

# DIPLOMARBEIT

## Master Thesis

### **Entwicklung eines Programms zum Vergleich der dynamischen Tragwerksantwort von Eisenbahnbrücken auf unterschiedliche Lastmodelle**

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades  
eines Diplom-Ingenieurs/ einer Diplom-Ingenieurin

unter der Leitung von

Univ.Prof.Dipl.-Ing. Dr.techn. Josef Fink und Dipl.-Ing. Georg Brandstetter

E 212

Institut für Tragkonstruktionen – Forschungsbereich für Stahlbau

eingereicht an der Technischen Universität Wien  
Fakultät für Bauingenieurwesen

von

Bernhard Glatz

0825329

Wallensteinstraße 57/12

1200 Wien

Wien, am

eigenhändige Unterschrift



## Danksagung

Ich möchte mich bei allen Personen bedanken, die mich auf während meiner Ausbildung begleitet und durch ihre Unterstützung zum erfolgreichen Abschluss meines Studiums beigetragen haben. Mein besonderer Dank geht an:

*Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Fink*, der im Verlauf meines Studiums mein Interesse für den Stahlbau geweckt hat und mich mit einer interessanten Aufgabenstellung zur Bearbeitung meiner Diplomarbeit am Institut für Tragkonstruktionen, Forschungsbereich für Stahlbau, motivierte.

*Univ.-Ass. Dipl.-Ing. Georg Brandstetter*, der jederzeit bereit war, sich um meine Anliegen zu kümmern und nicht müde wurde, meine fachlichen Fragen zu beantworten. Er hat es durch sein lockeres und kompetentes Auftreten geschafft, für ein sehr angenehmes, konstruktives Betreuungsverhältnis zu sorgen.

meine Freundin *Magdalena*, die es als mein Ruhepol im Alltag verstand, meine Motivation hoch zu halten, auch wenn nicht immer alles nach Wunsch verlaufen ist. Durch ihre Erfahrung aus ihren Studien war sie für mich zusätzlich der erste Ansprechpartner bei Fragen rund um die Diplomarbeit.

meine Eltern *Gertrude* und *Walter*, die mir mein Studium ermöglicht und mich während meiner langen Ausbildung stets unterstützt haben. Sie standen mir bei wichtigen Entscheidungen im Leben mit Rat und Tat zur Seite und haben es dennoch verstanden, mir immer die freie Wahl zu lassen.

meine Großeltern *Johanna* und *Robert*, die meine Interessen stets vor die ihren gestellt haben und mir in vielerlei Hinsicht nach wie vor als Vorbild dienen.

## Kurzfassung

Eisenbahnbrücken erfahren bei Zugüberfahrten eine dynamische Anregung, die unter bestimmten Voraussetzungen zu einer übermäßigen Schwingungsantwort führen kann. Laut aktueller Normensituation ist daher unter gewissen Rahmenbedingungen eine dynamische Berechnung der Tragwerksantwort von Brückentragwerken durchzuführen.

In der vorliegenden Arbeit wird ein normgerechtes Berechnungsverfahren vorgestellt, bei dem die Modalanalyse (als Spezialfall der Methode nach *Ritz* und *Galerkin*) Anwendung auf Einfeldträgerbrücken findet. Die betrachteten Zugkonfigurationen werden dabei als Folge von Einzellasten modelliert, die sich mit konstanter Geschwindigkeit über einen Brückenbalken bewegen. Die Ergebnisse dieses Berechnungsverfahrens werden in Form von Antwortspektren in einer Datenbank gespeichert.

Der Hauptteil dieser Diplomarbeit befasst sich mit der Entwicklung und der Funktionsweise der Software *DynZugVergleich*, die zur Auswertung der Antwortspektren dient. Dieses Programm ermöglicht den Vergleich der dynamischen Tragwerksantwort von Einfeldträgerbrücken auf unterschiedliche Zugmodelle. Zusätzlich wird die Anwendung des Programms *DynZugVergleich* exemplarisch an einem realen Brückentragwerk gezeigt.

## Abstract

Trains cause dynamic excitations by crossing Railway bridges. Under certain circumstances, these excitations can lead to excessive vibrations of the structure. Due to the current state of European standards, the response of railway bridges to train crossings has to be determined by dynamic analysis, if specific parameters are complied.

This master thesis introduces a calculation method consistent with European standards, that adapts the modal response spectrum analysis (as a specialized application of *Ritz'* and *Galerkin's* method) to simply supported girder systems. The vehicles are described as a series of forces, that move over the bridge girder with constant velocity. The results of the calculation method are combined in response spectrums and saved in a data base.

The main part of this master thesis deals with the development and the functional principle of the software *DynZugVergleich*, that enables the evaluation of the response spectrums. This program provides the comparison of the dynamic response of simply supported girder bridges to different train models. Furthermore, the usage of *DynZugVergleich* is shown for an example of a real bridge structure.

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung .....</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation .....	1
1.2	Notwendigkeit einer dynamischen Berechnung .....	1
1.2.1	<i>Festlegungen der ÖNORM EN 1991-2 .....</i>	<i>1</i>
1.2.2	<i>Festlegungen der Richtlinie für die dynamische Berechnung von Eisenbahnbrücken.....</i>	<i>4</i>
1.3	Zielsetzung.....	6
<b>2</b>	<b>Mechanische Grundlagen.....</b>	<b>7</b>
2.1	<i>Bernoulli-Euler-Balken .....</i>	<i>7</i>
2.2	Diskretisierung des Einfeldbalkens.....	7
2.2.1	<i>Verfahren nach Ritz und Galerkin.....</i>	<i>8</i>
2.2.2	<i>Modalanalyse .....</i>	<i>10</i>
2.3	Eigenschwingungen des gelenkig gelagerten <i>Bernoulli-Euler</i> -Balkens .....	10
2.3.1	<i>Herleitung der Bewegungsgleichung.....</i>	<i>10</i>
2.3.2	<i>Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen .....</i>	<i>12</i>
2.4	Aufstellen der modalen Bewegungsgleichungen nach <i>Ritz</i> und <i>Galerkin</i> .....	16
2.5	Erstellung von Dämpfungsmatrizen .....	19
2.5.1	<i>Modale Dämpfung.....</i>	<i>19</i>
2.5.2	<i>Rayleighsche Dämpfung .....</i>	<i>20</i>
2.6	Belastungsvektor .....	21
2.6.1	<i>Folge von Einzelkräften.....</i>	<i>21</i>
<b>3</b>	<b>Berechnungsverfahren zur Erstellung von Antwortspektren .....</b>	<b>25</b>
3.1	Grundidee des Berechnungsverfahrens.....	25
3.1.1	<i>Überblick der Berechnungsschritte.....</i>	<i>25</i>
3.1.2	<i>Betrachtung einer überfahrenden Einzelkraft.....</i>	<i>27</i>
3.1.3	<i>Zusammenfassung.....</i>	<i>29</i>
3.2	Festlegungen zur Berechnung der Antwortspektren .....	30
3.2.1	<i>Brückenträger.....</i>	<i>30</i>

---

3.2.2	<i>Anzahl der Eigenschwingungsformen</i>	30
3.2.3	<i>Dämpfung</i>	32
3.3	Aufbau der Antwortspektren	33
3.4	Überfahrtssimulation für ein festgelegtes Bezugssystem	34
3.4.1	<i>Numerische Lösung der Bewegungsgleichungen</i>	36
3.4.2	<i>Auslesen der Systemantwort</i>	39
3.5	Skalierung der Antwortspektren	42
3.6	Validierung des Berechnungsverfahrens zur Erstellung von Antwortspektren	44
3.6.1	<i>Abweichungen zwischen neu berechneten Antwortspektren und Referenzdaten</i>	45
3.6.2	<i>Identifikation der Fehlerquelle</i>	48
<b>4</b>	<b>Zugmodelle</b>	<b>49</b>
4.1	Zugmodelle für die dynamische Berechnung	49
4.1.1	<i>Züge der HSLM-A-Reihe</i>	49
4.1.2	<i>Konfigurationen des ÖBB Railjet</i>	50
4.1.3	<i>Übersicht aller Zugdaten</i>	52
4.2	Zugmodelle für die statische Berechnung – Lastmodell 71	52
4.2.1	<i>Lastklasse/Brückenklasse</i>	53
4.2.2	<i>Dynamischer Beiwert <math>\phi</math></i>	54
4.2.3	<i>Erstellung eines Antwortspektrums für das LM71</i>	55
4.2.4	<i>Berechnungsparameter</i>	56
<b>5</b>	<b>Funktion und Anwendung des Programms <i>Asp_Einfeldbr_v01_1</i></b>	<b>59</b>
5.1	Einsatzbereich des Programms	59
5.2	Benutzeroberfläche	60
5.3	Eingangsgrößen	60
5.4	Ergebnisauswertung und Darstellung	61
<b>6</b>	<b>Funktion und Anwendung des Programms <i>DynZugVergleich_V1</i></b>	<b>63</b>
6.1	Einsatzbereich des Programms	63
6.2	Benutzeroberfläche	63
6.3	Eingangsgrößen	64
6.4	Auswertung und Umstrukturierung der Daten	66
6.4.1	<i>Festlegung der Brückenspannweite <math>L</math></i>	66
6.4.2	<i>Auswahl der Zugmodelle</i>	66
6.4.3	<i>Festlegung der Biegesteifigkeit und Brückenmasse</i>	68

---

6.5	Ausgabe .....	68
6.5.1	<i>Darstellung der Systemantwort</i> .....	68
6.5.2	<i>Darstellung der Überschreitungen des Referenzspektrums</i> .....	69
6.5.3	<i>Darstellung der Überschreitungen des Maximalwerts des Referenzspektrums</i> .....	70
6.5.4	<i>Darstellung der Überschreitungen bezogen auf den Maximalwert des Referenzspektrums (3D-Darstellung)</i> .....	72
<b>7</b>	<b>Funktion und Anwendung des Programms <i>DynZugVergleich_V2</i></b> .....	<b>77</b>
7.1	Einsatzbereich des Programms .....	77
7.2	Benutzeroberfläche .....	77
7.3	Eingangsgrößen .....	78
7.4	Auswertung und Umstrukturierung der Daten .....	79
7.4.1	<i>Festlegung der Brückenspannweite L</i> .....	79
7.4.2	<i>Auswahl der Zugmodelle</i> .....	80
7.4.3	<i>Festlegung der ersten Eigenfrequenz</i> .....	80
7.5	Ausgabe .....	80
7.5.1	<i>Darstellung der Überschreitung des Maximalwerts des Referenzspektrums</i> .....	80
7.5.1	<i>Darstellung der Überschreitungen bezogen auf den Maximalwert des Referenzspektrums (3D-Darstellung)</i> .....	81
<b>8</b>	<b>Anwendung von <i>Asp_Einfeldbr_v01</i> und <i>DynZugVergleich</i> an einem realen Brückentragwerk</b> .....	<b>83</b>
8.1	Ermittlung der maximalen Tragwerksantwort mit <i>Asp_Einfeldbr_v01_1</i> .....	84
8.1.1	<i>Einsetzen der minimalen Brückenmasse</i> .....	84
8.1.2	<i>Einsetzen der maximalen Brückenmasse</i> .....	87
8.1.3	<i>Übersicht der Berechnungsergebnisse</i> .....	90
8.2	Vergleich der Tragwerksantwort für unterschiedliche Zugmodelle mit <i>DynZugVergleich_V1</i> 91	
8.2.1	<i>Vergleich Hochgeschwindigkeitszüge – „LM71 alpha=1,0“</i> .....	91
8.2.2	<i>Vergleich ÖBB Railjet - HSLM-A10</i> .....	96
	<b>Anhang</b> .....	<b>101</b>
A	Exemplarische Bestimmung des Lastvektors .....	101
B	Zugdaten .....	103
C	Pläne des Farrenbachviadukts .....	106
	<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>109</b>







# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Zugüberfahrten über Eisenbahnbrücken können unter gewissen Umständen zu einer Anregung der Brücke führen, welche eine übermäßige Schwingung des Systems und somit übermäßige Belastungen hervorruft. Solche Resonanzphänomene entstehen dann, wenn eine Brücke, durch eine Folge von Lasten mit einer bestimmten Geschwindigkeit, im Bereich ihrer Eigenfrequenz (oder eines natürlichen Teilers bzw. Vielfachen davon) angeregt wird. In früheren Normenwerken wurde diesem Umstand dadurch Rechnung getragen, dass die Ergebnisse einer statischen Berechnung der Tragwerksantwort (z.B. Biegemomente oder Durchbiegungen) mit einem Vergrößerungsfaktor beaufschlagt wurden, der die Effekte einer dynamischen Anregung abdecken sollte. Diese Art der Berechnung ist jedoch nicht mit einer dynamischen Berechnung gleichzusetzen, da sie nicht imstande ist, Resonanzeffekte zu erkennen bzw. abzudecken. Da in der heutigen Zeit immer höhere Zuggeschwindigkeiten für die Schaffung eines leistungsfähigeren Eisenbahnnetzes und immer schlankere Konstruktionen im Sinne der Wirtschaftlichkeit angestrebt werden, kommt der Betrachtung dynamischer Effekte eine steigende Bedeutung zu. Auch der Eurocode [12] fordert unter bestimmten Voraussetzungen eine dynamische Berechnung der Tragwerksantwort von Eisenbahnbrücken, wodurch die quasi-statische Betrachtungsweise der früheren Normenwerke außerhalb gewisser Grenzen nicht mehr ausreicht.

## 1.2 Notwendigkeit einer dynamischen Berechnung

### 1.2.1 Festlegungen der ÖNORM EN 1991-2

Das aktuell gültige Normenwerk zur Bestimmung der Verkehrslasten auf Eisenbahnbrücken ist die ÖNORM EN 1991-2 [12]. Sie regelt unter anderem, ob eine dynamische Berechnung der Tragwerksantwort durchzuführen ist und welche Verkehrslasten anzusetzen sind. Als Hauptfaktoren, die das dynamische Verhalten einer Eisenbahnbrücke beeinflussen, werden in [12] folgende genannt:

- die Geschwindigkeit bei der Überfahrt
- die Spannweite  $L$  des Bauteils und die Einflusslänge für die Durchbiegung des betreffenden Bauteils

- die Masse des Tragwerks
- die Eigenfrequenz des gesamten Bauwerks und einzelner Bauteile des Bauwerks und die zugehörigen Eigenformen entlang der Gleisachse
- die Anzahl der Achsen, die Achslasten und die Achsabstände
- die Dämpfung des Tragwerks
- vertikale Unregelmäßigkeiten im Gleis
- die ungefederten/abgefederten Massen und Aufhängungseigenschaften der Fahrzeuge
- regelmäßig angeordnete Auflager von Fahrbahnplatten bzw. Gleis (Querträger, Schwellen, usw.)
- Fahrzeugunregelmäßigkeiten (Flachstellen, unrunde Ränder, Aufhängungsschäden usw.)
- die dynamischen Eigenschaften des Gleises (Schotter, Schwellen, Gleisbestandteile usw.)

Die Entscheidung, ob eine dynamische Berechnung durchzuführen ist oder nicht, wird in [12] über das Flussdiagramm in Abb. 1.1 getroffen.

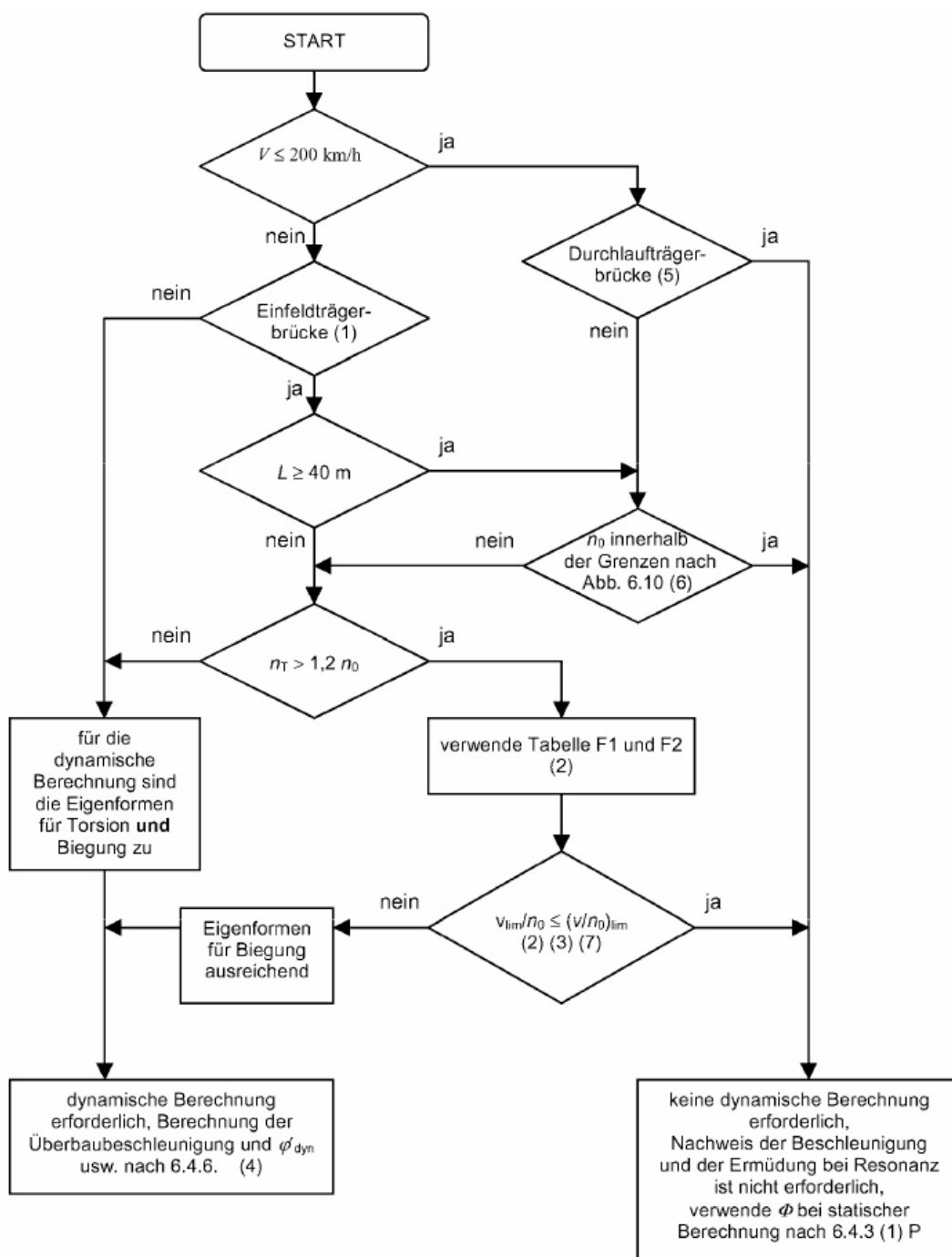


Abb. 1.1: Flussdiagramm zur Festlegung, ob eine dynamische Berechnung notwendig ist ([12], Bild 6.9, S.75)

Mit

$V$  .....örtlich zulässige Geschwindigkeit [ $km/h$ ]

$L$ .....Spannweite [ $m$ ]

$n_0$ .....erste Biegeeigenfrequenz der Brücke unter ständigen Lasten [ $Hz$ ]

$n_T$  .....erste Torsionseigenfrequenz der Brücke unter ständigen Lasten [ $Hz$ ]

$v$ .....Streckenhöchstgeschwindigkeit [ $m/s$ ]

Die erste Biegeeigenfrequenz  $n_0$  kann für einen Einfeldträger unter reiner Biegung durch Gl. (1.1) abgeschätzt werden:

$$n_0 [\text{Hz}] = \frac{17,75}{\sqrt{\delta_0}} \quad (1.1)$$

$\delta_0$  .....Verformung in Feldmitte aufgrund ständiger Lasten [mm]

Befindet sich der Wert für  $n_0$  außerhalb der in Abb. 1.2 dargestellten Grenzen, ist eine dynamische Berechnung durchzuführen.

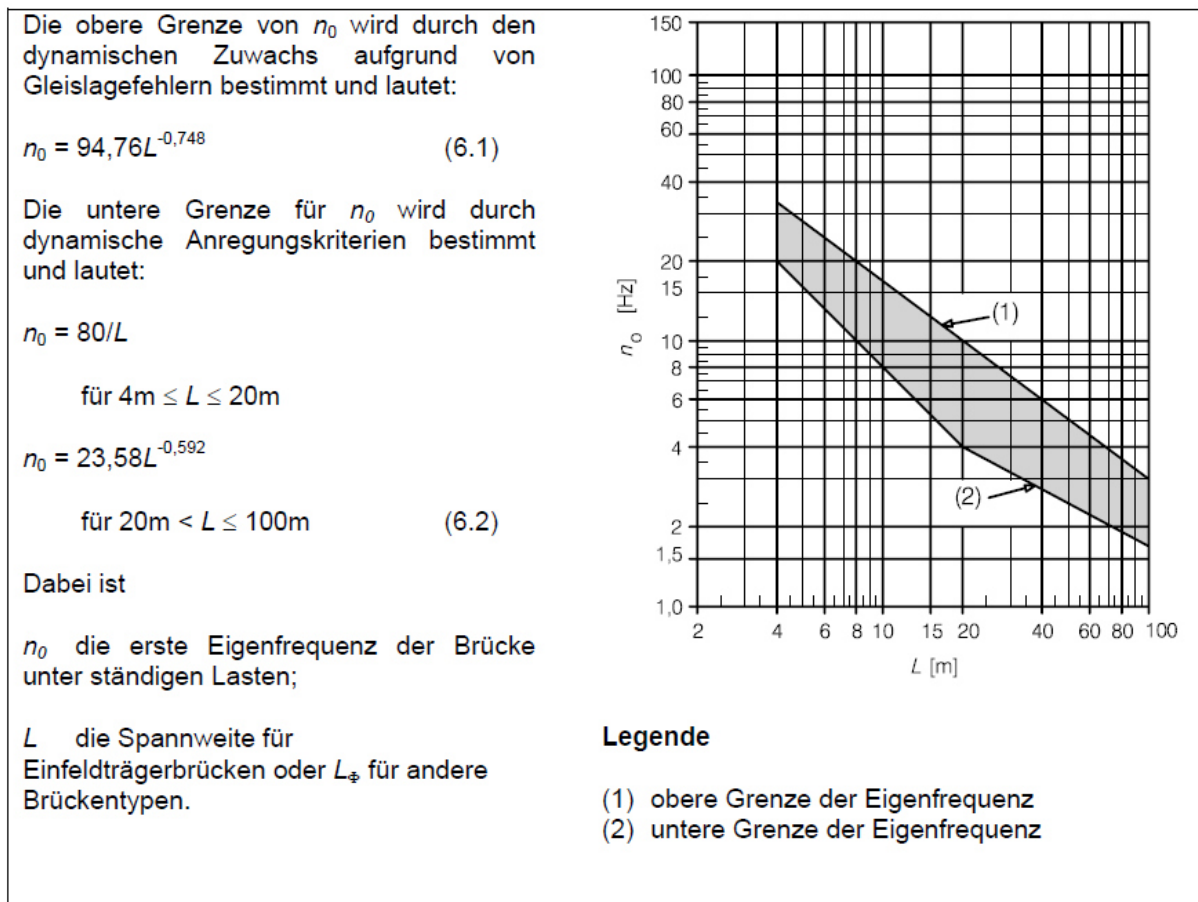


Abb. 1.2: Grenzen für  $n_0$  [Hz] als Funktion der Spannweite  $L$  ([12], Bild 6.10, S.77)

### 1.2.2 Festlegungen der Richtlinie für die dynamische Berechnung von Eisenbahnbrücken

Als Ergänzung zum Eurocode [12] wurde von der ÖBB Infrastruktur die Richtlinie für die dynamische Berechnung von Eisenbahnbrücken [9] herausgegeben, die für das österreichische Streckennetz gilt. Diese Richtlinie hat zum Ziel, dynamische Berechnungen von Brückentragwerken objektiv vergleichbar zu machen, indem gewisse Mindeststandards für diese Berechnungen festgelegt werden.

Ebenso sind in [9] über die Bestimmungen aus [12] hinausgehende Kriterien definiert, die die Erfordernis von dynamischen Berechnungen festlegen. Ist eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt, darf auf die dynamische Berechnung der Tragwerksantwort verzichtet werden:

- Die Streckenhöchstgeschwindigkeit bzw. die örtlich zulässige Geschwindigkeit für das betreffende Objekt liegt unter  $120 \text{ km/h}$ .
- Das betreffende Objekt hält die Randbedingungen und Grenzkurven ein, die in den (von den Österreichischen Bundesbahnen herausgegebenen) „Planungsgrundsätze für Eisenbahnbrücken, Ausgabe 01.12.2008“ enthalten sind. Diese Grenzkurven wurden im Rahmen einer umfangreichen Parameterstudie von Regelkonstruktionen bestehender Brückentragwerke entwickelt und sind für die folgenden Konstruktionstypen bzw. Stützweiten vorhanden:
  - Plattentragwerke, eingleisig, Stützweitenbereich  $5,0 - 15,0 \text{ m}$
  - Rahmentragwerke, eingleisig, Lichtweitenbereich  $2,5 - 10,0 \text{ m}$
  - WIB-Tragwerke, eingleisig, Stützweitenbereich ab  $5,0 \text{ m}$
- Das Tragwerk ist überschüttet und der Abstand zwischen Schwellenoberkante und Tragwerksoberkante beträgt mindestens  $1,50 \text{ m}$ . Die dynamische Anregung nimmt in diesem Fall infolge der Lastverteilungs- und Dämpfungseffekte durch die Überschüttung sehr geringe Ausmaße an.
- Es handelt sich um ein Kleinobjekt (Plattentragwerk mit einer Stützweite  $< 2,0 \text{ m}$  bzw. Rahmenbauwerk mit einer Lichtweite  $< 2,0 \text{ m}$ ), dessen Tragwerksstärke die von der Stütz-/Lichtweite abhängigen Mindestwerte laut Abb. 1.3 einhält.

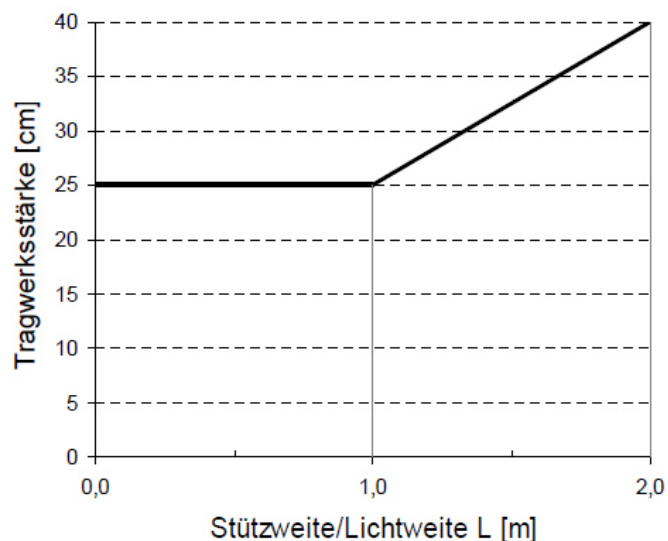


Abb. 1.3: Mindest-Tragwerksstärke Kleinobjekte ([9], Abb. 4, S. 9)

- Für ein vergleichbares Brückenobjekt wurden bereits entsprechende Untersuchungen nach [9] durchgeführt und sämtliche Nachweise einschließlich dynamischer Messung erbracht. Zusätzlich sind alle Parameter, die einen Einfluss auf das dynamische Verhalten aufweisen, entweder ident oder günstiger im Hinblick auf die dynamische Anregung.

Für alle Tragwerke, die diesen Voraussetzungen nicht entsprechen, ist nach [9] unabhängig von den Festlegungen in [12] eine dynamische Berechnung durchzuführen.

### 1.3 Zielsetzung

Aus der Notwendigkeit, die Tragwerksantwort von neu zu errichtenden Eisenbahnbrücken, oder von Bestandsobjekten unter geänderter Belastung (z.B. durch das Überfahren neuer Zugkonfigurationen oder höheren Betriebsgeschwindigkeiten) dynamisch zu berechnen, entsteht der Bedarf nach Hilfsmitteln, welche die dynamischen Effekte einer Zugüberfahrt mit möglichst geringem Aufwand darstellen können. Zu diesem Zweck wurde das Programm *Asp\_Einfeldbr\_v01* von Tobias Mähr [7] entwickelt, mit dessen Hilfe vier bemessungsrelevante Größen (Durchbiegung, Vertikalbeschleunigung, Querschnittsdrehwinkel am Auflager und Biegemoment) zufolge dynamischer Anregung durch einzelne Modellzüge ausgewertet werden können. Dieses Programm berücksichtigt ausschließlich Einfeldträgerbrücken mit einer Spannweite zwischen  $7m$  und  $100m$  unter der Belastung eines Modellzuges aus der HSLM-A-Reihe nach ÖN EN 1991-2 [12] (siehe Abschnitt 4.1.1).

Erstes Ziel dieser Arbeit ist es, das Programm *Asp\_Einfeldbr\_v01* für zusätzliche Zugmodelle zu erweitern. Zu diesem Zweck wird die dynamische Tragwerksantwort von Eisenbahnbrücken zufolge der Überfahrt der Zugkonfigurationen des ÖBB Railjet aus der ÖN B 1991-2 [10] (siehe Abschnitt 4.1.2) berechnet und in die Programmversion *Asp\_Einfeldbr\_v01\_1* implementiert.

Das zweite Ziel dieser Arbeit ist es, ein Programm bereitzustellen, mit dessen Hilfe ein Vergleich der dynamischen Tragwerksantwort von Eisenbahnbrücken auf unterschiedliche Zugmodelle hergestellt werden kann. Zu diesem Zweck werden die Programme *DynZugVergleich\_V1* und *DynZugVergleich\_V2* entwickelt, deren Funktionsweise in dieser Arbeit erläutert wird.



## 2 Mechanische Grundlagen

Die Untersuchung der Schwingungen von Brückentragwerken, die von überfahrenden Eisenbahnzügen hervorgerufen werden, stellt ein umfassendes Problem mit einer Vielzahl an einfließenden Parametern dar. Die Anforderung an eine dynamische Berechnung ist es, die Aufgabenstellung soweit zu vereinfachen, dass sie durch geeignete mechanische Modelle erfasst werden kann und die maßgebenden dynamischen Effekte erkannt werden.

Diese Arbeit befasst sich ausschließlich mit Einfeldträgerbrücken, die als gelenkig gelagerter *Bernoulli-Euler*-Balken mit unveränderlichen Querschnittseigenschaften (Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  und Massebelegung  $\mu$ ) über die Spannweite  $L$  betrachtet werden. In diesem Kapitel wird die mathematische Formulierung der Schwingungen solcher Balken unter bewegter Einzellast beschrieben und die dafür getroffenen Vereinfachungen erläutert.

### 2.1 *Bernoulli-Euler*-Balken

Die Balkentheorie von *Bernoulli-Euler* basiert auf den folgenden Annahmen:

- Ebenbleiben der Querschnitte
- Vernachlässigung der Schubverzerrung

Aus diesen beiden Annahmen folgt, dass alle ebenen Querschnitte eines Balkens, die im unverformten Zustand normal auf die Stabachse stehen, nach einer Deformation des Körpers eben bleiben und normal auf die verformte Stabachse stehen [14]. Allen weiteren Berechnungsmethoden im Rahmen dieser Arbeit liegt die vereinfachte Betrachtungsweise des *Bernoulli-Euler*-Balkens zugrunde. Diese Vereinfachung stellt eine gute Näherung für stabförmige Bauteile mit großen Verhältnissen der Stablänge  $L$  zur Querschnittshöhe  $h$  dar. Die Untersuchung von wandartige Träger mit kleinen  $L/h$ -Verhältnissen mit der Balkentheorie nach *Bernoulli-Euler* kann auf große Abweichungen zum realen Tragverhalten führen. Grenzwerte für das Verhältnis  $L/h$  können aus der Literatur (z.B. [14]) entnommen werden.

### 2.2 Diskretisierung des Einfeldbalkens

Die Betrachtung der Schwingung eines Einfeldbalkens stellt ein Problem mit unendlicher Anzahl an Freiheitsgraden dar. Um dennoch brauchbare Lösungen zu finden, ist es notwendig, geeignete Näherungsverfahren anzuwenden, die das System auf eine endliche

Anzahl an Freiheitsgraden reduzieren. Solche Methoden der Diskretisierung sind beispielsweise [7]:

- Konzentrierte Massen
- Verfahren nach *Ritz* und *Galerkin*
- Finite-Elemente-Methode (FEM)

*Mähr* erläutert diese drei Methoden in [7] und stellt ihre Vor- und Nachteile gegenüber. In der vorliegenden Diplomarbeit kommt ausschließlich das Verfahren nach *Ritz* und *Galerkin* zur Anwendung, weshalb im nächsten Abschnitt nur diese Methode genauer betrachtet wird.

### 2.2.1 Verfahren nach *Ritz* und *Galerkin*

Lit.: *Ziegler* [15]

#### **Ritzscher Näherungsansatz**

Dieses Verfahren setzt voraus, dass sich eine gesuchte Größe, z.B. der Verschiebungsverlauf  $w(x, t)$ , durch einen *Ritzschen* Näherungsansatz der Form

$$w^*(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \varphi_i(x) \quad (2.1)$$

beschreiben lässt. Die Ansatzfunktionen  $\varphi_i(x)$  müssen dabei vorab so gewählt werden, dass sie die kinematischen (und soweit möglich auch die dynamischen) Randbedingungen erfüllen. Zunächst noch unbekannt sind die generalisierten Koordinaten (Lagekoordinaten)  $q_i(t)$ , welche die jeweils zugehörige Ansatzfunktion gewichten.

Der gesuchte Verschiebungsverlauf wird am Ersatzsystem zu jedem Zeitpunkt  $t$  durch eine endliche Reihe gewichteter Ansatzfunktionen ausgedrückt. Dadurch reduziert sich die Aufgabenstellung der Bestimmung des Verschiebungsverlaufs (von Ort und Zeit abhängig) auf die Ermittlung der Lagekoordinaten (nur von der Zeit abhängig).

#### **Galerkin-Verfahren**

Die Bestimmung der Lagekoordinaten kann mit dem *Galerkin*-Verfahren erfolgen. Dabei werden die Differentialgleichungen des untersuchten Problems durch den Differentialoperator  $\mathcal{D}\{w\}$  ausgedrückt, sodass für die strenge Lösung gilt:

$$\mathcal{D}\{w\} = 0 \quad (2.2)$$

Für die Unbekannte  $w(x, t)$  wird ein *Ritzscher* Näherungsansatz eingesetzt. Dabei entstehen Fehlerterme auf der rechten Seite der Gl. (2.2), die als Lasten  $p^*$  im Feld und  $Q^*$  am Rand des Körpers ( $Q^*$  nur, falls der *Ritzsche* Ansatz nicht alle dynamischen Randbedingungen erfüllt) interpretiert werden können:

$$\mathcal{D}\{w^*\} = p^* + Q^* \quad (2.3)$$

Diese fiktiven Lasten  $p^*$  und  $Q^*$  müssen ein Gleichgewichtssystem bilden, welches durch das *D'Alembertsche* Prinzip (Prinzip der virtuellen Arbeit) formuliert werden kann:

$$\int_B p^* \delta w^* dB + \oint_{\delta B} Q^* \delta w^* dS = 0 \quad (2.4)$$

Die fiktiven Kräfte  $p^*$  leisten im gesamten Körpervolumen  $B$ , die fiktiven Kräfte  $Q^*$  nur an der Körperberandung  $\delta B$  virtuelle Arbeit. Gl. (2.4) besagt, dass die am Gesamtsystem geleistete virtuelle Arbeit verschwinden muss. Setzt man nun den *Ritzschen* Ansatz

$$\delta w^* = \sum_{i=1}^n \varphi_i \delta q_i \quad (2.5)$$

in Gl. (2.4) ein und verlangt, dass das Gleichgewicht für jede beliebige Variation der Lagekoordinaten  $\delta q_i$  erhalten bleibt, folgt daraus die *Galerkinsche* Vorschrift:

$$\int_B p^* \varphi_i dB + \oint_{\delta B} Q^* \varphi_i dS = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

Erfüllt der *Ritzsche* Ansatz auch alle dynamischen Randbedingungen ( $Q^* \equiv 0$ ), folgt aus Gl. (2.6)

$$\int_B p^* \varphi_i dB = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

bzw. in Kombination mit Gl. (2.3) die „Normalform“

$$\int_B \mathcal{D}\{w^*\} \varphi_i dB = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

Die *Galerkinsche* Vorschrift in Gl. (2.8) stellt somit  $n$  Gleichungen zur Bestimmung der Lagekoordinaten  $q_i$  zur Verfügung.

### 2.2.2 Modalanalyse

Die Modalanalyse folgt als Spezialfall aus dem Verfahren nach *Ritz* und *Galerkin*, wenn im *Ritzschen* Ansatz die exakten Eigenfunktionen des Balkens als Ansatzfunktionen  $\varphi_i(x)$  gewählt werden. Die Eigenfunktionen besitzen die Eigenschaft der Orthogonalität, weshalb die Bewegungsgleichungen entkoppeln und für jede Eigenschwingungsform getrennt gelöst werden können. Sind die Eigenfunktionen des untersuchten Körpers bekannt, wird die Lösung der Bewegungsgleichungen durch die modale Analyse erheblich vereinfacht.

## 2.3 Eigenschwingungen des gelenkig gelagerten Bernoulli-Euler-Balkens

Zur Anwendung der modalen Analyse ist die Kenntnis der Eigenfunktionen des betrachteten Systems essentiell. Dieser Abschnitt befasst sich mit der Herleitung der Bewegungsgleichung und der Ermittlung der Eigenformen für einen *Bernoulli-Euler*-Balken nach Abb. 2.1.

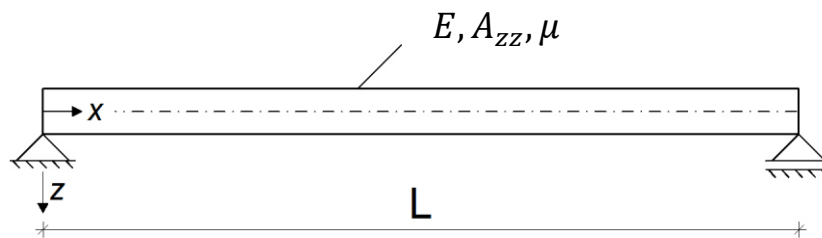


Abb. 2.1: gelenkig gelagerter *Bernoulli-Euler*-Balken

- $E$  ..... Elastizitätsmodul [ $N/m^2$ ]
- $A_{zz}$  ..... Flächenträgheitsmoment [ $m^4$ ]
- $\mu = \rho \cdot A$  ..... Massebelegung [ $kg/m$ ]
- $\rho$  ..... Dichte [ $kg/m^3$ ]
- $A$  ..... Querschnittsfläche [ $m^2$ ]
- $L$  ..... Spannweite [ $m$ ]

### 2.3.1 Herleitung der Bewegungsgleichung

Die Herleitung der Bewegungsgleichung des *Bernoulli-Euler*-Balkens basiert auf den folgenden Annahmen:

– *Theorie 1. Ordnung*

Das Gleichgewicht wird am unverformten Balken formuliert, weshalb Quer- und Axialbeanspruchungen des Stabes nicht gekoppelt sind und getrennt voneinander betrachtet werden dürfen. Dies bedeutet, dass die Transversalschwingungen unabhängig von der im Stab vorhandenen Normalkraft sind.

– *Vernachlässigung der Rotationsträgheit*

Bei der Formulierung des Momentengleichgewichts am Balkenelement Gl. (2.10) wird der Einfluss der Rotationsträgheit als vernachlässigbar klein angenommen.

– *Elastisches Materialverhalten*

Das Hookesche Gesetz gilt uneingeschränkt.

– *Viskose Dämpfung*

Die Dämpfungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit  $\dot{w}(x, t)$  und zum Dämpfungsbeiwert  $c_z$  [ $Ns/m^2$ ].

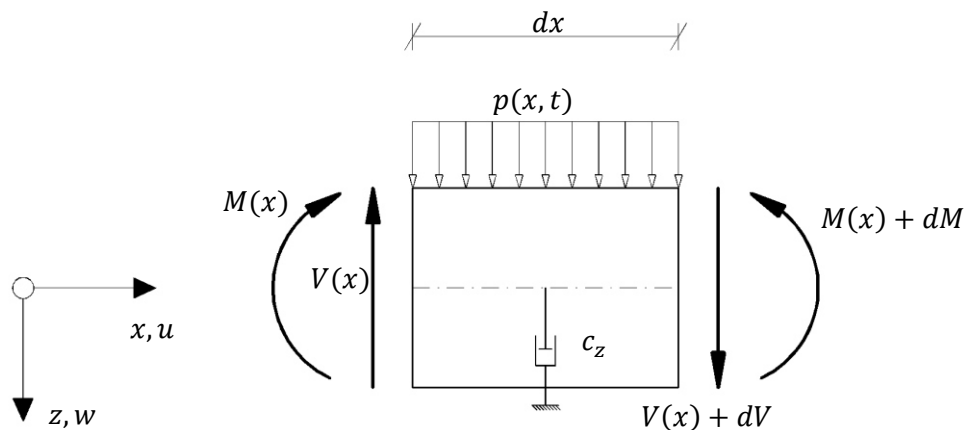


Abb. 2.2: infinitesimales Balkenelement  $dx$

Grundlage für die Herleitung der Bewegungsgleichung des *Bernoulli-Euler*-Balkens ist die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am infinitesimalen Balkenelement aus Abb. 2.2. Aus der dynamischen Gleichgewichtsbedingung in Richtung der  $z$ -Achse folgt:

$$\mu dx \ddot{w} = \left( V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) - V + p dx - c_z dx \dot{w} \quad (2.9)$$

Die dynamische Momentengleichgewichtsbeziehung an der Stelle  $x + dx$  liefert:

$$0 = \left( M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) - M - V dx \quad (2.10)$$

Die konstitutive Beziehung der Theorie I. Ordnung zwischen Biegemoment und Verkrümmung der Stabachse lautet:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{M}{EA_{zz}} \quad (2.11)$$

Kombination der Gleichungen (2.9), (2.10) und (2.11), sowie Elimination der Schnittgrößen führt zur gesuchten Bewegungsgleichung des *Bernoulli-Euler-Balkens*:

$$EA_{zz} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c_z \dot{w} + \mu \ddot{w} = p(x, t) \quad (2.12)$$

### 2.3.2 Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen

Lit.: *Hagedorn* [5] und *Markert* [8]

Streichen des Lastterms und des Dämpfungsterms in Gl. (2.12) und eine im Sinne der besseren Übersicht geänderte Schreibweise ( $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = w_{,xxxx}$ ) führt zur harmonischen Differentialgleichung

$$EA_{zz} w_{,xxxx} + \mu \ddot{w} = 0 \quad (2.13)$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung kann ein *Bernoullischer* Separationsansatz nach Gl. (2.14) gewählt werden.

$$w(x, t) = \phi(x)q(t) \quad (2.14)$$

Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. (2.13) führt zu

$$\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} + \frac{EA_{zz}}{\mu} \frac{\phi_{,xxxx}(x)}{\phi(x)} = 0 \quad (2.15)$$

Gleichung (2.15) muss für jeden beliebigen Zeitpunkt an jedem Punkt des Balkens gelten und kann somit nur erfüllt sein, wenn beide Terme konstant sind. Dies wird durch die Gleichungen (2.16 a) und (2.16 b) beschrieben:

$$\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = -\omega^2 \quad (2.16 \text{ a})$$

$$\frac{EA_{zz}}{\mu} \frac{\phi_{,xxxx}(x)}{\phi(x)} = \omega^2 \quad (2.16 \text{ b})$$

Gl. (2.16 a) ist eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung für die Zeitfunktion  $q(t)$  und beschreibt eine harmonische Schwingung. Ihre Lösung lautet:

$$q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (2.17)$$

Die Konstanten  $A$  und  $B$  können aus den Anfangsbedingungen berechnet werden:

$$q(0) = A \qquad \dot{q}(0) = B\omega \quad (2.18)$$

Die Differentialgleichung 4. Ordnung für die Ortsfunktion  $\phi(x)$  aus Gl. (2.16 b) wird zunächst aus Gründen der Übersichtlichkeit umformuliert zu:

$$\phi_{,xxxx}(x) - k^4 \phi(x) = 0 \quad (2.19)$$

mit

$$k = \sqrt[4]{\frac{\mu\omega^2}{EA_{zz}}} \quad (2.20)$$

Der Exponentialansatz der Form

$$\phi(x) = C e^{\lambda x} \quad (2.21)$$

führt eingesetzt in Gleichung (2.19) zur charakteristischen Gleichung:

$$\lambda^4 - k^4 = 0 \quad (2.22)$$

Diese charakteristische Gleichung hat die 4 Nullstellen

$$\lambda_1 = k, \quad \lambda_2 = -k, \quad \lambda_3 = ik, \quad \lambda_4 = -ik \quad (2.23)$$

sodass die Lösung von (2.19) in der komplexen Form

$$\phi(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} + C_3 e^{ikx} + C_4 e^{-ikx} \quad (2.24)$$

oder mithilfe von trigonometrischen und hyperbolischen Termen in der reellen Form

$$\phi(x) = D_1 \cosh(kx) + D_2 \sinh(kx) + D_3 \cos(kx) + D_4 \sin(kx) \quad (2.25)$$

angegeben werden kann.  $\phi(x)$  wird in Gl. (2.25) als Eigenfunktion des Balkens bezeichnet.

### Randbedingungen

Die Integrationskonstanten  $D_1$  bis  $D_4$  der allgemeinen Lösung (2.25) können durch das Anpassen an die Randbedingungen ermittelt werden. Für den beidseits gelenkig gelagerten Einfeldbalken aus Abb. 2.1 lauten die Randbedingungen:

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(L) = 0 \quad (2.26)$$

$$M(0) = 0, \quad M(L) = 0 \quad (2.27)$$

Die dynamischen Randbedingungen (2.27) führen in Kombination mit Gl. (2.11) zu

$$\phi_{,xx}(0) = 0, \quad \phi_{,xx}(L) = 0 \quad (2.28)$$

Einsetzen der Randbedingungen in Gl. (2.25) führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$\phi(0) = D_1 \cosh(0) + D_2 \sinh(0) + D_3 \cos(0) + D_4 \sin(0) = 0 \quad (2.29)$$

$$\phi_{,xx}(0) = k^2(D_1 \cosh(0) + D_2 \sinh(0) - D_3 \cos(0) - D_4 \sin(0)) = 0 \quad (2.30)$$

$$\phi(L) = D_1 \cosh(kL) + D_2 \sinh(kL) + D_3 \cos(kL) + D_4 \sin(kL) = 0 \quad (2.31)$$

$$\phi_{,xx}(L) = k^2[D_1 \cosh(kL) + D_2 \sinh(kL) - D_3 \cos(kL) - D_4 \sin(kL)] = 0 \quad (2.32)$$

Dividiert man Gl. (2.30) durch  $k^2$  und subtrahiert davon Gl. (2.29), kann daraus die Konstante

$$D_3 = 0 \quad (2.33)$$

bestimmt werden. Aus Gl. (2.33) und Gl. (2.29) folgt der Wert für die Konstante

$$D_1 = 0 \quad (2.34)$$

Die Gleichungen (2.31) und (2.32) degenerieren unter Berücksichtigung von Gl. (2.33) und (2.34) zu folgendem Gleichungssystem:

$$D_2 \sinh(kL) + D_4 \sin(kL) = 0 \quad (2.35)$$

$$D_2 \sinh(kL) - D_4 \sin(kL) = 0 \quad (2.36)$$

Addition von Gl. (2.35) und Gl. (2.36) führt auf:

$$2D_2 \sinh(kL) = 0 \quad (2.37)$$

Die Triviale Lösung für Gl. (2.37) von  $k = 0$  repräsentiert den statischen Fall und ist daher nicht von Interesse. Somit folgt für die Integrationskonstante

$$D_2 = 0 \quad (2.38)$$

Aus den Gleichungen (2.38) und (2.35) folgt

$$D_4 \sin(kL) = 0 \quad (2.39)$$

Nichttriviale Lösungen der Gl. (2.39) existieren, wenn gilt:

$$\sin(kL) = 0 \quad (2.40)$$

bzw.

$$kL = j\pi \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.41)$$

Die Eigenfunktionen des gelenkig gelagerten *Bernoulli-Euler*-Balkens ergeben sich durch das Einsetzen der Integrationskonstanten und Gl. (2.41) in die allgemeine Lösung (2.25) zu

$$\phi(x) = D_4 \sin(kx) = D_4 \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \quad (2.42)$$



Die  $j$ -te Eigenkreisfrequenz des Systems kann durch Kombination von Gl. (2.41) und (2.20) ermittelt werden:

$$\omega_j^2 = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^4 \frac{EA_{zz}}{\mu} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.43)$$

Die zugehörige  $j$ -te Eigenfunktion des Systems ist nur bis auf eine multiplikative Konstante bestimmbar. Sie wird üblicherweise auf den Maximalwert 1 normiert und kann somit wie folgt dargestellt werden:

$$\phi_j(x) = \sin(kx) = \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.44)$$

Die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_j$  aus Gl. (2.43) wurden ohne Berücksichtigung der Dämpfung des Systems hergeleitet. Nach [6] besteht zwischen den Eigenkreisfrequenzen des viskos gedämpften Systems  $\omega_{D,j}$  und jenen des ungedämpften Systems  $\omega_j$  der Zusammenhang

$$\omega_{D,j} = \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot \omega_j \quad (2.45)$$

Die Variable  $\zeta$  in Gl. (2.45) steht für das *Lehrsche* Dämpfungsmaß, welches im Eurocode [12] in Abhängigkeit des Brückentyps und der Spannweite  $L$  vorgeschrieben wird. Für schwach gedämpfte Systeme mit

$$\zeta \ll 1 \quad (2.46)$$

folgt aus Gl. (2.45) die Beziehung

$$\omega_{D,j} \approx \omega_j \quad (2.47)$$

Für die Dämpfungswerte nach Eurocode aus Tab. 3.1 sind die Beziehungen (2.46) und (2.47) gültig. Die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_j$  aus Gl. (2.43) dürfen somit näherungsweise auch für den gedämpften *Bernoulli-Euler-Balken* angesetzt werden.

### Orthogonalitätsbedingungen

Die Orthogonalität der Eigenfunktionen ist besonders für die Modalanalyse von Bedeutung. Nach [2] gilt die folgende Beziehung:

$$\int_0^L \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0 \quad m \neq n \quad (2.48)$$

## 2.4 Aufstellen der modalen Bewegungsgleichungen nach Ritz und Galerkin

Die Grundgleichung für den gedämpften *Bernoulli-Euler*-Balken lautet:

$$\mu \ddot{w} + c_z \dot{w} + EA_{zz} w_{,xxxx} = p_z \quad (2.49)$$

Wie bereits in Abschnitt 2.2.2 erwähnt, folgt die Modalanalyse, aus dem Verfahren nach *Ritz* und *Galerkin*, wenn im *Ritz*schen Ansatz die exakten Eigenfunktionen  $\phi_i(x)$  des Balkens (aus Gl. (2.44) als Ansatzfunktionen gewählt werden. Der *Ritz*sche Ansatz lautet für diesen Fall:

$$w^*(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \phi_i(x) \quad (2.50)$$

Der Spaltenvektor der Eigenfunktionen  $\phi_j$  (mit  $j = 1, 2, \dots, n$ ) wird definiert als

$$\phi_j \equiv [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n]^T = \left[ \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \quad \dots \quad \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]^T \quad (2.51)$$

Einsetzen von Gl. (2.50) in Gl. (2.49), Multiplikation mit dem Vektor der Eigenfunktionen  $\phi_j$  aus Gl. (2.51) und Integration über die Balkenlänge  $L$  führt auf:

$$\int_L \sum_{i=1}^n [\mu \ddot{q}_i \phi_i + c_z \dot{q}_i \phi_i + EA_{zz} q_i \phi_{i,xxxx}] \phi_j dx = \int_L p_z \phi_j dx \quad (2.52)$$

Für die Darstellung der Gl. (2.52) in Matrixschreibweise wird zunächst die Matrix  $\boldsymbol{\phi}_1$  eingeführt, die wie folgt definiert ist:

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \int_L \phi_i \phi_j dx \quad (2.53)$$

Der in Gl. (2.52) auftretende Term  $\int_L \phi_{i,xxxx} \phi_j dx$  kann ebenfalls durch die Matrix  $\boldsymbol{\phi}_1$  ausgedrückt werden:

$$\int_L \phi_{i,xxxx} \phi_j dx = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^4 \int_L \phi_i \phi_j dx = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^4 \boldsymbol{\phi}_1 \quad (2.54)$$

Die Matrix  $\boldsymbol{\phi}_1$  wird unter Berücksichtigung der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenfunktionen aus (2.48) zu einer Diagonalmatrix:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\phi}_1 &= \int_L \phi_i \phi_j dx = \int_L \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} \cdot [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n] dx = \mathbf{I} \cdot \begin{bmatrix} \int_L \phi_1^2 dx \\ \int_L \phi_2^2 dx \\ \vdots \\ \int_L \phi_n^2 dx \end{bmatrix} \\
 &= \text{diag} \left( \int_L \phi_j^2 dx \right) = \text{diag} \left( \int_L \sin^2 \left( \frac{j\pi}{L} x \right) dx \right)
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

mit  $j = 1, 2, \dots, n$

$\mathbf{I}$ ..... Einheitsmatrix der Dimension  $n \times n$

$n$ ..... Anzahl der gewählten Reihenglieder im Ritzschen Ansatz (2.50)

Die Formel zur Berechnung der Integrale aus Gl. (2.55) lautet nach [13] in allgemeiner Form:

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} \tag{2.56}$$

Die in den Diagonalgliedern von  $\boldsymbol{\phi}_1$  auftretenden Integrale werden mithilfe der Gl. (2.56) im Integrationsintervall  $< 0, L >$  ausgewertet:

$$\int_0^L \phi_j^2 dx = \int_0^L \sin^2 \left( \frac{j\pi}{L} x \right) dx = \frac{L}{2} - \frac{L \cdot \sin(2j\pi)}{4j\pi} = \frac{L}{2} \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{2.57}$$

Die Matrix  $\boldsymbol{\phi}_1$  wird unter Berücksichtigung von Gl. (2.57) zur Diagonalmatrix der Dimension  $n \times n$ :

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \text{diag} \left( \frac{L}{2} \right) \tag{2.58}$$

Wird der Belastungsterm in Gl. (2.52) als Vektor

$$\mathbf{p}_z = \int_L p_z \phi_j dx \tag{2.59}$$

geschrieben, lautet Gl. (2.52) in Matrixschreibweise

$$\mu \boldsymbol{\phi}_1 \ddot{\mathbf{q}} + c_z \boldsymbol{\phi}_1 \dot{\mathbf{q}} + EA_{zz} \left( \frac{j\pi}{L} \right)^4 \boldsymbol{\phi}_1 \mathbf{q} = \mathbf{p}_z \quad (2.60)$$

Mit Hilfe der Einführung der generalisierten Matrizen

$$\mathbf{M} = \mu \boldsymbol{\phi}_1 \quad (2.61)$$

$$\mathbf{K} = EA_{zz} \left( \frac{j\pi}{L} \right)^4 \boldsymbol{\phi}_1 \quad (2.62)$$

$$\mathbf{Z} = c_z \boldsymbol{\phi}_1 \quad (2.63)$$

folgt aus Gl. (2.52) das modale Bewegungsgleichungssystem

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Z} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{p}_z \quad (2.64)$$

### Massenmatrix

Unter der Berücksichtigung der Gleichungen (2.61) und (2.58) und Einführung der generalisierten Massen  $m_j$  kann die modale Massenmatrix  $\mathbf{M}$  der Dimension  $n \times n$  folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\mathbf{M} = \text{diag} \left( \mu \frac{L}{2} \right) \equiv \text{diag}(m_j) \quad (2.65)$$

Wird eine über die Balkenlänge konstante Massebelegung

$$\mu = \frac{m_B}{L} \quad (2.66)$$

mit

$m_B$  ..... Brückemasse in [kg]

angenommen, berechnen sich die modalen Massen zu:

$$m_j = \mu \frac{L}{2} = \frac{m_B}{2} \quad (2.67)$$

Für die Massenmatrix folgt daraus:

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_j) = \text{diag} \left( \frac{m_B}{2} \right) \quad (2.68)$$

### Steifigkeitsmatrix

Die modale Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  kann unter der Einführung der generalisierten Steifigkeiten  $k_j$  aus den Gleichungen (2.62) und (2.58) zu

$$\mathbf{K} = \text{diag} \left( EA_{zz} \left( \frac{j\pi}{L} \right)^4 \frac{L}{2} \right) = \text{diag} \left( \frac{EA_{zz} (j\pi)^4}{2 L^3} \right) \equiv \text{diag}(k_j) \quad (2.69)$$

mit  $j = 1, 2, \dots, n$  berechnet werden.

## 2.5 Erstellung von Dämpfungsmatrizen

Im Rahmen dieser Arbeit wird ausschließlich die viskose (geschwindigkeitsproportionale) Dämpfung verwendet. Der Hauptgrund dafür ist ihre einfache mathematische Formulierung, weshalb sie in weiten Teilen der Baudynamik zur Anwendung kommt. Die Dämpfung in Querrichtung zur Stabachse wurde bereits bei der Herleitung der Bewegungsgleichung in Abschnitt 2.3.1 eingeführt. Die Dämpfungskraft pro Längeneinheit berechnet sich zu

$$f_D(x, t) = c_z dx \dot{w}(x, t) \quad (2.70)$$

mit dem Dämpfungskoeffizienten  $c_z$  [7].

### 2.5.1 Modale Dämpfung

Die modale Dämpfungsmatrix  $\mathbf{Z}$  kann aus den Gleichungen (2.58) und (2.63) zu

$$\mathbf{Z} = \text{diag} \left( c_{z,j} \frac{L}{2} \right) \quad (2.71)$$

berechnet werden. Aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften der in den Ritzschen Ansatz eingesetzten Eigenfunktionen  $\phi_j$  wird auch die modale Dämpfungsmatrix diagonal, wodurch die Dämpfung der einzelnen Schwingungsformen entkoppelt ist. Somit können bei Bedarf unterschiedliche Dämpfungsbeiwerte  $c_{z,j}$  für jede Schwingungsform eingesetzt werden.

Im Eurocode [12] wird die Größe der Dämpfung über das *Lehrsche* Dämpfungsmaß  $\zeta$  in Abhängigkeit des Brückentyps vorgegeben (siehe Abschnitt 3.2.3). Dabei wird  $\zeta$  für alle Schwingungsformen konstant festgelegt. Der Zusammenhang zwischen dem Dämpfungsbeiwert  $c_{z,j}$  und dem *Lehrschen* Dämpfungsmaß lautet nach der Theorie des Einmassenschwingers [6]

$$c_{z,j} = 2\mu\zeta_j\omega_j \quad (2.72)$$

Die modale Dämpfungsmatrix  $\mathbf{Z}$  der Dimension  $n \times n$  kann durch das Einsetzen von Gl. (2.72) in Gl. (2.71) und Berücksichtigung von Gl. (2.66) folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\mathbf{Z} = \text{diag} \left( m_B \zeta_j \omega_j \right) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.73)$$

### 2.5.2 Rayleighsche Dämpfung

Nach [9] vereinfacht der Ansatz der *Rayleighschen* Dämpfung die Lösung der Bewegungsgleichungen mittels numerischer Zeitintegration. Die Dämpfungsmatrix wird dabei proportional der Massenmatrix und der Steifigkeitsmatrix angesetzt:

$$\mathbf{Z} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (2.74)$$

Das *Lehrsche* Dämpfungsmaß  $\zeta_j$  kann für die  $j$ -te Schwingungsform aus

$$\zeta_j = \frac{\alpha}{2\omega_j} + \frac{\beta\omega_j}{2} \quad (2.75)$$

berechnet werden. Die Bestimmung der Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  erfolgt aus zwei gegebenen Werten der *Lehrschen* Dämpfung  $\zeta_i$  und  $\zeta_k$  für die  $i$ -te und die  $k$ -te Schwingungsform. Einsetzen von  $\zeta_i$  und  $\zeta_k$  in Gl. (2.75) führt auf das Gleichungssystem

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_i^{-1} & \omega_i \\ \omega_k^{-1} & \omega_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_i \\ \zeta_k \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

Aus diesem Gleichungssystem können die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmt werden. Ist beispielsweise der Wert der *Lehrschen* Dämpfung  $\zeta_1$  für die erste Schwingungsform bekannt und wird angenommen, dass die zweite Schwingungsform gleich gedämpft ist, folgt daraus

$$\alpha = \zeta_1 \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \quad \text{und} \quad \beta = \zeta_1 \frac{2}{\omega_1 + \omega_2} \quad (2.77)$$

Mit Gl. (2.75) sind die Werte der *Lehrschen* Dämpfung auch für höhere Schwingungsformen festgelegt und eine Funktion der Eigenfrequenz. Höhere Schwingungsformen erfahren eine stärkere Dämpfung als niedrigere (siehe Abb. 2.3), weshalb zur Erstellung einer brauchbaren Dämpfungsmatrix zumindest die Dämpfungswerte zweier Schwingungsformen (idealerweise solcher, die für die Schwingungsantwort des Systems maßgebend sind) bekannt sein sollten [7].

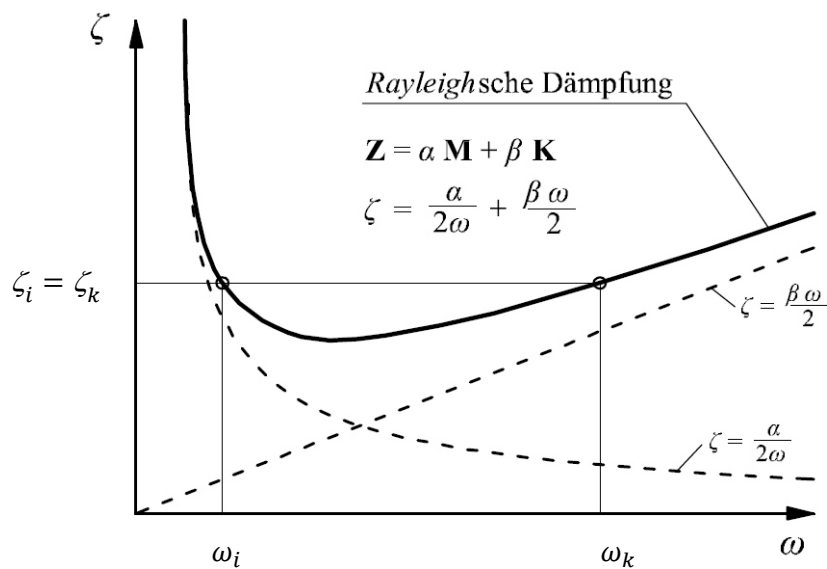


Abb. 2.3: Rayleighsche Dämpfung

Die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{Z}$  der *Rayleighschen* Dämpfung folgt durch das Einsetzen der Gleichungen (2.68), (2.69) und (2.77) in Gl. (2.74) zu

$$\mathbf{Z} = \text{diag} \left( \zeta_i \frac{2\omega_i \omega_k}{\omega_i + \omega_k} m_j + \zeta_i \frac{2}{\omega_i + \omega_k} k_j \right) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.78)$$

## 2.6 Belastungsvektor

Für die dynamische Berechnung der Überfahrt eines Zuges über eine Eisenbahnbrücke ist die Modellierung der Fahrzeuge für die Erstellung des Belastungsvektors in Gl. (2.64) von großer Bedeutung. *Mähr* beschreibt in [7] drei verschiedene Möglichkeiten zur Modellierung von Eisenbahnzügen:

- Folge von Einzelkräften
- Folge von Einzelmassen
- Mehrkörpermodelle (Feder-Dämpfer-Modelle)

### 2.6.1 Folge von Einzelkräften

Die einfachste Art der Modellierung eines Eisenbahnzuges, der über eine Brücke fährt, stellt die Betrachtung als eine Folge von Einzelkräften dar, die sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  über das Tragwerk bewegen. Auch im Eurocode [12] wird diese Art der Modellierung für die dynamische Berechnung von Brückentragwerken erlaubt.

Um die modalen Bewegungsgleichungen (2.64) lösen zu können, bleibt noch die mathematische Formulierung der Folge von Einzelkräften  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) im Lastterm  $p_z$  zu klären. Dazu werden folgende Variablen in Abb. 2.4 eingeführt:

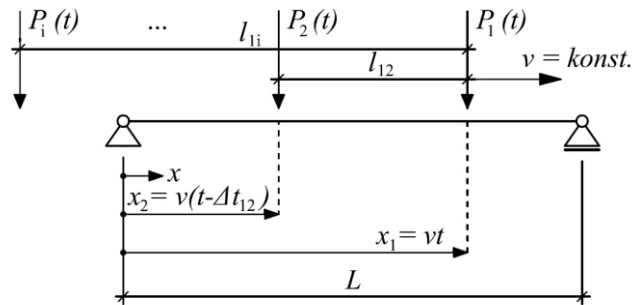


Abb. 2.4: Folge von Einzelkräften ([7], Abb. 3.1, S. 64)

$l_{1i}$ ..... Abstand zwischen Kraft  $P_1$  und  $P_i$ , wobei  $l_{11} = 0$

$x_i$ ..... aktuelle Position der Kraft  $P_i$

$$\Delta t_{1i} = \frac{l_{1i}}{v} \quad (2.79)$$

Die momentane Position der Kraft  $P_i$  kann durch

$$x_i = vt - l_{1i} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.80)$$

beschrieben werden. Der Lastterm  $p_z$  lässt sich mathematisch wie folgt ausdrücken:

$$p_z = \sum_{i=1}^m P_i \Gamma(x_i) \delta(x - x_i) \quad (2.81)$$

Dabei ist  $\Gamma(x_i)$  eine Rechteckfunktion, die angibt, ob sich die  $i$ -te Kraft auf dem Brückenträger befindet oder nicht:

$$\Gamma(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x_i < L \\ 0 & \text{für } x_i < 0 \text{ oder } L < x_i \end{cases} \quad (2.82)$$

Die Diracsche Deltafunktion  $\delta(x - x_i)$  in Gl. (2.81) beschreibt die Lastangriffspunkte der Einzelkräfte  $P_i$  und besitzt die folgenden Eigenschaften:

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } x - x_i = 0 \\ 0 & \text{für } x - x_i \neq 0 \end{cases} \quad (2.83)$$

Sind  $a, b$  und  $\xi$  Konstante und  $f(x)$  eine stetige Funktion im Intervall  $\langle a, b \rangle$ , lauten die Integrationsregeln für die Diracsche Deltafunktion:



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (2.84)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a) \quad (2.85)$$

$$\int_a^b \delta(x - \xi) f(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi < a < b \\ f(\xi) & \text{für } a < \xi < b \\ 0 & \text{für } a < b < \xi \end{cases} \quad (2.86)$$

Der Belastungsvektor mit den generalisierten Kräften hat die Form

$$\mathbf{p}_z = [p_{z,1} \quad p_{z,2} \quad \dots \quad p_{z,n}]^T \quad (2.87)$$

Wird  $\phi_j(x)$  nach Gl. (2.44) als Eigenfunktion der  $j$ -ten Schwingungsform betrachtet, so lauten die Einträge im Belastungsvektor nach Gl. (2.59):

$$p_{z,j} = \int_L p_z \phi_j(x) dx \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.88)$$

Einsetzen von Gl. (2.81) in Gl. (2.88) führt unter Berücksichtigung von Gl. (2.86) und der Annahme, dass die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht werden darf, auf:

$$p_{z,j} = \sum_{i=1}^m P_i \Gamma(x_i) \phi_j(x_i) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.89)$$

Die für die Stelle  $x_i$  spezialisierten Eigenfunktionen lauten unter Berücksichtigung der Beziehung (2.80)

$$\phi_j(x_i) = \sin\left(\frac{j\pi(vt - l_{1i})}{L}\right) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.90)$$

Betrachtet man nur eine bewegte Einzelkraft  $P_i$ , sodass gilt  $l_{1i} = 0$ , so wird die generalisierte Belastung zu

$$p_{z,j} = P_i \sin\left(\frac{j\pi v}{L} t\right) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.91)$$

Gl. (2.91) entspricht einer harmonischen Anregung mit der Amplitude  $P_i$  und den Anregungsfrequenzen

$$\Omega_j = \frac{j\pi v}{L} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.92)$$

Die Kräfte  $P_2, P_3, \dots, P_m$  belasten den Brückenträger phasenverschoben im Bezug auf die erste Kraft  $P_1$ . Die Phase  $\theta_i$  der Kraft  $P_i$  bezogen auf  $P_1$  berechnet sich zu

$$\theta_i = \Omega_j \Delta t_{1i} = \frac{j\pi l_{1i}}{L} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.93)$$

Die Einträge des generalisierten Lastvektors können somit wie folgt geschrieben werden:

$$p_{z,j} = \sum_{i=1}^m P_i \Gamma(x_i) \sin(\Omega_j t + \theta_i) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.94)$$

Die Bestimmung des Lastvektors wird anhand eines konkreten Beispiels in Anhang A (siehe S. 101) gezeigt.

Alle Zugkonfigurationen, die im Rahmen dieser Arbeit für dynamische Berechnungen herangezogen werden, sind ausschließlich als Folge von Einzelkräften modelliert und finden als Lastvektor (2.87) Eingang in die modalen Bewegungsgleichungen (2.64). Alternative Methoden der Modellierung sind beispielsweise die Betrachtung der Zuglasten als Folge von Einzelmassen (Berücksichtigung der Massenträgheit) oder als Mehrkörpersysteme. Die Modellierung eines Zuges als Mehrkörpersystem führt zu realitätsnäheren Ergebnissen als die Modellierung als Folge von Einzelkräften, jedoch ist dafür ein höherer Berechnungsaufwand erforderlich. Für genauere Betrachtungen dieser alternativen Modellierungsstrategien sei auf die Arbeit von *Mähr* [7] verwiesen.

# 3 Berechnungsverfahren zur Erstellung von Antwortspektren

Grundlage der dynamischen Berechnungen der Tragwerksantwort von Eisenbahnbrücken im Rahmen dieser Arbeit ist ein Berechnungsverfahren, das *Mähr* im Zuge seiner Dissertation [7] entwickelt hat. Das Ziel dieses Berechnungsfahrens besteht darin, sogenannte „Antwortspektren“ für vier bemessungsrelevante Größen (Durchbiegungen, Querschnittsdrehwinkel am Auflager, Beschleunigungen und Biegemomente) zu erstellen. Die Antwortspektren beinhalten jeweils eine der vier beschriebenen Größen für Einfeldträgerbrücken mit einer Spannweite zwischen  $7m$  und  $100m$  und alle praktisch möglichen Überfahrtsgeschwindigkeiten eines bestimmten Zugmodells. In diesem Kapitel wird beschrieben, wie diese Antwortspektren berechnet werden und welche Grundannahmen und Vereinfachungen dafür getroffen werden.

## 3.1 Grundidee des Berechnungsverfahrens

### 3.1.1 Überblick der Berechnungsschritte

Das Problem der Überfahrt einer Folge von Einzelkräften über einen Bernoulli-Euler-Balken führt bei Anwendung der Modalanalyse auf die (in Abschnitt 2.4 beschriebenen) modalen Bewegungsgleichungen

$$M\ddot{q} + Z\dot{q} + Kq = p_z \tag{3.1}$$

Die gesuchten Größen in Gl. (3.1) sind die generalisierten Koordinaten  $q_j(t)$ , die generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_j(t)$  und die generalisierten Beschleunigungen  $\ddot{q}_j(t)$  (mit  $j = 1, 2, \dots, n$ ), die in den Vektoren  $q$ ,  $\dot{q}$  und  $\ddot{q}$  wie folgt zusammengefasst sind:

$$q = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad \dots \quad q_n(t)]^T \tag{3.2}$$

$$\dot{q} = [\dot{q}_1(t) \quad \dot{q}_2(t) \quad \dots \quad \dot{q}_n(t)]^T \tag{3.3}$$

$$\ddot{q} = [\ddot{q}_1(t) \quad \ddot{q}_2(t) \quad \dots \quad \ddot{q}_n(t)]^T \tag{3.4}$$

$n$ ..... Anzahl der berücksichtigten Eigenschwingungsformen

Die Bestimmung der unbekanntenen Größen  $q_j(t)$ ,  $\dot{q}_j(t)$  und  $\ddot{q}_j(t)$  erfolgt durch die Lösung der modalen Bewegungsgleichungen (3.1) mittels numerischer

Zeitintegration (siehe Abschnitt 3.4.1). Die vier gesuchten Größen der Tragwerksantwort (Durchbiegung, Querschnittsdrehwinkel, Beschleunigung und Biegemoment) werden durch Rückeinsetzen in den *Ritzschen* Ansatz (2.50) ermittelt.

### Durchbiegung

Die Durchbiegung lässt sich durch das Einsetzen der generalisierten Koordinaten  $q_j(t)$  und der Eigenfunktionen des Balkens  $\phi_j(x)$  aus Gl. (2.44) in den *Ritzschen* Ansatz wie folgt bestimmen:

$$w^*(x, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t) \phi_j(x) \quad (3.5)$$

### Vertikalbeschleunigung

Die Vertikalbeschleunigungen können durch die zweifache Ableitung des *Ritzschen* Ansatzes nach der Zeit und Einsetzen der generalisierten Beschleunigungen  $\ddot{q}_j(t)$  ermittelt werden:

$$\ddot{w}^*(x, t) = \sum_{j=1}^n \ddot{q}_j(t) \phi_j(x) \quad (3.6)$$

### Querschnittsdrehwinkel

Der Querschnittsdrehwinkel kann durch die Ableitung des *Ritzschen* Ansatzes nach der Stabachsenkoordinate  $x$  und Einsetzen der generalisierten Koordinaten  $q_j(t)$  wie folgt berechnet werden:

$$\varphi^*(x, t) = -\frac{\partial w^*(x, t)}{\partial x} = -\sum_{j=1}^n q_j(t) \phi_{j,x}(x) \quad (3.7)$$

### Biegemoment

Das Biegemoment  $M_y$  berechnet sich für den *Bernoulli-Euler*-Balken zu

$$M_y = EA_{zz} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.8)$$

Zweimalige Ableitung des *Ritzschen* Ansatzes nach der Stabachsenkoordinate  $x$  und Einsetzen der generalisierten Koordinaten  $q_j(t)$  führt in Kombination mit Gl. (3.8) auf die Bestimmungsgleichung für das Biegemoment:

$$M_y^* = -EA_{zz} \sum_{j=1}^n q_j(t) \phi_{j,xx}(x) \quad (3.9)$$

### 3.1.2 Betrachtung einer überfahrenden Einzelkraft

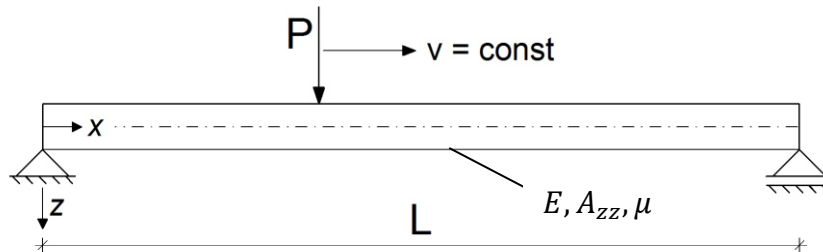


Abb. 3.1: Bernoulli-Euler-Balken mit bewegter Einzelkraft P

$v$ ..... Überfahrtsgeschwindigkeit

Die Überfahrt einer Einzelkraft  $P$  über einen linear elastischen Balken mit unveränderlichen Querschnittseigenschaften ( $EA_{zz}, \mu$ ) über die Stablänge  $L$  laut Abb. 3.1 führt bei Anwendung der Modalanalyse laut Ziegler [15] auf  $n$  nichtgekoppelte inhomogene Schwingungsgleichungen:

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = \frac{P}{m_j} \sin(\Omega_j t) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.10)$$

$n$ ..... Anzahl der berücksichtigten Eigenschwingungsformen

Die Anregungskreisfrequenzen  $\Omega_j$  der Einzelkraft werden nach Gl. (2.92) zu

$$\Omega_j = \frac{j\pi v}{L} \quad (3.11)$$

berechnet und für die Eigenkreisfrequenzen gilt nach [15] und Gl. (2.43) und Gl. (2.66):

$$\omega_j^2 = \frac{k_j}{m_j} = \frac{(j\pi)^4 EA_{zz}}{L^3 m_B} \quad (3.12)$$

Fährt die Kraft  $P$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf den ruhenden Balken in  $x = 0$  auf, dann lautet die Lösung der Gl. (3.10) nach [15]

$$q_j(t) = \frac{P}{k_j^{(eff)}} \left( \sin \Omega_j t - \frac{\Omega_j}{\omega_j} \sin \omega_j t \right); \quad q_j(0) = \dot{q}_j(0) = 0 \quad (3.13)$$

mit

$$k_j^{(eff)} = m_j(\omega_j^2 - \Omega_j^2) \quad (3.14)$$

An dieser Stelle wird im Berechnungsverfahren nach Mähr [7] die Variable  $r_j$  eingeführt:

$$r_j = \frac{\Omega_j}{\omega_j} \quad (3.15)$$

$r_j$  beschreibt das Verhältnis zwischen der Anregungsfrequenz  $\Omega_j$  der überfahrenden Einzellast  $P$  und der Eigenfrequenz des Balkens  $\omega_j$  und kann durch das Einsetzen der Gleichungen (3.11) und (3.12) in Gl. (3.15) folgendermaßen dargestellt werden:

$$r_j = \frac{v}{j\pi} \sqrt{\frac{m_B L}{EA_{zz}}} \quad (3.16)$$

Die Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$  kann in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses  $r_j$  durch umformen der Gl. (3.16) ausgedrückt werden:

$$v = j\pi r_j \sqrt{\frac{EA_{zz}}{m_B L}} \quad (3.17)$$

Ebenso kann  $k_j^{(eff)}$  durch das Einsetzen der Gleichungen (2.67), (3.11), (3.12) und (3.17) in Gl. (3.14) in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses  $r_j$  ausgedrückt werden:

$$k_j^{(eff)} = \frac{m_B}{2} \left[ (j\pi)^4 \frac{EA_{zz}}{m_B L^3} - \left( \frac{j\pi}{L} \right)^2 (j\pi r_j)^2 \frac{EA_{zz}}{m_B L} \right] = EA_{zz} \frac{(j\pi)^4}{2L^3} (1 - r_j^2) \quad (3.18)$$

Einsetzen von Gl. (3.15) und Gl. (3.18) in Gl. (3.13) und Multiplikation mit der Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  führt auf die folgende Darstellung der generalisierten Koordinaten  $q_j(t)$  in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses  $r_j$ :

$$EA_{zz} \cdot q_j(t) = \frac{P \cdot 2L^3}{(j\pi)^4 \cdot (1 - r_j^2)} (\sin \Omega_j t - r_j \sin \omega_j t) \quad (3.19)$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gl. (3.19) sind unabhängig von der Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  und der Brückenmasse  $m_B$  formuliert, was die Grundidee des Antwortspektrenverfahrens widerspiegelt.

Ebenso können die generalisierten Beschleunigungen  $\ddot{q}_j(t)$  unabhängig von der Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  und der Brückenmasse  $m_B$  formuliert werden. Dazu wird Gl. (3.19) zweimal nach der Zeit abgeleitet:

$$EA_{zz} \cdot \ddot{q}_j(t) = -\frac{P \cdot 2L^3}{(j\pi)^4} \Omega_j^2 \left( \sin \Omega_j t - \frac{1}{r_j} \sin \omega_j t \right) \frac{1}{1 - r_j^2} \quad (3.20)$$

Einsetzen der Gleichungen (3.11) und (3.17) in Gl. (3.20) führt auf

$$m_B \cdot \ddot{q}_j(t) = -2P \frac{r_j^2}{1 - r_j^2} \left( \sin \Omega_j t - \frac{1}{r_j} \sin \omega_j t \right) \quad (3.21)$$

### 3.1.3 Zusammenfassung

Im Zuge der Lösung der modalen Bewegungsgleichungen (3.1) sind die generalisierten Koordinaten  $q_j(t)$ , die generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_j(t)$  und die generalisierten Beschleunigungen  $\ddot{q}_j(t)$  zu ermitteln. Im allgemeinen sind  $q_j(t)$ ,  $\dot{q}_j(t)$  und  $\ddot{q}_j(t)$  Funktionen der folgenden unabhängigen Parameter:

- Spannweite  $L$
- Biegemoment  $EA_{zz}$
- Brückenmasse  $m_B$
- Belastung  $p_{z,j}$
- Brückentyp (zur Festlegung der Dämpfung  $\zeta$ )

Mathematisch ausgedrückt gilt für einen stationären Zeitpunkt  $t_k$

$$q_j(t_k) = f(L, EA_{zz}, m_B, p_{z,j}(t_k), \zeta) \quad (3.22)$$

$$\ddot{q}_j(t_k) = f(L, EA_{zz}, m_B, p_{z,j}(t_k), \zeta) \quad (3.23)$$

mit  $j = 1, \dots, n$

$n$ ..... Anzahl der berücksichtigten Eigenschwingungsformen

Durch das Einführen des Frequenzverhältnisses  $r_j$  können die Funktionswerte auf der rechten Seite der Gleichungen (3.19) und (3.21) unabhängig von der Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  und der Brückenmasse  $m_B$  dargestellt werden. Die genaue Vorgangsweise dieser Darstellungsänderung wird in Abschnitt 3.1.2 anhand einer überfahrenden Einzelkraft gezeigt. Die unabhängigen Parameter verringern sich für eine Einzelkraft auf:

- Spannweite  $L$
- Frequenzverhältnis  $r_j$
- Brückentyp (zur Festlegung der Dämpfung  $\zeta$ )
- Belastung  $p_{z,j}$

$$EA_{zz} \cdot q_j(t_k) = f(L, r_j, p_{z,j}(t_k), \zeta) \quad (3.24)$$

$$m_B \cdot \ddot{q}_j(t_k) = f(L, r_j, p_{z,j}(t_k), \zeta) \quad (3.25)$$

Die Funktionswerte der Gleichungen (3.24) und (3.25) bleiben somit für alle Tragwerke mit gleicher Spannweite  $L$ , gleichem Frequenzverhältnis  $r_j$ , gleichem Brückentyp und gleicher Belastung konstant.

Für die Modellierung von realen Zügen ist eine Erweiterung von der Betrachtung einer Einzelkraft auf eine Folge von Einzelkräften vorzunehmen. Die Funktionswerte  $EA_{zz} \cdot q_j(t_k)$  und  $m_B \cdot \ddot{q}_j(t_k)$  können dabei aus Linearkombinationen der Gleichungen (3.19) bzw. (3.21) ermittelt werden. Die unabhängigen Parameter bleiben im Rahmen dieser Linearkombinationen unverändert.

## 3.2 Festlegungen zur Berechnung der Antwortspektren

### 3.2.1 *Brückenträger*

Alle dynamischen Berechnungen der Tragwerksantwort von Eisenbahnbrücken im Rahmen dieser Arbeit sind ausschließlich für Einfeldträgerbrücken mit konstanten Querschnittseigenschaften (Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  und Massebelegung  $\mu$ ) über die Spannweite  $L$  gültig. Die Modellierung des Brückenträgers erfolgt als gelenkig gelagerter *Bernoulli-Euler*-Balken (siehe Abschnitt 2.1).

### 3.2.2 *Anzahl der Eigenschwingungsformen*

Die Endergebnisse der gesuchten Größen der Tragwerksantwort setzen sich aus Anteilen von  $n$  Eigenschwingungsformen des Trägers zusammen, wobei höhere Eigenschwingungsformen einen kleineren Beitrag zum Gesamtergebnis liefern. Um eine sinnvolle Wahl für die Anzahl  $n$  der berücksichtigten Eigenschwingungsformen treffen zu können, führt *Mähr* in [7] eine Konvergenzstudie an einem konkreten Brückentragwerk ( $L = 20m$ ) unter der Belastung einer Konfiguration des ÖBB Railjet durch. Auf die genauere Beschreibung der Brückenparameter wird an dieser Stelle verzichtet, da sie für die Konvergenzbetrachtung unbedeutend sind. Es werden vier Größen der Tragwerksantwort (Durchbiegung, Endtangentialwinkel, Beschleunigung und Biegemoment) bei unterschiedlicher Anzahl von Eigenschwingungsformen ( $n = 1$  bis  $n = 5$ ) verglichen.



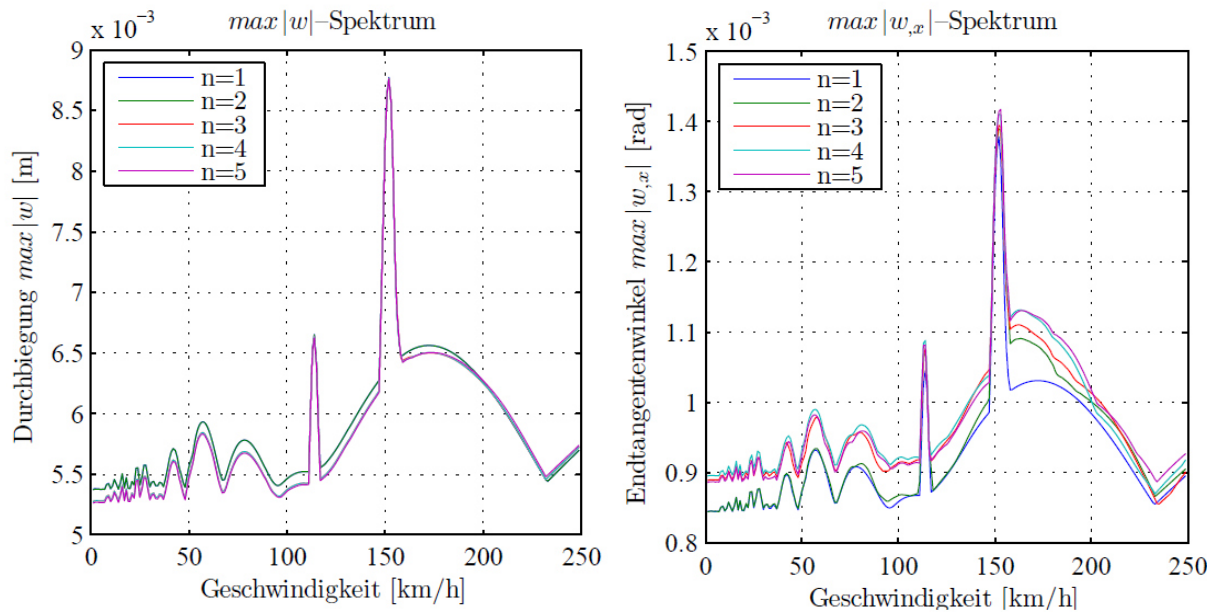


Abb. 3.2: Durchbiegungen (linkes Bild) und Endtangentialwinkel (rechtes Bild) bei unterschiedlicher Anzahl  $n$  von Eigenschwingungsformen. Quelle: [7], S.101

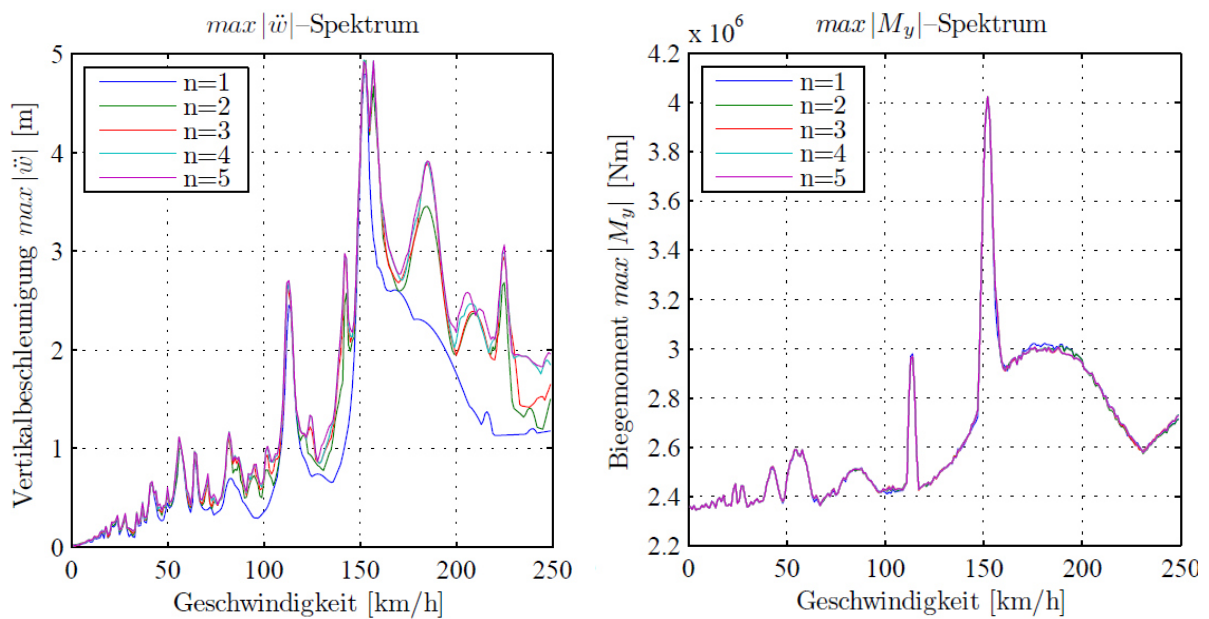


Abb. 3.3: Beschleunigungen (linkes Bild) und Biegemomente (rechtes Bild) bei unterschiedlicher Anzahl  $n$  von Eigenschwingungsformen. Quelle: [7], S.102

In den Abbildungen 3.2 und 3.3 sind kaum Unterschiede zwischen den Kurven für die Berücksichtigung von  $n = 4$  und  $n = 5$  Eigenschwingungsformen zu erkennen. Daraus wird in [7] geschlossen, dass die Ergebnisgenauigkeit für die Berücksichtigung von  $n = 5$  Eigenschwingungsformen für praktische Zwecke ausreichend ist.

### 3.2.3 Dämpfung

Die bei der Bemessung von Eisenbahnbrücken anzuwendenden Dämpfungswerte sind im Eurocode [12] laut Tab. 3.1 in Abhängigkeit des Brückentyps und der Spannweite  $L$  festgelegt. Die Variable  $\zeta$  steht dabei für das *Lehrsche* Dämpfungsmaß. Die Werte von  $\zeta$  in Tab. 3.1 stellen untere Schätzwerte dar und liegen somit auf der sicheren Seite.

Brückentyp	$\zeta$ unterer Grenzwert der kritischen Dämpfung [%]	
	Spannweite $L < 20m$	Spannweite $L \geq 20m$
Stahl und Verbund	$\zeta = 0,5 + 0,125(20 - L)$	$\zeta = 0,5$
Spannbeton	$\zeta = 1,0 + 0,07(20 - L)$	$\zeta = 1,0$
Walzträger im Beton und Stahlbeton	$\zeta = 1,5 + 0,07(20 - L)$	$\zeta = 1,5$

Tab. 3.1: Bei der Bemessung anzuwendende Dämpfungswerte. Quelle: [12], Tab.6.6

Ebenso kann laut [12] eine zusätzliche Dämpfung für Spannweiten unter  $30m$  berücksichtigt werden, die die gegenseitige dynamische Beeinflussung von Fahrzeug- und Brückenmassen und die daraus resultierende Verringerung der Resonanzeffekte mit einbezieht. Diese zusätzliche Dämpfung kann wie folgt berechnet werden:

$$\Delta\zeta = \frac{0,0187L - 0,00064L^2}{1 - 0,0441L - 0,0044L^2 + 0,000255L^3} \quad (3.26)$$

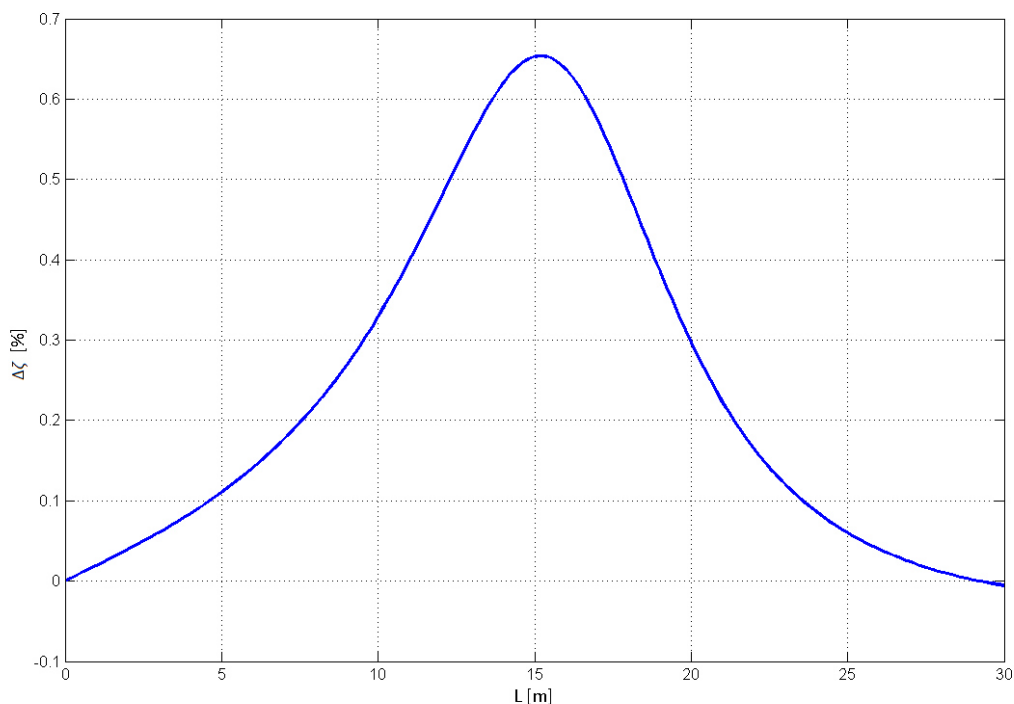


Abb. 3.4: zusätzliche Dämpfung  $\Delta\zeta$

Für die dynamische Berechnung der Tragwerksantwort wird im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich die Methode der *Rayleighs*chen Dämpfung (siehe Abschnitt 2.5.2) angewandt. Im Vergleich zur Methode der modalen Dämpfung erfahren dabei die höheren Eigenschwingungsformen eine stärkere Dämpfung, was sich nach *Chopra* [1] als konsistent mit experimentellen Daten bewährt hat.

### 3.3 Aufbau der Antwortspektren

Im Abschnitt 3.1 wird beschrieben, wie sich die unabhängigen Parameter, die zur Ermittlung eines Antwortspektrums notwendig sind, auf die Spannweite  $L$ , das Frequenzverhältnis  $r_j$ , den Brückentyp (und damit die Festlegung für die Dämpfung) und das Lastmodell reduzieren lassen. Dies bedeutet, dass die Antwortspektren bei gewähltem Brückentyp (quasi als Parameter) und gewähltem Lastmodell als Funktion von  $L$  und  $r_j$  ermittelt und grafisch dargestellt werden kann.

Die Berechnung der Antwortspektren erfolgt an einem Bezugssystem, dem die Biegesteifigkeit  $EA_{zz} = 1Nm^2$  und die Brückenmasse  $m_B = 1kg$  zugewiesen wird. Für die Spannweite  $L$  und das Frequenzverhältnis  $r_1$  (Verhältnis zwischen erster Anregungs- und Eigenfrequenz) sind feste Werte vorzugeben und das Lastmodell darf aus einer beliebigen Folge von Einzelkräften zusammengesetzt werden. Für die Berechnung der Antwortspektren wird das folgende Parameterfeld definiert:

- Spannweite  $L$ : von  $7,0m$  bis  $100m$  mit einer Schrittweite von  $0,5m$  (187 Stützstellen)
- Frequenzverhältnis  $r_1$ : von  $0,0025$  bis  $1,0$  mit einer Schrittweite von  $0,0025$  (400 Stützstellen)
- Dämpfung nach Tab. 3.1 für den festgelegten Brückentyp und die Spannweite  $L$
- Lastmodelle aus Abschnitt 4.1

Die Antwortspektren werden in Matrizen zusammengefasst, die durch die Wahl des beschriebenen Parameterfeldes die Dimension  $400 \times 187$  haben. Die Spalten der Antwortspektren stehen für die verschiedenen Spannweiten  $L$  und die Zeilen für die verschiedenen Frequenzverhältnisse  $r_1$  des gewählten Parameterfeldes. Das Antwortspektrum eines fiktiven Lastmodells „A“ hat den Aufbau:

$$Asp(A) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{i,1} & & & a_{i,k} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i = 1,2, \dots, 400 \\ k = 1,2, \dots, 187 \end{array} \quad (3.27)$$

Die Matrixeinträge  $a_{i,k}$  in Gl. (3.27) können die Werte der maximalen Durchbiegungen, der maximalen Endtangentialwinkel, der maximalen Beschleunigungen oder der maximalen

Biegemomente des definierten Bezugssystems annehmen. Beispielsweise steht der Matrixeintrag  $a_{1,1}$  im Antwortspektrum der Durchbiegung für die maximale Durchbiegung eines Bezugssystems mit der Spannweite  $L = 7m$ , dem Frequenzverhältnis  $r_1 = 0,0025$ , der Biegesteifigkeit  $EA_{zz} = 1Nm^2$  und der Brückenmasse  $m_B = 1kg$ .

Das definierte Parameterfeld erfordert zur Bestimmung der Matrixeinträge  $a_{i,k}$  für jedes Zugmodell und jeden Brückentyp  $400 \cdot 187 = 74800$  Überfahrtssimulationen. Die Ermittlung der Antwortspektren für die 15 Lastmodelle aus Abschnitt 4.1 und 3 Brückentypen nach Tab. 3.1 sind somit  $74800 \cdot 15 \cdot 3 = 3,366 \cdot 10^6$  Simulationen erforderlich.

### 3.4 Überfahrtssimulation für ein festgelegtes Bezugssystem

Die Funktionsweise der Überfahrtssimulation wird exemplarisch an der Ermittlung des Matrixeintrags  $a_{1,1}$  der Antwortspektren für die maximale Durchbiegung, den maximalen Endtangentialwinkel, die maximale Beschleunigung und das maximale Biegemoment für ein festgelegtes Bezugssystem gezeigt. Alle anderen Matrixeinträge der Antwortspektren können durch die Variation der Spannweite  $L$  und des Frequenzverhältnisses  $r_1$  im Rahmen des definierten Parameterfeldes (siehe Abschnitt 3.3) ermittelt werden. Das Bezugssystem für  $a_{1,1}$  hat die folgenden Eigenschaften:

- Spannweite  $L = 7m$
- Frequenzverhältnis  $r_1 = 0,0025$
- Biegesteifigkeit  $EA_{zz} = 1Nm^2$
- Brückenmasse  $m_B = 1kg$

Das Lastmodell ist eine beliebige Folge von Einzelkräften und das Bezugssystem soll exemplarisch in die Kategorie der Stahl- und Verbundbrücken fallen. Das Lehrsche Dämpfungsmaß kann auf Grundlage der Tab. 3.1 zu  $\zeta = 0,02125$  festgelegt werden. Die Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$  folgt für das Bezugssystem aus Gl. (3.17) für  $j = 1$ :

$$v = \frac{\pi r_1}{\sqrt{L}} \quad (3.28)$$

Zufolge der Überlegungen aus Abschnitt 3.2.2 werden die Anzahl der berücksichtigten Eigenschwingungsformen mit  $n = 5$  festgelegt.

### Massenmatrix

Die Massenmatrix der Dimension  $5 \times 5$  für das Bezugssystem folgt aus Gl. (2.68) und der Festlegung von  $m_B = 1kg$  zu

$$\mathbf{M} = \text{diag}\left(\frac{m_B}{2}\right) = \text{diag}\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{I} \cdot \frac{1}{2} \quad (3.29)$$

$\mathbf{I}$  ..... Einheitsmatrix der Dimension  $5 \times 5$

Die invertierte Massenmatrix lautet

$$\mathbf{M}^{-1} = \text{diag}(2) = \mathbf{I} \cdot 2 \quad (3.30)$$

### Steifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrix der Dimension  $5 \times 5$  folgt aus Gl. (2.69) und den Festlegungen des Bezugssystems zu

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \text{diag}\left(\frac{EA_{zz}}{2} \frac{(j\pi)^4}{L^3}\right) = \text{diag}\left(\frac{(j\pi)^4}{2 \cdot 7^3}\right) = \mathbf{I} \cdot \frac{1}{686} \begin{pmatrix} \pi^4 \\ (2\pi)^4 \\ (3\pi)^4 \\ (4\pi)^4 \\ (5\pi)^4 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{I} \cdot \begin{pmatrix} 0,142 \\ 2,272 \\ 11,502 \\ 36,351 \\ 88,747 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.31)$$

### Dämpfungsmatrix

Bei der Erstellung der Antwortspektren wird die Methode der *Rayleighs*chen Dämpfung angewandt. Dazu wird das *Lehrsche* Dämpfungsmaß für die ersten beiden Eigenschwingungsformen nach Tab. 3.1 festgelegt:

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0,02125 \quad (3.32)$$

Die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_j$  des Bezugssystems berechnen sich unter Berücksichtigung von  $EA_{zz} = 1Nm^2$  und  $m_B = 1kg$  aus Gl. (2.43) zu

$$\omega_j = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{LEA_{zz}}{m_B}} = \left(\frac{j\pi}{7}\right)^2 \sqrt{7} \quad j = 1, \dots, 5 \quad (3.33)$$

Die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  können durch das Einsetzen der Gleichungen (3.32) und (3.33) in Gl. (2.77) bestimmt werden:

$$\alpha = \zeta_1 \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = 0,0181 \quad (3.34)$$

$$\beta = \zeta_1 \frac{2}{\omega_1 + \omega_2} = 0,016 \quad (3.35)$$

Die Dämpfungsmatrix wird proportional zur Massenmatrix und zur Steifigkeitsmatrix nach Gl. (2.74) angesetzt:

$$\mathbf{Z} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (3.36)$$

Einsetzen der Gleichungen (3.29), (3.31), (3.34) und (3.35) in Gl. (3.36) führt auf:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{I} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,0181 + \mathbf{I} \cdot \begin{pmatrix} 0,142 \\ 2,272 \\ 11,502 \\ 36,351 \\ 88,747 \end{pmatrix} \cdot 0,061 = \mathbf{I} \cdot \begin{pmatrix} 0,0113 \\ 0,0453 \\ 0,1925 \\ 0,5889 \\ 1,4246 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

### 3.4.1 Numerische Lösung der Bewegungsgleichungen

Die modalen Bewegungsgleichungen zur Beschreibung der Zugüberfahrt über einen gelenkig gelagerten Einfeldträgerbalken wurden in Abschnitt 2.4 hergeleitet und lauten nach Gl. (2.64):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Z}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{p}_z \quad (3.38)$$

Multiplikation der Gl. (3.38) mit der inversen Massenmatrix  $\mathbf{M}^{-1}$  aus Gl. (3.30) führt auf

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Z}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}_z \quad (3.39)$$

Spezialisieren der Gl. (3.39) für das festgelegte Bezugssystem aus Abschnitt 3.4 führt durch das Einsetzen der Gleichungen (3.30), (3.31) und (3.37) in Gl. (3.39) auf:

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2 \cdot \mathbf{I} \cdot \begin{pmatrix} 0,0113 \\ 0,0453 \\ 0,1925 \\ 0,5889 \\ 1,4246 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} + 2 \cdot \mathbf{I} \cdot \begin{pmatrix} 0,1420 \\ 2,2719 \\ 11,5017 \\ 36,3509 \\ 88,7473 \end{pmatrix} \mathbf{q} = 2 \cdot \mathbf{p}_z \quad (3.40)$$

In ausführlicher Schreibweise lautet Gl. (3.40)

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \\ \ddot{q}_3(t) \\ \ddot{q}_4(t) \\ \ddot{q}_5(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,0226 \cdot \dot{q}_1(t) \\ 0,0906 \cdot \dot{q}_2(t) \\ 0,3850 \cdot \dot{q}_3(t) \\ 1,1778 \cdot \dot{q}_4(t) \\ 2,8492 \cdot \dot{q}_5(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2840 \cdot q_1(t) \\ 4,5438 \cdot q_2(t) \\ 23,0034 \cdot q_3(t) \\ 72,7018 \cdot q_4(t) \\ 177,4946 \cdot q_5(t) \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} p_{z,1}(t) \\ p_{z,2}(t) \\ p_{z,3}(t) \\ p_{z,4}(t) \\ p_{z,5}(t) \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Die Bewegungsgleichungen (3.41) können für die hier auftretenden Randbedingungen des gelenkig gelagerten Einfeldträgers und der Zugmodellierung als Folge von Einzelkräften entweder analytisch oder mittels numerischer Integration gelöst werden. *Mähr* entschied sich in [7] für die numerische Integration, da sie auch für abweichende oder komplexere Randbedingungen anwendbar ist. Im Sinne der Vergleichbarkeit der Ergebnisse und der Validierung des Berechnungsschemas (siehe 3.6) werden die Bewegungsgleichungen für alle vorkommenden Berechnungen in dieser Arbeit ebenso mit numerischer Integration gelöst. Das Programm MATLAB bietet mit dem Aufsatz „*Simulink*“ ein entsprechendes Tool, das speziell für die numerische Lösung von Differentialgleichungen konzipiert ist.

Die Programmierung in *Simulink* erfolgt grafisch mit einzelnen Blöcken, die zu einem Blockdiagramm (auch Blockschaltbild genannt) zusammengefügt werden. Zwischen den einzelnen Blöcken werden Verbindungen hergestellt, die den Signalfluss repräsentieren. Soll eine Differentialgleichung mit *Simulink* gelöst werden, muss diese zuerst in ein entsprechendes Blockschaltbild umgewandelt werden. Dazu wird das Bewegungsgleichungssystem (3.38) wie folgt umgeformt:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{p}_z - \mathbf{Z}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q}] \quad (3.42)$$

Gl. (3.42) wird direkt in *Simulink* programmiert. Das zugehörige Blockschaltbild ist in Abb. 3.5 dargestellt.

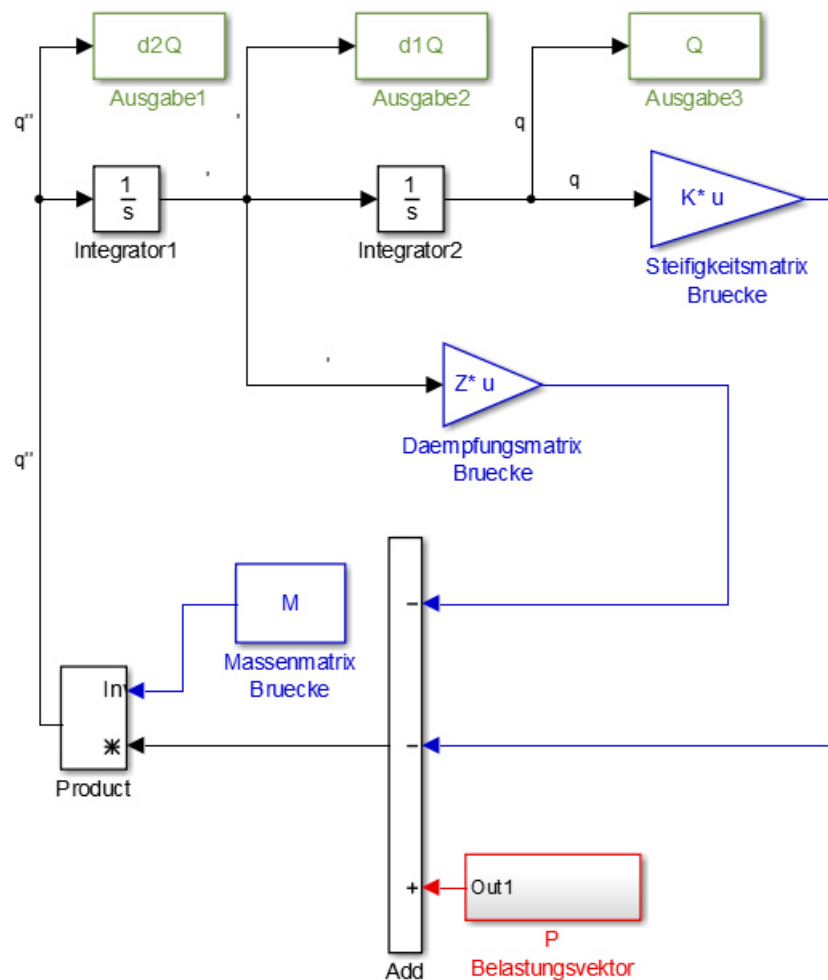


Abb. 3.5: Blockschaltbild der Bewegungsgleichungen in *Simulink*

Gleichung (3.42) ist in Abb. 3.5 durch die Blöcke „Add“ und „Product“ repräsentiert. Im Block „Add“ wird die Rechenoperation  $p_z - Z\dot{q} - Kq$  ausgeführt. Das Ergebnis dieser Rechenoperation wird im Block „Product“ mit der inversen Massenmatrix multipliziert, sodass  $\ddot{q}$  als Output aus dem Block „Product“ erhalten wird. Die Blöcke „Integrator1“ und „Integrator2“ führen die numerische Integration aus und werden als „solver“ bezeichnet. Ihre genaue Funktionsweise kann in [16] nachgelesen werden.

### Zeitschritte

Die Lösung der Bewegungsgleichungen mit *Simulink* erfolgt zu festgelegten Zeitpunkten  $t_k$ , an denen die dynamischen Effekte aller Einzellasten, die sich gerade auf der Brücke befinden oder diese bereits wieder verlassen haben, überlagert werden. Das Intervall  $\Delta t$  zwischen den festen Zeitpunkten  $t_k$  wird so gewählt, dass sich die Folge von Einzelkräften für die betrachtete Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$  jeweils um  $0,1m$  weiter bewegt.

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t \quad (3.43)$$



$$\Delta t = \frac{0,1}{v} \quad (3.44)$$

mit  $k = 0, \dots, s$  und  $t_0 = 0$

$t_s$ ..... Zeitpunkt, zu dem die letzte Einzelkraft der betrachteten Lastfolge die Brücke verlässt

Alle Zeitpunkte  $t_k$  vom Beginn bis zum Ende der Simulation werden im Zeitvektor  $\mathbf{t}$  zusammengefasst.

$$\mathbf{t} = (t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_s)^T \quad (3.45)$$

### Stabpunkte

Um die gesuchten Ergebnisgrößen berechnen zu können, müssen diskrete Stabpunkte gewählt werden, an denen eine Auswertung erfolgen soll. Unabhängig von der Spannweite  $L$  wird der betrachtete Balken entlang der Stabachse in 100 gleich große Elemente unterteilt. Dadurch ergeben sich 101 Stabpunkte, an denen die gesuchten Ergebnisgrößen ausgewertet werden. Die Positionen dieser Stabpunkte werden im Vektor  $\mathbf{x}$  zusammengefasst:

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m)^T \quad (3.46)$$

$$x_{m+1} = x_m + \frac{L}{100} \quad (3.47)$$

mit  $m = 1, 2, \dots, 101$  und  $x_1 = 0$

### 3.4.2 Auslesen der Systemantwort

Aus dem Blockschaltbild Abb. 3.5 werden die Matrizen  $\mathbf{Q}$ ,  $\dot{\mathbf{Q}}$  und  $\ddot{\mathbf{Q}}$  ausgegeben, welche die Ergebnisse der numerischen Integration enthalten. Die Matrix  $\mathbf{Q}$  enthält die generalisierten Koordinaten  $q_j(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t_k$  für jede Eigenschwingungsform  $j$  mit  $j = 1, \dots, n$  und  $k = 1, \dots, s$ . Die Spalten stehen für die Nummer der Eigenschwingungsform und die Zeilen für einen bestimmten Zeitpunkt:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ q_{s1} & & & q_{sn} \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

In der Matrix  $\dot{\mathbf{Q}}$  sind die generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_j(t)$  und in der Matrix  $\ddot{\mathbf{Q}}$  die generalisierten Beschleunigungen  $\ddot{q}_j(t)$  enthalten.  $\dot{\mathbf{Q}}$  und  $\ddot{\mathbf{Q}}$  haben denselben formalen Aufbau wie  $\mathbf{Q}$ .

## Durchbiegung

Der Durchbiegungsverlauf  $w(x, t)$  kann durch das Rückeinsetzen in den Ritzschen Ansatz nach Gl. (3.5) berechnet werden. Gl. (3.5) lautet in Matrixschreibweise:

$$\mathbf{w} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\phi} \quad (3.49)$$

In der Matrix  $\boldsymbol{\phi}$  sind die Eigenfunktionen  $\phi_j(x_m)$  aus Gl. (2.44) enthalten (mit  $j = 1, \dots, n$  und  $m = 1, \dots, 101$ ), wobei die Spalten für die Nummer der Stabpunkte  $x_m$  und die Zeilen für die Nummer der Eigenschwingungsform  $j$  stehen:

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \dots & \phi_{1,101} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \phi_{n,1} & & & \phi_{n,101} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

In der Matrix  $\mathbf{w}$  sind die Durchbiegungen  $w(x_m, t_k)$  enthalten (mit  $k = 1, \dots, s$  und  $m = 1, \dots, 101$ ), wobei die Spalten für die Nummer der Stabpunkte  $x_m$  und die Zeilen für die Zeitpunkte  $t_k$  stehen:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \dots & w_{1,101} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ w_{s,1} & & & w_{s,101} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Aus der Matrix  $\mathbf{w}$ , welche die Durchbiegungswerte für alle simulierten Zeitpunkte  $t_k$  an allen diskretisierten Stabpunkten  $x_m$  enthält, wird der absolute Maximalwert ausgelesen. Dieser Maximalwert wird für das betrachtete Bezugssystem mit der Spannweite  $L = 7m$  und dem Frequenzverhältnis  $r_1 = 0,0025$  an der Position  $a_{1,1}$  (siehe Gl. (3.27)) in das Antwortspektrum der Durchbiegungen eingetragen.

## Endtangentialwinkel

Der Verlauf der Querschnittsdrehwinkel  $\varphi(x, t)$  kann nach Gl. (3.7) berechnet werden. Gl. (3.7) lautet in Matrixschreibweise:

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\phi}_{,x} \quad (3.52)$$

In der Matrix  $\boldsymbol{\phi}_{,x}$  sind die nach der Stabachsenkoordinate  $x$  abgeleiteten Eigenfunktionen  $\phi_{j,x}(x_m)$  enthalten (mit  $j = 1, \dots, n$  und  $m = 1, \dots, 101$ ):

$$\phi_{j,x}(x) = \frac{j\pi}{L} \cos\left(\frac{j\pi}{L} x\right) \quad (3.53)$$

Die Spalten in  $\boldsymbol{\phi}_{,x}$  stehen für die Nummer der Stabpunkte  $x_m$  und die Zeilen für die Nummer der Eigenschwingungsform  $j$ :

$$\boldsymbol{\phi}_{,x} = \begin{pmatrix} \phi_{,x;1,1} & \phi_{,x;1,2} & \dots & \phi_{,x;1,101} \\ \phi_{,x;2,1} & \phi_{,x;2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \phi_{,x;n,1} & & & \phi_{,x;n,101} \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

In der Matrix  $\boldsymbol{\phi}$  sind die Querschnittsdrehwinkel  $\varphi(x_m, t_k)$  enthalten (mit  $k = 1, \dots, s$  und  $m = 1, \dots, 101$ ), wobei die Spalten für die Nummer der Stabpunkte  $x_m$  und die Zeilen für die Zeitpunkte  $t_k$  stehen:

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \dots & \varphi_{1,101} \\ \varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \varphi_{s,1} & & & \varphi_{s,101} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Für den gelenkig gelagerten Einfeldträger ist der Querschnittsdrehwinkel an den Auflagern von Interesse. Deshalb wird aus der Matrix  $\boldsymbol{\varphi}$ , welche die Querschnittsdrehwinkel für alle simulierten Zeitpunkte  $t_k$  an allen diskretisierten Stabpunkten  $x_m$  enthält, der Maximalwert aus der ersten und der letzten Spalte (Werte für das linke bzw. rechte Auflager) ausgelesen. Dieser Maximalwert wird für das betrachtete Bezugssystem mit der Spannweite  $L = 7m$  und dem Frequenzverhältnis  $r_1 = 0,0025$  an der Position  $a_{1,1}$  (siehe Gl. (3.27)) in das Antwortspektrum der Endtangentialwinkel eingetragen.

### Beschleunigung

Der Verlauf der Beschleunigungen  $\ddot{w}(x, t)$  kann nach Gl. (3.6) berechnet werden. Gl. (3.6) lautet in Matrixschreibweise:

$$\dot{\boldsymbol{w}} = \ddot{\boldsymbol{Q}} \cdot \boldsymbol{\phi} \quad (3.56)$$

In der Matrix  $\dot{\boldsymbol{w}}$  sind die Beschleunigungen  $\ddot{w}(x_m, t_k)$  enthalten (mit  $k = 1, \dots, s$  und  $m = 1, \dots, 101$ ), wobei die Spalten für die Nummer der Stabpunkte  $x_m$  und die Zeilen für die Zeitpunkte  $t_k$  stehen:

$$\dot{\boldsymbol{w}} = \begin{pmatrix} \ddot{w}_{1,1} & \ddot{w}_{1,2} & \dots & \ddot{w}_{1,101} \\ \ddot{w}_{2,1} & \ddot{w}_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \ddot{w}_{s,1} & & & \ddot{w}_{s,101} \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Aus der Matrix  $\dot{\boldsymbol{w}}$ , welche die Beschleunigungen für alle simulierten Zeitpunkte  $t_k$  an allen diskretisierten Stabpunkten  $x_m$  enthält, wird der absolute Maximalwert ausgelesen. Dieser Maximalwert wird für das betrachtete Bezugssystem mit der Balkenlänge  $L = 7m$  und dem Frequenzverhältnis  $r_1 = 0,0025$  an der Position  $a_{1,1}$  (siehe Gl. (3.27)) in das Antwortspektrum der Beschleunigungen eingetragen.

### Biegemoment

Der Verlauf der Biegemomente  $M_y(x, t)$  kann nach Gl. (3.9) berechnet werden. Gl. (3.9) lautet in Matrixschreibweise:

$$\mathbf{M}_y = -EA_{zz} \cdot \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\phi}_{,xx} \quad (3.58)$$

Die Einträge der Matrix  $\boldsymbol{\phi}_{,xx}$  entstehen durch die zweimalige Ableitung der Eigenfunktionen nach der Stabachsenkoordinate  $x$ :

$$\phi_{j,xx}(x) = -\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right) = -\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \phi_j(x) \quad (3.59)$$

mit  $j = 1, \dots, n$

Die Spalten in  $\boldsymbol{\phi}_{,xx}$  stehen für die Nummer der Stabpunkte  $x_m$  und die Zeilen für die Nummer der Eigenschwingungsform  $j$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_{,xx} &= -\text{diag}\left[\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\right] \cdot \boldsymbol{\phi} \\ &= -\begin{pmatrix} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 & & & & \\ & \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \dots & \phi_{1,101} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \phi_{n,1} & & & \phi_{n,101} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Die Berechnung der Matrix  $\mathbf{M}_y$  erfolgt nach Gl. (3.58) mit der Festlegung für das Bezugssystem von  $EA_{zz} = 1Nm^2$ . Aus  $\mathbf{M}_y$  wird der absolute Maximalwert ausgelesen, welcher für das betrachtete Bezugssystem mit der Balkenlänge  $L = 7m$  und dem Frequenzverhältnis  $r_1 = 0,0025$  an der Position  $a_{1,1}$  (siehe Gl. (3.27)) in das Antwortspektrum der Beschleunigungen eingetragen wird.

## 3.5 Skalierung der Antwortspektren

Wie in Abschnitt gezeigt wurde, können die generalisierten Koordinaten und die generalisierten Beschleunigungen durch die Einführung des Frequenzverhältnisses  $r_j$  unabhängig von der Biegesteifigkeit und der Brückenmasse dargestellt werden:

$$EA_{zz} \cdot q_j(t_k) = f(L, r_j, p_{z,j}(t_k), \zeta) \quad (3.61)$$

$$m_B \cdot \ddot{q}_j(t_k) = f(L, r_j, p_{z,j}(t_k), \zeta) \quad (3.62)$$

Die Erstellung der Antwortspektren erfolgt an einem Bezugssystem, dem die Biegesteifigkeit  $EA_{zz} = 1Nm^2$  und die Brückenmasse  $m_B = 1kg$  zugewiesen wird ( $EA_{zz}$  und  $m_B$  können frei gewählt werden), sodass die Funktionswerte in den Gleichungen (3.61) und (3.62) direkt die generalisierten Beschleunigungen ergeben.

Wird ein (reales) System mit den beliebigen Parametern  $EA_{zz} = const.$  und  $m_B = const.$  betrachtet, so ergeben die Funktionswerte aus den Gleichungen (3.61) und (3.62) die Werte  $EA_{zz} \cdot q_j(t_k)$  bzw.  $m_B \cdot \ddot{q}_j(t_k)$ . Die generalisierten Koordinaten  $q_j(t_k)$  sind demnach mit dem Faktor  $EA_{zz}$  skaliert und die generalisierten Beschleunigungen  $\ddot{q}_j(t_k)$  mit dem Faktor  $m_B$ .

### Durchbiegung

Zur Bestimmung des Antwortspektrums der Durchbiegungen werden die skalierten generalisierten Koordinaten aus Gl. (3.61) in Gl. (3.5) eingesetzt:

$$EA_{zz} \cdot w^*(x, t) = \sum_{j=1}^n EA_{zz} \cdot q_j(t) \phi_j(x) \quad (3.63)$$

Ist die Biegesteifigkeit für das betrachtete Brückentragwerk bekannt, so sind die Funktionswerte aus dem Antwortspektrum der Durchbiegungen durch die Biegesteifigkeit zu dividieren, um die maximalen Durchbiegung in  $[m]$  zu erhalten.

### Beschleunigung

Zur Bestimmung des Antwortspektrums der Beschleunigungen werden die skalierten generalisierten Beschleunigungen aus Gl. (3.62) in Gl. (3.6) eingesetzt:

$$m_B \cdot \ddot{w}^*(x, t) = \sum_{j=1}^n m_B \cdot \ddot{q}_j(t) \phi_j(x) \quad (3.64)$$

Die Funktionswerte aus dem Antwortspektrum der Beschleunigungen sind durch die Brückenmasse des betrachteten Tragwerks zu dividieren, um die maximale Beschleunigung in  $[m/s^2]$  zu erhalten.

### Endtangentialwinkel

Zur Bestimmung des Antwortspektrums der Beschleunigungen werden die skalierten generalisierten Koordinaten aus Gl. (3.61) in Gl. (3.7) eingesetzt:

$$EA_{zz} \cdot \varphi^*(x, t) = - \sum_{j=1}^n EA_{zz} \cdot q_j(t) \phi_{j,x}(x) \quad (3.65)$$

Die Funktionswerte aus dem Antwortspektrum der Endtangentialwinkel sind durch die Biegesteifigkeit des betrachteten Tragwerks zu dividieren, um den maximalen Endtangentialwinkel in  $[rad]$  zu erhalten.

### **Biegemoment**

Zur Bestimmung des Antwortspektrums der Biegemomente werden die skalierten generalisierten Koordinaten aus Gl. (3.61) in Gl. (3.9) eingesetzt:

$$M_y^* = -EA_{zz} \sum_{j=1}^n q_j(t) \phi_{j,xx}(x) \quad (3.66)$$

Da die skalierten generalisierten Koordinaten  $EA_{zz} \cdot q_j(t)$  bereits in der Bestimmungsgleichung (3.66) enthalten sind, werden durch Gl. (3.66) die Biegemomente (und keine skalierten Werte) berechnet. Das Antwortspektrum der maximalen Biegemomente kann ohne weitere Bearbeitung zur Auswertung herangezogen werden, da es direkt die Biegemomente in  $[Nm]$  enthält.

## **3.6 Validierung des Berechnungsverfahrens zur Erstellung von Antwortspektren**

Mähr entwickelte im Zuge seiner Dissertation das Programm *Asp\_Einfeldbr\_v01*, dem die Antwortspektren für die Modellzüge der HSLM-A-Reihe (siehe Abschnitt 4.1.1) zugrunde liegen. Im Rahmen der vorliegenden Diplomarbeit soll das Programm zur Version *Asp\_Einfeldbr\_v01\_1* erweitert werden, in welcher auch Konfigurationen des ÖBB Railjet untersucht werden sollen. Als Aufgabenstellung für die vorliegende Diplomarbeit ergibt sich somit die Erstellung der Antwortspektren für die Lastmodelle des ÖBB Railjet aus Abschnitt 4.1.2.

Die Berechnung von Antwortspektren erfolgt mithilfe des Berechnungsverfahrens, das in Abschnitt 3.4 beschrieben wird. Um den Berechnungsalgorithmus zu validieren, wird in einem ersten Schritt versucht, die von Mähr berechneten Antwortspektren (in weiterer Folge als „Referenzdaten“ bezeichnet) zu reproduzieren.

Exemplarisch werden die Antwortspektren für das Lastmodell HSLM-A1 (siehe Abschnitt 4.1.1) berechnet. Vergleicht man diese neu erstellten Antwortspektren mit den Referenzdaten, so lässt sich feststellen, dass die Matrixeinträge in den Antwortspektren nicht exakt übereinstimmen.

### 3.6.1 Abweichungen zwischen neu berechneten Antwortspektren und Referenzdaten

Die Größenordnung der Abweichung der neu berechneten Antwortspektren von den Referenzdaten wird in den Abbildungen 3.6 und 3.7 und veranschaulicht. Exemplarisch sind die Verläufe der Antwortspektren der vier Ergebnisgrößen für eine Brückenspannweite von 10m, die Dämpfung für den Fall Stahl- und Verbundbrücke (siehe Tab. 3.1) und der Belastung des Modellzuges HSLM-A1 abgebildet. Die neu berechneten Daten sind jeweils in rot dargestellt, die Referenzdaten in blau.

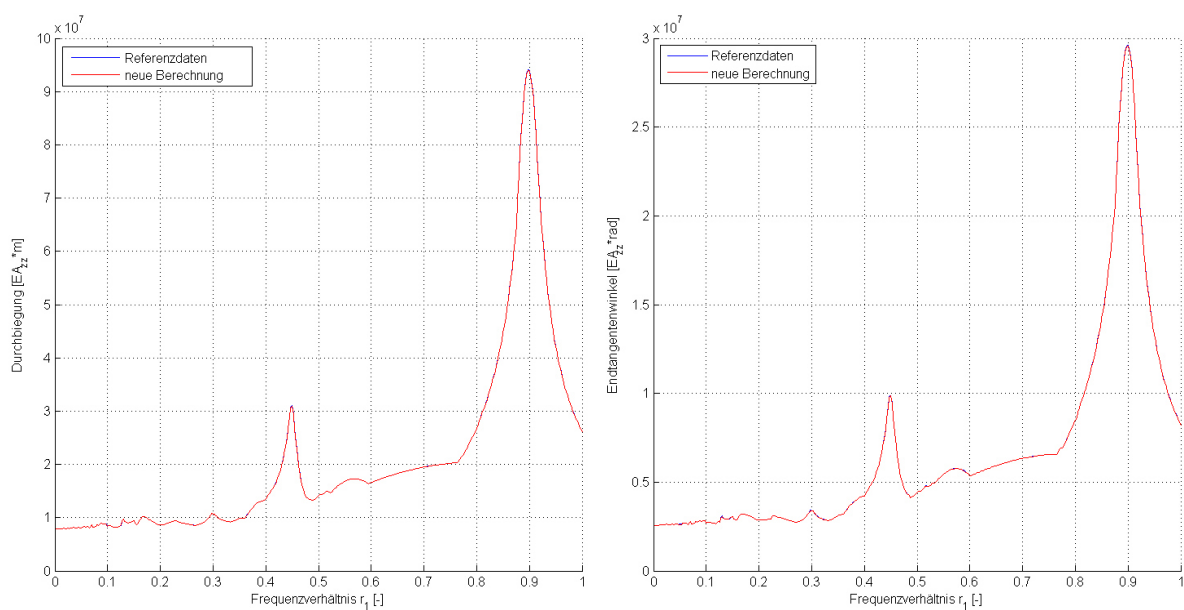


Abb. 3.6: Vergleich der Ergebnisverläufe für die Durchbiegung (linkes Bild) und den Endtangentialwinkel (rechtes Bild)

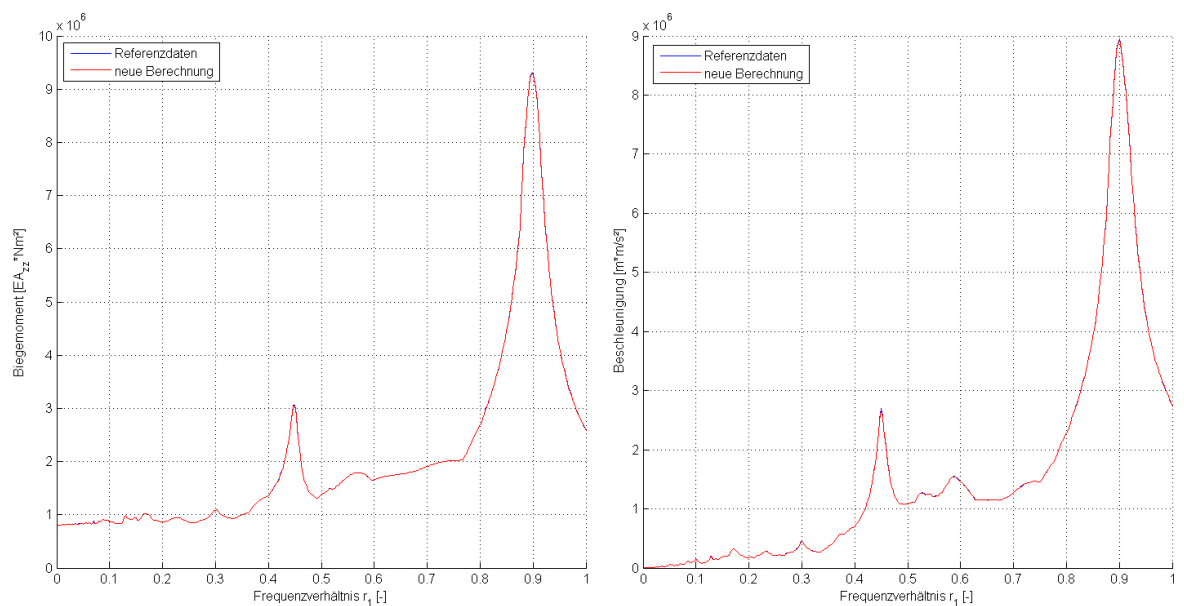


Abb. 3.7: Vergleich der Ergebnisverläufe für das Biegemoment (linkes Bild) und die Beschleunigung (rechtes Bild)

In den Abbildungen 3.6 und 3.7 sind die blauen Linien kaum erkennbar, was bedeutet, dass die Verläufe annähernd deckungsgleich sind und die beiden verglichenen Datensätze beinahe idente Ergebnisse liefern.

Zur Veranschaulichung seiner Größenordnung wird der relative Fehler der neu berechneten Antwortspektren bezogen auf die Referenzdaten folgendermaßen berechnet:

$$relF_{i,k} = \frac{a_{i,k,ref} - a_{i,k}}{a_{i,k,ref}} \quad (3.67)$$

$a_{i,k}$  ..... Matrixeinträge der neu berechneten Antwortspektren nach Gl. (3.27)

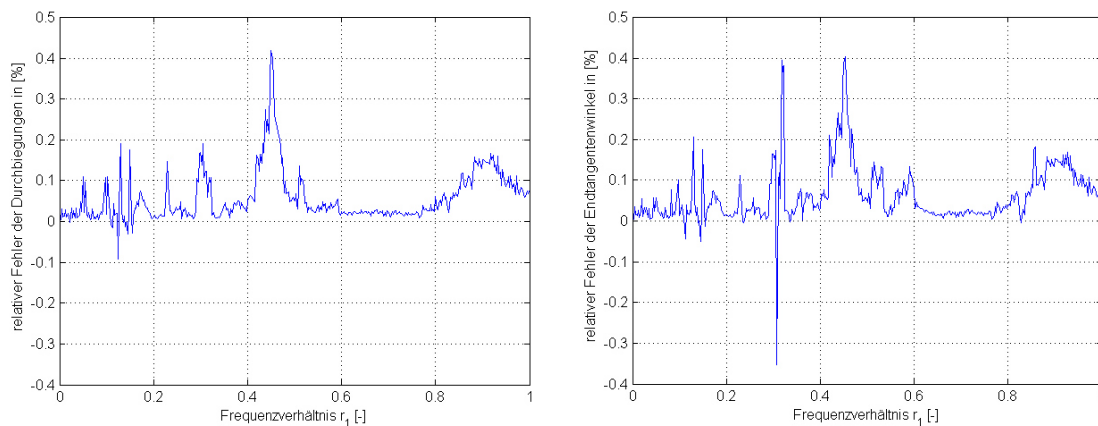
$a_{i,k,ref}$  ..... Matrixeinträge der Referenzdaten nach Gl. (3.27)

$i$  ..... Zeilennummer ( $i = 1, 2, \dots, 400$ )

$k$  ..... Spaltennummer ( $k = 1, 2, \dots, 187$ )

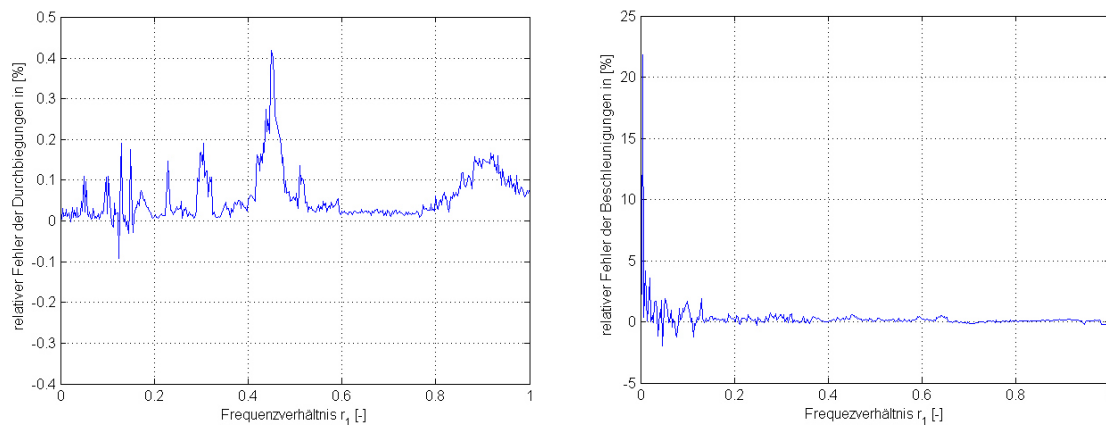
$relF_{i,k}$  ..... relativer Fehler im Matrixeintrag der Zeile  $i$  und Spalte  $k$

In den Abbildungen 3.8 und 3.9 ist der relative Fehler  $relF_{i,k}$  für eine Stahl- und Verbundbrücke mit einer Spannweite von  $L = 10m$  unter der Belastung des Zugmodells HSLM-A1 dargestellt.



**Abb. 3.8: relativer Fehler in [%] bezogen auf die Referenzdaten: Durchbiegungen (linkes Bild) und Endtangentialwinkel (rechtes Bild)**





**Abb. 3.9: relativer Fehler in [%] bezogen auf die Referenzdaten: Biegemomente (linkes Bild) und Beschleunigungen (rechtes Bild)**

Zu beachten ist dabei, dass zur sinnvollen Darstellung des relativen Fehlers der Beschleunigungen (rechtes Bild in Abb. 3.9) eine andere Skalierung der Ordinate gewählt ist. Dies ist notwendig, da ein einzelner Maximalwert von 21,9% Abweichung bezogen auf die Referenzdaten beim Frequenzverhältnis von  $r_1 = 0,005$  auftritt. Die Größe dieses Maximalwertes lässt sich dadurch erklären, dass die Absolutwerte der Beschleunigung bei diesem Frequenzverhältnis sehr klein sind (siehe rechtes Bild in Abb. 3.7) und somit bei der Bildung des relativen Fehlers zwischen neu berechneten Antwortspektren und Referenzdaten durch eine Zahl dividiert wird, die nahe null liegt. Es handelt sich somit um ein numerisches Problem, das durch die Wahl der Darstellung zum Vorschein kommt und nicht um eine wesentliche Abweichung im maßgebenden Bereich.

Um die Größenordnung der Abweichungen zwischen den neu berechneten Antwortspektren und den Referenzdaten abschätzen zu können, wird der durchschnittliche relative Fehler über alle Matrixeinträge des jeweiligen Antwortspektrums (für die Durchbiegung, den Endtangentialwinkel, das Biegemoment und die Beschleunigung) betrachtet. Die Werte dieses Fehlers sind in Tab. 3.2 angeführt.

	Durchbiegung	Endtangentialwinkel	Biegemoment	Beschleunigung
Durchschnittlicher Fehler [%]	0,37	0,45	0,41	0,76

**Tab. 3.2: Durchschnittliche Abweichung aller Matrixeinträge der neu berechneten Antwortspektren von den Referenzdaten**

Die positiven Werte in Tab. 3.2 bedeuten, dass in neu berechneten Antwortspektren im Durchschnitt etwas kleinere Ergebniswerte enthalten sind als in den Referenzdaten. Bedenkt man jedoch, welche Grundannahmen als Berechnungsgrundlage getroffen wurden, so ist der Fehler nach Tab. 3.2 vernachlässigbar klein. Vor allem die Modellierung des Brückenträgers als Bernoulli-Euler-Balken, die Verwendung der Dämpfungswerte nach [12] (untere

Grenzwerte), die Betrachtung der Zugmodelle als bewegte Einzelkräfte und die Vernachlässigung der Dämpfungswirkung des Schotterbetts stellen konservative Vereinfachungen dar, deren Einfluss auf das Gesamtergebnis um Größenordnungen höher einzuschätzen ist.

### 3.6.2 Identifikation der Fehlerquelle

Um eine Begründung für die Abweichungen der neu berechneten Antwortspektren im Bezug auf die Referenzdaten zu finden, werden folgende Parameter untersucht:

– *Rundungsfehler im Programm*

Intuitiv könnte man meinen, dass Abweichungen in den Ergebnissen durch Rundungsfehler, die sich im Rahmen der umfangreichen Berechnung einstellen, zu begründen seien. Bei näherer Betrachtung stellt man jedoch fest, dass das Programm MATLAB im Datentyp „double“, in welchem alle Eingangswerte und Zwischenergebnisse standardmäßig gespeichert werden, mit 16 wertanzeigenden Stellen rechnet. Abweichungen zwischen den neu erstellten Antwortspektren und den Referenzdaten sind jedoch für einige Matrixeinträge bereits ab der dritten wertanzeigenden Stelle erkennbar, sodass Rundungsfehler nicht für den auftretenden Fehler verantwortlich sein können.

– *Anderer Solver bei numerischer Lösung der Bewegungsgleichungen*

Der Programmaufsatz *Simulink* bietet unterschiedliche Solver zur Lösung der Bewegungsgleichung (3.42) an. Für alle im Rahmen dieser Arbeit neu berechneten Antwortspektren wird der Solver *ode15+* verwendet, der als Standard in *Simulink* voreingestellt ist. Die Referenzdaten wurden mit dem Solver *ode113* berechnet. Die Unterschiede der Funktionsweise der verschiedenen Solver können in [16] nachgelesen werden.

Für den Vergleich mit den Referenzdaten wurden die Antwortspektren für das Lastmodell HSLM-A1 zusätzlich mit dem Solver *ode113* neu berechnet. Auch durch die Verwendung des gleichen Solvers konnte keine bessere Übereinstimmung mit den Referenzdaten erzielt werden. Der unterschiedliche Lösungsalgorithmus bei der numerischen Integration ist also auch nicht die Quelle für die Abweichungen zu den Referenzdaten.

– *Unterschiedliche Programmversionen von MATLAB*

In [7] ist kein Hinweis darauf zu finden, mit welcher Programmversion von MATLAB die Referenzdaten erstellt wurden. Da [7] zwischen 2008 und 2009 veröffentlicht wurde, muss die Version MATLAB 2009 oder älter genutzt worden sein. Für die neuen Berechnungen wurden die Versionen MATLAB R2013b und MATLAB R2014b verwendet. Als einzige Fehlerquelle für die Abweichung der neu berechneten zu den Referenzdaten bleibt somit die Anwendung neuerer Versionen von MATLAB, welche sich durch die ständige Weiterentwicklung der Lösungsalgorithmen unterscheiden.

## 4 Zugmodelle

Das in Abschnitt 3 erläuterte Berechnungsverfahren wird angewandt, um Antwortspektren für die Belastung einer beliebigen Folge von Einzelkräften zu erstellen. Der Abschnitt 4.1 enthält die notwendigen Daten, um die Zugkonfigurationen der HSLM-A-Reihe aus [12] und des ÖBB Railjet aus [10] als konkrete Folge von Einzelkräften abbilden zu können.

Der Abschnitt 4.2 beschäftigt sich mit dem Lastmodell 71, das laut aktueller Normensituation bei der Bemessung von Brückentragwerken unumgänglich ist. Obwohl es sich dabei um ein Lastmodell für statische Berechnungen der Tragwerksantwort handelt, können für das LM71 „Antwortspektren“ für Biegemomente, Querschnittsdrehwinkel und Durchbiegungen von Einfeldträgerbrücken erstellt werden, die denselben formalen Aufbau wie die Antwortspektren aus Abschnitt 3 besitzen. Diese Vorgangsweise ermöglicht die Berücksichtigung des LM71 im Programm *DynZugVergleich*, wodurch Vergleiche zwischen der dynamischen Tragwerksantwort der Modellzüge aus Abschnitt 4.1 und der statischen Tragwerksantwort des LM71 gezogen werden können.

### 4.1 Zugmodelle für die dynamische Berechnung

#### 4.1.1 Züge der HSLM-A-Reihe

Laut Eurocode [12] ist die dynamische Berechnung der Tragwerksantwort von Brücken auf internationalen Strecken mit dem Lastmodell HSLM durchzuführen. Dabei werden die zwei getrennten Modellzüge HSLM-A und HSLM-B mit variabler Wagenlänge berücksichtigt. Der Modellzug HSLM-B kommt ausschließlich bei Einfeldträgerbrücken mit einer Spannweite von weniger als  $7m$  zur Anwendung. Alle Programme, die im Rahmen dieser Arbeit beschrieben werden, sind für Einfeldträgerbrücken mit Spannweiten zwischen  $7m$  und  $100m$  gültig, weshalb der Modellzug HSLM-B in weiterer Folge keine Berücksichtigung findet. Die Geometrie und die Belastung des Modellzugs HSLM-A werden in Abb. 4.1 und Tab. 4.1 angegeben.

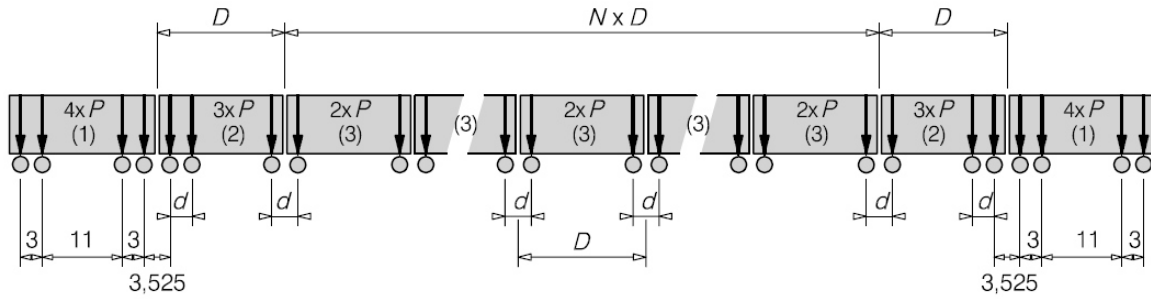


Abb. 4.1: HSLM-A ([12], 6.4.6.1.1., S. 82)

Modellzug	Anzahl der Mittelwagen <i>N</i>	Wagenlänge <i>D</i> [m]	Drehgestell-achsenabstand <i>d</i> [m]	Einzellast <i>P</i> [kN]
A1	18	18	2,0	170
A2	17	19	3,5	200
A3	16	20	2,0	180
A4	15	21	3,0	190
A5	14	22	2,0	170
A6	13	23	2,0	180
A7	13	24	2,0	190
A8	12	25	2,5	190
A9	11	26	2,0	210
A10	11	27	2,0	210

Tab. 4.1: HSLM-A ([12], 6.4.6.1.1., S. 83)

### 4.1.2 Konfigurationen des ÖBB Railjet

In [10] werden fünf Konfigurationen des ÖBB Railjet definiert. Die Geometrie und die Belastungen dieser Züge werden in den Abbildungen 4.2 bis 4.6 dargestellt.

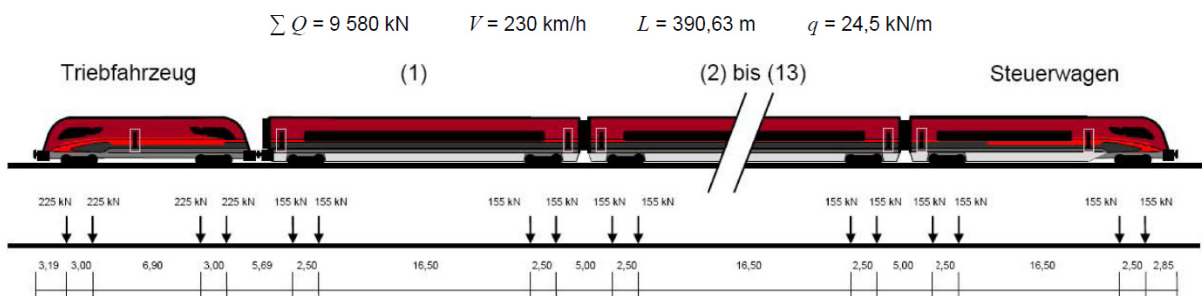


Abb. 4.2: Railjetkonfiguration C15 ([10], Anhang A, S. 21)

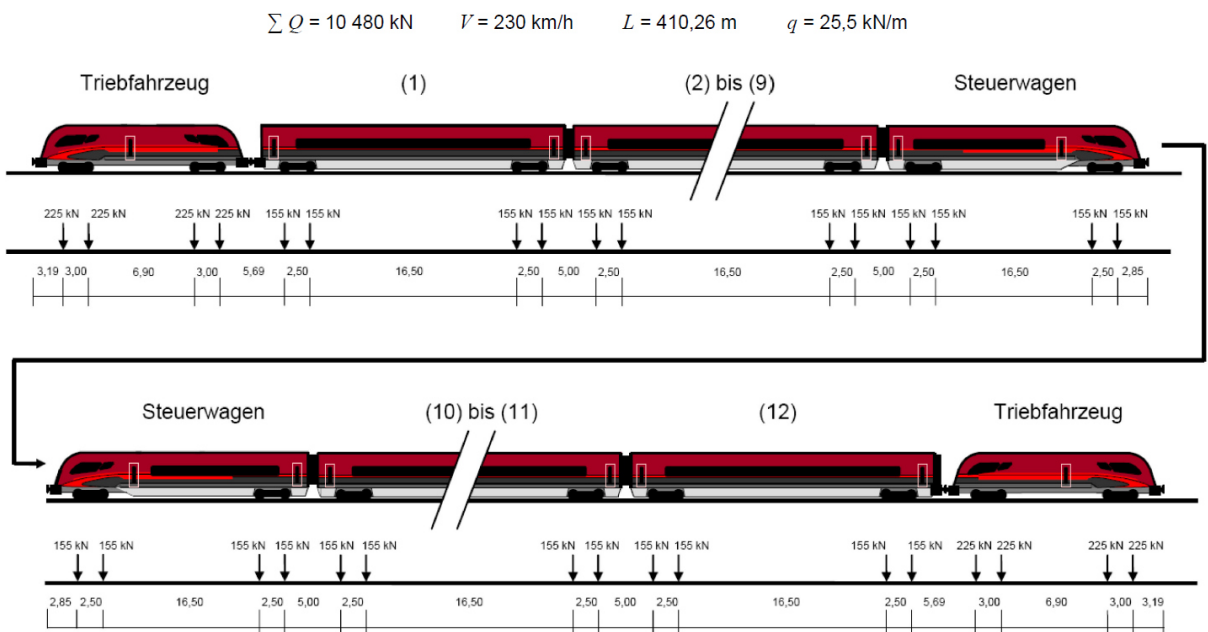
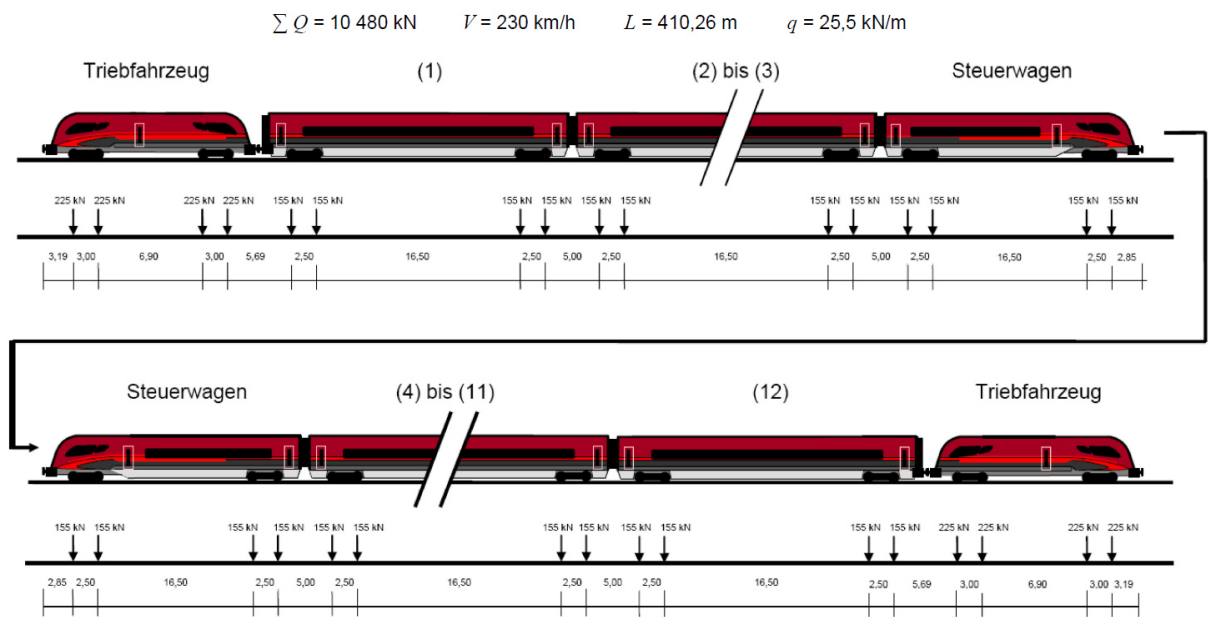
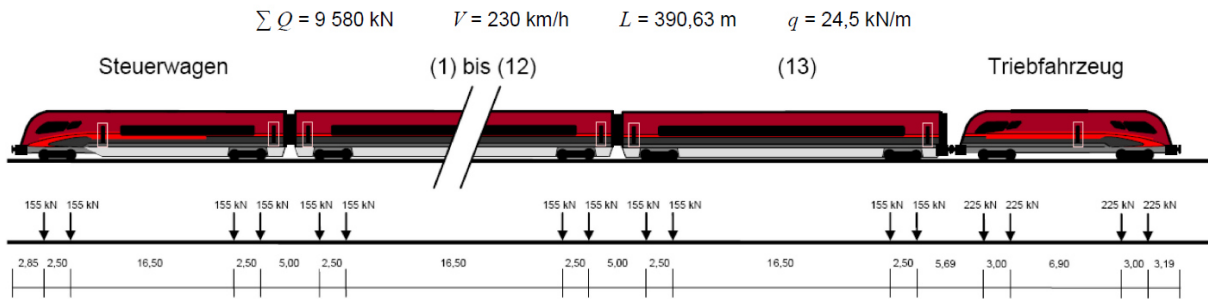


Abb. 4.5: Railjetkonfiguration C18 ([10], Anhang A, S. 23)

$$\sum Q = 10\,480 \text{ kN} \quad V = 230 \text{ km/h} \quad L = 410,26 \text{ m} \quad q = 25,5 \text{ kN/m}$$

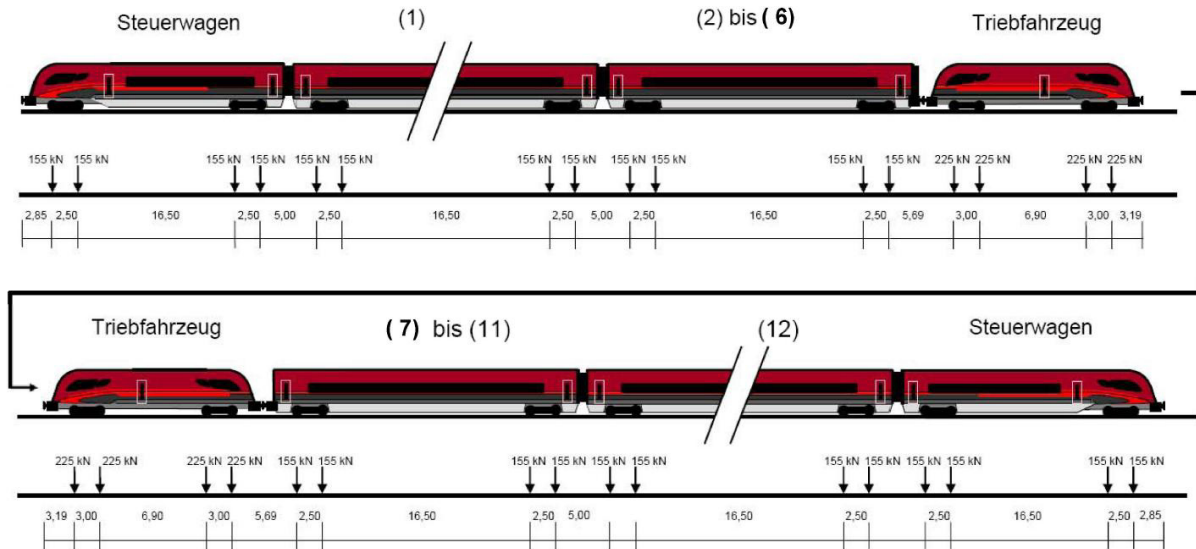


Abb. 4.6: Railjetkonfiguration C19 ([10], Anhang A, S. 24)

Die Railjetkonfigurationen C15 (siehe Abb. 4.2) und C16 (siehe Abb. 4.3) unterscheiden sich nur in der Fahrtrichtung. Da die Programmen *DynZugVergleich* und *Asp\_Einfeldbr\_v01* unabhängig von der Fahrtrichtung aufgebaut sind, werden diese beiden Modellzüge zu einem wählbaren Modell „Railjet C15, C16“ zusammengefasst, welches die Einhüllende der maximalen Tragwerksantwort dieser beiden Konfigurationen beinhaltet. Aus den äquivalenten Überlegungen werden auch die Konfigurationen C17 (siehe Abb. 4.4) und C18 (siehe Abb. 4.5) zum Modell „Railjet C17, C18“ zusammengefasst.

### 4.1.3 Übersicht aller Zugdaten

Die Achsabstände und Achslasten aller Zugmodelle für die dynamische Berechnung sind in tabellarischer Form im Anhang B (siehe S. 103) zusammengefasst.

## 4.2 Zugmodelle für die statische Berechnung – Lastmodell 71

Da ein Großteil der heute in Betrieb befindlichen Brückentragwerke auf das Lastmodell 71 (in weiterer Folge als „LM71“ abgekürzt) bemessen wurde, ist die Auswahlmöglichkeit dieser Laststellung in den *DynZugVergleich*-Programmen als Referenzmodell von besonderem Interesse. Dadurch kann für jedes neue Zugmodell untersucht werden, ob die Tragwerksantwort (Durchbiegung, Endtangentialwinkel und Biegemoment) aus dynamischen Belastungen die Bemessungsgrößen überschreitet.

Das LM71 wird als lotrechte Verkehrslast zur Bemessung von Brückentragwerken angewandt. „Das LM71 stellt den statischen Anteil der Einwirkungen aus dem Regelverkehr dar und wirkt als Vertikallast auf das Gleis.“<sup>1</sup>

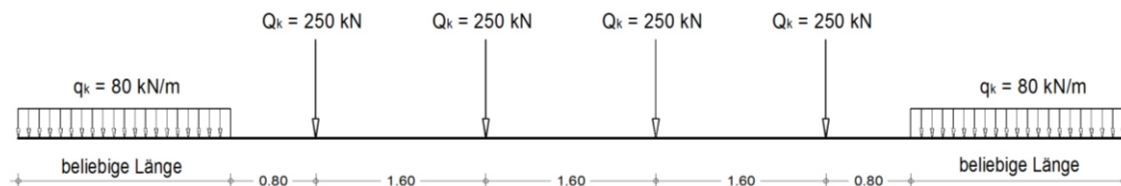


Abb. 4.7: Lastmodell 71

Die Lasten aus Abb. 4.7 stellen charakteristische Werte dar und sind an der für das Tragwerk ungünstigsten Position anzusetzen.

#### 4.2.1 Lastklasse/Brückenkategorie

Das LM71 kann für Zugstrecken, die höher oder niedriger belastet werden, als es das Regelmodell vorsieht, durch die Multiplikation mit einem zusätzlichen Beiwert adaptiert werden. In der im Jahr 2009 zurückgezogenen ÖNORM B4003 [11] wurde dieser Umstand über Brückenklassen ( $n$ ) geregelt, die die Größe des Faktors  $k_n$  bestimmten, mit dem die Grundlasten des LM71 zu multiplizieren waren. Die Größe des Faktors  $k_n$  in Abhängigkeit der Brückenkategorie ist in Tab. 4.4 zu finden.

Kategorie ( $n$ )	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3
$k_n = 1,1^n$	1,33	1,21	1,10	1,00	0,91	0,83	0,75

Tab. 4.4: Faktor  $k_n$  in Abhängigkeit der Brückenkategorie ([11], 2.2.2, S. 2)

Das aktuell gültige Normenwerk [12] verzichtet auf die Definition von Brückenkategorien und führt den Lastkategoriebeiwert  $\alpha$  ein, welcher laut den nationalen Festlegungen und Ergänzungen zu ÖNORM EN 1991-2 [10] zu wählen ist. [10] schreibt vor, dass alle Brücken für Normalspurbahnen mit  $\alpha = 1,21$  zu bemessen sind, sofern keine anderen Festlegungen vorliegen.

Im Programm *DynZugVergleich* sind die folgenden Lastmodelle wählbar:

- LM71  $\alpha=1,0$

Dieses Lastmodell gilt für den Beiwert  $\alpha = 1,0$ , was der Brückenkategorie 0 nach [11] entspricht.

<sup>1</sup> EN 1991-2: S. 65.

- *LM71 alpha=1,1*  
Dieses Lastmodell gilt für den Beiwert  $\alpha = 1,1$ , was der Brückenklasse +1 nach [11] entspricht.
- *LM71 alpha=1,21*  
Dieses Lastmodell gilt für den Beiwert  $\alpha = 1,21$ , was der Brückenklasse +2 nach [11] entspricht.

Alle Brücken entlang der Westbahnstrecke zwischen Wien und Salzburg, die mit einer Geschwindigkeit von mehr als  $160\text{km/h}$  befahren werden und aufgrund ihres Errichtungszeitpunktes dem Lastansatz des LM71 unterliegen, sind auf eine der drei Variationen „LM71 alpha=1,0“, „LM71 alpha=1,1“ oder „LM71 alpha=1,21“ bemessen, weshalb auf andere mögliche Variationen des LM71 verzichtet wird.

#### 4.2.2 Dynamischer Beiwert $\phi$

Zusätzlich zum Lastklassenbeiwert  $\alpha$  sind die Lasten des LM71 laut [12] mit dem sogenannten „dynamischen Beiwert“  $\phi$  zu multiplizieren.  $\phi$  ist jedoch kein „echter“ dynamischer Beiwert, sondern ein Vergrößerungsfaktor für die charakteristischen Lasten des LM71. Er dient einerseits zur Berücksichtigung der dynamischen Vergrößerung von Beanspruchungen und Schwingungen im Tragwerk (jedoch nicht bei Resonanz und übermäßigen Schwingungen der Brücke) und andererseits zur Anpassung des LM71 an einen reale Züge. Der Beiwert  $\phi$  ersetzt demnach keine dynamische Berechnung, da er nicht imstande ist, Resonanzphänomene von Hochgeschwindigkeitszügen abzudecken. Innerhalb der in Abschnitt 1.2 beschriebenen Grenzen kann jedoch davon ausgegangen werden, dass solche Resonanzphänomene kleinere Belastungen eines Brückenträgers hervorrufen, als das LM71 multipliziert mit den Faktoren  $\alpha$  und  $\phi$ .

Im Eurocode [12] stehen zwei Werte  $\phi_2$  und  $\phi_3$  für die Wahl des dynamischen Beiwertes zur Auswahl. Für sorgfältige instandgehaltene Gleise ist der dynamische Beiwert mit

$$\phi_2 = \frac{1,44}{\sqrt{L_\phi} - 0,2} + 0,82 \quad (4.1)$$

mit  $1,0 \leq \phi_2 \leq 1,67$  zu wählen. Für normale Instandhaltung ist der dynamische Beiwert mit

$$\phi_3 = \frac{2,16}{\sqrt{L_\phi} - 0,2} + 0,73 \quad (4.2)$$

mit  $1,0 \leq \phi_3 \leq 2,0$  festzulegen.  $L_\phi$  beschreibt darin die maßgebende Länge, welche für die Hauptträger einer Einfeldträgerbrücke der Stützweite in Richtung der Brückenachse entspricht.



In der zurückgezogenen ÖN B 4003 [11] wird die Instandhaltungsqualität der Gleise nicht berücksichtigt und der dynamische Beiwert folgendermaßen festgelegt:

$$\phi = \frac{1,44}{\sqrt{L_\phi} - 0,2} + 0,82 \quad (4.3)$$

Die Grenzwerte für den dynamischen Beiwert werden zu  $1,05 \leq \phi \leq 1,67$  festgelegt.

Im Programm *DynZugVergleich* wird der dynamische Beiwert nach alter Normensituation ( $\phi$ ) bzw. nach aktueller Normensituation für den Fall der sorgfältigen Instandhaltung ( $\phi_2$ ) berücksichtigt ( $\phi = \phi_2$ ). Die Vernachlässigung von  $\phi_3$  dient zur Wahrung der Übersichtlichkeit in den Programmen (sinnvolle Anzahl an Lastmodellen), da der Großteil der zu untersuchenden Brückentragwerke ohnehin nach [11] bemessen wurde.

Die Belastungsgrößen der drei zur Auswahl stehenden Lastmodelle für das LM71 setzen sich somit wie folgt zusammen:

- LM71 alpha=1,0

$$Q_d = Q_k \cdot \alpha \cdot \phi_2(L_\phi)$$

$$q_d = q_k \cdot \alpha \cdot \phi_2(L_\phi)$$

$$\text{mit } \alpha(= k_0) = 1,0$$

- LM71 alpha=1,1

$$Q_d = Q_k \cdot \alpha \cdot \phi_2(L_\phi)$$

$$q_d = q_k \cdot \alpha \cdot \phi_2(L_\phi)$$

$$\text{mit } \alpha(= k_1) = 1,10$$

- LM71 alpha=1,21

$$Q_d = Q_k \cdot \alpha \cdot \phi_2(L_\phi)$$

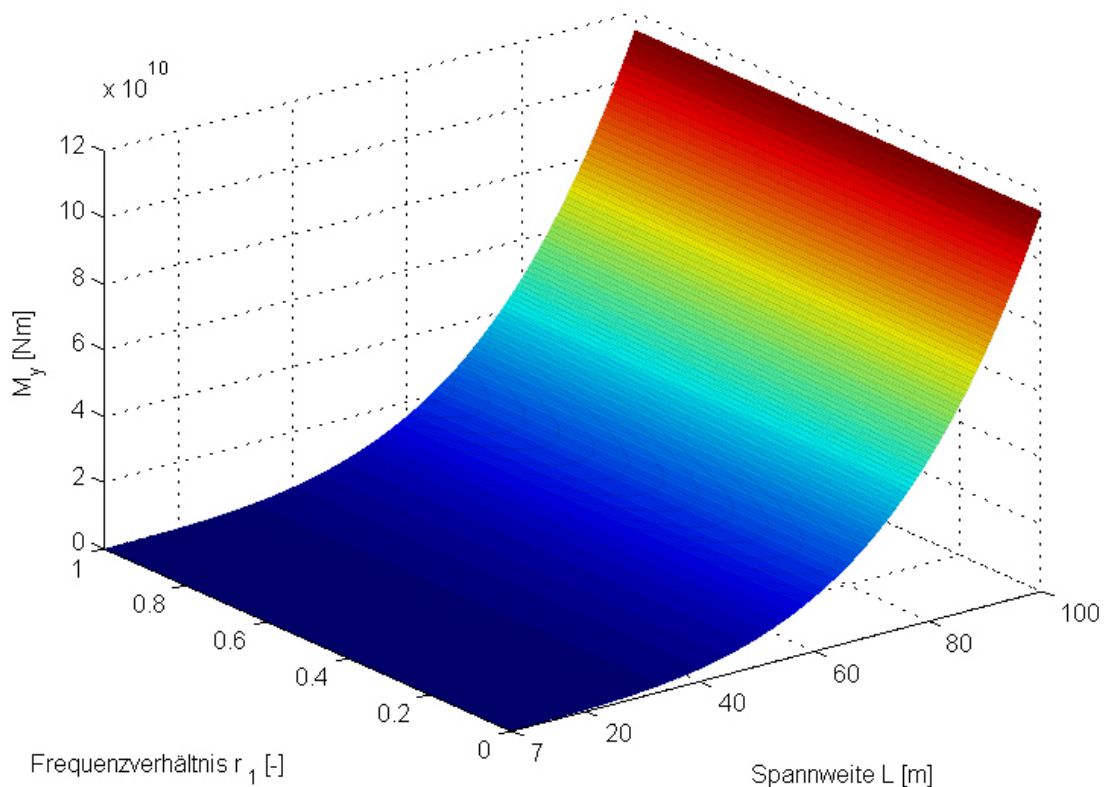
$$q_d = q_k \cdot \alpha \cdot \phi_2(L_\phi)$$

$$\text{mit } \alpha(= k_2) = 1,21$$

### 4.2.3 Erstellung eines Antwortspektrums für das LM71

Um die Tragwerksantwort unter der Belastung des LM71 programmtechnisch gleich erfassen zu können, wie die dynamisch berechneten Antwortspektren, wird ebenfalls eine Art

„Antwortspektrum“ (siehe Abb. 4.8) für das LM71 erstellt. Im Unterschied zu den dynamisch berechneten Antwortspektren hängen die Ergebnisgrößen für das statische LM71 zwar von der Spannweite, jedoch nicht von der Überfahrtsgeschwindigkeit bzw. vom Frequenzverhältnis  $r_1$  ab. Ebenso ist es nicht möglich, ein Beschleunigungsantwortspektrum für das LM71 anzugeben, weil es sich dabei um eine dynamische Größe handelt, die nicht mit statischen Methoden errechnet werden kann.



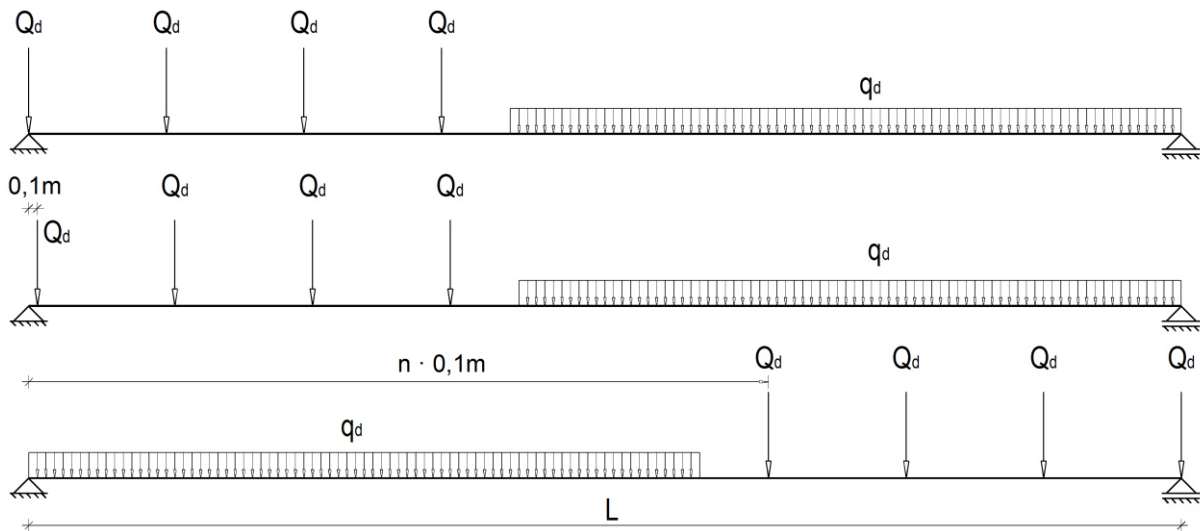
**Abb. 4.8:** „Antwortspektrum“ LM71  $\alpha=1,0$  für das maximale Biegemoment

#### 4.2.4 Berechnungsparameter

Die Berechnung der Antwortspektren für das LM71 erfolgt mittels analytischer Formeln für einen Träger auf zwei Stützen mit gelenkiger Lagerung und über die Trägerlänge konstanter Biegesteifigkeit nach Theorie 1.Ordnung.

Für Trägerlängen zwischen  $7m$  und  $100m$  werden im Intervall von  $0,5m$  (187 Träger unterschiedlicher Länge) die maximale Durchbiegung, der maximale Endtangentialwinkel und das maximale Biegemoment ermittelt. Um die gleiche Skalierung wie bei den dynamischen Antwortspektren zu erhalten, wird die Biegesteifigkeit des Trägers mit  $EA_{zz} = 1Nm^2$  festgelegt.

Da sich die maßgebende Laststellung des LM71 nicht zwangsweise genau in Trägermitte befinden muss, werden die Lasten  $Q_d$  und  $q_d$  in Schritten von jeweils  $0,1m$  vom Stabanfangspunkt bis zum Stabendpunkt verschoben (siehe Abb. 4.9).



**Abb. 4.9: Verschiebung der Belastung über die Trägerlänge**

Für das Auswerten der Schnitt- und Verschiebungsgrößen wird die Stabachse in 100 Teilstücke zerlegt, an deren Endpunkten das Biegemoment  $M_y$  und die Durchbiegung  $w$  für jeden Teilschritt der Laststellung abgelesen werden. Nur der Maximalwert aus allen Teilschritten an allen betrachteten Stabpunkten findet Eingang in die Antwortspektren. Der Endtangentialwinkel  $\varphi$  wird an den Auflagerpunkten für jede Laststellung berechnet. Es wird ebenfalls nur der auftretende Maximalwert unter allen möglichen Laststellungen im Antwortspektrum berücksichtigt.



# 5 Funktion und Anwendung des Programms *Asp\_Einfeldbr\_v01\_1*

Dieses Kapitel befasst sich mit dem Programm *Asp\_Einfeldbr\_v01*, das von Tobias Mähr entwickelt wurde. Dieses Programm dient zur Ermittlung der dynamischen Tragwerkantwort von Einfeldträgerbrücken auf die Überfahrt von Zugmodellen der HSLM-A-Reihe. Auf den Hochgeschwindigkeitsstrecken des österreichischen Eisenbahnnetzes kommt seit einigen Jahren der ÖBB Railjet zum Einsatz, wodurch sich der Bedarf nach der Erweiterung von *Asp\_Einfeldbr\_v01* für diese Zugkonfiguration ergibt. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Programm *Asp\_Einfeldbr\_v01* zur Programmversion *Asp\_Einfeldbr\_v01\_1* erweitert, mit welcher zusätzlich die dynamische Tragwerksantwort auf die Überfahrt des ÖBB Railjet ausgewertet werden kann.

## 5.1 Einsatzbereich des Programms

Das Programm *Asp\_Einfeldbr\_v01* ermöglicht die Darstellung der dynamischen Tragwerksantwort von Einfeldträgerbrücken, die durch die Überfahrt von einzelnen Zugmodellen hervorgerufen wird. Grundlage dafür ist eine dynamische Berechnung nach Eurocode [12], in der der Brückenträger als *Bernoulli-Euler*-Balken und die überfahrenden Zugkonfigurationen als Folge von bewegten Einzelkräften modelliert werden. Die vier Ergebnisgrößen, die in *Asp\_Einfeldbr\_v01\_1* dargestellt werden können, sind:

- die maximale Durchbiegung  $w$  [m]
- der maximale Querschnittsdrehwinkel am Auflager (in weiterer Folge als „Endtangentialwinkel“ bezeichnet)  $\varphi$  [rad]
- die maximale Vertikalbeschleunigung  $\ddot{w}$  [m/s<sup>2</sup>]
- das maximale Biegemoment  $M_y$  [Nm]

Zusätzlich zur quantitativen Auswertung der Tragwerksantwort geben die beiden Programme die Geschwindigkeit an, bei der die maßgebenden Resonanzeffekte auftreten. Dadurch kann abgelesen werden, welche Überfahrtsgeschwindigkeit für das betrachtete Brückentragwerk am ungünstigsten ist.

## 5.2 Benutzeroberfläche

Das Programm *Asp\_Einfeldbr\_v01\_1* startet keine neue dynamische Berechnung, sondern wertet eine Datenbank von Antwortspektren (Erstellung der Daten siehe Kapitel 3) aus.

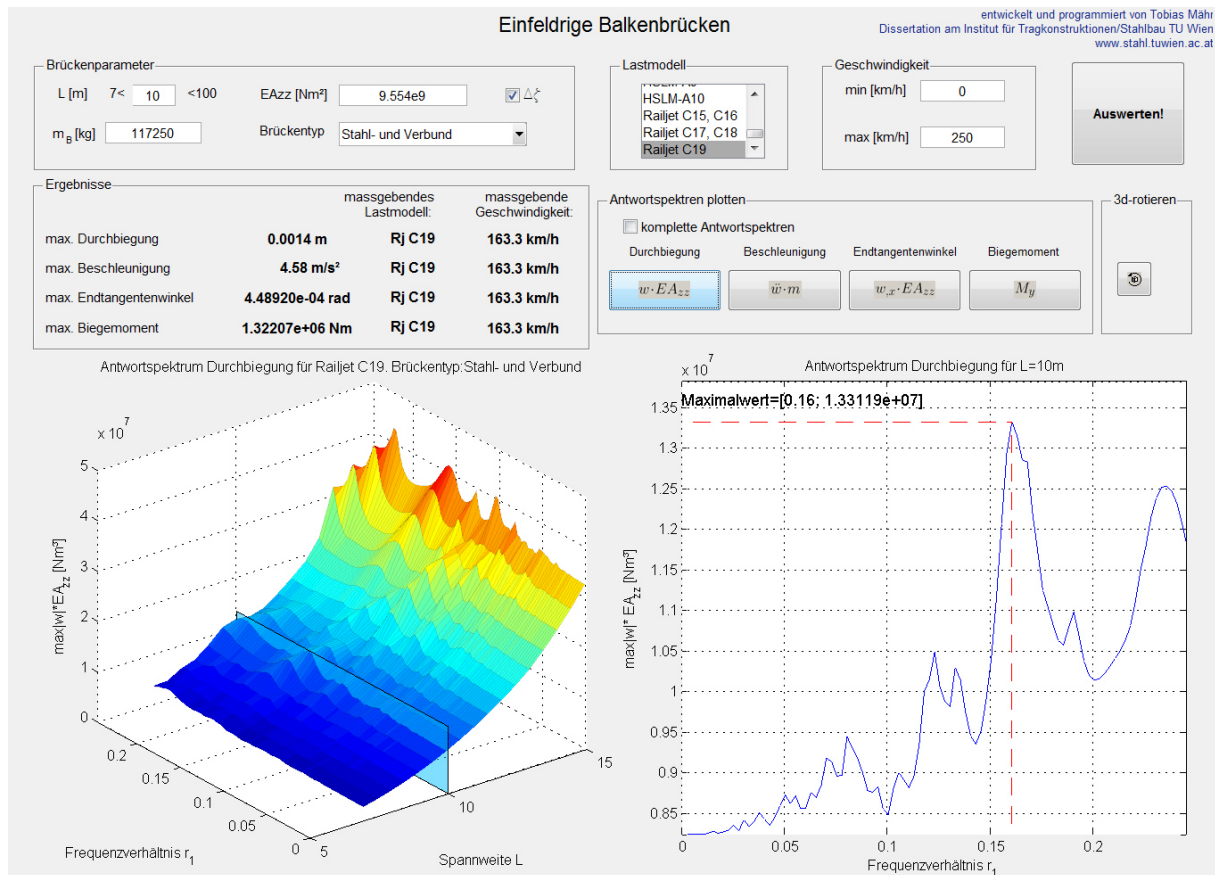


Abb. 5.1: *Asp\_Einfeldbr\_v01*

In Abb. 5.1 ist die Benutzeroberfläche des Programms *Asp\_Einfeldbr\_v01* zu sehen. Die Bedienung des Programms wird in den folgenden Abschnitten 5.3 und 5.4 näher beschrieben.

## 5.3 Eingangsgrößen

Um das Programm *Asp\_Einfeldbr\_v01* nutzen zu können, müssen folgende Eingangsgrößen im Panel „Brückenparameter“ (siehe Abb. 5.1 links oben) eingegeben werden:

- Brückentyp (zur Festlegung der Dämpfung nach [12])
- Brückenlänge  $L$  [m] (zwischen 7m und 100m)
- Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  [Nm<sup>2</sup>]
- Gesamtmasse der Brücke  $m_B$  [kg]

Außerdem kann gewählt werden, ob die zusätzliche Dämpfung  $\Delta\zeta$  (siehe Abschnitt 3.2.3) berücksichtigt werden soll oder nicht.

Als nächste Eingabe ist das zu untersuchende Lastmodell zu wählen. Die Originalversion *Asp\_Einfeldbr\_v01* enthält alle Lastmodelle der Serie HSLM-A nach [12] sowie eine Einhüllende namens „alle HSLM-A“, in der die Maximalwerte der Tragwerksantwort aus allen 10 HSLM-A Modellen zusammengefasst sind. Die Programmversion *Asp\_Einfeldbr\_v01\_1* enthält zusätzlich die Modelle „Railjet C15, C16“, „Railjet C17, C18“ und „Railjet C19“ aus Abschnitt 4.1.2.

Im Eingabefeld „Geschwindigkeit“ in Abb. 5.1 wird die Bandbreite der zu untersuchenden Überfahrtsgeschwindigkeit gewählt, wodurch die Auswertungsgrenzen für die Ergebnisgrößen festgelegt werden. Durch das Betätigen der Schaltfläche „Auswerten!“ wird die Berechnung gestartet.

## 5.4 Ergebnisauswertung und Darstellung

Im Paneel „Ergebnisse“ in der Abb. 5.1 können die maximalen Ergebnisgrößen (Durchbiegung, Beschleunigung, Endtangentialwinkel und Biegemoment) für die eingegebenen Brückenparameter abgelesen werden. Zusätzlich wird ausgegeben, bei welcher Geschwindigkeit diese Größen ihren Maximalwert erreichen.

Durch das betätigen der entsprechenden Schaltfläche im Paneel „Antwortspektren plotten“ wird das Antwortspektrum der maximalen Durchbiegungen, der maximalen Beschleunigung, des maximalen Endtangentialwinkels oder des Maximalen Biegemoments in der 3-dimensionalen Grafik links unten in Abb. 5.1 dargestellt. Die hellblau eingezogene Ebene zeigt dem Benutzer an, welcher Bereich des Antwortspektrums ausgewertet wird. Die Option „komplette Antwortspektren“ legt fest, ob nur der durch die eingegebenen Brückenparameter und Zuggeschwindigkeiten begrenzte Bereich angezeigt wird, oder ob das gesamte berechnete Antwortspektrum abgebildet werden soll.

Die Grafik im rechten unteren Bereich von Abb. 5.1 stellt den 2-dimensionalen Schnitt durch das Antwortspektrum für die gewählte Brückenspannweite dar. Sie dient zur genauen Bestimmung des (skalierten) Maximalwertes der betrachteten Ergebnisgröße und des Frequenzverhältnisses, bei der diese auftritt. In diesem konkreten Fall ist die skalierte Ergebnisgröße  $w \cdot EA_{zz}$ , welche mittels Division durch die Biegesteifigkeit auf die Durchbiegung umgerechnet werden kann. Die maßgebende Geschwindigkeit kann bei Kenntnis des Frequenzverhältnisses durch die folgende Formel berechnet werden:

$$v = r_1 \cdot \pi \sqrt{\frac{EA_{zz}}{L \cdot m}} \quad (5.1)$$

Mit diesem Programm ist es also möglich, die maximale Tragwerksantwort eines Einfeldträgers unter der dynamischen Belastung eines konkreten Zugmodells in einem beliebig definierbaren Geschwindigkeitsbereich darzustellen und auszuwerten.

Die Anwendung des Programms *Asp\_Einfeldbr\_v01\_1* an einem konkreten Beispiel wird ausführlich im Abschnitt 8.1 beschrieben.



# 6 Funktion und Anwendung des Programms *DynZugVergleich\_V1*

In diesem Kapitel werden die Grundlagen, die Funktionsweise und die Anwendung des Programms *DynZugVergleich\_V1* erläutert.

## 6.1 Einsatzbereich des Programms

Das Programm *DynZugVergleich\_V1* soll einen Vergleich der Tragwerksantwort von Einfeldträgerbrücken zufolge der Überfahrt unterschiedlicher Zugmodelle herstellen. Grundlage dafür ist eine dynamische Berechnung nach Eurocode [12], die den Brückenträger als Bernoulli-Euler-Balken und die überfahrenden Zugkonfigurationen als Folge von bewegten Einzelkräften modelliert. Besonderes Augenmerk liegt auf dem Auffinden jener Bereiche, in denen ein zu untersuchendes Zugmodell (im Programm „Vergleichsmodell“ genannt) größere Wert der Tragwerksantwort einer Brücke verursacht, als ein Referenzmodell. Die vier Ergebnisgrößen, die verglichen werden können, sind:

- die maximale Durchbiegung  $w$  [mm]
- der maximale Querschnittsdrehwinkel am Auflager (in weiterer Folge als „Endtangentialwinkel“ bezeichnet)  $\varphi$  [rad]
- die maximale Vertikalbeschleunigung  $a$  [m/s<sup>2</sup>]
- das maximale Biegemoment  $M_y$  [kNm]

Ist eine Brücke auf die Belastung eines bekannten Referenzmodells dimensioniert und nachgewiesen, kann somit anhand des Programms *DynZugVergleich\_V1* auf übersichtliche Weise untersucht werden, ob ein Vergleichsmodell zufolge dynamischen Effekten eine größere Tragwerksantwort der Brücke verursacht als das Referenzmodell.

## 6.2 Benutzeroberfläche

Das Programm *DynZugVergleich\_V1* selbst startet keine dynamische Berechnung, sondern wertet vorab berechnete Datensätze aus. Diese Datensätze sind in Form von Antwortspektren gespeichert, die für jeweils eine Zugkonfiguration mit festgelegter Brückendämpfung gelten. Das Programm *DynZugVergleich\_V1* ermöglicht den Vergleich

zwischen verschiedenen Zugmodellen durch eine anschauliche Darstellung der zugrundeliegenden Antwortspektren.

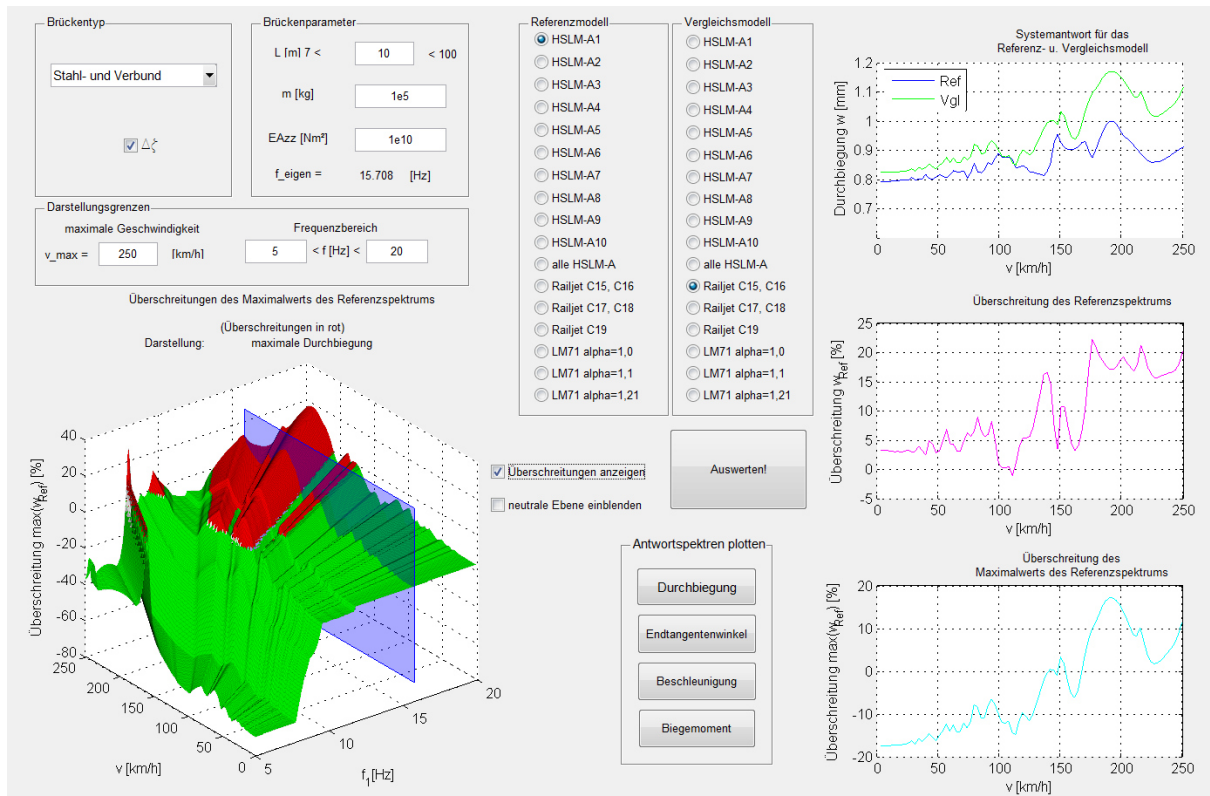


Abb. 6.1: Benutzeroberfläche *DynZugVergleich\_V1*

Abb. 6.1 zeigt die Benutzeroberfläche des Programms *DynZugVergleich\_V1*. Alle Auswertungen in Abb. 6.1 sind exemplarisch für die maximalen Durchbiegungen dargestellt. Die Bedienung des Programms wird in den folgenden Abschnitten ausführlich beschrieben.

### 6.3 Eingangsgrößen

Für die Nutzung des Programms *DynZugVergleich\_V1* müssen folgende Größen bekannt sein und im Panel „Brückenparameter“ bzw. „Brückentyp“ (siehe Abb. 6.2) eingegeben werden:

- Brückenlänge  $L$  [m] (zwischen 7m und 100m)
- Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  [Nm<sup>2</sup>]
- Gesamtmasse der Brücke  $m_B$  [kg]
- Brückentyp (zur Festlegung der Dämpfung nach [12])

Abb. 6.2: Eingabe der Brückenparameter

Durch das Betätigen der Schaltfläche „ $\Delta\zeta$ “ in Abb. 6.2 wird die zusätzliche Dämpfung für Tragwerke mit einer Spannweite von unter  $30m$  berücksichtigt (siehe Abschnitt 3.2.3).

Nach der Eingabe der Eingangsgrößen wird die erste Eigenschwingungsfrequenz  $f_1$  für den *Bernoulli-Euler*-Balken nach Formel (6.1) berechnet und automatisch im Panel „Brückenparameter“ angezeigt.

$$f_1 [\text{Hz}] = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{L \cdot EA_{zz}}{m_B}} \quad (6.1)$$

Im Panel „Darstellungsgrenzen“ in Abb. 6.3 sind weitere Einstellungsmöglichkeiten vorhanden, welche den darzustellenden Bereich der Grafiken in Abb. 6.1 steuern.

Abb. 6.3: Eingabe der Darstellungsgrenzen

- *Maximale Geschwindigkeit*  $v_{max}$   
In diesem Eingabefenster kann die maximale Geschwindigkeit gewählt werden, mit welcher sich das jeweilige Zugmodell über die betrachtete Brücke bewegt. Die Darstellung in allen Grafiken aus Abb. 6.1 erfolgt im Geschwindigkeitsbereich zwischen  $v = 0\text{km/h}$  und  $v = v_{max}$  bei einer wählbaren Obergrenze von  $v_{max} = 400\text{km/h}$ .
- *Frequenzbereich*  $f_{min}$  bis  $f_{max}$   
Die Einstellungsmöglichkeit des dargestellten Frequenzbereichs dient dazu, die benachbarten Bereiche um die erste Eigenschwingungsfrequenz in der 3-dimensionalen Grafik aus Abb. 6.1 in wählbarer Genauigkeit abzubilden.

## 6.4 Auswertung und Umstrukturierung der Daten

Die Ergebnisse im Programm *DynZugVergleich\_V1* werden in Abhängigkeit der Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$  dargestellt, was durch eine Umstrukturierung der Antwortspektren (sind in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses  $r_1$  gespeichert) ermöglicht wird. Dieses Unterkapitel beschreibt die notwendigen Bearbeitungsschritte, um ausgehend von den Antwortspektren zur gewählten Darstellungsform zu kommen.

### 6.4.1 Festlegung der Brückenspannweite $L$

Grundlage für das Programm *DynZugVergleich\_V1* ist eine Datenbank, die alle Antwortspektren für die wählbaren Zugmodelle enthält. Die Spalten eines Antwortspektrums stehen für Spannweiten  $L$  zwischen  $7m$  und  $100m$  mit einer Schrittweite von  $0,5m$  (187 Spalten) und die Zeilen für verschiedene Frequenzverhältnisse  $r_1$  zwischen  $0,0025$  und  $1$  mit einer Schrittweite von  $0,0025$  (400 Zeilen). Das Antwortspektrum für die Belastung eines fiktiven Lastmodells „A“ ist folgendermaßen aufgebaut:

$$\mathbf{Asp}(A) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{i,1} & & & a_{i,k} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i = 1,2, \dots, 400 \\ k = 1,2, \dots, 187 \end{array} \quad (6.2)$$

Die Matrixeinträge  $a_{i,k}$  in (6.2) stehen für die maximalen Durchbiegungen, die maximalen Endtangentialwinkel, die maximalen Beschleunigungen oder die maximalen Biegemomente. Durch die Festlegung der Brückenspannweite  $L$  in der Benutzeroberfläche reduziert sich das Antwortspektrum  $\mathbf{Asp}(A)$  von einer Matrix der Dimension  $400 \times 187$  zu einem Spaltenvektor  $\mathbf{Sp}(A)$  der Dimension  $400 \times 1$ :

$$\mathbf{Sp}(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \end{bmatrix} \quad i = 1,2, \dots, 400 \quad (6.3)$$

Wird ein Wert für  $L$  festgelegt, der sich zwischen den Berechnungsintervallen von  $0,5m$  befindet, so wird der Spaltenvektor  $\mathbf{Sp}(A)$  durch Interpolation zwischen den beiden benachbarten Spalten in der Antwortspektrenmatrix gebildet.

### 6.4.2 Auswahl der Zugmodelle

Das Programm *DynZugVergleich\_V1* vergleicht die Tragwerksantwort, die durch ein sogenanntes „Vergleichsmodell“ hervorgerufen wird, mit der Tragwerksantwort auf ein „Referenzmodell“. Dazu wird beim betätigen der Schaltfläche „Auswerten!“ ein

Referenzspektrum und ein Vergleichsspektrum gebildet. In den Paneelen „Referenzmodell“ und „Vergleichsmodell“ in Abb. 6.1 stehen jeweils 17 Zugmodelle (siehe Abschnitt 4) zur Auswahl, die im Referenz- bzw. Vergleichsspektrum berücksichtigt werden können.

### Referenzspektrum und Vergleichsspektrum bei der Wahl eines Lastmodells

Der Spaltenvektor  $\mathbf{Sp}(B)$  aus dem Antwortspektrum für die Belastung eines fiktiven Lastmodells „B“ wird nach den äquivalenten Überlegungen aus Abschnitt 6.4.1 eingeführt:

$$\mathbf{Sp}(B) = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_i]^T \quad i = 1, 2, \dots, 400 \quad (6.4)$$

Wird das fiktive Lastmodell A als Referenzmodell ausgewählt, nimmt der Spaltenvektor des Referenzmodells  $\mathbf{R}$  (in weiterer Folge „Referenzspektrum“ genannt) folgenden Werte an:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Sp}(A) = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_i]^T \quad i = 1, 2, \dots, 400 \quad (6.5)$$

Auswahl des fiktiven Lastmodells B als Vergleichsmodell definiert den Spaltenvektor des Vergleichsmodells  $\mathbf{V}$  (in weiterer Folge „Vergleichsspektrum“ genannt) zu:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Sp}(B) = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_i]^T \quad i = 1, 2, \dots, 400 \quad (6.6)$$

### Referenzmodell und Vergleichsmodell bei Mehrfachauswahl

Die Anzahl der Lastmodelle, die als Referenz- bzw. Vergleichsmodelle dienen sollen kann frei gewählt werden. Im Falle einer Mehrfachauswahl greift das Programm auf die entsprechenden Antwortspektren zu und bildet ein Referenz- und ein Vergleichsspektrum, das jeweils die Maximalwerte aller ausgewählten Zugmodelle enthält und somit eine Einhüllende der maximalen Berechnungsergebnisse darstellt. Exemplarisch wird die Bildung des Referenzspektrums bei der Auswahl der Lastmodelle A und B als Referenzmodelle gezeigt:

$$\mathbf{R}(A, B) = \max \{ \mathbf{Sp}(A); \mathbf{Sp}(B) \} = \begin{bmatrix} \max \{ a_1; b_1 \} \\ \max \{ a_2; b_2 \} \\ \vdots \\ \max \{ a_i; b_i \} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, 400 \quad (6.7)$$

Das Vergleichsspektrum wird ebenfalls nach dem Schema aus Gl. (6.7) gebildet. Dieses Schema kann auf eine beliebige Anzahl von Lastmodellen ausgeweitet werden.

Eine Einschränkung ergibt sich, falls bei einer Mehrfachauswahl eines der LM71-Modelle berücksichtigt werden soll. In diesem Fall können keine Beschleunigungen angezeigt werden,

da die Berechnung der Tragwerksantwort auf diese Modelle rein statisch (und nicht dynamisch) erfolgt.

### 6.4.3 Festlegung der Biegesteifigkeit und Brückenmasse

Das Referenzspektrum  $\mathbf{R}$  und das Vergleichsspektrum  $\mathbf{V}$  sind Spaltenvektoren der Dimension  $400 \times 1$ , wobei die Zeilen für die Frequenzverhältnisse  $r_{1,i}$  mit  $i = 1, 2, \dots, 400$  stehen. Bei bekannter Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  und Brückenmasse  $m_B$  kann die zugehörige Überfahrtsgeschwindigkeit  $v_i$  für jede Zeile im Referenz- bzw. Vergleichsspektrum nach Gl. (6.8) berechnet werden.

$$v_i = r_{1,i} \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{EA_{zz}}{L \cdot m_B}} \quad i = 1, 2, \dots, 400 \quad (6.8)$$

Alle Ergebnisverläufe in Abb. 6.1 können mithilfe der Gl. (6.8) in Abhängigkeit der Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$  dargestellt werden.

## 6.5 Ausgabe

In diesem Unterkapitel werden die gewählte Ergebnisdarstellung und die daraus abzulesende Aussage der unterschiedlichen Visualisierungen erläutert.

### 6.5.1 Darstellung der Systemantwort

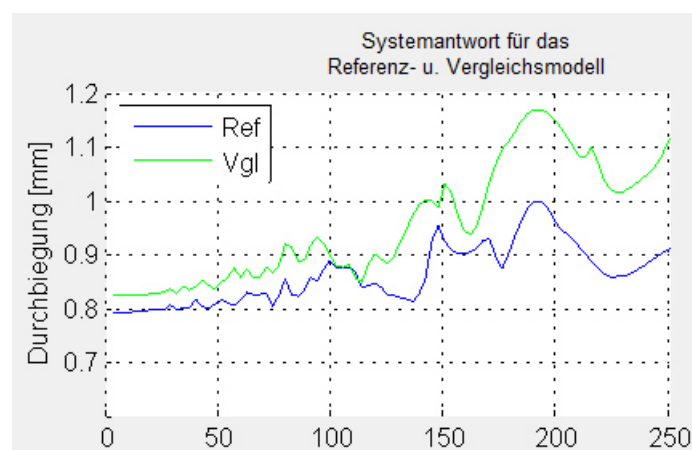


Abb. 6.4: Systemantwort

Der erste Plot (Abb. 6.4) dient als Übersicht der Systemantwort. Die Funktionsverläufe der dynamischen Tragwerksantwort des Referenz- bzw. Vergleichsmodells sind als blaue bzw. grüne Linie dargestellt. Dazu wird auf der Abszisse die Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$  in [km/h]

und auf der Ordinate eine der vier Ergebnisgrößen (in Abb. 6.4 exemplarisch die Durchbiegung) in der jeweils zugehörigen Einheit aufgetragen:

- Durchbiegung  $w$  in  $[mm]$
- Endtangentialwinkel  $\varphi$  in  $[rad]$
- Beschleunigung  $a$  in  $[m/s^2]$
- Biegemoment  $M_y$  in  $[kNm]$

Aus dieser Darstellung kann ein erster Eindruck gewonnen werden, bei welchen Geschwindigkeiten es zu Resonanzeffekten kommen kann und welche Größenordnung der Tragwerksantwort durch das Referenz- und das Vergleichsmodell hervorgerufen wird. Auf die Quantifizierung der Überschreitungen des Vergleichsmodells wird in dieser Darstellung aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Darauf wird jedoch im folgenden Abschnitt detailliert eingegangen.

### 6.5.2 Darstellung der Überschreitungen des Referenzspektrums

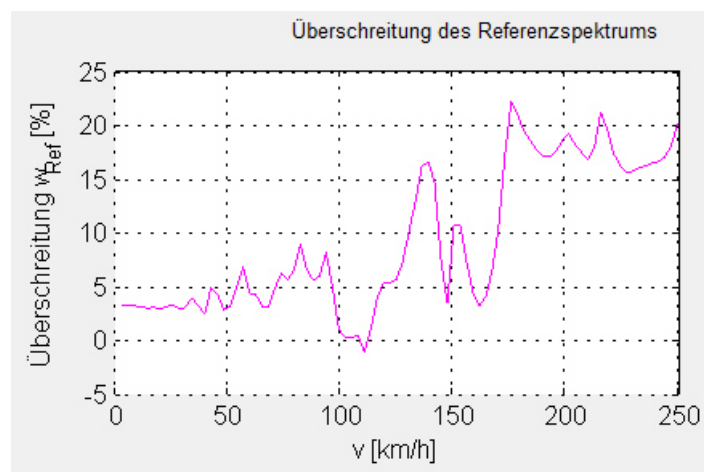


Abb. 6.5: Überschreitungen des Referenzspektrums

Die Darstellung in Abb. 6.5 zeigt, in welchen Geschwindigkeitsbereichen das Vergleichsmodell größere Werte der Tragwerksantwort hervorruft als das Referenzmodell. Solche Bereiche sind durch positive Ordinatenwerte gekennzeichnet.

Die Darstellung der Überschreitung der Referenzmodellwerte erfolgt in Prozent [%]. Die Wahl des Grundwertes für diese Prozentangabe ist für die Anschaulichkeit des Diagramms von großer Bedeutung. Würde man den relativen Prozentwert an jeder Geschwindigkeitsstelle  $v$  mit

$$y(v) = \frac{V(v) - R(v)}{R(v)} \cdot 100 [\%] \quad (6.9)$$

$V(v)$  ..... Ergebniswert aus dem Vergleichsspektrum bei Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$

$R(v)$  ..... Ergebniswert aus dem Referenzspektrum bei Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$

$y(v)$  ..... Überschreitung der Ergebniswerte aus dem Referenzspektrum bei Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$

bilden, so bestünde die Möglichkeit, dass die prozentuale Abweichung bei kleinen Ergebniswerten (z.B. Beschleunigungen bei niedrigen Überfahrtsgeschwindigkeiten) sehr groß wird und im Plot als Resonanzspitze oder problematische Stelle fehlinterpretiert wird. Um dies zu vermeiden, wird als Grundwert für die Prozentdarstellung der Maximalwert des Referenzmodells im gesamten Geschwindigkeitsbereich gewählt. Die Berechnung der Ordinatenwerte erfolgt somit nach Gl. (6.10).

$$y(v) = \frac{V(v) - R(v)}{\max\{R\}} \cdot 100 [\%] \quad (6.10)$$

$\max\{R\}$  ..... maximaler Ergebniswert aus dem Referenzspektrum im gesamten Geschwindigkeitsbereich

Der Funktionsverlauf in Abb. 6.5 setzt die gewählte Ergebnisgröße aus dem Referenz- und Vergleichsmodell für jeden einzelnen Geschwindigkeitsschritt in ein Verhältnis. Ein positiver Ordinatenwert  $y(v)$  in Abb. 6.5 bedeutet somit, dass die Ergebniswerte, unter der Belastung des Referenzmodells bei einer festgelegten Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$ , überschritten werden.

### 6.5.3 Darstellung der Überschreitungen des Maximalwerts des Referenzspektrums

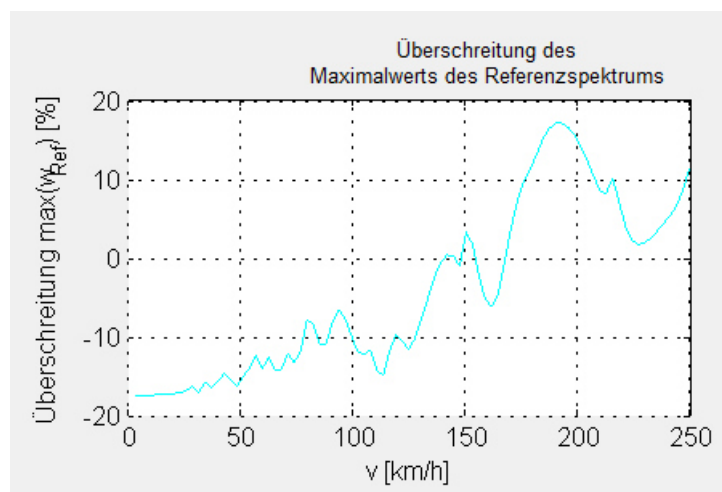


Abb. 6.6: Überschreitung des Maximalwerts des Referenzspektrums



In der Abb. 6.6 wird eine nur leicht abgeänderte Darstellungsweise zum Plot 2 gewählt, die jedoch die Aussagekraft deutlich verändert. Die Ordinatenwerte werden ebenfalls in Prozent dargestellt und nach Gl. (6.11) berechnet.

$$x(v) = \frac{V(v) - \max\{R\}}{\max\{R\}} \cdot 100 \text{ [%]} \quad (6.11)$$

$x(v)$  ..... Überschreitung des maximalen Referenzmodellwerts  $\max\{R\}$

Ein positiver Ordinatenwert  $x(v)$  in Abb. 6.6 bedeutet, dass das Vergleichsmodell bei der Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$  einen größeren Wert der Tragwerksantwort hervorruft, als das Referenzmodell im gesamten betrachteten Geschwindigkeitsbereich.

### Zahlenbeispiel zur Erläuterung der Abbildungen 6.5 und 6.6

Zur Erläuterung des Unterschieds der Darstellungen in Abb. 6.5 und Abb. 6.6 wird der jeweilige Funktionswert bei einer Überfahrtsgeschwindigkeit von  $v = 100\text{km/h}$  herangezogen.

#### – Zahlenbeispiel für die Abb. 6.5

Der Funktionswert aus Abb. 6.5 beträgt bei einer Überfahrtsgeschwindigkeit  $v = 100\text{km/h}$  etwa  $y(100) \cong 2\%$  und kann durch Spezialisieren der Gl. (6.10) berechnet werden. Die Werte  $V(100)$  und  $R(100)$  sind die Funktionswerte aus Abb. 6.4 bei einer Überfahrtsgeschwindigkeit von  $v = 100\text{km/h}$ . Ablesen dieser Funktionswerte führt auf

$$V(100) \cong 0,9\text{mm} \qquad R(100) \cong 0,88\text{mm} \quad (6.12)$$

Der Wert  $\max\{R\}$  wird ebenfalls aus Abb. 6.4 abgelesen. Er tritt bei der Geschwindigkeit  $v \cong 193\text{km/h}$  auf und beträgt  $\max\{R\} \cong 1\text{mm}$ . Einsetzen von Gl. (6.12) und  $\max\{R\}$  in Gl. (6.10) führt auf:

$$y(100) = \frac{V(100) - R(100)}{\max\{R\}} \cdot 100 \cong \frac{0,9 - 0,88}{1} \cdot 100 \cong 2\% \quad (6.13)$$

Der Funktionswert  $y(100) \cong 2\%$  aus 6.5 sagt aus, dass der Funktionswert des Vergleichsspektrums den Funktionswert des Referenzspektrums an der Geschwindigkeitsstelle  $v = 100\text{km/h}$  um 2%, bezogen auf den maximalen Funktionswert des Referenzspektrums im gesamten Geschwindigkeitsbereich, überschreitet.

- Zahlenbeispiel für die Abb. 6.6

Der Funktionswert aus Abb. 6.6 beträgt  $x(100) \cong -10\%$  und kann durch Spezialisieren der Gl. (6.11) berechnet werden. Einsetzen der Werte  $V(100)$  aus Gl. (6.12) und  $\max\{\mathbf{R}\} \cong 1\text{mm}$  in Gl. (6.11) liefert:

$$x(100) = \frac{V(100) - \max\{\mathbf{R}\}}{\max\{\mathbf{R}\}} \cdot 100 \cong \frac{0,9 - 1}{1} \cdot 100 \cong -10\% \quad (6.14)$$

Der Funktionswert  $x(100) \cong -10\%$  aus Abb. 6.6 sagt aus, dass der Funktionswert des Vergleichsspektrums bei einer Überfahrtsgeschwindigkeit von  $v = 100\text{km/h}$  um 10% kleiner ist, als der maximale Funktionswert des Referenzspektrums im gesamten Geschwindigkeitsbereich (tritt bei  $v \cong 193\text{km/h}$  auf).

#### 6.5.4 Darstellung der Überschreitungen bezogen auf den Maximalwert des Referenzspektrums (3D-Darstellung)

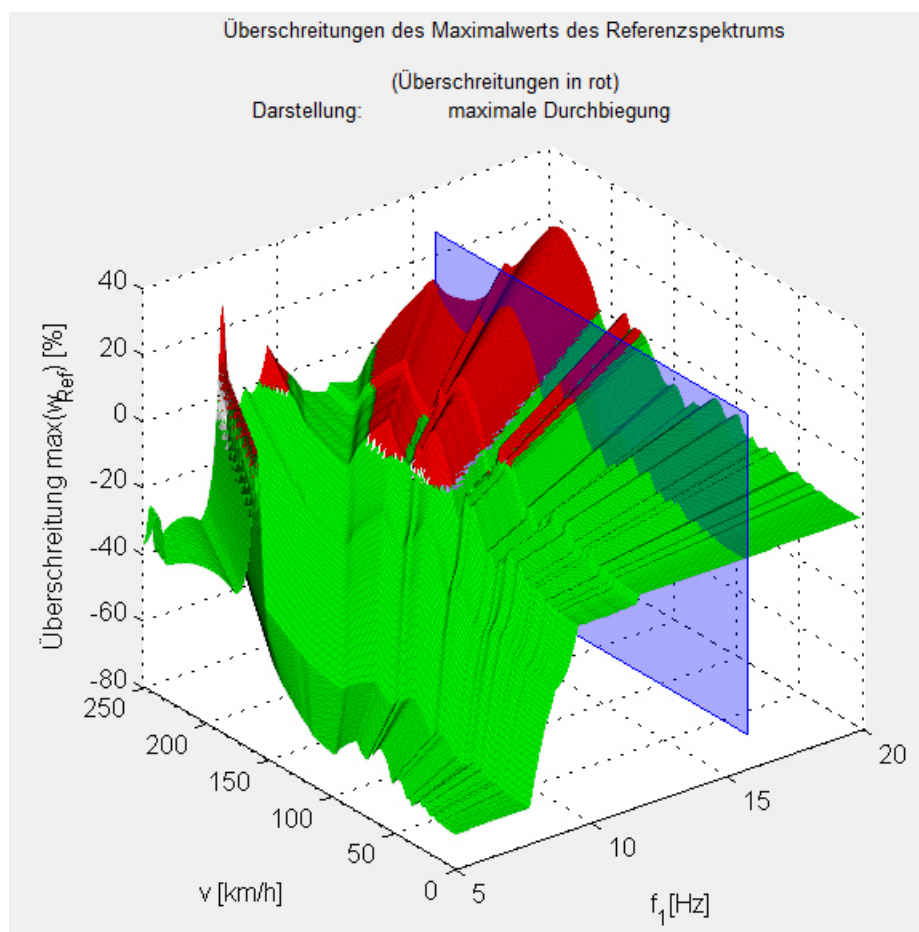


Abb. 6.7: Überschreitungen des Maximalwerts des Referenzspektrums (3D-Darstellung)

Die 3-dimensionale Darstellung in Abb. 6.7 dient zur Abschätzung der Entwicklung im Nahebereich der berechneten Eigenfrequenz. Dies ist vor allem dann von Interesse, wenn

die Brückenmasse  $m_B$  oder die Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  nur abgeschätzt und nicht genau ermittelt werden können und somit auch die Ermittlung der ersten Eigenfrequenz mit gewissen Ungenauigkeiten behaftet ist. Diese Darstellung zeigt, ob das betrachtete System sensibel auf Ungenauigkeiten reagiert (z.B. im Falle von Resonanzeffekten in der Nähe der ersten Eigenfrequenz).

Um auf die 3-dimensionale Darstellung in Abb. 6.7 zu kommen, wird das Referenz- bzw. Vergleichsspektrum (siehe Abschnitt 6.4.2) für verschiedene Eigenfrequenzen über den gewählten Geschwindigkeitsbereich ausgewertet. Die erste Eigenfrequenz des Bernoulli-Euler-Balkens kann nach Gl. (6.15) berechnet werden.

$$f_1 [\text{Hz}] = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{L \cdot EA_{zz}}{m_B}} \quad (6.15)$$

Sie ist somit von der Spannweite  $L$ , der Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  und der Masse  $m_B$  der Brücke abhängig. Wird die Spannweite als bekannt angenommen, hat jeder vorgegebene Wert der Eigenfrequenz ein zugehöriges Verhältnis  $EA_{zz}/m_B$  zur Folge:

$$\frac{EA_{zz}}{m_B} = \frac{4L^3 f_1^2}{\pi^2} \quad (6.16)$$

Um die gesuchte Ergebnisgröße aus dem Referenz- oder Vergleichsspektrum auslesen zu können, ist die Berechnung des Frequenzverhältnisses  $r_1$  erforderlich. Bei festgelegter Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$  und festgelegter Eigenfrequenz  $f_1$  folgt aus dem Einsetzen des in Gl. (6.16) berechneten Verhältnisses  $EA_{zz}/m_B$  in Gl. (3.16):

$$r_1 = \frac{v}{\pi} \sqrt{\frac{m_B}{EA_{zz}}} L \quad (6.17)$$

### Parameterfeld zur Berechnung der Ausgangsdaten für Abb. 6.7

- *Variation der Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$*   
Im Panel „Darstellungsgrenzen“ in Abb. 6.3 wird die maximale Überfahrtsgeschwindigkeit  $v_{max}$  [km/h] festgelegt. Zum Auslesen der Ergebniswerte aus dem Referenz- bzw. Vergleichsspektrum werden die Geschwindigkeiten  $\{1, 2, \dots, v_{max}\}$  [km/h] in Gl. (6.17) eingesetzt.
- *Variation der Eigenfrequenz  $f_1$*   
Ebenfalls werden im Panel „Darstellungsgrenzen“ in Abb. 6.3 die minimale und die maximale Eigenfrequenz  $f_{min}$  und  $f_{max}$  [Hz] für die Darstellung in Abb. 6.7 festgelegt. Zum Auslesen der Berechnungsergebnisse werden in Gl. (6.16)  $m$  Frequenzwerte  $\{f_{min} \text{ bis } f_{max}\}$  in einer Schrittweite von 0,05Hz eingesetzt.

Die Auswertung für das beschriebene Parameterfeld führt auf je eine Matrix für das Referenz- bzw. Vergleichsmodell mit einem Aufbau gemäß Gl. (6.18). Die Spalten in der Matrix für das Referenzmodell  $\mathbf{R}_{3D}$  stehen dabei für die im Parameterfeld definierten Eigenfrequenzen und die Zeilen für die definierten Überfahrtsgeschwindigkeiten.

$$\mathbf{R}_{3D} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{v_{max},1} & & & a_{v_{max},m} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Die Matrix  $\mathbf{R}_{3D}$  kann als Zeilenvektor der zur Eigenfrequenz  $f_k$  gehörenden Referenzspektrern  $\mathbf{R}_k$  interpretiert werden:

$$\mathbf{R}_{3D} = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2 \quad \dots \quad \mathbf{R}_m] \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (6.19)$$

Die Matrix für das Vergleichsmodell  $\mathbf{V}_{3D}$  hat formal denselben Aufbau, wie die Matrix  $\mathbf{R}_{3D}$ :

$$\mathbf{V}_{3D} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{v_{max},1} & & & b_{v_{max},m} \end{bmatrix} = [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2 \quad \dots \quad \mathbf{V}_m] \quad (6.20)$$

Die Matrixeinträge  $a_{v,k}$  in Gl. (6.18) bzw.  $b_{i,k}$  in Gl. (6.20) mit  $v = 1, \dots, v_{max}$  und  $k = 1, \dots, m$  können die Werte der maximalen Durchbiegungen, der maximalen Endtangentialwinkel, der maximalen Beschleunigungen oder der maximalen Biegemomente annehmen.

Für die Darstellung der Überschreitungen bezogen auf den Maximalwert des Referenzspektrums, wie sie in Abb. 6.7 zu sehen ist, wird eine Matrix  $\mathbf{U}_{3D}$  gebildet, die denselben formalen Aufbau hat, wie die Matrizen  $\mathbf{R}_{3D}$  und  $\mathbf{V}_{3D}$ :

$$\mathbf{U}_{3D} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,m} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ u_{v_{max},1} & & & u_{v_{max},m} \end{bmatrix} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2 \quad \dots \quad \mathbf{U}_m] \quad (6.21)$$

Die Matrixeinträge  $u_{v,k}$  in Gl. (6.21) werden wie folgt berechnet:

$$u_{v,k} = \frac{b_{v,k} - \max\{a_{1,k}; a_{2,k}; \dots; a_{v_{max},k}\}}{\max\{a_{1,k}; a_{2,k}; \dots; a_{v_{max},k}\}} \cdot 100 [\%] \quad (6.22)$$

In alternativer Darstellung lautet Gl. (6.22):

$$U_k(v) = \frac{V_k(v) - \max\{R_k\}}{\max\{R_k\}} \cdot 100 \text{ [%]} \quad (6.23)$$

$V_k(v)$  ..... Ergebniswert aus dem (zur Eigenfrequenz  $f_k$  gehörigen)  
Vergleichsspektrum  $V_k$  bei Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$

$\max\{R_k\}$  ..... maximaler Ergebniswert aus dem (zur Eigenfrequenz  $f_k$  gehörigen)  
Referenzspektrum  $R_k$  im gesamten Geschwindigkeitsbereich

$U_k(v)$  ..... Überschreitung von  $\max\{R_k\}$  bei Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$

Durch das betätigen der Schaltfläche „Überschreitungen anzeigen“ werden in Abb. 6.7 jene Bereiche rot dargestellt, in denen die Werte aus dem Vergleichsspektrum den Maximalwert aus dem Referenzspektrum überschreiten. Das Betätigen der Schaltfläche „neutrale Ebene einblenden“ fügt der Darstellung aus Abb. 6.7 zur besseren Übersicht jene horizontale Ebene hinzu, in der sich der Maximalwert aus dem Referenzspektrum befindet.

Die Darstellung in Abb. 6.7 kann beliebig gedreht werden. Eine aussagekräftige Ansicht kann beispielsweise durch das rotieren in den Grundriss gewonnen werden (siehe Abb. 6.8). An den roten Bereichen in Abb. 6.8 ist zu erkennen, bei welchen Überfahrtsgeschwindigkeiten und Eigenfrequenzen Überschreitungen des Maximalwerts des Referenzspektrums auftreten.

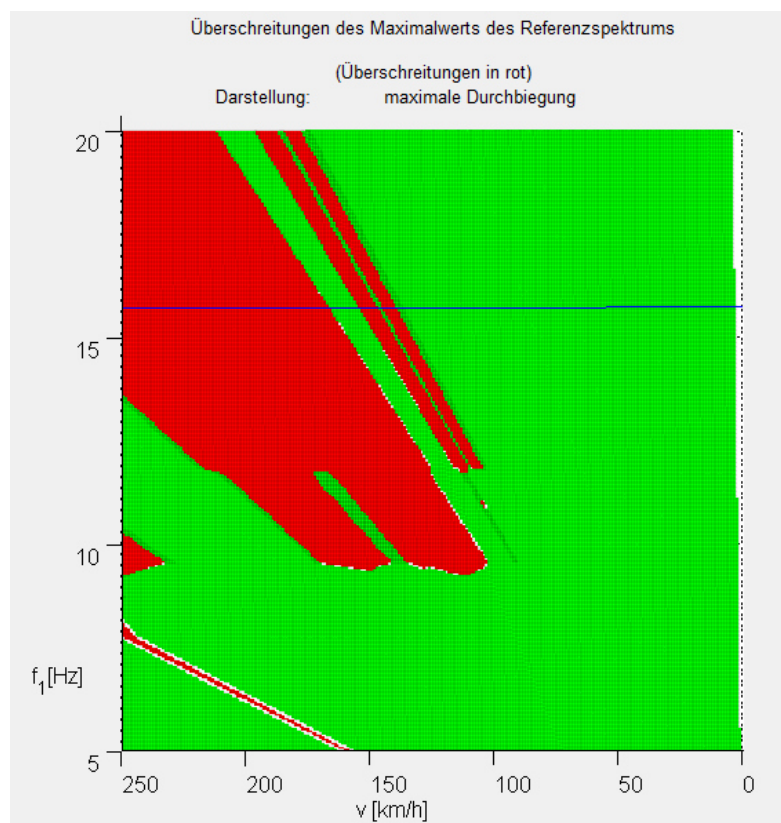


Abb. 6.8: Überschreitungen des Maximalwerts des Referenzspektrums (Grundriss)



## **7 Funktion und Anwendung des Programms *DynZugVergleich\_V2***

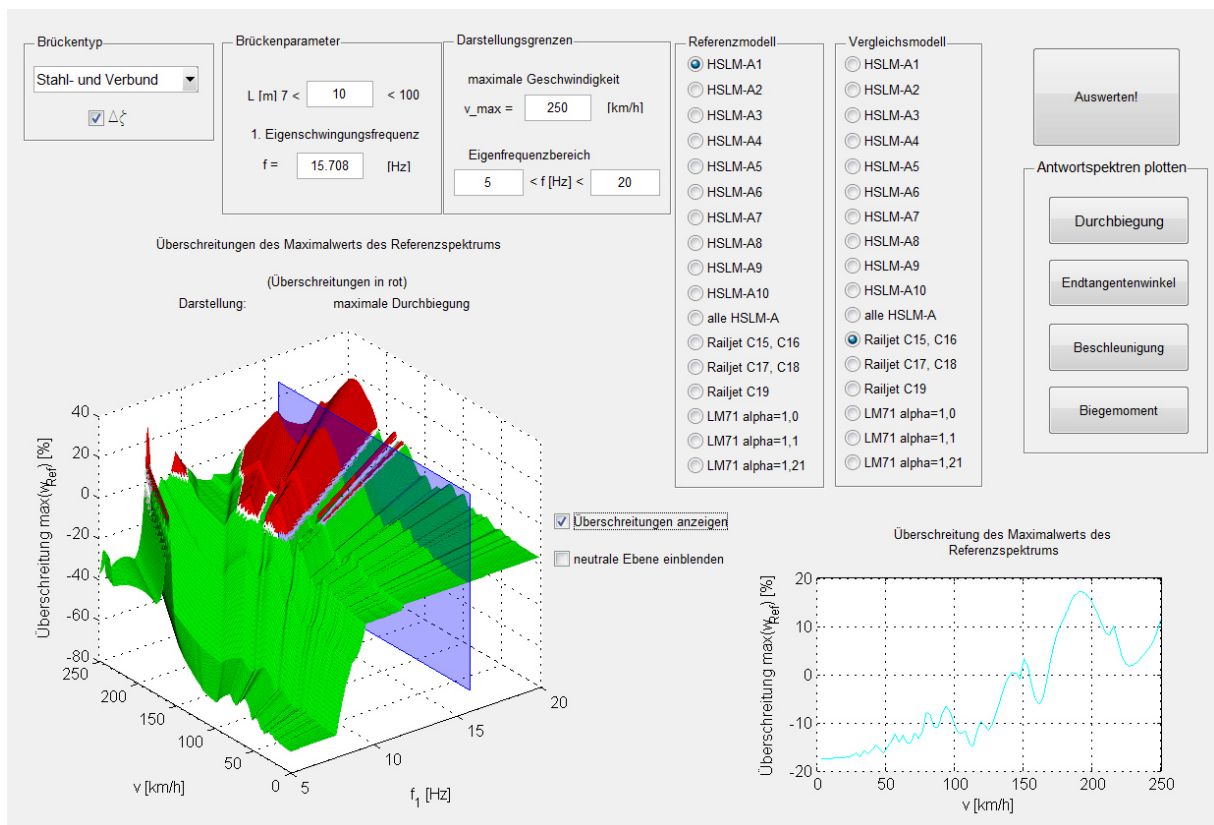
In diesem Kapitel werden die Funktion und die Anwendung des Programms *DynZugVergleich\_V2* mit besonderem Augenmerk auf die Unterschiede zum Programm *DynZugVergleich\_V1* veranschaulicht.

### **7.1 Einsatzbereich des Programms**

Bei der Bestandsaufnahme von Brückentragwerken kann beispielsweise mithilfe von Schwingungserregern die erste Eigenfrequenz des Tragwerks ermittelt werden. Durch das Programm *DynZugVergleich\_V2* soll ein Vergleich der Tragwerksantwort von Einfeldträgerbrücken unter der Belastung verschiedener Zugmodelle hergestellt werden. Als Eingangsgrößen müssen der Tragwerkstyp (zur Festlegung der Dämpfung  $\zeta$ ), die Spannweite  $L$  und die erste Eigenschwingungsfrequenz  $f_1$  der betrachteten Brücke bekannt sein. Die Kenntnis der Biegesteifigkeit und der Masse der Brücke sind für die Verwendung von *DynZugVergleich\_V2* nicht erforderlich.

### **7.2 Benutzeroberfläche**

Das Programm *DynZugVergleich\_V2* startet ebenso wie das Programm *DynZugVergleich\_V1* keine neue dynamische Berechnung, sondern dient zur Auswertung von Antwortspektren, die für jeweils eine Zugkonfiguration mit festgelegter Brückendämpfung gelten. Die Auswertung der Antwortspektren wird über die Benutzeroberfläche in Abb. 7.1 gesteuert, deren Anwendung in den folgenden Abschnitten erläutert wird.

Abb. 7.1: Benutzeroberfläche *DynZugVergleich\_V2*

### 7.3 Eingangsgrößen

Der wesentliche Unterschied zum Programm *DynZugVergleich\_V1* besteht im Kenntnisstand der Eingangsgrößen. Für die Anwendung des Programms *DynZugVergleich\_V2* müssen weder die Biegesteifigkeit, noch die Masse der Brücke bekannt sein, sehr wohl aber die erste Eigenfrequenz des Tragwerks. Folgende Eingangsgrößen sind in den Paneelen „Brückentyp“ und „Brückenparameter“ (siehe Abb. 7.2) einzugeben:

- Brückentyp (zur Festlegung der Dämpfung nach [12])
- Brückenlänge  $L$  [m] (zwischen 7m und 100m)
- erste Eigenschwingungsfrequenz  $f_1$  [Hz]

Abb. 7.2: Eingabe der Brückenparameter



Durch das Betätigen der Schaltfläche „ $\Delta\zeta$ “ in Abb. 7.2 wird die zusätzliche Dämpfung für Tragwerke mit einer Spannweite von unter 30m berücksichtigt (siehe Abschnitt 3.2.3).

Im Paneel „Darstellungsgrenzen“ in Abb. 7.3 sind weitere Einstellungsmöglichkeiten vorhanden, welche den darzustellenden Bereich der Grafiken in Abb. 7.1 steuern.

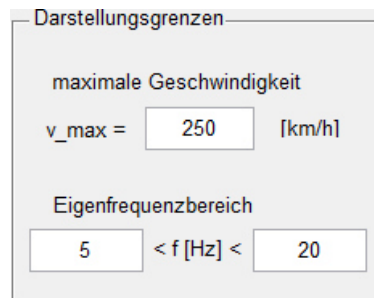


Abb. 7.3: Eingabe der Darstellungsgrenzen

- *Maximale Geschwindigkeit  $v_{max}$*   
In diesem Eingabefenster kann die maximale Geschwindigkeit gewählt werden, mit welcher sich das jeweilige Zugmodell über die betrachtete Brücke bewegt. Die Darstellung in den Grafiken aus Abb. 7.1 erfolgt im Geschwindigkeitsbereich zwischen  $v = 0\text{km/h}$  und  $v = v_{max}$  bei einer wählbaren Obergrenze von  $v_{max} = 400\text{km/h}$ .
- *Frequenzbereich  $f_{min}$  bis  $f_{max}$*   
Die Einstellungsmöglichkeit des dargestellten Frequenzbereichs dient dazu, die benachbarten Bereiche um die erste Eigenschwingungsfrequenz in der 3-dimensionalen Grafik aus Abb. 7.1 in wählbarer Genauigkeit abzubilden.

## 7.4 Auswertung und Umstrukturierung der Daten

Die Ergebnisse im Programm *DynZugVergleich\_V1* werden in Abhängigkeit der Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$  dargestellt, was durch eine Umstrukturierung der Antwortspektren (sind in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses  $r_1$  gespeichert) ermöglicht wird. Dieses Unterkapitel beschreibt die notwendigen Bearbeitungsschritte, um ausgehend von den Antwortspektren zur gewählten Darstellungsform zu kommen.

### 7.4.1 Festlegung der Brückenspannweite $L$

Durch die Festlegung der Spannweite  $L$  reduzieren sich die Antwortspektren von einer Matrix der Dimension  $400 \times 187$  zu einem Spaltenvektor der Dimension  $400 \times 1$ . Dieser Sachverhalt ist in Abschnitt 6.4.1 ausführlich beschrieben.

### 7.4.2 Auswahl der Zugmodelle

Nach der Auswahl der Zugmodelle wird beim Betätigen der Schaltfläche „Auswerten!“ ein Referenzspektrum  $\mathbf{R}$  und ein Vergleichsspektrum  $\mathbf{V}$  gebildet. Die genaue Vorgangsweise zur Bildung von  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{V}$  wird in Abschnitt 6.4.2 beschrieben.

### 7.4.3 Festlegung der ersten Eigenfrequenz

Im Unterschied zu *DynZugVergleich\_V1* fordert *DynZugVergleich\_V2* keine Eingabe der Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  und Brückenmasse  $m_B$ , sondern die Festlegung der ersten Eigenfrequenz  $f_1$ . Das Referenzspektrum  $\mathbf{R}$  und das Vergleichsspektrum  $\mathbf{V}$  sind Spaltenvektoren der Dimension  $400 \times 1$ , wobei die Zeilen für die Frequenzverhältnisse  $r_{1,i}$  mit  $i = 1, 2, \dots, 400$  stehen. Durch die Kombination der Gleichungen (6.1) und (6.8) lässt sich die zugehörige Überfahrtsgeschwindigkeit  $v_i$  für jede Zeile im Referenz- bzw. Vergleichsspektrum berechnen:

$$v_i = 2 \cdot r_{1,i} \cdot L \cdot f_1 \quad i = 1, 2, \dots, 400 \quad (7.1)$$

## 7.5 Ausgabe

In diesem Unterkapitel werden die gewählte Ergebnisdarstellung und die daraus abzulesende Aussage der unterschiedlichen Visualisierungen des Programms *DynZugVergleich\_V2* erläutert. Eine Darstellung der Systemantwort, wie sie im Programm *DynZugVergleich\_V1* in Abb. 6.4 erfolgt, ist in *DynZugVergleich\_V2* nicht möglich, da die skalierten Ergebnisgrößen aus den Antwortspektren ohne Kenntnis der Biegesteifigkeit  $EA_{zz}$  und der Brückenmasse  $m_B$  nicht auf ihre konventionellen physikalischen Einheiten umgerechnet werden können. Ebenso ist in *DynZugVergleich\_V2* keine Darstellung zu finden, die der Abb. 6.5 entspricht, da diese hauptsächlich zur Quantifizierung des Unterschieds zwischen der Systemantwort auf das Referenz- und das Vergleichsmodell dient.

### 7.5.1 Darstellung der Überschreitung des Maximalwerts des Referenzspektrums

Die 2-dimensionale Darstellung in *DynZugVergleich\_V2* entspricht der Abb. 6.6 aus *DynZugVergleich\_V1*.

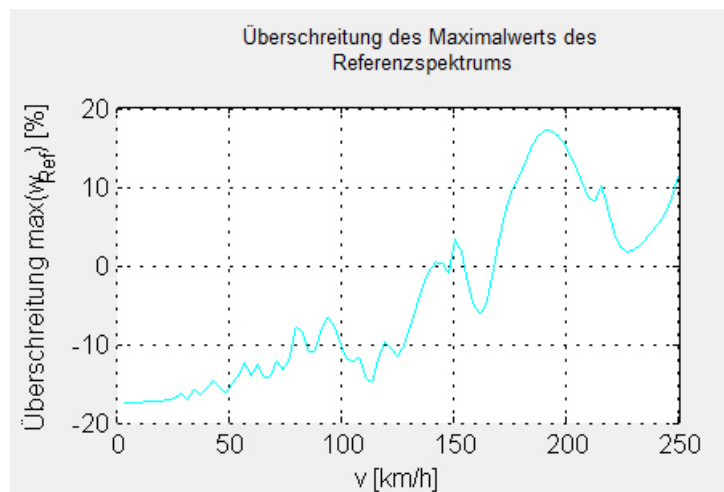


Abb. 7.4: Überschreitung des Maximalwerts des Referenzspektrums

Auf der Abszisse der Grafik in Abb. 7.4 wird die Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$  aufgetragen. Die Ordinatenwerte werden in Prozent dargestellt und nach Gl. (7.2) berechnet.

$$x(v) = \frac{Vgl(v) - \max\{Ref\}}{\max\{Ref\}} \cdot 100 \text{ [%]} \quad (7.2)$$

$Vgl(v)$  ..... Ergebniswert aus dem Vergleichsspektrum bei Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$

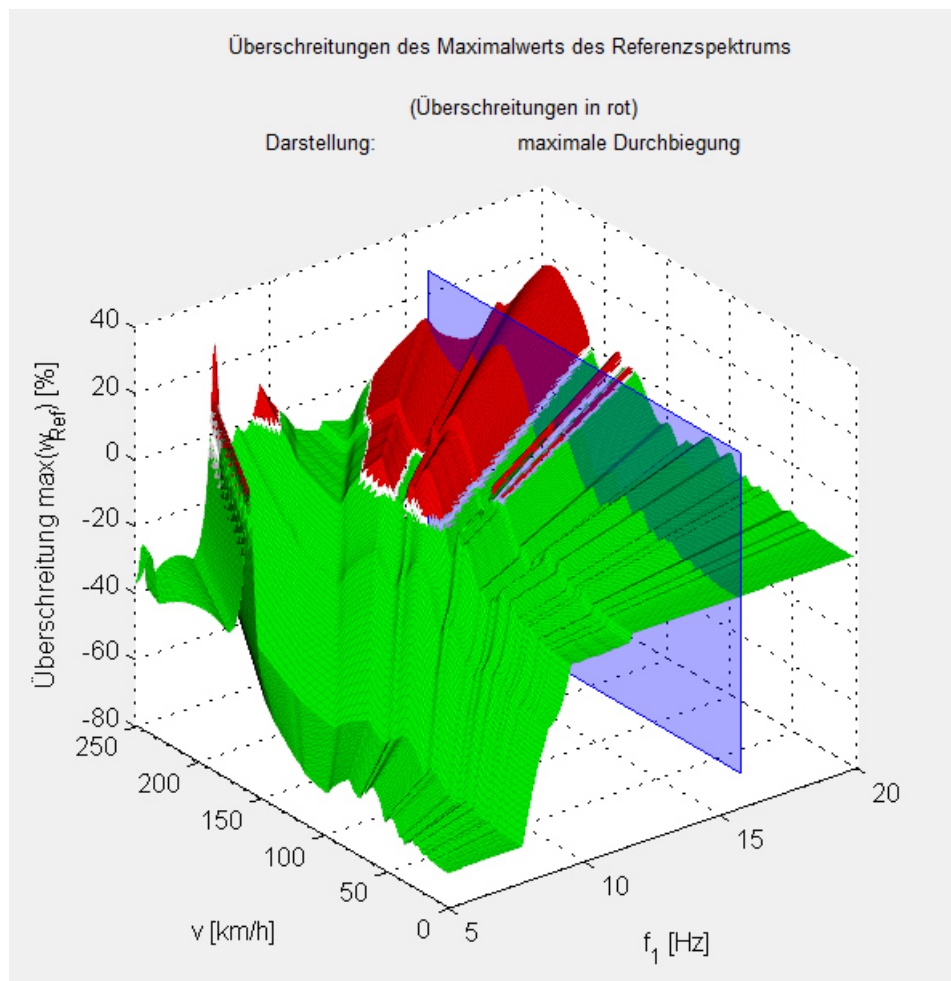
$\max\{Ref\}$  ..... maximaler Ergebniswert aus dem Referenzspektrum im gesamten Geschwindigkeitsbereich

$x(v)$  ..... Überschreitung des Maximalwerts des Referenzspektrums  $\max\{Ref\}$

Ein positiver Ordinatenwert  $x(v)$  in Abb. 7.4 bedeutet, dass das Vergleichsmodell bei der Überfahrtsgeschwindigkeit  $v$  einen größeren Wert der Tragwerksantwort hervorruft, als das Referenzmodell im gesamten betrachteten Geschwindigkeitsbereich.

### 7.5.1 Darstellung der Überschreitungen bezogen auf den Maximalwert des Referenzspektrums (3D-Darstellung)

Die 3-dimensionale Ergebnisdarstellung im Programm *DynZugVergleich\_V2* entspricht der Darstellung in Abb. 6.7 aus *DynzugVergleich\_V1*. Die genaue Beschreibung der zugrundeliegenden Daten erfolgt im Abschnitt 6.5.4.



**Abb. 7.5: Abweichung d. Vergleichsmodells bezogen auf Maximalwert d. Referenzmodells**

Durch das betätigen der Schaltfläche „Überschreitungen anzeigen“ werden in Abb. 7.5 jene Bereiche rot dargestellt, in denen die Werte aus dem Vergleichsspektrum den Maximalwert aus dem Referenzspektrum überschreiten. Das Betätigen der Schaltfläche „neutrale Ebene einblenden“ fügt der Darstellung aus Abb. 7.5 zur besseren Übersicht jene horizontale Ebene hinzu, in der sich der Maximalwert aus dem Referenzspektrum befindet.

## 8 Anwendung von *Asp\_Einfeldbr\_v01* und *DynZugVergleich* an einem realen Brückentragwerk

In diesem Kapitel wird die Anwendung der Programme *Asp\_Einfeldbr\_v01\_1* und *DynZugVergleich\_V1* für das Brückentragwerk „Farrenbachviadukt“ gezeigt.



Abb. 8.1: Ansicht des Farrenbachviadukts

Das Farrenbachviadukt in Abb. 8.1 ist eine Eisenbahnbrücke auf der Strecke der Donauuferbahn bei km 57.576 zwischen Weins und Persenbeug. Sie ist als einfeldrige Balkenbrücke aus Stahl mit orthotroper Fahrbahnplatte ausgeführt (Querschnitt siehe Abb. C.1 im Anhang C). In [4] untersucht *Gorbatjuk* diese Brücke im Rahmen einer Fallstudie auf Verformungen, die zufolge dynamischer Belastung bei Zugüberfahrten entstehen. Im Rahmen dieser Untersuchungen wurden die folgenden Brückenparameter ermittelt:

- Spannweite  $L = 21,35 \text{ m}$
- minimale Brückenmasse  $m_{min} = 158,84 \text{ t}$
- maximale Brückenmasse  $m_{max} = 176,62 \text{ t}$
- Biegesteifigkeit  $EA_{zz} = 20\,499\,612 \text{ kNm}^2$
- Dämpfungszahl  $\zeta + \Delta\zeta = 0,7 \%$

### Minimale und maximale Brückenmasse

Die Brückenmasse geht als grundlegender Parameter in die dynamische Berechnung ein und steht somit im direkten Zusammenhang mit der Tragwerksantwort des betrachteten Systems. In der Realität kann die tatsächliche Brückenmasse oftmals nur abgeschätzt werden, da vor allem die Dichte des Schotterbetts zufolge Wassersättigungs- und

Verunreinigungsgrad erheblichen Schwankungen unterliegt. Zur Berücksichtigung dieser Effekte legt der Eurocode [12] für die Ermittlung der Brückenmasse zwei Grenzfälle fest:

- Die minimale Brückenmasse  $m_{min}$  bildet einen unteren Schätzwert der Brückenmasse, wobei dem Schotterbett die minimale Trockenrohddichte von  $\rho = 1700 \text{ kg/m}^3$  zugrundegelegt wird.  $m_{min}$  wird verwendet, um die maximale Vertikalbeschleunigung der Brücke zu berechnen.
- Die maximale Brückenmasse  $m_{max}$  stellt einen oberen Schätzwert der Brückenmasse dar, der zur Bestimmung der niedrigsten Geschwindigkeiten, bei denen wahrscheinlich Resonanzeffekte auftreten, dient. Für die Ermittlung von  $m_{max}$  wird dem Schotterbett die höchste Dichte des wassergesättigten verunreinigten Schotters von  $\rho = 2040 \text{ kg/m}^3$  zugrunde gelegt.

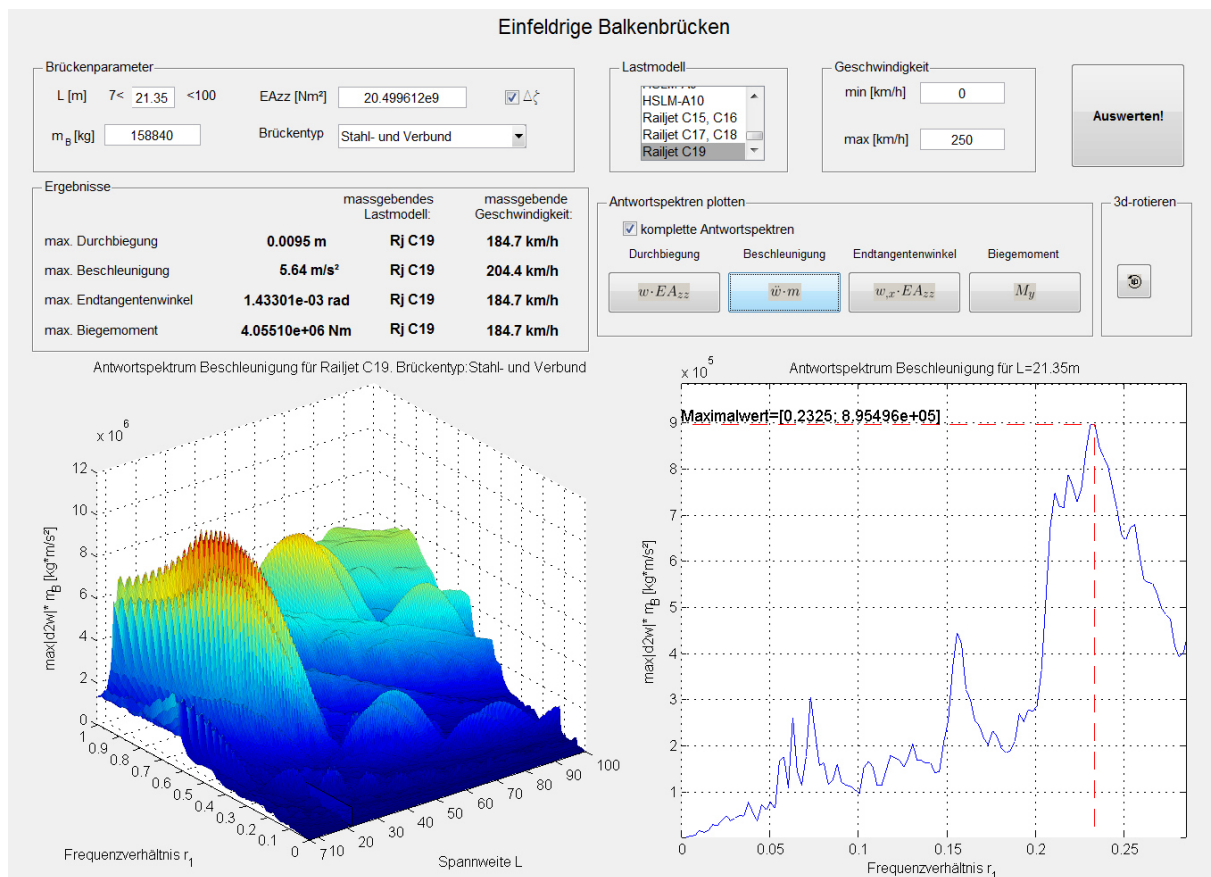
Bei der Ermittlung der Brückenmasse wurden in [4] das Eigengewicht der Stahlkonstruktion, des Schotterbetts, der Abdichtung, der Schienen und der Schwellen berücksichtigt.

## 8.1 Ermittlung der maximalen Tragwerksantwort mit *Asp\_Einfeldbr\_v01\_1*

Anhand des Farrenbachviadukts wird die Auswertung der maximalen Tragwerksantwort für die Überfahrt der Railjetkonfiguration C19 mithilfe des Programms *Asp\_Einfeldbr\_v01\_1* gezeigt. Die Frage, ob diese Zugkonfiguration tatsächlich auf dieser Strecke zum Einsatz kommen wird, steht dabei nicht im Vordergrund, da die Anwendung von *Asp\_Einfeldbr\_v01\_1* auch für andere Tragwerke nach demselben Schema erfolgen kann.

### 8.1.1 Einsetzen der minimalen Brückenmasse

Für die Berechnung der maximalen Vertikalbeschleunigung wird zunächst die minimale Brückenmasse eingesetzt. Die Ergebniswerte der maximalen Durchbiegung, des maximalen Endtangentialwinkels und des maximalen Biegemoments sind nicht direkt von der Brückenmasse abhängig, allerdings ändert sich bei einer Variation der Brückenmasse die Eigenfrequenz des Brückenbalkens und somit auch die Überfahrtsgeschwindigkeit, bei der diese Maximalwerte zufolge Resonanzeffekten auftreten.



**Abb. 8.2: Benutzeroberfläche Asp\_Einfeldbr\_v01\_1, minimale Brückenmasse**

In Abb. 8.2 ist das Antwortspektrum der Beschleunigung für das Farrenbachviadukt unter der Belastung der Railjetkonfiguration C19 (siehe 4.1.2) abgebildet. Die maximale Überfahrtsgeschwindigkeit wurde zu  $v_{max} = 250 \text{ km/h}$  ( $69,4 \text{ m/s}$ ) gewählt. Die Obergrenze für die Darstellung des Frequenzverhältnisses  $r_1$  kann nach Gl. (3.16) zu

$$r_1 = \frac{v_{max}}{\pi} \sqrt{\frac{Lm}{EA_{zz}}} = \frac{69,4}{\pi} \sqrt{\frac{21,35 \cdot 158840}{20,499612 \cdot 10^9}} = 0,285 \quad (8.1)$$

berechnet werden. Aus dem 3-dimensionalen Antwortspektren wird für  $L = 21,35 \text{ m}$  der Bereich  $0 \leq r_1 \leq 0,285$  zur Auswertung der maximalen Tragwerksantwort berücksichtigt. Das Auslesen der Ergebnisgrößen erfolgt im 2-dimensionalen Plot rechts unten in Abb. 8.2.

### Maximale Beschleunigung

Der Maximalwert der Beschleunigung tritt beim Frequenzverhältnis  $r_1 = 0,2325$  auf und beträgt  $\max|\ddot{w}| \cdot m_B = 8,95 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$  (siehe 2D-Plot in Abb. 8.2). Division dieses Wertes durch die Brückenmasse führt auf die maximale Beschleunigung in konventioneller Einheit:

$$\max|\ddot{w}| = \frac{8,95 \cdot 10^5}{m_B} = \frac{8,95 \cdot 10^5}{158840} = 5,64 \text{ m/s}^2 \quad (8.2)$$

Die Geschwindigkeit, bei der der Maximalwert der Beschleunigung auftritt, errechnet sich zu:

$$v_{\max|\ddot{w}|} = r_1 \pi \sqrt{\frac{EA_{ZZ}}{Lm_B}} = 56,79 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 204,44 \text{ km/h} \quad (8.3)$$

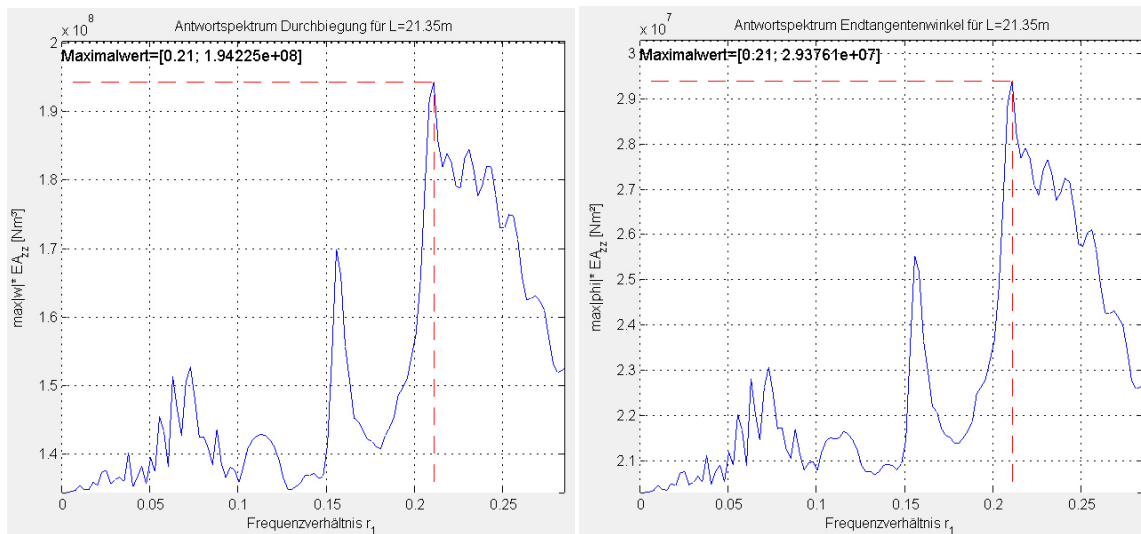


Abb. 8.3: Antwortspektrum für die maximale Durchbiegung (links) und den maximalen Endtangentialwinkel (rechts) bei minimaler Brückenmasse

### Maximale Durchbiegung

Der Maximalwert der Durchbiegung tritt beim Frequenzverhältnis  $r_1 = 0,21$  auf und beträgt  $\max|w| \cdot EA_{ZZ} = 1,94225 \cdot 10^8 \text{ Nm}^2 \cdot \text{m}$  (siehe Abb. 8.3 linkes Bild). Division dieses Wertes durch die Biegesteifigkeit führt auf die maximale Durchbiegung in konventioneller Einheit:

$$\max|w| = \frac{1,94225 \cdot 10^8}{m_B} = \frac{1,94225 \cdot 10^8}{20,499612 \cdot 10^9} = 0,0095 \text{ m} \quad (8.4)$$

Die Geschwindigkeit, bei der der Maximalwert der Beschleunigung auftritt, errechnet sich zu:

$$v_{\max|w|} = r_1 \pi \sqrt{\frac{EA_{ZZ}}{Lm_B}} = 51,29 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 184,66 \text{ km/h} \quad (8.5)$$



### Maximaler Endtangentialwinkel

Der Maximalwert des Endtangentialwinkels tritt ebenfalls beim Frequenzverhältnis  $r_1 = 0,21$  auf und beträgt  $\max|\varphi| \cdot EA_{zz} = 2,94 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2$  (siehe Abb. 8.3 rechtes Bild). Division dieses Wertes durch die Biegesteifigkeit führt auf den maximalen Endtangentialwinkel in konventioneller Einheit:

$$\max|\varphi| = \frac{2,94 \cdot 10^7}{EA_{zz}} = \frac{2,94 \cdot 10^7}{20,499 \cdot 10^9} = 1,43 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad (8.6)$$

Die Geschwindigkeit, bei der der Maximalwert des Endtangentialwinkels auftritt, beträgt nach Gl. (8.5)  $v_{\max|\varphi|} = 184,66 \text{ km/h}$ .

### Maximales Biegemoment

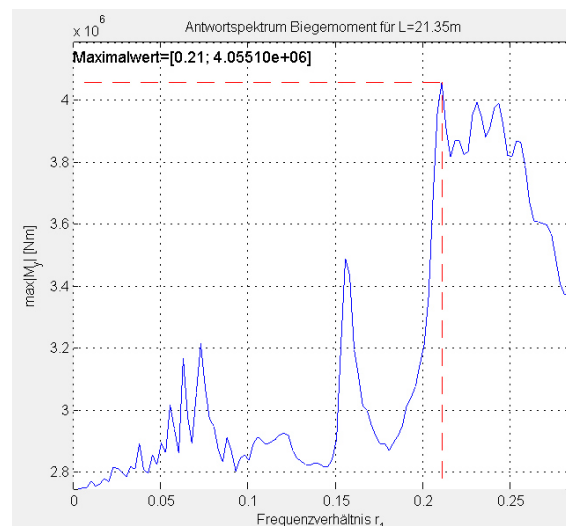
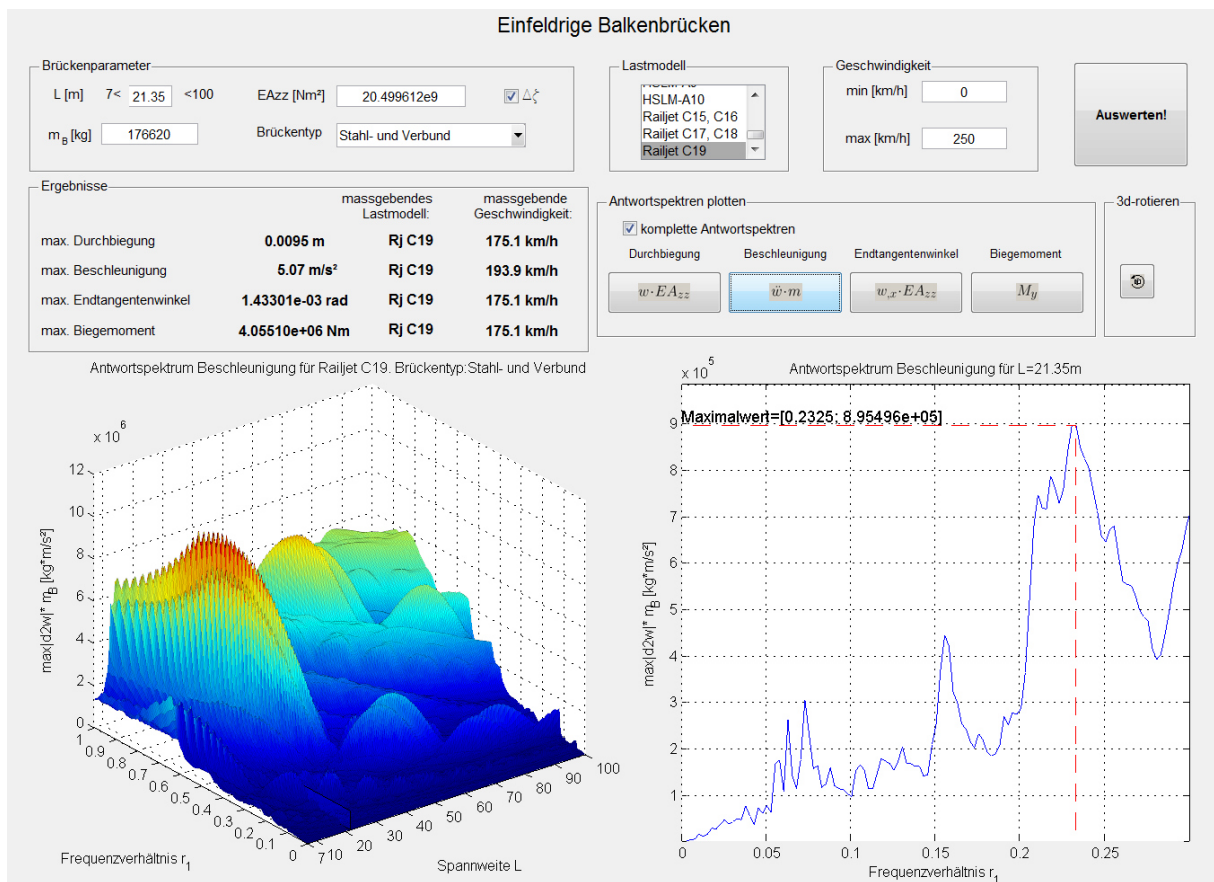


Abb. 8.4: Antwortspektrum für das maximale Biegemoment bei minimaler Brückenmasse

Der Maximalwert des Biegemoments tritt beim Frequenzverhältnis  $r_1 = 0,21$  auf und beträgt  $\max|M_y| = 4,06 \cdot 10^6 \text{ Nm}$  (siehe Abb. 8.4). Die Geschwindigkeit, bei der der Maximalwert des Biegemoments auftritt, beträgt nach Gl. (8.5)  $v_{\max|M_y|} = 184,66 \text{ km/h}$ .

#### 8.1.2 Einsetzen der maximalen Brückenmasse

Wie bereits erwähnt, hat eine Änderung der Brückenmasse eine andere Eigenfrequenz des Brückenbalkens zur Folge. Laut Eurocode [12] ist die maximale Brückenmasse für die Ermittlung der niedrigsten Geschwindigkeiten einzusetzen, bei der wahrscheinlich Resonanzeffekte auftreten.



**Abb. 8.5: Benutzeroberfläche Asp\_Einfeldbr\_v01\_1, maximale Brückenmasse**

Das Einsetzen der maximalen Brückenmasse hat zur Folge, dass sich die Obergrenze der Darstellung des Frequenzverhältnisses  $r_1$  in der 2-dimensionalen Grafik in Abb. 8.5 zu

$$r_1 = \frac{v_{max}}{\pi} \sqrt{\frac{Lm}{EA_{zz}}} = \frac{69,4}{\pi} \sqrt{\frac{21,35 \cdot 176620}{20,499612 \cdot 10^9}} = 0,30 \quad (8.7)$$

ändert. Es wird somit im Vergleich zu Abb. 8.2 ein etwas größerer Bereich aus dem 3-dimensionalen Antwortspektrum von  $0 \leq r_1 \leq 0,30$  zur Auswertung der maximalen Tragwerksantwort berücksichtigt, wodurch theoretisch höhere Werte der maximalen Durchbiegung, des maximalen Endtangentialwinkels und des maximalen Biegemoments auftreten können. Auf der sicheren Seite liegend, werden somit auch diese Ergebnisgrößen unter der Eingabe der minimalen Brückenmasse ausgewertet.

### Maximale Beschleunigung

Der Maximalwert der Beschleunigung tritt beim Frequenzverhältnis  $r_1 = 0,2325$  auf und beträgt  $\max|\ddot{w}| \cdot m_B = 8,95 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$  (siehe Abb. 8.5). Division dieses Wertes durch die Brückenmasse führt auf die maximale Beschleunigung in konventioneller Einheit:

$$\max|\ddot{w}| = \frac{8,95 \cdot 10^5}{m_B} = \frac{8,95 \cdot 10^5}{176620} = 5,07 \text{ m/s}^2 \quad (8.8)$$

Die Geschwindigkeit, bei der der Maximalwert der Beschleunigung auftritt, errechnet sich zu:

$$v_{\max|\ddot{w}|} = r_1 \pi \sqrt{\frac{EA_{ZZ}}{Lm_B}} = 53,86 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 193,88 \text{ km/h} \quad (8.9)$$

### Maximale Durchbiegung

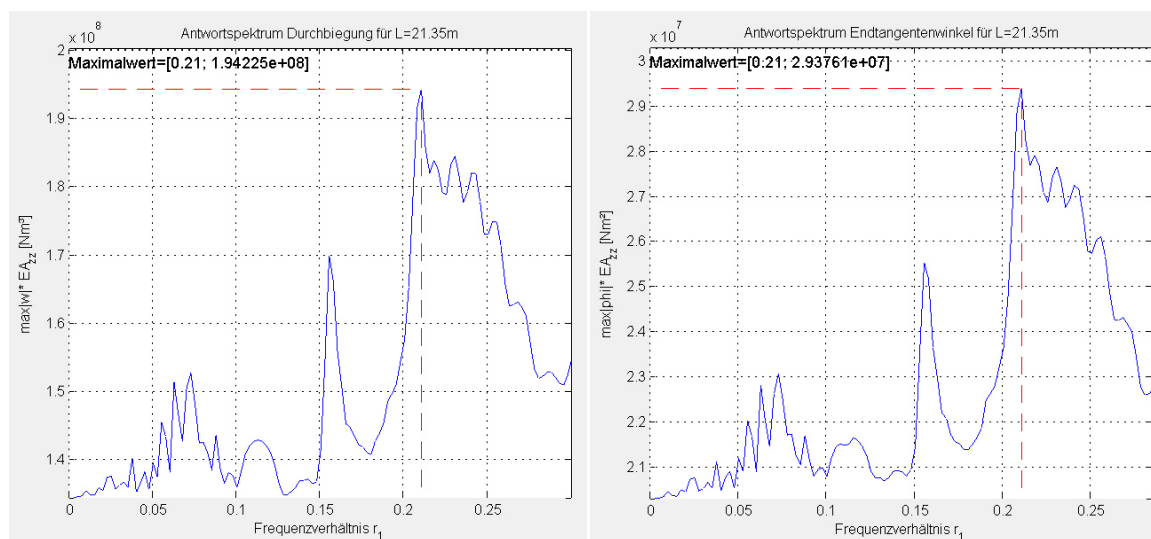


Abb. 8.6: Antwortspektrum für die maximale Durchbiegung (linkes Bild) und den maximalen Endtangentialwinkel (rechtes Bild) bei maximaler Brückenmasse

Der Maximalwert der Durchbiegung tritt beim Frequenzverhältnis  $r_1 = 0,21$  auf und beträgt  $\max|w| \cdot EA_{ZZ} = 1,94 \cdot 10^8 \text{ Nm}^3$  (siehe linkes Bild in Abb. 8.6). Division dieses Wertes durch die Biegesteifigkeit führt auf die maximale Durchbiegung in konventioneller Einheit:

$$\max|w| = \frac{1,94 \cdot 10^8}{EA_{ZZ}} = \frac{1,94 \cdot 10^8}{20,499 \cdot 10^9} = 0,0095 \text{ m} \quad (8.10)$$

Die Geschwindigkeit, bei der der Maximalwert der Durchbiegung auftritt, errechnet sich zu:

$$v_{\max|w|} = r_1 \pi \sqrt{\frac{EA_{ZZ}}{Lm_B}} = 48,64 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 175,12 \text{ km/h} \quad (8.11)$$

### Maximaler Endtangentialwinkel

Der Maximalwert des Endtangentialwinkels tritt ebenfalls beim Frequenzverhältnis  $r_1 = 0,21$  auf und beträgt  $\max|\varphi| \cdot EA_{ZZ} = 2,94 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2$  (siehe rechtes Bild in Abb. 8.6).

Division dieses Wertes durch die Biegesteifigkeit führt auf den maximalen Endtangentialwinkel in konventioneller Einheit:

$$\max|\varphi| = \frac{2,94 \cdot 10^7}{EA_{zz}} = \frac{2,94 \cdot 10^7}{20,499 \cdot 10^9} = 1,43 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad (8.12)$$

Die Geschwindigkeit, bei der der Maximalwert des Endtangentialwinkels auftritt, beträgt nach Gl. (8.11)  $v_{\max|\varphi|} = 175,12 \text{ km/h}$ .

### Maximales Biegemoment

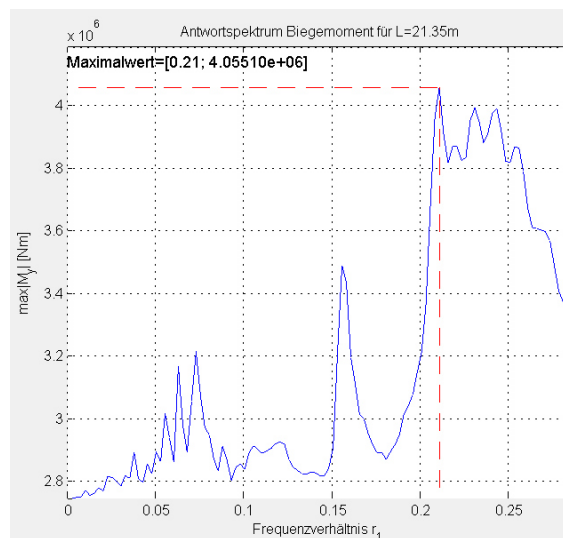


Abb. 8.7: Antwortspektrum für das maximale Biegemoment bei maximaler Brückenmasse

Der Maximalwert des Biegemoments tritt beim Frequenzverhältnis  $r_1 = 0,21$  auf und beträgt  $\max|M_y| = 4,06 \cdot 10^6 \text{ Nm}$  (siehe Abb. 8.7). Die Geschwindigkeit, bei der der Maximalwert des Biegemoments auftritt, beträgt nach (8.11)  $v_{\max|M_y|} = 175,12 \text{ km/h}$ .

### 8.1.3 Übersicht der Berechnungsergebnisse

In Tab. 8.1 sind die Ergebniswerte der Tragwerksantwort unter der Berücksichtigung der minimalen bzw. maximalen Brückenmasse zusammengefasst. Es wird deutlich, dass der Maximalwert der Beschleunigung für den Ansatz der minimalen Brückenmasse erreicht wird. Die Berechnung der maximalen Durchbiegung, des maximalen Endtangentialwinkels und des maximalen Biegemoments sollte unter dem Ansatz der maximalen Brückenmasse erfolgen (vergleiche Gleichungen (8.1) und (8.7)). Soll die minimale Geschwindigkeit ermittelt werden, bei der die Maximalwerte der Tragwerksantwort auftreten, ist der Ansatz der maximalen Brückenmasse zu wählen.

	Minimale Brückenmasse		Maximale Brückenmasse	
	Ergebniswert	Maßgebende Geschwindigkeit	Ergebniswert	Maßgebende Geschwindigkeit
$w_{max}$	9,5mm	184,7km/h	9,5mm	175,1km/h
$\varphi_{max}$	$1,433 \cdot 10^{-3}rad$	184,7km/h	$1,433 \cdot 10^{-3}rad$	175,1km/h
$\ddot{w}_{max}$	5,64 m/s <sup>2</sup>	204,4km/h	5,07 m/s <sup>2</sup>	193,9km/h
$M_{y,max}$	4,055MNm	184,7km/h	4,055MNm	175,1km/h

Tab. 8.1: Berechnungsergebnisse für die minimale und maximale Brückenmasse

## 8.2 Vergleich der Tragwerksantwort für unterschiedliche Zugmodelle mit DynZugVergleich\_V1

Obwohl die Donauuferbahn nicht für den Hochgeschwindigkeitsverkehr ausgebaut und bereits außer Betrieb ist, wird die Anwendung des Programms *DynZugVergleich\_V1* anhand zweier fiktiven Aufgabenstellungen für das Farrenbachviadukt gezeigt. Die Anwendung von *DynZugVergleich\_V1* für andere Einfeldträgerbrücken kann nach demselben Schema erfolgen.

### 8.2.1 Vergleich Hochgeschwindigkeitszüge – „LM71 alpha=1,0“

Eine erste fiktive Aufgabenstellung könnte wie folgt aussehen:

Das Farrenbachviadukt ist auf das „LM71 alpha=1,0“ bemessen und wurde noch keiner dynamischen Berechnung unterzogen. Für Sanierungsarbeiten am Streckennetz ist zu prüfen, ob es zulässig ist, Hochgeschwindigkeitszüge auf die Donauuferbahn umzuleiten. Dazu muss überprüft werden, ob das Farrenbachviadukt der geänderten Belastung standhält bzw. ob eine Begrenzung der Streckenhöchstgeschwindigkeit notwendig ist. Solche Untersuchungen können auf einfache Weise mit dem Programm *DynZugVergleich\_V1* durchgeführt werden.

Dazu werden in der Benutzeroberfläche zunächst die Brückenparameter des Farrenbachviadukts eingegeben (siehe Abb. 8.8). Für die Untersuchung der maximalen Durchbiegung, des maximalen Endtangentialwinkels und des maximalen Biegemoments wird die maximale Brückenmasse eingesetzt. Die Überfahrtsgeschwindigkeiten, bei denen die

maßgebenden Resonanzeffekte auftreten, werden mit dieser Festlegung minimal (siehe 8.1.3).

The image shows a software interface for entering bridge parameters. It is divided into two main sections: 'Brückentyp' and 'Brückenparameter'. In the 'Brückentyp' section, a dropdown menu is set to 'Stahl- und Verbund'. Below it, a checkbox with a delta symbol is checked. The 'Brückenparameter' section contains several input fields: 'L [m] 7 < 21.35 < 100', 'm [kg] 176620', 'EI [Nm²] 20.499612e9', and 'f\_eigen = 5.4247 [Hz]'.

Abb. 8.8: Eingabe der Brückenparameter

Die Eigenfrequenz des Farrenbachviadukts von  $5,42 \text{ Hz}$  wird aus den eingegebenen Brückenparametern berechnet und automatisch ausgegeben. Die Eingabe der Darstellungsgrenzen erfolgt nach Abb. 8.9. Die maximale Überfahrtsgeschwindigkeit soll  $250 \text{ km/h}$  betragen und der darzustellende Frequenzbereich im 3D-Plot in Abb. 8.10 wird mit  $3 < f [\text{Hz}] < 8$  frei gewählt.

The image shows a software interface for setting display limits. It is titled 'Darstellungsgrenzen' and is divided into two sections: 'maximale Geschwindigkeit' and 'Frequenzbereich'. Under 'maximale Geschwindigkeit', there is an input field for 'v\_max = 250 [km/h]'. Under 'Frequenzbereich', there are input fields for '3 < f [Hz] < 8'.

Abb. 8.9: Eingabe der Darstellungsgrenzen

Als Referenzmodell ist für diese Aufgabenstellung das „LM71 alpha=1,0“ festzulegen und als Vergleichsmodell sind alle zu untersuchenden Hochgeschwindigkeitszüge auszuwählen. Um alle Zugmodelle zu untersuchen, für die das Programm *DynZugVergleich\_V1* auf eine dynamische Berechnung zugreifen kann, reicht es aus, in Abb. 8.10 das Lastmodell „alle HSLM-A“, sowie die drei Konfigurationen des ÖBB Railjet auszuwählen. Aus diesen Lastmodellen wird eine Einhüllende der maximalen Tragwerksantwort gebildet, welche in weiterer Folge mit jener des „LM71 alpha=1,0“ verglichen wird.

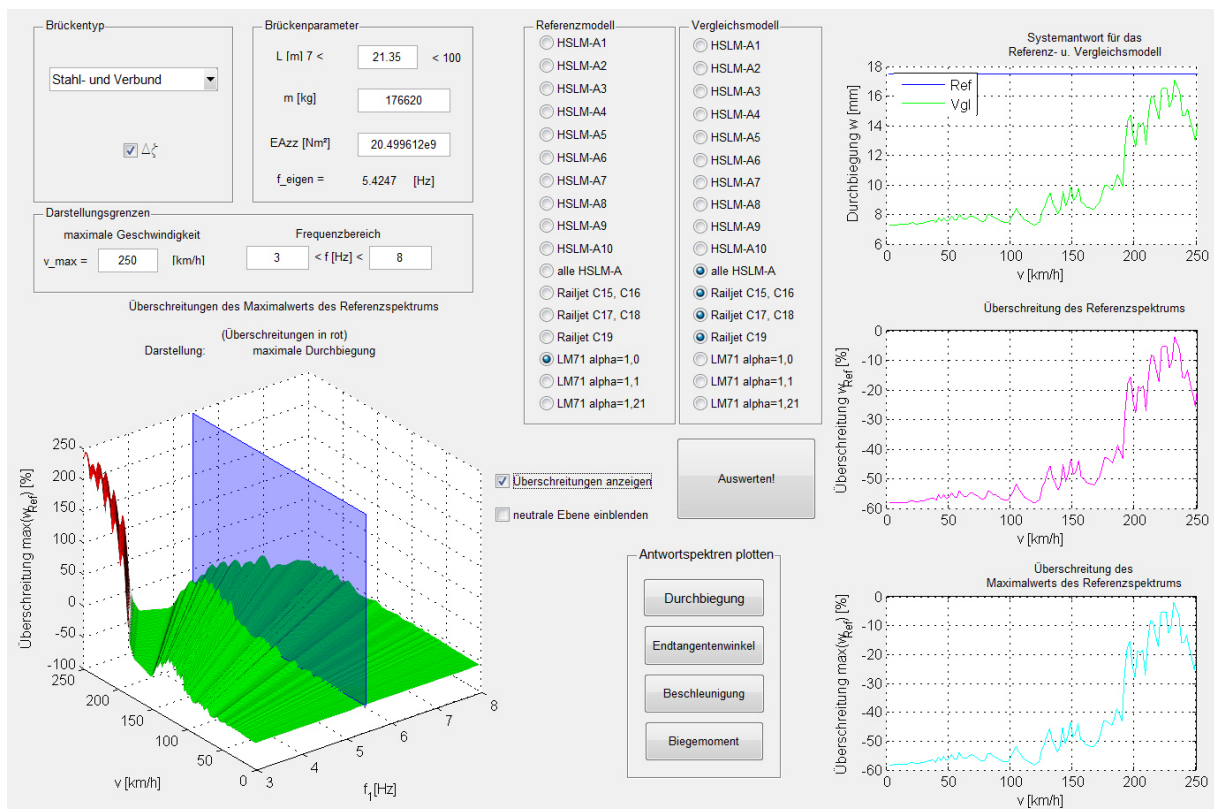


Abb. 8.10: Benutzeroberfläche *DynZugVergleich\_V1*: Auswertung für die maximalen Durchbiegungen

### Systemantwort

Der Plot rechts oben in Abb. 8.10 stellt die maximale Durchbiegung des Farrenbachviadukts unter der Belastung des Referenzmodells (blaue Linie) und des Vergleichsmodells (grüne Linie) dar. Der Tragwerksantwort des Referenzmodells (LM71 alpha=1,0) liegt eine statische Berechnung zugrunde, weshalb die blaue Linie über den gesamten Geschwindigkeitsbereich konstante Werte annimmt. Aus dieser Abbildung ist zu erkennen, dass die Durchbiegungen, die aus dynamischen Effekten zufolge der Überfahrt der gewählten Hochgeschwindigkeitszüge entstehen, im betrachteten Geschwindigkeitsbereich kleiner sind als jene Durchbiegungen, die aus der statischen Berechnung der Brücke unter der Belastung des LM71 alpha=1,0 resultieren.

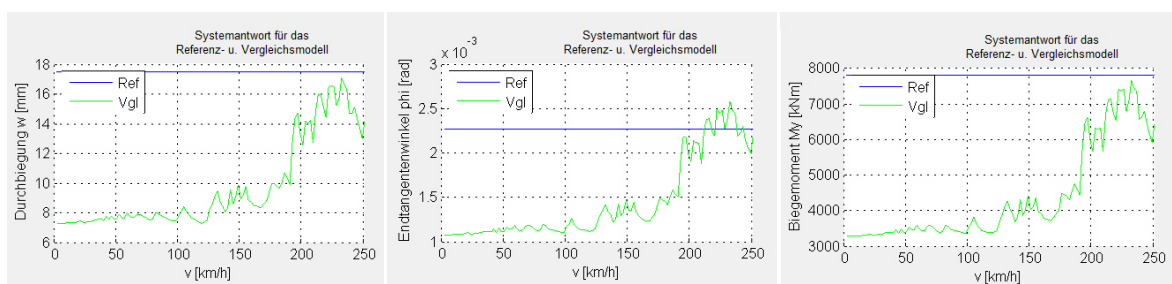


Abb. 8.11: Systemantwort: Durchbiegung (links), Endtangentialwinkel (Mitte) und Biegemoment (rechts)

In Abb. 8.11 sind die Durchbiegungen, die Endtangentialwinkel und die Biegemomente, die durch die Belastung des Referenz- bzw. Vergleichsmodells hervorgerufen werden, dargestellt. Daraus ist zu erkennen, dass Überschreitungen der Tragwerksantwort des Referenzmodells nur für die Endtangentialwinkel ab einer Überfahrtsgeschwindigkeit von etwa  $210 \text{ km/h}$  auftreten.

### Überschreitung des Referenzspektrums

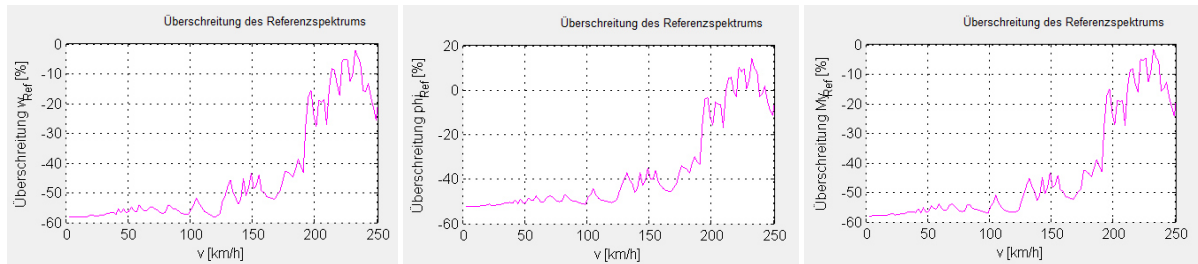


Abb. 8.12: Differenz zwischen Referenz- und Vergleichsmodell: Durchbiegung (links), Endtangentialwinkel (Mitte) und Biegemoment (rechts)

Die Darstellungen in Abb. 8.12 dienen zur Quantifizierung der Überschreitungen des Referenzspektrums. Diese Überschreitungen werden in Prozent bezogen auf den Ergebniswert des Referenzmodells abgebildet. Nur an jenen Stellen, wo positive Ordinatenwerte vorliegen, rufen die Hochgeschwindigkeitszüge eine größere Tragwerksantwort hervor, als das „LM71 alpha=1,0“. Für den maximalen Endtangentialwinkel nehmen die Überschreitungen im Geschwindigkeitsbereich ab  $210 \text{ km/h}$  Werte von bis zu 15% an (siehe Abb. 8.12 Mitte).

### Überschreitung des Maximalwerts des Referenzspektrums (2D-Darstellung)

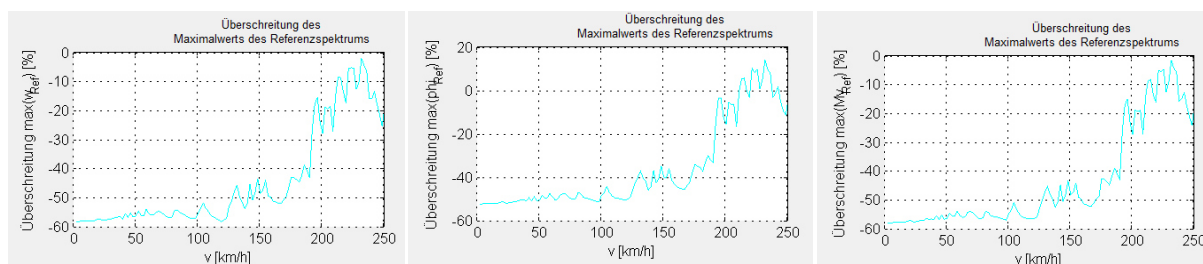


Abb. 8.13: Abweichung des Vergleichsmodells vom Maximalwert des Referenzmodells (2D): Durchbiegung (links), Endtangentialwinkel (Mitte) und Biegemoment (rechts)

Die Darstellungen in Abb. 8.13 enthalten die prozentuale Überschreitung des Maximalwerts des Referenzspektrums. Für den Fall, dass als Referenzmodell eine Variation des LM71 gewählt wurde, unterscheiden sich die Darstellungen in Abb. 8.13 nicht von jenen in Abb. 8.12, da die Werte des Referenzspektrums über den gesamten Geschwindigkeitsbereich konstant sind.



### Überschreitungen des Maximalwerts des Referenzspektrums (3D-Darstellung)

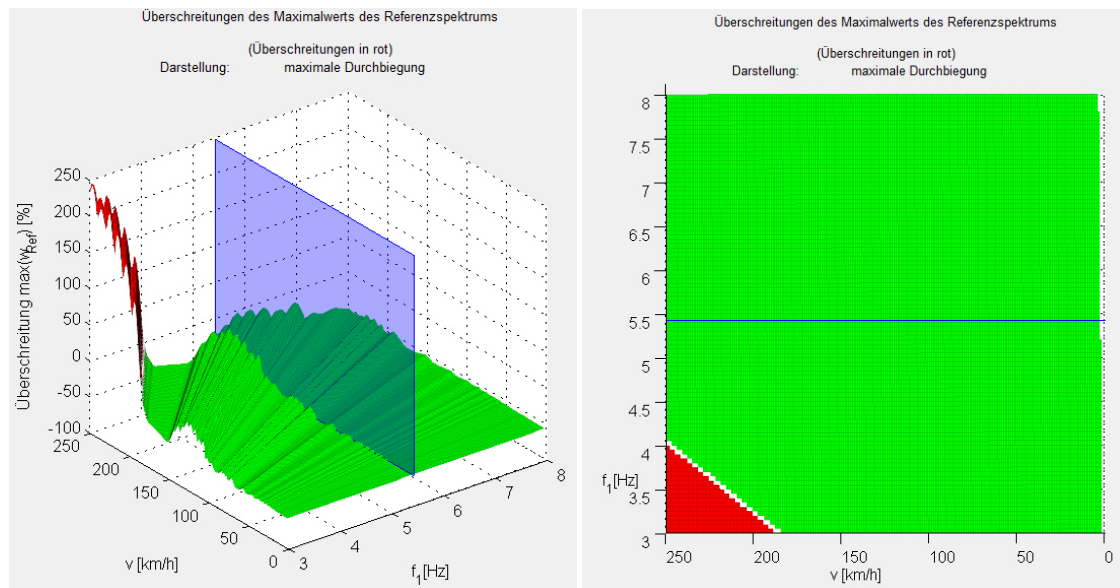


Abb. 8.14: Überschreitungen des Maximalwerts des Referenzspektrums der Durchbiegung: Isometrie (links) und Grundriss (rechts)

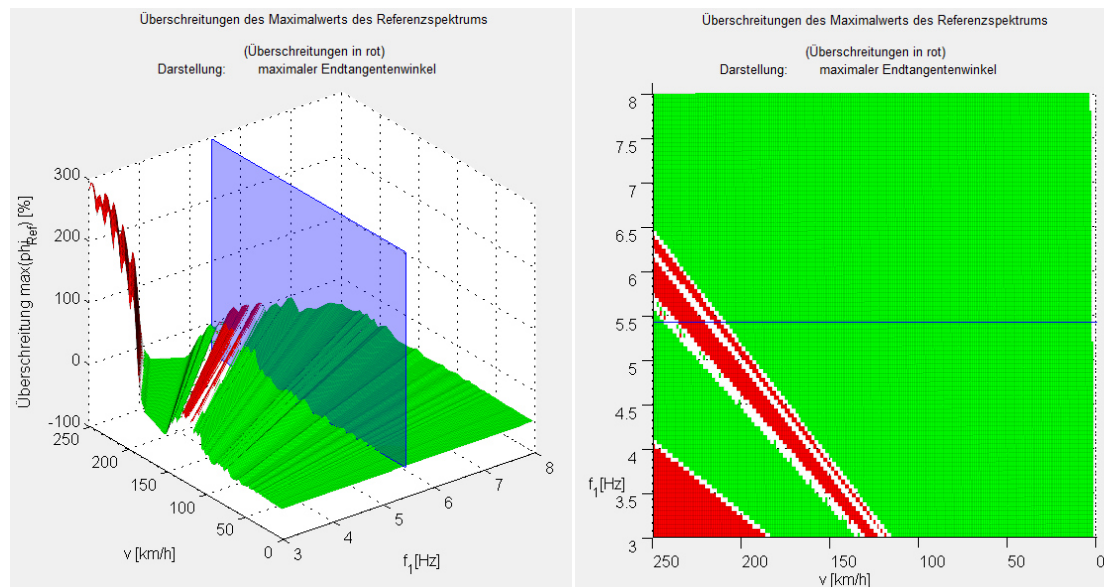
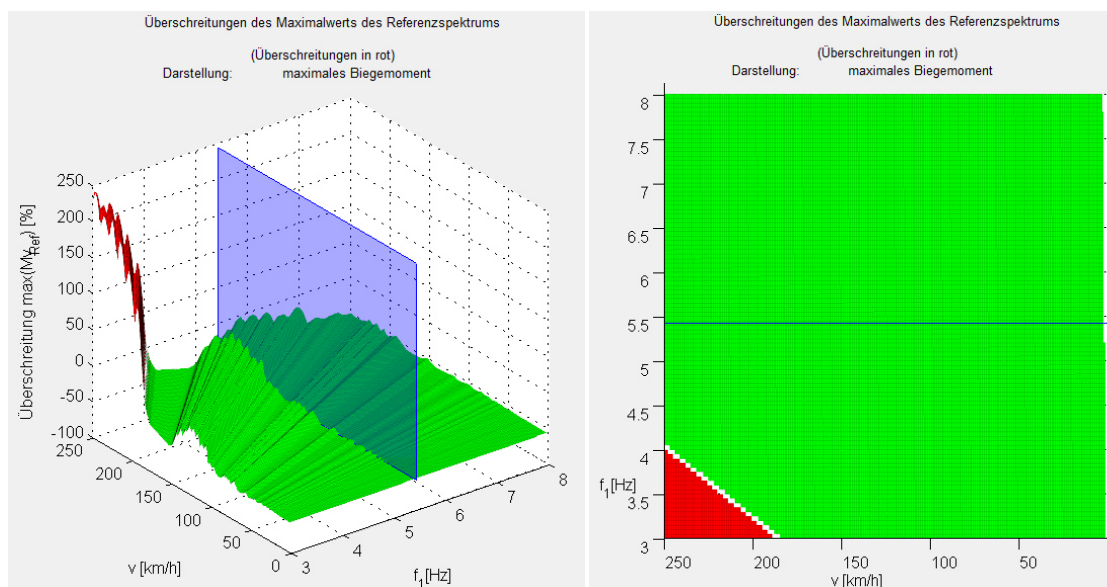


Abb. 8.15: Überschreitungen des Maximalwerts des Referenzspektrums der Endtangentialwinkel: Isometrie (links) und Grundriss (rechts)



**Abb. 8.16: Überschreitungen des Maximalwerts des Referenzspektrums der Biegemomente: Isometrie (links) und Grundriss (rechts)**

Die 3-dimensionalen Darstellungen in den Abbildungen 8.14 bis 8.16 dienen zur Abschätzung, ob die Tragwerksantwort auf kleine Änderungen der Eigenfrequenz (z.B. bei ungenauer Ermittlung der Brückenparameter) sensibel reagiert. Die 3-dimensionalen Darstellungen (linkes Bild in den Abbildungen 8.14 bis 8.16) können in den Grundriss gedreht werden (rechtes Bild in den Abbildungen 8.14 bis 8.16), sodass jene Überfahrtsgeschwindigkeiten und Eigenfrequenzen erkannt werden, für die Überschreitungen des Maximalwerts des Referenzspektrums vorliegen. Im Nahbereich der (für den Ansatz der maximalen Brückenmasse ermittelten) Eigenfrequenz von  $5,42\text{Hz}$  des Farrenbachviadukts sind in den Abbildungen 8.14 bis 8.16 keine markanten bzw. sprunghaften Vergrößerungen der Tragwerksantwort zufolge dynamischen Effekten zu erwarten. Beim Ansatz der minimalen Brückenmasse ändert sich die Eigenfrequenz des Farrenbachviadukts zu  $5,72\text{Hz}$ , wobei laut den Abbildungen 8.14 bis 8.16 nur marginale Änderungen der Tragwerksantwort zu erwarten sind.

Ebenso ist in den Abbildungen 8.14 bis 8.16 anhand der roten Bereiche (etwa bei einer Eigenfrequenz von  $3\text{Hz}$  und einer Überfahrtsgeschwindigkeit von  $250\text{km/h}$ ) zu erkennen, dass andere Verhältnisse der Brückenmasse und der Biegesteifigkeit durchaus zu drastischen Überschreitungen der Tragwerksantwort aus der Belastung des „LM71  $\alpha=1,0$ “ führen können.

## 8.2.2 Vergleich ÖBB Railjet - HSLM-A10

Eine zweite fiktive Aufgabenstellung könnte wie folgt aussehen:

Das Farrenbachviadukt ist nach Eurocode [12] und [10] unter der Berücksichtigung der Laststellung „LM71 alpha=1,0“ bemessen. Die maximale Oberbaubeschleunigung wurde im Rahmen einer begleitenden dynamischen Berechnung für die Belastung des Lastmodells HSLM-A10 und eine maximale Überfahrtsgeschwindigkeit von  $v = 250 \text{ km/h}$  ermittelt. Für eine Änderung der Streckenklasse ist zu untersuchen, ob das Befahren des Farrenbachviadukts mit den Zugkonfigurationen des ÖBB Railjet laut [10] uneingeschränkt zulässig ist oder ob eine Begrenzung der Streckenhöchstgeschwindigkeit erforderlich ist. Diese Fragestellung kann auf einfache Weise mit dem Programm *DynZugVergleich\_V1* beantwortet werden.

Die Durchbiegung, der Endtangentialwinkel und das Biegemoment können im Rahmen einer statischen Berechnung nach Eurocode [12] für die Belastung des LM71 ermittelt werden. Der Vergleich dieser Werte mit der dynamischen Tragwerksantwort unter der Belastung des ÖBB Railjet kann nach der Vorgangsweise aus Abschnitt 8.2.1 erfolgen. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf den Vergleich der Beschleunigung zwischen der Belastung des ÖBB Railjet und des Modellzuges HSLM-A10. Für die Berechnung dieses Beispiels wird die minimale Brückenmasse verwendet, wodurch die Beschleunigungen maximal werden (siehe Abschnitt 8.1.3).

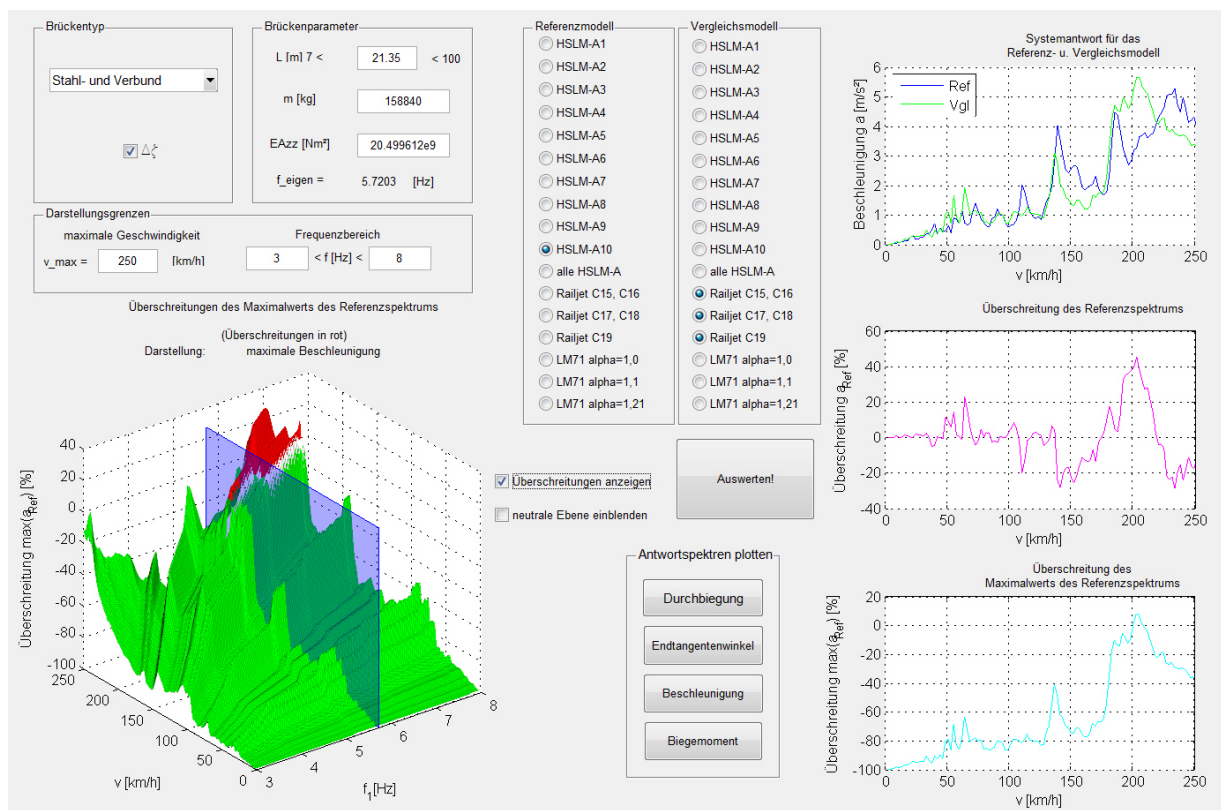


Abb. 8.17: Benutzeroberfläche *DynZugVergleich\_V1*: Auswertung für maximale Beschleunigung

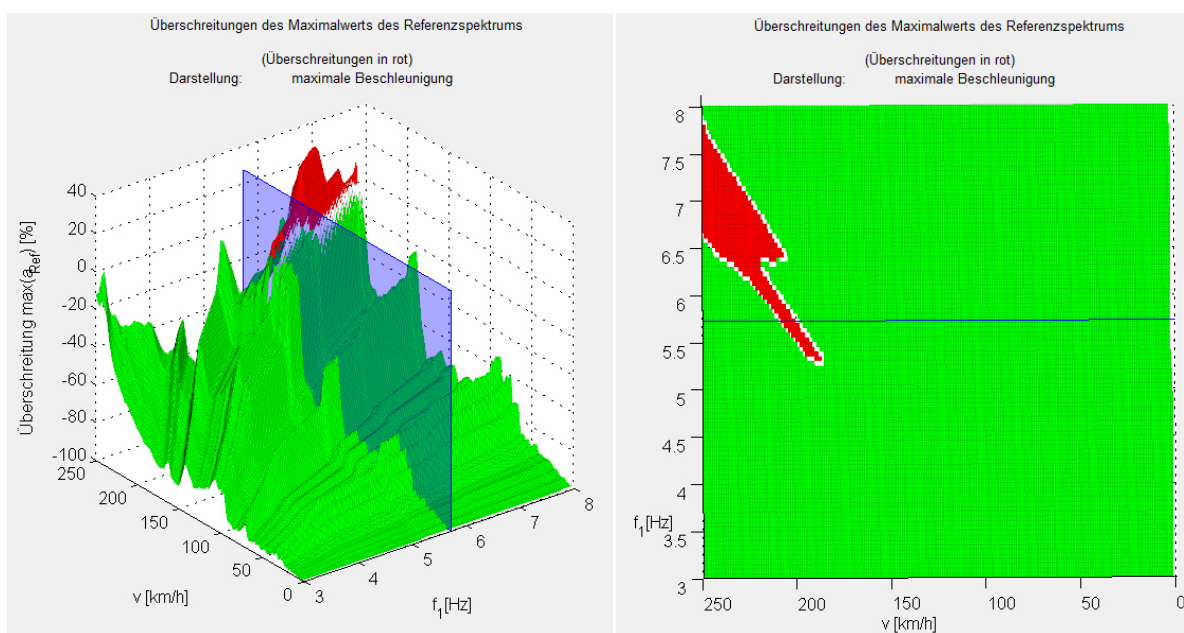
Die Eingabe der Brückenparameter des Farrenbachviadukts und die Wahl der Darstellungsgrenzen erfolgt gleich wie in Abschnitt 8.2.1. Das Vergleichsmodell in Abb. 8.17

ist eine Einhüllende der Maximalwerte der Tragwerksantwort für die Konfigurationen C15 bis C19 des ÖBB Railjet nach [10]. Als Referenzmodell wird der Modellzug HSLM-A10 gewählt.

Die Darstellung rechts oben in Abb. 8.17 stellt die maximale Beschleunigung des Farrenbachviadukts unter der Belastung des Referenzmodells (blaue Linie) und des Vergleichsmodells (grüne Linie) dar. Daraus ist erkennbar, dass das Vergleichsmodell in bestimmten Geschwindigkeitsbereichen höhere Beschleunigungen des Brückenträgers verursacht, als das Referenzmodell. Die darunterliegende Darstellung „Überschreitung des Referenzspektrums“ dient zur Quantifizierung dieser Überschreitungen. Die durch das Referenzmodell hervorgerufene Beschleunigung wird dabei beispielsweise bei einer Überfahrtsgeschwindigkeit von ca.  $205\text{ km/h}$  um etwa um 43% überschritten.

Die Darstellung „Überschreitung des Maximalwerts des Referenzspektrums“ rechts unten in Abb. 8.17 zeigt, dass der Maximalwert der durch das Referenzmodell hervorgerufenen Beschleunigungen ab einer Überfahrtsgeschwindigkeit von etwa  $200\text{ km/h}$  um bis zu 10% überschritten wird.

Im Rahmen dieser fiktiven Aufgabenstellung wird angenommen, dass die maximalen Beschleunigungen, die durch die Überfahrt des HSLM-A10 mit einer Geschwindigkeit bis  $250\text{ km/h}$  hervorgerufen werden, zulässig sind. Eine Begrenzung der Überfahrtsgeschwindigkeit für die Konfigurationen des ÖBB Railjet auf  $200\text{ km/h}$  führt dazu, dass die zulässigen Beschleunigungen nicht überschritten werden.



**Abb. 8.18: Überschreitungen des Maximalwerts des Referenzspektrums der Beschleunigungen: Isometrie (linkes Bild) und Grundriss (rechtes Bild)**

Aus dem linken Bild in Abb. 8.18 lässt sich die Tendenz erkennen, dass die Überschreitung des Maximalwerts des Referenzspektrums der Beschleunigungen mit steigender

Eigenfrequenz zunimmt. Das rechte Bild in Abb. 8.18 zeigt, bei welchen Überfahrtsgeschwindigkeiten und Eigenfrequenzen mit Überschreitungen des Maximalwerts des Referenzspektrums der Beschleunigungen zu rechnen ist. Bei der Eingabe der Brückenparameter in Abb. 8.17 wurde die minimale Brückenmasse (untere Schranke) eingesetzt. Für reale Brückenmassen treten die Maximalwerte aus Abb. 8.18 bei geringeren Überfahrtsgeschwindigkeiten auf (vgl. Tab. 8.1).



# Anhang

## A Exemplarische Bestimmung des Lastvektors

Die Bestimmung des Lastvektors  $\mathbf{p}_z$  wird anhand eines konkreten Beispiels an einem stationären Zeitpunkt gezeigt. Das betrachtete System besteht aus einem Einfeldbalken mit konstanten Querschnittseigenschaften und einer Spannweite von  $L = 8m$ , der durch eine Folge von drei Einzelkräften  $P_i$  ( $i = 1,2,3$ ) mit konstanter Geschwindigkeit  $v = 10m/s$  befahren wird.

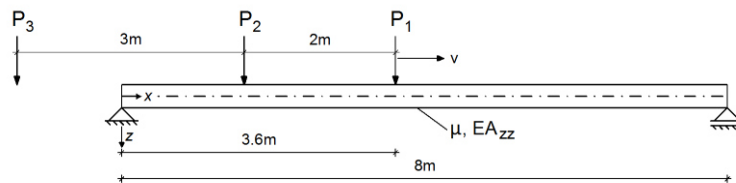


Abb. A.1: System zur exemplarischen Bestimmung des Lastvektors

Exemplarisch werden nur die ersten beiden Eigenformen berücksichtigt, wodurch der Lastvektor nach Gl. (2.87) die folgende Form annimmt:

$$\mathbf{p}_z = \begin{bmatrix} p_{z,1} \\ p_{z,2} \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

Die momentane Position der Kräfte  $P_i$  lautet:

$$x_1 = 3,6m; \quad x_2 = 1,6m; \quad x_3 = -1,4m \quad (9.2)$$

Die Werte  $l_{1i}$  beschreiben den Abstand der Kräfte  $P_i$  zur Kraft  $P_1$  und lauten somit:

$$l_{11} = 0; \quad l_{12} = 2; \quad l_{13} = 5 \quad (9.3)$$

Die Rechteckfunktion  $\Gamma(x_i)$  aus Gl. (2.82) gibt an, ob sich die Kraft  $P_i$  auf dem Träger befindet und lautet:

$$\Gamma(x_1) = 1; \quad \Gamma(x_2) = 1; \quad \Gamma(x_3) = 0 \quad (9.4)$$

Der Zeitpunkt, an dem sich die Kraft  $P_1$  an der Stelle  $x_1 = 0$  befindet wird mit  $t(x_1 = 0) = 0$  festgelegt. Der aktuelle Zeitpunkt  $t$  berechnet sich demnach zu

$$t = \frac{x_1}{v} = 0,36s \quad (9.5)$$

### Betrachtung der ersten Eigenform

Die Anregungsfrequenz der ersten Eigenform kann aus Gl. (2.92) mit  $j = 1$  berechnet werden:

$$\Omega_1 = \frac{\pi v}{L} = 3,9270 \text{ rad/s} \quad (9.6)$$

Die Phase  $\theta_i$  der Kraft  $P_i$  bezogen auf  $P_1$  berechnet sich nach Gl. (2.93) mit  $j = 1$  zu

$$\theta_i = \frac{\pi l_{1i}}{L} \quad (9.7)$$

Einsetzen von Gl. (9.3) in Gl. (9.7) führt auf:

$$\theta_1 = 0; \quad \theta_2 = 0,7854; \quad \theta_3 = 1,9635 \quad (9.8)$$

Die Bestimmungsgleichung für  $p_{z,1}$  lautet nach Gl. (2.94) mit  $j = 1$ :

$$p_{z,1} = \sum_{i=1}^3 P_i \Gamma(x_i) \sin(\Omega_1 t + \theta_i) \quad (9.9)$$

Einsetzen der Gleichungen (9.4), (9.5), (9.6) und (9.8) in Gl (9.9) führt auf:

$$p_{z,1} = P_1 \sin(1,4137) + P_2 \sin(1,4137 + 0,7854) = 0,9877P_1 + 0,8090P_2 \quad (9.10)$$

### Betrachtung der zweiten Eigenform

Die Anregungsfrequenz der zweiten Eigenform kann aus Gl. (2.92) mit  $j = 2$  berechnet werden:

$$\Omega_2 = \frac{2\pi v}{L} = 7,854 \text{ rad/s} \quad (9.11)$$

Die Phase  $\theta_i$  der Kraft  $P_i$  bezogen auf  $P_1$  berechnet sich nach Gl. (2.93) mit  $j = 2$  zu

$$\theta_i = \frac{2\pi l_{1i}}{L} \quad (9.12)$$

Einsetzen von Gl. (9.3) in Gl. (9.7) führt auf:

$$\theta_1 = 0; \quad \theta_2 = 1,5708; \quad \theta_3 = 3,927 \quad (9.13)$$

Die Bestimmungsgleichung für  $p_{z,2}$  lautet nach Gl. (2.94) mit  $j = 2$ :

$$p_{z,2} = \sum_{i=1}^3 P_i \Gamma(x_i) \sin(\Omega_2 t + \theta_i) \quad (9.14)$$



Einsetzen der Gleichungen (9.4), (9.5), (9.11) und (9.13) in Gl. (9.14) führt auf:

$$p_{z,2} = P_1 \sin(2.8247) + P_2 \sin(2.8247 + 1,5708) = 0,3116P_1 - 0,9502P_2 \quad (9.15)$$

Einsetzen der Gleichungen (9.10) und (9.15) in Gl. (9.1) führt auf den Lastvektor der Laststellung aus Abb. A.1:

$$\mathbf{p}_z = \begin{bmatrix} 0,9877 \cdot P_1 + 0,7071 \cdot P_2 \\ 0,3116 \cdot P_1 - 0,9502 \cdot P_2 \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

Die Anzahl der berücksichtigten Eigenformen kann nach demselben Schema beliebig erweitert werden.

## B Zugdaten

Die Achsabstände „AA“ und Achslasten „P“ der HSLM-A-Modelle sind in Tab. B.1, jene der Railjet-Konfigurationen in Tab. B.2 aufgelistet. Zusätzlich kann aus diesen beiden Tabellen die Summe der Achslasten (entspricht der Gesamtbelastung des Zugmodells) und die Summe der Achsabstände (entspricht der Zuglänge zwischen erster und letzter Achse) abgelesen werden.

Modell	HSLM-A1	HSLM-A2	HSLM-A3	HSLM-A4	HSLM-A5	HSLM-A6	HSLM-A7	HSLM-A8	HSLM-A9	HSLM-A10
1	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
2	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
3	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
4	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
5	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
6	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
7	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
8	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
9	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
10	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
11	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
12	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
13	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
14	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
15	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
16	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
17	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
18	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
19	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
20	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
21	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
22	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
23	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
24	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
25	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
26	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
27	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
28	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
29	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
30	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
31	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
32	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
33	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
34	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
35	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
36	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
37	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
38	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
39	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
40	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
41	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
42	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
43	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
44	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
45	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
46	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
47	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
48	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
49	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
50	170	200	180	190	180	190	190	190	210	210
Summe	8500	9600	8280	8360	7200	7600	7220	7560	7560	7560
	397,525	398,525	397,525	394,525	382,525	397,525	387,525	375,525	375,525	388,525
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Tab. B.1: Belastung P und Achsabstände AA der HSLM-A Modelle

Modell	Railjet C15		Railjet C16		Railjet C17		Railjet C18		Railjet C19	
	Achse Nr	P [kN]	AA [m]	P [kN]	AA [m]	P [kN]	AA [m]	P [kN]	AA [m]	P [kN]
1	225		155		225		225		155	
2	225	3	155	2,5	225	3	225	3	155	2,5
3	225	6,9	155	16,5	225	6,9	225	6,9	155	16,5
4	225	3	155	2,5	225	3	225	3	155	2,5
5	155	5,69	155	5	155	5,69	155	5,69	155	5
6	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
7	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5
8	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
9	155	5	155	5	155	5	155	5	155	5
10	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
11	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5
12	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
13	155	5	155	5	155	5	155	5	155	5
14	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
15	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5
16	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
17	155	5	155	5	155	5	155	5	155	5
18	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
19	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5
20	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
21	155	5	155	5	155	5,7	155	5	155	5
22	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
23	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5
24	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
25	155	5	155	5	155	5	155	5	155	5
26	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
27	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5
28	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
29	155	5	155	5	155	5	155	5	155	5,69
30	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	225	3
31	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5	225	6,9
32	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	225	3
33	155	5	155	5	155	5	155	5	225	6,38
34	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	225	3
35	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5	225	6,9
36	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	225	3
37	155	5	155	5	155	5	155	5	155	5,69
38	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
39	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5
40	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
41	155	5	155	5	155	5	155	5	155	5
42	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
43	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5
44	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
45	155	5	155	5	155	5	155	5,7	155	5
46	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
47	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5
48	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
49	155	5	155	5	155	5	155	5	155	5
50	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
51	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5
52	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
53	155	5	155	5	155	5	155	5	155	5
54	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
55	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5	155	16,5
56	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5	155	2,5
57	155	5	225	5,69	155	5	155	5	155	5
58	155	2,5	225	3	155	2,5	155	2,5	155	2,5
59	155	16,5	225	6,9	155	16,5	155	16,5	155	16,5
60	155	2,5	225	3	155	2,5	155	2,5	155	2,5
61					225	5,69	225	5,69	155	5
62					225	3	225	3	155	2,5
63					225	6,9	225	6,9	155	16,5
64					225	3	225	3	155	2,5
Summe	9580	384,59	9580	384,59	10480	403,88	10480	403,88	10480	404,56

Tab. B.2: Belastung P und Achsabstände AA der Railjet-Modelle

## C Pläne des Farrenbachviadukts

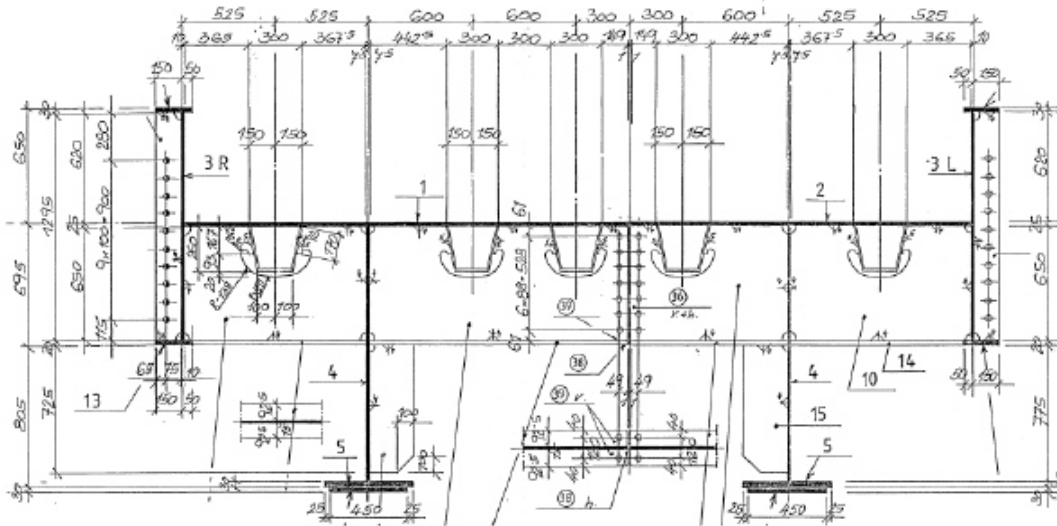


Abb. C.1: Querschnittsplan Farrenbachviadukt

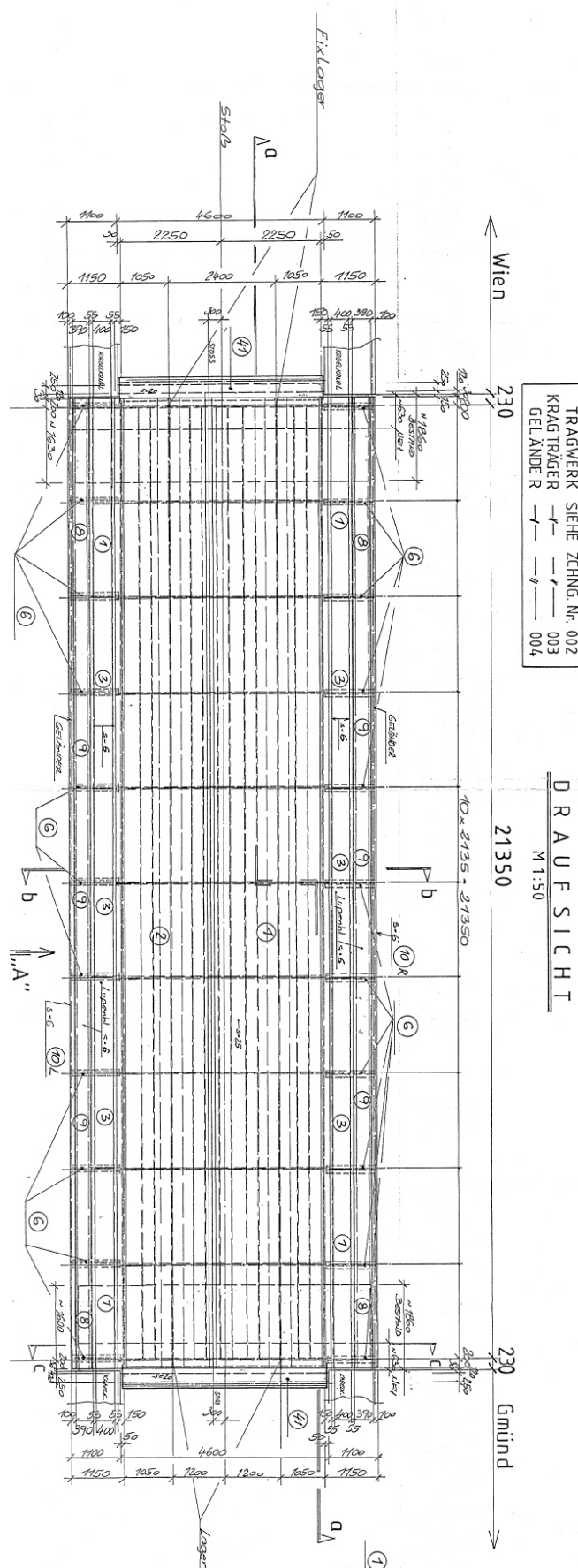


Abb. C.2: Grundriss Farrenbachviadukt



# Literaturverzeichnis

- [1] **Chopra, A. K.:** *Dynamics of Structures*. Prentice-Hall, 2001.
- [2] **Clough, R. W. und Penzien, J.:** *Dynamics of Structures*. Computers and Structures, Inc., 2. Auflage, 2003.
- [3] **Fink, J. und Mähr, T.:** *Simplified method to calculate the dynamic response of railway-bridges on the basis of response spectra*. In: *Ivany, M. und Bancila, R.* (Herausgeber): *Bridges in Danube Basin*, Seiten 245-256, Budapest, Ungarn. 12.-14. September 2007. International Association for Bridges on the Danube.
- [4] **Gorbatjuk, D.:** *Schwingungsverhalten von einfeldrigen Eisenbahnbrücken: Fallstudie mittels dem Programm DYNAZUG*. Interdisziplinäre Seminararbeit, Technische Universität Wien.
- [5] **Hagedorn, P.:** *Technische Schwingungslehre, Band 2: Lineare Schwingungen kontinuierlicher mechanischer Systeme*. Springer-Verlag, 1989.
- [6] **Heuer, R. und Bucher, C.:** *Baudynamik*. Skriptum zur Vorlesung, Sommersemester 2013. Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen, Technische Universität Wien.
- [7] **Mähr, T. C.:** *Theoretische und experimentelle Untersuchungen zum dynamischen Verhalten von Eisenbahnbrücken mit Schotteroberbau unter Verkehrslast*. Dissertation, Technische Universität Wien.
- [8] **Markert, R.:** *Strukturdynamik*. Shaker Verlag, 2013.
- [9] **ÖBB Infrastruktur:** *Richtlinie für die dynamische Berechnung von Eisenbahnbrücken*. Ausgabe: 2011-02-01.
- [10] **ÖNORM B 1991-2: 2011 04 15:** *Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke – Teil 2: Verkehrslasten auf Brücken – Nationale Festlegungen zu ÖNORM EN 1991-2 und nationale Ergänzungen*.

- [11] **ÖNORM B 4003: 1994 04 01:** *Eisenbahn- und Straßenbahnbrücken – Allgemeine Grundlagen für die Berechnung und Ausführung.*
- [12] **ÖNORM EN 1991-2:2012 03 01:** *Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke – Teil 2: Verkehrslasten auf Brücken.*
- [13] **Papula, L.:** *Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler.* Vieweg-Verlag, 9. Auflage, 2006.
- [14] **Pichler, B. und Eberhardsteiner, J.:** *Baustatik.* Skriptum zur Vorlesung, Sommersemester 2010. Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen, Technische Universität Wien.
- [15] **Ziegler, F.:** *Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper.* Springer Verlag Wien New York. 3. Auflage, 1998.
- [16] <http://de.mathworks.com/products/simulink/>