{i=0}^{m} a_i k^i \\
=& a^{k+1} \left(\sum_{i=0}^{m} a_i \big((k+1)^i - k^i \big) \right) \\
=& a^{k+1} \left(\sum_{i=0}^{m-1} b_i k^i \right) \\
=& \left(\sum_{i=0}^{m-1} a b_i k^i \right) a^k = r(k) b^k
\end{aligned}
$$

für bestimmte $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1} \in \mathbb{K}$. Dabei ist r ein Polynom vom Grad $m-1$.

3. Fall: $a \neq b$.
Dann gilt

$$
\begin{aligned}
(E - aI)(q(k)b^k) =& (E - aI)(b^k \sum_{i=0}^{m} a_i k^i) \\
=& b^{k+1} \sum_{i=0}^{m} a_i (k+1)^i - a b^k \sum_{i=0}^{m} a_i k^i \\
=& b^k \sum_{i=0}^{m} \left(b a_i (k+1)^i - a a_i k^i \right) \\
=& b^k \left(b a_m k^m - a a_m k^m + \sum_{i=0}^{m-1} c_i k^i \right) \\
=& \left((b-a) a_m k^m + \sum_{i=0}^{m-1} c_i k^i \right) b^k = r(k) b^k
\end{aligned}
$$

für bestimmte $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1} \in \mathbb{K}$. Dabei ist r ein Polynom vom Grad m. □

Korollar 1.5. *Seien $n, m \in \mathbb{N}$, und sei $p(k)$ ein Polynom in k vom Grad m. Dann folgt*

a) $\Delta p(k)$ ist ein Polynom vom Grad $m-1$.

b) $\Delta^n p(k) = 0$ falls $n > m$.

1.2 Power Shift

Lemma 1.6. *Sei $a \in \mathbb{K}$, $l \in \mathbb{N}$ und $q(E) = \sum_{i=0}^{l} c_i E^i$ ein Polynom in E vom Grad l. Dann gilt*

$$q(E)a^k = a^k q(a).$$

Beweis.

$$q(E)a^k = \Big(\sum_{i=0}^{l} c_i E^i\Big)a^k = \sum_{i=0}^{l} c_i a^{k+i} = a^k \sum_{i=0}^{l} c_i a^i = a^k q(a)$$

□

Satz 1.7. *Sei $q(E)$ wie in Lemma 1.6 definiert und $g(k)$ eine beliebige unendliche Folge. Dann gilt*

$$q(E)(a^k g(k)) = a^k q(aE) g(k).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} q(E)(a^k g(k)) &= \Big(\sum_{i=0}^{l} c_i E^i\Big)(a^k g(k)) = \sum_{i=0}^{l} c_i a^{k+i} g(k+i) \\ &= a^k \sum_{i=0}^{l} c_i a^i g(k+i) = a^k \sum_{i=0}^{l} c_i a^i E^i g(k) \\ &= a^k q(aE) g(k) \end{aligned}$$

□

1.3 Faktorielle Polynome

Definition 1.5. Sei $a \in \mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die *n-te Fakultätenfunktion von y* gegeben durch

$$a^{(n)} = \begin{cases} a(a-1) \cdot \ldots \cdot (a-n+1) & \text{für } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

Lemma 1.8. *Sei $a \in \mathbb{K}$, und seien $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten folgende Aussagen*

a) $\Delta a^{(n)} = n a^{(n-1)}$

b) $\Delta^i a^{(n)} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-i+1) a^{(n-i)}$

für alle $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. a)

$$\begin{aligned}\Delta a^{(n)} =&(a+1)^{(n)} - a^{(n)}\\ =&(a+1)a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+2)\\ &-a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+2)(a-n+1)\\ =&[a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+2)]\cdot n\\ =&n\cdot a^{(n-1)}\end{aligned}$$

b) Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion nach i. Für $i = 0$ ist die Aussage trivial. Sei die Behauptung für ein $i < n-1$ erfüllt. Dann folgt

$$\begin{aligned}\Delta^{i+1}a^{(n)} =&\Delta(\Delta^i a^{(n)})\\ =&\Delta(n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)a^{(n-i)})\\ =&n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)[\Delta a^{(n-i)}]\\ =&n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)(n-i)a^{(n-i-1)}.\end{aligned}$$

□

1.4 Differenzengleichungen

Definition 1.6. Eine *Differenzengleichung* ist eine Beziehung zwischen einer unabhängigen Variablen k, einer Folge y in k und einer oder mehrerer ihrer Differenzen $\Delta y(k)$, $\Delta^2 y(k)$, ...
Eine *Differenzengleichung in impliziter Form* ist eine Gleichung der Form

$$F(k, y(k), \Delta y(k), \Delta^2 y(k), \ldots, \Delta^n y(k)) = 0 \tag{1.4}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $F : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$.
Betrachtet man die Beziehung (1.3), so kann die Differenzengleichung (1.4) dargestellt werden als Beziehung zwischen einer unabhängigen Variablen k und verschiedenen Folgengliedern der Folge $(y(k))$. Die Differenzengleichung (1.4) kann also geschrieben werden als

$$F_1(k, y(k), y(k+1), y(k+2), \ldots, y(k+n)) = 0 \tag{1.5}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $F_1 : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$.

Eine Differenzengleichung ist in *expliziter Darstellung* gegeben, falls sie die Form

$$y(k+n) = G(k, y(k), y(k+1), \ldots, y(k+n-1)) \tag{1.6}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $G : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ hat.

Definition 1.7. Eine Folge $(b(k)) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ von Elementen aus $\mathbb{K}$ heißt eine Lösung von (1.5) bzw. (1.6) genau dann, wenn

$$F_1(k, b(k), b(k+1), \ldots, b(k+n)) = 0$$

oder

$$b(k+n) = G(k, b(k), b(k+1), \ldots, b(k+n-1))$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist.

Satz 1.9 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differenzengleichungen in expliziter Form)**.** *Ist* $(a(0), \ldots, a(n-1)) \in \mathbb{K}^n$ *gegeben, dann existiert genau eine Lösung* $(b(k))$ *von (1.6), die* $(b(0), \ldots, b(n-1)) = (a(0), \ldots, a(n-1))$ *erfüllt. Die Lösung ist gegeben durch*

$$b(k) = \begin{cases} a(k) & \textit{für } k < n \\ G(k-n, b(k-n), b(k-n-1), \ldots, b(k-1)) & \textit{sonst} \end{cases}$$

Beweis. Folgt durch vollständige Induktion. □

Definition 1.8. Eine Differenzengleichung der Form (1.5) bzw. (1.6) hat die Ordnung $n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn die Differenz zwischen dem größten und kleinsten wirklich vorkommenden Argument n ist.

Definition 1.9. Eine Differenzengleichung der Ordnung n heißt *linear*, wenn sie in folgender Form geschrieben werden kann:

$$p_n(k)y(k+n) + p_{n-1}(k)y(k+n-1) + \cdots + p_0(k)y(k) = g(k) \tag{1.7}$$

Wir setzen dabei $p_n(k) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ voraus. Zwischen folgenden linearen Differenzengleichungen lässt sich unterscheiden. Man spricht von einer

- *homogenen linearen Differenzengleichung* $:\Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0 : g(k) = 0$
- *inhomogenen linearen Differenzengleichung* $:\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : g(k) \neq 0$
- *linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten* $:\Longleftrightarrow p_0, p_1, \ldots, p_n$ sind konstant

Kapitel 2

Lineare Differenzengleichungen erster Ordnung

Eine lineare homogene Differenzengleichung erster Ordnung in impliziter Form hat die Gestalt

$$p_0(k)y(k+1) + p_1(k)y(k) = 0. \tag{2.1}$$

Wir setzten $p_0(k) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ voraus. Dann erhalten wir durch Umformung der Gleichung (2.1) die explizite Darstellung

$$y(k+1) = -\frac{p_1(k)}{p_0(k)}y(k) = a(k)y(k).$$

2.1 Homogene lineare Differenzengleichungen erster Ordnung

Definition 2.1. Eine *homogene lineare Differenzengleichung erster Ordnung in expliziter Form* ist eine Gleichung der Form

$$y(k+1) = a(k)y(k) \tag{2.2}$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$.

Angenommen $y(0)$ ist durch eine beliebige Konstante $C \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann lässt sich die Lösung von (2.2) schrittweise berechnen:

$$\begin{aligned}
y(1) =& a(0)C \\
y(2) =& a(1)y(1) = a(1)a(0)C \\
y(3) =& a(2)y(2) = a(2)a(1)a(0)C \\
y(4) =& a(3)y(3) = a(3)a(2)a(1)a(0)C
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir durch sukzessive Substitution die Lösung der homogenen linearen Differenzengleichung (2.2).

Satz 2.1. *Die Differenzengleichung* (2.2) *hat die Lösung*

$$y(k) = y(0) \prod_{i=0}^{k-1} a(i) \tag{2.3}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$*, wobei das leere Produkt als* 1 *interpretiert wird.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach k. Sei $k = 0$. Dann ist das leere Produkt gleich 1, und die Formel (2.3) ist korrekt. Sei die Behauptung für ein beliebiges aber festes $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt. Dann folgt die Gültigkeit für $k + 1$:

$$y(k+1) = a(k)y(k) = a(k)y(0) \prod_{i=0}^{k-1} a(i) = y(0) \prod_{i=0}^{k} a(i).$$

□

Einen Spezialfall von homogenen linearen Differenzengleichungen erster Ordnung bilden die *homogenen linearen Differenzengleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten* in expiziter Form, gegeben durch

$$y(k+1) = ay(k) \tag{2.4}$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$.

Korollar 2.2. *Eine homogene lineare Differenzengleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten in expliziter Form* (2.4) *hat die Lösung*

$$y(k) = y(0)a^k \tag{2.5}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$.

2.2 Inhomogene lineare Differenzengleichungen erster Ordnung

Definition 2.2. Eine *inhomogene lineare Differenzengleichung erster Ordnung* in expiziter Form ist eine Gleichung der Form

$$y(k+1) = a(k)y(k) + b(k), \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{2.6}$$

mit $(a(k)), (b(k)) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} \backslash_{\{\mathbf{0}\}}$. Die Differenzengleichung

$$y(k+1) = a(k)y(k), \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{2.7}$$

heißt die zu (2.6) dazugehörige homogene lineare Differenzengleichung erster Ordnung.

Angenommen $y(0)$ ist durch eine beliebige Konstante $C \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann lässt sich die Lösung von (2.6) wie im homogenen Fall schrittweise berechnen:

$$\begin{aligned}
y(1) &= a(0)C + b(0) \\
y(2) &= a(1)y(1) + b(1) = a(1)(a(0)C + b(0)) + b(1) \\
&= a(0)a(1)C + a(1)b(0) + b(1) \\
y(3) &= a(2)y(2) + b(2) = a(2)(a(0)a(1)C + a(1)b(0) + b(1)) + b(2) = \\
&= a(0)a(1)a(2)C + a(1)a(2)b(0) + a(2)b(1) + b(2) \\
y(4) &= a(3)y(3) + b(3) \\
&= a(3)(a(0)a(1)a(2)C + a(1)a(2)b(0) + a(2)b(1) + b(2)) + b(3) = \\
&= a(0)a(1)a(2)a(3)C + a(1)a(2)a(3)b(0) + a(2)a(3)b(1) + a(3)b(2) + b(3) \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir durch sukzessive Substitution die Lösung der inhomogenen linearen Differenzengleichung (2.6).

Satz 2.3. *Die inhomogene lineare Differenzengleichung* (2.6) *hat die Lösung*

$$y(k) = y(0) \prod_{i=0}^{k-1} a(i) + \sum_{j=0}^{k-1} b(j) \prod_{i=j+1}^{k-1} a(i) \tag{2.8}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$, wobei die leere Summe bzw. das leere Produkt als 0 *bzw.* 1 *interpretiert werden.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach k. Sei $k = 0$. Dann ist die leere Summe gleich 0 und das leere Produkt gleich 1, und die Formel (2.8) ist korrekt.
Sei die Behauptung für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt. Dann folgt die Gültigkeit für $k+1$:

$$\begin{aligned}
y(k+1) = a(k)y(k) + b(k) &= a(k)\big(y(0) \prod_{i=0}^{k-1} a(i) + \sum_{j=0}^{k-1} b(j) \prod_{i=j+1}^{k-1} a(i)\big) + b(k) \\
&= y(0) \prod_{i=0}^{k} a(i) + \sum_{j=0}^{k} b(j) \prod_{i=j+1}^{k} a(i).
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 2.4. *Wir betrachten zwei Spezialfälle von inhomogenen linearen Differenzengleichungen (2.6).*

a) *Eine inhomogene lineare Differenzengleichung erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten in expliziter Form hat die Darstellung*

$$y(k+1) = ay(k) + b(k), \tag{2.9}$$

und die Lösung ist gegeben durch

$$y(k) = y(0)a^k + \sum_{j=0}^{k-1} b(j)a^{k-j-1}.$$

b) *Eine inhomogene lineare Differenzengleichung erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten und konstanter Inhomogenität in expliziter Form hat die Darstellung*

$$y(k+1) = ay(k) + b, \tag{2.10}$$

und die Lösung ist gegeben durch

$$y(k) = \begin{cases} y(0) \cdot a^k + b(1-a^k)/(1-a) & \textit{falls } a \neq 1 \\ y(0) + bk & \textit{falls } a = 1 \end{cases}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Wir verwenden Satz 2.3.

a) Sei $a(k) = a$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\prod_{i=0}^{k-1} a(i) = a^k$ und $\prod_{i=j+1}^{k-1} a(i) = a^{k-j-1}$.

b) Sei $a(k) = a$ und $b(k) = b$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\sum_{j=0}^{k-1} b(j)a^{k-j-1} = b \cdot \sum_{j=0}^{k-1} a^j = \begin{cases} b(1-a^k)/(1-a) & \text{falls } a \neq 1 \\ bk & \text{falls } a = 1 \end{cases},$$

woraus folgt

$$y(k) = \begin{cases} y(0) \cdot a^k + b(1-a^k)/(1-a) & \text{falls } a \neq 1 \\ y(0) + bk & \text{falls } a = 1 \end{cases}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$.

□

Korollar 2.5. *Zusammengefasst erhalten wir somit für die Lösung* $(y(k))$ *einer inhomogenen linearen Differenzengleichung erster Ordnung* (2.6) *mit* $y(0) = C$*:*

$$y(k) = \begin{cases} C \prod\limits_{i=0}^{k-1} a(i) + \sum\limits_{j=0}^{k-1} b(j) \prod\limits_{i=j+1}^{k-1} a(i) & \\ Ca^k + \sum\limits_{j=0}^{k-1} b(j)a^{k-j-1} & \textit{wenn } a(k) = a \, \forall k \in \mathbb{N}_0 \\ C \prod\limits_{i=0}^{k-1} a(i) + b \sum\limits_{j=0}^{k-1} \prod\limits_{i=j+1}^{k-1} a(i) & \textit{wenn } b(k) = b \, \forall k \in \mathbb{N}_0 \\ Ca^k + b(1-a^k)/(1-a) & \textit{wenn } (a(k), b(k)) = (a,b) \, \forall k \in \mathbb{N}_0 \textit{ und } a \neq 1 \\ C + bk & \textit{wenn } (a(k), b(k)) = (a,b) \, \forall k \in \mathbb{N}_0 \textit{ und } a = 1 \end{cases}$$

Diese Formeln werden aufgrund ihrer komplizierten Handhabung in der Praxis aber nicht verwendet, weshalb man stattdessen folgendermaßen vorgeht:

Die allgemeine Lösung $(y(k))$ der inhomogenen linearen Differenzengleichung (2.6) bekommt man durch Addition der allgemeinen Lösung $(y^{(h)}(k))$ von (2.7) und einer partikulären (speziellen) Lösung $(y^{(p)}(k))$ von (2.6), d.h. $(y(k)) = (y^{(h)}(k)) + (y^{(p)}(k))$. Daher vereinfacht sich die Bestimmung aller Lösungen von (2.6) in zwei leichtere Problemstellungen:

a) Bestimme alle Lösungen der dazugehörigen homogenen Gleichung (2.7).

b) Bestimme eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (2.6).

Alle Lösungen der dazugehörigen homogenen linearen Differenzengleichung (2.7) sind durch Satz 2.1 bestimmt.

$$(y^{(h)}(k)) = C \prod_{i=0}^{k-1} a(i), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.11}$$

Um eine partikuläre Lösung $(y^{(p)}(k))$ zu bestimmen, verwenden wir den Ansatz von LAGRANGE, die sogenannte *Methode der Variation der Konstanten.* Für die Methode der Variation der Konstanten nimmt man den homogenen Ansatz (2.11) her und ersetzt C durch eine Folge $(C(k))_{k\in\mathbb{N}_0} = (C(0), C(1), C(2), \dots)$. Der partikuläre Ansatz hat dann die Form:

$$(y^{(p)}(k)) = C(k) \prod_{i=0}^{k-1} a(i), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Da $(y^{(p)}(k))$ als partikuläre Lösung die inhomogene lineare Differenzengleichung (2.6) erfüllt, können wir den partikulären Ansatz $(y^{(p)}(k))$ in die Gleichung (2.6) einsetzen, um dann $C(k)$ zu bestimmen.

$$\begin{aligned} C(k+1) \prod_{i=0}^{k} a(i) &= a(k)C(k) \prod_{i=0}^{k-1} a(i) + b(k) \\ (C(k+1) - C(k)) \prod_{i=0}^{k} a(i) &= b(k) \qquad (2.12) \\ \Delta C(k) &= \frac{b(k)}{\prod\limits_{i=0}^{k} a(i)} \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt wird $a(i) \neq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ vorausgesetzt.

Aus $\Delta C(k) = C(k+1) - C(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ folgt

$$\begin{aligned}
C(1) &= C(0) + \Delta C(0) \\
C(2) &= C(1) + \Delta C(1) = C(0) + \Delta C(0) + \Delta C(1) \\
C(3) &= C(2) + \Delta C(2) = C(0) + \Delta C(0) + \Delta C(1) + \Delta C(2) \\
&\vdots \\
C(k) &= C(k-1) + \Delta C(k-1) = C(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Delta C(j),
\end{aligned} \tag{2.13}$$

und wir erhalten nach Einsetzen von (2.12) in (2.13):

$$C(k) = C(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{b(j)}{\prod\limits_{i=0}^{j} a(i)}.$$

Da wir nur an einer partikulären Lösung von (2.6) interessiert sind, können wir das einfachste $C(0)$ wählen.
Sei $C(0) = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(y^{(p)}(k)) &= (\sum_{j=0}^{k-1} \frac{b(j)}{\prod\limits_{i=0}^{j} a(i)}) \prod_{i=0}^{k-1} a(i) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} b(j) \prod_{i=j+1}^{k-1} a(i)
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die letzte Formel stimmt auch dann, wenn nicht alle $a(i) \neq 0$ sind.
Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differenzengleichung der Form (2.6) ist dann gegeben durch $(y(k)) = (y^{(h)}(k)) + (y^{(p)}(k))$, d.h.

$$y(k) = C \prod_{i=0}^{k-1} a(i) + \sum_{j=0}^{k-1} b(j) \prod_{i=j+1}^{k-1} a(i) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Somit stimmt das Ergebnis mit dem in Korollar 2.5 schon gezeigten überein.

2.3 Anwendungen von Differenzengleichungen erster Ordnung: Populationsmodelle

2.3.1 Geometrisches Wachstum getrennter Populationen

Eines der einfachsten Modelle für das Wachstum einer Population erhält man durch folgende Annahmen:

(a) Jedes fortpflanzungsfähige Individuum erzeugt pro Generationsschritt die gleiche Anzahl R von Nachkommen.
(b) Die Generationen sind *getrennt*, d.h. die Elterngeneration ist ausgestorben, sobald die Tochtergeneration fortpflanzungsfähig wird.

Wir bezeichnen die Anzahl der fortpflanzungsfähigen Individuen in der k-ten Generation mit $X(k)$. Dann besteht zwischen zwei aufeinanderfolgenden Generationen folgender Zusammenhang

$$X(k+1) = R \cdot X(k), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.14}$$

Die Lösung dieser linearen homogenen Differenzengleichung erster Ordnung ist nach Korollar 2.2

$$X(k) = R^k \cdot X(0), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.15}$$

Man sieht leicht, dass das asymptotische Verhalten der Populationsgröße mit der Zeit nur von der Wahl der *Reproduktionsrate* R abhängt. Nun kann man das qualitative Verhalten der Population im Modell in Abhängigkeit von der konstanten *Reproduktionsrate* R vorhersagen.

$$\lim_{k\to\infty} X(k) = \begin{cases} \infty & \text{für } R > 1 \\ X(0) & \text{für } R = 1 \\ 0 & \text{für } R < 1 \end{cases} \tag{2.16}$$

2.3.2 Geometrisches Wachstum nicht getrennter Populationen

Sind die Generationen nicht getrennt, dann müssen wir die Gleichung (2.14) entsprechend ändern. Wir treffen folgende Annahmen für dieses Modell:
(a) Die Generationen sind *nicht getrennt*, d.h. die Elterngeneration ist *nicht ausgestorben*, wenn die Tochtergeneration fortpflanzungsfähig wird.
(b) Die Reproduktionsrate R ist konstant, d.h. die Reproduktionsrate ist generationsunabhängig, und jedes Individuum erzeugt pro Generationsschritt die gleiche Anzahl R an Nachkommen .

Die Reproduktionsrate R kann man in diesem Modell auch als *Rate des natürlichen Populationswachstums* deuten, d.h. R resultiert aus der Differenz der Geburten- und Sterberate pro Zeiteinheit im Modell. Bezeichnen wir mit $Y(k)$ die Anzahl der fortpflanzungsfähigen Individuen zum Zeitpunkt k, dann gilt für $Y(k+1)$:

$$Y(k+1) = Y(k) + R \cdot Y(k) = (1+R)Y(k), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.17}$$

Mit dem *Wachstumsfaktor* $\lambda = 1 + R$ erhalten wir für die lineare Differenzengleichung (2.17) die zu (2.15) analoge Lösung

$$Y(k) = (1+R)^k \cdot Y(0) = \lambda^k \cdot Y(0), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Kapitel 3

Lineare Differenzengleichungen höherer Ordnung

In den folgenden Kapiteln werden wir uns der formalen Definition 1.1 bedienen und unendliche Folgen mit Abbildungen identifizieren. Falls kein Anlass zu Verwechslungen besteht, schreiben wir statt der unendlichen Folge $(x(k))_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ kurz $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ und für einzelne Folgenglieder $x(k)$.

3.1 Homogene lineare Differenzengleichungen höherer Ordnung

Definition 3.1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist eine *homogene lineare Differenzengleichung der Ordnung* n eine Differenzengleichung der Form

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(k)y(k+i) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{3.1}$$

mit $p_0(k), \dots, p_n(k) \in \mathbb{K}$, $p_n(k) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $p_0(k) \neq 0$ für mindestens ein $k \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung 3.1. Wegen $p_n(k) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ kann die Gleichung (3.1) o.B.d.A. „normiert“ werden. Daher setzen wir im Folgenden $p_n(k) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ voraus. Die Differenzengleichung (3.1) kann somit in expliziter Form dargestellt werden.

$$y(k+n) = -\sum_{i=0}^{n-1} p_i(k)y(k+i), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Sind n aufeinanderfolgende Anfangswerte gegeben, so gilt laut Satz 1.9 die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (3.1) zu einer vorgegebenen

Anfangsbedingung $(y(0), \ldots, y(n-1)) = (a(0), \ldots, a(n-1)) \in \mathbb{K}^n$. Laut Definition 1.2 bildet die Menge aller unendlichen Folgen $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ einen Vektorraum über $\mathbb{K}$. Somit können wir Folgendes definieren:

Definition 3.2. Sei $m \in \mathbb{N}$. Die unendlichen Folgen $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ heißen *linear abhängig* über $\mathbb{K}$, wenn es ein $(c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{K}^m \backslash_{\{(0,\ldots,0)\}}$ gibt, sodass gilt

$$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Andernfalls heißen $u_1, \ldots, u_m$ *linear unabhängig.*

Lemma 3.1. *Sind u_1, $u_2 \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ zwei Lösungen von (3.1) und ist $a \in \mathbb{K}$ eine beliebige Konstante, dann gelten folgende Aussagen*

a) $\boldsymbol{0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ *ist eine Lösung von (3.1).*

b) $u = u_1 + u_2$ *ist eine Lösung von (3.1).*

c) $\tilde{u} = au_1$ *ist eine Lösung von (3.1).*

Beweis. a) $\mathbf{0}$ ist eine triviale Lösung von (3.1).

b)

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} p_i(k)u(k+i) &= \sum_{i=0}^{n} p_i(k)[u_1(k+i) + u_2(k+i)] \\ &= \sum_{i=0}^{n} p_i(k)u_1(k+i) + \sum_{i=0}^{n} p_i(k)u_2(k+i) \\ &= 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} p_i(k)\tilde{u}(k+i) &= \sum_{i=0}^{n} p_i(k)au_1(k+i) \\ &= a\sum_{i=0}^{n} p_i(k)u_1(k+i) \\ &= a \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.2. Lemma 3.1 besagt, dass die Menge aller Lösungen einer linearen homogenen Differenzengleichung nichtleer und abgeschlossen bezüglich der Addition und skalarer Multiplikation ist. Somit ist die Lösungsmenge von (3.1) ein linearer Teilraum des Vektorraums $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}, +, \cdot)$.

Satz 3.2. *Sind $u_1, u_2, \dots, u_r \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ Lösungen von (3.1) und ist u eine beliebige Linearkombination von $u_1, u_2, \dots, u_r$ mit Koeffizienten $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{K}$, d.h.*

$$u(k) = \sum_{i=1}^{r} a_i u_i(k), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

so löst auch u die lineare homogene Differenzengleichung (3.1).

Beweis. Folgt direkt aus Bemerkung 3.2 □

Satz 3.3. *Die Menge aller Lösungen einer homogenen linearen Differenzengleichung (3.1) der Ordnung n bildet einen n-dimensionalen Unterraum von $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}, +, \cdot)$, den sogenannten Lösungsraum von (3.1).*

Beweis. Sei δ_{ik} das *Kronecker-Delta*[1]. Dann existieren laut Satz 1.9 eindeutige Lösungen u_i für $i = 0, \dots, n-1$ von (3.1), welche die Bedingungen $u_i(k) = \delta_{ik}$ für $k = 0, \dots, n-1$ erfüllen. Für beliebige, aber feste $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ ist die Folge

$$u(k) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i u_i(k) \right)$$

dann die eindeutige Lösung von (3.1), die $u(k) = a_k$ für $k = 0, \dots, n-1$ erfüllt. Somit spannen die Folgen $u_0, u_1 \dots, u_{n-1}$ den linearen Teilraum aller Lösungen von (3.1) auf. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $u_0, u_1 \dots, u_{n-1}$ bilden sie eine Basis des Lösungsraums von (3.1). □

Definition 3.3. Seien $u_1, u_2, \dots, u_n$ linear unabhängige Lösungen von (3.1). Dann ist die Menge $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ eine Basis des n-dimensionalen Lösungsraums von (3.1) und heißt ein *Fundamentalsystem* von (3.1).

Da die lineare Abhängigkeit nicht einfach aus der Definition kontrolliert werden kann, benötigt man ein einfaches Kriterium. Dazu definieren wir folgende Matrix:

Definition 3.4. Sei $j \in \mathbb{N}_0$, und seien $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$. Die Matrix

$$C_j(u_1, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} u_1(j) & \cdots & u_n(j) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(j+n-1) & \cdots & u_n(j+n-1) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

heißt die j-te *Casorati-Matrix* von $u_1, \dots, u_n$.
Die Determinante $|C_j(u_1, \dots, u_n)|$ heißt die j-te *Casorati-Determinante* von $u_1, \dots, u_n$.

[1] $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$

Lemma 3.4 (**Abels Lemma**). *Sei $j \in \mathbb{N}_0$, seien $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ Lösungen von (3.1), gelte $p_n(k) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und bezeichne $C_j(u_1, \dots, u_n)$ ihre j-te Casorati-Matrix. Dann gilt*

$$|C_{j+1}(u_1, \dots, u_n)| = (-1)^n p_0(j) |C_j(u_1, \dots, u_n)|. \tag{3.3}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
|C_{j+1}(u_1, \dots, u_n)| &= \begin{vmatrix} u_1(j+1) & \cdots & u_n(j+1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(j+n) & \cdots & u_n(j+n) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} u_1(j+1) & \cdots & u_n(j+1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(j+n-1) & \cdots & u_n(j+n-1) \\ -\sum\limits_{i=0}^{n-1} p_i(j) u_1(j+i) & \cdots & -\sum\limits_{i=0}^{n-1} p_i(j) u_n(j+i) \end{vmatrix} \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} p_i(j) \cdot \begin{vmatrix} u_1(j+1) & \cdots & u_n(j+1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(j+n-1) & \cdots & u_n(j+n-1) \\ u_1(j+i) & \cdots & u_n(j+i) \end{vmatrix} \\
&= -\, p_0(j) \cdot \begin{vmatrix} u_1(j+1) & \cdots & u_n(j+1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(j+n-1) & \cdots & u_n(j+n-1) \\ u_1(j) & \cdots & u_n(j) \end{vmatrix} \\
&= -\, (-1)^{n-1} p_0(j) \cdot \begin{vmatrix} u_1(j) & \cdots & u_n(j) \\ u_1(j+1) & \cdots & u_n(j+1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(j+n-1) & \cdots & u_n(j+n-1) \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n p_0(j) |C_j(u_1, \dots, u_n)|
\end{aligned}$$

□

Korollar 3.5. *Sei $j \in \mathbb{N}_0$ und $p_0(k) \neq 0$ für alle $k < j$. Dann gilt für die j-te Casorati-Determinante:*

$$|C_j(u_1, \dots, u_n)| \neq 0 \Leftrightarrow |C_0(u_1, \dots, u_n)| \neq 0$$

Beweis. Aus Abels Lemma 3.4 folgt durch sukzessives Einsetzen

$$\begin{aligned}|C_j(u_1,\ldots,u_n)| &= (-1)^n p_0(j-1)|C_{j-1}(u_1,\ldots,u_n)|\\ &= (-1)^{2n} p_0(j-1)p_0(j-2)|C_{j-2}(u_1,\ldots,u_n)|\\ &\vdots\\ &= (-1)^{jn}\prod_{k=0}^{j-1} p_0(k)|C_0(u_1,\ldots,u_n)|.\end{aligned}$$

□

Lemma 3.6. *Sei $j \in \mathbb{N}_0$, seien $u_1,\ldots,u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$, und gelte $|C_j(u_1,\ldots,u_n)| \neq 0$. Dann sind die unendlichen Folgen $u_1,\ldots,u_n$ linear unabhängig.*

Beweis. Angenommen $u_1,\ldots,u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ sind linear abhängig, dann verschwindet die Casorati-Determinante überall, d.h. $|C_j(u_1,\ldots,u_n)| = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. □

Satz 3.7. *Sei $j \in \mathbb{N}_0$, seien $u_1,\ldots,u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ Lösungen von (3.1) und $p_0(0),\ldots,p_0(j-1) \neq 0$, gelte $p_n(k) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und sei $|C_j(u_1,\ldots,u_n)| = 0$. Dann sind die Lösungen $u_1,\ldots,u_n$ linear abhängig.*

Beweis. Wegen $|C_j(u_1,\ldots,u_n)| = 0$ existiert ein $(c_1,\ldots,c_n) \in \mathbb{K}^n\backslash_{\{(0,\ldots,0)\}}$ mit

$$\sum_{i=1}^n c_i \begin{pmatrix} u_i(j)\\ \vdots \\ u_i(j+n-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

Zu zeigen ist $\sum\limits_{i=1}^n c_i u_i(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
Laut Voraussetzung sind $u_1,\ldots,u_n$ Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichung (3.1). Angenommen $j > 0$. Dann gilt

$$\sum_{l=0}^n p_l(j-1)u_i(j-1+l) = 0$$

$$p_0(j-1)u_i(j-1) = -\sum_{l=1}^n p_l(j-1)u_i(j-1+l)$$

$$u_i(j-1) = -\sum_{l=1}^n \frac{p_l(j-1)}{p_0(j-1)}u_i(j-1+l)$$

für $i = 1, \ldots, n$, woraus folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(j-1) &= -\sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{l=1}^{n} \frac{p_l(j-1)}{p_0(j-1)} u_i(j-1+l) \\ &= -\sum_{l=1}^{n} \frac{p_l(j-1)}{p_0(j-1)} \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(j-1+l) \\ &= -\sum_{l=1}^{n} \frac{p_l(j-1)}{p_0(j-1)} \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Setzt man dies weiter nach unten fort, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(k) = 0 \qquad \text{für } k < j.$$

Analog setzen wir nach oben fort, denn es gilt

$$u_i(j+n) = -\sum_{l=0}^{n-1} p_l(j) u_i(j+l)$$

für $i = 1, \ldots, n$, woraus folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(j+n) &= -\sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{l=0}^{n-1} p_l(j) u_i(j+l) \\ &= -\sum_{l=0}^{n-1} p_l(j) \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(j+l) \\ &= -\sum_{l=0}^{n-1} p_l(j) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Setzt man dies weiter nach oben fort, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(k) = 0 \qquad \text{für } k > j+n-1,$$

und wir erhalten insgesamt

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(k) = 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

□

Korollar 3.8. *Sind $u_1, \ldots, u_n$ Lösungen von (3.1), dann bildet $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ein Fundamentalsystem von (3.1) genau dann, wenn $|C_0(u_1, \ldots, u_n)| \neq 0$.*

Beweis. Folgt aus Lemma 3.6 und Satz 3.7. □

3.2 Inhomogene lineare Differenzengleichungen höherer Ordnung

Definition 3.5. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist eine *inhomogene lineare Differenzengleichung der Ordnung* n eine Differenzengleichung der Form

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(k)y(k+i) = b(k), \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{3.4}$$

mit $p_0(k), \dots, p_n(k), b(k) \in \mathbb{K}$, $b(k) \neq 0$ für mindestens ein $k \in \mathbb{N}_0$, $p_0(k) \neq 0$ für mindestens ein $k \in \mathbb{N}_0$, und $p_n(k) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. O.B.d.A. können wir dabei annehmen, dass (3.4) „normiert" ist, d.h. $p_n(k) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die Differenzengleichung

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(k)y(k+i) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.5}$$

bezeichnet die zu (3.4) *gehörige homogene lineare Differenzengleichung.*

Wie bei inhomogenen linearen Differenzengleichungen erster Ordnung, kann die allgemeine Lösung $(y(k))$ von (3.4) durch Addition der allgemeinen Lösung $(y^{(h)}(k))$ von (3.5) und einer partikulären Lösung $(y^{(p)}(k))$ von (3.4) bestimmt werden, d.h. $(y(k)) = (y^{(h)}(k)) + (y^{(p)}(k))$.

Satz 3.9 (Methode der Variation der Konstanten)**.** *Seien $u_1, \dots, u_n$ Lösungen von (3.5) und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ mit*

$$\begin{pmatrix} u_1(k+1) & \dots & u_n(k+1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(k+n-1) & \dots & u_n(k+n-1) \\ u_1(k+n) & \dots & u_n(k+n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_1(k) \\ \vdots \\ \Delta c_{n-1}(k) \\ \Delta c_n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(k) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(k) u_i(k) \right)$$

eine Lösung von (3.4).

Beweis. (3.6) kann geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} E^0 u_1(k+1) & \dots & E^0 u_n(k+1) \\ \vdots & & \vdots \\ E^{n-2} u_1(k+1) & \dots & E^{n-2} u_n(k+1) \\ E^{n-1} u_1(k+1) & \dots & E^{n-1} u_n(k+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_1(k) \\ \vdots \\ \Delta c_{n-1}(k) \\ \Delta c_n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(k) \end{pmatrix}.$$

Nach Anwendung von

$$\Delta^i = (E-I)^i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} E^j$$

für $i = 0, \dots, n-1$ folgt die Darstellung

$$\begin{pmatrix} \Delta^0 u_1(k+1) & \dots & \Delta^0 u_n(k+1) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^{n-2} u_1(k+1) & \dots & \Delta^{n-2} u_n(k+1) \\ \Delta^{n-1} u_1(k+1) & \dots & \Delta^{n-1} u_n(k+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_1(k) \\ \vdots \\ \Delta c_{n-1}(k) \\ \Delta c_n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(k) \end{pmatrix}.$$

Setzt man

$$c(k) := \sum_{i=1}^{n} c_i(k) u_i(k)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, dann gilt für die erste Differenz

$$\begin{aligned} \Delta c_k = \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(k) u_i(k) \right) &= \sum_{i=1}^{n} c_i(k) \Delta u_i(k) + \sum_{i=1}^{n} u_i(k+1) \Delta c_i(k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i(k) \Delta u_i(k), \end{aligned}$$

und aus Lemma 1.3a) folgt für die zweite Differenz

$$\begin{aligned} \Delta^2 c_k = \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(k) \Delta u_i(k) \right) &= \sum_{i=1}^{n} c_i(k) \Delta^2 u_i(k) + \sum_{i=1}^{n} (\Delta u_i(k+1))(\Delta c_i(k)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i(k) \Delta^2 u_i(k). \end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten wir dann schließlich

$$\Delta^{n-1} c(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i(k) \Delta^{n-1} u_i(k),$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \Delta^n c(k) = \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(k) \Delta^{n-1} u_i(k) \right) &= \sum_{i=1}^{n} c_i(k) \Delta^n u_i(k) + \sum_{i=1}^{n} (\Delta^{n-1} u_i(k+1))(\Delta c_i(k)) \\ &= b(k) + \sum_{i=1}^{n} c_i(k) \Delta^n u_i(k). \end{aligned}$$

Nun kann die linke Seite der Gleichung (3.5) in folgender Form geschrieben werden

$$\left(\sum_{i=0}^{n} p_i(k) E^i \right) y(k)$$

oder nach Anwendung von

$$E^i = (\Delta + I)^i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \Delta^j$$

für $i = 0, \ldots, n$ auf die Form

$$\left(\sum_{i=0}^{n} d_i(k) \Delta^i \right) y(k)$$

mit entsprechenden $d_0, \ldots, d_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ und $d_n(k) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gebracht werden. Somit gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{n} d_i(k) \Delta^i \right) c(k) &= \sum_{i=0}^{n} d_i(k) \Delta^i c(k) = b(k) + \sum_{i=0}^{n} d_i(k) \sum_{j=1}^{n} c_j(k) \Delta^i u_j(k) \\ &= b(k) + \sum_{j=1}^{n} c_j(k) \sum_{i=0}^{n} d_i(k) \Delta^i u_j(k) = b(k), \end{aligned}$$

und wir erhalten, dass $c(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i(k) u_i(k)$ eine Lösung von (3.4) ist. □

Korollar 3.10 (Methode der Variation der Konstanten)**.** *Sei $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ein Fundamentalsystem von (3.5) und $p_0(k) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i(k) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{i+n} b(j) |C_{j+1}(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n)|}{|C_{j+1}(u_1, \ldots, u_n)|} \right)$$

eine Lösung von (3.4).

Beweis. Laut Satz 3.7 gilt $|C_k(u_1, \ldots, u_n)| \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die Behauptung folgt dann aus Satz 3.9, der Cramerschen Regel und dem Laplaceschen Entwicklungssatz. □

Satz 3.11 (Superpositionsprinzip)**.** *Sei $l \in \mathbb{N}$, seien $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{K}$, und sei $c_j(k)$ eine Lösung von $\sum_{i=0}^{n} p_i(k) y(k+i) = b_j(k)$ für alle $j = 1, \ldots, l$. Dann ist*

$$\Big(\sum_{j=1}^{l} a_j c_j(k) \Big) \text{ eine Lösung von } \sum_{i=0}^{n} p_i(k) y(k+i) = \sum_{j=1}^{l} a_j b_j(k).$$

Beweis.

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(k) \sum_{j=1}^{l} a_j c_j(k+i) = \sum_{j=1}^{l} a_j \sum_{i=0}^{n} p_i(k) c_j(k+i) = \sum_{j=1}^{l} a_j b_j(k)$$

□

3.3 Homogene lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten

Definition 3.6. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist eine *homogene lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten* eine Differenzengleichung, die geschrieben werden kann als

$$\sum_{i=0}^{n} p_i y(k+i) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.7}$$

oder

$$\sum_{i=0}^{n} p_i E^i y(k) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.8}$$

mit $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{K}$ und $p_n \neq 0$. Wir setzen weiteres $p_0 \neq 0$ voraus, da man andernfalls die Differenzengleichung auf eine Gleichung niedrigerer Ordnung zurückführen kann.

Definition 3.7. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, und seien $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{K}$ die konstanten Koeffizienten der Gleichung (3.7). Dann definieren wir:

a) Das Polynom $p(\lambda) := \sum\limits_{i=0}^{n} p_i \lambda^i$ heißt das *charakteristische Polynom* von (3.7).

b) Die Gleichung $\sum\limits_{i=0}^{n} p_i \lambda^i = 0$ heißt die *charakteristische Gleichung* von (3.7).

c) Die Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ der charakteristischen Gleichung heißen *charakteristischen Wurzeln*.

Wegen $p_0 \neq 0$ gilt $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$, und man kann (3.8) in der Form $p(E)y(k) = 0$ schreiben. Faktorisiert man $p(\lambda)$, so erhält man

$$(E - \lambda_1 I)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (E - \lambda_r I)^{m_r} y(k) = 0 \tag{3.9}$$

mit $m_1 + \ldots + m_r = n$, wobei $m_i \in \mathbb{N}$ die Vielfachheit der charakteristischen Wurzel λ_i für $i = 1, \ldots, r$ bezeichnet.

Betrachten wir für ein beliebig, aber fest gewähltes $i \in \{1, \ldots, r\}$ die Gleichung

$$(E - \lambda_i I)^{m_i} y(k) = 0, \tag{3.10}$$

dann ist offensichtlich jede Lösung von (3.10) auch eine Lösung von (3.9). Falls man für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$ das Fundamentalsystem von (3.10) bestimmen kann, liegt die Vermutung nahe, dass die Vereinigung der r Fundamentalsysteme dann ein Fundamentalsystem von (3.9) bildet.

Lemma 3.12. *Die Menge* $G_i := \left\{\lambda_i^k, \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1}, \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2}, \ldots, \binom{k}{m_i-1}\lambda_i^{k-m_i+1}\right\}$ *ist ein Fundamentalsystem von* (*3.10*).

Beweis. Im Fall $m_i = 1$ lässt sich (3.10) schreiben als $y(k+1) = \lambda_i y(k)$, welche die Lösung $u(k) = \lambda_i^k$ besitzt.
Sei $m_i > 1$. Dann zeigen wir zuerst, dass $\binom{k}{l}\lambda_i^{k-l}$ eine Lösung der Gleichung (3.10) ist. Aus Satz 1.7 und Korollar 1.5 folgt

$$\begin{aligned}(E-\lambda_i I)^{m_i}\binom{k}{l}\lambda_i^{k-l} &= \lambda_i^{k-l}(\lambda_i E-\lambda_i I)^{m_i}\binom{k}{l}\\ &= \lambda_i^{k+m_i-l}(E-I)^{m_i}\binom{k}{l}\\ &= \lambda_i^{k+m_i-l}\Delta^{m_i}\binom{k}{l}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass G_i ein Fundamentalsystem von (3.10) bildet, genügt es laut Korollar 3.8, die Eigenschaft $|C_0(\lambda_i^k, \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1}, \ldots, \binom{k}{m_i-1}\lambda_i^{k-m_i+1})| \neq 0$ zu überprüfen.

$$\begin{aligned}|C_0(\lambda_i^k, \ldots, \binom{k}{m_i-1}\lambda_i^{k-m_i+1})| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ \lambda_i & 1 & \cdots & 0\\ \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_i^{m_i-1} & \binom{m_i-1}{1}\lambda_i^{m_i-2} & \cdots & 1\end{vmatrix}\\ &= 1 \neq 0\end{aligned}$$

□

Satz 3.13. *Die Menge* $G = \{G_1 \cup \ldots \cup G_r\}$ *ist ein Fundamentalsystem von* (*3.9*).

Beweis. Nach Lemma 3.12 sind die unendlichen Folgen aus G auch Lösungen von (3.9). Betrachte die allgemeine Vandermonde-Determinante[8]

$$|C_0(G)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots\\ \lambda_1 & 1 & \cdots & \lambda_r & 1 & \cdots\\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \cdots & \lambda_r^2 & 2\lambda_r & \cdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \lambda_1^{n-1} & (n-1)\lambda_1^{n-2} & \cdots & \lambda_r^{n-1} & (n-1)\lambda_r^{n-2} & \cdots\end{vmatrix}.$$

Dann gilt

$$|C_0(G)| = \prod_{1\leq i<j\leq r}(\lambda_j - \lambda_i)^{m_j m_i}. \tag{3.11}$$

Da aber laut Voraussetzung $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gilt, folgt $|C_0(G)| \neq 0$. Somit ist G laut Korollar 3.8 ein Fundamentalsystem von (3.9). □

Korollar 3.14. *Die allgemeine Lösung von (3.9) ist gegeben durch*

$$y(k) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} a_{ij} k^j \lambda_i^k$$

Beweis. Folgt aus Lemma 3.12 und Satz 3.13. □

3.4 Inhomogene lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten

Definition 3.8. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist eine *inhomogene lineare Differenzengleichung der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten* eine Differenzengleichung, die geschrieben werden kann als

$$\sum_{i=0}^{n} p_i y(k+i) = b(k), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.12}$$

mit $p_0, \ldots, p_n, b(k) \in \mathbb{K}$, $b(k) \neq 0$ für mindestens ein $k \in \mathbb{N}_0$ und $p_n \neq 0$. Wie im Abschnitt 3.3 setzten wir auch $p_0 \neq 0$ voraus. O.B.d.A. kann (3.12) normiert werden, d.h. wir können $p_n = 1$ annehmen.
Das Polynom $p(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} p_i \lambda^i$ bezeichnet das *charakteristische Polynom* von (3.12), sodass (3.12) als $p(E)y(k) = b(k)$ geschrieben werden kann.

Satz 3.15 (Methode des unbestimmten Ansatzes)**.** *Sei $q \not\equiv 0$ ein Polynom, $l \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda \neq 0$ eine charakteristische Wurzel von p der Ordnung l ($l = 0$ bedeutet $p(\lambda) \neq 0$.). Dann existiert ein Polynom r vom selben Grad wie q, sodass*

$$(k^l \lambda^k r(k)) \text{ eine Lösung von } \sum_{i=0}^{n} p_i y(k+i) = q(k)\lambda^k$$

ist.

Beweis. Sei $q(k) = \sum\limits_{i=0}^{u} c_i k^i$ mit $u \in \mathbb{N}_0$ und $c_u \neq 0$. Wir machen für das Polynom r den Ansatz $r(k) = \sum\limits_{i=0}^{u} d_i k^i$. Betrachten wir die Gleichung (3.12), so gilt $p(E) = \prod\limits_{j=1}^{r} (E - \lambda_j I)^{m_j}$, und $(k^l \lambda^k r(k))$ ist genau dann eine Lösung von $\sum\limits_{i=0}^{n} p_i y(k+i) = \lambda^k q(k)$, wenn

$$\left(\prod_{j=1}^{r} (E - \lambda_j I)^{m_j} \right) \left(k^l \lambda^k \sum_{i=0}^{u} d_i k^i \right) = \lambda^k \sum_{i=0}^{u} c_i k^i.$$

Nach Anwendung von Satz 1.4 folgt, dass für alle $i = 0, \dots, u$ Koeffizienten $d_{i0}, \dots, d_{ii} \in \mathbb{K}$ mit $d_{ii} \neq 0$ existieren, sodass

$$\Big(\prod_{j=1}^{r}(E - \lambda_j I)^{m_j}\Big)(k^{i+l}\lambda^k) = \lambda^k \sum_{j=0}^{i} d_{ij}k^j.$$

Somit sind folgende Aussagen äquivalent:

$$\begin{aligned}
&(k^l\lambda^k r(k)) \text{ ist eine Lösung von } \sum_{i=0}^{n} p_i y(k+i) = \lambda^k q(k) \\
\Leftrightarrow &\sum_{i=0}^{u} d_i \lambda^k \sum_{j=0}^{i} d_{ij}k^j = \lambda^k \sum_{i=0}^{u} c_i k^i \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \\
\Leftrightarrow &\lambda^k \sum_{j=0}^{u} k^j \sum_{i=j}^{u} d_i d_{ij} = \lambda^k \sum_{j=0}^{u} c_j k^j \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{i=j}^{u} d_i d_{ij} = c_j \quad \forall j = 0, \dots, u \\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} d_{00} & \cdots & \cdots & d_{u0} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{uu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_u \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, da $d_{ii} \neq 0$ für alle $i = 0, \dots, u$ gilt, und $d_u \neq 0$ wegen $c_u \neq 0$. Somit existiert ein Polynom r vom selben Grad wie q mit der gewünschten Eigenschaft. $\square$

Satz 3.16 (Methode des unbestimmten Ansatzes)**.** *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, seien a_1, a_2 reelle Polynome, und sei $l \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{R}^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Angenommen, $\lambda := r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms p der Ordnung l. ($l = 0$ bedeutet $p(\lambda) \neq 0$.) Dann existieren reelle Polynome q_1, q_2 mit $grad(q_1), grad(q_2) \leq max(grad(a_1), grad(a_2))$, sodass*

$$k^l r^k (q_1(k)\sin(k\varphi) + q_2(k)\cos(k\varphi))$$

eine Lösung von

$$\sum_{i=0}^{n} p_i y(k+i) = r^k(a_1(k)\sin(k\varphi) + a_2(k)\cos(k\varphi))$$

ist.

Beweis. Laut Satz 3.15 existiert für $j \in \{1,2\}$ ein komplexes Polynom r_j mit $\mathrm{grad}(r_j) = \mathrm{grad}(a_j)$, sodass

$$\begin{aligned} r_j(k)k^l\lambda^k =& r_j(k)k^l r^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)) \\ =& (\Re(r_j(k)) + i\Im(r_j(k)))k^l r^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)) \end{aligned}$$

eine Lösung von

$$\sum_{i=0}^{n} p_i y(k+i) = a_j(k) r^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi))$$

ist. Nutzt man die Linearität der Differenzengleichung aus, so können die reellen und imaginären Terme separat betrachtet werden, und man erhält, dass

$$k^l r^k(\Re(r_1(k))\sin(k\varphi) + \Im(r_1(k))\cos(k\varphi))$$

eine Lösung von

$$\sum_{i=0}^{n} p_i y(k+i) = a_1(k) r^k \sin(k\varphi)$$

und

$$k^l r^k(\Re(r_2(k))\cos(k\varphi) - \Im(r_2(k))\sin(k\varphi))$$

eine Lösung von

$$\sum_{i=0}^{n} p_i y(k+i) = a_2(k) r^k \cos(k\varphi)$$

ist. Setzt man $q_1(k) := \Re(r_1(k)) - \Im(r_2(k))$ und $q_2(k) := \Im(r_1(k)) + \Re(r_2(k))$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so folgt daraus die Behauptung. $\square$

Satz 3.17 (Vandermonde-Determinante)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Dann gilt*

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i). \tag{3.13}$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion nach n.
Für $n = 1$ gilt die Behauptung.
Angenommen die Behauptung ist für ein $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, dann zeigen wir die Gültigkeit für $n + 1$.

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_{n+1}^n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 - a_{n+1} & \cdots & a_n - a_{n+1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^n - a_1^{n-1}a_{n+1} & \cdots & a_n^n - a_n^{n-1}a_{n+1} & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n \begin{vmatrix} a_1 - a_{n+1} & \cdots & a_n - a_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}(a_1 - a_{n+1}) & \cdots & a_n^{n-1}(a_n - a_{n+1}) \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n (a_1 - a_{n+1}) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_{n+1}) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= (a_{n+1} - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_{n+1} - a_n) \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i) \\
&= \prod_{1 \le i < j \le n+1} (a_j - a_i).
\end{aligned}$$

□

Satz 3.18. *Angenommen $m_i = 1$ für $i = 1, \ldots, r$. Dann gilt $p'(\lambda_i) \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n$, und*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{p'(\lambda_i)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{b(j)}{\lambda_i^{j+1}} \Big) \lambda_i^k \right)$$

ist eine Lösung von (3.12).

Beweis. Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $p(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$, womit $p'(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (x - \lambda_j)$ folgt und sich $p'(\lambda_i) = \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$ ergibt für $i = 1, \ldots, n$. Wendet man nun Satz 3.9 an, dann folgt aus

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} & \cdots & \lambda_n^{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k+n-1} & \cdots & \lambda_n^{k+n-1} \\ \lambda_1^{k+n} & \cdots & \lambda_n^{k+n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_1(k) \\ \vdots \\ \Delta c_{n-1}(k) \\ \Delta c_n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(k) \end{pmatrix}$$

nach Anwendung der Cramerschen Regel

$$\Delta c_i(k) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1^{k+1} & \dots & \lambda_{i-1}^{k+1} & 0 & \lambda_{i+1}^{k+1} & \dots & \lambda_n^{k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k+n-1} & \dots & \lambda_{i-1}^{k+n-1} & 0 & \lambda_{i+1}^{k+n-1} & \dots & \lambda_n^{k+n-1} \\ \lambda_1^{k+n} & \dots & \lambda_{i-1}^{k+n} & b(k) & \lambda_{i+1}^{k+n} & \dots & \lambda_n^{k+n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1^{k+1} & \dots & \lambda_n^{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k+n-1} & \dots & \lambda_n^{k+n-1} \\ \lambda_1^{k+n} & \dots & \lambda_n^{k+n} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(-1)^{i+n} b(k) \lambda_1^{k+1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{i-1}^{k+1} \lambda_{i+1}^{k+1} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{k+1} \prod\limits_{j<k;j,k\neq i} (\lambda_k - \lambda_j)}{\lambda_1^{k+1} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{k+1} \prod\limits_{j<k} (\lambda_k - \lambda_j)}$$

$$= \frac{(-1)^{i+n} b(k)}{\lambda_i^{k+1} \prod\limits_{j<i} (\lambda_i - \lambda_j) \prod\limits_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)} = \frac{(-1)^{i+n} b(k)}{\lambda_i^{k+1} p'(\lambda_i)(-1)^{n-i}} = \frac{b(k)}{\lambda_i^{k+1} p'(\lambda_i)}.$$

Aus Korollar 3.10, folgt dann die Behauptung. □

Lemma 3.19. *Sei $a \in \mathbb{K}\backslash_{\{0\}}$, $l \in \mathbb{N}_0$ und $j \in \{0, \dots, l\}$. Dann gilt*

$$(E - aI)^j (k^{(l)} a^k) = \frac{l! a^j}{(l-j)!} k^{(l-j)} a^k$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung mittels vollständiger Induktion nach j. Der Induktionsanfang $j = 0$ ergibt sich nach Einsetzen in die Gleichung unmittelbar. Sei nun

$$(E - aI)^j (k^{(l)} a^k) = \frac{l! a^j}{(l-j)!} k^{(l-j)} a^k$$

für $0 \leq j < l$ erfüllt. Dann folgt

$$\begin{aligned} (E - aI)^{j+1} (k^{(l)} a^k) &= (E - aI) \frac{l! a^j}{(l-j)!} k^{(l-j)} a^k \\ &= \frac{l! a^j}{(l-j)!} ((k+1)^{(l-j)} a^{k+1} - k^{(l-j)} a^{k+1}) \\ &= \frac{l! a^{j+1}}{(l-j)!} k^{(l-j-1)} a^k (k + 1 - k + l - j - 1) \\ &= \frac{l! a^{j+1}}{(l-j-1)!} k^{(l-j-1)} a^k. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.3. Für den Spezialfall $j = l$ erhält man aus Lemma 3.19 $(E - aI)^l(k^{(l)}a^k) = l!a^l a^k$.

Satz 3.20. *Sei $l \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{K}\backslash_{\{0\}}$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms p der Ordnung l ($l = 0$ bedeutet $p(a) \neq 0$) und $p(x) = (x-a)^l f(x)$. Dann gilt*

$$\left(\frac{k^l a^{k-l}}{l! f(a)}\right)$$

ist eine Lösung von $\sum\limits_{i=0}^{n} p_i y(k+i) = a^k$.

Beweis. Laut Satz 1.4, Bemerkung 3.3 und Lemma 1.6 gilt

$$p(E)(k^l a^k) = p(E)(k^{(l)}a^k) = f(E)(E-aI)^l(k^{(l)}a^k) = f(E)(l!a^l a^k) = l!a^l a^k f(a).$$

□

Kapitel 4

Die erzeugende Funktion und Z-Transformation

Die Z-Transformation für Differenzengleichungen ist ein Analogon zur Laplace-Transformation für Differentialgleichungen. Mit Hilfe der Z-Transformation bzw. erzeugenden Funktion lassen sich Lösungen von linearen Differenzengleichungen ermitteln. Im folgenden sei weiter $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 4.1. Für $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ heißt die Funktion $G(y) = Y$ mit

$$G(y)(s) = Y(s) := \sum_{k=0}^{\infty} y(k)s^k \quad \text{für hinreichend kleine } s \in \mathbb{K}$$

die *erzeugende Funktion* von y, falls die Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius besitzt. Des weiteren heißt für $s = 1/z$ die Funktion

$$z \mapsto Y(1/z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)/z^k \quad \text{für hinreichend große } z \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

die *Z-Transformation* von y.

Bemerkung 4.1. Potenzreihen konvergieren auf reellen Intervallen bzw. komplexen Kreisscheiben, d.h. auf Bereichen $\{s \in \mathbb{K} : |s| < c\}$ für $c > 0$, falls der Konvergenzradius positiv ist. Außerdem muss nicht immer eine erzeugende Funktion existieren, wie zum Beispiel für $x(k) = k!$, da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!s^k$ nur für $s = 0$ konvergiert.

Lemma 4.1. *Seien $x, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$. Dann gilt:*

a) G ist im gemeinsamen Konvergenzbereich von x und y linear.

b) $G(x*y)(s) = (G(x)G(y))(s)$ im gemeinsamen Konvergenzbereich von x und y. Dabei bezeichnet $x*y$ die Konvolution von x und y, die definiert *ist durch*

$$(x * y)(k) := \sum_{i=0}^{k} x(i)y(k-i) = \sum_{i=0}^{k} x(k-i)y(i).$$

c) $G(E^n x)(s) = s^{-n}\big(G(x)(s) - \sum_{j=0}^{n-1} x(j)s^j\big)$ *für* $s \neq 0$

d) $G(x)(s) = G(y)(s)$ *genau dann, wenn* $x = y$.

Beweis. a) Sei $G(x)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)s^k$ für $|s| < c_1$ und $G(y)(s) = \sum_{l=0}^{\infty} y(l)s^l$ für $|s| < c_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(G(x+y))(s) &= \sum_{k=0}^{\infty}(x(k)+y(k))s^k = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)s^k + \sum_{k=0}^{\infty} y(k)s^k \\ &= G(x)(s) + G(y)(s) \text{ für } |s| < \min\{c_1, c_2\}\end{aligned}$$

und

$$(G(cx))(s) = \sum_{k=0}^{\infty} cx(k)s^k = c\sum_{k=0}^{\infty} x(k)s^k = cG(x)(s).$$

b) Für $|s| < \min\{c_1, c_2\}$ gilt:

$$\begin{aligned}(G(x)G(y))(s) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} x(k)s^k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} y(l)s^l\right) \\ &= \sum_{k,l=0}^{\infty} x(k)y(l)s^{k+l} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{i} x(k)y(i-k)s^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(x*y)(i)s^i = G(x*y)(s).\end{aligned}$$

c) Falls $s \neq 0$, so gilt:

$$\begin{aligned}G(E^n y)(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} y(j+n)s^j = \sum_{j=n}^{\infty} y(j)s^{j-n} = \sum_{j=0}^{\infty} y(j)s^{j-n} - \sum_{j=0}^{n-1} y(j)s^{j-n} \\ &= s^{-n}G(y)(s) - s^{-n}\sum_{j=0}^{n-1} y(j)s^j.\end{aligned}$$

d) Zwei Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius stimmen genau dann überein, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen.

□

Satz 4.2. *Ist $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ eine Lösung der inhomogenen linearen Differenzengleichung n-ter Ordnung*

$$\sum_{i=0}^{n} p_i y(k+i) = b(k) \text{ für } k \in \mathbb{N}_0,$$

so gilt

$$G(y)(s) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1} \left(\sum\limits_{i=0}^{j} p_{n-i} y(j-i) \right) s^j + s^n B(s)}{p_n s^n p(1/s)},$$

wobei B die erzeugende Funktion von b ist und $p(1/s) = \sum\limits_{i=0}^{n} (p_i/p_n) s^{-i}$.

Beweis. Wegen Lemma 4.1 gilt für die erzeugende Funktion $G(y)$

$$\begin{aligned} G(b)(s) &= \sum_{i=0}^{n} p_i G(E^i y)(s) = \sum_{i=0}^{n} p_i s^{-i} \left(G(y)(s) - \sum_{j=0}^{i-1} y(j) s^j \right) \\ &= G(y)(s) \sum_{i=0}^{n} p_i s^{-i} - \sum_{i=0}^{n} p_i \sum_{j=0}^{i-1} y(j) s^{j-i}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$G(y)(s) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} p_i \sum\limits_{j=0}^{i-1} y(j) s^{j+n-i} + s^n G(b)(s)}{p_n s^n p(\frac{1}{s})}.$$

Durch Umsortieren erhält man dann

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} p_i \sum_{j=0}^{i-1} y(j) s^{j+n-i} &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} p_i y(j) s^{j+n-i} \overset{(k=n-i)}{=} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k-1} p_{n-k} y(j) s^{j+k} \\ &\overset{(l=j+k)}{=} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{l} p_{n-k} y(l-k) \right) s^l. \end{aligned}$$

□

Satz 4.2 bestimmt somit als Erstes die erzeugende Funktion einer noch unbekannten Lösung y einer gegebenen Differenzengleichung, und man versucht danach rückwärts die Lösung y zu ermitteln, indem man geschickt die bekannten erzeugenden Funktionen einfacherer Funktionen kombiniert. Dabei werden die in Lemma 4.1 gezeigten Eigenschaften von erzeugenden Funktionen angewendet. Tabelle 4.1 gibt einen Überblick über die erzeugenden Funktionen einiger Folgen. Bezeichne für $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ und $r \in \mathbb{N}_0$ $x_r \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ die Folge mit $x_r(k) = 0$ für $k < r$ und $x_r(k) = x(k-r)$ für $k \geq r$.
Wir werden anhand einiger Beispiele die oben erläuterte Vorgehensweise demonstrieren.

$y(k)$	$G(y)(s)$
$x_r(k)$	$s^r G(x)(s)$
$e^{\alpha k}$	$(1-e^{\alpha}s)^{-1}$
$\frac{\alpha^k}{k!}$	$e^{\alpha s}$
$(k+r)^{[r]}\beta^k$	$\frac{r!}{(1-\beta s)^{r+1}}$

Tabelle 4.1: Erzeugende Funktionen

Beispiel 4.1. Löse die inhomogene lineare Differenzengleichung erster Ordnung

$$y(k+1) - ay(k) = b(k),\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Wir können nun Satz 4.2 anwenden mit $n = 1$, $p_0 = -a$ und $p_1 = 1$ und erhalten

$$G(y)(s) = \frac{y(0) + sB(s)}{s(1/s - a)} = y(0)\frac{1}{1-as} + \frac{sB(s)}{1-as}, as \neq 1. \tag{4.1}$$

Wenn wir nun die rechte Seite der Gleichung (4.1) als Linearkombination erzeugenden Funktionen einfacherer Folgen schreiben, dann erhalten wir aus der Tabelle 4.1

$$\begin{aligned} G(a^k)(s) &= \frac{1}{1-as} \text{ für } |s| < \frac{1}{|a|} \text{ und} \\ G((a^k)_1)(s) &= \frac{s}{1-as} \text{ für } |s| < \frac{1}{|a|}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Konvolution (Lemma 4.1b) folgt

$$G\left(\sum_{i=1}^{k} a^{i-1} b(k-i)\right)(s) = G((a^k)_1)(s)G(b)(s) = \frac{s}{1-as}B(s).$$

Dann gilt

$$G(y)(s) = y(0) \cdot G(a^k)(s) + G\left(\sum_{i=1}^{k} a^{i-1} b(k-i)\right)(s).$$

Aus der Linearität und Eindeutigkeit von G (Lemma 4.1a) und d) ergibt sich für gegebenes $y(0)$ schließlich

$$y(k) = y(0)a^k + \sum_{i=1}^{k} a^{i-1} b(k-i),$$

(vergleiche Satz 2.4).

Beispiel 4.2. Löse die inhomogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$y(k+2) + p_1 y(k+1) + p_0 y(k) = b(k),\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Wir wenden Satz 4.2 mit $p_2 = 1$ an und erhalten

$$G(y)(s) = \frac{y(0) + (y(1) + p_1 y(0))s + s^2 B(s)}{1 + p_1 s + p_0 s^2}$$

Angenommen, wir hätten ein x mit $G(x)(s) = \frac{1}{1+p_1 s + p_0 s^2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{s}{1 + p_1 s + p_0 s^2} &= G(x_1)(s)\\ \frac{s^2}{1 + p_1 s + p_0 s^2} &= G(x_2)(s).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$G(y)(s) = y(0)G(x)(s) + (y(1) + p_1 y(0))G(x_1)(s) + G(x_2)(s)B(s).$$

Wegen $G(x_2)(s)B(s) = G\left(\sum_{i=0}^{k} x_2(i)b(k-i)\right)(s)$ gilt

$$G(y)(s) = G\left(y(0)x + (y(1) + p_1 y(0))x_1 + \sum_{i=2}^{k} x(i-2)b(k-i)\right)(s).$$

Wie im vorigen Beispiel folgt aus Lemma 4.1d)

$$y(k) = \begin{cases} y(0)x(0) & ,k = 0 \\ y(0)x(k) + (y(1) + p_1 y(0))x(k-1) + \sum_{i=2}^{k} x(i-2)b(k-i) & ,k \geq 1. \end{cases}$$

Falls die Lösungen λ_1, λ_2 der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + p_1\lambda + p_0$ verschieden sind, gilt

$$\frac{1}{1 + p_1 s + p_0 s^2} = \frac{1}{(1-\lambda_1 s)(1-\lambda_2 s)} = (\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1 s} - \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2 s}) \cdot \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Dann folgt aus Lemma 4.1d) und Tabelle 4.1 weiter

$$x(k) = \begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}) & ,\lambda_1 \neq \lambda_2 \\ (k+1)\lambda_1^k & ,\lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}.$$

Kapitel 5

Systeme von Differenzengleichungen erster Ordnung

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir uns mit linearen Differenzengleichungen, die durch eine Beziehung zwischen einer unabhängigen Variablen $k(\in \mathbb{N}_0)$ und einer Folge $(y(k))_k$ mit einer oder mehreren ihrer Differenzen beschrieben wird, beschäftigt. In der Praxis tauchen jedoch Modelle mit mehreren abhängigen Variablen auf, die in Zusammenhang stehen. In diesem Kapitel werden wir Systeme von $n(\in \mathbb{N})$ Differenzengleichungen erster Ordnung betrachten, die folgende Form besitzen:

Definition 5.1. Sei $G : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\vec{y}(k+1) = \begin{pmatrix} y_1(k+1) \\ \vdots \\ y_n(k+1) \end{pmatrix} = G(k, \vec{y}(k)) = \begin{pmatrix} G_1(k, y_1(k), \ldots, y_n(k)) \\ \vdots \\ G_n(k, y_1(k), \ldots, y_n(k)) \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

ein *Differenzengleichungssystem erster Ordnung* für $\vec{y}(k)$ in expliziter Form. Ein *inhomogenes lineares Differenzengleichungssystem erster Ordnung* ist dann gegeben durch

$$\vec{y}(k+1) = A(k)\vec{y}(k) + \vec{b}(k), \tag{5.2}$$

und

$$\vec{y}(k+1) = A(k)\vec{y}(k) \tag{5.3}$$

heißt das dazugehörige *homogene lineare Differenzengleichungssystem* erster Ordnung.

Eine Folge $\vec{x}(1), \vec{x}(2), \vec{x}(3), \ldots$ heißt eine Lösung von (5.1) genau dann, wenn

$$\vec{x}(k+1) = G(k, \vec{x}(k))$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist.

An Stelle von $\vec{x}(1), \vec{x}(2), \vec{x}(3), \ldots$ schreiben wir, falls es zu keinen Verwechslungen kommt $(\vec{x}(k))$.

Satz 5.1 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differenzengleichungssysteme erster Ordnung in expliziter Form)**.** *Ist $\vec{a}(0) \in \mathbb{K}^n$ gegeben, dann existiert genau eine Lösung $(\vec{b}(k))$ von (5.1), die $\vec{b}(0) = \vec{a}(0)$ erfüllt. Diese Lösung ist gegeben durch*

$$\vec{b}(k) = \begin{cases} \vec{a}(0) & \text{für } k = 0 \\ G(k-1, \vec{b}(k-1)) & \text{für } k > 0 \end{cases}.$$

Beweis. Folgt durch vollständige Induktion. □

5.1 Fundamentalmatrizen und Green-Matrix

Analog wie früher kann man zeigen, dass man für die allgemeine Lösung des Differenzengleichungssystems $\vec{y}(k+1) = A(k)\vec{y}(k) + \vec{b}(k)$ die allgemeine Lösung des dazugehörigen homogenen Differenzengleichungssystems $\vec{y}(k) = A(k)\vec{y}(k)$ sowie eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems benötigt.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die kanonischen n-dimensionalen Einheitsvektoren und mit $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die n-dimensionale Einheitsmatrix. Ähnlich wie im n-dimensionalen Fall von homogenen linearen Differenzengleichungen erhalten wir folgende Eigenschaft:

Satz 5.2. *Die Menge aller Lösungen des homogenen Systems (5.3) ist ein n-dimensionaler Untervektorraum von $((\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}_0}, +, \cdot)$.*
Sind $(\vec{z}_1(k)), \ldots, (\vec{z}_n(k))$ beliebige linear unabhängige Lösungen, so ist die Menge aller Lösungen von (5.3) gegeben durch

$$\left\{ \vec{x} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}_0} \mid \vec{x}(k) = Z(k)\vec{c},\ \vec{c} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

wobei $Z(k) = [\vec{z}_1(k) | \ldots | \vec{z}_n(k)]$.

Beweis. Die Menge aller Lösungen von (5.3) bildet offensichtlich einen Untervektorraum von $((\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}_0}, +, \cdot)$. Seien $(\vec{x}_1(k)), \ldots, (\vec{x}_n(k))$ die eindeutig bestimmten Lösungen des homogenen Systems (5.3) mit $\vec{x}_j(0) = \vec{e}_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Dann sind $(\vec{x}_1(k)), \ldots, (\vec{x}_n(k))$ linear unabhängig.

Sei nun $(\vec{b}(k))$ eine beliebige Lösung von (5.3), und sei $(\vec{a}(k))$ definiert als

$$\vec{a}(k) := \sum_{j=1}^{n} \vec{x}_j(k) b_j(0).$$

Dann ist $(\vec{a}(k))$ eine Lösung von (5.3) mit

$$\vec{a}(0) = \sum_{j=1}^{n} \vec{x}_j(0) b_j(0) = \sum_{j=1}^{n} \vec{e}_j b_j(0) = [b_1(0), \dots, b_n(0)]^T = \vec{b}(0).$$

Daraus folgt mit Satz 5.1, dass $\vec{a}(k) = \vec{b}(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, und jede beliebige Lösung $(\vec{b}(k))$ von (5.3) ist als $\vec{b}(k) = \sum_{j=1}^{n} \vec{x}_j(k) b_j(0)$ darstellbar. Somit ist $\{(\vec{x}_1(k)), \dots, (\vec{x}_n(k))\}$ eine Basis des Lösungsraumes des homogenen Differenzengleichungssystems (5.3). Sei $X(k) = [\vec{x}_1(k)| \dots |\vec{x}_n(k)]$. Dann ist $X(0) = E_n$, und für jede Lösung $(\vec{x}(k))$ von (5.3) gilt $\vec{x}(k) = X(k)\vec{x}(0)$. Sind nun $(\vec{z}_1(k)), \dots, (\vec{z}_n(k))$ beliebige linear unabhängige Lösungen von (5.3) und ist $Z(k) = [\vec{z}_1(k)| \dots |\vec{z}_n(k)]$, so folgt insbesondere $Z(k) = X(k)Z(0)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
Wäre $|Z(0)| = 0$, so würde die lineare Abhängigkeit von $(\vec{z}_1(k)), \dots, (\vec{z}_n(k))$ folgen. Wegen $|Z(0)| \neq 0$ folgt $X(k) = Z(k)(Z(0))^{-1}$, und daher gilt für jede Lösung $(\vec{x}(k))$ von (5.3), dass $\vec{x}(k) = Z(k)\vec{c}$ ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $\vec{c} = Z(0)^{-1}\vec{x}(0) \in \mathbb{K}^n$. □

Definition 5.2. Sind $(\vec{z}_1(k)), \dots, (\vec{z}_n(k))$ linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems (5.3), so heißt die (Casorati-)Matrix

$$Z(k) := [\vec{z}_1(k)| \dots |\vec{z}_n(k)]$$

eine *Fundamentalmatrix* des homogenen Systems. Die Fundamentalmatrix $X(k)$ von (5.3) mit $X(0) = E_n$ heißt *Hauptfundamentalmatrix* von (5.3).

Korollar 5.3. *Sind $Y(k)$ und $Z(k)$ zwei Fundamentalmatrizen von (5.3), dann gibt es eine reguläre $n \times n$ Matrix C mit $Z(k) = Y(k)C$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Wir haben gezeigt, dass für eine beliebige Fundamentalmatrix $Z(k)$ von (5.3) stets gilt $Z(k) = X(k)Z(0)$. Somit folgt

$$Z(k) = X(k)Z(0) = \big(Y(k)(Y(0))^{-1}\big)Z(0) = Y(k)C$$

wobei $C = (Y(0))^{-1}Z(0)$ eine invertierbare Matrix ist. Ist umgekehrt $Y(k)$ eine Fundamentalmatrix von (5.3) und $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar, dann ist $Y(k)C$ auch eine Fundamentalmatrix von (5.3). □

Ist eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems (5.3) bekannt, so lässt sich mit Satz 5.2 die Menge aller Lösungen von (5.3) beschreiben. Um nun eine Lösung des inhomogenen Systems (5.3) zu bestimmen, wenden wir folgende Methode an:

[**Variation der Konstanten**] Sei $\vec{y}(k+1) = A(k)\vec{y}(k) + \vec{b}(k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für die Lösung des dazugehörigen homogenen Systems $\vec{y}(k) = Y(k)\vec{c}$, wobei $Y(k)$ eine Fundamentalmatrix und $\vec{c} \in \mathbb{K}^n$ ist. Durch Variation des Vektors $\vec{c}$ lassen sich mit $\vec{y}(k) = Y(k)\vec{c}(k)$ auch Lösungen des inhomogenen Systems gewinnen.

$$\begin{aligned} Y(k+1)\vec{c}(k+1) &= A(k)Y(k)\vec{c}(k) + \vec{b}(k) \\ Y(k+1)(\vec{c}(k+1) - \vec{c}(k)) &= \vec{b}(k) \\ Y(k+1)\Delta\vec{c}(k) &= \vec{b}(k) \end{aligned}$$

Wir nehmen an, es gilt $|A(k)| \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $Y(k) = A(k-1) \cdot \ldots \cdot A(0)C$ mit $|C| \neq 0$ und daher $|Y(k)| \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und es gilt $\Delta\vec{c}(k) = (Y(k+1))^{-1}\vec{b}(k)$. Mit dem Fundamentalsatz aus Lemma 1.2 folgt

$$\vec{c}(k) = \sum_{i=0}^{k-1}(Y(i+1))^{-1}\vec{b}(i) + \vec{c}(0) = \sum_{l=1}^{k}(Y(l))^{-1}\vec{b}(l-1) + \vec{c}(0).$$

Gemäß der Anfangsbedingung gilt $Y(0)\vec{c}(0) = \vec{y}(0) = \vec{y}_0$. Daraus folgt $\vec{c}(0) = (Y(0))^{-1}\vec{y}_0$. Für die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems gilt dann unter Verwendung der Hauptfundamentalmatrix $X(k) = Y(k)(Y(0))^{-1}$.

$$\begin{aligned} \vec{y}(k) = Y(k)\vec{c}(k) &= Y(k)\big((Y(0))^{-1}\vec{y}_0 + \sum_{l=1}^{k}(Y(l))^{-1}\vec{b}(l-1)\big) \\ &= X(k)\vec{y}_0 + \sum_{l=1}^{k} Y(k)(Y(0))^{-1}Y(0)(Y(l))^{-1}\vec{b}(l-1) \\ &= X(k)\vec{y}_0 + \sum_{l=1}^{k} X(k)(X(l))^{-1}\vec{b}(l-1). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dabei ist der erste Summand in (5.4) die allgemeine Lösung des homogenen Systems (5.3) und der zweite Summand eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems (5.2).

Definition 5.3. Für das homogene System $\vec{x}(k+1) = A(k)\vec{x}(k)$, mit $|A(k)| \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ heißt die Matrix

$$G(k,l) := X(k)X(l)^{-1}, \quad k,l \in \mathbb{N}_0,$$

die *Green-Matrix* des homogenen Systems (5.3).

Korollar 5.4. *Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems (5.2) mit Anfangswert $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ ist gegeben durch*

$$\vec{x}(k) = X(k)\vec{x}_0 + \sum_{l=1}^{k} G(k,l)\vec{b}(l-1) \tag{5.5}$$

In der Darstellung (5.4) und (5.5) der allgemeinen Lösung von $\vec{y}(k+1) = A(k)\vec{y}(k) + \vec{b}(k)$ taucht die Hauptfundamentalmatrix auf, die a-priori aber nicht bekannt ist. Um eine Lösungsdarstellung zu erhalten, die nur die bekannten Koeffizienten $A(k)$ und $\vec{b}(k)$ enthält, zeigen wir einige Eigenschaften der Hauptfundamentalmatrix und der Green-Matrix. Zunächst sind $X(k)$ bzw. $A(k)$ nur für $k \in \mathbb{N}_0$ definiert. Um $X(k)$ bzw. $A(k)$ für $k < 0$ zu definieren, wird $X(k+1) = A(k)X(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ angenommen.

Lemma 5.5 (Eigenschaften der Hauptfundamentalmatrix)**.** *Sei $|A(k)| \neq 0$ für alle $k < 0$.*

a) Es gilt

$$X(k) = \begin{cases} E_n, & k = 0 \\ A(k-1) \cdot A(k-2) \cdot \ldots \cdot A(0), & k > 0 \\ (A(k))^{-1} \cdot (A(k+1))^{-1} \cdot \ldots \cdot (A(-1))^{-1}, & k < 0. \end{cases}$$

b) Ist $Z(k)$ eine Fundamentalmatrix, so gilt

$$|Z(k)| = |Z(0)| \cdot \begin{cases} |A(k-1)| \cdot |A(k-2)| \cdot \ldots \cdot |A(0)|, & k > 0 \\ |A(k)|^{-1} \cdot |A(k+1)|^{-1} \cdot \ldots \cdot |A(-1)|^{-1}, & k < 0. \end{cases}$$

Beweis. a) Da $X(k+1) = A(k)X(k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, folgt für $k > 0$:

$$\begin{aligned} X(k) &= A(k-1)X(k-1) = A(k-1) \cdot A(k-1)X(k-2) = \ldots = \\ &= A(k-1) \cdot A(k-2) \cdot \ldots \cdot A(0)X(0) \end{aligned}$$

und für $k < 0$, falls $|A(k)| \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} X(k) &= (A(k))^{-1}X(k+1) = (A(k))^{-1} \cdot (A(k+1))^{-1}X(k+2) = \ldots = \\ &= (A(k))^{-1} \cdot (A(k+1))^{-1} \cdot \ldots \cdot (A(-1))^{-1}X(0). \end{aligned}$$

Da $X(0) = E_n$, folgt daraus die Behauptung.

b) folgt aus *a*).

□

Lemma 5.6 (Eigenschaften der Green-Matrix)**.** *Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

a) $G(k,k) = E_n$.

b) $(G(k,l))^{-1} = G(l,k)$.

c) $G(k+1,l) = A(k)G(k,l)$ *und*
$G(k,l+1) = G(k,l)(A(l))^{-1}$.

d) $G(k,l) = \begin{cases} A(k-1)\cdot A(k-2)\cdot \ldots \cdot A(l) & ,k > l \\ (A(k))^{-1}\cdot (A(k+1))^{-1}\cdot \ldots \cdot (A(l-1))^{-1} & ,k < l. \end{cases}$

e) $G(k,l) = G(k,m)G(m,l)$ *für alle* $m \in \mathbb{N}_0$.

f) Ist $A(k) = A$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$*, so ist* $G(k,l) = A^{k-l}$.

Beweis. *a*) und *b*) folgen direkt aus der Definition der Green-Matrix.

c)

$$\begin{aligned} G(k+1,l) &= X(k+1)(X(l))^{-1} = A(k)X(k)(X(l))^{-1} \\ &= A(k)G(k,l) \\ G(k,l+1) &= (G(l+1,k))^{-1} = (A(l)G(l,k))^{-1} = (G(l,k))^{-1}(A(l))^{-1} \\ &= G(k,l)(A(l))^{-1} \end{aligned}$$

d) Sei $k > l$. Dann folgt aus *c*):

$$G(k,l) = A(k-1)G(k-1,l) = \ldots = A(k-1)\cdot \ldots \cdot A(l)G(l,l).$$

Sei nun $k < l$. Dann gilt daher $G(l,k) = A(l-1)\cdot \ldots \cdot A(k)G(k,k)$, und mit Hilfe von *b*) folgt $G(k,l) = (A(k))^{-1}\cdot \ldots \cdot (A(l-1))^{-1}$.

e)

$$\begin{aligned} G(k,l) &= X(k)(X(l))^{-1} = X(k)(X(m))^{-1}X(m)(X(l))^{-1} \\ &= G(k,m)G(m,l) \end{aligned}$$

f) folgt aus *a*) und *d*).

□

Mit Hilfe von Lemma 5.5 und Lemma 5.6 können wir in der Formel (5.5) die Hauptfundamentalmatrix und die Green-Matrix ersetzen und erhalten den folgenden Satz.

Satz 5.7. *Die allgemeine Lösung des inhomogenen linearen Differenzengleichungssystems (5.2) hat die Gestalt*

$$\vec{x}(k) = (A(k-1) \cdot \ldots \cdot A(0))\vec{x}(0) + \sum_{l=1}^{k} (A(k-1) \cdot \ldots \cdot A(l))\vec{b}(l-1) \quad (5.6)$$

für alle $k \geq 0$. (Dabei ist das leere Produkt bzw. die leere Summe von Matrizen als Einheitsmatrix bzw. Nullmatrix zu verstehen.) Ist $A(k) = A$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so gilt

$$\vec{x}(k) = A^k \vec{x}(0) + \sum_{l=1}^{k} A^{k-l} \vec{b}(l-1) \quad (5.7)$$

für alle $k \geq 0$.

Bemerkung 5.1. Für die Herleitung von Satz 5.7 wurde zunächst die Regularität der Matrix $A(k)$ angenommen. Der Satz 5.7 ist sogar für singuläre Matrizen $A(k)$ gültig. Diese Behauptung kann durch vollständige Induktion gezeigt werden.

Der folgende Satz ermöglicht es, die Lösung von Differenzengleichungen höherer Ordnung auf die Lösung von Differenzengleichungssystemen erster Ordnung zurückzuführen.

Satz 5.8 (Transformationssatz)**.** *Jede Differenzengleichung n-ter Ordnung in expliziter Form*

$$y(k+n) = G(k, y(k), y(k+1), y(k+2), \ldots, y(k+n-1)) \quad (5.8)$$

kann in ein äquivalentes System von n Gleichungen erster Ordnung übergeführt werden:
y ist eine Lösung von (5.8) genau dann, wenn $(y, Ey, \ldots, E^{n-1}y)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= y_2(k) \\ &\vdots \\ y_{n-1}(k+1) &= y_n(k) \\ y_n(k+1) &= G(k, y_1(k), \ldots, y_n(k)) \end{aligned}$$

ist.

5.2 Autonome Differenzengleichungssysteme erster Ordnung

Im Allgemeinen gibt es für Differenzengleichungssysteme mit zeitabhängigen Koeffizienten keinen einfachen systematischen Weg zur Ermittlung aller

Lösungen des homogenen Systems. Es muss wenigstens eine Lösung bekannt sein. In den folgenden Unterkapiteln werden wir Methoden vorstellen, mit denen man wenigstens für lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten auf systematische Weise alle Lösungen des homogenen Systems bestimmen kann. Dabei sprechen wir von *autonomen* oder *zeitunabhängigen* Systemen, falls das lineare Differenzengleichungssystem konstante Koeffizienten besitzt. Wir wiederholen zur Erinnerung:

Ein lineares homogenes Differenzengleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist gegeben durch

$$\vec{y}(k+1) = A\vec{y}(k) \tag{5.9}$$

mit $\vec{y}(k) = (y_1(k), \ldots, y_n(k))^T$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
Die allgemeine Lösung des Systems (5.9) ist gegeben durch

$$\vec{y}(k) = A^k\vec{y}(0) \tag{5.10}$$

mit Anfangswert $\vec{y}(0) \in \mathbb{K}^n$. Die Schwierigkeit liegt nun in der Bestimmung von A^k. Dazu benötigen wir ein paar Begriffe aus der linearen Algebra.

Definition 5.4. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ ein *Eigenwert* von A, falls es ein $\vec{\xi} \in \mathbb{C}^n \backslash_{\{\vec{0}\}}$ gibt mit

$$A\vec{\xi} = \lambda\vec{\xi},$$

bzw.

$$(A - \lambda I)\vec{\xi} = 0.$$

Jedes solche $\vec{\xi}$ ist ein *Eigenvektor* von A zum Eigenwert λ.

Definition 5.5. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann ist das charakteristische Polynom χ_A von A gegeben durch

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I|.$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A sind genau die Eigenwerte von A. Sind daher $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A gemäß ihren Vielfachheiten hingeschrieben, dann können wir das charakteristische Polynom schreiben als

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \cdot \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j).$$

Satz 5.9 (Satz von Cayley-Hamilton)**.** *Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ genügt ihrer charakteristischen Gleichung. Es gilt daher*

$$\chi_A(A) = \prod_{j=1}^{n} (A - \lambda_j I) = \boldsymbol{O}$$

5.2.1 Diagonalisierbare Matrizen

Definition 5.6. Sind $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ quadratische Matrizen, dann nennt man A und B zueinander *ähnlich* genau dann, wenn eine invertierbare Matrix P existiert mit $P^{-1}AP = B$.

Lemma 5.10. *Sind A und B zueinander ähnlich, dann besitzen sie dieselben Eigenwerte.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass zwei zueinander ähnliche Matrizen A und B dasselbe charakteristische Polynom $\chi_A = \chi_B$ besitzen.

$$\begin{aligned}
\chi_B =&|B - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda I|\\
=&|P^{-1}AP - P^{-1}\lambda IP|\\
=&|P^{-1}(A - \lambda I)P|\\
=&|P^{-1}| \cdot |A - \lambda I| \cdot |P|\\
=&|A - \lambda I| = \chi_A
\end{aligned}$$

Somit besitzen zwei zueinander ähnliche Matrizen dieselben Eigenwerte. □

Definition 5.7. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann heißt A *diagonalisierbar*, wenn A ähnlich zu einer Diagonalmatrix $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ ist.

Für diagonalisierbare Koeffizientenmatrizen A des Differenzengleichungssystems (5.9) ist die Berechnung von A^k einfach, denn es gilt

$$A = PDP^{-1},$$

und somit folgt

$$\begin{aligned}
A^k &= (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}\\
&= P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.
\end{aligned}$$

Satz 5.11. *Die quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar genau dann, wenn sie n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.*

Beweis. Sei $P = (\vec{\xi_1}|\vec{\xi_2}|\ldots|\vec{\xi_n})$, wobei $\vec{\xi_i}$ die i-te Spalte von P bezeichnet, dann gilt $|P| \neq 0 \Rightarrow \vec{\xi_1}, \ldots, \vec{\xi_n} \neq \vec{0}$.

$$\begin{aligned}
A = PDP^{-1} &\Leftrightarrow AP = PD\\
&\Leftrightarrow A\vec{\xi_i} = \lambda_i\vec{\xi_i}, \text{ für } i = 1, 2, \ldots, n\\
&\Leftrightarrow \vec{\xi_i} \text{ ist ein Eigenvektor von } A \text{ zum Eigenwert } \lambda_i
\end{aligned}$$

Es gilt $|P| \neq 0 \Leftrightarrow \vec{\xi_1}, \ldots, \vec{\xi_n}$ sind linear unabhängig. □

Satz 5.12. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar, dann ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung (5.9) gegeben durch*

$$\vec{y}(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k \vec{\xi}_i, \tag{5.11}$$

wobei $\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_n$ linear unabhängige Eigenvektoren von A und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte von A sind.

Beweis. Sei $A^k\vec{d}$ die allgemeine Lösung von (5.9) mit $\vec{d} \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $A^kP\vec{c}$ mit $P = (\vec{\xi}_1|\ldots|\vec{\xi}_n)$ die allgemeine Lösung von (5.9) mit $\vec{c} \in \mathbb{K}^n$. Nun gilt

$$A^kP\vec{c} = PD^k\vec{c} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k \vec{\xi}_i.$$

□

Beispiel 5.1 (Fibonacci-Zahlen). Das Differenzengleichungssystem ist gegeben durch

$$y(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y(k).$$

Die Eigenwerte der Matrix A erhalten wir durch Lösen der charakteristischen Gleichung

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0.$$

Löst man die charakteristische Gleichung, dann erhält man daraus die beiden Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ und die dazugehörigen Eigenvektoren $\vec{\xi}_1 = (1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})^T$ und $\vec{\xi}_2 = (1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})^T$. Aus Satz 5.12 folgt die allgemeine Lösung

$$\vec{y}(k) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \vec{\xi}_1 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \vec{\xi}_2.$$

5.2.2 Lösen mittels Jordanscher Normalform

Betrachtet man den allgemeinen Fall einer nicht diagonalisierbaren Koeffizientenmatrix A, dann hat A mehrfach auftretende Eigenwerte, d.h. es gibt $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ und $\lambda_i = \lambda_j$. Wenn A nicht diagonalisierbar ist, dann ist A ähnlich zu einer Matrix J in Blockdiagonalform, welche Jordansche Normalform genannt wird. Mit Hilfe der Jordanschen Normalform lässt sich A^k einfach berechnen.

Definition 5.8. Die *Jordansche Normalform* einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist eine Matrix J in folgender Blockdiagonalform:

$$J = diag(J_1, J_2, \ldots, J_r) = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_r \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Die Matrizen J_i, $i = 1, \ldots, r$, heißen Jordanblöcke und sind Bidiagonalmatrizen von folgender Form:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_i\times s_i}. \tag{5.13}$$

Die λ_i bezeichnen die Eigenwerte von A, und es gilt $\sum\limits_{i=1}^{r} s_i = n$.

Bemerkung 5.2. Die Jordansche Normalform ist bis auf die Reihenfolge der Jordanblöcke eindeutig bestimmt.

Bemerkung 5.3. Besitzt die Matrix A paarweise verschiedene Eigenwerte, dann gibt es n eindimensionale Jordanblöcke und die Jordansche Normalform ist eine Diagonalmatrix mit $J = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Um die Jordansche Normalform einer quadratischen Matrix A zu bestimmen benötigen wir folgende Definitionen:

Definition 5.9. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix.

a) Die *algebraische Vielfachheit* eines Eigenwertes λ_i von A ist die Vielfachheit von λ_i als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$ und bestimmt die Anzahl der λ_i in der Diagonalen der Jordanschen Normalform J von A.

b) Die *geometrische Vielfachheit* eines Eigenwertes λ_i von A ist die Dimension des Eigenraumes von λ_i, daher die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_i und bestimmt die Anzahl der Jordanblöcke J_i.

Satz 5.13. *Zu jeder quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt es eine ähnliche Matrix J, die in Jordanscher Normalform gegeben ist, d.h.*

$$J = P^{-1}AP = diag(J_1, J_2, \ldots, J_r), \quad 1 \le r \le n.$$

Die Darstellung einer quadratischen Matrix A durch ihre Jordansche Normalform J erlaubt es uns nun, A^k zu schreiben als $A^k = (PJP^{-1})^k = PJ^kP^{-1}$ mit

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r^k \end{pmatrix}, \quad 1 \le r \le n.$$

Satz 5.14. *Sei $J_i \in \mathbb{C}^{s_i \times s_i}$ ein zum Eigenwert λ_i von A gehörender Jordanblock. Dann gilt*

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2} & \dots & \binom{k}{s_i-1}\lambda_i^{k-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \dots & \binom{k}{s_i-2}\lambda_i^{k-s_i+2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i^k \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Beweis. Jeder Jordanblock J_i, $i = 1, \dots, r$, lässt sich darstellen als $J_i = \lambda_i I + N_i$, wobei

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s_i \times s_i}$$

eine nilpotente Matrix ist, für die $N_i^k = 0$, für alle $k \ge s_i$ gilt.

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
J_i^k =&(\lambda_i I + N_i)^k \\
=&\lambda_i^k I + \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1}N_i + \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2}N_i^2 + \ldots + \binom{k}{s_i-1}\lambda_i^{k-s_i+1}N_i^{s_i-1} \\
=&\begin{pmatrix}
\lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{n-1} & \binom{k}{2}\lambda_i^{n-2} & \ldots & \binom{k}{s_i-1}\lambda_i^{k-s_i+1} \\
0 & \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \ldots & \binom{k}{s_i-2}\lambda_i^{k-s_i+2} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_i^k
\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Satz 5.15. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ihre Jordansche Normalform. Dann ist die allgemeine Lösung der Gleichung (5.9) gegeben durch*

$$\vec{y}(k) = PJ^k\vec{c}$$

mit $\vec{c} = P^{-1}\vec{y}(0) \in \mathbb{K}^n$.

Beweis. folgt aus der Formel (5.10). □

Beispiel 5.2. Sei das Differenzengleichungssystem $\vec{y}(k+1) = A\vec{y}(k)$ gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist die allgemeine Lösung des Differenzengleichungssystems.
Zuerst bestimmen wir die Eigenwerte λ von A über ihre charakteristische Gleichung $|A - \lambda I| = 0$:

$$\begin{aligned}
0 =&\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\
=&(4-\lambda)(2-\lambda)(6-\lambda) + 4(4-\lambda) \\
=&(4-\lambda)^3
\end{aligned}$$

Somit sind die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$. Als nächstes bestimmen wir die Eigenvektoren und lösen dazu die Gleichung $(A - \lambda I)\vec{\xi} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu $d_2 = -2d_3$ und erhalten zwei linear unabhängige Eigenvektoren

$$\vec{\xi_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{\xi_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun müssen wir den letzten Spaltenvektor $\vec{\xi_3}$ von P so wählen, sodass $\vec{\xi_1}, \vec{\xi_2}, \vec{\xi_3}$ linear unabhängig sind. Die Jordansche Normalform J von A lautet:

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wäre $P = (\vec{\xi_2}|\vec{\xi_1}|\vec{\xi_3})$, so würde $(A - 4I)\vec{\xi_3} = \vec{\xi_1}$ gelten, d.h.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

was einen Widerspruch ergibt. Wäre $P = (\vec{\xi_1}|\vec{\xi_2}|\vec{\xi_3})$, so würde $(A-4I)\vec{\xi_3} = \vec{\xi_2}$ gelten, d.h.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu $a_2 + 2a_3 = 1$. Somit können wir $\vec{\xi_3}$ nun schreiben als

$$\vec{\xi_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und $\vec{\xi_1}, \vec{\xi_2}, \vec{\xi_3}$ sind linear unabhängig. Wir erhalten somit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

und

$$J^k = \begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & k4^{k-1} \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix}.$$

Also ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{y}(k) = PJ^k\vec{c} = \begin{pmatrix} 4^k & 4^k & k4^{k-1} \\ 0 & -2 \cdot 4^k & -2k4^{k-1} - 4^k \\ 0 & 4^k & k4^{k-1} + 4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

bzw.

$$\vec{y}(k) = PJ^kP^{-1}\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 4^k & k4^{k-1} & 2k4^{k-1} \\ 0 & -2(k-2)4^{k-1} & -k4^k \\ 0 & k4^{k-1} & 2(k+2)4^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix}.$$

5.2.3 Der diskrete Putzer-Algorithmus

In der Differentialrechnung wird der Putzer-Algorithmus für die Berechnung von e^{At} verwendet. Wir werden einen analogen Algorithmus vorstellen, um A^k darzustellen. Der Ansatz hat die Form

$$A^k = \sum_{j=1}^{n+1} u_j(k)M(j-1), \tag{5.15}$$

wobei u_j skalare Folgen sind und

$$M(j) = (A - \lambda_j I)M(j-1) \tag{5.16}$$

für alle $j = 1, \dots, n$ mit $M(0) = I$, oder

$$M(j+1) = (A - \lambda_{j+1} I)M(j)$$

für alle $j = 0, \dots, n-1$ mit $M(0) = I$.
Somit erhalten wir durch Iteration

$$M(k) = (A - \lambda_k I)(A - \lambda_{k-1} I) \cdot \ldots \cdot (A - \lambda_1 I)$$

für alle $k = 0, \dots, n$, welche wir in kompakter Form schreiben als

$$M(k) = \prod_{j=1}^{k} (A - \lambda_j I)$$

für alle $k = 0, \dots, n$.
Aus Satz 5.9 folgt $M(n) = O$, somit können wir die Darstellung (5.15) schreiben als

$$A^k = \sum_{j=1}^{n} u_j(k)M(j-1) \tag{5.17}$$

Für $k = 0$ erhalten wir dann

$$A^0 = I = u_1(0)I + u_2(0)M(1) + \ldots + u_n(0)M(n-1),$$

welche erfüllt ist, wenn gilt

$$u_1(0) = 1 \text{ und } u_2(0) = u_3(0) = \ldots = u_n(0) = 0. \tag{5.18}$$

Sei die Formel (5.17) für ein $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt. Dann soll die Gültigkeit für $k+1$ folgen:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} u_j(k+1)M(j-1) &= AA^k \\
&= A\left[\sum_{j=1}^{n} u_j(k)M(j-1)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} u_j(k)AM(j-1)
\end{aligned}$$

Aus der Darstellung (5.16) erhalten wir $AM(j-1) = M(j) + \lambda_j M(j-1)$, und somit folgt

$$\sum_{j=1}^{n} u_j(k+1)M(j-1) = \sum_{j=1}^{n} u_j(k)[M(j) + \lambda_j M(j-1)]. \tag{5.19}$$

Führt man einen Koeffizientenvergleich für die Polynome (5.19) bezüglich $M(j)$ für $0 \leq j \leq n-1$ durch, dann erhält man unter den Bedingungen (5.18) Differenzengleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
u_1(k+1) &= \lambda_1 u_1(k) \text{ mit } u_1(0) = 1, \\
u_j(k+1) &= \lambda_j u_j(k) + u_{j-1}(k) \text{ mit } u_j(0) = 0 \text{ für } j = 2, 3, \ldots, n
\end{aligned}$$

Die Lösungen sind dann mit Satz 2.4 gegeben durch

$$u_1(k) = \lambda_1^k, \quad u_j(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_j^{k-1-i} u_{j-1}(i) \text{ für } j = 2, 3, \ldots, n$$

Wir fassen im folgenden Satz den Putzer-Algorithmus zur Bestimmung von A^k zusammen.

Satz 5.16 (Putzer-Algorithmus)**.** *Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann lässt sich A^k darstellen als*

$$A^k = \sum_{j=1}^{n} u_j(k)M(j-1) \tag{5.20}$$

mit Matrizen

$$M(k) = \prod_{j=1}^{k} (A - \lambda_j I)$$

und den skalaren Folgen

$$u_1(k) = \lambda_1^k, \quad u_j(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_j^{k-1-i} u_{j-1}(i) \text{ für } j = 2, 3, \ldots, n.$$

Beispiel 5.3. Sei das Differenzengleichungssystem $\vec{y}(k+1) = A\vec{y}(k)$ gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist die allgemeine Lösung des Differenzengleichungssystems.
Die Eigenwerte sind gegeben durch $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$. Somit gilt

$$M(0) = I, \quad M(1) = A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$M(2) = (A-4I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die skalaren Folgen lauten

$$\begin{aligned} u_1(k) =& 4^k, \\ u_2(k) =& \sum_{i=0}^{k-1} (4^{k-1-i})(4^i) = k(4^{k-1}) \text{ und} \\ u_3(k) =& \sum_{i=0}^{k-1} (4^{k-1-i})(i4^{i-1}) \\ =& 4^{k-2} \sum_{i=0}^{k-1} i \\ =& \frac{k(k-1)}{2} 4^{k-2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten mit dem Putzer-Algorithmus somit die Darstellung

$$\begin{aligned} A^k =& 4^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k4^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{k(k-1)}{2} 4^{k-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 4^k & k4^{k-1} & 2k4^{k-1} \\ 0 & -2(k-2)4^{k-1} & -k4^k \\ 0 & k4^{k-1} & 2(k+2)4^{k-1}. \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{y}(k) = A^k \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 4^k & k4^{k-1} & 2k4^{k-1} \\ 0 & -2(k-2)4^{k-1} & -k4^k \\ 0 & k4^{k-1} & 2(k+2)4^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix}.$$

5.3 Anwendung Differenzengleichungssysteme erster Ordnung: Altersstrukturierte Populationsmodelle

Eine Population, in der die Individuen ihrem Alter nach in Klassen eingeteilt werden, heißt *altersstrukturierte Population.* Von besonderem Interesse ist dabei die Vorhersage der Anzahl der Individuen in einer bestimmten Altersklasse. Selbst wenn man nicht direkt an der Altersstruktur einer Population interessiert ist, sondern an der Entwicklung der Populationsgröße, kann es sinnvoll sein, die Population in homogene Altersklassen zu unterteilen und altersabhängige Geburten- und Überlebensraten anzunehmen. So hängt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Individuum im nächsten Zeitschritt einen Nachkommen bekommt oder stirbt, von seinem Alter ab.

Wir treffen folgende Annahmen für dieses Modell:

- Die Population entwickelt sich in diskreten Zeitschritten und kann in n homogene, diskrete Altersgruppen unterteilt werden.
- Die Population ist isoliert und verändert sich nur durch Geburt und Tod der Individuen, d.h. Ein- und Auswanderung seien ausgeschlossen.
- Die Fortpflanzung der Population sei im Modell nicht im Detail analysiert. Bei zweigeschlechtlicher Fortpflanzung betrachten wir die weibliche Subpopulation.
- Wir betrachten äquidistante Zeitpunkte, sodass der Abstand zweier benachbarter Zeitpunkte genau der Länge einer Altersklasse entspricht.

Bezeichne $y_i(k) \geq 0$ die Anzahl der Individuen in der Altersgruppe $i = 1, \ldots, n$ zum Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}_0$. Dann bezeichnet $\vec{y}(k) = (y_1(k), \ldots, y_n(k))^T$ den Populationsvektor zum Zeitpunkt k. Für die Norm $\|\vec{y}\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|$ ist $\|\vec{y}(k)\|$ die Größe der gesamten Population zum Zeitpunkt k. Dann gibt $\tilde{y}_i = y_i / \|\vec{y}\|$ den Anteil der Individuen in der Altersgruppe i an und der Vektor $\tilde{\vec{y}}(k) = y(k)/\|\vec{y}(k)\|$ heißt die Altersstruktur der Population zum Zeitpunkt k. Das Basismodell der Populationsdynamik hat dann die Gestalt

$$\vec{y}(k+1) = L\vec{y}(k)$$

wobei L eine nichtnegative $n \times n$ Matrix ist. Je nach Modell der Populationsentwicklung werden die nichtnegativen Einträge der Matrix L spezifiziert.

5.3.1 Leslie-Modell

Wir bezeichnen mit $b_i \geq 0$ die durchschnittliche Anzahl der Nachkommen, die ein Individuum der Altersgruppe $i = 1, \ldots, n$ pro Zeiteinheit hervorbringt.

Dann ist $\sum_{i=1}^{n} b_i y_i(k)$ die gesamte Anzahl der Individuen in der Altersgruppe 1 zum Zeitpunkt $k+1$. Weiter sei $0 \leq s_i \leq 1$ der durchschnittliche Anteil der Individuen in Altersgruppe i, die den nächsten Zeitschritt überleben und dadurch von Altersgruppe i in Altersgruppe $i+1$ wechseln. Offensichtlich ist die Überlebensrate der höchsten Altersgruppe n per Definition identisch 0. somit gilt für die Dynamik der Population

$$\vec{y}(k+1) = L\vec{y}(k) = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n(k) \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

In diesem Zusammenhang spricht man von einem *linearen Leslie-Modell* und nennt L auch *Leslie-Matrix*.

Sind zusätzliche Bedingungen, wie z.B. die Primitivität, für die Leslie-Matrix L gegeben, so kann zumindest eine Aussage über das asymptotische Verhalten der Population gemacht werden.

Bezeichne hier und im Folgenden $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ die Menge der positiven reellen Zahlen und $\mathbb{R}_0 = [0, \infty)$die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen.

Definition 5.10. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}_0^{n\times n}$ heißt *primitiv*, wenn es eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$ gibt, sodass alle Matrixeinträge von A^p positiv sind. D.h. es existiert ein $p \in \mathbb{N}$, sodass $a_{i,j}^p > 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Hier bezeichnen $a_{i,j}^p$ die Einträge der Matrix A^p. Das kleinste solche p heißt *Primitivitätsindex* der Matrix A.

Satz 5.17 (Perron-Frobenius)**.** *Sei $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ eine primitive Matrix und $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann existiert zur Matrix A ein Eigenwert $\lambda^* \in \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) $\lambda^* > 0$

b) λ^* ist betragsmäßig größer als jeder andere Eigenwert von A.

c) Zu λ^* existieren strikt positive links- und rechtsseitige Eigenvektoren, d.h. es existiert ein Zeilenvektor $\vec{w} \in \mathbb{R}_+^{1\times n}$ und ein Spaltenvektor $\vec{x} \in \mathbb{R}_+^{n\times 1}$ mit $\vec{w}^T A = \lambda^* \vec{w}^T$ bzw. $A\vec{x} = \lambda^* \vec{x}$, deren Komponenten alle positiv sind. Diese Eigenvektoren können o.B.d.A. normiert werden auf $\|\vec{w}\| = \|\vec{x}\| = 1$.

d) Die mit dem Eigenwert λ^* assoziierten Eigenvektoren sind bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt.

e) λ^* hat die algebraische Vielfachheit 1.

Beweis. Siehe z.B. [7]. □

Satz 5.18. *Eine Leslie-Matrix $L \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ ist primitiv, wenn $b_n \neq 0$ und wenn es $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $b_i, b_j > 0$ und $ggT(i, j) = 1$.*

Beweis. Siehe [1, S. 57]. □

Bemerkung 5.4. Wir können im folgenden davon ausgehen, dass die Primitivität der Leslie-Matrix bei dem von uns betrachteten Modell gegeben ist. Die Voraussetzungen für eine primitive Matrix sind nicht sehr einschränkend, da sich die Altersklassen jenseits der letzten fertilen Altersklasse im Lauf der Zeit auf Grund der Übergangswahrscheinlichkeiten entwickeln und zwei aufeinanderfolgende fertile Altersklassen durch Halbierung aller Altersklassen erreicht werden können.

Ist die Primitivität der Leslie-Matrix L gegeben, dann sind die in Satz 5.17 erwähnten Größen eindeutig bestimmt. Betrachtet man das dynamische System $\vec{y}(k+1) = L\vec{y}(k) = L^{k+1}\vec{y}(0)$ mit $\vec{y}(0) \in \mathbb{R}_0^n \backslash_{\{\vec{0}\}}$ für $k \in \mathbb{N}_0$, so erhält man die Konvergenz des normierten Systems $\tilde{\vec{y}}(k) = \vec{y}(k)/\left\|\vec{y}(k)\right\|$. Dieses Ergebnis lässt sich im folgenden Satz in einem etwas allgemeineren Kontext als dem der Leslie-Modelle zeigen.

Satz 5.19. *Sei $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ primitiv und bezeichne mit $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$.*

a) Dann gilt für die normierte Abbildung $\tilde{A}\vec{y} := \frac{A\vec{y}}{\|A\vec{y}\|}$:

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{A}^k \vec{y}(0) = \lim_{k\to\infty} \widetilde{A^k}\vec{y}(0) = \lim_{k\to\infty} \frac{A^k\vec{y}}{\|A^k\vec{y}\|} = \vec{y}^* \qquad \text{für alle } \vec{y}(0) \in \mathbb{R}_0^n \backslash_{\{\vec{0}\}},$$

wobei $\vec{y}^*$ der gemäß Satz 5.17 zur Matrix A gehörende positive, auf die Länge 1 *normierte Rechtseigenvektor zum Eigenwert λ^* von A ist.*

b) Mit dem gemäß Satz 5.17 zur Matrix A gehörenden $\lambda^* \in \mathbb{R}$ mit $\lambda^* > 0$ gilt für das asymptotische Verhältnis zweier aufeinander folgender Populationsvektoren

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_i(k+1)}{y_i(k)} = \lambda^*$$

für alle $i = 1, \dots, n$ und $\vec{y}(0) \in \mathbb{R}_0^n \backslash_{\{\vec{0}\}}$.

Beweis. Siehe [4], Kapitel 2. □

Bemerkung 5.5. Ist die Leslie-Matrix L primitiv, so konvergiert die Altersstruktur $\tilde{\vec{y}}(k)$ unabhängig von der ursprünglichen Altersstruktur $\tilde{\vec{y}}(0)$ gegen $\vec{y}^*$. Das bedeutet, dass exogene Störungen der Population z.B. in Form von Epidemien, die möglicherweise eine Dezimierung der Population nach sich ziehen, auf lange Sicht ohne jegliche Konsequenz für die Altersstruktur sind. Somit kann sich die Population mit der Zeit wieder „erholen“und nähert sich dem strukturellen Gleichgewicht.

Kapitel 6

Stabilitätstheorie

An den Anwendungen von Differenzengleichungen und Differenzengleichungssystemen erkennt man, dass oft die Stabilitätseigenschaften von Differenzengleichungen und diskreten dynamischen Systemen eine weitaus größere Rolle spielen, als die Kenntnis einer (expliziten) Lösung. Bisher haben wir zuerst die Lösung bestimmt, um daraus Aussagen über das Stabilitätsverhalten dieser Systeme machen zu können.
Für viele Differenzengleichungen bzw. diskrete dynamische Systeme, wie z.B. nichtlineare Differenzengleichungen bzw. nichtlineare diskrete dynamische Systeme, ist es oft nicht möglich, eine explizite Lösung zu ermitteln. Daher ist man an einer Stabilitätstheorie interessiert, die es ermöglicht, Aussagen über das Stabilitätsverhalten ohne Kenntnis über die Lösung machen zu können.
Eine umfassende Stabilitätstheorie existiert für lineare Differenzengleichungen und lineare diskrete dynamische Systeme, die im folgenden Kapitel vorgestellt wird.

6.1 Allgemeine Stabilitätsbegriffe

Wir werden in diesem Abschnitt die wichtigsten Stabilitätsbegriffe einführen und gegenüberstellen. Dazu betrachten wir ein n-dimensionales, nicht autonomes, diskretes dynamisches System

$$\vec{y}(k+1) = G(k, \vec{y}(k)) \tag{6.1}$$

mit $G : \mathbb{N}_0 \times M \to M$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Dabei ist M eine Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und $\vec{y}(0) \in M$ Anfangswert einer Lösung $(\vec{y}(k))$ von (6.1). Für eine Lösung $(\vec{y}(k))$ von (6.1) bezeichnen wir die Menge $\{\vec{y}(0), \vec{y}(1), \vec{y}(2), \ldots\}$ auch als *die Bahn* bzw. *den Orbit* von $(\vec{y}(k))$.

Definition 6.1. Eine Lösung $(\vec{y}(k))$ von (6.1) heißt

a) *stabil*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, sodass gilt:
Ist $(\vec{x}(k))$ eine Lösung von (6.1) mit $\|\vec{x}(0) - \vec{y}(0)\| < \delta(\varepsilon)$, dann gilt $\|\vec{x}(k) - \vec{y}(k)\| < \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

b) *attraktiv*, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, sodass gilt:
Ist $(\vec{x}(k))$ eine Lösung von (6.1) mit $\|\vec{x}(0) - \vec{y}(0)\| < \delta$, dann gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \|\vec{x}(k) - \vec{y}(k)\| = 0$.

c) *asymptotisch stabil*, wenn $(\vec{y}(k))$ stabil und attraktiv ist.

d) *gleichmäßig stabil*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, sodass gilt:
Ist $(\vec{x}(k))$ eine Lösung von (6.1) mit $\|\vec{x}(a) - \vec{y}(a)\| < \delta(\varepsilon)$ für ein $a \in \mathbb{N}_0$, dann gilt
$$\|\vec{x}(k) - \vec{y}(k)\| < \varepsilon \text{ für alle } k \geq a.$$

e) *gleichmäßig attraktiv*, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, sodass gilt:
Ist $(\vec{x}(k))$ eine Lösung von (6.1) mit $\|\vec{x}(a) - \vec{y}(a)\| < \delta$ für ein $a \in \mathbb{N}_0$, dann gilt
$$\lim_{k\to\infty} \|\vec{x}(k) - \vec{y}(k)\| = 0 \text{ für alle } k \geq a.$$

f) *gleichmäßig asymptotisch stabil*, wenn $(\vec{y}(k))$ gleischmäßig stabil und gleichmäßig attraktiv ist.

g) *global attraktiv*, wenn gilt:
Ist $(\vec{x}(k))$ eine Lösung von (6.1) mit $\vec{x}(0) \in M$, dann gilt
$$\lim_{k\to\infty} \|\vec{x}(k) - \vec{y}(k)\| = 0.$$

h) *global (asymptotisch) stabil*, wenn $(\vec{y}(k))$ global attraktiv und stabil ist.

i) *streng stabil*, wenn es jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, sodass gilt:
Ist $(\vec{x}(k))$ eine Lösung von (6.1) mit $\|\vec{x}(a) - \vec{y}(a)\| < \delta(\varepsilon)$ für ein $a \in \mathbb{N}_0$, dann gilt
$$\|\vec{x}(k) - \vec{y}(k)\| < \varepsilon \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

j) exponentiell asymptotisch stabil, wenn es ein $\lambda > 0$ gibt und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$, sodass gilt:
Ist $(\vec{x}(k))$ eine Lösung von (6.1) mit $\|\vec{x}(a) - \vec{y}(a)\| < \delta(\varepsilon)$ für ein $a \in \mathbb{N}_0$, dann gilt
$$\|\vec{x}(k) - \vec{y}(k)\| < \varepsilon \cdot e^{-\lambda(k-a)} \text{ für alle } k \geq a.$$

k) *beschränkt*, wenn es ein $c > 0$ mit $\|\vec{y}(k)\| \le c$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gibt.

Eigenschaften der Stabilitätsbegriffe. Sei $(\vec{y}(k))$ eine Lösung von (6.1). Dann gilt

a) Ist $(\vec{y}(k))$ streng stabil, so ist $(\vec{y}(k))$ auch gleichmäßig stabil.

b) Ist $(\vec{y}(k))$ gleichmäßig stabil, so ist $(\vec{y}(k))$ auch stabil.

c) Ist $(\vec{y}(k))$ exponentiell asymptotisch stabil, so ist $(\vec{y}(k))$ auch gleichmäßig asymptotisch stabil.

d) Ist $(\vec{y}(k))$ gleichmäßig asymptotisch stabil, so ist $(\vec{y}(k))$ auch asymptotisch stabil.

Bemerkung 6.1. Die Umkehrung der Implikationen gelten im Allgemeinen nicht. Es stellt sich aber heraus, dass viele dieser Stabilitätsbegriffe für lineare Systeme äquivalent sind.

6.2 Stabilitätstheorie nicht autonomer lineare Systeme

Wir betrachten in diesem Abschnitt lineare Systeme mit zeitabhängigen Koeffizienten die gegeben sind durch $G(k, \vec{y}(k)) = A(k)\vec{y}(k) + \vec{b}(k), M = \mathbb{K}^n$, d.h.

$$\vec{y}(k+1) = A(k)\vec{y}(k) + \vec{b}(k) \tag{6.2}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$, wobei $b(k) \in \mathbb{K}^n$ und $A(k) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ für alle $k \ge 0$. Im homogenen Fall ist $\vec{b}(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, d.h. für $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\vec{y}(k+1) = A(k)\vec{y}(k). \tag{6.3}$$

Im Folgenden sei $A(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ als nichtsingulär angenommen.

Lemma 6.1. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

a) Alle Lösungen des inhomogenen Systems (6.2) *sind stabil.*

b) Eine Lösung des inhomogenen Systems (6.2) *ist stabil.*

c) Die Nulllösung des homogenen Systems (6.3) *ist stabil.*

Beweis. Aus *a*) folgt trivialerweise *b*).

Sei *b*) erfüllt und $(\vec{y}(k))$ eine stabile Lösung des inhomogenen Systems (6.2). Weiter sei $(\vec{x}(k))$ eine beliebige Lösung des homogenen Systems (6.3) und $\varepsilon > 0$. Dann ist $(\vec{x}(k) + \vec{y}(k))$ eine Lösung des inhomogenen Systems (6.2), und es gibt ein $\delta(\varepsilon) > 0$, sodass aus $\left\|\vec{x}(0) - \vec{0}\right\| = \|\vec{x}(0) + \vec{y}(0) - \vec{y}(0)\| < \delta$ folgt $\left\|\vec{x}(k) - \vec{0}\right\| = \|\vec{x}(k) + \vec{y}(k) - \vec{y}(k)\| < \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, da $(\vec{y}(k))$ stabil ist. Also ist $\vec{0}$ eine stabile Lösung des homogenen Systems (6.3), und *c)* ist erfüllt.

Sei die Nulllösung von (6.3) stabil und seien $(\vec{y}_1(k))$ und $(\vec{y}_2(k))$ Lösungen des inhomogenen Systems (6.2). Dann ist $\vec{y}_1(k) - \vec{y}_2(k)$ eine Lösung des homogenen Systems (6.3). Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$, sodass

$$\|\vec{y}_1(k) - \vec{y}_2(k)\| < \varepsilon$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, falls $\|\vec{y}_1(0) - \vec{y}_2(0)\| < \delta(\varepsilon)$ erfüllt ist. Somit folgt *a)*, und wir haben *a)* $\Rightarrow$ *b)* $\Rightarrow$ *c)* $\Rightarrow$ *a)* gezeigt. □

Bemerkung 6.2. Es gelten analoge Aussagen auch für die anderen Stabilitätsbegriffe aus Definition 6.1.

Sei $X(k)$ eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems (6.3), und sei $G(k, l) = X(k)X^{-1}(l)$ die dazugehörige Green-Matrix.

Satz 6.2. *Betrachte das homogene System*

$$\vec{y}(k+1) = A(k)\vec{y}(k).$$

Dann gilt, die Nulllösung ist

a) stabil genau dann, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert, sodass gilt

$$\|X(k)\| \leq c$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

b) gleichmäßig stabil genau dann, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert, sodass gilt

$$\|G(k, l)\| \leq c$$

für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq l$.

c) asymptotisch stabil genau dann, wenn

$$\lim_{k \to \infty} \|X(k)\| = 0.$$

d) gleichmäßig asymptotisch stabil genau dann, wenn ein $c > 0$ und ein $\lambda > 0$ existieren, sodass gilt

$$\|G(k, l)\| \leq c \cdot e^{-\lambda(k-l)}$$

für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq l$.

Beweis. Siehe [2, S.184]. □

6.3 Stabilitätstheorie autonomer lineare Systeme

Gilt für das lineare System (6.2) $A(k) = A$ und $b(k) = b$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so erhält man als Spezialfall folgendes lineare System mit zeitunabhängigen Koeffizienten

$$\vec{y}(k+1) = A\vec{y}(k) + \vec{b}, \tag{6.4}$$

wobei $k \in \mathbb{N}_0$, $\vec{y}(k) \in \mathbb{K}^n$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Nach Lemma 6.1 sind alle Lösungen des Systems (6.4) genau dann stabil, wenn die Nulllösung des homogenen Systems

$$\vec{y}(k+1) = A\vec{y}(k) \tag{6.5}$$

stabil ist.

Definition 6.2. Ein Eigenwert λ einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *einfach*, wenn λ die algebraische Vielfachheit 1 besitzt.
Ist die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit, so heißt der Eigenwert λ *halbeinfach*.

Beispiel 6.1. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

hat den einfachen Eigenwert 3 und den halbeinfachen Eigenwert 2. Dagegen ist der Eigenwert 5 nicht halbeinfach, also insbesondere nicht einfach.

Satz 6.3. *Sei $\rho(A) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$ der Betrag des betragsmäßig größten Eigenwerts von A. Dann gelten folgende Aussagen:*

a) Das lineare System (6.4) *ist genau dann stabil, wenn $\rho(A) \le 1$ ist, und $\rho(A) = 1$ nur dann, falls der betragsgrößte Eigenwert halbeinfach ist.*

b) Das lineare System (6.4) *ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\rho(A) < 1$ ist.*

Beweis. Siehe [2, S. 187]. □

Satz 6.4. *Gilt $|\lambda| > 1$ für alle Eigenwerte λ von A, so gilt für jede Lösung des homogenen Systems $\vec{y}(k+1) = A\vec{y}(k)$, $k \in \mathbb{N}_0$,*

$$\lim_{k\to\infty} \|\vec{y}(k)\| = \infty, \ \textit{falls } \vec{y}(0) \neq \vec{0}.$$

Beweis. Folgt aus der Darstellung der Jordanschen Normalform Satz 5.14 □

Definition 6.3. Für das homogene System (6.5) heißt

$$S := \bigoplus_{|\lambda|<1} V(\lambda)$$

stabiler Unterraum und

$$U := \bigoplus_{|\lambda|>1} V(\lambda)$$

instabiler Unterraum von (6.5), wobei $V(\lambda)$ der verallgemeinerte Eigenraum zu einem Eigenwert λ von A ist. Falls $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{|\lambda|\neq 1} V(\lambda)$, dann heißt das System *hyperbolisch*. (Alle direkten Summen sind über paarweise verschiedene λ zu nehmen.)

Satz 6.5. *Für das homogene System* (6.5) *mit den Unterräumen S und U gilt*

a) Aus $\vec{y}(0) \in S$ folgt $\vec{y}(k) \in S$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $\lim_{k\to\infty} \|\vec{y}(k)\| = 0$.

b) Aus $\vec{y}(0) \in U$ mit $\vec{y}(0) \neq \vec{0}$ folgt $\vec{y}(k) \in U$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $\lim_{k\to\infty} \|\vec{y}(k)\| = \infty$.

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass der verallgemeinerte Eigenraum $V(\lambda)$ invariant ist unter A, d.h. $A\vec{y} \in V(\lambda)$ für alle $\vec{y} \in V(\lambda)$.
Sei $\vec{y} \in V(\lambda)$. Dann folgt $(A-\lambda E_n)^m(A-\lambda E_n)\vec{y} = \vec{0}$, d.h. $(A-\lambda E_n)^m A\vec{y} - \lambda\vec{0} = \vec{0}$. Daher gilt $A\vec{y} \in V(\lambda)$. Somit sind auch S und U invariant unter A, und es gilt $\vec{y}(k) \in S$, falls $\vec{y}(0) \in S$, und $\vec{y}(k) \in U$, falls $\vec{y}(0) \in U$, für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die Aktion von A auf $\mathbb{K}^n$ wird durch eine Jordansche Normalform $B = TAT^{-1}$ von A beschrieben, wobei T einen Basiswechsel von der Standardbasis in $\mathbb{K}^n$ in eine Jordanbasis angibt. Da $\mathbb{K}^n = \bigoplus_\lambda V(\lambda)$ aus der linearen Algebra gilt, können wir A auch durch die Restriktion $A|_{V(\lambda)}$ auf die Unterräume $V(\lambda)$ beschreiben. Sei $B(\lambda)$ die Untermatrix von B, die alle Jordan-Blöcke zu λ enthält. Es gilt

$$B(\lambda) = T_\lambda \circ A|_{V(\lambda)} \circ T_\lambda^{-1},$$

wobei T_λ den Basiswechsel in $V(\lambda)$ beschreibt, d.h. $T_\lambda(\vec{v})$ enthält die Koordinaten von $\vec{v} \in V(\lambda)$ bzgl. des Teils der Jordanbasis in $V(\lambda)$.

a) Aus $|\lambda| < 1$ folgt nach Satz 6.4b): $\lim_{k\to\infty} \left\|(B(\lambda))^k\vec{u}\right\| = 0$ für alle $\vec{u} \in \mathbb{K}^m$. Wegen $A|_{V(\lambda)} = T_\lambda^{-1} \circ B(\lambda) \circ T_\lambda$ gilt

$$A^k|_{V(\lambda)} = (T_\lambda^{-1} \circ B(\lambda) \circ T_\lambda)^k = T_\lambda^{-1} \circ (B(\lambda))^k \circ T_\lambda.$$

Also gilt $\lim_{k\to\infty} \left\|A^k\vec{v}\right\| = 0$ für alle $\vec{v} \in V(\lambda)$ und alle Eigenwerte λ mit $|\lambda| < 1$. Daraus folgt

$$\lim_{k\to\infty} \|\vec{y}(k)\| = \lim_{k\to\infty} \left\| A^k \vec{y}(0) \right\| = 0$$

für alle Lösungen von (6.5) mit $\vec{y}$ von $\vec{y}(0) \in S = \bigoplus_{|\lambda|<1} V(\lambda)$.

b) Aus $|\lambda| > 1$ folgt nach Satz 6.4 $\lim_{k\to\infty} \left\|(B(\lambda))^k \vec{u}\right\| = \infty$ für alle $\vec{u} \in \mathbb{K}^m \backslash_{\{\vec{0}\}}$. Somit gilt $\lim_{k\to\infty} \left\|A^k \vec{v}\right\| = \infty$ für $\vec{v} \in V(\lambda)\backslash_{\{\vec{0}\}}$ und daher $\lim_{k\to\infty} \left\|A^k \vec{v}\right\| = \infty$ für $\vec{v} \in U\backslash_{\{\vec{0}\}}$.

$\square$

Literaturverzeichnis

[1] L. Demetrius. Primitivity conditions for growth matrices. *Mathematical Biosciences*, 12:S.53–58, (1971).

[2] S. Elaydi. *An Introduction to Difference Equations.* Springer Verlag New York, 3 edition, (2005).

[3] U. Krause. *Differenzengleichungen und Diskrete Dynamische Systeme: Eine Einführung in Theorie und Anwendungen.* Teubner Verlag Stuttgart, (2013).

[4] U. Krause. *Positive Dynamical Systems in Discrete Time. Theory, Models, and Applications*, chapter 2. De Gruyter, Berlin, Boston, (2015).

[5] R.M. May. *Stability and Complexity in Model Ecosystems.* Landmarks in Biology Series. Princeton University Press, New Jersey, (1973).

[6] H. Rommelfanger. *Differenzengleichungen.* Bibliographisches Institut, Mannheim, (1986).

[7] E. Seneta. *Non-negative Matrices and Markov Chains.* Springer Series in Statistics. Springer-Verlag Berlin, (1981).

[8] G. Sobczyk. Generalized vandermonde determinants and applications. *Aportaciones Matematicas, Serie Comunicaciones*, 30:S. 41–53, (2002).

[9] S. Todt. Stabilitätsverhalten nichtlinearer leslie-modelle. Master's thesis, Uni Bremen, (2001).