



**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN**

Vienna University of Technology

## **Diplomarbeit**

# **Berechnung der Schwingungen von Papierleitwalzen aufgrund anisotroper Biegesteifigkeit**

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs unter der  
Leitung von

**Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Horst Ecker**

Institut für Mechanik und Mechatronik  
Arbeitsgruppe Technische Dynamik

eingereicht an der Technischen Universität Wien  
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

**Andreas Birnecker**

0526095

Ortsstraße 8, A-3042 Würmla

Wien, am \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Eigenhändige Unterschrift



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
Vienna University of Technology

Ich, Andreas Birnecker, habe zur Kenntnis genommen, dass ich zur Drucklegung meiner Arbeit unter der Bezeichnung

## **„Berechnung der Schwingungen von Papierleitwalzen aufgrund anisotroper Biegesteifigkeit“**

nur mit Bewilligung der Prüfungskommission berechtigt bin.

Ich erkläre weiters an Eides statt, dass ich meine Diplomarbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen selbständig ausgeführt habe und alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur genannt habe.

Weiters erkläre ich, dass ich dieses Diplomarbeitsthema bisher weder im In- noch im Ausland (einer Beurteilerin/einem Beurteiler zur Begutachtung) in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt habe und dass diese Arbeit mit der vom Begutachter beurteilten Arbeit übereinstimmt.

Wien, am \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Eigenhändige Unterschrift

# DANKSAGUNG

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die mich bei der Anfertigung dieser Diplomarbeit, aber auch während meiner gesamten Studienzeit, unterstützt und begleitet haben.

Besonders bedanken möchte ich mich bei meinen Eltern, welche mich in all meinen Entscheidungen unterstützt haben. Ihnen widme ich als Zeichen meiner Dankbarkeit diese Arbeit. Mein besonderer Dank geht auch an meine Freunde und Kollegen aus dem In- und Ausland, mit denen ich gemeinsam eine interessante und unvergessliche Studienzeit in Wien und Glasgow erleben durfte.

Für die universitäre Betreuung und fachliche Unterstützung gilt mein aufrichtiger Dank Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Horst Ecker.

Dem Unternehmen VOITH danke ich für die Ermöglichung dieser Diplomarbeit. Ein besonderes Dankeschön gilt dabei Herrn Dipl.-Ing. Florian Hochreiter und Herrn Dipl.-Ing. Herbert Weinberger für die hervorragende Zusammenarbeit. Danken möchte ich auch Herrn Fabio Pinto, welcher durch interessante Diskussionen und Denkanstöße vor allem am Beginn einen wesentlichen Beitrag zu dieser Arbeit geleistet hat.

# KURZZUSAMMENFASSUNG

Die Entwicklung, Anforderungen an die Konstruktion und die Fertigung von Leitwalzen in Papiermaschinen steht im Zeichen steigender Leistungsfähigkeit und Arbeitsgenauigkeit. Gleichzeitig versucht man die Fertigung zu optimieren, um so die Kosten zu reduzieren.

Bei solchen Papierleitwalzen, die bis etwa 75 % der biegekritischen Drehzahl betrieben werden, sind neben den durch Unwucht verursachten einfach drehfrequenten auch die doppelt drehfrequenten Schwingungen für den Betrieb relevant. Diese doppelrequenten Schwingungen werden durch die Wechselwirkung zwischen Steifigkeitsanisotropie der Walze und der Gewichtskraft hervorgerufen. Darüber hinaus tritt mit steigender Drehzahl aufgrund ungleichmäßiger Massenverteilung eine Verformung des kreisringförmigen Walzenquerschnittes auf. Diese Deformation, auch Ovalisierung genannt, beeinflusst das gemessene doppelfrequente Signal.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Analysesoftware erstellt, die basierend auf Geometriedaten der Walze mit geeigneten Modellen diese Phänomene berechnet und so eine genaue Analyse ermöglicht. Neben anderen Größen wie Urunwucht und Restunwucht der Walze soll so etwa die Ermittlung der Amplituden der einfach und doppelt drehfrequenten Schwingungen möglich sein.

Für die Berechnung der stationären Biegeschwingungen findet ein Modell mit finiten EULER-BERNOULLI- bzw. TIMOSHENKO-Wellenelementen Verwendung. Berücksichtigt wird dabei sowohl die Steifigkeitsanisotropie der Walze in radialer Richtung als auch äußere und innere Dämpfung. Zur Ermittlung der Querschnittsverformung wird das Walzenrohr mit Hilfe von dreidimensionalen finiten Hexaederelementen modelliert. Unter anderem wird auch ein Berechnungsverfahren vorgestellt, das basierend auf den Geometriedaten des unbearbeiteten Walzenrohrlings dessen optimale Aufspannung an der Drehmaschine errechnet, um durch die nachfolgende spanende Bearbeitung die Urunwucht zu minimieren.

Abschließend werden die einzelnen Modelle unter Verwendung des Softwarepakets MATLAB implementiert und zusammengeführt. Die Modelle werden anhand von idealisierten und realen Walzen überprüft. Aufgrund bestimmter Annahmen und Randbedingungen (linearisierte, diskretisierte Modelle, homogenes Material, geometrische Messfehler) ergeben sich kleine quantitative und qualitative Abweichungen zwischen den gemessenen und berechneten Werten. Grundsätzlich zeigen jedoch die Berechnungen, dass sich die errechneten Resultate gut mit den real gemessenen Werten decken.

# ABSTRACT

The development in design and manufacturing of guide rolls in paper machines aims to achieve higher performance and better operation accuracy. At the same time one tries to reduce the production costs by optimizing the manufacturing process.

Paper guide rolls are operated up to approximately 75 % of the critical speed. At this operation conditions, bending vibrations which are caused by imbalance and whose frequency is the same as the rotational frequency are relevant, as well as vibrations with twice the rotational frequency. These double-frequent oscillations are caused by interaction between the anisotropy of the roll bending stiffness and the gravitational force. Beyond that, a deformation of the cross section arises at higher rotational speed due to uneven mass distribution. This so called 'ovalization' has an influence on the measured double-frequent signal.

In this work an analysis tool is compiled, which reproduces these phenomena based on geometry data of the roll with suitable models in order to allow a detailed analysis. Apart from other quantities, such as unbalance and residual unbalance of the roll, the calculation of the vibration amplitudes shall be possible.

In order to investigate the bending vibrations, the rotor is modelled by discrete EULER-BERNOULLI and TIMOSHENKO beam elements. The stiffness anisotropy of the cross-section and its different orientation along the roll as well as the external and internal damping is taken into account. For the determination of the cross section deformation, the roll pipe is modelled by three-dimensional finite Hexaeder elements. Beyond that an algorithm is presented, which calculates the optimal setting of the raw roll pipe at the turning machine in order to minimize the unbalance. Basis for this calculation ist the geometry data of the raw roll.

Finally the separated concepts are implemented and brought together using the software MATLAB. The models are examined by calculation of idealized rolls. Beyond that, measured data of real rolls is used for the validation of the models. Due to certain assumptions and ancillary conditions (e.g. linearized discrete models, homogeneous material, geometric measuring error) there may occur little quantitative and qualitative differences between the measured and calculated values. However, in principle the calculation runs show that the results agree well with the real measured results and allow a detailed investigation of the behaviour of paper guide rolls.

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>1</b>	<b>EINLEITUNG .....</b>	<b>10</b>
1.1	Wuchten von Papierleitwalzen .....	10
1.2	Problemstellung .....	11
1.3	Zielsetzung .....	13
1.4	Stand der Technik.....	13
1.5	Gang der Untersuchung.....	13
<b>2</b>	<b>BALKENTHEORIE .....</b>	<b>15</b>
2.1	Theorie der Schiefen Biegung .....	15
2.2	EULER-BERNOULLI-Balkentheorie .....	17
2.3	TIMOSHENKO-Balkentheorie .....	19
<b>3</b>	<b>BIEGESCHWINGUNGEN VON ROTOREN MIT ANISOTROPEM QUERSCHNITT .....</b>	<b>23</b>
3.1	Phänomen.....	23
3.2	Modellbildung .....	24
3.3	Bildung der Elementmatrizen für ein EULER-BERNOULLI-Wellenelement.....	28
3.4	Bildung der Elementmatrizen für ein TIMOSHENKO-Wellenelement.....	33
3.5	Transformation der Elementmatrizen in das rotierende Koordinatensystem .....	40
3.6	Lokaler Erregerkraftvektor zufolge Unwucht.....	41
3.7	Lokaler Erregerkraftvektor zufolge Gewichtskraft .....	42
3.8	Äußere Dämpfung .....	44
3.9	Innere Dämpfung .....	44
3.10	Zusammenbau der globalen Matrizen.....	45
3.11	Harmonische, unwuchterregte Schwingungen.....	48
3.12	Harmonische, gewichtskrafterregte Schwingungen .....	49
<b>4</b>	<b>BERECHNUNG DER FLÄCHENPARAMETER.....</b>	<b>51</b>
4.1	Problemstellung .....	51
4.2	Flächenparameter eines Dreiecks .....	51
4.3	Flächenparameter eines Polygonzuges .....	53
4.4	Flächenparameter eines rohrförmigen Querschnitts.....	54

---

<b>5</b>	<b>OVALISIERUNG DES ANISOTROPEN WALZENKÖRPERS .....</b>	<b>55</b>
5.1	Phänomen.....	55
5.2	Modellbildung.....	56
5.3	Das dreidimensionale finite Hexaeder-Element .....	58
5.4	Numerische Integration der Dreifachintegrale .....	61
5.5	Weitere Vorgehensweise.....	62
<b>6</b>	<b>OPTIMIERTE BEARBEITUNG DES WALZENKÖRPERS .....</b>	<b>66</b>
6.1	Problemstellung .....	66
6.2	Grundlagen der Optimierung.....	66
6.3	Begriffsdefinition Unwucht.....	67
6.4	Modell.....	68
6.5	Zielfunktionen .....	69
<b>7</b>	<b>NUMERISCHE UNTERSUCHUNG .....</b>	<b>74</b>
7.1	Verifikation der Modelle für die Berechnung der Biegeschwingungen .....	74
7.2	Verifikation des dreidimensionalen Modells .....	77
7.3	Parametrisiertes Modell der Walze.....	80
7.4	Analyseprogramm „RollAnalyzer“ .....	81
7.5	Berechnung der Schwingungen vereinfachter Walzen .....	83
7.6	Berechnung der Schwingungen einer realen Walze.....	92
<b>8</b>	<b>ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK .....</b>	<b>95</b>
<b>A</b>	<b>ANHANG .....</b>	<b>97</b>
A.1	Quellenverzeichnis .....	97
A.2	Transformation zwischen fixem und rotierendem Koordinatensystem.....	98
A.3	Elementmatrizen nach EULER-BERNOULLI .....	100
A.4	Elementmatrizen nach TIMOSHENKO .....	102
A.5	Grafische Benutzeroberfläche .....	105
A.6	Programmcode.....	108

## SYMBOLVERZEICHNIS

### Skalare Größen

$A$	Flächeninhalt	$\alpha$	Phasenlage
$d$	Dämpfungskoeffizient	$\alpha_{(Index)}$	Dämpfungskoeffizient
$E$	Elastizitätsmodul	$\beta$	Verdrehung um die y-Achse
$F$	Kraft	$\Delta$	Differenz
$G$	Schubmodul	$\varepsilon$	Dehnung
$g_{(Index)}$	Koeffizient der Gyroskopiematrix	$\gamma$	Verdrehung um die z-Achse
$g$	Erdbeschleunigung	$\gamma_{(xy)}$	Schubwinkel
$H$	Ansatzfunktion	$\varphi$	Drehwinkel
$I$	Flächenträgheitsmoment bzw. Deviationsmoment	$\mu$	Querschnittsanisotropie
$int$	intermediär	$\nu$	Querdehnzahl (POISSON-Zahl)
$k$	Koeffizient der Steifigkeitsmatrix	$\rho$	Dichte
$L$	Länge	$\sigma$	Normalspannung
$LR$	Lagerreaktion	$\tau$	Schubspannung
$M$	Biegemoment	$\Omega$	Rotationsgeschwindigkeit
$m$	Koeffizient der Massenmatrix	$\omega$	mittlere biegekritische Eigenfrequenz
$N$	Ansatzfunktion	$\xi, \eta, \zeta$	Koordinaten im rotierenden Koordinatensystem
$Q$	Querkraft		
$R$	Radialschlag		
$r, s, t$	Koordinaten des normierten Koordinatensystems		
$S$	Schwerpunkt		
$t$	Zeit		
$U$	Unwucht		
$W$	virtuelle Arbeit		
$v$	Verschiebung in y-Richtung		
$w$	Verschiebung in z-Richtung		
$x, y, z$	Koordinaten im inertialfesten Koordinatensystem		

### Matrizen und Vektoren

$B$	Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix	$K$	Steifigkeitsmatrix
$C$	Stofftensor	$M$	Massenmatrix
$D$	Dämpfungsmatrix	$N$	Formfunktionsmatrix
$F$	globaler Kraftvektor	$r$	Lagevektor
$f$	lokaler Kraftvektor	$T$	Transformationsmatrix
$G$	Gyroskopiematrix	$u$	Verschiebefeldvektor
$J$	Jakobi-Matrix	$x$	Lagevektor

**Tiefgestellter Index**

<i>A</i>	Index der triebseitigen Korrektorebene	<i>mess</i>	Messpunkt in Walzenmitte
<i>a</i>	Index der äußeren Dämpfung	<i>min</i>	Minimum
<i>B</i>	BERNOULLI	<i>P</i>	Index des Punktes P
<i>B</i>	in Verbindung mit $x_B$ der Index der führungsseitigen Korrektorebene	<i>real</i>	Realanteil
<i>FE</i>	finites Wellenelement	<i>S</i>	Index des Schwerpunkts
<i>FS</i>	Führungsseite (entspr. dem Einbau der Walze in der Papiermaschine)	<i>T</i>	TIMOSHENKO
<i>G</i>	Index der Gewichtskraft	<i>TS</i>	Triebseite (entspr. dem Einbau der Walze in der Papiermaschine)
<i>i</i>	Index der inneren Dämpfung	<i>U</i>	Index der Unwucht
<i>imag</i>	Imaginäranteil	<i>x</i>	in x-Richtung
<i>j</i>	Element j	<i>xy</i>	in der xy-Ebene
<i>k</i>	Index der Steifigkeit	<i>xz</i>	in der xz-Ebene
<i>Lager</i>	Index der Lagerung	<i>y</i>	in y-Richtung
<i>M</i>	Walzenmitte	<i>yz</i>	in der yz-Ebene
<i>m</i>	Index der Masse	<i>z</i>	in z-Richtung
<i>max</i>	Maximum	<i>η</i>	in η-Richtung
		<i>ζ</i>	in ζ-Richtung

**Hochgestellter Index**

<i>(f)</i>	inertialfestes Koordinatensystem
<i>(r)</i>	rotierendes Koordinatensystem
<i>T</i>	transponiert
<i>'</i>	erste Ableitung
<i>''</i>	zweite Ableitung
<i>'''</i>	dritte Ableitung
<i>''''</i>	vierte Ableitung
<i>·</i>	erste Ableitung nach der Zeit
<i>··</i>	zweite Ableitung nach der Zeit
<i>...</i>	dritte Ableitung nach der Zeit

# 1 EINLEITUNG

Die Anforderungen im Maschinenbau hinsichtlich der Leistungsfähigkeit und Arbeitsgenauigkeit steigen ständig. Gleichzeitig zielt die Entwicklung der modernen Konstruktion und Fertigung darauf ab, geforderte Eigenschaften bei möglichst geringen Kosten zu erreichen. Unter diesen Gesichtspunkten versucht man, die Bearbeitung an einem Werkstück und den Materialeinsatz zu minimieren. Häufig treten dadurch Phänomene auf, die bislang unbekannt waren oder bisher eine untergeordnete Rolle gespielt haben.

## 1.1 Wuchten von Papierleitwalzen

Moderne Papiermaschinen haben heute Arbeitsbreiten von bis zu 11 Metern. Sie bestehen unter anderem aus mehr als hundert sogenannter Leitwalzen für Siebe, Filze und die Papierbahn. Diese Art von Walzen haben einen relativ einfachen Aufbau und bestehen aus einem Rohr (in weiterer Folge auch als Walzenkörper bezeichnet), an dessen Enden Kappen und Zapfen eingepresst werden, siehe Abbildung 1.1.

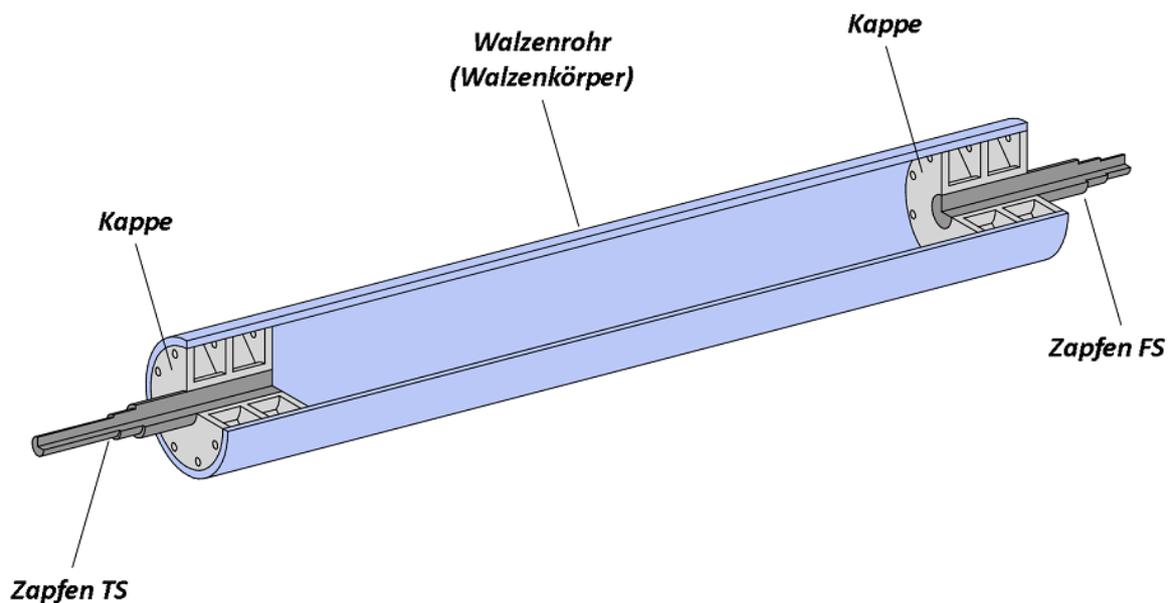


Abbildung 1.1 – Viertelschnitt durch eine vereinfachte Papierleitwalze<sup>1</sup>

Solche Leitwalzen werden bis etwa 75% der ersten biegekritischen Drehfrequenz betrieben und werden deshalb als elastische Rotoren betrachtet. Aufgrund dessen sind solche Walzen in drei Ebenen zu wuchten, siehe Abbildung 1.2. Die Korrekturmassen (rot dargestellt) werden in den beiden seitlichen Wuchtebenen eingeschraubt. In der mittleren Ebene wird eine Vorrichtung, die hier nicht näher erläutert wird, zur Befestigung der Wuchtstangen verwendet. Durch Variation der Anzahl, Masse und Position der Wuchtstangen kann die statische und dynamische Unwucht der Walze sowie der einfach drehfrequente Radialschlag reduziert werden.

<sup>1</sup> TS...triebseitig, FS...führungseitig

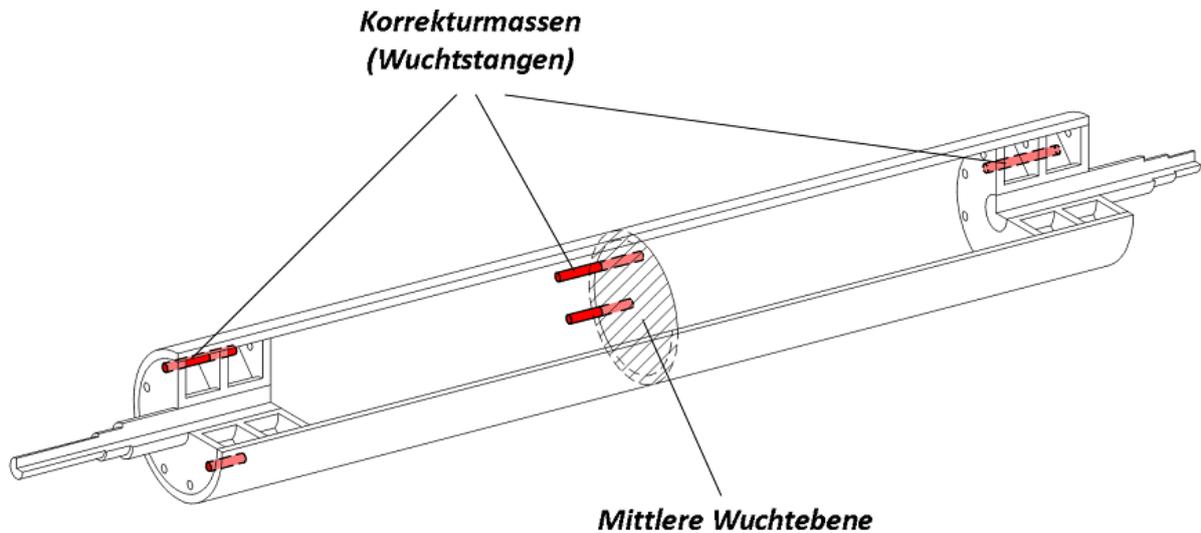


Abbildung 1.2 – Wuchten von Walzen in drei Ebenen

## 1.2 Problemstellung

Bei etwa der Hälfte der biegekritischen Drehzahl treten resonanzartige Schwingungen mit der doppelten Rotordrehfrequenz auf. Ursache dafür ist die Anisotropie der Rotorbiegesteifigkeit, verursacht durch unterschiedliche Wandstärken in radialer Richtung bzw. durch Gefügeunterschiede. Dieser Sachverhalt lässt sich am Beispiel eines horizontal gelagerten und um seine Längsachse rotierenden Balkens mit rechteckigem Querschnitt veranschaulichen. Da die Steifigkeit in Richtung der Trägheitshauptachsen unterschiedlich ist, nimmt die durch die Gewichtskraft verursachte Durchbiegung zweimal pro Umdrehung ein Minimum und zweimal ein Maximum an, siehe Abbildung 1.3.

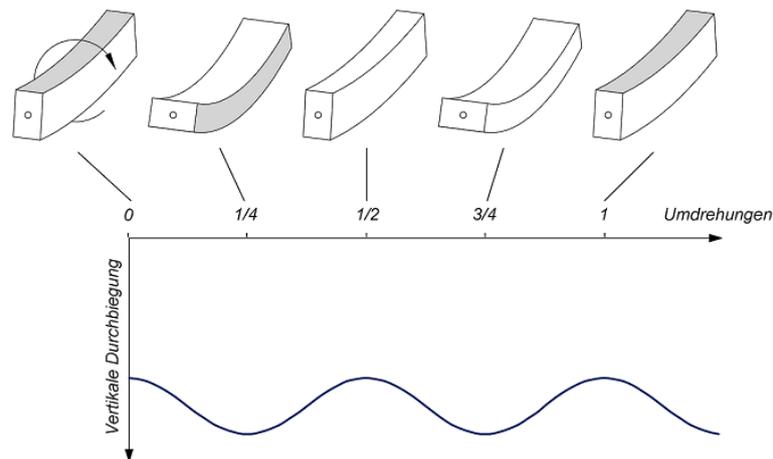


Abbildung 1.3 – Horizontale Durchbiegung eines rotierenden, anisotropen Balkens unter dem Einfluss der Gewichtskraft

Die Amplitude dieser doppelt drehfrequenten Schwingung ist über einen Großteil des Drehzahlbereichs vernachlässigbar klein. Bei etwa der halben biegekritischen Drehzahl erfolgt jedoch die Abfolge von maximaler zu minimaler Steifigkeit in horizontaler Richtung mit der Resonanzfrequenz des Rotors. Unter diesen Bedingungen wird das System zu resonanzartigen Schwingungen angeregt. In der Literatur wird dieses Phänomen oft als „Gewichtskritische“ bezeichnet.

Ein weiteres Phänomen, das bei Leitwalzen auftreten kann, ist der Anstieg der Amplitude der doppelrequenten Schwingung mit steigender Drehzahl. Da der Walzenrohling bevorzugt aus gewalztem Blech (welches zu einem Rohr geformt und verschweißt wird) oder durch Schleudergussverfahren gefertigt und meist nur außen spanend bearbeitet wird, ergeben sich zwangsläufig Wanddickenabweichungen. Proportional zur ungleichmäßigen Massenverteilung wirken bei Rotation der Walze unterschiedlich starke Fliehkräfte. Bei steigender Drehzahl „ziehen“ diese Kräfte das Walzenrohr in eine ovale Form, siehe Abbildung 1.4.

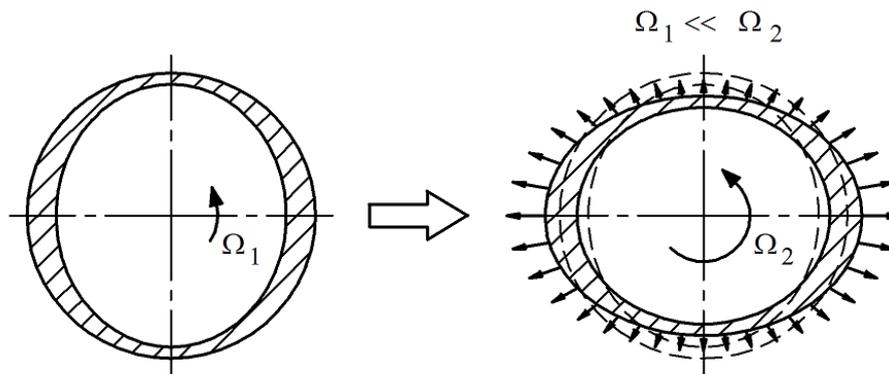


Abbildung 1.4 – Darstellung der Ovalisierung des Querschnitts einer rotierenden, anisotropen Walze

Als direkte Folge verändern sich sowohl die Flächen- und Deviationsmomente des dargestellten Querschnitts, als auch die abgetastete Messspur jenes Sensors, der die Schwingungen in Walzenmitte messen soll. Das führt dazu, dass zusätzlich zur tatsächlichen doppelrequenten Schwingung ein durch diese „Ovalisierung“ verursachtes Signal, welches ebenfalls doppelte Drehfrequenz besitzt, gemessen wird und sich beide Signalanteile überlagern.

Die Amplituden der Schwingungen werden erst nach Fertigung und Zusammenbau beim Wuchten an der Wuchtmaschine erfasst. In diesem Arbeitsschritt wird die Unwucht der Walze (und damit verbunden die einfach drehfrequenten Schwingungsanteile) durch Anbringen von Wuchtmassen in drei Wuchtebenen reduziert (siehe Abbildung 1.2).

Da die doppelt drehfrequenten Schwingungsanteile in erster Linie von Steifigkeitsunterschieden abhängig sind, kann deren Amplitude nur bedingt beim Wuchten beeinflusst werden. Im ungünstigsten Fall müssen die eingepressten Zapfen und Kappen entfernt und das Walzenrohr innen bearbeitet werden, bevor man die Walze erneut zusammenbaut und wuchtet. Dieser grundsätzlich ungeplante Arbeitsvorgang verursacht neben Problemen in der Produktionsplanung vor allem auch deutliche Mehrkosten.

### 1.3 Zielsetzung

Es soll eine Analysesoftware erstellt werden, die basierend auf den Hauptabmessungen der späteren Walze und den gemessenen Geometriedaten eines Walzenrohlings

- *die Messdaten automatisch einliest und ein Modell generiert,*
- *die zu erwartenden einfach und doppelt drehfrequenten Schwingungen berechnet,*
- *die optimale Aufspannung des Rohlings an der Drehmaschine ermittelt, um verbesserte Ergebnisse hinsichtlich Unwucht (und den damit verbundenen Schwingungen) zu erreichen,*
- *eine möglichst einfache Kommunikation mit dem Benutzer bietet und*
- *kurze Rechenzeiten ermöglicht, damit das System in der Fertigung wirtschaftlich eingesetzt werden kann.*

### 1.4 Stand der Technik

In den letzten Jahrzehnten wurden weitreichende Untersuchungen hinsichtlich Rotoren mit anisotropem Querschnitt und den damit verbundenen Phänomenen wie der Resonanz bei halber biegekritischer Drehzahl durchgeführt und zahlreiche wissenschaftliche Arbeiten veröffentlicht. Dazu verwendete man den LAVAL-Rotor, ein simples physikalisches Modell mit einer Scheibe und einer masselosen Welle, mit dem viele Effekte und Phänomene erklärt werden können. Eine ausführliche Darstellung bietet dazu GASCH et al [6].

Um das Problem genauer beschreiben zu können, müssen jedoch verschiedene physikalische Eigenschaften (z. B. massebehaftete Welle, mehrere Wellenabschnitte, ...) berücksichtigt werden. In diesem Fall ist der LAVAL-Rotor nicht mehr ausreichend. Aus diesem Grund wurden andere Modelle (z. B. durch Diskretisierung des Rotors mit der Methode der finiten Elemente) entwickelt. Meist wurde jedoch angenommen, dass die Trägheitshauptachsen der Querschnitte stets dieselbe Orientierung haben.

In den Arbeiten von MALTA [10] und BORU [3] werden hinsichtlich der Modellierung von Rotoren mit anisotropem Querschnitt unterschiedliche Konzepte behandelt. Diesen beiden Arbeiten stellen zum gegenwärtigen Zeitpunkt die aktuellsten Publikationen zu diesem Thema dar.

### 1.5 Gang der Untersuchung

Ein Modell mit finiten Wellenelementen (FE) zur Beschreibung der bei einem horizontal gelagerten Rotor mit Unwucht und anisotropem Querschnitt auftretenden Phänomene betreffend die Biegeschwingungen wird in *Kapitel 3* erarbeitet. Grundlage dafür bilden die in *Kapitel 2* behandelten Balkentheorien nach EULER-BERNOULLI bzw. nach TIMOSHENKO, in welche die Theorie der *Schiefen Biegung* eingearbeitet wird.

Für das in *Kapitel 3* behandelte Modell müssen die Daten der Querschnitte (Fläche, Schwerpunktkoordinaten, Flächenträgheits- und Deviationsmomente) der einzelnen finiten Wellenelemente

berechnet werden. Ausgangsbasis ist der durch Vermessung ermittelte Walzenquerschnitt, welcher durch Polygonzüge angenähert wird. Ein dazu verwendetes Berechnungsverfahren wird in *Kapitel 4* behandelt.

In *Kapitel 5* wird ein Modell erarbeitet, das die Ovalisierung der Walze berechnet soll. Grundlage für das Modell bilden dreidimensionale finite Hexaederelemente mit linearen Ansatzfunktionen.

Die optimierte Bearbeitung des Walzenrohlings an der Drehmaschine bildet den Schwerpunkt von *Kapitel 6*. Neben Grundlagen hinsichtlich Optimierung und der Begriffsdefinition der Unwucht werden verschiedene mögliche Zielfunktionen und deren Umsetzbarkeit betrachtet und bewertet.

In *Kapitel 7* werden die einzelnen Modelle implementiert und zusammengeführt. Neben der Verifikation und Validierung steht in diesem Abschnitt die Umsetzung mit dem Softwarepaket MATLAB im Zentrum der Betrachtungen. Die Ergebnisse der numerischen Untersuchung werden ausgewertet, mit realen Messungen verglichen und analysiert.

Neben einer Zusammenfassung des Inhaltes und der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit bietet *Kapitel 8* einen Ausblick auf mögliche zukünftige Untersuchungen.

## 2 BALKENTHEORIE

Bei der Berechnung komplexer Rotormodelle mit Hilfe von finiten Wellenelementen kann die Wahl der zur Modellkonzeption verwendeten Balkentheorie einen wesentlichen Einfluss auf die Ergebnisse haben. Aus diesem Grund werden in diesem Kapitel zwei Balkentheorien behandelt, nämlich:

- EULER-BERNOULLI-Balkentheorie
- TIMOSHENKO-Balkentheorie

Wie sich zeigen wird, ist der Ansatz nach TIMOSHENKO eine Erweiterung der Balkentheorie nach EULER-BERNOULLI. In beide Balkentheorien soll die *Theorie der Schiefen Biegung* einfließen.

### 2.1 Theorie der Schiefen Biegung

Wird ein Balken nicht in Richtung einer der drei Trägheitshauptachsen belastet, so wird die dadurch verursachte Verformung aus der Lastebene heraus erfolgen, was allgemein als *Schiefe Biegung* bezeichnet wird, vgl. [17].

Die nachfolgende Herleitung ist an WRIGGERS et al [17] angelehnt.

#### 2.1.1 Kinematik

Die Kinematik der schiefen Biegung ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Wird ein Balken nicht entlang einer seiner drei Trägheitshauptachsen belastet, so wirken Biegemomente  $M_z$  und  $M_y$  sowohl in der  $xy$ - als auch in  $xz$ -Ebene und der Querschnitt, auf dem sich der Punkt P befindet, wird um den Winkel  $\beta$  um die  $y$ -Achse und gleichzeitig um den Winkel  $\gamma$  um die  $z$ -Achse verdreht.

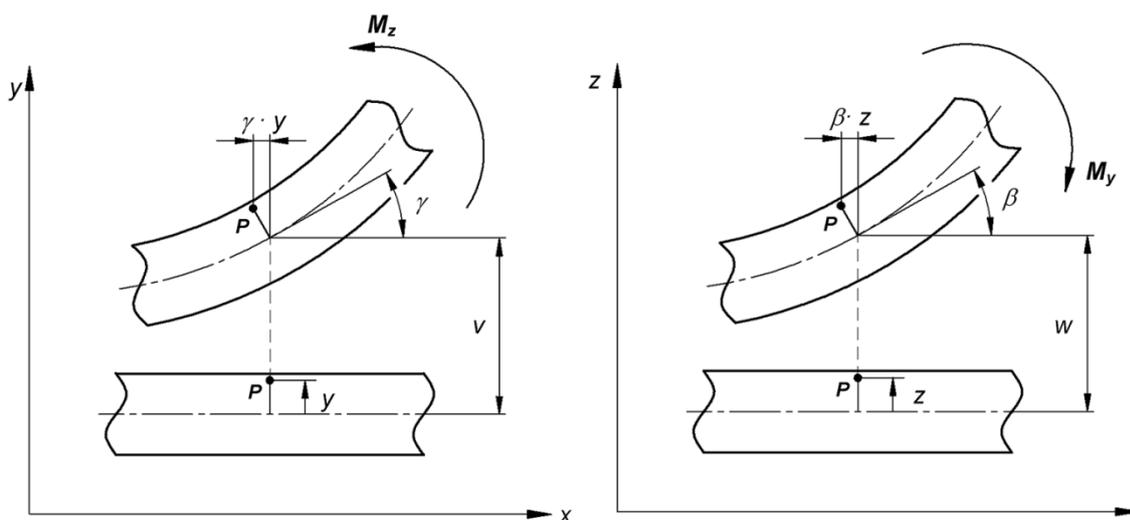


Abbildung 2.1 – Kinematik der Schiefen Biegung (vgl. [17])

Entsprechend der BERNOULLI-Hypothese wird vorerst angenommen, dass die Querschnitte eben und senkrecht zur neutralen Achse bleiben. Damit gilt für die Verschiebung  $u_p$  eines beliebigen Punktes  $P$

$$u_p(x, y, z) = z\beta(x) - y\gamma(x) . \quad (2.1)$$

Für die Dehnung  $\varepsilon_x$  folgt

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_p(x, y, z)}{\partial x} = z\beta'(x) - y\gamma'(x) . \quad (2.2)$$

Es soll die Einschränkung gelten, dass die Winkel  $\beta$  und  $\gamma$  klein sind, damit die obige Gleichung vereinfacht werden kann zu

$$\varepsilon_x(x, y, z) = -zw''(x) - yv''(x) . \quad (2.3)$$

### 2.1.2 Materialgleichung

Für ein homogenes und isotropes Material mit dem Elastizitätsmodul  $E$  gilt das HOOKEsche Gesetz und die Formel für die Spannung  $\sigma_x$  in x-Richtung lautet

$$\sigma_x(x, y, z) = E\varepsilon_x(x, y, z) . \quad (2.4)$$

### 2.1.3 Schnittgrößen

Unter der Annahme, dass keine Normalkraft auf den Balken wirkt, resultiert die Normalspannung lediglich aus den beiden Biegemomenten  $M_y$  und  $M_z$  und unter Verwendung der Gln. (2.3) und (2.4) folgt

$$\begin{aligned} M_y(x) &= \int_A z\sigma_x(x, y, z)dA = -Ew''(x) \int_A z^2 dA - Ev''(x) \int_A yz dA \\ M_z(x) &= - \int_A y\sigma_x(x, y, z)dA = Ew''(x) \int_A yz dA + Ev''(x) \int_A y^2 dA . \end{aligned} \quad (2.5)$$

### 2.1.4 Differentialgleichungen

Mit der Definition der Flächenträgheitsmomente  $I_y$ ,  $I_z$  und  $I_{yz}$  (vgl. [14])

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z(x) = \int_A y^2 dA, \quad I_{yz}(x) = - \int_A yz dA \quad (2.6)$$

lauten die Differentialgleichungen der Schiefen Biegung

$$\begin{aligned} M_y(x) &= -EI_z w''(x) + EI_{yz} v''(x) \\ M_z(x) &= -EI_{yz} w''(x) + EI_y v''(x) . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Anders als bei der ebenen Biegung erhält man bei der *Schiefen Biegung* zwei gekoppelte Differentialgleichungen, was bei der Berechnung des anisotropen finiten Wellenelements zu berücksichtigen ist.

## 2.2 EULER-BERNOULLI-Balkentheorie

Die EULER-BERNOULLI-Hypothese gilt als die klassische Balkentheorie. Sie basiert auf folgenden Annahmen:

- *kleine Verformungen (lineare Elastizitätstheorie)*
- *Querschnitte bleiben senkrecht zur Balkenachse*
- *keine Schubverformung*
- *rotatorische Massenträgheit wird vernachlässigt*

Die BERNOULLI-Hypothese geht davon aus, dass Materialpunkte, die sich auf einer Fläche senkrecht zur Balkenachse befinden, auch bei Verformung auf einer ebenen Fläche senkrecht zur verformten Balkenachse liegen, d. h. der Balken wird als schubstarr angesehen. Ausgangspunkt ist das in Abbildung 2.2 dargestellte differentielle Balkenelement mit der Länge  $dx$ , der Querschnittsfläche  $A$  und der Dichte  $\rho$ .

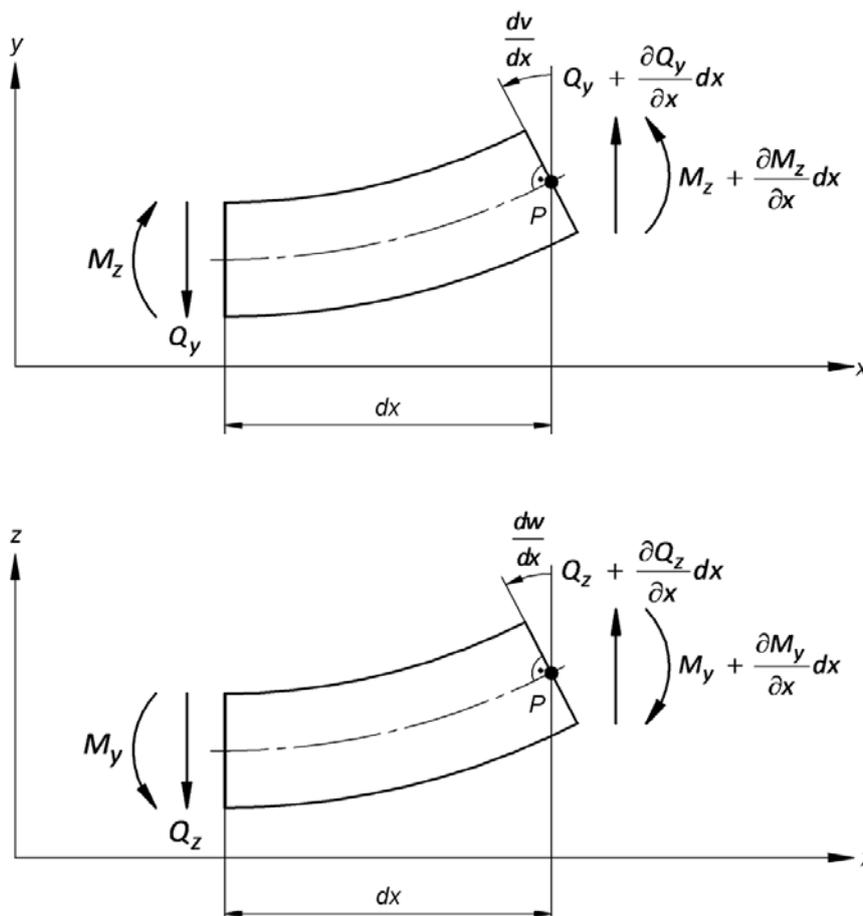


Abbildung 2.2 – differentielles Balkenelement nach EULER-BERNOULLI in der  $xy$ - und der  $xz$ -Ebene (vgl. [3])

Die nachstehende Herleitung basiert auf BORU [3].

Der Schwerpunktsatz in y- bzw. z-Richtung lautet

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_y}{\partial x} dx &= \rho A dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_z}{\partial x} dx &= \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} .\end{aligned}\quad (2.8)$$

Nach Elimination von  $dx$  reduziert sich Glg. (2.8) zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_y}{\partial x} &= \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_z}{\partial x} &= \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} .\end{aligned}\quad (2.9)$$

Bei Vernachlässigung der rotatorischen Massenträgheit erhält man den Drallsatz um Punkt  $P$ , aus dem der Zusammenhang zwischen Querkraft und Biegemoment hergestellt werden kann:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_z}{\partial x} dx + Q_y dx &= 0 \rightarrow Q_y = -\frac{\partial M_z}{\partial x} \\ \frac{\partial M_y}{\partial x} dx - Q_z dx &= 0 \rightarrow Q_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} .\end{aligned}\quad (2.10)$$

Durch Substitution von Glg. (2.10) in Glg. (2.9) erhält man

$$\begin{aligned}-\frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ +\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 .\end{aligned}\quad (2.11)$$

Unter Verwendung von Glg. (2.7) aus Kapitel 2.1 lautet für einen konstanten, anisotropen Querschnitt  $A$  die Gleichung der EULER-BERNOULLI-Balkentheorie

$$\begin{aligned}EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - EI_{yz} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - EI_{yz} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \underbrace{\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}}_{\text{translatorische Massenträgheit}} &= 0 .\end{aligned}\quad (2.12)$$

Wie man erkennen kann, beschreiben diese gekoppelten Differentialgleichungen die Biegeschwingungen des Balkenelements als von der Position und der Zeit abhängige Funktionen. Für den Fall, dass der Querschnitt  $A$  rotationssymmetrisch ist ( $I_y = I_z = I$ ,  $I_{yz} = 0$ ), können Gln. (2.12) zu der aus der Literatur bekannten Form vereinfacht werden:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 .\quad (2.13)$$

## 2.3 TIMOSHENKO-Balkentheorie

Der Ansatz nach TIMOSHENKO ist eine Erweiterung der EULER-BERNOULLI-Balkentheorie und berücksichtigt neben der Biegeverformung und der Massenträgheit sowohl die Verformung infolge von Schub als auch die Rotationsträgheit.

Zwar bleiben wie bei der BERNOULLI-Hypothese ebene Querschnitte auch nach der Verformung eben, anfangs senkrecht zur Balkenachse stehende Querschnitte sind jedoch nach der Verformung um den Verdrehwinkel  $\gamma_{xy}$  zur ursprünglich senkrechten Querschnittsfläche geneigt. Mit anderen Worten, es erfährt der Balken zusätzlich zur Krümmung durch Biegung eine Scherbeanspruchung, siehe Abbildung 2.3.

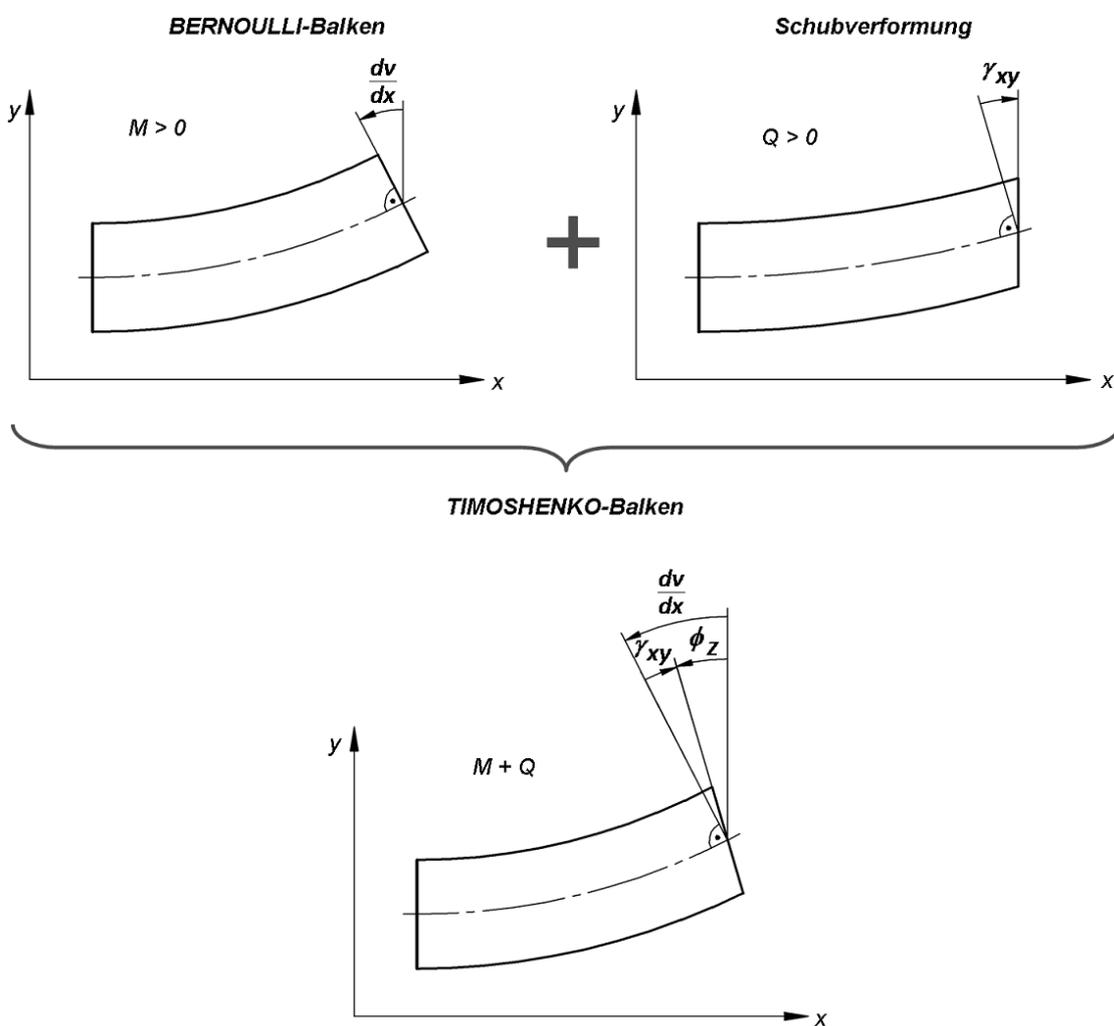


Abbildung 2.3 – Überlagerung des EULER-BERNOULLI-Balkens und der Schubverformung zum TIMOSHENKO-Balken in der  $xy$ -Ebene. Die dargestellte Orientierung der Winkel entspricht den positiven Definitionen (vgl. [11])

Die nachstehende Herleitung basiert auf MERKEL et al [11] und BORU [3].

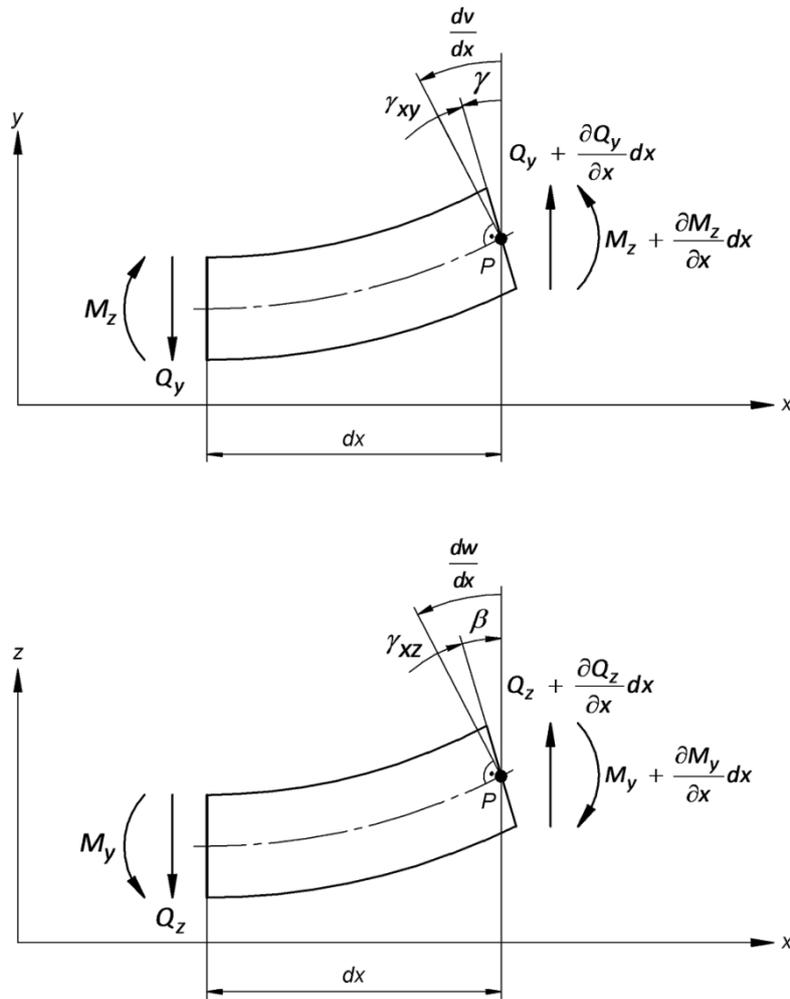


Abbildung 2.4 – differentiell Balkenelement nach TIMOSHENKO in der  $xy$ - und der  $xz$ -Ebene (vgl. [3])

Zum Aufstellen der kinematischen Beziehungen betrachtet man Abbildung 2.4, wobei man folgenden geometrischen Zusammenhang ableiten kann:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma_{xy} \\ \beta &= -\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_{xz} .\end{aligned}\tag{2.14}$$

Der Schwerpunktsatz hat dieselbe Form wie jener der EULER-BERNOULLI-Balkentheorie:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_y}{\partial x} dx &= \rho A dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_z}{\partial x} dx &= \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} .\end{aligned}\tag{2.15}$$

Beim Ansatz nach TIMOSHENKO wird der Drallsatz um einen Term auf der rechten Seite der Gleichung, welcher die rotatorische Massenträgheit des Balkens berücksichtigt, erweitert:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_z}{\partial x} dx + Q_y dx &= \rho I_z dx \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_y}{\partial x} dx - Q_z dx &= -\rho I_y dx \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} .\end{aligned}\quad (2.16)$$

Für die zusätzlichen Verformungsgrößen müssen nun Materialgesetze formuliert werden. Die Schubspannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{xz}$  können über die Beziehung

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G \gamma_{xz}\end{aligned}\quad (2.17)$$

bestimmt werden. Der Schubmodul  $G$  ist in Abhängigkeit vom Elastizitätsmodul  $E$  und der POISSON-Zahl  $\nu$  definiert durch

$$G = \frac{E}{2(1-\nu)} .\quad (2.18)$$

Die Querkraft  $Q$  kann allgemein über das Integral der Schubspannungen

$$\begin{aligned}Q_y &= \int_A \tau_{xy} dA \\ Q_z &= \int_A \tau_{xz} dA\end{aligned}\quad (2.19)$$

bestimmt werden. Vereinfacht wird jedoch angenommen, dass die Querkraft proportional zum Winkel  $\gamma_{xy}$  bzw.  $\gamma_{xz}$  ist:

$$\begin{aligned}Q_y &= \tau_{xy} A_\kappa = \kappa G A \gamma_{xy} \\ Q_z &= \tau_{xz} A_\kappa = \kappa G A \gamma_{xz} .\end{aligned}\quad (2.20)$$

Die Schubfläche  $A_\kappa = \kappa A$  ist die um den sogenannten Schubkorrekturfaktor  $\kappa$  korrigierte Querschnittsfläche.<sup>2</sup> In der Literatur gibt es eine Reihe von  $\kappa$ -Werten für verschiedene Querschnitte (vgl. [11]). Durch Einsetzen von Glg. (2.20) in Glg. (2.15) erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} (\kappa G A \gamma_{xy}) &= \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} (\kappa G A \gamma_{xz}) &= \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} .\end{aligned}\quad (2.21)$$

<sup>2</sup> Anmerkung: Durch die Annahme ebener Querschnitte ist auch die TIMOSHENKO-Balkentheorie eine Näherung. Weicht man von der Annahme ebener Querschnitte ab, so gelangt man zu Theorien dritter Ordnung, bei denen im Verschiebungsfeld ein parabolischer Verlauf der Schubverzerrungen und -spannungen berücksichtigt wird und somit kein Schubkorrekturfaktor erforderlich ist.

Substitution von Glg. (2.20) in Glg. (2.16) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_z}{\partial x} + \kappa GA \gamma_{xy} &= \rho I_z \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_y}{\partial x} - \kappa GA \gamma_{xz} &= \rho I_y \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Bei Verwendung von Glg. (2.14) können Gln. (2.22) und (2.21) wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma \right) &= \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \beta \right) &= \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\rho}{\kappa A} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} , \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma \right) + \frac{\partial M_z}{\partial x} &= \rho I_z \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \\ -\kappa GA \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \beta \right) + \frac{\partial M_y}{\partial x} &= \rho I_y \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Durch Einsetzen von Glg. (2.23) in Glg. (2.24), unter Verwendung von Glg. (2.7) und nach Umordnung der einzelnen Terme lauten für einen konstanten, anisotropen Querschnitt A die Differentialgleichungen der Biegelinie in der xy- bzw. der xz-Ebene nach der TIMOSHENKO-Balkentheorie:

$$\begin{aligned} \underbrace{EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - EI_{yz} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}}_{\text{Biegung}} + \underbrace{\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}_{\text{translatorische Massenträgheit}} - \underbrace{\rho I_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2}}_{\text{rotatorische Massenträgheit}} - \frac{\rho}{\kappa G} \left( EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} - EI_{yz} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right) + \underbrace{\frac{\rho}{\kappa G} \rho I_z \frac{\partial^4 v}{\partial t^4}}_{\text{Kombination von Schubverformung und rotatorischer Massenträgheit}} = 0 \\ \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{EULER - BERNOULLI}} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{TIMOSHENKO}} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \underbrace{EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - EI_{yz} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}}_{\text{Biegung}} + \underbrace{\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}}_{\text{translatorische Massenträgheit}} + \underbrace{\rho I_y \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2}}_{\text{rotatorische Massenträgheit}} - \frac{\rho}{\kappa G} \left( EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - EI_{yz} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} \right) - \underbrace{\frac{\rho}{\kappa G} \rho I_y \frac{\partial^4 w}{\partial t^4}}_{\text{Kombination von Schubverformung und rotatorischer Massenträgheit}} = 0 . \\ \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{EULER - BERNOULLI}} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{TIMOSHENKO}} \end{aligned}$$

Wie man erkennen kann, beschreiben diese Differentialgleichungen die Biegeschwingungen des Balkenelements als eine von der Position und der Zeit abhängige Funktion. Für den Fall, dass der Querschnitt A rotationssymmetrisch ist ( $I_y = I_z$ ,  $I_{yz} = 0$ ), kann Glg. (2.25) zu der aus der Literatur bekannten Form vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} \left( 1 + \frac{E}{\kappa G} \right) + \frac{\rho}{\kappa G} \rho I \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} &= 0 \\ EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \left( 1 - \frac{E}{\kappa G} \right) - \frac{\rho}{\kappa G} \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} &= 0 . \end{aligned} \quad (2.26)$$

### 3 BIEGESCHWINGUNGEN VON ROTOREN MIT ANISOTROPEM QUERSCHNITT

#### 3.1 Phänomen

Bei anisotropen Rotoren und isotroper Lagersteifigkeit gibt es zwei biegekritische Drehzahlen, bei denen die Wellenauslenkung theoretisch unendlich groß wird. Der Bereich zwischen diesen beiden kritischen Drehzahlen ist instabil. Darüber hinaus treten bei horizontal gelagerten anisotropen Rotoren neben der biegekritischen Resonanz auch im Bereich der halben biegekritischen Drehzahl resonanzartige Schwingungen auf, vgl. [6].

Dieses Phänomen ist eine parametererregte Schwingung und unterscheidet sich von der erzwungenen Resonanz (z.B. biegekritische Resonanz aufgrund von Unwucht) unter anderem in folgenden Punkten (vgl. [4]):

- *Parametererregte Schwingungen treten dann auf, wenn sich die Parameter des Systems periodisch ändern. Im Falle des anisotropen Rotors ändert sich dessen horizontale Steifigkeit in Abhängigkeit von der Zeit.*
- *Während bei der erzwungenen Resonanz die viskose Dämpfung die Schwingungsausschläge begrenzt, können bei der parametererregten Schwingung die Amplituden trotz vorhandener Dämpfung unbegrenzt anwachsen.*
- *Wesentliche Besonderheit der Parameterresonanz besteht in der Tatsache, dass sie nicht nur bei bestimmten Frequenzen, sondern in einem Frequenzbereich in der Umgebung um diese Frequenzen auftritt.*
- *Darüber hinaus tritt die Parameterresonanz bei etwa der doppelten gemittelten Eigenfrequenz des Schwingungssystems auf, d.h. bei  $\Omega = 2\omega$ .*
- *Bei höheren Drehzahlen sind in einem gewissen Frequenzbereich dynamische Instabilitäten möglich.*

Bei der Betrachtung des horizontal gelagerten anisotropen Rotors sind in Hinblick auf die Parametererregung folgende Punkte relevant:

- *Die Anregung erfolgt durch die Gewichtskraft.*
- *Ursache ist die Anisotropie und damit die periodische Steifigkeitsänderung des Rotors.*
- *Neben der viskosen äußeren Dämpfung ist vor allem die innere Dämpfung zu beachten.*
- *Es können bei höheren Drehzahlen instabile Bereiche auftreten.*

### 3.2 Modellbildung

Die bei einem horizontal gelagerten Rotor mit Unwucht und anisotropem Querschnitt auftretenden Phänomene betreffend die Biegeschwingungen werden durch ein Modell mit finiten Wellenelementen (FE) beschrieben. Grundlage bilden die in Kapitel 2 behandelten Balkentheorien nach EULER-BERNOULLI bzw. nach TIMOSHENKO. Berücksichtigt werden

- *Steifigkeitsanisotropie der finiten Elemente mit unterschiedlicher Orientierung der Trägheitshauptachsen,*
- *Translatorische Massenträgheit,*
- *Rotatorische Massenträgheit (nur bei TIMOSHENKO),*
- *Schubverformung (nur bei TIMOSHENKO),*
- *Unwucht der FE,*
- *Einfluss der Gewichtskraft,*
- *Äußere Dämpfung,*
- *Innere Dämpfung (RAYLEIGH-Dämpfung) und*
- *Isotrope Lagersteifigkeit.*

Darüber hinaus gelten folgende Annahmen und Einschränkungen:

- *Torsionsschwingungen und deren Koppeleffekte mit Biegeschwingungen werden vernachlässigt.*
- *Axialschwingungen und statische Axialkräfte werden nicht berücksichtigt .*
- *Konzentrierte Massen, z. B. Scheiben, werden nicht in das Modell aufgenommen, was jedoch ohne weiteres möglich wäre.*
- *Die Wirkung von Wuchtmassen wird berücksichtigt.*
- *Die Lagerung wird als drehbare Einspannung mit isotroper Lagersteifigkeit abgebildet. Sind Maschine-Fundament-Wechselwirkungen von Bedeutung, können bei entsprechender Erhöhung der Freiheitsgrade mitschwingende Lagermassen (Lagergehäuse, Anteile des Fundaments) berücksichtigt werden.*
- *Das Modell bietet in der vorliegenden Form nicht die Möglichkeit, eine Anisotropie der Lagersteifigkeit zu modellieren.*
- *Es werden nur kleine Verschiebungen im System betrachtet und die Bewegungsgleichungen linearisiert.*

Das Modell eines Rotors mit anisotropen finiten Elementen ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

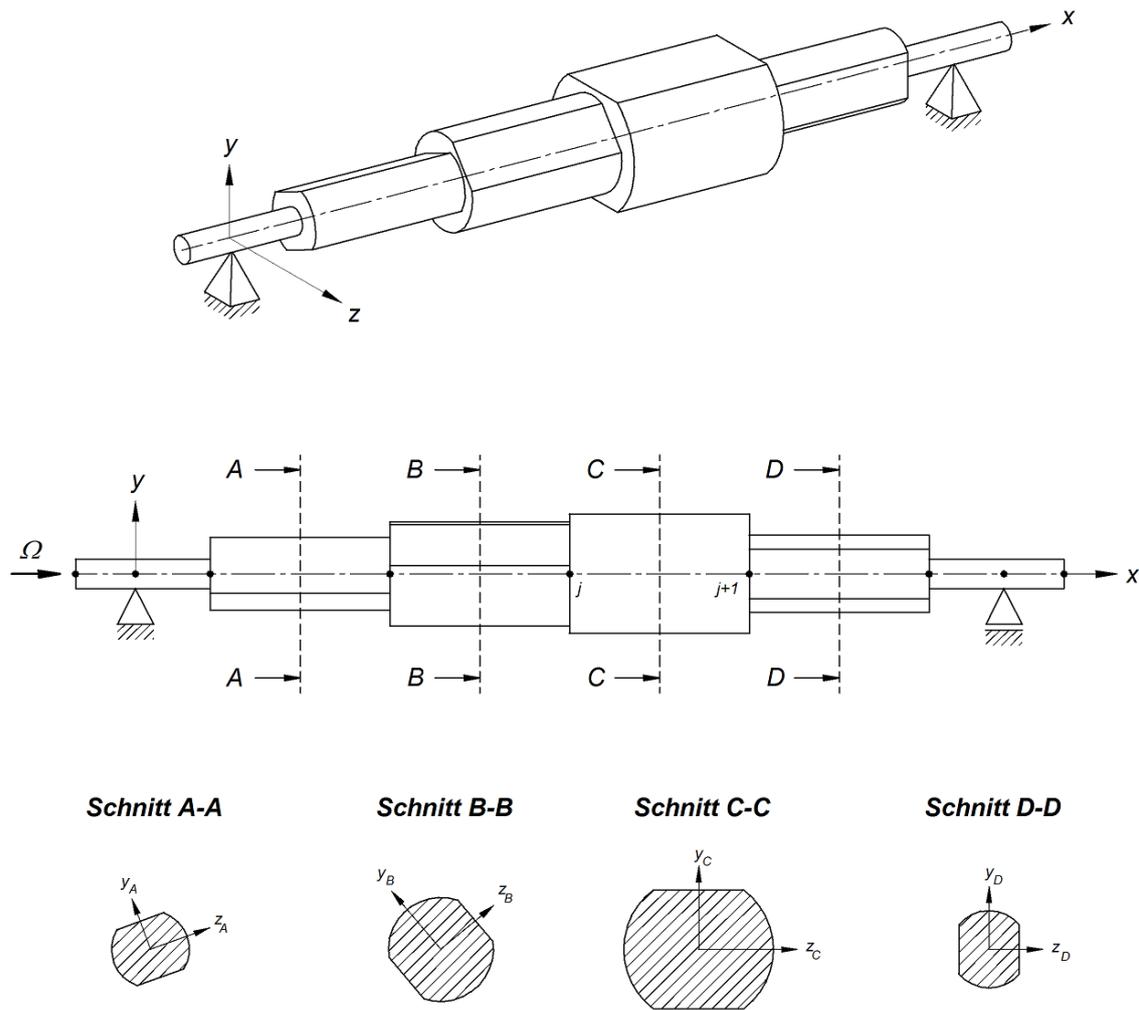


Abbildung 3.1 – Modell eines Rotors mit anisotropen finiten Wellenelementen

Das im Modell verwendete finite Wellenelement besitzen 2 Knoten mit jeweils 4 Freiheitsgraden, siehe Abbildung 3.2.

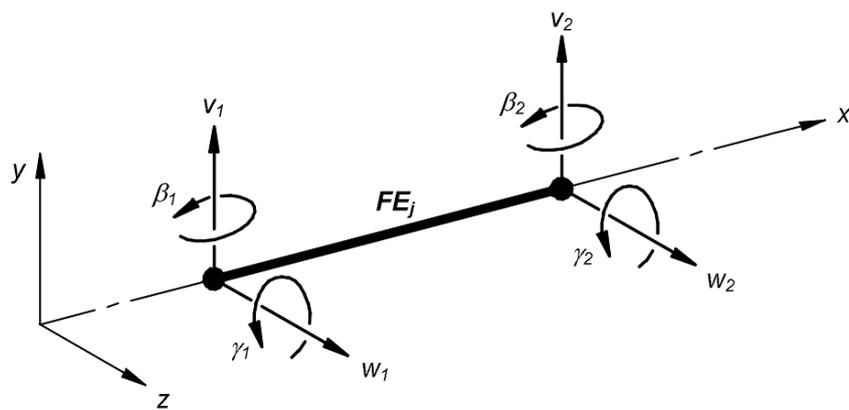


Abbildung 3.2 – Elementfreiheitsgrade des finiten Wellenelement  $FE_j$

Der lokale Lagevektor  $\mathbf{x}_j^{(f)}$  der Freiheitsgrade im Inertialsystem ist definiert als

$$\mathbf{x}_j^{(f)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ v_2 \\ w_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

wobei die Indizes 1 und 2 jeweils die Freiheitsgrade des linken bzw. rechten Randknotens beschreiben. Die Verschiebung jedes Punktes entlang des Elements kann als Linearkombination der Randverschiebungen und -verdrehungen beschrieben werden, siehe Abbildung 3.3.

Das Modell besitzt  $n$  Knoten und somit  $4n$  Freiheitsgrade, die im globalen Lagevektor

$$\mathbf{x}^{(f)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ v_n \\ w_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

zusammengefasst werden.

Da die sich die Herleitungen in den folgenden Kapiteln zunächst nur auf ein finites Wellenelement beschränken, wird zugunsten der Übersichtlichkeit der Index  $j$  unterdrückt. Darüber hinaus wird in den Kapiteln 3.3 und 3.4 die Zeitabhängigkeit der Terme vernachlässigt. Die nachstehenden Herleitungen sind angelehnt an SPRINGER [16] und BORU [3].

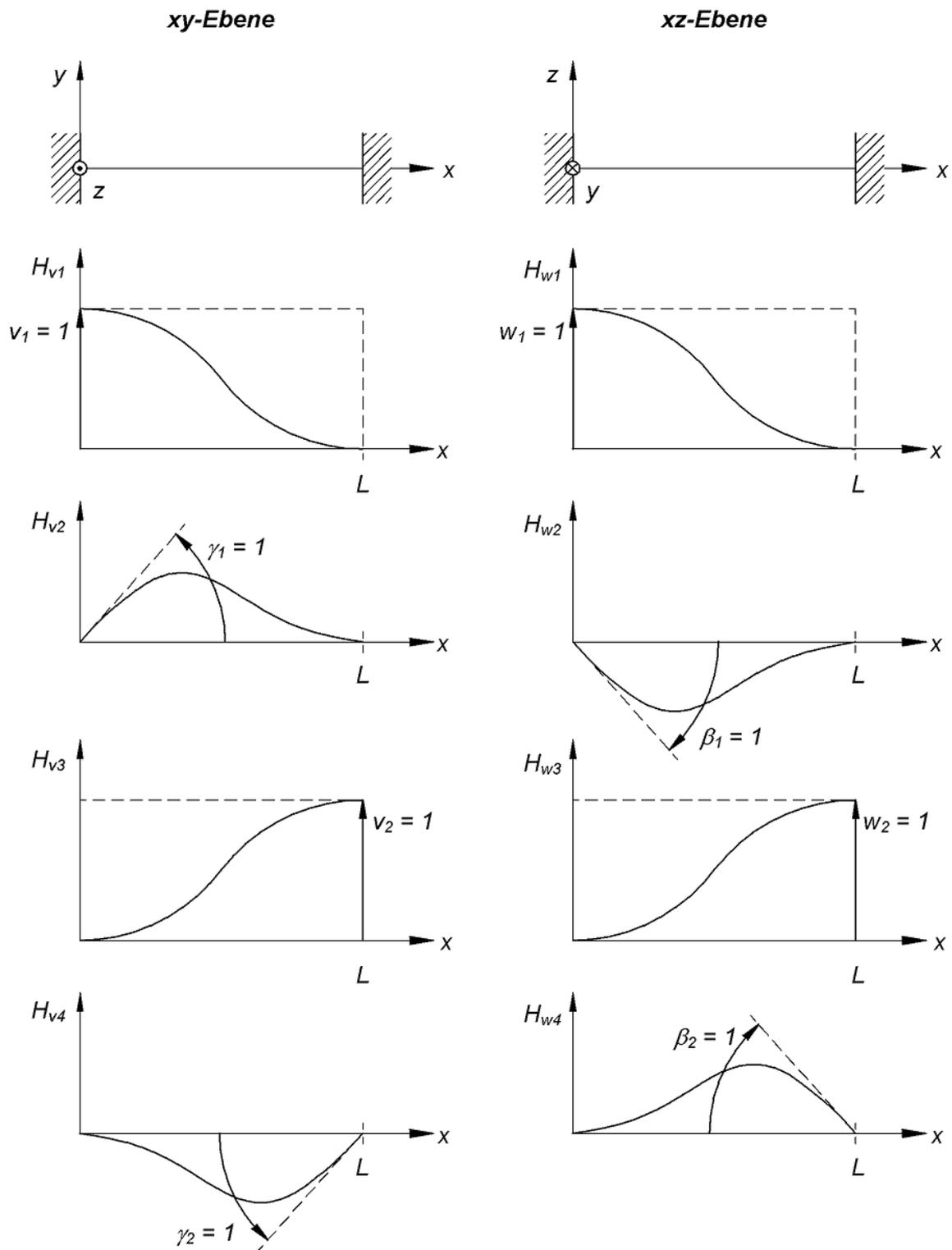


Abbildung 3.3 – Ansatzfunktionen für das 2-knotige Wellenelement mit der Länge  $L$

### 3.3 Bildung der Elementmatrizen für ein EULER-BERNOULLI-Wellenelement

#### 3.3.1 Ansatzfunktionen und Formfunktionsmatrix für ein EULER-BERNOULLI-Wellenelement

Für die Herleitung der Formfunktionsmatrix eines EULER-BERNOULLI-Wellenelements werden folgende Annahmen getroffen:

- Statische Querkräfte und Biegemomente greifen an den beiden Randknoten an.
- Der Querschnitt ist konstant über die gesamte Länge des finiten Elements.
- Schubverformung wird vernachlässigt.
- Querschnitte bleiben senkrecht zur ausgebogenen Achse.
- Rotationsträgheit wird vernachlässigt.

Für die weitere Berechnung wird ein finites Wellenelement betrachtet. Auf dieses FE wirken, verursacht durch die Verschiebung in der  $xy$ - bzw.  $xz$ -Ebene, entsprechende Schnittgrößen, siehe auch Abbildung 3.4.

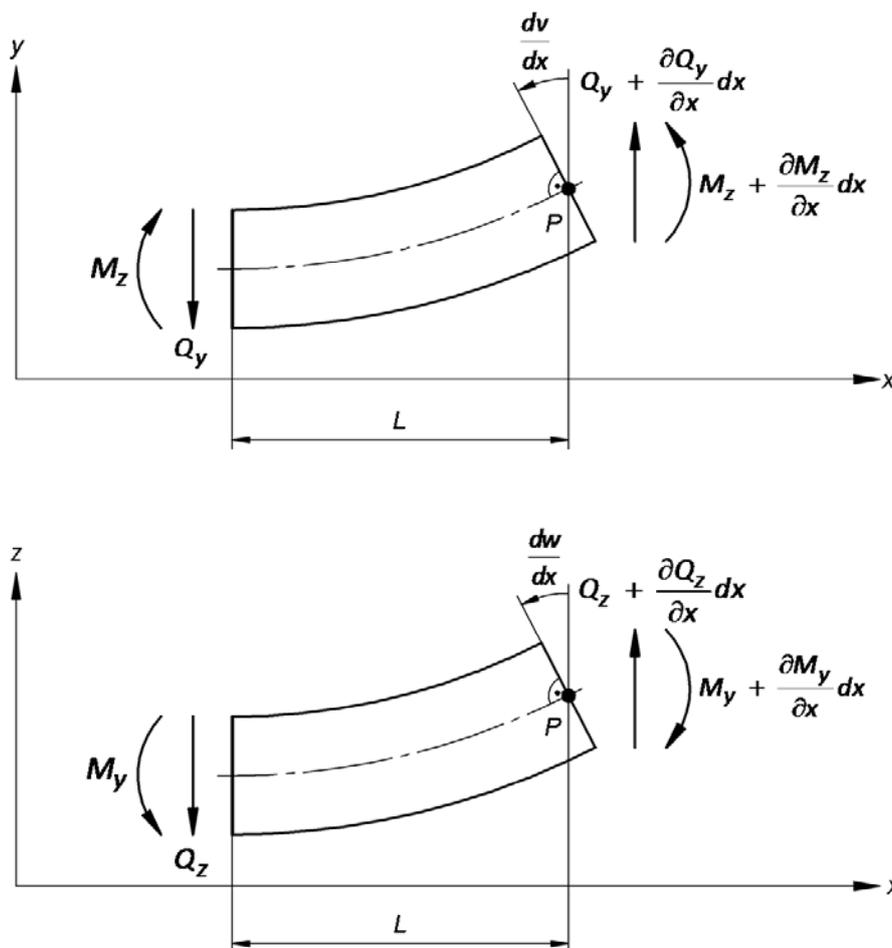


Abbildung 3.4 – Deformation eines finiten EULER-BERNOULLI-Wellenelement (vgl. [3])

Die weitere Herleitung der Elementmatrizen lehnt sich an die Darstellung in BORU [3] an.

Auf Basis der Annahmen erhält man einen linearen, statischen Biegemomentverlauf im Element:

$$\begin{aligned} M_y(x) &= -EI_y w''(x) \\ M_z(x) &= EI_z v''(x) . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die Verschiebungen  $v$  und  $w$  jedes Punktes entlang des Elements können als Linearkombinationen der Randverschiebungen und -verdrehungen beschrieben werden:

$$\begin{aligned} v &= H_{v1}v_1 + H_{v2}\gamma_1 + H_{v3}v_2 + H_{v4}\gamma_2 \\ w &= H_{w1}w_1 + H_{w2}\beta_1 + H_{w3}w_2 + H_{w4}\beta_2 . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die Koeffizienten  $H_{vi}$ ,  $H_{wi}$  ( $i = 1...4$ ) sind Formfunktion dritten Grades, heißen Hermite-Polynome (Ritz'sche Ansatzfunktionen) und werden beschrieben durch den kubische Polynomansatz

$$\begin{aligned} H_{vi} &= A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \\ H_{wi} &= B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Koeffizienten  $A_i$ ,  $B_i$  werden durch die Randverschiebungen bzw. Randverdrehungen festgelegt. Beispielhaft sind hier die Herleitungen der Hermite-Polynome für die  $xy$ -Ebene angeführt (siehe auch Abbildung 3.3):

- *Verschiebung mit der Einheit 1 am Knoten 1*

$$\left. \begin{aligned} H_{v1}(0) &= 1 = A_0 \\ H_{v1}(L) &= 0 = A_0 + A_1L + A_2L^2 + A_3L^3 \\ H_{v1}'(0) &= 0 = A_1 \\ H_{v1}'(L) &= 0 = A_1 + 2A_2L + 3A_3L^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_{v1}(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.6)$$

- *Verdrehung mit der Einheit 1 am Knoten 1*

$$\left. \begin{aligned} H_{v2}(0) &= 0 = A_0 \\ H_{v2}(L) &= 0 = A_0 + A_1L + A_2L^2 + A_3L^3 \\ H_{v2}'(0) &= 1 = A_1 \\ H_{v2}'(L) &= 0 = A_1 + 2A_2L + 3A_3L^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_{v2}(x) = x \left[ 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \quad (3.7)$$

- *Verschiebung mit der Einheit 1 am Knoten 2*

$$\left. \begin{aligned} H_{v3}(0) &= 0 = A_0 \\ H_{v3}(L) &= 1 = A_0 + A_1L + A_2L^2 + A_3L^3 \\ H_{v3}'(0) &= 0 = A_1 \\ H_{v3}'(L) &= 0 = A_1 + 2A_2L + 3A_3L^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_{v3}(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.8)$$

– Verdrehung mit der Einheit 1 am Knoten 2

$$\left. \begin{aligned} H_{v4}(0) &= 0 = A_0 \\ H_{v4}(L) &= 0 = A_0 + A_1L + A_2L^2 + A_3L^3 \\ H_{v4}'(0) &= 0 = A_1 \\ H_{v4}'(L) &= 1 = A_1 + 2A_2L + 3A_3L^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_{v4}(x) = -\frac{x^2}{L} \left[ 1 - \left( \frac{x}{L} \right) \right] \quad (3.9)$$

Die Hermitepolynome für die xz-Ebene können analog berechnet werden und ergeben sich zu

$$\begin{aligned} H_{w1} &= H_{v1} \\ H_{w2} &= -H_{v2} \\ H_{w3} &= H_{v3} \\ H_{w4} &= -H_{v4} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Wird die Formfunktionsmatrix  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(x)$  der Hermitepolynome in der Form

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} H_{v1} & 0 & 0 & H_{v2} & H_{v3} & 0 & 0 & H_{v4} \\ 0 & H_{w1} & H_{w2} & 0 & 0 & H_{w3} & H_{w4} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

definiert, so kann der Verschiebungsfeldvektor  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x,t)$  des finiten Wellenelements in folgender Weise dargestellt werden:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{x} \quad (3.12)$$

bzw.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{v1} & 0 & 0 & H_{v2} & H_{v3} & 0 & 0 & H_{v4} \\ 0 & H_{w1} & H_{w2} & 0 & 0 & H_{w3} & H_{w4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ v_2 \\ w_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Mit anderen Worten, es wird die Auslenkung  $\mathbf{u}$  an jeder beliebigen Stelle des finiten Wellenelements durch die Verwendung einer Formfunktionsmatrix  $\mathbf{N}$  als Linearkombination der Auslenkungen des lokalen Lagevektors  $\mathbf{x}$  beschrieben.

### 3.3.2 Massenmatrix

Die virtuelle Arbeit der translatorischen Trägheitskräfte  $\delta W_{trans}$  des finiten Wellenelements wird (auf Basis des entsprechenden Terms aus Glg. (2.11)) nach d'Alembert berechnet zu

$$\delta W_T = \delta W_{trans} = - \int_{x=0}^L (\rho A \ddot{v} \delta v + \rho A \ddot{w} \delta w) dx \quad (3.14)$$

was auch ausgedrückt werden kann durch

$$\delta W_T = - \int_{x=0}^L \delta \mathbf{u}^T \rho A \ddot{\mathbf{u}} dx . \quad (3.15)$$

Mit

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{x}, \quad \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{x}}, \quad \delta \mathbf{u}^T = \delta \mathbf{x}^T \mathbf{N}^T \quad (3.16)$$

kann man Glg. (3.15) wie in (3.17) angeführt darstellen.

$$\delta W_T = - \delta \mathbf{x}^T \underbrace{\left( \int_{x=0}^L \mathbf{N}^T \rho A \mathbf{N} dx \right)}_{\mathbf{M}_B} \ddot{\mathbf{x}} \quad (3.17)$$

Der in Glg. (3.17) in Klammern gesetzte Ausdruck  $\mathbf{M}_B$  ist die (8x8)-Massenmatrix des finiten Wellenelements.

### 3.3.3 Steifigkeitsmatrix

Basierend auf dem Term der Biegung aus Glg. (2.11) kann die virtuelle Arbeit der inneren elastischen Kräfte  $\delta W_{elast}$  folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\delta W_{elast} = \int_{x=0}^L \left[ (EI_z - EI_{yz}) v'' \delta v'' + (EI_y - EI_{yz}) w'' \delta w'' \right] dx , \quad (3.18)$$

was in Matrixschreibweise ausgedrückt werden kann durch

$$\delta W_{elast} = \int_{x=0}^L \delta \mathbf{u}''^T \mathbf{K}_{int} \mathbf{u}'' dx . \quad (3.19)$$

Die Matrix  $\mathbf{K}_{int}$  hat dabei die Form

$$\mathbf{K}_{int} = \begin{bmatrix} EI_z & -EI_{yz} \\ -EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix} . \quad (3.20)$$

Aufgrund der beliebigen Orientierung der Trägheitshauptachsen treten hier neben den allgemeinen Flächenträgheitsmomenten  $I_y$  und  $I_z$  auch Deviationsmomente  $I_{yz}$  in der Matrix  $\mathbf{K}_{int}$  auf.

Mit

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}'' = \mathbf{N}''\mathbf{x}, \quad \delta\mathbf{u}''^T = \delta\mathbf{x}^T \mathbf{N}''^T \quad (3.21)$$

folgt

$$\delta W_{elast} = -\delta\mathbf{x}^T \underbrace{\left( \int_{x=0}^L \mathbf{N}''^T \mathbf{K}_{int} \mathbf{N}'' dx \right)}_{\mathbf{K}_B} \mathbf{x}. \quad (3.22)$$

Der in Glg. (3.22) in Klammern gesetzte Ausdruck  $\mathbf{K}_B$  ist die die (8x8)-Steifigkeitsmatrix des finiten Wellenelements.

Die EULER-BERNOULLI-Elementmatrizen sind i Anhang in detaillierter Form dargestellt.

### 3.4 Bildung der Elementmatrizen für ein TIMOSHENKO-Wellenelement

#### 3.4.1 Ansatzfunktionen und Formfunktionsmatrix für ein TIMOSHENKO-Wellenelement

Für die Herleitung der Formfunktionsmatrix eines TIMOSHENKO-Wellenelements werden folgende Annahmen getroffen:

- Statische Querkräfte und Biegemomente greifen an den beiden Randknoten an.
- Der Querschnitt ist konstant über die gesamte Länge des Elements.
- Einfluss der Querkraft wird berücksichtigt.
- Querschnitte bleiben eben.
- Rotationsträgheit wird berücksichtigt.

Für die weitere Berechnung wird ein finites Wellenelement betrachtet. Auf dieses FE wirken, verursacht durch die Verschiebung in der  $xy$ - bzw.  $xz$ -Ebene (siehe Abbildung 3.5), entsprechende Schnittgrößen.

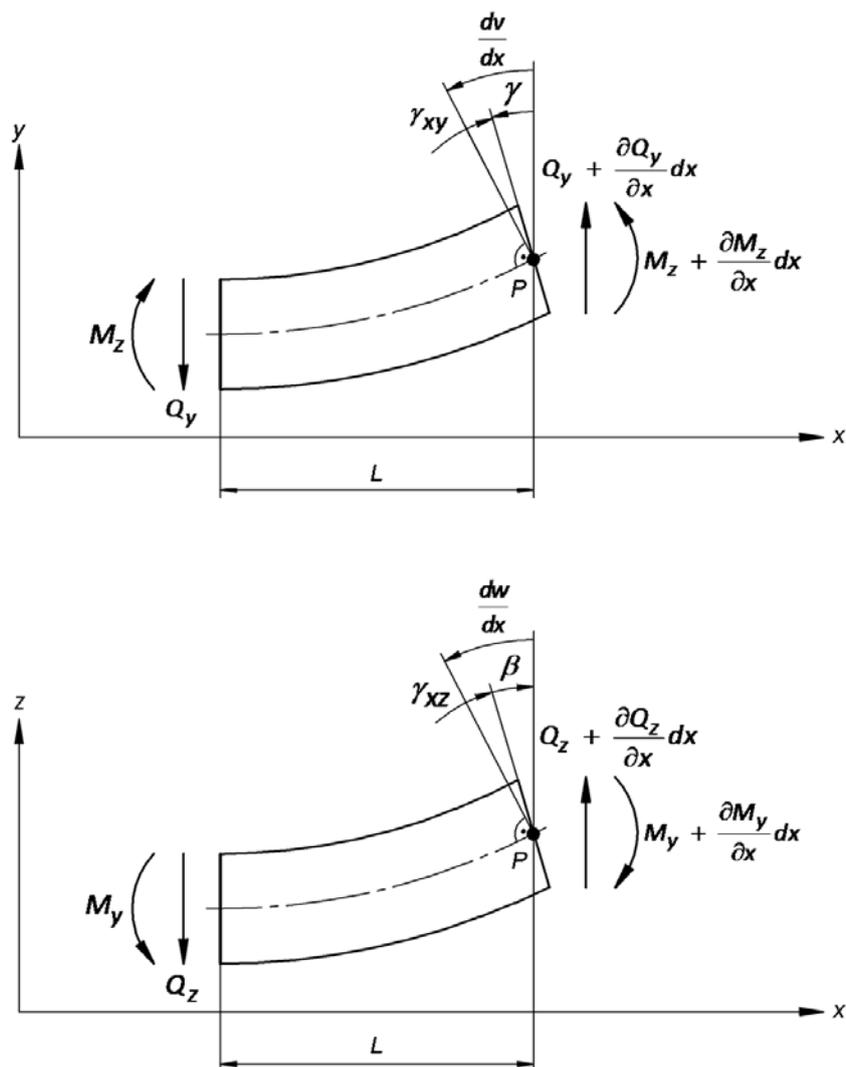


Abbildung 3.5 – Deformation eines finiten TIMOSHENKO-Wellenelement (vgl. [3])

Die folgende Herleitung der Formfunktionsmatrix und der Elementmatrizen lehnt sich an die Darstellung in BORU [3] an. Entsprechend der TIMOSHENKO-Balkentheorie können die Querkraft  $Q_y$  (siehe auch Glg. (2.20)) und das Biegemoment  $M_z$  für die xy-Ebene angeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} M_z &= EI_z \frac{\partial \gamma}{\partial x} = EI_z \gamma' \\ Q_y &= \kappa GA \gamma_{xy} = \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma \right) = \kappa GA (v' - \gamma). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Analog gilt für die xz-Ebene

$$\begin{aligned} M_y &= EI_y \frac{\partial \beta}{\partial x} = EI_y \beta' \\ Q_z &= \kappa GA \gamma_{xz} = \kappa GA \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \beta \right) = \kappa GA (w' + \beta). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Der Drallsatz um Punkt  $P$  liefert, wie schon bei der allgemeinen Herleitung (siehe auch Glg. (2.16)), den Zusammenhang zwischen Querkraft und Biegemoment:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_z}{\partial x} dx + Q_y dx &= 0 \rightarrow M'_z + Q_y = 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial x} dx - Q_z dx &= 0 \rightarrow M'_y - Q_z = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Durch Einsetzen der Gln. (3.23) und (3.24) in Glg. (3.25) erhält man

$$\begin{aligned} EI_z \gamma'' + \kappa GA (v' - \gamma) &= 0 \\ EI_y \beta'' - \kappa GA (w' + \beta) &= 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Für den weiteren Rechengang ist es sinnvoll, folgende Variable einzuführen:

$$a_y = \frac{12EI_y}{\kappa GAL^2}, \quad a_z = \frac{12EI_z}{\kappa GAL^2}, \quad (3.27)$$

womit Glg. (3.26) in der Form

$$\begin{aligned} \frac{a_z L^2}{12} \gamma'' + v' - \gamma &= 0 \\ \frac{a_y L^2}{12} \beta'' - w' - \beta &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

dargestellt werden kann.

Die Verschiebungen jedes Punktes entlang des Elements können als Linearkombination der Randverschiebungen und -verdrehungen beschrieben werden (siehe auch Abbildung 3.3):

$$\begin{aligned}
 v &= H_{v1}v_1 + H_{v2}\gamma_1 + H_{v3}v_2 + H_{v4}\gamma_2 \\
 w &= H_{w1}w_1 + H_{w2}\beta_1 + H_{w3}w_2 + H_{w4}\beta_2 \\
 \beta &= H_{\beta1}w_1 + H_{\beta2}\beta_1 + H_{\beta3}w_2 + H_{\beta4}\beta_2 \\
 \gamma &= H_{\phi z1}v_1 + H_{\phi z2}\gamma_1 + H_{\phi z3}v_2 + H_{\phi z4}\gamma_2 .
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Die Koeffizienten  $H_{vi}$ ,  $H_{wi}$ ,  $H_{\gamma i}$ ,  $H_{\beta i}$  ( $i = 1...4$ ) ergeben sich aus Formfunktionen dritten Grades, welche Hermite-Polynome (Ritz'sche Ansatzfunktionen) heißen und durch den kubischen Polynomansatz

$$\begin{aligned}
 H_{vi} &= A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \\
 H_{wi} &= A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \\
 H_{\beta i} &= B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 \\
 H_{\gamma i} &= B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

beschrieben werden. Beispielhaft ist hier die Berechnung der Hermite-Polynome für die xy-Ebene dargestellt. Durch Substituieren von Glg. (3.29) in die erste Glg. (3.28) erhält man für die xy-Ebene

$$\begin{aligned}
 \frac{a_z L^2}{12} \left( H_{\gamma 1}'' v_1 + H_{\gamma 2}'' \gamma_1 + H_{\gamma 3}'' v_2 + H_{\gamma 4}'' \gamma_2 \right) + H_{v1}' v_1 + H_{v2}' \gamma_1 + H_{v3}' v_2 + H_{v4}' \gamma_2 \\
 - \left( H_{\gamma 1} v_1 + H_{\gamma 2} \gamma_1 + H_{\gamma 3} v_2 + H_{\gamma 4} \gamma_2 \right) = 0 .
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Stellt man die Terme mit gleichen Variablen als eigene Gleichungen dar, erhält man

$$\frac{a_z L^2}{12} H_{\gamma i}'' + H_{vi}' - H_{\gamma i} = 0, \quad i = 1...4 \tag{3.32}$$

und bei Verwendung von Glg. (3.30)

$$\frac{a_z L^2}{12} (2B_2 + 6B_3x) + A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 - (B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3) = 0 . \tag{3.33}$$

Durch einen Vergleich der Koeffizienten für gleiche x-Terme erhält man die folgenden Koeffizienten der Hermite-Polynome

$$\left. \begin{aligned}
 -B_3x^3 &= 0 \\
 (3A_3 - B_2)x^2 &= 0 \\
 \left( \frac{a_z L^2}{2} B_3 + 2A_2 - B_1 \right) x &= 0 \\
 \frac{a_z L^2}{2} A_3 + A_1 - B_0 &= 0
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 B_3 &= 0 \\
 B_2 &= 3A_3 \\
 B_1 &= 2A_2 \\
 B_0 &= A_1 + \frac{a_z L^2}{2} A_3
 \end{aligned} . \tag{3.34}$$

– Verschiebung mit der Einheit 1 am Knoten 1

$$\left. \begin{array}{l} H_{v_1}(0) = 1 = A_0 \\ H_{v_1}(L) = 0 = A_0 + A_1L + A_2L^2 + A_3L^3 \\ H_{\gamma_1}(0) = 0 = B_0 \\ H_{\gamma_1}(L) = 0 = B_0 + B_1L + B_2L^2 + B_3L^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} H_{v_1} = \frac{1}{L^3(1+a_z)} (2x^3 - 3Lx^2 - a_zL^2x + (1+a_z)L^3) \\ H_{\gamma_1} = \frac{1}{L^3(1+a_z)} (6x^2 - 6Lx) \end{array} \quad (3.35)$$

– Verdrehung mit der Einheit 1 am Knoten 1

$$\left. \begin{array}{l} H_{v_2}(0) = 0 = A_0 \\ H_{v_2}(L) = 0 = A_0 + A_1L + A_2L^2 + A_3L^3 \\ H_{\gamma_2}(0) = 1 = B_0 \\ H_{\gamma_2}(L) = 0 = B_0 + B_1L + B_2L^2 + B_3L^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} H_{v_2} = \frac{1}{L^2(1+a_z)} \left( x^3 - \left(2 + \frac{a_z}{2}\right)Lx^2 + \left(1 + \frac{a_z}{2}\right)L^2x \right) \\ H_{\gamma_2} = \frac{1}{L^2(1+a_z)} (3x^2 - (4+a_z)Lx + (1+a_z)L^2) \end{array} \quad (3.36)$$

– Verschiebung mit der Einheit 1 am Knoten 2

$$\left. \begin{array}{l} H_{v_3}(0) = 0 = A_0 \\ H_{v_3}(L) = 1 = A_0 + A_1L + A_2L^2 + A_3L^3 \\ H_{\gamma_3}(0) = 0 = B_0 \\ H_{\gamma_3}(L) = 0 = B_0 + B_1L + B_2L^2 + B_3L^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} H_{v_3} = \frac{1}{L^3(1+a_z)} (-2x^3 + 3Lx^2 + a_zL^2x) \\ H_{\gamma_3} = \frac{1}{L^3(1+a_z)} (-6x^2 + 6Lx) \end{array} \quad (3.37)$$

– Verdrehung mit der Einheit 1 am Knoten 2

$$\left. \begin{array}{l} H_{v_4}(0) = 0 = A_0 \\ H_{v_4}(L) = 0 = A_0 + A_1L + A_2L^2 + A_3L^3 \\ H_{\gamma_4}(0) = 0 = B_0 \\ H_{\gamma_4}(L) = 1 = B_0 + B_1L + B_2L^2 + B_3L^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} H_{v_4} = \frac{1}{L^2(1+a_z)} \left( x^3 - \left(1 - \frac{a_z}{2}\right)Lx^2 - \frac{a_z}{2}L^2x \right) \\ H_{\gamma_4} = \frac{1}{L^2(1+a_z)} (3x^2 - (2-a_z)Lx) \end{array} \quad (3.38)$$

Die Hermitepolynome für die xz-Ebene können analog berechnet werden und sind in den Gln. (3.39) und (3.40) dargestellt.

$$\begin{aligned} H_{w_1} &= \frac{1}{L^3(1+a_y)} (2x^3 - 3Lx^2 - a_yL^2x + (1+a_y)L^3) \\ H_{w_2} &= \frac{1}{L^2(1+a_y)} \left( -x^3 + \left(2 + \frac{a_y}{2}\right)Lx^2 - \left(1 + \frac{a_y}{2}\right)L^2x \right) \\ H_{w_3} &= \frac{1}{L^3(1+a_y)} (-2x^3 + 3Lx^2 + a_yL^2x) \\ H_{w_4} &= \frac{1}{L^2(1+a_y)} \left( -x^3 + \left(1 - \frac{a_y}{2}\right)Lx^2 + \frac{a_y}{2}L^2x \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
H_{\beta 1} &= \frac{1}{L^3(1+a_y)}(-6x^2 + 6Lx) \\
H_{\beta 2} &= \frac{1}{L^2(1+a_y)}(3x^2 - (4+a_y)Lx + (1+a_y)L^2) \\
H_{\beta 3} &= \frac{1}{L^3(1+a_y)}(6x^2 - 6Lx) \\
H_{\beta 4} &= \frac{1}{L^2(1+a_y)}(3x^2 - (2-a_y)Lx)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Wird die Formfunktionsmatrix  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(x)$  der Hermitepolynome in der Form

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} H_{v1} & 0 & 0 & H_{v2} & H_{v3} & 0 & 0 & H_{v4} \\ 0 & H_{w1} & H_{w2} & 0 & 0 & H_{w3} & H_{w4} & 0 \\ 0 & H_{\beta 1} & H_{\beta 2} & 0 & 0 & H_{\beta 3} & H_{\beta 4} & 0 \\ H_{\gamma 1} & 0 & 0 & H_{\gamma 2} & H_{\gamma 3} & 0 & 0 & H_{\gamma 4} \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

definiert, so kann (wie schon beim EULER-BERNOULLI-Wellenelement) der Verschiebungsfeldvektor  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x,t)$  des finiten Wellenelements in folgender Weise dargestellt werden

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{x} \tag{3.42}$$

und hat die Form

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v \\ w \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{v1} & 0 & 0 & H_{v2} & H_{v3} & 0 & 0 & H_{v4} \\ 0 & H_{w1} & H_{w2} & 0 & 0 & H_{w3} & H_{w4} & 0 \\ 0 & H_{\beta 1} & H_{\beta 2} & 0 & 0 & H_{\beta 3} & H_{\beta 4} & 0 \\ H_{\gamma 1} & 0 & 0 & H_{\gamma 2} & H_{\gamma 3} & 0 & 0 & H_{\gamma 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ v_2 \\ w_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

Mit anderen Worten, es wird die Auslenkung  $\mathbf{u}$  an jeder beliebigen Stelle des finiten Wellenelements durch die Verwendung einer Formfunktionsmatrix  $\mathbf{N}$  als Linearkombination der Auslenkungen des lokalen Lagevektors  $\mathbf{x}$  beschrieben.

### 3.4.2 Massenmatrix und Gyroskopiematrix

Die virtuelle Arbeit der translatorischen Trägheitskräfte  $\delta W_T$  des finiten Wellenelements wird (auf Basis der entsprechenden Terme aus Glg. (2.25)) nach d'Alembert berechnet durch

$$\begin{aligned} \delta W_T &= \delta W_{trans} + \delta W_{rot} = \\ &= - \int_{x=0}^L (\rho A \ddot{v} \delta v + \rho A \ddot{w} \delta w) dx - \int_{x=0}^L (\rho I_z \dot{\gamma} \delta \gamma + \rho I_y \ddot{\beta} \delta \beta) dx \\ &= - \int_{x=0}^L (\rho \Omega I_x \dot{\beta} \delta \gamma + \rho \Omega I_x \dot{\gamma} \delta \beta) dx, \end{aligned} \quad (3.44)$$

was auch ausgedrückt werden kann durch

$$\delta W_T = - \int_{x=0}^L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{M}_{int} \ddot{\mathbf{u}} dx - \int_{x=0}^L \delta \mathbf{u}^T \mathbf{G}_{int} \dot{\mathbf{u}} dx. \quad (3.45)$$

Die Matrizen  $\mathbf{M}_{int}$  und  $\mathbf{G}_{int}$  haben dabei die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{int} &= \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho I_z \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}_{int} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \Omega I_x \\ 0 & 0 & -\rho \Omega I_x & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Mit

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{x}}, \quad \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{x}}, \quad \delta \mathbf{u}^T = \delta \mathbf{x}^T \mathbf{N}^T \quad (3.47)$$

kann Gleichung (3.45) folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\delta W_T = - \delta \mathbf{x}^T \underbrace{\left( \int_{x=0}^L \mathbf{N}^T \mathbf{M}_{int} \mathbf{N} dx \right)}_{\mathbf{M}_T} \ddot{\mathbf{x}} - \delta \mathbf{x}^T \underbrace{\left( \int_{x=0}^L \mathbf{N}^T \mathbf{G}_{int} \mathbf{N} dx \right)}_{\mathbf{G}_T} \dot{\mathbf{x}}. \quad (3.48)$$

Die in Gleichung (3.17) in Klammern gesetzte Ausdrücke  $\mathbf{M}_T$  und  $\mathbf{G}_T$  sind die (8x8)-Massenmatrix und die (8x8)-Gyroskopiematrix des finiten Wellenelements.

### 3.4.3 Steifigkeitsmatrix

Basierend auf den Termen der Biegung und der Schubverformung aus Glg. (2.25) berechnet sich die virtuelle Arbeit der inneren elastischen Kräfte  $\delta W_{elast}$  zu

$$\begin{aligned} \delta W_{elast} = & \int_{x=0}^L \left[ (EI_z - EI_{yz}) \gamma' \delta \gamma' + (EI_y - EI_{yz}) \beta' \delta \beta' \right] dx + \\ & + \int_{x=0}^L \left[ \kappa GA (v' - \gamma) \delta (v' - \gamma) + \kappa GA (w' + \beta) \delta (w' + \beta) \right] dx, \end{aligned} \quad (3.49)$$

was auch in Matrixschreibweise ausgedrückt werden kann durch

$$\delta W_{elast} = - \int_{x=0}^L \delta \left( \mathbf{T}_{\partial/\partial x} \mathbf{u}^T \right) \mathbf{K}_{int} \left( \mathbf{T}_{\partial/\partial x} \mathbf{u} \right) dx. \quad (3.50)$$

Die Matrix  $\mathbf{K}_{int}$  und der Differentialoperator  $\mathbf{T}_{\partial/\partial x}$  haben dabei die Form

$$\mathbf{K}_{int} = \begin{bmatrix} \kappa GA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa GA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_z & -EI_{yz} \\ 0 & 0 & -EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{\partial/\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Aufgrund der beliebigen Orientierung der Trägheitshauptachsen treten neben den Trägheitsmomenten  $I_y$  und  $I_z$  auch die Deviationsmomente  $I_{yz}$  in der Matrix  $\mathbf{K}_{int}$  auf. Mit

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{x}, \quad \delta \mathbf{u}^T = \delta \mathbf{x}^T \mathbf{N}^T \quad (3.52)$$

kann Gleichung (3.50) folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\delta W_{elast} = - \delta \mathbf{x}^T \underbrace{\left( \int_{x=0}^L \left( \mathbf{T}_{\partial/\partial x} \mathbf{N}^T \right) \mathbf{K}_{int} \left( \mathbf{T}_{\partial/\partial x} \mathbf{N} \right) dx \right)}_{\mathbf{K}_T} \mathbf{x}. \quad (3.53)$$

Der in Gleichung (3.22) in Klammern gesetzte Ausdruck  $\mathbf{K}_T$  ist die (8x8)-Steifigkeitsmatrix des finiten Wellenelements.

Die TIMOSHENKO-Elementmatrizen sind in Kapitel A.4 in detaillierter Form dargestellt.

### 3.5 Transformation der Elementmatrizen in das rotierende Koordinatensystem

Die Bewegungsgleichung des finiten Wellenelements nach EULER-BERNOULLI im Inertialsystem lautet

$$\mathbf{M}_B^{(f)} \ddot{\mathbf{x}}^{(f)} + \mathbf{K}_B^{(f)} \mathbf{x}^{(f)} = 0 \quad (3.54)$$

und jene des finiten Wellenelements nach TIMOSHENKO im Inertialsystem lautet

$$\mathbf{M}_T^{(f)} \ddot{\mathbf{x}}^{(f)} + \mathbf{G}_T^{(f)} \dot{\mathbf{x}}^{(f)} + \mathbf{K}_T^{(f)} \mathbf{x}^{(f)} = 0. \quad (3.55)$$

In der vorliegenden Form sind im Falle eines anisotropen Wellenelements Massenmatrix und Steifigkeitsmatrix zeitabhängig. Bei Verwendung eines Koordinatensystems, welches mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie das Element rotiert, erhält man eine zeitunabhängige Massen- bzw. Steifigkeitsmatrix. In weiterer Folge ist die Transformation der TIMOSHENKO-Elementmatrizen dargestellt. Für die Transformation vom feststehenden in das rotierende Koordinatensystem (siehe auch Anhang A.2 ) gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(f)} &= \mathbf{T}_{FE} \mathbf{x}^{(r)} \\ \dot{\mathbf{x}}^{(f)} &= \dot{\mathbf{T}}_{FE} \mathbf{x}^{(r)} + \mathbf{T}_{FE} \dot{\mathbf{x}}^{(r)} \\ \ddot{\mathbf{x}}^{(f)} &= \ddot{\mathbf{T}}_{FE} \mathbf{x}^{(r)} + 2\dot{\mathbf{T}}_{FE} \dot{\mathbf{x}}^{(r)} + \mathbf{T}_{FE} \ddot{\mathbf{x}}^{(r)}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

$\mathbf{T}_{FE}$  ist die (8x8)-Transformationsmatrix für ein Wellenelement und wird definiert durch

$$\mathbf{T}_{FE} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & & & \\ & \mathbf{T} & & \\ & & \mathbf{T} & \\ & & & \mathbf{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Substitution der Gleichung (3.56) in (3.55) ergibt

$$\mathbf{M}_T^{(f)} (\ddot{\mathbf{T}}_{FE} \mathbf{x}^{(r)} + 2\dot{\mathbf{T}}_{FE} \dot{\mathbf{x}}^{(r)} + \mathbf{T}_{FE} \ddot{\mathbf{x}}^{(r)}) + \mathbf{G}_T^{(f)} (\dot{\mathbf{T}}_{FE} \mathbf{x}^{(r)} + \mathbf{T}_{FE} \dot{\mathbf{x}}^{(r)}) + \mathbf{K}_T^{(f)} \mathbf{T}_{FE} \mathbf{x}^{(r)} = 0. \quad (3.58)$$

Durch anschließende Multiplikation mit der transponierten Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_{FE}^T$  und nach entsprechendem Umformen erhält man die Bewegungsgleichung eines finiten Wellenelements nach TIMOSHENKO im rotierenden Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\mathbf{T}_{FE}^T \mathbf{M}_T^{(f)} \mathbf{T}_{FE}}_{\mathbf{M}_T^{(r)}} \ddot{\mathbf{x}}^{(r)} + \underbrace{(2\mathbf{T}_{FE}^T \mathbf{M}_T^{(f)} \dot{\mathbf{T}}_{FE} + \mathbf{T}_{FE}^T \mathbf{G}_T^{(f)} \mathbf{T}_{FE})}_{\mathbf{M}_{T2}^{(r)} \quad \mathbf{G}_T^{(r)}} \dot{\mathbf{x}}^{(r)} + \\ & + \underbrace{(\mathbf{T}_{FE}^T \mathbf{M}_T^{(f)} \ddot{\mathbf{T}}_{FE} + \mathbf{T}_{FE}^T \mathbf{G}_T^{(f)} \dot{\mathbf{T}}_{FE} + \mathbf{T}_{FE}^T \mathbf{K}_T^{(f)} \mathbf{T}_{FE})}_{\mathbf{M}_{T3}^{(r)} \quad \mathbf{G}_{T2}^{(r)} \quad \mathbf{K}_T^{(r)}} \mathbf{x}^{(r)} = 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

### 3.6 Lokaler Erregerkraftvektor zufolge Unwucht

Die Unwucht eines finiten Wellenelements kann als verteilte Last angesehen werden. Da im Rahmen der Methode der finiten Elemente jedoch nur Kräfte an den Knoten wirken können, müssen verteilte Lasten (oder auch Einzellasten zwischen den Knoten) in äquivalente Knotenlasten umgerechnet werden, vgl. [11]. Die äquivalenten Knotenlasten, hervorgerufen durch eine (entsprechend der Annahme) auf die Länge des finiten Wellenelements gleichmäßig verteilte Unwucht, sind in Abbildung 3.6 dargestellt.

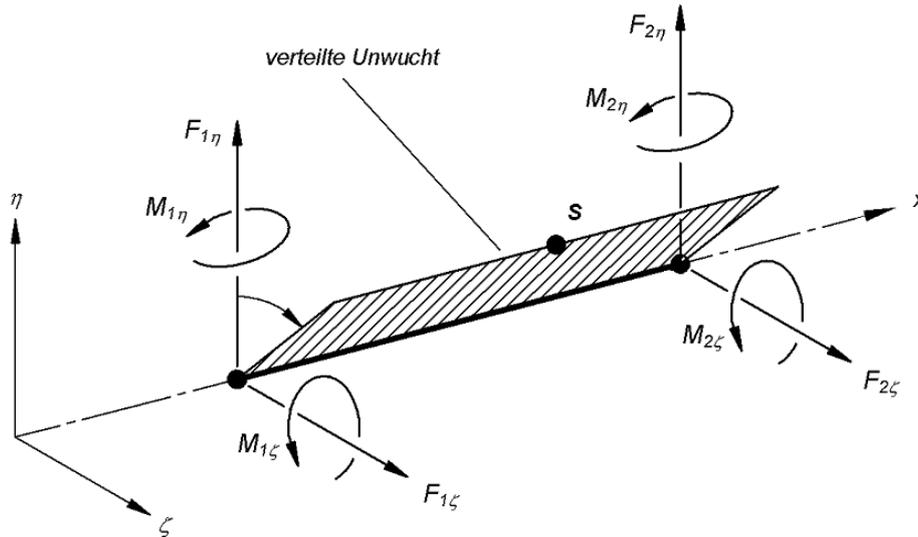


Abbildung 3.6 – äquivalente Knotenlasten der Unwucht

Die Werte der zur Unwucht äquivalenten Knotenlasten ergeben sich nach [11] zu

$$\begin{aligned}
 F_{1\eta} &= F_{2\eta} = \frac{1}{2} u_{\eta} \Omega^2 L \\
 F_{1\zeta} &= F_{2\zeta} = \frac{1}{2} u_{\zeta} \Omega^2 L \\
 M_{1\eta} &= -M_{2\eta} = \frac{1}{12} u_{\zeta} \Omega^2 L^2 \\
 -M_{1\zeta} &= M_{2\zeta} = \frac{1}{12} u_{\eta} \Omega^2 L^2
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

wobei die Unwucht pro Längeneinheit definiert wird durch

$$u_{\eta} = \rho A \eta_s, \quad u_{\zeta} = \rho A \zeta_s. \tag{3.61}$$

Die Ausdrücke  $\eta_s$  bzw.  $\zeta_s$  sind die Koordinaten des Flächenschwerpunktes der Querschnittsfläche  $A$  im rotierenden Koordinatensystem. Der Erregerkraftvektor der Unwucht eines finiten Wellenelements  $\mathbf{f}_U^{(r)}$  setzt sich schließlich folgendermaßen zusammen:

$$\mathbf{f}_U^{(r)} = \left[ F_{1\eta} \quad F_{1\zeta} \quad M_{1\eta} \quad M_{1\zeta} \quad F_{2\eta} \quad F_{2\zeta} \quad M_{2\eta} \quad M_{2\zeta} \right]^T. \tag{3.62}$$

### 3.7 Lokaler Erregerkraftvektor zufolge Gewichtskraft

Die durch die Gewichtskraft hervorgerufene Anregung des Systems wird analog zu jener der Unwucht berücksichtigt. Die äquivalenten Knotenlasten, hervorgerufen durch die Gewichtskraft, sind in dargestellt.

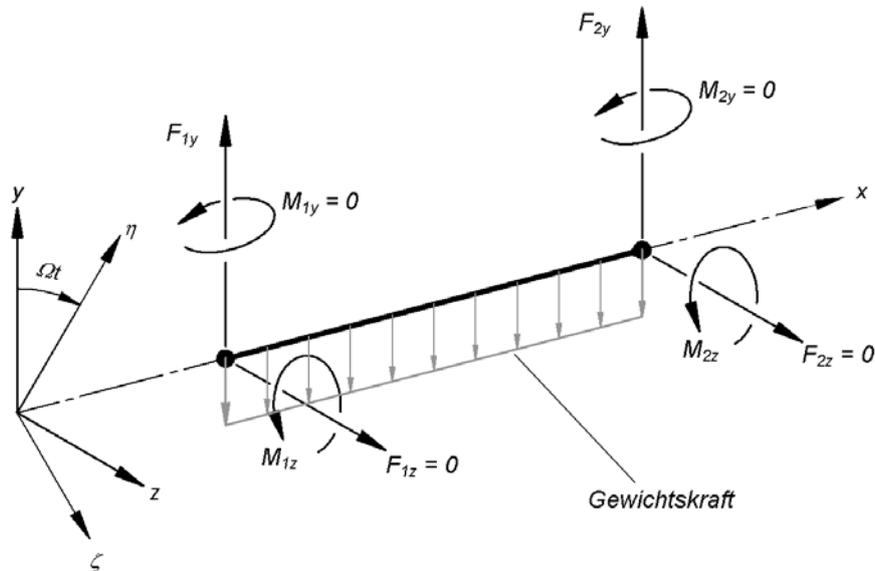


Abbildung 3.7 – äquivalente Knotenlasten der Gewichtskraft

Die Werte der zur Gewichtskraft äquivalenten Knotenlasten ergeben sich nach [11] zu

$$\begin{aligned}
 F_{1y} = F_{2y} &= -\frac{1}{2} \rho g A L \\
 -M_{1z} = M_{2z} &= \frac{1}{12} \rho g A L^2 \\
 F_{1z} = F_{2z} = M_{1y} = M_{2y} &= 0 .
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Im Inertialsystem setzt sich der Erregerkraftvektor der Gewichtskraft eines finiten Wellenelements  $\mathbf{f}_G^{(f)}$  folgendermaßen zusammen:

$$\mathbf{f}_G^{(f)} = \left[ F_{1y} \quad 0 \quad 0 \quad M_{1z} \quad F_{2y} \quad 0 \quad 0 \quad M_{2z} \right]^T . \tag{3.64}$$

Für die spätere Berechnung ist dieser Kraftvektor ins rotierende Koordinatensystem zu transformieren:

$$\mathbf{f}_G^{(r)} = \mathbf{T}_{FE}^T \mathbf{f}_G^{(f)} . \tag{3.65}$$

Somit lautet der Erregerkraftvektor der Schwerkraft für ein finites Wellenelement im rotierenden Koordinatensystem

$$\mathbf{f}_G^{(r)} = \begin{bmatrix} F_{1y} \cos(\Omega t) \\ -F_{1y} \sin(\Omega t) \\ M_{1z} \sin(\Omega t) \\ M_{1z} \cos(\Omega t) \\ F_{2y} \cos(\Omega t) \\ -F_{2y} \sin(\Omega t) \\ M_{2z} \sin(\Omega t) \\ M_{2z} \cos(\Omega t) \end{bmatrix} . \quad (3.66)$$

### 3.8 Äußere Dämpfung

Die äußere Dämpfung greift an den Knoten des Systems an und wird vereinfacht proportional zur absoluten Bewegungs- und Deformationsgeschwindigkeit (d.h. im inertialfesten Koordinatensystem) viskos angesetzt

$$\mathbf{f}_{DaK}^{(f)} = -\mathbf{D}_{aK}^{(f)} \dot{\mathbf{x}}^{(f)}, \quad (3.67)$$

wobei für die lokale (4x4)-Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_{aK}^{(f)}$  für einen Knoten gilt:

$$\mathbf{D}_{aK}^{(f)} = \begin{bmatrix} d_a & & & \\ & d_a & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$d_a$  ist der Dämpfungskoeffizient der äußeren Dämpfung. Unter Anwendung von Glg. (3.57) kann man Glg. (3.67) in das rotierende Gleichungssystem transformieren:

$$\mathbf{f}_{DaK}^{(r)} = -\underbrace{\mathbf{T}_K^T \mathbf{D}_{aK}^{(f)} \mathbf{T}_K}_{\mathbf{D}_{aK}^{(r)}} \dot{\mathbf{x}}^{(r)} - \underbrace{\mathbf{T}_K^T \mathbf{D}_{aK}^{(f)} \mathbf{T}_K}_{\mathbf{D}_{aK2}^{(r)}} \dot{\mathbf{x}}^{(r)}. \quad (3.69)$$

$\mathbf{T}_K$  ist die (4x4)-Transformationsmatrix für einen Knoten und wird definiert durch

$$\mathbf{T}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \\ & \mathbf{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

### 3.9 Innere Dämpfung

Innere Dämpfungskräfte im Wellenmaterial bewirken eine Dämpfung, haben jedoch auch eine zirkulatorische, auslenkungsabhängige, anfachende Wirkung, vgl. [16].

Der Rayleigh-Ansatz für die innere Dämpfung wird hauptsächlich bei diskreten Systemen mit mehreren Freiheitsgraden eingesetzt, so auch bei Analysen mit der Methode der Finiten Elemente (vgl. [13]). Die Rayleigh-Dämpfung kann (im Gegensatz zum Beispiel zur modalen Dämpfung) verwendet werden, ohne dass die Eigenschwingungen berechnet werden. Die globale (4n×4n)-Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_i^{(r)}$  im rotierenden System ist definiert durch

$$\mathbf{D}_i^{(r)} = d_m \mathbf{M}^{(r)} + d_k \mathbf{K}^{(r)}. \quad (3.71)$$

$d_m$  und  $d_k$  sind die Dämpfungskoeffizienten der inneren Dämpfung. Die Wirkung der inneren Dämpfung wird beschrieben durch

$$\mathbf{F}_{Di}^{(r)} = -\mathbf{D}_i^{(r)} \dot{\mathbf{x}}^{(r)}. \quad (3.72)$$

### 3.10 Zusammenbau der globalen Matrizen

Das Gesamtsystem setzt sich aus  $(n-1)$  finiten Elementen zusammen, hat  $(n)$  Modellknoten und  $(4n)$  Freiheitsgrade (siehe auch Abbildung 3.1). In jedem Modellknoten  $(j+1)$  sind die lokalen Koordinaten des linken FE  $(j)$  mit jenen des rechten FE  $(j+1)$  identisch.

#### 3.10.1 Elementbestimmte Matrizen

Die globalen elementbestimmten Matrizen setzen sich so zusammen, dass bei zwei Elementen, die an denselben Knoten grenzen, die diesem Knoten zugeordneten Komponenten der lokalen Elementmatrizen addiert werden. Infolge dessen sind die globalen Matrizen  $\mathbf{M}_T^{(r)}$ ,  $\mathbf{M}_{T2}^{(r)}$ ,  $\mathbf{G}_T^{(r)}$ ,  $\mathbf{M}_{T3}^{(r)}$ ,  $\mathbf{G}_{T2}^{(r)}$ ,  $\mathbf{K}_T^{(r)}$  wie in Abbildung 3.8 dargestellt aufgebaut.

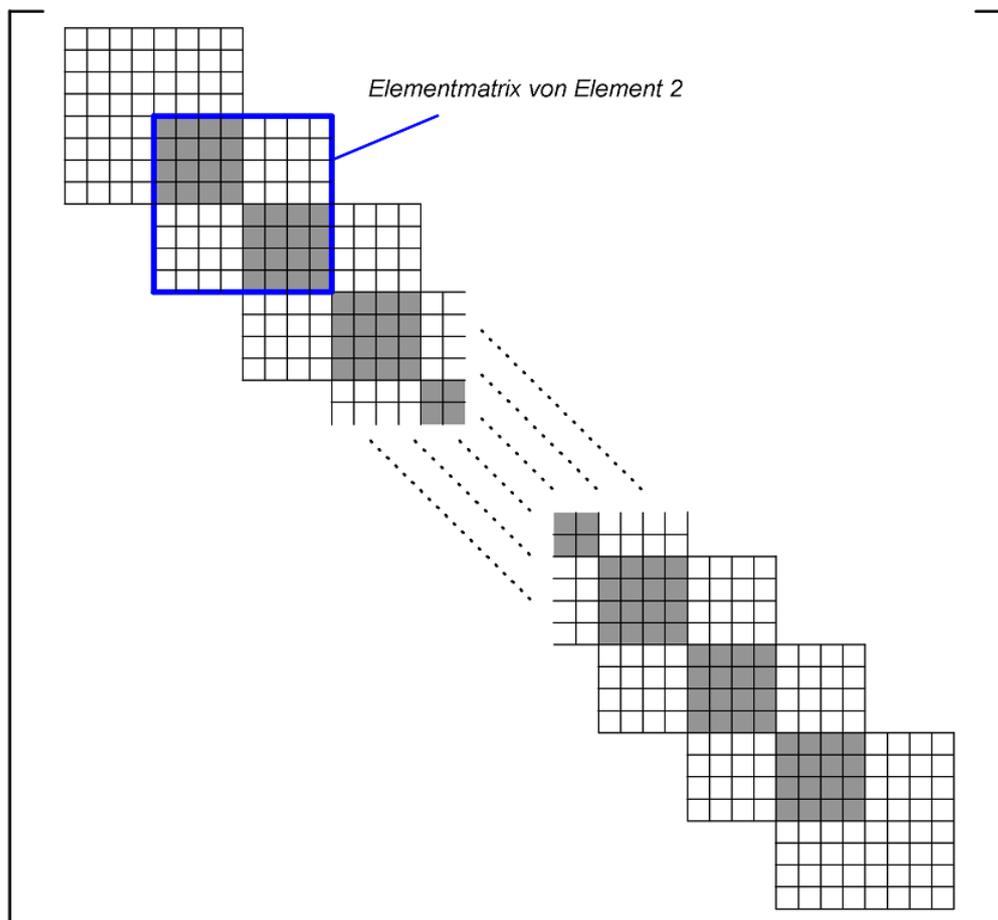


Abbildung 3.8 – Struktur der  $(4n \times 4n)$  globalen Massen-, Steifigkeits- und Gyroskopiematrizen einer Welle mit  $(n-1)$  Element und  $(n)$  Modellknoten; grau dargestellt sind die sich überlappenden Komponenten angrenzender Elemente

### 3.10.2 Knotenbestimmte Matrizen

Da die äußere Dämpfung an den Knoten des Systems angreift ist die dazugehörigen globalen Matrizen  $\mathbf{D}_a^{(r)}$  und  $\mathbf{D}_{a2}^{(r)}$  knotenbestimmt und sind unter Verwendung der lokalen Dämpfungsmatrizen wie in Abbildung 3.9 dargestellt aufgebaut.

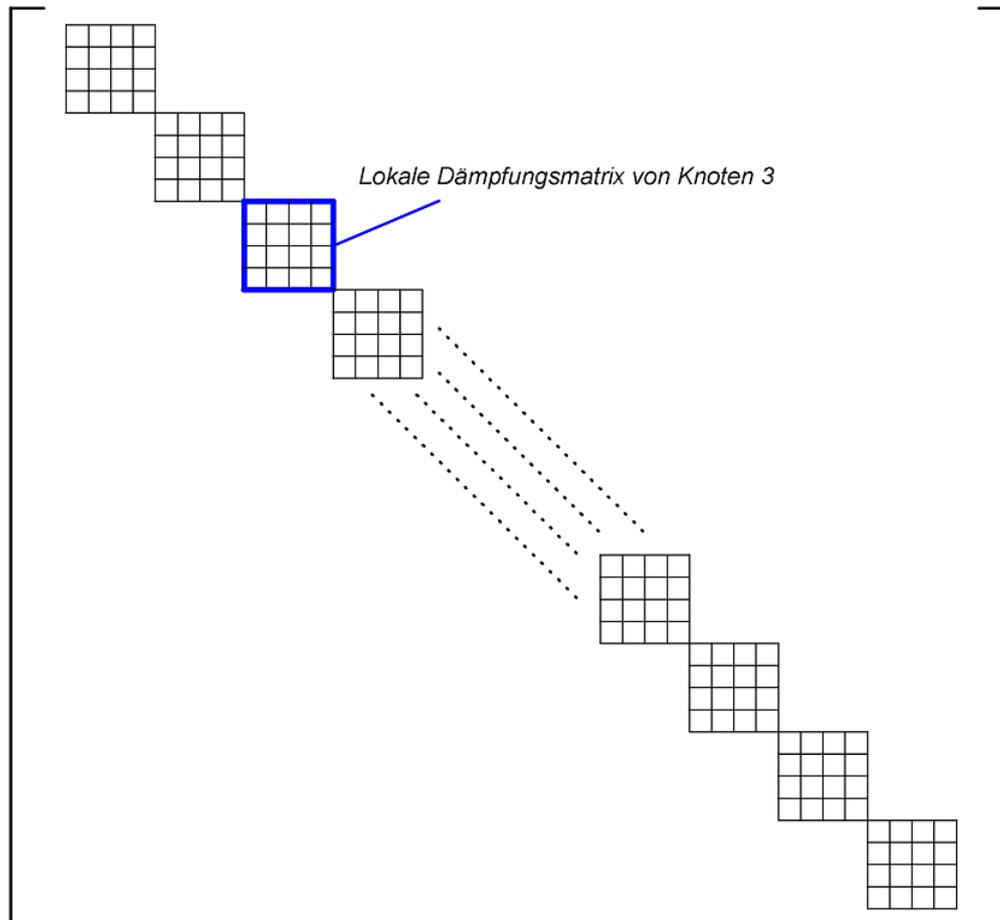


Abbildung 3.9 – Struktur der  $(4n \times 4n)$  globalen Matrix der äußeren Dämpfung einer Welle mit  $(n-1)$  Element und  $(n)$  Modellknoten

### 3.10.3 Einfluss der Korrekturmassen

Grundsätzlich wären Korrekturmassen sowohl in den Massen- als auch Gyroskopiematrizen zu berücksichtigen. Da deren Masse im Verhältnis zu der Walze vernachlässigbar klein ist, werden sie in den Systemmatrizen nicht berücksichtigt.

Beim Zusammenbau des Erregerkraftvektors der Unwucht sind diese Wuchtmassen sehr wohl zu berücksichtigen, da sie durch ihre exzentrische Lage signifikante Massenkräfte bewirken und somit einen empfindlichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten der Walze haben.

### 3.10.4 Zusammenbau der Erregerkraftvektoren (Unwucht, Gewichtskraft)

Die lokalen Erregerkraftvektoren der Gewichtskraft  $f_G^{(f)}$  bzw. der Unwucht  $f_U^{(r)}$  werden ähnlich den elementbestimmten Matrizen zu den globalen Vektoren  $F_G^{(f)}$  und  $F_U^{(r)}$  zusammengebaut. Dazu werden die entsprechenden Komponenten der an denselben Knoten angreifenden lokalen Erregerkraftvektoren addiert, siehe Abbildung 3.10.

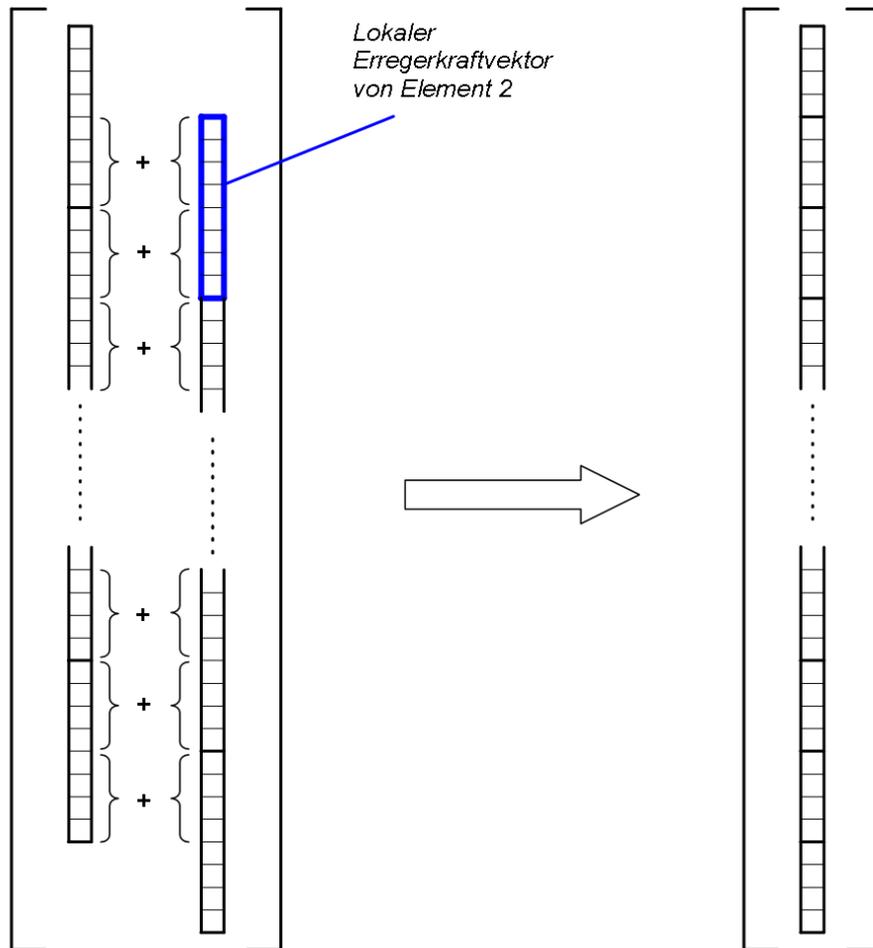


Abbildung 3.10 – Zusammenbau des  $(4n \times 1)$  globalen Erregerkraftvektoren  $F_G^{(f)}$  bzw.  $F_U^{(r)}$  einer Welle mit  $(n-1)$  Element und  $n$  Modellknoten

### 3.10.5 Einspannbedingungen

Nimmt man eine starre Lagerung an, so sind in allen Matrizen und Vektoren jene Spalten und Zeilen der Freiheitsgrade zu eliminieren, die aufgrund der Einspannbedingungen den Wert 0 haben müssen.

Für den Fall einer nachgiebigen Lagerung werden die entsprechenden Koeffizienten der Lagersteifigkeit zu den betreffenden Elementen in der globalen Steifigkeitsmatrix addiert. Unter der Annahme, dass der Rotor an zwei Knoten isotrop gelagert ist, lautet der Ansatz mit der globalen Lagersteifigkeitsmatrix  $K_{Lager}^{(r)}$  wie folgt:

$$\mathbf{K}^{(r)} = \mathbf{K}^{(r)} + \mathbf{K}_{Lager}^{(r)} = \mathbf{K}^{(r)} + \text{diag}[0, \dots, k_{Lager1}, k_{Lager1}, \dots, 0, \dots, k_{Lager2}, k_{Lager2}, \dots, 0]. \quad (3.73)$$

$k_{Lager1,2}$  sind die Koeffizienten der Lagersteifigkeiten.

### 3.11 Harmonische, unwuchterregte Schwingungen

Liegen statische und dynamische Unwuchtanregung im System vor, dann erhält man bei Betrachtung im inertialfesten System folgendes Gleichungssystem mit dem globalen Lagevektor  $\mathbf{x}^{(f)}$ :

$$\mathbf{M}_T^{(f)} \ddot{\mathbf{x}}^{(f)} + \left( \mathbf{D}_a^{(f)} + \mathbf{G}_T^{(f)} \right) \dot{\mathbf{x}}^{(f)} + \mathbf{K}_T^{(f)} \mathbf{x}^{(f)} = \mathbf{F}_U^{(f)}. \quad (3.74)$$

Die Matrix der inneren Dämpfung wurde in Glg. (3.74) nicht berücksichtigt, da sie keinen Beitrag zu stationären unwuchterregten Schwingungen liefert. Aus bereits erwähnten Gründen ist es vorteilhaft, das System im rotierenden Koordinatensystem zu betrachten:

$$\mathbf{M}_T^{(r)} \ddot{\mathbf{x}}^{(r)} + \left( \mathbf{D}_a^{(r)} + \mathbf{M}_{T2}^{(r)} + \mathbf{G}_T^{(r)} \right) \dot{\mathbf{x}}^{(r)} + \left( \mathbf{D}_{a2}^{(r)} + \mathbf{M}_{T3}^{(r)} + \mathbf{G}_{T2}^{(r)} + \mathbf{K}_T^{(r)} \right) \mathbf{x}^{(r)} = \mathbf{F}_U^{(r)}. \quad (3.75)$$

Für die periodisch-harmonischen Unwuchtschwingungen erhält man die eingeschwungene stationäre Lösung im rotierenden Koordinatensystem<sup>3</sup>

$$\mathbf{x}^{(r)} = \mathbf{X}^{(r)} = \mathbf{H} \mathbf{F}_U^{(r)} \quad (3.76)$$

mit der Frequenzgangmatrix

$$\mathbf{H} = \left[ \mathbf{M}_T^{(r)} + \left( \mathbf{D}_a^{(r)} + \mathbf{M}_{T2}^{(r)} + \mathbf{G}_T^{(r)} \right) + \left( \mathbf{D}_{a2}^{(r)} + \mathbf{M}_{T3}^{(r)} + \mathbf{G}_{T2}^{(r)} + \mathbf{K}_T^{(r)} \right) \right]^{-1}. \quad (3.77)$$

Zur Berechnung der Amplitude des einfach drehfrequenten Radialschlags 1f und dessen Phasenlage sind die Freiheitsgrade  $\eta_U$  und  $\zeta_U$  des mittig liegenden Knotenpunktes heranzuziehen. Durch die Transformation mit der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  erhält man die Lösung im Inertialsystem

$$\mathbf{x}_{mess}^{(f)} = \mathbf{T} \mathbf{x}_{mess}^{(r)} \rightarrow \begin{bmatrix} y_U \\ z_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_U \\ \zeta_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_U \cos(\Omega t) - \zeta_U \sin(\Omega t) \\ \eta_U \sin(\Omega t) + \zeta_U \cos(\Omega t) \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

Von Interesse ist die vertikale Komponente  $y_U$ , da der Sensor in Walzenmitte die vertikale Schwingung misst. Schlussendlich erhält man die Amplitude des Radialschlages 1f durch

$$\text{Amplitude}_{1f} = \sqrt{\eta_U^2 + \zeta_U^2} \quad (3.79)$$

bzw. dessen Phasenlage

$$\text{Phasenlage}_{1f} = \arctan\left(-\frac{\zeta_U}{\eta_U}\right). \quad (3.80)$$

<sup>3</sup> In MATLAB erfolgt die Lösung dieses Gleichungssystems über die Rechenoperation  $\mathbf{x} = \text{inv}(\mathbf{H}) \setminus \mathbf{F}$ .

### 3.12 Harmonische, gewichtskrafterregte Schwingungen

Bei einer horizontal gelagerten Welle mit anisotropem Querschnitt führt die Gewichtskraft zu harmonischen Schwingungen und man erhält im rotierenden Koordinatensystem

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_T^{(r)} \ddot{\mathbf{x}}^{(r)} + \left( \mathbf{D}_a^{(r)} + \mathbf{D}_i^{(r)} + \mathbf{M}_{T2}^{(r)} + \mathbf{G}_T^{(r)} \right) \dot{\mathbf{x}}^{(r)} + \\ \left( \mathbf{D}_{a2}^{(r)} + \mathbf{M}_{T3}^{(r)} + \mathbf{G}_{T2}^{(r)} + \mathbf{K}_T^{(r)} \right) \mathbf{x}^{(r)} = \mathbf{F}_G^{(f)} e^{-i\Omega t}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Für die durch die Gewichtskraft verursachten periodisch-harmonischen Schwingungen erhält man die eingeschwungene stationäre Lösung im rotierenden Koordinatensystem<sup>4</sup>

$$\mathbf{x}^{(r)} = \mathbf{X}^{(r)} e^{-i\Omega t} = \mathbf{H} \mathbf{F}_G^{(f)} e^{-i\Omega t} \quad (3.82)$$

mit der (nunmehr von der Winkelgeschwindigkeit abhängigen) Frequenzgangmatrix

$$\mathbf{H} = \left[ -\Omega^2 \mathbf{M}_T^{(r)} + i\Omega \left( \mathbf{D}_a^{(r)} + \mathbf{D}_i^{(r)} + \mathbf{M}_{T2}^{(r)} + \mathbf{G}_T^{(r)} \right) + \left( \mathbf{D}_{a2}^{(r)} + \mathbf{M}_{T3}^{(r)} + \mathbf{G}_{T2}^{(r)} + \mathbf{K}_T^{(r)} \right) \right]^{-1}. \quad (3.83)$$

Wie schon bei der Berechnung des einfachfrequenten Radialschlages 1f sind die Freiheitsgrade  $\eta_G$  und  $\zeta_G$  des mittig liegenden Knotenpunktes heranzuziehen. Durch die Transformation mit der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  erhält man die Lösung im Inertialsystem

$$\mathbf{x}_{mess}^{(f)} = \mathbf{T} \mathbf{x}_{mess}^{(r)} \quad (3.84)$$

bzw. in Matrizenschreibweise

$$\begin{bmatrix} y_G \\ z_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_G \cos(\Omega t) \\ -i\zeta_G \sin(\Omega t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_G \cos^2(\Omega t) + i\zeta_G \sin^2(\Omega t) \\ \eta_G \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) - i\zeta_G \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) \end{bmatrix}. \quad (3.85)$$

Unter Verwendung entsprechender trigonometrischer Funktionen (vgl. [12]) lässt sich die Horizontal-komponente  $y_G$  von Glg. (3.85) umformen zu

$$y_G = \frac{\eta_G + i\zeta_G}{2} + \frac{(\eta_G - i\zeta_G)}{2} \cos(2\Omega t). \quad (3.86)$$

Sowohl  $\eta_G$  als auch  $\zeta_G$  sind komplexe Antworten.

Der statische Durchhang der Welle wird beschrieben durch

$$y_{G,static} = \frac{1}{2} (\eta_{G,real} + \zeta_{G,imag}). \quad (3.87)$$

<sup>4</sup> In MATLAB erfolgt die Lösung dieses Gleichungssystems über die Rechenoperation  $x = A \setminus F$ , wobei gilt:  $A = \text{inv}(H)$ .

Überlagert wird dieser durch Kreisbewegungen mit der doppelten Rotordrehfrequenz, wodurch der doppelt drehfrequenten Radialschlag  $2f$  entsteht. Dessen Amplitude lautet

$$Amplitude_{2f} = \frac{1}{2} \sqrt{(\eta_{G,real} + \zeta_{G,imag})^2 + (\eta_{G,imag} - \zeta_{G,real})^2}. \quad (3.88)$$

Die entsprechende Phasenlage erhält man durch

$$Phasenlage_{2f} = \arctan\left(\frac{\eta_{G,imag} - \zeta_{G,real}}{\eta_{G,real} + \zeta_{G,imag}}\right). \quad (3.89)$$

## 4 BERECHNUNG DER FLÄCHENPARAMETER

### 4.1 Problemstellung

Das Walzenrohr wird für das Modell in Kapitel 3 durch finite Wellenelemente angenähert. Die kreisringähnliche Querschnittsfläche eines solchen finiten Elements wird durch zwei Polygonzüge beschrieben. Die Aufgabe besteht nun darin, den Flächeninhalt, die Flächenschwerpunktkoordinaten, die Flächenträgheitsmomente und Deviationsmomente dieser Fläche zu berechnen. In Anlehnung an [5] wird auf den folgenden Seiten ein entsprechendes Berechnungsverfahren vorgestellt.

### 4.2 Flächenparameter eines Dreiecks

Ausgangspunkt der Überlegung ist ein Dreieck in der  $yz$ -Ebene, welches durch die Koordinaten seiner Eckpunkte  $P_0(0,0)$ ,  $P_1(y_1,z_1)$  und  $P_2(y_2,z_2)$  geometrisch bestimmt ist. Bei geeigneter Wahl von Koordinatenachsen  $v$  und  $w$  wird das Dreieck durch Koordinatentransformation in die  $vw$ -Ebene in ein normiertes, rechtwinkliges, gleichschenkeliges Dreieck mit der Kantenlänge 1 transformiert, siehe Abbildung 4.1.

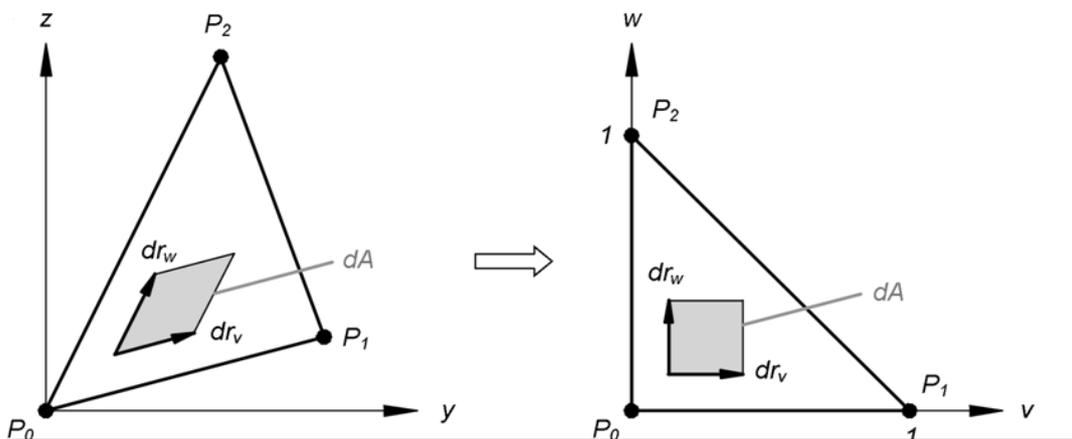


Abbildung 4.1 – Transformation eines Dreiecks in das normierte Koordinatensystem

Durch die Variablentransformation

$$\begin{aligned} y &= y_1 v + y_2 w \\ z &= z_1 v + z_2 w \end{aligned} \quad (4.1)$$

wird jedem Punkt des normierten Dreiecks ein Punkt des ursprünglichen Dreiecks zugeordnet. Weiters gilt für einen beliebigen Vektor  $\mathbf{r}$  im ursprünglichen Koordinatensystem

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Die Linienelemente  $dr_v$  und  $dr_w$  können in den Vektoren

$$dr_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv = \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} dv \quad dr_w = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} dw \quad (4.3)$$

abgebildet werden. Der differentielle Flächeninhalt des durch diese beiden Vektoren in der  $yz$ -Ebene aufgespannten Flächenelements berechnet sich nach Glg. (4.4).

$$dA = \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} dv \times \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} dw = (y_1 z_2 - y_2 z_1) dv dw \quad (4.4)$$

Den Flächeninhalt des ursprünglichen Dreiecks in der  $yz$ -Ebene erhält man schließlich durch Integration über die Fläche des normierten Dreiecks in der  $vw$ -Ebene:

$$A = \int_A dA = \int_{w=0}^1 \left( \int_{v=0}^{1-w} (y_1 z_2 - y_2 z_1) dv \right) dw = \frac{1}{2} (y_1 z_2 - y_2 z_1). \quad (4.5)$$

Für die Koordinaten des Flächenschwerpunktes in der  $yz$ -Ebene gilt

$$y_s = \frac{1}{A} \int_A y dA \quad (4.6)$$

$$z_s = \frac{1}{A} \int_A z dA.$$

Mit der Variablentransformation aus (4.1) und der Formel für den Flächeninhalt aus Glg. (4.5) folgt für (4.6)

$$y_s = \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{1}{A} \int_{w=0}^1 \left( \int_{v=0}^{1-w} (y_1 v + y_2 w) (y_1 z_2 - y_2 z_1) dv \right) dw =$$

$$y_s = \frac{1}{6A} (y_1 z_2 - z_1 y_2) (y_1 + y_2) \quad (4.7)$$

$$z_s = \frac{1}{A} \int_A z dA = \frac{1}{A} \int_{w=0}^1 \left( \int_{v=0}^{1-w} (z_1 v + z_2 w) (y_1 z_2 - y_2 z_1) dv \right) dw =$$

$$z_s = \frac{1}{6A} (y_1 z_2 - z_1 y_2) (z_1 + z_2).$$

Die Definition der axialen Flächenträgheitsmomente 2. Ordnung (vgl. [14]) lautet

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 dA \\ I_z &= \int_A y^2 dA \\ I_{yz} &= -\int_A yz dA. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Darüber hinaus existiert das sogenannte polare Flächenträgheitsmoment 2. Ordnung

$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA. \quad (4.9)$$

Wie schon bei der Berechnung des Flächenschwerpunktes wird die Variablentransformation nach Glg. (4.1) herangezogen und man erhält

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 dA = \int_{w=0}^1 \left( \int_{v=0}^{1-w} (z_1 v + z_2 w)^2 (y_1 z_2 - y_2 z_1) dv \right) dw \\ I_y &= \frac{1}{12} (y_1 z_2 - y_2 z_1) (z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) \\ I_z &= \int_A y^2 dA = \int_{w=0}^1 \left( \int_{v=0}^{1-w} (y_1 v + y_2 w)^2 (y_1 z_2 - y_2 z_1) dv \right) dw \\ I_z &= \frac{1}{12} (y_1 z_2 - y_2 z_1) (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \\ I_{yz} &= -\int_A yz dA = -\int_{w=0}^1 \left( \int_{v=0}^{1-w} (y_1 v + y_2 w)(z_1 v + z_2 w)(y_1 z_2 - y_2 z_1) dv \right) dw \\ I_{yz} &= -\frac{1}{12} (y_1 z_2 - y_2 z_1) \left[ y_1 z_1 + \frac{1}{2} (y_1 z_2 + y_2 z_1) + y_2 z_2 \right] \\ I_p &= \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA \\ I_p &= I_z + I_y. \end{aligned} \quad (4.10)$$

### 4.3 Flächenparameter eines Polygonzuges

Eine Fläche kann durch einen geschlossenen Polygonzug mit beliebiger Anzahl an Eckpunkten angenähert werden. Jede Kante des Polygons wird dabei als Seite eines Dreiecks angesehen, bei dem ein Eckpunkt im Koordinatenursprung liegt. Die Koordinaten des letzten Eckpunktes entsprechen jenen des ersten Eckpunktes, wodurch der Polygonzug geschlossen ist. Zum besseren Verständnis ist in Abbildung 4.2 ein achteckiger Polygonzug dargestellt.

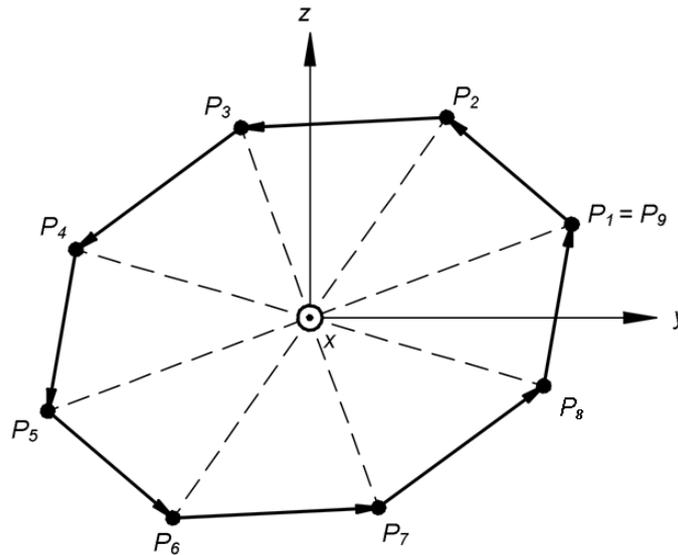


Abbildung 4.2 – achteckiger Polygonzug mit Darstellung der positiven Zählrichtung

Durch Summation der entsprechenden flächengeometrischen Größen der einzelnen Dreiecke erhält man jene des Polygons. Für den allgemeinen Fall eines Polygons mit  $m$  Eckpunkten gilt somit nach Glg. (4.5) für den Flächeninhalt

$$A_{\text{Polygon}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) \quad (4.11)$$

sowie für die Schwerpunktkoordinaten mit Glg. (4.7)

$$y_{s,\text{Polygon}} = \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^m (y_i z_{i+1} - z_i y_{i+1}) (y_i + y_{i+1}) \quad (4.12)$$

$$z_{s,\text{Polygon}} = \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^m (y_i z_{i+1} - z_i y_{i+1}) (z_i + z_{i+1}) .$$

Die Flächenmomente 2. Ordnung berechnen sich unter Verwendung von (4.10) zu

$$I_{y,\text{Polygon}} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^m (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) (z_i^2 + z_i z_{i+1} + z_{i+1}^2)$$

$$I_{z,\text{Polygon}} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^m (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) (y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2) \quad (4.13)$$

$$I_{yz,\text{Polygon}} = -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^m (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) \left[ y_i z_i + \frac{1}{2} (y_i z_{i+1} + y_{i+1} z_i) + y_{i+1} z_{i+1} \right] .$$

#### 4.4 Flächenparameter eines rohrförmigen Querschnitts

Hat man eine einen Ausschnitt in der Fläche, wie es bei einem Rohr der Fall ist, so wird die Zählrichtung entlang des Polygonzuges, der diesen Ausschnitt umschreibt, einfach umgekehrt (was im Grunde einer „negativen“ Fläche entspricht).

## 5 OVALISIERUNG DES ANISOTROPEN WALZENKÖRPERS

### 5.1 Phänomen

Ein unerwünschtes Phänomen beim Betrieb von Papierleitwalzen ist die sogenannte *Ovalisierung* von anisotropen Walzen bei steigender Drehzahl.

Das Phänomen der *Ovalisierung* wurde bereits in der Einleitung erklärt, soll hier jedoch nochmals verdeutlicht werden und ist in Abbildung 1.4 anhand eines Schnittes durch ein rotierendes Walzenrohr vereinfacht dargestellt. Proportional zur ungleichmäßigen Massenverteilung wirken bei Rotation der Walze unterschiedlich starke Fliehkräfte. Bei steigender Drehzahl „ziehen“ diese Kräfte das Walzenrohr in eine ovale Form.

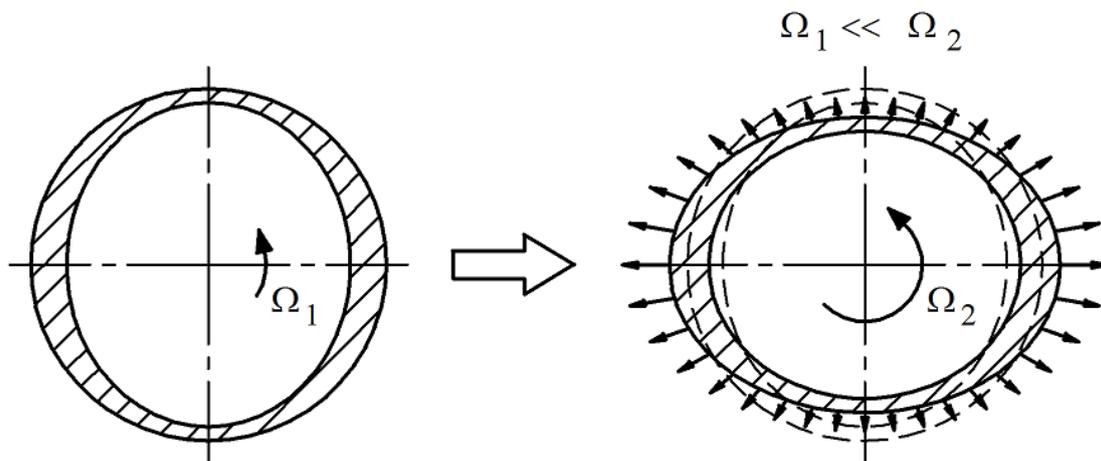


Abbildung 5.1 – Darstellung der Ovalisierung einer rotierenden, anisotropen Walze im Querschnitt

Wie bereits erwähnt verändern sich infolge der Ovalisierung sowohl die Flächen- und Deviationsmomente des dargestellten Querschnitts als auch die Außenkontur und somit die abgetastete Messspur jenes Sensors, der sowohl den einfach als auch den doppelt drehfrequenten Radialschlag in Walzenmitte misst, siehe Abbildung 5.2 auf der folgenden Seite. Das führt dazu, dass zusätzlich zur tatsächlichen doppelrequenten Schwingung ein Signal gemessen wird, das ebenfalls doppelte Drehfrequenz besitzt und damit einen weiteren Signalanteil des gemessenen doppelrequenten Schlages  $2f$  darstellt.

Im Folgenden soll ein Modell erarbeitet werden, anhand dessen das Phänomen der *Ovalisierung* berechnet werden kann.

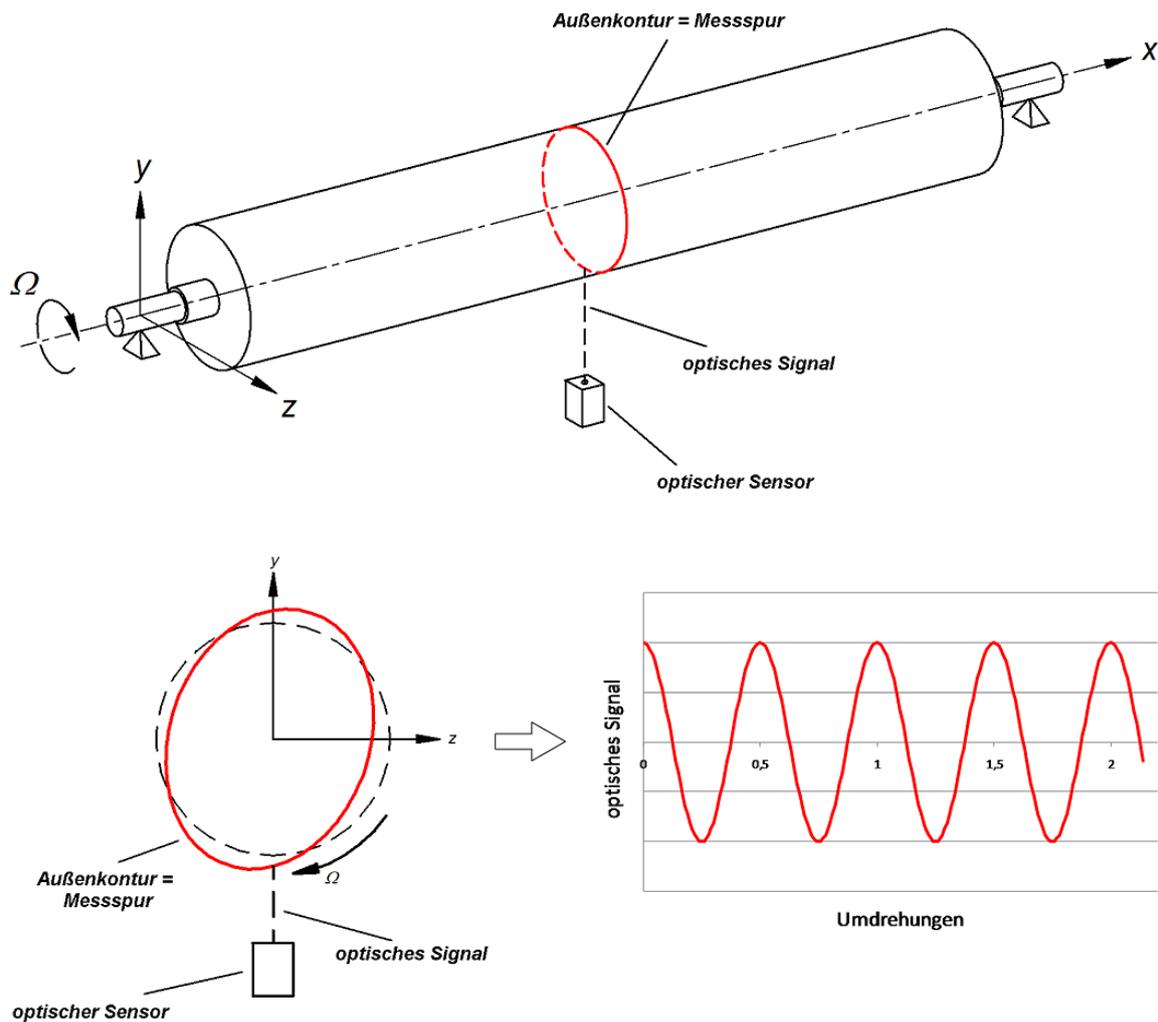


Abbildung 5.2 – optische Messung in Walzenmitte (in der Darstellung ist nur der doppel Frequente Signalanteil der Ovalisierung berücksichtigt)

## 5.2 Modellbildung

Das Modell beruht auf der Annahme, dass nur die Verformung des Rohres betrachtet wird, der Übergang zu den Kappen wird als starr angenommen. Zudem nimmt man einen statischen Belastungsfall an, indem die Fliehkraft durch äquivalente Kraftvektoren ersetzt wird. Mit anderen Worten, man betrachtet ein Rohr mit variabler Dicke, das an den Enden (triebseitig TS und führungsseitig FS) starr eingespannt ist und sich unter statischer Belastung verformt. Zur Modellbildung, dargestellt in Abbildung 5.3, dient das dreidimensionale finite Hexaeder-Element mit 8 Knoten und linearen Formfunktionen.

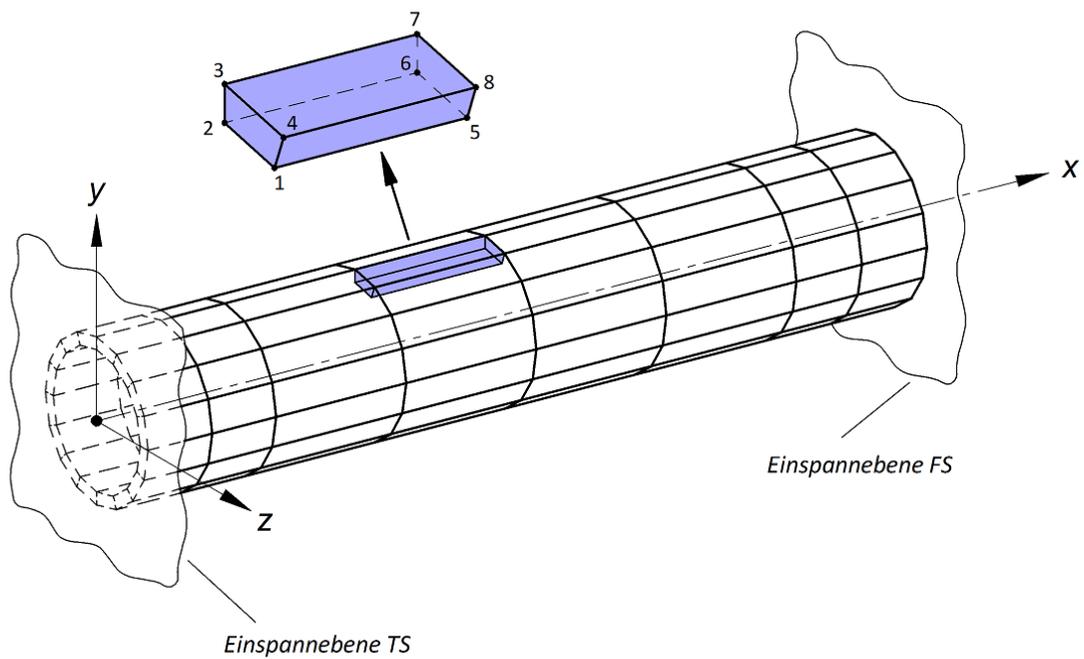


Abbildung 5.3 – Darstellung des dreidimensionalen Modells zur Berechnung der Querschnittsverformung eines Walzenrohres

Die Nummerierung der Knotenpunkte im Inertialsystem ist in Abbildung 5.4 dargestellt. Die Anzahl der Knoten der vorangegangenen Ebenen, beginnend bei der Einspannebene TS, ist zu addieren!

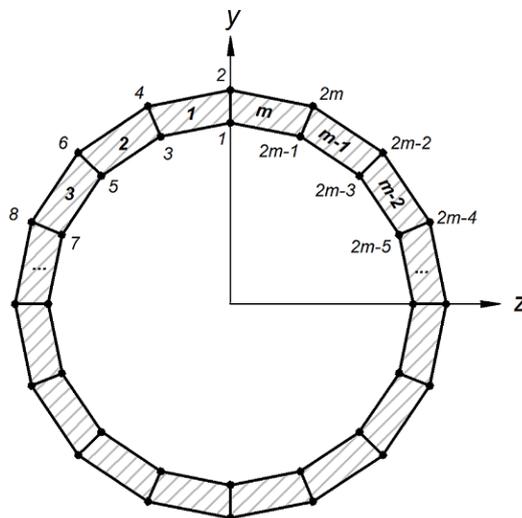


Abbildung 5.4 – Nummerierung der  $2m$ -Knotenpunkte (für eine Ebene)

### 5.3 Das dreidimensionale finite Hexaeder-Element

Das Hexaeder-Element mit 8 Knoten kann eine schiefwinkelige Form annehmen und ist gut als dickes Plattenelement einsetzbar, sofern die Plattendicke nicht zu klein gegenüber den anderen Abmessungen ist, vgl. [15]. Aufgrund dessen wird dieses finite Element zur Beschreibung eines Walzenrohres mit veränderlicher Wanddicke, das als eingerollte Platte mit variabler Dicke angesehen werden kann, herangezogen. Jeder der 8 Elementknoten besitzt 3 Freiheitsgrade, die Elementsteifigkeitsmatrix hat somit die Ordnung  $24 \times 24$ . Die Koordinaten der Randknoten  $R_j$  im Inertialsystem werden mit  $x_j, y_j, z_j$  ( $j = 1 \dots 8$ ) bezeichnet. Bei der Umsetzung in einem Programm ist durch entsprechende Nummerierung der Elementknoten (siehe Abbildung 5.5) darauf zu achten, dass das Volumen des Elements positiv berechnet wird, vgl. [8].

Es ist zweckmäßig, für die Knotenpunktkoordinaten neben dem globalen Koordinatensystem ( $xyz$ ) ein normiertes, elementbezogenes lokales Koordinatensystem zu verwenden, siehe Abbildung 5.5. Die Verbindung zwischen den Verschiebungen in jedem beliebigen Punkt und den Elementknotenpunktvorschiebungen werden durch Verwendung von Formfunktionen direkt erreicht. Das bedeutet, dass die Transformationsmatrix nicht direkt berechnet wird und stattdessen die Elementmatrizen, die den erforderlichen Freiheitsgraden entsprechen, unmittelbar gewonnen werden. Somit handelt es sich um ein isoparametrisches Element, vgl.[1].

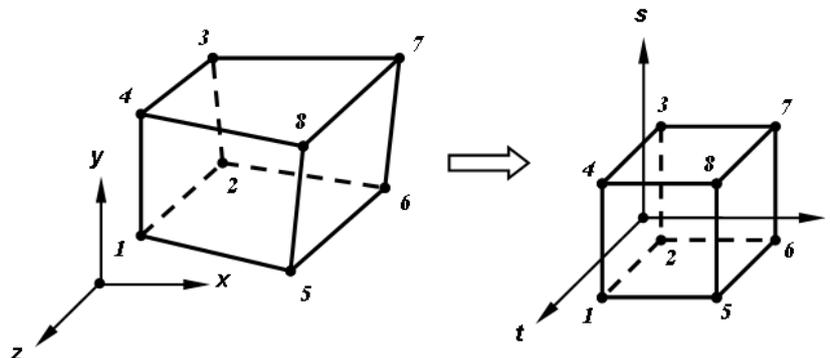


Abbildung 5.5 – Transformation des Hexaederelements in das normierte Koordinatensystem (vgl. [1])

Die Herleitung der Steifigkeitsmatrix für das beschriebene Hexaederelement ist auf den folgenden Seiten beschrieben und orientiert sich an RIEG & HACKENSCHMIDT [15] sowie an KATTAN [8].

#### 5.3.1 Ansatzfunktionen

Die linearen Ansatzfunktionen für ein Hexaeder-Element mit 8 Knoten lauten

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t), & N_2 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t), \\
 N_3 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t), & N_4 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t), \\
 N_5 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t), & N_6 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t), \\
 N_7 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t), & N_8 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t).
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Wird die Formfunktionsmatrix  $\mathbf{N}$  in der Form

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

definiert, so kann der Verschiebungsfeldvektor  $\mathbf{u}$  in folgender Weise dargestellt werden

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{Bmatrix}. \quad (5.3)$$

### 5.3.2 Verzerrungs-Verschiebungsrelation

Die Verzerrungs-Verschiebungsrelation für den dreidimensionalen Fall lässt sich bei Verwendung eines sogenannten Differentialoperators  $\mathbf{T}_{\partial/\partial x}$  folgendermaßen ausdrücken

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{\partial/\partial x}} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Die später verwendete Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix  $\mathbf{B}$  ist definiert durch

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}_{\partial/\partial x} \mathbf{N} \quad (5.5)$$

### 5.3.3 Koordinatentransformation

Da die Ansatzfunktion von den normierten Koordinaten  $r$ ,  $s$  und  $t$  abhängig sind, die Ermittlung der Verzerrungen jedoch eine Differentiation nach  $x$ ,  $y$  und  $z$  erfordert, muss eine Transformation der Koordinaten und Ableitungen durchgeführt werden. Dazu verwendet man die sogenannte JAKOBI-Matrix  $J$

$$J = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_j}{\partial r} x_j & \sum \frac{\partial N_j}{\partial r} y_j & \sum \frac{\partial N_j}{\partial r} z_j \\ \sum \frac{\partial N_j}{\partial s} x_j & \sum \frac{\partial N_j}{\partial s} y_j & \sum \frac{\partial N_j}{\partial s} z_j \\ \sum \frac{\partial N_j}{\partial t} x_j & \sum \frac{\partial N_j}{\partial t} y_j & \sum \frac{\partial N_j}{\partial t} z_j \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Die Transformationsgleichung lautet damit

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

### 5.3.4 Materialmatrix

Für den dreidimensionalen Fall gilt für den (auch als Materialmatrix bezeichneten) Stofftensor  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

### 5.3.5 Elementsteifigkeitsmatrix

Zur Bildung der Elementsteifigkeitsmatrix ist es nun noch notwendig, das Volumendifferential  $dV$  durch folgenden Ausdruck zu ersetzen:

$$dV = \det(\mathbf{J}) dr ds dt . \quad (5.9)$$

Die (24x24)-Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{Hexaeder}}$  des finiten Hexaederelements mit linearen Ansatzfunktionen wird über das Dreifachintegral

$$\mathbf{K}_{\text{Hexaeder}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \det(\mathbf{J}) dr ds dt \quad (5.10)$$

berechnet. Das Volumen  $V_{\text{Hexaeder}}$  eines solchen Elements kann durch folgende Formel ermittelt werden:

$$V_{\text{Hexaeder}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det(\mathbf{J}) dr ds dt . \quad (5.11)$$

## 5.4 Numerische Integration der Dreifachintegrale

Für die numerische Integration der vorliegenden Integrale existieren verschiedene Verfahren, unter anderen (vgl. [15])

- Trapezregel,
- Simpsonregel,
- Gauß-Legendre-Integration,
- Gauß-Laguerre-Integration,
- Gauß-Tschebyschew-Integration und
- Gauß-Hermite-Integration.

Die Gauß-Legendre-Integration hat sich für isoparamtrische Elemente gut bewährt und wird deshalb bei der Berechnung des vorliegenden Modells angewendet. Sie ist die bekannteste Form der Gauß-Integration und ist auf dem Intervall  $[-1,1]$  definiert:

$$\int_{-1}^1 F(r) dr = \sum_{i=1}^n \alpha_i F(r_i) . \quad (5.12)$$

Die weitere Vorgehensweise ist an die Darstellung in RIEG & HACKERSCHMIDT [15] angelehnt.

Für eine gegebene Gewichtsfunktion und einen gegebenen Grad  $n$  (welcher die Genauigkeit der numerischen Integration bestimmt) sind die Stützpunkte  $i$ , die Abstände  $r_i$ ,  $s_i$  und  $t_i$  sowie die Gewichtswerte  $\alpha_i$  tabelliert. Die Gauß-Legendre-Integration mit zwei Stützpunkten ist für das beschriebene Modell ausreichend. Die entsprechenden Werte sind Tabelle 5.1 zu entnehmen.

Stützpunkte $i$	Abstände $r_i, s_i, t_i$	Gewichte $\alpha_i$
1	$-\sqrt{\frac{1}{3}} \approx -0.57735026919$	1
2	$\sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0.57735026919$	1

Tabelle 5.1 – Abstände und Gewichte der Gauß-Legendre-Integration für  $n = 2$ , vgl. [15]

Für den vorliegenden dreidimensionalen Fall gilt sinngemäß folgende Gauß-Legendre-Formel mit zwei Stützpunkten:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(r, s, t) dr = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 F(r_i, s_j, t_k). \quad (5.13)$$

Unter Verwendung von (5.13) lassen sich (5.10) und (5.11) folgendermaßen ausdrücken

$$\mathbf{K}_{Hexaeder} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{B}(r_i, s_j, t_k)^T \mathbf{C}(r_i, s_j, t_k) \mathbf{B}(r_i, s_j, t_k) \det(\mathbf{J}(r_i, s_j, t_k)), \quad (5.14)$$

$$V_{Hexaeder} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \det(\mathbf{J}(r_i, s_j, t_k)). \quad (5.15)$$

## 5.5 Weitere Vorgehensweise

### 5.5.1 Zusammenbau der globalen Steifigkeitsmatrix

Auf Basis der beschriebenen Formeln und der Gauß-Legendre-Integration lässt sich die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_j$  des finiten Hexaederelements in Abhängigkeit von Elastizitätsmodul  $E$ , Querdehnzahl  $\nu$  und den Koordinaten der Randpunkte berechnen. Die lokale (24x24)-Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_j$  ist danach in die globale Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  einzubinden.

### 5.5.2 Zusammenbau des Verschiebungsfeldvektors

Im nächsten Schritt wird die Masse (respektive das Volumen) der einzelnen FE berechnet. Diese Masse wird auf die 8 Randknoten gleichmäßig aufgeteilt und bildet in Kombination mit den Koordinaten des entsprechenden Knotens und bei Multiplikation mit dem Quadrat der Rotationsgeschwindigkeit einen der Fliehkraft äquivalenten Kraftvektor. Wuchtmassen werden, ähnlich wie die Masse der finiten Elemente, entsprechend ihrer Position einem Knoten zugeordnet und deren Einfluss durch einen Kraftvektor berücksichtigt. Die an den einzelnen Randknoten angreifenden lokalen

Kraftvektoren werden danach zu einem globalen Verschiebungsfeldvektor assembliert. Der Einfluss der Gewichtskraft bei horizontaler Lagerung wird in diesem Schritt vernachlässigt.

### 5.5.3 Randbedingungen

Entsprechend der Annahme einer starren Einspannungen an den Rohrenden (siehe auch Abbildung 1.4) sind sowohl die globale Steifigkeitsmatrix als auch der Verschiebungsfeldvektor um die Spalten und Zeilen der betreffenden (fixierten) Freiheitsgrade zu reduzieren.

### 5.5.4 Berechnung der absoluten Verschiebungen

Die Gleichgewichtsbeziehung des Systems lautet

$$Ku = F . \quad (5.16)$$

Dabei ist  $K$  die Steifigkeitsmatrix,  $u$  der Verschiebungsfeldvektor und  $F$  der zur Fliehkraft proportionale Kraftvektor. Dieses Gleichungssystem kann nun unter Verwendung geeigneter numerischer Methoden gelöst und die resultierenden Verschiebungen berechnet werden. Als Ergebnis erhält man die absoluten Verschiebungen der Knotenpunkte, welche auf die Deformation des Rohres umgerechnet werden kann.

### 5.5.5 Postprocessing

In der berechneten Verformung ist nicht nur die Deformation der Querschnitte, sondern auch die Durchbiegung des Rohres aufgrund von Unwucht enthalten, siehe Abbildung 5.6.

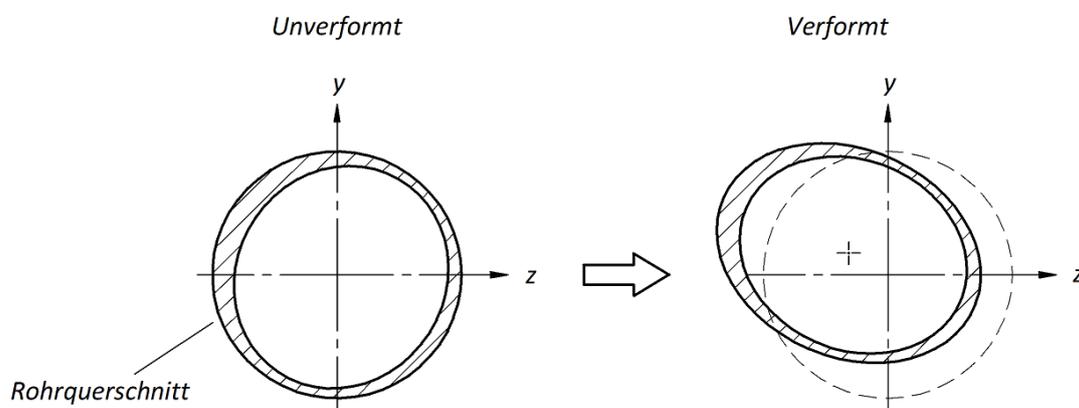


Abbildung 5.6 – Darstellung der Verformung eines anisotropen Walzenquerschnitts aufgrund von Unwucht

Die eleganteste Lösung zur Analyse des Ergebnisses ist durch Fourier-Analyse des Radialabstandes  $R(\varphi)$  der Außenkontur, siehe Abbildung 5.7.

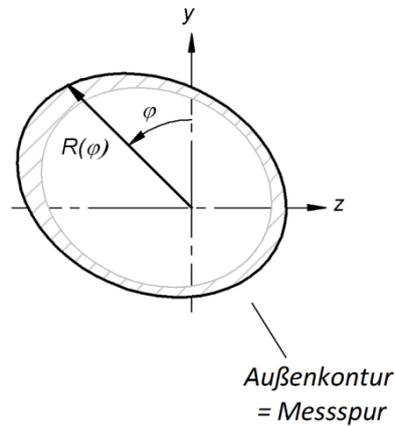


Abbildung 5.7 – Postprocessing mittels Fourier-Analyse

Die ersten drei Terme der Fourier-Reihe lauten:

$$R(\varphi) = R_0 + R_1 \cos(\varphi + \alpha_1) + R_2 \cos(2\varphi + \alpha_2). \quad (5.17)$$

In Glg. (5.17) ist  $R_0$  der mittlere Radialabstand, der zweite Term  $R_1 \cos(\alpha_1)$  beschreibt den Anteil der statischen Durchbiegung aufgrund von Unwucht. Über den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \Delta y &= R_1 \cos(\alpha_1) \\ \Delta z &= R_1 \sin(\alpha_1) \end{aligned} \quad (5.18)$$

kann unter Verwendung von

$$\begin{aligned} y_i &= y_i - \Delta y \\ z_i &= z_i - \Delta z \end{aligned}, \quad i=1 \dots m \quad (5.19)$$

das Ergebnis hinsichtlich Durchbiegung korrigiert werden. Der Term  $R_2 \cos(\alpha_2)$  in Glg. (5.17) beschreibt schließlich den Beitrag der Ovalisierung zum doppelfrequenten Signal  $2f$ . Unter der Annahme, dass sich die Querschnitte symmetrisch verformen (d.h. die kreisförmige in eine elliptische Form übergeht), kann man alternativ zur Fourier-Analyse das Ergebnis auf folgende Weise einem Postprocessing unterziehen:

Die statische Durchbiegung aufgrund von Unwucht kann unter Verwendung von Abbildung 5.8 folgendermaßen aus dem Ergebnis eliminiert werden:

$$\Delta y = \frac{y_1 - y_3}{2}, \quad \Delta z = \frac{z_2 - z_4}{2}. \quad (5.20)$$

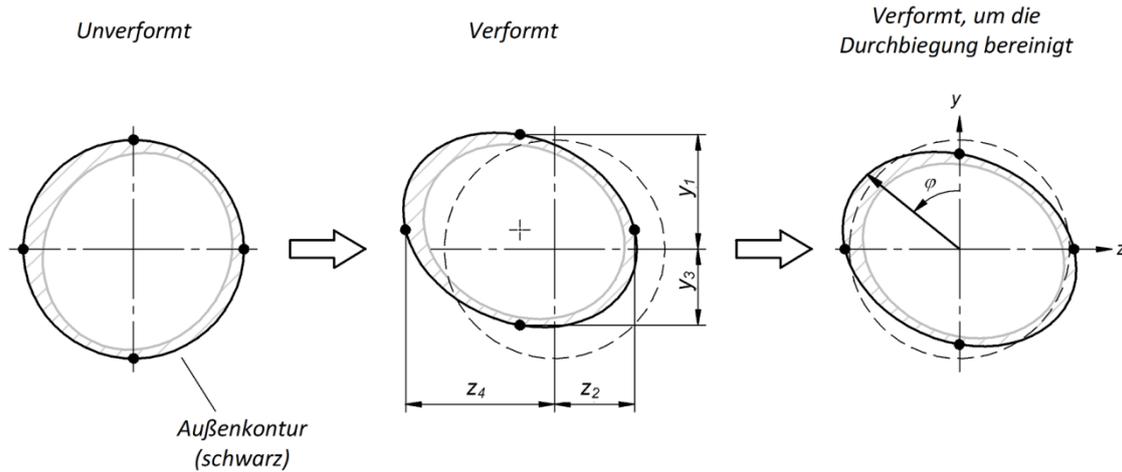


Abbildung 5.8 – Korrektur des Ergebnis hinsichtlich Durchbiegung

Auf Basis der unter Verwendung der Gln. (5.20) und (5.19) ermittelten bereinigten Koordinaten lassen sich die neuen Querschnittsparameter berechnen. Der Beitrag der verformten Außenkontur zum Radialschlag  $2f$  lässt sich vereinfacht folgendermaßen ermitteln:

- *Maximaler Radialabstand:*

$$R_{\max} = \max(R(\varphi)), \quad \varphi = 0 \dots \pi \quad (5.21)$$

- *Lage des minimalen Radialabstandes (bei Annahme idealisierter, symmetrischer Verformung):*

$$\varphi_{\min} = \varphi_{\max}(R_{\max}) + \frac{\pi}{2} \quad (5.22)$$

- *Minimaler Radialabstand:*

$$R_{\min} = R(\varphi_{\min}) \quad (5.23)$$

- *Amplitude und Phasenlage des Beitrags der Ovalisierung zum doppelt drehfrequenten Signal  $2f$ :*

$$\begin{aligned} R_2 &= R_{\max} - R_{\min} \\ \alpha_2 &= 2\varphi_{\max} \end{aligned} \quad (5.24)$$

## 6 OPTIMIERTE BEARBEITUNG DES WALZENKÖRPERS

### 6.1 Problemstellung

In der Fertigung von Stahlwalzen ist das zugelieferte Ausgangsmaterial entweder ein gewalztes und verschweißtes oder durch Schleuderguss hergestelltes Rohr mit entsprechenden Fertigungsungenauigkeiten. Im Zuge der Weiterverarbeitung stellt sich nun die Frage, wie dieses Rohr an der Drehmaschine aufgespannt werden soll, um nach der spanenden Bearbeitung das bestmögliche Ergebnis (d.h. Minimum) hinsichtlich Unwucht und deren Folgen zu erhalten. Die derzeitige aufwändige Vorgehensweise (ohne Rechnerunterstützung) sieht bislang nur eine Minimierung hinsichtlich statischer Unwucht vor.

Im Folgenden soll beschrieben werden, wie dieser bislang mit großem Aufwand verbundene Arbeitsschritt bzw. auch dessen Ergebnis mit den zur Verfügung stehenden Messdaten (bezüglich der Rohrgeometrie) und einem entsprechenden Optimierungsalgorithmus verbessert werden kann. Zunächst ist dazu der Begriff der Optimierung und der Unwucht zu definieren. Danach ist das Modell aufzustellen und festzulegen, welche Größe bzw. Funktion das Optimierungskriterium darstellt. In Betracht gezogen werden

- *Statische Unwucht,*
- *Lagerreaktionen und*
- *Biegemoment.*

### 6.2 Grundlagen der Optimierung

Die grundsätzliche Aufgabenstellung der mathematischen Optimierung ist die Minimierung bzw. Maximierung einer Funktion  $f(\mathbf{x})$ , allgemein als *Zielfunktion* oder auch *Optimierungskriterium* bezeichnet, vgl. [2]:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \underset{x_1, x_2, \dots, x_n}{\text{Minimum / Maximum}} . \quad (6.1)$$

Für die Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  können zusätzlich Beschränkungen  $g_i(\mathbf{x})$  in Form von Gleichungen bzw. Ungleichungen vorliegen, die in der mathematischen Optimierung als *Nebenbedingungen* bezeichnet werden:

$$g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad m < n . \quad (6.2)$$

Man unterscheidet deshalb zwischen *Optimierungsaufgaben mit* oder *ohne Nebenbedingungen*. Es existieren verschiedene Lösungsverfahren, auf die hier jedoch nicht näher eingegangen werden soll.

### 6.3 Begriffsdefinition Unwucht

Entsprechend der Definition nach DIN ist in einem rotierenden System (Rotor) dann eine Unwucht vorhanden, wenn als Folge von nicht ausgeglichenen Fliehkräften Schwingkräfte oder Schwingbewegungen auf die Lager übertragen werden, vgl. [16]. Das bedeutet Unwucht tritt bei rotierenden Körpern auf, deren Masse nicht rotationssymmetrisch verteilt ist.

Man unterscheidet zwischen statischer und dynamischer Unwucht. Bei der statischen Unwucht (Unwucht 1. Ordnung) liegt die zentrale Trägheitshauptachse des Rotors parallel zur Rotationsachse, d. h. der Schwerpunkt des Rotors ist in einer Ebene in radialer Richtung verschoben (siehe Abbildung 6.1). Um eine statische Unwucht festzustellen, muss der Rotor nicht in Drehung versetzt werden. Er muss lediglich horizontal auf zwei Schienen gelegt werden und wird sich dann unter dem Einfluss der Gewichtskraft in die stabile Gleichgewichtslage drehen.

Dynamische Unwucht (Unwucht 2. Ordnung oder Momentenunwucht) tritt dann auf, wenn die zentrale Trägheitshauptachse zur Drehachse geneigt ist (siehe Abbildung 6.1). Der Schwerpunkt befindet sich bei rein dynamischer Unwucht im Schnittpunkt der beiden Achsen. Im Gegensatz zur statischen Unwucht ist die Momentenunwucht nur bei Rotation wirksam und messbar, vgl. [7].

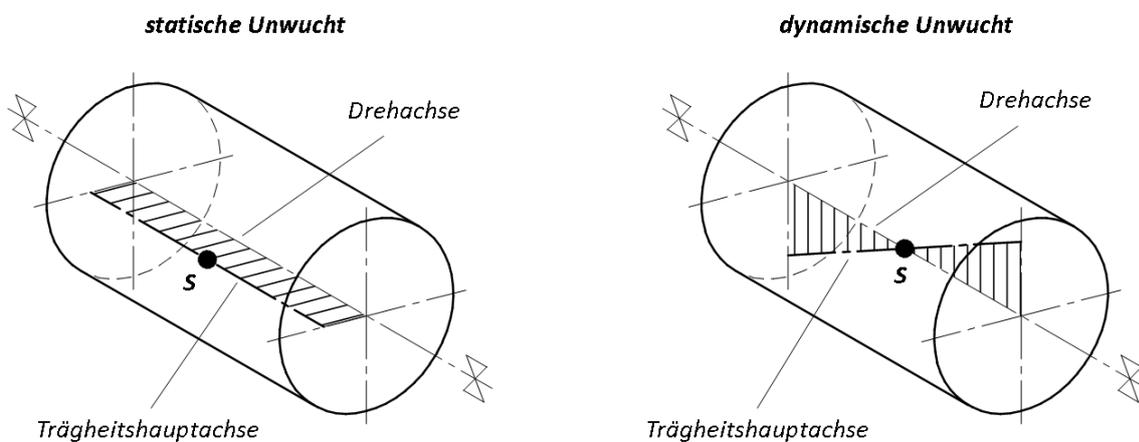


Abbildung 6.1 – statische und dynamische Unwucht

Der allgemeine Fall ist eine Kombination aus statischer und rein dynamischer Unwucht. Das bedeutet, die zentrale Trägheitshauptachse liegt windschief zur Drehachse und schneidet diese nicht (außer in Sonderfällen).

## 6.4 Modell

Das für die Optimierung verwendete Modell unterliegt folgenden Annahmen und Vereinfachungen:

- Der Walzenkörper (exklusive der Kappen) ist in sechs Abschnitte unterteilt.
- Kappen und Zapfen (in Abbildung 6.2 grau dargestellt) besitzen keine Unwucht und haben somit keinen Einfluss auf die Berechnung.
- Die über die jeweiligen Abschnitte (vereinfacht angenommen) gleichmäßig verteilte Unwucht wird als Summenvektor angenähert, siehe Abbildung 6.2.
- Fertigungstoleranzen der nachfolgenden Bearbeitung werden nicht berücksichtigt.
- Durchbiegung (und somit Veränderung der Unwucht) in Abhängigkeit von der Drehzahl wird vernachlässigt – die Walze wird in diesem Modell als starrer Rotor betrachtet.

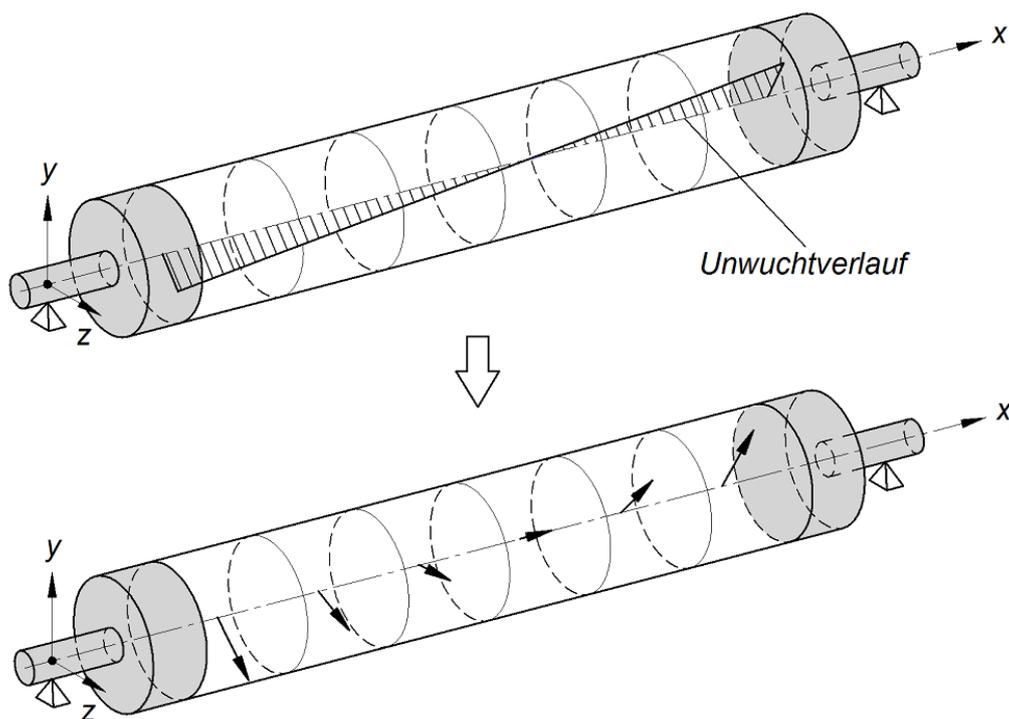


Abbildung 6.2 – Verlauf der verteilten Unwucht und deren Diskretisierung

## 6.5 Zielfunktionen

In Abbildung 6.3 ist der Schnitt durch einen unbearbeiteten Walzenrohling (schraffiert) sowie die spätere, fertige Walze zu dargestellt. Des Weiteren sind die zur Unwucht äquivalenten, diskretisierten Unwuchtvektoren und die durch sie verursachten Lagerreaktionen schematisch abgebildet.

Die Verschiebungen  $\Delta_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ) entsprechen den an den Enden des Walzenkörpers bei der Einspannung an der Drehmaschine vorgenommenen (bzw. vorzunehmenden) Korrekturen. In den folgenden Optimierungsaufgaben stellen sie die Variationsparameter dar.

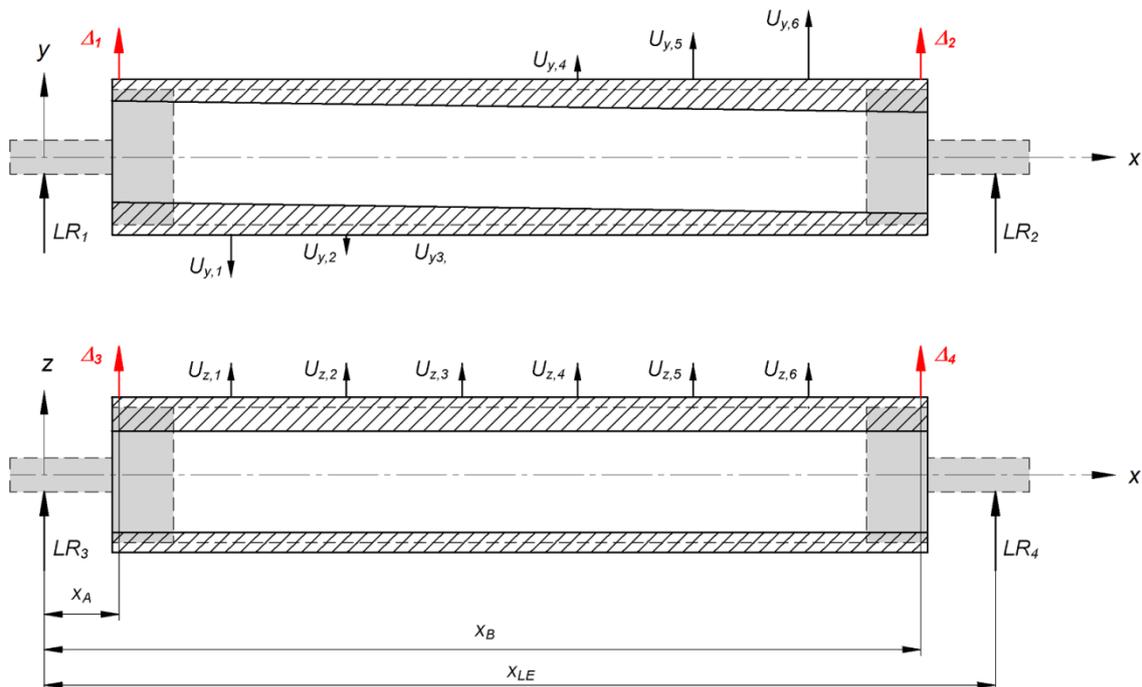


Abbildung 6.3 – diskretisierte Unwucht einer Walze

Bei den nachfolgenden Betrachtungen sind vor allem zwei wesentliche Punkte zu beachten:

- Die Rotationsachse ist vorgegeben und die imaginäre, bearbeitete Außenfläche des Walzenkörpers wird zentrisch zur Rotationsachse angenommen!
- Ziel ist es, den Walzenrohling so an der Drehmaschine aufzuspannen, dass das beste Ergebnis hinsichtlich der gewählten Zielfunktion erreicht wird.

### 6.5.1 Statische Unwucht

Bisher werden Stahlwalzen an der Drehmaschine bestmöglich hinsichtlich statischer Unwucht ausgerichtet. Unabhängig davon kann der Mitarbeiter an der Drehmaschine durch entsprechende Maßnahmen (z. B. annähernd gleicher Schlag an beiden Rohrenden, etc.) in gewissem Maße Einfluss auf die dynamische Unwucht nehmen. Deshalb ist es naheliegend, die statische Unwucht als Zielfunktion zu definieren:

$$f(\Delta_y, \Delta_z) = |U_{\text{statisch}}(\Delta_y, \Delta_z)| \rightarrow \underset{\Delta_y, \Delta_z}{\text{Minimum}}, \quad (6.3)$$

wobei gilt

$$\begin{aligned} \Delta_y &= \Delta_1 = \Delta_2 \\ \Delta_z &= \Delta_3 = \Delta_4. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Die Summe der Unwucht in y- bzw. in z-Richtung lautet

$$\begin{aligned} U_{y,\text{statisch}} &= \sum_{j=1}^6 U_{y,j} = \sum_{j=1}^6 \rho A_j L_j y_{S,j}(\Delta_y, \Delta_z) \\ U_{z,\text{statisch}} &= \sum_{j=1}^6 U_{z,j} = \sum_{j=1}^6 \rho A_j L_j z_{S,j}(\Delta_y, \Delta_z). \end{aligned} \quad (6.5)$$

$\rho$  ist die Dichte,  $A_j$  ist die Querschnittfläche,  $L_j$  ist die Länge des finiten Abschnittes und  $y_{S,j}$  bzw.  $z_{S,j}$  sind die Schwerpunktkoordinaten der Fläche  $A_j$ . Für den Absolutbetrag der statischen Unwucht gilt

$$|U_{\text{statisch}}(\Delta_y, \Delta_z)| = \sqrt{\left( \sum_{j=1}^6 \rho A_j L_j y_{S,j}(\Delta_y, \Delta_z) \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^6 \rho A_j L_j z_{S,j}(\Delta_y, \Delta_z) \right)^2}. \quad (6.6)$$

Die Abhängigkeit von  $y_{S,j}$  bzw.  $z_{S,j}$  von  $\Delta_y$  und  $\Delta_z$  lässt sich exemplarisch an einer Verschiebung  $\Delta_y$  und deren Auswirkung auf Querschnitt 1 zeigen:

Eine Verschiebung  $\Delta_y$  bewirkt, dass die y-Koordinaten der Punkte des inneren Polygons (respektive der Innenfläche) um  $\Delta_y$  gegenüber der (fixierten) Rotationsachse den neuen Wert  $y_i^* = y_i + \Delta_y$  ( $i=1 \dots m_\rho$ ) annehmen.

Entsprechend den Gleichungen aus Kapitel 0 erhält man somit bei Variation der Verschiebungen  $\Delta_y$  und  $\Delta_z$  für die Querschnitte andere Flächenschwerpunkte und somit eine andere statische Unwucht.

Für das angeführte Beispiel würde man zwar die statische Unwucht minimieren, die dynamische Unwucht (in der xy-Ebene zu erkennen) würde jedoch nach wie vor zu Lagerreaktionen führen.

### 6.5.2 Lagerreaktionen

Will man die durch Unwucht verursachten Lagerreaktionen reduzieren liegt es nahe, diese als *Optimierungskriterium* heranzuziehen. Ein Ansatz für die Zielfunktion kann folgendermaßen lauten:

$$f(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = \sum_{i=1}^4 |LR_i(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)| \rightarrow \underset{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4}{\text{Minimum}} . \quad (6.7)$$

Verfolgt man diesen Ansatz, so minimiert man im Grunde sowohl statische als auch dynamische Unwucht. Ausgehend von den Kräfte- und Momentgleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \sum U_y = 0 &= LR_1 + \sum_{j=1}^6 U_{y,j} + LR_2 \\ \sum U_z = 0 &= LR_3 + \sum_{j=1}^6 U_{z,j} + LR_4 \\ \sum M_{U,y}(0) = 0 &= \sum_{j=1}^6 U_{y,j} x_j + LR_2 x_{LE} \\ \sum M_{U,z}(0) = 0 &= -\sum_{j=1}^6 U_{z,j} x_j - LR_4 x_{LE} \end{aligned} \quad (6.8)$$

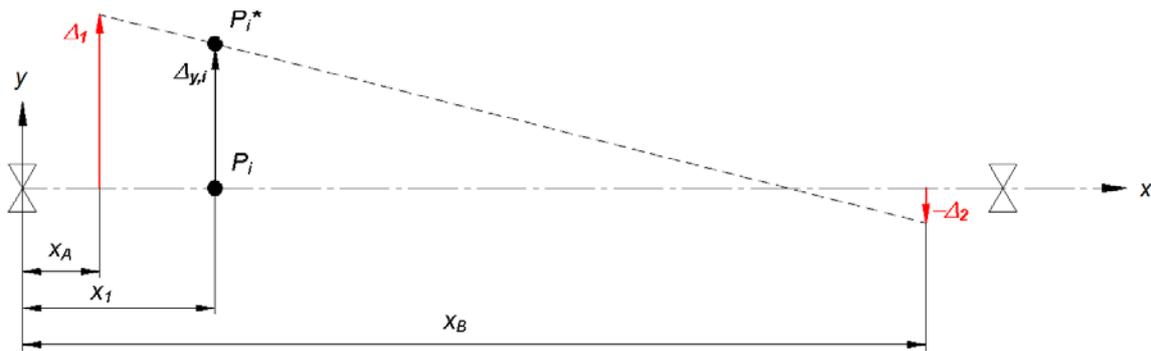
erhält man für die Lagerreaktionen

$$\begin{aligned} LR_1 &= -\frac{\sum_{j=1}^6 U_{y,j} (x_{LE} - x_j)}{x_{LE}} & LR_2 &= -\frac{\sum_{j=1}^6 U_{y,j} x_j}{x_{LE}} \\ LR_3 &= -\frac{\sum_{j=1}^6 U_{z,j} (x_{LE} - x_j)}{x_{LE}} & LR_4 &= -\frac{\sum_{j=1}^6 U_{z,j} x_j}{x_{LE}} . \end{aligned} \quad (6.9)$$

Hier gilt:

$$\left. \begin{aligned} U_{y,j} &= \rho A_j L_j y_{S,j}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) \\ U_{z,j} &= \rho A_j L_j z_{S,j}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) \end{aligned} \right\} j = 1 \dots 6 . \quad (6.10)$$

Die Abhängigkeit von  $y_{s,j}$  bzw.  $z_{s,j}$  von  $\Delta_i$  und wird exemplarisch an den Korrekturen  $\Delta_1$  bzw.  $\Delta_2$  und deren Auswirkungen auf den Querschnitt 1 gezeigt. Die Einflüsse der Verschiebungen  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  überlagern sich und bewirken, dass die y-Koordinaten der Punkte des inneren Polygons (respektive der Innenfläche) gegenüber der (fixierten) Rotationsachse den neuen Wert  $y_i^* = y_i + \Delta_{y,i}$  ( $i=1 \dots m_p$ ) annehmen. Der Zusammenhang von  $\Delta_{y,i}$ ,  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  ist in Abbildung 6.4 dargestellt.

Abbildung 6.4 – Zusammenhang von  $\Delta_p$ ,  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$ 

Der mathematische Zusammenhang für die  $xy$ -Ebene lautet:

$$\Delta_{y,i} = \Delta_1 \frac{(x_B - x_1)}{(x_B - x_A)} + \Delta_2 \frac{(x_1 - x_A)}{(x_B - x_A)}, \quad i=1 \dots m_p . \quad (6.11)$$

Analog gilt die Formel für die  $xz$ -Ebene:

$$\Delta_{z,i} = \Delta_3 \frac{(x_B - x_1)}{(x_B - x_A)} + \Delta_4 \frac{(x_1 - x_A)}{(x_B - x_A)}, \quad i=1 \dots m_p . \quad (6.12)$$

Gleichermaßen lässt sich dieser Zusammenhang auf die anderen Querschnitte  $j$  übertragen, es muss lediglich der Abstand  $x_1$  gegen den Abstand  $x_j$  ausgetauscht werden. Entsprechend den Gleichungen aus Kapitel 0 erhält man bei Variation der Verschiebungen  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  und  $\Delta_4$  für die Querschnitte andere Flächenschwerpunkte und somit andere Lagerreaktionen.

### 6.5.3 Biegemoment

Die betrachteten Papierwalzen sind (entgegen der Annahme bei der Optimierung) grundsätzlich als biegeelastische Rotoren zu betrachten. Unter diesem Umstand ist zu berücksichtigen, dass mit steigender Drehzahl aufgrund der Durchbiegung der Walze die Schwerpunkte der einzelnen Wellenabschnitte ihre Lager zur Rotationsachse verändern. Damit einhergehend ist auch eine Veränderung der Lagerreaktionen.

Will man nun die Durchbiegung sowie die Lagerreaktionen für den ganzen Drehzahlbereich annähernd konstant auf niedrigem Niveau halten liegt es nahe, die Ursache für die Durchbiegung, d.h. das durch die Unwucht verursachte Biegemoment, als *Optimierungskriterium* anzusetzen.

Dieser Ansatz ist jedoch nicht so trivial wie er scheint. So ist die Frage, ob man das absolute Maximum des Biegemoments oder die Fläche unter dem Biegemomentverlauf minimiert, nicht einfach zu klären. Zudem ist auch eine Anforderung an das Projekt (in dem die Diplomarbeit eingebunden ist), dass die Akzeptanz in der Fertigung gegeben ist. Die Ergebnisse der Optimierung mit dem Biegemoment als Zielfunktion sind jedoch beim Wuchtvorgang nicht direkt zu messen und die Konvergenz der Lösung könnte auch ein Problem darstellen. Aufgrund dessen wird dieser Ansatz in der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt.

#### 6.5.4 Verwendeter Algorithmus

Die Umsetzung in MATLAB erfolgt über die Optimization Toolbox und die Funktion *fminsearch*. Diese Funktion verwendet den NELDER-MEAD-Simplexalgorithmus (oft auch als Downhill-Simplex-Verfahren bezeichnet), wie er in LAGARIAS et al. [9] beschrieben ist. Es handelt sich um eine Methode zur Optimierung nichtlinearer Funktionen von mehreren Parametern.

Dieser Simplex-Algorithmus kommt ohne Ableitungen der Funktion nach den Parametern aus. Das Verfahren konvergiert zwar langsamer als Optimierungsverfahren mit Ableitungen (nämlich linear), ist aber dafür einfach und relativ robust.

Der Algorithmus findet in der Umgebung eines Vektor-Startpunktes ein lokales Minimum, indem für eine Menge von Vektoren die Funktionswerte berechnet und verglichen werden. Danach werden in einer Richtung mit großer Aussicht auf Verbesserung wieder einer oder mehrere Punkte ausgewertet. Von einem Iterationsschritt zum nächsten wird normalerweise der beste davon genommen und gegen den schlechtesten der Menge ausgetauscht.

Die möglichen Probleme beim Simplex-Verfahren sind ähnlich wie bei den meisten Optimierungsverfahren lokale Minima, gegen die das Verfahren konvergiert, und deshalb ein globales Minimum nicht findet. [19]

## 7 NUMERISCHE UNTERSUCHUNG

### 7.1 Verifikation der Modelle für die Berechnung der Biegeschwingungen

Zur Verifikation der in dieser Arbeit angeführten Modelle zur Berechnung der Biegeschwingungen hinsichtlich schiefer Biegung wird ein masseloser Kragträger mit rechteckigem Querschnitt herangezogen, dessen Trägheitshauptachsen um den Winkel  $\alpha$  zum Inertialsystem verdreht sind und der am freien Ende durch die Kraft  $F$  in vertikaler Richtung belastet wird, siehe Abbildung 7.1.

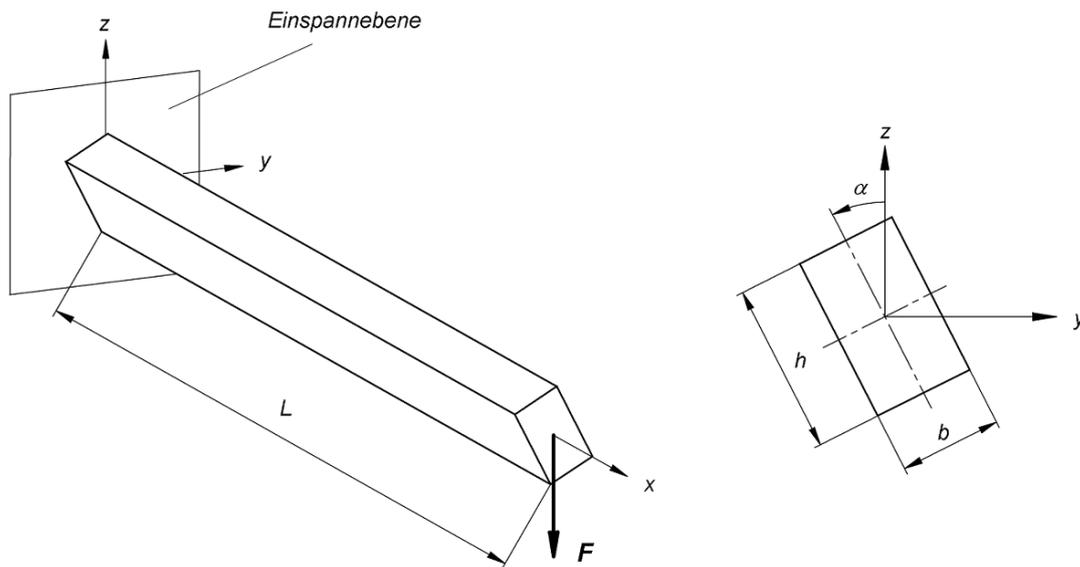


Abbildung 7.1 – masseloser Kragträger mit der Belastung  $F$  am freien Ende und den Abmessungen  $b, h, L, \alpha$

Als Vergleichsbasis dient die analytische Lösung der Biegelinie (ohne Schubverformung). Die dazu verwendeten entkoppelten Differentialgleichungen der schiefen Biegung lauten

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{I_{yz}M_y(x) - I_yM_z(x)}{E(I_{yz}^2 - I_yI_z)} \\ z''(x) &= \frac{I_zM_y(x) - I_{yz}M_z(x)}{E(I_{yz}^2 - I_yI_z)}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Unter Berücksichtigung der Einspannbedingungen

$$y(0) = z(0) = y'(0) = z'(0) = 0 \quad (7.2)$$

erhält man bei Integration von Glg. (7.1) für die maximale Durchbiegung bei einer Belastung  $F$  am freien Ende die analytische Glg. (7.3).

$$y(L) = \frac{I_y F L^3}{3E(I_{yz}^2 - I_y I_z)}$$

$$z(L) = \frac{I_{yz} F L^3}{3E(I_{yz}^2 - I_y I_z)} \quad (7.3)$$

Um aussagekräftige Daten zu erhalten, werden sowohl die Abmessungen  $b$ ,  $h$ ,  $L$ ,  $\alpha$  als auch die Anzahl der finiten Elemente variiert.

### 7.1.1 Rechnung 1

$b$	$h$	$L$	$\alpha$	$F$
15 mm	20 mm	300 mm	0°	1 kN

Tabelle 7.1 – Parameter der Rechnung 1

Anzahl FE	Maximale Deformation (mm)					
	Analytische Formel		EULER-BERNOULLI		TIMOSHENKO	
	$y$	$z$	$y$	$z$	$y$	$z$
1	0	-4,2857	0	-4,2857	0	-4,3006
100	0	-4,2857	0	-4,2857	0	-4,3006

Tabelle 7.2 – Resultat der Rechnung 1

### 7.1.2 Rechnung 2

$b$	$h$	$L$	$\alpha$	$F$
15 mm	20 mm	100 mm	0°	1 kN

Tabelle 7.3 – Parameter der Rechnung 2

Anzahl FE	Maximale Deformation (mm)					
	Analytische Formel		EULER-BERNOULLI		TIMOSHENKO	
	$y$	$z$	$y$	$z$	$y$	$z$
1	0	-0,1587	0	-0,1587	0	-0,1637
100	0	-0,1587	0	-0,1587	0	-0,1637

Tabelle 7.4 – Resultat der Rechnung 2

### 7.1.3 Rechnung 3

$b$	$h$	$L$	$\alpha$	$F$
15 mm	20 mm	50 mm	0°	1 kN

Tabelle 7.5 – Parameter der Rechnung 3

Anzahl FE	Maximale Deformation (mm)					
	Analytische Formel		EULER-BERNOULLI		TIMOSHENKO	
	$y$	$z$	$y$	$z$	$y$	$z$
1	0	-0,0198	0	-0,0198	0	-0,0223
100	0	-0,0198	0	-0,0198	0	-0,0223

Tabelle 7.6 – Resultat der Rechnung 3

### 7.1.4 Rechnung 4

<b>b</b>	<b>h</b>	<b>L</b>	<b><math>\alpha</math></b>	<b>F</b>
15 mm	20 mm	100 mm	30°	1 kN

Tabelle 7.7 – Parameter der Rechnung 4

<b>Anzahl FE</b>	<b>Maximale Deformation (mm)</b>					
	<b>Analytische Formel</b>		<b>EULER-BERNOULLI</b>		<b>TIMOSHENKO</b>	
	<b>y</b>	<b>z</b>	<b>y</b>	<b>z</b>	<b>y</b>	<b>z</b>
1	-0,0535	-0,1896	-0,0535	-0,1896	-0,0553	-0,1943
100	-0,0535	-0,1896	-0,0535	-0,1896	-0,0553	-0,1943

Tabelle 7.8 – Resultat der Rechnung 4

### 7.1.5 Rechnung 5

<b>b</b>	<b>h</b>	<b>L</b>	<b><math>\alpha</math></b>	<b>F</b>
15 mm	15 mm	100 mm	30°	1 kN

Tabelle 7.9 – Parameter der Rechnung 5

<b>Anzahl FE</b>	<b>Maximale Deformation (mm)</b>					
	<b>Analytische Formel</b>		<b>EULER-BERNOULLI</b>		<b>TIMOSHENKO</b>	
	<b>y</b>	<b>z</b>	<b>y</b>	<b>z</b>	<b>y</b>	<b>z</b>
1	0	-0,3762	0	-0,3762	0	-0,3829
100	0	-0,3762	0	-0,3762	0	-0,3829

Tabelle 7.10 – Resultat der Rechnung 5

### 7.1.6 Interpretation

Wie man in allen fünf Berechnungen erkennen kann, erhält man bei der Modellierung des Balkens mit finiten EULER-BERNOULLI-Elementen stets dieselben Ergebnisse wie mit der analytischen Formel, unabhängig von der Anzahl der FE. Das kann dadurch erklärt werden, dass der Ansatz für die EULER-BERNOULLI-Elemente auf der beschriebenen Formel basiert. Zudem sind die verwendeten Ansatzfunktionen dritter Ordnung, wodurch die Verformung dem analytischen Ansatz entspricht (anders als bei Ansatzfunktionen niedrigerer Ordnung).

Da der Ansatz der finiten TIMOSHENKO-Elemente grundsätzlich jenem der EULER-BERNOULLI-Elemente entspricht ist auch hier das Ergebnis unabhängig von der Anzahl der FE. Durch Berücksichtigung der Schubverformung erhält man jedoch größerer Verschiebungen. So wird in den Rechnungen 1 bis 3 deutlich, dass vor allem bei kurzen Balken die Schubverformung einen wesentlichen Einfluss auf das Ergebnis hat. In anderen Worten ist der Einfluss des Schubes umgekehrt proportional zum Schlankheitsgrad des Balkens.

In den Rechnungen 4 und 5 kann man erkennen, dass die in dieser Arbeit beschriebenen Balken-Modelle den Effekt der Schiefen Biegung im Sinne der analytischen Formel beschreiben.

## 7.2 Verifikation des dreidimensionalen Modells

Zur Verifikation des dreidimensionalen Modells wird eine vereinfachte Vergleichswalze mit anisotropem Querschnitt herangezogen, siehe Abbildung 7.2. Die ungestützte Mantellänge beträgt 8 m. Die Walze wird sowohl mit dem vorliegenden Programm als auch mit dem Softwarepaket ANSYS berechnet und die Resultate werden verglichen. Die Verformung der Walze wird bei einer Rotationsgeschwindigkeit von  $73,3 \text{ rad/s}$  (das entspricht einer Drehzahl von  $700 \text{ min}^{-1}$ ) betrachtet.

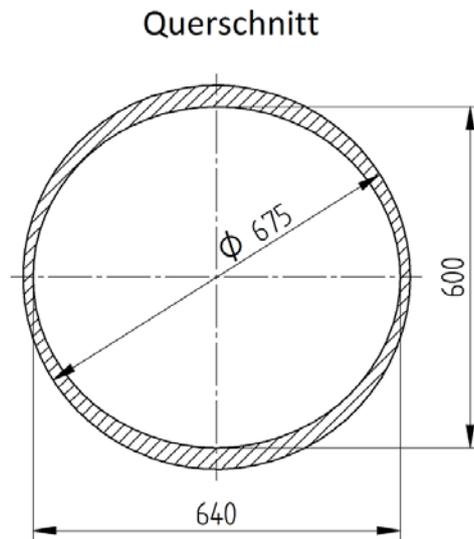


Abbildung 7.2 – idealisierte Vergleichswalze

Die Vernetzung der Walze mit ANSYS ist in Abbildung 7.3 dargestellt.

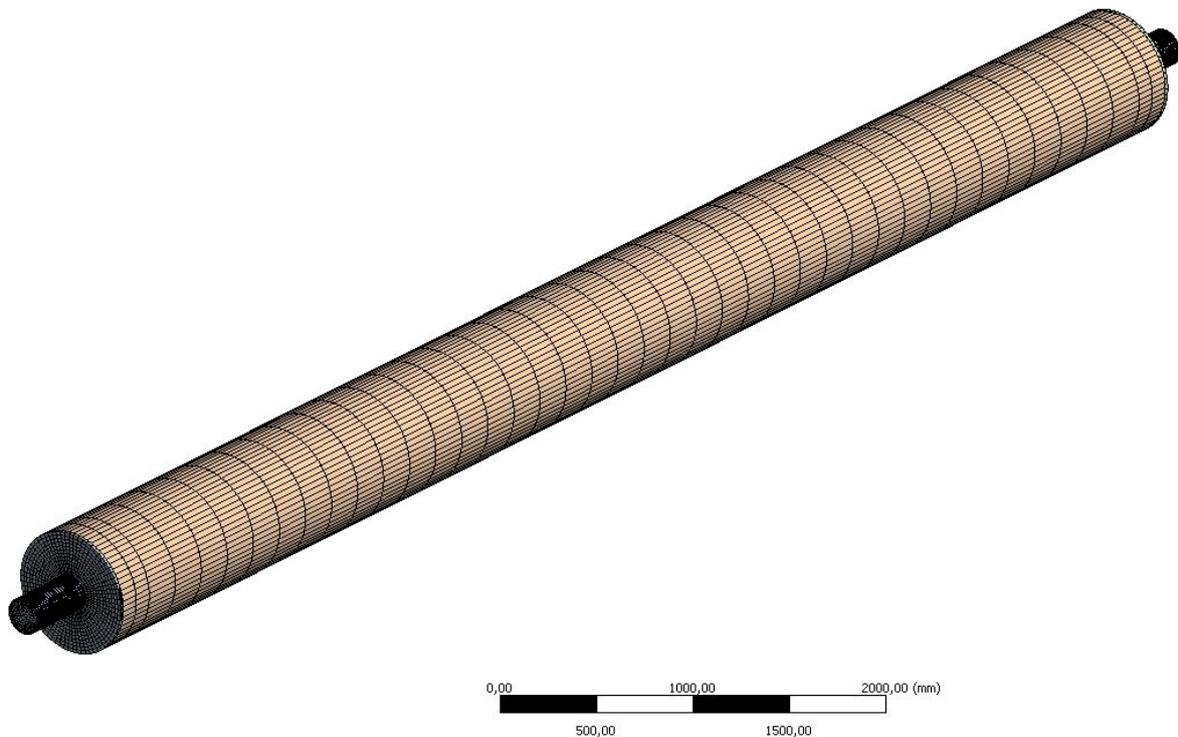


Abbildung 7.3 – Vernetzung der Walze mit ANSYS

### 7.2.1 Berechnung der Verformung mit RollAnalyzer

Die Berechnung mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Modell ergibt einen Radialschlag von 0,35 mm bei einer Drehzahl von  $700 \text{ min}^{-1}$ . Die errechnete Verformung der Außenkontur ist in Abbildung 7.4 veranschaulicht. Die Darstellung ist skaliert und logischerweise nicht maßstabsgerecht.

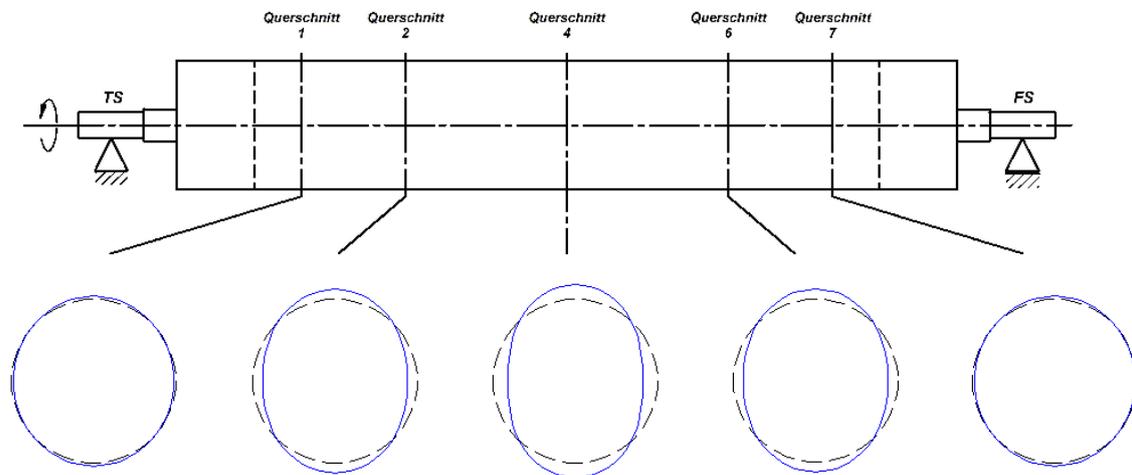


Abbildung 7.4 – Berechnung der Ovalisierung der Vergleichswalze mit RollAnalyzer

### 7.2.2 Berechnung mit ANSYS

Die Berechnung mit ANSYS ergibt einen Radialschlag von 0,61 mm bei einer Drehzahl von  $700 \text{ min}^{-1}$ . Die skalierte (d.h. stark überzeichnete) Verformung der Walze ist in Abbildung 7.5 visualisiert.

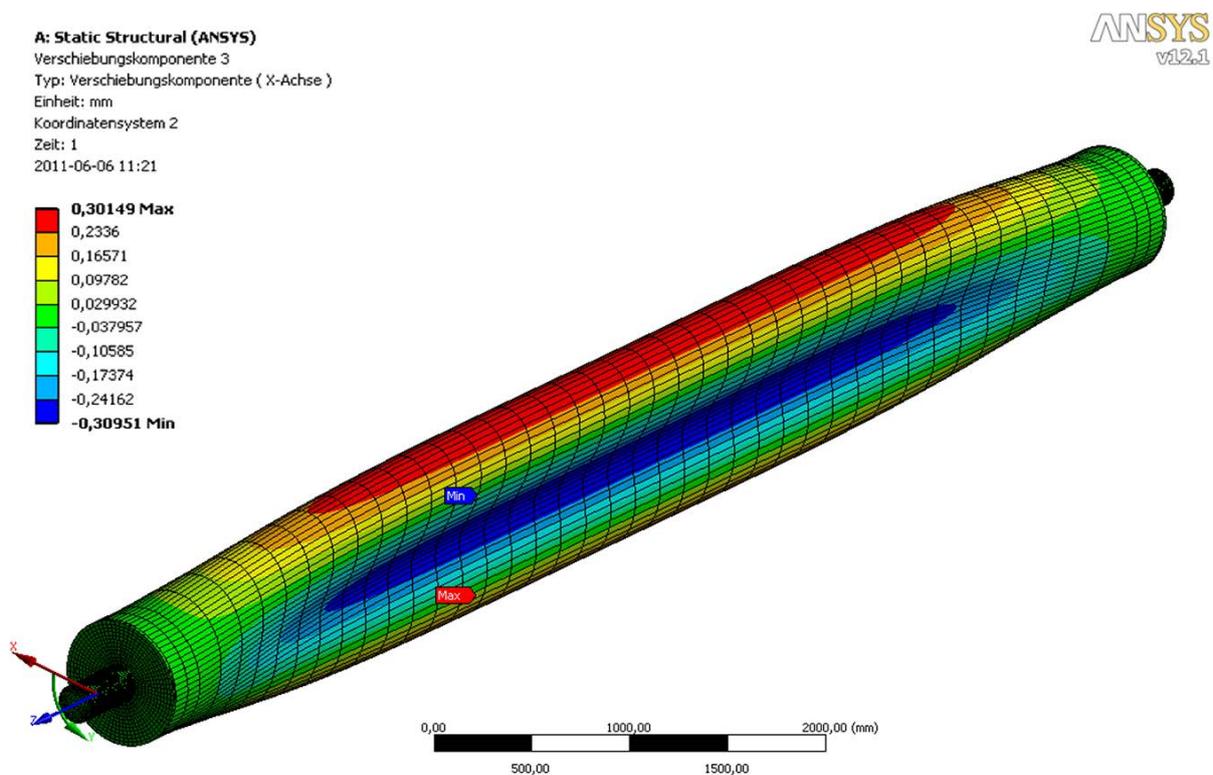


Abbildung 7.5 – Berechnung der Ovalisierung der Vergleichswalze mit ANSYS

### 7.2.3 Interpretation

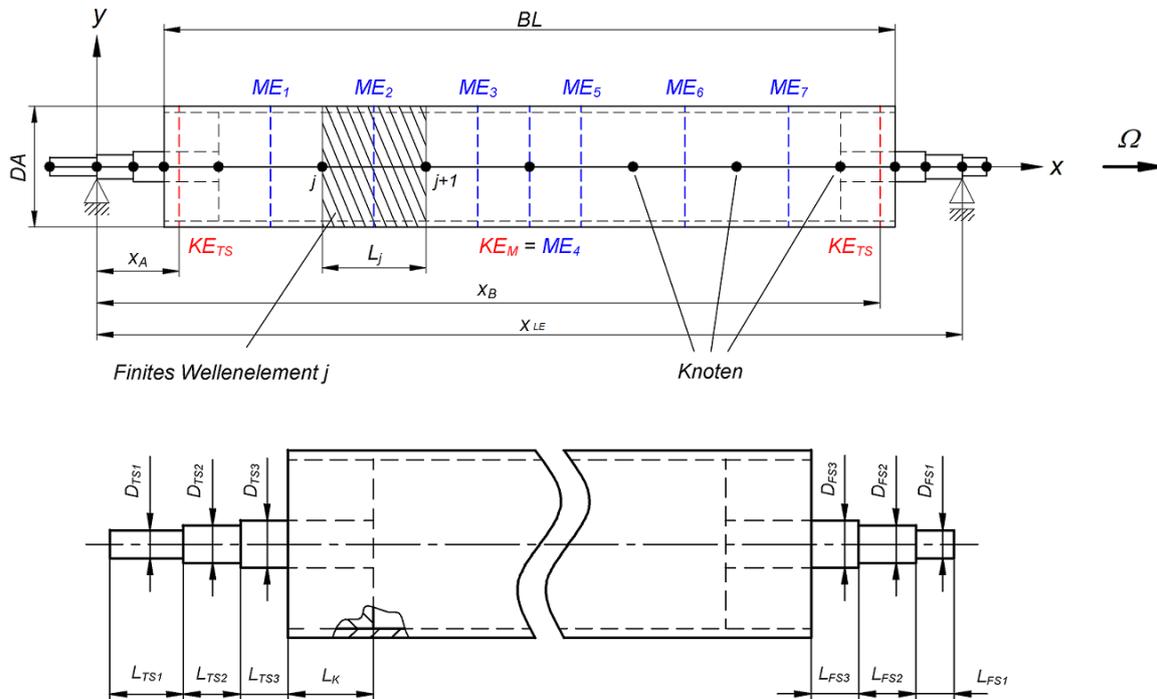
Beim Vergleich der beiden Modelle zeigt sich, dass die errechneten Verformungen grundsätzlich übereinstimmen, jene in ANSYS jedoch etwa um den Faktor 1,8 größer sind. Der Grund liegt in der wesentlich feineren Netzteilung. Es wäre möglich, die Walze im vorliegenden Programm feiner zu vernetzen um die Verformung realitätsnah abzubilden. In Hinblick auf die erheblichen Rechenzeiten wurde jedoch darauf verzichtet und das Modell wird dahingehend angepasst, dass die errechneten Verformungen mit dem Faktor 1,8 multipliziert werden.

Hier soll noch angemerkt werden, dass die Walze in ANSYS anfangs mit finiten Tetraederelementen modelliert wurde. Trotz feiner Netzteilung waren die Ergebnisse unbrauchbar, da durch die Vernetzung Asymmetrien generiert wurden. Erst bei Verwendung von finiten Hexaederelementen erhielt man brauchbare Resultate.

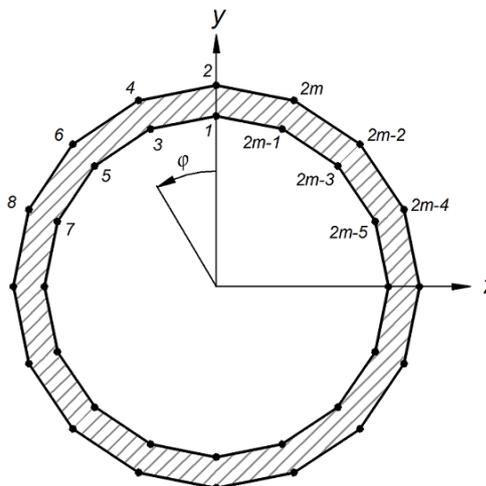
### 7.3 Parametrisiertes Modell der Walze

Die einzelnen Modelle werden bereits in den vorhergehenden Kapiteln erklärt. In Abbildung 7.6 ist das gesamte parametrisierte Modell nochmals dargestellt.

#### Diskretisiertes Modell zur Berechnung der Biegeschwingungen und der Unwucht



#### Darstellung einer Messebene zur Berechnung der Querschnittsparameter und der Ovalisierung



- $j$ .....Knotennummerierung,  $j = 1 \dots 15$
- ME.....Messebene
- KE.....Korrektur-/Wuchtebene
- DA.....Walzenaußendurchmesser
- $x_{LE}$ .....Lagerentfernung
- $x_A$ .....Position der Korrekturebene TS
- $x_B$ .....Position der Korrekturebene FS
- BL.....Breite des Walzenkörpers
- $L_j$ .....Länge des  $FE_j$
- $\varphi$ .....Zählrichtung
- $m$ .....Messpunkte am Umfang ( $m = 72$ )

Abbildung 7.6 – Parametrisiertes Modell einer Walze

## 7.4 Analyseprogramm „RollAnalyzer“

Die Zusammenführung und programmtechnische Umsetzung der in dieser Arbeit vorgestellten Modelle ist Inhalt dieses Kapitels. Verwendet wurde dazu das Softwarepaket MATLAB, das mit der *Optimization Toolbox* ein hilfreiches Werkzeug liefert. Darüber hinaus ermöglicht diese Software die einfache Kommunikation mit anderen Programmen (in diesem Fall MS EXCEL) und bietet die Möglichkeit, eine individuelle grafische Benutzeroberfläche zu erstellen. Das Programm trägt den Namen „*RollAnalyzer*“ und bietet folgende Funktion:

- *Die Eingabe der Daten sowie die Ausgabe der Ergebnisse erfolgt über eine grafische Benutzeroberfläche.*
- *Die Messdaten, welche in einer EXCEL-Datei gespeichert sind, werden automatisch eingelesen und die Daten der Querschnitte berechnet (siehe auch Kapitel 0).*
- *Durch die Berücksichtigung von Wuchtmassen besteht die Möglichkeit, bereits ausgewuchtete Walzen zu analysieren.*
- *Unter Verwendung der Optimization Toolbox von MATLAB ist die Option vorhanden, eine optimierte Bearbeitung des Walzenrohres, wie in Kapitel 6 erläutert, an der Drehmaschine zu berechnen. Dabei werden die Lagerreaktionen (und somit sowohl die statische als auch die dynamische Unwucht) miniert.*
- *Man kann die Systemparameter, d. h. Elastizitätsmodul, Dämpfungskonstanten und Lagersteifigkeit, variieren.*
- *Eine möglicherweise vorhandene Rundlaufabweichung (z.B. verursacht beim Zusammenbau der Walze) kann berücksichtigt werden.*
- *Berechnet werden der einfachfrequente sowie doppelfrequente Radialschlag 1f und 2f. Verwendung findet dabei das in Kapitel 3 verwendete Modell mit der Balkentheorie nach TIMOSHENKO.*
- *Des Weiteren besteht die Möglichkeit, die Ovalisierung des Walzenrohres (siehe auch Kapitel 5) zu berechnen und den Einfluss dieser Querschnittsverformung auf das Ergebnis zu berücksichtigen. Optional kann die Verformung der Querschnitte entlang der Walze diskretisiert dargestellt werden.*

Die grundsätzliche Programmstruktur ohne grafische Benutzeroberfläche ist in Abbildung 7.7 dargestellt. Im Anhang ist der Programmcode von *RollAnalyzer* und der verwendeten Unterprogramme (ohne die Befehle für die GUI) angeführt sowie die grafischen Benutzeroberflächen abgebildet.

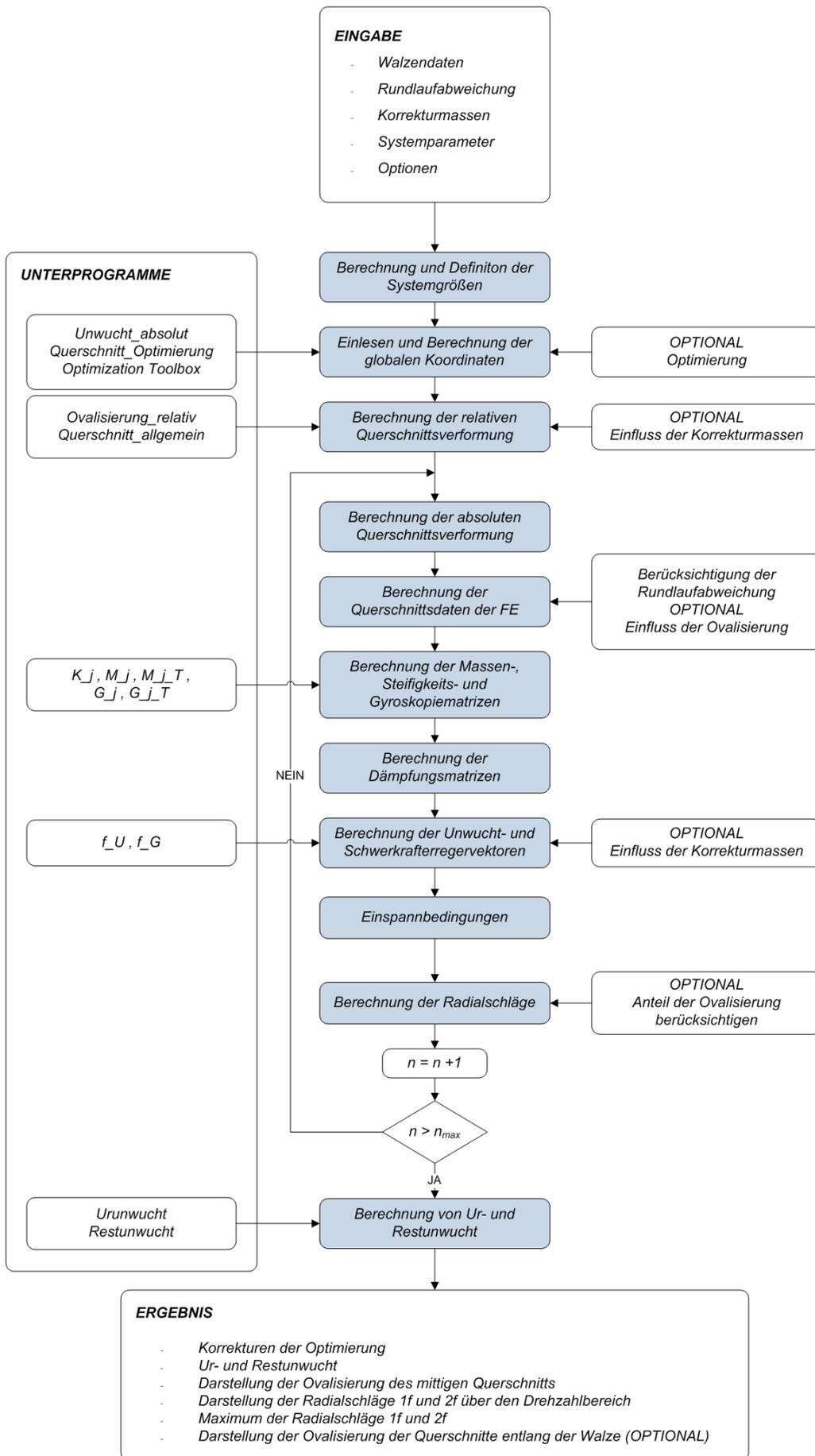


Abbildung 7.7 – Programmstruktur von RollAnalyzer

## 7.5 Berechnung der Schwingungen vereinfachter Walzen

Auf den folgenden Seiten sind die Berechnungsergebnisse einer idealisierten, anisotropen Walze mit variierenden Parametern angeführt, wobei die Hauptabmessungen einer realen Walze herangezogen werden. Die Einstellungen sind frei gewählt um aussagekräftige Grafiken zu erhalten. Die Formel zur Berechnung der Querschnittsanisotropie  $\mu$  lautet

$$\mu = \left| \frac{I_{\eta} - I_{\zeta}}{I_{\eta} + I_{\zeta}} \right|. \quad (7.4)$$

$I_{\eta}$  und  $I_{\zeta}$  sind die Flächenträgheitsmomente des (um den Winkel  $\alpha$  verdrehten) Querschnitts, welcher in Abbildung 7.8 dargestellt ist. In Tabelle 7.11 sind die Grundeinstellungen aufgelistet.

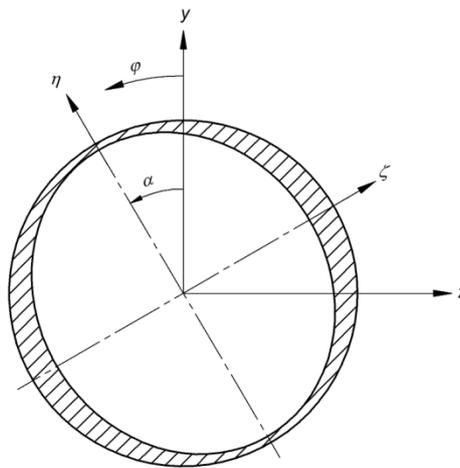


Abbildung 7.8 – Querschnitt des idealisierten Walzenrohres

Grundeinstellungen	Werte
Außendurchmesser $DA$	675 mm
mittlere Wanddicke	21 mm
Lagerentfernung $x_{LE}$	9820 mm
Länge des Walzenkörpers $BL$	9220 mm
Korrekturradius $R_{kor}$	286 mm
maximaler Drehzahl $n_{max}$	$700 \text{ min}^{-1}$
Lager der Korrektorebene $x_A$	400 mm
Zapfenlänge $L_{TS1}$	310 mm
Zapfenlänge $L_{FS1}$	100 mm
Zapfenlänge $L_{TS2} = L_{FS2}$	90 mm
Zapfenlänge $L_{TS3} = L_{FS3}$	210 mm
Kappenlänge $L_K$	488 mm
Kappenmasse $m_K$	400 kg
Elastizitätsmodul $E$	$210 \text{ kN/mm}^2$
Dämpfungsparameter $d_a$	200
Dämpfungsparameter $d_k$	0.0002
Dämpfungsparameter $d_m$	0.0002
isotrope Lagersteifigkeit	80000 kN/m

Tabelle 7.11 – Grundeinstellungen der Berechnung

## 7.5.1 Beispiel 1

Einstellungen	Werte
Anisotropie	0,1 %
Winkel $\alpha$	60°
Wuchtmassen [Masse / Phasenlage / Ebene]	-
Ovalisierung berücksichtigt	NEIN

Tabelle 7.12 – Einstellungen von Beispiel 1

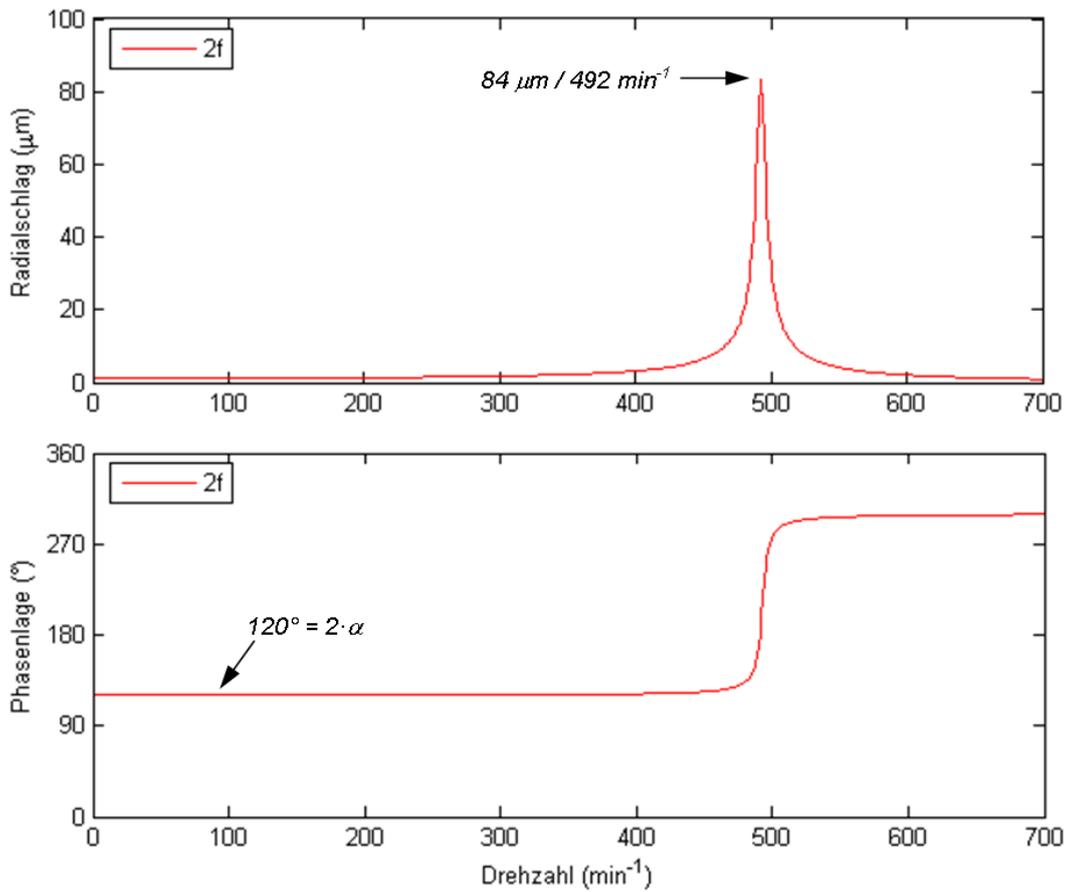


Abbildung 7.9 – Betrag und Phasenlage des 2f-Radialschlags von Beispiel 1

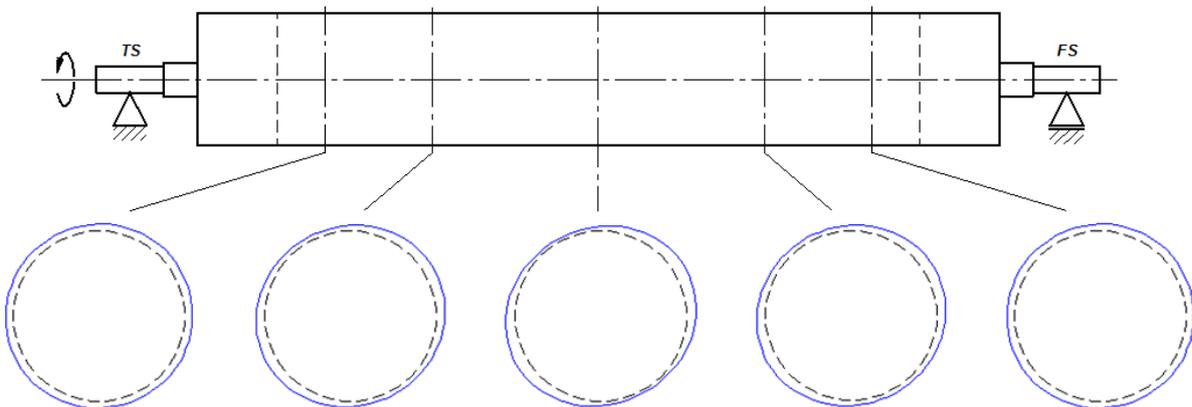


Abbildung 7.10 – Außenkontur der verformten Walzenquerschnitte von Beispiel 1

7.5.2 Beispiel 2

Einstellungen	Werte
Anisotropie	0,1 %
Winkel $\alpha$	60°
Wuchtmassen [Masse / Phasenlage / Ebene]	5000 g / 30° / M 5000 g / 210° / M
Ovalisierung berücksichtigt	JA

Tabelle 7.13 - Einstellungen von Beispiel 2

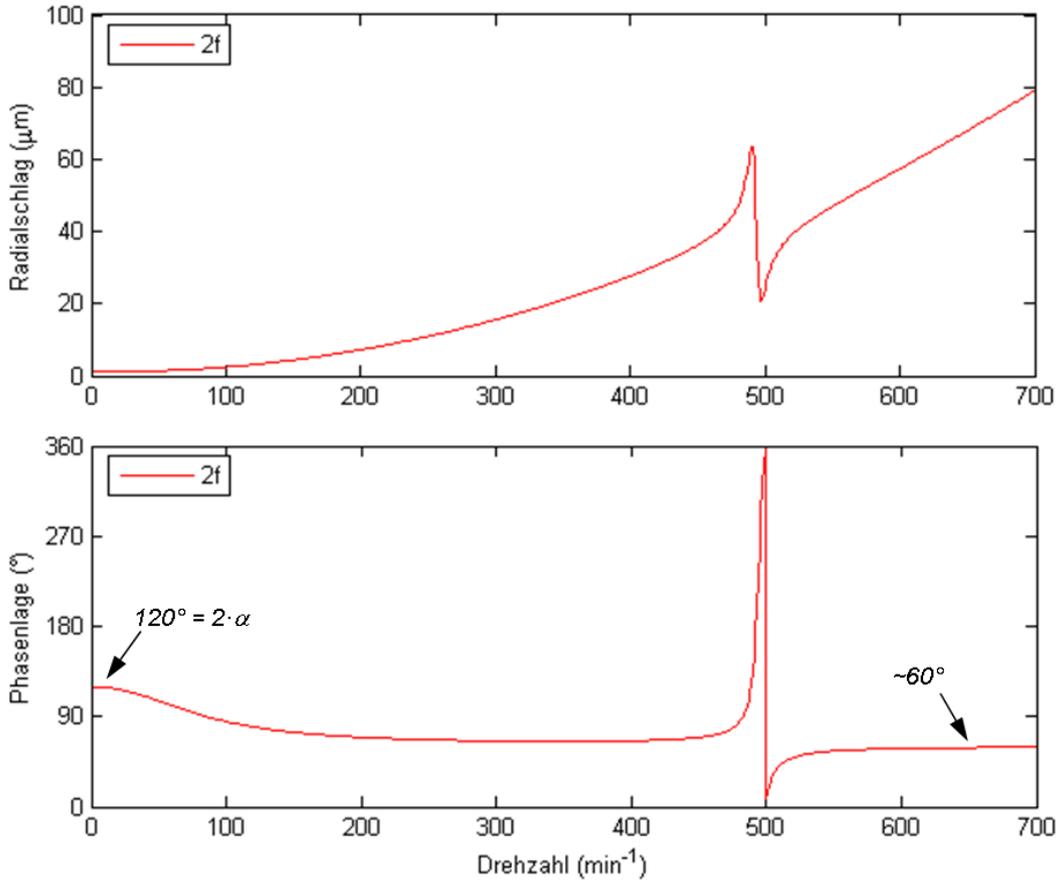


Abbildung 7.11 – Betrag und Phasenlage des 2f-Radialschlags von Beispiel 2

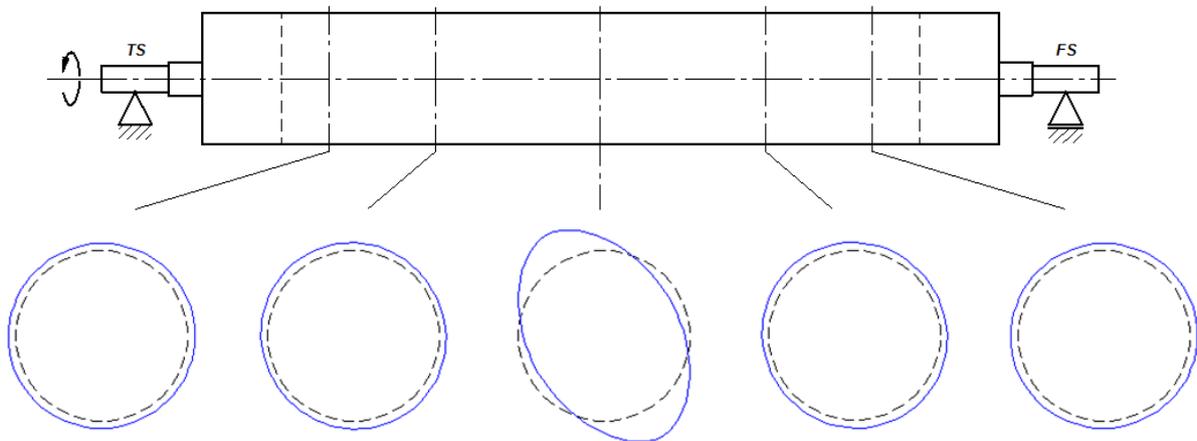


Abbildung 7.12 – Außenkontur der verformten Walzenquerschnitte von Beispiel 2

## 7.5.3 Beispiel 3

Einstellungen	Werte
Anisotropie	0 %
Winkel $\alpha$	0°
Wuchtmassen [Masse / Phasenlage / Ebene]	-
Ovalisierung berücksichtigt	-

Tabelle 7.14 – Einstellungen von Beispiel 3

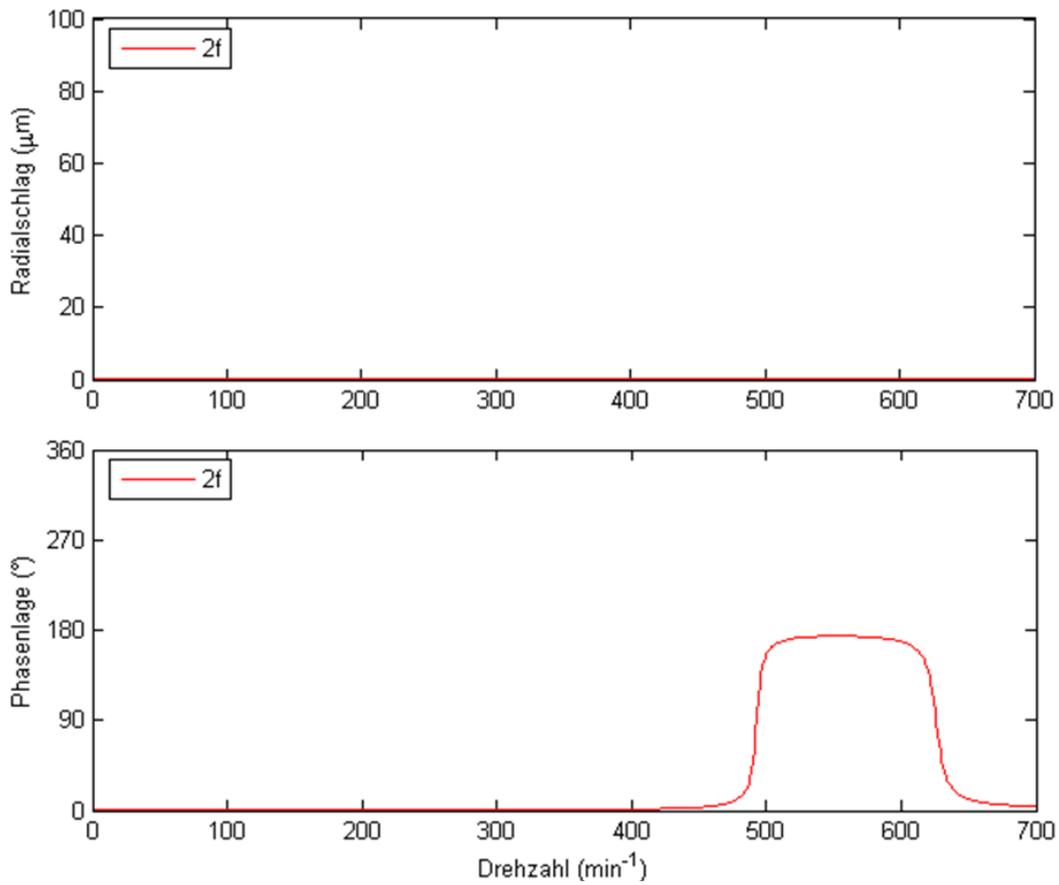


Abbildung 7.13 – Betrag und Phasenlage des 2f-Radialschlags von Beispiel 3

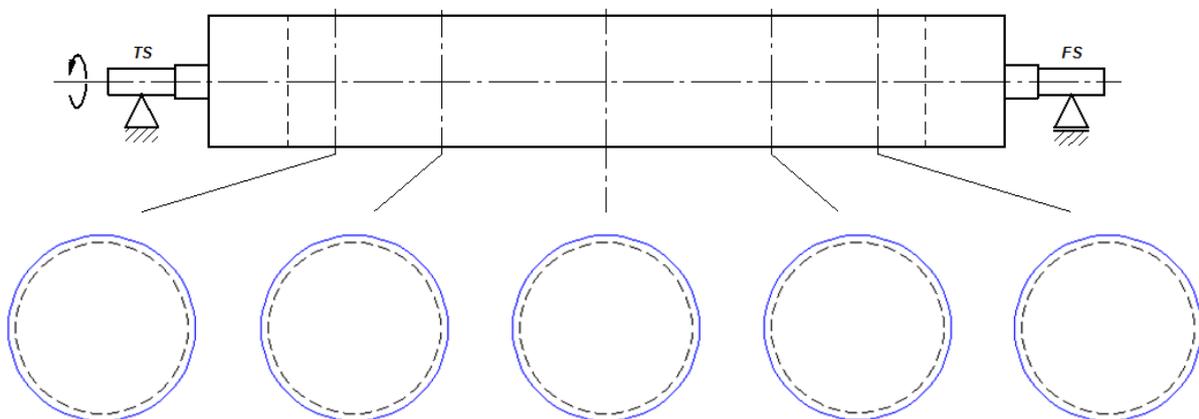


Abbildung 7.14 – Außenkontur der verformten Walzenquerschnitte von Beispiel 3

## 7.5.4 Beispiel 4

Einstellungen	Werte
Versatz der inneren Mittellinie [Betrag / Phasenlage]	10 $\mu\text{m}$ / 225°
Rundlaufabweichung [Betrag / Phasenlage]	-
Wuchtmassen [Masse / Phasenlage / Ebene]	-
Optimierung aktiviert	NEIN

Tabelle 7.15 – Einstellungen von Beispiel 4

Resultat	Werte
max. Radialschlag 1f	3418 $\mu\text{m}$
Biegekritische Drehzahl	$\sim 985 \text{ min}^{-1}$
Urunwucht / Restunwucht TS	356 g / 356 g
Urunwucht / Restunwucht FS	356 g / 356 g

Tabelle 7.16 – Resultat von Beispiel 4

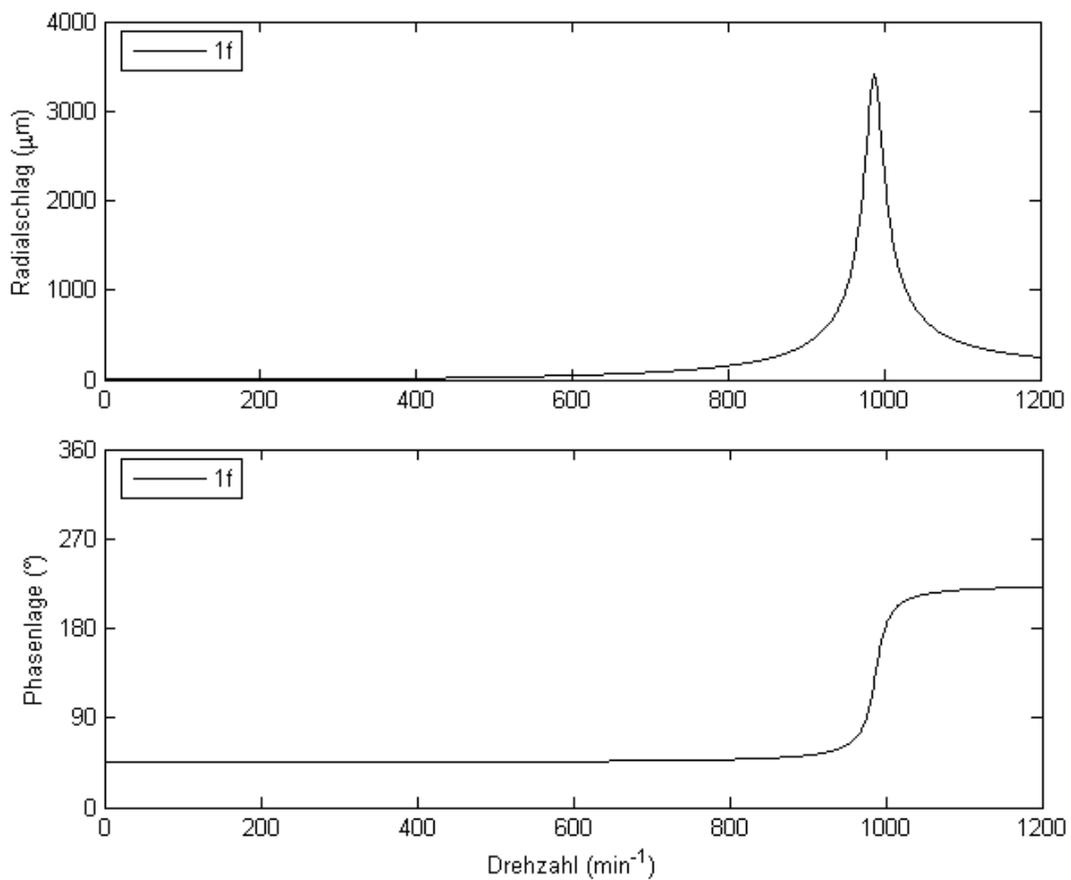


Abbildung 7.15 – Betrag und Phasenlage des 1f-Radialschlags von Beispiel 4

## 7.5.5 Beispiel 5

Einstellungen	Werte
Versatz der inneren Mittellinie [Betrag / Phasenlage]	10 $\mu\text{m}$ / 225°
Rundlaufabweichung [Betrag / Phasenlage]	-
Wuchtmassen [Masse / Phasenlage / Ebene]	356 g / 225° / TS 356 g / 225° / FS
Optimierung aktiviert	NEIN

Tabelle 7.17 – Einstellungen von Beispiel 5

Resultat	Werte
max. Radialschlag 1f	2112 $\mu\text{m}$
Biegekritische Drehzahl	$\sim 985 \text{ min}^{-1}$
Urunwucht / Restunwucht TS	356 g / 0 g
Urunwucht / Restunwucht FS	356 g / 0 g

Tabelle 7.18 – Resultat von Beispiel 5

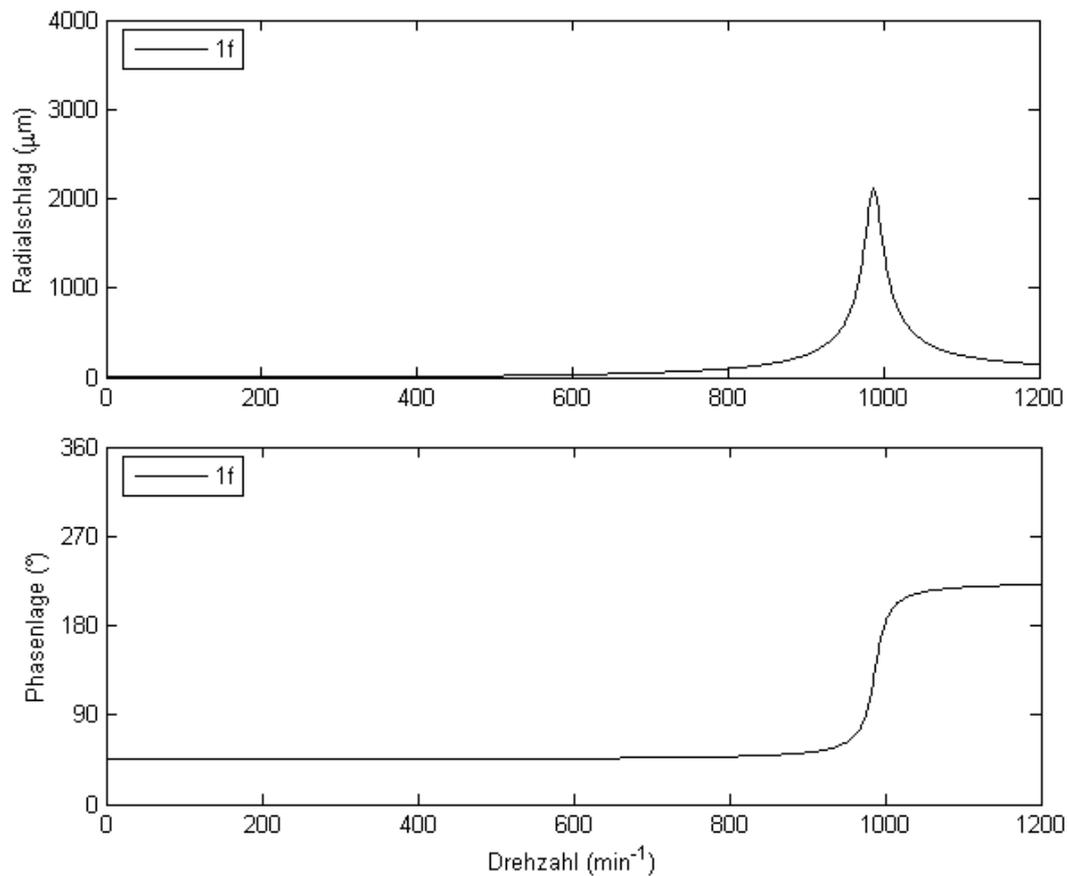


Abbildung 7.16 – Betrag und Phasenlage des 1f-Radialschlags von Beispiel 5

## 7.5.6 Beispiel 6

Einstellungen	Werte
Versatz der inneren Mittellinie [Betrag / Phasenlage]	10 $\mu\text{m}$ / 225°
Rundlaufabweichung [Betrag / Phasenlage]	-
Wuchtmassen [Masse / Phasenlage / Ebene]	230 g / 225° / TS 300 g / 225° / M 230 g / 225° / FS
Optimierung aktiviert	NEIN

Tabelle 7.19 – Einstellungen von Beispiel 6

Resultat	Werte
max. Radialschlag 1f	341 $\mu\text{m}$
Biegekritische Drehzahl	$\sim 985 \text{ min}^{-1}$
Urunwucht / Restunwucht TS	356 g / 4 g
Urunwucht / Restunwucht FS	356 g / 4 g

Tabelle 7.20 – Resultat von Beispiel 6

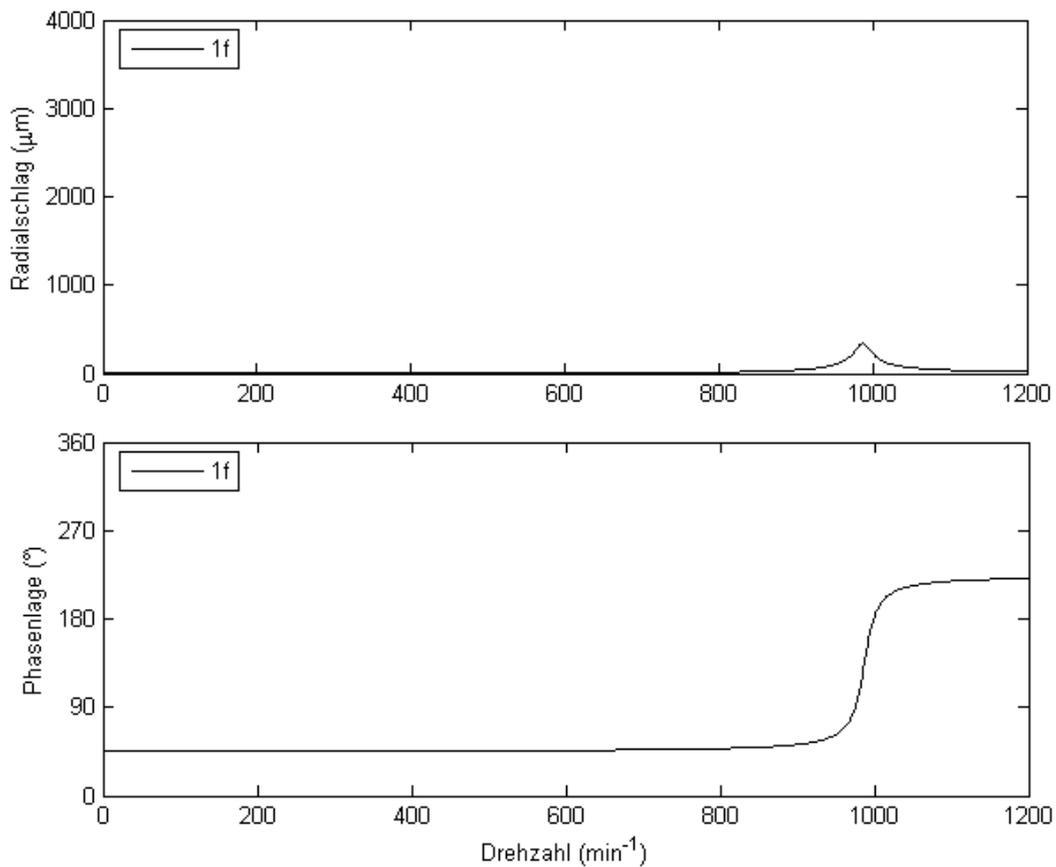


Abbildung 7.17 – Betrag und Phasenlage des 1f-Radialschlags von Beispiel 6

## 7.5.7 Beispiel 7

Einstellungen	Werte
Versatz der inneren Mittellinie [Betrag / Phasenlage]	10 $\mu\text{m}$ / 225°
Rundlaufabweichung [Betrag / Phasenlage]	-
Wuchtmassen [Masse / Phasenlage / Ebene]	-
Optimierung aktiviert	JA
→ Korrektur TS – y-Richtung	7 $\mu\text{m}$
→ Korrektur TS – z-Richtung	-7 $\mu\text{m}$
→ Korrektur FS – y-Richtung	7 $\mu\text{m}$
→ Korrektur FS – z-Richtung	-7 $\mu\text{m}$

Tabelle 7.21 – Einstellungen von Beispiel 7

Resultat	Werte
max. Radialschlag 1f	0 $\mu\text{m}$
Biegekritische Drehzahl	$\sim 985 \text{ min}^{-1}$
Urunwucht / Restunwucht TS	$\sim 0 \text{ g} / 0 \text{ g}$
Urunwucht / Restunwucht FS	$\sim 0 \text{ g} / 0 \text{ g}$

Tabelle 7.22 – Resultat von Beispiel 7

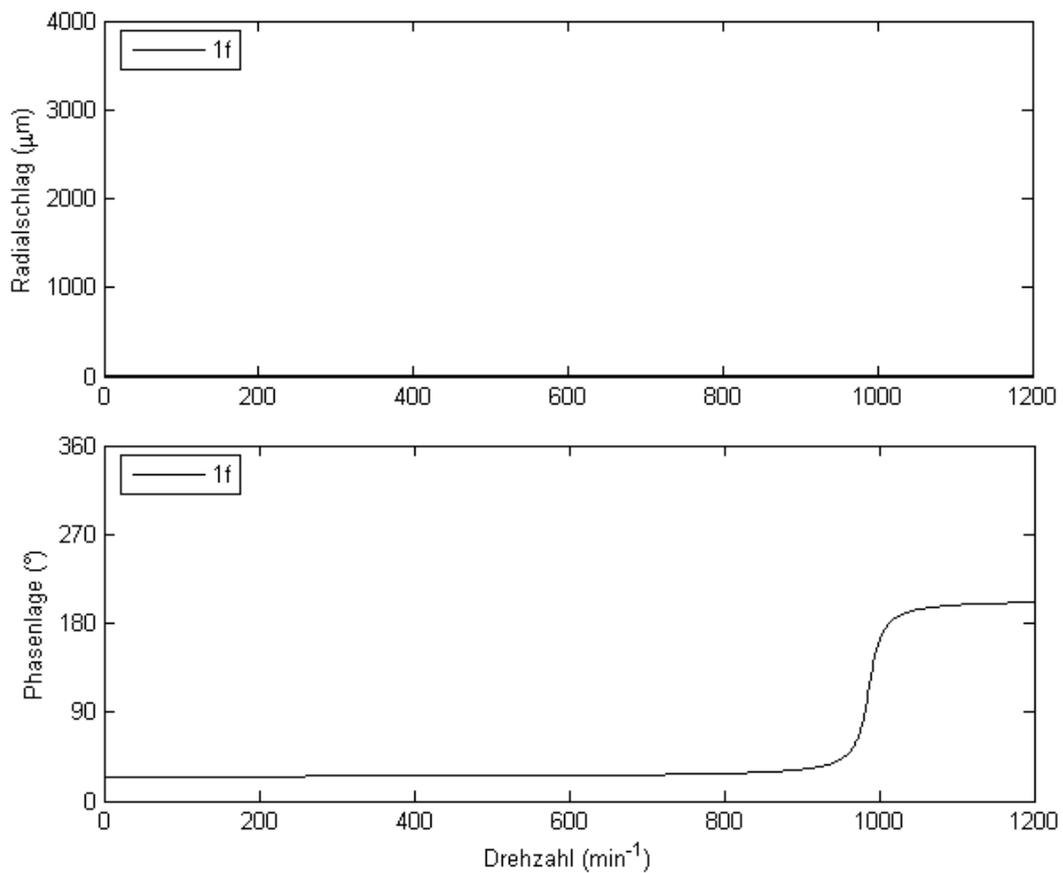


Abbildung 7.18 – Betrag und Phasenlage des 1f-Radialschlags von Beispiel 7

### 7.5.8 Interpretation der Ergebnisse

In den Beispielen 1 bis 3 steht der doppelt drehfrequente Radialschlag  $2f$  im Zentrum der Betrachtung. Zu erkennen ist der Resonanzausschlag bei ungefähr  $490 \text{ min}^{-1}$ , was etwa der halben biegekritischen Drehzahl entspricht. Wird der Einfluss der Ovalisierung auf das doppelfrequente Signal unterdrückt, so kann man den Phasensprung bei dieser sogenannten gewichtskritischen Drehzahl erkennen.

Bei Beispiel 2 sind gegengleich angeordnete Wuchtmassen berücksichtigt, welche die Querschnittsverformung des Walzenrohres bei Rotation beeinflussen. In der Auswertung zeigt sich, dass bei entsprechender Positionierung der Wuchtmassen der Maximalwert des gemessenen doppelfrequenten Signals reduziert werden kann. Anzumerken ist hier, dass die tatsächliche doppelt drehfrequente Schwingung dabei kaum beeinflusst wird! Zum Vergleich ist in Beispiel 3 eine Walze mit isotropem Querschnitt ( $\mu = 0$ ) berechnet, wobei der vernachlässigbar kleine Radialschlag auf den Fehler der numerischen Berechnung zurückzuführen ist.

In den Beispielen 4 bis 7 wird der durch Unwucht verursachte einfach drehfrequente Radialschlag  $1f$  analysiert. Grundsätzlich werden Papierleitwalzen nur bis zu 75 % der biegekritischen Drehzahl betrieben, die in diesem Fall (System Walze + Lagerung) bei etwa  $980 \text{ min}^{-1}$  liegt. Im Sinne einer aussagekräftigen Analyse liegt die maximale Drehzahl der Berechnung darüber. In allen Beispielen ist der Phasensprung im Bereich der mittleren biegekritischen Drehzahl zu erkennen.

Die Resultate zeigen, dass beim Wuchten in zwei Ebenen zwar die Unwucht reduziert werden kann, aufgrund der Verteilung der Unwucht ein Biegemoment in der Walze erhalten bleibt und so die Walze einen Radialschlag  $1f$  aufweist. Demzufolge ist ein Wuchten in drei Ebenen vorzuziehen. Das beste Ergebnis erhält man, wenn man das Walzenrohr optimal bearbeitet.

## 7.6 Berechnung der Schwingungen einer realen Walze

Zum Vergleich von berechneten Werten mit realen Messwerten wurden die Daten einer realen Walze herangezogen, welche hinsichtlich Wanddicke und Rundlaufabweichung vermessen wurde. Aus den entsprechenden Zeichnungen stammen die Hauptabmessungen, siehe Tabelle 7.23.

<b>Eckdaten</b>	<b>Werte</b>
Außendurchmesser $DA$	675 mm
mittlere Wanddicke	21 mm
Lagerentfernung $x_{LE}$	9820 mm
Länge des Walzenkörpers $BL$	9220 mm
Korrekturradius $R_{kor}$	286 mm
Lager der Korrektorebene $x_A$	400 mm
Zapfenlänge $L_{TS1}$	310 mm
Zapfenlänge $L_{FS1}$	100 mm
Zapfenlänge $L_{TS2} = L_{FS2}$	90 mm
Zapfenlänge $L_{TS3} = L_{FS3}$	210 mm
Kappenlänge $L_K$	488 mm
Kappenmasse $m_K$	400 kg
Rundlaufabweichung [Betrag / Phasenlage]	0,02 mm / 315°

Tabelle 7.23 – Eckdaten der realen Walze

Bei Berücksichtigung entsprechender Parameter (siehe Tabelle 7.24) können die Schwingungen mit dem vorliegenden Programm berechnet werden.

<b>Berechnungsparameter</b>	<b>Werte</b>
maximaler Drehzahl $n_{max}$	710 $min^{-1}$
Elastizitätsmodul $E$	210 $kN/mm^2$
Dämpfungsparameter $d_a$	200
Dämpfungsparameter $d_k$	0.0002
Dämpfungsparameter $d_m$	0.0002
isotrope Lagersteifigkeit	80000 $kN/m$

Tabelle 7.24 – Berechnungsparameter der realen Walze

Ein Auszug aus dem beim Wuchtvorgang erstellten Wuchtprotokoll ist in Abbildung 7.19 dargestellt. Demgegenüber steht das Resultat der Berechnung, siehe Abbildung 7.20. Beide Grafiken zeigen vergleichbare Verläufe der Radialschläge in Abhängigkeit von der Drehzahl. Die Abweichungen lassen sich durch die Modellannahmen (vereinfachte bzw. diskretisierte Modellierung, linearisierte Modelle, homogener Werkstoff, isotrope Lagerung), nicht erfasste Fertigungsungenauigkeit und durch etwaige Messfehler (z. B. bei der Ermittlung der Wanddicke oder beim Wuchtvorgang) erklären.

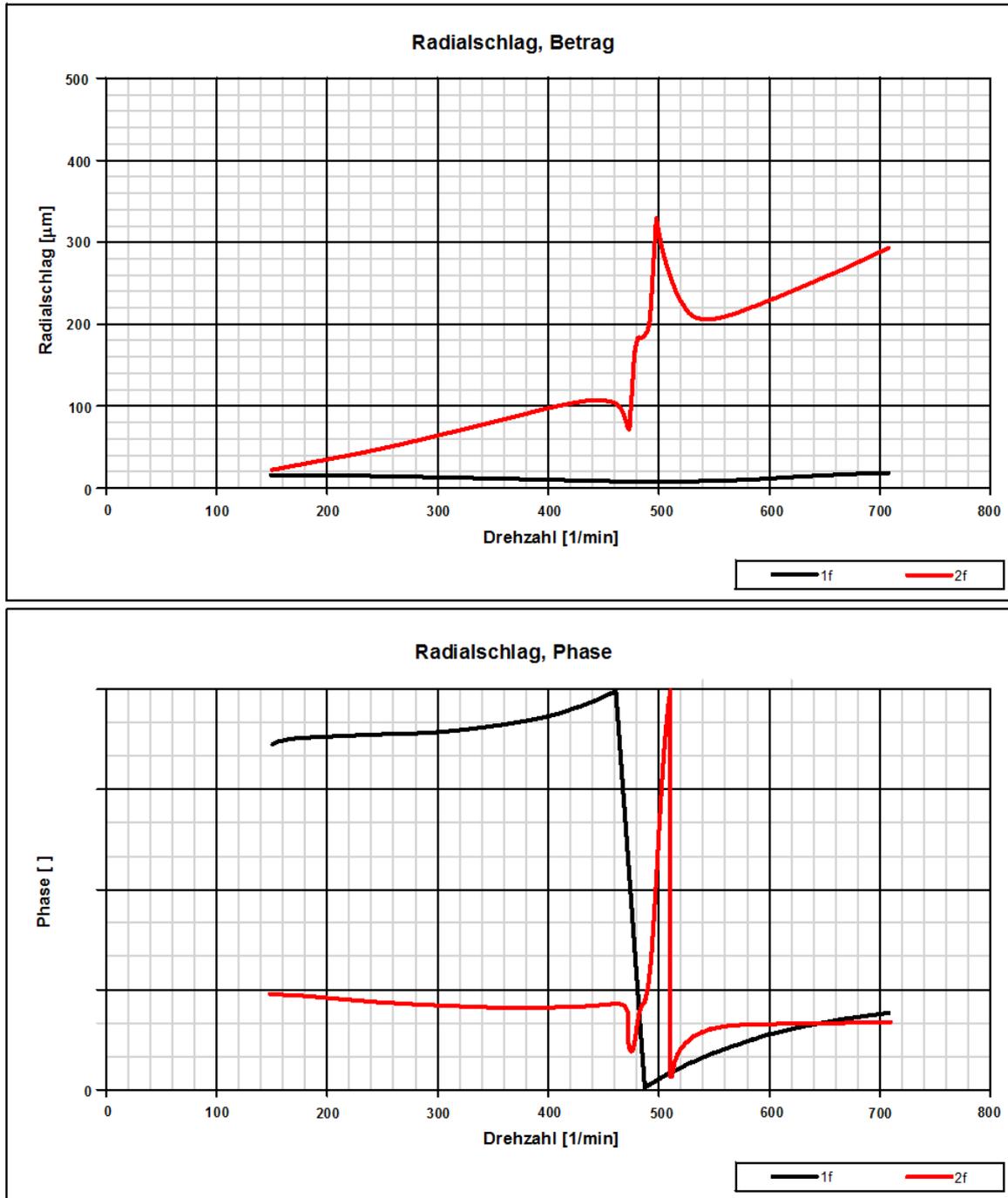


Abbildung 7.19 – Betrag und Phasenlage der Radialschläge in Abhängigkeit von der Drehzahl (Auszug aus dem Wuchtprotokoll)

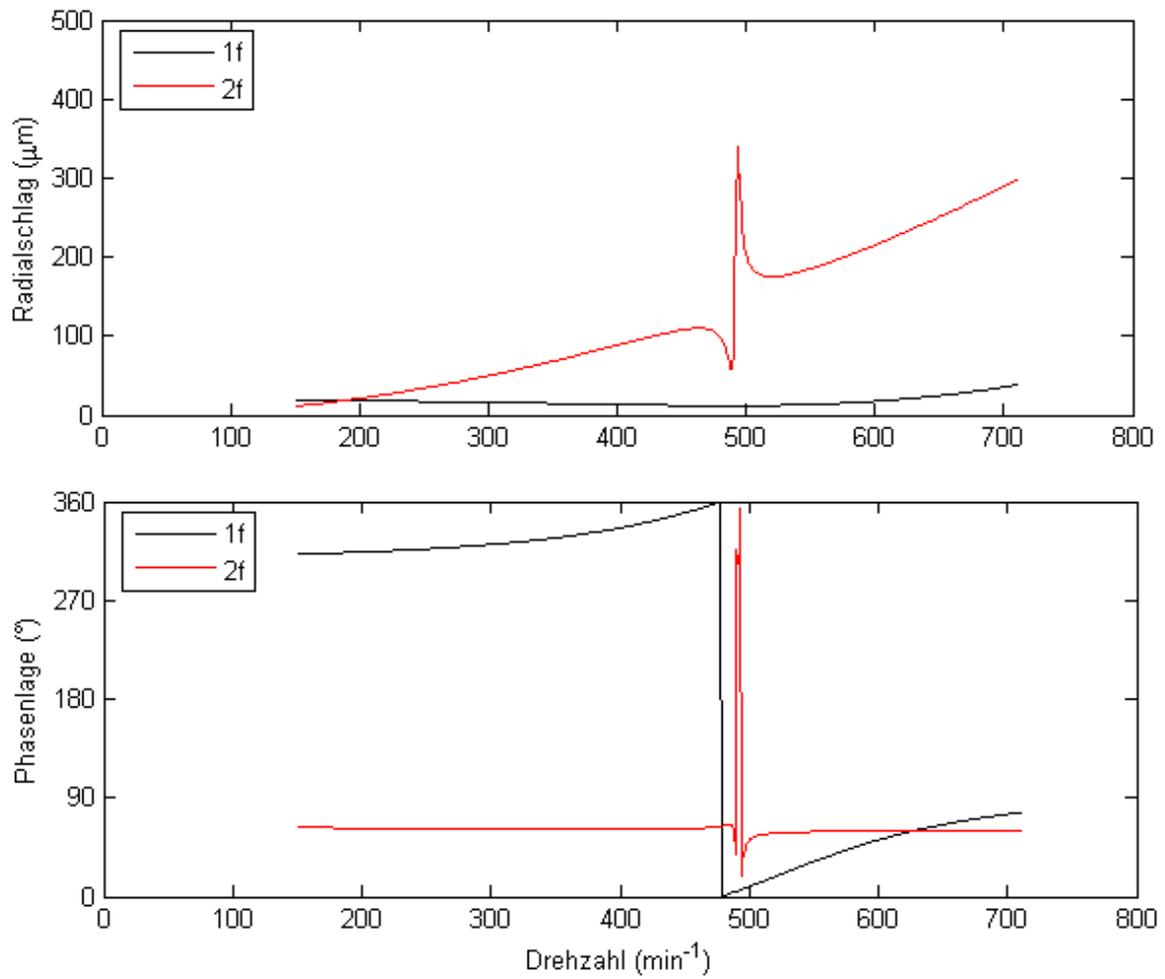


Abbildung 7.20 – berechneten Ergebnisse hinsichtlich Betrag und Phasenlage der Radialschläge in Abhängigkeit von der Drehzahl

## 8 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Die Zielsetzung dieser Diplomarbeit war die Erarbeitung einer Analysesoftware zur Berechnung des Schwingungsverhalten von Papierleitwalzen und zur Berechnung einer optimalen Aufspannung für die Bearbeitung an der Drehmaschine. Von dem Berechnungsprogramm gewisse Nebenbedingungen zu erfüllen. Unter anderem sollen die gemessenen Daten des Walzenrohling automatisch eingelesen werden können und eine möglichst einfache Kommunikation mit dem Benutzer möglich sein. Zudem sind kurze Rechenzeiten zu erreichen, damit das System in der Fertigung wirtschaftlich eingesetzt werden kann.

Um alle diese Anforderungen erfüllen zu können, war es anfangs notwendig, die einzelnen Phänomene und Problemstellungen getrennt voneinander zu betrachten und entsprechende Modelle und Berechnungsverfahren zu erarbeiten, die zugleich einfach und effizient sind. Als Programmplattform erschien das Softwarepaket MATLAB am geeignetsten, vor allem auch aufgrund seiner Zusatzfunktionen wie der Optimization Toolbox oder der Möglichkeit zum einfachen Erstellen einer grafischen Benutzeroberfläche.

Für die Beschreibung des Phänomens der Resonanz bei halber biegekritischer Drehzahl aufgrund der Steifigkeitsanisotropie des Rotors stehen verschiedene Modelle zur Verfügung, so zum Beispiel der LAVAL-Rotor mit anisotroper Welle. Die Herausforderung bestand darin, eine Modell zu finden bzw. zu konzipieren, das nicht nur das Phänomen beschreiben, sondern die auftretenden doppelt drehfrequenten Schwingungen realitätsnah berechnen kann. Aus diesem Grunde war es naheliegend, die Walze mit finiten Wellenelementen nach BERNOULLI bzw. TIMOSHENKO zu modellieren. Um die radiale Steifigkeitsanisotropie und deren unterschiedliche Orientierung entlang der Rotorachse zu berücksichtigen, wurden die Ansätze nach BERNOULLI bzw. TIMOSHENKO um die Theorie der Schiefen Biegung erweitert. Die Berechnung der Querschnittsparameter der finiten Wellenabschnitte erfolgt durch einen Algorithmus, der auf der Modellierung des rohrförmigen Walzenquerschnitts durch Polygonzüge und deren Zerlegung in Dreiecke basiert. Zur Berechnung der Querschnittsverformung, der sogenannten Ovalisierung, und deren Einfluss auf das doppel frequente Signal wurde das Walzenrohr mit finiten Hexaederelementen angenähert. Für die Optimierung wurde die Walze in einfacher Weise als Biegebalken modelliert und eine entsprechende Zielfunktion definiert.

Die einzelnen Modelle wurden anschließend mit dem bereits erwähnten Softwarepaket MATLAB zusammengeführt und implementiert. Für die Optimierung wird dabei die Optimization Toolbox verwendet. Das Programmpaket trägt den Namen ‚Roll Analyzer‘ und wird über eine grafische Benutzeroberfläche bedient. Es ermöglicht die Eingabe der Hauptabmessungen der Walze, das automatische Einlesen der Messwerte aus einer Datei, die Berechnung der Radialschläge und der Unwucht sowie die Berücksichtigung von Wuchtmassen. Darüber hinaus können Elastizitätsmodul, Dämpfungsparameter und Lagersteifigkeit variiert werden.

Die bisherigen Ergebnisse sind vielversprechend. Aufgrund der Tatsache, dass nur wenige Walzen für die Überprüfung zur Verfügung standen, ist eine weitere Validierung notwendig.

Die Modelle unterliegen verschiedenen Annahmen, wie zum Beispiel linear-elastisches Verhalten, homogener Werkstoff und isotrope Lagersteifigkeit. In diesem Sinne ergeben sich eine Reihe von Fragestellungen, die Gegenstand weiterführender Untersuchungen sein können:

– ***Anisotrope Lagersteifigkeit***

Ist die Lagersteifigkeit in horizontaler und vertikaler Richtung unterschiedlich, so ergeben sich gewisse Phänomene, wie dem sogenannten „Doppelpeak“ bei halber biegekritischer Drehzahl.

– ***Inhomogener Werkstoff***

Bei geschweißten Walzenrohren ist es naheliegend, dass die Schweißnaht andere Festigkeitswerte als der Rest der Walze aufweisen kann. Bei Schleudergussrohren erhält man wiederum an der Außenseite des Walzenrohrlings ein anderes Werkstoffgefüge als an der Innenseite. Eine Untersuchung hinsichtlich des Einflusses dieser Faktoren wäre zu überlegen.

Zusammenfassend liegt ein kompaktes Programmpaket mit vielfältigen Einstellmöglichkeiten vor, welches das stationäre Schwingungsverhalten von anisotropen Papierleitwalzen mit verhältnismäßig geringem Rechenaufwand berechnen kann.

## A ANHANG

### A.1 Quellenverzeichnis

- [1] **Bathe K-J.** *Finite-Elemente-Methoden*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2002.
- [2] **Benker H.** *Mathematische Optimierung mit Computeralgebrasystemen*. Berlin Heidelberg : Springer Verlag, 2003.
- [3] **Boru, F. E.** *Numerical and Experimental Response and Stability Investigations of Anisotropic Rotor-Bearing Systems*. Dissertation, Universität Kassel, 2010.
- [4] **Dresig H. und Holzweißig F.** *Maschinendynamik*. 9. Auflage. Berlin : Springer Verlag, 2009.
- [5] **Fröhlich D. und Kessel S.** *Eldorado - Ressourcen aus und für Lehre, Studium und Forschung*. 2003. (gelesen am: 7. 12 2010)  
<https://eldorado.tu-dortmund.de/handle/2003/21590>.
- [6] **Gasch R., Nordmann R. und Pfützner H.** *Rotordynamik*. korrigierter Nachdruck. Berlin, Heidelberg New York : SpringerVerlag, 2006.
- [7] **Jürgler R.** *Maschinendynamik: Lehrbuch mit Beispielen*. Berlin Heidelberg : Springer Verlag, 2004.
- [8] **Kattan P.** *MATLAB guide to finite elements: an interactive approach*. Berlin Heidelberg New York : Springer Verlag, 2008.
- [9] **Lagarias J. C. et al.** Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. *SIAM Journal of Optimization*. 1998, Vol. 9 Number 1.
- [10] **Malta, J.** *Investigation of Anisotropic Rotor with Different Shaft Orientation*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2009.
- [1] **Merkel M. und Öchsner A.** *Eindimensionale Finite Elemente: Ein Einstieg in die Methode*. Heidelberg Dordrecht London New York : Springer Verlag, 2010.
- [12] **Merziger G. und Wirt, T.** *Repetitorium der höheren Mathematik*. 4. Hannover : Binomi Verlag, 2002.
- [13] **Nasdala L.** *FEM-Formelsammlung in Statik und Dynamik*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner-Verlag, 2010.
- [14] **Richard H. und Sander M.** *Technische Mechanik. Festigkeitslehre*. 2. Auflage. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag, 2008.
- [15] **Rieg F. und Hackenschmidt R.** *Finite Elemente Analyse für Ingenieure - Eine leicht verständliche Einführung*. 3. Auflage. München Wien : Carl Hanser Verlag, 2009.
- [16] **Springer, H.** *Skriptum zur Vorlesung Maschinendynamik*. Wien : Technische Universität Wien, Institut für Mechanik und Mechatronik, 2008.
- [17] **Wriggers P. et al.** *Technische Mechanik kompakt*. 2. Auflage. Stuttgart : Teubner Verlag, 2006.
- [18] **Norm DIN ISO 1925.** *Mechanische Schwingungen - Auswuchttechnik - Begriffe*. 2002.
- [19] **MathWorks Product Documentation**. (gelesen am: 18. 06 2011)  
<http://www.mathworks.com/help/techdoc/math/bsotu2d.html#bsgppq6p-11>.

## A.2 Transformation zwischen fixem und rotierendem Koordinatensystem

Das rotierende Koordinatensystem  $(\eta, \zeta)$  ist gegenüber dem raumfesten Koordinatensystem  $(y, z)$  zu einer bestimmten Zeit  $t$  um den Winkel  $\Omega t$  verdreht. Der in Abbildung 8.1 dargestellte Punkt  $P$  hat den Abstand  $r$  vom Nullpunkt und einen Winkel  $\alpha$  zur  $\zeta$ -Achse des rotierenden Koordinatensystems.

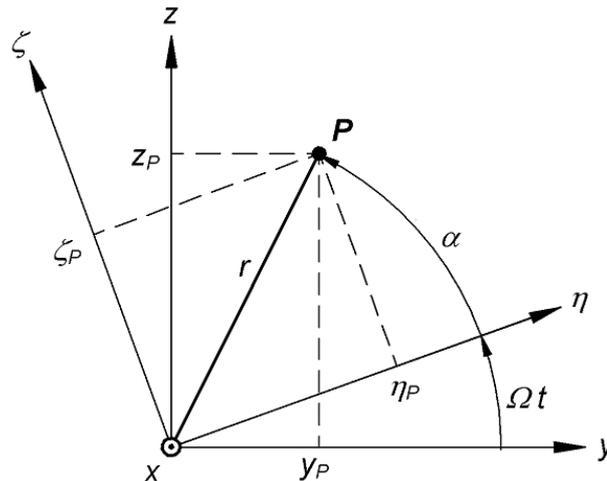


Abbildung 8.1 – Punkt  $P$  im raumfesten und rotierenden Koordinatensystem

Die Lage von Punkt  $P$  kann sowohl im  $yz$ - als auch im  $\eta\zeta$ -System beschrieben werden durch

raumfest	$y_p = r \cos(\alpha + \Omega t)$
	$z_p = r \sin(\alpha + \Omega t),$
rotierend	$\eta_p = r \cos(\alpha)$
	$\zeta_p = r \sin(\alpha) .$

Durch Anwendung der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen(vgl. [2])

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

erhält man die Transformationsformel vom rotierenden in das raumfeste Koordinatensystem

$$\begin{aligned} y_p &= \eta_p \cos(\Omega t) - \zeta_p \sin(\Omega t) \\ z_p &= \eta_p \sin(\Omega t) + \zeta_p \cos(\Omega t) . \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Bei Einführung einer (2x2)-Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

lautet Glg. (A.2) in Matrixschreibweise

$$\mathbf{x}^{(f)} = \mathbf{T}\mathbf{x}^{(r)} \rightarrow \begin{bmatrix} y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_p \\ \zeta_p \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Sinngemäß gilt für die Transformation vom raumfesten in das rotierende Koordinatensystem

$$\mathbf{x}^{(r)} = \mathbf{T}^T \mathbf{x}^{(f)}. \quad (\text{A.5})$$

Durch einmaliges und zweimaliges Differenzieren von (A.5) nach der Zeit erhält man

$$\dot{\mathbf{x}}^{(f)} = \dot{\mathbf{T}}\mathbf{x}^{(r)} + \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}^{(r)} \quad (\text{A.6})$$

$$\ddot{\mathbf{x}}^{(f)} = \underbrace{\ddot{\mathbf{T}}\mathbf{x}^{(r)}}_{\text{Führungsbeschleunigung}} + \underbrace{2\dot{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{x}}^{(r)}}_{\text{Coriolisbeschleunigung}} + \underbrace{\mathbf{T}\ddot{\mathbf{x}}^{(r)}}_{\text{Relativbeschleunigung}}. \quad (\text{A.7})$$

Die ersten beiden Ableitungen der Transformationsmatrix ergeben sich zu

$$\dot{\mathbf{T}} = -\Omega \begin{bmatrix} \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \\ -\cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{T}} = -\Omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

### A.3 Elementmatrizen nach EULER-BERNOULLI

Da in diesem Kapitel die Beschreibung der Koeffizienten und Matrizen auf ein FE beschränkt ist, wird zugunsten der Übersichtlichkeit auf den Index  $j$  verzichtet.

#### Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \frac{156}{420} \rho A l & m_4 &= \frac{13}{420} \rho A l^2 \\
 m_2 &= \frac{22}{420} \rho A l^2 & m_5 &= \frac{4}{420} \rho A l^3 \\
 m_3 &= \frac{54}{420} \rho A l & m_6 &= \frac{3}{420} \rho A l^3
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{12EI_\zeta}{l^3} & k_5 &= \frac{12EI_\eta}{l^3} & k_9 &= \frac{12EI_{\eta\zeta}}{l^3} \\
 k_2 &= \frac{6EI_\zeta}{l^2} & k_6 &= \frac{6EI_\eta}{l^2} & k_{10} &= \frac{6EI_{\eta\zeta}}{l^2} \\
 k_3 &= \frac{4EI_\zeta}{l} & k_7 &= \frac{4EI_\eta}{l} & k_{11} &= \frac{4EI_{\eta\zeta}}{l} \\
 k_4 &= \frac{2EI_\zeta}{l} & k_8 &= \frac{2EI_\eta}{l} & k_{12} &= \frac{2EI_{\eta\zeta}}{l}
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

#### Massenmatrix des finiten Wellenelements nach EULER-BERNOULLI

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & m_2 & m_3 & 0 & 0 & -m_4 \\ & m_1 & -m_2 & 0 & 0 & m_3 & m_4 & 0 \\ & & m_5 & 0 & 0 & -m_4 & -m_6 & 0 \\ & & & m_5 & m_4 & 0 & 0 & -m_6 \\ & & & & m_1 & 0 & 0 & -m_2 \\ & & & & & m_1 & m_2 & 0 \\ \text{symm.} & & & & & & m_5 & 0 \\ & & & & & & & m_5 \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

#### Steifigkeitsmatrix des finiten Wellenelements nach EULER-BERNOULLI

$$\mathbf{K}_B = \begin{bmatrix} k_1 & -k_9 & k_{10} & k_2 & -k_1 & k_9 & k_{10} & k_2 \\ & k_5 & -k_6 & -k_{10} & k_9 & -k_5 & -k_6 & -k_{10} \\ & & k_7 & k_{11} & -k_{10} & k_6 & k_8 & k_{12} \\ & & & k_3 & -k_2 & k_{10} & k_{12} & k_4 \\ & & & & k_1 & -k_9 & -k_{10} & -k_2 \\ & & & & & k_5 & k_6 & k_{10} \\ \text{symm.} & & & & & & k_7 & k_{11} \\ & & & & & & & k_3 \end{bmatrix} \tag{A.12}$$

**Matrizen aufgrund der Transformation in das rotierende Koordinatensystem**

$$\mathbf{M}_{B2} = 2\Omega \begin{bmatrix} m_1 & -m_1 & m_2 & 0 & 0 & -m_3 & -m_4 & 0 \\ m_1 & 0 & 0 & m_2 & m_3 & 0 & 0 & -m_4 \\ -m_2 & 0 & 0 & -m_5 & -m_4 & 0 & 0 & m_6 \\ 0 & -m_2 & m_5 & 0 & 0 & -m_4 & -m_6 & 0 \\ 0 & -m_3 & m_4 & 0 & 0 & -m_1 & -m_2 & 0 \\ m_3 & 0 & 0 & m_4 & m_1 & 0 & 0 & -m_2 \\ m_4 & 0 & 0 & m_6 & m_2 & 0 & 0 & -m_5 \\ 0 & m_4 & -m_6 & 0 & 0 & m_2 & m_5 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{M}_{B3} = -\Omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & m_2 & m_3 & 0 & 0 & -m_4 \\ & m_1 & -m_2 & 0 & 0 & m_3 & m_4 & 0 \\ & & m_5 & 0 & 0 & -m_4 & -m_6 & 0 \\ & & & m_5 & m_4 & 0 & 0 & -m_6 \\ & & & & m_1 & 0 & 0 & -m_2 \\ & & & & & m_1 & m_2 & 0 \\ & & & & & & m_5 & 0 \\ & & & & & & & m_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

*symm.*

## A.4 Elementmatrizen nach TIMOSHENKO

Da in diesem Kapitel die Beschreibung der Koeffizienten und Matrizen auf ein FE beschränkt ist, wird zugunsten der Übersichtlichkeit auf den Index  $j$  verzichtet. Zudem bietet es sich an, folgende Variablen einzuführen:

$$a_\eta = \frac{12EI_\zeta}{\kappa GAI^2}, \quad a_\zeta = \frac{12EI_\eta}{\kappa GAI^2}, \quad b_\eta = \frac{I_\zeta}{AI^2}, \quad b_\zeta = \frac{I_\eta}{AI^2} \quad (\text{A.15})$$

### Koeffizienten

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\rho AI}{(1+a_\eta)^2} \left[ \left( \frac{13}{35} + \frac{6}{5}b_\eta \right) + \frac{7}{10}a_\eta + \frac{1}{3}a_\eta^2 \right] \\ m_2 &= \frac{\rho AI^2}{(1+a_\eta)^2} \left[ \left( \frac{11}{210} + \frac{1}{10}b_\eta \right) + \left( \frac{11}{120} - \frac{1}{2}b_\eta \right)a_\eta + \frac{1}{24}a_\eta^2 \right] \\ m_3 &= \frac{\rho AI}{(1+a_\eta)^2} \left[ \left( \frac{9}{70} - \frac{6}{5}b_\eta \right) + \frac{3}{10}a_\eta + \frac{1}{6}a_\eta^2 \right] \\ m_4 &= \frac{\rho AI^2}{(1+a_\eta)^2} \left[ \left( \frac{13}{420} - \frac{1}{10}b_\eta \right) + \left( \frac{3}{40} + \frac{1}{2}b_\eta \right)a_\eta + \frac{1}{24}a_\eta^2 \right] \\ m_5 &= \frac{\rho AI^3}{(1+a_\eta)^2} \left[ \left( \frac{1}{105} + \frac{2}{15}b_\eta \right) + \left( \frac{1}{60} + \frac{1}{6}b_\eta \right)a_\eta + \left( \frac{1}{120} + \frac{1}{3}b_\eta \right)a_\eta^2 \right] \\ m_6 &= \frac{\rho AI^3}{(1+a_\eta)^2} \left[ \left( \frac{1}{140} + \frac{1}{30}b_\eta \right) + \left( \frac{1}{60} + \frac{1}{6}b_\eta \right)a_\eta + \left( \frac{1}{120} - \frac{1}{6}b_\eta \right)a_\eta^2 \right] \\ m_7 &= \frac{\rho AI}{(1+a_\zeta)^2} \left[ \left( \frac{13}{35} + \frac{6}{5}b_\zeta \right) + \frac{7}{10}a_\zeta + \frac{1}{3}a_\zeta^2 \right] \\ m_8 &= \frac{\rho AI^2}{(1+a_\zeta)^2} \left[ \left( \frac{11}{210} + \frac{1}{10}b_\zeta \right) + \left( \frac{11}{120} - \frac{1}{2}b_\zeta \right)a_\zeta + \frac{1}{24}a_\zeta^2 \right] \\ m_9 &= \frac{\rho AI}{(1+a_\zeta)^2} \left[ \left( \frac{9}{70} - \frac{6}{5}b_\zeta \right) + \frac{3}{10}a_\zeta + \frac{1}{6}a_\zeta^2 \right] \\ m_{10} &= \frac{\rho AI^2}{(1+a_\zeta)^2} \left[ \left( \frac{13}{420} - \frac{1}{10}b_\zeta \right) + \left( \frac{3}{40} + \frac{1}{2}b_\zeta \right)a_\zeta + \frac{1}{24}a_\zeta^2 \right] \\ m_{11} &= \frac{\rho AI^3}{(1+a_\zeta)^2} \left[ \left( \frac{1}{105} + \frac{2}{15}b_\zeta \right) + \left( \frac{1}{60} + \frac{1}{6}b_\zeta \right)a_\zeta + \left( \frac{1}{120} + \frac{1}{3}b_\zeta \right)a_\zeta^2 \right] \\ m_{12} &= \frac{\rho AI^3}{(1+a_\zeta)^2} \left[ \left( \frac{1}{140} + \frac{1}{30}b_\zeta \right) + \left( \frac{1}{60} + \frac{1}{6}b_\zeta \right)a_\zeta + \left( \frac{1}{120} - \frac{1}{6}b_\zeta \right)a_\zeta^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{12EI_\zeta}{(1+a_\eta)^3} & k_5 &= \frac{12EI_\eta}{(1+a_\zeta)^3} & k_9 &= \frac{12EI_{\eta\zeta}}{(1+a_\eta)(1+a_\zeta)^3} \\
k_2 &= \frac{6EI_\zeta}{(1+a_\eta)^2} & k_6 &= \frac{6EI_\eta}{(1+a_\zeta)^2} & k_{10} &= \frac{6EI_{\eta\zeta}}{(1+a_\eta)(1+a_\zeta)^2} \\
k_3 &= \frac{(4+a_\eta)EI_\zeta}{(1+a_\eta)l} & k_7 &= \frac{(4+a_\zeta)EI_\eta}{(1+a_\zeta)l} & k_{11} &= \frac{(4+a_\eta+a_\eta a_\zeta+a_\zeta)EI_{\eta\zeta}}{(1+a_\eta)(1+a_\zeta)l} \\
k_4 &= \frac{(2-a_\eta)EI_\zeta}{(1+a_\eta)l} & k_8 &= \frac{(2-a_\zeta)EI_\eta}{(1+a_\zeta)l} & k_{12} &= \frac{(-2+a_\eta+a_\eta a_\zeta+a_\zeta)EI_{\eta\zeta}}{(1+a_\eta)(1+a_\zeta)l}
\end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= \frac{\rho\Omega l_x}{l(1+a_\eta)(1+a_\zeta)} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\
g_2 &= \frac{\rho\Omega l_x}{(1+a_\eta)(1+a_\zeta)} \left[ \frac{1}{10} - \frac{1}{4}(a_\eta + a_\zeta) \right] \\
g_3 &= \frac{l\rho\Omega l_x}{(1+a_\eta)(1+a_\zeta)} \left[ \frac{1}{30} + \frac{1}{12}(a_\eta + a_\zeta) - \frac{1}{12}(a_\eta^2 + a_\zeta^2) \right] \\
g_4 &= \frac{l\rho\Omega l_x}{(1+a_\eta)(1+a_\zeta)} \left[ \frac{2}{15} + \frac{1}{12}(a_\eta + a_\zeta) + \frac{1}{6}(a_\eta^2 + a_\zeta^2) \right]
\end{aligned} \tag{A.18}$$

#### Massenmatrix des finiten Wellenelements nach TIMOSHENKO

$$\mathbf{M}_T = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & m_2 & m_3 & 0 & 0 & -m_4 \\ & m_7 & -m_8 & 0 & 0 & m_9 & m_{10} & 0 \\ & & m_{11} & 0 & 0 & -m_{10} & -m_{12} & 0 \\ & & & m_5 & m_4 & 0 & 0 & -m_6 \\ & & & & m_1 & 0 & 0 & -m_2 \\ & & & & & m_7 & m_8 & 0 \\ & & & & & & & m_{11} & 0 \\ & & & & & & & & m_5 \end{bmatrix} \tag{A.19}$$

*symm.*

#### Steifigkeitsmatrix des finiten Wellenelements nach TIMOSHENKO

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} k_1 & k_9 & -k_{10} & k_2 & -k_1 & -k_9 & -k_{10} & k_2 \\ & k_5 & -k_6 & k_{10} & -k_9 & -k_5 & -k_6 & k_{10} \\ & & k_7 & -k_{11} & k_{10} & k_6 & k_8 & k_{12} \\ & & & k_3 & -k_2 & -k_{10} & k_{12} & k_4 \\ & & & & k_1 & k_9 & k_{10} & -k_2 \\ & & & & & k_5 & k_6 & -k_{10} \\ & & & & & & k_7 & -k_{11} \\ & & & & & & & k_3 \end{bmatrix} \tag{A.20}$$

*symm.*

## Gyroskopiematrix des finiten Wellenelements nach TIMOSHENKO

$$\mathbf{G}_T = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & -g_2 & 0 & 0 & -g_1 & -g_2 & 0 \\ -g_1 & 0 & 0 & -g_2 & g_1 & 0 & 0 & -g_2 \\ g_2 & 0 & 0 & g_4 & -g_2 & 0 & 0 & -g_3 \\ 0 & g_2 & -g_4 & 0 & 0 & -g_2 & g_3 & 0 \\ 0 & -g_1 & g_2 & 0 & 0 & g_1 & g_2 & 0 \\ g_1 & 0 & 0 & g_2 & -g_1 & 0 & 0 & g_2 \\ g_2 & 0 & 0 & -g_3 & -g_2 & 0 & 0 & g_4 \\ 0 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & -g_2 & -g_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

## Matrizen aufgrund der Transformation in das rotierende Koordinatensystem

$$\mathbf{M}_{T2} = 2\Omega \begin{bmatrix} 0 & -m_1 & m_2 & 0 & 0 & -m_3 & -m_4 & 0 \\ m_7 & 0 & 0 & m_8 & m_9 & 0 & 0 & -m_{10} \\ -m_8 & 0 & 0 & -m_{11} & -m_{10} & 0 & 0 & m_{12} \\ 0 & -m_2 & m_5 & 0 & 0 & -m_4 & -m_6 & 0 \\ 0 & -m_3 & m_4 & 0 & 0 & -m_1 & -m_2 & 0 \\ m_9 & 0 & 0 & m_{10} & m_7 & 0 & 0 & -m_8 \\ m_{10} & 0 & 0 & m_{12} & m_8 & 0 & 0 & -m_{11} \\ 0 & m_4 & -m_6 & 0 & 0 & m_2 & m_5 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{M}_{T3} = -\Omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & m_2 & m_3 & 0 & 0 & -m_4 \\ & m_7 & -m_8 & 0 & 0 & m_9 & m_{10} & 0 \\ & & m_{11} & 0 & 0 & -m_{10} & -m_{12} & 0 \\ & & & m_5 & m_4 & 0 & 0 & -m_6 \\ & & & & m_1 & 0 & 0 & -m_2 \\ & & & & & m_7 & m_8 & 0 \\ & & & & & & m_{11} & 0 \\ & & & & & & & m_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

*symm*

$$\mathbf{G}_{T2} = \Omega \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & g_2 & -g_1 & 0 & 0 & g_2 \\ & g_1 & -g_2 & 0 & 0 & -g_1 & -g_2 & 0 \\ & & g_4 & 0 & 0 & g_2 & -g_3 & 0 \\ & & & g_4 & -g_2 & 0 & 0 & -g_3 \\ & & & & g_1 & 0 & 0 & -g_2 \\ & & & & & g_1 & g_2 & 0 \\ & & & & & & g_4 & 0 \\ & & & & & & & g_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

*symm.*

### A.5 Grafische Benutzeroberfläche

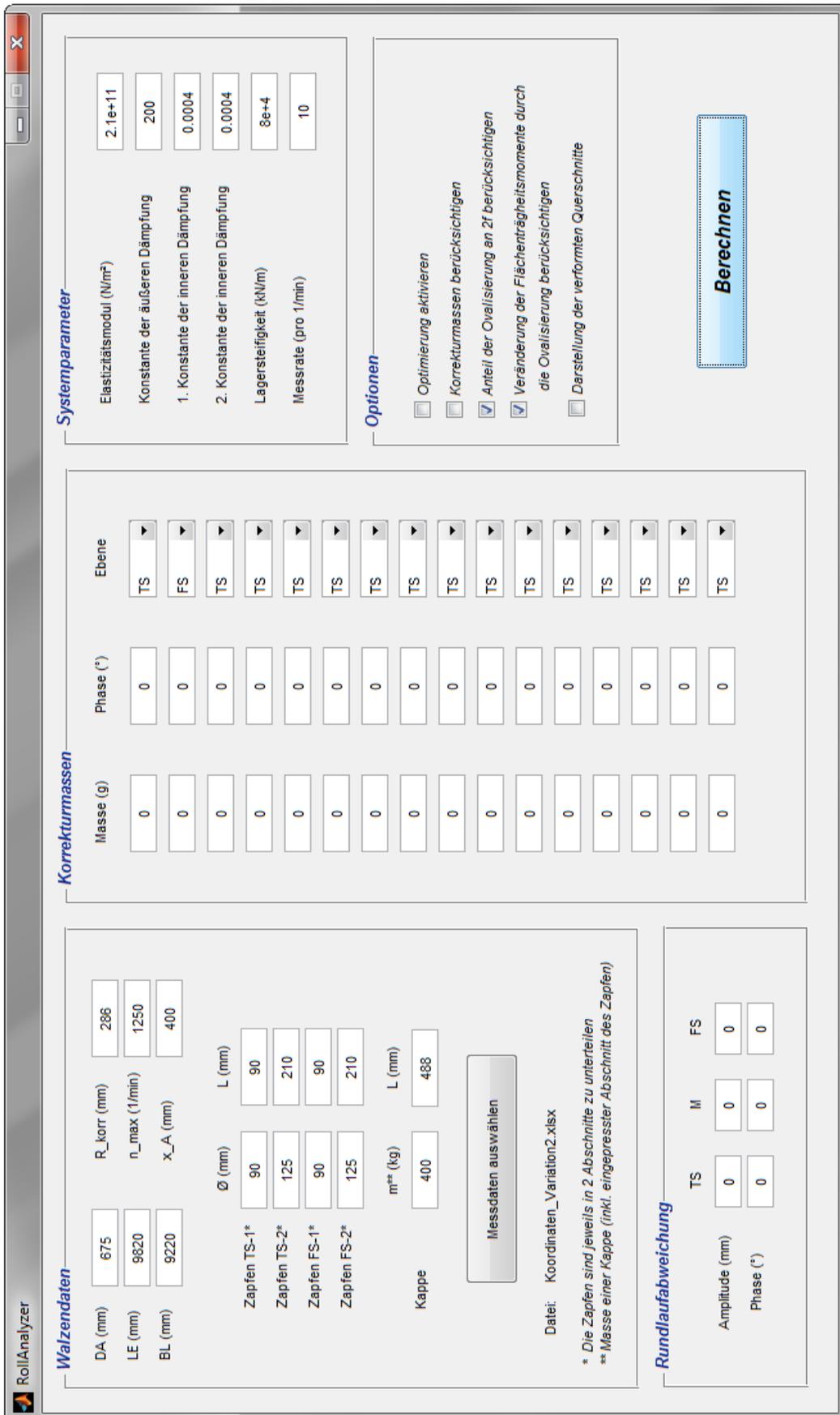


Abbildung 8.2 – Eingabefenster von RollAnalyzer

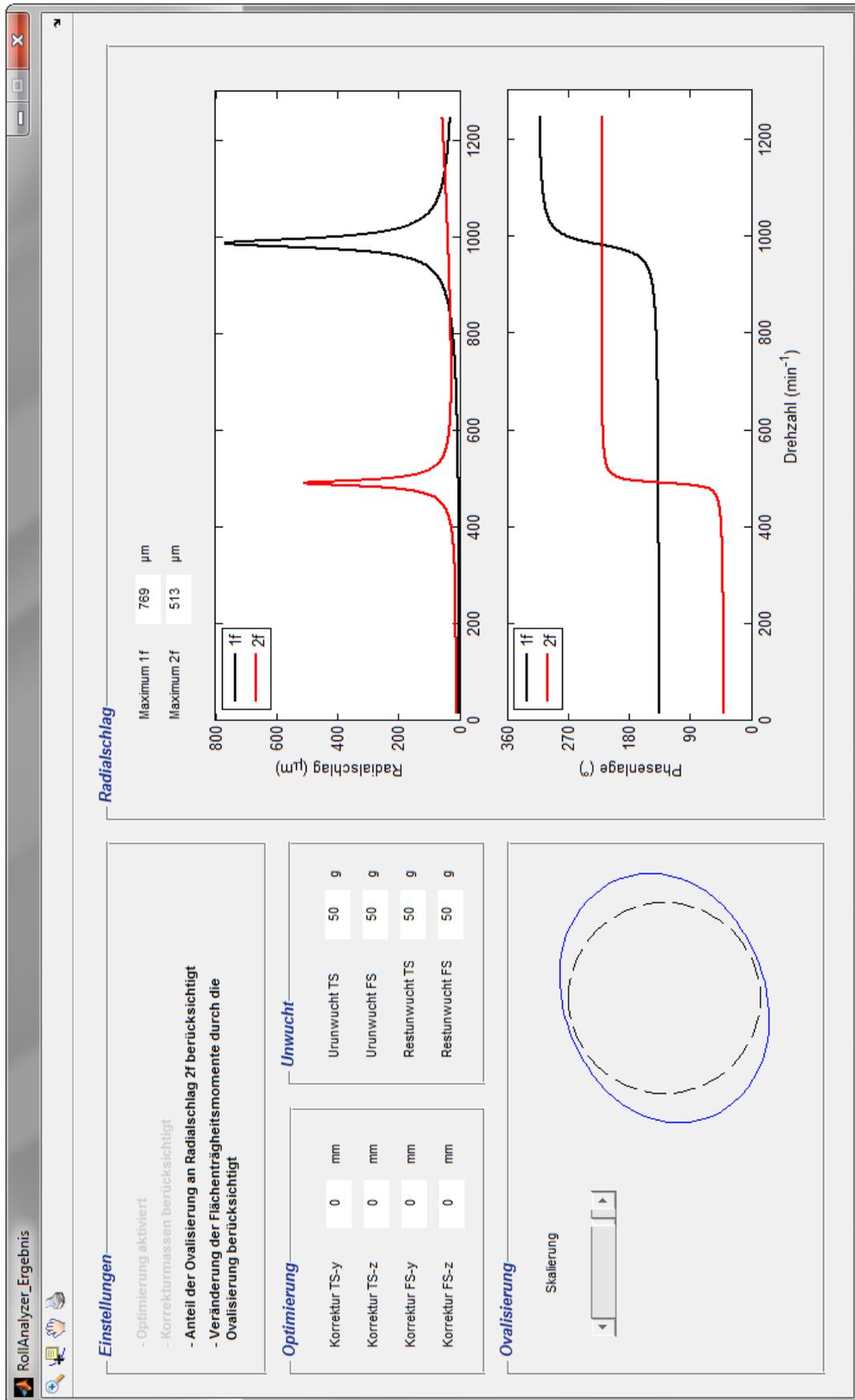


Abbildung 8.3 – Standard-Ausgabefenster von RollAnalyzer

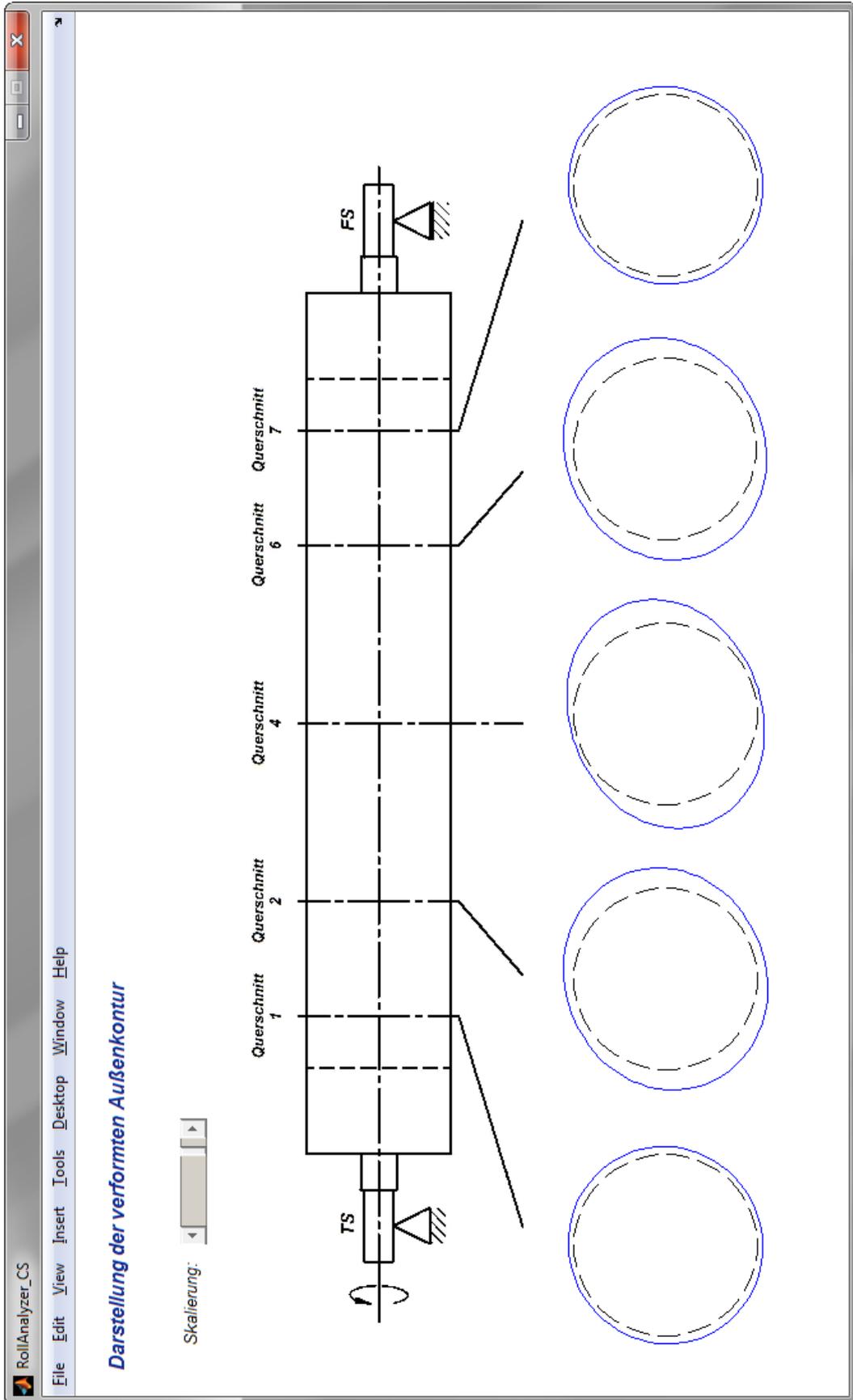


Abbildung 8.4 – Ausgabefenster von RollAnalyzer zur Darstellung der Querschnittsverformung





```

%----- Rundlaufabweichung -----
AmplitudeRL_TS = 1e-3*str2double(get(handles.e_AmplitudeRL_TS, 'String'));
AmplitudeRL_M  = 1e-3*str2double(get(handles.e_AmplitudeRL_M, 'String'));
AmplitudeRL_FS = 1e-3*str2double(get(handles.e_AmplitudeRL_FS, 'String'));
PhaseRL_TS     = pi/180*str2double(get(handles.e_PhaseRL_TS, 'String'));
PhaseRL_M      = pi/180*str2double(get(handles.e_PhaseRL_M, 'String'));
PhaseRL_FS     = pi/180*str2double(get(handles.e_PhaseRL_FS, 'String'));

%----- Wuchtmassen -----
if handles.Korrekturmassen_aktiv == 1

    m_1 = 1e-3*str2double(get(handles.e_m_1, 'String'));
    m_2 = 1e-3*str2double(get(handles.e_m_2, 'String'));
    m_3 = 1e-3*str2double(get(handles.e_m_3, 'String'));
    m_4 = 1e-3*str2double(get(handles.e_m_4, 'String'));
    m_5 = 1e-3*str2double(get(handles.e_m_5, 'String'));
    m_6 = 1e-3*str2double(get(handles.e_m_6, 'String'));
    m_7 = 1e-3*str2double(get(handles.e_m_7, 'String'));
    m_8 = 1e-3*str2double(get(handles.e_m_8, 'String'));
    m_9 = 1e-3*str2double(get(handles.e_m_9, 'String'));
    m_10 = 1e-3*str2double(get(handles.e_m_10, 'String'));
    m_11 = 1e-3*str2double(get(handles.e_m_11, 'String'));
    m_12 = 1e-3*str2double(get(handles.e_m_12, 'String'));
    m_13 = 1e-3*str2double(get(handles.e_m_13, 'String'));
    m_14 = 1e-3*str2double(get(handles.e_m_14, 'String'));
    m_15 = 1e-3*str2double(get(handles.e_m_15, 'String'));
    m_16 = 1e-3*str2double(get(handles.e_m_16, 'String'));
    phase_1 = round(str2double(get(handles.e_phase_1, 'String'))/5)*5;
    phase_2 = round(str2double(get(handles.e_phase_2, 'String'))/5)*5;
    phase_3 = round(str2double(get(handles.e_phase_3, 'String'))/5)*5;
    phase_4 = round(str2double(get(handles.e_phase_4, 'String'))/5)*5;
    phase_5 = round(str2double(get(handles.e_phase_5, 'String'))/5)*5;
    phase_6 = round(str2double(get(handles.e_phase_6, 'String'))/5)*5;
    phase_7 = round(str2double(get(handles.e_phase_7, 'String'))/5)*5;
    phase_8 = round(str2double(get(handles.e_phase_8, 'String'))/5)*5;
    phase_9 = round(str2double(get(handles.e_phase_9, 'String'))/5)*5;
    phase_10 = round(str2double(get(handles.e_phase_10, 'String'))/5)*5;
    phase_11 = round(str2double(get(handles.e_phase_11, 'String'))/5)*5;
    phase_12 = round(str2double(get(handles.e_phase_12, 'String'))/5)*5;
    phase_13 = round(str2double(get(handles.e_phase_13, 'String'))/5)*5;
    phase_14 = round(str2double(get(handles.e_phase_14, 'String'))/5)*5;
    phase_15 = round(str2double(get(handles.e_phase_15, 'String'))/5)*5;
    phase_16 = round(str2double(get(handles.e_phase_16, 'String'))/5)*5;

    P_KM = [m_1 phase_1 handles.KE_1;
            m_2 phase_2 handles.KE_2;
            m_3 phase_3 handles.KE_3;
            m_4 phase_4 handles.KE_4;
            m_5 phase_5 handles.KE_5;
            m_6 phase_6 handles.KE_6;
            m_7 phase_7 handles.KE_7;
            m_8 phase_8 handles.KE_8;
            m_9 phase_9 handles.KE_9;
            m_10 phase_10 handles.KE_10;
            m_11 phase_11 handles.KE_11;
            m_12 phase_12 handles.KE_12;
            m_13 phase_13 handles.KE_13;
            m_14 phase_14 handles.KE_14;
            m_15 phase_15 handles.KE_15;
            m_16 phase_16 handles.KE_16];
else

    P_KM = zeros(16,3);
    P_KM(:,3) = 1;

end

```

```

%
%
%           EINLESEN UND BERECHNEN DER GLOBALEN KOORDINATEN
%
KO_Messung = zeros(m_P,4*m_E);

%----- Koordinaten der äußeren Polygonzüge (für jede Ebene) -----

for i = 1:m_P
    KO_Messung(i,[3,7,11,15,19,23,27]) = DA/2*cos((i-1)*2*pi/m_P);
    KO_Messung(i,[4,8,12,16,20,24,28]) = -DA/2*sin((i-1)*2*pi/m_P);
end

%----- Koordinaten der inneren Polygonzüge (für jede Ebene) -----

KO_Messung(1:m_P,1:2) = xlsread(fullfile(handles.Dateipfad,...
    handles.Dateiname),1,'B3:C74');
KO_Messung(1:m_P,5:6) = xlsread(fullfile(handles.Dateipfad,...
    handles.Dateiname),1,'D3:E74');
KO_Messung(1:m_P,9:10) = xlsread(fullfile(handles.Dateipfad,...
    handles.Dateiname),1,'F3:G74');
KO_Messung(1:m_P,13:14) = xlsread(fullfile(handles.Dateipfad,...
    handles.Dateiname),1,'H3:I74');
KO_Messung(1:m_P,17:18) = xlsread(fullfile(handles.Dateipfad,...
    handles.Dateiname),1,'J3:K74');
KO_Messung(1:m_P,21:22) = xlsread(fullfile(handles.Dateipfad,...
    handles.Dateiname),1,'L3:M74');
KO_Messung(1:m_P,25:26) = xlsread(fullfile(handles.Dateipfad,...
    handles.Dateiname),1,'N3:O74');

%
%
%           OPTIMIERUNG
%

if handles.Optimierung_aktiv == 1

%----- Einstellungen bez. der Optimierung -----

Startwert      = [0 0 0 0];
Toleranz_Korrektur = 1e-8;
Toleranz_Unwucht  = 1e-6;
options = optimset;
options = optimset(options,'Display','off');
options = optimset(options,'TolFun',Toleranz_Unwucht);
options = optimset(options,'TolX',Toleranz_Korrektur);

%----- Minimierung der Lagerreaktionen -----

[delta_Optimum,~,~,~] = fminsearch(@Unwucht_absolut,Startwert,options);

%----- Berechnung der y-z-Koordinaten im Optimum -----

x_E = (LE-BL)/2 + L_K + L_j/2*[1 3 5 6 7 9 11];

for j = 1:7
    e1 = j*4-3;
    e2 = j*4-2;
    delta_y = delta_Optimum(1)*(x_B-x_E(j))/(x_B-x_A)+...
        delta_Optimum(2)*(x_E(j)-x_A)/(x_B-x_A);
    delta_z = delta_Optimum(3)*(x_B-x_E(j))/(x_B-x_A)+...
        delta_Optimum(4)*(x_E(j)-x_A)/(x_B-x_A);
    KO_Messung(:,e1) = KO_Messung(:,e1) + delta_y;
    KO_Messung(:,e2) = KO_Messung(:,e2) + delta_z;
end
else delta_Optimum = zeros(4,1);
end

```



```

for j = 1:6
    e1 = j + 4;
    e2 = j*4-3;
    e3 = j*4;
    KO_j = KO_Biegeschwingung(:,e2:e3);
    P_FE(e1,3:9) = Querschnitt_allgemein(KO_j,m_P);
    P_FE(e1,1) = kappa_2;
    P_FE(e1,2) = L_j;
end

P_FE(11,:) = [kappa_1 L_K   A_K   2*I_K   I_K   I_K   0 0 0];
P_FE(12,:) = [kappa_1 L_FS3 A_FS3 2*I_FS3 I_FS3 I_FS3 0 0 0];
P_FE(13,:) = [kappa_1 L_FS2 A_FS2 2*I_FS2 I_FS2 I_FS2 0 0 0];
P_FE(14,:) = [kappa_1 L_FS1 A_FS1 2*I_FS1 I_FS1 I_FS1 0 0 0];

%----- Berücksichtigung der Rundlaufabweichung -----

x_E = (LE-BL)/2 + L_K + L_j/2*[1 3 5 6 7 9 11];
x_M = LE/2;

RL_TSy = AmplitudeRL_TS*cos(PhaseRL_TS);
RL_TSz = - AmplitudeRL_TS*sin(PhaseRL_TS);
RL_My = AmplitudeRL_M*cos(PhaseRL_M);
RL_Mz = - AmplitudeRL_M*sin(PhaseRL_M);
RL_FSy = AmplitudeRL_FS*cos(PhaseRL_FS);
RL_FSz = - AmplitudeRL_FS*sin(PhaseRL_FS);

P_FE(4,8) = P_FE(4,8) + RL_TSy;
P_FE(4,9) = P_FE(4,9) + RL_TSz;
P_FE(5,8) = P_FE(5,8) + ...
    RL_TSy*(x_M-x_E(1))/(x_M-x_A)+RL_My*(x_E(1)-x_A)/(x_M-x_A);
P_FE(5,9) = P_FE(5,9) + ...
    RL_TSz*(x_M-x_E(1))/(x_M-x_A)+RL_Mz*(x_E(1)-x_A)/(x_M-x_A);
P_FE(6,8) = P_FE(6,8) + ...
    RL_TSy*(x_M-x_E(2))/(x_M-x_A)+RL_My*(x_E(2)-x_A)/(x_M-x_A);
P_FE(6,9) = P_FE(6,9) + ...
    RL_TSz*(x_M-x_E(2))/(x_M-x_A)+RL_Mz*(x_E(2)-x_A)/(x_M-x_A);
P_FE(7,8) = P_FE(7,8) + ...
    RL_TSy*(x_M-x_E(3))/(x_M-x_A)+RL_My*(x_E(3)-x_A)/(x_M-x_A);
P_FE(7,9) = P_FE(7,9) + ...
    RL_TSz*(x_M-x_E(3))/(x_M-x_A)+RL_Mz*(x_E(3)-x_A)/(x_M-x_A);
P_FE(8,8) = P_FE(8,8) + ...
    RL_My*(x_B-x_E(5))/(x_B-x_M)+RL_FSy*(x_E(5)-x_M)/(x_B-x_M);
P_FE(8,9) = P_FE(8,9) + ...
    RL_Mz*(x_B-x_E(5))/(x_B-x_M)+RL_FSz*(x_E(5)-x_M)/(x_B-x_M);
P_FE(9,8) = P_FE(9,8) + ...
    RL_My*(x_B-x_E(6))/(x_B-x_M)+RL_FSy*(x_E(6)-x_M)/(x_B-x_M);
P_FE(9,9) = P_FE(9,9) + ...
    RL_Mz*(x_B-x_E(6))/(x_B-x_M)+RL_FSz*(x_E(6)-x_M)/(x_B-x_M);
P_FE(10,8) = P_FE(10,8) + ...
    RL_My*(x_B-x_E(7))/(x_B-x_M)+RL_FSy*(x_E(7)-x_M)/(x_B-x_M);
P_FE(10,9) = P_FE(10,9) + ...
    RL_Mz*(x_B-x_E(7))/(x_B-x_M)+RL_FSz*(x_E(7)-x_M)/(x_B-x_M);
P_FE(11,8) = P_FE(11,8) + RL_FSy;
P_FE(11,9) = P_FE(11,9) + RL_FSz;

```

```

%
%
%           DEFINITION DER SYSTEMMATRIZEN UND -VEKTOREN
%
K_T   = zeros(q);
M_T   = zeros(q);
M_T2  = zeros(q);
G_T   = zeros(q);
G_T2  = zeros(q);
D_a   = zeros(q);
D_a_T = zeros(q);
F_U   = zeros(q,1);
F_G   = zeros(q,1);
F_K   = zeros(q,1);

R_1f(n,1) = n/Messrate;
R_2f(n,1) = n/Messrate;

%
%
%           MASSEN-, STEIFIGKEITS- UND GYROSKOPIEMATRIZEN
%
for j = 1:n_FE
    e   = 4*j-3;
    f   = 4*j+4;
    kappa = P_FE(j,1);
    l    = P_FE(j,2);
    A    = P_FE(j,3);
    I_x  = P_FE(j,4);
    I_y  = P_FE(j,5);
    I_z  = P_FE(j,6);
    I_yz = P_FE(j,7);

    K_T(e:f,e:f) = K_T(e:f,e:f)...
                  +K_j_T(E,nu,kappa,l,A,I_y,I_z,I_yz);
    M_T(e:f,e:f) = M_T(e:f,e:f)...
                  +M_j_T(rho,E,nu,kappa,l,A,I_y,I_z);
    M_T2(e:f,e:f) = M_T2(e:f,e:f)...
                  +M_j_T2(rho,E,nu,kappa,l,A,I_y,I_z,omega);
    G_T(e:f,e:f) = G_T(e:f,e:f)...
                  +G_j_T(rho,E,nu,kappa,l,A,I_x,I_y,I_z,omega);
    G_T2(e:f,e:f) = G_T2(e:f,e:f)...
                  +G_j_T2(rho,E,nu,kappa,l,A,I_x,I_y,I_z,omega);

end

M_T3 = -omega^2*M_T; % (A.23)

%
%
%           DÄMPFUNGSMATRIZEN
%
%----- äußere Dämpfung -----
for j = 1:n_K
    e = 4*j-3;
    f = 4*j-2;
    D_a(e:f,e:f) = D_a(e:f,e:f) + [d_a,0;0,d_a]; % (3.68)
    D_a_T(e:f,e:f) = D_a_T(e:f,e:f) + [0,-d_a*omega;d_a*omega,0]; % (3.69)
end

%----- innere Dämpfung -----

D_i = d_m*M_T + d_k*K_T; % (3.71)

```

```

%
%
%                               UNWUCHT- UND SCHWERKRAFTANREGUNG
%
for j = 1:n_FE
    e = 4*j-3;
    f = 4*j+4;
    l = P_FE(j,2);
    A = P_FE(j,3);
    y = P_FE(j,8);
    z = P_FE(j,9);
    F_U(e:f) = F_U(e:f) + f_U(rho,l,A,y,z,omega);
    F_G(e:f) = F_G(e:f) + f_G(rho,l,A);
end

for i = 1:16
    switch P_KM(i,3)
    case 1
        F_K(13) = F_K(13) + P_KM(i,1)*R_korr*omega^2*cos(P_KM(i,2)*pi/180);
        F_K(14) = F_K(14) - P_KM(i,1)*R_korr*omega^2*sin(P_KM(i,2)*pi/180);
    case 2
        F_K(29) = F_K(29) + P_KM(i,1)*1.2*R_korr*omega^2*cos(P_KM(i,2)*pi/180);
        F_K(30) = F_K(30) - P_KM(i,1)*1.2*R_korr*omega^2*sin(P_KM(i,2)*pi/180);
    case 3
        F_K(45) = F_K(45) + P_KM(i,1)*R_korr*omega^2*cos(P_KM(i,2)*pi/180);
        F_K(46) = F_K(46) - P_KM(i,1)*R_korr*omega^2*sin(P_KM(i,2)*pi/180);
    end
end

%
%
%                               EINSPANNBEDINGUNGEN
%
% An den Knoten 2 und 14 gelenkig gelagert

K_T(5,5) = K_T(5,5) + K_Lager;
K_T(6,6) = K_T(6,6) + K_Lager;
K_T(53,53) = K_T(53,53) + K_Lager;
K_T(54,54) = K_T(54,54) + K_Lager;
y_mess = 29;
z_mess = 30;

%
%
%                               RADIALSCHLAG 1f
%
%----- reale Biegeschwingung -----

X_U = (M_T+(D_a+M_T2+G_T)+(K_T+M_T3+G_T2+D_a_T))\ (F_U+F_K);           %(3.76)
y_U = X_U(y_mess);                                                   %(3.77)
z_U = X_U(z_mess);                                                   %(3.79)

f11 = y_U-1i*z_U;

%----- 1f-Komponente der Rundlaufabweichung -----

f12 = AmplitudeRL_M*exp(1i*PhaseRL_M);

%-----

R_1f(n,2) = abs(f11+f12);                                           %(3.80)
R_1f(n,3) = angle(f11+f12)*180/pi;                                   %(3.81)

if R_1f(n,3) < 0
    R_1f(n,3) = 360 + R_1f(n,3);
end

```

```

%
%
%           RADIALSCHLAG 2f
%
%----- reale Biegeschwingung -----
X_G = (-omega^2*M_T+li*omega*(D_a+M_T2+G_T+D_i)+(K_T+M_T3+G_T2+D_a_T))\F_G;  %(3.83)
%                                           %(3.84)
y_G = X_G(y_mess);
z_G = X_G(z_mess);

f21 = (real(y_G)-imag(z_G))/2-li*(imag(y_G)+real(z_G))/2;

%----- % 2f-Komponente durch Ovalisierung -----
if handles.Ovalisierung1_aktiv == 1

    [~,Pos_max] = max(KO_verformt(1:36,15).*KO_verformt(1:36,15)+...
                    KO_verformt(1:36,16).*KO_verformt(1:36,16));
    R_max = sqrt(KO_verformt(Pos_max,15).*KO_verformt(Pos_max,15)+...
                KO_verformt(Pos_max,16).*KO_verformt(Pos_max,16));          %(5.21)
    R_min = sqrt(KO_verformt(Pos_max+18,15).*KO_verformt(Pos_max+18,15)+...
                KO_verformt(Pos_max+18,16).*KO_verformt(Pos_max+18,16));    %(5.23)

    Amplitude_f22 = R_max-R_min;                                           %(5.25)
    Phasenlage_f22 = pi*(Pos_max-1)/36;
    f22 = Amplitude_f22*exp(li*Phasenlage_f22*2);

    else
    f22 = 0;
end

%-----
R_2f(n,2) = abs(f21+f22);
R_2f(n,3) = angle(f21+f22)*180/pi;

if R_2f(n,3) < 0
    R_2f(n,3) = 360 + R_2f(n,3);
end
end

%
%
%           UR- und RESTUNWUCHT
%
U1 = 1e3*Urunwucht(P_FE(4:11,:),rho,LE,BL,L_j,L_K,x_A,R_korr);
U2 = 1e3*Restunwucht(P_FE(4:11,:),P_KM,rho,LE,BL,L_j,L_K,x_A,R_korr);

%
%
%           MAXIMUM DER AMPLITUDEN VON 1f / 2f
%
Maximum_1f = 1e6*max(R_1f(:,2));
Maximum_2f = 1e6*max(R_2f(:,2));

%
%
%           AUSGABE DER ERGEBNISSE
%
...

```











---

```

%
%
%                               f_U
%
%
% Input:  - [rho]....(kg/m^3)..Dichte
%          - [L].....(m).....Elementlänge
%          - [A].....(m^2).....Querschnittsfläche
%          - [y].....(m).....Schwerpunktsabstand
%          - [z].....(m).....Schwerpunktsabstand
%          - [omega]..(rad/s)...Rotationsgeschwindigkeit
%
% Output: - [f_U]....(8x1).....lokaler Unwuchtvektor
%

```

---

```

function f = f_U(rho,L,A,y,z,omega)

F_y = rho*A*L*y*omega^2/2;                               %(3.60)
F_z = rho*A*L*z*omega^2/2;
M_y = rho*A*L^2*z*omega^2/12;
M_z = rho*A*L^2*y*omega^2/12;

f = [F_y; F_z; M_y; -M_z; F_y; F_z; -M_y; M_z];           %(3.62)

```

---

```

%
%
%                               f_G
%
%
% Input:  - [rho]....(kg/m^3)..Dichte
%          - [L].....(m).....Elementlänge
%          - [A].....(m^2).....Querschnittsfläche
%
% Output: - [f_G]....(8x1).....lokaler Schwerkraftvektor
%

```

---

```

function f = f_G(rho,L,A)

g = 9.81;
F = rho*A*L*g/2;                                         %(3.63)

f = [F; 1i*F; 0; 0; F; 1i*F; 0; 0];                       %(3.66)

```

```

%
%
%                               Querschnitt_allgemein
%
%
% Input:  - [ ].....(m).....Koordinaten der Messpunkte des Querschnitt j
%
% Output: - [A].....(m).....Querschnittsfläche
%          - [I_x]....(m^4)....polares Flächenträgheitsmoment
%          - [I_y]....(m^4)....Flächenträgheitsmoment
%          - [I_z]....(m^4)....Flächenträgheitsmoment
%          - [I_yz]... (m^4)....Deviationsmoment
%          - [y].....(m).....Schwerpunktsabstand
%          - [z].....(m).....Schwerpunktsabstand
%
%
function f = Querschnitt_allgemein(KO_j,n_D)
%
%                               KOORDINATEN DES INNEREN (1) UND ÄUSSEREN (2) POLYGONZUG
%                               + ZÄHLRICHTUNGSUMKEHR (BEFEHL 'fliplr')
%
Y1 = KO_j(:,1);
Z1 = KO_j(:,2);
Y2 = flipud(KO_j(:,3));
Z2 = flipud(KO_j(:,4));
%
%
%                               STARTWERTE
%
A = 0;
y = 0;
z = 0;
I_y = 0;
I_z = 0;
I_yz = 0;
%
%
%                               FLÄCHENINHALT
%
for i = 1:n_D
    A_i = 1/2*((Y1(i)*Z1(i+1)-Z1(i)*Y1(i+1))+...           %(4.11)
              (Y2(i)*Z2(i+1)-Z2(i)*Y2(i+1)));
    A = A + A_i;
end
%
%
%                               FLÄCHENMOMENTE & SCHWERPUNKTKOORDINATEN
%
for i = 1:n_D
    y_i = 1/(6*A)*((Y1(i)*Z1(i+1)-Z1(i)*Y1(i+1))*(Y1(i)+Y1(i+1))+...   %(4.12)
                  (Y2(i)*Z2(i+1)-Z2(i)*Y2(i+1))*(Y2(i)+Y2(i+1)));
    y = y + y_i;
    z_i = 1/(6*A)*((Y1(i)*Z1(i+1)-Z1(i)*Y1(i+1))*(Z1(i)+Z1(i+1))+...   %(4.12)
                  (Y2(i)*Z2(i+1)-Z2(i)*Y2(i+1))*(Z2(i)+Z2(i+1)));
    z = z + z_i;
    I_y_i = 1/12*(((Y1(i)*Z1(i+1)-Z1(i)*Y1(i+1))*...                   %(4.13)
                  (Z1(i)^2+Z1(i)*Z1(i+1)+Z1(i+1)^2))+...
                ((Y2(i)*Z2(i+1)-Z2(i)*Y2(i+1))*...
                  (Z2(i)^2+Z2(i)*Z2(i+1)+Z2(i+1)^2)));
    I_y = I_y + I_y_i;

```

```

I_z_i = 1/12*((Y1(i)*Z1(i+1)-Z1(i)*Y1(i+1))*...           %(4.13)
            (Y1(i)^2+Y1(i)*Y1(i+1)+Y1(i+1)^2))+...
            ((Y2(i)*Z2(i+1)-Z2(i)*Y2(i+1))*...
            (Y2(i)^2+Y2(i)*Y2(i+1)+Y2(i+1)^2));
I_z = I_z + I_z_i;
I_yz_i = -1/12*((Y1(i)*Z1(i+1)-Z1(i)*Y1(i+1))*...         %(4.13)
              (Y1(i)*Z1(i)+1/2*(Y1(i)*Z1(i+1)+...
              Z1(i)*Y1(i+1))+Y1(i+1)*Z1(i+1)))+...
              ((Y2(i)*Z2(i+1)-Z2(i)*Y2(i+1))*...
              (Y2(i)*Z2(i)+1/2*(Y2(i)*Z2(i+1)+...
              Z2(i)*Y2(i+1))+Y2(i+1)*Z2(i+1))));
I_yz = I_yz + I_yz_i;
end

I_x = I_y + I_z;                                           %(4.10)

f = [A I_x I_y I_z I_yz y z];

```

```

%
%
%           Querschnitt_Optimierung
%
% Input:  - [ ].....(m).....Koordinaten der Messpunkte des Querschnitt j
%
% Output: - [A].....(m).....Querschnittsfläche
%          - [y].....(m).....Schwerpunktsabstand
%          - [z].....(m).....Schwerpunktsabstand
%
function f = Querschnitt_Optimierung(KO_j,d_W,n_D)

%
%
%           KOORDINATEN DES INNEREN POLYGONZUG
%
Y1 = KO_j(:,1);
Z1 = KO_j(:,2);

%
%
%           STARTWERTE
%
A_innen = 0;
y = 0;
z = 0;

%
%
%           FLÄCHENINHALT
%
for i = 1:n_D
    A_i = 1/2*((Y1(i)*Z1(i+1)-Z1(i)*Y1(i+1)));           %(4.11)
    A_innen = A_innen + A_i;
end

A_aussen = d_W^2*pi/4;
A = A_aussen + A_innen;

%
%
%           SCHWERPUNKTKOORDINATEN
%
for i = 1:n_D
    y_i = 1/(6*A)*((Y1(i)*Z1(i+1)-Z1(i)*Y1(i+1))*(Y1(i)+Y1(i+1)));           %(4.12)
    y = y + y_i;

    z_i = 1/(6*A)*((Y1(i)*Z1(i+1)-Z1(i)*Y1(i+1))*(Z1(i)+Z1(i+1)));           %(4.12)
    z = z + z_i;
end

f = [A y z];

```





```

%
%
%                               Unwucht_absolut
%
%
% Input:  - [rho]....(kg/m^3)..Dichte
%          - [ ].....(m).....Walzengeometrie
%          - [x].....(m).....Verschiebungen in den Korrektorebenen
%
% Output: - [LR].....Summe der Absolutbeträge der Auflager-
%           reaktionen aufgrund von Unwucht in den
%           Lagern
%
function f = Unwucht_absolut(delta)

%
%
%                               EINLESEN DER RELEVANTEN DATEN
%

global rho;
global DA;
global LE;
global BL;
global L_K;
global L_j;
global KO_Messung;
global m_P;
global x_A;
global x_B;

KO_Optimierung = [KO_Messung(:,1:12) KO_Messung(:,17:28);
                  KO_Messung(1,1:12) KO_Messung(1,17:28)];

%
%
%                               QUERSCHNITTSPARAMETER DER FE
%

P = zeros(6,4);
P(:,1) = LE/2 - BL/2 + L_K + L_j/2*[1 3 5 7 9 11];

for j = 1:6
    e = j*4-3;
    f = j*4-2;
    delta_y = delta(1)*(x_B-P(j,1))/(x_B-x_A)+...           %(6.11)
              delta(2)*(P(j,1)-x_A)/(x_B-x_A);
    delta_z = delta(3)*(x_B-P(j,1))/(x_B-x_A)+...           %(6.12)
              delta(4)*(P(j,1)-x_A)/(x_B-x_A);
    KO_Optimierung(:,e) = KO_Optimierung(:,e) + delta_y;
    KO_Optimierung(:,f) = KO_Optimierung(:,f) + delta_z;
end

for j = 1:6
    e = j*4-3;
    f = j*4-2;
    KO_j = KO_Optimierung(:,e:f);
    P(j,2:4) = Querschnitt_Optimierung(KO_j,DA,m_P);
end

```

```
%  
%  
%          SUMME DER ABSOLUTBETRÄGE DER AUFLAGERREAKTIONEN  
%  
  
LR_1 = -1/LE*rho*L_j*sum(P(:,1).*P(:,2).*P(:,3)); % (6.9)  
LR_2 = -1/LE*rho*L_j*sum((LE-P(:,1)).*P(:,2).*P(:,3));  
LR_3 = -1/LE*rho*L_j*sum(P(:,1).*P(:,2).*P(:,4));  
LR_4 = -1/LE*rho*L_j*sum((LE-P(:,1)).*P(:,2).*P(:,4));  
  
LR_A = sqrt(LR_1^2+LR_3^2);  
LR_B = sqrt(LR_2^2+LR_4^2);  
  
f = abs(LR_A)+abs(LR_B);
```



```

        e2 = (i-1)*2*m_P+2*h;
        f1 = 4*(i-2)+1;
        f2 = 4*(i-2)+2;
        f3 = 4*(i-2)+3;
        f4 = 4*(i-2)+4;
        KO_Ovalisierung(e1,1) = x;
        KO_Ovalisierung(e1,2) = KO_Messung(h,f1);
        KO_Ovalisierung(e1,3) = KO_Messung(h,f2);
        KO_Ovalisierung(e2,1) = x;
        KO_Ovalisierung(e2,2) = KO_Messung(h,f3);
        KO_Ovalisierung(e2,3) = KO_Messung(h,f4);
    end
end
end

%


---


for n = 1:m_A
    for h = 1:m_P

%
%
% IDENTIFIKATION DER RANDKNOTEN FÜR EIN FE
%


---


        if h < m_P;
            p1 = 1+2*(h-1)+144*(n-1);
            p2 = 2+2*(h-1)+144*(n-1);
            p3 = 3+2*(h-1)+144*(n-1);
            p4 = 4+2*(h-1)+144*(n-1);
            p5 = 1+2*(h-1)+144*n;
            p6 = 2+2*(h-1)+144*n;
            p7 = 3+2*(h-1)+144*n;
            p8 = 4+2*(h-1)+144*n;
        end
        if h == m_P;
            p1 = 1+2*(h-1)+144*(n-1);
            p2 = 2+2*(h-1)+144*(n-1);
            p3 = 1+144*(n-1);
            p4 = 2+144*(n-1);
            p5 = 1+2*(h-1)+144*n;
            p6 = 2+2*(h-1)+144*n;
            p7 = 1+144*n;
            p8 = 2+144*n;
        end
    end

    x1 = KO_Ovalisierung(p1,1);
    y1 = KO_Ovalisierung(p1,2);
    z1 = KO_Ovalisierung(p1,3);
    x2 = KO_Ovalisierung(p3,1);
    y2 = KO_Ovalisierung(p3,2);
    z2 = KO_Ovalisierung(p3,3);
    x3 = KO_Ovalisierung(p4,1);
    y3 = KO_Ovalisierung(p4,2);
    z3 = KO_Ovalisierung(p4,3);
    x4 = KO_Ovalisierung(p2,1);
    y4 = KO_Ovalisierung(p2,2);
    z4 = KO_Ovalisierung(p2,3);
    x5 = KO_Ovalisierung(p5,1);
    y5 = KO_Ovalisierung(p5,2);
    z5 = KO_Ovalisierung(p5,3);
    x6 = KO_Ovalisierung(p7,1);
    y6 = KO_Ovalisierung(p7,2);
    z6 = KO_Ovalisierung(p7,3);
    x7 = KO_Ovalisierung(p8,1);
    y7 = KO_Ovalisierung(p8,2);
    z7 = KO_Ovalisierung(p8,3);
    x8 = KO_Ovalisierung(p6,1);
    y8 = KO_Ovalisierung(p6,2);
    z8 = KO_Ovalisierung(p6,3);

```

```

%
%
% BERECHNUNG DER ELEMENTSTEIFIGKEITSMATRIX DES FE
%
K_FE = K_Hexaeder(E,nu,x1,y1,z1,x2,y2,z2,x3,y3,z3,x4,y4,z4,...
                x5,y5,z5,x6,y6,z6,x7,y7,z7,x8,y8,z8);

%
%
% EINBINDUNG DER ELEMENTSTEIFIGKEITSMATRIX
% IN DIE GLOBALE STEIFIGKEITSMATRIX
%
xyz = [3*p1-2; 3*p1-1; 3*p1; 3*p3-2; 3*p3-1; 3*p3;
       3*p4-2; 3*p4-1; 3*p4; 3*p2-2; 3*p2-1; 3*p2;
       3*p5-2; 3*p5-1; 3*p5; 3*p7-2; 3*p7-1; 3*p7;
       3*p8-2; 3*p8-1; 3*p8; 3*p6-2; 3*p6-1; 3*p6];

for x = 1:24
    a1 = xyz(x);
    for y = 1:24
        a2 = xyz(y);
        K(a1,a2) = K(a1,a2) + K_FE(x,y);
    end
end

%
%
% BERECHNUNG DES LOKALEN FLIEHKRAFTVEKTORS EINES FE
%
V = 1/12*(... % (5.15)
x1*y3*z2 - x1*y2*z3 + x2*y1*z3 - x2*y3*z1 - x3*y1*z2 + x3*y2*z1 - ...
x1*y2*z4 + x1*y4*z2 + x2*y1*z4 - x2*y4*z1 - x4*y1*z2 + x4*y2*z1 + ...
x1*y2*z5 - x1*y3*z4 + x1*y4*z3 - x1*y5*z2 - x2*y1*z5 + x2*y5*z1 + ...
x3*y1*z4 - x3*y4*z1 - x4*y1*z3 + x4*y3*z1 + x5*y1*z2 - x5*y2*z1 + ...
x1*y2*z6 - x1*y6*z2 - x2*y1*z6 - x2*y3*z4 + x2*y4*z3 + x2*y6*z1 + ...
x3*y2*z4 - x3*y4*z2 - x4*y2*z3 + x4*y3*z2 + x6*y1*z2 - x6*y2*z1 - ...
x1*y4*z5 + x1*y5*z4 + x4*y1*z5 - x4*y5*z1 - x5*y1*z4 + x5*y4*z1 + ...
x2*y3*z6 - x2*y6*z3 - x3*y2*z6 + x3*y6*z2 + x6*y2*z3 - x6*y3*z2 - ...
x1*y5*z6 + x1*y6*z5 + x2*y3*z7 - x2*y7*z3 - x3*y2*z7 + x3*y7*z2 + ...
x5*y1*z6 - x5*y6*z1 - x6*y1*z5 + x6*y5*z1 + x7*y2*z3 - x7*y3*z2 - ...
x1*y4*z8 + x1*y8*z4 - x2*y5*z6 + x2*y6*z5 + x4*y1*z8 - x4*y8*z1 + ...
x5*y2*z6 - x5*y6*z2 - x6*y2*z5 + x6*y5*z2 - x8*y1*z4 + x8*y4*z1 + ...
x1*y5*z8 - x1*y8*z5 + x3*y4*z7 - x3*y7*z4 - x4*y3*z7 + x4*y7*z3 - ...
x5*y1*z8 + x5*y8*z1 + x7*y3*z4 - x7*y4*z3 + x8*y1*z5 - x8*y5*z1 - ...
x2*y6*z7 + x2*y7*z6 + x3*y4*z8 - x3*y8*z4 - x4*y3*z8 + x4*y8*z3 + ...
x6*y2*z7 - x6*y7*z2 - x7*y2*z6 + x7*y6*z2 + x8*y3*z4 - x8*y4*z3 - ...
x3*y6*z7 + x3*y7*z6 + x6*y3*z7 - x6*y7*z3 - x7*y3*z6 + x7*y6*z3 + ...
x4*y5*z8 - x4*y8*z5 - x5*y4*z8 + x5*y8*z4 + x8*y4*z5 - x8*y5*z4 - ...
x3*y7*z8 + x3*y8*z7 + x5*y6*z7 - x5*y7*z6 - x6*y5*z7 + x6*y7*z5 + ...
x7*y3*z8 + x7*y5*z6 - x7*y6*z5 - x7*y8*z3 - x8*y3*z7 + x8*y7*z3 - ...
x4*y7*z8 + x4*y8*z7 + x5*y6*z8 - x5*y8*z6 - x6*y5*z8 + x6*y8*z5 + ...
x7*y4*z8 - x7*y8*z4 - x8*y4*z7 + x8*y5*z6 - x8*y6*z5 + x8*y7*z4 + ...
x5*y7*z8 - x5*y8*z7 - x7*y5*z8 + x7*y8*z5 + x8*y5*z7 - x8*y7*z5 + ...
x6*y7*z8 - x6*y8*z7 - x7*y6*z8 + x7*y8*z6 + x8*y6*z7 - x8*y7*z6);

F_p1 = (rho*V/8)*[0; y1; z1];
F_p2 = (rho*V/8)*[0; y4; z4];
F_p3 = (rho*V/8)*[0; y2; z2];
F_p4 = (rho*V/8)*[0; y3; z3];
F_p5 = (rho*V/8)*[0; y5; z5];
F_p6 = (rho*V/8)*[0; y8; z8];
F_p7 = (rho*V/8)*[0; y6; z6];
F_p8 = (rho*V/8)*[0; y7; z7];

```





```

% Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrix

dN = J\R;
B = transpose([dN(1,1) 0      0      dN(2,1) 0      dN(3,1);      %(5.5)
              0      dN(2,1) 0      dN(1,1) dN(3,1) 0;
              0      0      dN(3,1) 0      dN(2,1) dN(1,1);
              dN(1,2) 0      0      dN(2,2) 0      dN(3,2);
              0      dN(2,2) 0      dN(1,2) dN(3,2) 0;
              0      0      dN(3,2) 0      dN(2,2) dN(1,2);
              dN(1,3) 0      0      dN(2,3) 0      dN(3,3);
              0      dN(2,3) 0      dN(1,3) dN(3,3) 0;
              0      0      dN(3,3) 0      dN(2,3) dN(1,3);
              dN(1,4) 0      0      dN(2,4) 0      dN(3,4);
              0      dN(2,4) 0      dN(1,4) dN(3,4) 0;
              0      0      dN(3,4) 0      dN(2,4) dN(1,4);
              dN(1,5) 0      0      dN(2,5) 0      dN(3,5);
              0      dN(2,5) 0      dN(1,5) dN(3,5) 0;
              0      0      dN(3,5) 0      dN(2,5) dN(1,5);
              dN(1,6) 0      0      dN(2,6) 0      dN(3,6);
              0      dN(2,6) 0      dN(1,6) dN(3,6) 0;
              0      0      dN(3,6) 0      dN(2,6) dN(1,6);
              dN(1,7) 0      0      dN(2,7) 0      dN(3,7);
              0      dN(2,7) 0      dN(1,7) dN(3,7) 0;
              0      0      dN(3,7) 0      dN(2,7) dN(1,7);
              dN(1,8) 0      0      dN(2,8) 0      dN(3,8);
              0      dN(2,8) 0      dN(1,8) dN(3,8) 0;
              0      0      dN(3,8) 0      dN(2,8) dN(1,8)]);

% Ansatz der Steifigkeitsmatrix

K1 = B'*C*B*det(J);
K2 = K2 + K1;
end;
K3 = K3 + K2;
K2 = zeros(24);
end;
K = K + K3;
K3 = zeros(24);
end;

f = K;

```