DIPLOMARBEIT

Variable Annuities: Bewertungsansatz mittels Monte Carlo Simulation

ausgeführt am Institut für
Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von

Dr. Stefan Gerhold

durch

Florian Steiner
Wachaustraße 46
3133 Traismauer

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Wien, im April 2015

Danksagung

Diese Seite möchte ich all jenen Personen widmen, die mich während der Zeit meines Studiums begleitet und unterstützt haben.

Ein besonderer Dank gilt dabei meiner Familie Andrea, Anton und Daniel, welche mich immer unterstützt haben, beziehungsweise mir das Studium überhaupt erst ermöglichten. Meiner Freundin Katrin danke ich dafür, dass sie mich mit Engelsgeduld immer wieder dazu angetrieben hat mein Studium abzuschließen.

Ich möchte mich auch bei meinen Freunden bedanken, die mein Studium zu einem unvergesslichen Abschnitt meines Lebens werden ließen.

Zuletzt möchte ich meinen Dank noch an Herrn Dr. Stefan Gerhold richten, welcher mir als Betreuer der Diplomarbeit stets in sehr angenehmer Atmosphäre mit seinen Anregungen und seinem Rat zur Verfügung stand.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Hinter dem Begriff der Variable Annuities (Variablen Annuitäten) verbirgt sich eine Art der fondsgebundenen Rentenversicherung. Diese Versicherungen zeichnet aus, dass die verschiedensten zu versichernden Risiken, wie beispielsweise das Ablebensrisiko oder auch das Veranlagungsrisiko, durch flexibel wählbare Zusammenstellungen von Garantien abgedeckt werden können. Die einzelnen Garantiezusagen werden dabei je nach Wunsch des Versicherungsnehmers aus einem „Katalog“ mit einer großen Anzahl an Möglichkeiten gewählt und für eine bestimmte Zeit im Versicherungsvertrag eingeschlossen. Für diesen Zeitraum werden in der Folge auch die entsprechenden Gebühren für diese Garantien entnommen. Die garantierten Zusagen werden somit, anders als bei konventionellen Versicherungsprodukten, losgelöst von der Kapitalanlage betrachtet und bieten dem Versicherungsnehmer damit höhere Ertragschancen.

Diese Art der Versicherung ist im englischsprachigen Raum und in Japan bereits etabliert und hält auch immer weiter Einzug in den europäischen Raum. Speziell in einer Phase von niedrigen Zinsen wird das Verlangen nach Alternativen zu den traditionellen Lebensversicherungsprodukten des europäischen Raums immer größer, womit mehr und mehr Versicherungsunternehmen auch auf die Variable Annuities aufmerksam werden.

Die Schwierigkeit dieser Produkte liegt allerdings darin, dass die eingeschlossenen Garantien durch einen speziellen Hedgingprozess abgedeckt werden und sich somit die Preisgestaltung für die zu entnehmenden Garantiegebühren schwieriger gestaltet.
In dieser Arbeit werden, aufbauend auf den Artikel von Bacinello et. al[1], Bewertungsmethoden für Variable Annuitäten mittels Monte Carlo Methode und Least Squares Monte Carlo Methode vorgestellt und Ergebnisse bei Berechnung mit einer österreichischen Sterbetafel betrachtet.

Dazu wird in Kapitel 2 zuerst ein genereller Überblick über Variable Annuitäten und verschiedenste Arten an möglichen Garantien gegeben. In Kapitel 3 werden in der Folge die zugrundeliegenden Berechnungsmodelle konstruiert und Kapitel 4 stellt die zugrundeliegenden stochastischen Prozesse und den verwendeten Monte Carlo beziehungsweise Least Monte Carlo Algorithmus vor. Abschließend werden in Kapitel 5 die erarbeiteten Ergebnisse vorgestellt.

[1] siehe [BMOP]

2 Variable Annuities - Variable Annuitäten

Dieses Kapitel soll einen Überblick über die zahlreichen Gestaltungsmöglichkeiten von Variablen Annuitäten bieten. Es wird dargestellt welche Garantien in derartigen Versicherungsverträgen enthalten sein können und es wird eine grundlegende Notation eingeführt. Um diese zu vereinfachen, wird die Annahme getroffen, dass keine partiellen Rückkäufe existieren.

2.1 Allgemeine Definitionen

Hinter dem Begriff der Variablen Annuitäten steht eine Art der fondsgebundenen Rentenversicherung gegen Einmalzahlung oder laufende Prämie, deren Leistungen gegen Investment- und Sterblichkeitsrisiken durch Wahl von zahlreichen Garantien geschützt werden können. Somit verbinden Variable Annuitäten die Eigenschaften von fondsgebunden Lebensversicherungen (Veranlagung) mit jenen von gewinnbeteiligten Lebensversicherungen (Garantien).

2.1.1 Garantien und Leistungen

Während es sich bei Variablen Annuitäten um ein langfristig orientiertes, steuerverzögerndes Investment zum Erhalt einer Pensionszusage handelt, wirkt der Großteil der Garantien bereits vor dem Ruhestand auf diverse Todesleistungen oder Mindestverzinsungen.

Definition 2.1.1 (Arten von Garantieleistungen)**.** *Eine bei Variable Annuities verfügbare Garantieleistung sei bezeichnet mit $GMxB$ (Guaranteed Minimum Benefit). Die Variable x unterscheidet die unterschiedlichen Ausprägungen:*

- *$GMDB$: Garantieleistungen im Ablebensfall (Death Benefits)*
- *$GMLB$: Garantieleistungen im Erlebensfall (Living Benefits)*

Die ausprägung der Garantien im Erlebensfall $GMLB$ lässt sich noch weiter unterteilen:

- *$GMAB$: Garantieleistungen in der Anreicherungsphase (Accumulation Benefits)*
- *$GMIB$: Garantieleistungen in der Leistungsphase (Income Benefits)*

- *GMWB: Garantieleistungen im Falle eines Rückkaufs (Withdrawal Benefits)*

Da die Garantien eigenständig betrachtet werden, sind sie außerdem mit einer hohen Variabilität versehen, was einen entscheidenden Unterschied zu klassischen Lebensversicherungsverträgen darstellt. So ist beispielsweise bei manchen Garantien möglich, diese bei bereits laufenden Vertrag nach Ermessen des Versicherungsnehmers ein- oder auszuschließen. Variable Annuitäten vereinen somit die Möglichkeit eines freien, dynamischen Investments mit den Vorteilen einer Absicherung der zahlreichen möglichen Leistungen durch Garantien.

2.1.2 Prämien und Gebühren

Generell werden Variable Annuitäten gegen eine Einmalprämie oder periodisch wiederkehrende Prämien abgeschlossen. Die Summe dieser Prämien wird Vertragssumme oder Prämiensumme genannt. Im Folgenden wird das Hauptaugenmerk in dieser Arbeit hauptsächlich auf Variable Annuitäten gegen Einmalprämien gelegt, da die Kalkulation dieser den Grundstein für periodisch wiederkehrende Prämien bildet.

Definition 2.1.2 (Einmalprämie und Ansparphase)**.** *Die investierte Einmalprämie zum Zeitpunkt $t = 0$ sei mit P bezeichnet. Diese wird über eine Anspardauer $T \geq 0$ veranlagt. Somit entspricht ein Vertrag mit $T = 0$ einer sofortbeginnenden Rentenversicherung.*

Diese Prämien werden abzüglich allfälliger Abschlusskosten zur Gänze in einen Referenzfonds investiert, welcher flexibel durch den Versicherungsnehmer gestalten werden können. Dem Kunden stehen somit sämtliche Möglichkeiten im Investment zur Verfügung, um die mögliche Rendite und die damit verbundenen Risiken zu steuern. Damit ist es dem Versicherungsnehmer möglich, sich sowohl für eher konservativere als auch für dynamischere, risikoreichere Anlageformen zu entscheiden. Generell ist es dem Versicherungsnehmer auch möglich unter bestimmten Umständen - zum Beispiel jährlich zur Hauptfälligkeit - kostenlos die Veranlagungsstrategie zu ändern. Im Gegensatz zum Gewinnbeteiligungs- oder Pro-Rata-Geschäft muss bei Variablen Annuitäten der zugrunde liegende Referenz-Fonds nicht die vom Versicherungsnehmer ausgewählten Garantien replizieren, da diese durch spezielle Kapitalen abgesichert werden. Somit bietet sich dem Management des Referenz-Fonds eine höhere Flexibilität um sämtliche Möglichkeiten in der Veranlagung auszunützen.
Die Gebühren für diverse Garantien, die Abschlusskosten, die Verwaltungskosten und sämtliche anderen allfälligen Gebühren werden laufend durch eine Reduktion des aktuellen Zeitwerts der Versicherung verrechnet. Dies erhöht die Transparenz des Vertrags, da jeder Abschlag auf den Zeitwert des Vertrags dem Versicherungsnehmer gegenüber dokumentiert werden muss.

Definition 2.1.3 (Zeitwert von Variable Annuities)**.** *Sei $t \geq 0$ die abgelaufene Zeit seit dem Versicherungsbeginn. Dann bezeichnet A_t den aktuellen Zeitwert der Variablen Annuität zum Zeitpunkt t. Dieser ist abhängig vom zugrunde liegenden Referenzfonds in welchem die Einmalprämie P investiert wird.*

Die Gebühren der Variablen Annuitäten werden nur für die Laufzeit einer Garantie - speziell bei Ein- oder Ausschluss einer Garantie während der Laufzeit - verrechnet. Für gewöhnlich werden diese Gebühren und diverse Kosten durch einen Prozentsatz der dem Zeitwert der Versicherung entnommen wird, dargestellt.

Definition 2.1.4 (Kostensatz von Variable Annuities). *Sei φ ein Prozentsatz, der dem Zeitwert A_t laufend entnommen wird. Dieser repräsentiert sämtliche Kosten und Gebühren, welche dem Versicherungsnehmer verrechnet werden.*

Da bei den in dieser Arbeit getätigten Berechnungen keinerlei Verwaltungskosten oder Gebühren für die Anlagenverwaltung verrechnet werden, entspricht der Wert φ stets jenen Kosten, welche für die Abdeckung der gewählten Garantien entnommen werden.

2.2 Garantierte Leistungen im Ablebensfall - GMDB

Garantierte minimale Ablebensleistungen werden üblicherweise während der Ansparphase angeboten und entfalten ihre Wirkung zum Todeszeitpunkt der versicherten Person. Es gibt allerdings auch Versicherungsunternehmen, welche eine GMDB auch während der Leistungsphase dieser speziellen fondsgebundenen Rentenversicherung gewähren. In diesen Fällen wird die Leistungserbringung aber überlicherweise nur bis zu einem maximalen Alter gewährt.

Definition 2.2.1 (Leistung von GMDBs). *Sei $0 < t \leq T$ (bzw. $0 < t \leq x$ wobei x das Maximalalter bezeichnet, bis zu welchem die Garantie wirkt) der Todeszeitpunkt einer versicherten Person und sei G_t^D der garantierte Wert im Ablebensfall. Die Leistung b_t^D der GMDBs im Ablebensfall entspricht dann dem Maximum aus dem Zeitwert und dem garantierten Wert:*

$$b_t^D = max\{A_t, G_t^D\}.$$

Der garantierte Wert im Ablebensfall G_t^D kann hierbei entweder eine fixierte Summe oder auch abhängig vom Zeitwert A_t der Variablen Annuität sein.

Falls keine GMDB eingeschlossen ist, kann die Ablebensleistung durch

$$G_t^D = 0$$

beschrieben werden.

2.2.1 Beispiele für Garantien mit fixierter Summe

Die Garantie bei GMDBs ist beliebig wählbar. Die gebräuchlichsten fixierten Summen sollen in der Folge dargestellt werden.

Beispiel 2.2.2 (Rückführung der Prämien). Bei der sogenannten Rückführung der Prämien wird die Garantiesumme mit der Prämiensumme abzüglich sämtlicher getätigter Rückkäufe belegt. Dies bedeutet für den in dieser Arbeit betrachteten Fall:

$$G_t^D = P.$$

Beispiel 2.2.3 (Garantieverzinsung der Prämien). Bei der sogenannten Garantieverzinsung der Prämien entspricht die Garantiesumme den mit einer garantierten kontinuierlichen Zinsrate $\delta > 0$ verzinsten Prämien:

$$G_t^D = P * e^{\delta t}.$$

Es ist auch möglich die garantierte Verzinsung mit einer zeitabhängigen deterministischen Zinsrate zu modifizieren. Dies würde die Modellierung einer Garantie mit Verzinsung bis zu einem bestimmten gegebenen Alter der versicherten Person ermöglichen. Ebenfalls wäre es damit möglich den Zinssatz in regelmäßigen Intervallen anzupassen. Im Falle eines Rückkaufs müsste hier natürlich die Garantiesumme dementsprechend reduziert werden.

2.2.2 Beispiele für Garantien abhängig vom Zeitwert

Beispiel 2.2.4 („einrastende“ Garantie - ratchet guarantee). Bei einer „einrastenden“ Garantie wird der höchste Wert des Zeitwerts zu bestimmten definierten Zeitpunkten $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < T$ vor dem Todeszeitpunkt des Versicherten garantiert:

$$G_t^D = \max_{t_i < t} A_{t_i}.$$

Das heißt die Garantiewerte werden zu den zu Versicherungsbeginn definierten Zeitpunkten $t_i,\ i \in \mathbb{N}$ erhöht, falls der Zeitwert über der bisherigen Garantie liegt. Somit gehen an diesen Zeitpunkten die eventuellen Gewinne des Referenzfonds in die Garantie über. Die Garantie wächst daher bei positiven Verlauf des Referenzfonds über die gesamte Laufzeit an.

Beispiel 2.2.5 („abgleichende“ Garantie - reset guarantee). Bei der „abgleichenden“ Garantie wird der zuletzt erreichte Wert des Zeitwerts zu bestimmten definierten Zeitpunkten $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < T$ vor dem Todeszeitpunkt des Versicherten garantiert:

$$G_t^D = A_{\max_{t_i < t} t_i}.$$

Die Tatsache, dass bei dieser Garantie der garantierte Wert während der Laufzeit auch wieder sinken kann, stellt den wesentlichsten Unterschied zu der zuvor in Beispiel 2.2.4 behandelten Garantie dar.

Beispiel 2.2.4 und Beispiel 2.2.5 sind hier sehr vereinfacht gehalten. Es bedarf keines großen Aufwands die in den Beispielen enthaltenen Garantien so anzupassen, dass auch eventuelle Prämieneingänge oder Teilrückkäufe nach den Zeitpunkten der Garantieanpassung berücksichtigt werden.
Weiters ist es auch möglich noch weitere komplexere Anforderungen, wie zum Beispiel

bei Cliquet Garantien, an den garantierten Wert zu stellen oder zweierlei Garantien zu kombinieren. Das folgende Beispiel soll noch eine der vielen Möglichkeiten für eine Kombination darstellen.

Beispiel 2.2.6 (Kombination von Garantien). Sei die minimale garantierte Ablebensleistung definiert durch:

$$G_t^D = \max\left\{ P * e^{\delta t} \ , \ \max_{t_i < t} A_{t_i} \right\}.$$

Offensichtlich ist dies eine Kombination der Garantien aus Beispiel 2.2.3 und Beispiel 2.2.4.

2.3 Garantierte Leistungen in der Anreicherungsphase - GMAB

Garantierte minimale Leistungen in der Anreicherungsphase werden, wie der Name bereits erkennen lässt, ähnlich den garantierten Leistungen im Ablebensfall zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Ansparphase angeboten. Üblicherweise entspricht dieser Zeitpunkt dem Ende der Ansparphase. Somit weisen solche Garantien Ähnlichkeiten zu den Erlebensleistungen in klassischen Lebensversicherungsverträgen auf.

Definition 2.3.1 (Leistung von GMABs)**.** *Sei $0 < t \leq T$ ein zu Versicherungsbeginn definierter Zeitpunkt und sei G_t^A der garantierte Wert, falls die versicherte Person zum Zeitpunkt t noch am Leben ist. Die Leistung b_t^A der GMABs im Erlebensfall entspricht dann dem Maximum aus dem Zeitwert und dem garantierten Wert:*

$$b_t^A = max\{A_t, G_t^A\}.$$

Falls keine GMAB eingeschlossen ist, kann die Erlebensleistung durch

$$G_t^A = 0$$

beschrieben werden.

2.3.1 Beispiele für Garantien von GMABs

Beispiele für den garantierten Wert im Erlebensfall G_t^A können grundsätzlich wie im Ablebensfall gewählt werden:

- Rückführung der Prämien (siehe Beispiel 2.2.2)
- Garantieverzinsung der Prämien (siehe Beispiel 2.2.3)
- „einrastende“ Garantie (siehe Beispiel 2.2.4).

Wie bei den GMDBs ist es natürlich auch hier möglich noch weitere Anforderungen an den garantierten Wert zu stellen, beziehungsweise zweierlei Garantien zu kombinieren. Das folgende Beispiel soll eine weitere Garantiemöglichkeit darstellen welche es bei den GMDBs nicht gibt.

Beispiel 2.3.2 (Verlängerung einer Garantieleistung - reset). Ist die Garantie einer Verlängerung eingeschlossen, so kann eine zweite gewählte GMAB zum Wirksamkeitsdatum verlängert werden. Das heißt, dass das Wirksamkeitsdatum der zweiten Garantie neu gesetzt und somit diese Garantie wieder aktiv wird.

Hier sei noch erwähnt, dass in der englischsprachlichen Literatur Vorsicht geboten ist, da der Begriff *reset* bei GMDBs (Beispiel 2.2.5) und GMABs (Beispiel 2.3.2) in unterschiedlicher Weise gebraucht wird.

2.4 Garantierte Leistungen in der Leistungsphase - GMIB

Unter garantierten minimalen Leistungen in der Leistungsphase versteht man garantierte periodische Rentenleistungen ab einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt. Bevor weiter auf die garantierten Werte eingegangen wird, soll noch die Terminologie des *Verrentungsfaktors* definiert werden.

Definition 2.4.1 (Verrentungsfaktor)**.** *Unter einem Verrentungsfaktor versteht man jenen Wert η, mit welchem das zu verrentende Kapital multipliziert wird um die zukünftige auszuzahlende Rente zu erhalten. Dieser wird zum Leistungsbeginn der Rente unter Berücksichtigung der vorherrschenden Marktkonditionen festgelegt.*

Es kann hier zwischen zwei Arten von Garantien unterschieden werden, welche am gebräuchlichsten bei GMIBs sind.

Definition 2.4.2 (Leistung von GMIBs - Garantie auf zu verrentendes Kapital)**.** *Sei T der zu Versicherungsbeginn definierte Leistungsbeginn der Rente und sei G_T^I der garantierte Wert des zu verrentenden Kapitals zum Zeitpunkt T. Weiters entspreche η dem Verrentungsfaktor. Die feste, periodische (zum Beispiel monatlich, jährlich,...) Rentenzahlung b^I der GMIBs entspricht dann dem verrenteden Maximum aus dem Zeitwert und dem garantierten Wert:*

$$b^I = \eta * max\{A_T, G_T^I\}.$$

Der garantierte Wert G_T^I kann hier ähnlich jenen der GMABs (siehe Abschnit 2.3.1 bestimmt werden. Die Garantie auf das zu verrentende Kapital ist somit ähnlich einer klassischen aufgeschobenen Rentenversicherung.

Definition 2.4.3 (Leistung von GMIBs - Garantie auf den Verrentungsfaktor (Guaranteed Annuity Option - GAO))**.** *Sei T der zu Versicherungsbeginn definierte Leistungsbeginn der Rente und η der Verrentungsfaktor zum Zeitpunkt T. Weiters sei g der garantierte Wert des Verrentungsfaktors. Die feste, periodische Rentenzahlung b^I der GMIBs* *entspricht dann dem Maximum aus dem verrenteden Zeitwert mit dem Verrentungsfaktor η und dem garantierten Verrentungsfaktor g:*

$$b_t^A = max\{\eta, g\} * A_t.$$

Falls keine GMIB eingeschlossen ist, so kann auch hier wiederum die Rentenleistung durch

$$G_T^I = 0$$

beziehungsweise durch

$$g = 0$$

beschrieben werden.

Wie man in der Definition sehen kann, wird die GAO Garantie nur ausgeübt falls sie im Geld (*in the money*) ist. Das heißt die Rente unter dem garantierten Verrentungsfaktor muss höher als die zum aktuellen Zeitpunkt bestimmte Rente sein. Es werden somit bei dieser Garantie keinerlei persönliche Präferenzen berrücksichtigt. Solche Präferenzen können beispielsweise durch gewünschte Kapitalabfindungen oder asymmetrischen Informationen entstehen.

Nach dem Zeitpunkt der Verrentung verliert der Versicherungsnehmer den Zugriff auf den Zeitwert der Variablen Annuität, während sich Variable Annuitäten mit GMIBs vor der Verrentung wie ein Investmentprodukt mit beinhalteden Garantien verhalten.
Die Garantien der GMIBs müssen stets vor der Verrentung des Kapitals vom Versicherungsnehmer eingeschlossen werden. Üblicherweise werden hier in den Verträgen der Variablen Annuitäten Wartefristen von fünf bis zehn Jahren gesetzt, sodass eine eingeschlossene Garantie erst nach dieser Frist zu wirken beginnt.
In den Versicherungsverträgen der Variablen Annuitäten ist für GMIBs üblicherweise die volle Verrentung des Kapitals vorgesehen. Es gibt allerdings einige Vereinbarungen in welchen eine Teilentnahme aus dem Zeitwert zum Verrentungszeitpunkt gewährt wird.

Da die Kosten für GMIBs bereits in der Anreicherungsphase dem Zeitwert der Variablen Annuität entnommen werden, können üblicherweise zu jedem Zeitpunkt in der Ansparphase die GMIBs vom Versicherungsnehmer wieder ausgeschlossen werden, wodurch das Versicherungsunternehmen die Entnahme der Kosten aus dem Zeitwert stoppt.

Die beiden Leistungsvarianten (Definition 2.4.2 und 2.4.3) veranschaulichen schön, wie unterschiedlich die Risiken bei Eintritt in den Ruhestand des Versicherungsnehmers zwischen Versicherungsunternehmen und Versicherungsnehmer aufgeteilt sein können. Im Speziellen handelt es sich um das Risiko der Langlebigkeit, welches im ersten Fall weniger beim Versicherungsunternehmen liegt als im zweiten Fall, da hier die Garantie nur auf das Kapital gegeben wird und der Verrentungsfaktor zum Zeitpunkt des Rentenbeginns bestimmt wird. Im anderen Fall ist jedoch von Beginn der Variablen Annuität ein Verrentungsfaktor garantiert, wodurch sich eine Änderung in der Langlebigkeit eventuell bei der Berechnung der Rente nicht mehr auswirkt.

2.4.1 Arten der Rentenzahlungen

In Verträgen von Variablen Annuitäten können verschiedenste Arten von Renten angeboten werden. Die Varianten der Renten sind hier sehr vielfältig:

- traditionelle Renten auf das Leben der Versicherten Person: Auszahlung einer Rente solange die versicherte Person am Leben ist;
- Renten auf das Leben mehrerer versicherter Personen: Auszahlung einer Rente solange eine gewisse Anzahl an Personen aus einer Gemeinschaft von mehreren versicherten Personen am Leben ist;
- Renten mit Garantiedauern: garantierte Auszahlung der Rente über einen gewissen Zeitraum (z.B.: 5 oder 10 Jahre) unabhängig von der Lebensdauer der versicherten Person;
- Renten mit Kapitalrückgewähr: Auszahlung einer Leistung im Todesfall der versicherten Person, welche aus dem verbleibenden Kapitalbetrag besteht (zum Beispiel: das verrentete Kapital abzüglich der bereits ausgezahlten Rentenzahlungen).

Auch die periodischen Rentenzahlungen können variieren. So kann sich einerseits die Frequenz der Rentenzahlungen (z.B.: jährlich, monatlich,...) unterscheiden, andererseits kann auch unterschieden werden zwischen:

- fixen Rentenzahlungen
- gewinnbeteiligte Renten
- Renten mit einer Indexierung abhängig von der Inflation
- Renten mit einer Indexierung abhängig von gewissen Aktienpreisen.

Besonders der letzte Fall birgt ein gewisses finanzielles Risiko, da hier die Rentenzahlungen über die Laufzeit hinweg schwanken können, während beispielsweise gewinnbeteiligte Rentenzahlungen niemals fallen.
In der Folge werden nun noch die gebräuchlichsten Rentenarten angeführt.

Beispiel 2.4.4 (gebräuchlichsten Rentenarten). Drei der gebräuchlichsten Rentenarten sind:

- lebenslängliche Renten,
- temporäre Renten mit einem Zahlungsende $T' > T$, wobei die Zahlungen unabhängig von der Lebensdauer der versicherten Person bis zum Zahlungsende getätigt werden,
- lebenslängliche Renten mit bis zu einem Zeitpunkt $T' > T$ vom der Leben der versicherten Person unabhängigen Zahlungen.

Zum Schluss sollte noch erwähnt werden, dass sich aufgrund der hier vorgestellten Vielfalt der Rentenarten eine Vielzahl von Möglichleiten von GMIBs ergibt. So kann dem Versicherungsnehmer beispielsweise auch die Wahl des Verrentungszeitpunkts gewährt werden oder es wird eine bestimmte Rentenhöhe garantiert (selbst falls der Zeitwert der Variablen Annuität zum Verrentungszeitpunkt bereits Null ist).

2.5 Garantierte Leistungen im Falle eines Rückkaufs - GMWB

Garantierte minimale Leistungen im Falle eines Rückkaufs erlauben es dem Versicherungsnehmer in periodischen Intervallen Rückkäufe zu einem bestimmten Wert zu tätigen. Diese Rückkäufe können, selbst wenn sich dadurch der Zeitwert der Variablen Annuität auf Null reduziert, sei es durch eine schlechte Performance des Referenzfonds oder durch die lange Lebensdauer der versicherten Person, vollzogen werden. Die Garantie wird hierbei auf die Höhe der Rückkäufe gegeben und sie regelt die Laufzeit dieser periodischen Zahlungen.

Definition 2.5.1 (Leistung von GMWBs)**.** *Sei $0 \leq t \in \mathcal{W}$ ein Zeitpunkt aus einer Menge $\mathcal{W}$ von zu Beginn der Variablen Annuität definierten Rückkaufszeitpunkten. Sei $\beta_t \geq 0$ ein gegebener Prozentsatz und bezeichne $W_t \geq 0$ den Verlauf einer zu Beginn der Variablen Annuität definierten Basissumme. Dann sind die vertraglich definierten periodischen Rückkaufszahlungen b_t^W gegeben als Prozentsatz β_t der Basissumme W_t:*

$$b_t^W = \beta_t * W_t.$$

Falls keine GMWB eingeschlossen ist, können die Leistungen durch

$$W_t = 0$$

oder durch

$$\beta_t = 0$$

beschrieben werden.

Die Kosten für die GMWBs werden dem Zeitwert der Variablen Annuität laufend entnommen. Sollte die Option vom Versicherungsnehmer während der Laufzeit des Versicherungsvertrags ausgeschlossen werden, so werden in der Folge vom Versicherungsunternehmen keine weiteren Kosten für die Garantie dem Zeitwert entnommen. Der Versicherungsnehmer verliert allerdings nicht den Anspruch auf den Referenzfonds und der verbliebene Zeitwert wird zum Versicherungsende der Variablen Annuität, beziehungsweise im Todesfall der versicherten Person, an den Versicherungsnehmer ausgezahlt.

2.5.1 Arten von Rückkaufsoptionen

GMWBs weisen eine sehr hohe Variabilität auf, womit sich zahlreiche verschiedene Formen finden lassen. In diesem Abschnitt soll ein kleiner Überblick über diese Flexibilität gegeben werden.

Eine einfache Möglichkeit bildet die Belegung der Basissumme W_t mit dem Zeitwert der Variablen Annuität zum Zeitpunkt des Einschlusses der GMWB. Das folgende Beispiel illustriert dies anhand einer Variablen Annuität gegen Zahlung einer Einmalprämie.

Beispiel 2.5.2 (Belegung der Basissumme - Variable Annuität gegen Einmalprämie). Wird eine Variable Annuität mit einer GMWB zum Versicherungsbeginn $t = 0$ gegen Zahlung einer Einmalprämie P abgeschlossen, so kann die Basissumme für die Rückkaufsgarantie belegt werden mit dem Zeitwert A_t zum Zeitpunkt $t = 0$. Dies bedeutet:

$$W_t = A_0 = P.$$

Es gibt aber auch Verträgen, in welchen die Basissumme zu bestimmten Zeitpunkten (zum Beispiel: die Hauptfälligkeit der Variablen Annuität) an den Zeitwert der Variablen Annuität angepasst wird, falls dieser höher ist. Dieses „Einrasten“ (vgl. Beispiel 2.2.4) kann über die gesamte Versicherungsdauer oder auch auch nur über einen gewissen Zeitraum gewährt werden. Die Anpassung der Rückkaufsgarantie bedeutet aber, dass die Höhe der Zahlungen über die Zeit hinweg steigen kann. Dies wird in manchen Versicherungsverträgen durch eine maximale jährliche Steigerung in den Bedingungen abgefedert.

Die Höhe der Rückkaufsgarantien kann auch als Beschränkung der Rückkaufsmöglichkeiten verwendet werden. So können Versicherungsverträge beispielsweise enthalten, dass getätigte Rückkäufe

- exakt den garantierten Rückkaufszahlungen b_t^W,
- maximal den garantierten Rückkaufszahlungen b_t^W oder
- minimal den garantierten Rückkaufszahlungen b_t^W

entsprechen müssen. Im letzteren Fall wird die Basissumme bei jedem Rückkauf über der garantierten Rückkaufszahlung reduziert.

Auch die Laufzeit kann bei GMWBs variieren. Generell wird hierbei zwischen

- fixer Laufzeit T' (z.B.: 20 Jahre) und
- lebenslänglicher Laufzeit

unterschieden, wobei es im ersteren Fall zwei Möglichkeiten gibt. Ist am Ende der Laufzeit der Zeitwert noch größer 0, so kann

- der Zeitwert an den Versicherungsnehmer ausgezahlt werden oder
- der Vertrag bestehen bleiben bis der Zeitwert aufgebraucht ist.

All diese Möglichkeiten der Rückkaufsgarantien basieren allerdings auf folgenden drei Leistungsarten:

- Leistung von periodischen Rückkäufen bis zum Laufzeitende $T' > T$, unabhängig vom Überleben der versicherten Person

- Leistung von periodischen Rückkäufen bis zum Laufzeitende $T' > T$, falls die versicherte Person am Leben ist

- Leistung von periodischen Rückkäufen bis zum Todeszeitpunkt der Versicherten Person.

2.6 Abschließender Überblick

Zusammenfassend kann man festhalten, dass GMDBs und GMABs den klassischen Lebensversicherungsprodukten sehr ähnlich sind. Sie weisen allerdings eine höhere Bandbreite an Gestaltungsmöglichkeiten auf.

Die GMIBs können mit klassischen gewinnbeteiligten Rentenversicherungen verglichen werden, wobei auch hier die Gestaltungsmöglichkeiten weit vielfältiger sind.

Den größten Unterschied im Vergleich zu den klassischen Lebensversicherungsprodukten findet man in den GMWBs. Die Leistungen sind hier mit Teilrückkäufen vergleichbar, wobei diese bei Variablen Annuitäten mit Garantien versehen werden können.
Beim Vergleich der GMWBs mit den GMIBs fallen hingegen folgende wesentliche Unterschiede auf:

- das Laufzeitende T': dieses ist bei GMWBs konkret gesetzt während hingegen GMIBs meist eine lebenslängliche Laufzeit besitzen

- die Zugriffsmöglichkeit auf den Zeitwert: GMWBs erlauben es, dass während der Zahlungsphase noch auf den Zeitwert zugegriffen werden kann; bei GMIBs hingegen verliert der Versicherungsnehmer mit der Verrentung den Zugriff auf das verrentete Vermögen

- der Referenzfonds: dieser ist bei GMIBs üblicherweise in einer gewinnbeteiligten Form zu finden, während die GMWBs fondsgebunden sind.

Diese Unterschiede können jedoch durch weitere Anforderungen, wie zum Beispiel eine lebenslängliche Laufzeit bei GMWBs oder Ablebensleistungen bei GMIBs, wieder reduziert werden.

3 Modellierung von Variable Annuities

In diesem Kapitel sollen Möglichkeiten definiert werden, welche es erlauben die Kosten von in Variablen Annuitäten enthaltenen Garantien zu bewerten. Hierzu wird eine Notation eingeführt, welche die in Kapitel 2 vorgestellten Merkmale von Variablen Annuitäten in eine allgemeinere Terminologie, wie von Bacinello et al.[1] vorgeschlagen, einfügt. Es werden drei verschiedene Annahmen an das Verhalten der Versicherungsnehmer getroffen, welche zu jeweils unterschiedlichen Modellbildungen führen:

- statischer Ansatz
- dynamischer Ansatz
- gemischter Ansatz

3.1 Allgemeine Annahmen

Der Preis der in Kapitel 2 vorgestellten Garantien kann unter der Voraussetzung von wirtschaftlich vernüftigen Annahmen über eine risikoneutrale Bewertung bestimmt werden. Diese benötigt die erwarteten diskontierten Zahlungsflüsse, wobei mit einer risikofreien Zinsrate diskontiert und der Erwartungswert unter einem risikoneutralem Wahrscheinlichkeitsmaß berechnet wird. Da jedoch der Versicherungsmarkt keinen vollständigen Markt darstellt, wird in weiterer Folge angenommen, dass das Versicherungsunternehmen ein bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß aus den unendlich viel existierenden für den Bewertungsvorgang wählt. In weiterer Folge werden sämtliche Zufallsvariablen und Prozesse unter diesem Wahrscheinlichkeitsmaß betrachtet werden.

In den folgenden Abschnitten sollen Möglichkeiten zur Beschreibung der Zahlungsflüsse von Variablen Annuitäten dargestellt werden. Hierfür werden noch einige allgemeinere Definitionen und Notationen eingeführt.

Definition 3.1.1 (Indikator eines Ereignisses E)**.** *In dieser Arbeit sei die Indikatorfunktion eines Erreignisses E definiert durch:*

$$\mathbb{1}_E(\omega) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } \omega \in E \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

[1] siehe [BMOP], [BBM]

Definition 3.1.2 (bedingter Erwartungswert). *Sei $\mathcal{F}_t$ eine σ-Algebra welche die Information zum Zeitpunkt t beschreibt. Der auf diese σ-Algebra bedingte Erwartungswert sei definiert durch*

$$\mathbb{E}_t[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_t].$$

Definition 3.1.3 (Wertprozess eines risikolosen Assets - „Bankkonto“). *Sei r_t die Verzinsung zum Zeitpunkt t eines risikolosen kontinuierlichen Zinses r. Der Wertprozess des risikolosen Assets M_t sei gegeben durch*

$$M_t = e^{\int_0^t r_u \mathrm{d}u}.$$

Definition 3.1.4 (Wertprozess eines risikobehafteten Assets - „Aktie“). *Der Wertprozess eines risikobehafteten Assets sei gegeben durch S_t. Dieses risikobehaftete Asset beschreibt in weiterer Folge den zugrunde liegenden Referenzfonds der Variablen Annuität.*

Definition 3.1.5 (kumulierte Erlebensleistungen). *Die kumulierte Erlebensleistungen bis zu einem Zeitpunkt t seien gegeben durch B_t^L. Diese beinhalten sämtliche Leistungen, welche bis zu einem Zeitpunkt t an den Versicherungsnehmer gezahlt werden, unter der Voraussetzung, dass dieser am Leben ist.*

3.2 Statischer Ansatz zur Kostenbewertung der Garantien in Variable Annuities

In diesem Kapitel soll ein statischer Ansatz zur Kostenbewertung vorgestellt werden. Dieser geht von einem eher passiven Verhalten der Versicherungsnehmer aus. Im Konkreten wird der Ansatz durch folgende Annahmen gekennzeichnet:

- der Versicherungsnehmer tätigt während der Anreicherungsphase oder während der Leistungsphase der Rente keinerlei Rückkäufe oder Teilrückkäufe aus dem Referenzfonds der Variablen Annuität;
- falls der Vertrag der Variablen Annuität eine GMWB Garantie beinhaltet, werden lediglich die vertraglich vereinbarten Summen zu den zuvor bestimmten Zeiten dem Referenzfonds entnommen;
- der Vertrag wird niemals storniert.

Bevor der Bewertungsansatz vorgestellt wird, sollen noch die Erlebens- und Ablebensleistungen in diesem Modell definiert werden.

3.2.1 Kumulierte Erlebensleistungen

Dieser Abschnitt soll eine Darstellung der kumulierten Erlebensleistungen im statischen Bewertungsansatz geben. Es wird die Annahme getroffen, dass jeweils nur eine der folgenden Erlebensleistungen zu Beginn der Variablen Annuität gewählt wird:

- Zahlung einer Leistung zum Zeitpunkt T (GMAB);
- aufgeschobene Rentenzahlungen ab einem Zeitpunkt T (GMIB);
- garantierte minimale Rückkaufszahlungen ab einem Zeitpunkt T (GMWB).

Im Folgenden werden diese drei Fälle einzeln behandelt.

Fall 1: GMAB

Definition 3.2.1 (kumulierte Erlebensleistung - GMAB)**.** *Sei b_t^A die Leistung einer GMAB und T das Wirksamkeitsdatum der Garantie. Dann ist die kumulierte Erlebensleistung B_t^L gegeben durch*

$$\begin{aligned} B_t^L &= \begin{cases} 0 & \text{falls } t < T \\ b_t^A & \text{falls } t \geq T \end{cases} \\ &= b_t^A * \mathbb{1}_{t \geq T}. \end{aligned}$$

Fall 2: GMIB

Bei GMIBs wirkt bei der Definition der kumulierten Erlebensleistung im Vergleich zu den GMABs noch die Laufzeit mit ein, womit sich Unterschiede für lebenslängliche und temporäre Rentenzahlungen ergeben.

Definition 3.2.2 (kumulierte Erlebensleistung - GMIB lebenslänglich)**.** *Sei b^I die Rentenleistung der GMIB und bezeichene $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Auszahlungszeitpunkten mit $T \leq T_1 < T_2 < \dots$, wobei T dem Rentenbeginn entspricht. Dann ist die kumulierte Erlebensleistung B_t^L gegeben durch*

$$B_t^L = b^I \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{t \geq T_i}.$$

Definition 3.2.3 (kumulierte Erlebensleistung - GMIB temporär)**.** *Sei b^I die Rentenleistung der GMIB und bezeichene $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Auszahlungszeitpunkten mit $T \leq T_1 < T_2 < \dots < T_m \leq T'$, wobei T den Beginn und T' das Laufzeitende der Rentenzahlungen darstellen. Dann ist die kumulierte Erlebensleistung B_t^L gegeben durch*

$$B_t^L = b^I \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{t \geq T_i}.$$

Sollten die Leistungen der GMIB zusätzlich eine Garantiedauer beinhalten so kann die kumulierte Erlebensleistung gleich wie in den Definitionen 3.2.2 oder 3.2.3 gegeben werden, da in diesem Fall eine entsprechende fiktive Ablebensleistung erzeugt wird. Diese wird zu einem späteren Zeitpunkt im Abschnitt 3.2.2 definiert.

Fall 3: GMWB

Wie bei den GMIBs unterscheidet man bei der Definition der kumulierten Erlebensleistung der GMWBs zwischen lebenslänglicher und temporärer Laufzeit.

Definition 3.2.4 (kumulierte Erlebensleistung - GMWB lebenslänglich). *Seien $(b^W_{T_i})_{i\in\mathbb{N}}$ die Rentenzahlungen der GMWB zu den Rückkaufszeitpunkten $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $T \le T_1 < T_2 < \dots$, wobei T dem Garantiebeginn entspricht. Dann ist die kumulierte Erlebensleistung B^L_t gegeben durch:*

$$B^L_t = \sum_{i=1}^{\infty} b^W_{T_i} * \mathbb{1}_{t\ge T_i}.$$

Definition 3.2.5 (kumulierte Erlebensleistung - GMWB temporär). *Seien $(b^W_{T_i})_{i\in\mathbb{N}}$ die Rentenzahlungen der GMWB mit Garantiebeginn T und Garantieende T'. Die Rückkaufszeitpunkte $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ entsprechen somit $T \le T_1 < T_2 < \cdots < T_m \le T'$. Dann ist die kumulierte Erlebensleistung B^L_t gegeben durch*

$$B^L_t = \sum_{i=1}^{m} b^W_{T_i} * \mathbb{1}_{t\ge T_i} + \max\{A_{T'}, 0\} * \mathbb{1}_{t\ge T'}.$$

Der Term $\max\{A_{T'}, 0\} * \mathbb{1}_{t\ge T'}$ in der Summation entspricht dem verbleibenden Zeitwert der Variablen Annuität zum Laufzeitende T'. Dieser wird unter der Annahme, dass eine Verlängerung der Rentenzahlungen bis zur Erschöpfung des Zeitwerts nicht möglich ist, zum Laufzeitende an den Versicherungsnehmer ausgezahlt, falls dieser noch am Leben ist.
Weiters können die temporären Zahlungen auch abhängig vom Überleben des Versicherungsnehmers sein. Diese Variante wird durch eine zusätzliche Garantie auf Ablebensleistung beschrieben und im folgenden Abschnitt 3.2.2 dargestellt.

3.2.2 Ablebensleistungen

Die Ablebensleistung b^D_t zu einem beliebigen Todeszeitpunkt $t \le T$ ist für gewöhnlich wie in Definition 2.2.1 gegeben.
Bei bestimmten GMIBs oder GMWBs werden zusätzlich noch weitere Ablebensleistungen definiert.
Ist bei GMIBs eine Garantiedauer eingeschlossen, so wird eine fiktive Ablebensleistung erzeugt, welche die noch ausstehenden zugesagten Zahlungen beinhaltet.

Definition 3.2.6 (Ablebensleistung bei GMIBs mit Garantiedauer). *Sei bI die Rentenleistung einer GMIB mit Garantiedauer T' und bezeichene $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Auszahlungszeitpunkten mit $T \le T_1 < T_2 < \cdots < T_m \le T'$. Dann ist die fiktive Ablebensleistung b^D_t zu einem beliebigen Todeszeitpunkt t gegeben durch*

$$b^D_t = b^I \sum_{i=\min\{n:\ t\le T_n\le T'\}}^{m} \mathbb{1}_{t\ge T_i}.$$

Bei GMWBs wird im Ablebensfall der verbleibende Zeitwert der Variablen Annuität ausgezahlt. Sollte jedoch die GMWB unabhängig vom Leben der versicherten Person abgeschlossen werden, so muss diese Auszahlung eventuell erhöht werden. Dabei fungiert der Restwert der GMWB als eine Garantie im Ablebensfall.

Definition 3.2.7 (Restwert einer vom Leben der versicherten Person unabhängigen GMWB)**.** *Seien* $(b^W_{T_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *die Rentenzahlungen einer unabhängig vom Leben der versicherten Person gegebenen GMWB zu den Rückkaufszeitpunkten* $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *mit* $T \leq T_1 < T_2 < \cdots < T_m \leq T'$*, wobei* T *und* T' *für den Garantiebeginn und das Garantieende stehen. Der Restwert* R_t *der noch ausstehenden Zahlungen zu einem beliebigen Todeszeitpunkt* t *sei definiert durch:*

$$R_t = \sum_{i=\min\{n:\ t\leq T_n\leq T'\}}^{m} b^W_{T_i} * \mathbb{1}_{t\geq T_i}.$$

Definition 3.2.8 (Ablebensleistung bei GMWBs)**.** *Sei* A_t *der Zeitwert der Variablen Annuität und sei* R_t *der Restwert einer vom Leben der versicherten Person (VP) unabhängigen GMWB. Dann ist die Ablebensleistung* b^D_t *zu einem beliebigen Todeszeitpunkt* t *gegeben durch:*

$$b^D_t = \begin{cases} \max\{A_t, R_t\} & \textit{falls -) } T < t \leq T' \\ & \quad\textit{-) GMWB temporär unabhängig vom Leben der VP} \\ \max\{A_t, 0\} & \textit{falls -) } T < t \leq T' \\ & \quad\textit{-) GMWB temporär abhängig vom Leben der VP} \\ \max\{A_t, 0\} & \textit{falls -) } T < t \\ & \quad\textit{-) GMWB lebenslänglich.} \end{cases}$$

Für GMWBs wird somit angenommen, dass die Variable Annuität mit dem Todesfall und der damit verbundenen Zahlung endet. Es sollte noch erwähnt werden, dass dieser Ansatz sich aus finanzmathematischer Sicht von der Fortzahlung der Rückkaufszahlungen bis zum Zeitpunkt T' unterscheidet. Der Grund hierfür liegt im unterschiedlichen Betrachtungszeitpunkt des Zeitwerts A_t. So werden einerseits keine Kosten im Zeitraum vom Tod bis zum Ende der Rückkaufszahlungen mehr verrechnet, andererseits könnte sich der Referenzfonds in dieser Zeit positiv oder negativ entwickeln und somit den Zeitwert der Variablen Annuität zum Ende der Garantiezeit beeinflussen.

Nach Ender der Laufzeit der GMWB wird die Ablebensleistung b^D_t auf Null gesetzt:

$$b^D_t = 0 \quad \begin{cases} \text{falls} & \text{-) } t > T \\ & \text{-) GMAB und GMIB ohne Garantiedauer} \\ \text{falls} & \text{-) } t > T' \\ & \text{-) GMIB, GMWB temporär.} \end{cases}$$

3.2.3 Bewertung im statischen Ansatz

Im statischen Bewertungsansatz wird die Entwicklung des für die Garantien relevanten Zeitwerts der Variablen Annuität im Wesentlichen durch die Rendite des Referenzfonds, die verrechneten Kosten und den geleisteten Erlebensleistungen beeinflusst.

Definition 3.2.9 (Zeitwert der Variablen Annuität im statischen Bewertungsansatz)**.** *Sei P die zu Beginn der Variablen Annuität gezahlte Einmalprämie. Der Zeitwert A_t zu Beginn der Versicherung ($t = 0$) ist gegeben durch:*

$$A_0 = P.$$

Weiters bezeichne φ die Rate der Kosten, welche dem Zeitwert laufend entnommen wird um die Kosten der Garantien zu finanzieren. Die Entwicklung des Zeitwerts wird dann beschrieben mit:

$$\mathrm{d}A_t = \begin{cases} A_t \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} - \varphi A_t \mathrm{d}t - \mathrm{d}B_t^L & \textit{falls } A_t > 0 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Der Wert der Variablen Annuität wird schlussendlich durch den Erwartungswert der diskontierten Zahlungsflüsse dargestellt.

Definition 3.2.10 (Wert der Variablen Annuität im statischen Bewertungsansatz)**.** *Sei b_t^D die Ablebensleistung zum Zeitpunkt t und beschreibe B_t^L die kumulierten Erlebensleistungen im Zeitpunkt t. Der kumulierte Wert sämtlicher Leistungen B_t zum Zeitpunkt t bei einer erwarteten Restlebensdauer τ sei gegeben durch:*

$$B_t = (B_{\tau-}^L + b_\tau^D) * \mathbb{1}_{\tau \leq t} + B_t^L * \mathbb{1}_{\tau > t}.$$

Sei weiters M_t der Wert eines risikolosen Assets zum Zeitpunkt t. Dann ist der Wert der Variablen Annuität V_t zum Zeitpunkt t gegeben durch:

$$V_t = \mathbb{E}_t \left[\int_t^\infty \frac{M_t}{M_u} \mathrm{d}B_u \right].$$

Unter der Annahme der Unabhängigkeit der finanziellen und demographischen Risikofaktoren kann in einigen Fällen der Wert der Variablen Annuität in geschlossener Form angegeben werden.[2] Sollten jedoch feinere Annahmen die Darstellung in geschlossener Form nicht ermöglichen, so kann der Wert des Erwartungswerts über eine Forwärts-Applikation der Monte-Carlo Methode berechnet werden.

Da der Wert der Variablen Annuität V_t bereits kostenbereinigt ist, kann man diesen auch als Funktion der Kostenrate φ betrachten. Somit lässt sich eine Definition für eine faire Kostenrate treffen.

[2] für weitere Informationen siehe [BoS] oder [BrS]

Definition 3.2.11 (faire Kostenrate)**.** *Sei $V_t(\varphi)$ der Wert der Variablen Annuität zum Zeitpunkt t abhängig von einer Kostenrate φ. Dann ist die faire Kostenrate φ^* implizit gegeben durch:*

$$V_0(\varphi^*) = P.$$

3.3 Dynamischer Ansatz zur Kostenbewertung der Garantien in Variable Annuities

Der sogenannte dynamische beziehungsweise aktive Bewertungsansatz trifft im Gegensatz zum statischen Ansatz die Annahme, dass sich Rückkäufe nicht gezwungernermaßen mit jenen einer GMWB decken müssen. Im Konkreten kennzeichnen folgende Annahmen den Bewertungsansatz:

- der Versicherungsnehmer muss im Falle einer inkludierten GMWB den Rückkauf nicht tätigen
- Teilrückkäufe können zu jedem beliebigen Zeitpunkt getätigt werden (nicht nur zu den bei einer GMWB vertraglich definierten Zeitpunkten)
- der Versicherungsnehmer kann den Vertrag jederzeit stornieren.

Eine weitere oftmals getroffene Annahme ist die Möglichkeit eines Teilrückkaufs oder des Stornos in der Auszahlungsphase einer Rente. Dieses Vorgehen kann allerdings zusätzliche Selektionsrisiken mit sich bringen.

In all den oben genannten Szenarien werden zusätzliche Gebühren verrechnet. Das bedeutet, dass der Versicherungsnehmer bei einer Stornierung des Vertrags nicht den gesamten Zeitwert der Variablen Annuität ausgezahlt bekommt, beziehungsweise im Falle eines Teilrückkaufs mehr Kapital dem Referenzfonds entnommen wird als an den Versicherungsnehmer ausgezahlt wird. Zusätzlich werden die garantierten Werte reduziert.

3.3.1 Kumulierte Leistungen

Der Prozess der kumulierten Erlebensleistungen im dynamischen Bewertungsansatz entspricht einer angemessenen Modifizierung der in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen kumulierten Erlebensleistungen im statischen Bewertungsansatz. Diese Modifizierungen sind abhängig von einer gewissen „Rückkaufsstrategie“.

Unter einer „Rückkaufsstrategie“ versteht man einen stochastischen Prozess, welcher die Höhe der getätigten Rückkäufe und Teilrückkäufe zu einem beliebigen Zeitpunkt beschreibt. Im Bewertungsansatz dürfen allerdings nur „Rückkaufsstrategien“ berücksichtigt werden, welche aufgrund der Versicherungsbedingungen der Variablen Annuität zulässig sind.

Im dynamischen Bewertungsansatz wird nun abhängig von einer „Rückkaufsstrategie“ θ zwischen zwei Prozessen der kumulierten Erlebensleistungen unterschieden:

- $(GB)_t^{L,\theta}$: kumulierte Summe der Brutto-Erlebensleistungen
- $(NB)_t^{L,\theta}$: kumulierte Summe der Netto-Erlebensleistungen.

Dabei entspricht die kumulierte Summe der Netto-Erlebensleistungen $(NB)_t^{L,\theta}$ der Summe an Leistungen, welche der Versicherungsnehmer tatsächlich ausgezahlt bekommt. Die kumulierte Summe der Brutto-Erlebensleistungen $(GB)_t^{L,\theta}$ entspricht hingegen der Summe jener Werte, welche dem Zeitwert entnommen werden. Diese beinhaltet somit auch sämtliche eventuelle Gebühren im Rückkaufsfall.

3.3.2 Bewertung im dynamischen Ansatz

Im dynamischen Bewertungsansatz wird die Entwicklung des für die Garantien relevanten Zeitwerts der Variablen Annuität im Wesentlichen durch die Rendite des Referenzfonds, die verrechneten Kosten und den dem Zeitwert entnommenen Erlebensleistungen beziehungsweise Rückkäufen beeinflusst.

Definition 3.3.1 (Zeitwert der Variablen Annuität im dynamischen Ansatz)**.** *Sei P die zu Beginn der Variablen Annuität gezahlte Einmalprämie und entspreche θ dem stochastischen Prozess einer beliebigen den Versicherungsbedingungen entsprechenden Rückkaufsstrategie. Der Zeitwert A_t^θ unter der gewählten Rückkaufsstartegie zum Versicherungsbeginn $(t = 0)$ ist dann gegeben durch:*

$$A_0^\theta = P.$$

Weiters bezeichne φ die Rate der Kosten, welche dem Zeitwert entnommen wird um die Kosten der Garantien zu finanzieren. Die Entwicklung des Zeitwerts unter der gewählten Rückkaufsstartegie wird dann beschrieben mit:

$$\mathrm{d}A_t^\theta = \begin{cases} A_t^\theta \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} - \varphi A_t^\theta \mathrm{d}t - \mathrm{d}(GB)_t^{L,\theta} & \textit{falls } A_t^\theta > 0 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Im dynamischen Bewertungsansatz muss aufgrund der Möglichkeit einer kompletten Stornierung des Versicherungsvertrags zusätzlich noch der Zeitpunkt der Stornierung definiert werden.

Definition 3.3.2 (Zeitpunkt der Stornierung)**.** *Sei θ der stochastische Prozess einer beliebigen den Versicherungsbedingungen entsprechenden Rückkaufsstrategie. Diese enthält auch die Zahlungen im Falle einer kompletten Stornierung der Variablen Annuität. Der Zeitpunkt der Stornierung wird dann beschrieben durch λ^θ.*
Sollte unter der Rückkaufsstrategie θ der Vertrag niemals storniert werden, so ist der Stornozeitpunkt λ^θ gegeben durch die erwartete Restlebensdauer τ der versicherten Person:

$$\lambda^\theta = \tau.$$

Der Wert der Variablen Annuität ist nun wiederum gegeben durch den Erwartungswert der diskontierten Zahlungsflüsse.

Definition 3.3.3 (Wert der Variablen Annuität im dynamischen Bewertungsansatz)**.** *Sei θ eine beliebige den Versicherungsbedingungen entsprechende Rückkausstrategie und sei λ^θ der zugehörige Zeitpunkt der Stornierung. Weiters seien $b_t^{D,\theta}$ die Ablebensleistung und $(NB)_t^{L,\theta}$ die kumulierten Netto-Erlebensleistungen unter dieser Rückkaufswertstartegie zum Zeitpunkt t. Der kumulierte Wert sämtlicher Leistungen B_t^θ zum Zeitpunkt t sei gegeben durch:*

$$B_t^\theta = ((NB)_{\tau^-}^{L,\theta} + b_\tau^{D,\theta}) * \mathbb{1}_{\tau \leq \min\{t,\lambda^\theta\}} + (NB)_t^{L,\theta} * \mathbb{1}_{t < \min\{\tau,\lambda^\theta\}} + (NB)_{\lambda^\theta}^{L,\theta} * \mathbb{1}_{\{\lambda^\theta < \tau; \lambda^\theta \leq t\}}.$$

Sei weiters M_t der Wert eines risikolosen Assets zum Zeitpunkt t. Dann ist der Wert der Variablen Annuität V_t^θ unter der gewählten Rückkaufsstrategie zum Zeitpunkt t gegeben durch:

$$V_t^\theta = \mathbb{E}_t \left[\int_t^\infty \frac{M_t}{M_u} \mathrm{d}B_u^\theta \right].$$

Bezeichne Θ die Menge alle zulässigen Rückkaufstrategien, so ist der Wert der Variablen Annuität V_t zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch:

$$V_0 = \sup_{\theta \in \Theta} V_0^\theta.$$

In der Ermittlung des Wertes der Variablen Annuität in Definition 3.3.3 wird von einem „optimalen“ Verhalten des Versicherungsnehmers ausgegangen. Dieser Wert stellt damit eine Art „Worst-Case-Szenario“ für das Versicherungsunternehmen dar. Es sei aber erwähnt, dass diese Vorgehensweise zwar den Profit, jedoch nicht zwingendermaßen auch den daraus gewonnenen Nutzen des Versicherungsnehmers maximiert. So können in die Entscheidungen eines Versicherungsnehmers beispielsweise auch andere Vorlieben oder Verpflichtungen einfließen, was zu einer anderen Wahl eines risikoneutralen Maßes führen würde. Das Verhalten des Versicherungsnehmers wird zusätzlich noch durch die asymmetrischen Informationen beeinflusst.

Der dynamische Bewertungsansatz benötigt ein zugrunde liegendes numerisches Modell und wird in dieser Arbeit nicht weiter behandelt. Für weitere Informationen sei hier auf die Literatur[3] verwiesen.

3.4 Gemischter Ansatz zur Kostenbewertung der Garantien in Variable Annuities

Der sogenannte gemischte beziehungsweise „semiaktive“ Bewertungsansatz trifft im Gegensatz zum statischen Ansatz die Annahme, dass der Vertrag jederzeit storniert werden kann, jedoch werden im Gegensatz zur dynamischen Bewertung, außer den vertraglich

[3]für weitere Informationen siehe [BBM], [MS], [DKZ], [CVF], [CF]

vereinbarten, keine flexiblen Teilrückkäufe berücksichtigt. Im Konkreten kennzeichnen folgende Annahmen den Bewertungsansatz:

- der Versicherungsnehmer tätigt im Falle einer inkludierten GMWB den genau die vertraglich vereinbarten Rückkäufe zu den vertraglich vereinbarten Zeitpunkten,
- es werden keine Teilrückkäufe während der Anreicherungsphase oder während der Rentenphase getätigt und
- der Versicherungsnehmer kann den Vertrag jederzeit während der Laufzeit des Versicherungsvertrages stornieren.

Im Falle einer Stornierung werden wie im dynamischen Bewertungsansatz zusätzliche Gebühren verrechnet. Anders als bei der dynamischen Bewertung wird im gemischten Bewertungsansatz allerdings die Zahlung bei einer Stornierung separat betrachtet.

Definition 3.4.1 (Wert einer Stornierung)**.** *Der Wert einer Stornierung zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ wird beschrieben durch b_t^S und entspricht jener Zahlung, welche der Versicherungsnehmer im Falle einer Stornierung des Vertrags erhält. Die Wert b_t^S muss somit um sämtliche Gebühren die bei einer Stornierung anfallen reduziert werden.*
Wird die Stornierung zu einem Zeitpunkt durch die Versicherungsbedingungen ausgeschlossen, so ist der Wert der Stornierung gegeben durch:

$$b_t^S = 0.$$

Ein Ausschluss einer Stornierung durch die Versicherungsbedingungen kann beispielsweise während der Rentenphase festgelegt werden, damit ungünstige Selektionen im Versicherungsbestand vermieden werden.

Im Folgenden werden Beispiele für die Belegung des Wertes einer Stornierung b_t^S gegeben.

Beispiel 3.4.2 (Wert der Stornierung - GMDB, GMAB)*.* Sei p ein zu Vertragsbeginn definierter Rückkaufswertabschlag. Dann kann der Wert der Stornierung b_t^S einer Variablen Annuität mit GMDB oder GMAB zu einem Zeitpunkt $t > 0$ definiert werden als:

$$b_t^S = \begin{cases} A_t * (1-p) & \text{falls } t < T \\ 0 & \text{falls } t \geq T. \end{cases}$$

Beispiel 3.4.3 (Wert der Stornierung - GMIB)*.* Sei p ein zu Vertragsbeginn definierter Rückkaufswertabschlag. Dann kann der Wert der Stornierung b_t^S einer Variablen Annuität mit GMIB zu einem Zeitpunkt $t > 0$ definiert werden als:

$$b_t^S = \begin{cases} A_t * (1-p) & \text{falls } t < T \\ A_t & \text{falls } t = T \\ 0 & \text{falls } t > T. \end{cases}$$

Beispiel 3.4.4 (Wert der Stornierung - GMWB). Sei p ein zu Vertragsbeginn definierter Rückkaufswertabschlag und bezeichne b_t^W die Rückkaufszahlung unter der GMWB zu den festgesetzten Rückkaufszeitpunkten $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Dann kann der Wert der Stornierung b_t^S einer Variablen Annuität mit GMWB zu einem Zeitpunkt $t > 0$ definiert werden als:

$$b_t^S = \begin{cases} A_t * (1-p) & \text{falls -) } t < T' \\ & \qquad \text{-) } t \neq T_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \\ b_t^W + \max\{A_t - b_t^W, 0\} * (1-p) & \text{falls -) } t < T' \\ & \qquad \text{-) } t = T_i \quad i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

3.4.1 Kumulierte Leistungen

Im gemischten Bewertungsansatz wird die Erlebensleistung im Falle einer Stornierung im Gegensatz zum dynamischen Ansatz separat behandelt. Da somit sämtliche mit zusätzlichen Gebühren behafteten Leistungen nicht in den kumulierten Erlebensleistungen inkludiert sind, muss im gemischten Ansatz auch keine Unterscheidung zwischen kumulierter Brutto- und Netto-Erlebensleistung getroffen werden. Die kumulierte Erlebensleistung und die Ablebensleistungen können dadurch wie im statischen Bewertungsansatz gewählt werden (siehe Abschnitte 3.2.1 und 3.2.2).

3.4.2 Bewertung im gemischten Ansatz

Durch die getroffene Annahme, dass im gemischten Bewertungsansatz keinerlei nicht vertraglich geregelten Rückkäufe getätigt werden, wird die Entwicklung des für die Garantien relevanten Zeitwerts der Variablen Annuität wie im statischen Bewertungsansatz im Wesentlichen durch die Rendite des Referenzfonds, die verrechneten Kosten und den geleisteten Erlebensleistungen beeinflusst.

Definition 3.4.5 (Zeitwert der Variablen Annuität im gemischten Bewertungsansatz). *Sei P die zu Beginn der Variablen Annuität gezahlte Einmalprämie. Der Zeitwert A_t zum Versicherungsbeginn $(t = 0)$ ist gegeben durch:*

$$A_0 = P.$$

Weiters bezeichne φ die Rate der Kosten, welche dem Zeitwert entnommen wird um die Kosten der Garantien zu finanzieren. Die Entwicklung des Zeitwerts wird dann beschrieben mit:

$$\mathrm{d}A_t = \begin{cases} A_t \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} - \varphi A_t \mathrm{d}t - \mathrm{d}B_t^L & \textit{falls } A_t > 0 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Ähnlich dem dynamischen Ansatz wird im gemischten Bewertungsansatz auch der Zeitpunkt der Stornierung λ benötigt. Dieser ist wie in Definition 3.3.2 gegeben mit der

Unterscheidung, dass der Zeitpunkt nicht von einer Rückkaufsstrategie θ abhängt sondern beliebig ist.

Der Wert der Variablen Annuität im gemischten Bewertungsansatz ist wieder gegeben durch den Erwartungswert der diskontierten Zahlungsflüsse.

Definition 3.4.6 (Wert der Variablen Annuität im gemischten Bewertungsansatz)**.** *Sei λ ein beliebiger Zeitpunkt der Stornierung. Weiters entspreche b_t^D der Ablebensleistung und B_t^L den kumulierten Erlebensleistungen zum Zeitpunkt t. Der kumulierte Wert sämtlicher Leistungen B_t^λ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ sei gegeben durch:*

$$B_t^\lambda = (B_{\tau^-}^L + b_\tau^D) * \mathbb{1}_{\tau \leq \min\{t,\lambda\}} + B_t^L * \mathbb{1}_{t < \min\{\tau,\lambda\}} + (B_\lambda^L + b_\lambda^S) * \mathbb{1}_{\{\lambda < \tau; \lambda \leq t\}}.$$

Sei weiters M_t der Wert eines risikolosen Assets zum Zeitpunkt t. Dann ist der Wert der Variablen Annuität V_t^λ unter Berücksichtigung des Zeitpunkts der Stornierung zum Zeitpunkt t gegeben durch:

$$V_t^\lambda = \mathbb{E}_t \left[\int_t^\infty \frac{M_t}{M_u} \mathrm{d}B_u^\lambda \right].$$

Bezeichne Λ die Menge aller zulässigen Stornierungszeitpunkte, so ist der Wert der Variablen Annuität V_t zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch:

$$V_0 = \sup_{\lambda \in \Lambda} V_0^\lambda.$$

Auch im gemischten Bewertungsansatz kann der Wert der Variablen Annuität V_0 als Funktion der Kostenrate φ betrachten werden. Somit ist eine faire Kostenrate φ^* wieder implizit definiert (siehe Definition 3.2.11).

Der gemischte Bewertungsansatz benötigt ein zugrunde liegendes numerisches Modell für die Ermittlung des Supremums beim Wert der Variablen Annuität V_0. In der Literatur sind zahlreiche Methoden, welche der Lösung derartiger Probleme dienen, auffindbar. Als Beispiele hierfür können folgende Modelle dienen:

- Binomialbäume
- Multinomialbäume
- Partielle Differentialgleichungen
- Least Squares Monte Carlo Ansatz.

In dieser Arbeit wird in weiterer Folge ein Least Squares Monte Carlo Ansatz für die Lösung des Problems verwendet werden.

3.5 Vergleich der Bewertungsansätze

Um den in den Abschnitten 3.2, 3.3 und 3.4 definierten Wert der Variablen Annuität zum Zeitpunkt $t = 0$ der verschiedenen Bewertungsansätze in Verbindung zu bringen, wird in diesem Abschnitt zwischen $V_0^{statisch}$, $V_0^{dynamisch}$ und $V_0^{gemischt}$ unterschieden.

Bereits durch die jeweilige Definition lässt sich erkennen, dass die Beziehung

$$V_0^{statisch} \leq V_0^{gemischt} \leq V_0^{dynamisch}$$

gelten muss. Dabei stellt der dynamische Bewertungsansatz aus Sicht des Versicherungsunternehmens ein „Worst-Case-Szenario“ dar, da der Versicherungsnehmer unter allen Rückkaufsstrategien frei wählen kann und zusätzlich auch noch den Vertrag an einem beliebigen Zeitpunkt stornieren kann.
Im gemischten Bewertungsansatz kann der Versicherungsnehmer nur einen beliebigen Zeitpunkt für die Stornierung des Vertrags wählen. Die Rückkaufsstrategien unter dem gemischten Ansatz müssen somit eine Untermenge jener des dynamischen Bewertungsansatzes bilden.
Beim statischen Bewertungsansatz hingegen werden dem Versicherungsnehmer keinerlei ausservertraglichen Rückkäufe oder Stornierungen gewährt. Die Rückkaufsstrategie entspricht dem vertraglich vordefinierten Verhalten und somit natürlich einer Untermenge der Rückkaufsstrategien der beiden anderen Bewertungsansätze.

Als Konsequenz dieser Zusammenhänge der entsprechenden Werte der Variablen Annuitäten zum Zeitpunkt $t = 0$ müssen auch die entsprechenden fairen Kostenraten φ^*, welche die Kostenentnahme aus den Zeitwerten steuern um die gegeben Garantien und Leistungen zu finanzieren und den Vertrag somit fair gestalten, im selben Zusammenhang stehen:

$$\varphi^*_{statisch} \leq \varphi^*_{gemischt} \leq \varphi^*_{dynamisch}.$$

4 Berechnungsgrundlagen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Eigenschaften und Annahmen definiert, auf welchen die Berechnungen basieren. Im Wesentlichen wird ein Finanzmodell und ein Sterblichkeitsmodell definiert. Dieses entspricht jenem von Bacinello et al. (2011)[1] und ist eine leicht vereinfachte Version des von Bacinello et al. (2009)[2] vorgestellten Modells. Allgemein ist noch festzuhalten, dass sämtliche in diesem Kapitel definierten Prozesse unter dem gewählten risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß zu sehen sind.
Da die spätere Berechnung auf dem Prinzip der Monte Carlo Simulation basiert, wird abschließend noch ein kurzer Überblick über die Monte Carlo Simulation und die Least Squares Monte Carlo Simulation gegeben und die in dieser Arbeit verwendeten Algorithmen definiert.

4.1 Wurzeldiffusionsprozess

Eine wichtige Rolle bei den Prozessen, auf welchen die Berechnungen in dieser Arbeit basieren, spielt der Wurzeldiffusionsprozess.

Definition 4.1.1 (Wurzeldiffusionsprozess)**.** *Seien die Parameter $\kappa, \theta, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $\kappa \geq 0$ und $\theta > 0$. Weiters beschreibe $W(t)$, $t \geq 0$ eine brownsche Bewegung. Dann ist ein Wurzeldiffusionsprozess $X(t)$, $t \geq 0$ gegeben durch:*

$$\mathrm{d}X(t) = \kappa * (\theta - X(t)) \ \mathrm{d}t + \sigma * \sqrt{X(t)} \ \mathrm{d}W(t).$$

Bei diesem Prozess handelt es sich um eine Zusammensetzung eines Mean-Reversion-Prozesses und eines Wurzel-Prozesses. Unter einer Mean-Reversion versteht man dabei den Effekt, dass der Prozess mit einer gewissen Stärke einer Regulierungsfunktion κ zu einem gewissen Gleichgewichtsniveau θ gezogen wird. Der Parameter σ steuert andererseits wie stark der Prozess den Schwankungen der brownschen Bewegung ausgesetzt ist und ist somit ein wichtiges Kennzeichen für die Volatilität.
Der Wurzeldiffusionsprozess ist unter der Annahme $X(0) > 0$ und bei Erfüllung der Stabilitätsbedingung (oftmals auch Feller Bedingung genannt) $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ fast sicher strikt positiv für alle $t \geq 0$. Sollte diese Bedingung nicht erfüllt sein, so ist das Nullniveau erreichbar und stark reflektierend.

[1] siehe [BMOP]
[2] siehe [BBM]

Für den Wurzeldiffusionsprozess existiert keine geschlossene Form, wodurch eine numerische Realisierung für die Simulation des Prozesses benötigt wird. Da eine exakte Simulation numerisch sehr aufwendig ist, werden für Monte-Carlo-Simulationen üblicherweise Diskretisierungsmethoden wie Anpassungen des Euler-Maruyama-Verfahren verwendet. Solche Anpassungen müssen getroffen werden, da die Standard-Euler-Maruyama Diskretisierung nicht positivitätserhaltend ist.
In dieser Arbeit wird für die Simulation der jeweiligen Prozesse das Euler-Maruyama-Verfahren nach Diob verwendet werden. Dieses spiegelt die Lösungen an der Achse $X = 0$, womit der Prozess positivitätserhaltend ist.

Definition 4.1.2 (Euler-Maruyama-Verfahren nach Diob)**.** *Sei $X(t)$, $t \geq 0$ ein Wurzeldiffusionsprozess und entspreche $W(t)$, $t \geq 0$ einer brownschen Bewegung. Weiters seien $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Diskretisierungspunkte. Dann entspricht die numerische Realisierung nach dem Euler-Maruyama-Verfahren nach Diob:*

$$\begin{aligned} X(n+1) &= |X(n) + \kappa * (\theta - X(n)) * \Delta_n + \sigma * \sqrt{X(n)} * \Delta W_n| \\ &\mathit{mit}\ \Delta_n = t_{n+1} - t_n \\ &\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathrm{d}W(s) \end{aligned}$$

Für weitere Informationen zu möglichen Realisierungen und den entsprechenden Konvergenzordnungen sei auf weiterführende Literatur[3] verwiesen.

Zuletzt soll noch angemerkt werden, dass sämtliche in den nächsten Kapiteln verwendeten Brownschen Bewegungen Z^* als unabhängig angenommen werden.

4.2 risikoloser kontinuierlicher Zinssatz

Der Prozess des risikolosen kontinuierlichen Zinssatzes r_t, $t \geq 0$, welcher unter anderem auf den Wertprozess des risikolosen Assets M_t, $t \geq 0$ Einfluss nimmt, wird in dieser Arbeit beschrieben durch einen Wurzeldiffusionsprozess mit Parametern ξ_r, ζ_r, σ_r:

$$\mathrm{d}r_t = \xi_r * (\zeta_r - r_t)\ \mathrm{d}t + \sigma_r * \sqrt{r_t}\ \mathrm{d}Z_t^r,$$

Z_t^r entspricht dabei einer Brownschen Bewegung.

4.3 Preisprozess des Referenzfonds

Der Preisprozess des risikobehafteten Assets S_t, $t \geq 0$, welcher den Referenzfonds der Variablen Annuität darstellt, wird in dieser Arbeit durch eine Variante des Heston Modells

[3] siehe [K], [AJK]

beschrieben. Die Varianz des Preisprozesses ist dabei gegeben durch einen Wurzeldiffusionsprozess mit Parametern ξ_K, ζ_K, σ_K:

$$\mathrm{d}K_t = \xi_K * (\zeta_K - K_t)\ \mathrm{d}t + \sigma_K * \sqrt{K_t}\ \mathrm{d}Z_t^K,$$

Der logarithmierte Preisprozess des Referenzfonds mit Parameter ρ_{SK} ist dann gegeben durch:

$$\mathrm{d}\log K_t = (r_t - \frac{1}{2}K_t)\ \mathrm{d}t + \sqrt{K_t}\left(\rho_{SK}\ \mathrm{d}Z_t^K + \sqrt{1-\rho_{SK}^2}\ \mathrm{d}Z_t^S\right),$$

Z_t^K und Z_t^S entsprechen wiederum von einander unabhängigen brownschen Bewegungen.

4.4 Sterbeintensität

Der Prozess der Sterbeintensität μ_t, $t \geq 0$, welcher die momentane Sterbewahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t einer zu Versicherungsbeginn der Variablen Annuität x Jahre alten Person darstellt, wird in dieser Arbeit ebenfalls durch einen Wurzeldiffusionsprozess mit Parametern ξ_μ, σ_μ beschrieben:

$$\mathrm{d}\mu_t = \xi_\mu * (\hat{\mu}(t) - \mu_t)\ \mathrm{d}t + \sigma_\mu * \sqrt{\mu_t}\ \mathrm{d}Z_t^\mu,$$

Die Sterblichkeit unterliegt somit den Schwankungen einer Brownschen Bewegung Z_t^μ und wird zu einem bestimmten Gleichgewichtsniveau $\hat{\mu}$ gezogen. Dieses Gleichgewichtsniveau $\hat{\mu}(t)$ des Prozesses wird hierbei beschrieben durch die Intensität einer deterministischen Weibull Verteilung:

$$\hat{\mu}(t) = c_1^{-c_2} * c_2 * (x+t)^{c_2-1},$$

wobei x dem Alter der versicherten Person zum Versicherungsbeginn der Variablen Annuität $t = 0$ entspricht.

In der Weibullverteilung des Gleichgewichtsniveau $\hat{\mu}(t)$ werden die Parameter c_1 und c_2 benötigt. Diese werden in dieser Arbeit durch einen Least-Squares Fit an den Überlebenswahrscheinlichkeiten der Sterbetafel *AVÖ 2005 R unisex*[4] erzeugt.

4.5 Restlebensdauer

Die für die Monte Carlo Berechnung notwendige Restlebensdauer einer versicherten Person τ wird mittels einer von der Sterbeintensität $(\mu_t)_{t\geq 0}$ unabhängigen Standard Exponentialverteilten Zufallsvariable $\mathcal{E}$ erzeugt:

$$\tau = \inf\left\{t \geq 0 : \int_0^t \mu_s \mathrm{d}s > \mathcal{E}\right\}.$$

Die Überlebenswahrscheinlichkeit einer versicherten Person zum Zeitpunkt $t \geq 0$ ist somit gegeben durch:

$$\mathbb{P}(\tau > t) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^t \mu_s \mathrm{d}s}\right].$$

[4] siehe [AVOE]

Ist die affine Struktur von μ bekannt, so kann $\mathbb{P}(\tau > t)$ in geschlossener Form dargestellt werden. Für nähere Informationen sei hier auf weiterführende Literatur verwiesen.[5]

4.6 Monte Carlo Methode

Monte Carlo Methoden bezeichnen eine breite Klasse an computerbasierenden Algorithmen, welche die wiederholte Erzeugung von unabhängigen Stichproben zur Gewinnung von numerischen Ergebnissen verwendet. Sie basieren auf dem Zusammenhang von Wahrscheinlichkeiten und Mengen. In der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie wird die Wahrscheinlichkeit einer Ereignismenge intuitiv über die Größe beziehungsweise das Maß der Ereignismenge im Verhältnis zu der Menge aller möglichen Ereignisse definiert. Monte Carlo Methoden nützen diese Eigenschaft im Umkehrschluss, indem die Größe beziehungsweise das Maß einer Ereignismenge durch Interpretation dieser als Wahrscheinlichkeiten erzeugt werden. Dies bedeutet im einfachsten Fall, dass man unabhängig von allen möglichen Ereignissen Stichproben erzeugt und die Menge aller Stichproben, welche einer zuvor definierten Ereignismenge zuordenbar sind, als Schätzung für die Größe beziehungsweise das Maß dieser Ereignismenge verwendet. Diese Schätzung konvergiert nach dem Gesetz der großen Zahlen mit steigender Stichprobenanzahl gegen den korrekten Wert.

Monte Carlo Methoden werden häufig verwendet um mathematische Probleme zu lösen, welche nicht oder nur schwer in geschlossener Form dargestellt werden können.

4.6.1 Monte Carlo Algorithmus

In dieser Arbeit wird für die Berechnung der Werte unter dem statischen Bewertungsansatz ein simpler „Vorwärts“-Monte Carlo Algorithmus verwendet, welcher hier nur in sehr kurzer Form illustriert wird.

1. **Simulation:**
    - Simuliere $H \in \mathbb{N}$ Pfade eines Vektors von Zustandsgrößen X über den Zeitraster $\mathbb{T}$ (genauere Beschreibung in Abschnitt 4.7)
    - Entspreche $h \in \{1, 2, \dots, H\}$ der h-ten Simulation dann folge die Notation:
        - X_t^h: Vektor der Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$
        - M_t^h: Wert eines risikolosen Assets zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$
        - τ^h: Todeszeitpunkt $\tau^h \in \mathbb{T}$
        - F_t^h: Zahlungsfluss des zugrunde liegenden Vertrags zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$ Dieser ist abhängig von den eingeschlossenen Garantien des Vertrags. Mögliche Leistungen sind:
            * $b_t^{D,h}$: Ablebensleistung zum Zeitpunkt $t = \tau^h$

[5] siehe [BM]

* $\overline{b_t^{L,h}}$: Erlebensleistung zum Zeitpunkt $t < \tau^h$ mit

$$\overline{b_t^{L,h}} = B_t^{L,h} - B_{t-1}^{L,h}$$

2. **Vertragswerte:**
Berechnung des Wertes der Variablen Annuität zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$V_0 = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} \sum_{t=1}^{\tau^h} \frac{F_t^h}{M_t^h}$$

4.7 Least Squares Monte Carlo Methode

In diesem Abschnitt wird der Least Squares Monte Carlo Algorithmus vorgestellt, der in dieser Arbeit verwendet wird um die Werte unter dem gemischten Bewertungsansatz zu berechnen. Der Algorithmus basiert auf der Least Squares Monte Carlo Methode, welche für die Bewertung von amerikanischen Optionen in Finanzprodukten verwendet wird. Diese Methode kombiniert die Monte Carlo Simulation mit einer Regression nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate im Verfahren der dynamischen Programmierung, welche verwendet wird um die optimale Ausübungsstrategie zu finden.

Wie jeder numerische Algorithmus benötigt die Least Squares Monte Carlo Methode eine Diskretisierung der zeitlichen Dimension. Als Maßeinheit diene, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, die Schrittlänge der vorgenommenen Diskretisierung. Die Menge der Diskretisierungszeitpunkte $\mathbb{T}$ sei gegeben mit

$$\mathbb{T} = \{0, 1, 2, \ldots, N\} \quad N \in \mathbb{N}.$$

$N \in \mathbb{N}$ definiert somit die Feinheit der Diskretisierung und sollte dem jeweiligen Vertrag entsprechend gewählt werden. In dieser Arbeit wurde die Diskretisierung auf Monate gewählt, womit N der Anzahl derselben entspricht.

Ebenso wird eine Reihe von Zustandsgrößen für die Berechnung benötigt. Diese Variablen sollen sämtliche finanziellen und biometrischen Risikofaktoren beinhalten, welche unter sorgfältiger Betrachtung Einfluss auf den bestehenden Vertrag nehmen. Der entsprechende Vektor der Zustandsgrößen sei bezeichnet mit X und enthalte unter anderem:

- die Verzinsung,
- die durch den Referenzfonds beeinflussten Zeitwerte der Variablen Annuität und
- die für die Bepreisung der Lebensversicherungsveträge verwendete Basis der Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten.

Zuletzt wird noch eine Reihe von Basisfunktionen

$$e_1, e_2, \ldots, e_k \quad 0 < k \in \mathbb{N}$$

benötigt, welche dem Vektor der Zustandsgrößen X eine Reihe an fassbaren Werten zuordnet. Die Wahl für solche Basisfunktionen kann unterschiedlich sein. Für nähere Informationen sei an dieser Stelle auf weiterführende Literatur[6] verwiesen.

4.7.1 Least Squares Monte Carlo Algorithmus

Dieser Abschnitt soll den in dieser Arbeit verwendeten Least Squares Monte Carlo Algorithmus in aller Kürze beschreiben.

1. **Simulation:**
   - Simuliere $H \in \mathbb{N}$ Pfade von X über den Zeitraster $\mathbb{T}$ (die Simulation der Prozesse kann auch über einen feineren Raster als $\mathbb{T}$ simuliert werden)
   - Entspreche $h \in \{1, 2, \ldots, H\}$ der h-ten Simulation dann folge die Notation:
     - X_t^h: Vektor der Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$
     - M_t^h: Wert eines risikolosen Assets zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$
     - τ^h: Todeszeitpunkt $\tau^h \in \mathbb{T}$
     - F_t^h: Zahlungsfluss des zugrunde liegenden Vertrags zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$ Dieser ist abhängig von den eingeschlossenen Garantien des Vertrags. Mögliche Leistungen sind:
       * $b_t^{D,h}$: Ablebensleistung zum Zeitpunkt $t = \tau^h$
       * $b_t^{S,h}$: Rückkaufszahlung zum Zeitpunkt $t < \tau^h$
       * $\overline{b_t^{L,h}}$: Erlebensleistung zum Zeitpunkt $t < \tau^h$ mit

$$\overline{b_t^{L,h}} = B_t^{L,h} - B_{t-1}^{L,h}$$

2. **Initialisierung:**
   Belegung der Startwerte:
   - $\overline{N} = \max_{h \in \{1,2,\ldots,H\}} \tau^h$
   - $F_{\tau^h}^h = b_{\tau^h}^{D,h} \quad \forall h \in \{1, 2, \ldots, H\}$
   - $\lambda^h = \tau^h \qquad \forall h \in \{1, 2, \ldots, H\}$

3. **Dynamische Programmierung:**
   Ausführung folgender Schritte für die Zeitpunkte $t = \overline{N} - 1, \overline{N} - 2, \ldots, 1$:
   - $H_t = \{1 \leq h \leq H : \tau^h > t\}$
   - Berechnung der Barwerte C_t^h der Zahlungsflüsse:

$$C_t^h = \sum_{u=t+1}^{\lambda^h} F_u^h * \frac{M_t^h}{M_u^h} \quad \forall h \in H_t$$

[6] siehe [MN], [GLW], [LS]

- Regressieren der Barwerte C_t^h der Zahlungsflüsse gegen $(e(X_t^h))_{h \in H_t}$:
  - Berechnung der Parameter γ_t der Regression im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate:

$$\gamma_t = \arg\min_{\gamma \in \mathbb{R}^k} \sum_{h=1}^{H} (C_t^h - \gamma * e(X_t^h)) \quad \text{mit } e = (e_1, \ldots, e_k)'$$

    Die Funktion e beschreibt hierbei eine Vektorfunktion und das zugehörige Produkt ist als Vektorprodukt zu sehen.
  - $\hat{C}_t^h = \gamma_t * e(X_t^h) \quad \forall h \in H_t$
  - Regressieren der Werte:

$$\lambda^h = t \qquad \text{falls } b_t^{S,h} > \hat{C}_t^h$$
$$F_t^h = \begin{cases} \overline{b_t^{L,h}} + b_t^{S,h} & \text{falls } b_t^{S,h} > \hat{C}_t^h \\ \overline{b_t^{L,h}} & \text{sonst} \end{cases}$$

4. **Vertragswerte:**
   Berechnung des Wertes der Variablen Annuität zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$V_0 = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} \sum_{t=1}^{\lambda^h} \frac{F_t^h}{M_t^h}$$

Abschließend ist noch erwähnenswert, dass die Rückwärtsberechnung des beschriebenen Least Squares Monte Carlo Algorithmus mit den jeweiligen Todeszeitpunkten beginnt, wodurch die einzelnen Prozesse nicht über den gesamten Zeitraster $\mathbb{T}$ simuliert werden müssen. Ein alternativer Algorithmus, in welchem der Todeszeitpunkt nicht simuliert werden muss findet sich bei Bacinello et al.[7]. Das Ausbleiben der Simulation der Todeszeitpunkte bedingt allerdings, dass die Prozesse über den gesamten Zeitraster simuliert werden müssen und der Wert des risikolosen Assets bezüglich des Sterblichkeitsrisikos angepasst werden muss.

[7] siehe [BBM]

5 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse dieser Arbeit präsentiert. Sämtliche Berechnungen wurden auf einem Mac Book Pro (Mitte 2009) und mit Hilfe des Programms R durchgeführt. Die zugehörigen R-Codes sind im Anhang zu finden.

Die Werte des statischen Bewertungsansatzes (Monte Carlo Methode) wurden in 3 Datengruppen zu je 20.000 Simulationen und jene des gemischten Bewertungsansatzes (Least Squares Monte Carlo Methode) in 3 Datensätzen zu je 10.000 Simulationen durchgeführt. Bei den Werten in diesem Abschnitt handelt es sich um die Durchschnittswerte der 3 Datengruppen. Die einzelnen Werte pro Datengruppe sind ebenfalls im Anhang zu finden.

5.1 Grunddaten der erzeugten Prozesse

In diesen Abschnitt sollen die Grunddaten der für die Simulation der einzelnen Prozesse nötigen Parameter dargestellt werden. Aus Gründen der Vergleichbarkeit wurden sie in den meisten Fällen gleich jenen Parametern von Bacinello et al.[1] gewählt.

5.1.1 Sterblichkeitsrisiko

In den Parametern des Sterblichkeitsrisikos finden sich Unterschiede zu den Parameter von Bacinello et al., da die weibullverteilte Sterbeintensiät $\hat{\mu}(t)$ durch einen Least-Squares Fit an den Überlebenswahrscheinlichkeiten der österreichischen Sterbetafel *AVÖ 2005 R unisex* erzeugt wurde.

So ergeben sich für die Parameter c_1 und c_2 der Sterbeintensität $\hat{\mu}(t)$ für eine 60-jährige Person mit Geburtsjahr 1964 die Werte

$$\begin{aligned} c_1 &= 88.47 \\ c_2 &= 10.79 \ . \end{aligned}$$

Die restlichen benötigten Parameter wurden wie bei Bacinello et al.[2] belegt:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \hat{\mu}(0) \\ \xi_\mu &= 0.50 \\ \sigma_\mu &= 0.03 \ . \end{aligned}$$

[1] siehe [BMOP]
[2] siehe [BMOP]

Da die Sterbeintensität μ_t zusätzlich den Schwankungen einer Brownschen Bewegung ausgesetzt ist, ergeben sich leichte Unterschiede in der Betrachtung der Restlebensdauer. So unterscheiden sich bei Betrachtung einer Datengruppe die erwarteten Restlebensdauern unter den unterschiedlichen Sterbeintensitäten:

$$\mathbb{E}[\tau] = 26.63$$
$$\mathbb{E}[\hat{\tau}] = 24.88 \ .$$

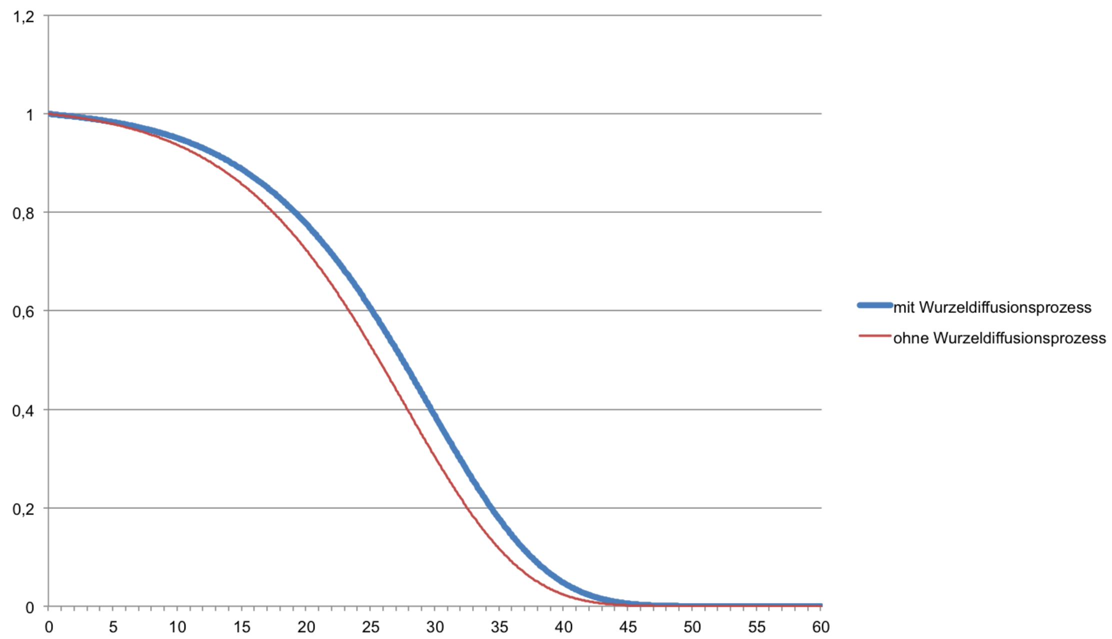

Abbildung 5.1: Überlebenswahrscheinlichkeiten unter μ_t und $\hat{\mu}(t)$

Zur besseren Verständlichkeit sind in Abbildung 5.1 und in Abbildung 5.2 noch die Überlebenswahrscheinlichkeiten beziehungsweise die Verteilungsfunktion unter den unterschiedlichen Sterbeintensitäten abgebildet.

5.1.2 Finanzdaten

Bei der Berechnung der Finanzdaten wird stets von einer Einmalprämie $P = 100$ und einer risikolosen Verzinsung zum Versicherungsbeginn von 3% ausgegangen. Dadurch ergeben sich als Startwerte für den Referenzfonds, den Zeitwert der Variablen Annuität und den risikolosen Zinssatz:

$$S_0 = 100$$
$$A_0 = 100$$
$$r_0 = 0.03 \ .$$

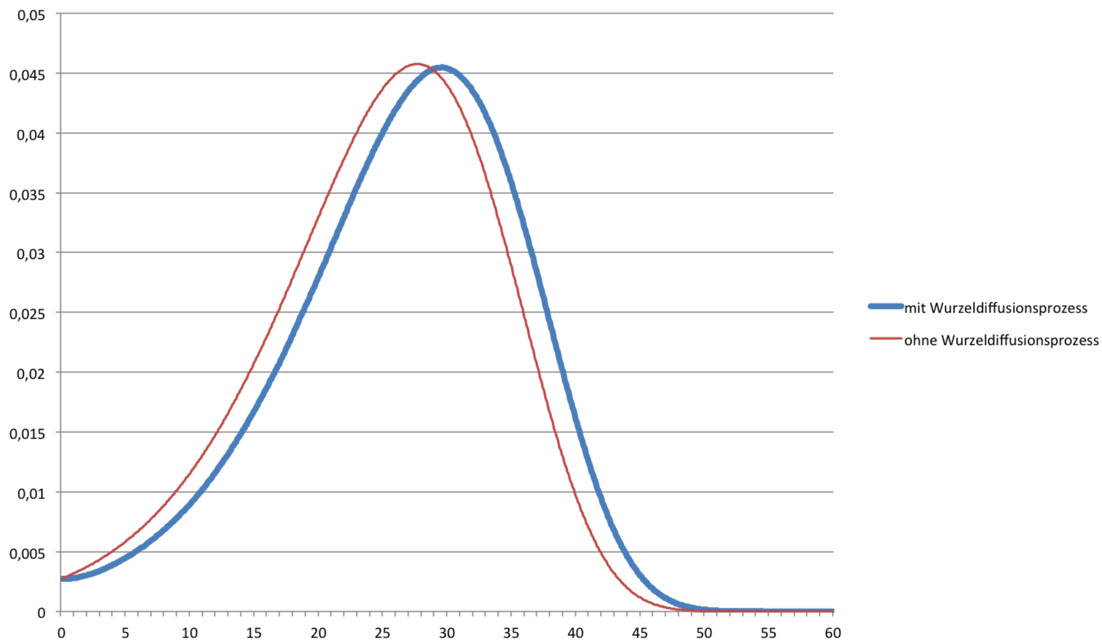

Abbildung 5.2: Verteilungsfunktionen unter μ_t und $\hat{\mu}(t)$

Die restlichen benötigten Parameter wurden wie bei Bacinello et al.[3] belegt:

$$\begin{aligned} \xi_r &= 0.60 \quad \xi_K = 1.50 \\ \zeta_r &= 0.03 \quad \zeta_K = 0.04 \\ \sigma_r &= 0.03 \quad \sigma_K = 0.40 \\ \rho_{SK} &= -0.70 \ . \end{aligned}$$

5.2 Ergebnisse im statischen Bewertungsansatz

Im folgenden Abschnitt wird eine 5-jährige Versicherung ($T = 5$) mit Ablebensgarantie (GMDB), mit Erlebensgarantie (GMAB) und mit Garantien für den Er- und Ablebensfall (GMDB + GMAB) betrachtet, wobei zwischen Garantien mit fixierter Summe und vom Zeitwert abhängigen Garantien unterschieden wird. Für die Garantie mit fixierter Summe wurde die Garantieverzinsung der Prämien gewählt (vergleiche Beispiel 2.2.3) und die zeitabhängige Garantie wird durch die „einrastende“ Garantie (vergleiche Beispiel 2.2.4) dargestellt.
Danach werden die Ergebnisse für eine 5-jährige Versicherung mit sofortbeginnenden Rückkaufsgarantien (GMWB mit $T = 0$ und $T' = 5$) verglichen. Die Ablebensleistungen werden dabei abhängig und unabhängig vom Leben der versicherten Person (siehe Definition 3.2.8) gewählt.

[3]siehe [BMOP]

In den folgenden Diagrammen wird jeweils der Wert der Variablen Annuität V_0 zum Versicherungsbeginn abhängig von der Kostenrate unter unterschiedlichen Garantien dargestellt. Die faire Kostenrate φ^* ist in diesen als Wert der x-Achse zum y-Wert 100, was der angenommenen Einmalprämie $P = 100$ entspricht, ablesbar.

5.2.1 Garantieverzinsung der Prämien

Der Wert der Variablen Annuität zum Versicherungsbeginn wird in diesem Abschnitt abhängig von der Kostenrate unter verschiedenen Garantieverzinsungen δ der Prämien im Versicherungsfall dargestellt. Das bedeutet die Garantie im Erlebensfall und im Ablebensfall entspricht

$$G_t^j = 100 * e^{\delta t} \quad \text{mit } j = \begin{cases} D & \text{falls Garantie für den Ablebensfall eingeschlossen} \\ A & \text{falls Garantie für den Erlebensfall eingeschlossen.} \end{cases}$$

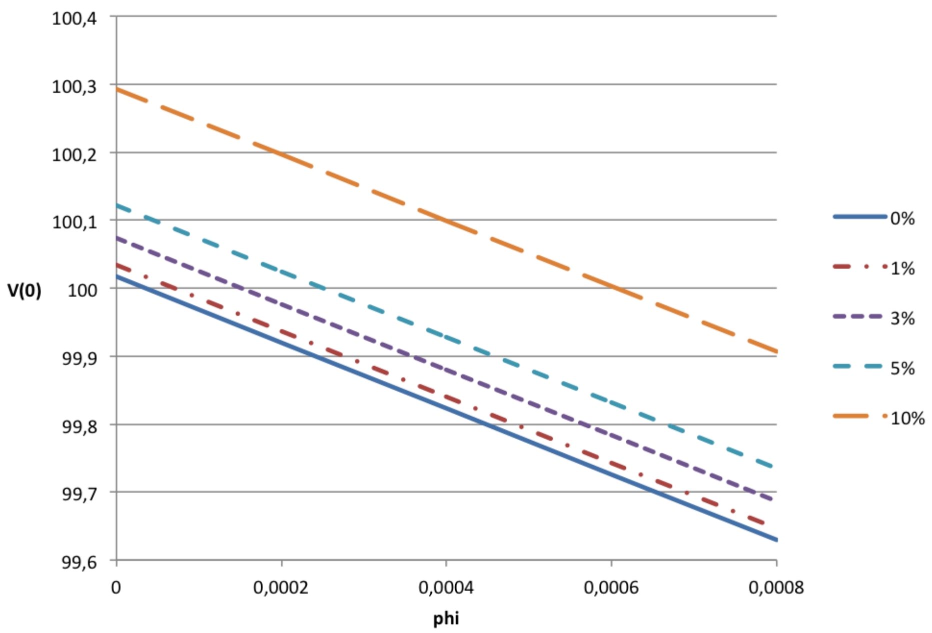

Abbildung 5.3: Wert der Variablen Annuität V_0 einer Versicherung mit Ablebensgarantie abhängig von der Kostenraten φ unter verschiedenen Garantiezinsen δ

In Abbildung 5.3 wird eine Versicherung mit einer Garantie für den Ablebensfall dargestellt. Es ist leicht ersichtlich, dass die Garantie für Garantiezinse von 0% bis 10% mit den fairen Kostenraten φ^* zwischen 0% und $0,08\%$ nahezu wertlos ist. Dies kann man allerdings der verhältnismäßig kurzen Versicherungsdauer im Vergleich zum Alter der

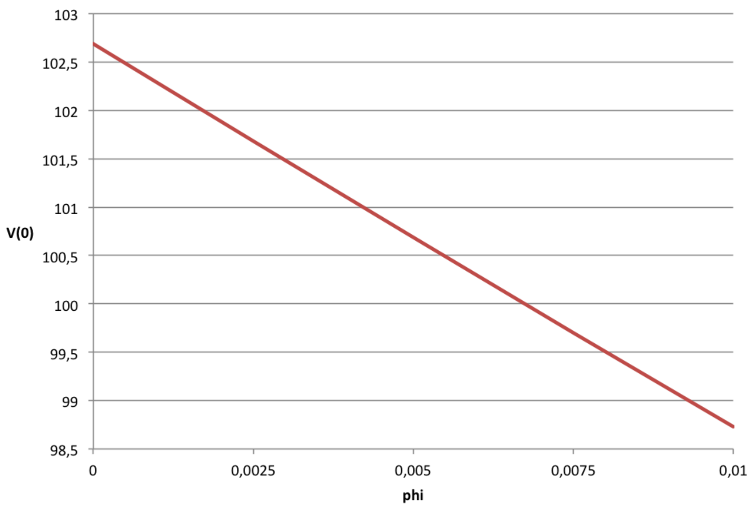

Abbildung 5.4: Wert der Variablen Annuität V_0 einer Versicherung mit Ablebensgarantie einer 80-jährigen Person und einem Garantiezins $\delta = 0,03$ abhängig von der Kostenraten φ

versicherten Person schulden. Die Garantie wirkt nur in sehr seltenen Fällen, wodurch sich die Kosten für diese reduzieren.
Um dies zu veranschaulichen ist in Abbildung 5.4 eine 5-jährige Versicherung mit einer garantierten Verzinsung der Einmalprämie im Ablebensfall von 3% für eine 80-jährige Person dargestellt. Vergleicht man nun die fairen Kostenraten, so erhöhen sich diese durch die 20 Jahre ältere versicherte Person von circa $0,02\%$ auf $0,7\%$.

Abbildung 5.5 zeigt eine Versicherung mit einer Garantie im Erlebensfall. Die fairen Kostenraten φ^* fallen hier im Vergleich zur Garantie im Ablebensfall mit Werten zwischen 4% und 14% für Garantieverzinsungen von 0% bis 3% beträchtlich höher aus. Bei einem Garantiezins von 5% erkennt man zusätzlich, dass nicht immer eine Kostenrate gefunden werden kann, welche den Vertrag fair gestaltet. In diesen Fällen reicht das Fondsvermögen nicht aus, um über die gesamte Laufzeit die Kosten der Garantien zu decken. Dies geschieht, da mit steigenden Garantien auch die Kosten entsprechend steigen und somit das Fondsvermögen stärker reduziert wird. Ab einem gewissen Zeitpunkt können die Fondszuwächse diese Reduktionen nicht mehr kompensieren.

Abschließend ist in Abbildung 5.6 noch eine Versicherung dargestellt, welche Garantien sowohl für den Ablebensfall als auch für den Erlebensfall bietet. Man kann erkennen, dass hier bereits für eine Garantieverzinsung von 3% keine faire Kostenrate φ^* mehr auffindbar ist. Dies liegt daran, dass zu den Garantien im Erlebensfall noch die Garantien im Ablebensfall hinzukommen.
Am Beispiel des Garantiezinses von 3% ist auch ein weiteres Phänomen ersichtlich. Während die faire Kostenrate bei der reinen Garantie im Erlebensfall klar unter 14% und bei der Garantie nur im Ablebensfall unter $0,02\%$ liegt, reichen bei einer Kombina-

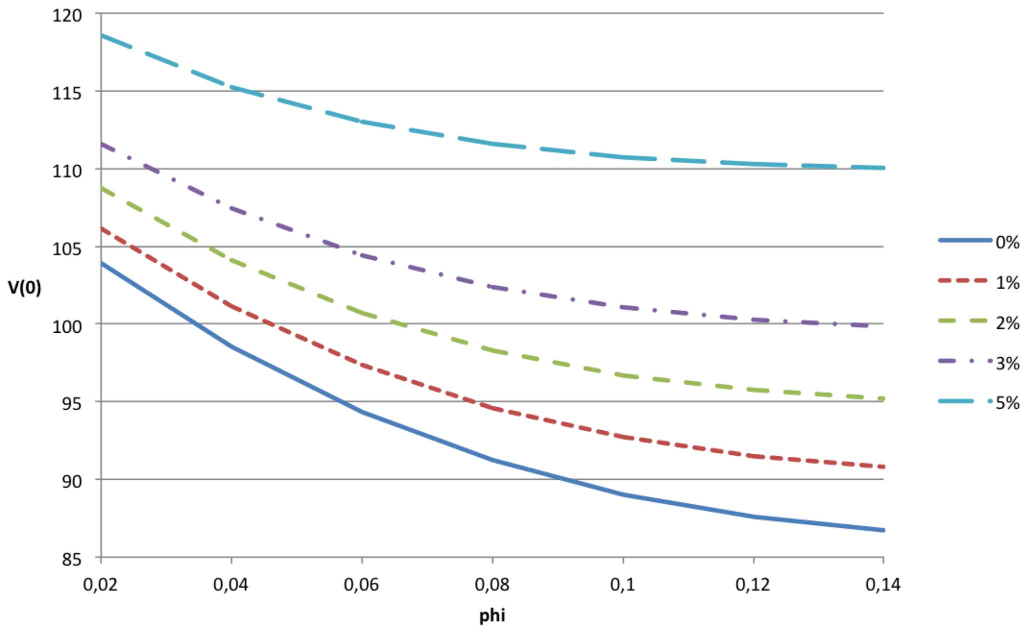

Abbildung 5.5: Wert der Variablen Annuität V_0 einer Versicherung mit Erlebensgarantie abhängig von der Kostenraten φ unter verschiedenen Garantiezinsen δ

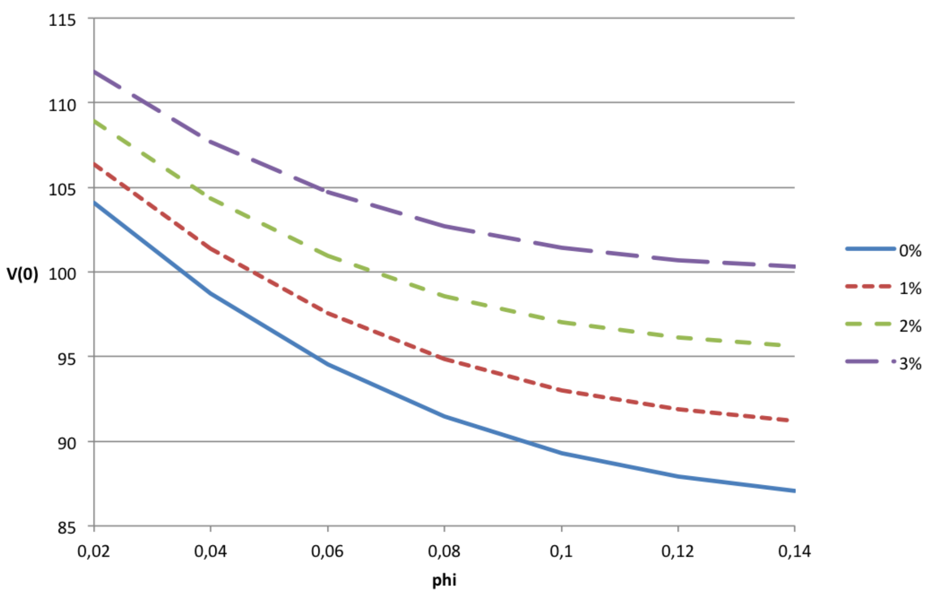

Abbildung 5.6: Wert der Variablen Annuität V_0 einer Versicherung mit Er- und Ablebensgarantie abhängig von der Kostenraten φ unter verschiedenen Garantiezinsen δ

tion beider Garantien die 14% nicht mehr um den Vertrag fair zu gestalten. Die Summe der fairen Kostenraten der Einzelversicherungen muss somit unter jener der Kombination der Garantien liegen, obwohl für die Berechnung das selbe Risikomaß und die selben Annahmen an das Sterblichkeitsrisiko verwendet wurden. Dieses Verhalten lässt sich auf die Art der Kostenentnahme zurückführen, da keine fixe Summe sondern ein Prozentanteil des aktuellen Fondsvermögen entnommen wird. Da höhere Garantien eine höhere Kostenrate zur Folge haben, verringert sich auch das Fondsvermögen, und damit die Basis für zukünftige Kostenentnahmen, in einem größerem Ausmaß. Somit muss die Kostenrate der Versicherung mit Kombination der Garantien höher sein als die Summe derjeniger Kosten, welche die Verträge mit jeweils einer einzelnen Garantie fair gestalten, um in Summe die gleichen Kosten zu entnehmen.

5.2.2 „einrastende“ Garantie

Der Wert der Variablen Annuität zu Versicherungsbeginn abhängig von der Kostenrate wird in diesem Abschnitt unter verschiedenen Update-Intervallen $[t_i; t_j]$ mit $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < T$ und der „einrastenden“ Garantie im Versicherungsfall dargestellt. Das bedeutet die Garantie im Erlebensfall und im Ablebensfall entspricht

$$G_t^j = \max_{t_i < t} A_{t_i} \quad \text{mit } j = \begin{cases} D & \text{falls Garantie für den Ablebensfall eingeschlossen} \\ A & \text{falls Garantie für den Erlebensfall eingeschlossen.} \end{cases}$$

Abbildung 5.7 zeigt wieder eine Versicherung mit Garantie im Ablebensfall. Wie bei der Garantieverzinsung ist auch hier zu erkennen, dass die gegebenen Garantien mit fairen Kostenraten zwischen 0% und 0,04% nahezu wertlos sind. Im Allgemeinen fallen die fairen Kostenraten allerdings geringer aus als bei der garantierten Verzinsung, da die Garantie nur bei schlechten Fondsentwicklungen, das heißt wenn der Wert des Zeitwerts unter einem bereits erreichten Wert liegt, wirkt. Das monatliche Update der Garantie hebt sich hierbei im Wert deutlich von den anderen betrachteten Update-Varianten ab, da die Garantiesumme wesentlich öfter aktualisiert wird. So wird hier die Garantie im Vergleich zur jährlichen Variante beispielsweise zwölf mal so oft überprüft und gegebenfalls angepasst.
Erwähnenswert ist auch, dass der Wert der Versicherung mit einer monatlichen Aktualisierung der Garantiesumme unter den in dieser Arbeit getroffenen Voraussetzungen bereits eine Art obere Schranke unter den Update-Varianten darstellt, da durch die monatliche Simulation der Grundprozesse stets der während der Laufzeit höchste erreichte Zeitwert im Versicherungsfall garantiert wird.

In Abbildung 5.8 wird eine Versicherung mit einer „einrastenden“ Garantie im Erlebensfall dargestellt. Wie auch bei der Garantieverzinsung liegt hier die faire Kostenrate mit Werte zwischen 4% und 9% deutlich über jener der Garantie im Ablebensfall. Weiters ist hier schön ersichtlich, wie der Wert der Garantie von der Häufigkeit der Updates

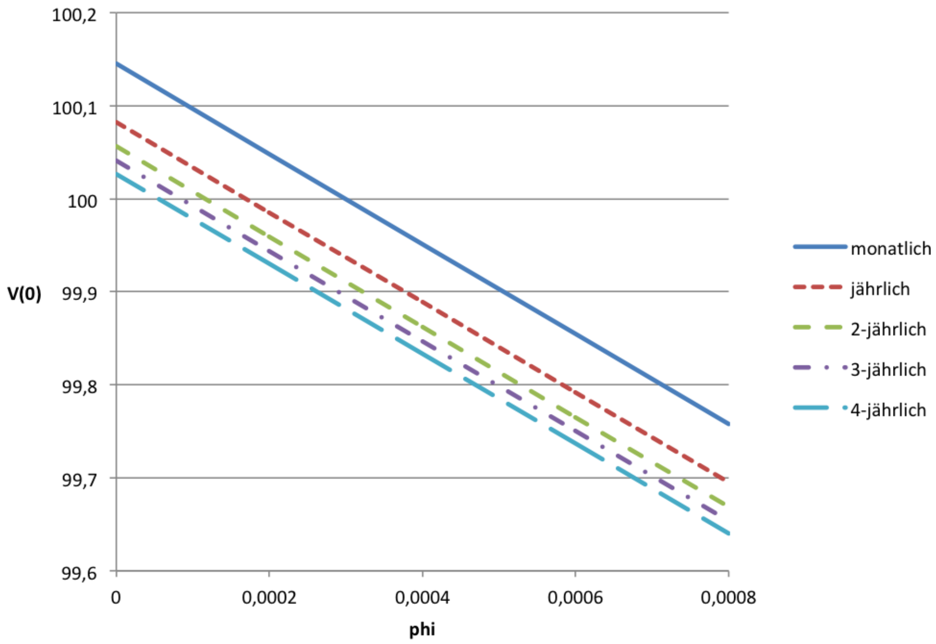

Abbildung 5.7: Wert der Variablen Annuität V_0 einer Versicherung mit Ablebensgarantie abhängig von der Kostenraten φ unter verschiedenen Update-Intervallen

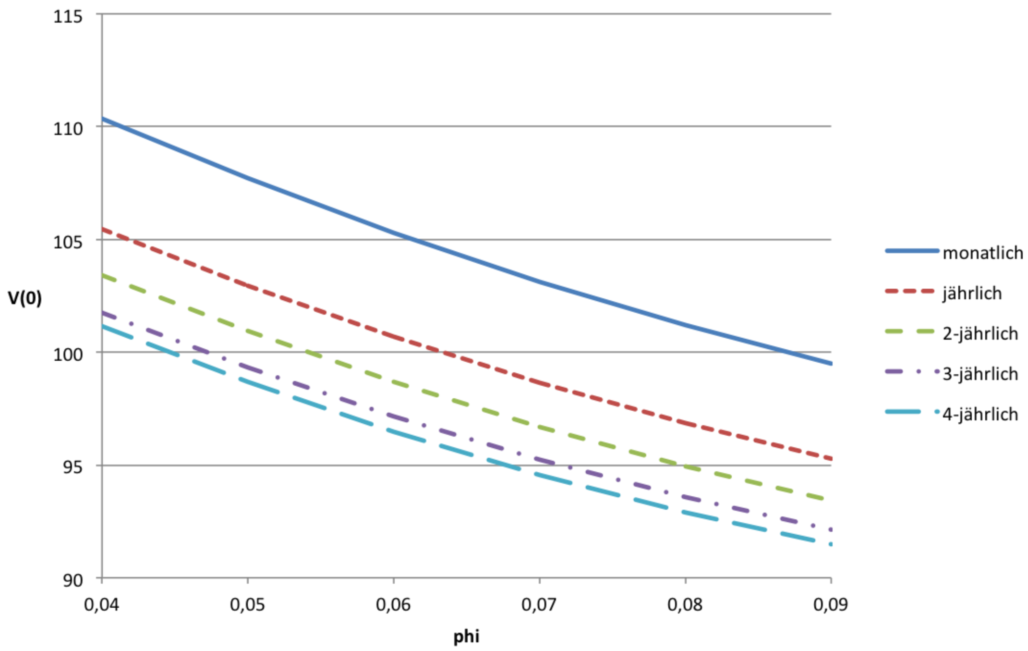

Abbildung 5.8: Wert der Variablen Annuität V_0 einer Versicherung mit Erlebensgarantie abhängig von der Kostenraten φ unter verschiedenen Update-Intervallen

abhängig ist. Man erkennt, dass bei jährlicher Aktualisierung die Garantiesumme doppelt beziehungsweise vier mal so oft angepasst wird, als wie bei 2- beziehungsweise 3- und 4-järchlichem Update. Der kleine Unterschied zwischen den beiden letzteren Varianten, welche beide bei einer Versicherungsdauer von fünf Jahren nur jeweils einen Aktualisierungszeitpunkt haben, entsteht dabei durch die unterschiedlichen Zeitpunkte an denen das Update durchgeführt wird.

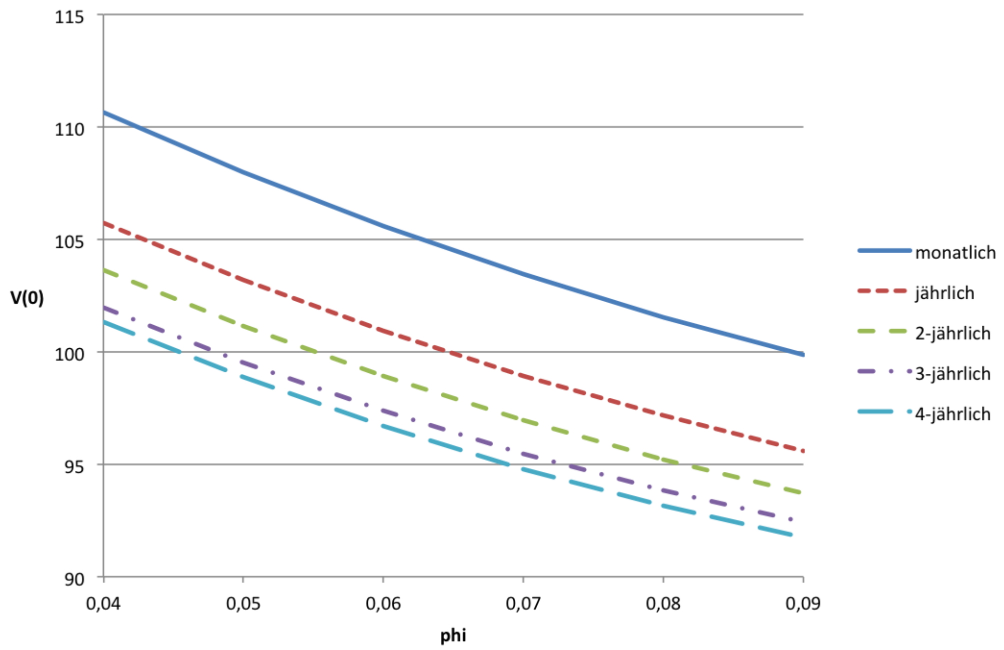

Abbildung 5.9: Wert der Variablen Annuität V_0 einer Versicherung mit Er- und Ablebensgarantie abhängig von der Kostenraten φ unter verschiedenen Update-Intervallen

Abbildung 5.9 zeigt eine Versicherung mit einer Kombination aus Garantien im Ablebensfall und im Erlebensfall. Auch hier ist, gleich der Garantieverzinsung, erkennbar, dass die faire Kostenrate der Kombination über der Summe jener der Einzelversicherungen liegt. Die Abhängigkeit von der Häufigkeit der Aktualisierungen ist ebenfalls wieder ersichtlich.

Generell fällt bei der zeitabhängigen Garantie auf, dass im Gegensatz zur Garantieverzinsung der Prämien in jedem Fall eine faire Kostenrate ermittelt werden kann. Das kann unter anderem darauf zurückgeführt werden, dass bei höherer Kostenentnahme mit dem Zeitwert auch die Basis für die entsprechenden Garantien dementsprechend niedriger sind und somit die Garantiesummen wieder geringer ausfallen.

5.2.3 Rückkaufsgarantien

In diesem Abschnitt wird der Wert der Variablen Annuität mit Rückkaufsoptionen zum Versicherungsbeginn abhängig von der Kostenrate dargestellt. Dabei wird bei der Ablebensleistung zwischen der vom Leben der versicherten Person unabhängigen und abhängigen Variante unterschieden. Die Einmalprämie wird dabei als Basis W_t der Rückkaufsoption verwendet und die jährliche Rückkaufsrate β_t entspricht dem Kehrwert der Laufzeit der Versicherung. Das bedeutet die Rückkaufsgarantie entspricht

$$b_t^W = \frac{1}{T'} * 100 \quad \text{mit } T' = 5$$

und die Ablebensleistung wird dargestellt durch

$$b_t^D = \begin{cases} \max\{A_t, R_t = \sum_{i=\min\{n:\ t \le T_n \le T'\}}^{m} b_{T_i}^W * \mathbb{1}_{t \ge T_i}\} & \text{falls unabhängig vom Leben} \\ \max\{A_t, 0\} & \text{falls abhängig vom Leben.} \end{cases}$$

Somit wird bei der unabhängigen Variante zumindest die Einmalprämie über die Laufzeit hinweg an den Versicherungsnehmer ausgezahlt.

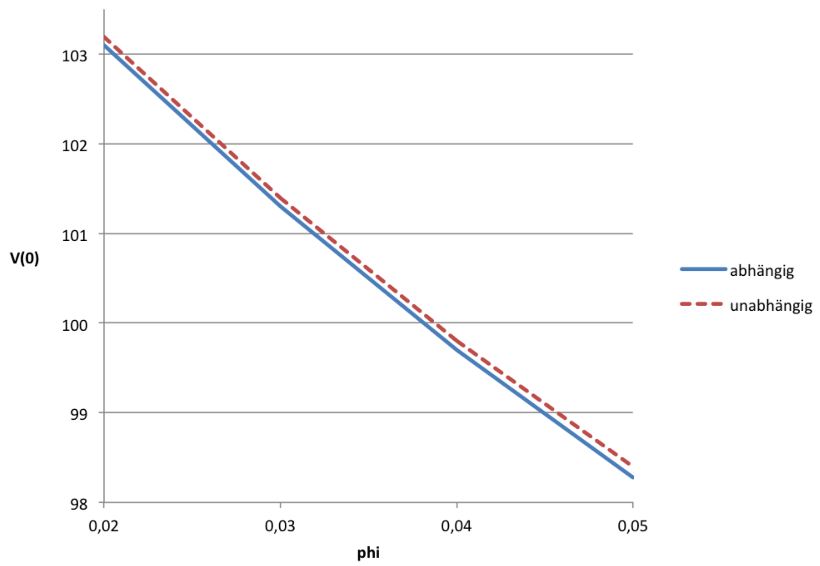

Abbildung 5.10: Wert der Variablen Annuität V_0 einer Versicherung mit Rückkaufsgarantien abhängig von der Kostenraten φ und abhängig bzw. unabhängig von der Lebensdauer der versicherten Person

In Abbildung 5.10 wird eine 5-jährige Versicherung mit einer vom Leben der 60-jährigen versicherten Person abhängigen und unabhängigen Rückkaufsgarantie dargestellt. Man kann erkennen, dass sich die Garantien mit den fairen Kostenraten φ^* von knapp unter

4% kaum unterscheiden. Dies kann man, ähnlich den Versicherungen mit Ablebensgarantien, der verhältnismäßigen kurzen Versicherungsdauer im Vergleich zum Alter der versicherten Person zuschreiben, wodurch sich nur in sehr seltenen Fällen unterschiedliche Zahlungsströme und somit unterschiedliche Kostenraten ergeben. Um dies zu veranschaulichen, wird in den folgenden Abbildungen 5.11 und 5.12 einerseits das Alter und andererseits die Laufzeit der Versicherung erhöht.

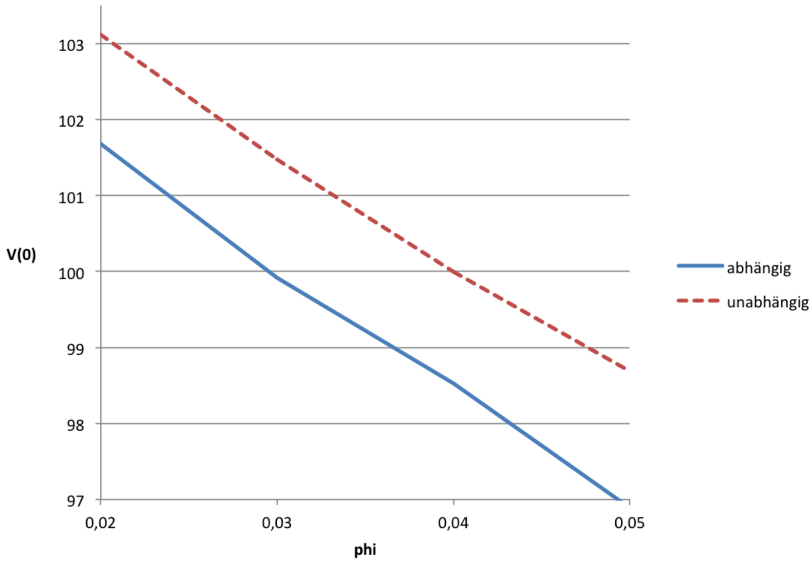

Abbildung 5.11: Wert der Variablen Annuität V_0 einer Versicherung mit Rückkaufsgarantien abhängig von der Kostenraten φ und abhängig bzw. unabhängig von der Lebensdauer einer 80-jährigen Person

Bei der in Abbildung 5.11 dargestellten Versicherung wurde anstatt mit einer 60-jährigen mit einer 80-jährigen versicherten Person gerechnet. Während sich dadurch die faire Kostenrate φ^* der Versicherung mit einer vom Leben unabhängigen Rückkaufsgarantie mit einem Wert von circa 4% kaum ändert, sinkt die faire Kostenrate des Versicherungsvertrages mit der vom Leben abhängigen Rückkaufsgarantie um ein Prozent auf circa 3%. Dies passiert aufgrund der höheren Anzahl an Ablebensfällen die durch das höhere Alter in der 5-jährigen Laufzeit auftreten.

Zum Abschluss zeigt Abbildung 5.12 eine Versicherung einer 60-jährigen versicherten Person mit einer Laufzeit von 10 Jahren anstatt den in Abbildung 5.10 dargestellten 5 Jahren. Hier sinkt die faire Kostenrate φ^* beider Versicherungen auf einen Wert um 2%. Das liegt an der Konstruktion der Garantie mit einer jährliche Rückkaufsrate β_t, die dem Kehrwert der Laufzeit der Versicherung entspricht. Dadurch wird die Höhe der garantierten Rückkaufszahlungen und somit auch der fairen Kostenrate geringer. Man kann jedoch trotzdem erkennen, dass der Unterschied in der fairen Kostenrate zwischen der vom Leben abhängigen und unabhängigen Rückkaufsgarantie verhältnismäßig größer

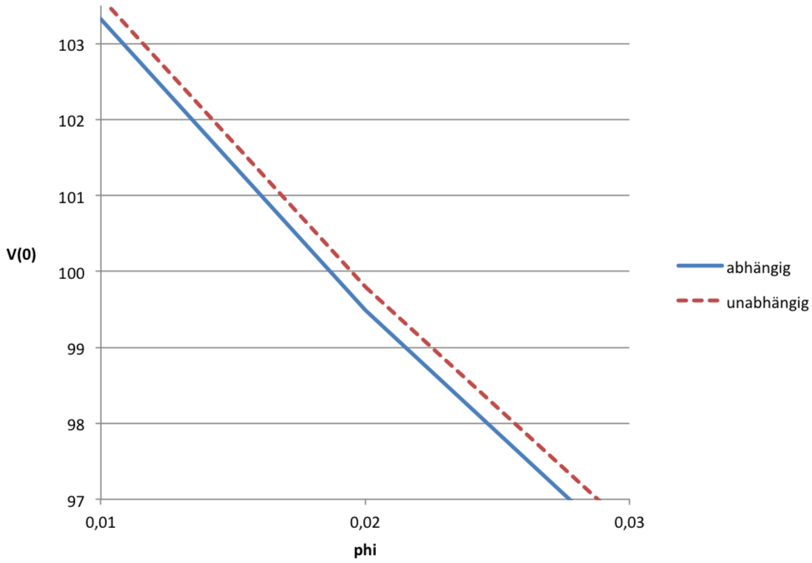

Abbildung 5.12: Wert der Variablen Annuität V_0 einer Versicherung mit Rückkaufsgarantien abhängig von der Kostenraten φ und abhängig bzw. unabhängig von der Lebensdauer bei 10-jähriger Versicherungsdauer

wird.

5.3 Ergebnisse im gemischten Bewertungsansatz

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse des gemischten Bewertungsansatzes beleuchtet. Wie zuvor werden Garantien für den Er- und Ablebensfall (GMDB + GMAB) mit fixierter Garantiesumme und vom Zeitwert abhängiger Höhe, wobei für die Garantien wiederum die Garantieverzinsung der Prämien und die „einrastende" Garantie gewählt wurden, für eine 5-jährige Versicherung ($T = 5$) dargestellt. Danach wird eine vom Leben der versicherten Person abhängige und unabhängige sofortbeginnende Rückkaufsgarantie mit selber Versicherungslaufzeit (GMWB mit $T = 0$ und $T' = 5$) veranschaulicht.

5.3.1 Garantieverzinsung der Prämien

Für den gemischten Bewertungsansatz wird der Wert der Variablen Annuität zum Versicherungsbeginn abhängig von der Kostenrate und mit einer Garantieverzinsungen δ von 2% der Prämien im Versicherungsfall dargestellt. Dabei wird zwischen verschiedenen Rückkaufswertabschlägen p unterschieden. Das bedeutet die Garantie im Er- und Ablebensfall entspricht

$$G_t^j = 100 * e^{0,02*t} \quad j \in \{E, A\}$$

und der Rückkaufswert zum Zeitpunkt $t > 0$ ergibt sich aus

$$b_t^S = \begin{cases} A_t * (1-p) & \text{falls } t < T \\ 0 & \text{falls } t \geq T. \end{cases}$$

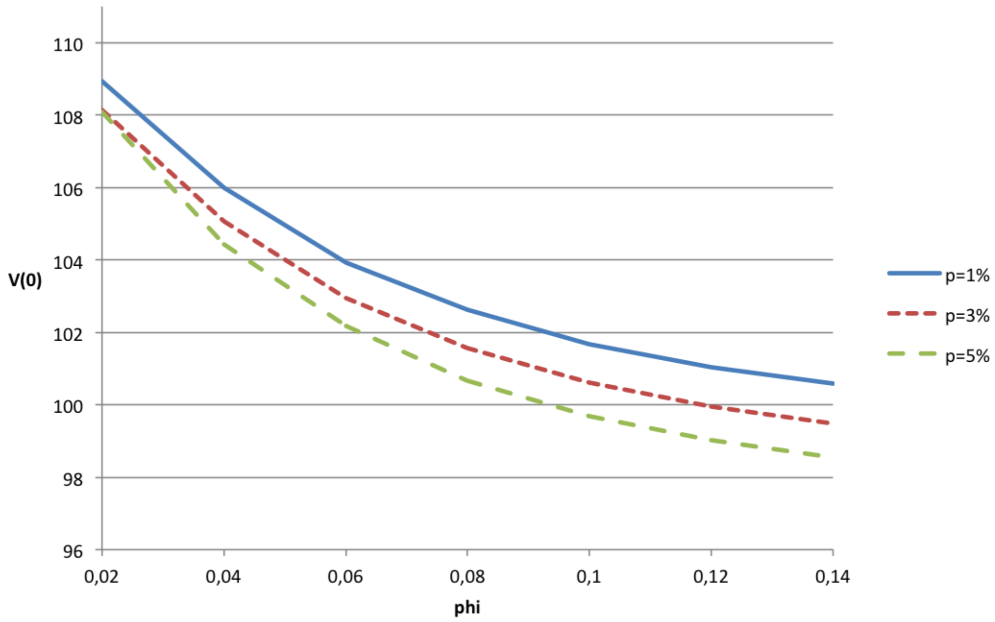

Abbildung 5.13: Wert der Variablen Annuität V_0 einer Versicherung mit Er- und Ablebensgarantie mit Garantieverzinsung von 2% abhängig von der Kostenraten φ unter verschiedenen Rückkaufswertabschlägen

In Abbildung 5.13 wird eine Versicherung mit einer Garantieverzinsung der Prämie von 2% sowohl für den Ablebensfall als auch für den Erlebensfall im gemischten Bewertungsansatz dargestellt. Man kann erkennen, dass der Wert der Variablen Annuität im gemischten Bewertungsansatz neben dem Garantiezins auch sehr wesentlich von den Rückkaufswertabschlägen abhängt. Während die faire Kostenrate φ^* für Rückkaufswertabschläge von 5% und 3% in etwa bei $9,5\%$ und 12% liegt, kann bei einem Abschlag von 1% keine faire Kostenrate mehr gefunden werden.
Vergleicht man dazu Abbildung 5.14, so kann man erkennen, dass der Wert der Variablen Annuität zum Versicherungsbeginn mit dem gemischten Bewertungsansatz im Allgemeinen höher als mit dem statischen Bewertungsansatzes liegt. Den Grund hierfür findet man

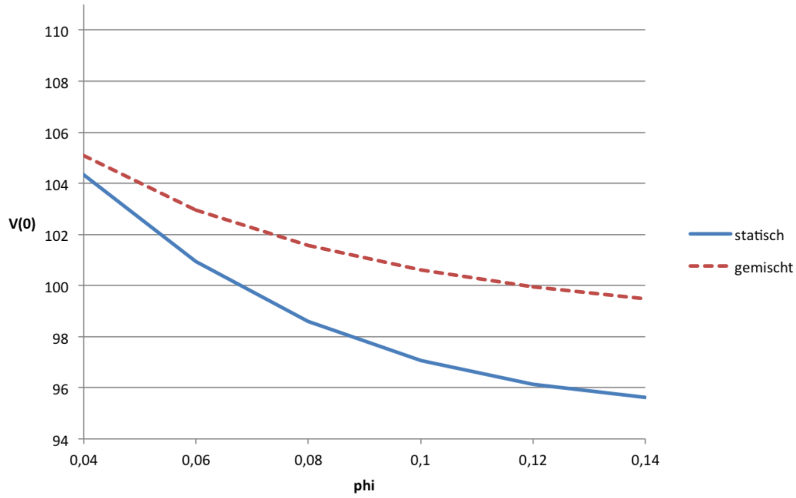

Abbildung 5.14: Vergleich der Werte der Variablen Annuität V_0 im statischen und im gemischten Bewertungsansatz mit 3% Rückkaufswertabschlag einer Versicherung mit Er- und Ablebensgarantie mit Garantieverzinsung von 2%

in der Tatsache, dass es bei einem hohen Zeitwert der Variablen Annuität vor dem Versicherungsende für den Versicherungsnehmer interessant sein kann frühzeitig den Vertrag rück zu kaufen, da durch die sofortige Entnahme die Kosten für die restliche Vertragslaufzeit eingespart werden können. Dieses Verhalten wird bei der Berechnung berücksichtigt und erhöht den Wert der Variablen Annuität und damit die faire Kostenrate. Wird ein höherer Rückkaufwertabschag verrechnet, so werden Rückkäufe weniger interessant und der Wert der Variablen Annuität und somit der Wert der fairen Kostenrate sinken, wie man in Abbildung 5.13 gut erkennen kann. Der Wert der fairen Kostenrate im gemischten Bewertungsansatz nähert sich somit mit steigenden Rückkaufswertabschlägen jenem des statischen Bewertungsansatzes an.

5.3.2 „einrastende“ Garantie

In diesem Abschnitt wird der Wert der Variablen Annuität zum Versicherungsbeginn abhängig von der Kostenrate einer „einrastenden“ Garantie im Versicherungsfall mit monatlichen und 3-jährigem Update-Intervall $[t_i; t_j]$ mit $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < T = 5$ dargestellt. Dabei wird wieder zwischen verschiedenen Rückkaufswertabschlägen p unterschieden, womit die Garantie im Er- und Ablebensfall

$$G_t^j = \max_{t_i < t} A_{t_i} \quad j \in \{E, A\} \quad \text{mit} \begin{cases} t_{i+1} = t_i + \frac{1}{12} & \text{bei monatlichem Update} \\ t_1 = 3 & \text{bei 3-jährigem Update} \end{cases}$$

entspricht. Der Rückkaufswert zum Zeitpunkt $t > 0$ ergibt sich wie im Fall der Garantieverzinsung aus

$$b_t^S = \begin{cases} A_t * (1-p) & \text{falls } t < T \\ 0 & \text{falls } t \geq T. \end{cases}$$

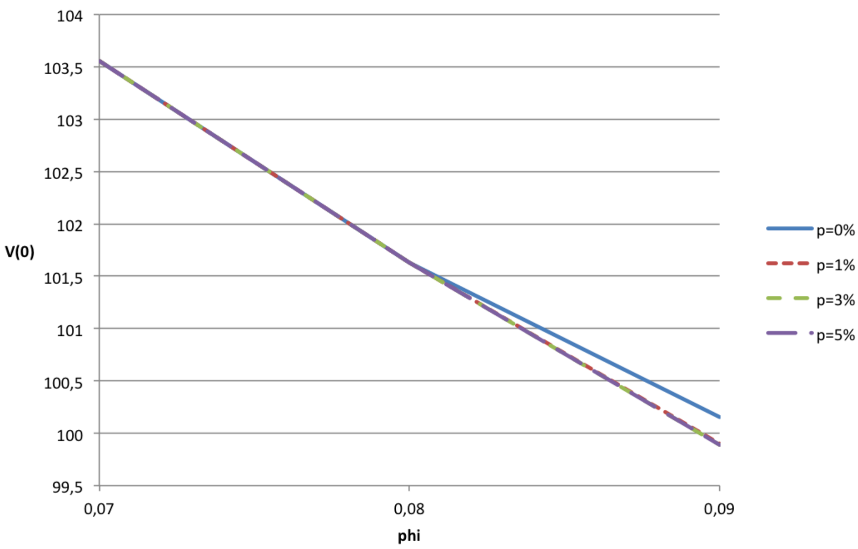

Abbildung 5.15: Wert der Variablen Annuität V_0 einer Versicherung mit Er- und Ablebensgarantie mit monatlichem Update-Intervall abhängig von der Kostenraten φ unter verschiedenen Rückkaufswertabschlägen

Die erste Abbildung 5.15 zeigt eine Versicherung mit einer „einrastenden“ Garantie mit monatlichem Update-Intervall der Garantiesumme im Ab- und Erlebensfall im gemischten Bewertungsansatz. Hier ist erkennbar, dass es kaum Unterschiede bei unterschiedlichen Rückkaufswertabschlägen gibt. So liegt die faire Kostenrate φ^* für beinahe alle Rückkaufswertabschläge knapp unter 9%. Einzig bei keiner Verrechnung eines Rückkaufswertabschlags steigt sie über die 9% Marke. Dies ist der Tatsache der monatlichen Berechnung der jeweiligen Grunddaten der Versicherung geschuldet. Die Garantie im Versicherungsfall entspricht somit immer dem höchsten bis dahin erreichten Wert, womit Rückkäufe für den Versicherungsnehmer sehr uninteressant werden.

Vergleicht man zu Abbildung 5.15 die zweite Abbildung 5.16 mit einem einem Update-Intervall der Garantie von 3 Jahren, so sieht man bereits einen bereits weit größeren Einfluss des Rückkaufswertabschlags auf die Höhe der faire Kostenrate φ^*. So variiert diese im gemischten Bewertungsansatz unter den unterschiedlichen betrachteten Abschlägen zwischen knapp unter 5% und 9%. Diese größere Streuung lässt sich damit erklären, dass bei der 5-jährigen Versicherungsdauer die Garantie unter dem 3-jährigem Update nur ein mal angepasst wird. Somit gewinnt die Option des Rückkaufes an Wert, da sich der

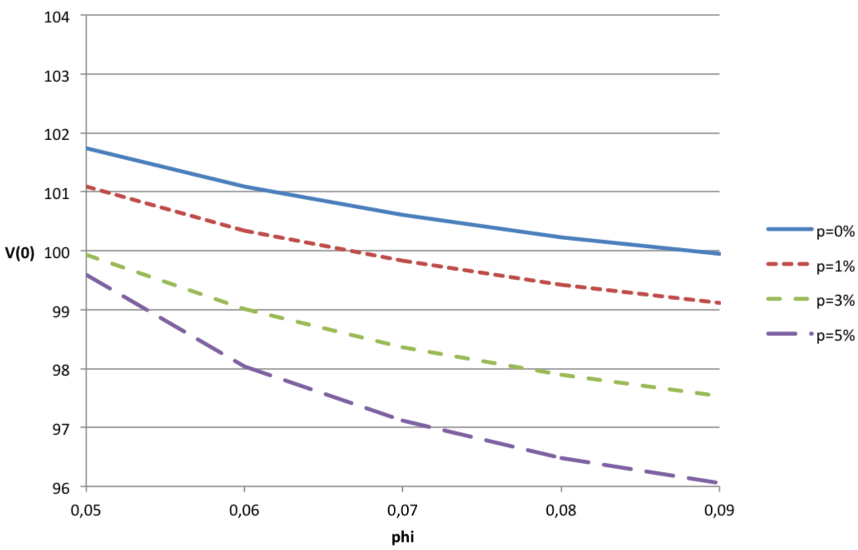

Abbildung 5.16: Wert der Variablen Annuität V_0 einer Versicherung mit Er- und Ablebensgarantie mit 3-jährigem Update-Intervall abhängig von der Kostenraten φ unter verschiedenen Rückkaufswertabschlägen

aktuelle Zeitwert der Versicherung leichter von dem garantierten Wert abheben kann.

In der letzten Abbildung 5.17 wird noch ein Vergleich zwischen dem statischen und dem gemischten Bewertungsansatz der „einrastenden" Garantie getroffen. Hier wird einmal mehr deutlich, dass der Wert des im gemischten Bewertungsansatz möglichen Rückkaufs bei einem monatlichen Update der Garantie nahezu wertlos ist und somit der Werte der fairen Kostenraten φ^* kaum zwischen den beiden Bewertungsansätzen variiert. Vergleicht man dazu das 3-monatige Update der Garantie, so geht hier die Schere bei weitem mehr auseinander und die fairen Kostenrate ohne einen entsprechenden Rückkaufswertabschlag im gemischten Bewertungsansatz ist mit 9% um mehr als 4% höher als im statischen Bewertungsansatz.
Vergleicht man abschließend noch die Höhe der fairen Kostenrate der „einrastenden" Garantie im gemischten Bewertungsansatz mit jener der Garantieverzinsung, so erkennt man, dass diese auch hier mit maximal 9% deutlich darunter liegt.

5.3.3 Rückkaufsgarantien

Der Wert der Variablen Annuität mit Rückkaufsoptionen zum Versicherungsbeginn im gemischten Bewertungsansatz abhängig von der Kostenrate φ wird wieder mit einer vom Leben der versicherten Person unabhängigen und abhängigen Variante der Ablebensleistung dargestellt. Auch hier wird die Einmalprämie P als Basis W_t der Rückkaufsoption für die jährliche Rückkaufsrate β_t, welche dem Kehrwert der Laufzeit der Versicherung entspricht, verwendet. Dargestellt werden diese Optionen für verschiedene Rückkaufsabschläge p, welche zum Zeitpunkt der Optionsausübung auf jenen Betrag, welcher den garantierten

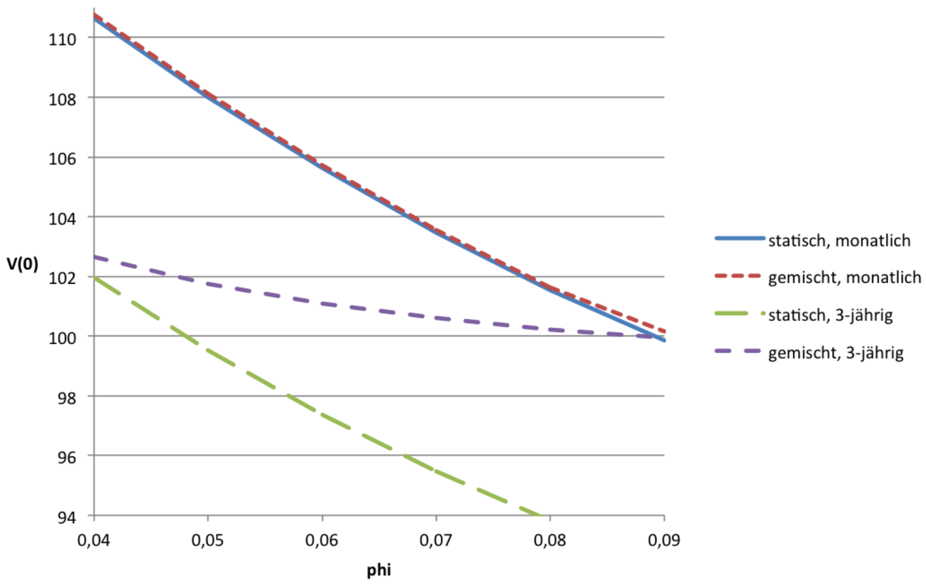

Abbildung 5.17: Vergleich der Werte der Variablen Annuität V_0 im statischen und im gemischten Bewertungsansatz ohne Rückkaufswertabschlag einer Versicherung mit Er- und Ablebensgarantie und monatlichen bzw. 3-jährigen Update-Intervallen

Rückkaufswert übersteigendt, oder auf den gesamten Zeitwert angewandt werden. Das bedeutet die Rückkaufszahlungen entsprechen

$$b_t^S = \begin{cases} A_t * (1-p) & \text{falls -) } t < T' = 5 \\ & \quad \text{-) } t \neq T_i = 12i \quad \forall i \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{T'} * 100 + \max\{A_t - (\frac{1}{T'} * 100), 0\} * (1-p) & \text{falls -) } t < T' = 5 \\ & \quad \text{-) } t = T_i = 12i \quad i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Die Ablebensleistung wird wie im statischen Fall dargestellt durch

$$b_t^D = \begin{cases} \max\{A_t, R_t = \sum_{i=\min\{n:\ t \leq T_n \leq T'\}}^{m} \frac{100}{T'} * \mathbb{1}_{t \geq T_i}\} & \text{falls unabhängig vom Leben} \\ \max\{A_t, 0\} & \text{falls abhängig vom Leben.} \end{cases}$$

In Abbildung 5.18 wird eine Versicherung mit einer vom Leben der 60-jährigen versicherten Person abhängiger Rückkaufsgarantie im gemischten Bewertungsansatz dargestellt. Auch bei der Rückkaufsoptions hat die Höhe des Rückkaufswertabschlags einen entscheidenden Einfluss auf die Höhe der fairen Kostenrate φ^*. Während diese bei einem Rückkaufwertabschlag von 5% knapp über 4% liegt, wächst sie mit einem Rückkaufswertabschlag von 1% auf über 8% an.

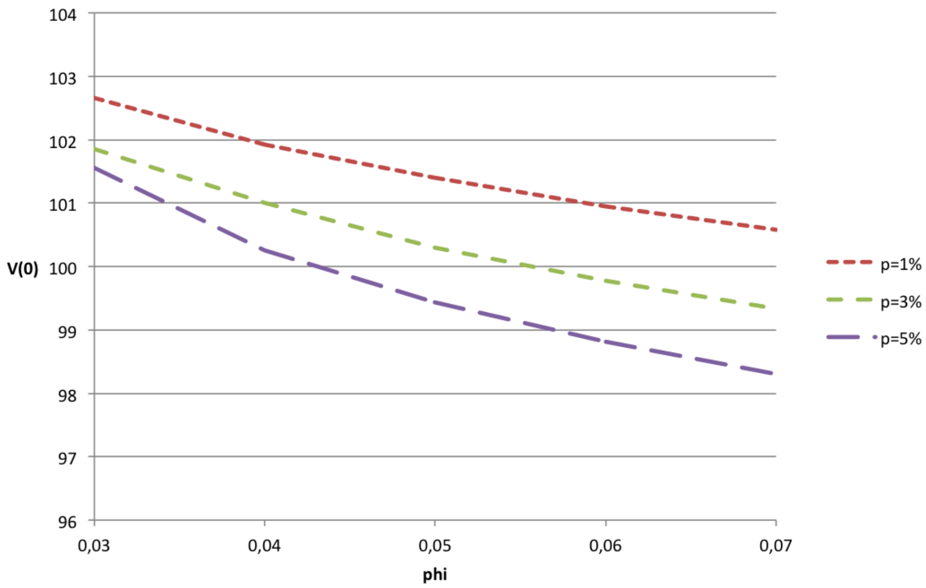

Abbildung 5.18: Wert der Variablen Annuität V_0 einer Versicherung mit von der Lebensdauer abhängigen Rückkaufsgarantien abhängig von der Kostenraten φ unter verschiedenen Rückkaufswertabschlägen

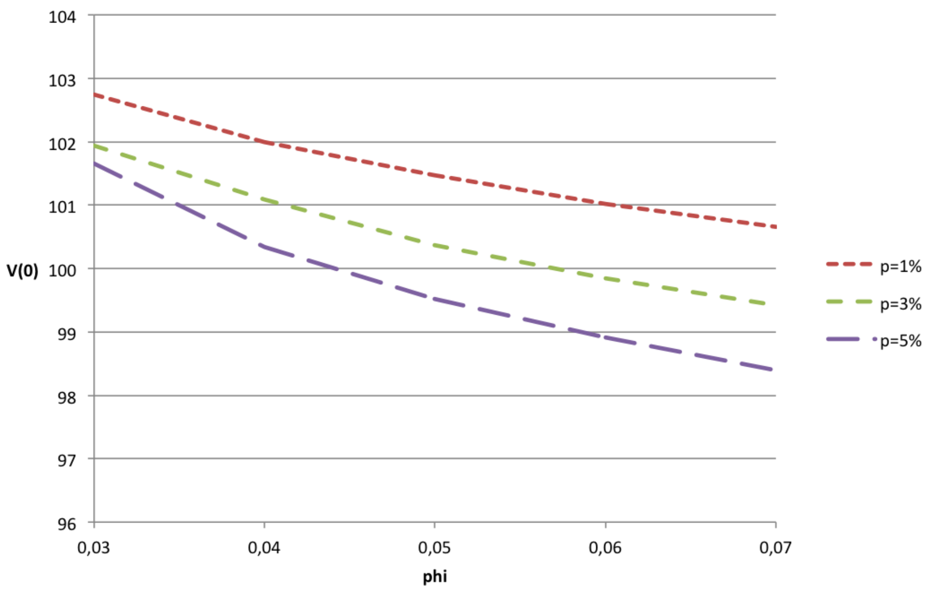

Abbildung 5.19: Wert der Variablen Annuität V_0 einer Versicherung mit von der Lebensdauer unabhängigen Rückkaufsgarantien abhängig von der Kostenraten φ unter verschiedenen Rückkaufswertabschlägen

Abbildung 5.19 zeigt eine Versicherung mit einer vom Leben der 60-jährigen versicherten Person unabhängigen Rückkaufsgarantie im gemischten Bewertungsansatz. Wie im statischen Bewertungsansatz ist auch hier der Wert der fairen Kostenrate φ^* nahezu ident mit jenem der von der Lebensdauer abhängigen Rückkaufsgarantie. Die zusätzlich möglichen Rückkaufsmöglichkeiten wirken sich somit in gleicher Weise auf die leicht unterschiedlichen Rückkaufsgarantien aus.

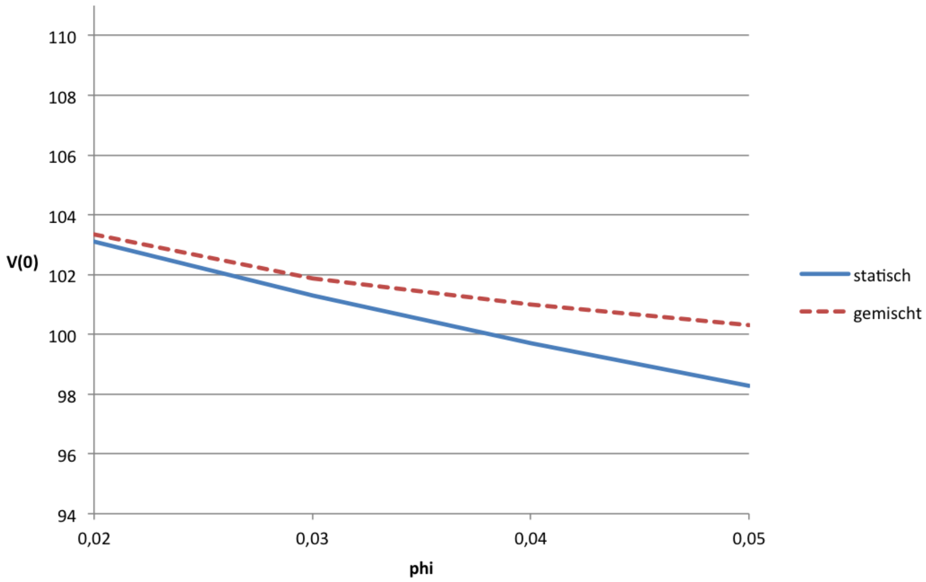

Abbildung 5.20: Vergleich der Werte der Variablen Annuität V_0 im statischen und im gemischten Bewertungsansatz mit 3% Rückkaufswertabschlag einer Versicherung mit von der Lebensdauer abhängigen Rückkaufsgarantien

Zum Abschluss wird noch einmal in Abbildung 5.20 der Vergleich der Werte des gemischten Bewertungsansatzes mit jenen des statischen Bewertungsansatzes gezogen. Bei einem Rückkaufswertabschlag von 3% liegt die faire Kostenrate φ^* im gemischten Bewertungsansatz lediglich einen Prozentpunkt höher als im statischen Bewertungsansatz.

5.4 Fazit

Variable Annuitäten bieten eine Möglichkeit die Ertragschancen und die Variabilität in der Veranlagung von fondsgebundenen Versicherungen mit Sicherheiten und Garantien zu kombinieren. Dabei ist es wichtig diese richtig zu bepreisen. Die in dieser Arbeit vorgestellten Bewertungsmethoden bieten eine Möglichkeit dafür und zeigen auch auf, dass die falsche Wahl der Kostenrate ein hohes Risiko mit sich bringen kann.
Auch der Rückkauf der Versicherung birgt ein gewisses Risiko, welches berücksichtigt werden muss. Hier sollte jedoch auch erwähnt werden, dass das Rückkaufs-Verhalten in der Realität wohl nicht komplett vergleichbar mit jenem in den Bewertungsansätzen ist. Steht im Bewertungsansatz die Maximierung des Profits im Vordergrund, so überwiegen im wahren Leben meist private Gründe und die Versicherungen werden zu ungünstigen Zeitpunkten zurückgekauft. Trotz alledem bietet speziell der Rückkaufswertabschlag ein sehr effektives Instrument um das Risiko, welches Rückkäufe mit sich bringen, zu minimieren. Wird dieser Abschlag geschickt gewählt, nähert man sich den Werten des statischen Bewertungsansatzes, welcher zwar das Rückkaufsrisiko nicht berücksichtigt, jedoch um einiges weniger rechenintensiv und somit leichter und schneller verwendbar ist.

Appendix

In diesem Abschnitt werden die für die Berechnungen verwendeten R-Codes und danach die Daten der 3 verschiedenen Datensets dargestellt.

R-Codes

Um die Darstellung übersichtlicher zu gestalten werden in weiterer Folge R-Codes in grundlegende Funktionen und Hilfsfunktionen gegliedert.

Grundlegende Funktionen

Erzeugen der Zinswerte

```
get_rt<-function(r0, xi_r, zeta_r, sigma_r, from, to, steps) {
    r<-r0

    for (i in (1:(steps*(to-from)-1))){
      r[i+1]<-abs(r[i] + xi_r*(zeta_r-r[i])*(1/steps) + sqrt(r[i])*sigma_r*
          rnorm(n=1,mean=0,sd=sqrt(1/steps)))
  }

    return(r)
}
```

Erzeugen des Aktienprozesses

```
get_St<-function(k0, xi_k, zeta_k, sigma_k, s0, roh_sk, from, to, steps, r)
    {
    K<-k0
    S<-log(s0)

    for (i in (1:(steps*(to-from)-1))) {
      Z_k<-rnorm(n=1,mean=0,sd=sqrt(1/steps))
      K[i+1]<-abs(K[i] + xi_k*(zeta_k-K[i])*(1/steps) + sqrt(K[i])*sigma_k*
          Z_k)

      S[i+1]<-abs(S[i] + (r[i]-0.5*K[i])*(1/steps) + sqrt(K[i])*(roh_sk*Z_k
          +sqrt(1-roh_sk^2)*rnorm(n=1,mean=0,sd=sqrt(1/steps))))
    }

    S<-exp(S)
    return(S)
}
```

Einlesen und Berechnung der unisex Sterbewahrscheinlichkeiten

```
get_sterbetafel<-function(gebjahr, trendhalb, ausgabe){
  d.sterbews<-read.csv("Pfad", header=TRUE, sep=";", dec=",")
  jahr<-gebjahr+d.sterbews[1]
  gtau<-trendhalb*atan((jahr-2001)/trendhalb)

  qxeinzel<-d.sterbews[2]*exp((-1)*gtau*d.sterbews[4])
  qxgruppe<-d.sterbews[3]*exp((-1)*gtau*d.sterbews[4])
  qyeinzel<-d.sterbews[5]*exp((-1)*gtau*d.sterbews[7])
  qygruppe<-d.sterbews[6]*exp((-1)*gtau*d.sterbews[7])

  papxeinzel<-rep(1,61)
  papxgruppe<-rep(1,61)
  papyeinzel<-rep(1,61)
  papygruppe<-rep(1,61)
  for(i in (62:dim(d.sterbews)[1])){
    papxeinzel[i]=papxeinzel[i-1]*(1-t(qxeinzel)[i-1])
    papxgruppe[i]=papxgruppe[i-1]*(1-t(qxgruppe)[i-1])
    papyeinzel[i]=papyeinzel[i-1]*(1-t(qyeinzel)[i-1])
    papygruppe[i]=papygruppe[i-1]*(1-t(qygruppe)[i-1])
  }

  queinzel<-(qxeinzel*papxeinzel*0.3+qyeinzel*papyeinzel*0.7)/(papxeinzel*0.3+papyeinzel*0.7)
  qugruppe<-(qxgruppe*papxgruppe*0.3+qygruppe*papygruppe*0.7)/(papxgruppe*0.3+papygruppe*0.7)

  jahr1965<-1965+d.sterbews[1]
  gtau1965<-trendhalb*atan((jahr1965-2001)/trendhalb)

  qxeinzel1965<-d.sterbews[2]*exp((-1)*gtau1965*d.sterbews[4])
  qyeinzel1965<-d.sterbews[5]*exp((-1)*gtau1965*d.sterbews[7])

  papxeinzel1965<-rep(1,61)
  papyeinzel1965<-rep(1,61)
  for(i in (62:dim(d.sterbews)[1])){
    papxeinzel1965[i]=papxeinzel1965[i-1]*(1-t(qxeinzel1965)[i-1])
    papyeinzel1965[i]=papyeinzel1965[i-1]*(1-t(qyeinzel1965)[i-1])
  }

  queinzel1965<-(qxeinzel1965*papxeinzel1965*0.3+qyeinzel1965*papyeinzel1965*0.7)/(papxeinzel1965*0.3+papyeinzel1965*0.7)

  anfangstrend<-log(queinzel1965/queinzel)/(gtau-gtau1965)

  if(ausgabe=="einzel"){
    qausgabe<-c(t(data.frame(t(queinzel*exp(anfangstrend*gtau)), row.names=NULL)))
  }else{
    qausgabe<-c(t(data.frame(t(qugruppe*exp(anfangstrend*gtau)), row.names=NULL)))
  }
  return(qausgabe)
```

```
}
```

Berechnung der Überlebenswahrscheinlichkeiten

```
get_px<-function(alter,gebjahr, trendhalb, ausgabe){
  qx<-get_sterbetafel(gebjahr,trendhalb,ausgabe)

  px<-(1-qx[alter])
  for(i in ((alter+1):121)){
    px[i-alter+1]=px[i-alter]*(1-qx[i])
  }

  return(px)
}
```

Fitting der Sterbeintensität

```
get_param_sterbe<-function(alter, gebjahr, trendhalb, ausgabe_px){
  lnpx<-log(get_px(alter,gebjahr,trendhalb,ausgabe_px))
  xplust<-c((alter+1):122)
  xohnet<-rep(alter,(122-alter))

  ret<-nls(lnpx ~ -c1^(-c2)*(xplust^c2-xohnet^c2),start=list(c1=90,c2=10))
  return(ret)
}
```

Erzeugen des Prozesses der Sterbeintensität

```
get_muet<-function(alter,c1, c2, xi_mue, sigma_mue, from, to=, steps) {
    t<-seq(from,to,(1/steps))
    mue<-c1^(-c2)*c2*alter^(c2-1)

    for (i in (1:(steps*(to-from)-1))){
      mue[i+1]=abs(mue[i] + xi_mue*((c1^(-c2)*c2*(alter+t[i])^(c2-1))-mue[i
          ])*(1/steps) + sqrt(mue[i])*sigma_mue*rnorm(n=1,mean=0,sd=sqrt(1/
          steps)))
  }

    return(mue)
}
```

Generieren einer zufälligen Restlebensdauer

```
get_lebensdauer<-function(lambda,alter,c1, c2, xi_mue, sigma_mue, from, to,
     steps){
  mue<-get_muet(alter,c1,c2,xi_mue,sigma_mue,from,to,steps)
  mue<-mue/12
  exp<-rexp(lambda)
  help<-0
  count<-1
  sterbealter<-0

  while(exp>help){
    help<-help+sum(mue[count:(count+11)])
```

```
    count<-count+steps
    sterbealter<-sterbealter+1
  }

  while(exp<help){
    help<-help-mue[count]
    count<-count-1
    sterbealter<-round(sterbealter-1/steps,2)
  }

  sterbealter<-max(sterbealter,round(1/steps,2))
  return(sterbealter)
}
```

Erzeugen des Wertprozesses

```
get_at<-function(St, phi, P, from, to, steps){
  At<-P

  for (i in (1:(steps*(to-from)-1))){
      At[i+1]=max(At[i]+At[i]*((St[i+1]-St[i])/St[i])-phi*At[i]*(1/steps),0)
  }

  return(At)
}
```

Berrechnung der Ablebensleistung

```
get_gmdb<-function(phi, delta, rt, St, tau, P, from, to, steps){
  help_end<-round(tau*steps)

  help_at<-get_at(St,phi,P,from,to,steps)
  if(tau<to){
    help_ret<-max(P*exp(delta*help_end*(1/steps)),help_at[help_end])*exp(rt[1:help_end] %*% rep((-1/steps),help_end))
  }else{
    help_ret<-help_at[(to-from)*steps]*exp(rt[1:((to-from)*steps)] %*% rep((-1/steps),(to-from)*steps))
  }
  return(help_ret)
}
```

Berrechnung der Erlebensleistung

```
get_gmab<-function(phi, delta, rt, St, tau, P, from, to, steps){
  help_end<-round(tau*steps)

  help_at<-get_at(St,phi,P,from,to,steps)
  if(tau<to){
    help_ret<-help_at[help_end]*exp(rt[1:help_end] %*% rep((-1/steps),help_end))
  }else{
```

```
    help_ret<-max(P*exp(delta*(to-from)),help_at[(to-from)*steps])*exp(rt[1:((to-from)*steps)] %*% rep((-1/steps),(to-from)*steps))
  }
  return(help_ret)}
```

Berrechnung der Er-und Ablebensleistung

```
get_gmdb_gmab<-function(phi, delta, rt, St, tau, P, from, to, steps){
  help_end<-round(tau*steps)

  help_at<-get_at(St,phi,P,from,to,steps)
  if(tau<to){
    help_ret<-max(P*exp(delta*help_end*(1/steps)),help_at[help_end])*exp(rt[1:help_end] %*% rep((-1/steps),help_end))
  }else{
    help_ret<-max(P*exp(delta*(to-from)),help_at[(to-from)*steps])*exp(rt[1:((to-from)*steps)] %*% rep((-1/steps),(to-from)*steps))
  }
  return(help_ret)
}
```

Berrechnung Erlebensleistung (ratchet)

```
get_gmab_ratchet<-function(phi, rt, St, tau, P, from, to, ratchet_steps, steps){
  help_end<-round(tau*steps)
  help_count<-ratchet_steps
  help_gar<-P

  help_at<-get_at(St,phi,P,from,to,steps)
  while (help_count<(to-from)*steps){
    help_gar<-max(help_at[help_count],help_gar)
    help_count<-help_count+ratchet_steps
  }

  if(tau<to){
    help_ret<-help_at[help_end]*exp(rt[1:help_end] %*% rep((-1/steps),help_end))
  }else{
    help_ret<-max(help_gar,help_at[(to-from)*steps])*exp(rt[1:((to-from)*steps)] %*% rep((-1/steps),(to-from)*steps))
  }
  return(help_ret)}
```

Berrechnung Er-/Ablebensleistung (ratchet)

```
get_gmdb_gmab_ratchet<-function(phi, rt, St, tau, P, from, to, ratchet_steps, steps){
  help_end<-round(tau*steps)
  help_count<-ratchet_steps
  help_gar_d<-P
  help_gar_a<-P

  help_at<-get_at(St,phi,P,from,to,steps)
```

```
  while (help_count<(to-from)*steps){
    if(help_count<help_end){
      help_gar_d<-max(help_at[help_count],help_gar_d)
    }
    help_gar_a<-max(help_at[help_count],help_gar_a)
    help_count<-help_count+ratchet_steps
  }

  if(tau<to){
    help_ret<-max(help_gar_d,help_at[help_end])*exp(rt[1:help_end] %*% rep
        ((-1/steps),help_end))
  }else{
    help_ret<-max(help_gar_a,help_at[(to-from)*steps])*exp(rt[1:((to-from)*
        steps)] %*% rep((-1/steps),(to-from)*steps))
  }
  return(help_ret)
}
```

Erzeugen des Wertprozesses withdrawal

```
get_at_withdrawal_ind<-function(St, phi, P, from, to, steps){
  At<-P
  withdrawal_perc<-steps/length(St)

  for (i in (1:(steps*(to-from)-1))){
      if (i %% steps==11){
        At[i+1]=max(At[i]+At[i]*((St[i+1]-St[i])/St[i])-phi*At[i]*(1/steps)
            -P*withdrawal_perc,0)
      }else{
        At[i+1]=max(At[i]+At[i]*((St[i+1]-St[i])/St[i])-phi*At[i]*(1/steps)
            ,0)}
  }

  return(At)
}
```

Berrechnung withdrawal unabhängig

```
get_withdrawal_ind<-function(phi, rt, St, tau, P, from, to, steps){
  help_end<-round(tau*steps)
  help_at<-get_at_withdrawal_ind(St,phi,P,from,to,steps)
  help_ret<-0
  help_ret2<-0
  withdrawal_perc<-steps/length(St)

  if (tau>=to){
    for (i in (1:to)){
      help_ret<-help_ret+P*withdrawal_perc*exp(rt[1:((i-from)*steps)] %*%
          rep((-1/steps),(i-from)*steps))
    }
  }else{
    if (tau>=1){
      for (i in (1:floor(tau))){
```

```
          help_ret<-help_ret+P*withdrawal_perc*exp(rt[1:((i-from)*steps)] %*% rep((-1/steps),(i-from)*steps))
        }
        for (i in ((floor(tau)+1):to)){
          help_ret2<-help_ret2+P*withdrawal_perc*exp(rt[help_end:((i-from)*steps)] %*% rep((-1/steps),(i-from)*steps-help_end+1))
        }
      }else{
        for (i in (1:to)){
          help_ret2<-help_ret2+P*withdrawal_perc*exp(rt[help_end:((i-from)*steps)] %*% rep((-1/steps),(i-from)*steps-help_end+1))
        }
      }
  }

  if (tau<to){
    help_ret<-help_ret+max(help_at[help_end],help_ret2)*exp(rt[1:help_end] %*% rep((-1/steps),help_end))
  }else{
    help_ret<-help_ret+help_at[(to-from)*steps]*exp(rt[1:((to-from)*steps)] %*% rep((-1/steps),(to-from)*steps))
  }
  return(help_ret)
}
```

Erzeugen des Wertprozesses withdrawal abhängig

```
get_at_withdrawal<-function(St, phi, P, from, to, steps, tau){
  At<-P
  withdrawal_perc<-steps/length(St)

  for (i in (1:(steps*(to-from)-1))){
      if (i %% steps==11 & i<=floor(tau*steps)){
        At[i+1]=max(At[i]+At[i]*((St[i+1]-St[i])/St[i])-phi*At[i]*(1/steps)-P*withdrawal_perc,0)
      }else{
        At[i+1]=max(At[i]+At[i]*((St[i+1]-St[i])/St[i])-phi*At[i]*(1/steps),0)}
  }

  return(At)
}
```

Berrechnung withdrawal abhängig

```
get_withdrawal<-function(phi, rt, St, tau, P, from, to, steps){
  help_end<-round(tau*steps)
  help_at<-get_at_withdrawal(St,phi,P,from,to,steps)
  help_ret<-0
  withdrawal_perc<-steps/length(St)

  if (tau>=1){
    for (i in (1:min(floor(tau),to))){
      help_end2<-round((i-from)*steps)
```

```
      help_ret<-help_ret+P*withdrawal_perc*exp(rt[1:help_end2] %*% rep((-1/steps),help_end2))
    }
  }
  if (tau<to){
    help_ret<-help_ret+help_at[help_end]*exp(rt[1:help_end] %*% rep((-1/steps),help_end))
  }else{
    help_ret<-help_ret+help_at[(to-from)*steps]*exp(rt[1:((to-from)*steps)] %*% rep((-1/steps),(to-from)*steps))
  }
  return(help_ret)
}
```

Monte-Carlo-Simulationen

Monte-Carlo-Simulation für Versicherung mit Ablebensleistung

```
monte_ableb<-function(zahl, from, to, phi, delta, P, rt_input, St_input, tau_input){
  v_return<-0

  for(i in (1:zahl)){
    lebensdauer<-tau_input[1,i]
    rt<-rt_input[,i]
    St<-St_input[,i]

    v_return[i]=get_gmdb(phi,delta,rt,St,lebensdauer,P,from,to)
  }

  anzahl<-length(v_return)
  help_sum<-rep(1,anzahl)
  out<-(v_return %*% help_sum)/anzahl

  return(out)
}
```

Monte-Carlo-Simulation für Versicherung mit Erlebensleistung

```
monte_erleb<-function(zahl, from, to, phi, delta, P, rt_input, St_input, tau_input){
  v_return<-0

  for(i in (1:zahl)){
    lebensdauer<-tau_input[1,i]
    rt<-rt_input[,i]
    St<-St_input[,i]

    v_return[i]=get_gmab(phi,delta,rt,St,lebensdauer,P,from,to)
  }

  anzahl<-length(v_return)
```

```
help_sum<-rep(1,anzahl)
out<-(v_return %*% help_sum)/anzahl

return(out)
}
```

Monte-Carlo-Simulation für Versicherung mit Er- und Ablebensleistung

```
monte_erableb<-function(zahl, from, to, phi, delta, P, rt_input, St_input,
    tau_input){
  v_return<-0

  for(i in (1:zahl)){
    lebensdauer<-tau_input[1,i]
    rt<-rt_input[,i]
    St<-St_input[,i]

    v_return[i]=get_gmdb_gmab(phi,delta,rt,St,lebensdauer,P,from,to)
  }

  anzahl<-length(v_return)
  help_sum<-rep(1,anzahl)
  out<-(v_return %*% help_sum)/anzahl

  return(out)
}
```

Monte-Carlo Ablebensleistung (ratchet)

```
monte_ableb_ratchet<-function(zahl, from, to, phi, P, rt_input, St_input,
    tau_input, ratchet_steps){
  v_return<-0

  for(i in (1:zahl)){
    lebensdauer<-tau_input[1,i]
    rt<-rt_input[,i]
    St<-St_input[,i]

    v_return[i]=get_gmdb_ratchet(phi,rt,St,lebensdauer,P,from,to,ratchet_
        steps)
  }

  anzahl<-length(v_return)
  help_sum<-rep(1,anzahl)
  out<-(v_return %*% help_sum)/anzahl

  return(out)
}
```

Monte-Carlo Ablebensleistung (ratchet)

```
monte_erleb_ratchet<-function(zahl, from, to, phi, P, rt_input, St_input,
    tau_input, ratchet_steps=1){
  v_return<-0
```

```
  for(i in (1:zahl)){
    lebensdauer<-tau_input[1,i]
    rt<-rt_input[,i]
    St<-St_input[,i]

    v_return[i]=get_gmab_ratchet(phi,rt,St,lebensdauer,P,from,to,ratchet_
        steps)
  }

  anzahl<-length(v_return)
  help_sum<-rep(1,anzahl)
  out<-(v_return %*% help_sum)/anzahl

  return(out)
}
```

Monte-Carlo Ablebensleistung (ratchet)

```
monte_erableb_ratchet<-function(zahl, from, to, phi, P, rt_input, St_input,
    tau_input, ratchet_steps){
  v_return<-0

  for(i in (1:zahl)){
    lebensdauer<-tau_input[1,i]
    rt<-rt_input[,i]
    St<-St_input[,i]

    v_return[i]=get_gmdb_gmab_ratchet(phi,rt,St,lebensdauer,P,from,to,
        ratchet_steps)
  }

  anzahl<-length(v_return)
  help_sum<-rep(1,anzahl)
  out<-(v_return %*% help_sum)/anzahl

  return(out)
}
```

Monte-Carlo withdrawal unabhängig

```
monte_withdrawal_ind<-function(zahl, from, to, phi, P, rt_input, St_input,
    tau_input){
  v_return<-0

  for(i in (1:zahl)){
    lebensdauer<-tau_input[1,i]
    rt<-rt_input[,i]
    St<-St_input[,i]

    v_return[i]=get_withdrawal_ind(phi,rt,St,lebensdauer,P,from,to)
  }

  anzahl<-length(v_return)
```

```
  help_sum<-rep(1,anzahl)
  out<-(v_return %*% help_sum)/anzahl

  return(out)
}
```

Monte-Carlo withdrawal abhängig

```
monte_withdrawal<-function(zahl, from, to, phi, P, rt_input, St_input, tau_
    input){
  v_return<-0

  for(i in (1:zahl)){
    lebensdauer<-tau_input[1,i]
    rt<-rt_input[,i]
    St<-St_input[,i]

    v_return[i]=get_withdrawal(phi,rt,St,lebensdauer,P,from,to)
  }

  anzahl<-length(v_return)
  help_sum<-rep(1,anzahl)
  out<-(v_return %*% help_sum)/anzahl

  return(out)
}
```

Least-Squares-Monte-Carlo-Simulationen

mixed Monte Carlo Ansatz

```
monte_erableb_mixed<-function(p, delta, rt_input, St_input, tau_input, At_
    input, from, to, steps, P){
  anzahl<-length(tau_input)
  help_tau<-tau_input
  help_werte<-rep(0,anzahl)

  for (i in (1:anzahl)){
    help_tau[1,i]<-min(to,help_tau[1,i])
    help_werte[i]<-max(P*exp(delta*(help_tau[1,i]-from)),At_input[round((
        help_tau[1,i]-from)*steps),i])
  }

  help_taumax<-max(help_tau)
  help_end<-round(help_taumax*steps)

  for (i in (2:(help_end-1))){
    help_i<-help_end-i+1
    help_werte2<-NULL
    help_werte3<-NULL
    help_werte4<-NULL

```

```
    for(j in (1:anzahl)){
      if(help_i<round(help_tau[1,j]*steps)){
        help_werte2<-c(help_werte2,help_werte[j]*exp(rt_input[help_i:(round
            ((help_tau[1,j]-from)*steps)),j] %*% rep((-1/steps),(round((help
            _tau[1,j]-from)*steps)-help_i+1)))))
        help_werte3<-c(help_werte3,At_input[help_i,j])
        help_werte4<-c(help_werte4,j)
      }
    }

    coeff<-polyfit(help_werte3,help_werte2,2)

    for (j in (1:length(help_werte2))){
      if ((polyval(coeff,help_werte3[j]))<(help_werte3[j]*(1-p))){
        help_tau[help_werte4[j]]<-round(help_i/steps,6)
        help_werte[help_werte4[j]]<-help_werte3[j]*(1-p)
      }
    }
  }

  help_out<-0
  for (i in (1:anzahl)){
    help_out<-help_out+help_werte[i]*exp(rt_input[1:(round((help_tau[1,i]-
        from)*steps)),i] %*% rep((-1/steps),(round((help_tau[1,i]-from)*
        steps))))
  }

  help_out<-help_out/anzahl
  return(help_out)
}
```

Berrechnung Ablebensleistung (ratchet)

```
get_gmdb_ratchet<-function(phi, rt, St, tau, P, from, to, ratchet_steps,
    steps){
  help_end<-round(tau*steps)
  help_count<-ratchet_steps
  help_gar<-P

  help_at<-get_at(St,phi,P,from,to,steps)
  while (help_count<help_end){
    help_gar<-max(help_at[help_count],help_gar)
    help_count<-help_count+ratchet_steps
  }

  if(tau<to){
    help_ret<-max(help_gar,help_at[help_end])*exp(rt[1:help_end] %*% rep
        ((-1/steps),help_end))
  }else{
    help_ret<-help_at[(to-from)*steps]*exp(rt[1:((to-from)*steps)] %*% rep
        ((-1/steps),(to-from)*steps))
  }
  return(help_ret)
}
```

mixed Monte Carlo Ansatz (ratchet)

```
monte_erableb_mixed_ratchet<-function(p, rt_input, St_input, tau_input, At_input, from, to, steps, P, ratchet_steps){
  anzahl<-length(tau_input)
  help_tau<-tau_input
  help_werte<-rep(0,anzahl)


  for (i in (1:anzahl)){
    help_tau[1,i]<-min(to,help_tau[1,i])
    help_gar<-P
    help_count<-ratchet_steps

                    while (help_count<round((help_tau[1,i]-from)*steps)){
      help_gar<-max(At_input[help_count,i],help_gar)
      help_count<-help_count+ratchet_steps
    }
    help_werte[i]<-max(help_gar,At_input[round((help_tau[1,i]-from)*steps),i])
  }

  help_taumax<-max(help_tau)
  help_end<-round(help_taumax*steps)

  for (i in (2:(help_end-1))){
    help_i<-help_end-i+1
    help_werte2<-NULL
    help_werte3<-NULL
    help_werte4<-NULL

    for(j in (1:anzahl)){
      if(help_i<round(help_tau[1,j]*steps)){
        help_werte2<-c(help_werte2,help_werte[j]*exp(rt_input[help_i:(round((help_tau[1,j]-from)*steps)),j] %*% rep((-1/steps),(round((help_tau[1,j]-from)*steps)-help_i+1))))
        help_werte3<-c(help_werte3,At_input[help_i,j])
        help_werte4<-c(help_werte4,j)
      }
    }

    coeff<-polyfit(help_werte3,help_werte2,2)

    for (j in (1:length(help_werte2))){
      if ((polyval(coeff,help_werte3[j]))<(help_werte3[j]*(1-p))){
        help_tau[help_werte4[j]]<-round(help_i/steps,6)
        help_werte[help_werte4[j]]<-help_werte3[j]*(1-p)
      }
    }
  }

  help_out<-0
  for (i in (1:anzahl)){
```

```
    help_out<-help_out+help_werte[i]*exp(rt_input[1:(round((help_tau[1,i]-from)*steps)),i] %*% rep((-1/steps),(round((help_tau[1,i]-from)*steps))))
  }

  help_out<-help_out/anzahl
  return(help_out)
}
```

mixed Monte Carlo Ansatz withdrawal unabhängig

```
monte_withdrawal_mixed_ind<-function(p, rt_input, St_input, tau_input, At_input, from, to, steps, P){
  anzahl<-length(tau_input)
  help_tau<-tau_input
  help_werte<-rep(0,anzahl)
  withdrawal_perc<-steps/length(St_input[,1])

  for (i in (1:anzahl)){
    help_ret<-0
    help_ret2<-0
    help_tau[1,i]<-min(to,help_tau[1,i])
    help_end<-round(help_tau[1,i]*steps)
    if (help_tau[1,i]==to){
      for (j in (1:to)){
        help_ret<-help_ret+P*withdrawal_perc*exp(rt_input[((j-from)*steps):(to*steps),i] %*% rep((1/steps),to*steps-round((j-from)*steps)+1))
      }
    }else{
      if (help_tau[1,i]>=1){
        for (j in (1:floor(help_tau[1,i]))){
          help_ret<-help_ret+P*withdrawal_perc*exp(rt_input[((j-from)*steps):help_end,i] %*% rep((1/steps),round((help_tau[1,i]-j+from)*steps)+1))
        }
        for (j in ((floor(help_tau[1,i])+1):to)){
          help_ret2<-help_ret2+P*withdrawal_perc*exp(rt_input[help_end:(j*steps),i] %*% rep((-1/steps),j*steps-help_end+1))
        }
      }else{
        for (j in (1:to)){
          help_ret2<-help_ret2+P*withdrawal_perc*exp(rt_input[help_end:(j*steps),i] %*% rep((-1/steps),j*steps-help_end+1))

        }
      }
    }

    help_werte[i]<-help_ret+max(At_input[round((help_tau[1,i]-from)*steps),i],help_ret2)
  }

  help_taumax<-max(help_tau)
```

```
  help_end<-round(help_taumax*steps)

  for (i in (2:(help_end-1))){
    help_i<-help_end-i+1
    help_werte2<-NULL
    help_werte3<-NULL
    help_werte4<-NULL
    help_werte5<-NULL

    for(j in (1:anzahl)){
      if(help_i<round(help_tau[1,j]*steps)){
        help_werte2<-c(help_werte2,help_werte[j]*exp(rt_input[help_i:(round
            ((help_tau[1,j]-from)*steps)),j] %*% rep((-1/steps),(round((help
            _tau[1,j]-from)*steps)-help_i+1))))
        help_werte3<-c(help_werte3,At_input[help_i,j])
        help_werte4<-c(help_werte4,j)

        if (help_i %% steps==11){
          help_werte5<-P*withdrawal_perc*p
        }else{
          help_werte5<-0
        }
      }
    }

    coeff<-polyfit(help_werte3,help_werte2,2)

    for (j in (1:length(help_werte2))){
      if ((polyval(coeff,help_werte3[j]))<(help_werte3[j]*(1-p)+help_werte5
          )){
        help_tau[help_werte4[j]]<-round(help_i/steps,6)
        help_werte[help_werte4[j]]<-help_werte3[j]*(1-p)+help_werte5
      }
    }
  }

  help_out<-0
  for (i in (1:anzahl)){
    help_out<-help_out+help_werte[i]*exp(rt_input[1:(round((help_tau[1,i]-
        from)*steps)),i] %*% rep((-1/steps),(round((help_tau[1,i]-from)*
        steps))))
  }

  help_out<-help_out/anzahl
  return(help_out)
}
```

mixed Monte Carlo Ansatz withdrawal abhängig

```
monte_withdrawal_mixed<-function(p, rt_input, St_input, tau_input, At_input
    , from, to, steps, P){
  anzahl<-length(tau_input)
  help_tau<-tau_input
  help_werte<-rep(0,anzahl)
```

```
withdrawal_perc<-steps/length(St_input[,1])

for (i in (1:anzahl)){
  help_ret<-0
  help_tau[1,i]<-min(to,help_tau[1,i])
  help_end<-round(help_tau[1,i]*steps)
  if (help_tau[1,i]>=1){
    for (j in (1:min(floor(help_tau[1,i]),to))){
      help_ret<-help_ret+P*withdrawal_perc*exp(rt_input[((j-from)*steps):
          min(help_end,to*steps),i] %*% rep((1/steps),min(help_end,to*
          steps)-round((j-from)*steps)+1))
    }
  }
  help_werte[i]<-help_ret+At_input[round((help_tau[1,i]-from)*steps),i]
}

help_taumax<-max(help_tau)
help_end<-round(help_taumax*steps)

for (i in (2:(help_end-1))){
  help_i<-help_end-i+1
  help_werte2<-NULL
  help_werte3<-NULL
  help_werte4<-NULL
  help_werte5<-NULL

  for(j in (1:anzahl)){
    if(help_i<round(help_tau[1,j]*steps)){
      help_werte2<-c(help_werte2,help_werte[j]*exp(rt_input[help_i:(round
          ((help_tau[1,j]-from)*steps)),j] %*% rep((-1/steps),(round((help
          _tau[1,j]-from)*steps)-help_i+1))))
      help_werte3<-c(help_werte3,At_input[help_i,j])
      help_werte4<-c(help_werte4,j)

      if (help_i %% steps==11){
        help_werte5<-P*withdrawal_perc*p
      }else{
        help_werte5<-0
      }
    }
  }

  coeff<-polyfit(help_werte3,help_werte2,2)

  for (j in (1:length(help_werte2))){
    if ((polyval(coeff,help_werte3[j]))<(help_werte3[j]*(1-p)+help_werte5
        )){
      help_tau[help_werte4[j]]<-round(help_i/steps,6)
      help_werte[help_werte4[j]]<-help_werte3[j]*(1-p)+help_werte5
    }
  }
}

help_out<-0
```

```
  for (i in (1:anzahl)){
    help_out<-help_out+help_werte[i]*exp(rt_input[1:(round((help_tau[1,i]-
        from)*steps)),i] %*% rep((-1/steps),(round((help_tau[1,i]-from)*
        steps))))
  }

  help_out<-help_out/anzahl
  return(help_out)
}
```

Hilfsfunktionen

Daten erzeugen

```
write_data<-function(zahl, from, to, steps, alter, gebjahr, S0, phi){
  coef_sterbe<-get_param_sterbe(alter,gebjahr)

  out_lebensdauer<-get_lebensdauer(alter=alter, c1=coef(coef_sterbe)[1],c2=
      coef(coef_sterbe)[2])
  out_rt<-get_rt(from=from, to=to, steps=steps)
  out_St<-get_St(s0=S0,from=from,to=to, steps=steps,r=out_rt)
  out_at<-get_at(out_St,phi,S0,from,to,steps)
  out_at_with<-get_at_withdrawal(out_St,phi,S0,from,to,steps,out_
      lebensdauer)

  for (i in (2:zahl)){
    help_lebensdauer<-get_lebensdauer(alter=alter, c1=coef(coef_sterbe)[1],
        c2=coef(coef_sterbe)[2])
    help_rt<-get_rt(from=from, to=to, steps=steps)
    help_St<-get_St(s0=S0,from=from,to=to, steps=steps,r=help_rt)
    help_at<-get_at(help_St,phi,S0,from,to,steps)
    help_at_with<-get_at_withdrawal(help_St,phi,S0,from,to,steps,help_
        lebensdauer)

    out_lebensdauer<-cbind(out_lebensdauer,help_lebensdauer)
    out_rt<-cbind(out_rt,help_rt)
    out_St<-cbind(out_St,help_St)
    out_at<-cbind(out_at,help_at)
    out_at_with<-cbind(out_at,help_at)
  }

          write.table(out_lebensdauer,"Pfad")
  write.table(out_rt,"Pfad")
  write.table(out_St,"Pfad")
  write.table(out_at,"Pfad")
          write.table(out_at_with,"Pfad")
}
```

Daten erzeugen

```
write_mue<-function(mue){

```

```
  out_mue<-read.table("Pfad")
  out_mue<-out_mue+mue

  write.table(out_mue,"Pfad")
}
```

Daten erzeugen

```
write_wert<-function(zahl, from, to, steps, S0, St_input){

  for(i in (2:4)){
    phi<-0.01+0.02*i
    out_at<-get_at(St_input[,1],phi,S0,from,to,steps)

    for (j in (2:zahl)){
      help_at<-get_at(St_input[,j],phi,S0,from,to,steps)

      out_at<-cbind(out_at,help_at)
    }
    write.table(out_at,paste("Pfad",(phi*100),".txt", sep=""))
  }
}
```

Auswertungshilfsfunktion

```
Auswertung<-function(delta, rt_input, St_input, tau_input, from, to, steps,
    P){
  out<-0
  for(i in (1:7)){
    phi<-0.02*i
    At_input<-read.table(paste("Pfad",(phi*100),".txt",sep=""))

    for (j in (0:2)){
      stornop<-(1+(j*2))/100
      help<-monte_erableb_mixed(stornop, delta, rt_input, St_input, tau_
          input, At_input, from, to, steps, P)

      out<-cbind(out,help)
      write.table(out,"Pfad")
    }
  }
}
```

Daten erzeugen

```
write_wert_withdrawal<-function(zahl, from, to, steps, S0, St_input, tau_
    input){

  for(i in (2:6)){
    phi<-0.01*i
    out_at<-get_at_withdrawal(St_input[,1],phi, P=100, from, to, steps, tau
        _input[1,1])

```

```
    for (j in (2:zahl)){
      help_at<-get_at_withdrawal(St_input[,j],phi, P=100, from, to, steps, tau_input[1,j])

      out_at<-cbind(out_at,help_at)
    }
    write.table(out_at,paste("Pfad",(phi*100),".txt", sep=""))
  }

}
```

Daten erzeugen

```
write_wert_withdrawal_ind<-function(zahl, from, to, steps, S0, St_input){

  for(i in (2:6)){
    phi<-0.01*i
    out_at<-get_at_withdrawal_ind(St_input[,1],phi, P=100, from, to, steps)

    for (j in (2:zahl)){
      help_at<-get_at_withdrawal_ind(St_input[,j],phi, P=100, from, to, steps)

      out_at<-cbind(out_at,help_at)
    }
    write.table(out_at,paste("Pfad",(phi*100),".txt", sep=""))
  }

}
```

Auswertungshilfsfnktion

```
Auswertung_ratchet<-function(rt_input, St_input, tau_input, from, to, steps, P){
  out<-0
  out1<-0
  for(i in (5:9)){
    phi<-0.01*i
    At_input<-read.table(paste("Pfad",(phi*100),".txt",sep=""))

    for (j in (0:2)){
      stornop<-(1+(j*2))/100
      help<-monte_erableb_mixed_ratchet(stornop, rt_input, St_input, tau_input, At_input, from, to, steps, P,1)

      out<-cbind(out,help)
      write.table(out,"Pfad")

      help1<-monte_erableb_mixed_ratchet(stornop, rt_input, St_input, tau_input, At_input, from, to, steps, P,36)

      out1<-cbind(out1,help1)
      write.table(out1,"Pfad")
    }
```

```
  }

}
```

Auswertungshilfsfunktion

```
Auswertung_withdrawal<-function(rt_input, St_input, tau_input, from, to,
    steps, P){
  out<-0
  out1<-0
  for(i in (2:5)){
    phi<-0.01*i
    At_input<-read.table(paste("Pfad",(phi*100),".txt",sep=""))
    At_input_ind<-read.table(paste("Pfad",(phi*100),".txt",sep=""))

    for (j in (0:2)){
      stornop<-(1+(j*2))/100
      help<-monte_withdrawal_mixed(stornop, rt_input, St_input, tau_input,
          At_input, from, to, steps, P)

      out<-cbind(out,help)
      write.table(out,"Pfad")

      help1<-monte_withdrawal_mixed_ind(stornop, rt_input, St_input, tau_
          input, At_input_ind, from, to, steps, P)

      out1<-cbind(out1,help1)
      write.table(out1,"Pfad")
    }
  }
}
```

Ergebnisdaten

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der 3 Datensets dargestellt. Zur besseren Übersicht werden die einzelnen Daten den Abbildungen zugeordnet in welchen sie verwendet wurden.

Abbildung 5.3 auf Seite 41

Set 1

δ/φ	0	0,0002	0,0004	0,0006	0,0008	0,001	0,0012
0	100,4290	100,3316	100,2343	100,1371	100,0400	99,9429	99,8460
0,01	100,4472	100,3498	100,2526	100,1554	100,0583	99,9613	99,8644
0,02	100,4677	100,3704	100,2731	100,1760	100,0789	99,9819	99,8850
0,03	100,4896	100,3923	100,2950	100,1979	100,1008	100,0039	99,9070
0,05	100,5393	100,4420	100,3448	100,2477	100,1507	100,0538	99,9570
0,1	100,7204	100,6234	100,5264	100,4295	100,3328	100,2361	100,1395

Set 2

δ/φ	0	0,0002	0,0004	0,0006	0,0008	0,001	0,0012
0	100,1169	100,0199	99,9229	99,8261	99,7293	99,6326	99,5360
0,01	100,1331	100,0361	99,9392	99,8423	99,7456	99,6490	99,5524
0,02	100,1513	100,0543	99,9574	99,8606	99,7638	99,6672	99,5707
0,03	100,1718	100,0749	99,9780	99,8813	99,7846	99,6880	99,5915
0,05	100,2208	100,1239	100,0271	99,9304	99,8338	99,7373	99,6408
0,1	100,3900	100,2933	100,1967	100,1001	100,0037	99,9074	99,8111

Set 3

δ/φ	0	0,0002	0,0004	0,0006	0,0008	0,001	0,0012
0	99,5047	99,4083	99,3120	99,2157	99,1196	99,0236	98,9276
0,01	99,5210	99,4246	99,3283	99,2321	99,1359	99,0399	98,9439
0,02	99,5391	99,4427	99,3464	99,2502	99,1541	99,0581	98,9621
0,03	99,5590	99,4626	99,3664	99,2702	99,1741	99,0781	98,9822
0,05	99,6047	99,5084	99,4121	99,3160	99,2200	99,1240	99,0282
0,1	99,7678	99,6717	99,5757	99,4798	99,3840	99,2882	99,1926

Abbildung 5.5 auf Seite 43

Set 1

δ/φ	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,14
0	104,2690	98,8081	94,5328	91,3418	89,0986	87,6184	86,7014
0,01	106,4845	101,3975	97,5039	94,6766	92,7599	91,5283	90,7972
0,02	109,0149	104,3229	100,8243	98,3680	96,7490	95,7481	95,1762
0,03	111,8835	107,6135	104,5164	102,4197	101,0744	100,2776	99,8368
0,05	118,7695	115,3792	113,0871	111,6187	110,7510	110,2723	110,0149

Set 2

δ/φ	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,14
0	103,9902	98,5837	94,3855	91,2596	89,0606	87,6141	86,7155
0,01	106,2153	101,1941	97,3787	94,6166	92,7285	91,5331	90,8130
0,02	108,7575	104,1512	100,7243	98,3161	96,7349	95,7539	95,1955
0,03	111,6500	107,4659	104,4407	102,3754	101,0699	100,2852	99,8589
0,05	118,5973	115,2859	113,0284	111,6038	110,7496	110,2869	110,0443

Set 3

δ/φ	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,14
0	103,5793	98,2548	94,1250	91,0858	88,9463	87,5446	86,6909
0,01	105,8298	100,8824	97,1543	94,4690	92,6350	91,4853	90,8010
0,02	108,3955	103,8649	100,5335	98,1907	96,6588	95,7274	95,1894
0,03	111,3069	107,2198	104,2785	102,2727	101,0179	100,2723	99,8539
0,05	118,3276	115,1077	112,9156	111,5471	110,7355	110,2814	110,0379

Abbildung 5.6 auf Seite 43

Set 1

δ/φ	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,14
0	104,4294	98,9971	94,7530	91,5972	89,3944	87,9566	87,0831
0,01	106,6654	101,6090	97,7494	94,9617	93,0881	91,9012	91,2152
0,02	109,2177	104,5592	101,0985	98,6856	97,1121	96,1580	95,6326
0,03	112,1105	107,8771	104,8227	102,7722	101,4749	100,7264	100,3336

Set 2

δ/φ	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,14
0	104,1309	98,7527	94,5859	91,4939	89,3315	87,9245	87,0671
0,01	106,3751	101,3851	97,6037	94,8780	93,0295	91,8761	91,1988
0,02	108,9391	104,3665	100,9760	98,6071	97,0683	96,1314	95,6182
0,03	111,8552	107,7076	104,7216	102,6988	101,4384	100,6996	100,3205

Set 3

δ/φ	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,14
0	103,7281	98,4301	94,3294	91,3226	89,2203	87,8582	87,0452
0,01	105,9972	101,0785	97,3817	94,7328	92,9387	91,8307	91,1894
0,02	108,5830	104,0836	100,7869	98,4840	96,9945	96,1067	95,6140
0,03	111,5168	107,4632	104,5609	102,5979	101,3877	100,6882	100,3165

Abbildung 5.7 auf Seite 45

Set 1

$(t_j - t_i)/\varphi$	0	0,0002	0,0004	0,0006	0,0008	0,001	0,0012
1/12	100,5575	100,4600	100,3627	100,2654	100,1683	100,0712	99,9742
1	100,4952	100,3978	100,3004	100,2032	100,1060	100,0089	99,9119
2	100,4675	100,3700	100,2727	100,1754	100,0783	99,9812	99,8842
3	100,4488	100,3513	100,2540	100,1568	100,0596	99,9626	99,8656
4	100,4388	100,3414	100,2441	100,1469	100,0497	99,9527	99,8558

Set 2

$(t_j - t_i)/\varphi$	0	0,0002	0,0004	0,0006	0,0008	0,001	0,0012
1/12	100,2494	100,1524	100,0554	99,9585	99,8618	99,7651	99,6685
1	100,1901	100,0930	99,9961	99,8992	99,8024	99,7057	99,6092
2	100,1675	100,0704	99,9735	99,8766	99,7798	99,6831	99,5865
3	100,1441	100,0470	99,9501	99,8532	99,7565	99,6598	99,5632
4	100,1290	100,0320	99,9350	99,8382	99,7414	99,6447	99,5482

Set 3

$(t_j - t_i)/\varphi$	0	0,0002	0,0004	0,0006	0,0008	0,001	0,0012
1/12	99,6288	99,5323	99,4360	99,3397	99,2435	99,1474	99,0514
1	99,5622	99,4658	99,3694	99,2731	99,1770	99,0809	98,9849
2	99,5331	99,4367	99,3403	99,2441	99,1479	99,0518	98,9558
3	99,5300	99,4336	99,3373	99,2410	99,1448	99,0488	98,9528
4	99,5125	99,4181	99,3218	99,2255	99,1294	99,0329	98,9373

Abbildung 5.8 auf Seite 45

Set 1

$(t_j - t_i)/\varphi$	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1/12	110,6152	107,9350	105,5067	103,3206	101,3603	99,6156
1	105,7312	103,1780	100,8849	98,8324	97,0063	95,3970
2	103,6745	101,1449	98,8773	96,8630	95,0904	93,5427
3	102,0006	99,5312	97,3325	95,3860	93,6826	92,2074
4	101,3770	98,8823	96,6664	94,7179	93,0290	91,5833

Set 2

$(t_j - t_i)/\varphi$	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1/12	110,4234	107,7606	105,3578	103,1959	101,2667	99,5551
1	105,5498	103,0218	100,7510	98,7253	96,9321	95,3528
2	103,4797	100,9727	98,7338	96,7454	94,9982	93,4789
3	101,8630	99,4188	97,2489	95,3351	93,6701	92,2358
4	101,2359	98,7604	96,5704	94,6454	92,9767	91,5524

Set 3

$(t_j - t_i)/\varphi$	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1/12	110,0405	107,4033	105,0185	102,8838	100,9808	99,2913
1	105,1353	102,6379	100,4032	98,4101	96,6418	95,0848
2	103,1499	100,6624	98,4481	96,4856	94,7557	93,2487
3	101,3963	98,9873	96,8548	94,9866	93,3593	91,9544
4	100,8214	98,3757	96,2163	94,3272	92,6939	91,3027

Abbildung 5.9 auf Seite 46

Set 1

$(t_j - t_i)/\varphi$	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1/12	110,9220	108,2542	105,8396	103,6680	101,7227	99,9935
1	105,9782	103,4392	101,1608	99,1236	97,3134	95,7210
2	103,8951	101,3798	99,1271	97,1278	95,3715	93,8411
3	102,2040	99,7487	97,5650	95,6345	93,9483	92,4914
4	101,5741	99,0938	96,8933	94,9608	93,2892	91,8623

Set 2

$(t_j - t_i)/\varphi$	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1/12	110,7159	108,0655	105,6752	103,5263	101,6109	99,9137
1	105,7858	103,2703	101,0121	98,9997	97,2201	95,6553
2	103,6933	101,1990	98,9731	96,9981	95,2650	93,7608
3	102,0961	99,6261	97,4709	95,5725	93,9232	92,5051
4	101,4151	98,9537	96,7785	94,8691	93,2165	91,8093

Set 3

$(t_j - t_i)/\varphi$	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1/12	110,3314	107,7062	105,3339	103,2123	101,3233	99,6491
1	105,3633	102,8790	100,6580	98,6795	96,9266	95,3855
2	103,3507	100,8769	98,6769	96,7297	95,0155	93,5249
3	101,5932	99,1974	97,0785	95,2246	93,6127	92,2244
4	101,0057	98,5739	96,4287	94,5544	92,9368	91,5628

Abbildung 5.10 auf Seite 47

Set 1

Art/φ	0,02	0,03	0,04	0,05
abhängig	103,2931	101,4627	99,8321	98,3917
unabhängig	103,3876	101,5654	99,9436	98,5142

Set 2

Art/φ	0,02	0,03	0,04	0,05
abhängig	103,1683	101,3605	99,7532	98,3356
unabhängig	103,2568	101,4573	99,8585	98,4495

Set 3

Art/φ	0,02	0,03	0,04	0,05
abhängig	102,8529	101,0736	99,4967	98,1073
unabhängig	102,9467	101,1758	99,6075	98,2263

Abbildung 5.13 auf Seite 50

Set 1

p/φ	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,14
0,01	109,1222	106,1880	103,9536	102,6396	101,6332	100,9968	100,5465
0,03	108,2790	105,2001	102,9635	101,5885	100,5964	99,9249	99,4238
0,05	109,2040	104,6148	102,2098	100,6833	99,6919	99,0086	98,5269

Set 2

p/φ	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,14
0,01	109,1007	106,0197	104,0332	102,7400	101,7664	101,1057	100,6283
0,03	108,3600	105,1560	103,0492	101,6647	100,6980	100,0017	99,5523
0,05	107,7231	104,5329	102,2622	100,7519	99,7535	99,0726	98,5905

Set 3

p/φ	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,14
0,01	108,6123	105,7777	103,7777	102,4770	101,6291	100,9986	100,5587
0,03	107,7848	104,8559	102,8399	101,4631	100,5723	99,9239	99,4660
0,05	107,3558	104,1293	102,0392	100,5995	99,6198	98,9853	98,5086

Abbildung 5.15 auf Seite 52

Set 1

p/φ	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	110,9007	108,2278	105,8132	103,6432	101,7021	100,0016
0,01	110,9007	108,2278	105,8132	103,6432	101,7021	99,9624
0,03	110,9007	108,2278	105,8132	103,6432	101,7021	99,9624
0,05	110,9007	108,2278	105,8132	103,6432	101,7021	99,9624

Set 2

p/φ	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	111,1249	108,4478	106,0269	103,8439	101,8938	100,3970
0,01	111,1249	108,4478	106,0292	103,8437	101,8938	100,1976
0,03	111,1249	108,4478	106,0292	103,8437	101,8938	100,1618
0,05	111,1249	108,4478	106,0292	103,8437	101,8938	100,1618

Set 3

p/φ	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	110,2976	107,6684	105,2960	103,1737	101,2870	100,0660
0,01	110,2976	107,6684	105,2960	103,1737	101,2870	99,5409
0,03	110,2976	107,6684	105,2960	103,1737	101,2870	99,5409
0,05	110,2976	107,6684	105,2960	103,1737	101,2870	99,5409

Abbildung 5.16 auf Seite 53

Set 1

p/φ	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	102,7973	101,8816	101,1494	100,5343	100,1053	99,8095
0,01	102,1438	101,1860	100,4121	99,8146	99,3237	99,0131
0,03	102,2449	99,9791	99,0606	98,3897	97,9141	97,4684
0,05	102,2410	99,7758	98,0967	97,1493	96,4866	96,0486

Set 2

p/φ	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	102,8192	101,8165	101,2240	100,7963	100,4495	100,1622
0,01	102,2333	101,1360	100,4817	99,9785	99,5992	99,3007
0,03	102,4209	100,2154	99,1322	98,4480	97,9810	97,6755
0,05	102,4209	99,8537	98,1682	97,2258	96,5823	96,1552

Set 3

p/φ	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	102,3741	101,5203	100,8890	100,4963	100,1354	99,8717
0,01	101,8172	100,9303	100,1440	99,6953	99,3300	99,0310
0,03	100,8086	99,6110	98,8279	98,2298	97,7852	97,4567
0,05	101,5747	99,1236	97,8556	96,9589	96,3804	95,9666

Abbildung 5.18 auf Seite 55

Set 1

p/φ	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,01	103,6781	102,7174	101,9883	101,4645	100,9857	100,5727
0,03	103,5158	101,8955	101,0428	100,3365	99,7878	99,3378
0,05	103,5374	101,6949	100,2880	99,4486	98,8182	98,3089

Set 2

p/φ	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,01	103,7770	102,7019	101,9215	101,3641	100,9366	100,6046
0,03	103,5433	101,9841	101,0797	100,3320	99,7661	99,3353
0,05	103,6538	101,7287	100,3777	99,5205	98,8864	98,3571

Set 3

p/φ	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,01	103,4632	102,5658	101,8747	101,3730	100,9179	100,5609
0,03	102,9486	101,6945	100,8944	100,2287	99,7620	99,3327
0,05	103,0947	101,2319	100,1179	99,3435	98,7450	98,2409

Abbildung 5.19 auf Seite 55

Set 1

p/φ	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,01	103,7295	102,7956	102,0509	101,5363	101,0662	100,6575
0,03	103,5844	101,9780	101,1316	100,4070	99,8792	99,4119
0,05	103,6143	101,7863	100,3711	99,5426	98,9252	98,4134

Set 2

p/φ	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,01	103,8818	102,8084	101,9858	101,4384	101,0257	100,6900
0,03	103,6436	102,0683	101,1704	100,4250	99,8517	99,4362
0,05	103,7461	101,8399	100,4763	99,6161	98,9732	98,4635

Set 3

p/φ	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,01	103,5230	102,6327	101,9426	101,4312	100,9747	100,6252
0,03	103,0344	101,7687	100,9689	100,2825	99,8120	99,4136
0,05	103,1748	101,3166	100,1866	99,4186	98,8241	98,3082

Literaturverzeichnis

[AJK] Andersen, L.B.G., Jäckel, P., Kahl, C.: Simulation of square-root processes.

[AVOE] Aktuarvereinigung Österreichs: Konstruktion der Unisex-Rententafel AVÖ 2005 R unisex, April 2012.

[BBM] Bacinello, A.R., Biffis, E., Millossovich, P., Pitacco, E.: Regression-based algorithms for life insurance contracts with surrender guarantees, Quantitative Finance 10 (9), 2010a, 1077-1090.

[BM] Biffis, E., Millossovich, P.: The fair value of guaranteed annuity options, Scandinavian Acturial Journal 1, 2006, 23-41.

[BMOP] Bacinello, A.R., Millossovich, P., Olivieri, A.,Pitacco, E.: Variable annuities: A unifying valuation approach, Insurance: Mathematics and Economics, 2011, 285-297.

[BoS] Boyle, P., Schwartz, E.: Equilibrium prices of guarantees under equity-linked contracts, The Journal of Risk and Insurance 44, 1977, 639-660.

[BrS] Brennan, M., Schwartz, E.: The pricing of equity-linked life isurance policies with an asset value guarantee, Journal of Financial Economics 3, 1976, 195-213.

[CF] Chen, Z., Forsyth, P.: A numerical scheme for the impulse control formulation for pricing variable annuities with a guaranteed minimum withdrawal benefit (GMWB), Numerische Mathematik 109, 2008, 535-569.

[CVF] Chen, Z., Vetzal, K., Forsyth, P.: The effect of modelling parameters on the value of GMWB guarantees, Insurance: Mathematics and Economics 43, 2008, 165-173.

[DKZ] Dai, M., Kwok, Y., Zong, J.: Guaranteed minimum withdrawal benefit in variable annuities, Mathematical Finance 18, 2008, 595-611.

[G] Glasserman, P.: Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer, 2004

[GLW] Gobet, E., Lemor, J., Warin, X.: A regression-based Monte Carlo method to solve backward stochastic differential equations, The Annals of Applied Probability 15, 2005, 2172-2202.

[K] Kirsten, B.: Strukturerhaltende Approximationen von Wurzel-Diffusionsgleichungen, Bachelorarbeit, Frankfurt am Main, September 2011.

[LS] LONGSTAFF, F.A., SCHWARTZ, E.S.: Valuing American Options by Simulation: A simple least-squares approach,Review of Financial Studies, 2001, 113-147.

[MN] MORENO, M., NAVAS, J.F.: On the robustness of least-squares Monte-Carlo for pricing American derivatives, Review of Derivatives Research 6, 2003, 107-128.

[MS] MILEVSKY, M., SALISBURY, T.: Financial valuation of guaranteed minimum withdrawal benefits, Insurance: Mathematics and Economics 38, 2006, 21-38.

[VS] VENABLES, W.N., SMITH, D.M., R CORE TEAM: An Introduction to R, Version 3.0.1 (2013-05-16).