



DIPLOMARBEIT

Master Thesis

Analytische Untersuchung der Gesteinslöseprozesse als Grundlage für die Optimierung von Bohrmeißeln

**Analytical investigation of the rock fragmentation processes for the
optimisation of drilling chisels**

ausgeführt zum Zweck der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs/
einer Diplom-Ingenieurin

unter der Leitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dietmar Adam

und

Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dietmar Kohlböck

E220

Institut für Geotechnik
Forschungsbereich für Grundbau, Boden- und Felsmechanik

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Bauingenieurwesen

von

Wolfgang Lederer

Matr. Nr. 0126411

A-1230 Wien, Deißenhofergasse 46A

Wien, April 2011

.....
(Wolfgang Lederer)

Vorwort

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dietmar Adam, Leiter des Fachbereiches Grundbau, Boden- und Felsmechanik des Instituts für Geotechnik an der Technischen Universität Wien, bedanken, der mir das Erstellen dieser Arbeit ermöglicht hat.

Ein besonderer Dank gebührt meinem Betreuer Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dietmar Kohlböck, der durch sein wissenschaftliches Engagement und seine innovativen Ideen den Anstoß für diese interessante und herausfordernde Arbeit gegeben hat. Darüber hinaus möchte ich mich besonders für seine unentwegte Unterstützung, sowie für seine vielen wertvollen Anregungen und Hinweise bedanken.

Großer Dank gilt all meinen Studienkollegen und Freunden, die mir während meines Studiums immer zur Seite gestanden sind und mich mit hilfreichen Ratschlägen unterstützt haben.

Der größte Dank gebührt allerdings meinen Eltern Marianne und Dr. Kurt Lederer, die mir diese Ausbildung ermöglicht haben und mich in allen Bereichen immer uneingeschränkt unterstützt haben.

Kurzfassung

Durch die Einsatzmöglichkeit unterschiedlicher Lösewerkzeuge stellt das Schlagbohrverfahren eine gängige Möglichkeit bei der Herstellung von Pfählen bei wechselnden Untergrundverhältnissen dar. Zum Lösen von Festgestein oder anderer Bohrhindernisse werden Meißelwerkzeuge eingesetzt. Dieser Lösevorgang stellt einen entscheidenden Faktor hinsichtlich der Wirtschaftlichkeit des gesamten Pfahlherstellungsprozesses dar. Die vorliegende Diplomarbeit soll die Grundlage für die Optimierung und Weiterentwicklung von Meißelwerkzeugen zur Steigerung der Effektivität liefern.

Nach einem Überblick über unterschiedliche Pfahlssysteme, wird näher auf die Verfahren zur Herstellung von Bohrpfählen eingegangen. Eine Möglichkeit zur Herstellung von Bohrpfählen stellt das Schlagbohrverfahren dar, welches durch den variablen Einsatz unterschiedlicher Löse- und Förderwerkzeuge ein breites Einsatzspektrum bietet. Die verwendeten Geräte und Werkzeuge dieses Verfahrens werden anschließend im Detail beschrieben.

Der Prozess der Gesteinslösung wird unter dem Aspekt einer möglichen Optimierung von Lösewerkzeugen umfangreich analysiert. Je nach Härte des Gesteins kommen unterschiedliche Arten der Gesteinslösung zum Einsatz. Die Maschinen, die für das Lösen von Gestein verwendet werden, sind in ihrer Ausführung vor allem durch ihr Einsatzgebiet bestimmt. Die, an diesen Geräten montierten Lösewerkzeuge, lassen sich prinzipiell in Diskenmeißel, Schrägmeißel und in Eindringkörper einteilen. Für diese drei Typen von Werkzeugen werden unterschiedliche Theorien und Modelle, die die charakteristischen Mechanismen der Gesteinslösung beschreiben, kritisch analysiert und gegebenenfalls miteinander verglichen.

Der Mechanismus der Gesteinslösung bei Eindringkörpern wird am ausführlichsten behandelt, da dies dem Lösevorgang von den Meißelwerkzeugen bei der Herstellung von Pfählen mit dem Schlagbohrverfahren entspricht. Dabei werden entsprechende Modelle und Theorien zur Beschreibung der Entstehung und Ausbreitung unterschiedlichster Risse und der dabei auftretenden Spannungen vorgestellt und in Hinblick auf ihre praktische Anwendbarkeit kritisch betrachtet. Weiters werden zwei experimentelle Untersuchungen mit zwei unterschiedlichen Methoden zur Aufzeichnung der Rissentstehung und Rissausbreitung beschrieben, deren Ergebnisse angeführt und gegebenenfalls mit theoretischen Werten verglichen.

Abschließend werden ausgehend von den eingehend untersuchten unterschiedlichen Lösemechanismen die Ergebnisse zusammengefasst, um davon mögliche Optimierungsmöglichkeiten für die Meißelwerkzeuge des Schlagbohrverfahrens ableiten zu können. Außerdem werden Optionen für weiterführende Untersuchungen in dieser Problematik aufgezeigt.

Abstract

The construction of piles with hammer grab and chisel is well established for installing piles in varying ground conditions, due to the possible application of various tools. The machining of rock or other subsurface obstacles by chisels is crucial in the economic viability of the overall pile construction process. The master thesis at hand should serve as a basis for the optimisation and further development of drilling tools in order to increase the efficiency.

After outlining the different types of piles and the manifold construction methods, the manufacturing process of bored piles is explained in detail. The adjustable application of various drilling and mining tools, offers a wide field of applications for the installation of bored piles with hammer grab and chisel. Subsequently the devices and equipment used for this method are explicitly depicted.

The process of rock cutting and rock fragmentation is extensively analysed, with respect to possible optimisation of drilling and cutting tools. The specific type of the various rock cutting machines is dependent on the operational area. The drilling and cutting tools mounted on these machines can be fundamentally classified into disc cutters, drag picks and indenters. Different theories and models for the characteristic mechanism of rock cutting and fragmentation of the three basic tools are analysed and compared where appropriate.

As the mechanism of rock fragmentation due to indenters complies with the rock cutting process of the chiseling tools during the installation of piles with hammer grab and chisel, this mechanism is elaborately dealt with. In the course of these appropriate theories and models for crack initiation, crack propagation and crack growth with the occurring stresses, for all different types of cracks are presented and critically observed with regard to practical applicability. Further on two experimental studies investigating the crack initiation and crack growth with different methods are depicted and the results are presented and compared with theoretical data.

Finally the findings of the extensively studied different mechanisms of rock cutting are summarized in order to be able to derive a possible optimisation of drilling tools, used for the installation of piles with hammer grab and chisel. Furthermore possibilities for additional research topics in this field are highlighted.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Pfahlsysteme	3
2.1	Geschichtlicher Überblick	3
2.2	Einsatzmöglichkeiten	4
2.3	Einteilung der Pfahlsysteme	4
2.4	Verdrängungspfähle	7
2.5	Mikropfähle	7
2.6	Bohrpfähle	7
2.6.1	Greiferbohrverfahren (Schlagbohrverfahren)	8
2.6.2	Drehbohrverfahren	8
2.6.3	Spühlbohrverfahren	9
3	Greiferbohrverfahren (Schlagbohrverfahren)	11
3.1	Verrohrungsmaschine	12
3.2	Bohrwerkzeuge	13
3.2.1	Bohrrohr	13
3.2.2	Bohrgreifer	15
3.2.3	Bohrmeißel	16
4	Überblick über die maschinelle Gesteinslösung	20
4.1	Arten der Gesteinslösung	20
4.2	Maschinen für die Gesteinslösung	21
4.3	Lösewerkzeuge	23
4.4	Mechanismen der Gesteinslösung	23
5	Gesteinslösung bei Diskenmeißeln	25
5.1	Modell zur Gesteinslösung bei Diskenmeißeln von Roxborough und Phillips	25
5.2	Kritische Betrachtung des Modells von Roxborough und Phillips	35
6	Gesteinslösung bei Schrämmmeißeln	37
6.1	Theorie nach Y. Nishimatsu	38
6.2	Theorie nach I. Evans	55
7	Gesteinslösung bei Eindringkörpern	69
7.1	Cavity expansion model - Hohlraumaufweitungs Modell	72
7.2	Prinzipien und Theorien der Rissbildung und der Rissausbreitung	100
7.3	Experimentelle Untersuchungen von Rissen	131
8	Zusammenfassung und Ausblick	148
8.1	Zusammenfassung	148
8.2	Ausblick	149
	Literaturverzeichnis	151
	Anhang A Ursachen und Ausbildungen eines Bruches	155
Anhang A.1	Mikrorissbildung und deren Ursachen	155
Anhang A.2	Ausbreitung und Arten makroskopischer Risse	156

Anhang B	Lineare Bruchmechanik	158
Anhang B.1	Allgemeines	158
Anhang B.2	Das Rissspitzenfeld	159
Anhang B.3	Das K-Konzept	162
Anhang B.4	Die Bruchzähigkeit	165
Anhang B.5	Energiebilanz	165

1 Einleitung

Pfähle sind in der heutigen Bauindustrie ein wesentlicher Bestandteil im Bereich der Tiefgründung, wobei hauptsächlich vertikale Lasten abgetragen werden. Die Verfahrenstechnik zur Herstellung von Pfählen ist sehr vielfältig, und den Bohrpfählen kommt vor allem bei schwierigen Untergrundverhältnissen (wechselnde Untergrundverhältnisse, Festgestein, ect.) eine wesentliche Rolle zu. Aber sogar bei dem Einsatz unterschiedlichster Geräte und hochtechnisierter und leistungsfähiger Maschinen stößt man beim Bohren im Festgestein bald an die Grenzen des praktisch und/oder wirtschaftlich Machbaren.

Das Schlagbohrverfahren stellt durch die Einsatzmöglichkeit verschiedenster Bohrwerkzeuge in vielen Bereichen, durch die Anpassung an Untergrundverhältnisse, ein sehr effizientes Bohrverfahren dar. Trotzdem ist der Bohrfortschritt beim Einsatz im Festgestein begrenzt und damit einer der bestimmenden Faktoren hinsichtlich Wirtschaftlichkeit. Um den Aufwand beim Bohren in Fels erfassbar zu machen, sowie eine Möglichkeit für die Optimierung der verwendeten Meißelwerkzeuge zu finden, ist es notwendig den Lösevorgang analytisch durch entsprechende Modelle erfassbar zu machen. Im Rahmen dieser Arbeit soll die theoretische Grundlage für ein solches Modell, beziehungsweise die im Vorfeld notwendigen spezifischen experimentellen Untersuchungen, geschaffen werden.

Nach einer eingehenden Beschreibung des Schlagbohrverfahrens, vor allem im Hinblick auf die verwendeten Lösewerkzeuge, richtet sich das Hauptaugenmerk dieser Arbeit auf die Gesteinslösung. Um eine fundierte theoretische Basis zu bieten, ist es notwendig die unterschiedlichen Arten der Gesteinslösung in Verbindung mit den verwendeten Werkzeugen/Maschinen zu beschreiben. Die heutzutage verwendeten Lösewerkzeuge lassen sich grundlegend durch ihre Form und ihren Mechanismus Gestein zu lösen in Schneid- oder Rollenmeißel, Schrämmmeißel und Eindringkörper einteilen. Zu jedem dieser drei Lösewerkzeuge lässt sich ein bestimmter Lösemechanismus zuordnen. Der Lösevorgang der Meißelwerkzeuge des Schlagbohrverfahrens entspricht am ehesten dem Lösemechanismus von Eindringkörpern, weshalb diesem Mechanismus auch ein Großteil dieser Arbeit gewidmet ist. Da es allerdings in der Praxis oft zu kombinierten Lösevorgängen und somit zu Überschneidungen unterschiedlicher Mechanismen kommt, werden alle drei Arten der Lösewerkzeuge im Detail untersucht. Außerdem können sich durch die Analyse anderer Lösevorgänge Optimierungen und mögliche Weiterentwicklungen für die Meißel des Schlagbohrverfahrens ergeben.

Für die einzelnen Mechanismen der Gesteinslösung wurden unterschiedlichste Theorien bzw. Modelle in der Literatur gefunden. Die in weiterer Folge in dieser Arbeit angeführten Theorien und Modelle wurden ausgewählt, um eine möglichst profunde theoretische Grundlage zu bieten. Teilweise wurden absichtlich Theorien mit unterschiedlichen Ansätzen ausgewählt, um ein möglichst breites Spektrum abzudecken, sowie Unterschiede und Möglichkeiten der Weiterentwicklung aufzuzeigen. Bei allen, in dieser Arbeit beschriebenen Theorien und Modellen, wurden die wesentlichen Gleichungen und die meisten Grundannahmen aus der Literatur übernommen. Allerdings wurden alle Herleitungen und Ableitungen, zum besseren Verständnis und für den Fall weiterführender Untersuchungen neu durchgeführt und anschaulich aufbereitet. Weiters wurde im Zuge dieser Arbeit auch auf die kritische Analyse und den Konnex mit der Praxis Wert gelegt. Außerdem werden teilweise mögliche Annahmen hinterfragt und eventuelle Verbesserungsvorschläge an gegebener Stelle eingebracht.

Der Gesteinslösung durch Eindringkörper wird, wie bereits erwähnt, besondere Beachtung geschenkt. Demzufolge wurden für diesen Mechanismus mehrere Theorien und Modelle für die unterschiedlichsten Risse, ihre Entstehung und Ausbreitung, sowie die dazugehörigen Spannungszustände analysiert. Ein wesentlicher Bestandteil in diesem Zusammenhang ist auch die kritische Betrachtung

experimenteller Untersuchungen und deren Ergebnisse. Dabei werden die Ergebnisse sowohl mit den theoretischen Werten verglichen, als auch der Versuchsaufbau in Hinblick auf die wirklichkeitsnahe Abbildung der im Feld anzutreffenden Gegebenheiten untersucht.

2 Pfahlsysteme

2.1 Geschichtlicher Überblick

Bereits sehr früh in der Geschichte der Menschheit gibt es das Bestreben der Menschen den Untergrund, sei es Festgestein oder Lockergestein, in der einen oder anderen Art und aus unterschiedlichsten Beweggründen zu bearbeiten. Hierzu zählt auch das Herstellen von Pfahlgründungen, wobei die ältesten Holzpfahlgründungen in der Jungsteinzeit und Bronzezeit zwischen 4300 v.Chr. und 800 v.Chr. im gesamten Alpenraum und in China datiert werden können. Danach machten sich vor allem die römischen Ingenieure verdient in der Herstellung und Weiterentwicklung der Technik der Pfahlgründungen, die sie vor allem im Brückenbau anwendeten [36][59].

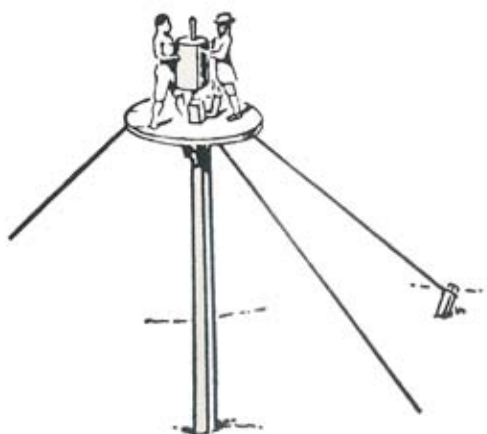


Abbildung 1: Rammpfahl mittels Handrammung abgeteuft (16. Jahrhundert n. Chr.)[45]

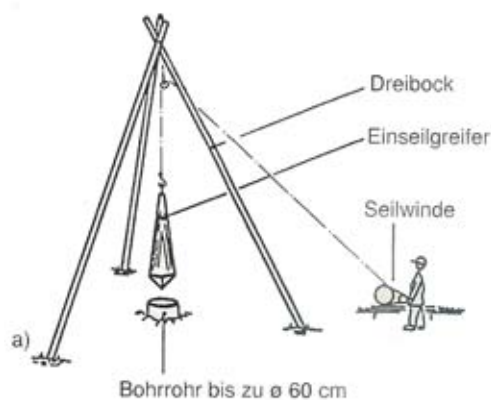


Abbildung 2: Dreibock mit Einseilgreifer (Anfang des 20. Jahrhunderts)[31]

Anfang des 20. Jahrhunderts erfolgten dann die nächsten entscheidenden Entwicklungsstufen. Bis zu diesem Zeitpunkt wurden vor allem Holzpfähle mittels Fallgewichten in den Boden eingerammt (siehe Abb. 1 auf Seite 3), was anfangs noch per Hand und später dann mit mechanisch betätigten Rammen erfolgte. Aber erst die Entwicklung des Freifallbären brachte eine wesentliche Vereinfachung, Mechanisierung und Beschleunigung in der Pfahlherstellung. Weiters wurde auch zu Beginn des 20. Jahrhunderts erstmals der Gedanke verfolgt andere Materialien und Verfahren für die Herstellung von Pfählen zu verwenden. Ausgehend vom Brunnenbau und unterschützt durch die Neuentwicklungen der Bohrtechnik wurden die ersten Bohrpfähle hergestellt. Diese lehnten sich in der Konstruktion sehr an der Herstellung von Wasserbrunnen an, bei denen die Innenauskleidung aus Mauerwerk als tragendes Element wirkte [24][17].

Es ist nicht möglich den Ursprung der Bohrtechnik genau zu datieren, aber bereits im alten Ägypten, zwischen 2550 bis 2315 v.Chr., wurden zum Bau der Pyramiden bereits Diamantbohrwerkzeuge eingesetzt. Die ersten Bohrungen wurden in China ab 600 v.Chr. niedergebracht, wohingegen in Europa erst im 12. Jahrhundert Bohrungen belegt sind. Diese wurden vor allem zur Herstellung von Wasserbrunnen errichtet. Das Anwachsen der Bevölkerung, die Erfindung der Dampfmaschine und später die Erfindung der Brennkraftmaschine, führten dazu, dass vermehrt Bohrungen zur Rohstoffgewinnung von Salz, Kohle und Erdöl durchgeführt wurden [24]. Dadurch nahm die Entwicklung der Bohrtechnik, vor allem ab Beginn des 19. Jahrhunderts, einen rasanten Verlauf, was auch der Pfahlherstellung zu Gute kam.

Bis Mitte des 20. Jahrhunderts wurden Bohrpfähle vor allem mit Hilfe von Bohrgreifern und Schweiß- oder Nietbohrrohren, als Verrohrung, hergestellt (siehe Abb. 2 auf Seite 3). Diese Technik wird mit Ausnahme des 2. Weltkrieges und der Instandsetzungszeit danach, ständig weiterentwickelt und führt in den 60er Jahren zu der Einführung zweier Maschinen, der französischen BENOTO-EDF,

später SUPER-EDF und der deutschen BADE-DAG 60. Diese zwei Maschinen sind zu dieser Zeit konkurrenzlos, wobei die BENOTO-Maschine Pfähle bis zu einem Durchmesser von 110cm und die BADE-Maschine Pfähle bis zu einem Durchmesser von 130cm herstellen konnte. Allerdings begann zu dieser Zeit auch die Entwicklung anderer Geräte und Techniken zur Herstellung von Bohrpfählen, die sich nach den unterschiedlichsten Anforderungen, wie Durchmesser, Tiefe usw. und den Untergrundverhältnissen richteten [34]. Diese Entwicklung, die bis heute noch im Gange ist, hat viele unterschiedliche Systeme hervorgebracht, die im Folgenden noch näher betrachtet werden.

2.2 Einsatzmöglichkeiten

Pfähle sind schlanke säulenartige Bauelemente, die vorwiegend eingesetzt werden, um Lasteinwirkungen in tiefere und tragfähige Bodenschichten zu übertragen. Wie schon in Unterabschnitt 2.1 „Geschichtlicher Überblick“ auf Seite 3 beschrieben, wurden Pfähle schon sehr früh als Gründungselemente verwendet. In der heutigen Zeit werden Pfähle mit unterschiedlichsten Materialien auf verschiedenste Weise, je nach Anforderungen hergestellt. Diese universelle Einsetzbarkeit und die Tendenz auf immer schlechterem Untergrund, bedingt durch Platzmangel und hohe Besiedelung, immer höhere Lasten abtragen zu müssen, macht Pfähle zu einem unverzichtbaren Teil der heutigen Bauindustrie.

Das Hauptanwendungsgebiet von Pfählen ist die Tiefgründung, bei der vorwiegend vertikale Lasten abgetragen werden. Aber aus der Tatsache heraus, dass vor allem Großbohrpfähle eine sehr hohe Biegesteifigkeit aufweisen, eignen sich solche Pfähle auch zur Abtragung von horizontalen Belastungen und Biegemomenten. Verankerte oder unverankerte Pfahlwände finden als Stützwände und als Verbauwände für die Erstellung von Baugruben Verwendung (Abb. 3 auf Seite 4).

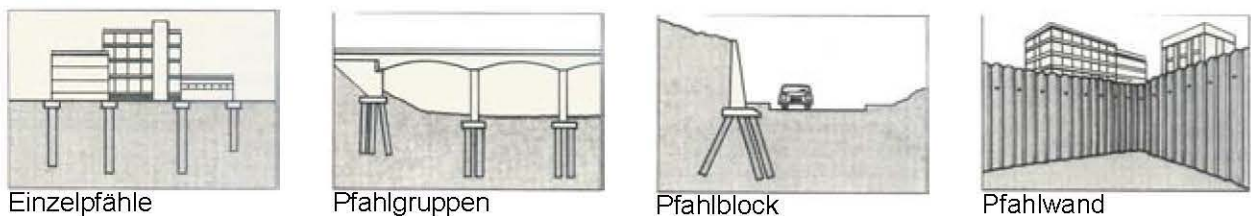


Abbildung 3: Einsatzmöglichkeiten von Pfählen [18]

2.3 Einteilung der Pfahlsysteme

Durch die Vielzahl unterschiedlicher Pfahlsysteme ist eine Einteilung in verschiedene Kategorien zweckmäßig. Im Folgenden werden einige mögliche Einteilungen genannt, die aber beliebig ergänzt werden könnten, da Pfähle nach den unterschiedlichsten Kriterien kategorisiert werden können:

Einteilung nach dem **Material**:

- Holz
- Stahl, Eisen, Gusseisen
- Beton, Stahlbeton, Spannbeton
- Kunststoff

Einteilung nach der **Herstellungsart**:

- Verdrängungspfähle
 - Rammen

- Drücken bzw. Pressen
- Vibrieren
- Schrauben bzw. Drehen
- Bohrpfähle
 - Verrohrt / Unverrohrt
- Schneidpfähle
- Injektionspfähle

Einteilung nach der **Fertigung**:

- Fertigteilpfähle
- Ortbetonpfähle
- Injektionspfähle

Einteilung nach der **Größe**:

- Mikropfähle (Verdrängungspfähle mit $\varnothing < 150mm$, Bohrpfähle mit $\varnothing < 300mm$)
- Großbohrpfähle ($\varnothing > 900mm$)

Einteilung nach der **statischen Wirkung** (Abb. 4 auf Seite 5):

- stehende Pfähle (Spitzendruckpfahl)
- schwimmende Pfähle (Mantelreibungspfähle)

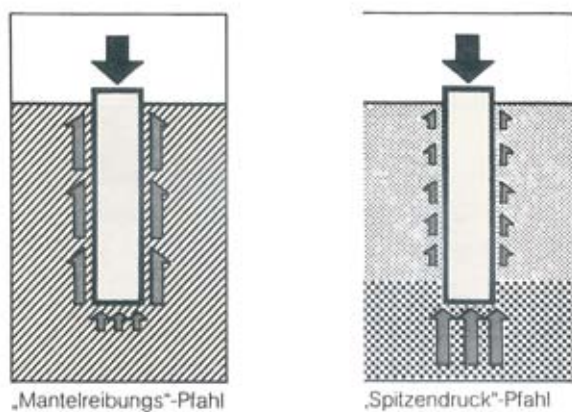


Abbildung 4: statische Wirkung von Pfählen[18]

Die Abb. 5 auf Seite 6 bietet, mit einigen Beispielen, einen Überblick über die heutzutage gängigen Pfahlsysteme, wobei von der Einteilung in den Normen ÖNORM EN 12699 (Verdrängungspfähle) und ÖNORM EN 1536 (Bohrpfähle), ausgegangen wurde.

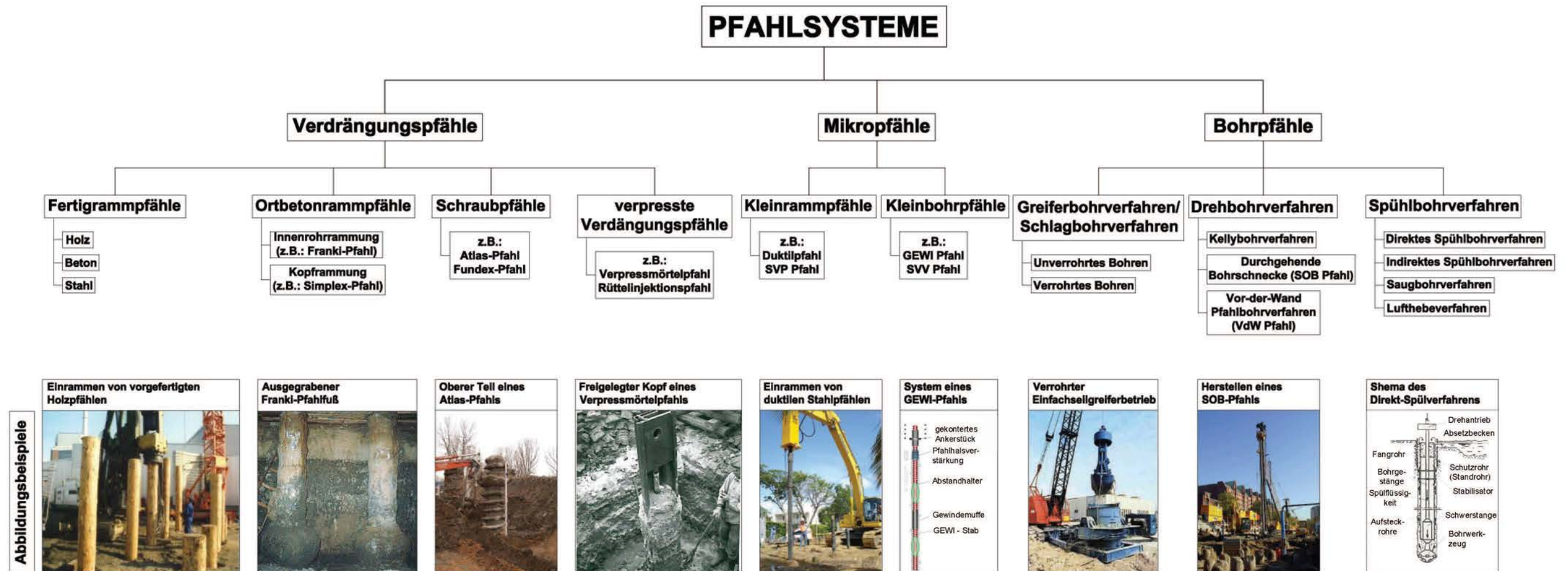


Abbildung 5: Übersicht über Pfahlsysteme in Anlehnung an [54]

2.4 Verdrängungspfähle

Das Prinzip von Verdrängungspfählen ist es, Pfähle ohne einen Bodenaushub herzustellen, was durch Einrammen, Einpressen, Einvibrieren oder Eindrehen von Pfählen bewerkstelligt wird. Allerdings ist darauf zu achten, dass durch diese Herstellungsmethode der Boden um die Pfähle verdrängt und verdichtet wird, was einer Bodenverbesserung in der Umgebung der Pfähle entspricht, aber auch zu Hebungen und erhöhten Porenwasserdrücken führen kann. Ein wichtiges Kriterium für diese Pfahlart ist die notwendige, aufzuwendende Energie, abhängig von den Bodeneigenschaften, um den Pfahl in den Boden einzubringen.

Eine weitere Unterscheidung bei den Verdrängungspfählen ist wie folgt möglich:

- **Fertigteilverdrängungspfähle** (Fertigrampfpfähle): Wie in Abb. 5 auf Seite 6 ersichtlich, können Fertigrampfpfähle aus den unterschiedlichsten Materialien (Holz, Beton, Stahl), je nach Anforderung, hergestellt sein.
- **Ortbetonverdrängungspfähle**: Dieser Pfahltyp kann durch Rammen, Drehen (bzw. Schrauben) und Pressen hergestellt werden. Einige typische Pfähle dieser Herstellungsmethode sind in Abb. 5 auf Seite 6 zu sehen.

2.5 Mikropfähle

Mikropfähle sind Pfähle mit kleinem Durchmesser, wobei man bei Verdrängungspfählen mit einem Durchmesser kleiner 150mm und bei Bohrpfählen mit einem Durchmesser kleiner als 300mm von Mikropfählen spricht. Somit erfolgt die Unterteilung der Mikropfähle in:

- **Kleinrammpfähle** mit den in der Praxis gebräuchlichen Systemen wie zum Beispiel: Duktilpfahl und SVP Pfahl (Stahlrohrverpresspfahl).
- **Kleinbohrpfähle** mit den typischen Vertretern wie zum Beispiel: GEWI Pfahl und SVV Pfahl (Stabverpresspfahl verspannbar).

2.6 Bohrpfähle

Bei den Bohrpfählen wird ein Hohlraum im Boden geschaffen, in dem dann der Pfahl hergestellt wird. Je nach Art des Bodens werden unterschiedliche Bohr- oder Aushubgeräte, mit und ohne Verrohrung und mit oder ohne Flüssigkeitsstützung, verwendet. Die Verrohrung und Flüssigkeitsstützung dienen einerseits bei nicht standfesten Böden zur Sicherung des Bohrloches (siehe Abb. 6 auf Seite 7) und andererseits als Führung für die Bohr- bzw. Aushubgeräte. Die Förderung des Bodens kann kontinuierlich oder intermittierend (siehe Abb. 7 auf Seite 7) und als Trocken- oder Nassbohrung erfolgen.



Abbildung 6: Möglichkeiten zum Stützen der Bohrlochwand[31]



Abbildung 7: Fördern des Bohrgutes[31]

2.6.1 Greiferbohrverfahren (Schlagbohrverfahren)

Da im Abschnitt 3 „Greiferbohrverfahren (Schlagbohrverfahren)“ auf Seite 11 noch im Detail auf diese Pfahlherstellungsmethode eingegangen wird, sei hier nur so viel gesagt, dass es sich um ein intermittierendes Verfahren handelt, das im Schutz einer Verrohrung oder ohne Verrohrung erfolgen kann. Außerdem können mehrere, unterschiedliche Geräte (z.B.: Greifer, Schappen, Schnecken, Bohreimer und Meißel) zum Lösen und Fördern des Bodens eingesetzt werden.

2.6.2 Drehbohrverfahren

Bei diesem Verfahren wird der Boden mittels Bohrschnecke oder Bohreimer gelöst und gefördert. Dies kann einerseits diskontinuierlich mit kurzer Bohrschnecke, Drehbohr- oder Schürfeimer erfolgen, oder kontinuierlich mit einer durchgehenden Bohrschnecke. Bei beiden Verfahren wird der Boden durch eine drehend schneidende bzw. drehend reiße Wirkungweise des Bohrwerkzeuges (siehe Abb. 23 auf Seite 20) gelöst.

Beim diskontinuierlichen Drehbohrverfahren (siehe Abb. 8 auf Seite 8) wird die kurze Bohrschnecke oder der Schürfeimer mittels einer Teleskop-Stange (Kellystange) über ein Drehgetriebe, welches an einem Mätkler befestigt ist, angetrieben. Falls der anstehende Boden ausreichend standfest ist, kann unverrohrt gebohrt werden, anderenfalls kann das Bohrloch sowohl mit Flüssigkeit, als auch mit einer Verrohrung gestützt werden. Nach Erreichen der Endtiefe, wird ein Bewehrungskorb eingestellt und anschließend im Kontraktorverfahren betoniert.

Beim kontinuierlichen Bohren mit durchgehender Bohrschnecke (siehe Abb. 9 auf Seite 9) wird das Bohrloch, ohne Unterbrechung bis zur Endtiefe abgeteuft, währenddessen nur das nicht verdrängte Bohrgut gefördert wird. Dadurch wird das Bohrloch durch den in den Gängen der Schnecke befindlichen Boden gestützt. Nach Erreichen der gewünschten Tiefe wird die gefüllte Schnecke gezogen, während gleichzeitig durch ein Seelenrohr der freiwerdende Hohlraum mit Beton gefüllt wird. Anschließend kann gegebenenfalls noch ein Bewehrungskorb in die frische Betonsäule eingestellt oder eingerüttelt werden. Dieses Verfahren wird auch Schnecken-Ortbeton-Pfahl (SOB Pfahl) genannt.

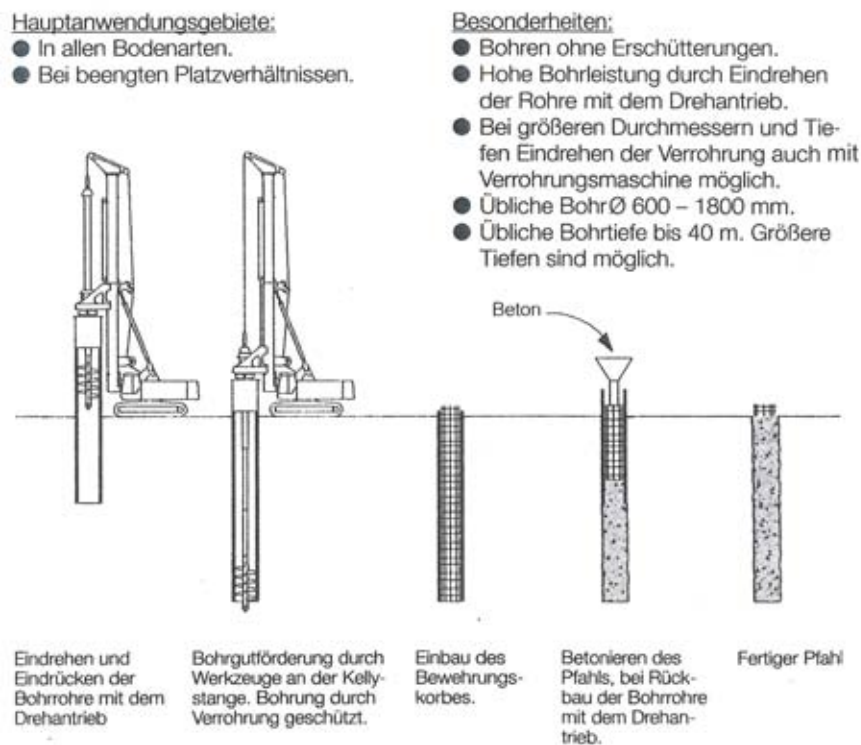


Abbildung 8: Bohren mit kurzer Bohrschnecke (Kellybohrverfahren) [18]

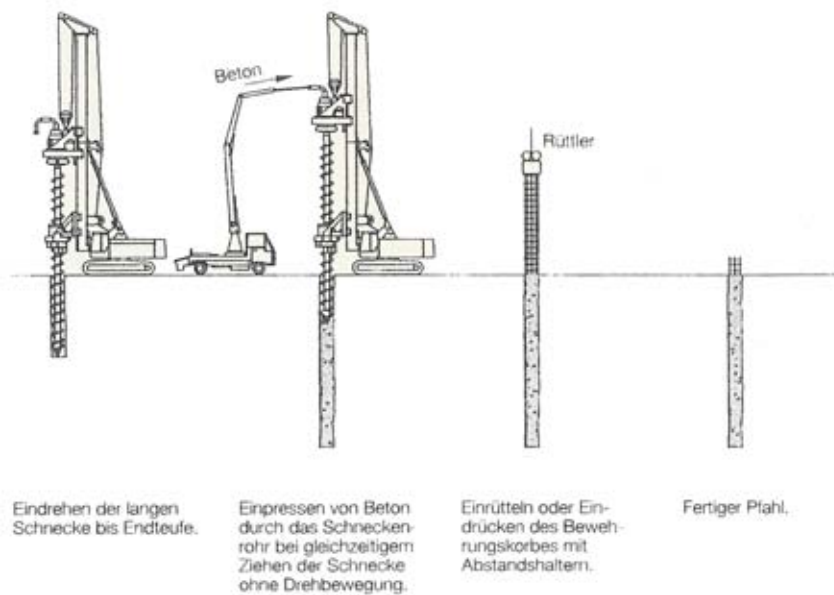


Abbildung 9: Bohren mit durchgehender Bohrschnecke (SOB Pfahl)[18]

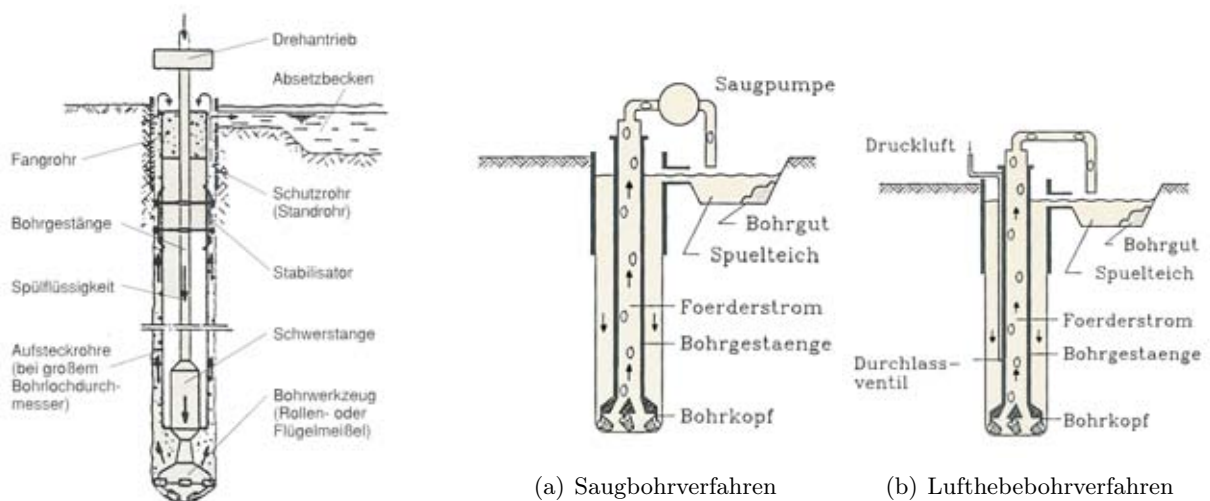


Abbildung 10: Direktes Spülbohrverfahren [31]

Abbildung 11: Indirektes Spülbohrverfahren [36]

2.6.3 Spülbohrverfahren

Bei dem Spülbohrverfahren wird der Boden nicht wie beim Drehbohrverfahren mit Hilfe des Bohrwerkzeuges gefördert, sondern der Boden wird lediglich durch Schneidwerkzeuge wie Flügelmeißel, Rollenmeißel oder Fußerweiterungsschneider gelöst und gleichzeitig mittels Spülstrom gefördert. Dieses Verfahren kommt dann zum Einsatz, wenn die erforderliche Teufe größer ist, als die von Trockendrehbohrverfahren erreichbare Tiefe. Das Bohrloch wird durch das Spülmedium, Bentonit-Suspensionen, oder aber auch klares Wasser, gestützt, so dass nur ein Standrohr zur Stabilisierung der obersten Bohrlochstrecke notwendig ist und sonst keine zusätzliche Verrohrung gebraucht wird. Das Bohrgut wird, nachdem es durch die Spülung an die Oberfläche transportiert wurde, von der Spülflüssigkeit in einem Absetzbecken oder Spülteich getrennt. Das Spülmedium übernimmt aber

nicht nur den Abtransport des Bohrgutes, sondern sorgt auch für ausreichende Kühlung des Bohrwerkzeuges [31].

Man unterscheidet zwei prinzipielle Verfahren:

- **Direktes Spülbohrverfahren (siehe Abb. 10 auf Seite 9):**

Bei diesem Verfahren, welches auch Rotaryverfahren genannt wird, wird die Spülflüssigkeit durch das hohle Bohrgestänge nach unten zur Bohrlochsohle gedrückt. Zwischen Bohrgestänge und Bohrlochwand, dem Ringraum steigt dann das Flüssigkeits-Bohrgut-Gemisch an die Oberfläche. Dieses Verfahren ist nur bis zu begrenzten Tiefen und Bohrl Lochdurchmessern wirtschaftlich, da mit zunehmendem Bohrl Lochdurchmesser und zunehmender Tiefe nur noch sehr leistungsstarke Pumpen den Spülstrom gewährleisten können.

- **Indirektes Spülbohrverfahren (siehe Abb. 11 auf Seite 9):**

Dieses Verfahren wird vor allem bei Bohrlöchern mit großem Durchmesser und in großen Tiefen eingesetzt. Anders als bei dem direkten Spülbohrverfahren wird die Spülflüssigkeit zuerst in den Ringraum geleitet, um anschließend durch das Bohrgestänge wieder an die Oberfläche befördert zu werden. In Abb. 11 auf Seite 9 sind die zwei am häufigsten angewendeten Verfahren abgebildet. Bei dem Saugbohrverfahren wird die Spülflüssigkeit mit dem Bohrgut durch eine am Bohrloch stehende Kreiselpumpe an die Oberfläche gesaugt. Bei dem Lufthebeverfahren wird hingegen Luft von unten in das Bohrgestänge eingeblasen, was einen Saugeffekt durch die Dichteunterschiede verursacht und das Luft-Flüssigkeits-Bohrgut-Gemisch an die Oberfläche befördert.

3 Greiferbohrverfahren (Schlagbohrverfahren)

Wie schon im Unterabschnitt 2.6.1 „Greiferbohrverfahren (Schlagbohrverfahren)“ auf Seite 8 erwähnt, wird bei diesem Verfahren das Bohrgut intermittierend meist mit einem Bohrgreifer gefördert, der zuvor auch den Boden löst. Werden während des Abteufen des Bohrloches harte Bodenschichten oder Fels angetroffen, können diese durch Einsatz eines Freifallmeißels durchhörtet werden. Das Lösen und Fördern des Bodens geschieht vorwiegend im Schutz eines Bohrrohres, das durch eine hydraulische Verrohrungs- oder Rohrdrehmaschine mit Hilfe von (oszillierenden) Drehbewegungen in den Untergrund gedrückt wird. Außerdem dient das Bohrrohr zur Führung des Greifers und des Meißels, für die vorwiegend ein Seilbagger als Trägergerät fungiert. Nach Abteufen des Bohrloches auf die gewünschte Tiefe wird der Bewehrungskorb eingestellt und das Bohrrohr, auf gleiche Weise wie es eingebracht wurde, gezogen, bei gleichzeitigem Betonieren im Kontraktorverfahren. Das Ablaufschema zur Herstellung eines Bohrpfahles mittels Greiferbohrverfahren ist in Abb. 12 auf Seite 11 ersichtlich.

Greiferbohren

verrohrt

mit Seilbaggern und Verrohrungsmaschinen

Hauptanwendungsgebiete:

- Böden wie Sande und Kiese, die an die Verrohrungstechnik erhöhte Anforderungen stellen,
- wenn der Einsatz von Fallmeißeln zum Zertrümmern von Fels und Steinen wirtschaftlich sinnvoll ist.

Besonderheiten:

- Systembedingte Erschütterungen erfordern Mindestabstände zu bestehenden Bauwerken.
- Übliche Bohrdurchmesser ca. 620 – 2000 mm.
- Übliche Bohrtiefe bis 50 m.

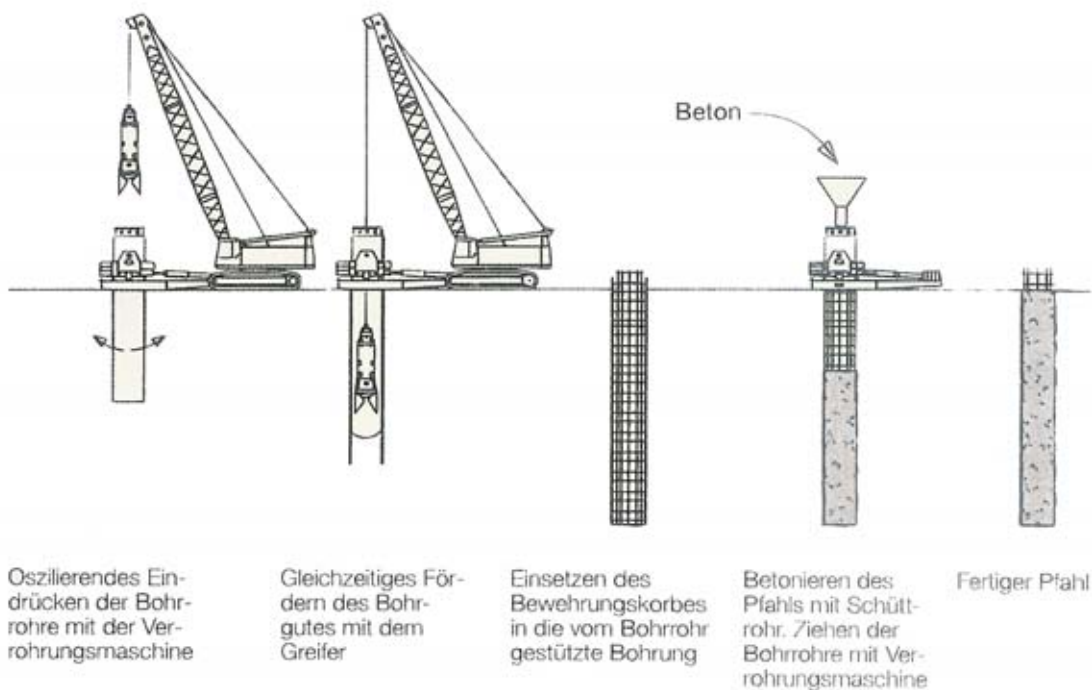


Abbildung 12: Pfahlherstellung mit dem Greiferbohrverfahren [18]

Die grundlegende Geräteausstattung für das Schlagbohrverfahren sieht somit folgendermaßen aus [31]:

- | | | |
|---|---|------------|
| (a) Trägergerät (Seilbagger) | } | Bohranlage |
| (b) Bohrgerät (Verrohrungsmaschine) | | |
| (c) Bohrwerkzeuge (Bohrrohr, Bohrgreifer, Bohrmeißel) | | |
| (d) Zubehör (Antriebsaggregate, Schläuche, etc.) | | |

Der große Vorteil dieser Pfahlherstellungsmethode ist die hohe Variabilität, bedingt durch unterschiedliche Bohrwerkzeuge und die daraus resultierende ausgezeichnete Anpassungsfähigkeit auf wechselnde Untergrundverhältnisse, sowie ihre gute Anwendbarkeit bei Grundwasser. Dies macht das Schlagbohrverfahren gerade bei schwierigen Untergrundbedingungen zu einem sehr konkurrenzfähigen und wirtschaftlichen Herstellungsverfahren von Pfählen.

3.1 Verrohrungsmaschine

Die Verrohrung, die zum Schutz des Bohrloches erstellt wird, kann prinzipiell auf folgende unterschiedliche Arten in den Untergrund eingebracht werden:

- **Mit Hilfe eines Fallbären:**
Fallbären, auch Fallgewichte oder Jumbos genannt, sind durch einen Boden geschlossene, zylindrische Hohlkörper, die auf die Bohrrohre fallengelassen werden und diese somit schlagend in den Boden eintreiben.
- **Mit Hilfe eines Vibrationsbären od. Gürtelvibrators:**
Sowohl die Vibrationsbären, als auch die Gürtelvibratoren, bringen durch eine Vibrationsbewegung, unterstützt durch das Eigengewicht des Vibrationsbären oder des Gürtelvibrators, die Verrohrung in den Boden ein.
- **Mit Hilfe einer HW-Schwinge:**
Beim HW-Pfahlbohrverfahren (Hochstrasser und Weise) bewirkt eine Drehschwinge (HW-Schwinge) eine oszillierende Drehbewegung der Bohrrohre. Dadurch und durch das Gewicht der Schwinge werden die Bohrrohre in den Untergrund eingebracht.
- **Mit Hilfe einer hydraulischen Verrohrungsmaschine (heute üblich):**
Die hydraulische Verrohrungsmaschine bringt die Bohrrohre mit einer oszillierenden Drehbewegung in den Untergrund ein und kann diese auch auf gleiche Weise wieder ziehen.

Da beim Greiferbohrverfahren vorwiegend die **hydraulische Verrohrungsmaschine** (VRM) zum Einsatz kommt, wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit das Hauptaugenmerk auf diese Verrohrungsmaschine gesetzt. Über eine Teleskopdeichsel (siehe Abb. 13 auf Seite 13) wird die VRM an dem Trägergerät (meist ein Seilbagger, aber auch Hydraulikbagger möglich) gelenkig befestigt, so dass eine vertikale und axiale Ausrichtung gewährleistet ist.

Durch Klemmschellen, die über hydraulische Schließzylinder an die Rohre gepresst werden, erfolgt die kraftschlüssige Verbindung zu der Verrohrung. Mit Hilfe von zwei Oszillationszylindern und zwei Hubzylindern werden die einzelnen Rohrglieder mit einer oszillierenden Drehbewegung in den Untergrund eingepresst. Die dabei entstehenden horizontalen Reaktionskräfte werden über das Fahrwerk des Trägergerätes in den Boden eingeleitet. Für die vertikalen Kräfte, resultierend aus dem Eindringen der Bohrrohre, bildet das Gewicht der Verrohrungsanlage praktisch das Widerlager aus. Somit ist die Vorschubkraft und das Drehmoment durch Verrohrungsanlage und Trägergerät begrenzt.

Beim Ausbau der Verrohrung muss darauf geachtet werden, dass der Grundrahmen satt auf dem Planum aufliegt, damit es nicht zu einer großen Biegebeanspruchung der Rohre kommt. Wenn dies

der Fall ist, können die Kräfte sehr gut über das Trägergerät in den Boden abgetragen werden, wodurch nur die Hubzylinder eine Begrenzung der Zugkräfte (bis zu 200t) bewirken [31].

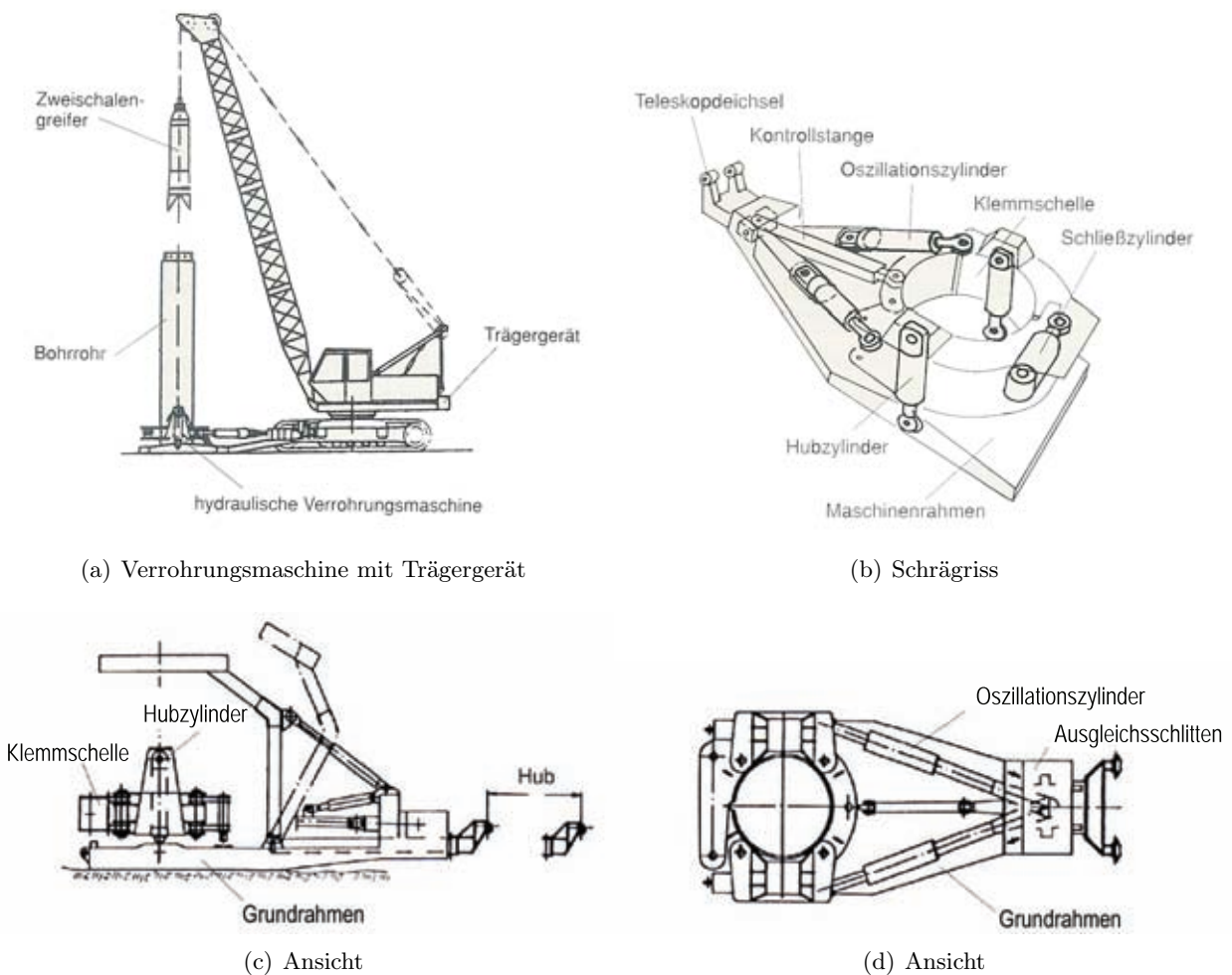


Abbildung 13: Hydraulische Verrohrungsmaschine [31]

3.2 Bohrwerkzeuge

Im Gegensatz zu den Bohrgeräten arbeiten die Bohrwerkzeuge nicht selbst, sondern müssen durch Maschinenkraft betätigt werden. Die zahlreichen unterschiedlichen Ausbildungen der Bohrwerkzeuge sind darin begründet, dass die Bauindustrie danach strebt, für unterschiedliche und zum Teil rasch wechselnden Untergrundverhältnisse, immer das wirkungsvollste und demnach wirtschaftlichste Werkzeug im Einsatz zu haben [31].

3.2.1 Bohrrohr

Die Verrohrung dient dem Schutz bzw. der Stützung des Bohrloches, wodurch die Bohrröhre dem Außendruck, durch Erd- und Wasserdruck standhalten müssen. Weiters wird die Verrohrung auch als Führung für andere Bohrwerkzeuge (Bohrgreifer, Bohrmeißel, Sandpumpe, Meißelbüchse, etc.) verwendet, so dass die Innenseite der Röhre frei von Vorsprüngen oder anhaftendem Beton sein soll. Außerdem müssen die Bohrröhre und deren Verbindungen in der Lage sein die Längskräfte und Torsionsmomente, die während dem Einbringen und Ziehen auftreten, aufnehmen zu können [18].

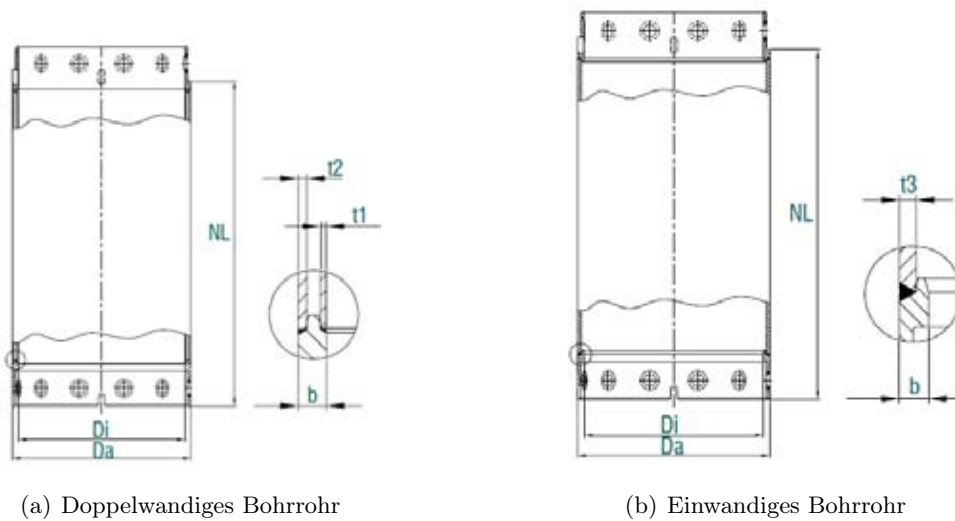


Abbildung 14: Bohrrohre [2]

- **Doppelwandiges Bohrrohr**

Diese Bohrrohre werden vor allem bei großen Torsionsbeanspruchungen eingesetzt und bestehen aus einem Innen- und Außenrohr (siehe Abb. 14 auf Seite 14), deren Zwischenraum durch Rippen stabilisiert wird. Die einzelnen Teile des Bohrrohres (Schüsse) können eine Länge von bis zu 12m, einen Durchmesser von bis zu 3000mm und einer Wanddicke von bis zu 50mm aufweisen.

- **Einwandiges Bohrrohr**

Einwandige Bohrrohre, deren Wandstärke zwischen 10 und 25mm variiert, kommen vor allem beim HW-Verfahren und beim Vibrationsverfahren zum Einsatz und werden entweder durch Schweißverbindungen oder durch lösbare Kupplungen zusammengefügt.

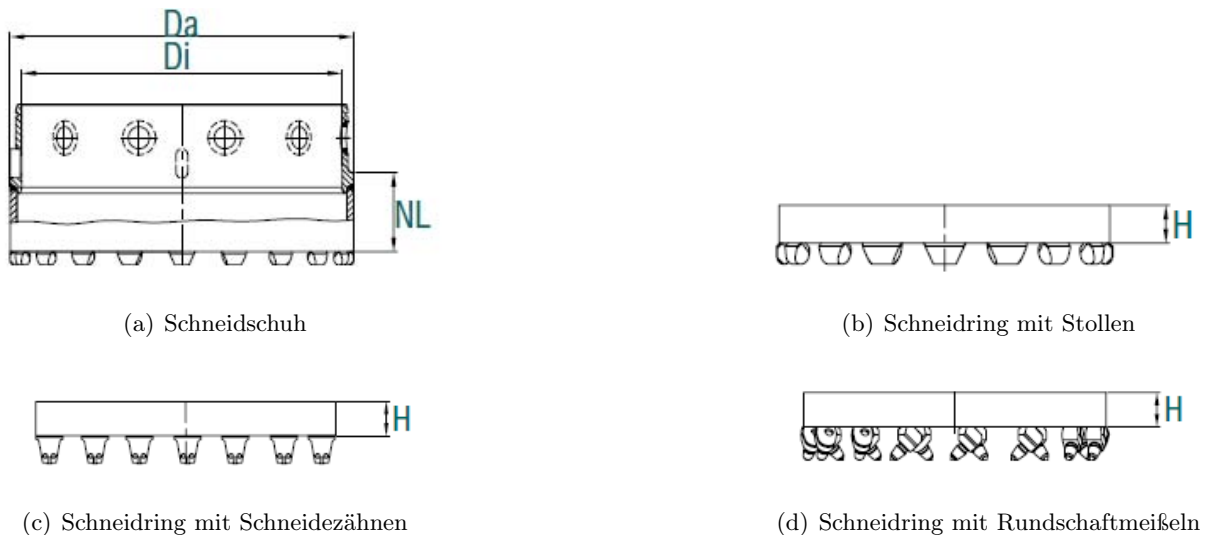


Abbildung 15: Schneidschuh mit unterschiedlichen Schneidringen [2]

- **Schneidschuh**

An dem ersten Rohrschuss wird ein sogenannter Schneidschuh mit einem Schneidring (siehe Abb. 15 auf Seite 14), dessen Ausbildung abhängig vom Boden stark variieren kann, angebracht. Dieser ermöglicht es meist überhaupt erst das Bohrrohr in den Untergrund einzutreiben.

3.2.2 Bohrgreifer

Der Bohrgreifer, der aus dem Greiferkörper, dem Schließmechanismus für die Greiferspaten und den Greiferspaten besteht, kann sowohl zu den Aushub- als auch zu den Bohrwerkzeugen gezählt werden. Dies liegt darin begründet, dass der Greifer den Boden durch eine schlagend-greifende Wirkung löst und fördert. Somit erklärt sich auch das Haupteinsatzgebiet, das auf Böden aus Ton, Schluff, Sand und Kies liegt, da diese Böden leicht lösbar und gut greifbar sind. Trotzdem gibt es weitere Einflussfaktoren wie die Korngrößenverteilung, die Scherfestigkeit, die Lagerungsdichte und den Wassergehalt, die die endgültige Ausbildung des Greifers festlegen. Je nach Untergrundverhältnissen und Baustellengegebenheiten wird die Greifergeometrie, die Schaufelausführung, der Schaufelinhalt, die maximale Schließkraft und das Hebezeug ausgewählt und angepasst, um ein optimales wirtschaftliches Ergebnis zu erzielen. Die Bohrgreifer die zur Pfahlherstellung verwendet werden, lassen sich durch ihre kinematischen Schließmechanismen wie folgt gliedern ([31], [61]):

- **Mechanische Bohrgreifer:**(siehe Abb. 16 auf Seite 15)

Die mechanischen Bohrgreifer lassen sich weiter in Einseilgreifer und Zweiseilgreifer unterscheiden.

Bei den *Einseilgreifern* übernimmt ein Seil sowohl die Hub- als auch die Schließfunktion. Die großen Schließkräfte können durch Einscheren des Schließseiles in Seilrollen einer Ober- und einer Unterflasche erreicht werden. Dieser Mechanismus wird so lange durch Sperrelemente blockiert, bis das Schließseil entlastet wird. Allerdings kann es hier, vor allem bei harten Aufschlägen auf im Bohrloch stehendes Wasser, zum ungewollten frühzeitigen Schließen kommen.

Der *Zweiseilgreifer* hat ein Hubseil und ein extra Schließseil. Ein im Greiferkörper vorhandenes starkes Federpaket bewirkt, dass die Greiferspaten offen gehalten werden. Dadurch ist es im Gegensatz zum Einseilgreifer möglich, über das Hubseil den Greifer mehrmals hintereinander auf die Bohrlochsohle aufsetzen zu lassen und mit Hilfe des Schließseiles kann der Greifer auch zwischengeschlossen werden, was den Füllungsgrad erhöhen kann. Außerdem erlauben Übersetzungshebel den Schließmomentenverlauf den zu greifenden Böden anzupassen.

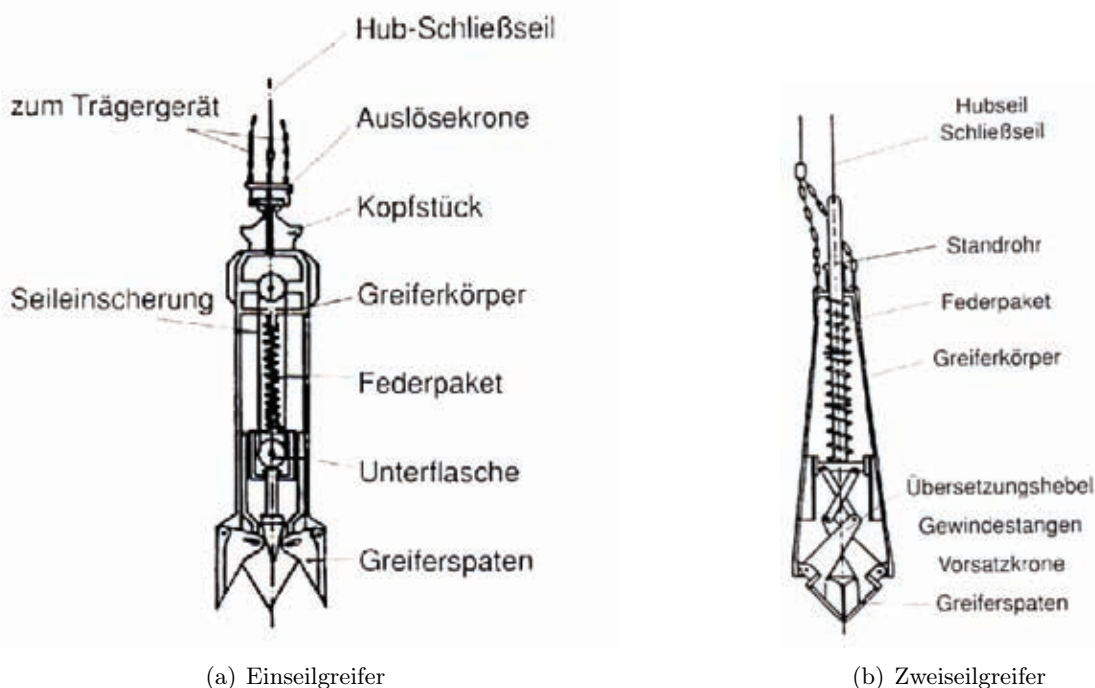


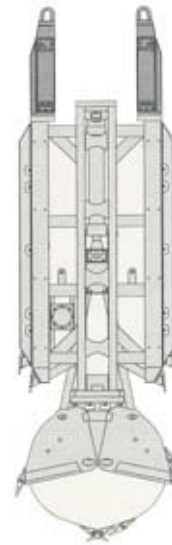
Abbildung 16: Mechanische Bohrgreifer [31]

- **Hydraulische Bohrgreifer:**(siehe Abb. 17 auf Seite 16)

Hydraulikgreifer sind in ihrem Aufbau und Aussehen den konventionellen Seilgreifern sehr ähnlich. Sie werden auch an einem Seil geführt, lediglich der Schließmechanismus unterscheidet sich. Bei den hydraulischen Bohrgreifern, die sich ursprünglich aus den Schlitzwandgreifern entwickelt haben, werden durch meist vertikal angeordnete Hydraulikzylinder sehr große Schließkräfte aktiviert. Durch das Ein- und Ausfahren des Zylinders erfolgt die Schließ- und Öffnungsbewegung der Bohrgreiferschaufeln. Bei dieser Art von Greifer ist es allerdings notwendig Hydraulikschläuche bis zum Greifer zu führen.



(a) Hydraulikgreifer mit Trägergerät



(b) Hydraulikgreifer mit senkrechtem Zentralzylinder

Abbildung 17: Hydraulische Bohrgreifer [3]

3.2.3 Bohrmeißel

Der Bohrmeißel ist ein aus Stahl gefertigtes Werkzeug zum Lösen von harten, felsähnlichen Bodenschichten und wird alternierend zum Bohrgreifer eingesetzt, falls man auf Bodenschichten stößt, die nicht mehr mit dem Greifer zu lösen sind. Über ein am Gehänge befestigtes Seil wird der Meißel angehoben und im freien Fall (daher Freifallmeißel) auf die Bohrlochsohle fallen gelassen. Um eine möglichst große Zerstörungsarbeit leisten zu können, sind Gewicht und Fallhöhe des Meißels sehr entscheidend. Außerdem ist vor allem im Unterwassereinsatz auf eine möglichst strömungsgünstige Form zu achten, damit nicht zu viel Energie durch den Aufprall auf dem Wasser, sowie durch den Strömungswiderstand und die Auftriebskraft, verloren gehen. Durch diese unterschiedlichen Anforderungen werden folgende Hauptbestandteile des Meißels maßgebend in ihrer Form und Ausbildung bestimmt ([31], [61]):

- **Meißelkörper**

Der Meißelkörper besteht aus massivem Stahl und kann bis zu einigen Metern lang sein. Er muss die Reaktionskräfte, die beim Aufschlag auf der Bohrlochsohle entstehen, schadlos aufnehmen können. Außerdem wird durch die Länge und den Aufbau des Meißelkörpers maßgebend Einfluss auf das Eigengewicht des Meißels und somit auf die Aufschlagenergie (=kinetische Energie des Meißels) genommen. Dabei ist zu beachten, dass die minimal erforderliche Aufschlagenergie für den Löseprozess nicht unterschritten wird. Je nach Untergrundbeschaffenheit und durch das Streben nach erhöhter Wirtschaftlichkeit sind unterschiedlichste

Meißelkörper (siehe Abb. 18 auf Seite 17) entstanden, die teilweise auch kombiniert werden (Ring-Flachmeißel, Kreuz-Flachmeißel). Eine Besonderheit stellen die Wendemeißel dar, die an beiden Seiten unterschiedliche Meißelschneiden aufweisen und je nach Bedarf über eine, an beiden Seiten vorgesehene Aufhängung verwendet werden können.

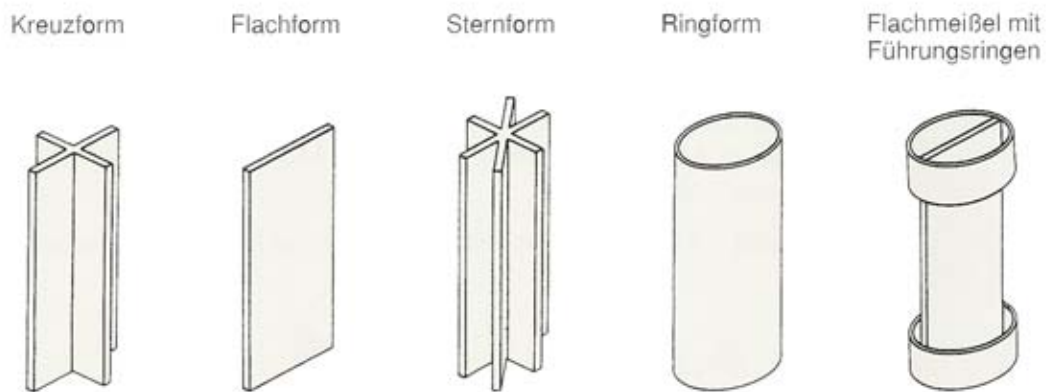


Abbildung 18: Aufbau von Meißelkörpern [31]

- **Meißelschneide**

Die zugespitzte Kante am Ende eines Meißels wird Meißelschneide genannt, durch die der Meißel in den Untergrund eindringt und dessen Ausbildung entscheidend zum wirtschaftlichen Bohrfortschritt beiträgt. Sie unterscheiden sich nicht nur in der Form und der Ausbildung der Schneidenwinkel, sondern auch in der Anordnung und Anzahl (siehe Abb. 19 auf Seite 17).

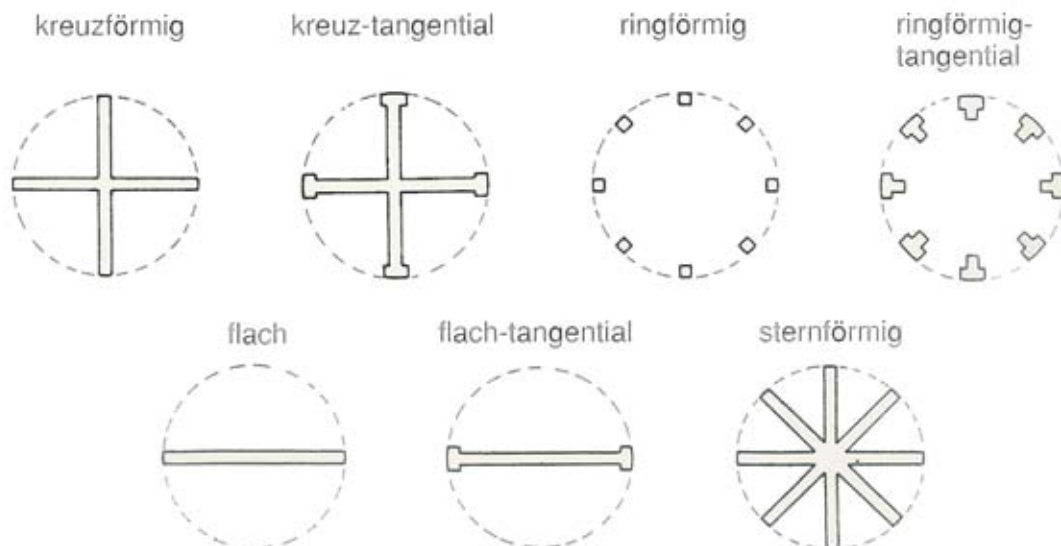


Abbildung 19: Anordnung der Meißelschneiden [31]

Vor allem der Ausbildung der Meißelschneide muss wesentliche Beachtung geschenkt werden, da diese spitz oder stumpf (siehe Abb. 20 auf Seite 18) erfolgen kann. Der Winkel kann je nach Untergrundverhältnissen zwischen 50° und 120° variieren. Bei Weichgesteinen kommen hauptsächlich Flachmeißel mit Schneiden, die in einem Winkel von 50° bis 70° ausgeführt werden, zum Einsatz. Durch die wesentlich höhere Druckfestigkeit bei hartem Fels werden hier

vermehrt Kreuzmeißel mit Schneiden, deren Winkel bis zu 120° betragen kann, verwendet.

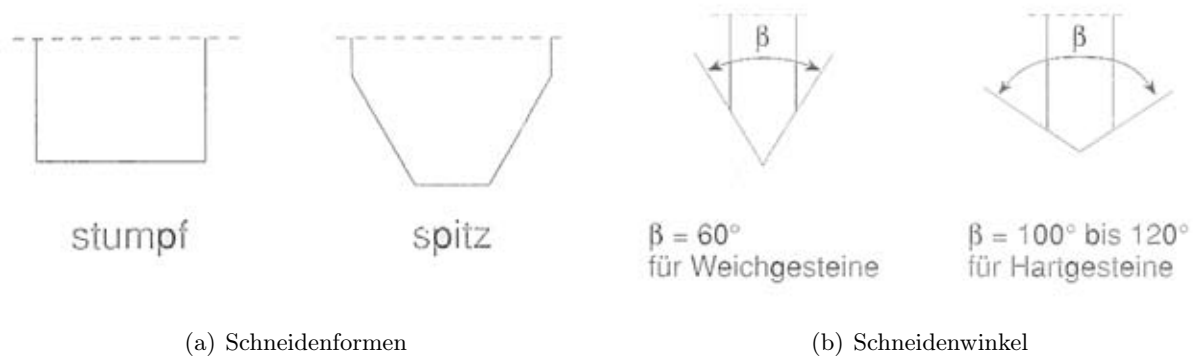


Abbildung 20: Schneidenformen und Schneidenwinkel [31]

Da wie bereits erwähnt die Meißelschneide eine entscheidende Rolle bei dem Bohrfortschritt spielt, sollte besondere Aufmerksamkeit auf deren Pflege und Wartung gelegt werden. Vor allem, aber nicht nur, beim Arbeiten im sehr harten abbrassiven Fels ist auf eine ausreichende Panzerung der Meißelschneide zu achten. Die Panzerung, die je nach Verschleiß rechtzeitig erneuert bzw. nachgearbeitet werden muss, erfolgt durch Auftragschweißung (siehe Abb. 21 auf Seite 18) mit geeigneten Elektroden.

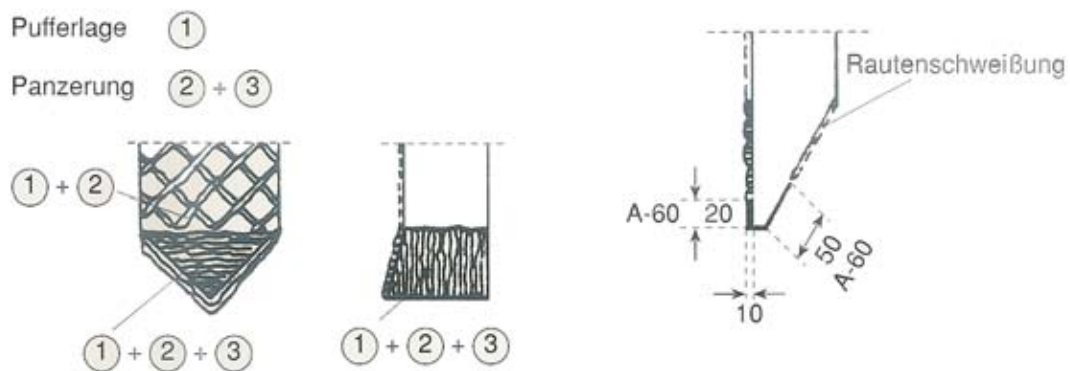


Abbildung 21: Schweißarbeiten an Meißelschneiden [31]

• Meißelführung

Die nachfolgend genannten Elemente der Meißelführung dienen einerseits dazu den Meißel optimal im Bohrrohr zu führen, damit es möglichst zu keinen störenden Anschlagbewegungen des Meißels an das Bohrrohr kommt. Andererseits soll mit Hilfe der Meißelführung erreicht werden, dass sich der Meißel im Bohrloch dreht, so dass eine gleichmäßige Bearbeitung der Bohrlochsohle gewährleistet ist. Dies wird durch folgende Elemente ermöglicht:

– Führungsringe

Meist werden Führungsringe an die Meißelkörper angeschweißt, um die optimale Führung im Bohrrohr zu ermöglichen. Eine andere Möglichkeit besteht darin den gesamten Meißelkörper mit einem Rohrmantel zu umhüllen.

– Zwangsumsetzwirbel (siehe Abb. 22 auf Seite 19)

Durch den Umsetzwirbel ist es möglich den Meißel zu drehen um die gesamte Fläche der Bohrlochsohle zu bearbeiten. Hauptbestandteil ist ein ölgefülltes Kolbengehäuse, in dessen Innerem sich Zahnkränze mit einseitig geneigten Zähnen und einer Spannfeder

befinden. Die Zahnkränze kommen durch Be- und Entlastung des Gehäuses zum Einsatz und bewirken, dass das Kolbengehäuse umgesetzt wird. Durch dieses Umsetzen wird das Seil, an dem der Meißel hängt, verdreht. Dies bewirkt in Abhängigkeit von der Länge des Seiles, allerdings erst nach einigen Meißelhüben ein Drehen des Bohrmeißels.

– Lenkbleche

Wie in [35] eingehend untersucht, bewirken geneigte Umlenkbleche, die am hinteren Teil des Meißels angeschweißt werden, bei Fallvorgängen im Wasser eine Drehbewegung des Bohrmeißels. Die Neigung und Länge der Lenkbleche bestimmt das Ausmaß der Drehbewegung, reduziert aber durch den erhöhten Strömungswiderstand die Fallgeschwindigkeit und somit die Löseenergie des Meißels an der Bohrlochsohle. Weiters dienen diese Bleche auch als Versteifungselement für die Führungsringe.

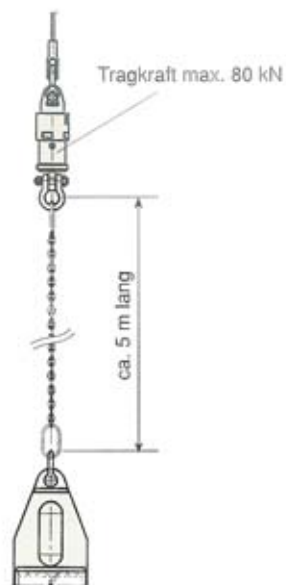


Abbildung 22: Zwangsumsetzwirbel [31]

4 Überblick über die maschinelle Gesteinslösung

Locker- oder Festgestein kann auf unterschiedlichste Arten gelöst werden. Welches Löseverfahren und in weiterer Folge welche Maschinen und Werkzeuge für das Lösen verwendet werden, hängt unter anderem von der Beschaffenheit des Untergrundes (Festigkeit), der Größe des zu erstellen Hohlraumes (Kavernen, Tunnel, Kleinbohrpfähle, ect.) und der Lage (Obertage, Untertage, Tiefbohrungen) ab. Prinzipiell werden folgende Möglichkeiten Gestein zu lösen unterschieden:

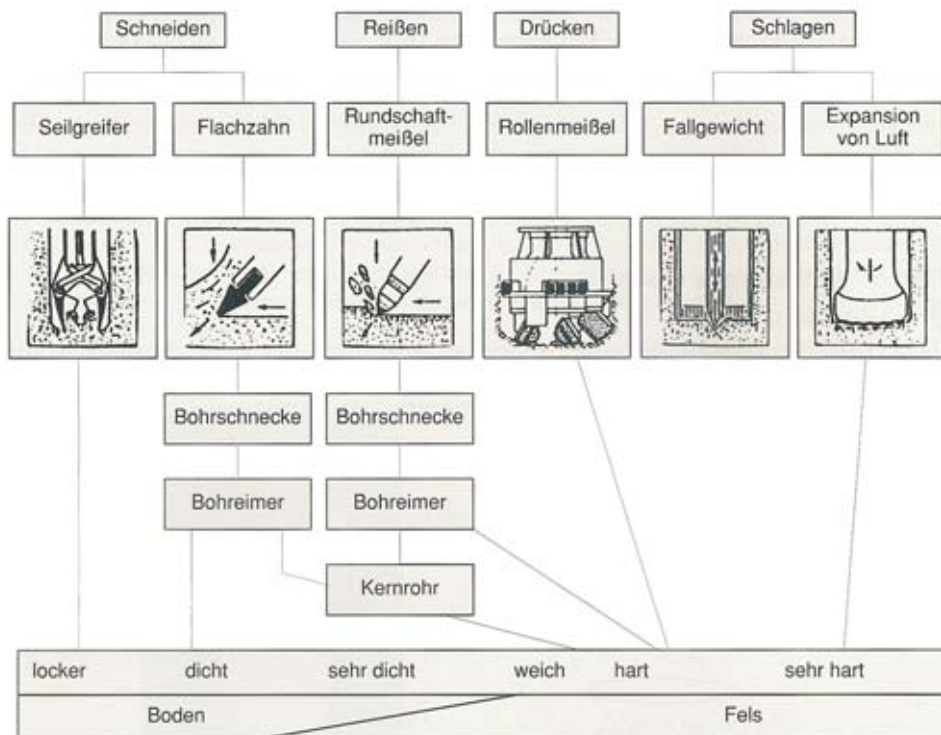


Abbildung 23: Lösen des Bodens [31]

4.1 Arten der Gesteinslösung

- **Schneidendes Lösen**

Der Einsatzbereich des schneidenden oder auch schabenden Lösens liegt bei locker bis dicht gelagerten bzw. weich bis halbfesten Böden und hat sich aus der Handarbeit mit der Schaufel entwickelt. Zu diesem Verfahren können der Bohrgreifer aber auch die Schneidzähne von Bohrschnecken oder Bohreimern gezählt werden. Bei dem Bohrgreifer ist es entscheidend mit welcher kinetischen Energie die Greiferschaufeln auf den Boden aufprallen, da dies zusammen mit der Beschaffenheit des Bodens, die Eindringtiefe wesentlich beeinflusst. Beim Einsatz von Schneidzähnen (hauptsächlich beim Drehbohrverfahren, siehe Unterabschnitt 2.6.2 „Drehbohrverfahren“ auf Seite 8), wird je nach Neigung dieser Zähne mehr oder weniger Material pro Umdrehung gelöst.

- **Reißendes Lösen**

Das reißende Lösen findet vor allem bei hartem, sehr dichtem Boden bzw. bei weichem bis hartem Fels, Verwendung. Ähnlich zu den schräggestellten Schneidzähnen wird bei diesem Verfahren ein schräggestellter Reißzahn, meist ein Rundschaffmeißel, verwendet, der durch Drehbewegung des Bohrwerkzeuges, an dem der Reißzahn befestigt ist, eine Furche in den Boden bzw. Fels reißt. Außerdem wird das Bohrwerkzeug an den Boden angepresst, da sonst der

Rundschaftmeißel die Tendenz hat beim Reißen aus dem Material herauszuwandern. Mit diesem Verfahren ist es durch den heutigen Stand der Technik (große Drehmomente, extrem stabile Reifzähne) möglich Fels von einer Festigkeit bis zu $100\text{MN}/\text{m}^2$ zu lösen [31].

- **Schlagendes Lösen**

Bei dieser Löseart, welche vor allem im sehr harten Fels zum Einsatz kommt, wird eine hohe punktförmige Last auf den Fels aufgebracht, so dass dieser zerstört wird (siehe hierzu auch Unterabschnitt 4.4 „Mechanismen der Gesteinslösung“ auf Seite 23). Die Art der Lastaufbringung kann durch Schlagen mit Fallgewichten (Freifallmeißel) oder durch Schlagen durch Expansion von Luft (Im-Loch-Hammer) erfolgen. Das Schlagen mit Fallgewichten ist die früheste Form der Gesteinszerstörung. Eine entscheidende Rolle für den Bohrfortschritt spielen hierbei unter anderem das Gewicht des Fallmeißels, seine Form, die Zahl der Schläge je Zeiteinheit und die Ausbildung der Meißelspitze. Beim Schlagen durch Explosion dringen Hartmetallwarzen, die über die gesamte Fläche der Bohrkronen verteilt sind, durch Schläge von einem mit Druckluft beschleunigten Kolben, in das Gestein ein. Gleichzeitig wird die Bohrkronen noch gedreht, so dass der Lösevorgang möglichst gleichmäßig über die gesamte Bohrlochsohle erfolgt. Die guten Bohrleistungen werden vor allem durch die hohe Schlagzahl ermöglicht. Allerdings ist das Schlagen durch Expansion von Luft durch den Druckluftbedarf, der mit dem Quadrat des Bohrdurchmessers steigt, begrenzt, wodurch diese Methode in der Praxis nur bis Durchmesser von 800mm eingesetzt wird [31].

- **Drückendes Lösen**

Das drückende Lösen ist eine Mischform aus schneidendem, reißendem und schlagendem Lösen, da hier einerseits der Boden durch eine hohe punktförmige Last (Schlagendes Lösen) zerstört wird, andererseits durch die Schrägstellung von Stiften oder Disken ein (Unter-)Schneiden oder Reißen des Bodens bewirkt wird.

4.2 Maschinen für die Gesteinslösung

Vor allem in den letzten Jahrzehnten hat die Entwicklung von Maschinen zum Lösen von Gestein einen rasanten Verlauf genommen. Prinzipiell lassen sich diese Maschinen durch ihr Einsatzgebiet wie folgt gliedern:

- **Maschinen für die Herstellung von Tunnels ($0,10\text{m} < \varnothing < 19\text{m}$)**

Tunnel sind meist kreisförmige, annähernd waagrecht hergestellte Hohlräume, die entweder zur Versorgung (Gas, Strom, Wasser, etc.) oder für den Transport (Straßen-, Eisenbahntunnel) verwendet werden. Wie aus Abb. 24 auf Seite 22 ersichtlich, reicht der Einsatzbereich der Tunnelvortriebsmaschinen von kleinen Durchmessern bis zu Durchmessern von 19 Meter. Auch kann der unterschiedlichste Untergrund durchfahren werden. Bei den meisten Tunnelvortriebsmaschinen (Tunnelbohrmaschinen (TBM) und Schildmaschinen) wird das Gestein mit Disken (siehe Unterabschnitt 4.3 „Lösewerkzeuge“ auf Seite 23) und der sogenannten Hinterschneidetechnik (siehe Unterabschnitt 4.4 „Mechanismen der Gesteinslösung“ auf Seite 23) gelöst.

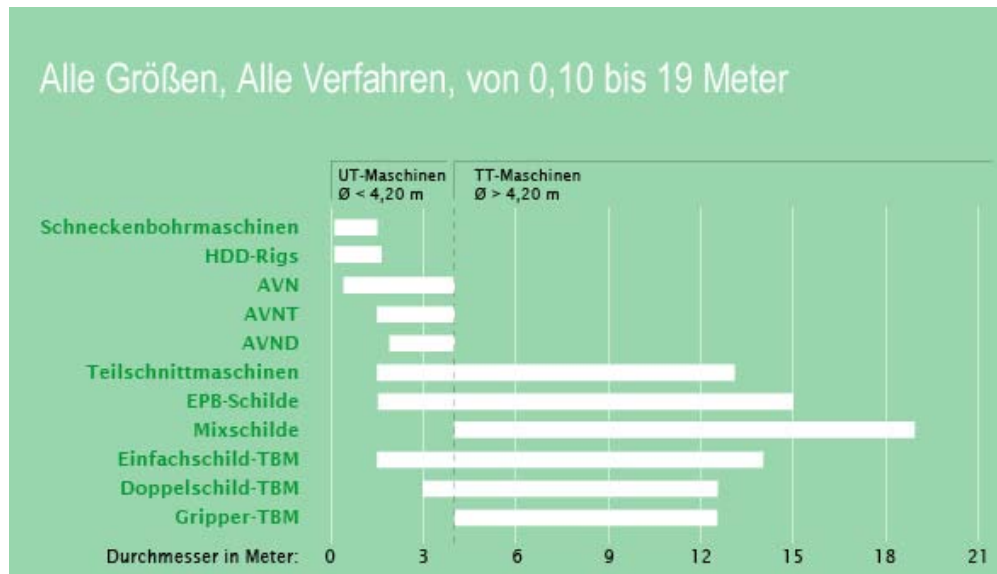


Abbildung 24: Überblick über Tunnelvortriebsmaschinen [1]

- **Maschinen für den Abbau von Rohstoffen**

Beim Abbau von Rohstoffen (Metallen und Mineralien) kommen Abbaugeräte (Mining Maschinen) wie Teilschnittmaschinen, Continuous Miners, Raisebohrer und Mobile Tunnel Miners zum Einsatz. Die Rohstoffe werden durch Rundschaftmeißel aus Hartmetall, die an einem sich drehenden Bohrwerkzeug befestigt sind, reißend gelöst (siehe Abb. 25 auf Seite 22).



Abbildung 25: Teilschnittmaschine [1]

- **Maschinen für die Herstellung von Bohrungen (Durchmesser < 3000mm)**

Bohrungen können, abhängig vom Verfahren, sowohl vertikal, geneigt als auch horizontal erfolgen. Bei Bohrungen ist die Vielfalt der Maschinen, bedingt durch die unterschiedlichen Verwendungszwecke, am größten. Auch im Bezug auf die Löseart, kommen hier vom schneidenden, reißenden, drückenden bis zum schlagenden Lösen, alle Arten zum Einsatz.

- Ankerbohrung - horizontal, geneigt oder vertikal, schlagend (Expansion von Luft) hergestellte Bohrungen
- Erdölbohrung - vertikal, durch drückendes Lösen (Rollenmeißel) hergestellte Bohrungen

- Pfahlbohrung - vertikal oder geneigt, schneidend, reißend oder schlagend hergestellte Bohrungen

4.3 Lösewerkzeuge

Die Lösewerkzeuge lassen sich einerseits durch ihre Form und andererseits durch ihre Art das Gestein zu lösen wie folgt einteilen:

- **Schneid- oder Rollenmeißel** (siehe Abb. 26(a) auf Seite 23)

Der große Vorteil von Rollenbohrwerkzeugen ist, dass die Andruckkraft gegenüber anderen Bohrwerkzeugen, bei gleichzeitiger Steigerung des Bohrfortschrittes, verringert wird. Deshalb kommt diese Art von Meißel besonders in sehr hartem Gestein zur Anwendung. Vorwiegend kommen hierbei sogenannte Disken (konische Bohrwerkzeuge - siehe Abschnitt 5 „Gesteinslösung bei Diskenmeißeln“ auf Seite 25) zum Einsatz, die eine eigene Abroll- Schneidebewegung ausführen und den Energieaufwand, Werkzeugverschleiß und Staubentwicklung erheblich reduzieren [8].

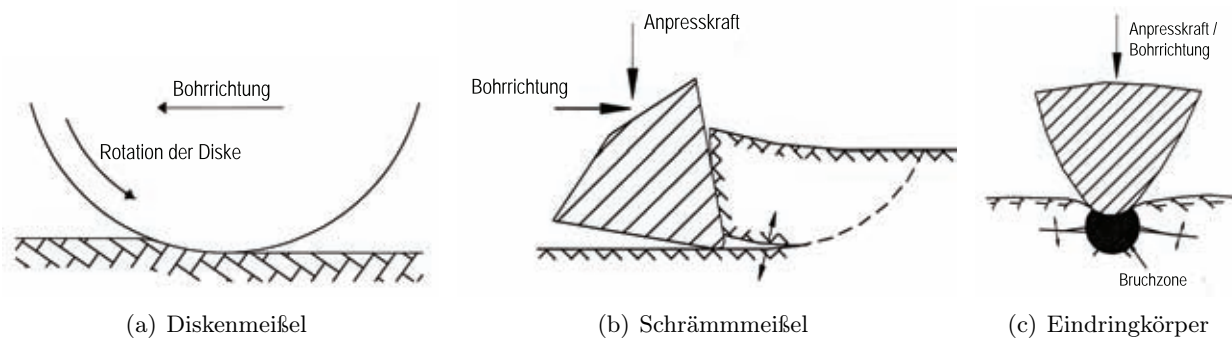


Abbildung 26: Lösewerkzeuge für Festgestein [27]

- **Schrämmmeißel** (siehe Abb. 26(b) auf Seite 23)

Schrämmmeißel (englisch: Drag picks/bits) lösen das Gestein durch einen schrmend, schabenden Vorgang (siehe Abschnitt 6 „Gesteinslösung bei Schrämmmeißeln“ auf Seite 37). Diese Lösewerkzeuge haben üblicherweise eine Keil- bzw. eine Kegelform, da mit einer Kugelform dieser für diese Werkzeuge typische Lösevorgang nicht möglich wäre. Im Unterschied zu den Eindringkörpern bewegt sich der Schrämmmeißel parallel zur Gesteinsoberfläche. Gleichzeitig wird der Meißel, dessen Achse unter einem bestimmten Winkel gegenüber der Lotrechten geneigt ist, an das Gestein angepresst.

- **Eindringkörper** (siehe Abb. 26(c) auf Seite 23)

Eindringkörper können je nach Bedarf und Einsatzgebiet keil-, kegel- oder kugelförmig ausgebildet sein, wodurch der Gesteinslsungsprozess jeweils etwas voneinander differiert. Der wesentliche Unterschied zu den anderen Lsewerkzeugen ist, dass die Kraftrichtung, die Achse des Eindringkörpers und die Eindringrichtung ident und normal zur Gesteinsoberfläche gerichtet sind. Der genaue Lösevorgang wird in Abschnitt 7 „Gesteinslösung bei Eindringkörpern“ auf Seite 69 beschrieben.

4.4 Mechanismen der Gesteinslösung

Der Mechanismus der Gesteinslösung ist ein sehr komplexer Prozess, weshalb in der Literatur vorwiegend sehr vereinfachte Bruchmodelle, welche größtenteils auf experimentellen Untersuchungen basieren, gefunden werden, die den Prozess der "Chip-Bildung" beschreiben. "Chips" werden die plattigen Gesteinsteile genannt, die während des Lösungsprozesses entstehen.

Es wird allgemein angenommen, dass der Prozess der Gesteinszerkleinerung vorwiegend durch die oben bereits erwähnte "Chip-Bildung" bestimmt wird. Die Ausbildung von "Chips" wird durch die Primär- und Sekundärrissbildung und Ausbreitung verursacht, die durch die Bruchmechanik qualitativ und quantitativ gut beschreibbar ist. Im weiteren Verlauf (siehe Abschnitt 5 „Gesteinslösung bei Diskenmeißeln“ auf Seite 25, Abschnitt 6 „Gesteinslösung bei Schrämmmeißeln“ auf Seite 37 und Abschnitt 7 „Gesteinslösung bei Eindringkörpern“ auf Seite 69) werden unterschiedliche Modelle und bruchmechanische Prinzipien für die Gesteinslösung bei Diskenmeißeln, Schrämmmeißeln und Eindringkörpern angeführt und erläutert.

5 Gesteinslösung bei Diskenmeißeln

Die Entwicklung von Diskenmeißeln erfolgt aus dem Bestreben und der Notwendigkeit effiziente und wirtschaftliche Bohrwerkzeuge für hartes und abrasives Gestein zu finden. Heute werden Diskenmeißeln vor allem bei Tunnelbohrmaschinen (TBM) eingesetzt. Die Gesteinslösung erfolgt hauptsächlich durch Rissausbreitung und Wechselwirkung zwischen den Disken, die ein Loslösen von "Gesteins-Chips" zur Folge hat (siehe Abb. 27 auf Seite 25)

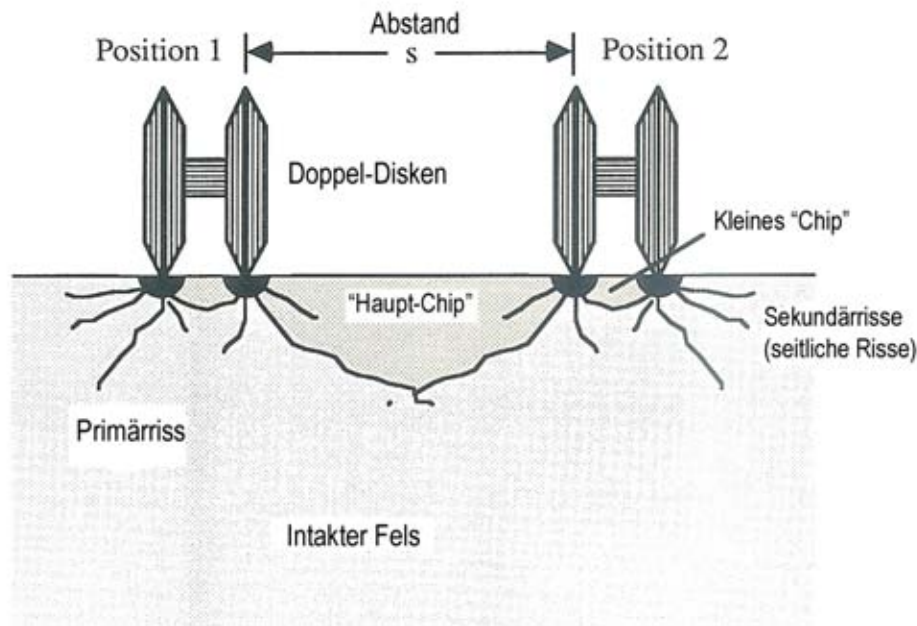


Abbildung 27: "Chipbildung" durch Doppel-Diskenmeißel [22]

Genauere Untersuchungen bezüglich der Gesteinszerstörung durch Diskenmeißel wurden erst verstärkt in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts durchgeführt. Eine sehr umfangreiche Studie wurde von Roxborough und Phillips ([58]) durchgeführt (siehe Unterabschnitt 5.1 „Modell zur Gesteinslösung bei Diskenmeißeln von Roxborough und Phillips“ auf Seite 25), bei der die Auswirkungen der Variation verschiedener Parameter auf den Löseprozess untersucht wurden und ein mathematisches Modell zur Beschreibung des Lösevorganges abgeleitet wurde.

5.1 Modell zur Gesteinslösung bei Diskenmeißeln von Roxborough und Phillips

In diesem Abschnitt werden die Versuche und das darauf aufbauende abgeleitete mathematische Modell von Roxborough und Phillips [58] im Detail betrachtet. Einige Grundannahmen und die aus dem Modell entwickelten engültigen Formeln wurden übernommen. Die Herleitungen und Ableitung wurden allerdings zum besseren Verständnis neu durchgeführt und anschaulich aufbereitet.

Die Versuche wurden ausschließlich an Buntsandstein durchgeführt, der durch sein Auftreten bei Ballungsräumen in England von großer Bedeutung ist. Dieser Sandstein ist ein homogener Fels, der hauptsächlich aus Quarz und Feldspat besteht und dessen physikalische Eigenschaften in Tab. 1 auf Seite 26 aufgelistet sind.

Die Vorrichtung für die Versuchsdurchführung besteht aus einem Schneidtablett, über dem ein steifer Kastenrahmen montiert ist, der wiederum dafür sorgt, dass die Diske bei der Vorwärtsbewegung genau in der Spur gehalten werden kann. Die Diske wird durch einen Hydraulikzylinder mit angegeschlossenem Hydraulikaggregat bewegt, der eine Bewegung um 800mm bei einer Kraft von 50kN

ermöglicht. Die Schneidgeschwindigkeiten von bis zu $200\text{mm}/\text{sec}$ werden über eine Schrägscheibenpumpe, die durch einen 7.5kW Motor angetrieben wird, generiert.

In die Versuchsvorrichtung können Probekörper mit der maximalen quadratischen Abmessung von 0.5m Seitenlänge bei einer maximalen Höhe von 0.4m eingespannt werden. Die Diske ist an einen triaxialen Kraftmesser angeschlossen, so dass sowohl die Druckkraft, als auch die Rollkraft kontinuierlich gemessen und aufgezeichnet werden können.

Tabelle 1: Physikalische Eigenschaften des getesteten Buntsandsteines

Buntsandstein	Symbole	Einheiten	Anzahl der Versuche	Werte
Druckfestigkeit	σ_c	MN/m^2	10	49.20
Zugfestigkeit	σ_t	MN/m^2	10	2.64
Scherfestigkeit	τ	MN/m^2	5	7.34
statischer Elastizitätsmodul	E_s	MN/m^2	5	$10.26 \cdot 10^3$
dynamischer Elastizitätsmodul	E_d	MN/m^2	5	$11.83 \cdot 10^3$
innerer Reibungswinkel	φ	$^\circ$		22 - 28

Aus der Fülle an Variablen, die das Löseverhalten der Diskenmeißel beeinflussen können, wurden der **Durchmesser**, die **Eindringtiefe**, der **Schneidenwinkel**, die **Schneidgeschwindigkeit** und der **Abstand** der Disken ausgewählt. Die Werte der einzelnen Variablen für die Versuche sind nachstehend aufgelistet.

- (a) Diskendurchmesser, $D = 100, 125, 150, 175, 200\text{mm}$
- (b) Eindringtiefe, $p = 2, 4, 6, 8, 10\text{mm}$
- (c) Schneidenwinkel der Diske, $\phi = 60, 70, 80, 90, 100^\circ$
- (d) Schneidgeschwindigkeit, $v = 76, 102, 127, 152, 178\text{mm}/\text{sek}$
- (e) Abstand der Disken, $S = 12, 24, 36, 48, 60\text{mm}$

Da sich diese Variablen höchstwahrscheinlich gegenseitig beeinflussen, wäre es normalerweise bei 4 Wiederholungen pro Versuchsanordnung notwendig gewesen 12500 Versuche durchzuführen, um alle Einflüsse und gegenseitigen Wirkungen erfassen zu können. Da dies nicht machbar war, wurden nur Teilversuche durchgeführt. Die Parameter für die Leistung der Diskenmeißel sind folgende:

1. Druckkraft F_T - durchschnittliche Kraft orthogonal zur Roll- und Schneidrichtung um die gewünschte Eindringtiefe zu gewährleisten (Einheit: kN)
2. Rollkraft F_R - durchschnittliche Kraft, die notwendig ist die Disken, bei gewünschter Eindringtiefe, in die Schneidrichtung vorwärts zu rollen (Einheit: kN)
3. Leistung Q - das Volumen des Gesteins, welches pro "Schnitlänge" der Diske abgetragen wird (Einheit: m^3/km)
4. Spezifische Energie E_S - die Arbeit, die pro Volumen gelösten Gesteins geleistet wird (Einheit: MJ/m^3)

Aus der Literatur [58] geht nicht hervor, wie die spezifische Energie und hier vor allem die geleistete Arbeit berechnet wird. Es wird angenommen, dass dies über die Leistung des zuvor erwähnten 7.5kW Motors passiert. Interessant wäre, ob und wie die Autoren die Energieverluste von dem Motor bis zu der Diske berücksichtigt haben. Dies ist vor allem von Bedeutung, wenn man diese Versuchsergebnisse mit anderen vergleichen möchte.

Um nun ein mathematisches Modell zur Beschreibung des Lösevorganges zu erhalten, wurden einige Annahmen und Näherungen getroffen, die das Modell mathematisch einfacher gestalten. Allerdings

sollte bei solchen Vereinfachungen immer darauf Wert gelegt werden, dass diese nicht zu einem zu großem Abweichen der Messergebnisse von den theoretisch ermittelten Werten führen. Aus diesem Grund werden in der Studie von Roxborough und Phillips [58] die Versuchsergebnisse immer mit den theoretisch ermittelten Werten aus dem mathematischen Modell verglichen und eventuelle Abweichungen analysiert. In Abb. 28 auf Seite 27 sind alle geometrischen Abmessungen einer Diske sowie die Eindringtiefe und die einwirkenden Kräfte ersichtlich.

Mit Vergrößerung der Eindringtiefe p wird die Kontaktfläche des Diskenmeißels mit dem Fels und die Kreissehnenlänge l größer. Unter Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes lässt sich die Gleichung

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2} - p\right)^2 \quad (1)$$

$$= \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{D}{2} \cdot p - p^2 \quad (2)$$

$$= Dp - p^2 \quad (3)$$

aufstellen, aus der sich dann eine Formel für die Kreissehnenlänge l in Abhängigkeit von dem Durchmesser der Diske D und der Eindringtiefe p anschreiben lässt:

$$l = 2 \cdot \sqrt{Dp - p^2} \quad (4)$$

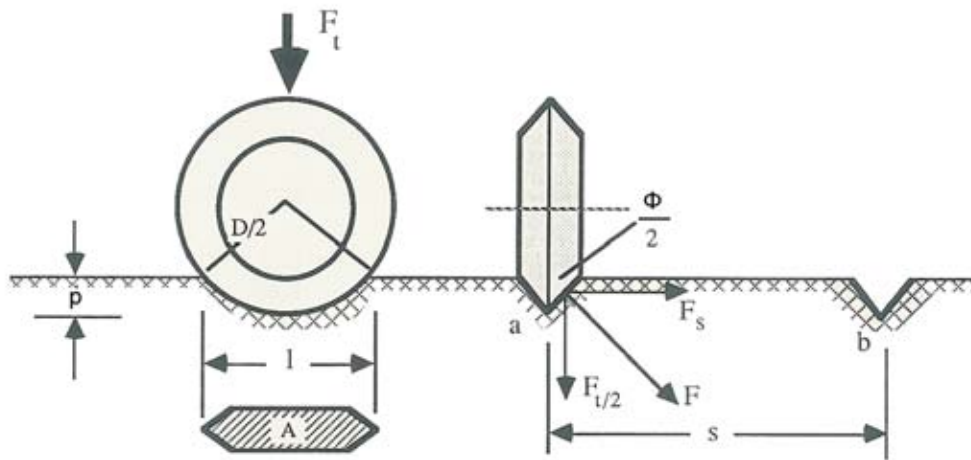


Abbildung 28: Geometrie der Diskenmeißel und deren Eindringverhalten [58]

Weiters wird angenommen, dass der Eindringwiderstand vor allem durch Druckspannungen zustande kommt und die Druckkraft F_T somit mit der Druckspannung, die auf die projizierte Kontaktfläche A des Diskenmeißels wirkt, gleichgesetzt werden kann. Da die Berechnung von der Fläche A ziemlich komplex wäre, wird in erster Näherung die Fläche A mit einer Rechtecksfläche mit der Länge l und der Breite $2p \tan \frac{\phi}{2}$ angesetzt.

$$A = 2pl \cdot \tan \frac{\phi}{2} \quad (5)$$

$$= 4p \cdot \sqrt{Dp - p^2} \cdot \tan \frac{\phi}{2} \quad (6)$$

Daraus folgt dann die Kraft um eine Eindringtiefe von p zu erhalten wie folgt:

$$F_T = \sigma \cdot A \quad (7)$$

$$F_T = 4\sigma \cdot \tan\frac{\phi}{2} \cdot \sqrt{Dp^3 - p^4} \quad (8)$$

mit

F_T ... Druckkraft

σ ... Druckfestigkeit (aus einaxialem Druckversuch mit unbehinderter Seitendehnung)

ϕ ... Schneidenwinkel der Diske

D ... Diskendurchmesser

p ... Eindringtiefe

Hier ist zu hinterfragen, wieso Roxborough und Philips [58] die Druckfestigkeit über den einaxialen Druckversuch mit unbehinderter Seitendehnung bestimmen und nicht in einem Triaxialversuch, in dem man die Seitendehnung besser den von der Tunnelbohrmaschine im Fels angetroffenen Verhältnissen anpassen könnte. Ein möglicher Grund könnte sein, dass in ihrer Versuchsdurchführung die Felsproben ebenfalls so eingebaut werden, dass die Seitendehnung nicht behindert ist. Dies würde bedeuten, dass der einaxiale Druckversuch mit unbehinderter Seitendehnung zwar die passende Druckfestigkeit für diese Versuche liefern würde, allerdings würde dies dann die Anwendbarkeit der gesamten Studie in Frage stellen, da solch ein Spannungszustand im Fels, am Ausbruchquerschnitt einer Tunnelbohrmaschine mit Diskenmeißeln, unwahrscheinlich ist. Es ist möglich, dass die Behinderung der Seitenausdehnung keinen wesentlichen Einfluss auf den hier dargestellten Mechanismus der Gesteinslösung hat, allerdings müsste dies mit entsprechenden Versuchen oder durch entsprechende FE-Analysen erst belegt werden.

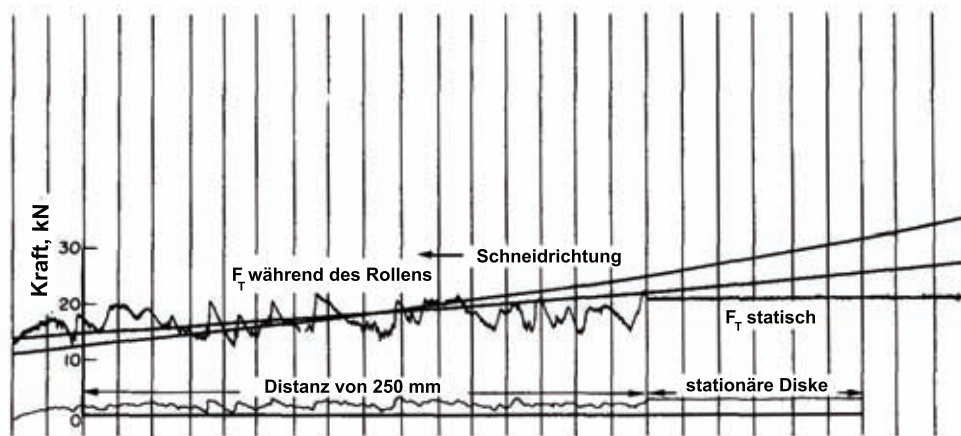


Abbildung 29: Druckkräfte für eine stationäre Diske und eine rollende Diske [58]

Für weitere Berechnungen wird angenommen, dass die Druckkraft F_T näherungsweise konstant bleibt, auch wenn der Diskenmeißel sich in Bewegung befindet. In Abb. 29 auf Seite 28 sind die Ergebnisse eines ausgeführten Versuches dargestellt, die bestätigen, dass die Druckkraft im statischen Zustand und während der Rollbewegung des Meißels gleiche Spitzenwerte annimmt.

In Abb. 30 auf Seite 30 ist ein Diskenmeißel mit den zwei zueinander orthogonalen Kräften F_T und F_R zu sehen. Da die Reibung vernachlässigt wird, muss die Wirkungslinie der Resultierenden der Kräfte R durch den Mittelpunkt gehen, damit das Drehmoment Null ergibt. Wenn nun weiters angenommen wird, dass R am Mittelpunkt des Kreisbogens des Diskenmeißels \overline{acb} , der im Kontakt mit dem Fels steht, angreift, ergibt sich unter der Voraussetzung, dass das Drehmoment gleich Null ist

$$F_R \cdot \overline{of} = F_T \cdot \overline{oe} \quad (9)$$

und weiters

$$\frac{F_T}{F_R} = \cot\psi. \quad (10)$$

Außerdem kann man unter Berücksichtigung gleicher Dreiecke aus Abb. 30 auf Seite 30

$$\frac{\overline{og}}{\overline{oa}} = \frac{\frac{D}{2} - p}{\frac{D}{2}} \quad (11)$$

ableiten. Weiters lassen sich auch noch folgende Beziehungen mit Hilfe der Trigonometrie aufstellen:

$$\frac{\overline{og}}{\overline{oa}} = \cos 2\psi \quad (12)$$

$$\cos 2\psi = \cos^2\psi - \sin^2\psi \quad (13)$$

$$\cos\psi = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \tan^2\psi}} \quad (14)$$

$$\sin\psi = \frac{\tan\psi}{\pm\sqrt{1 + \tan^2\psi}} \quad (15)$$

$$(16)$$

Daraus folgt:

$$\cos 2\psi = \frac{1^2}{1 + \tan^2\psi} - \frac{\tan^2\psi}{1 + \tan^2\psi} \quad (17)$$

$$= \frac{1 - \tan^2\psi}{1 + \tan^2\psi} \quad (18)$$

So dass man schließlich

$$\frac{\frac{D}{2} - p}{\frac{D}{2}} = \frac{1 - \tan^2\psi}{1 + \tan^2\psi} \quad (19)$$

$$\frac{D}{2} - p + \left(\frac{D}{2} - p\right) \cdot \tan^2\psi = \frac{D}{2} - \frac{D}{2} \cdot \tan^2\psi \quad (20)$$

$$(21)$$

und nach weiteren Umformungen

$$\tan^2\psi = \frac{p}{D - p} \quad (22)$$

erhält. Aus den Gleichungen (10) und (22) lässt sich das Verhältnis

$$\frac{F_T}{F_R} = \sqrt{\frac{D - p}{p}} \quad (23)$$

herleiten. Schließlich erhält man durch Einsetzen der Gleichung (8) in (23) und anschließendem Umformen eine Gleichung für die Rollkraft F_R

$$F_R = 4\sigma p^2 \tan \frac{\phi}{2}. \tag{24}$$

mit

- F_R ... Rollkraft
- σ ... Druckfestigkeit (aus einaxialem Druckversuch mit unbehinderter Seitendehnung)
- ϕ ... Schneidenwinkel der Diske
- p ... Eindringtiefe

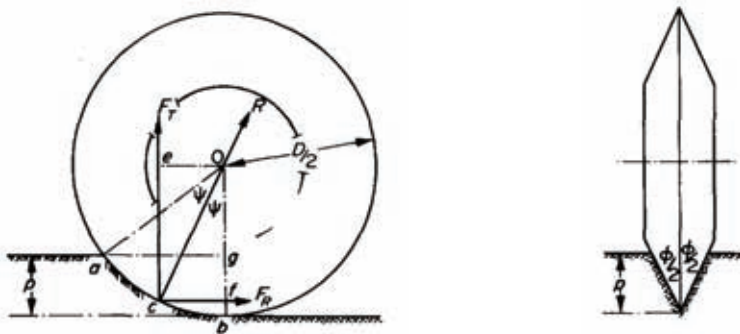


Abbildung 30: Orthogonale Kräfte die auf den Diskenmeißel wirken [58]

Die theoretischen Werte aus den Gleichungen (8) und (24) wurden in weiterer Folge mit den Ergebnissen aus den Versuchen verglichen. Für die Versuche wurde jeweils nur ein Diskenparameter (Diskendurchmesser, Eindringtiefe, Schneidenwinkel, Schneidgeschwindigkeit oder Diskenabstand) variiert und alle anderen wurden durch die Mittelwerte festgelegt.

1. **Durchmesser des Diskenmeißels**

Die Auswirkungen der Variation des Durchmessers auf die Leistungsparameter des Diskenmeißels sind in Abb. 31 auf Seite 30 zu sehen.

Je größer der Durchmesser des Diskenmeißels desto größer ist die erforderliche Druckkraft F_T . Anders verhält es sich hingegen bei der Rollkraft F_R , die konstant bleibt unabhängig vom Durchmesser. Es ist außerdem gut zu ersehen, dass die theoretischen Werte gut mit den gemessenen Werten übereinstimmen. Die spezifische Energie und die Leistung bleiben ebenfalls konstant bei verändertem Durchmesser.

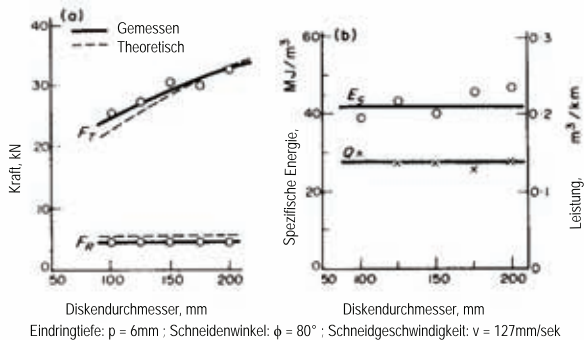


Abbildung 31: Auswirkungen des Durchmessers [58]

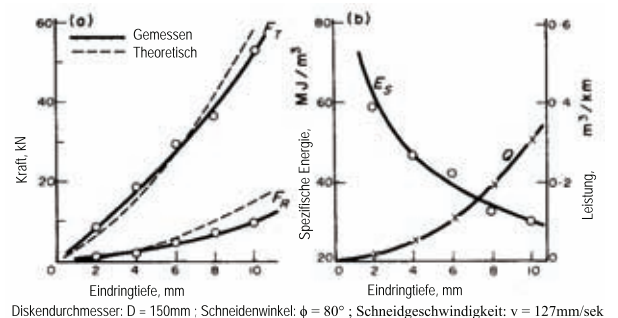


Abbildung 32: Auswirkungen der Eindringtiefe [58]

2. Eindringtiefe

Wie in Abb. 32 auf Seite 30 zu sehen, steigen die Druckkraft F_T und die Rollkraft F_R mit zunehmender Eindringtiefe stark an, korrespondieren aber gut mit den theoretisch Werten von den Formeln. Aus dem Graphen für die Leistung ist anzunehmen, dass diese mit dem Quadrat der Eindringtiefe ansteigt. Die spezifische Energie hingegen sinkt gleichzeitig, so dass die Effektivität mit größerer Eindringtiefe zunimmt. Allerdings nehmen Roxborough und Philips [58] an, dass sich dieses Verhalten nicht bis ins Unendliche fortsetzt, sondern dass ein Minimum bei einer Eindringtiefe von ca. 15 bis 20mm erreicht wird.

3. Schneidenwinkel

Die benötigte Druckkraft F_T und die benötigte Rollkraft F_R nehmen mit größer werdendem Schneidenwinkel im gleichen Maße zu, wie es die theoretischen Werte vermuten ließen.

Aber wie schon in Abb. 31 auf Seite 30 und Abb. 32 auf Seite 30, für Diskendurchmesser und Eindringtiefe, sind auch bei dem Schneidenwinkel (siehe Abb. 33 auf Seite 31) die theoretischen Werte für die Rollkraft höher, als die Werte, die aus den Versuchen erhalten wurden. Dies kann auf die Annahme zurückgeführt werden, dass die resultierende Kraft R am Mittelpunkt des Kreisbogens \overline{acb} (siehe Abb. 30 auf Seite 30) angreift. In Wirklichkeit wird die Kraft R irgendwo zwischen den Punkten c und b angreifen, was unter der Bedingung, dass das Drehmoment Null bleibt, eine Vergrößerung des F_T/F_R Verhältnisses bewirkt.

Die Leistung des Diskenmeißels ist unabhängig von dessen Schneidenwinkel, was darauf schließen lässt, dass der Ausbruchswinkel des Gesteins konstant bleibt (siehe Abb. 33 auf Seite 31). Daraus kann geschlossen werden, dass bei größer werdendem Schneidenwinkel die spezifische Energie zunimmt, was auch beobachtet werden kann.

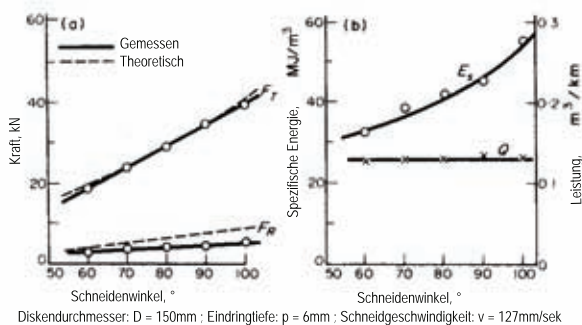


Abbildung 33: Auswirkungen des Schneidenwinkels [58]

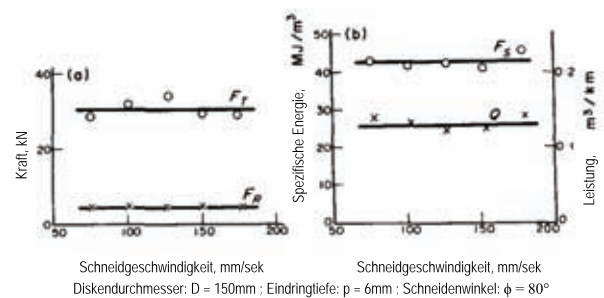


Abbildung 34: Auswirkungen der Schneidgeschwindigkeit [58]

4. Schneidgeschwindigkeit

Die Schneidgeschwindigkeit hat keinen Einfluss auf die Druckkraft F_T , die Rollkraft F_R , die Leistung oder die spezifische Energie, wie in Abb. 34 auf Seite 31 ersichtlich ist. Dies ist schon in einigen anderen Arbeiten (siehe hierzu z.B. [16]) ebenfalls zu beobachten gewesen. Dynamische Effekte scheinen nur dann möglich zu sein, wenn die Schneidgeschwindigkeit in der Nähe der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Rissen liegt. Wenn dies nicht der Fall ist, können die Lösevorgänge als quasi-statisch behandelt werden.

Bis hierher wurde immer nur eine unbeeinflusste Diske untersucht. Bevor im Anschluss die Versuchsergebnisse zu der Beeinflussung von Disken untereinander betrachtet werden, wird auf eine Parameterstudien, die ergänzend zu der Arbeit von Roxborough und Philips [58] durchgeführt wurde, eingegangen.

Die Werte, auf denen die Diagramme von Abb. 35 auf Seite 32 bis Abb. 37 auf Seite 32 aufbauen, wurden aus den Gleichungen (8) und (24) von Roxborough und Philips [58] für die

Druckkraft und die Rollkraft, berechnet. In Abb. 35 auf Seite 32 ist zu erkennen, dass die Druckkraft mit der Eindringtiefe ansteigt. Der Anstieg der Druckkraft mit der Eindringtiefe wird außerdem durch einen größeren Schneidenwinkel der Diske wesentlich verstärkt. Darüber hinaus machen Abb. 35(a) auf Seite 32 bis Abb. 35(c) auf Seite 32 deutlich, dass bei einem größeren Diskendurchmesser die Druckkraft ebenfalls leicht ansteigt, dieser Anstieg aber im Vergleich zu der Beeinflussung durch die Eindringtiefe und den Eindringwinkel marginal ist. Der Einfluss der Eindringtiefe auf die Rollkraft ist in Abb. 36 auf Seite 32 zu sehen. Da die Rollkraft, wie aus der Gleichung (24) zu erkennen, nicht von dem Diskendurchmesser abhängig ist, gilt dieses Diagramm grundsätzlich für alle Diskendurchmesser. Es ist wie bei der Druckkraft auch hier ein Anstieg der Rollkraft mit zunehmender Eindringtiefe zu erkennen. Allerdings ist die Rollkraft fast um eine Zehnerpotenz geringer als die Druckkraft bei gleicher Eindringtiefe und gleichem Schneidenwinkel. Mit größerem Schneidenwinkel der Diske wird auch die benötigte Rollkraft größer, was durch die unterschiedlichen Graphen ersichtlich ist. Abb. 37(a) auf Seite 32 zeigt die Entwicklung der Druckkraft für eine im Hartgesteinvortrieb häufig verwendete Diske mit einem Durchmesser von 19Zoll (483mm) [43]. Außerdem wurde die Druckkraft für größere Eindringtiefen und für einen größeren Bereich an Schneidenwinkeln ermittelt. In Abb. 37(b) auf Seite 32 ist die dazugehörige Rollkraft ersichtlich. Im Prinzip setzt sich in diesen beiden Diagrammen das fort, was bereits angesprochen wurde. Es ist klar ersichtlich, dass der Schneidenwinkel nicht zu groß gewählt werden sollte, da dies einen extremen Kraftanstieg bedeutet.

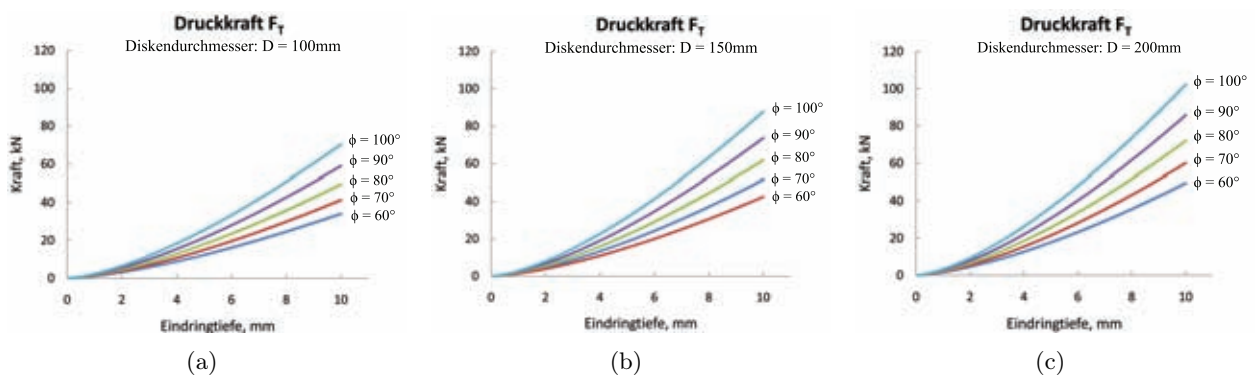


Abbildung 35: Druckkräfte in Abhängigkeit von der Eindringtiefe für unterschiedliche Schneidenwinkel

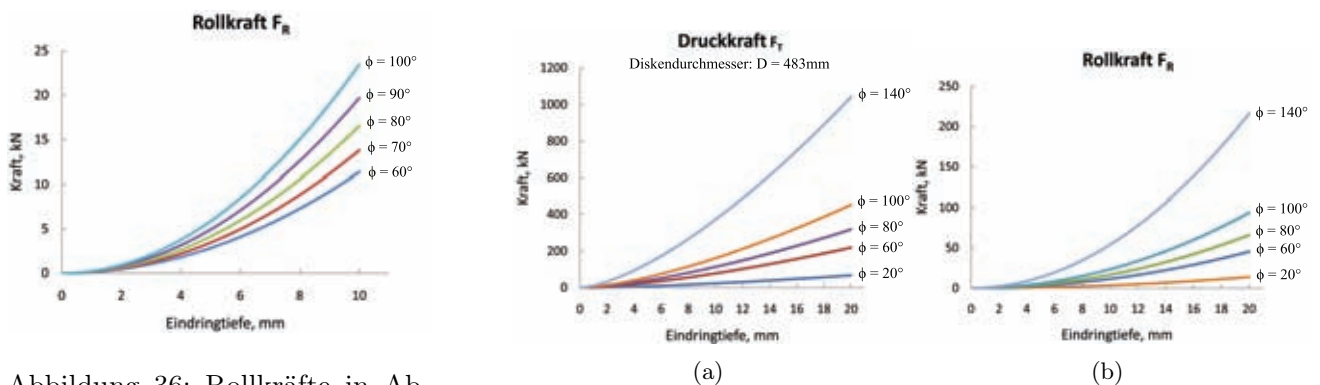


Abbildung 36: Rollkräfte in Abhängigkeit von der Eindringtiefe für unterschiedliche Schneidenwinkel

Abbildung 37: Druckkräfte in Abhängigkeit von der Eindringtiefe für unterschiedliche Schneidenwinkel

5. Abstand der Diskenmeißel

Die Auswirkungen des Abstandes zwischen den Diskenmeißeln auf die Druckkraft F_T und die Rollkraft F_R sind in Abb. 38(a) auf Seite 33 ersichtlich. Wie zu erwarten war, sind beide Kräfte gleich Null, wenn der Abstand Null beträgt, da dies einem Diskenmeißel entsprechen würde, der sich genau im Schatten des anderen Diskenmeißels und in dessen Furche befindet und somit kein Gestein lösen muss. Von diesem Grenzfall ausgehend, steigen beide Kräfte mit zunehmendem Abstand zuerst stark an bevor sie bei einem Abstand von 40 bis 45mm ihr Maximum erreichen. Bei weiterer Vergrößerung des Abstandes bleibt sowohl die Druckkraft als auch die Rollkraft konstant, da nun die Diskenmeißel unabhängig voneinander das Gestein lösen. Die Grenze der Beeinflussung hängt aber ebenfalls von der Eindringtiefe ab, was bedeutet, dass bei geringerer Eindringtiefe die Beeinflussung zweier Disken schon bei einem geringeren Diskenabstand nicht mehr gegeben ist und umgekehrt.

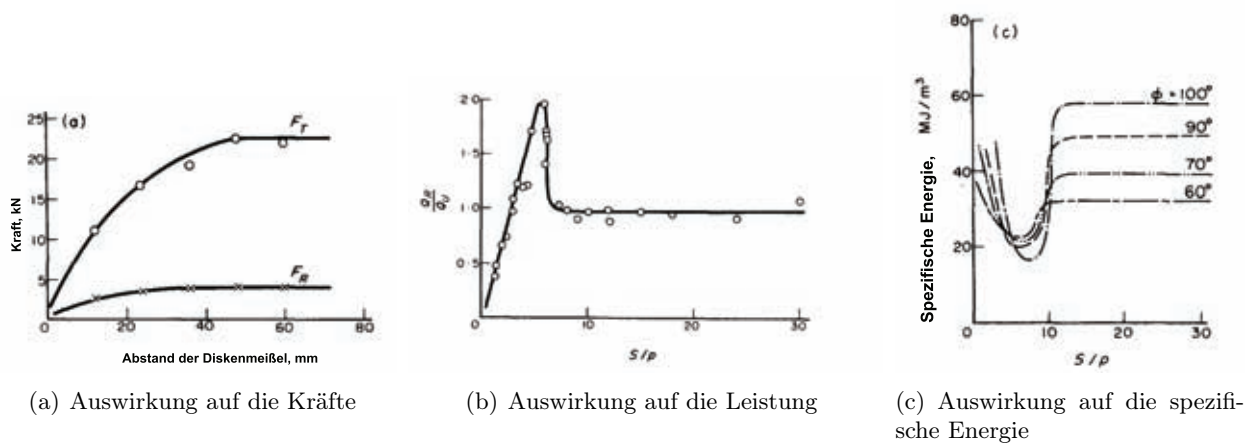


Abbildung 38: Auswirkung des Abstandes der Diskenmeißel [58]

Genau aus diesem Grund wird meistens der Diskenabstand (spacing) mit der Eindringtiefe (penetration) zu dem Verhältnis S/P kombiniert. Die Veränderungen der Leistung ist in Abb. 38(b) auf Seite 33 zu sehen, wobei hier der Quotient Q_R/Q_U eingeführt wurde, um die Auswirkungen besser zu verdeutlichen. Q_R ist die Leistung des durch einen anderen beeinflussten Diskenmeißels und Q_U stellt die Leistung eines einzelnen unbeeinflussten Diskenmeißels dar. Wenn das Verhältnis S/P von Null ausgehend vergrößert wird, steigt auch der Quotient Q_R/Q_U an, bis er bei einem Verhältnis von $S/P = 3$ den Wert "1" annimmt. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Leistung von dem beeinflussten Diskenmeißel ident mit der Leistung des unbeeinflussten Diskenmeißels ist. Q_R/Q_U steigt weiter an, bis ein Maximum von "2", bei einem Verhältnis von $S/P = 7$, erreicht wird. Danach folgt ein abrupter Abfall von Q_R/Q_U auf den Wert "1", welcher auch bei weiterer Steigerung von S/P konstant bleibt.

Dieser abrupte Abfall ist von großer Bedeutung, da durch Versuche bestätigt werden kann, dass sich während des Lösevorganges zwischen den Furchen der Diskenmeißel Gesteinsbrocken vom Festgestein vor allem bei einem Verhältnis von S/P zwischen "3" und "7" lösen. Das ist auch genau der Bereich in dem der Quotient Q_R/Q_U über dem Wert "1" liegt. So ein Bruchmechanismus impliziert, dass ein Abscheren in einer Fläche zwischen den Furchen von den Diskenmeißeln, auf der maximalen Eindringtiefe, vorliegen muss. Wenn ausgehend von Abb. 28 auf Seite 27 die Scherfläche bei $\bar{a}\bar{b}$ liegt ergibt sich die Scherkraft F_S zu

$$F_S = F \cos \frac{\phi}{2} \quad (25)$$

und die Druckkraft zu

$$F_T = 2F \sin \frac{\phi}{2} \quad (26)$$

so dass

$$F_S = \frac{F_T}{2 \tan \frac{\phi}{2}}. \quad (27)$$

Wenn nun wieder, wie bei Gleichung (8), angenommen wird, dass die Druckkraft F_T äquivalent mit der Druckspannung über die projizierte Kontaktfläche A ist, dann lässt sich folgende Gleichung für F_T anschreiben:

$$F_T = 2pl \tan \frac{\phi}{2} \sigma. \quad (28)$$

p ... Eindringtiefe

l ... Kreissehnenlänge des Diske (siehe Abb. 28 auf Seite 27)

ϕ ... Schneidenwinkel der Diske

σ ... Druckfestigkeit (aus einaxialem Druckversuch mit unbehinderter Seitendehnung)

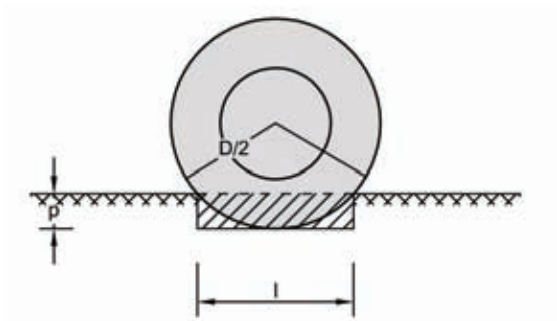


Abbildung 39: Einwirkungsbereich einer Diske

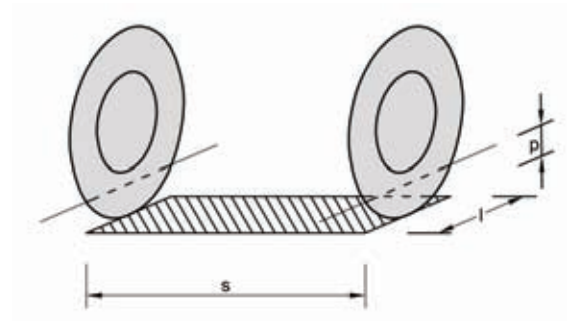


Abbildung 40: Scherfläche zwischen zwei Disken (Widerstandsseite)

Setzt man nun Gleichung (28) in Gleichung (27) ein, so erhält man auf der Einwirkungsseite (siehe Abb. 39 auf Seite 34)

$$F_S = p \cdot l \cdot \sigma. \quad (29)$$

Wenn der Fels nun nur durch einfache Scherbeanspruchung versagt, wird F_S auf der Widerstandsseite zu

$$F_S = s \cdot l \cdot \tau. \quad (30)$$

Wobei τ die Scherfestigkeit des Festgesteins und s der Diskenabstand (siehe Abb. 40 auf Seite 34) ist. Durch Gleichsetzen von (29) und (30) erhält man

$$\frac{s}{p} = \frac{\sigma}{\tau}. \quad (31)$$

Aus Gleichung (31) kann man nun den maximalen Diskenabstand, so dass gerade noch eine Beeinflussung vorhanden ist und somit eine optimale Interaktion zwischen den Diskenmeißeln gegeben ist, durch Multiplikation von der Eindringtiefe mit dem Verhältnis von Druck- zu Scherspannung berechnen. Das bedeutet, dass man sowohl den Abstand zwischen den Diskenmeißeln s als auch die Eindringtiefe p über diese Gleichung optimieren kann.

Abb. 38(c) auf Seite 33 zeigt die Auswirkungen des Diskenabstandes auf die spezifische Energie bei unterschiedlichen Schneidenwinkeln. Es ist zu erkennen, dass die hohe Leistung bei bestimmten Diskenabständen gut mit geringen Werten der spezifischen Energie korrespondiert. Minimalwerte der spezifischen Energie liegen bei einem Verhältnis von S/P zwischen den Werten "6-8". Bei größeren Verhältnissen ist die spezifische Energie ident mit Diskenmeißeln die unbeeinflusst operieren, was ein Indiz für den Verlust der Beeinflussung der Diskenmeißel untereinander darstellt.

5.2 Kritische Betrachtung des Modells von Roxborough und Phillips

Im Folgenden werden die von Roxborough und Phillips [58] getroffenen Annahmen, die in weiterer Folge zu der Gleichung (31) führen hinterfragt und mögliche Verbesserungen oder Alternativen dargelegt. Um die Gleichung der Scherkraft F_S auf der Einwirkungsseite (Gleichung (29)) zu erhalten, wurde wieder wie bei Gleichung (8) angenommen, dass die Druckkraft F_T äquivalent mit der Druckspannung über die projizierte Kontaktfläche A ist. Womit sich abermals die Frage stellt, weshalb hier die Druckfestigkeit σ aus dem einaxialen Druckversuch mit unbehinderter Seitendehnung verwendet wird, vor allem da bei der Scherkraft ganz spezielle Randbedingungen anzutreffen sind. Es wird nämlich ein Teil des Felses belastet, dessen Seitendehnung in alle Richtungen durch das anstehende Gestein, bzw. durch den zweiten Diskenmeißel, behindert ist, bis auf jene Richtung, wo sich die freie Oberfläche befindet. Dies ist auch jene Richtung in die der "Gesteins-Chip" ausbricht. Da diese Randbedingungen nicht einmal im Triaxialversuch zu simulieren sind, müsste hier eigentlich ein gesonderter Versuch zur Bestimmung der Druckfestigkeit des Gesteins unter solchen Bedingungen durchgeführt werden. Ein weiterer Diskussionspunkt ist natürlich auch die projizierte Kontaktfläche $A = p \cdot l$, die in Gleichung (29) vereinfacht als Rechteck angenommen wird. Genauer wäre natürlich die Fläche eines Kreissegmentes anzunehmen, was aber dann in weiterer Folge natürlich nicht zu der sehr einfachen Gleichung (31) für den maximalen Diskenabstand führen würde. Deshalb ist anzunehmen, dass Ungenauigkeiten akzeptiert werden, da es wahrscheinlich meist nur um eine grobe Einschätzung jenes Diskenabstandes geht, bei dem zwischen den Disken gerade noch eine Beeinflussung besteht.

Um die Gleichung (30) auf der Widerstandsseite zu erlangen, wird eine Scherfläche, in der der Fels durch einfache Scherbeanspruchung versagt, angenommen. Diese Scherfläche wird als Rechteck von einer Disken-Mittelebene zur anderen (Diskenabstand s) auf Höhe der maximalen Eindringtiefe p angenommen (siehe Abb. 40 auf Seite 34). Allerdings ist zu vermuten, dass die wirklichen "Gesteins-Chips" eher die Form aus Abb. 27 auf Seite 25 annehmen. Dieses Modell wurde von Hua Guo [21] in seiner Dissertation durch Versuche bestätigt. Diese Versuche lassen den Schluss zu, dass sich Risse von der Meißelspitze mit einem Winkel von ungefähr 30° zur Lotrechten ausbilden. Zumindest ist es sehr unwahrscheinlich, dass sich genau eine waagrechte Scherfläche ausbildet. Außerdem ist zu hinterfragen, wieso die Scherfläche für F_S (siehe Gleichung (30)) über die gesamte Länge zwischen den Disken als Widerstand für eine Diske herangezogen wird. Es wird vermutet, dass Roxborough und Phillips annehmen, dass sich die beiden beeinflussenden Disken nicht auf gleicher Höhe befinden, sondern eine etwas vor der anderen angebracht ist. Dies würde bedeuten, dass durch die erste Diske

eine Furche im Gestein entsteht (siehe Abb. 28 auf Seite 27) und somit für die zweite nachfolgende Diske eine freie Oberfläche vorhanden ist, so dass für diese die angegebene Gleichung für F_S , mit einer Scherfläche über die gesamte Länge zwischen den Disken, zutreffend ist.

Trotz all dieser Punkte, die die Herleitung der Gleichung (31) oder zumindest die getroffenen Annahmen und Vereinfachungen in Frage stellen, muss festgehalten werden, dass durch diese Gleichung gute Ergebnisse erzielt werden, die mit den praktischen Versuchsergebnissen gut korrelieren (siehe Abb. 38 auf Seite 33). Aus diesem Grund kann diese Formel in der Praxis sicherlich nützliche Hinweise auf den sinnvollen Abstand zwischen Diskenmeißeln liefern.

Es wurden weiterführende Untersuchungen mit unterschiedlichen Gesteinen (Marmor, Kalkstein u.a.) getätigt, um die Anwendbarkeit der Formeln für die Kräfte der Diskenmeißel zu eruieren. Aus den Resultaten kann geschlossen werden, dass die Gleichungen für die Druckkraft F_T und die Rollkraft F_R realistisch sind und mit gutem Gewissen angewendet werden können. Außerdem sind die gefundenen Gleichungen (8) und (24) auch noch sehr nützlich, um die Auswirkungen auf die Diskenkräfte, bei unterschiedlichen Geometrien der Diskenmeißel und der Eindringtiefe, zu bestimmen.[58]

6 Gesteinslösung bei Schrämmmeißeln

Schrämmmeißel sind Lösewerkzeuge, die vor allem an rotierenden, zylindrischen oder konischen Bohrköpfen von Bohrmaschinen zum Einsatz kommen. Vorwiegend finden diese Lösewerkzeuge im Kohleabbau und in der Gewinnung von Mineralien und weichen Gesteinen Anwendung. Wenn das Gestein sehr hart und abrasiv ist, sind die Schrämmmeißel durch ihre Löseart nicht mehr wirtschaftlich, da der Verschleiß sehr hoch ist.

Wie aus Abb. 41 auf Seite 37 zu ersehen, erfolgt die Gesteinslösung in mehreren Phasen, bei denen die Bewegungsrichtung des Meißels allerdings immer parallel zur Gesteinsoberfläche bleibt. Beim ersten Kontakt des Schrämmmeißels mit dem Fels entsteht eine Zertrümmerungszone, von der ausgehend sich in der zweiten Phase kleinere Gesteinsteilchen aus dem Fels herauslösen. In der letzten Phase wird durch einen Riss an die Oberfläche, hervorgerufen durch Zugbeanspruchung, ein verhältnismäßig großer Felsbrocken ("Haupt-Chip") losgelöst [19]. Diese drei Phasen, die während des Löseprozesses von Schrämmmeißeln auftreten, konnten auch in Laborversuchen festgestellt und beobachtet werden [22].



Abbildung 41: Phasen der Gesteinslösung durch einen Schrämmmeißel [19]

Es gibt einige theoretische Modelle, die den Mechanismus der Gesteinslösung bei Schrämmmeißeln zu beschreiben und zu erklären versuchen, von denen die meisten auf experimentellen Untersuchungen aufgebaut sind. Im Folgenden wird das Modell von Nishimatsu [51] vorgestellt, welches auf einer Theorie von Merchant [48][49] aufbaut, die ursprünglich für die Metallbearbeitung entwickelt wurde. Nishimatsu gründet seine Theorie [51] auch auf Beobachtungen bei Versuchen.

- **Versagensprozess bei Gesteinslösung**

Bei der Gesteinslösung können große Schwankungen der aufzuwendenden Kraft und der Ausbildung von Chips auftreten. Es können keine plastischen Verformungen beim Lösen von Festgestein beobachtet werden, wodurch ein sprödes Bruchverhalten anzunehmen ist. Weiters kann angenommen werden, dass die Geschwindigkeit der Meißel keinen Einfluss auf die Mechanismen der Gesteinslösung nimmt.

Aus Abb. 42 auf Seite 38 ist ersichtlich, dass ein "primärer Zertrümmerungsbereich" (Bereich a in Abb. 42 auf Seite 38) an der Spitze des Meißels gebildet wird, sobald der Meißel in das Gestein eindringt. Der zertrümmerte Fels wird aber durch das weitere Eindringen des Meißels an dessen Oberfläche gedrückt und dadurch wieder verfestigt, wodurch dieser Bereich fast wie eine Verlängerung des Meißels fungiert. Je weiter das Lösewerkzeug in das Gestein eindringt, desto größer ist die dazu benötigte Kraft, bis es im Gestein zu einem Spannungszustand kommt, bei dem ein Versagensriss eintritt. Die Entstehung und Ausbreitung dieses Versagensrisses hat die Ausbildung eines groben "Gestein-Chips" zur Folge. Nach der Ausbildung dieses Risses wird die übriggebliebene Spitze im unteren Entstehungsbereich des Versagensrisses zertrümmert

Dem theoretischen Modell von Nishimatsu liegen folgende Annahmen zu Grunde:

- Fels ist ein spröder Werkstoff und es kommt zu keinen plastischen Deformationen bei der "Chipbildung".
- Die Eindringgeschwindigkeit des Meißels in den Fels hat keine Auswirkungen auf den Mechanismus der Gesteinslösung.
- Ebener Spannungszustand
- Das Versagenskriterium ist durch die Mohrsche Hüllkurve bestimmt

Es wird die Spannungsverteilung entlang einer geraden Linie \overline{AB} im Gestein betrachtet (siehe Abb. 43 auf Seite 38), wobei in der Nähe der Meißelspitze die Spannung sehr hoch ist und die resultierende Spannung p vom Punkt A hin zu Punkt B abnimmt. Die Größe der resultierenden Spannung, für die Einheitslänge der Strecke \overline{AB} , wird vorerst vereinfacht angenommen als

$$p = p_0 \left(\frac{t}{\sin\Theta} - \lambda \right)^n \quad (32)$$

unter Berücksichtigung von

$$\sin\Theta = \frac{t}{\overline{AB}} \quad (33)$$

$$\overline{AB} = \frac{t}{\sin\Theta} \quad (34)$$

mit

- p_0 ... Konstante ermittelt aus dem Gleichgewicht der Kräfte (siehe Gleichung (37)) [N/m^2]
- t ... Tiefe des Einschnittes [m]
- Θ ... Winkel zwischen der Bohrrichtung und der Linie AB [$^\circ$]
- λ ... Abstand zwischen Punkt A und einem beliebigen Punkt auf der Linie AB [m]
- n ... Spannungsverteilungs-Faktor (d.h.: eine Konstante, der der Spannungszustand während des Gesteinslöseprozesses zu Grunde liegt; dimensionslos)

– **Dimensionsanalyse**

Bevor mit dem Modell von Nishimatsu fortgefahren wird, sollte hier noch erwähnt werden, dass Nishimatsu die Gleichung für die resultierende Spannung (32) annimmt, ohne, wie es scheint, auf Dimensionsreinheit und somit auf die Korrektheit der physikalischen Beziehungen zu achten. Da lediglich die resultierende Spannung [N/m^2] auf der linken Seite der Gleichung (32) vorhanden ist, müsste die gesamte rechte Seite ebenfalls die Einheit einer Spannung (N/m^2) annehmen um physikalisch korrekt zu sein. Unter den Voraussetzungen der oben angegebenen Einheiten, für die einzelnen Parameter, ist zu ersehen, dass dies nicht der Fall ist. Somit ist davon auszugehen, dass die Gleichung für die resultierende Spannung lediglich eine Näherungsformel ist und Nishimatsu bewusst auf Dimensionsreinheit verzichtet hat. Aber es sei hier ebenfalls festgehalten, dass die in weiterer Folge hergeleitete Gleichung für die resultierende Bohrkraft (69) physikalisch korrekt ist.

Wird angenommen, dass die Richtung der resultierenden Spannung konstant über die Länge \overline{AB} ist, kann die Integration von der resultierenden Spannung p über die Länge \overline{AB} mit der resultierenden aufzubringenden Bohrkraft gleichgesetzt werden.

$$F + p_0 \int_0^{\frac{t}{\sin\Theta}} \left(\frac{t}{\sin\Theta} - \lambda \right)^n d\lambda = 0 \quad (35)$$

Durch Integration des zweiten Terms der Gleichung (35) erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{t}{\sin\Theta}} \left(\frac{t}{\sin\Theta} - \lambda \right)^n d\lambda &= -\frac{1}{(n+1)} \cdot \left(\frac{t}{\sin\Theta} - \lambda \right)^{n+1} \Big|_0^{\frac{t}{\sin\Theta}} \\ &= -\frac{1}{(n+1)} \cdot \left(\frac{t}{\sin\Theta} - \frac{t}{\sin\Theta} \right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{(n+1)} \right) \cdot \left(\frac{t}{\sin\Theta} - 0 \right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)} \cdot \left(\frac{t}{\sin\Theta} \right)^{n+1} \end{aligned} \quad (36)$$

Durch Ersetzen des zweiten Terms der Gleichung (35) durch den letzten Ausdruck der Gleichung (36) und anschließendem Umformen lässt sich die Konstante p_0 wie folgt ausdrücken:

$$p_0 = -(n+1) \cdot \left(\frac{t}{\sin\Theta} \right)^{-(n+1)} \cdot F \quad (37)$$

Nun kann man die Gleichung (37) in Gleichung (32) einsetzen, wodurch man nun den Ausdruck

$$p = -(n+1) \cdot \frac{\left(\frac{t}{\sin\Theta} - \lambda \right)^n}{\left(\frac{t}{\sin\Theta} \right)^{n+1}} \cdot F \quad (38)$$

erhält, der den Spannungszustand, der durch die Bohrkraft erzeugt wird, beschreibt. Wenn man nun die resultierende Spannung in eine Normalkomponente

$$\sigma_n = p \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi) \quad (39)$$

und eine Tangentialkomponente

$$\tau_s = p \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi) \quad (40)$$

aufteilt und λ gleich Null setzt (Spannung im Punkt A), so erhält man die Maximalwerte für die Spannungskomponenten wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n0} &= -(n+1) \cdot \frac{\left(\frac{t}{\sin\Theta} \right)^n}{\left(\frac{t}{\sin\Theta} \right)^{n+1}} \cdot F \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi) \\ &= -(n+1) \cdot \frac{\sin(\Theta)}{t} \cdot F \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi) \\ \tau_{s0} &= -(n+1) \cdot \frac{\left(\frac{t}{\sin\Theta} \right)^n}{\left(\frac{t}{\sin\Theta} \right)^{n+1}} \cdot F \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi) \\ &= -(n+1) \cdot \frac{\sin(\Theta)}{t} \cdot F \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

mit

α ... Spanwinkel - Neigungswinkel der oberen Meißelfläche gegenüber der Vertikalen (siehe Abb. 43 auf Seite 38)

Φ ... Winkel zwischen der Richtung von der resultierenden Bohrkraft und der Lotrechten auf die obere Fläche des Bohrmeißels (siehe Abb. 43 auf Seite 38), der auch teilweise als "Reibungswinkel der Gesteinslösung" bezeichnet wird

Der Spannungszustand von Fels oder anderen spröden Materialien kann bei Versagen durch die Bruchgerade von Mohr-Coulomb bestimmt werden. Somit kann angenommen werden, dass die Maximalspannungen mit dem Versagenskriterium nach Mohr-Coulomb korrespondieren. Die Gleichung der Bruchgeraden wird im vorliegenden Fall wie folgt angeschrieben:

$$\pm\tau_s = S_s - \tan k \cdot \sigma_n \quad (42)$$

Wobei S_s die Scherfestigkeit und k eine Konstante des inneren Reibungswinkels ist.

Wird nun angenommen, dass die Normalspannung an der Strecke \overline{AB} eine Druckspannung ist und außerdem die Bohrkraft immer positiv sein soll, so ergibt sich $\Theta > \alpha - \Phi$ und demzufolge $\tau_s < 0$. Somit übernimmt man ein negatives Vorzeichen von der linken Seite der Gleichung (42) und setzt die Gleichung in den letzten Teil der Gleichung (41) ein und erhält so eine Gleichung bei der die maximal zulässige Spannung im Punkt A gerade überschritten wird.

$$S_s - \tan k \cdot \sigma_n = (n + 1) \cdot \frac{\sin\Theta}{t} \cdot F \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi) \quad (43)$$

Wenn man nun den Ausdruck der Normalspannungskomponente aus Gleichung (41) in Gleichung (43) einsetzt, kommt man auf folgende Beziehungen

$$S_s = (n + 1) \cdot \frac{\sin\Theta}{t} \cdot F \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi) + \tan k \cdot -(n + 1) \cdot \frac{\sin\Theta}{t} \cdot F \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi) \quad (44)$$

$$S_s = F \cdot (n + 1) \cdot \frac{\sin\Theta}{t} \cdot [\cos(\Theta - \alpha + \Phi) - \tan k \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi)] \quad (45)$$

und nach weiterem Umformen auf

$$F = \frac{1}{(n + 1)} \cdot \frac{t}{\sin\Theta} \cdot \frac{S_s}{\cos(\Theta - \alpha + \Phi) - \tan k \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi)} \quad (46)$$

$$= -\frac{1}{n + 1} \cdot \frac{t}{\sin\Theta} \cdot \frac{S_s}{\tan k \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi) - \cos(\Theta - \alpha + \Phi)}. \quad (47)$$

Nimmt man nun an, dass die Richtung der Linie \overline{AB} , auf der die Bruchspannung wirkt, so gewählt wird, dass die resultierende Bohrkraft ein Minimum wird, muss die Gleichung (47) nach Θ differenziert und Null gesetzt werden, um die entsprechende Richtung zu erhalten. Zuerst wird die Gleichung (47) noch etwas weiter zu

$$F = -\frac{S_s \cdot t}{n+1} \cdot \frac{1}{\sin\Theta} \cdot \frac{1}{\frac{\text{sink} \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi)}{\text{cosk}} - \frac{\text{cosk} \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi)}{\text{cosk}}} \quad (48)$$

$$= -\frac{S_s \cdot t}{n+1} \cdot \frac{1}{\sin\Theta} \cdot \frac{\text{cosk}}{\text{sink} \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi) - \text{cosk} \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi)} \quad (49)$$

umgeformt, um nun nach Θ differenziert zu werden

$$F'(\Theta) = -\frac{S_s \cdot t}{n+1} \cdot \left[-\frac{\cos\Theta}{\sin^2\Theta} \cdot \frac{\text{cosk}}{\text{sink} \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi) - \text{cosk} \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi)} + \frac{1}{\sin\Theta} \cdot \left. -\frac{\text{cosk} \cdot [\text{sink} \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi) + \text{cosk} \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi)]}{[\text{sink} \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi) - \text{cosk} \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi)]^2} \right] \right] \quad (50)$$

Nun wird diese Gleichung gleich Null gesetzt, wobei unter Berücksichtigung des "Produkt-Null-Satzes" (ein Produkt ist dann Null, wenn ein Faktor Null ist) nur der zweite Teil der Gleichung (50) von Interesse ist, da nur in diesem Teil Θ vorkommt.

$$0 = -\frac{\cos\Theta}{\sin^2\Theta} \cdot \frac{\text{cosk}}{\text{sink} \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi) - \text{cosk} \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi)} + \frac{1}{\sin\Theta} \cdot \left. -\frac{\text{cosk} \cdot [\text{sink} \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi) + \text{cosk} \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi)]}{[\text{sink} \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi) - \text{cosk} \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi)]^2} \right] \quad (51)$$

$$= \frac{\cos\Theta \cdot \text{cosk} \cdot [\text{sink} \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi) - \text{cosk} \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi)] + \sin\Theta \cdot \text{cosk} \cdot [\text{sink} \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi) + \text{cosk} \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi)]}{\sin^2\Theta \cdot [\text{sink} \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi) - \text{cosk} \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi)]^2} \quad (52)$$

Nach Multiplikation mit dem Nenner und Division von "cosk" erhält man vorerst

$$0 = \cos\Theta \cdot \text{sink} \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi) - \cos\Theta \cdot \text{cosk} \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi) + \sin\Theta \cdot \text{sink} \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi) + \sin\Theta \cdot \text{cosk} \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi) \quad (53)$$

$$= -(\cos\Theta \cdot \text{cosk} - \sin\Theta \cdot \text{sink}) \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi) + (\text{sink} \cdot \cos\Theta + \text{cosk} \cdot \sin\Theta) \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi). \quad (54)$$

Unter Berücksichtigung der trigonometrischen Beziehungen

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta \quad (55)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \quad (56)$$

vereinfacht sich die Gleichung (54) zu

$$0 = \cos(\Theta + k) \cdot \cos(\Theta - \alpha + \Phi) - \sin(\Theta + k) \cdot \sin(\Theta - \alpha + \Phi) \quad (57)$$

und schließlich weiter zu

$$\cos(\Theta + k + \Theta - \alpha + \Phi) = 0. \quad (58)$$

Dieser Ausdruck wird Null, wenn

$$2\Theta + k - \alpha + \Phi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \Theta = \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha - k - \Phi}{2}. \quad (59)$$

Da man nun aus Gleichung (59) den Winkel Θ kennt, unter dem die resultierende Bohrkraft ein Minimum wird, kann der zweite Teil der Gleichung (59) in Gleichung (49) wie folgt eingesetzt werden:

$$F = -\frac{S_s \cdot t}{n+1} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \alpha - k - \Phi}{2}\right)} \cdot \frac{\cos k}{\sin k \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \alpha - k - \Phi}{2} - \alpha + \Phi\right) - \cos k \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \alpha - k - \Phi}{2} - \alpha + \Phi\right)} \quad (60)$$

$$= -\frac{S_s \cdot t}{n+1} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \alpha - k - \Phi}{2}\right)} \cdot \frac{-\cos k}{\cos k \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha - k + \Phi}{2}\right) - \sin k \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha - k + \Phi}{2}\right)} \quad (61)$$

Unter Berücksichtigung der trigonometrischen Beziehung (56) erhält man

$$\cos k \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha - k + \Phi}{2}\right) - \sin k \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha - k + \Phi}{2}\right) = \cos\left(k + \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha - k + \Phi}{2}\right) \quad (62)$$

so dass man die Gleichung (61) folgendermaßen

$$F = -\frac{S_s \cdot t}{n+1} \cdot \frac{\cos k}{\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \alpha - k - \Phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha - k + \Phi}{2}\right)} \quad (63)$$

anschreiben kann. Wenn man nun

$$\beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \gamma = (\alpha - k - \Phi) \quad (64)$$

setzt und die trigonometrische Beziehung

$$\sin\beta + \sin\gamma = 2 \cdot \sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right) \quad (65)$$

berücksichtigt, erhält man aus Gleichung (63)

$$F = -\frac{S_s \cdot t}{n+1} \cdot \frac{\cos k}{\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \quad (66)$$

$$= \frac{S_s \cdot t}{n+1} \cdot \frac{\cos k}{\frac{\sin\beta + \sin\gamma}{2}} \quad (67)$$

$$= \frac{S_s \cdot t}{n+1} \cdot \frac{2 \cdot \cos k}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - k - \Phi)} \quad (68)$$

Somit kann schließlich unter Berücksichtigung von $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, die resultierende Bohrkraft, pro Längeneinheit des Bohrwerkzeuges, bei der Versagen im Punkt A der Linie \overline{AB} auftritt, wie folgt angeschrieben werden:

$$F = \frac{2}{n+1} \cdot S_s \cdot t \cdot \frac{\cos k}{1 - \sin(k - \alpha + \Phi)} \quad (69)$$

F ... resultierende Bohrkraft

n ... Spannungsverteilungs-Faktor (d.h.: eine Konstante, der der Spannungszustand während des Gesteinslöseprozesses zu Grunde liegt)

S_s ... Scherfestigkeit des Gesteins

t ... Tiefe des Einschnittes

k ... Konstante des inneren Reibungswinkels des Gesteins

α ... Spanwinkel - Neigungswinkel der oberen Meißelfläche gegenüber der Vertikalen (siehe Abb. 43 auf Seite 38)

Φ ... "Reibungswinkel der Gesteinslösung" (siehe Abb. 43 auf Seite 38)

Allerdings muss darauf hingewiesen werden, dass die Linie, bei der die resultierende Bohrkraft ein Minimum wird, nicht unbedingt mit der Richtung des makroskopischen Risses, der zum Versagen führt, zusammenfallen muss. Dies hat den Grund darin, dass die Linie \overline{AB} unter Berücksichtigung des Spannungszustandes angenommen wurde, die Ausbreitung des Versagensrisses aber nicht vom Spannungszustand vor Rissbeginn abhängt.

Abschließend kann man die resultierende Kraft noch in eine horizontale Komponente P (Schneidkraft) und in eine vertikale Komponente Q (Anpresskraft)

$$P = F \cos(\Phi - \alpha) \quad (70)$$

$$Q = F \sin(\Phi - \alpha) \quad (71)$$

unterteilen.

Im Zuge seiner Studie führte Nishimatsu [51] auch Experimente mit sandigem Tuff und Zementmörtel durch, deren Ergebnisse in zusammengefasster Form im Folgenden behandelt werden. Die physikalischen Eigenschaften dieser Gesteine sind in Tab. 2 auf Seite 44 angeführt.

Tabelle 2: Physikalische Eigenschaften der getesteten Gesteine [51]

	sandiger Tuff		Zementmörtel	
Druckfestigkeit (kg/cm^2)	373	108	133	109
Zugfestigkeit (kg/cm^2)	51.8	12.7	14.2	14.3
Scherfestigkeit (kg/cm^2)	90.8	22.9	26.3	25.3
innerer Reibungswinkel	51° 54'	46° 00'	43° 15'	49° 45'

Für die Versuchsdurchführung wurden rechteckige Platten (20 x 300 x 100mm) aus den Felsproben geschnitten und mit einem Schrägmeißel (Spanwinkel: 10°, 20°, 30° und 40°; Meißelbreite: 30mm) bei "Schneidtiefen" (Abstand vom tiefsten Punkt des Meißels bis zur freien Oberfläche) von 2 bis 16mm bearbeitet. Die Schneidkraft und die Anpresskraft wurden durch einen ring- und plattenförmigen Kraftmesser (siehe Abb. 44 auf Seite 45) bestimmt und aufgezeichnet, wobei das Ergebnis den Durchschnittswert der gemessenen Maximalwerte pro Zehntelsekunde darstellt.



Abbildung 44: ring- und plattenförmiger Kraftmesser [51]

In Abb. 45 auf Seite 46 sind die Versuchsergebnisse dargestellt und es ist augenscheinlich, dass zwischen den zwei Komponenten, der resultierenden Bohrkraft und der "Schneidtiefe" ein linearer Zusammenhang besteht, der folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$P = a_1 + b_1 \cdot t \quad (72)$$

$$Q = a_2 + b_2 \cdot t \quad (73)$$

Wobei P wieder die horizontale Komponente (Schneidkraft) und Q die vertikale Komponente (Anpresskraft) der resultierenden Bohrkraft darstellt. Die Parameter (a_1, a_2, b_1, b_2) der Gleichungen (72) und (73) können an die Resultate der Versuche durch die Methode der kleinsten Quadrate angepasst werden.

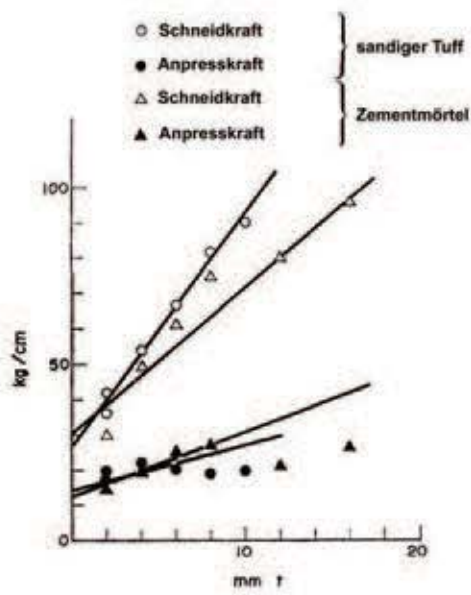
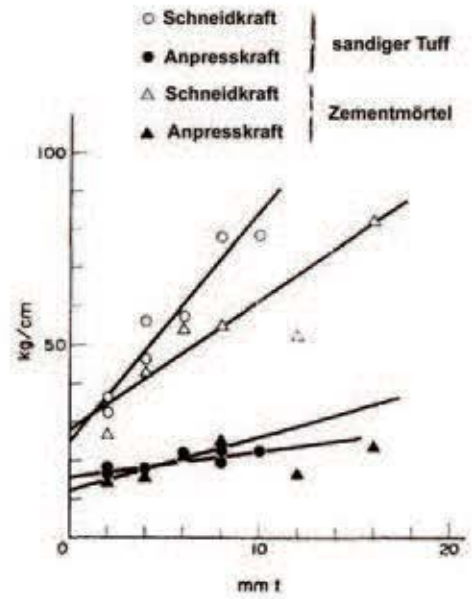
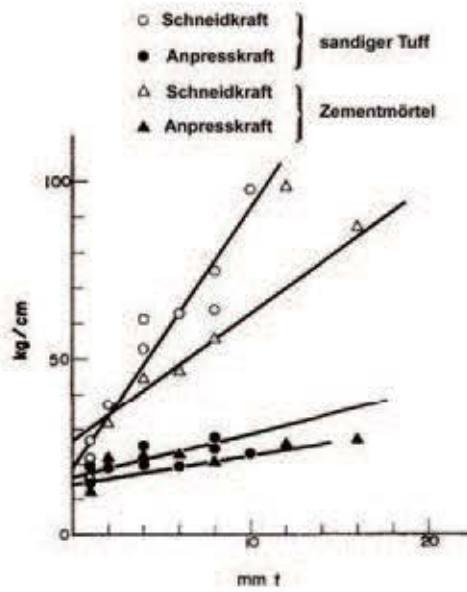
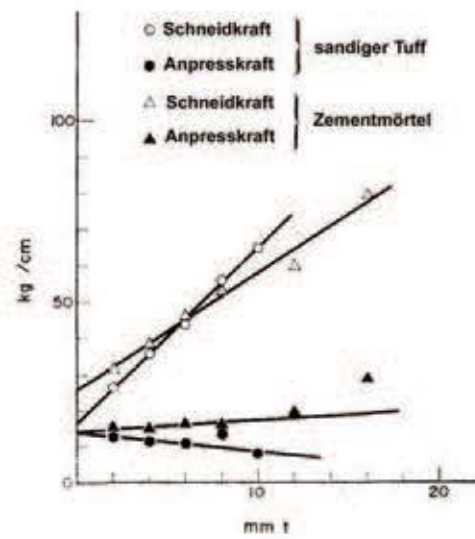
(a) Spanwinkel: 10° (b) Spanwinkel: 20° (c) Spanwinkel: 30° (d) Spanwinkel: 40°

Abbildung 45: Experimentelle Ergebnisse der Schneidkraft P und der Anpresskraft Q in Abhängigkeit der "Schneidtiefe" und des Spanwinkels [51]

Wenn man nun die Gleichung (69) für die resultierende Bohrkraft betrachtet, die unter dem theoretischen Aspekt der Bildung eines groben "Gestein-Chips" hergeleitet wurde, kann man davon ausgehen, dass sich der jeweils erste Term der Gleichungen (72) und (73) mit dem "sekundären Zertrümmerungsbereich" (siehe "Versagensprozess bei Gesteinslösung" am Anfang von Abschnitt 6 „Gesteinslösung bei Schrämmmeißeln“ auf Seite 37) beschäftigt. Demnach entspricht der jeweils zweite Term der Gleichungen (72) und (73) der Gleichung (69), so dass man folgende Gleichung erhält.

$$b_1 = \frac{2}{n+1} \cdot S_s \cdot \frac{\cos k}{1 - \sin(k - \alpha + \Phi)} \cdot \cos(\Phi - \alpha) \quad (74)$$

Da der zweite Teil der Gleichung (72) der Gleichung (70) entspricht, und auch der zweite Teil der Gleichung (73) der Gleichung (71) entspricht, kann man folgende Beziehung aufstellen:

$$\frac{b_2}{b_1} = \tan(\Phi - \alpha) \quad (75)$$

Wenn man nun die beobachteten und weiter oben beschriebenen erhaltenen Parameter b_1 und b_2 in die Gleichung (75) einsetzt, kann man den "Reibungswinkel der Gesteinslösung" Φ (Winkel zwischen der Richtung von der resultierenden Bohrkraft und der Lotrechten auf die obere Fläche des Bohrmeißels (siehe Abb. 43 auf Seite 38)) berechnen. Die Resultate sind in Abb. 46 auf Seite 47 ersichtlich und zeigen, dass dieser "Reibungswinkel" eine lineare Funktion des Spanwinkels α (siehe Abb. 43 auf Seite 38) ist und für die untersuchten Gesteinsproben wie folgt aufgestellt werden kann:

$$\Phi = 25.4^\circ + 0.66 \cdot \alpha \quad \text{Zementmörtel} \quad (76)$$

$$\Phi = 22.9^\circ + 0.32 \cdot \alpha \quad \text{sandiger Tuff} \quad (77)$$

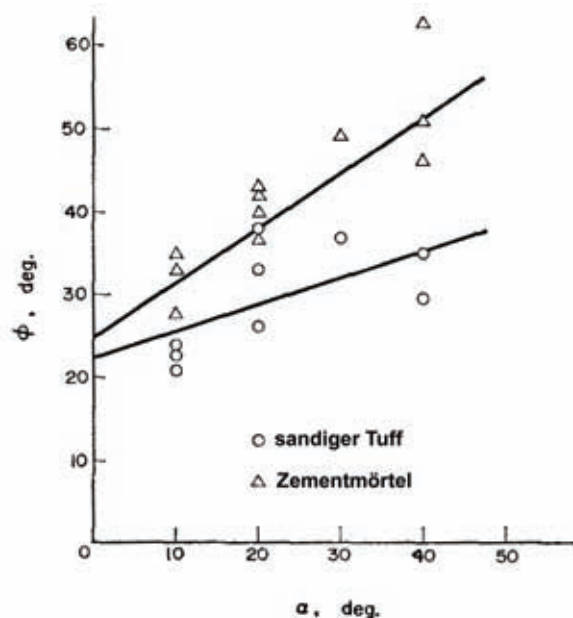


Abbildung 46: Der "Reibungswinkel der Gesteinslösung" Φ als Funktion des Spanwinkels α [51]

Der Spannungsverteilungs-Faktor kann mit Hilfe der Gleichung (74) erhalten werden, sofern es möglich ist den inneren Reibungswinkel und die Scherfestigkeit des Gesteins zu ermitteln. Eine Möglichkeit wäre es diese zwei Parameter über eine Reihe von Triaxial-Druckversuchen zu erhalten. Allerdings hielt dies Nishimatsu [51] für zu aufwendig und kostspielig, um als

Standardprozedur für die Praxis eingeführt zu werden. Die Parameter S_s und k der Gleichung (42) können auch über die Ergebnisse eines einaxialen Druckversuches und eines Spaltzugversuches (Brazilian-Test) berechnet werden. Dabei wird die Scherfestigkeit als Schnittpunkt der Bruchgeraden mit der τ -Achse definiert, wobei man die Bruchgerade als Tangente an die beiden Mohrschen Kreise erhält, die wiederum aus dem einaxialen Druckversuch und dem Spaltzugversuch resultieren (siehe Abb. 47 auf Seite 48). S_c stellt dabei die einaxiale Druckfestigkeit und S_t die Zugfestigkeit, erhalten durch den Spaltzugversuch, dar (Druckspannungen sind in Abb. 47 auf Seite 48 negativ und die Zugspannungen positiv).

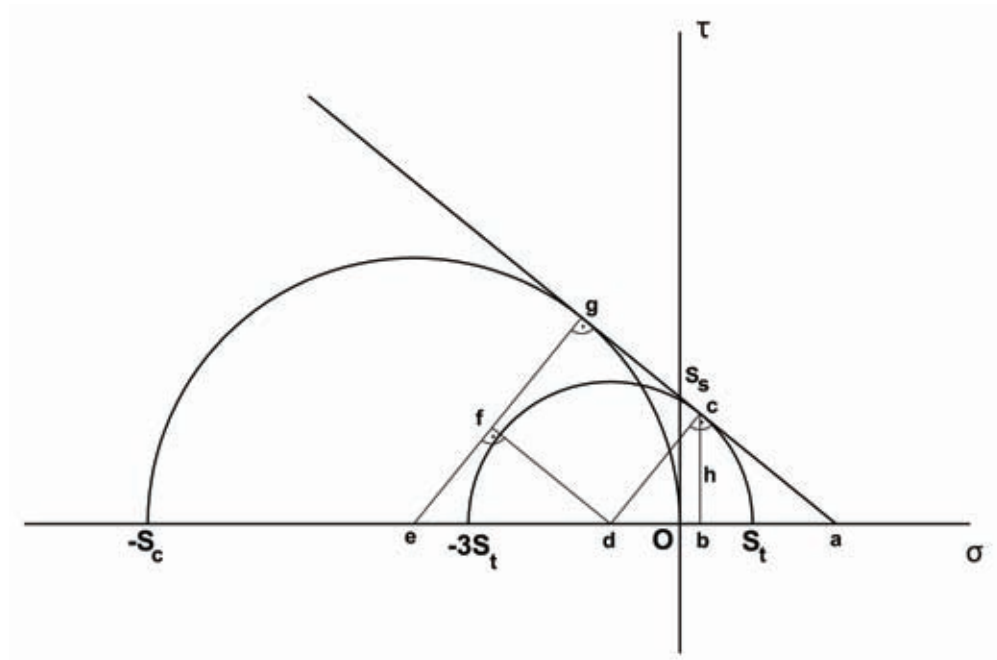


Abbildung 47: Abschätzung der Scherfestigkeit mit Hilfe des einaxialen Druckversuches und des Spaltzugversuches. [51]

Um auf eine Formel zur Bestimmung der Scherfestigkeit zu gelangen, werden einige Variablen eingeführt. Um die Abb. 47 auf Seite 48 nicht zu überladen, wurden aber nicht alle Variablen eingezeichnet, sondern nur im Folgenden aufgelistet.

$$x = \overline{df} = \overline{cg} \quad (78)$$

$$y = \overline{ac} \quad (79)$$

$$z = \overline{aS_t} \quad (80)$$

$$w = \overline{Oa} \quad (81)$$

$$u = \overline{Ob} \quad (82)$$

$$h = \overline{bc} \quad (83)$$

Betrachtet man nun das rechtwinkelige Dreieck def kann man unter Berücksichtigung der geometrischen Gegebenheiten

$$\overline{Od} = S_t \quad (84)$$

$$\overline{Oe} = \frac{S_c}{2} \quad (85)$$

den Satz von Pythagoras anwenden.

$$\left(\frac{S_c}{2} - 2 \cdot S_t\right)^2 + x^2 = \left(\frac{S_c}{2} - S_t\right)^2 \quad (86)$$

Diese Gleichung wird nun so umgeformt, dass man eine Gleichung für die Variable x erhält.

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{S_c^2}{4} - 2 \cdot \frac{S_c}{2} \cdot S_t + S_t^2 - \left(\frac{S_c^2}{4} - 2 \cdot \frac{S_c}{2} \cdot 2 \cdot S_t + 4 \cdot S_t^2\right) \\ &= -S_c \cdot S_t + S_t^2 + 2 \cdot S_c \cdot S_t - 4 \cdot S_t^2 \\ &= S_c \cdot S_t - 3 \cdot S_t^2 \\ &= S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t) \\ \Rightarrow \quad x &= \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)} \end{aligned} \quad (87)$$

Mit Hilfe dieser Variablen und der Tatsache, dass die Dreiecke adc und aeg ähnlich sind, lässt sich das Verhältnis

$$\frac{\frac{S_c}{2}}{x+y} = \frac{2 \cdot S_t}{y} \quad (88)$$

aufstellen. Nach einigen Umformungen dieser Gleichung und anschließendem Einsetzen des Ausdrucks (87) für x erhält man eine Gleichung für die Variable y .

$$\begin{aligned} \frac{S_c}{2 \cdot (x+y)} &= \frac{2 \cdot S_t}{y} \\ S_c \cdot y &= 2 \cdot S_t \cdot 2 \cdot (x+y) \\ S_c \cdot y &= 4 \cdot S_t \cdot x + 4 \cdot S_t \cdot y \\ S_c \cdot y - 4 \cdot S_t \cdot y &= 4 \cdot S_t \cdot x \\ y \cdot (S_c - 4 \cdot S_t) &= 4 \cdot S_t \cdot x \\ \Rightarrow \quad y &= \frac{4 \cdot S_t \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}}{(S_c - 4 \cdot S_t)} \end{aligned} \quad (89)$$

Wiederum unter Ausnutzung der Ähnlichkeit der zwei Dreiecke adc und aeg lässt sich nun auch ein Verhältnis mit der Variablen z aufstellen.

$$\frac{\frac{S_c}{2}}{\frac{S_c}{2} + S_t + z} = \frac{2 \cdot S_t}{2 \cdot S_t + z} \quad (90)$$

Durch Umformen dieser Gleichung gelangt man wiederum auf einen Ausdruck für die Variable z .

$$\begin{aligned} S_c \cdot (2 \cdot S_t + z) &= 2 \cdot S_t \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{S_c}{2} + S_t + z\right)\right] \\ 2 \cdot S_c \cdot S_t + S_c \cdot z &= 2 \cdot S_c \cdot S_t + 4 \cdot S_t^2 + 4 \cdot S_t \cdot z \\ S_c \cdot z - 4 \cdot S_t \cdot z &= 4 \cdot S_t^2 \\ \Rightarrow \quad z &= \frac{4 \cdot S_t^2}{S_c - 4 \cdot S_t} \end{aligned} \quad (91)$$

Mit Hilfe dieses Ausdrucks für z lässt sich die Variable w folgendermaßen anschreiben.

$$w = z + S_t \quad (92)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4 \cdot S_t^2}{S_c - 4 \cdot S_t} + S_t \\ &= \frac{4 \cdot S_t^2}{S_c - 4 \cdot S_t} + \frac{S_t \cdot (S_c - 4 \cdot S_t)}{S_c - 4 \cdot S_t} \\ &= \frac{4 \cdot S_t^2 + S_t \cdot S_c - 4 \cdot S_t^2}{S_c - 4 \cdot S_t} \\ \Rightarrow \quad w &= \frac{S_t \cdot S_c}{S_c - 4 \cdot S_t} \quad (93) \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die zwei rechtwinkligen Dreiecke abc und bdc , lässt sich ein Gleichungssystem mit Hilfe des Satzes von Pythagoras aufstellen.

$$(S_t + u)^2 + h^2 = (2 \cdot S_t)^2 \quad (94)$$

$$(w - u)^2 + h^2 = y^2 \quad (95)$$

Löst man dieses Gleichungssystem auf, indem man die Gleichung (95) von Gleichung (94) subtrahiert erhält man:

$$S_t^2 + 2 \cdot S_t \cdot u + u^2 - [w^2 - 2 \cdot w \cdot u + u^2] = 4 \cdot S_t^2 - y^2 \quad (96)$$

Diese Gleichung wird so umgeformt, dass man einen Ausdruck für die Variable u erhält.

$$\begin{aligned} S_t^2 + 2 \cdot S_t \cdot u + u^2 - w^2 + 2 \cdot w \cdot u - u^2 &= 4 \cdot S_t^2 - y^2 \\ u \cdot (2 \cdot S_t + 2 \cdot w) &= 3 \cdot S_t^2 - y^2 + w^2 \\ u &= \frac{3 \cdot S_t^2 - y^2 + w^2}{2 \cdot S_t + 2 \cdot w} \quad (97) \end{aligned}$$

Setzt man in die Gleichung (97) statt den Variablen y und w die Ausdrücke (89) und (93), erhält man nach einigen Umformungen eine Gleichung für die Variable u , die nur mehr von S_c (einaxiale Druckfestigkeit) und S_t (Zugfestigkeit) abhängig ist.

$$\begin{aligned} u &= \frac{3 \cdot S_t^2 - \left[\frac{4 \cdot S_t \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}}{S_c - 4 \cdot S_t} \right]^2 + \left(\frac{S_t \cdot S_c}{S_c - 4 \cdot S_t} \right)^2}{2 \cdot S_t + 2 \cdot \left(\frac{S_t \cdot S_c}{S_c - 4 \cdot S_t} \right)} \\ &= \frac{3 \cdot S_t^2 \cdot (S_c - 4 \cdot S_t)^2 - 16 \cdot S_t^2 \cdot [S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)] + S_t^2 \cdot S_c^2}{(S_c - 4 \cdot S_t)^2} \\ &= \frac{2 \cdot S_t \cdot (S_c - 4 \cdot S_t) + 2 \cdot S_t \cdot S_c}{(S_c - 4 \cdot S_t)} \\ &= \frac{3 \cdot S_t^2 \cdot S_c^2 - 24 \cdot S_t^3 \cdot S_c + 48 \cdot S_t^4 - 16 \cdot S_t^3 \cdot S_c + 48 \cdot S_t^4 + S_t^2 \cdot S_c^2}{(S_c - 4 \cdot S_t)} \\ &= \frac{96 \cdot S_t^4 - 40 \cdot S_t^3 \cdot S_c + 4 \cdot S_t^2 \cdot S_c^2}{4 \cdot S_t \cdot S_c - 8 \cdot S_t^2} \\ &= \frac{S_c - 4 \cdot S_t}{4 \cdot S_t \cdot S_c - 8 \cdot S_t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{24 \cdot S_t^3 - 10 \cdot S_t^2 \cdot S_c + S_t \cdot S_c^2}{(S_c - 4 \cdot S_t) \cdot (S_c - 2 \cdot S_t)} \\
&= \frac{S_t \cdot (24 \cdot S_t^2 - 10 \cdot S_t \cdot S_c + S_c^2)}{(S_c - 4 \cdot S_t) \cdot (S_c - 2 \cdot S_t)} \\
&= \frac{S_t \cdot (S_c - 4 \cdot S_t) \cdot (S_c - 6 \cdot S_t)}{(S_c - 4 \cdot S_t) \cdot (S_c - 2 \cdot S_t)} \\
\Rightarrow \quad u &= \frac{S_t \cdot (S_c - 6 \cdot S_t)}{(S_c - 2 \cdot S_t)} \tag{98}
\end{aligned}$$

Ersetzt man nun in Gleichung (94) die Variable u durch den Ausdruck (98) erhält man

$$\left(S_t + \frac{S_t \cdot (S_c - 6 \cdot S_t)}{(S_c - 2 \cdot S_t)} \right)^2 + h^2 = (2 \cdot S_t)^2. \tag{99}$$

Durch Umformung dieser Gleichung erhält man dann schließlich eine Gleichung für die Variable h .

$$\begin{aligned}
h^2 &= 4 \cdot S_t^2 - \left[\frac{S_t \cdot (S_c - 2 \cdot S_t)}{(S_c - 2 \cdot S_t)} + \frac{S_t \cdot (S_c - 6 \cdot S_t)}{(S_c - 2 \cdot S_t)} \right]^2 \\
&= 4 \cdot S_t^2 - \left[\frac{S_t \cdot S_c - 2 \cdot S_t^2 + S_t \cdot S_c - 6 \cdot S_t^2}{(S_c - 2 \cdot S_t)} \right]^2 \\
&= 4 \cdot S_t^2 - \left[\frac{2 \cdot S_t \cdot S_c - 8 \cdot S_t^2}{(S_c - 2 \cdot S_t)} \right]^2 \\
&= 4 \cdot S_t^2 - \left[\frac{2 \cdot S_t \cdot (S_c - 4 \cdot S_t)}{(S_c - 2 \cdot S_t)} \right]^2 \\
&= \frac{4 \cdot S_t^2 \cdot (S_c - 2 \cdot S_t)^2}{(S_c - 2 \cdot S_t)^2} - \frac{4 \cdot S_t^2 \cdot (S_c - 4 \cdot S_t)^2}{(S_c - 2 \cdot S_t)^2} \\
&= \frac{4 \cdot S_t^2 \cdot (S_c^2 - 4 \cdot S_t \cdot S_c + 4 \cdot S_t^2) - [4 \cdot S_t^2 \cdot (S_c^2 - 8 \cdot S_t \cdot S_c + 16 \cdot S_t^2)]}{(S_c - 2 \cdot S_t)^2} \\
&= \frac{4 \cdot S_t^2 \cdot S_c^2 - 16 \cdot S_t^3 \cdot S_c + 16 \cdot S_t^4 - 4 \cdot S_t^2 \cdot S_c^2 + 32 \cdot S_t^3 \cdot S_c - 64 \cdot S_t^4}{(S_c - 2 \cdot S_t)^2} \\
&= \frac{16 \cdot S_t^3 \cdot S_c - 48 \cdot S_t^4}{(S_c - 2 \cdot S_t)^2} \tag{100}
\end{aligned}$$

$$h^2 = \frac{16 \cdot S_t^2 \cdot (S_t \cdot S_c - 3 \cdot S_t^2)}{(S_c - 2 \cdot S_t)^2} \tag{101}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{4 \cdot S_t \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}}{(S_c - 2 \cdot S_t)} \tag{102}$$

Unter Ausnutzung der Ähnlichkeit der zwei rechtwinkligen Dreiecke abc und aOS_s , ist es nun schließlich möglich ein Verhältnis mit dem gesuchten Parameter S_s (Scherfestigkeit) aufzustellen.

$$\frac{h}{w-u} = \frac{S_s}{S_t+z} \quad (103)$$

Formt man dieses Verhältnis, unter Verwendung der Ausdrücke (102), (93) und (98) um, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung der Scherfestigkeit.

$$S_s = \frac{h \cdot w}{w-u} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4 \cdot S_t \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}}{(S_c - 2 \cdot S_t)} \cdot \frac{S_t \cdot S_c}{(S_c - 4 \cdot S_t)} \\ &= \frac{S_t \cdot S_c}{(S_c - 4 \cdot S_t)} - \frac{S_t \cdot (S_c - 6 \cdot S_t)}{(S_c - 2 \cdot S_t)} \\ &= \frac{4 \cdot S_t^2 \cdot S_c \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}}{(S_c - 2 \cdot S_t) \cdot (S_c - 4 \cdot S_t)} \\ &= \frac{S_t \cdot S_c \cdot (S_c - 2 \cdot S_t) - [S_t \cdot (S_c - 6 \cdot S_t) \cdot (S_c - 4 \cdot S_t)]}{(S_c - 4 \cdot S_t) \cdot (S_c - 2 \cdot S_t)} \\ &= \frac{4 \cdot S_t^2 \cdot S_c \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}}{S_t \cdot S_c^2 - 2 \cdot S_t^2 \cdot S_c - [S_t \cdot (S_c^2 - 6 \cdot S_c \cdot S_t - 4 \cdot S_c \cdot S_t + 24 \cdot S_t^2)]} \\ &= \frac{4 \cdot S_t^2 \cdot S_c \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}}{S_t \cdot S_c^2 - 2 \cdot S_t^2 \cdot S_c - S_t \cdot S_c^2 + 10 \cdot S_c \cdot S_t^2 - 24 \cdot S_t^3} \\ &= \frac{4 \cdot S_t^2 \cdot S_c \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}}{8 \cdot S_t^2 \cdot S_c - 24 \cdot S_t^3} \\ &= \frac{S_c \cdot S_t \cdot (4 \cdot S_t^2 \cdot S_c - 12 \cdot S_t^3)}{2 \cdot (4 \cdot S_t^2 \cdot S_c - 12 \cdot S_t^3) \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}} \\ \Rightarrow S_s &= \frac{S_c \cdot S_t}{2 \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}} \quad (105) \end{aligned}$$

S_c ... einaxiale Druckfestigkeit des Gesteins (im einaxialen Druckversuch bestimmt)

S_t ... Zugfestigkeit des Gesteins (mit Hilfe des Spaltzugversuches bestimmt)

Mit der Gleichung (105) lässt sich die Scherfestigkeit des Gesteins S_s mit Hilfe der Parameter S_c und S_t , die durch einen einaxialen Druckversuch und einen Spaltzugversuch ermittelt werden, abschätzen. Kennt man nun die Scherfestigkeit und die Druckfestigkeit, kann man den inneren Reibungswinkel als Steigungswinkel der Bruchgeraden, die die τ -Achse bei S_s schneidet und den Mohrschen Kreis des einaxialen Druckversuches tangiert, bestimmen (siehe Abb. 47 auf Seite 48). Da die Gleichung für den Reibungswinkel k nur von den Parametern S_c und S_s abhängen soll, wird zunächst die Gleichung (105) so umgeformt, dass man einen Ausdruck für S_t erhält.

$$\begin{aligned} S_s &= \frac{S_c \cdot S_t}{2 \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}} \\ (2 \cdot S_s)^2 &= \frac{S_c^2 \cdot S_t^2}{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4 \cdot S_s^2}{S_c^2} &= \frac{S_t}{(S_c - 3 \cdot S_t)} \\
\frac{(S_c - 3 \cdot S_t)}{S_t} &= \frac{S_c^2}{4 \cdot S_s^2} \\
\frac{S_c}{S_t} - \frac{3 \cdot S_t}{S_t} &= \frac{S_c^2}{4 \cdot S_s^2} \\
\frac{S_c}{S_t} &= \frac{S_c^2}{4 \cdot S_s^2} + 3 \\
S_t &= \frac{S_c}{\frac{S_c^2}{4 \cdot S_s^2} + 3} = \frac{S_c}{\frac{S_c^2 + 12 \cdot S_s^2}{4 \cdot S_s^2}} \\
S_t &= \frac{4 \cdot S_c \cdot S_s^2}{12 \cdot S_s^2 + S_c^2} \tag{106}
\end{aligned}$$

Der innere Reibungswinkel kann nun wie folgt berechnet werden (siehe Abb. 47 auf Seite 48).

$$\tan k = \frac{h}{w - u} \tag{107}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{4 \cdot S_t \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}}{(S_c - 2 \cdot S_t)} \\
&= \frac{\frac{S_t \cdot S_c}{S_c - 4 \cdot S_t} - \frac{S_t \cdot (S_c - 6 \cdot S_t)}{S_c - 2 \cdot S_t}}{\frac{4 \cdot S_t \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}}{(S_c - 2 \cdot S_t)}} \\
&= \frac{(S_t \cdot S_c) \cdot (S_c - 2 \cdot S_t) - [S_t \cdot (S_c - 6 \cdot S_t) \cdot (S_c - 4 \cdot S_t)]}{(S_c - 4 \cdot S_t) \cdot (S_c - 2 \cdot S_t)} \\
&= \frac{4 \cdot S_t \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}}{S_t \cdot S_c^2 - 2 \cdot S_t^2 \cdot S_c - S_t \cdot S_c^2 + 10 \cdot S_t^2 \cdot S_c - 24 \cdot S_t^3} \\
&\quad (S_c - 4 \cdot S_t) \\
&= \frac{4 \cdot S_t \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}}{8 \cdot S_t^2 \cdot S_c - 24 \cdot S_t^3} \\
&\quad (S_c - 4 \cdot S_t) \\
&= \frac{S_t \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}}{2 \cdot S_t^2 \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)} \\
&\quad (S_c - 4 \cdot S_t) \\
&= \frac{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t) \cdot (S_c - 4 \cdot S_t)}{2 \cdot S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t) \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}} \\
&= \frac{S_t \cdot S_c}{2 \cdot S_t \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}} - \frac{4 \cdot S_t^2}{2 \cdot S_t \cdot \sqrt{S_t \cdot (S_c - 3 \cdot S_t)}} \tag{108}
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von Gleichung (105) lässt sich die eben bestimmte Gleichung (108) für $\tan k$ folgendermaßen anschreiben.

$$\tan k = \frac{S_s}{S_t} - \frac{4 \cdot S_s}{S_c} \quad (109)$$

Setzt man nun in diese Gleichung statt dem Parameter S_t den Ausdruck von Gleichung (106), dann erhält man

$$\begin{aligned} \tan k &= \frac{S_s}{\frac{4 \cdot S_c \cdot S_s^2}{12 \cdot S_s^2 + S_c^2}} - \frac{4 \cdot S_s}{S_c} \\ &= \frac{S_s \cdot (12 \cdot S_s^2 + S_c^2)}{4 \cdot S_c \cdot S_s^2} - \frac{4 \cdot S_s}{S_c} \\ &= \frac{12 \cdot S_s^2 + S_c^2 - 16 \cdot S_s^2}{4 \cdot S_c \cdot S_s} \\ \Rightarrow \tan k &= \frac{S_c^2 - 4 \cdot S_s^2}{4 \cdot S_c \cdot S_s}. \end{aligned} \quad (110)$$

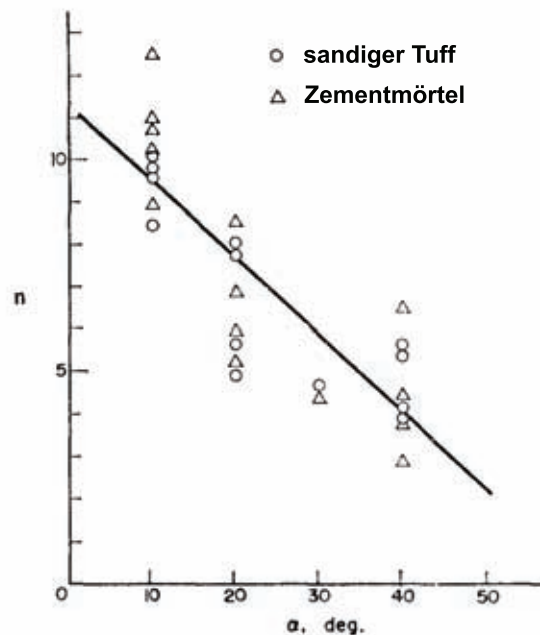


Abbildung 48: Spannungsverteilungs-Faktor in Abhängigkeit des Spanwinkels [51]

Mit den Gleichungen (76) und (77) kann der "Reibungswinkel der Gesteinslösung" Φ (Winkel zwischen der Richtung von der resultierenden Bohrkraft und der Lotrechten auf die obere Fläche des Bohrmeißels (siehe Abb. 43 auf Seite 38)) für einen beliebigen Spanwinkel α berechnet werden. Außerdem ist es durch die Gleichungen (105) und (110) möglich sowohl die Scherfestigkeit S_s als auch den inneren Reibungswinkel k zu bestimmen (Ergebnisse siehe Tab. 2 auf Seite 44). Nun kann man mit Hilfe der Gleichung (74) und Einsetzen der beobachteten Werte b_1 und der berechneten Werte Φ , k und S_s den Spannungsverteilungs-Faktor n für bestimmte Werte des Spanwinkels α berechnen. In Abb. 48 auf Seite 54 sind die Versuchsergebnisse abgebildet, die bestätigen, dass der Spannungsverteilungs-Faktor nicht von den physikalischen Eigenschaften des Felses an sich abhängt, sondern nur vom Spannungszustand. Dieser wiederum ist abhängig von dem Spanwinkel α , so dass man den Spannungsverteilungs-Faktor als

$$n = 11.3 - 0.18 \cdot \alpha \quad (111)$$

anschreiben kann.

Durch die eben vorgestellte Theorie von Nishimatsu [51] und den dabei hergeleiteten Gleichungen ist es möglich, die resultierende Bohrkraft eines Schrämmmeißels zu berechnen (siehe Gleichung (69)). Außerdem wurden auch noch die Auswirkungen einer Veränderung des Spannwinkels auf den Spannungsverteilungs-Faktor, den inneren Reibungswinkel und die Schneid- und Anpresskraft untersucht. Diese Berechnungen wurden durch Versuche begleitet, deren Ergebnisse in guter Übereinstimmung mit den theoretischen Werten stehen. Allerdings ist zu hinterfragen, ob der angenommene Versagensmechanismus (Versagen durch Scherbruch) der Wirklichkeit entspricht, oder ob nicht ein anderer Mechanismus die Wirklichkeit wahrheitsgetreuer modellieren würde. Womöglich wäre sogar eine Kombination aus verschiedenen Theorien und Modellen, je nach Gegebenheiten, am sinnvollsten. Auf einen Parameter, der höchstwahrscheinlich einen Einfluss auf die Kräfte und Spannungsverhältnisse während des Löseprozesses hat, wurde allerdings in der eben vorgestellten Theorie auf jeden Fall verzichtet. Dies ist der Öffnungswinkel des Schrämmmeißels selbst. Es ist anzunehmen, dass auf einen Schrämmmeißel mit großem Öffnungswinkel andere Kräfte wirken, als auf einen mit kleinem Öffnungswinkel. Außerdem liegt es auch nahe, dass die Form des ausgebildeten "Gestein-Chips" ebenfalls vom Meißelöffnungswinkel beeinflusst wird. Deshalb wäre es von Vorteil eine Gleichung zu erhalten, in der der Öffnungswinkel des Schrämmmeißels ebenfalls Berücksichtigung findet.

Wie bereits erwähnt, basiert die Theorie und das Modell von Nishimatsu [51] auf der Annahme, dass das Versagen durch Scherbruch, das heißt durch Überschreiten der Scherfestigkeit in einer Ebene (Linie \overline{AB}), eintritt. Eine andere Möglichkeit den Gesteinslöseprozess bei Schrämmmeißeln zu beschreiben, wird unter anderem von Evans [15] gegeben, dessen Theorie nachfolgend kurz vorgestellt wird. Der wesentliche Unterschied zu der Theorie von Nishimatsu liegt darin, dass Evans davon ausgeht, dass bei der "Gesteins-Chip-Bildung" die zulässige Zugspannung vom Fels überschritten wird.

6.2 Theorie nach I. Evans

Die im Folgenden beschriebene Theorie von Evans [15] wurde von ihm entwickelt, um den Löseprozess von Kohle durch Schrämmmeißel zu beschreiben, kann aber auch als eine der ersten Theorien betrachtet werden, die den allgemeinen Gesteinslöseprozess durch Schrämmmeißel beschreibt, da diese Theorie auch auf Fels angewendet werden kann.

• Theorie für spitze keilförmige Schrämmmeißel

Es wird angenommen, dass das Versagen durch Zugbeanspruchung zustande kommt und entlang einer Bruchfläche ce auftritt, die einen Kreisbogen beschreibt (siehe Abb. 49 auf Seite 56).

Im Folgenden wird eine etwas vereinfachte Version der ursprünglichen Theorie von Evans erläutert, die aber die wichtigsten Elemente des Originals enthält und auch von Evans selbst in [15] verwendet wurde, um davon ausgehend eine Theorie für stumpfe, keilförmige Schrämmmeißel zu entwickeln, auf die im Anschluss ebenfalls noch eingegangen wird. Es wird eine rechtwinkelige Felskante angenommen und ein keilförmiger Meißel mit dem Öffnungswinkel 2Θ , der bei \overline{abc} in den Fels eindringt (siehe Abb. 49 auf Seite 56). Weiters wird vorausgesetzt, dass das Versagen durch Rissbildung entlang der Kurve ce eintritt. Da die stärksten Risse, ausgelöst durch einen keilförmigen Meißel, im Fels in Richtung der resultierenden Belastung

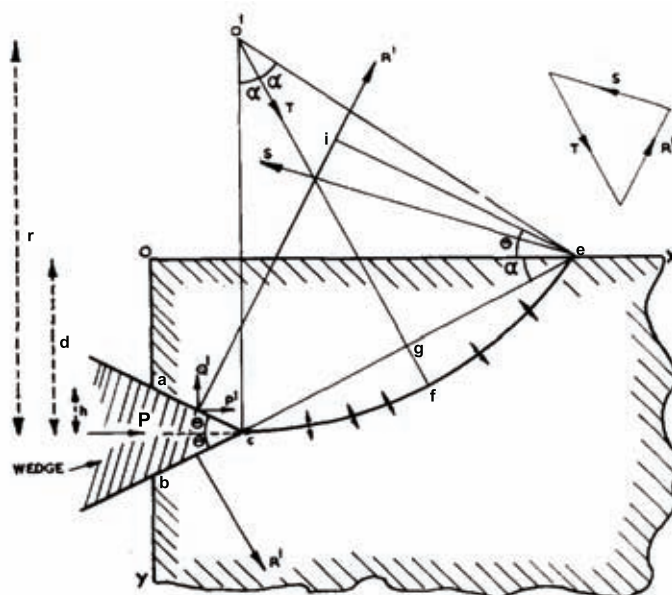


Abbildung 49: Evans Modell zur Gesteinslösung mit einem keilförmigen Schrägmeißel [15]

entstehen, wird davon ausgegangen, dass die Kurve eine horizontale Tangente im Punkt c hat. Außerdem wird angenommen, dass der Kreisbogen mit Mittelpunkt O' den Radius r hat, so dass ein rechter Winkel zwischen $\overline{cO'}$ und Ox gegeben ist. Der Mittelpunktswinkel $cO'e$ des Kreisbogens beträgt 2α . Abgesehen davon wird auch noch vorausgesetzt, dass vorerst keine Reibung zwischen Fels und Meißel vorhanden ist, so dass die Kräfte die an der Felskante angreifen (siehe Abb. 49 auf Seite 56) folgende sind:

- Die Kraft R' , mit den zwei Komponenten P' und Q' , die normal zur Meißeloberfläche \overline{ac} wirkt.
- Die Resultierende T , die man aus den Zugkräften, die normal zu dem Bogen ce angreifen, erhält.
- Die Kraft S , deren Angriffspunkt in e angenommen wird

Die dritte Kraft S wird gebraucht, um ein Kräftegleichgewicht im Fels zu gewährleisten, welches graphisch in Abb. 49 auf Seite 56 durch ein geschlossenes Kräfte-dreieck dargestellt ist. Man kann nun eine Beziehung zwischen R' und T aufstellen, indem man die Summe der Momente um den Punkt e aufstellt.

Voraussetzung dazu ist, dass man einen ebenen Spannungszustand annimmt und das Gleichgewicht an einer Scheibe von dem Gestein mit der Dicke "1", normal zur Ebene von Abb. 49 auf Seite 56, aufstellt. Wenn t die Zugfestigkeit des Gesteins ist, dann lässt sich

$$T = t \cdot r \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\beta \, d\beta = t \cdot r \cdot (\sin\alpha - \sin(-\alpha)) \quad (112)$$

$$= 2 \cdot t \cdot r \cdot \sin\alpha \quad (113)$$

unter Berücksichtigung der trigonometrischen Beziehung von $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ anschreiben, wobei β jeweils jener Winkel ist den ein Element des Kreisbogens mit dem Symmetrieradius $\overline{O'f}$ einschließt. Nimmt man an, dass die Eindringtiefe des Meißels klein ist (das Dreieck abc fällt zu einem Punkt zusammen) und somit h (entspricht $\frac{1}{2}\overline{ab}$) gegenüber der Angriffstiefe d (siehe Abb. 49 auf Seite 56) vernachlässigbar klein ist, so kann unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\overline{ce} = \frac{d}{\sin\alpha} \quad (114)$$

$$\overline{ie} = \overline{ce} \cdot \cos(\alpha + \Theta) = \frac{d}{\sin\alpha} \cdot \cos(\alpha + \Theta) \quad (115)$$

$$\overline{ge} = r \cdot \sin\alpha \quad (116)$$

die Summe der Momente um den Punkt e wie folgt angeschrieben werden:

$$R' \cdot \frac{d}{\sin\alpha} \cdot \cos(\alpha + \Theta) = T \cdot r \cdot \sin\alpha \quad (117)$$

Mit der hilfreichen geometrischen Beziehung

$$r \cdot \sin\alpha = \frac{d}{2 \cdot \sin\alpha} \quad (118)$$

lässt sich die Gleichung (117), unter Verwendung der Gleichung (113) zu

$$R' \cdot \frac{d}{\sin\alpha} \cdot \cos(\alpha + \Theta) = 2 \cdot t \cdot r \cdot \sin\alpha \cdot r \cdot \sin\alpha \quad (119)$$

$$= 2 \cdot t \cdot \frac{d \cdot d}{2 \cdot \sin\alpha \cdot 2 \cdot \sin\alpha} \quad (120)$$

$$R' \cdot \cos(\alpha + \Theta) = \frac{t \cdot d}{2 \cdot \sin\alpha} \quad (121)$$

anschreiben, so dass man dann schließlich

$$R' = \frac{t \cdot d}{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos(\alpha + \Theta)} \quad (122)$$

erhält. Die horizontale Komponente P' von R' ist durch $\sin\Theta \cdot R'$ gegeben. Infolge der Symmetrie des keilförmigen Meißels und der damit verbundenen Symmetrie der Kräfte, die an dem Meißel wirken, ist die totale Eindringkraft (Schneidkraft) P gleich $2 \cdot P'$. Somit kann man

$$P = 2 \cdot R' \cdot \sin\Theta = \frac{t \cdot d \cdot \sin\Theta}{\sin\alpha \cdot \cos(\Theta + \alpha)} \quad (123)$$

anschreiben. Die Annahme ist nun, dass der Winkel α jener Winkel ist, bei dem die Eindringkraft des Meißels P ein Minimum wird. Um das zu erreichen wird die Ableitung von P nach α Null gesetzt ($dP/d\alpha = 0$).

$$\frac{dP}{d\alpha} = t \cdot d \cdot \sin\Theta \cdot \left[-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{1}{\cos(\Theta + \alpha)} + \frac{1}{\sin\alpha} \cdot -(1) \cdot \frac{-\sin(\Theta + \alpha)}{\cos^2(\Theta + \alpha)} \right] \quad (124)$$

$$= t \cdot d \cdot \sin\Theta \cdot \left[\frac{-\cos\alpha \cdot \cos(\Theta + \alpha) + \sin\alpha \cdot \sin(\Theta + \alpha)}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2(\Theta + \alpha)} \right] \quad (125)$$

Diese Gleichung wird nun Null gesetzt, wobei unter Berücksichtigung des "Produkt-Null-Satzes" (ein Produkt ist dann Null wenn ein Faktor Null ist) nur der zweite Teil der Gleichung (125) von Bedeutung ist, da nur hier der Winkel α vorkommt. Unter Berücksichtigung der trigonometrischen Beziehung aus Gleichung (56) folgt somit

$$\frac{\cos\alpha \cdot \cos(\Theta + \alpha) - \sin\alpha \cdot \sin(\Theta + \alpha)}{\sin^2\alpha \cdot \cos^2(\Theta + \alpha)} = 0 \quad (126)$$

$$\cos\alpha \cdot \cos(\Theta + \alpha) - \sin\alpha \cdot \sin(\Theta + \alpha) = 0 \quad (127)$$

$$\cos(\Theta + 2\alpha) = 0. \quad (128)$$

Daraus folgt der Winkel α , unter dem die aufzuwendende Kraft P ein Minimum wird zu

$$\Theta + 2\alpha = \frac{\pi}{2} \quad (129)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \Theta \right) \quad (130)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{2} \quad (131)$$

$$= 45^\circ - \frac{\Theta}{2}. \quad (132)$$

Einsetzen des Winkels α aus der Gleichung (130) in Gleichung (123) ergibt

$$P = \frac{t \cdot d \cdot \sin\Theta}{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right)\right) \cdot \cos\left(\Theta + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right)\right)} \quad (133)$$

$$= \frac{t \cdot d \cdot \sin\Theta}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (134)$$

Unter Anwendung der trigonometrischen Beziehungen aus den Gleichungen (55) und (56) lässt sich Gleichung (134) folgendermaßen anschreiben

$$P = \frac{t \cdot d \cdot \sin\Theta}{\left(\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\Theta}{2} - \cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\Theta}{2}\right) \cdot \left(\cos\frac{\Theta}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\Theta}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)} \quad (135)$$

so dass man schließlich die mindestens erforderliche Kraft P berechnen kann, die notwendig ist, um ein Versagen des Felses (gleichbedeutend mit einem Loslösen eines "Gestein-Chips") auszulösen.

Durch Berücksichtigung folgender trigonometrischer Beziehungen

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad (136)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad (137)$$

$$2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha \quad (138)$$

erhält man die Gleichung

$$P = \frac{t \cdot d \cdot \sin\Theta}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \cos^2\frac{\Theta}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \cos\frac{\Theta}{2} \cdot \sin\frac{\Theta}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \cos\frac{\Theta}{2} \cdot \sin\frac{\Theta}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \sin^2\frac{\Theta}{2}} \quad (139)$$

$$= \frac{t \cdot d \cdot \sin\Theta}{\frac{1}{2} \cdot \left[\cos^2\frac{\Theta}{2} + \sin^2\frac{\Theta}{2} - 2 \cdot \sin\frac{\Theta}{2} \cdot \cos\frac{\Theta}{2} \right]} \quad (140)$$

$$= \frac{2 \cdot t \cdot d \cdot \sin\Theta}{1 - \sin\left(2 \cdot \frac{\Theta}{2}\right)} \quad (141)$$

$$= \frac{2 \cdot t \cdot d \cdot \sin\Theta}{1 - \sin\Theta} \quad (142)$$

mit (siehe Abb. 49 auf Seite 56)

- P ... mindestens erforderliche Kraft, um ein Versagen des Felsen (Lösen eines "Gestein-Chips") zu bewirken
- t ... Zugfestigkeit des Gesteins
- d ... Angriffstiefe des Meißels (gemessen von der oberen Felskante)
- Θ ... halber Öffnungswinkel des keilförmigen Meißels

Möchte man nun auch noch die Reibung zwischen Gestein und Meißel berücksichtigen, dann kann man annehmen, dass die Kraft R' unter dem Winkel Φ (Reibungswinkel zwischen Fels und Meißel) zur Normalen auf die Meißeloberfläche \overline{ac} wirkt. Dies bedeutet, dass Gleichung (117) durch

$$R' \cdot \frac{d}{\sin\alpha} \cdot \cos(\alpha + \Theta + \Phi) = T \cdot r \cdot \sin\alpha \quad (143)$$

ersetzt wird und sich somit auch Gleichung (123) zu

$$P = 2 \cdot R' \cdot \sin(\Theta + \Phi) = \frac{t \cdot d \cdot \sin(\Theta + \Phi)}{\sin\alpha \cdot \cos((\Theta + \Phi) + \alpha)} \quad (144)$$

ändert. Der Winkel α unter dem die aufzuwendende Kraft P ein Minimum wird ergibt sich dementsprechend zu

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \Theta - \Phi \right) \quad (145)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\Theta + \Phi}{2}. \quad (146)$$

Es ist somit eindeutig zu erkennen, dass Θ durch $(\Theta + \Phi)$ ersetzt wird, was sich bei allen weiteren Umformungen durchzieht und schließlich zu der Formel für die mindestens erforderliche Kraft P , die notwendig ist um ein Versagen des Felses (gleichbedeutend mit einem Loslösen eines "Gestein-Chips") auszulösen, unter Berücksichtigung der Reibung zwischen Fels und Meißel, führt:

$$P = \frac{2 \cdot t \cdot d \cdot \sin(\Theta + \Phi)}{1 - \sin(\Theta + \Phi)} \quad (147)$$

mit (siehe Abb. 49 auf Seite 56)

- P ... mindestens erforderliche Kraft um ein Versagen des Felsens (Bildung eines "Gestein-Chips") zu bewirken
- t ... Zugfestigkeit des Gesteins
- d ... Angriffstiefe des Meißels (gemessen von der oberen Felskante)
- Θ ... halber Öffnungswinkel des keilförmigen Meißels
- Φ ... Reibungswinkel zwischen Fels und Meißel

Der Graph der Funktion (147) ist in Abb. 50 auf Seite 60 zu sehen, wobei hier auf der Ordinatennachse, zwecks Vereinheitlichung, die Eindringkraft P im Verhältnis zur doppelten Zug-

festigkeit multipliziert mit der Angriffstiefe $2 \cdot t \cdot d$ aufgetragen wird. Auf der Abszissenachse wird der halbe Meißelöffnungswinkel Θ aufgetragen.

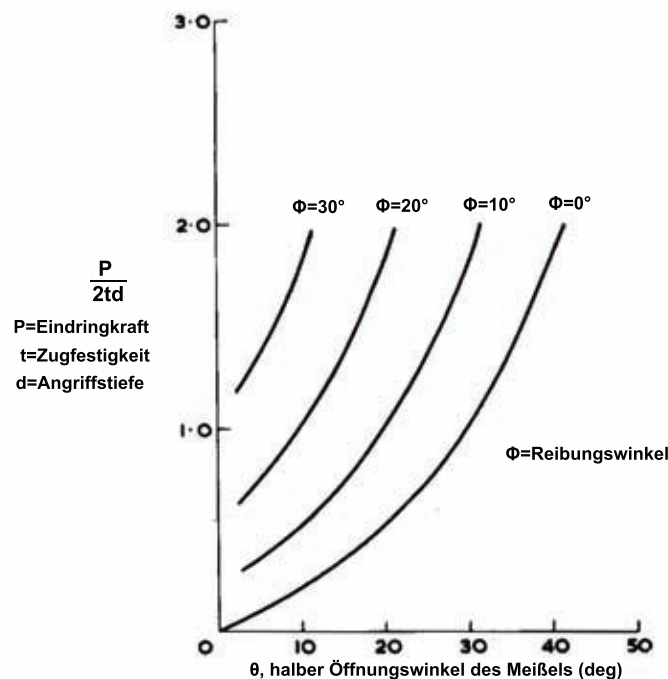


Abbildung 50: Eindringkraft in Abhängigkeit des halben Meißelöffnungswinkels [15]

Es ist ersichtlich, dass bei größeren Meißelöffnungswinkeln die notwendige Eindringkraft stark ansteigt. Dies war zu erwarten, da es logisch erscheint, dass mehr Kraft erforderlich ist einen keilförmigen Meißel mit großem Öffnungswinkel so weit in das Gestein einzutreiben, dass es zum Versagen kommt, als einen Meißel mit sehr spitzem Öffnungswinkel. Weiters ist auch zu erkennen, dass die Reibung zwischen Gestein und Meißel einen sehr wesentlichen Einfluss auf die erforderliche Kraft P hat. Auch hier muss die Eindringkraft bei größerem Reibungswinkel zwischen Fels und Meißel deutlich erhöht werden, um ein Loslösen eines "Gestein-Chips" zu bewirken. Daraus folgt, dass der "optimale" Meißel, in Bezug auf die Minimierung der erforderlichen Kraft, einen möglichst kleinen Öffnungswinkel (sehr spitzer Meißel) aufweisen sollte und die Meißeloberfläche so beschaffen sein sollte, dass die Reibung zum Fels möglichst minimiert wird (glatte Oberfläche, spezielle Beschichtungen). Allerdings muss hier angemerkt werden, dass dieser "optimale" Meißel in der Praxis durch Umstände wie Verschleiß, Wartungsintervalle usw. nicht unbedingt die beste Lösung darstellen muss.

- **Theorie für stumpfe keilförmige Schrämmmeißel**

Da es sich in der Praxis nicht vermeiden lässt, dass spitze Meißel je nach Abrasivität des Gesteins, stumpf werden, ist es von großem Interesse, herauszufinden welchen Einfluss dieses Abstumpfen des Meißels auf die angreifenden Kräfte hat. Deshalb hat Evans [15] seine Theorie auf stumpfe Schrämmmeißel ausgeweitet.

In Abb. 51 auf Seite 61 ist das adaptierte Modell für die Gesteinslösung mit einem stumpfen keilförmigen Schrämmmeißel zu sehen. Die einzige, wenn auch wesentliche Änderung betrifft die Spitze des symmetrischen, keilförmigen Meißels, die abgeflacht wird, so dass eine Fläche mit der Breite $2b$ normal zur angreifenden Kraft entsteht. Durch diese Abflachung wird zusätzlich zu einer Zugspannung, die wie bei der vorangehenden Theorie auf einen Kreisbogen wirkt, auch eine Druckspannung auf das Gestein aufgebracht. Analog zu der Theorie für spitze keilförmige Schrämmmeißel wird durch die Zugkraft ein Riss initiiert, der sich durch die Kraft R' bis zur Oberfläche ausweitet.

$$R' \cdot \frac{d}{\sin \alpha} \cdot \cos(\alpha + \Theta) = T \cdot r \cdot \sin \alpha + A \cdot q \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^m \cdot d^2 \quad (151)$$

$$R' \cdot \frac{d}{\sin \alpha} \cdot \cos(\alpha + \Theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t \cdot d^2}{\sin^2 \alpha} + A \cdot q \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^m \cdot d^2 \quad (152)$$

mit (siehe Abb. 49 auf Seite 56 und Abb. 51 auf Seite 61)

R' ... resultierende auf das Gestein wirkende Kraft, normal zur schrägen Meißeloberfläche

d ... Angriffstiefe des Meißels (gemessen von der oberen Felskante)

α ... halber Mittelpunktswinkel $cO'e$ des Kreisbogens

Θ ... halber Öffnungswinkel des keilförmigen Meißels

t ... Zugfestigkeit des Gesteins

q ... Druckfestigkeit des Gesteins

b ... halbe Breite der stumpfen Meißelspitze

m ... verallgemeinerter Parameter

Es fällt auf, dass die Druckkraft ein gegengleiches Moment zu der Kraft R' erzeugt, was gleichzeitig auch den entscheidenden Unterschied zur Gleichung (117) darstellt. Auflösen der Gleichung (152) nach der resultierenden Kraft R' ergibt

$$R' = \frac{1}{2} \cdot \frac{t \cdot d}{\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \Theta)} + A \cdot q \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^m \cdot d \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha + \Theta)}. \quad (153)$$

Nun wird wiederum angenommen, dass der Winkel α jener Winkel ist bei dem Versagen eintritt und somit R' zu einem Minimum macht. Aus diesem Grund wird die Ableitung von R' nach α Null gesetzt.

$$\frac{dR'}{d\alpha} = 0 \quad (154)$$

$$\frac{dR'}{d\alpha} = \frac{t \cdot d}{2} \cdot \left[(-1) \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha + \Theta)} + \frac{1}{\sin \alpha} \cdot (-1) \cdot \frac{-\sin(\alpha + \Theta)}{\cos^2(\alpha + \Theta)} \right] + A \cdot q \cdot d \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^m \cdot \left[\frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha + \Theta)} + \sin \alpha \cdot (-1) \cdot \frac{-\sin(\alpha + \Theta)}{\cos^2(\alpha + \Theta)} \right] \quad (155)$$

$$= \frac{t \cdot d}{2} \cdot \left[-\frac{\cos \alpha \cdot \cos(\alpha + \Theta) - \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \Theta)}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2(\alpha + \Theta)} \right] + A \cdot q \cdot d \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^m \cdot \left[\frac{\cos \alpha \cdot \cos(\alpha + \Theta) + \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \Theta)}{\cos^2(\alpha + \Theta)} \right] \quad (156)$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (157)$$

lässt sich die Gleichung (156) weiter vereinfachen zu

$$\frac{t \cdot d}{2} \cdot \left[-\frac{\cos(\alpha + \alpha + \Theta)}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2(\alpha + \Theta)} \right] + A \cdot q \cdot d \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^m \cdot \left[\frac{\cos(\alpha - \alpha - \Theta)}{\cos^2(\alpha + \Theta)} \right] = 0. \quad (158)$$

Unter Verwendung folgender Beziehungen

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sin^2 \alpha &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= 1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= 1 - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= 1 - \cos(2 \cdot \alpha) \end{aligned} \quad (159)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad (160)$$

erhält man schließlich

$$\frac{t \cdot d}{2} \cdot \left[\frac{\cos(2 \cdot \alpha + \Theta)}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2(\alpha + \Theta)} \right] = A \cdot q \cdot d \cdot \left(\frac{b}{d} \right)^m \cdot \left[\frac{\cos(-\Theta)}{\cos^2(\alpha + \Theta)} \right] \quad (161)$$

$$\frac{\cos(2\alpha + \Theta)}{1 - \cos(2 \cdot \alpha)} = A \cdot \left(\frac{q}{t} \right) \cdot \left(\frac{b}{d} \right)^m \cdot \cos \Theta. \quad (162)$$

Mit Hilfe der Gleichung (162) lässt sich, sofern die Parameter auf der rechten Seite der Gleichung bekannt sind, jener Winkel α berechnen, unter dem die Kraft R' ein Minimum wird. Ergänzend sei hier erwähnt, dass nur dann von einem Minimum der Kraft R' auszugehen ist, wenn die zweite Ableitung $d^2 R'/d\alpha^2$ positiv ist. Diese Berechnung wird hier allerdings nicht durchgeführt, da dies einen erheblichen Rechenaufwand mit sich bringen würde und sich nicht primär mit dem vorliegenden Problem beschäftigt. Es sei lediglich angemerkt, dass mit Hilfe von Funktionsgraphen das Minimum von R' für Werte von α , die aus der Gleichung (162) erhalten wurden, bestätigt werden kann [15].

Die auf den Meißel aufzubringende Kraft P , die notwendig ist, um ein "Gestein-Chip" aus dem Fels zu lösen, ergibt sich aus der zu P parallelen Kraftkomponente von R' und der Druckkraft die auf die stumpfe Spitze des Meißels wirkt (siehe Abb. 51 auf Seite 61).

$$P = 2 \cdot R' \cdot \sin \Theta + 2 \cdot A \cdot q \cdot \left(\frac{b}{d} \right)^m \cdot d \quad (163)$$

Setzt man Gleichung (153) in diese Gleichung (163) eins, so erhält man

$$P = 2 \cdot \sin \Theta \cdot \left[\frac{t \cdot d}{2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \Theta)} + A \cdot q \cdot d \cdot \left(\frac{b}{d} \right)^m \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha + \Theta)} \right] + 2 \cdot A \cdot q \cdot d \cdot \left(\frac{b}{d} \right)^m \quad (164)$$

$$= t \cdot d \cdot \frac{\sin \Theta}{\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \Theta)} + 2 \cdot A \cdot q \cdot d \cdot \left(\frac{b}{d} \right)^m \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \Theta}{\cos(\alpha + \Theta)} + 2 \cdot A \cdot q \cdot d \cdot \left(\frac{b}{d} \right)^m \quad (165)$$

$$= t \cdot d \cdot \frac{\sin \Theta}{\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \Theta)} + 2 \cdot A \cdot q \cdot d \cdot \left(\frac{b}{d} \right)^m \cdot \left[\frac{\sin \alpha \cdot \sin \Theta}{\cos(\alpha + \Theta)} + 1 \right] \quad (166)$$

Um die Eindringkraft P (Kraft die auf den Meißel aufgebracht werden muss um ein Versagen des Gesteins auszulösen) vergleichbar zu machen, wird sie normiert, indem man sie ins Verhältnis zu der Zugfestigkeit t des Gesteins und der Angriffstiefe d setzt, so dass man schließlich folgende Gleichung erhält

$$\frac{P}{2 \cdot t \cdot d} = \frac{\sin \Theta}{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \Theta)} + A \cdot \left(\frac{q}{t} \right) \cdot \left(\frac{b}{d} \right)^m \cdot \left[1 + \frac{\sin \alpha \cdot \sin \Theta}{\cos(\alpha + \Theta)} \right]. \quad (167)$$

Bei Gleichung (167) wird die Reibung zwischen Gestein und Meißel vernachlässigt. Soll diese

Reibung berücksichtigt werden, dann folgt, genauso wie bei der Theorie für spitze Schrämmmeißel, dass die Kraft R' unter dem Winkel Φ (Reibungswinkel zwischen Meißel und Fels) gegenüber der Normalen auf die Meißeloberfläche wirkt. Die Folge davon ist, dass die Gleichung (153) auf

$$R' = \frac{t \cdot d}{2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \Theta + \Phi)} + A \cdot q \cdot d \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^m \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha + \Theta + \Phi)} \quad (168)$$

und die Gleichung (163) auf

$$P = 2 \cdot R' \cdot \sin(\Theta + \Phi) + 2 \cdot A \cdot q \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^m \cdot d \quad (169)$$

abgeändert werden muss. Die endgültige Gleichung für die Kraft P , die das Loslösen eines "Gestein-Chips" zur Folge hat, mit Berücksichtigung der Reibung zwischen Meißel und Gestein sowie unter Verwendung von $A = 2^{(m-1)}$, ergibt sich somit zu

$$\frac{P}{2 \cdot t \cdot d} = \frac{\sin(\Theta + \Phi)}{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \Theta + \Phi)} + 2^{(m-1)} \cdot \left(\frac{q}{t}\right) \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^m \cdot \left[1 + \frac{\sin \alpha \cdot \sin(\Theta + \Phi)}{\cos(\alpha + \Theta + \Phi)}\right]. \quad (170)$$

mit (siehe Abb. 49 auf Seite 56 und Abb. 51 auf Seite 61)

- P ... Schneidkraft, die auf den Meißel aufgebracht werden muss, um Versagen (Bildung eines "Gestein-Chips") im Gestein auszulösen
- t ... Zugfestigkeit des Gesteins
- d ... Angriffstiefe des Meißels (gemessen von der oberen Felskante)
- Θ ... halber Öffnungswinkel des keilförmigen Meißels
- Φ ... Reibungswinkel zwischen Fels und Meißel
- α ... halber Mittelpunktswinkel $cO'e$ des Kreisbogens
- m ... verallgemeinerter Parameter
- q ... Druckfestigkeit des Gesteins
- b ... halbe Breite der stumpfen Meißelspitze

Der Winkel α lässt sich, indem man die Gleichung (162), ebenfalls unter Verwendung von $A = 2^{(m-1)}$, zu

$$\frac{\cos(2\alpha + \Theta + \Phi)}{1 - \cos(2 \cdot \alpha)} = 2^{(m-1)} \cdot \left(\frac{q}{t}\right) \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^m \cdot \cos(\Theta + \Phi) \quad (171)$$

modifiziert, berechnen, sofern die Parameter der rechten Seite bekannt sind. Es wird darauf verzichtet den Winkel α explizit anzuschreiben, da dies nur durch eine sehr komplexe Gleichung möglich wäre, die für die Anwendung nicht praktikabel ist.

Damit man theoretische Werte für die Bohrkraft P , mit Hilfe der Formeln (170) und (171) erhält, ist es notwendig zu überprüfen welche Werte für die Parameter jene Ergebnisse liefern, die am besten mit den tatsächlich auftretenden Kräften übereinstimmen. In der Arbeit von Evans [15] werden die Parameter, mit Hilfe des "trial and error" Prinzips, so gewählt, dass eine möglichst gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen von Dalziel und Davies [14] gegeben ist. Mit den Werten für die Parameter von $q/t = 6.25$ und $m = 2/3$ konnten die theoretischen Werte sehr gut an die Versuchsergebnisse angepasst werden (siehe Abb. 52 auf

Seite 65). In Tab. 3 auf Seite 65 sind die, durch die Formeln (170) und (171), theoretisch ermittelten Werte für den Winkel α und für die normierte Eindringkraft $\frac{P}{2 \cdot t \cdot d}$, für den bei den Versuchen verwendeten Meißel (halber Öffnungswinkel $\Theta = 15^\circ$, Reibungswinkel zwischen Meißel und Fels $\Phi = 10^\circ$), in Abhängigkeit von dem Verhältnis (b/d) , gegeben. Anhand der Werte in Tab. 3 auf Seite 65 und der Kurven in Abb. 52 auf Seite 65 ist zu erkennen, dass vor allem die Abstumpfung des Meißels zu Beginn eine extreme Steigerung der Eindringkraft zur Folge hat. Die Kurven in Abb. 52 auf Seite 65 flachen mit zunehmender Stumpfheit etwas ab und gehen in einen annähernd linearen Verlauf über. Dies kann so gedeutet werden, dass eine weitere Abstumpfung des Meißels einen verhältnismäßig geringen Einfluss auf die aufzuwendende Bohrkraft hat.

Tabelle 3: Theoretisch berechnete Werte für die Schneidkraft [15]

$\frac{P}{2 \cdot t \cdot d}$ für $\frac{q}{t} = 6.25, m = \frac{2}{3}, \Theta = 15^\circ, \Phi = 10^\circ$		
$\frac{b}{d}$	α (Dezimalgrad)	$\frac{P}{2 \cdot t \cdot d}$
0.00	32.5	0.735
0.01	29.4	1.05
0.03	26.9	1.40
0.09	23.4	2.06
0.27	19.0	3.42

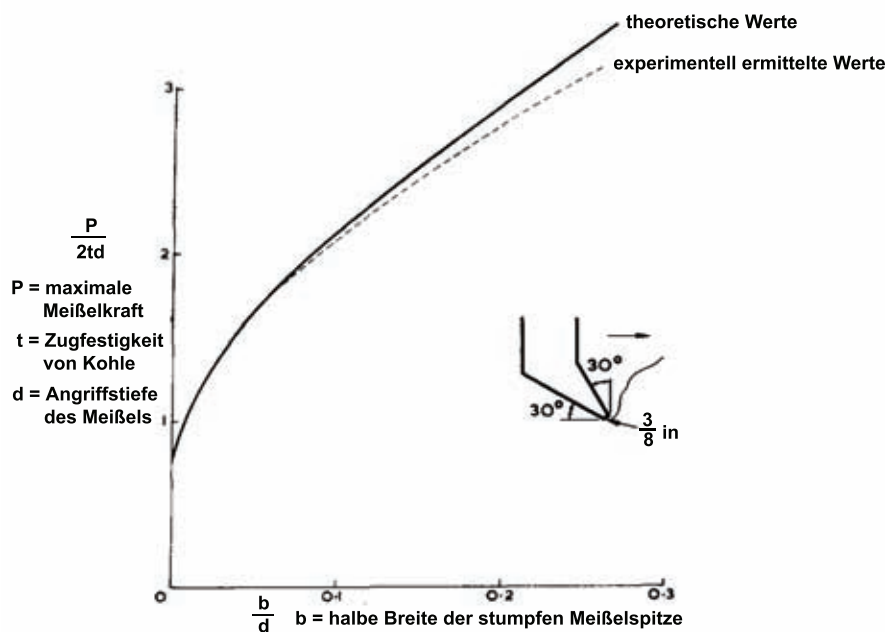


Abbildung 52: Vergleich der theoretisch und experimentell ermittelten Meißelkraft für stumpfe Schrämmeißel [15]

Nachdem die Werte der Parameter so angepasst wurden, dass die Versuchsergebnisse bestmöglich approximiert wurden, ist es nun möglich mit Hilfe der theoretischen Formeln die Auswirkungen der Abstumpfung von Meißeln genauer zu analysieren. Es wäre natürlich auch möglich andere Werte für die Parameter q/t und m zu finden, die ebenfalls Werte liefern, die gut mit den wirklich auftretenden Kräften übereinstimmen. Dies kann vor allem für den Para-

meter q/t gut durch Untersuchung der physikalischen Eigenschaften des zu lösenden Gesteins erreicht werden. Darauf wird aber hier nicht näher eingegangen, da angenommen wird, dass die hier verwendeten Werte der Parameter gut genug sind, um unter anderem die Folgen, die eine Veränderung des Öffnungswinkels des Meißels mit sich bringt, zu untersuchen.

Tabelle 4: Theoretisch berechnete Werte für die Schneidkraft bei unterschiedlichen Meißelöffnungswinkeln [15]

$\frac{P}{2 \cdot t \cdot d}$	für $\frac{q}{t} = 6.25, m = \frac{2}{3}, \Phi = 10^\circ$		
	$\Theta = 5^\circ$	$\Theta = 25^\circ$	$\Theta = 40^\circ$
0.00	0.35	1.34	3.26
0.01	0.64	1.66	3.68
0.03	0.94	2.03	4.10
0.09	1.55	2.75	4.93
0.27	2.78	4.19	6.57

In Tab. 4 auf Seite 66 sind die theoretisch berechneten Werte für die normierte Meißelkraft $\frac{P}{2 \cdot t \cdot d}$ in Abhängigkeit von b/d für drei unterschiedliche Meißelöffnungswinkel angegeben. Anhand dieser Werte und der Kurven, die in Abb. 53 auf Seite 66 ersichtlich sind, ist zu erkennen, dass die Meißelkraft größer ist je größer der Öffnungswinkel ist. Dies stimmt mit der Theorie für spitze keilförmige Schrämmmeißel sehr gut überein (siehe Abb. 50 auf Seite 60). Außerdem fällt auf, dass die Kurven der normierten Meißelkraft für unterschiedliche Öffnungswinkel nahezu parallel verlaufen (siehe Abb. 53 auf Seite 66). Der Schluss, dass der Öffnungswinkel somit keine Rolle bei der Abstumpfung des Meißels spielt, ist allerdings insoweit falsch, da bei einem größeren Öffnungswinkel die Meißelkraft verhältnismäßig weniger stark ansteigt. Das bedeutet, dass eine Verdopplung der Meißelkraft bei Abstumpfung des Meißels viel früher bei Meißeln mit kleinen Öffnungswinkeln auftritt, als bei Meißeln mit großen Öffnungswinkeln. In der Praxis ist dies natürlich von entscheidender Bedeutung, da die Kraft, die auf den Meißel aufgebracht werden kann, durch Antriebsaggregate oder andere Einflüsse begrenzt ist.

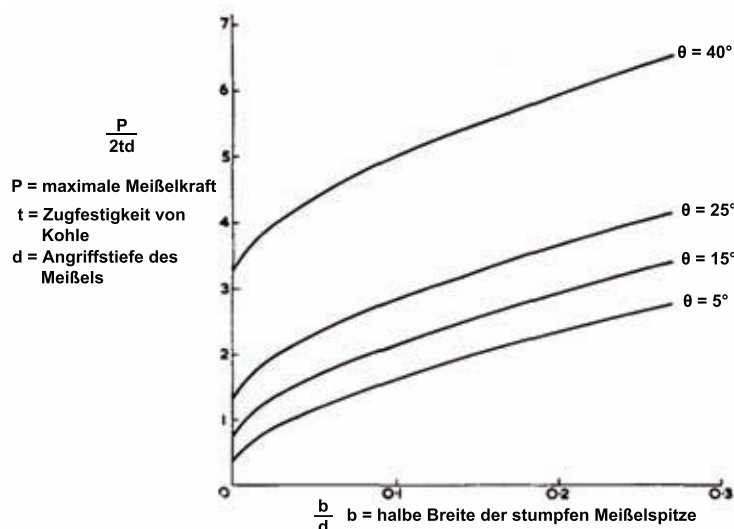


Abbildung 53: Theoretisch ermittelte Meißelkraft für Schrämmmeißel mit unterschiedlichen Öffnungswinkeln [15]

Diese vorgestellte Theorie für spitze und stumpfe Schrämmmeißel von Evans [15], beruht, wie zu Beginn erwähnt, auf der Annahme, dass das Gestein in Folge von Zugspannungen versagt. Es ist möglich durch die erlangten Formeln die notwendige Kraft zu berechnen, die aufgewendet werden muss, um ein Versagen des Felsen und somit ein Loslösen eines "Gestein-Chips" zu bewirken. Außerdem ist es auch möglich die Veränderung der Meißelkraft bedingt durch Variation der Meißelöffnungswinkel zu berechnen. Schließlich konnten die Folgen der Abstumpfung des Meißels, durch die Erweiterung der Theorie und durch Anpassung bestimmter Parameter, analysiert werden.

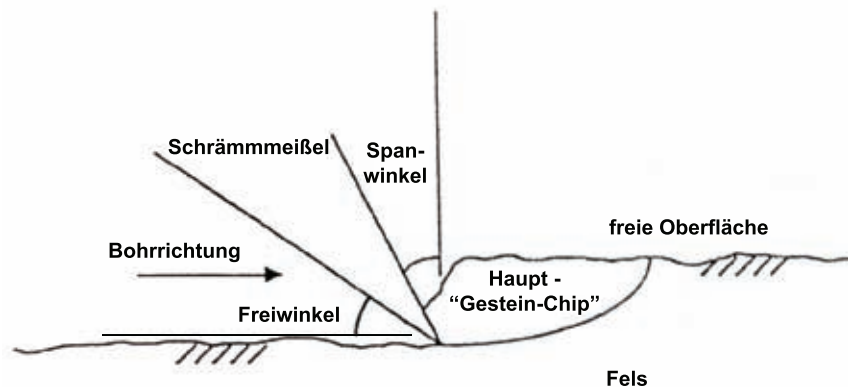


Abbildung 54: Vereinfachte Darstellung eines Schrämmmeißels, der an einer Felskante unter einem bestimmten Freiwinkel und Spanwinkel angreift und ein "Gestein-Chip" löst [22]

Wie bereits erwähnt stimmen die theoretisch ermittelten Ergebnisse gut mit den vorliegenden Versuchsergebnissen überein. Allerdings ist zu bedenken, dass bei der Theorie für stumpfe Schrämmmeißel die Parameter genau so angenommen wurden, dass dies eben der Fall ist. Somit müsste die Anwendbarkeit in der Praxis zur Bestimmung der erforderlichen Meißelkraft durch die hergeleiteten Formeln ((170) und (171)) mit Parameter, die aus physikalischer Sicht gewählt werden, noch überprüft werden. Es kann aber angenommen werden, dass dies gar nicht das primäre Bestreben der Arbeit von Evans [15] war, sondern vielmehr die Auswirkungen der Veränderung des Meißelöffnungswinkels auf die Meißelkraft und die Folgen der Abstumpfung des Meißels zu untersuchen, wofür die gewählten Parameter sicherlich ausreichend sind.

Abgesehen von der Wahl der Parameter, ist die Anwendbarkeit der Formeln insofern zu überdenken, da bei der Herleitung von einer rechtwinkligen Felskante ausgegangen wird, an der orthogonal dazu ein Meißel angreift (siehe Abb. 49 auf Seite 56 und Abb. 51 auf Seite 61). Diese Situation ist allerdings, wenn überhaupt, nur bei dem ersten Lösevorgang anzutreffen, da wie bereits beschrieben, davon ausgegangen wird, dass der Meißel ein "Gestein-Chip" durch Überschreiten der Zugfestigkeit des Gesteins entlang eines Kreisbogens löst, wodurch bei dem zweiten Lösevorgang der Meißel auf keine rechtwinklige Felskante mehr trifft. In der Praxis ist es außerdem meist der Fall, dass eine bestimmte Abbauhöhe vorliegt, an dessen Fuß der Schrämmmeißel, geneigt unter einem bestimmten Winkel (Spanwinkel und Freiwinkel) angreift (siehe Abb. 54 auf Seite 67). Nichts desto trotz stimmen die theoretischen Ergebnisse gut sowohl mit später aufgestellten numerischen Modellen als auch mit Ergebnissen aus Laborversuchen überein ([22]). Es wäre dennoch zu überlegen, ob es nicht möglich wäre den Spanwinkel und damit automatisch auch den Freiwinkel in die Formeln (170) und (171) einzubauen.

Ein interessantes Detail, das sowohl bei der Theorie von Nishimatsu [51] als auch bei der Theorie von Evans [15] zu finden ist, betrifft den Winkel bei dem die resultierende Bohrkraft ein Minimum

wird und unter dem sich ein "Gestein-Chip" löst. Sowohl bei Nishimatsu (siehe Gleichung (59)) als auch bei Evans (siehe Gleichungen (131) und (146)) ergibt sich dieser Winkel zu

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}. \quad (172)$$

Nishimatsu: φ = innerer Reibungswinkel + Reibungswinkel zwischen Gestein und Meißel – Spanwinkel

Evans: φ = halber Öffnungswinkel des Meißels + Reibungswinkel zwischen Gestein und Meißel

Das Interessante ist, dass der Ausdruck $45^\circ - \varphi/2$ auch in der Bodenmechanik, bei der Ermittlung der Gleitfläche bei einem Grundbruch eine entscheidende Rolle spielt (φ ist in diesem Fall der innere Reibungswinkel des Untergrundes). Somit ist zu erkennen, dass zwischen all diesen Theorien ein gewisser Zusammenhang besteht und Gemeinsamkeiten vorliegen.

7 Gesteinslösung bei Eindringkörpern

Die Literatur zur Bruchmechanik von Eindringkörpern ist sehr umfangreich, deswegen wird ein Überblick über die wesentlichen Entwicklungen und Prinzipien mit deren Einschränkungen gegeben.

• Arten von Eindringkörpern

– *stumpfe Eindringkörper*

Wenn der Kontakt zwischen dem Eindringkörper und dem Fels vorwiegend als elastisch bis zum Bruch angesehen werden kann, spricht man von "stumpfen" Eindringverhalten. Dies ist vor allem bei kugelförmigen Körpern in spröden Materialien bei niedrigen Belastungen der Fall. Als erster beschäftigte sich Hertz [25] mit solchen Kontaktvorgängen, allerdings wurde dieser Kontaktvorgang auch noch danach von einigen anderen genauer untersucht und charakterisiert.

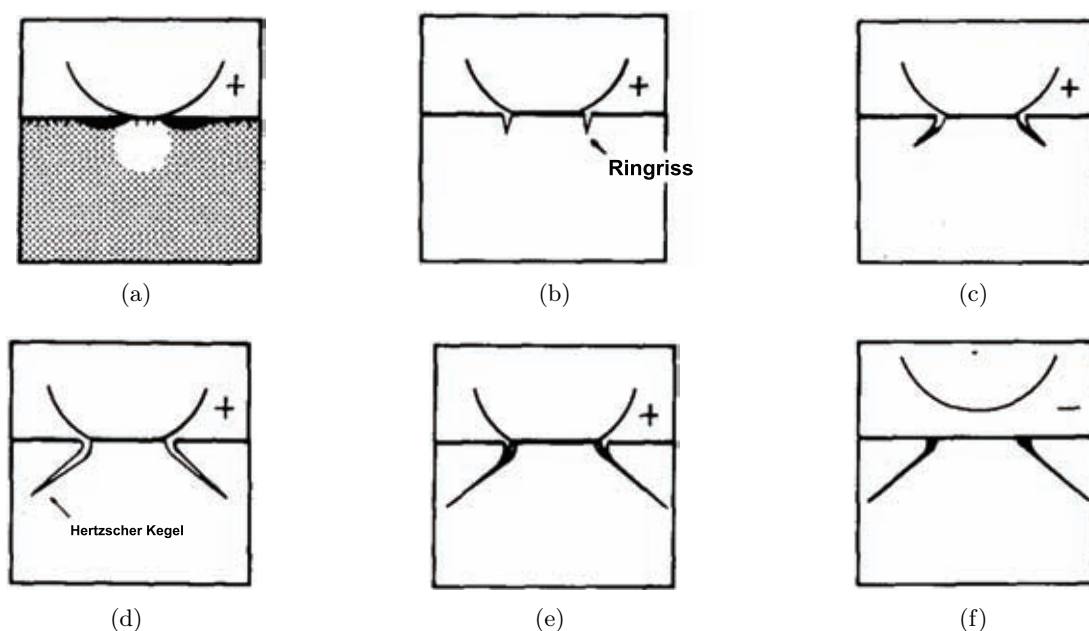


Abbildung 55: Entstehung des Hertzschen Kegelrisses [41]

Die einzelnen Phasen des Kontaktvorganges können in Abb. 55 auf Seite 69 betrachtet werden. Wenn der Eindringkörper die Oberfläche berührt, wird die einwirkende Kraft als Druckspannung in das Material eingeleitet. Durch die elastische Deformation des Materials an und um die Kontaktstelle entstehen Zugspannungen nahe der Oberfläche und Druckspannungen genau unter dem Eindringkörper (Abb. 55(a) auf Seite 69). Wenn sich die Kontaktfläche vergrößert, erhöhen sich auch die Zug- und Druckspannungen. Das Zugspannungsfeld verlagert sich weiter nach außen, bis zu einer Fehlstelle oder Störung im Material, die von der Größe oder Lage so beschaffen ist, dass sie instabil wird, was gleichbedeutend damit ist, dass von dieser Fehlstelle oder Störung ein Riss initiiert wird. Das Resultat ist dann ein "Ringriss", der dem maximalen Zugspannungsfeld folgt und den Eindringkörper komplett umschließt. Gleichzeitig dringt er nach unten in das Material ein, bis der Riss die Grenze der Zugzone erreicht (Abb. 55(b) auf Seite 69). Bei weiterer Belastung wächst der Ringriss weiter nach unten in das Material und beginnt nach außen abzuweichen, um dem Druckspannungsfeld auszuweichen (Abb. 55(c) auf Seite 69). Wenn noch weiter belastet wird, wird ein Punkt erreicht bei dem der Ringriss instabil wird (Ringriss breitet sich schlagartig aus) und sich spontan zu einem Hertzschen Kegelriss ausbildet (Abb. 55(d) auf Seite 69). Der Riss breitet sich bei weiterer Belastung

immer weiter aus, bis die Kontaktfläche über den Ringriss an der Oberfläche hinausgeht, was zu einem Verschließen des Risses oder zu einem Ringriss höherer Ordnung (gößerer Ausdehnung) führen kann (Abb. 55(e) auf Seite 69). Bei Entlastung, bedingt durch das Bestreben die gespeicherte elastische Energie abzubauen, schließt sich der Riss. Allerdings wird dies durch eingekeilte Trümmerstückchen in dem Riss verhindert, so dass der Riss nach Entlastung noch immer sichtbar ist (Abb. 55(f) auf Seite 69) [52].

– **stumpf-scharfe Eindringkörper**

Viele Untersuchungen und Versuche haben ergeben, dass auch stumpfe Eindringkörper sich wie scharfe Eindringkörper verhalten können und die gleichen Rissformationen und Mechanismen ausbilden können. Dies ist vor allem dann der Fall, wenn stumpfe Eindringkörper sehr stark belastet werden. In [63] belasteten Wiederhorn und Lawn Kalknatronglas mit kugelförmigen Körpern, was bei Lasten von 100N den typischen Hertzschens Kegelriss zur Folge hatte. Bei Steigerung bis zur Last von 500N bildeten sich allerdings Median- und Lateralrisse, wie sie typischerweise nur bei scharfen Eindringkörpern vorkommen, aus (siehe Abb. 56 auf Seite 70).

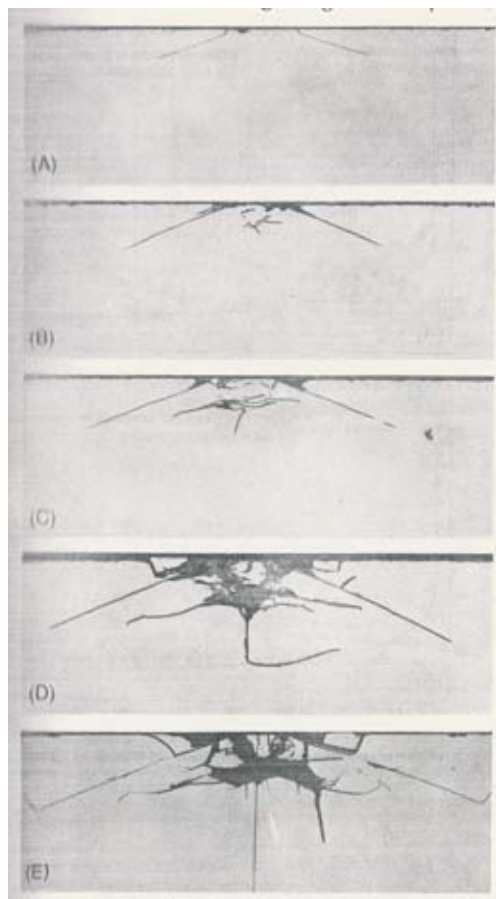


Abbildung 56: Entwicklung der Rissbildung von "stumpf" zu "scharf" durch gesteigerte Belastung eines kugelförmigen Körpers [63]

Scharfe Eindringkörper können sich aber auch wie stumpfe verhalten und auch Hertzschens Kegelrisse verursachen, falls die Spitze durch den oftmaligen Kontakt stumpf geworden ist, oder das Material sehr viele Störungen enthält.

Somit muss bei jeglicher Studie, die sich mit dem Eindringverhalten und dem daraus resultierenden Riss- und Bruchverhalten beschäftigt, sorgfältig darauf geachtet werden, dass der passende Eindringkörper mit der dazu passenden Belastung gewählt wird, um die gewünschte Rissbildung (scharf oder stumpf) zu erhalten.

– *scharfe Eindringkörper*

Im Gegensatz zu den stumpfen Eindringkörpern ist der Kontakt bis zum Eintreten des Bruches hauptsächlich plastischer Natur. Diese Art von Kontakt ist von größerer praktischer Bedeutung und kommt auch bei den meisten Härteprüfungsmaschinen, wie zum Beispiel bei der Vickers Härteprüfung, zum Einsatz.

Eine vereinfachte Darstellung der Rissformation ist in Abb. 57 auf Seite 71 gegeben. Durch den Kontakt und das Durchdringen der Materialoberfläche durch den Eindringkörper, entsteht eine plastisch verformte Zone um den Eindringpunkt, was zu Zugspannungszonen an der Oberfläche und unmittelbar unter der Spitze des Eindringkörpers, am Rand der plastisch verformten Zone, führt (Abb. 57(a) auf Seite 71). Das Eindringen verursacht auch einen sogenannten "Penny-ähnlichen" Riss, der sich unter der Spitze des Eindringkörpers an der Stelle mit den größten Zugspannungen bildet (Übergang plastischer - elastischer Bereich; Abb. 57(b) auf Seite 71). Weitere Belastung verursacht eine weitere Ausbreitung des sogenannten "Medianrisses" in die Tiefe und zur Seite (Abb. 57(c) auf Seite 71). Wird weiter belastet, brechen die Median- und Penny-Risse bis zur Oberfläche des Materials durch, wodurch sich sogenannte "Halb-Penny" und "Median-Radial" Risse bilden (Abb. 57(d) auf Seite 71). Bei Entlastung zeigen die Medianrisse Tendenz zum Verschließen, was aber durch Trümmerstücken und das verbleibende Spannungsfeld, welches durch den Versuch des Materials die plastischen Verformungen aufzunehmen entsteht, verhindert wird (Abb. 57(e) auf Seite 71). Dieses verbleibende Spannungsfeld ist auch dafür verantwortlich, dass ausgehend von der Basis der plastischen Zone Lateralrisse, parallel zur Materialoberfläche, auftreten (Abb. 57(f) auf Seite 71). Diese Seitenrisse breiten sich auch noch nach vollständiger Entfernung des Eindringkörpers, durch den Einfluss des noch immer vorhandenen Spannungsfeldes, bis zur Oberfläche aus (Abb. 57(g) auf Seite 71) [52].

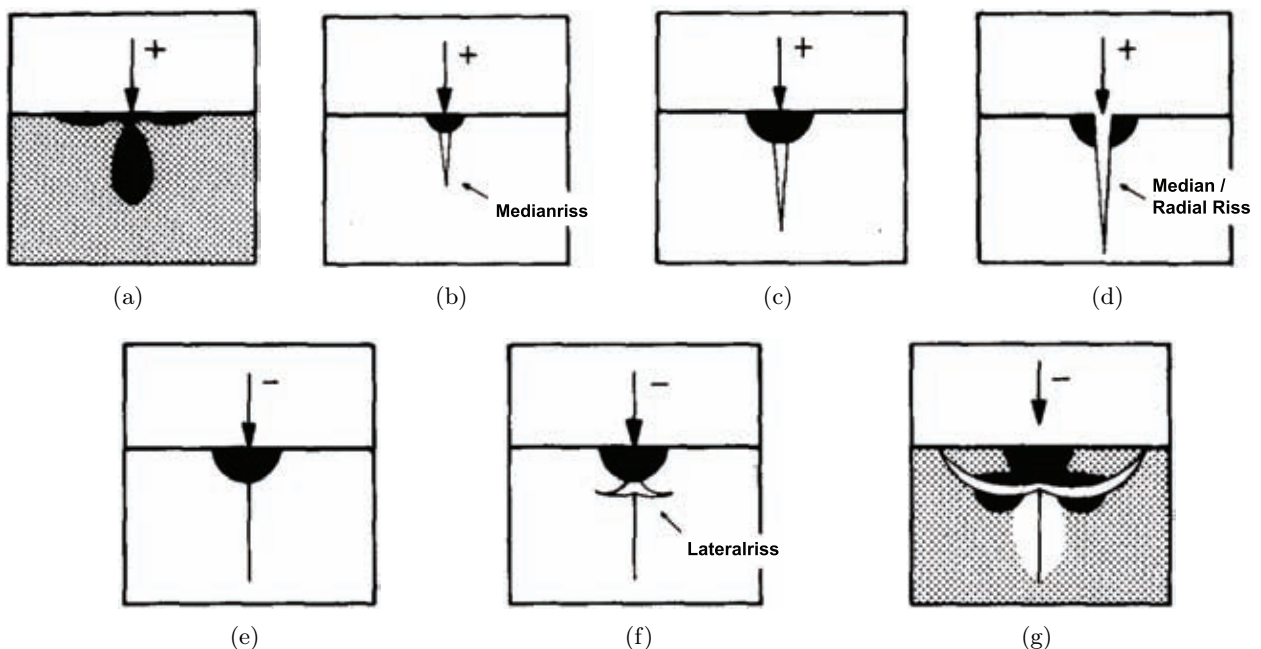


Abbildung 57: Medianes, radiales und laterales Rissystem hervorgerufen durch Belastung (+) und Entlastung (-) durch einen scharfen Eindringkörper. Die schwarzen Bereiche stellen die plastischen Zonen dar. [41]

- **Reale Eindringkörper**

Bei den vorangehenden Modellen wurden immer idealisierte Annahmen getroffen, um das Bruchverhalten unter Einwirkung von Eindringkörpern zu analysieren. Dies ist erforderlich, da die Interaktion zwischen Eindringkörper und Fels von sehr komplexer Natur ist. Im Folgenden werden einige Punkte herausgegriffen, welche die Unterschiede zwischen Modell und Natur beschreiben.

- **Anisotropie**

Bei vielen Untersuchungen wird das Material als isotrop angenommen, was auf Fels meist nicht zutrifft. Allerdings wurden vor allem bei numerischen Berechnungsmodellen bereits Versuche unternommen die Anisotropie des Materials ebenfalls zu modellieren, um so bessere Ergebnisse zu erlangen [11][44].

- **Größeneffekte**

Vor allem bei Versuchen mit grobkörnigen Materialien ist darauf zu achten, dass die einzelnen Partikel und im Gesteinsfall, die einzelnen Minerale, das Ergebnis nicht unerwünscht beeinflussen. Bei extremen Größenverhältnissen kann man im Einzelfall nur mehr die Eigenschaften des Einzelkorns oder des Minerals messen.

- **Umwelteinflüsse**

Bei scharfen Kontakten kommt es wie bereits beschrieben dazu, dass Spannungsfelder selbst nach vollständiger Entfernung der Eindringkörper zurückbleiben, die ein weiteres Risswachstum verursachen können. Dies kann in manchen Fällen zur Unterschätzung der Härte des Gesteins führen.

- **Vorhandene Spannungen**

Das Spannungsfeld von Boussinesq, welches in vielen Fällen angenommen wird, kann signifikant durch schon im Material vorhandene Spannungen verändert werden und somit Auswirkungen auf das Bruchverhalten haben.

7.1 Cavity expansion model - Hohlräume aufweitung Modell

Es gibt einige vereinfachte Modelle, die entwickelt wurden, um den Eindringvorgang in Fels zu beschreiben und somit zu verstehen. In diesem Abschnitt wird das sogenannte *cavity expansion model* ("Hohlräume aufweitung-Modell"), welches oft als Grundlage für weiterführende Theorien und Experimente verwendet wird, beschrieben. Mit Hilfe dieses Modells ist es möglich den Radius der plastischen Zone als auch die Eindringkraft in Abhängigkeit der Eindringtiefe zu berechnen. Der plastischen Zone kommt eine entscheidende Bedeutung bei der Rissenstehung (siehe Unterabschnitt 7.2 „Prinzipien und Theorien der Rissbildung und der Rissausbreitung“ auf Seite 100) zu. Es wird allerdings keine Aussage über den Bruchvorgang getroffen, der durch Rissenstehung und Rissausbreitung bestimmt ist.

Die Schädigung des Gesteins, bevor es zu Bruchzonen in Folge von Zugspannung kommt, wird meistens mit dem sogenannten *cavity expansion model* ("Hohlräume aufweitung - Modell"), nach einem Vorschlag von Bishop et al [5] und den Arbeiten von Marsh [47] und Johnson [29], [30] über Härteprüfungen beschrieben. In der Arbeit von Marsh [47] wird angenommen, dass das Verhalten von dem Material unter einem Eindringkörper der Ausdehnung eines zylindrischen oder halbkugelförmigen (sphärischen) Hohlräume, der unter innerem Druck steht, gleichgesetzt werden kann. Diese Annahme wird durch Experimente bestätigt, bei denen zu sehen ist, dass die Verdrängung des Materials unterhalb der Oberfläche annähernd radial erfolgt und von dem ursprünglichen Kontaktpunkt ausgeht. Auch die Linien gleicher Beanspruchung und Deformation sind für axialsymmetrische Werkzeuge annähernd halbkugelförmig.

Das "Hohlraumaufweitungs-Modell" ist auf folgende fundamentalen Annahmen aufgebaut [28][4]:

- Das Volumen, welches bei dem Eindringvorgang eines starren Körpers in das Material verdrängt wird, genauso wie die inelastische Volumsveränderung, die in dem Bereich der Schädigung stattfindet, wird komplett durch die radiale, elastische Ausdehnung des umgebenden intakten Materials aufgenommen.
- Es wird angenommen, dass das Problem zylindrisch symmetrisch oder halbkugelig symmetrisch ist, was so viel bedeutet, dass die Feldgrößen nur vom Radius r , ausgehend vom ersten Kontaktpunkt, abhängig sind (siehe Abb. 58 auf Seite 73).
- Bei diesem Modell sind drei charakteristische Zonen vorhanden (siehe Abb. 58 auf Seite 73):
 1. Ein Kernbereich mit dem Radius a der unter einem hydrostatischen Spannungszustand $\sigma_{ij} = -\delta_{ij} \cdot p$ steht.
 2. Eine zylindrische/halbkugelförmige (je nach Geometrie des Eindringkörpers) plastische Schale (Bereich der Gesteinsschädigung), deren Ausdehnung durch a und r_* , dem Radius der elastisch-plastischen Grenze, bestimmt ist. In diesem Bereich müssen die Spannungen der Mohr-Coulombschen Fließbedingung $F = 0$ genügen.
 3. Eine elastische Zone, die sich über den Radius r_* hinausgehend erstreckt und in der die Spannungen durch die Laméschen Gleichungen gegeben sind.

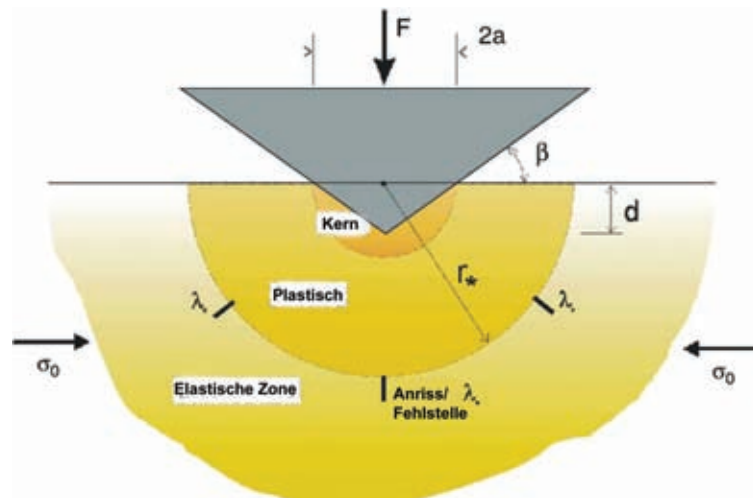


Abbildung 58: Cavity expansion model ("Hohlraumaufweitungs-Modell") [10]

Im Folgenden werden im Zuge einer **Dimensionsanalyse und Ähnlichkeits-Überlegungen** die Parameter identifiziert, die den Eindringvorgang bestimmen. Im Anschluss werden Schritt für Schritt die wesentlichen Gleichungen des "Hohlraumaufweitungs-Modells" hergeleitet. Da es sich um ein komplexes Modell handelt, ist es für das Verständnis notwendig auf einige Punkte im Detail einzugehen. Dementsprechend wird zunächst die **Raumableitung und die Lagrange'sche Zeitableitung** auf das vorliegende Problem des "Hohlraumaufweitungs-Modells" spezialisiert, die man im weiteren Verlauf für das Aufstellen eines Geschwindigkeitsfeldes benötigt. Bevor aber auf dieses Geschwindigkeitsfeld eingegangen wird, ist es notwendig das **Spannungsfeld** unterhalb des Eindringkörpers zu beschreiben. Nachdem die Spannungen in den unterschiedlichen Bereichen durch Gleichungen erfasst wurden, werden unter anderem diese Gleichungen verwendet, um ein **Geschwindigkeitsfeld** aufzustellen. Dabei ist unter

Geschwindigkeit die Positionsänderung eines materiellen Punktes in Bezug auf den Kontaktradius a zu verstehen. Anschließend wird durch **Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld** dieses Feld ebenfalls für das vorliegende "Hohlraumaufweitungs-Modell" adaptiert. Schließlich ist es möglich durch die Spezialisierung des Geschwindigkeitsfeldes die **Größe der plastischen Zone/Schädigungsbereich und die Eindringkraft** in Abhängigkeit von der Eindringtiefe zu bestimmen.

Abschließend werden die allgemeinen Gleichungen, die für jede Art eines Eindringkörpers anwendbar sind, auf den **Eindringvorgang eines abgestumpften Keils** angewendet und spezialisiert, um die Möglichkeiten dieser Gleichungen aufzuzeigen.

- **Dimensionsanalyse und Ähnlichkeits-Überlegungen [4]**

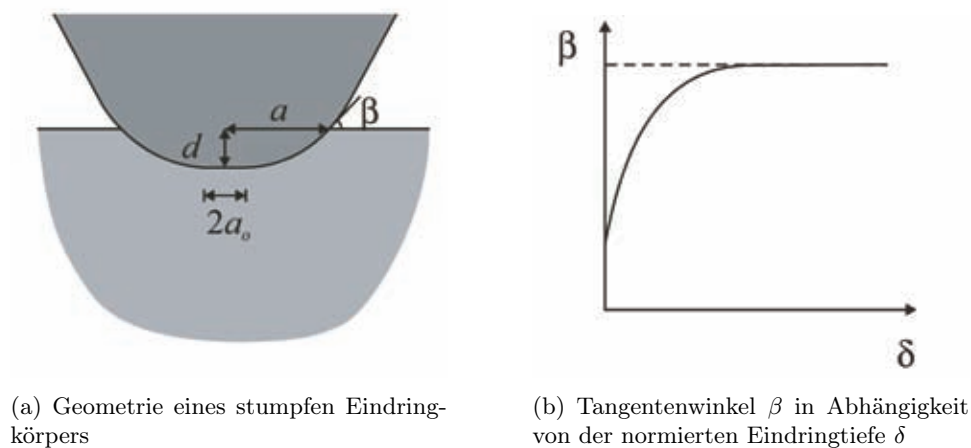


Abbildung 59: stumpfer Eindringkörper [4]

Der Eindringvorgang in Fels, ist sowohl von den konstitutiven Größen des Felses, als auch von der Form des verwendeten Werkzeuges abhängig. Die Geometrie des Lösewerkzeuges kann formal mit Hilfe von k dimensionslosen Parametern β_i , $i = 1, 2, \dots, k$ und m charakteristischen Längen l_i , $i = 1, 2, \dots, m$ zu

$$\delta = f \left(\alpha; \frac{l_2}{l_1}, \frac{l_3}{l_1}, \dots, \frac{l_m}{l_1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \right) \quad (173)$$

angeschrieben werde. Wobei $\alpha = a/l_1$ der normierte Kontaktradius und $\delta = d/l_1$ die normierte Eindringtiefe ist (l_1 ist eine charakteristische Länge). Dadurch lässt sich eine Beziehung zwischen dem Tangentenwinkel β der Werkzeugoberfläche und der Gesteinsoberfläche aufstellen.

$$\tan \beta = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \quad (174)$$

Dieses Verhältnis ist sehr einleuchtend, wenn es für einen keilförmigen Eindringkörper betrachtet wird (siehe Abb. 58 auf Seite 73). In diesem Fall gibt es nur eine charakteristische Länge, den Kontaktradius a , so dass man $l_1 = a$ setzen kann. Unter Berücksichtigung von $\alpha = a/l_1$ und $f = \delta = d/l_1$ wird die Gleichung (174) zu

$$\tan \beta = \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} \quad \Rightarrow \quad \tan \beta = \frac{\partial \left(\frac{d}{a} \right)}{\partial \left(\frac{a}{a} \right)} = \frac{\partial \left(\frac{d}{a} \right)}{\partial 1} = \frac{d}{a}. \quad (175)$$

Bei einem keilförmigen Eindringwerkzeug mit abgeflachter Spitze, reduzieren sich die Parameter, die die Geometrie beschreiben auf eine charakteristische Länge l (die Breite der abgeflachten Spitze) und auf einen dimensionslosen Parameter β (der Winkel zwischen der Seite des Keiles und der Felsoberfläche). Somit kann die Geometrie des Werkzeuges mit $\delta = f(\alpha, \beta)$ beschrieben werden (siehe Abb. 59 auf Seite 74). Für ein kugelförmiges Eindringwerkzeug reicht bereits eine charakteristische Länge l (der Radius der Kugel) und somit $\delta = f(\alpha)$ aus. Die Parameter die den Eindringvorgang bestimmen, lassen sich auf folgende Größen reduzieren $\mathcal{S} = \{\alpha; \mathcal{S}_{Werkzeug}, \mathcal{S}_{Fels}, n\}$, wobei $\mathcal{S}_{Fels} = \{G/q, \nu, \phi, \psi\}$, $\mathcal{S} = \{l_2/l_1, \dots, l_m/l_1; \beta_1, \dots, \beta_k\}$ und n der Dimensionsindex ist ($n = 1$ für einen zweidimensionalen (ebenen) Eindringvorgang; $n = 2$ für einen dreidimensionalen Eindringvorgang). Somit lässt sich der normierte Radius ξ_* und der Druck p während des Eindringvorganges als

$$\xi_* = f(\alpha; \mathcal{S}_{Werkzeug}, \mathcal{S}_{Fels}, n), \quad (176)$$

$$\frac{p}{q} = g(\alpha; \mathcal{S}_{Werkzeug}, \mathcal{S}_{Fels}, n) \quad (177)$$

mit

q ... Druckfestigkeit des Gesteins (aus einaxialem Druckversuch mit unbehinderter Seitendehnung)

anschreiben. Aus diesen Gleichungen ist auch ersichtlich, dass sowohl die Größe des plastischen Bereiches, als auch der Druck, unter anderem, von dem normierten Kontaktradius α abhängen.

Ist nun das Eindringwerkzeug ein Keil ($n = 1$) oder ein Kegel ($n = 2$) dann wird die Geometrie des Werkzeuges, wie bereits weiter oben erwähnt, lediglich durch einen Parameter definiert, so dass man $\mathcal{S}_{Werkzeug} = \{\beta\}$ erhält. Durch Dimensionsanalyse erhält man schließlich $\mathcal{S} = \{\beta, \mathcal{S}_{Fels}, n\}$, was ausreicht, um den Eindringvorgang vollkommen zu beschreiben. Das bedeutet aber, dass ξ_* und p/q unabhängig von dem Kontaktradius a sind und somit als invariant bezeichnet werden können. Eindringkörper mit einer solchen Geometrie werden auch geometrisch selbstähnlich bezeichnet [4].

- **Raumableitung und Lagrange'sche Zeitableitung [4], [46]**

Die Geschwindigkeit, die Spannung und die Spannungsrate lassen sich als Funktion der radialen Koordinate r anschreiben und werden nach der Variablen a , dem momentanen Kontaktradius entwickelt. Für das Modell wird weiters eine dimensionslose Koordinate $\xi = r/a$ eingeführt. Das hat zur Folge, dass die Raumableitung sich wie folgt darstellt.

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_a = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \Big|_a = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \Big|_a \quad (178)$$

Um die Lagrange'sche Zeitableitung für das "Hohlraum aufweitung-Modell" zu erhalten, wird zuerst die allgemeine Fassung der Zeitableitung in Lagrange'scher Form (d/dt) angegeben. Dabei wird von einer Funktion F , mit den unabhängigen Variablen t (Zeit) und x (Position) ausgegangen ($\Rightarrow F(x, t)$). Die Differenz zwischen der Funktion $F(t + \Delta t)$ und $F(t)$ lässt sich mit Hilfe der Lagrange'sche Zeitableitung als $\frac{dF}{dt} \cdot \Delta t$ anschreiben. Dabei betrachtet man ein Massenteilchen, dessen Position von seiner Bewegung abhängt. Somit hat dieses Teilchen zur Zeit t_0 die Position x_0 und bewegt sich in der Zeitspanne Δt zur Position $x_0 + v_0 \cdot \Delta t$. Unter Berücksichtigung dieser Tatsachen lässt sich die Gleichung

$$\frac{dF}{dt} \cdot \Delta t = F(x_0 + v_0 \cdot t, t_0 + \Delta t) - F(x_0, t_0) \quad (179)$$

aufstellen. Die Funktion $F(x_0 + v_0 \cdot t, t_0 + \Delta t)$ wird nun in eine Taylorreihe entwickelt, so dass man

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} \cdot \Delta t = & F(x_0, t_0) + v_0 \cdot \Delta t \cdot \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0, t_0} + \Delta t \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{x_0, t_0} + \frac{1}{2!} \left[(v_0 \cdot \Delta t)^2 \cdot \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{x_0, t_0} + \right. \\ & \left. 2 \cdot v_0 \cdot \Delta t \cdot \Delta t \cdot \left. \frac{\partial F}{\partial x \cdot \partial t} \right|_{x_0, t_0} + \Delta t^2 \cdot \left. \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right|_{x_0, t_0} \right] + \dots - F(x_0, t_0) \quad (180) \end{aligned}$$

erhält. Berücksichtigt man, dass die Reihenglieder höherer Ordnung im Vergleich zu den linearen Reihengliedern klein und somit vernachlässigbar sind, kann man Gleichung (180) auch zu

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} \cdot \Delta t = & v_0 \cdot \Delta t \cdot \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0, t_0} + \Delta t \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{x_0, t_0} \\ \frac{d}{dt} = & \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial}{\partial x} \quad (181) \end{aligned}$$

anschreiben. Spezialisiert man diese allgemeine Lagrange'sche Zeitableitung auf das spezielle Problem des "Hohlraumaufweitungs-Modelles" erhält man

$$\dot{(\)} = \frac{\partial}{\partial a} + v \cdot \frac{\partial}{\partial r}. \quad (182)$$

Dabei entspricht d/dt dem Ausdruck $\dot{(\)}$ und bedeutet eine Ableitung nach der Zeit. Der Parameter v ist die Partikelgeschwindigkeit, die als Änderungsrate der radialen Position eines materiellen Teilchens in Bezug auf a interpretiert werden kann. Außerdem wurde x durch die radiale Koordinate r ersetzt, die in diesem Modell die Position eines Teilchens bestimmt und t mit der Variablen a ersetzt, nach der die Funktionen entwickelt werden sollen. Berücksichtigt man nun auch noch die Gleichung (178), dann lässt sich die spezialisierte Lagrange'sche Zeitableitung zu

$$\dot{(\)} = \frac{\partial}{\partial a} + \frac{v}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (183)$$

anschreiben.

- **Spannungsfeld [4], [26], [32], [33], [46]**

Das Spannungsfeld kann in zwei Bereiche, den plastischen und den elastischen Bereich, unterteilt werden. Die Spannungen in diesen Bereichen und an der elastisch-plastische Grenzfläche, die diese beiden Bereiche voneinander trennt, werden im Folgenden analysiert.

– plastischer Bereich

Es wird angenommen, dass durch die Mohr-Coulomb'sche Fließbedingung

$$K_p \cdot (\sigma_\theta - h) - (\sigma_r - h) = 0 \quad (184)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_r - h = K_p \cdot (\sigma_\theta - h) \quad 1 \leq \xi \leq \xi_* \quad (185)$$

mit

- K_p ... passiver Koeffizient, der mit dem inneren Reibungswinkel φ durch die Gleichung (186) definiert ist.
 φ ... Winkel der inneren Reibung
 h ... Variable, die durch die Gleichung (187) definiert ist.
 q ... Druckfestigkeit (aus einaxialem Druckversuch mit unbehinderter Seitendehnung)
 $\xi = \frac{r}{a}$... dimensionslose Koordinate
 $\xi_* = \frac{r_*}{a}$... normierter äußerer Radius der plastischen Zone (siehe Abb. 58 auf Seite 73 und Abb. 61 auf Seite 97)

$$K_p = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (186)$$

$$h = \frac{q}{K_p - 1} \quad (187)$$

das Spannungsfeld in der plastischen Zone (siehe Abb. 58 auf Seite 73) bestimmt ist. Zugspannungen sind immer als positiv anzusehen. Weiters ergibt sich aus den Cauchy'schen Bewegungsgleichungen, durch die vorliegende Rotationssymmetrie des Spannungszustandes auch noch folgende Gleichgewichtsbedingung.

$$\frac{d\sigma_r}{d\xi} + n \cdot \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\xi} = 0 \quad (188)$$

mit

- n ... Dimensionsindex
 $n = 1$... für zweidimensionale Probleme des ebenen Verzerrungszustandes, wie zum Beispiel für das Problem des Eindringvorganges eines stumpfen keilförmigen Eindringkörpers.
 $n = 2$... für dreidimensionale kugelsymmetrische Probleme, wie es zum Beispiel beim Eindringvorgang eines Kegels oder einer Kugel der Fall ist.

Formt man die Gleichung (185) so um, dass man einen Ausdruck für die Spannung σ_θ erhält

$$\frac{\sigma_r - h}{K_p} + h = \sigma_\theta \quad (189)$$

und setzt diesen dann in die Gleichung (188) ein, so erhält man

$$\frac{d\sigma_r}{\xi} + n \cdot \frac{\sigma_r - \left(\frac{\sigma_r - h}{K_p} + h\right)}{K_p} = 0. \quad (190)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung (Berechnung wurde mit Hilfe der Mathematik-Software Maple durchgeführt) lässt sich mit der Integrationskonstanten C_1 zu

$$\sigma_r(\xi) = h + \xi^{-n + \frac{n}{K_p}} \cdot C_1 \quad (191)$$

anschreiben. Mit Hilfe der Randbedingung $\sigma_r = -p$ bei $\xi = 1$ (p ist der hydrostatische Druck im Kernbereich unter dem Eindringkörper (siehe Abb. 58 auf Seite 73)) ist es möglich die Integrationskonstante zu bestimmen.

$$-p = h + 1^{-n + \frac{n}{K_p}} \cdot C_1 \quad (192)$$

$$\Rightarrow C_1 = -p - h = -(p + h) \quad (193)$$

Durch Einsetzen dieser Gleichung in die Lösung der Differentialgleichung (191) erhält man eine Funktion für die Spannung σ_r , die nur von der dimensionslosen Koordinate ξ abhängt.

$$\sigma_r(\xi) = h - (p + h) \cdot \xi^{-n + \frac{n}{K_p}} \quad (194)$$

Einsetzen dieser Funktion in die Gleichung (185) mit anschließendem Umformen nach σ_θ führt auf eine Funktion für die Spannung σ_θ , die ebenfalls nur von der dimensionslosen Koordinate ξ abhängt.

$$\begin{aligned} h - (p + h) \cdot \xi^{-n + \frac{n}{K_p}} - h &= K_p \cdot (\sigma_\theta - h) \\ -\frac{(p + h)}{K_p} \cdot \xi^{-n + \frac{n}{K_p}} &= \sigma_\theta - h \\ \sigma_\theta(\xi) &= h - \frac{1}{K_p} \cdot (p + h) \cdot \xi^{-n + \frac{n}{K_p}} \end{aligned} \quad (195)$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$-n + \frac{n}{K_p} = n \cdot \left(\frac{1}{K_p} - 1\right) = n \cdot \frac{(1 - K_p)}{K_p} \quad (196)$$

und den Funktionen (194) und (195) kann man das Spannungsfeld in der plastischen Zone durch die Gleichungen

$$\sigma_r = h - (p + h) \cdot \xi^{n \cdot \frac{(1 - K_p)}{K_p}} \quad (197)$$

$$\sigma_\theta = h - \frac{1}{K_p} \cdot (p + h) \cdot \xi^{n \cdot \frac{(1 - K_p)}{K_p}} \quad (198)$$

ausdrücken.

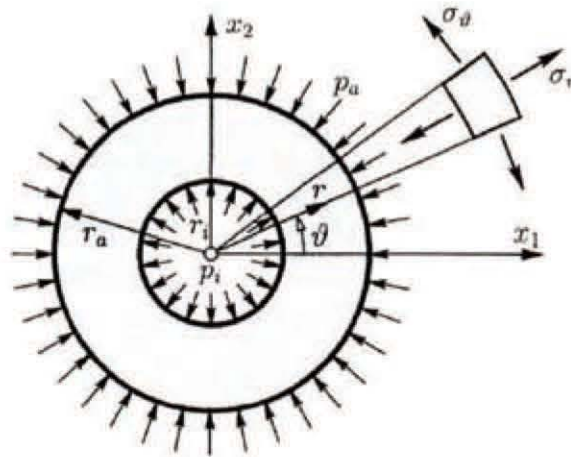


Abbildung 60: Zylinder unter Innen- und Außendruck [46]

– elastischer Bereich

Für den elastischen Bereich $\xi \geq \xi_*$ greift man für die Ermittlung der Spannungskomponenten auf die Analogie eines Zylinders unter Innendruck zurück.

Die Spannungen σ_r und σ_θ eines Zylinders unter gleichförmigem Innendruck und Außendruck (siehe auch Abb. 60 auf Seite 79) sind durch

$$\sigma_r = - \frac{\left[1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 \cdot p_a + \left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 - 1\right] \cdot p_i}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 - 1} \quad (199)$$

$$\sigma_\theta = - \frac{\left[1 + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 \cdot p_a - \left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 + 1\right] \cdot p_i}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 - 1} \quad (200)$$

gegeben. Werden diese Spannungen nun für den elastischen Bereich des "Hohlräume aufweitung-Modelles" angepasst wird $p_a = 0$, da kein Außendruck in dem Sinne aufgebracht wird. Demzufolge vereinfachen sich die Gleichungen (199) und (200) zu:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= - \frac{\left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 - 1\right] \cdot p_i}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 - 1} \\ &= - p_i \cdot \frac{\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 \cdot \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 \cdot \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2} \\ &= - p_i \cdot \frac{\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2} \end{aligned} \quad (201)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta &= \frac{\left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 + 1\right] \cdot p_i}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 - 1} \\
&= p_i \cdot \frac{\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 \cdot \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2 + \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 \cdot \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2} \\
&= p_i \cdot \frac{\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 + \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2} \tag{202}
\end{aligned}$$

Da eigentlich kein Zylinder sondern ein Halbraum vorliegt, kann

$$r_a = \infty \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2 = 0 \tag{203}$$

gesetzt werden. Außerdem entspricht im Fall des "Hohlraum aufweitung-Modelles" $r_i = \xi_*$, $r = \xi$ und $-p_i = \sigma_r^*$ (σ_r^* ist der Radialdruck an der elastisch-plastischen Grenzfläche). Demzufolge vereinfachen sich die Gleichungen (201) und (202) weiter, so dass die Spannungskomponenten für den elastischen Bereich schließlich als

$$\sigma_r = \sigma_r^* \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_*}\right)^{n+1} \tag{204}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{\sigma_r^*}{n} \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_*}\right)^{n+1} \tag{205}$$

mit

n ... Dimensionsindex: $n = 1$ für zweidimensionale Spannungszustände, wie sie bei keilförmigen Eindringwerkzeugen auftreten und $n = 2$ für dreidimensionale sphärisch-symmetrische Problemstellungen, wie sie bei kegelförmigen oder kugelförmigen Eindringkörpern auftreten

angeschrieben werden können. Diese beiden Gleichungen für die Spannungen werden auch als Lamésche Lösung bezeichnet.

– elastisch-plastische Grenzfläche

Wegen der Stetigkeitsbedingung der Spannungen bei $\xi = \xi_*$ ist es möglich den Eindringdruck p in ein Verhältnis mit der Position der elastisch-plastischen Grenze ξ_* zu setzen. Dafür wird zuerst $\xi = \xi_*$ in die Gleichungen (204) und (205) eingesetzt.

$$\sigma_r = \sigma_r^* \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_*}\right)^{n+1} = \sigma_r^* \tag{206}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{\sigma_r^*}{n} \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_*}\right)^{n+1} = -\frac{\sigma_r^*}{n} \tag{207}$$

Dann wird ebenfalls $\xi = \xi_*$ in die Gleichungen (197) und (198) eingesetzt, um dann mit den Gleichungen (206) und (207) gleichgesetzt zu werden.

$$\sigma_r = \sigma_r^* = h - (p + h) \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} \quad (208)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = -\frac{\sigma_r^*}{n} &= h - \frac{1}{K_p} \cdot (p + h) \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} \\ \sigma_r^* &= -h \cdot n + \frac{n \cdot (p + h)}{K_p} \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} \end{aligned} \quad (209)$$

Nun kann man auch die zwei Gleichungen (208) und (209) gleichsetzen, woraus man dann nach Umformungen entweder eine Gleichung für ξ_* erhält

$$\begin{aligned} h - (p + h) \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} &= -h \cdot n + \frac{n \cdot (p + h)}{K_p} \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} \\ h + h \cdot n &= (p + h) \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} + \frac{n \cdot (p + h)}{K_p} \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} \\ h \cdot (n + 1) &= (p + h) \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} \cdot \left(1 + \frac{n}{K_p}\right) \\ (n + 1) \cdot \frac{h}{(p + h)} &= \xi_*^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} \cdot \left(1 + \frac{n}{K_p}\right) \\ \xi_*^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} &= \frac{(n + 1) \cdot K_p}{(K_p + n)} \cdot \frac{h}{(p + h)} \\ \xi_* &= \left[\frac{(n + 1) \cdot K_p}{(K_p + n)} \cdot \frac{h}{(p + h)} \right]^{\frac{K_p}{n \cdot (1-K_p)}} \end{aligned} \quad (210)$$

oder eine Gleichung für den Eindringdruck p herleiten kann.

$$\begin{aligned} h - (p + h) \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} &= -h \cdot n + \frac{n \cdot (p + h)}{K_p} \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} \\ h \cdot (n + 1) - h \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} - \frac{n \cdot h}{K_p} \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} &= p \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} + \frac{n \cdot p}{K_p} \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} \\ (n + 1) \cdot h \cdot \xi_*^{-n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} - h \cdot \left(1 + \frac{n}{K_p}\right) &= p \cdot \left(1 + \frac{n}{K_p}\right) \\ p &= (n + 1) \cdot h \cdot \frac{K_p}{K_p + n} \cdot \xi_*^{-n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} - h \\ p &= (n + 1) \cdot \frac{K_p \cdot h \cdot (K_p - 1)}{(K_p + n) \cdot (K_p - 1)} \cdot \xi_*^{-n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} - h \\ p &= (n + 1) \cdot \frac{K_p \cdot S_0^l}{K_p - 1} \cdot \xi_*^{-n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} - h \end{aligned} \quad (211)$$

Wobei S_0^l eine einschränkende Deviatorspannung ist, die als

$$S_0^l = \frac{K_p - 1}{K_p + n} \cdot h \quad (212)$$

definiert ist. Setzt man nun die Gleichung (211) in die Gleichungen (197) und (198) ein, so können die Spannungen in der plastischen Zone als

$$\sigma_r = h - \left[(n+1) \cdot \frac{K_p \cdot S_0^l}{K_p + n} \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} - h + h \right] \cdot \xi^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}}$$

$$\sigma_r = h - \frac{(n+1) \cdot K_p \cdot S_0^l}{K_p - 1} \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} \quad (213)$$

$$\sigma_\theta = h - \frac{1}{K_p} \cdot \left[(n+1) \cdot \frac{K_p \cdot S_0^l}{K_p + n} \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} - h + h \right] \cdot \xi^{n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}}$$

$$\sigma_\theta = h - \frac{(n+1) \cdot S_0^l}{K_p - 1} \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} \quad (214)$$

angeschrieben werden. Ausgehend von diesen zwei Gleichungen ist zu erkennen, dass die Radialspannung und die Ringspannung an der elastisch-plastischen Grenzfläche ($\xi_* = \xi$) konstant sind und durch

$$\sigma_r^* = h - \frac{(n+1) \cdot K_p \cdot S_0^l}{K_p - 1} \quad (215)$$

$$\sigma_\theta^* = h - \frac{(n+1) \cdot S_0^l}{K_p - 1} \quad (216)$$

gegeben sind.

• Geschwindigkeitsfeld [4] und [46]

Ausgehend von einer nichtassozierten Fließregel, unter Berücksichtigung von den konstitutiven Beziehungen und der Fließbedingung, wird im Folgenden eine bestimmende Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld hergeleitet. Durch diese bestimmende Gleichung ist es möglich, unter Anwendung der spezialisierten Lagrange'schen Zeitableitung, sowie der Gleichungen für das Spannungsfeld (siehe oben), eine Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld im plastischen Bereich aufzustellen, die nur von der dimensionslosen Koordinate ξ abhängt.

Es wird eine nichtassozierte Fließregel für die plastische Verformung in der Form von

$$n \cdot \dot{\varepsilon}_\theta^p = -K_d \cdot \dot{\varepsilon}_r^p \quad (217)$$

vorausgesetzt, wobei K_d der Dilatanz Koeffizient ist, der mit dem Dilatanzwinkel ψ ($\varphi \geq \psi \geq 0$) als

$$K_d = \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi} \quad (218)$$

definiert ist. Die Verzerrung lässt sich in einen elastischen Anteil ε^e und in einen plastischen Anteil ε^p aufteilen.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (219)$$

Gleiches gilt auch für die Rate der Verzerrungen, die man aus der Gleichung (219) durch Ableitung nach der Zeit erhält.

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \quad (220)$$

Die linearisierten kinematischen Beziehungen bei einem rotationssymmetrischen Verzerrungszustand, wie er hier bei dem "Hohlraumaufweitungs-Modell" vorliegt, sind durch

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (221)$$

gegeben. Wobei u die Verschiebung ist, so dass man durch Ableitung nach der Zeit dann

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial v}{\partial r} \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{v}{r} \quad (222)$$

mit v als Geschwindigkeit, erhält. Durch Umformen der Gleichung (220) lässt sich die plastische Verzerrungsrate $\dot{\varepsilon}^p$ durch die gesamte Verzerrungsrate $\dot{\varepsilon}$ und die elastische Verzerrungsrate $\dot{\varepsilon}^e$ als

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e \quad (223)$$

angeben. Setzt man diese Gleichung in die nichtassozierte Fließregel (217) ein und macht außerdem von den linearisierten kinematischen Beziehungen (222) Gebrauch, erhält man

$$\begin{aligned} n \cdot (\dot{\varepsilon}_\theta - \dot{\varepsilon}_\theta^e) &= -K_d \cdot (\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_r^e) \\ n \cdot \frac{v}{r} - n \cdot \dot{\varepsilon}_\theta^e &= -K_d \cdot \frac{dv}{dr} + K_d \cdot \dot{\varepsilon}_r^e \\ K_d \cdot \frac{dv}{dr} + n \cdot \frac{v}{r} &= n \cdot \dot{\varepsilon}_\theta^e + K_d \cdot \dot{\varepsilon}_r^e. \end{aligned} \quad (224)$$

Die Geschwindigkeit v ist hier als die Positionsänderung eines materiellen Punktes im Bezug auf a zu verstehen. Wird nun wiederum die dimensionslose Koordinate $\xi = r/a$ eingeführt, ändert sich die Gleichung (224) zu

$$K_d \cdot \frac{dv}{d\xi} + n \cdot \frac{v}{\xi} = a \cdot (n \cdot \dot{\varepsilon}_\theta^e + K_d \cdot \dot{\varepsilon}_r^e). \quad (225)$$

Mit Hilfe der konstitutiven Beziehungen und der Fließbedingung erhält man

$$n \cdot \dot{\varepsilon}_\theta^e + K_d \cdot \dot{\varepsilon}_r^e = \frac{\lambda \cdot \dot{\sigma}_r}{2 \cdot G} \quad (226)$$

mit

$$\lambda = \frac{(K_p - 1) \cdot (K_d - 1) + (1 - 2 \cdot \nu) \cdot [(K_p + 1) \cdot (K_d + 1) - (n - 1) \cdot K_p \cdot K_d]}{(3 - n) \cdot (1 + \nu)^{n-1} \cdot K_p}. \quad (227)$$

Mit Hilfe der Differentiationsregel von Gleichung (183) kann die radiale Spannungsrate aus der Gleichung (226) berechnet werden. Dazu wird zunächst die Radialspannung σ_r (Gleichung (213)) einmal nach a und einmal nach ξ abgeleitet.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial a} &= -\frac{(n+1) \cdot K_p \cdot S_0^l \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}}}{(K_p-1)} \cdot -\frac{n \cdot (K_p-1)}{K_p} \cdot \xi^{-n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p} - 1} \cdot \frac{d\xi}{da} \\ &\quad - \frac{(n+1) \cdot K_p \cdot S_0^l \cdot \left(\frac{1}{\xi}\right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}}}{(K_p-1)} \cdot \frac{n \cdot (K_p-1)}{K_p} \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p} - 1} \cdot \frac{d\xi_*}{da} \\ &= (n+1) \cdot S_0^l \cdot n \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi}\right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} \cdot \left(\frac{1}{\xi} \cdot \frac{d\xi}{da} - \frac{1}{\xi_*} \cdot \frac{d\xi_*}{da}\right) \end{aligned} \quad (228)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \xi} &= -\frac{(n+1) \cdot K_p \cdot S_0^l \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}}}{(K_p-1)} \cdot -\frac{n \cdot (K_p-1)}{K_p} \cdot \xi^{-n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p} - 1} \\ &= \frac{(n+1) \cdot n \cdot S_0^l \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi}\right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}}}{\xi} \end{aligned} \quad (229)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\frac{d\xi}{da} = r \cdot (-1) \cdot a^{-2} = -\frac{r}{a^2} \quad (230)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\xi} \cdot \frac{d\xi}{da} = \frac{a}{r} \cdot -\frac{r}{a^2} = -\frac{1}{a} \quad (231)$$

und Einsetzen der Gleichungen (228) und (229) in die Differentiationsregel von Gleichung (183) erhält man schließlich die radiale Spannungsrate $\dot{\sigma}_r$ in der plastischen Zone.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_r &= (n+1) \cdot S_0^l \cdot n \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi}\right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} \cdot \left(-\frac{1}{a} - \frac{1}{\xi_*} \cdot \frac{d\xi_*}{da}\right) + \frac{v}{a} \cdot \frac{(n+1) \cdot n \cdot S_0^l \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi}\right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}}}{\xi} \\ &= (n+1) \cdot S_0^l \cdot n \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi}\right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} \cdot \left(\frac{v}{a} \cdot \frac{1}{\xi} - \frac{1}{a} - \frac{1}{\xi_*} \cdot \frac{d\xi_*}{da}\right) \\ &= (n+1) \cdot S_0^l \cdot n \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi}\right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} \cdot \left[\frac{1}{a} \cdot \left(\frac{v}{\xi} - 1\right) - \frac{1}{\xi_*} \cdot \frac{d\xi_*}{da}\right] \end{aligned} \quad (232)$$

Einsetzen der Gleichung (226) in die bestimmende Gleichung (225) ergibt

$$K_d \cdot \frac{dv}{d\xi} + n \cdot \frac{v}{\xi} = a \cdot \left(\frac{\lambda \cdot \dot{\sigma}_r}{2 \cdot G} \right) \quad (233)$$

Wenn man nun in dieser Gleichung $\dot{\sigma}_r$ durch den Ausdruck in Gleichung (232) ersetzt und zusätzlich noch den Parameter κ einführt, der eine kleine Zahl ($\kappa \ll 1$) ist und durch

$$\kappa = \frac{(n+1)}{2} \cdot \frac{S_0^l}{G} \quad (234)$$

definiert ist, erhält man folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} K_d \cdot \frac{dv}{d\xi} + n \cdot \frac{v}{\xi} &= a \cdot \left\{ \frac{\lambda \cdot (n+1) \cdot S_0^l \cdot n}{2 \cdot G} \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} \cdot \left[\frac{1}{a} \cdot \left(\frac{v}{\xi} - 1 \right) - \frac{1}{\xi_*} \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right] \right\} \\ &= \frac{a}{a} \cdot \lambda \cdot n \cdot \kappa \cdot \frac{v}{\xi} \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} - \frac{a}{a} \cdot \lambda \cdot n \cdot \kappa \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} \\ &\quad - \frac{a}{\xi_*} \cdot \lambda \cdot n \cdot \kappa \cdot \frac{d\xi_*}{da} \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} \\ K_d \cdot \frac{dv}{d\xi} + n \cdot \frac{v}{\xi} - n \cdot \frac{v}{\xi} \cdot \left[\lambda \cdot \kappa \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} \right] &= -n \cdot \lambda \cdot \kappa \cdot \left(1 + \frac{a}{\xi_*} \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} \\ K_d \cdot \frac{dv}{d\xi} + n \cdot \frac{v}{\xi} \cdot \left[1 - \lambda \cdot \kappa \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} \right] &= -n \cdot \lambda \cdot \kappa \cdot \left(1 + \frac{a}{\xi_*} \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} \end{aligned} \quad (235)$$

Der Term

$$\lambda \cdot \kappa \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}}$$

kann in der obigen Differentialgleichung (235) vernachlässigt werden, da $\kappa \ll 1$. Die Lösung (Berechnung wurde mit Hilfe der Mathematik-Software Maple durchgeführt) der somit erhaltenen Differentialgleichung

$$K_d \cdot \frac{dv}{d\xi} + n \cdot \frac{v}{\xi} + n \cdot \lambda \cdot \kappa \cdot \left(1 + \frac{a}{\xi_*} \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} = 0 \quad (236)$$

ergibt sich zu

$$v(\xi) = A \cdot \xi^{-\frac{n}{K_d}} + \frac{K_p \cdot \xi^{1+\frac{n}{K_d}} \cdot \xi^{-\frac{n}{K_d}} \cdot n \cdot \lambda \cdot \kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}}}{(n \cdot K_d \cdot K_p - n \cdot K_d - n \cdot K_p - K_d \cdot K_p) \cdot \xi_*} \quad (237)$$

$$= A \cdot \xi^{-\frac{n}{K_d}} + \frac{n \cdot \lambda \cdot K_p \cdot \kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}}}{-n \cdot (K_p + K_d) - K_d \cdot K_p \cdot (1 - n)} \cdot \frac{\xi}{\xi_*} \quad (238)$$

$$= A \cdot \xi^{-\frac{n}{K_d}} + \frac{n \cdot \lambda \cdot K_p \cdot \kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p}} \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{-1}}{-1 \cdot [n \cdot (K_p + K_d) + (1 - n) \cdot K_d \cdot K_p]} \quad (239)$$

$$= A \cdot \xi^{-\frac{n}{K_d}} - \mu \cdot \kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p} - 1} \quad (240)$$

Wobei der Parameter μ als

$$\mu = \frac{n \cdot \lambda \cdot K_p}{n \cdot (K_p + K_d) + (1 - n) \cdot K_d \cdot K_p} \quad (241)$$

definiert ist und A eine Integrationskonstante ist. Durch die Gleichung (240)

$$v(\xi) = A \cdot \xi^{-\frac{n}{K_d}} - \mu \cdot \kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p} - 1}$$

wird das Geschwindigkeitsfeld in der plastischen Zone in Abhängigkeit von der dimensionslosen Koordinate ξ angegeben.

- **Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld [4] und [46]**

Um die Integrationskonstante A aus der Gleichung (240) bestimmen zu können, ist es notwendig Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld zu definieren. Zuerst wird eine Randbedingung für die Geschwindigkeit bei $\xi = 1$ bestimmt (siehe Gleichung (254)). Anschließend wird mit Hilfe der spezialisierten Lagrange'schen Zeitableitung und der Analogie eines Zylinders unter Innendruck, eine Randbedingung für das Geschwindigkeitsfeld an der elastisch-plastischen Grenzfläche ermittelt (siehe Gleichung (283)).

Es wird angenommen, dass die Randbedingung bei $\xi = 1$ dadurch bestimmt ist, dass die Volumenvergrößerung des Hohlraumes bei $\xi = 1$ dem Volumen entspricht, das der Eindringkörper verdrängt. Die Änderung des Eindringvolumens wird als dV_I bezeichnet und die Änderung, bedingt durch eine Vergrößerung der Kontaktlänge oder des Radius um da (siehe Abb. 61 auf Seite 97), des halbzyllindrischen oder kugelförmigen Hohlraumes, wird als dV_C bezeichnet. Zunächst wird der zweidimensionale Fall betrachtet, so dass zuerst das von dem keilförmigen Eindringkörper verdrängte Volumen (Volumen mit der Einheitsdicke "1") durch die Gleichung

$$V_{Keil,a} = a \cdot d = a \cdot (a \cdot \tan \beta) = a^2 \cdot \tan \beta \quad (242)$$

mit

a ... Kontaktradius (siehe Abb. 58 auf Seite 73 oder Abb. 61 auf Seite 97)

d ... Eindringtiefe (siehe Abb. 58 auf Seite 73 oder Abb. 61 auf Seite 97)

bestimmt wird. Bei Vergrößerung des Kontaktradius um da ergibt sich das Volumen zu

$$V_{Keil,a+da} = (a + da) \cdot d = (a + da) \cdot (a + da) \cdot \tan \beta = (a + da)^2 \cdot \tan \beta. \quad (243)$$

Demzufolge erhält man durch die Differenz dieser Volumina die Änderung des Eindringvolumens.

$$\begin{aligned} dV_I &= V_{Keil,a+da} - V_{Keil,a} = a^2 \cdot \tan \beta + 2 \cdot a \cdot da \cdot \tan \beta + da^2 \cdot \tan \beta - a^2 \cdot \tan \beta \\ &= 2 \cdot a \cdot da \cdot \tan \beta + da^2 \cdot \tan \beta \end{aligned} \quad (244)$$

Das Volumen des halbzylindrischen Hohlraumes kann mit

$$V_{Halbzylinder,a} = \frac{a^2 \cdot \pi}{2} \quad (245)$$

angegeben werden. Bei Vergrößerung des Kontaktradius um da ergibt sich das entsprechende Volumen zu

$$V_{Halbzylinder,a+da} = \frac{(a + da)^2 \cdot \pi}{2}. \quad (246)$$

Die Differenz dieser Volumina entspricht dV_C .

$$\begin{aligned} V_C &= V_{Halbzylinder,a+da} - V_{Halbzylinder,a} = \frac{a^2 \cdot \pi + 2 \cdot a \cdot da \cdot \pi + da^2 \cdot \pi - a^2 \cdot \pi}{2} \\ &= \frac{2 \cdot a \cdot da \cdot \pi + da^2 \cdot \pi}{2}. \end{aligned} \quad (247)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (244) und (247) lässt sich somit die Randbedingung für die Geschwindigkeit bei $\xi = 1$ als

$$\begin{aligned} v(1) &= \frac{dV_I}{dV_C} = \frac{(2 \cdot a \cdot da \cdot \tan \beta + da^2 \cdot \tan \beta)}{\left(\frac{2 \cdot a \cdot da \cdot \pi + da^2 \cdot \pi}{2}\right)} = \frac{(2 \cdot a \cdot da + da^2) \cdot \tan \beta}{(2 \cdot a \cdot da + da^2) \cdot \frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \tan \beta \end{aligned} \quad (248)$$

anschreiben. Analoges gilt für den dreidimensionalen Fall, bei kegelförmigem Eindringkörper und halbkugeligem Hohlraum:

$$V_{Kegel,a} = \frac{a^2 \cdot \pi \cdot d}{3} = \frac{a^3 \cdot \pi \cdot \tan \beta}{3} \quad (249)$$

mit

- a ... Kontaktradius (siehe Abb. 58 auf Seite 73 oder Abb. 61 auf Seite 97)
- d ... Eindringtiefe (siehe Abb. 58 auf Seite 73 oder Abb. 61 auf Seite 97)

$$V_{Kegel,a+da} = \frac{(a+da)^3 \cdot \pi \cdot \tan \beta}{3} \quad (250)$$

$$V_{Halbkugel,a} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^3 \cdot \pi}{2} = \frac{2 \cdot a^3 \cdot \pi}{3} \quad (251)$$

$$V_{Halbkugel,a+da} = \frac{2 \cdot (a+da)^3 \cdot \pi}{3} \quad (252)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v(1) &= \frac{\frac{(a+da)^3 \cdot \pi \cdot \tan \beta - a^3 \cdot \pi \cdot \tan \beta}{3}}{\frac{2 \cdot (a+da)^3 \cdot \pi - 2 \cdot a^3 \cdot \pi}{3}} = \frac{[(a+da)^3 - a^3] \cdot \tan \beta}{2 \cdot [(a+da)^3 - a^3]} \\ &= \frac{\tan \beta}{2} \end{aligned} \quad (253)$$

Daraus folgt, dass man allgemein die Randbedingung für die Geschwindigkeit bei $\xi = 1$ als

$$v(1) = \frac{dV_I}{dV_C} = \frac{2^{3-2 \cdot n}}{\pi^{2-n}} \cdot \tan \beta \quad (254)$$

anschreiben kann. Die Geschwindigkeit $v = \dot{u}$ an der elastisch-plastischen Grenze $\xi = \xi_*$ kann mit Hilfe der Gleichung (182) bestimmt werden.

$$\begin{aligned} v = \dot{u} &= \frac{\partial u}{\partial a} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \\ v - v \cdot \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial a} \\ v \cdot \left(1 - \frac{\partial u}{\partial r}\right) &= \frac{\partial u}{\partial a} \\ v &= \frac{\frac{\partial u}{\partial a}}{1 - \frac{\partial u}{\partial r}} \end{aligned} \quad (255)$$

Dabei wird u als Funktion der Position r und des Parameters a angesehen. In der elastischen Zone kann die radiale Verschiebungskomponente u eines keilförmigen Eindringkörpers wiederum mit Hilfe der Analogie eines Zylinders unter Innendruck hergeleitet werden. Einsetzen der kinematischen Beziehungen aus Gleichung (221) in die ersten beiden konstitutiven Beziehungen des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes für Rotationssymmetrie

$$\sigma_r = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \cdot \left[\varepsilon_r + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot (\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) \right] \quad (256)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \cdot \left[\varepsilon_\theta + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot (\varepsilon_r + \varepsilon_z) \right] \quad (257)$$

$$\sigma_z = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \cdot \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \right] \quad (258)$$

mit

E ... Elastizitätsmodul

ν ... Querdehnungszahl oder Poisson'sche Zahl

und eintragen der Ergebnisse in die Gleichgewichtsbedingung aus Gleichung (188) führt auf folgende Differentialgleichung für u :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (259)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung kann man in allgemeiner Form als

$$u = A \cdot r + \frac{B}{r} \quad (260)$$

anschreiben, wobei A und B Integrationskonstanten sind. Setzt man (260) in (221) und setzt man dieses Ergebnis in die Gleichungen (256) und (258), so erhält man

$$\sigma_r = \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \left[A - \frac{B}{r^2} + \frac{\nu}{(1 - \nu)} \cdot \left(A + \frac{B}{r^2} + \varepsilon_z \right) \right] \quad (261)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{(1 - \nu)} \cdot \left(A - \frac{B}{r^2} + A + \frac{B}{r^2} \right) \right] \\ &= \varepsilon_z \cdot \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} + \frac{E \cdot \nu \cdot 2 \cdot A}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}. \end{aligned} \quad (262)$$

Formt man die Gleichung (262) nach ε_z um, erhält man

$$\varepsilon_z = \frac{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \sigma_z - 2 \cdot E \cdot A \cdot \nu}{E \cdot (1 - \nu)}. \quad (263)$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in die Gleichung (261) erhält man

$$\sigma_r = \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \left\{ A - \frac{B}{r^2} + \frac{\nu}{(1 - \nu)} \cdot \left[A + \frac{B}{r^2} + \frac{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \sigma_z}{(1 - \nu) \cdot E} - \frac{2 \cdot E \cdot A \cdot \nu}{(1 - \nu) \cdot E} \right] \right\}. \quad (264)$$

Nun wendet man die erste Randbedingung, $\sigma_r = 0$ bei $r = r_a$, an und formt anschließend nach der Integrationskonstanten A um.

$$\begin{aligned} 0 &= A - \frac{B}{r_a^2} + \frac{\nu}{(1 - \nu)} \cdot A + \frac{\nu \cdot B}{(1 - \nu) \cdot r_a^2} + \frac{\nu \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \sigma_z}{(1 - \nu) \cdot (1 - \nu) \cdot E} - \frac{2 \cdot E \cdot \nu^2 \cdot A}{(1 - \nu) \cdot (1 - \nu) \cdot E} \\ &= \frac{A \cdot (1 - \nu) \cdot (1 - \nu) + \nu \cdot (1 - \nu) \cdot A - 2 \cdot \nu^2 \cdot A}{(1 - \nu) \cdot (1 - \nu)} - \frac{(1 - \nu) \cdot B - \nu \cdot B}{(1 - \nu) \cdot r_a^2} \\ &\quad + \frac{\nu \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \sigma_z}{(1 - \nu) \cdot (1 - \nu) \cdot E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A - 2 \cdot \nu \cdot A + A \cdot \nu^2 + \nu \cdot A - \nu^2 \cdot A - 2 \cdot \nu^2 \cdot A}{(1 - \nu) \cdot (1 - \nu)} - \frac{(1 - 2 \cdot \nu) \cdot B}{(1 - \nu) \cdot r_a^2} \\
&\quad + \frac{\nu \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \sigma_z}{(1 - \nu) \cdot (1 - \nu) \cdot E} \\
&= \frac{A \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{(1 - \nu) \cdot (1 - \nu)} - \frac{(1 - 2 \cdot \nu) \cdot B}{(1 - \nu) \cdot r_a^2} + \frac{\nu \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \sigma_z}{(1 - \nu) \cdot (1 - \nu) \cdot E} \quad (265)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & - \frac{A \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{(1 - \nu) \cdot (1 - \nu)} = - \frac{(1 - 2 \cdot \nu) \cdot B}{(1 - \nu) \cdot r_a^2} + \frac{\nu \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \sigma_z}{(1 - \nu) \cdot (1 - \nu) \cdot E} \\
& A = \frac{(1 - \nu) \cdot B}{(1 + \nu) \cdot r_a^2} - \frac{\nu \cdot \sigma_z}{E} \quad (266)
\end{aligned}$$

Diesen Ausdruck für die Integrationskonstante A setzt man nun unter Anwendung der zweiten Randbedingung, $\sigma_r = -p_i$ bei $r = r_i$, in die Gleichung (264) ein.

$$\begin{aligned}
-p_i = & \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \left\{ \frac{(1 - \nu) \cdot B}{(1 + \nu) \cdot r_a^2} - \frac{\nu \cdot \sigma_z}{E} - \frac{B}{r_i^2} + \frac{\nu}{(1 - \nu)} \cdot \left[\frac{(1 - \nu) \cdot B}{(1 + \nu) \cdot r_a^2} - \frac{\nu \cdot \sigma_z}{E} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{B}{r_i^2} + \frac{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \sigma_z}{(1 - \nu) \cdot E} - \frac{2 \cdot E \cdot \nu \cdot (1 - \nu) \cdot B}{(1 - \nu) \cdot E \cdot (1 + \nu) \cdot r_a^2} + \frac{2 \cdot E \cdot \nu \cdot \nu \cdot \sigma_z}{(1 - \nu) \cdot E \cdot E} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Durch Umformen dieser Gleichung erhält man schließlich eine Gleichung für die Integrationskonstante B .

$$\begin{aligned}
- \frac{p_i \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{E \cdot (1 - \nu)} = & B \cdot \left[\frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot r_a^2} - \frac{1}{r_i^2} + \frac{\nu}{(1 + \nu) \cdot r_a^2} + \frac{\nu}{(1 - \nu) \cdot r_i^2} \right. \\
& \left. - \frac{2 \cdot \nu^2}{(1 - \nu) \cdot (1 + \nu) \cdot r_a^2} \right] + \nu \cdot \sigma_z \cdot \left[\frac{-(1 - \nu) \cdot (1 - \nu) - \nu \cdot (1 - \nu) + (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu) + 2 \cdot \nu^2}{(1 - \nu) \cdot (1 - \nu) \cdot E} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \frac{p_i \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{E \cdot (1 - \nu)} = & B \cdot \left[\frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot r_a^2} - \frac{1}{r_i^2} + \frac{\nu}{(1 + \nu) \cdot r_a^2} + \frac{\nu}{(1 - \nu) \cdot r_i^2} \right. \\
& \left. - \frac{2 \cdot \nu^2}{(1 - \nu) \cdot (1 + \nu) \cdot r_a^2} \right] + \nu \cdot \sigma_z \cdot \left[\frac{-1 + 2 \cdot \nu - \nu^2 - \nu + \nu^2 + 1 - \nu - 2 \cdot \nu^2 + 2 \cdot \nu^2}{(1 - \nu) \cdot (1 - \nu) \cdot E} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \frac{p_i \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{E \cdot (1 - \nu)} = & B \cdot \left[\frac{(1 - \nu) \cdot r_i^2 \cdot (1 - \nu) - (1 + \nu) \cdot r_a^2 \cdot (1 - \nu) + \nu \cdot (1 - \nu) \cdot r_i^2}{(1 + \nu) \cdot (1 - \nu) \cdot r_i^2 \cdot r_a^2} \right. \\
& \left. + \frac{\nu \cdot r_a^2 \cdot (1 + \nu) - 2 \cdot \nu^2 \cdot r_i^2}{(1 + \nu) \cdot (1 - \nu) \cdot r_i^2 \cdot r_a^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \frac{p_i \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{E \cdot (1 - \nu)} = & B \cdot \left[\frac{r_i^2 - 2 \cdot \nu \cdot r_i^2 + \nu^2 \cdot r_i^2 - r_a^2 + \nu^2 \cdot r_a^2 + \nu \cdot r_i^2 - \nu^2 \cdot r_i^2 + \nu \cdot r_a^2}{(1 + \nu) \cdot (1 - \nu) \cdot r_i^2 \cdot r_a^2} \right. \\
& \left. + \frac{\nu^2 \cdot r_a^2 - 2 \cdot \nu^2 \cdot r_i^2}{(1 + \nu) \cdot (1 - \nu) \cdot r_i^2 \cdot r_a^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{p_i \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{E \cdot (1 - \nu)} &= B \cdot \left[\frac{r_i^2 - \nu \cdot r_i^2 - 2 \cdot \nu^2 \cdot r_i^2 - r_a^2 + \nu \cdot r_a^2 + 2 \cdot \nu^2 \cdot r_a^2}{(1 + \nu) \cdot (1 - \nu) \cdot r_i^2 \cdot r_a^2} \right] \\
&= \frac{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot B \cdot (r_i^2 - r_a^2)}{(1 + \nu) \cdot (1 - \nu) \cdot r_i^2 \cdot r_a^2} \\
\Rightarrow B &= -\frac{p_i \cdot (1 + \nu) \cdot r_i^2 \cdot r_a^2}{E \cdot (r_i^2 - r_a^2)} \\
&= \frac{(1 + \nu)}{E} \cdot \frac{r_a^2}{\left(\frac{r_a^2 - r_i^2}{r_i^2}\right)} \cdot p_i \\
&= \frac{(1 + \nu)}{E} \cdot \frac{r_a^2 \cdot p_i}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 - 1} \tag{267}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes für die Integrationskonstante B in die Gleichung (266) erhält man eine Gleichung für die Integrationskonstante A .

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(1 - \nu)}{r_a^2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \frac{(1 + \nu)}{E} \cdot \frac{r_a^2 \cdot p_i}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 - 1} - \frac{\sigma_z \cdot \nu}{E} \\
&= \frac{(1 - \nu)}{E} \cdot \frac{p_i}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 - 1} - \frac{\sigma_z \cdot \nu}{E} \tag{268}
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke für die beiden Integrationskonstanten aus den Gleichungen (268) und (267) werden nun in die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (260) eingesetzt, so dass sich nun eine spezifische Gleichung für die Verschiebungskomponente u angeben lässt.

$$u = \left[\frac{(1 - \nu)}{E} \cdot \frac{p_i}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 - 1} - \frac{\sigma_z \cdot \nu}{E} \right] \cdot r + \frac{\left[\frac{(1 + \nu)}{E} \cdot \frac{r_a^2 \cdot p_i}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 - 1} \right]}{r} \tag{269}$$

Da man in dem vorliegenden Fall des "Hohlraumaufweitungs-Modelles" von einem ebenen Verzerrungszustand und Spannungszustand ausgeht, kann der Term $-\frac{\sigma_z \cdot \nu}{E}$ in der Gleichung (269) weggelassen werden, so dass sich die neue Gleichung

$$u = \frac{p_i \cdot r}{E} \cdot \left[\frac{(1 - \nu) + (1 + \nu) \cdot \left(\frac{r_a}{r}\right)^2}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 - 1} \right] \tag{270}$$

ergibt. Nach dem Erweitern des Bruches, der sich innerhalb der eckigen Klammer befindet, mit $(r_i/r_a)^2$ gelangt man auf folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{p_i \cdot r}{E} \cdot \left[\frac{(1 - \nu) \cdot \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2 + (1 + \nu) \cdot \left(\frac{r_a}{r}\right)^2 \cdot \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2}{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 \cdot \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2} \right] \\
&= \frac{p_i \cdot r}{E} \cdot \left[\frac{(1 - \nu) \cdot \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2 + (1 + \nu) \cdot \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2} \right] \tag{271}
\end{aligned}$$

Nach dem Grenzübergang von

$$r_a \rightarrow \infty \quad \text{geht} \quad \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2 \rightarrow 0, \tag{272}$$

so dass man nach Spezialisierung der Gleichung auf das "Hohlraumaufweitungs-Modell" mit

$$p_i = S_0^l \quad \text{und} \quad r_i = r_* \tag{273}$$

(S_0^l ist eine deviatorische Spannung, die durch die Gleichung (212) gegeben ist) folgende Gleichung für die Verschiebung u erhält.

$$\begin{aligned}
u &= \frac{S_0^l \cdot r}{E} \cdot \frac{(1 + \nu) \cdot \left(\frac{r_*}{r}\right)^2}{1} = S_0^l \cdot r \cdot \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{2 \cdot E} \cdot \left(\frac{r_* \cdot a}{r \cdot a}\right)^2 \\
&= \frac{S_0^l \cdot r \cdot (n + 1)}{(n + 1)} \cdot \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi}\right)^2 \\
&= \frac{\kappa \cdot r}{(n + 1)} \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi}\right)^2 = \frac{a \cdot \kappa \cdot \xi}{(n + 1)} \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi}\right)^2 \tag{274}
\end{aligned}$$

Dabei finden die beiden Beziehungen

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \tag{275}$$

$$\kappa = \frac{(n + 1)}{2} \cdot \frac{S_0^l}{G} \tag{276}$$

Verwendung, wobei G der Schubmodul des Gesteins ist. Für die Verschiebungskomponente u eines kegelförmigen oder kugelförmigen Eindringkörpers wird die Analogie einer Hohlkugel unter Innendruck verwendet. Die Herleitung erfolgt analog zu der eben ausgeführten Herleitung für den keilförmigen Eindringkörper mit dem Ergebnis von

$$u = \frac{\kappa \cdot r}{(n + 1)} \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi}\right)^3 = \frac{a \cdot \kappa \cdot \xi}{(n + 1)} \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi}\right)^3 \tag{277}$$

so dass man allgemein die Verschiebung u im elastischen Bereich als

$$u = \frac{\kappa \cdot r}{(n+1)} \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n+1} = \frac{a \cdot \kappa \cdot \xi}{(n+1)} \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n+1} \quad (278)$$

anschreiben kann. Durch Einsetzen dieser Gleichung (278) in die Gleichung (255) erhält man eine Funktionsgleichung für die Radialgeschwindigkeit an der elastisch-plastischen Grenzfläche, die von dem Parameter ξ_* abhängig ist. Dafür ist die Ableitung der Verschiebung u nach dem Parameter a notwendig.

$$\begin{aligned} u &= \frac{\kappa \cdot r}{(n+1)} \cdot \left(\frac{a \cdot \xi_*}{r} \right)^{n+1} \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial a} &= \frac{\kappa \cdot r}{(n+1) \cdot r^{n+1}} \cdot (n+1) \cdot a^n \cdot \xi_*^{n+1} + \frac{\kappa \cdot r \cdot a^{n+1}}{(n+1) \cdot r^{n+1}} \cdot (n+1) \cdot \xi_*^n \cdot \frac{d\xi_*}{da} \\ &= \kappa \cdot \frac{a^n}{r^n} \cdot \xi_*^{n+1} + \kappa \cdot \frac{a \cdot a^n}{r^n} \cdot \xi_*^n \cdot \frac{d\xi_*}{da} \end{aligned} \quad (279)$$

Da man die Geschwindigkeit an der elastisch-plastischen Grenze erhalten möchte, spezialisiert man die Gleichung (279) dementsprechend und setzt $r = r_*$. Somit ergibt sich die Ableitung zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial a} &= \kappa \cdot \frac{1}{\xi_*^n} \cdot \xi_*^{n+1} + \kappa \cdot a \cdot \frac{1}{\xi_*^n} \cdot \xi_*^n \cdot \frac{d\xi_*}{da} \\ &= \kappa \cdot \xi_* + \kappa \cdot a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \\ &= \kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \end{aligned} \quad (280)$$

Weiters muss die Ableitung von u nach dem Parameter r gebildet werden.

$$\begin{aligned} u &= \frac{\kappa \cdot r}{(n+1)} \cdot \left(\frac{a \cdot \xi_*}{r} \right)^{n+1} = \frac{\kappa \cdot a^{n+1}}{n+1} \cdot \xi_*^{n+1} \cdot r^{-n} \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\kappa \cdot a^{n+1}}{n+1} \cdot -n \cdot r^{-n-1} \cdot \xi_*^{n+1} \\ &= -\frac{\kappa \cdot n}{n+1} \cdot \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} \cdot \xi_*^{n+1} \end{aligned} \quad (281)$$

Diese Gleichung wird ebenfalls für die elastisch-plastische Grenze spezialisiert, so dass man mit $r = r_*$ die Gleichung als

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{\kappa \cdot n}{n+1} \cdot \frac{1}{\xi_*^{n+1}} \cdot \xi_*^{n+1} \\ &= -\frac{\kappa \cdot n}{n+1} \end{aligned} \quad (282)$$

anschreiben kann. Somit lässt sich die Gleichung für die Geschwindigkeit an der elastisch-plastischen Grenzfläche (Einsetzen der Gleichung (278) in die Gleichung (255)) mit

$$\begin{aligned}
v(\xi_*) &= \frac{\kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right)}{1 - \left(-\frac{\kappa}{n+1} \right)} \\
&= \frac{\kappa \cdot (n+1)}{n+1 + \kappa \cdot n} \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \simeq \kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \quad (283)
\end{aligned}$$

angeben. Durch Gleichsetzen von der Gleichung (283) mit der für $\xi = \xi_*$ spezialisierten Gleichung (240) ist es möglich die Integrationskonstante A aus der Gleichung (240) zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
\kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) &= A \cdot \xi_*^{-\frac{n}{K_d}} - \mu \cdot \kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p} - 1} \\
\kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) + \mu \cdot \kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) &= A \cdot \xi_*^{-\frac{n}{K_d}} \\
\Rightarrow \frac{\kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \cdot (1 + \mu)}{\xi_*^{-\frac{n}{K_d}}} &= A \quad (284)
\end{aligned}$$

$$A = \kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \cdot (1 + \mu) \cdot \xi_*^{\frac{n}{K_d}} \quad (285)$$

Somit kann man eine Gleichung für die Geschwindigkeit in der plastischen Zone durch Einsetzen des Ausdruckes für die Integrationskonstante A , aus Gleichung (285), in die Gleichung (240) angeben.

$$\begin{aligned}
v(\xi) &= \kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \cdot (1 + \mu) \cdot \xi_*^{\frac{n}{K_d}} \cdot \xi^{-\frac{n}{K_d}} - \mu \cdot \kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p} - 1} \\
&= \kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \cdot \left[(1 + \mu) \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n/K_d} - \mu \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p} - 1} \right] \quad (286)
\end{aligned}$$

- **Größe der plastischen Zone/Schädigungsbereich und Eindringkraft [4] [10] [28]**

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse (wesentlichen Gleichungen) des *cavity expansion model* ("Hohlraumaufweitungs-Modell") präsentiert. Zuerst wird ausgehend von den bis hierher ermittelten Gleichungen eine transzendente Gleichung hergeleitet, die es ermöglicht den normierten Radius der plastischen Zone zu berechnen. Weiters wird eine Formel zur Berechnung des Eindringdrucks in Abhängigkeit des normierten Radius der plastischen Zone angegeben, wodurch es dann möglich ist eine Formel für die Eindringkraft anzugeben.

Die Größe des Schädigungsbereiches, beziehungsweise der plastischen Zone, kann durch Auswertung der Gleichung (286) bei $\xi = 1$ und anschließendem Gleichsetzen mit der Gleichung (254) bestimmt werden. Das Ergebnis ist eine Differentialgleichung erster Ordnung für ξ_* .

$$\kappa \cdot \left(\xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} \right) \cdot \left[(1 + \mu) \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n/K_d} - \mu \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi} \right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p} - 1} \right] = \frac{2^{3-2n}}{\pi^{2-n}} \cdot \tan \beta$$

$$\Rightarrow \quad \xi_* + a \cdot \frac{d\xi_*}{da} = \frac{2^{3-2n} \cdot \tan \beta}{\pi^{2-n}} \cdot \frac{1}{(1 + \mu) \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi}\right)^{n/K_d} - \mu \cdot \left(\frac{\xi_*}{\xi}\right)^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p} - 1}}$$

$$\frac{d\xi_*}{da} = \frac{1}{a} \cdot \left[-\xi_* + \frac{2^{3-2n} \cdot \tan \beta}{\pi^{2-n} \cdot \kappa} \cdot \frac{1}{(1 + \mu) \cdot \xi_*^{n/K_d} - \mu \cdot \xi_*^{n \cdot \frac{(K_p-1)}{K_p} - 1}} \right] \quad (287)$$

mit

- a ... Kontaktradius (siehe Abb. 58 auf Seite 73)
- n ... Dimensionsindex: $n = 1$ für zweidimensionale Spannungszustände, wie sie bei keilförmigen Eindringwerkzeugen auftreten und $n = 2$ für dreidimensionale sphärisch-symmetrische Problemstellungen, wie sie bei kegelförmigen oder kugelförmigen Eindringkörpern auftreten
- β ... Winkel zwischen Werkzeugfläche und Gesteinsoberfläche (siehe Abb. 58 auf Seite 73)
- κ ... siehe Gleichung (234)
- μ ... siehe Gleichung (241)
- K_d ... Dilatanz Koeffizient, der mit dem Dilatanzwinkel ψ durch die Gleichung (218) definiert ist.
- K_p ... passiver Koeffizient der mit dem inneren Reibungswinkel φ durch die Gleichung (186) definiert ist.

Da aber der normierte Radius ξ_* eine Invariante ist (d.h. unabhängig von dem Kontaktradius a ist), wie weiter oben bereits erläutert (siehe Dimensionsanalyse und Ähnlichkeits-Überlegungen), kann $\frac{d\xi_*}{da} = 0$ gesetzt werden und somit erhält man aus der Gleichung (287)

$$\xi_* = \frac{\frac{2^{3-2n} \cdot \tan \beta}{\pi^{2-n} \cdot \kappa}}{(1 + \mu) \cdot \xi_*^{n/K_d} - \mu \cdot \xi_*^{n \cdot (K_p-1)/K_p - 1}}$$

$$\xi_* \cdot \left[(1 + \mu) \cdot \xi_*^{n/K_d} - \mu \cdot \xi_*^{n \cdot (K_p-1)/K_p - 1} \right] = \frac{2^{3-2n} \cdot \tan \beta}{\pi^{2-n} \cdot \kappa}$$

$$(1 + \mu) \cdot \xi_*^{(K_d+n)/K_d} - \mu \cdot \xi_*^{n \cdot (K_p-1)/K_p} = \frac{2^{3-2n} \cdot \tan \beta}{\pi^{2-n} \cdot \kappa} \quad (288)$$

Nun kann man eine transzendente Gleichung für den normierten Radius des plastischen Bereichs angeben

$$\boxed{(1 + \mu) \cdot \xi_*^{(K_d+n)/K_d} - \mu \cdot \xi_*^{n \cdot (K_p-1)/K_p} = \gamma} \quad (289)$$

wobei γ ein dimensionsloser Parameter ist, der als

$$\gamma = \frac{2^{3-2n} \cdot \tan \beta}{\pi^{2-n} \cdot \kappa} \quad (290)$$

definiert ist. Für ein inkompressibles und reibungsfreies Material (Tresca Material: $K_p = K_d = 1$, $\lambda = \mu = 0$) vereinfacht sich demzufolge die Gleichung (289) zu

$$\begin{aligned}
(1+0) \cdot \xi_*^{\frac{(1+n)}{1}} - 0 \cdot \xi_*^{\frac{n \cdot (1-1)}{1}} &= \gamma \\
\xi_*^{(n+1)} &= \gamma = \frac{2^{3-2 \cdot n} \cdot \tan \beta}{\pi^{2-n} \cdot \kappa} = \frac{2^{3-2 \cdot n} \cdot \tan \beta}{\pi^{2-n} \cdot \frac{(n+1) \cdot S_0^l}{2 \cdot G}} \\
&= \frac{2^{3-2 \cdot n} \cdot 2 \cdot G \cdot \tan \beta}{\pi^{2-n} \cdot (n+1) \cdot \frac{K_p-1}{K_p+n} \cdot h} \\
&= \frac{2^{4-2 \cdot n} \cdot G \cdot \tan \beta \cdot (K_p+n)}{\pi^{2-n} \cdot (n+1) \cdot (K_p-1) \cdot \frac{q}{(K_p-1)}} \\
&= \frac{2^{2 \cdot (2-n)} \cdot G \cdot \tan \beta \cdot (K_p+n)}{\pi^{2-n} \cdot (n+1) \cdot q}.
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $K_p = 1$, lässt sich diese Gleichung auch wie folgt anschreiben:

$$\begin{aligned}
\xi_*^{(n+1)} &= \frac{2^{2 \cdot (2-n)} \cdot G \cdot \tan \beta \cdot (1+n)}{\pi^{2-n} \cdot (n+1) \cdot q} \\
&= \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2-n} \cdot \frac{G \cdot \tan \beta}{q}
\end{aligned} \tag{291}$$

Sobald die Lage der elastisch-plastischen Grenzfläche über ξ_* (normierter äußerer Radius der plastischen Zone) bestimmt ist, kann man den Eindringdruck mit Hilfe der Gleichung (211) berechnen.

$$\begin{aligned}
p &= (n+1) \cdot \frac{K_p \cdot S_0^l}{K_p-1} \cdot \xi_*^{-n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} - h \\
&= (n+1) \cdot \frac{K_p \cdot (K_p-1) \cdot h}{(K_p-1) \cdot (K_p+n)} \cdot \xi_*^{-n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} - h \\
&= (n+1) \cdot \frac{K_p \cdot (K_p-1) \cdot q}{(K_p-1) \cdot (K_p+n) \cdot (K_p-1)} \cdot \xi_*^{-n \cdot \frac{(1-K_p)}{K_p}} - \frac{q}{(K_p-1)} \\
\Rightarrow & \boxed{\frac{p}{q} = \frac{1}{K_p-1} \cdot \left[\frac{(n+1) \cdot K_p}{K_p+n} \cdot \xi_*^{n \cdot (K_p-1)/K_p} - 1 \right]}
\end{aligned} \tag{292}$$

mit

q ... Druckfestigkeit (aus einaxialem Druckversuch mit unbehinderter Seitendehnung)

Aus dieser Gleichung ist es nun wiederum möglich die Eindringkraft F durch Multiplikation des Eindringdruckes p mit der Kontaktfläche des Eindringkörpers mit dem Gestein zu bestimmen. Somit erhält man die Eindringkraft, für den zweidimensionalen Fall eines keilförmigen Eindringkörpers (Keil hat eine Einheitslänge von "1") mit (siehe auch Abb. 58 auf Seite 73 oder Abb. 61 auf Seite 97)

$$F = 2 \cdot a \cdot 1 \cdot p \tag{293}$$

und für den dreidimensionalen Fall eines kegel- oder kugelförmigen Eindringkörpers mit

$$F = a^2 \cdot \pi \cdot p \quad (294)$$

so dass man allgemein die Eindringkraft als

$$\boxed{F = (3 - n) \cdot \pi^{n-1} \cdot p \cdot a^n} \quad \text{oder} \quad \boxed{F = (3 - n) \cdot \pi^{n-1} \cdot p \cdot \left(\frac{d}{\tan \beta}\right)^n} \quad (295)$$

mit

p ... Eindringdruck (siehe Gleichung (292))

a ... Kontaktradius; lässt sich auch durch die Eindringtiefe d und den Tangentenwinkel β mit der Gleichung $a = \frac{d}{\tan \beta}$ bestimmen

anschreiben kann.

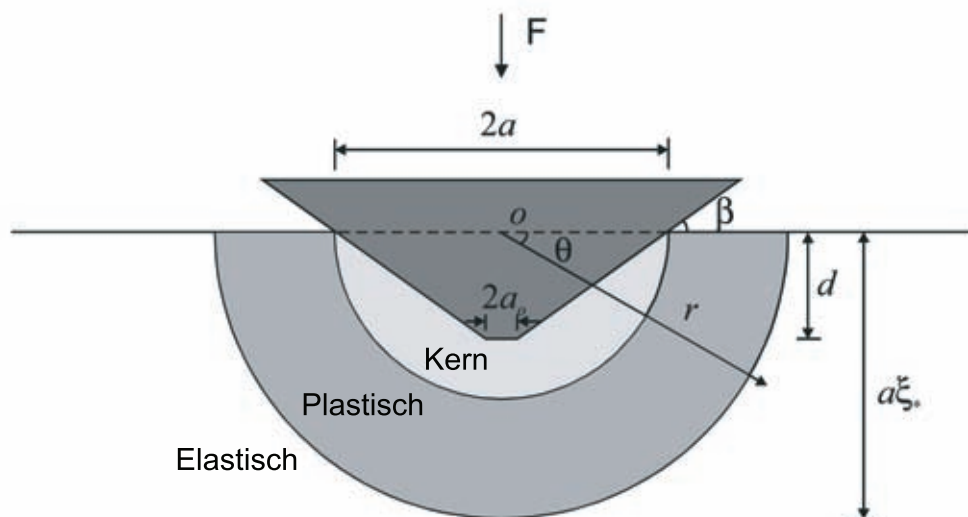


Abbildung 61: Cavity expansion model ("Hohlräume aufweitung-Modell") für stumpfe keilförmige Eindringkörper [4]

- **Eindringvorgang eines abgestumpften Keils**

Das Problem des Eindringvorganges eines abgestumpften Keils ist ein zweidimensionales ($n=1$). Der stumpfe keilförmige Eindringkörper wird durch einen Keil mit abgeflachter Spitze, die $2 \cdot a_0$ lang ist, simuliert (siehe Abb. 61 auf Seite 97). Die Kontaktlänge a ergibt sich somit zu

$$a = a_0 + \frac{d}{\tan \beta}. \quad (296)$$

Für abgestumpfte keilförmige Eindringkörper kann man die Differentialgleichung (287), für die Bestimmung der Größe der plastischen Zone, unter Berücksichtigung von Gleichung (290) und der Beziehungen

$$l_1 = 2 \cdot a_0 \quad (297)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{a}{l_1} = \frac{a}{2 \cdot a_0} \quad (298)$$

$$\text{und } \delta = \frac{d}{l_1} = \frac{d}{2 \cdot a_0} \quad (299)$$

als

$$\frac{d\xi_*}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left[-\xi_* + \frac{\gamma}{(1 + \mu) \cdot \xi_*^{\frac{n}{K_d}} - \mu \cdot \xi_*^{\frac{n \cdot (K_p - 1)}{K_p} - 1}} \right] \quad (300)$$

anschreiben. Mit Hilfe der mathematischen Beziehungen

$$\tan \beta = \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} \quad (301)$$

$$\Rightarrow d\delta = \tan \beta \cdot d\alpha \quad (302)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{\frac{a}{2 \cdot a_0}} = \frac{2 \cdot a_0}{a} = \frac{2 \cdot a_0}{a_0 + \frac{d}{\tan \beta}} = \frac{2 \cdot a_0}{\frac{a_0 \cdot \tan \beta + d}{\tan \beta}} \\ &= \frac{2 \cdot a_0 \cdot \tan \beta}{a_0 \cdot \tan \beta + d} \end{aligned} \quad (303)$$

kann man die Gleichung (300) weiter umformen, so dass man schließlich die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_*}{d\alpha} &= \frac{2 \cdot a_0 \cdot \tan \beta}{a_0 \cdot \tan \beta + d} \cdot \left[-\xi_* + \frac{\gamma}{(1 + \mu) \cdot \xi_*^{\frac{1}{K_d}} - \mu \cdot \xi_*^{\frac{1 \cdot (K_p - 1)}{K_p} - 1}} \right] \\ \frac{d\xi_*}{\tan \beta \cdot d\alpha} &= \frac{2}{\frac{\tan \beta \cdot a_0}{a_0} + \frac{d}{a_0}} \cdot \left[-\xi_* + \frac{\gamma}{(1 + \mu) \cdot \xi_*^{\frac{1}{K_d}} - \mu \cdot \xi_*^{1 - \frac{1}{K_p} - 1}} \right] \\ \frac{d\xi_*}{d\delta} &= \frac{2}{\tan \beta + 2 \cdot \delta} \cdot \left[-\xi_* + \frac{\gamma}{(1 + \mu) \cdot \xi_*^{\frac{n}{K_d}} - \mu \cdot \xi_*^{-\frac{1}{K_p}}} \right] \end{aligned} \quad (304)$$

erhält. Diese Differentialgleichung gibt die Entwicklung der normierten Größe der plastischen Zone mit der Eindringtiefe an. In Abb. 62 auf Seite 99 ist die normierte Größe der plastischen Zone bzw. des Schädigungsbereichs anhand von ξ_* in Abhängigkeit von δ (Verhältnis zwischen Eindringtiefe und Länge der abgeflachten Spitze; $d/2 \cdot a_0$) abgebildet. Die Berechnungen wurden für $\varphi = \xi = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\nu = 0.25$ durchgeführt und der Parameter γ wurde von 50 über 100 auf 200 variiert, was einen Übergang von weichem zu hartem Gestein ausdrückt. Die gepunkteten Linien geben die selbstähnlichen und die durchgezogenen Linien die allgemeinen Lösungen an.

Aus der Abb. 62 auf Seite 99 ist zu erkennen, dass gerade zu Beginn des Eindringvorganges, bereits kleine Unterschiede in der Eindringtiefe eine starke Vergrößerung der plastischen Zone zur Folge haben. Hat der Meißel eine gewisse Eindringtiefe erreicht, ist die Vergrößerung der

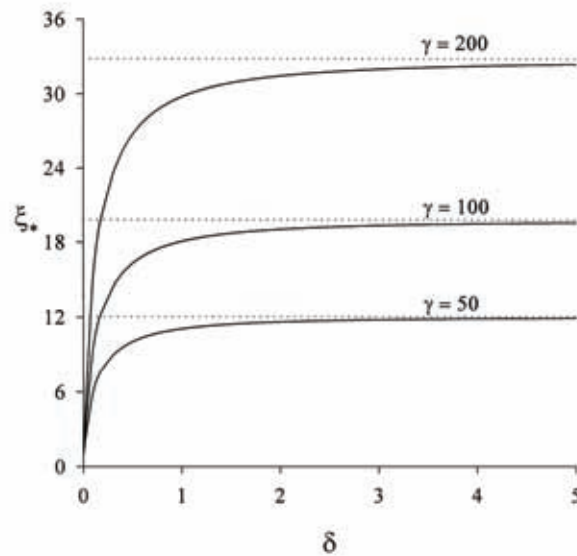


Abbildung 62: Normierter Radius der plastischen Zone bzw. des Schädigungsbereiches in Abhängigkeit von der Eindringtiefe, bei stumpfen keilförmigen Eindringkörpern ($\varphi = \xi = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\nu = 0.25$) [4]

plastischen Zone nur mehr minimal im Vergleich zur Änderung der Eindringtiefe. Außerdem ist ersichtlich, dass sich die allgemeine Lösung asymptotisch der selbstähnlichen Lösung annähert. Somit kann für große Werte des Verhältnisses δ die selbstähnliche Lösung herangezogen werden, um die Größe der plastischen Zone abzuschätzen.

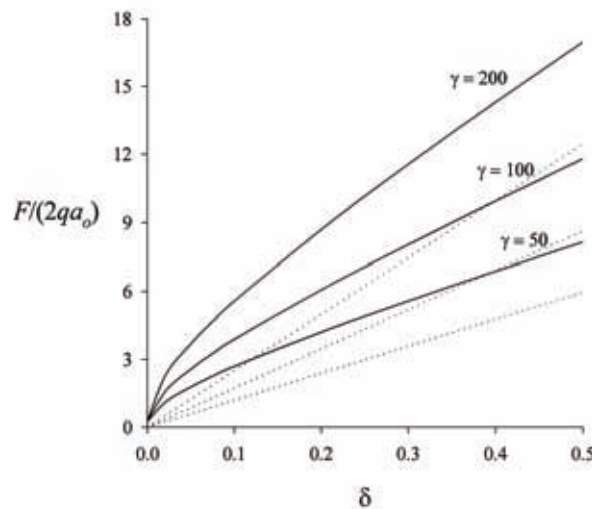


Abbildung 63: Eindringkraft in Abhängigkeit der Eindringtiefe von stumpfen keilförmigen Eindringkörpern ($\varphi = \xi = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\nu = 0.25$) [4]

In Abb. 63 auf Seite 99 ist die Eindringkraft in Abhängigkeit von dem Parameter δ zu sehen. Auch hier wurden die gleichen Werte für die Berechnung gewählt wie bei Abb. 62 auf Seite 99. Es ist zu erkennen, dass die Eindringkraft mit zunehmender Eindringtiefe ansteigt, was so auch zu erwarten war. Bei sehr geringen Werten von δ ($\delta < 0.05$) steigt die Eindringkraft stark an. Bei größeren Werten von δ ist die Zunahme der Eindringkraft deutlich geringer, was durch die abflachenden Kurven ersichtlich ist.

7.2 Prinzipien und Theorien der Rissbildung und der Rissausbreitung

Der Spannungszustand um einen Eindringkörper wird normalerweise durch die Radialspannungen (Spannungen die radial vom Kontaktpunkt ausgehen), die Ringspannungen (Spannungen die ringförmig um den Kontaktpunkt gegeben sind) und Scherspannungen beschrieben. Das Auftreten dieser Spannungen und deren Verhalten in der unmittelbaren Umgebung des Kontaktes (die so genannten "Nahfeld" - Spannungen) sind dafür verantwortlich, dass hier der Punkt der Rissentstehung liegt. Wohingegen ebenfalls die gleichen Spannungen (Radial-, Ring- und Scherspannungen), die allerdings weiter entfernt von der Kontaktstelle sind (die sogenannten "Fernfeld" -Spannungen), Einfluss auf die Rissausbreitung und den Verlauf genau jener Risse, die im "Nahfeld" entstehen, nehmen. Genau diese Interaktion zwischen den Spannungen im "Nahfeld" und im "Fernfeld" ermöglichen die Entstehung maximaler Zugspannungen, die hauptverantwortlich für die Entstehung und Ausbreitung von Rissen sind und somit im Folgenden, unter den Punkten "**Rissentstehung**" und "**Rissausbreitung**" im Detail behandelt werden [52].

- **Rissentstehung/Rissbildung**

In diesem Abschnitt werden einige Modelle und Theorien für die Rissbildung, von unterschiedlichen Autoren, vorgestellt.

- *Modell und Theorie nach Lawn und Evans [38]*

- (a) stumpfe Eindringkörper

Was stumpfe Kontakte (harter sphärischer Eindringkörper gegen sprödes Material) betrifft, ist der Entstehungsprozess, laut Lawn and Evans, relativ unkompliziert. Während der Belastungsphase vergrößern sich die Zugspannungen auf die Schwachstellen im Material außerhalb der Kontaktfläche immer mehr, bis so ein Anriss instabil wird, das bedeutet sich schlagartig zu einem Riss vergrößert, und sich anschließend zu dem typischen Hertzschen Kegelryss ausbildet. Das Erreichen dieses kritischen Zustandes ist nur dann möglich, wenn eine bestimmte Energieschwelle überschritten wird. Falls keine Fehlstellen im Bereich der Zugspannungen vorhanden sind oder die notwendige Energieschwelle nicht erreicht wird, kommt es durch Belastungssteigerung zu einer Vergrößerung der Kontaktfläche, bis die Zugzone eine Schwachstelle erreicht, bei der die kritische Energieschwelle überschritten wird. Demzufolge spielt die Häufigkeit und Verteilung der Fehlstellen im Material eine entscheidende Rolle bei der Rissentstehung.

Da die Energie direkt mit dem Druck, der von dem Eindringkörper auf das Material ausgeübt wird, zusammenhängt, wird im Folgenden der maximale Druck unter einem kugelförmigen Eindringkörper in Anlehnung an Popov [55] hergeleitet. Der Kontakt zwischen einer starren Kugel und einem elastischen Halbraum wird nach Hertz [25] auch Hertzscher Kontakt genannt. Die Druckverteilung auf die kreisförmige Kontaktfläche wird dementsprechend Hertzsche Druckverteilung genannt und kann als

$$p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (305)$$

mit (siehe Abb. 64 auf Seite 101 und Abb. 65 auf Seite 101)

- p_0 ... Druck im Ursprung
- a ... Radius der Kontaktfläche
- r ... Radialkoordinate

angeschrieben werden.

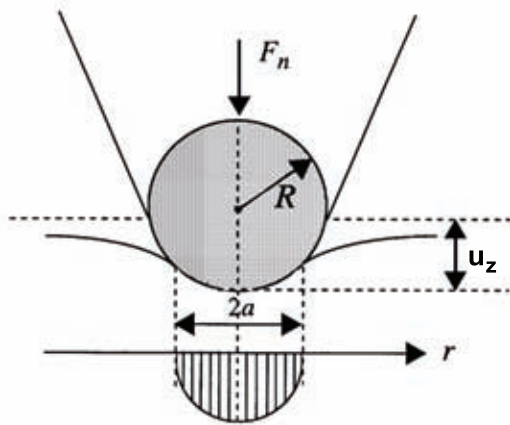


Abbildung 64: Elastisches Eindringen mit zugehöriger Druckverteilung von einem kugelförmigen Eindringkörper (Hertzscher Kontakt) [11]

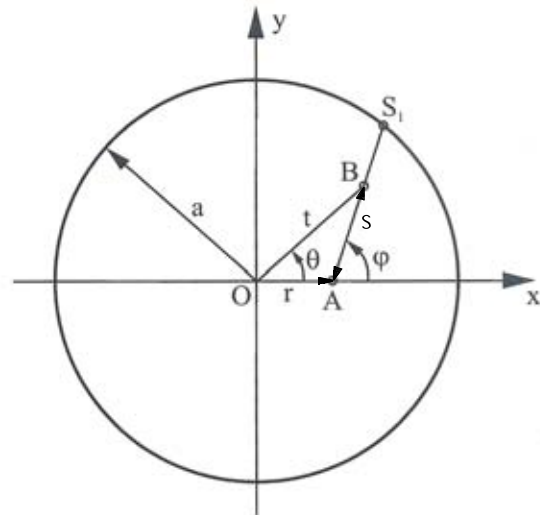


Abbildung 65: Durch Normalspannungen beanspruchte kreisförmige Kontaktfläche durch einen Hertz'schen Kontakt [55]

Die durch diese Druckverteilung verursachte Vertikalverschiebung ist für einen beliebigen Punkt der Kontaktfläche nur von der Radialkoordinate r (siehe Abb. 65 auf Seite 101) abhängig, da die Spannungsverteilung rotationssymmetrisch ist. Um die vertikale Verschiebung des Punktes A , verursacht durch die Spannung im "umlaufenden" Punkt B , ermitteln zu können, muss über alle möglichen Lagen des Punktes B integriert werden. Auf Grund der Rotationssymmetrie ist die Spannung im Punkt A ebenfalls nur von dem Abstand t vom Ursprung abhängig. Dieser Abstand ergibt sich unter Berücksichtigung des Kosinussatzes (allgemeine Formulierung)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \quad (306)$$

und der trigonometrischen Beziehung $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$ zu

$$t^2 = r^2 + s^2 + 2 \cdot r \cdot s \cdot \cos\varphi. \quad (307)$$

Die Hertz'sche Druckverteilung (305) lässt sich somit unter Einführung der Parameter

$$\alpha^2 = a^2 - r^2 \quad \text{und} \quad \beta = r \cdot \cos\varphi \quad (308)$$

(α und β sind Längenmaße) durch

$$p(s, \varphi) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{r^2 + s^2 + 2 \cdot r \cdot s \cdot \cos\varphi}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (309)$$

$$= \frac{p_0}{a} \cdot (a^2 - r^2 - s^2 - 2 \cdot r \cdot s \cdot \cos\varphi)^{\frac{1}{2}} \quad (310)$$

$$= \frac{p_0}{a} \cdot (\alpha^2 - 2 \cdot \beta \cdot s - s^2)^{\frac{1}{2}} \quad (311)$$

ausdrücken.

Die vertikale Verschiebung der Oberfläche unter einer kontinuierlichen Druckverteilung $p(x, y)$ lässt sich zu

$$u_z = \frac{1}{\pi \cdot E^*} \cdot \iint p(x', y') \frac{dx' dy'}{r} \quad r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (312)$$

mit

$$E^* = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \quad (313)$$

und

E ... Elastizitätsmodul des belasteten Materials

ν ... Querdehnungszahl (Poissonsche Zahl) des belasteten Materials

anschreiben. Spezialisiert man nun diese Vertikalverschiebung für das vorliegende Problem erhält man

$$u_z = \frac{1}{\pi \cdot E^*} \cdot \frac{p_0}{a} \cdot \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2 \cdot \beta \cdot s - s^2)^{\frac{1}{2}} ds \right] d\varphi. \quad (314)$$

Die Berechnung des Integrals über ds wurde mit Hilfe der Mathematik-Software Maple durchgeführt.

$$\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2 \cdot \beta \cdot s - s^2)^{\frac{1}{2}} ds = \left[-\frac{1}{4} \cdot (-2 \cdot \beta - 2 \cdot s) \cdot \sqrt{\alpha^2 - 2 \cdot \beta \cdot s - s^2} + \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{\beta + s}{\sqrt{\alpha^2 - 2 \cdot \beta \cdot s - s^2}} \right) \cdot \alpha^2 + \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{\beta + s}{\sqrt{\alpha^2 - 2 \cdot \beta \cdot s - s^2}} \right) \cdot \beta^2 \right] \Bigg|_0^{s_1} \quad (315)$$

Dabei ist s_1 das Ergebnis der quadratischen Gleichung

$$\alpha^2 - 2 \cdot \beta \cdot s - s^2 = 0 \quad (316)$$

mit positiver Wurzel:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{2 \cdot \beta}{2} + \sqrt{\frac{2 \cdot \beta^2}{2} + \alpha^2} \\ &= -\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} \end{aligned} \quad (317)$$

Um das bestimmte Integral aus der Gleichung (315) zu berechnen, ist es zweckmäßig zuerst nur den Wurzelausdruck $\sqrt{\alpha^2 - 2 \cdot \beta \cdot s - s^2}$ zu betrachten. Ersetzt man in diesem Ausdruck s mit dem Ausdruck für s_1 aus der Gleichung (317), so erhält man

$$\begin{aligned}
\sqrt{\alpha^2 - 2 \cdot \beta \cdot s_1 - s_1^2} &= \sqrt{\alpha^2 - 2 \cdot \beta \cdot (-\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}) - (\beta^2 - 2 \cdot \beta \cdot \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} + \beta^2 + \alpha^2)} \\
&= \sqrt{\alpha^2 + 2 \cdot \beta^2 - 2 \cdot \beta \cdot \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} - \beta^2 + 2 \cdot \beta \cdot \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} - \beta^2 - \alpha^2} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{318}$$

Berücksichtigt man dieses Ergebnis und die daraus folgende trigonometrische Beziehung

$$\arctan\left(\frac{\beta + s_1}{\sqrt{\alpha^2 - 2 \cdot \beta \cdot s_1 - s_1^2}}\right) = \arctan\left(\frac{\beta + s_1}{0}\right) \tag{319}$$

$$\stackrel{\wedge}{=} \arctan(\infty) \tag{320}$$

$$= \frac{\pi}{2} \tag{321}$$

ergibt sich das bestimmte Integral der Gleichung (315) zu

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{1}{4} \cdot (-2 \cdot \beta - 2 \cdot s) \cdot \sqrt{\alpha^2 - 2 \cdot \beta \cdot s - s^2} + \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{\beta + s}{\sqrt{\alpha^2 - 2 \cdot \beta \cdot s - s^2}}\right) \cdot \alpha^2 + \frac{1}{2} \cdot \right. \\
&\left. \arctan\left(\frac{\beta + s}{\sqrt{\alpha^2 - 2 \cdot \beta \cdot s - s^2}}\right) \cdot \beta^2 \right] \Big|_0^{s_1} = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \alpha^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \beta^2 - \left[\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-2 \cdot \beta) \cdot \alpha + \frac{1}{2} \cdot \right. \\
&\left. \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot \alpha^2 + \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot \beta^2 \right] \tag{322}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\beta \cdot \alpha}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (\alpha^2 + \beta^2) - \\
&\quad \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot (\alpha^2 + \beta^2). \tag{323}
\end{aligned}$$

So dass man schließlich das bestimmte Integral wie folgt anschreiben kann:

$$\int_0^{s_1} (\alpha^2 - 2 \cdot \beta \cdot s - s^2)^{\frac{1}{2}} ds = -\frac{\beta \cdot \alpha}{2} + \frac{1}{2} \cdot (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \right] \tag{324}$$

Wird die rechte Seite der Gleichung (324) über $d\varphi$ integriert, fallen alle Glieder mit $\alpha \cdot \beta$ und mit $\arctan(\beta/\alpha)$ weg, da diese nach Integration den Ausdruck $\sin\varphi$ enthalten, der für die Werte 0 und 2π zu Null wird. Somit erhält man für die vertikale Verschiebung

$$u_z = \frac{1}{\pi \cdot E^*} \cdot \frac{p_0}{a} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{4} \cdot (\alpha^2 + \beta^2) d\varphi \tag{325}$$

$$= \frac{1}{E^*} \cdot \frac{p_0}{4 \cdot a} \cdot \int_0^{2\pi} (\alpha^2 - r^2 + r^2 \cdot \cos^2\varphi) d\varphi. \tag{326}$$

Das Integral wird durch die Mathematik-Software Maple berechnet und ergibt sich zu

$$\int_0^{2\pi} (a^2 - r^2 + r^2 \cdot \cos^2 \varphi) d\varphi = a^2 \cdot \varphi - r^2 \cdot \varphi + r^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} \cdot \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} \quad (327)$$

$$= a^2 \cdot 2 \cdot \pi - r^2 \cdot 2 \cdot \pi + r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \quad (328)$$

$$= 2 \cdot a^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi. \quad (329)$$

Schließlich kann man die Vertikalverschiebung u_z , verursacht durch die Hertzsche Druckverteilung (305), mit Hilfe der Gleichungen (326) und (329), durch

$$u_z = \frac{1}{E^*} \cdot \frac{\pi \cdot p_0}{4 \cdot a} \cdot (2 \cdot a^2 - r^2) \quad (330)$$

angeben. In Abb. 66 auf Seite 104 ist die vertikale Verschiebung der Oberfläche eines elastischen Halbraumes in Folge eines Kontaktes mit einer starren Kugel abgebildet. Aus dieser Abbildung lässt sich ebenfalls eine Gleichung für die Vertikalverschiebung der belasteten Oberfläche aufstellen.

$$u_z = d - \left(R - \sqrt{R^2 - r^2} \right) \quad (331)$$

Unter Verwendung von

$$R - \sqrt{R^2 - r^2} \simeq \frac{r^2}{2 \cdot R} \quad (332)$$

lässt sich die vertikale Verschiebung zu

$$u_z = d - \frac{r^2}{2 \cdot R} \quad (333)$$

anschreiben.

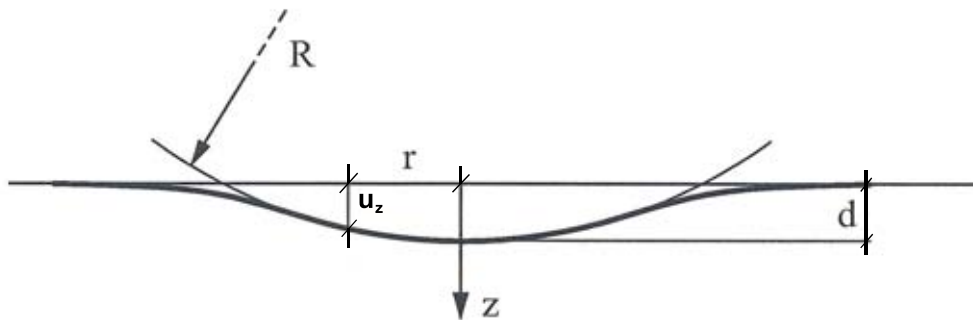


Abbildung 66: Vertikale Verschiebung der Oberfläche eines elastischen Halbraumes bei Kontakt mit einer starren Kugel [55]

Setzt man nun die Ausdrücke für die Vertikalverschiebungen der Gleichungen (330) und (333) gleich, erhält man

$$\frac{1}{E^*} \cdot \frac{\pi \cdot p_0}{4 \cdot a} \cdot (2 \cdot a^2 - r^2) = d - \frac{r^2}{2 \cdot R} \quad (334)$$

$$\frac{\pi \cdot p_0 \cdot a}{E^* \cdot 2} - \frac{\pi \cdot p_0 \cdot r^2}{E^* \cdot 4 \cdot a} = d - \frac{r^2}{2 \cdot R}. \quad (335)$$

Vergleicht man in Gleichung (335) jeweils den ersten Term auf der linken Seite mit dem ersten Term auf der rechten Seite und den zweiten Term auf der linken Seite mit dem zweiten Term auf der rechten Seite, ist zu erkennen, dass die Parameter d und a folgenden Bedingungen genügen müssen:

$$d = \frac{\pi \cdot a \cdot p_0}{2 \cdot E^*} \quad (336)$$

$$\frac{\pi \cdot p_0}{E^* \cdot 4 \cdot a} \stackrel{\wedge}{=} \frac{1}{2 \cdot R} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\pi \cdot p_0 \cdot R}{2 \cdot E^*} \quad (337)$$

Aus den Gleichungen (336) und (337) folgt für den Kontaktradius a außerdem

$$a^2 = R \cdot d. \quad (338)$$

Der maximale Druck p_0 , der genau im Ursprung ($r = 0$) zu finden ist, kann aus der Gleichung (335), unter Berücksichtigung der Gleichung (337), berechnet werden.

$$\frac{\pi \cdot p_0}{2 \cdot E^*} \cdot \frac{\pi \cdot p_0 \cdot R}{2 \cdot E^*} = d \quad (339)$$

$$p_0^2 = \frac{4 \cdot E^* \cdot d}{\pi^2 \cdot R} \quad (340)$$

$$p_0 = \frac{2}{\pi} \cdot E^* \cdot \sqrt{\frac{d}{R}} \quad (341)$$

Die Normalkraft F_n auf den kugelförmigen Eindringkörper (siehe Abb. 64 auf Seite 101), kann als Integral der Hertzschen Druckverteilung (305) über die Kontaktfläche berechnet werden (Integral wird mit der Mathematik-Software Maple berechnet).

$$F_n = \int_0^a p(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \, dr \quad (342)$$

$$= \int_0^a p_0 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \, dr \quad (343)$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot (a - r) \cdot (a + r) \cdot p_0 \cdot \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2}} \cdot \pi \Big|_0^a \quad (344)$$

$$\Rightarrow F_n = \frac{2}{3} \cdot a^2 \cdot p_0 \cdot \pi \quad (345)$$

Setzt man in diese Gleichung nun für a^2 den Ausdruck aus Gleichung (338) und für p_0 den Ausdruck aus Gleichung (341) ein, dann erhält man

$$F_n = \frac{2}{3} \cdot R \cdot d \cdot \frac{2}{\pi} \cdot E^* \cdot \sqrt{\frac{d}{R}} \cdot \pi \quad (346)$$

$$F_n = \frac{4}{3} \cdot E^* \cdot \sqrt{R \cdot d^3} \quad (347)$$

mit (siehe Abb. 66 auf Seite 104 und Abb. 64 auf Seite 101)

E^* ... siehe Gleichung (313)
 R ... Radius der Kontaktfläche
 d ... maximale Eindringtiefe

als Gleichung für die Normalkraft. Der maximale Druck p_0 , genau im Zentrum der Kontaktfläche, lässt sich durch Umformung der Gleichung (345) auch als Funktion der Normalkraft F_n ausdrücken.

$$p_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{F_n}{\pi \cdot a^2} \quad (348)$$

Da der Kontaktradius a aber in der Praxis schwer zu ermitteln ist, wird für diesen der Ausdruck (338) verwendet, so dass die Gleichung (348) wie folgt angeschrieben werden kann:

$$p_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{F_n}{\pi \cdot R \cdot d} \quad (349)$$

Nun muss noch die maximale Eindringtiefe d durch bekannte Größen ausgedrückt werden, was durch Umformung der Gleichung (347) möglich ist.

$$F_n = \frac{4}{3} \cdot E^* \cdot \sqrt{R \cdot d^3} \quad (350)$$

$$F_n \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{E^*} = \sqrt{R \cdot d^3} \quad (351)$$

$$d^3 = \frac{9 \cdot F_n^2}{16 \cdot E^{*2} \cdot R} \quad (352)$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot F_n^2}{16 \cdot E^{*2} \cdot R}} \quad (353)$$

Setzt man nun die Gleichung (353) in die Gleichung (349) ein, so erhält man eine Gleichung für den maximalen Druck, die nur mehr von bekannten Größen abhängt.

$$p_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{F_n}{\pi \cdot R \cdot \sqrt[3]{\frac{9 \cdot F_n^2}{16 \cdot E^{*2} \cdot R}}} \quad (354)$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot F_n^3 \cdot 16 \cdot E^{*2} \cdot R}{2^3 \cdot \pi^3 \cdot R^3 \cdot 9 \cdot F_n^2}} \quad (355)$$

$$p_0 = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot F_n \cdot E^{*2}}{\pi^3 \cdot R^2}} \quad (356)$$

mit (siehe Abb. 64 auf Seite 101)

F_n ... einwirkende Normalkraft

E^* ... siehe Gleichung (313)

R ... Radius des kugelförmigen Eindringkörpers

Mit Hilfe der Gleichungen (338) und (353) ist es nun außerdem noch möglich den Kontaktradius a ebenfalls als Funktion von bekannten Werten darzustellen.

$$a^2 = R \cdot \sqrt[3]{\frac{9 \cdot F_n^2}{16 \cdot E^{*2} \cdot R}} \quad (357)$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9 \cdot F_n^2 \cdot R^3}{16 \cdot E^{*2} \cdot R}} \quad (358)$$

$$\Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot F_n \cdot R}{4 \cdot E^*}} \quad (359)$$

Die potentielle Energie U , der elastischen Deformation, ist als

$$\frac{\partial U}{\partial d} = F \quad (360)$$

definiert und lässt sich somit unter Verwendung von Gleichung (347) wie folgt angeben:

$$U = \frac{8}{15} \cdot E^* \cdot R^{\frac{1}{2}} \cdot d^{\frac{5}{2}} \quad (361)$$

Mit diesen Gleichungen für den maximalen Druck und für die potentielle Energie, müsste es möglich sein eine Beziehung zwischen diesen zwei Größen und der Rissentstehung herzustellen. Dies wurde allerdings weder von Lawn und Evans [38] noch von Popov [55] durchgeführt.

(b) scharfe Eindringkörper

Unter einem scharfen Eindringkörper bildet sich nach dem Modell von Lawn und Evans eine plastische Zone, durch radiale Verschiebung des verdrängten Materials durch den Eindringkörper, aus. Dadurch entsteht ein elastisch-plastisches Feld (siehe hierzu auch Unterabschnitt 7.1 „Cavity expansion model - Hohlräume aufweitung Modell“ auf Seite 72). Das Modell von Lawn und Evans bedient sich sowohl der Analogie des "Hohlräume aufweitung-Modells" als auch der Arbeit von Lawn und Swain [40], die herausgefunden haben, dass die maximale Zugspannung bei einem scharfen Kontakt-Ereignis genau unter der Eindring Spitze an der elastisch-plastischen Grenzfläche auftritt. Davon ausgehend haben Lawn und Evans argumentiert, dass mit Erhöhung der Belastung der plastische Bereich vergrößert wird und sich somit auch die elastisch plastische Grenzfläche immer weiter in das Material hinein verschiebt, wobei die Zugspannung an dieser Grenzfläche allerdings konstant bleibt. Somit könnte man sagen, dass dieses Zugspannungsfeld das Material nach einer geeigneten Fehlstelle "untersucht" und sobald so ein Anriss bzw. eine Fehlstelle gefunden wurde, diese dann, unter dem Einfluss der Zugspannung, instabil wird (plötzliches Entstehen eines Risses) und sich zu dem klassischen "Medianriss" ausbildet (siehe Abb. 67 auf Seite 111). Abgesehen davon war es Lawn und Evans möglich die Auswirkungen von Belastungen auf unterschiedliche Rissabmessungen zu demonstrieren (siehe Abb. 68 auf Seite 111). Um diese Wechselwirkung zu verstehen, wird

nun das Modell etwas genauer analysiert. Ausgehend von Abb. 67 auf Seite 111 haben Lawn und Evans die Härte H des Materials, welches durch einen scharfen Eindringkörper belasteten wird, mit

$$H = \frac{P}{\alpha \cdot \pi \cdot a^2} \approx konst. \quad (362)$$

und (siehe Abb. 67 auf Seite 111)

P ... Belastung des Eindringkörpers

a ... charakteristische Länge des plastischen Bereiches (Kontaktradius)

α ... dimensionsloser Faktor, der durch die Geometrie des Eindringkörpers bestimmt ist

angegeben. Die Spannungsverteilung in der Achse der Belastung ist auf der linken Seite von Abb. 67 auf Seite 111 zu sehen. Die maximale Zugspannung nimmt in der plastischen Zone rasch ab und geht in eine Druckspannung bis zu dem Kontaktpunkt zwischen Eindringkörper und Material über. In dem elastischen Bereich geht die Zugspannung gegen Null. Die vorliegende Spannungsverteilung (strichliert in Abb. 67 auf Seite 111) wird für die weiteren Zwecke durch eine vereinfachte lineare Spannungsverteilung (durchgezogen in Abb. 67 auf Seite 111) approximiert. Lawn und Evans sind außerdem davon ausgegangen, dass der gesamte Eindringvorgang von scharfen Eindringkörpern durch die Parameter H und a bestimmt ist, so dass die maximale Zugspannung σ_m durch

$$\sigma_m = \theta \cdot H \approx konst. \quad (363)$$

mit

θ ... dimensionsloser Faktor (Die Härte H ist allerdings die Haupteinflussgröße)

angegeben werden kann. Die räumliche Ausdehnung der Zugspannungen wird durch den Parameter b angegeben (siehe Abb. 67 auf Seite 111), der wiederum direkt durch die charakteristische Kontaktlänge a bestimmt ist. Unter Berücksichtigung und Umformung von Gleichung (362) zu

$$a = \sqrt{\frac{P}{\alpha \cdot \pi \cdot H}}, \quad (364)$$

kann die Ausdehnung des Bereiches, in dem Zugspannungen wirksam sind, zu

$$b = \eta \cdot a = \eta \cdot \sqrt{\frac{P}{\alpha \cdot \pi \cdot H}} \quad (365)$$

mit

η ... dimensionsloser Faktor

angeschrieben werden. Es wird nun, wie bereits weiter oben erwähnt, angenommen, dass ein "Penny-ähnlicher" Medianriss genau an der elastisch-plastischen Grenzfläche entsteht, der

den Radius c aufweist. Mit der vereinfachten linearen Spannungsverteilung, die angenommen wurde, können die Spannungen auf die Rissflächen durch die Funktion

$$\sigma(r) = \sigma_m \cdot \left(1 - \frac{r}{b}\right) \quad (r \leq b) \quad (366)$$

angegeben werden. Der Spannungsintensitätsfaktor K (siehe hierzu auch Anhang B.2 und Anhang B.3 mit Bezug auf [50]), für den vorliegenden Fall eines axialsymmetrischen "Penny-ähnlichen" Risses, ergibt sich zu

$$K = \left[\frac{2}{\sqrt{\pi \cdot c}} \right] \cdot \int_0^c \frac{r \cdot \sigma(r)}{\sqrt{c^2 - r^2}} dr. \quad (367)$$

Ersetzt man in dieser Gleichung $\sigma(r)$ durch den Ausdruck von Gleichung (366) erhält man

$$K = \frac{2 \cdot \sigma_m}{\sqrt{\pi \cdot c}} \cdot \int_0^c \frac{r - \frac{r^2}{b}}{\sqrt{c^2 - r^2}} dr. \quad (368)$$

Das Integral des Spannungsintensitätsfaktors lässt sich mit Hilfe der Mathematik-Software Maple zu

$$\int_0^c \frac{r - \frac{r^2}{b}}{\sqrt{c^2 - r^2}} dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{r \cdot \sqrt{c^2 - r^2}}{b} - \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2 \cdot \arctan\left(\frac{r}{\sqrt{c^2 - r^2}}\right)}{b} - \sqrt{c^2 - r^2} \Big|_0^c \quad (369)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{c^2 \cdot \arctan\left(\frac{r}{0}\right)}{b} - \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{c^2 \cdot \arctan\left(\frac{0}{c}\right)}{b} - c \right] \quad (370)$$

berechnen. Unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung

$$\arctan\left(\frac{r}{0}\right) \hat{=} \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2} \quad (371)$$

lässt sich das Integral aus Gleichung (370) zu

$$\int_0^c \frac{r - \frac{r^2}{b}}{\sqrt{c^2 - r^2}} dr = -\frac{1}{2} \cdot \frac{c^2 \cdot \pi}{b \cdot 2} + c \quad (372)$$

anschreiben. Somit erhält man den Spannungsintensitätsfaktor, für den vorliegenden "Penny-ähnlichen" Riss, durch Einsetzen der Gleichung (372) in Gleichung (368), wie folgt:

$$K = \frac{2 \cdot \sigma_m}{\sqrt{\pi \cdot c}} \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{c^2 \cdot \pi}{b \cdot 2} + c \right] \quad (373)$$

$$= \frac{2 \cdot \sigma_m}{\sqrt{\pi \cdot c}} \cdot c \cdot \left(1 - \frac{\pi \cdot c}{4 \cdot b}\right) \quad (374)$$

$$\Rightarrow K = 2 \cdot \sigma_m \cdot \sqrt{\frac{c}{\pi}} \cdot \left(1 - \frac{\pi \cdot c}{4 \cdot b}\right) \quad (c \leq b) \quad (375)$$

mit (siehe hierzu auch Abb. 67 auf Seite 111)

- K ... Spannungsintensitätsfaktor [$N/m^{3/2}$]
- σ_m ... maximale Zugspannung an der elastisch-plastischen Grenzfläche [N/m^2]
- c ... Radius des "Penny-ähnlichen" Risses [m]
- b ... Ausdehnung des Bereichs in dem Zugspannungen wirksam sind [m]

Unter Anwendung des Bruchkriteriums (siehe Anhang Anhang B.3 (473))

$$\boxed{K = K_c} \quad (376)$$

und durch Einsetzen der Gleichungen (363) und (365) in Gleichung (375), um die Parameter σ_m und b zu eliminieren, erhält man

$$1 = \frac{2 \cdot \theta \cdot H}{K_c} \cdot \sqrt{\frac{c}{\pi}} \cdot \left(1 - \frac{\pi \cdot c}{4} \cdot \sqrt{\frac{\eta^2 \cdot P}{\alpha \cdot \pi \cdot H}} \right). \quad (377)$$

Um diese Gleichung etwas übersichtlicher anschreiben zu können führt man \mathcal{C} , die reduzierte Riss-Abmessung und \mathcal{P} , die reduzierte Belastung für die Ausdrücke

$$\mathcal{C} = \left(\frac{2 \cdot \theta \cdot H}{\sqrt{\pi} \cdot K_c} \right)^2 \cdot c \quad (378)$$

$$\mathcal{P} = \left(\frac{16 \cdot \eta^2 \cdot \theta^4 \cdot H^3}{\alpha \cdot \pi^3 \cdot K_c^4} \right) \cdot P \quad (379)$$

mit

- H ... Härte des Gesteins [N/m^2]
- K_c ... Bruchzähigkeit [$N/m^{3/2}$]
- c ... Radius des "Penny-ähnlichen" Risses [m]
- P ... Belastung des Eindringkörpers [N]
- $\alpha; \eta; \theta$... dimensionslose Parameter

ein. Es ist zu erkennen, dass die Parameter c und P durch die Härte H und die Bruchzähigkeit K_c normiert werden, so dass Risse und Belastungen für unterschiedliche Gesteine besser vergleichbar werden. Dadurch kommt es aber auch dazu, dass \mathcal{C} und \mathcal{P} dimensionslos sind, was durch das Voranstellen des Wortes "reduziert" impliziert wird.

Die Gleichung (377) kann nun durch

$$1 = \sqrt{\mathcal{C}} \cdot \left(1 - \frac{\pi \cdot \mathcal{C}}{4 \cdot \sqrt{\mathcal{P}}} \right) \quad (380)$$

angeschrieben werden. Durch Umformen dieser Gleichung nach \mathcal{P} erhält man eine Funktion für die reduzierte Belastung in Abhängigkeit von der reduzierten Riss-Abmessung.

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}}} - 1 = -\frac{\pi \cdot \mathcal{L}}{4 \cdot \sqrt{\mathcal{P}}} \quad (381)$$

$$\frac{4}{\mathcal{L}^{\frac{3}{2}} \cdot \pi} - \frac{4}{\pi \cdot \mathcal{L}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}}} \quad (382)$$

$$\sqrt{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{L}^{\frac{3}{2}} \cdot \pi}{4 \cdot \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} - 4} \quad (383)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L}) = \frac{1}{16} \cdot \frac{\mathcal{L}^3 \cdot \pi^2}{(\sqrt{\mathcal{L}} - 1)^2} \quad (384)$$

In Abb. 68 auf Seite 111 ist der Funktionsgraph der Funktion (384) abgebildet. Es ist zu erkennen, dass bei einem Anriss von der Größe \mathcal{L}_f , die Kurve bei einer bestimmten Belastung geschnitten wird, das bedeutet, dass hier das Bruchkriterium zu tragen kommt und die Fehlstelle instabil wird. Aus der Abbildung lässt sich erkennen, dass damit das schlagartige Vergrößern des Anrisses gemeint ist, was durch den Pfeil angedeutet wird.

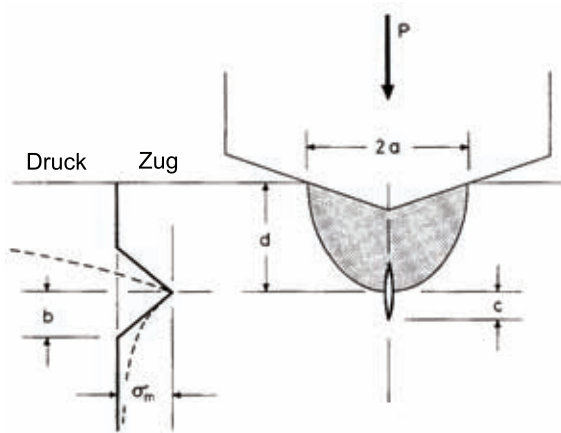


Abbildung 67: Modell für "Medianriss-Entstehung" in einem elastisch/plastischen Spannungsfeld, mit dem Bildungszentrum im Bereich der maximalen Zugspannung, am unteren Teil der plastischen (grauen) Zone [38]

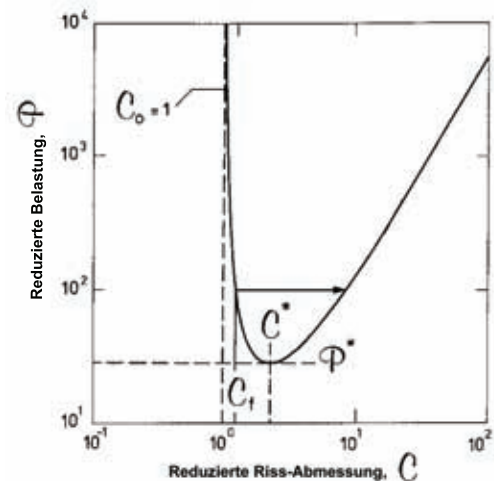


Abbildung 68: Gleichgewichts-Funktion zwischen reduzierter Belastung P und reduzierter Riss-Abmessung [38]

Der Graph aus Abb. 68 auf Seite 111 hat eine vertikale Asymptote bei $\mathcal{L}_0 = 1$, was auch durch die Nennernullstelle aus der Funktionsgleichung (384) ersichtlich ist.

$$\sqrt{\mathcal{L}} - 1 = 0 \quad (385)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_0 = 1^2 \quad (386)$$

Weiters lässt sich das Minimum des Funktionsgraphen, durch Nullsetzen der ersten Ableitung der Funktionsgleichung (384), wie folgt berechnen:

$$\mathcal{P}'(\mathcal{L}) = \frac{\pi^2}{16} \cdot \left[3 \cdot \mathcal{L}^2 \cdot (\sqrt{\mathcal{L}} - 1)^{-2} + \mathcal{L}^3 \cdot (-2) \cdot (\sqrt{\mathcal{L}} - 1)^{-3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (387)$$

$$= \frac{\pi^2}{16} \cdot \left[\frac{3 \cdot \mathcal{C}^2}{(\sqrt{\mathcal{C}} - 1)^2} - \frac{\mathcal{C}^3}{\sqrt{\mathcal{C}} \cdot (\sqrt{\mathcal{C}} - 1)^3} \right] \quad (388)$$

$$= \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{3 \cdot \mathcal{C}^{\frac{5}{2}} \cdot (\sqrt{\mathcal{C}} - 1) - \mathcal{C}^3}{\sqrt{\mathcal{C}} \cdot (\sqrt{\mathcal{C}} - 1)^2} \quad (389)$$

$$\mathcal{P}'(\mathcal{C}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot \mathcal{C}^{\frac{5}{2}} \cdot (\sqrt{\mathcal{C}} - 1) - \mathcal{C}^3 = 0 \quad (390)$$

$$3 \cdot \mathcal{C}^3 - 3\mathcal{C}^{\frac{5}{2}} - \mathcal{C}^3 = 0 \quad (391)$$

$$2 \cdot \mathcal{C}^3 - 3\mathcal{C}^{\frac{5}{2}} = 0 \quad (392)$$

$$\mathcal{C}^{\frac{5}{2}} \cdot (2 \cdot \sqrt{\mathcal{C}} - 3) = 0 \quad (393)$$

Durch Anwenden des "Produkt-Null-Satzes" (ein Produkt ist dann Null, wenn ein Faktor Null ist) auf die Gleichung (393) erhält man die zwei Lösungen

$$\mathcal{C} = 0 \quad \text{und} \quad 2 \cdot \sqrt{\mathcal{C}} = 3 \quad (394)$$

$$\mathcal{C} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25. \quad (395)$$

Durch Einsetzen des relevanten Ergebnisses (395) in die Funktionsgleichung (384), erhält man den Tiefpunkt des Funktionsgraphen bei $(\mathcal{C}^*, \mathcal{P}^*)$, mit den Werten

$$\mathcal{C}^* = 2,25 \quad (396)$$

$$\mathcal{P}^* = 28,11. \quad (397)$$

Somit ist es möglich drei Bereiche für die Größe der Anrisse oder Fehlstellen zu indentifizieren:

- $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}_0$ (kleine Anrisse/Fehlstellen): Unterhalb einer kritischen Größe vergrößern sich die Fehlstellen nie zu Rissen. Physikalisch bedeutet dies, dass diese kleinen Anrisse, selbst bei maximaler Zugspannung über den gesamten Bereich, den kritischen Spannungs-Intensitäts-Faktor nie erreichen.
- $\mathcal{C}_0 < \mathcal{C} < \mathcal{C}^*$ (mittel große Anrisse/Fehlstellen): In diesem Bereich kommt es zum spontanen Ausbilden von "Medianrissen" bei konstanter Beanspruchung.
- $\mathcal{C}^* \leq \mathcal{C}$ (große Anrisse/Fehlstellen): Bei großen Fehlstellen kann stabiles Risswachstum, entlang der Gleichgewichts-Kurve unter Erhöhung der Belastung, beobachtet werden. Das bedeutet, dass das Auftreten von "Medianrissen" ein kontinuierliches und kein abruptes Ereignis ist.

Aus dieser Beschreibung geht klar hervor, dass die Rissentstehung stark von dem Vorhandensein von Fehlstellen und deren Abmessungen abhängig ist. Wenn es keine großen oder zumindest mittelgroßen Anrisse/Fehlstellen gibt, muss der Eindringvorgang so lange fortgesetzt werden, bis sich die plastische Zone bis zu einer solchen Fehlstelle ausgedehnt hat. Davon abgesehen muss dann auch noch der notwendige Grenzwert der Zugspannung erreicht werden, damit es zu einer Rissentstehung kommen kann. Allerdings kann man aus Abb. 68 auf Seite 111 schließen, dass es unabhängig von der Größe und der Lage der Anrisse/Fehlstellen

zu keiner Rissenstehung, egal ob spontan oder kontinuierlich, kommen kann, wenn die Eindringbelastung unter einer bestimmten Belastung P^* bleibt. Somit stellt das Minimum der Gleichgewichtskurve in Abb. 68 auf Seite 111 eine untere Schranke für die Anforderungen, die für die Rissentstehung notwendig sind, dar. Die absoluten Zahlen für diese Minimalanforderung erhält man unter Verwendung der Gleichungen (378), (379), (396) und (397) durch die folgenden Gleichungen:

$$C^* = \mathcal{C}^* \cdot \left(\frac{\sqrt{\pi} \cdot K_c}{2 \cdot \theta \cdot H} \right)^2 \quad (398)$$

$$= \frac{1,767}{\theta} \cdot \left(\frac{K_c}{H} \right)^2 \quad (399)$$

$$P^* = \mathcal{P}^* \cdot \left(\frac{\alpha \cdot \pi^3 \cdot K_c^4}{16 \cdot \eta^2 \cdot \theta^4 \cdot H^3} \right) \quad (400)$$

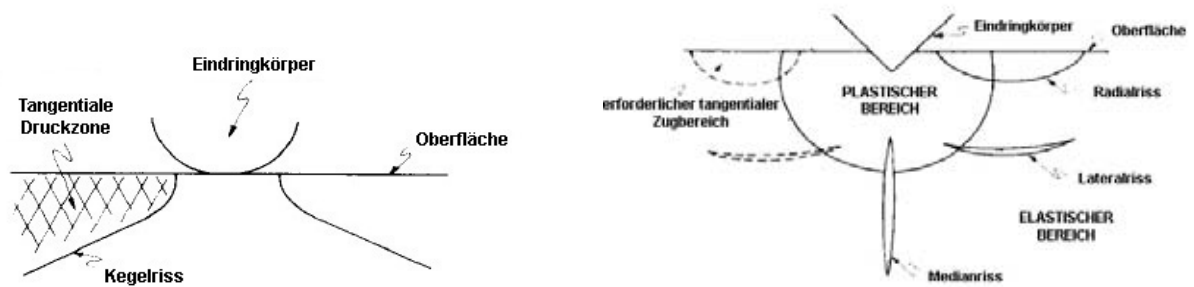
$$= \frac{54,474 \cdot \alpha}{\eta^2 \cdot \theta^4} \cdot \left(\frac{K_c}{H} \right)^3 \cdot K_c \quad (401)$$

Abschließend muss aber darauf hingewiesen werden, dass sich Lawn und Evans in [38] lediglich auf die Rissenstehung konzentrieren und davon ausgehen, dass im Material Anrisse/Fehlstellen bereits, wodurch auch immer, vorhanden sind.

– *Modell und Theorie nach Chiang, Marshall und Evans [12] und [13]*

Die Arbeit von Chiang, Marshall und Evans gliedert sich in zwei Teile, wobei in dem ersten Teil ihrer Arbeit [12] die Auswirkungen von elastisch/plastischen Eindringverhalten in Körper mit Bezugnahme auf die Spannungen und zurückbleibenden Spannungen behandelt werden. Im zweiten Teil der Arbeit [13] wird genauer auf die Riss- und Bruchentstehung bei elastisch/plastischen Eindringverhalten in Körper eingegangen. Ausgehend von bereits existierenden Theorien, Modellen und Untersuchungen, unter anderem auch dem Modell von Lawn und Evans [38], entwickelten Chiang, Marshall und Evans eine Theorie für das "Nahfeld-Spannungsfeld" für Eindringkörper, wobei sie das "sphärische Hohlraumauflweitungs-Modell" vor allem in Hinblick auf die freie, spannungsfreie Oberfläche weiterentwickelten. Die wesentlichen Resultate dieser Arbeit sind:

1. Die maximale Zugspannung tritt an der elastisch/plastischen Grenzfläche auf.
2. Die maximale Zugspannung nimmt in der plastischen Zone rapide ab, da diese überwiegend Druckspannungen ausgesetzt ist.
3. Die maximale Zugspannung nimmt in der elastischen Zone monoton ab.



(a) Vollkommen elastischer Kontakt, der einen Kegelriss und einen tangentialen Druckbereich in der Nähe der Oberfläche erzeugt

(b) Elastisch/plastischer Kontakt, der radiale, laterale Risse und einen Medianriss verursacht, welche sich vorwiegend in dem elastischen Bereich befinden

Abbildung 69: Schematische Darstellung der unterschiedlichen Rissmorphologie bei vollkommen elastischem und elastisch/plastischem Kontakt [12]

In Abb. 69 auf Seite 114 ist der Unterschied der Rissbildung bei vollkommen elastischem Kontakt und bei elastisch/plastischem Kontakt zu sehen, wie es auch aus der Arbeit von Chiang et al. resultiert, aber auch mit den Ergebnissen von durchgeführten Versuchen gut übereinstimmt. Es ist deutlich der Übergang von dem Kegelriss, bei vollkommen elastischem Kontakt, zu der Ausbildung von Median-, Lateral- und Radialrissen, bei einem elastisch/plastischen Kontakt, zu erkennen. Außerdem sind in Abb. 69(b) auf Seite 114 auch die Konsequenzen aus den wesentlichen Punkten, die aus den Studien von Chiang et al. resultieren (siehe oben), angedeutet. Risse entstehen demnach in unmittelbarer Umgebung der elastisch/plastischen Grenzfläche, da dort auch die maximale Zugspannung auftritt. Weiters sollten diese entstandenen Risse nach Ausbreitung in den plastischen Bereich enden, was damit zusammenhängt, dass es in dem plastischen Bereich zu einem rapiden Abfall der Zugspannungen und einem Übergang zu Druckspannungen kommt (siehe hierzu auch Abb. 67 auf Seite 111). Andererseits breiten sich die Risse in dem elastischen Bereich weiter aus, da hier die Zugspannungen nur langsam abnehmen.

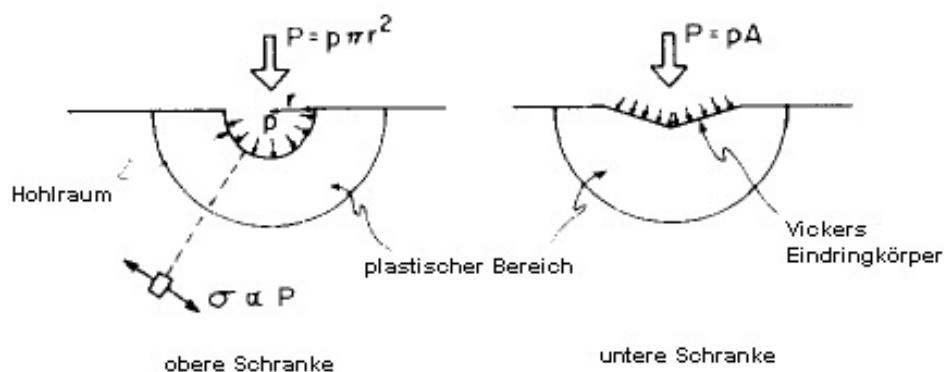


Abbildung 70: Bedingungen für die obere und untere Schranke, um die Spannungen unter Maximalbelastung zu berechnen [12]

Außerdem konnten auch noch spezielle Informationen über bestimmte Rissysteme, das radiale, das laterale und das mediane System, erlangt werden. Durch das weiterentwickelte "sphärische Hohlraum aufweitung-Modell" konnte weiters eine obere und eine untere Schranke (siehe

Abb. 70 auf Seite 114) für die Spannungen während der Belastung ermittelt werden und den zurückbleibenden Spannungen, nach vollständiger Entlastung, gegenübergestellt werden (siehe auch Abb. 57 auf Seite 71). Im Folgenden werden Spannungen an bestimmten Stellen im Spannungsfeld betrachtet, die für die Entstehung der drei vorherrschenden Rissysteme verantwortlich sind.

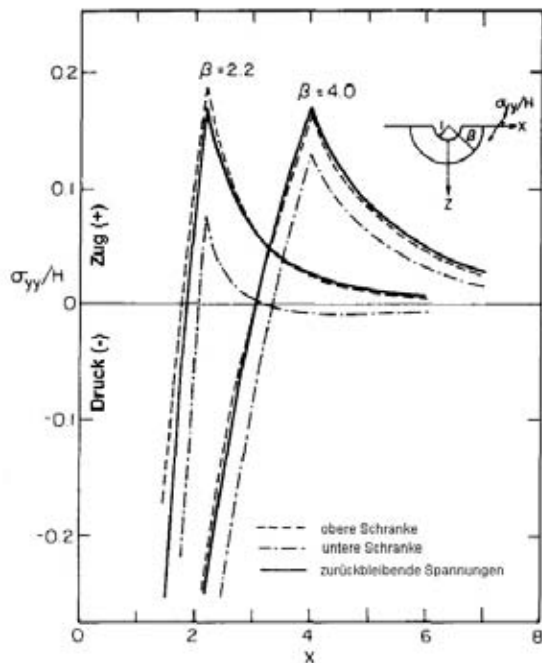


Abbildung 71: Tangentialspannung an der Oberfläche, die dem Radialriss-System zugeordnet werden kann, unter Maximalbeanspruchung für die obere und untere Schranke und für die zurückbleibenden Spannungen [12]

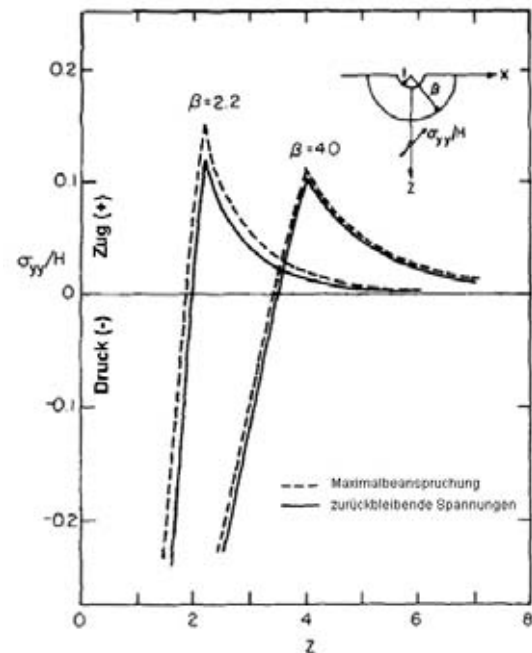


Abbildung 72: Tangentiale Spannungsverteilung, die dem Medianriss-System zugeordnet werden kann für Maximalbeanspruchung (obere Schranke) und zurückbleibende Spannungen [12]

(a) "Radialriss-System"

Die Radialrisse werden durch die σ_{yy} Spannungen in der Nähe der Oberfläche, an der elastisch/plastischen Grenzfläche bestimmt. Dementsprechend ist die Spannungsverteilung für die relativen Tangentialspannungen $\frac{\sigma_{yy}}{H}$ (H ist die Härte des Materials) in Abb. 71 auf Seite 115, für zwei unterschiedlich große relative plastische Bereiche β abgebildet. Die relative Größe der plastischen Zone ist als

$$\beta = \frac{b}{a} = \left(\frac{V}{\Delta V} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (402)$$

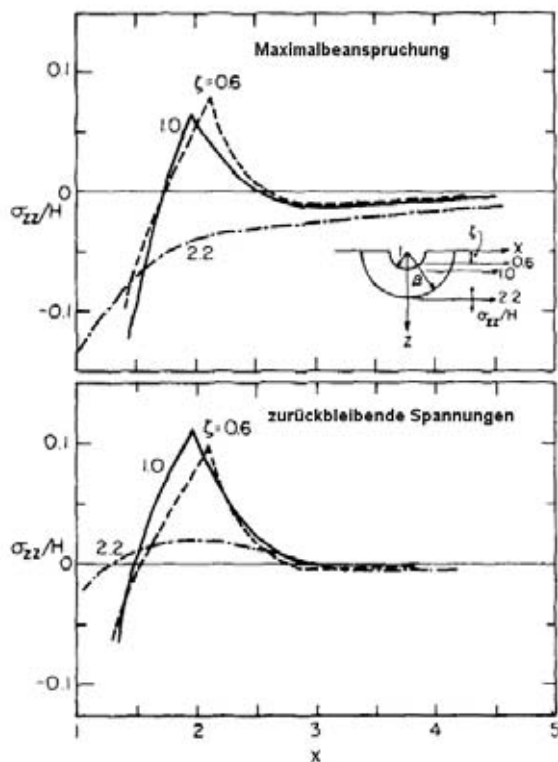
mit

- b ... Radius der halbkugelförmigen plastischen Zone
- a ... Radius des halbkugelförmigen Eindringbereiches
- V ... Volumen der plastischen Zone
- ΔV ... Eindringvolumen (Volumen des Materials, das durch den Eindringkörper, während des Eindringvorganges, verdrängt wird)

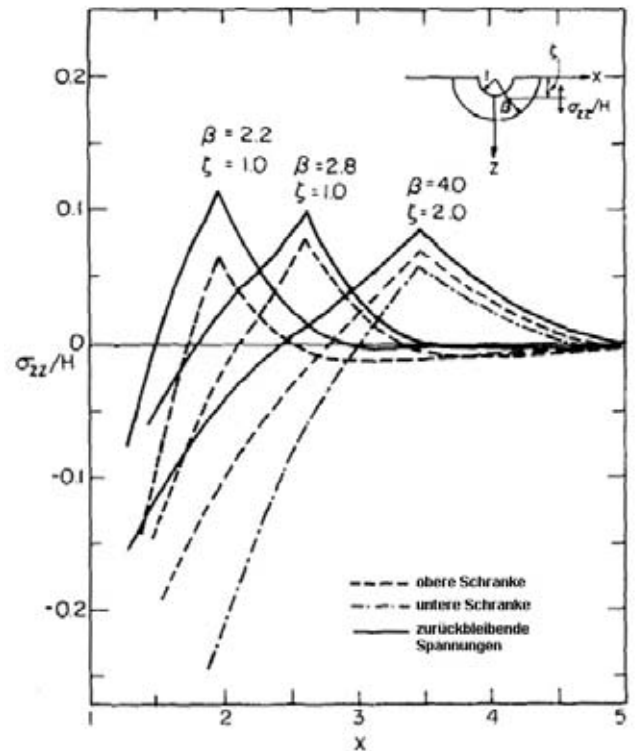
definiert. Für jede Größe des plastischen Bereichs sind drei Graphen zu erkennen, zwei davon stellen die Spannungen unter Vollast und den Rahmenbedingungen der oberen und der unteren Schranke dar, und der dritte Graph stellt die zurückbleibenden Spannungen nach vollständiger Entlastung dar. Die Spannungsspitzen im positiven Spannungsbereich (Zug) befinden sich, wie aus den Graphen hervorgeht alle an der elastisch/plastischen Grenzfläche. Es ist zu erkennen, dass die Spannungen der oberen Schranke und die zurückbleibenden Spannungen sehr eng beisammen liegen und dass die relativen Spannungen $\frac{\sigma_{yy}}{H}$ mit größer werdendem β abnehmen. Weiters ist aus Abb. 71 auf Seite 115 zu ersehen, dass das Ausmaß des Spannungsfeldes (Bereich in dem Spannungen im Material vorhanden sind), bei einer größeren relativen plastischen Zone β , größer ist, als dies bei einem kleineren plastischen Bereich der Fall ist.

(b) "Medianriss-System"

Medianrisse werden durch die σ_{yy} Spannungen in der Nähe des untersten Punktes der elastisch/plastischen Grenzfläche bestimmt. Wie in Abb. 72 auf Seite 115 zu sehen, ist der Verlauf der Graphen und somit der Spannungen ähnlich zu dem Verlauf der Spannungen, die für das "Radialriss-System" verantwortlich sind. Allerdings fällt auf, dass hier die Zugspannungen unter Höchstlast immer größer als die Restspannungen sind. Außerdem ist zu erkennen, dass die höchsten Werte für die Zugspannungen geringer sind als die entsprechenden Werte der Tangentialspannungen in der Nähe der Oberfläche (vergleiche Abb. 72 auf Seite 115 und Abb. 71 auf Seite 115).



(a) σ_{zz} Spannung in verschiedenen Tiefen



(b) Tendenz der σ_{zz} Spannung bei unterschiedlich großen plastischen Bereichen

Abbildung 73: Tendenzen und Entwicklung der σ_{zz} Spannung, verantwortlich für das Lateralriss-System [12]

(c) "Lateralriss-System"

Das "Lateralriss-System" wird durch die σ_{zz} Spannungen in der Nähe der elastisch/plastischen Grenzfläche bestimmt. In Abb. 73(a) auf Seite 116 sind die σ_{zz} Spannungen für unterschiedliche Tiefen ζ (vertikaler Abstand von der freien Oberfläche - siehe Abb. 73(a) auf Seite 116 oben), für den relativen plastischen Bereich von $\beta = 2, 2$, ausgewertet. Daraus ist zu erkennen, dass die maximalen Zugspannungen im Bereich von $\zeta \approx 1.0$ liegen, was $\sim \beta/2$ entspricht. Dies lässt den Schluss zu, dass in dieser Tiefe die ersten Lateralrisse entstehen. Die Entwicklung der Spannungen mit β sind in Abb. 73(b) auf Seite 116 zu erkennen, wobei wieder auffällt, dass die Zugspannungen mit größer werdendem plastischen Bereich abnehmen. Weiters ist anzumerken, dass die zurückbleibenden Spannungen größer sind als die Spannungen der oberen Schranke unter Höchstlast. Dies deutet darauf hin, dass die Zugspannungen bei Entlastung des Materials am größten sind und somit auch erst dann die Lateralrisse entstehen.

Ein weiterer wichtiger Schluss aus der Arbeit von Chiang et al. ist, dass die Radialrisse als erstes entstehen, was dadurch zu erklären ist, dass die Zugspannungen dort am höchsten sind (vergleiche Abb. 71 auf Seite 115 mit Abb. 72 auf Seite 115 und Abb. 73 auf Seite 116) und auch vermutet werden kann, dass in der Nähe der Oberfläche genügend Fehlstellen bzw. Anrisse für die Entstehung von Rissen vorhanden sind [13].

- Rissausbreitung/Risswachstum

Der Verlauf der Spannungen im "Fernfeld", welche die Rissausbreitung und das Risswachstum von den entstandenen Rissen beeinflusst, ist im Vergleich zu dem Verlauf der Spannungen im "Nahfeld" weit weniger umstritten. Sobald man sich nicht mehr in unmittelbarer Umgebung des Kontaktpunktes befindet, liegt ein elastisches Spannungsfeld vor.

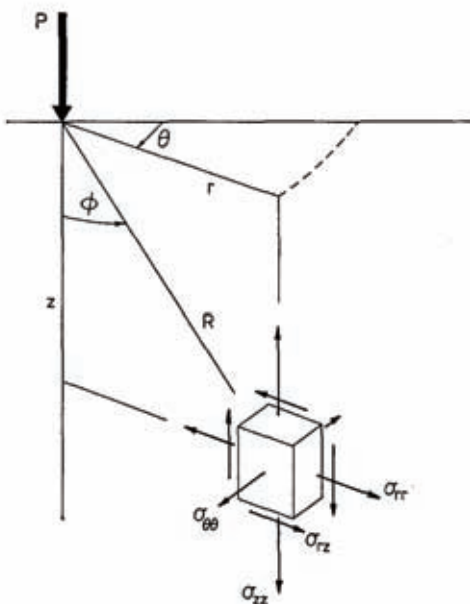


Abbildung 74: Koordinatensystem für achsensymmetrische Punktlasten [40]

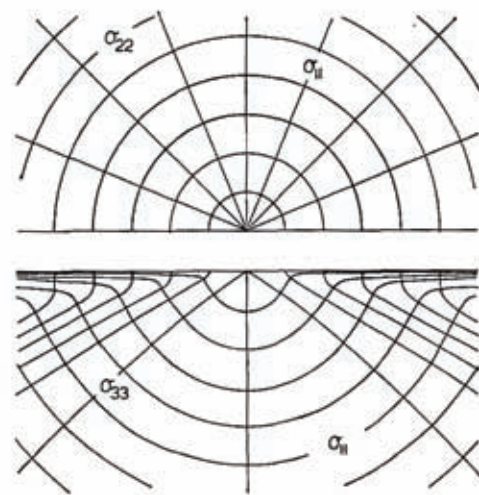


Abbildung 75: Halbe Draufsicht (oben) und Seitenansicht (unten) von den Spannungstrajektorien im Boussinesq-Feld, für $\nu = 0.25$ [40]

Die Gleichungen für die Komponenten der Spannungen in einem elastischen Halbraum, der durch eine Einzellast beansprucht wird (siehe Abb. 74 auf Seite 117), wurden erstmals von Boussinesq in 1885 [62] formuliert. Für ein isotropes Material, in einem gekrümmten Koordinatensystem (siehe Abb. 74 auf Seite 117; Darstellung in Zylinderkoordinaten), können diese Gleichungen in der allgemeinen Form

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{P}{\pi \cdot R^2} \right) \cdot f_{ij}(\phi) \cdot \nu \quad (403)$$

mit (siehe Abb. 74 auf Seite 117)

- P ... Eindringkraft
- R ... radialer Abstand von dem Kontaktpunkt
- $f_{ij}(\phi)$... Funktion in Abhängigkeit von ϕ
- ϕ ... Richtungswinkel von der Belastungsachse ausgehend
- ν ... Poisson-Zahl (Querdehnungszahl)

angegeben werden. Aus der Gleichung (403) ist ersichtlich, dass die Spannungen eine Singularität genau im Kontaktpunkt bei $R = 0$ aufweisen. Dies ist auch in Abb. 76 auf Seite 118 ersichtlich, da die elastische Spannungskomponente $\sigma_{\theta\theta}(z)$ für z gegen Null ins Unendliche geht. Somit ist das Spannungsfeld von Boussinesq nur bei entsprechender Entfernung ($R \gg a$) vom Kontaktpunkt anwendbar (St. Venantsches Prinzip).

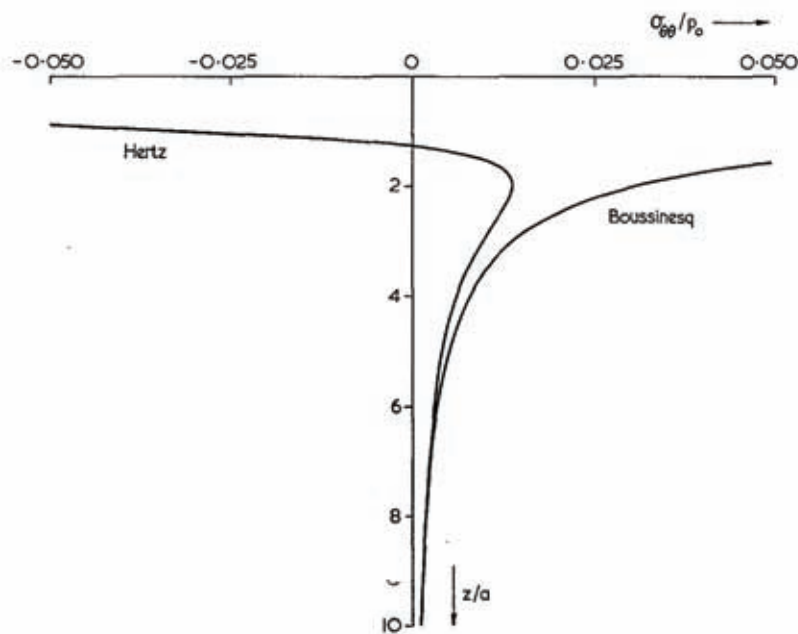


Abbildung 76: Vergleich der $\sigma_{\theta\theta}(z)$ Spannungskomponente des Spannungsfeldes von Boussinesq und Hertz [40]

Um die Spannungskomponenten aus der Gleichung (403) zu normieren, wird die idealisierte Betrachtung einer Einzellast, die genau in einem Punkt das Material belastet, ersetzt, indem eine Kontaktfläche mit der charakteristischen Länge a eingeführt wird. Dadurch lässt sich der mittlere Druck im Kontaktbereich durch

$$p_0 = \frac{P}{\alpha \cdot \pi \cdot a^2} \quad (404)$$

mit

- p_0 ... mittlere Druck
 P ... Belastung
 α ... dimensionslose Konstante (durch die Geometrie des Eindringkörpers bestimmt)
 a ... charakteristische Länge

anschreiben (vergleiche hierzu auch die Gleichungen (348) und (349) für den maximalen Druck). Formt man die Gleichung (404) nach der Eindringkraft P um und setzt das Ergebnis in die Gleichung (403) ein, so erhält man

$$\frac{\sigma_{ij}}{p_0} = \alpha \cdot \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot f_{ij}(\phi) \cdot \nu \quad (405)$$

für die normierten Spannungsparameter.

Ausgehend von den Gleichungen (403) bis (405) sind die relevanten Eigenschaften des Spannungsfeldes von Boussinesq in Abb. 75 auf Seite 117 und Abb. 77 auf Seite 119 für die Poisson-Zahl $\nu = 0.25$ abgebildet. In Abb. 75 auf Seite 117 sind die Spannungstrajektorien (Linien deren Tangenten in jedem Punkt die Richtung der Hauptspannungen anzeigen) für die drei Hauptspannungen zu erkennen, wobei die Spannungen $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \sigma_{33}$ beschriftet sind. In Abb. 77 auf Seite 119 sind für die drei Hauptnormalspannungen Linien mit gleichen Spannungen abgebildet, die die Verteilung der Hauptspannungen gut illustrieren. Sowohl σ_{11} als auch σ_{33} liegen in Symmetrieebenen welche durch die Belastungsachse gehen, wobei σ_{11} immer eine Zugspannung (positiv) und σ_{33} immer eine Druckspannung (negativ) ist. Die "Ringspannung" σ_{22} ist eine Zugspannung innerhalb eines kegelförmigen Bereichs, dessen halber Öffnungswinkel $\phi < 52^\circ$ beträgt. Außerhalb dieses Bereichs ist die Hauptspannung σ_{22} eine Druckspannung. Wie schon bereits erwähnt, ist der Verlauf der Hauptnormalspannungen in Abb. 77 auf Seite 119 für die Poisson-Zahl $\nu = 0.25$ zu erkennen. Dies ist wichtig anzumerken, da sich das Spannungsfeld mit unterschiedlichem ν ändert und somit eben genau die Poisson-Zahl einen wesentlichen Einfluss auf die maximalen Zugspannungen hat. Lawn and Swain [40] behaupten, dass sich Materialien von $\nu = 0.2$ bis $\nu = 0.5$ sehr spröde bis sehr plastisch verhalten, wobei die Zugspannungen bei $\nu = 0.5$ komplett verschwinden. Das bedeutet aber auch, dass der Wert $\nu = 0.25$ ein sprödes Material, wie zum Beispiel Fels, kennzeichnet.

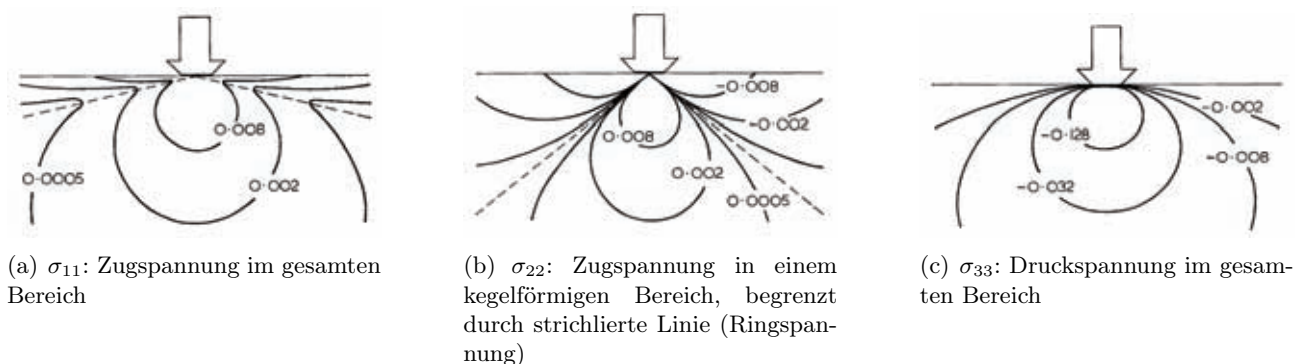


Abbildung 77: Spannungslinien von den drei, durch p_0 (siehe Gleichung (404)) normierten, Hauptnormalspannungen (+ Zug, - Druck) des Spannungsfeldes von Boussinesq für $\nu = 0.25$ [40]

Die strichlierten Linien in Abb. 77(a) auf Seite 119 kennzeichnen ein Minimum in der σ_{11} Spannungskomponente. In Abb. 77(b) auf Seite 119 geben die strichlierten Linien an, wo die Spannungskomponente σ_{22} den Wert Null annimmt. In beiden Fällen beschreiben diese strichlierten Linien einen Kegel mit den Öffnungswinkeln $\varphi \approx 153^\circ$ (Minimum bei σ_{11}) und

$\varphi \approx 102^\circ$ (Null bei σ_{22}) im dreidimensionalen Raum. Dies legt die Vermutung nahe, dass diese strichlierten Linien die Richtung von Kegelrissen angeben könnten. Da allerdings durch die von Chaudhri und Liangyi [9] durchgeführten Versuche einen eingeschlossenen Winkel von $118^\circ \lesssim \varphi \lesssim 136^\circ$ bei Hertzischen Kegelrissen belegen, trifft diese Vermutung nicht zu.

– *Modell und Theorie nach Lawn und Swain [40]*

Der oben beschriebene elastische Spannungszustand von Boussinesq dient Lawn und Swain als Grundlage für ihr Modell zur Berechnung von Risslängen. Dabei gehen Lawn und Swain davon aus, dass ein Riss, sobald er entstanden ist, sich im Wesentlichen entlang der Trajektorien kleiner Hauptnormalspannungen ausbreitet und gleichzeitig annähernd orthogonal zu der Hauptzugspannungskomponente verläuft. Daraus folgt, dass ein Riss, der direkt unter dem Eindringkörper entsteht, sich nach unten entlang der axialen σ_{33} Spannungstrajektorie (siehe Abb. 75 auf Seite 117), unter Beibehaltung der Orthogonalität zu den Zugspannungen σ_{11} und σ_{22} , ins Material ausbreiten wird. Der Riss wird sich auch nach außen in die σ_{11} Richtung ausbreiten, um orthogonal mit der σ_{22} Zugspannung zu bleiben, aber der Riss wird dann in seiner Seitenausdehnung durch die Druckspannungen des σ_{22} Spannungsfeldes bei einem Winkel von $\phi = 52^\circ$ behindert (siehe Abb. 77(b) auf Seite 119). Diese Vermutungen werden durch die Beobachtungen während Versuchen, die von Lawn und Swain durchgeführt wurden, bestätigt.

Um nun eine Gleichung für die Vorhersage der Risslänge dieser Medianrisse zu erlangen, gehen Lawn und Swain von bekannten Spannungsintensitätsfaktoren (siehe hierzu auch Anhang B.2 und Anhang B.3) aus. Im Speziellen handelt es sich dabei um den Spannungsintensitätsfaktor für einen ebenen kreisförmigen Riss (siehe auch [50]).

$$K = \frac{2^{1/2}}{\pi} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{c}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^c \frac{\sigma_{22}(z)}{(c^2 - z^2)^{1/2}} dz \right] \quad (406)$$

mit

- K ... Spannungsintensitätsfaktor [$N/m^{3/2}$]
- c ... Risslänge [m]
- σ_{22} ... Hauptnormalspannung [N/m^2]
- z ... Koordinate entlang der Belastungsachse (siehe Abb. 74 auf Seite 117) [m]

Aus der Lösung des Spannungsfeldes von Boussinesq (siehe hierzu auch [7]) hat man

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P}{\pi \cdot R^2} \cdot \left[\left(\frac{1 - 2 \cdot \nu}{2} \right) \cdot \left(\cos \phi - \frac{1}{2 \cdot \cos^2(\frac{\phi}{2})} \right) \right] \quad (407)$$

mit (siehe Abb. 74 auf Seite 117)

- $\sigma_{\theta\theta}$... Hauptspannung
- P ... Eindringkraft
- R ... radialer Abstand von dem Kontaktpunkt
- ν ... Poisson-Zahl (Querdehnungszahl)
- ϕ ... Richtungswinkel von der Belastungsachse ausgehend

gegeben, wodurch man in Gleichung (406) $\sigma_{22}(z)$ durch $\sigma_{\theta\theta}(z)$, unter der Voraussetzung $\phi = 0^\circ$ (in Kraftrichtung - siehe Abb. 74 auf Seite 117), wodurch dann $R = z$ wird, ersetzen kann.

$$\begin{aligned}\sigma_{22}(z) = \sigma_{\theta\theta}(z) &= \frac{P}{\pi \cdot z^2} \cdot \left[\left(\frac{1 - 2 \cdot \nu}{2} \right) \cdot \left(\cos(0^\circ) - \frac{1}{2 \cdot \cos^2(0^\circ)} \right) \right] \\ &= \frac{P}{\pi \cdot z^2} \cdot \left[\left(\frac{1 - 2 \cdot \nu}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \frac{P \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{\pi \cdot z^2 \cdot 2^2}\end{aligned}\quad (408)$$

Damit der Spannungsintensitätsfaktor K nicht unendlich wird, wurde von Lawn and Swain als Hilfsmittel eine Tiefe z_0 als untere Schranke für die Integration gewählt (siehe Abb. 78 auf Seite 121). Die Einführung dieser Tiefe z_0 berücksichtigt auch das bereits angesprochene Problem, dass das Spannungsfeld von Boussinesq nur in einer entsprechenden Entfernung vom Kontaktpunkt anwendbar ist (siehe Abb. 76 auf Seite 118). Außerdem kann dieser Parameter auch als eine charakteristische Größe für das Ausmaß des Deformationsbereichs (plastischer Bereich) angesehen werden. Durch diese Modifikationen wird die Gleichung (406) zu

$$K = \left(\frac{1 - 2 \cdot \nu}{2^{1/2} \cdot \pi^{5/2}} \right) \cdot P \cdot c^{1/2} \int_{z_0}^c \frac{1}{z^2 \cdot (c^2 - z^2)^{1/2}} dz. \quad (409)$$

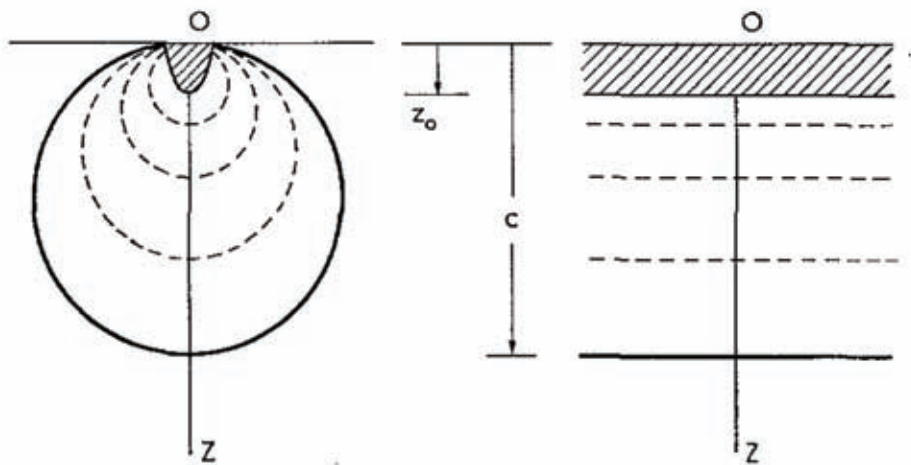


Abbildung 78: Bruchmechanisches Modell für die Rissausbreitung des Medianrisses [40]

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird nun nur das Integral aus der Gleichung (409) betrachtet und in den Grenzen von z_0 bis c integriert (die Integration wurde mit Hilfe der Mathematik-Software Maple durchgeführt):

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^c \frac{1}{z^2 \cdot (c^2 - z^2)^{1/2}} dz &= - \frac{(c^2 - z^2)^{1/2}}{c^2 \cdot z} \Big|_{z_0}^c \\ &= - \frac{(c^2 - c^2)^{1/2}}{c^2 \cdot c^2} - \left[- \frac{(c^2 - z_0^2)^{1/2}}{c^2 \cdot z_0^2} \right] \\ &= \frac{(c^2 - z_0^2)^{1/2}}{c^2 \cdot z_0^2}\end{aligned}\quad (410)$$

Bei den meisten spröden Materialien, so auch bei Fels, breitet sich der Medianriss verhältnismäßig weit unterhalb des deformierten Bereichs noch in das Material aus (siehe Abb. 78 auf Seite 121), so dass

$$(c^2 - z_0^2) \approx c^2 \quad \text{da} \quad c \gg z_0 \quad (411)$$

geschrieben werden kann, wodurch man das Ergebnis der Gleichung (410) weiter zu

$$\begin{aligned} \frac{(c^2 - z_0^2)^{1/2}}{c^2 \cdot z_0^2} &= \frac{\sqrt{c^2}}{c^2 \cdot z_0} \\ &= \frac{1}{c \cdot z_0} \end{aligned} \quad (412)$$

vereinfachen kann. Setzt man nun (412) statt dem Integral in Gleichung (409) ein, erhält man den Spannungsintensitätsfaktor K , der nun eine Funktion der Parameter ν (Poisson-Zahl), P (Eindringkraft), c (Risslänge) und z_0 (Größe des plastischen Bereiches) darstellt, zu

$$\begin{aligned} K &= \frac{(1 - 2 \cdot \nu) \cdot P \cdot c^{1/2}}{2^{1/2} \cdot \pi^{5/2} \cdot c \cdot z_0} \\ &= \frac{(1 - 2 \cdot \nu) \cdot P}{2^{1/2} \cdot \pi^{5/2} \cdot c^{1/2} \cdot z_0}. \end{aligned} \quad (413)$$

Bei diesem Modell von Lawn und Swain wird nun auch davon ausgegangen, dass es sich um keinen idealisierten Kontaktpunkt handelt, sondern, dass der Kontaktbereich des Eindringkörpers ungleich Null ist, so dass man für den mittleren Druck p_0 auf das Material folgende Bedingungen aufstellen kann (siehe Gleichung (404)):

$$p_0 = \frac{P}{\alpha \cdot \pi \cdot a^2} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{P}{\alpha \cdot \pi \cdot p_0}} \quad (414)$$

mit

P ... Eindringkraft

α ... dimensionslose Konstante (durch die Geometrie des Eindringkörpers bestimmt)

a ... charakteristische Größe der Kontaktzone des Eindringkörpers (siehe Abb. 64 auf Seite 101 und Abb. 67 auf Seite 111)

Außerdem gibt es, wie bereits erwähnt, in unmittelbarer Umgebung des Kontaktes, bedingt durch die dort auftretenden hohen Spannungen, einen irreversibel deformierten Bereich der ähnlich dem Kontaktbereich des Eindringkörpers ist. Daraus folgt dann mit Gleichung (414)

$$z_0 = \beta \cdot a = \frac{\beta \cdot P^{1/2}}{(\alpha \cdot \pi \cdot p_0)^{1/2}} \quad (415)$$

wobei β ein dimensionsloser Faktor ist, der die Geometrie des Bereichs bestimmt. Setzt man nun Gleichung (415) in Gleichung (413), dann erhält man

$$K = \left[\frac{(1 - 2 \cdot \nu) \cdot (\alpha \cdot p_0)^{1/2}}{2^{1/2} \cdot \pi^2 \cdot \beta} \right] \cdot \left(\frac{P}{c} \right)^{1/2} \quad (416)$$

Wenn man nun noch die *Rissausbreitungskraft* \mathcal{G} (siehe Anhang B.5 und im Speziellen Gleichung (504)), für den ebenen Verzerrungszustand durch

$$\mathcal{G} = \frac{(1 - \nu^2) \cdot K^2}{E} \quad (417)$$

ausdrückt ([42], [20]) und mit der Gleichung (416) kombiniert, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{(1 - \nu^2)}{E} \cdot \left\{ \left[\frac{(1 - 2 \cdot \nu) \cdot (\alpha \cdot p_0)^{1/2}}{2^{1/2} \cdot \pi^2 \cdot \beta} \right] \cdot \left(\frac{P}{c} \right)^{1/2} \right\}^2 \\ &= \left[\frac{(1 - \nu^2) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)^2 \cdot \alpha \cdot p_0}{2 \cdot \pi^4 \cdot \beta^2 \cdot E} \right] \cdot \frac{P}{c} \end{aligned} \quad (418)$$

Damit es zu einem Bruchvorgang kommen kann, muss soviel Energie zugeführt werden oder vorhanden sein, wie für den Rissfortschritt benötigt wird. Dieses Kriterium, basierend auf Energie, kann aber auch so interpretiert werden, dass die Rissausbreitungskraft \mathcal{G} gleich der Risswiderstandskraft \mathcal{G}_c sein muss, damit es zu einem Risswachstum kommt (siehe auch Anhang B.5)[20].

$$\boxed{\mathcal{G} = \mathcal{G}_c} \quad (419)$$

Durch das Griffithsche Bruchkriterium lässt sich die Risswiderstandskraft auch als

$$\mathcal{G}_c = 2 \cdot \gamma \quad (420)$$

anschreiben [20], wobei γ die spezifische Oberflächenenergie darstellt. Einsetzen der Gleichung (418) in Gleichung (420) ergibt

$$\left[\frac{(1 - \nu^2) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)^2 \cdot \alpha \cdot p_0}{2 \cdot \pi^4 \cdot \beta^2 \cdot E} \right] \cdot \frac{P}{c} = 2 \cdot \gamma. \quad (421)$$

Wodurch man schließlich durch Umformung die Gleichung

$$\frac{P}{c} = \frac{4 \cdot \pi^4 \cdot \beta^2 \cdot \gamma \cdot E}{(1 - \nu^2) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)^2 \cdot \alpha \cdot p_0} \quad (422)$$

erhält, durch die man die Risslänge im Voraus errechnen kann. Um diese Gleichung (422) auf ihre Anwendbarkeit zu prüfen, führten Lawn und Swain Versuche durch. Wegen der Möglichkeit den Versuch gut zu überwachen, wurde die Eindringung der Vickers-Prüfpyramide in Kalknatronglas ausgewählt, wodurch sich die folgenden Werte für die Gleichung (422) ergeben: $\alpha = 2/\pi$ (mit a als halbe Diagonale der Einkerbung - siehe dazu auch Gleichung (414) und Abb. 67 auf Seite 111), $\beta = 2$ (Verhältnis zwischen der Tiefe des Deformationsbereiches und der halben Diagonale der Einkerbung), $E = 7 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$, $\nu = 0.25$, $\gamma = 4 \text{ Jm}^{-2} \hat{=} 4 \text{ Nm}^{-1}$

(Messwert), $p_0 = 6.5 \times 10^9 Nm^{-2}$ (Messung im Kontaktbereich unter Belastung). Setzt man diese Werte in die Gleichung (422) ein, führt dies zu folgendem Ergebnis

$$\frac{P}{c} = 4.4 \times 10^5 Nm^{-1}. \quad (423)$$

Die durchgezogene Linie in Abb. 79 auf Seite 124 zeigt das Ergebnis der Gleichung (423) und somit die theoretisch ermittelte Risslänge. Die Punkte, die in dieser Abbildung zu erkennen sind, repräsentieren Datenpunkte aus direkten Beobachtungen der Risslänge während der Versuchsdurchführung an gut ausgebildeten Medianrissen. Es ist zu erkennen, dass die Risslänge proportional zur aufgebrachten Belastung wächst und gut mit den Versuchsergebnissen korreliert.

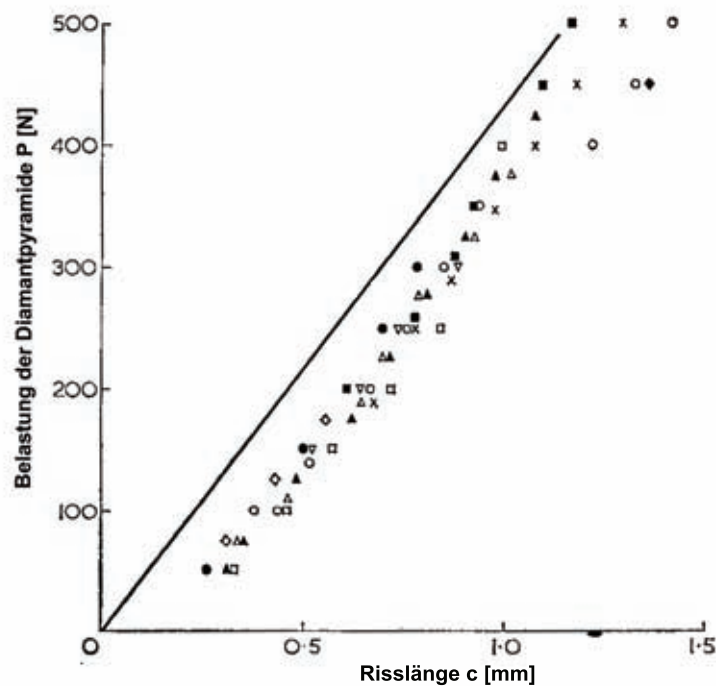


Abbildung 79: Theoretischer Ausdruck (durchgezogene Linie, Gleichung (422)) und Versuchsergebnisse (jedes Symbol repräsentiert einen anderen Riss) für Medianrisse während einer Härteprüfung nach Vickers[40]

Abschließend muss allerdings darauf hingewiesen werden, dass die von Lawn und Swain ermittelte Gleichung (422) nur für Medianrisse und nicht für Lateralrisse anwendbar ist. Somit ist es mit diesem Modell nicht möglich eine sinnvolle Vorhersage über den Löseprozess von Gestein durch Eindringkörper zu treffen, da ein wesentlicher Bestandteil, der für das Loslösen (vor allem durch Chipbildung durch an die Oberfläche führende Lateralrisse) von Gestein verantwortlich ist, nicht erfasst wird. Abgesehen davon wurde bei der Herleitung und bei der Überprüfung der Anwendbarkeit der Gleichung (422) von Lawn und Swain, nur von annähernd homogenen und isotropen Materialverhalten ausgegangen. Somit wäre beispielsweise durch Versuche noch zu klären, inwieweit diese Gleichung und somit die Prognose von Risslängen auch auf inhomogene und anisotrope Materialien (wie es auch Gestein ist) anwendbar ist.

– *Modell und Theorie nach Swain und Lawn [60] und Ergänzung sowie Erweiterung von Larson, Morrell und Mades [37]*

Ausgehend von der Beziehung

$$a = \frac{K_L \cdot F_v^2}{2 \cdot \Gamma \cdot E \cdot L^2} \quad (424)$$

mit

- a ... Risslänge
- K_L ... dimensionsloser Parameter (durch die Geometrie des scharfen Eindringkörpers bestimmt)
- F_v ... vertikale Eindringkraft
- Γ ... Bruchflächenenergie
- E ... Elastizitätsmodul
- L ... charakteristische Länge des Meißels

die von Swain und Lawn aus dem Energiesatz und dem Griffithschen Bruchkriterium abgeleitet wurde, entwickelten Larson, Morrell und Mades folgende Gleichung für die vertikale Eindringkraft, die notwendig ist einen bestehenden Riss auf eine gewisse Länge zu vergrößern:

$$F_v = \left(\frac{2 \cdot a \cdot \gamma \cdot E \cdot L^2 \cdot \pi \cdot \tan^2(\psi' + \tan^{-1} \mu)}{(1 - \nu^2)} \right)^{1/2} \quad (425)$$

mit

- F_v ... vertikale Eindringkraft
- a ... Risslänge
- γ ... spezifische Bruchflächenenergie
- E ... Elastizitätsmodul
- L ... charakteristische Länge des Meißels
- ψ' ... halber Öffnungswinkel des Eindringwerkzeuges
- μ ... Gleitreibungsbeiwert
- ν ... Poisson-Zahl

Im Folgenden wird versucht möglichst anschaulich (siehe zum Verständnis auch Anhang B.5) unter Verwendung beider Arbeiten die endgültige Gleichung (425), die eine Beziehung zwischen der vertikalen Eindringkraft und der Risslänge in Abhängigkeit von der Meißelgeometrie und den physikalischen Eigenschaften des Gesteins herstellt, herzuleiten. Wie bereits erwähnt, wurde von dem Energiesatz ausgegangen, den man für das ebene Problem zu

$$\frac{d\Pi}{da} + \frac{d\Gamma}{da} = 0 \quad (426)$$

mit

- $d\Pi$... freigesetzte Energie
- da ... Änderung der Risslänge
- $d\Gamma$... Änderung der Bruchenergie

anschreiben kann (siehe [20] [39]). Durch Einführung der *Energiefreisetzungsrates* \mathcal{G} ((strain) energy release rate)

$$\mathcal{G} = - \frac{d\Pi}{da} \quad (427)$$

kann man die Gleichung (426) auch in der Form von (419)

$$\boxed{\mathcal{G} = \mathcal{G}_c} \quad (428)$$

anschreiben. Diese Bedingung wird auch als Griffithsches Bruchkriterium bezeichnet und lässt sich in Worten so formulieren, dass bei Rissentstehung und bei quasistatischem Risswachstum die freigesetzte Energie gleich der für den Bruch notwendigen aufgewendeten Energie sein muss. Um die obenstehende Gleichung in der vorliegenden Form anzuschreiben wurde außerdem von der Bedingung

$$\mathcal{G}_c = 2 \cdot \gamma = \frac{d\Gamma}{da} \quad (429)$$

Gebrauch gemacht (siehe auch Gleichung (494) und Gleichung (514)). Bei einem ebenen Verzerrungszustand, wie er im gegebenen Fall vorliegt, wird die Energiefreisetzungsrates aus Gleichung (427) und (428) zu

$$\mathcal{G} = \frac{K_I^2 \cdot (1 - \nu^2)}{E}. \quad (430)$$

mit

- K_I ... Spannungsintensitätsfaktor (K-Faktor)
- ν ... Poisson-Zahl
- E ... Elastizitätsmodul

Da der Medianriss, der in dieser Versuchsdurchführung entsteht, hauptsächlich durch die aufweitende Wirkung des keilförmigen Meißels entsteht, ist vor allem die horizontale Kraftkomponente F_h der eigentlichen vertikal aufgebrachten Last F_v maßgebend für die Rissentstehung und Rissausbreitung. Um zu verstehen welche Kräfte auf den Meißel und das Gestein wirken, wird die Meißelgeometrie und die dadurch beeinflussten Kräfte im Folgenden analysiert, bevor mit der Herleitung der Gleichung (425) fortgefahren wird.

In Abb. 80 auf Seite 127 ist einer der maßgebenden Parameter der Meißelgeometrie der halbe Öffnungswinkel ψ' abgebildet. Die Geometrie wird außerdem noch durch die charakteristische Länge L des Meißels (Länge der Meißelschneide) bestimmt.

Die Kräfte, die auf den Meißel und über diesen dann auf das Material aufgebracht werden, müssen mit den Reaktionskräften des Materials im Gleichgewicht stehen. Für die Summe der Vertikalkräfte $\sum V$ muss somit gelten:

$$\sum V = 0 : \quad \frac{F_v}{2} - N_{Lv} - f_{Lv} = 0 \quad (431)$$

Unter Anwendung von Normalwinkeln und Berücksichtigung der Gleitreibung mit dem Gleitreibungsbeiwert μ wird diese Gleichung zu:

$$\frac{F_v}{2} - N_L \cdot \sin \psi' - f_L \cdot \cos \psi' = 0 \quad (432)$$

$$\frac{F_v}{2} - N_L \cdot \sin \psi' - \mu \cdot N_L \cdot \cos \psi' = 0 \quad (433)$$

$$\frac{F_v}{2} = N_L \cdot (\sin \psi' + \mu \cdot \cos \psi') \quad (434)$$

$$N_L = \frac{F_v}{2 \cdot (\sin \psi' + \mu \cdot \cos \psi')} \quad (435)$$

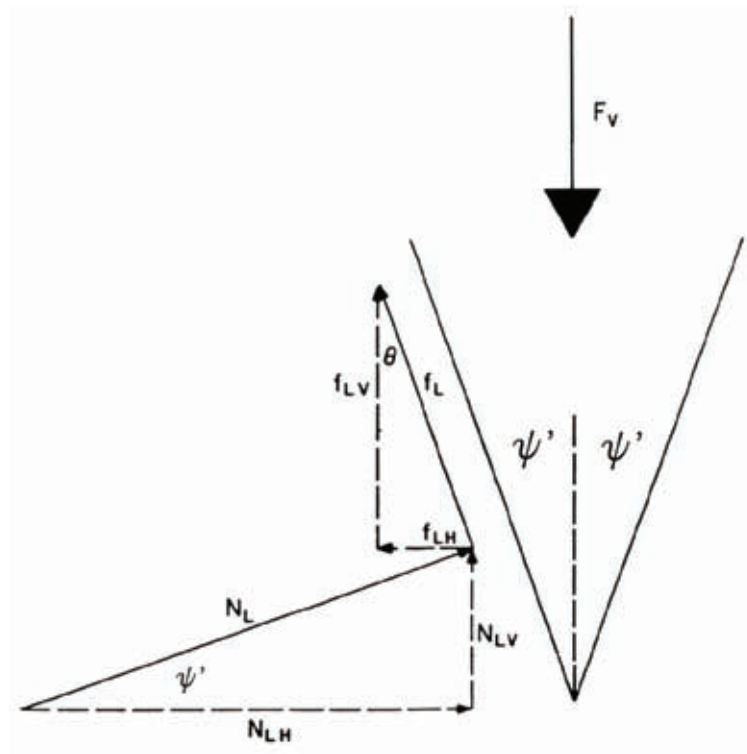


Abbildung 80: Analyse der wirkenden Kräfte [37].

Die gesamte aufgebrachte horizontale Kraft ergibt sich ebenfalls durch das Kräftegleichgewicht zu

$$F_h = N_{Lh} - f_{Lh}. \quad (436)$$

Dies kann man nun wieder umformen zu

$$F_h = N_L \cdot \cos \psi' - f_L \cdot \sin \psi', \quad (437)$$

$$F_h = N_L \cdot \cos \psi' - \mu \cdot N_L \cdot \sin \psi', \quad (438)$$

$$F_h = N_L \cdot (\cos \psi' - \mu \cdot \sin \psi'). \quad (439)$$

Substituiert man $N_L = \frac{F_v}{2 \cdot (\sin \psi' + \mu \cdot \cos \psi')}$ in dieser Gleichung, so erhält man

$$F_h = \frac{F_v \cdot (\cos \psi' - \mu \sin \psi')}{2 \cdot (\sin \psi' + \mu \cdot \cos \psi')} \quad (440)$$

$$= \frac{F_v \cdot \left(\frac{\cos \psi'}{\cos \psi'} - \frac{\mu \sin \psi'}{\cos \psi'} \right)}{2 \cdot \left(\frac{\sin \psi'}{\cos \psi'} + \frac{\mu \cdot \cos \psi'}{\cos \psi'} \right)} \quad (441)$$

$$= \frac{F_v \cdot (1 - \mu \cdot \tan \psi')}{2 \cdot (\tan \psi' + \mu)}. \quad (442)$$

$$(443)$$

Durch Anwendung von $\tan(\arctan \mu) = \mu$ lässt sich die letzte Gleichung als

$$F_h = \frac{F_v \cdot (1 - \tan \psi' \cdot \tan(\arctan \mu))}{2 \cdot (\tan \psi' + \tan(\arctan \mu))} \quad (444)$$

anschreiben. Unter Berücksichtigung der trigonometrischen Beziehung

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \quad (445)$$

lässt sich die Gleichung (444) wie folgt anschreiben:

$$F_h = \frac{F_v}{2 \tan(\psi' + \arctan \mu)} \quad (446)$$

Führt man nun noch den Parameter ψ mit

$$\psi = \psi' + \arctan \mu \quad (447)$$

ein, so erhält man schließlich für die horizontale Kraftkomponente, die vom Meißel auf das Material übertragen wird, folgende Gleichung:

$$F_h = \frac{F_v}{2 \tan \psi} \quad (448)$$

Da nun die Kraft F_h , die hauptverantwortlich für die Rissausbreitung ist, durch die vertikale Eindringkraft festgelegt ist, wird mit der Herleitung der Gleichung (425) fortgefahren, indem der Spannungsintensitätsfaktor K_I für die gegebene Risskonfiguration und Belastung aus der Literatur (z.B.: [50] [53] [20]) mit

$$K_I = \frac{2 \cdot P}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot b}} = \frac{2 \cdot P}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \frac{a}{2}}} \quad (449)$$

angeben wird. P stellt in dieser Gleichung eine an beiden Seiten des Risses punktförmige und orthogonal zu dem Riss angreifende Last dar (siehe Abb. 81 auf Seite 130). Die Länge b aus der Abbildung wird im vorliegenden Fall mit der halben Risslänge $a/2$ angenommen. Da der keilförmige Meißel eine bestimmte charakteristische Länge L normal zur Querschnittsfläche des Meißels besitzt, wirkt die vertikal aufgebrachte Last genau über diese Länge, so dass

sich $F_v = F_{v,L} \cdot L$ schreiben lässt. $F_{v,L}$ ist in diesem Fall eine Linienlast, pro Einheitslänge. Demzufolge entspricht die Last P aus Gleichung (449) der horizontalen Linienlast $F_{h,L}$

$$P = F_{h,L} = \frac{F_h}{L} \quad (450)$$

$$= \frac{F_v}{2 \cdot \tan \psi \cdot L} \quad (451)$$

Unter Berücksichtigung dieser Bedingungen, lässt sich die Energiefreisetzungsrate als

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \left(\frac{2 \cdot F_{h,L}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \frac{a}{2}}} \right)^2 \cdot \frac{(1 - \nu^2)}{E} \\ &= \left(\frac{2 \cdot F_v}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot 2 \cdot \tan \psi \cdot L}} \right)^2 \cdot \frac{(1 - \nu^2)}{E} \\ &= \frac{F_v^2 \cdot (1 - \nu^2)}{a \cdot \pi \cdot \tan^2 \psi \cdot L^2 \cdot E} \end{aligned} \quad (452)$$

anschreiben. Unter Anwendung des Griffithschen Bruchkriteriums und der Gleichungen (429) und (447) erhält man somit

$$\frac{F_v^2 \cdot (1 - \nu^2)}{2 \cdot a \cdot \pi \cdot E \cdot L^2 \cdot \tan^2(\psi' + \tan^{-1} \mu)} = \gamma \quad (453)$$

Nach Umformung dieser Gleichung ergibt sich das Verhältnis der vertikalen Eindringkraft F_v und der Risslänge zu

$$\frac{F_v^2}{a} = \frac{2 \cdot \gamma \cdot E \cdot \pi \cdot L^2 \cdot \tan^2(\psi' + \tan^{-1} \mu)}{(1 - \nu^2)} \quad (454)$$

woraus sich direkt die Gleichung (425)

$$F_v = \left(\frac{2 \cdot a \cdot \gamma \cdot E \cdot \pi \cdot L^2 \cdot \tan^2(\psi' + \tan^{-1} \mu)}{(1 - \nu^2)} \right)^{1/2}$$

mit

- F_v ... vertikale Eindringkraft
- a ... Risslänge
- γ ... spezifische Bruchflächenenergie
- E ... Elastizitätsmodul
- L ... charakteristische Länge des Meißels
- ψ' ... halber Öffnungswinkel des Eindringwerkzeuges
- μ ... Gleitreibungsbeiwert (wurde hier mit 0.6 angenommen)
- ν ... Poisson-Zahl

ableiten lässt. Es zeigt sich, dass diese Gleichung gut mit Versuchswerten übereinstimmt (siehe Unterabschnitt 7.3 „Experimentelle Untersuchungen von Rissen“ auf Seite 131 und im Speziellen Abb. 95 auf Seite 142) und sich so für die Vorhersage von Risslängen eignet. Allerdings

muss darauf hingewiesen werden, dass diese Gleichung von einem bestehendem Riss ausgeht und somit nicht für die Prognose für die Rissentstehung geeignet ist. Abgesehen von der guten Übereinstimmung, stellt sich auch die Frage, ob der verwendete Spannungsintensitätsfaktor für die Gegebenheiten optimal geeignet ist. Da im vorliegenden Fall davon ausgegangen wird, dass eine Einzelkraft genau in der Hälfte des bereits bestehenden Risses ($a/2$) angreift und so den Riss weiter öffnet (siehe Abb. 81 auf Seite 130). Es wäre nun zu hinterfragen, ob diese Kraft nicht etwas näher zur Oberfläche angreift oder überhaupt verteilt auf einen gewissen Abschnitt des Risses wirkt. Es ist zu vermuten, dass es hierbei vor allem auch darauf ankommt wie spitz das Eindringwerkzeug ist, da angenommen werden kann, dass ein spitzer Keil tiefer in den bereits entstehenden Riss eindringen kann und somit die wirkenden Kräfte bereits tiefer im Riss angreifen. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 82 auf Seite 130 zu sehen, wobei Abb. 82(a) auf Seite 130 die Entstehung des Risses aus dem Zertrümmungsbereich, unter der Wirkung von Zugspannungen, zeigt. In Abb. 82(b) auf Seite 130 wird gezeigt, dass der Riss durch die keilende Wirkung des spitzen Meißels ($\hat{=} F_{h,L}$ aus der Gleichung (451)) ausgeweitet wird. Außerdem wird auch gut gezeigt, dass die Kraft $F_{h,L}$ höchstwahrscheinlich, verteilt über den oberen Bereich des Risses, durch das Eindringen der Meißelspitze und des zertrümmerten Materials in den Riss, angreift.

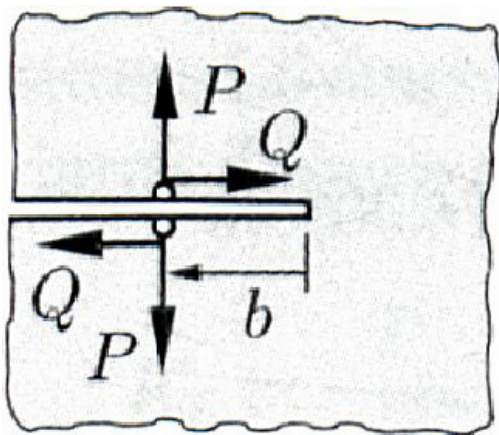


Abbildung 81: Spannungsintensitätsfaktor für einen außenliegenden Riss, der mit einer Last P orthogonal zur Rissrichtung beansprucht wird [20]

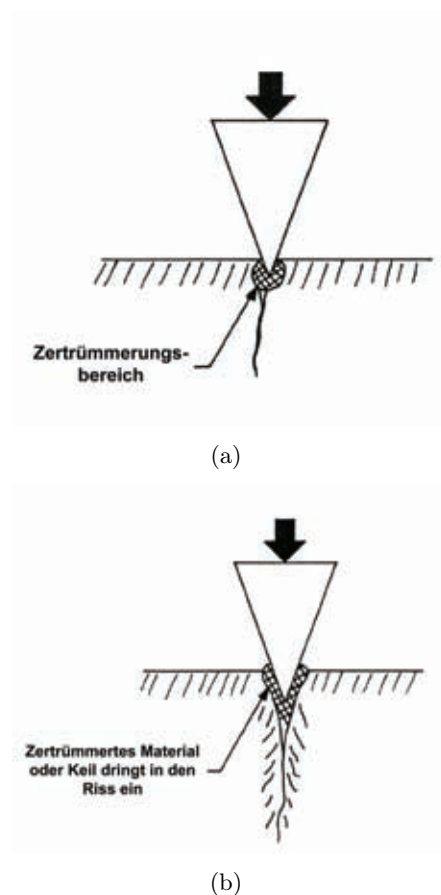


Abbildung 82: Rissentstehung und Rissausbreitung unter einem keilförmigen Eindringkörper [37]

7.3 Experimentelle Untersuchungen von Rissen

Im Folgenden werden zwei wissenschaftliche Arbeiten näher betrachtet, die experimentell die Rissentstehung und Rissausbreitung unter einem keilförmigen Eindringkörper mit zwei unterschiedlichen Methoden untersuchen. Das Ziel beider Arbeiten ist es, den Versagensmechanismus von Gestein unter einem Eindringkörper besser zu verstehen, um daraus dann Schlüsse für die Verbesserung und Vorhersage von Gesteinslösemethoden ziehen zu können.

- **Akustische Methode kombiniert mit Speckle-Interferometrie zur Untersuchung von Rissen [10]**

In Abb. 83 auf Seite 131 sieht man sowohl ein Foto, als auch eine schematische Darstellung von der für diese Arbeit speziell entwickelten Apparatur. Durch ein servo-hydraulisches System wird die Belastung über den Eindringkörper auf den Probekörper aufgebracht, wobei über einen horizontalen Rahmen ein seitlicher Druck σ_0 auf den Prüfkörper ausgeübt werden kann, der den insitu Spannungszustand der Probe simulieren soll. Zwei linear variable Differential-Transformatoren (LVDT) wurden auf beiden Seiten der Belastungsachse angebracht, um die normale Eindringtiefe auf beiden Seiten zu messen, um so eine eventuelle asymmetrische Belastungsaufbringung oder Rotation bewerten zu können. Der Versagensmechanismus und demzufolge die Rissbildung und Rissausbreitung wurde durch nicht zerstörende Untersuchungsmethoden, nämlich durch akustische Emissionsmessungen (AE) und durch eine elektronische Speckle-Interferometrie (ESPI), analysiert.

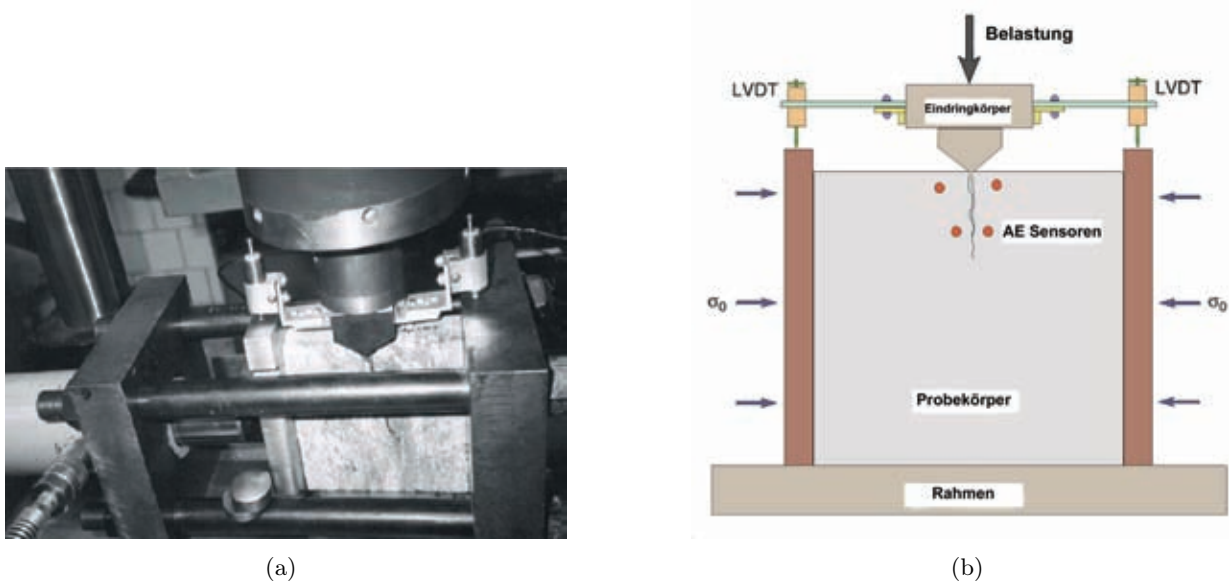


Abbildung 83: Apparatur für die Eindringversuche eines keilförmigen Eindringkörpers [10]

Die Versuchsreihen wurden an zwei unterschiedlichen Gesteinen, mit unterschiedlichen Winkeln des Eindringkeiles und mit unterschiedlichem seitlichen Druck durchgeführt. Es wurden Versuche an Granit, einem harten Gestein, als auch an Sandstein, einem mittelharten Gestein, durchgeführt (die physikalischen Eigenschaften dieser Gesteine sind in Tab. 5 auf Seite 132 angeführt).

Von den zu testenden Gesteinen wurden immer Probekörper mit der gleichen Abmessung ($150 \times 150 \times 40\text{mm}$) herausgearbeitet, um Größeneffekte zu vermeiden. Da das anisotrope Materialverhalten einen wesentlichen Einfluss auf das Eindringverhalten des Eindringkörpers, Rissbildung und -ausbreitung und das Versagen des Gesteins hat, muss es auf jeden Fall

Tabelle 5: Physikalische Eigenschaften der getesteten Gesteine

	$\sigma_c(MPa)$	$\sigma_t(MPa)$	E(GPa)	ν	$v_p(\text{km/s})$	$K_{Ic}(M\text{pam}^{1/2})$
Granit	210	13	68	0.22	5.4	1.8
Sandstein	50	5	14	0.32	2.5	0.3

berücksichtigt werden. Deshalb wurden die Probekörper so ausgerichtet, dass die Belastung durch den Eindringkörper orthogonal zu der Richtung mit der höchsten P-Wellen Geschwindigkeit erfolgte (P-Wellen sind Primärwellen oder Kompressionswellen, deren Geschwindigkeit von der Dichte und dem Kompressionsmodul des Materials abhängig ist). Da die Geschwindigkeit der P-Wellen Rückschlüsse auf die unterschiedlichen Richtungen der Anisotropie gibt, konnten alle Probekörper gleich ausgerichtet werden.

Um eventuell auftretende Reibung zwischen Probestück und Einspannrahmen zu reduzieren, wurde die Probe an den Seiten und an der Unterseite eingölt. Ebenfalls eingölt wurde der keilförmige Eindringkörper, so dass auch die Reibung zwischen Werkzeug- und Gesteinsoberfläche reduziert wurde. Der Eindringkeil, dessen eingeschlossener Winkel zwischen 60° , 90° , 120° und 150° ($\beta = 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ und 15° ; siehe auch Abb. 58 auf Seite 73) variiert wurde, kann als starr angenommen werden.

Neben den durchgeführten Versuchen wurden auch noch Hilfstests durchgeführt, wie etwa ein einaxialer, biaxialer und triaxialer Druckversuch, so wie ein Härtetest um alle physikalischen Werkstoffeigenschaften (Einaxialdruckfestigkeit σ_c , Reibungswinkel ϕ , Dilatationswinkel ψ , Elastizitätsmodul E , Querdehnzahl ν und die Bruchzähigkeit K_{Ic}) zu erhalten.

– *Versagensprozess während des Eindringvorganges*

Wie bereits erwähnt, wurde der Versagensprozess während der Versuchsdurchführung durch nicht zerstörende Untersuchungsmethoden analysiert. Durch die elektronische Speckle-Interferometrie (ESPI) ist es möglich, die Verformungen von der Oberfläche in einer sehr hohen Auflösung zu beobachten. In Abb. 84 auf Seite 133 ist ein Bild der ESPI zu sehen, das einen Probekörper aus Sandstein, der durch einen Keil mit einem Öffnungswinkel von 120° und 87% der Maximalbelastung belastet wird, zeigt. Es ist die Ausbildung einer Zerstörungszone ($\hat{=}$ *plastischer Bereich*) zu erkennen, die mit dem theoretisch errechneten elastisch-plastischen Radius r_*^t von 10mm gut übereinstimmt. In Abb. 85 auf Seite 133 ist die Auswertung einer akkustischen Emmissionsmessung, die während eines Eindringversuches mit einem keilförmigen Werkzeug mit einem Öffnungswinkel von 60° in Sandstein gemacht wurde, zu sehen. Auch diese Abbildung untermauert durch eine Gruppierung von mikroseismischen Aktivitäten, genauso wie das Bild der ESPI, das cavity expansion model ("Hohlraum aufweitung-Modell"). Die Anordnung und Lage der ersten 40 akkustischen Emmisionen (AE) deuten auf einen plastischen Bereich in der Größenordnung von wiederum 10mm hin. Durch die letzten 40 akkustischen Emmisionen lässt sich die Bildung und das Wachstum eines Risses verfolgen, der in diesem Fall ausnahmsweise von der Vertikalen abweicht. Dies kann durch eine asymmetrische Belastungsaufbringung oder durch eine Asymmetrie der Probe erklärt werden. Von dieser Probe abgesehen, konnte bei allen Versuchen ein vertikaler Verlauf der Risse beobachtet werden.

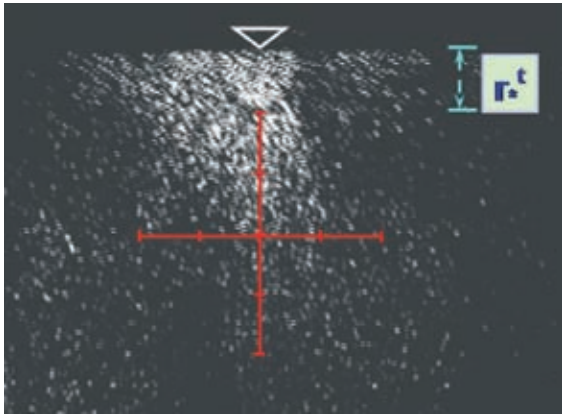


Abbildung 84: ESPI Bild von einer Sandsteinprobe, die durch einen Eindringkeil mit einem Öffnungswinkel von 120° und 87% der Maximallast bei einer Seitenspannung von 3 MPa belastet wird (jede Unterteilung entspricht 10mm). [10]

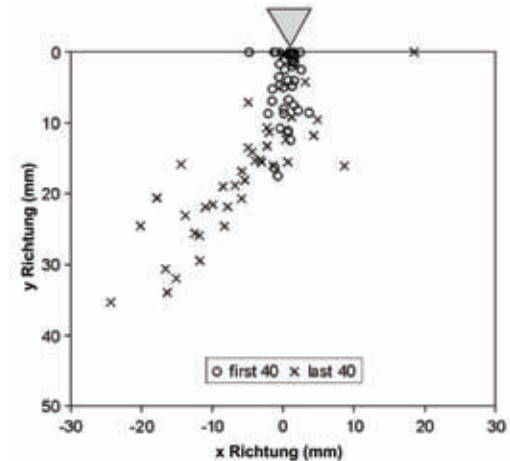


Abbildung 85: Ort der ersten 40 AE und der letzten 40 AE bei einem Sandstein-Probekörper, der durch einen Eindringkeil mit einem Öffnungswinkel von 60° ohne seitliche Belastung beansprucht wird [10]

– Einfluss des Öffnungswinkels auf den Eindringvorgang

Um die Auswirkungen von unterschiedlichen Öffnungswinkeln des Eindringkeiles auf den Eindringvorgang zu untersuchen, wurden Versuche mit scharfen (Öffnungswinkel= 60°) und stumpfen (Öffnungswinkel $\geq 90^\circ$) keilförmigen Eindringwerkzeugen durchgeführt. Um den Einfluss beurteilen zu können, wurde der normierte Druck während des Eindringvorganges (p/σ_c) in Abhängigkeit von dem Winkel β (Öffnungswinkel= $180^\circ - 2 \cdot \beta$; siehe Abb. 58 auf Seite 73) in einem Diagramm eingezeichnet (siehe Abb. 86 auf Seite 134). Die Kurven sind die Ergebnisse aus der analytischen Gleichung (292) (Gleichung erhalten durch das cavity expansion model siehe Unterabschnitt 7.1 „Cavity expansion model - Hohlräume aufweitung Modell“ auf Seite 72), die anderen Markierungen bezeichnen Resultate aus Versuchsdurchführungen. Sowohl für die Versuchsergebnisse als auch für die theoretisch ermittelten Werte ist die Tendenz des zunehmendem Druckes mit größer werdendem Winkel β eindeutig zu erkennen. Dies ist gleichbedeutend damit, dass bei spitzeren Eindringwerkzeugen der Druck während des Eindringvorganges steigt. Außerdem ist in Abb. 86 auf Seite 134 auch die gute Übereinstimmung, vor allem bei stumpfen keilförmigen Werkzeugen, zwischen theoretischen Werten und Werten aus den Versuchen ersichtlich. Bei spitzen Eindringkörpern liefert das cavity expansion model nicht so akkurate Werte, da es bei einer solchen Geometrie vorkommt, dass die Spitze des Werkzeuges über den Kernbereich bis in die plastische Zone reicht, was nicht mit dem Modell vereinbar ist.

Abgesehen von der Abhängigkeit des Druckes ($\frac{p}{\sigma_c}$) von dem Winkel β gibt es genauso eine Abhängigkeit des normierten Radius der elastisch-plastischen Grenze ξ_* von dieser Geometrie. Da an dieser Grenze die maximalen Zugspannungen auftreten und somit hier auch die Rissentstehung stattfindet, ist es von großer Bedeutung, dass eine Vergrößerung des Radius ξ_* mit abnehmendem Winkel β während der Versuche beobachtet werden konnte, die auch mit den theoretischen Werten in Einklang gebracht werden konnten. Allerdings muss darauf hingewiesen werden, dass dies nicht automatisch bedeutet, dass sich der physische Radius r_* ($= a \cdot \xi_*$; siehe Abb. 58 auf Seite 73) ebenfalls so verhält, da bei einem scharfen Eindringkörper (großer Winkel β) auch die Kontaktfläche mit dem charakteristischen Wert a (siehe Abb. 58 auf Seite 73) kleiner wird.

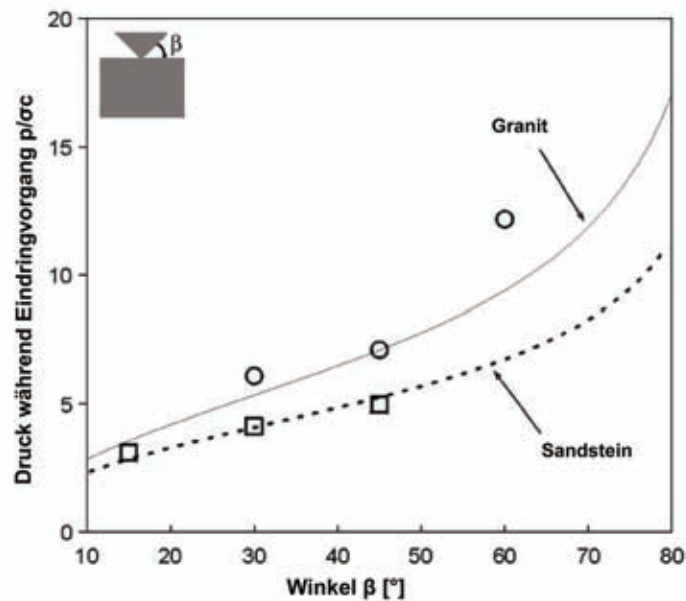
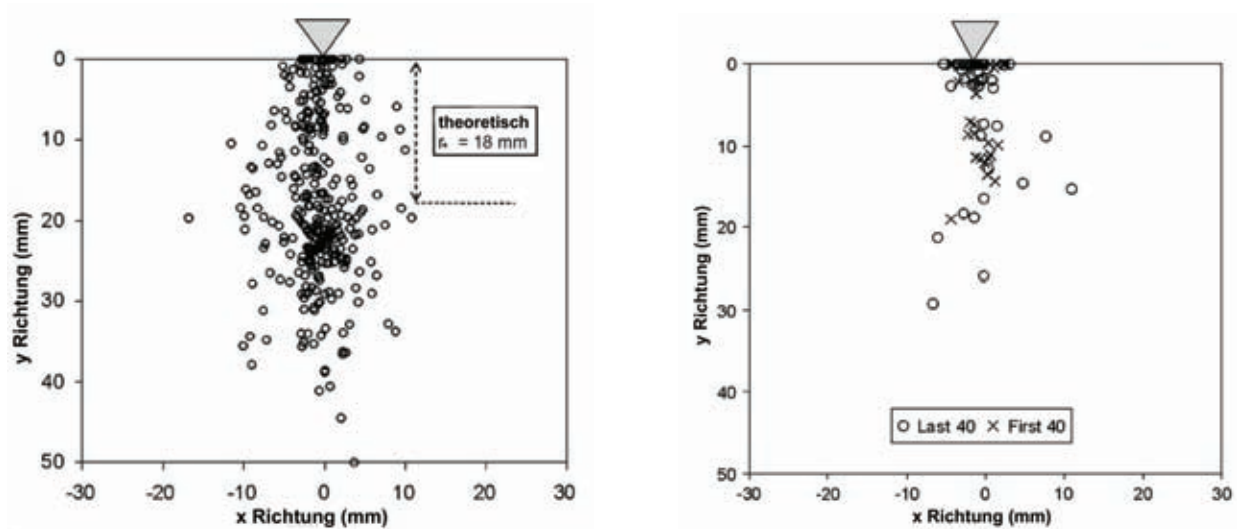


Abbildung 86: Normierter Druck p/σ_c während des Eindringvorganges in Abhängigkeit von dem Winkel β (Kurve=analytische Lösung; Kreise/Quadrate=Versuchsergebnisse) [10]

In Abb. 87 auf Seite 135 sind die akustischen Emissionen eines Eindringversuches in Granit einmal mit einem stumpfen Eindringwerkzeug (Öffnungswinkel beträgt 150°) und einmal mit einem spitzeren Eindringwerkzeug (Öffnungswinkel beträgt 90°) zu sehen. Aus der Häufung der AE in einem Bereich von 20mm unterhalb der Gesteinsoberfläche (siehe Abb. 87(a) auf Seite 135), lässt sich der elastisch-plastische Radius r_* , für den Versuch mit dem stumpfen Eindringkörper, auf eben diese 20mm abschätzen. Dies stimmt wiederum gut mit dem theoretisch bestimmten Wert von 18mm überein. Die theoretischen Werte für den elastisch-plastischen Radius r_* können mit Hilfe des cavity expansion model ermittelt werden. Dies erfolgt, indem zuerst der normierte elastisch-plastische Radius ξ_* durch die Gleichung (289) berechnet wird und anschließend in die Bedingung $r_* = a \cdot \xi_*$ eingesetzt wird. Bei dem Eindringversuch in Granit mit einem spitzeren keilförmigen Werkzeug (Öffnungswinkel von 90°) ist in Abb. 87(b) auf Seite 135 zu erkennen, dass der elastisch-plastische Radius etwas kleiner ist als bei dem stumpfen Eindringwerkzeug, was wiederum mit dem theoretisch ermittelten Wert von 15mm übereinstimmt. Somit kann bei einem Vergleich von Abb. 87(a) auf Seite 135 mit Abb. 87(b) auf Seite 135 der Schluss gezogen werden, dass sich bei einem größeren Öffnungswinkel die mikroseismischen Aktivitäten auf einen tieferen und breiteren Bereich erstrecken, als dies bei kleineren Öffnungswinkeln der Fall ist.



(a) Auswertung von akustischen Emissionsmessungen, während eines Eindringversuches in einen Probekörper aus Granit mit einem Keil, dessen Öffnungswinkel 150° beträgt.

(b) Auswertung von akustischen Emissionsmessungen, während eines Eindringversuches in einen Probekörper aus Granit mit einem Keil, dessen Öffnungswinkel 90° beträgt.

Abbildung 87: Auswertung von akustischen Emissionsmessungen [10]

– Einfluss der Materialeigenschaften auf den Eindringvorgang

Wenn alle physikalischen Materialeigenschaften ($G, \nu, \varphi, \psi, \sigma_c, \sigma_t, K_{Ic}$) bekannt sind und auch die Geometrie des Werkzeuges (β) festgelegt wurde, können aus Eindringversuchen Daten gewonnen werden ($a, d_*, \frac{P}{\sigma_c}$), so dass es möglich ist, entweder durch die Häufung von akustischen Emissionen oder durch die elektronische Speckle Interferometrie, den für die Rissbildung entscheidenden Parameter ξ_* zu erhalten. Außerdem ist es auch durch die Gleichungen des cavity expansion model (218) bis (289) möglich durch Rückrechnung ebenfalls ξ_* zu bestimmen.

Wenn man die Belastung gegen die Eindringtiefe sowohl für Sandstein als auch für Granit in einem Diagramm aufträgt, zeigt sich, dass die Beanspruchung und somit auch der Druck während des Eindringvorganges bei Granit, bei gleicher Eindringtiefe, viel höher ist als bei Sandstein (siehe Abb. 88 auf Seite 136). Dies war, durch die vielfach höhere Festigkeit von Granit gegenüber Sandstein, bereits im Vorhinein zu vermuten. Weiters zeigt sich durch die Auswertung von akustischen Emissionen (siehe hierzu Abb. 85 auf Seite 133 und Abb. 87 auf Seite 135), dass bei harten Gesteinen (Granit) die elastisch-plastische Grenze (r_*) um einiges tiefer unter der Gesteinsoberfläche liegt, als bei mittelharten Gesteinen (Sandstein).

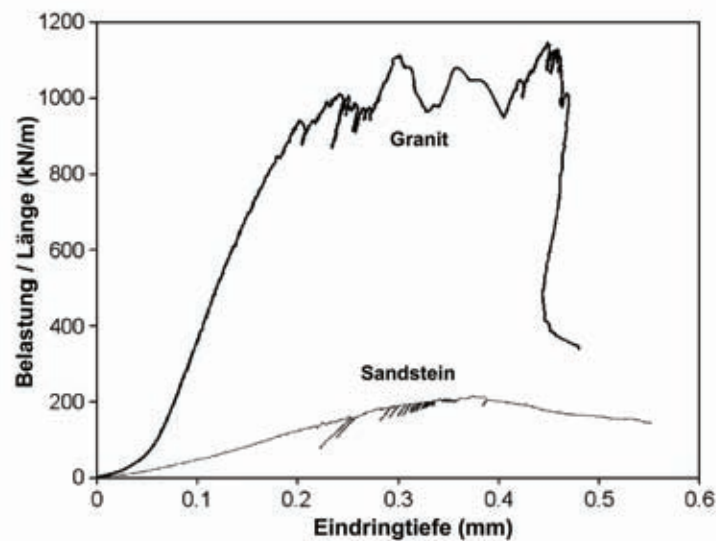


Abbildung 88: Belastung in Abhängigkeit von der Eindringtiefe, für Sandstein und Granit, die beide mit einem keilförmigen Eindringwerkzeug, dessen Öffnungswinkel 120° beträgt, belastet werden (ohne seitliche Druckbeanspruchung) [10]

– ***Einfluss der seitlichen Druckspannung auf den Eindringvorgang***

Bei allen Versuchen mit symmetrischer Lastaufbringung ohne seitliche Druckspannung konnte die Vergrößerung des plastischen Bereiches und die Ausbildung eines vertikalen Risses in Folge von Zugspannungen beobachtet werden. Um die Auswirkungen der seitlichen Druckspannung zu analysieren, wurden Versuche sowohl an Granit als auch an Sandstein mit seitlichen Drücken von 6 und 20 MPa durchgeführt. Es konnte beobachtet werden, dass ab einer gewissen seitlichen Druckspannung, die Entstehung des Vertikalrisses (sprödes Versagen) unterdrückt wurde und es nur zu einem duktilen Versagen (Ausbildung des plastischen Bereiches) des Gesteins kam. Somit konnte bestätigt werden, dass die Art des Versagens (duktilen oder sprödes Versagen) von dem Verhältnis σ_0/σ_c abhängt.

• **Untersuchung der Rissausbreitung durch Messung von elektrischen Widerständen [37]**

Bei der Arbeit von Larson et al. [37] wird zwecks Vereinfachung ein zweidimensionaler ebener Spannungszustand angenommen und die Versuche auf eine einzige Geometrie des Meißels und ein bestimmtes Gestein eingeschränkt. Allerdings werden drei unterschiedliche Versuchsdurchführungen vorgenommen, die im weiteren Verlauf noch näher behandelt werden.

– ***Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung***

Das Kernstück des Versuchsaufbaues ist eine hydraulische Druckfestigkeitsprüfmaschine (siehe Abb. 89 auf Seite 137), die die nötige Kraft erzeugt, um den Meißel in das Gestein einzutreiben. Um diese Maschine herum wurde der gesamte Versuch aufgebaut, wie es in Abb. 91 auf Seite 138 zu erkennen ist. Der Meißel, der in diesen Versuchen zum Einsatz kam (siehe Abb. 90 auf Seite 137), wurde aus wärmebehandeltem Stahl mit einem Öffnungswinkel von 40° hergestellt und kann somit zu den scharfen Eindringkörpern gezählt werden. An der Platte, an der der Meißel befestigt wird, werden, wie in Abb. 90 auf Seite 137 ersichtlich, auch vier Kraftaufnehmer angebracht. Diese Kraftaufnehmer wurden dann so miteinander verbunden, dass sowohl vertikale als auch horizontale Kräfte gemessen werden konnten. Abgesehen von der aufgewendeten Kraft wurde auch die Verschiebung des Eindringkeiles über einen optischen Encoder gemessen und so wie alle

anderen Daten an ein Oszilloskop geleitet, wo sie überwacht, gespeichert und gegebenenfalls auch ausgeplottet werden konnten (siehe hierzu auch Abb. 91 auf Seite 138).

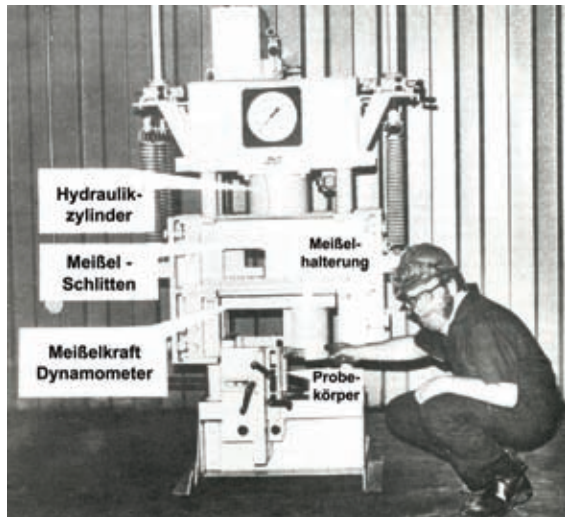


Abbildung 89: Hydraulische Druckfestigkeitsprüfmaschine [37]

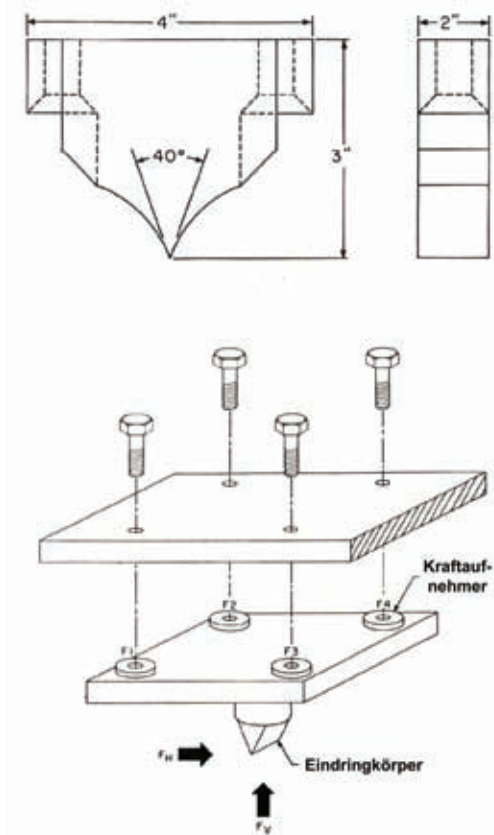


Abbildung 90: Meißelgeometrie, Befestigung des Meißelkörpers und Anordnung der Kraftaufnehmer. [37]

Die Messstelle, die es ermöglichte das Risswachstum zu überwachen, ist in Abb. 92 auf Seite 139 zu sehen und besteht unter anderem aus mehreren parallelen Streifen aus Kolloidgraphit, welches an den Probekörper gestrichen wurde. Es wurde ein Kolloidgraphit auf Wasserbasis ausgewählt, welches nach dem Auftragen auf den Prüfkörper und anschließendem Trocknen sehr spröde wurde. Dadurch war gewährleistet, dass bei Risswachstum die Graphitstreifen sofort brechen und somit eine akkurate Messung der Rissausbreitung gegeben war. Die Graphitstreifen wurden mit einem Silberanstrich an der Seite verbunden und über einen flexiblen Kontakt, ebenfalls aus Silber, an die elektrischen Hauptkabeln angeschlossen. Nach Aufbringung einer Spannung fungierte das Kolloidgraphit als elektrischer Widerstand, wobei jedem Streifen ein bestimmter Widerstand zugeordnet werden konnte. Durch Zerstörung dieser Graphitstreifen bei Risswachstum, konnte eine Widerstandsänderung proportional zur Risslänge aufgezeichnet werden. Somit war es möglich die Rissausbreitung in Stufen von 0.05 Inch ($\hat{=}0.13\text{cm}$) und bis zu einer Länge von 6 Inch (entspricht ungefähr 15cm) zu überwachen und aufzuzeichnen. Natürlich muss an dieser Stelle auch darauf hingewiesen werden, dass eine genaue Messung der Risslänge nur dann möglich ist, wenn der Riss orthogonal zu den Graphitstreifen erfolgt, da sonst die Risslänge unterschätzt wird. Dies kann natürlich nicht immer gegeben sein, wodurch eine tendentielle Unterschätzung der Risslänge erwartet werden kann.

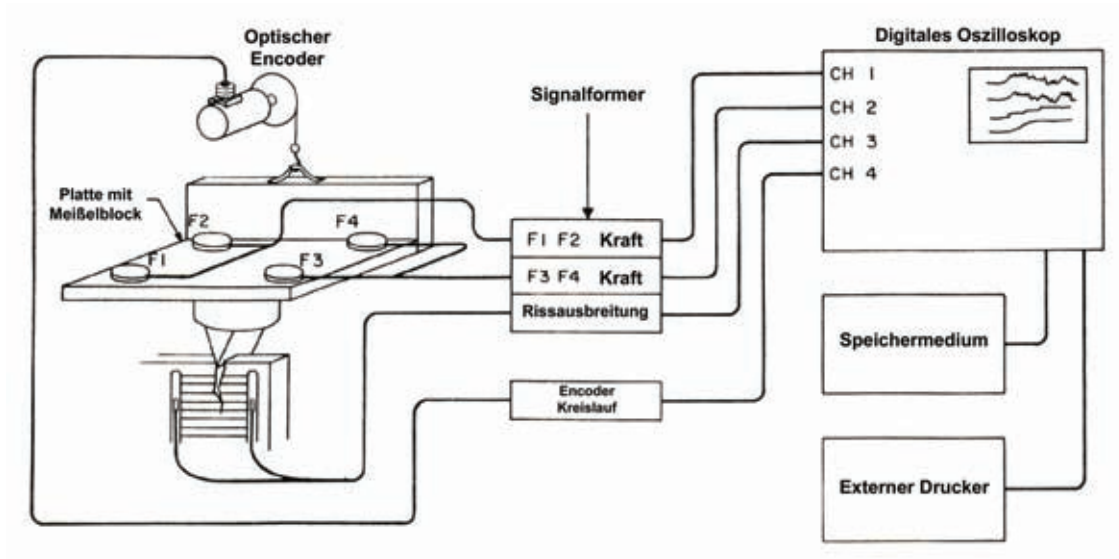


Abbildung 91: Schematischer Versuchsaufbau der eingesetzten Gerätschaft [37]

Das Gestein, das getestet wurde, war ein feinkörniger Dolomit, der durch seine chemische Zusammensetzung und die feine Kornstruktur sehr spröde ist. Der Fels wurde für die Versuche in Platten, mit den Abmessungen $6 \times 6 \times 1 \text{ Inch}$ (entspricht ungefähr $15 \times 15 \times 2.5 \text{ cm}$) geschnitten. In Tab. 6 auf Seite 138 sind die Werte für die physikalischen Eigenschaften (Druckfestigkeit σ_c ; Zugfestigkeit σ_t ; E-Modul E; Poisson-Zahl ν , Bruchflächenenergie Γ) des getesteten Dolomits angegeben.

Tabelle 6: Physikalische Eigenschaften der getesteten Gesteine

Dolomit	σ_c	σ_t	E(GPa)	ν	Γ
Angloamerikanisches Maßsystem	(lbf/in ²)	(lbf/in ²)	(lbf/in ²)	dimensionslos	(in · lbf/in ²)
	27 230	793	$5.7 \cdot 10^6$	0.20	0.25
SI-Einheitensystem	(MPa)	(MPa)	(GPa)	dimensionslos	(Pa·m)
	187.74	5.47	39.30	0.20	43.76

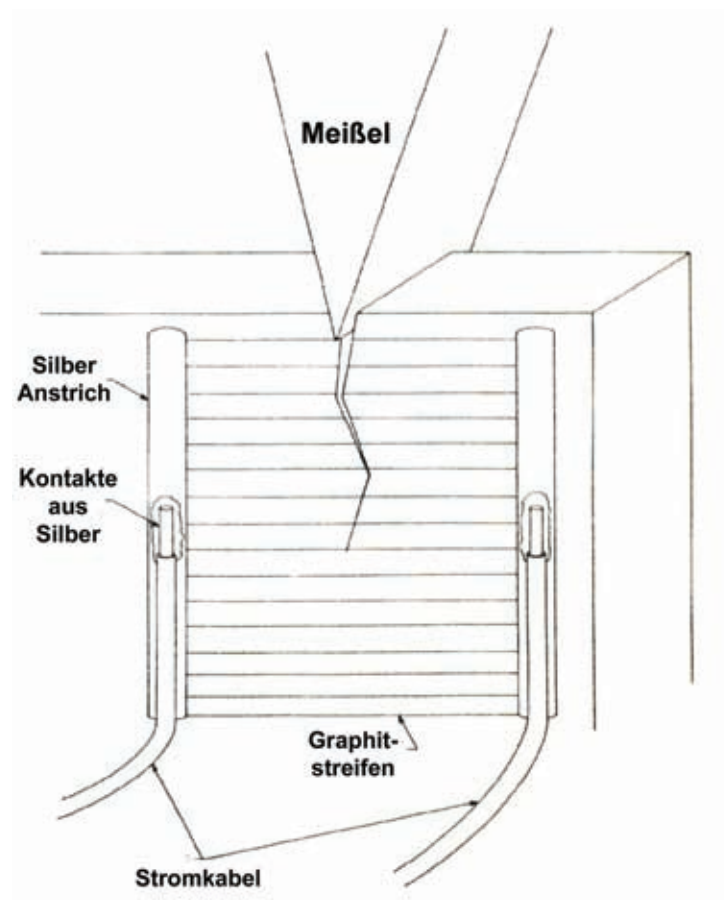


Abbildung 92: Messeinheit für das Risswachstum [37]

es zu einer abrupten Entlastung des Eindringwerkzeuges kam (siehe hierzu Abb. 94 auf Seite 141).

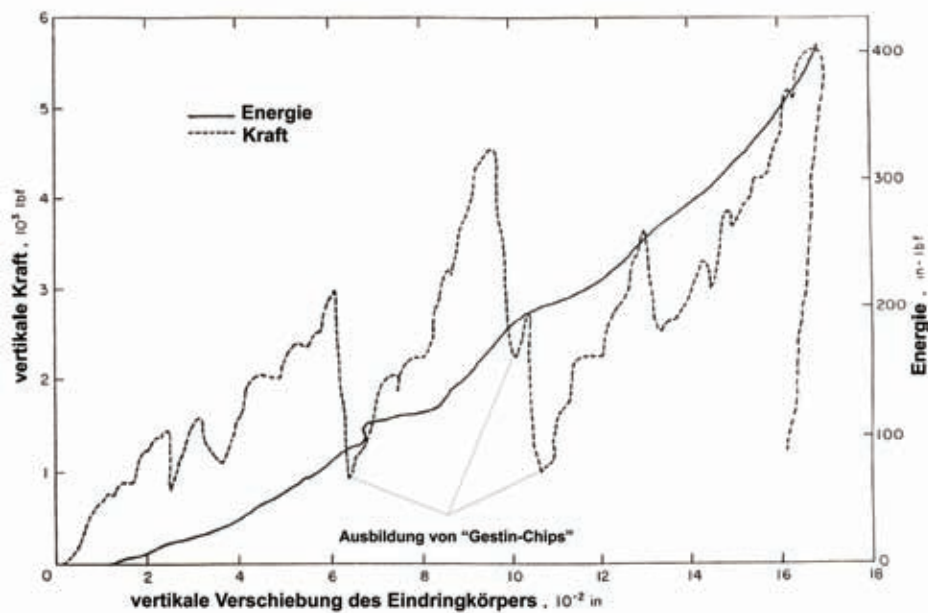


Abbildung 94: Vertikale Kraft und Energie in Abhängigkeit von der Eindringtiefe des Meißels bei einem Eindringversuch [37]

Abgesehen davon, dass die Bildung einer Zertrümmerungszone, eines Risses und von "Gestein-Chips" beobachtet werden konnte, war es außerdem möglich einen Zusammenhang zwischen Eindringkraft und Risslänge herzustellen. Wie in Abb. 95 auf Seite 142 zu sehen, war dies sowohl durch Auswertung der Versuchsdaten als auch analytisch durch die angeführte Gleichung (siehe Unterabschnitt 7.2 „Prinzipien und Theorien der Rissbildung und der Rissausbreitung“ auf Seite 100 und im Speziellen Gleichung (425)) möglich. Somit kann bestätigt werden, dass sich auch bei vorhandenem seitlichen Druck ein Riss genau unter dem spitzen Eindringkörper ausbildet, der eine Funktion der aufgebrachten Kraft ist. Außerdem verläuft dieser Riss annähernd gerade und vertikal, vergleichbar mit einem "Median-Riss" (siehe Abb. 57 auf Seite 71), abgesehen von einigen kleineren Schwankungen, die aber auf Unregelmäßigkeiten im Gestein zurückgeführt werden können.

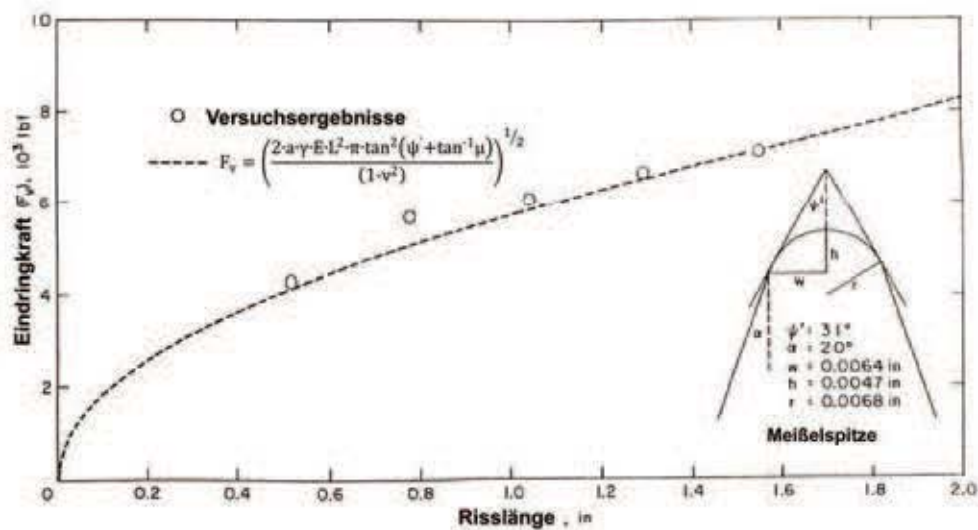


Abbildung 95: Zusammenhang zwischen der Risslänge und der vertikalen Eindringkraft für Dolomit, der durch einen Meißel mit einem Öffnungswinkel von 40° belastet wird [37].

Außer der aufgewendeten Kraft wurde auch noch die spezifische Bruchflächenenergie (Energie, die benötigt wird um eine neue Bruchfläche von einer Einheitsgröße zu schaffen) gegen die Risslänge aufgetragen (siehe Abb. 96 auf Seite 142). Es ist eindeutig zu erkennen, dass am Beginn der spezifische Energieverbrauch sehr hoch ist, was vor allem auf den Zerstörungsprozess ganz zu Beginn des Eindringvorganges zurück zu führen ist. Die Werte zeigen, dass 90 Prozent der Energie dafür aufgewendet wird, den Riss einzuleiten und die ersten Zentimeter voranzutreiben. Somit ist klar, dass die spezifische Bruchflächenenergie ziemlich gering sein kann, wenn bereits ein Riss von einer bestimmten Größe vorhanden ist. Das Ziel muss es deshalb sein, mit möglichst wenig Energie und möglichst schnell einen gut entwickelten Riss zu erlangen. Wenn dies gelingt ist eine große Einsparung an Energie möglich.

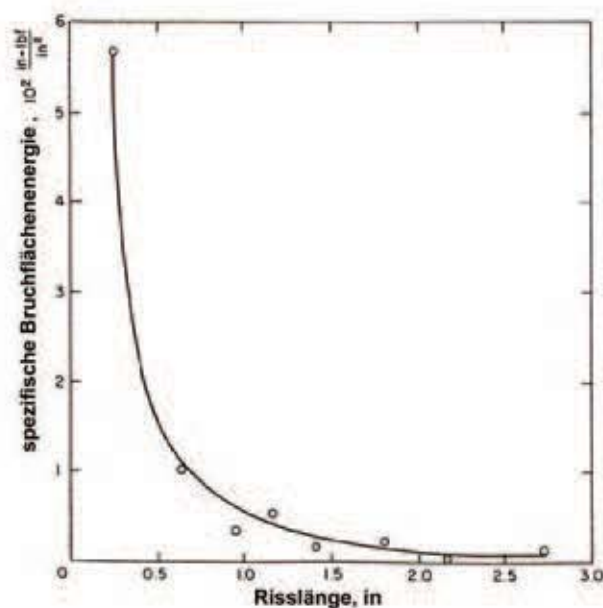


Abbildung 96: Spezifische Bruchflächenenergie als Funktion von der Risslänge [37]

– *Versuchsablauf und Versuchsergebnisse des Spaltversuches*

Bei dieser Versuchsdurchführung wurde der Probekörper, wie in Abb. 97 auf Seite 143 ersichtlich, nur von dem Eindringkörper belastet und wurde sonst in keinsten Weise unter Spannung gesetzt. Dieser Test stellt die besten Bedingungen für die Entstehung eines Risses dar. Der Belastungsvorgang durch den Meißel war der Gleiche wie bei dem Eindringversuch und es konnte auch hier wieder zuerst eine Zertrümmerungszone, aus der sich dann später ein einzelner Riss entwickelte, beobachtet werden.

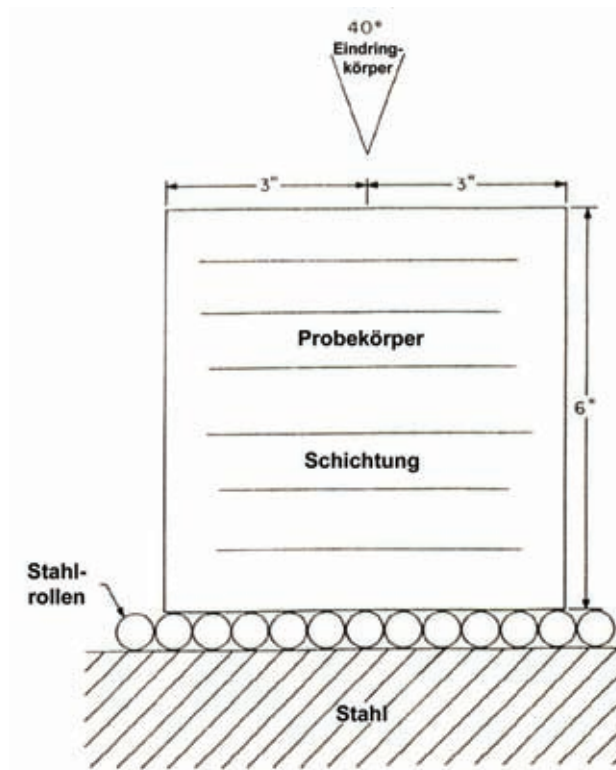


Abbildung 97: Versuchsaufbau des Spaltversuches [37].

In Abb. 98 auf Seite 144 sind die Versuchsergebnisse für die Risslänge, die Kräfte und die Energie in Abhängigkeit von der vertikalen Verschiebung des Eindringkörpers zu erkennen. Wenn man diese mit den Werten von den Eindringversuchen (siehe Abb. 94 auf Seite 141) vergleicht, ist zu erkennen, dass die Werte aus den Spaltversuchen fast eine Zehnerpotenz geringer sind. Auch die spezifische Bruchflächenenergie ist um dieselbe Größenordnung kleiner. Allerdings wird auch bei diesem Versuch die meiste Energie für die Initiierung des Risses aufgewendet und sobald erst ein Riss vorhanden ist, ist verhältnismäßig wenig Energie notwendig, um ein weiteres Risswachstum zu erreichen. Dies wird genauso wie bei dem Eindringversuch auf die Zertrümmerung des Gesteins am Beginn und auf die keilende Wirkung des Meißels in dem darauffolgenden Zeitraum zurückgeführt (siehe hierzu Abb. 82 auf Seite 130). Da, wie bereits erwähnt, dieser Versuchsaufbau die günstigsten Bedingungen für den Riss- und Bruchprozess von Fels durch einen keilförmigen Meißel darstellt, können andere Bruchprozesse damit verglichen werden.

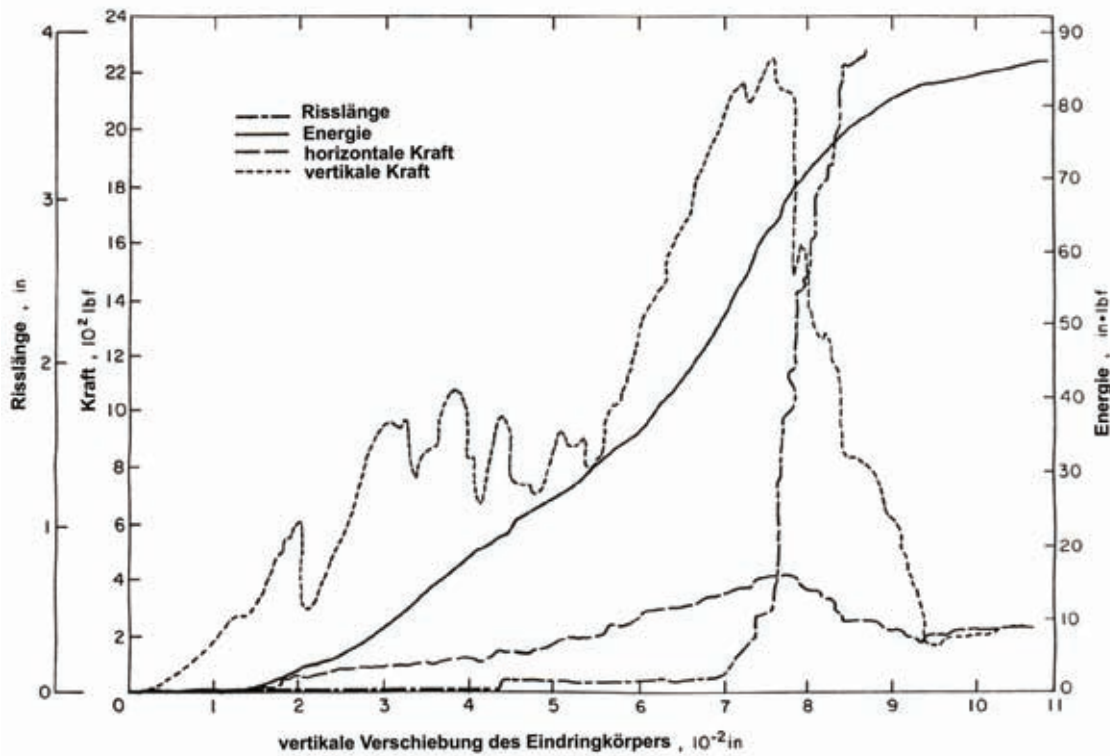


Abbildung 98: Risslänge, Kraft und Energie in Abhängigkeit von der Eindringtiefe des Meißels bei einem Spaltversuch [37].

– *Versuchsablauf und Versuchsergebnisse des Abspaltversuches*

Bei diesem Versuchsaufbau (siehe Abb. 99 auf Seite 145) wurde angestrebt das verhältnismäßig energieeffiziente Risswachstum des bereits ausgebildeten Medianrisses dahingehend zu nutzen, "Gestein-Chips", durch die Ausbreitung des Medianrisses bis zu einer freien Oberfläche, zu erzeugen (siehe Abb. 102 auf Seite 146). Diese freie Oberfläche wurde für den ersten "Gestein-Chip" durch Einkerbung des Probekörpers erreicht. Es wurden Versuche mit einem horizontalen Abstand der "Gestein-Chips" von $1/2$ in und 1 in durchgeführt.

In Abb. 100 auf Seite 146 sieht man einen typischen Ausdruck für die vertikale Kraft und die Energie in Abhängigkeit von der vertikalen Verschiebung des Eindringkörpers für diesen Versuchsaufbau. Es ist zu erkennen, dass die Maximalwerte für die aufgewendete Energie und Kraft in etwa denen vom vorangegangenen Spaltversuch entsprechen. Viel interessanter ist hingegen die Entwicklung der spezifischen Bruchflächenenergie in Abhängigkeit von der Risslänge. In Abb. 101 auf Seite 146 ist zu erkennen, dass am Beginn des Bruchprozesses die spezifische Bruchflächenenergie wieder am höchsten ist und danach, aus den gleichen Gründen wie bei dem Eindring- und Spaltversuch abfällt. Das charakteristische bei dieser Versuchsdurchführung ist allerdings, dass zum Schluss hin der Graph wiederum ansteigt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Medianriss am Ende von der Vertikalen abweicht, um ein "Gestein-Chip" zu bilden, was zu einer Erhöhung der spezifischen Bruchflächenenergie führt. Ein Unterschied zwischen dem Verlauf der spezifischen Bruchflächenenergie von Abspaltversuchen mit einem Abstand der "Gestein-Chips" von $1/2$ in und einem Abstand von 1 in ist nicht erkennbar (siehe Abb. 101 auf Seite 146). Bei größerem horizontalen Abstand verlängert sich die Risslänge in etwa um den vergrößerten Abstand ($1/2$ in), was auch eine höhere spezifische Bruchflächenenergie zur

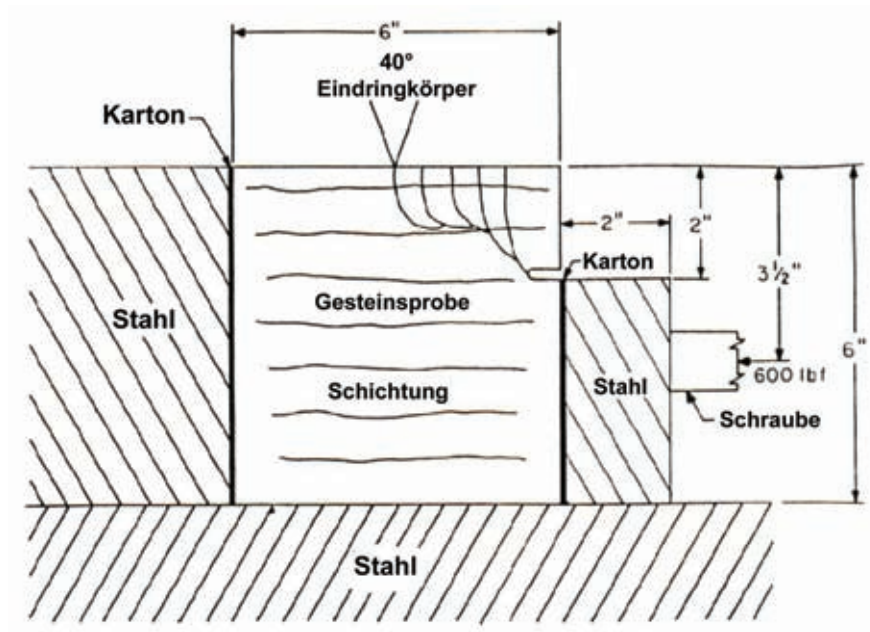


Abbildung 99: Versuchsaufbau für den Abspaltversuch [37].

Folge hat. Allerdings müssten noch mehrere Versuche mit unterschiedlichen horizontalen Abständen durchgeführt werden, um eine fundierte Aussage über eventuelle Tendenzen bei größer werdendem horizontalen Abstand, treffen zu können.

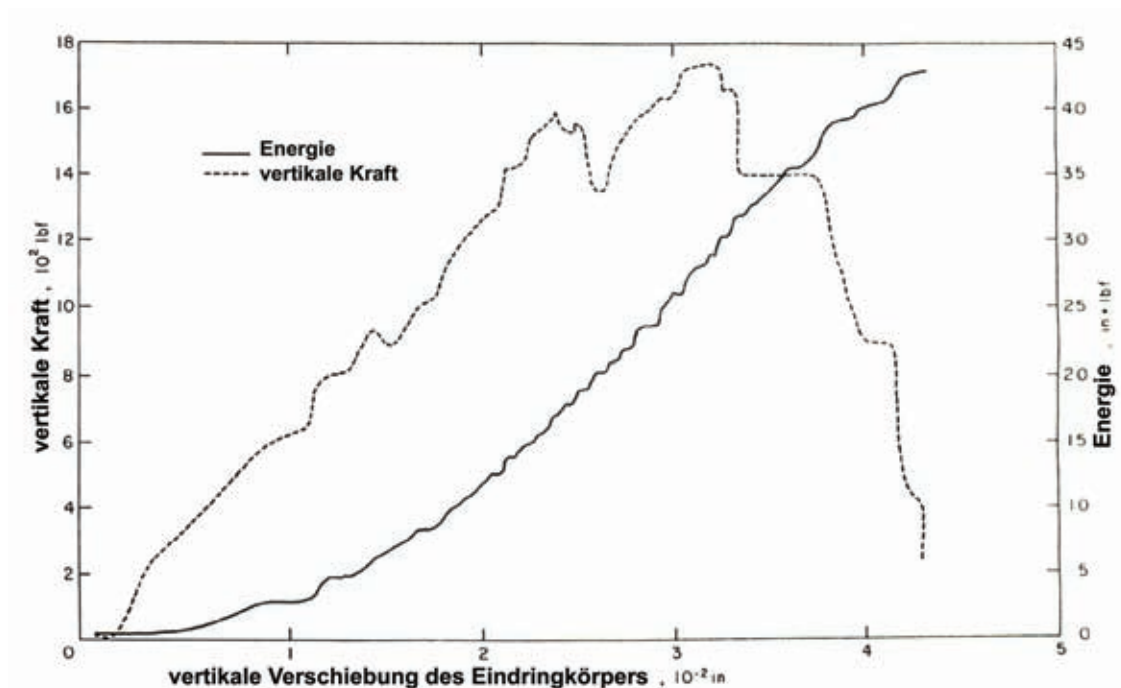


Abbildung 100: Kraft und Energie als Funktion von der Eindringtiefe des Meißels bei einem Abspaltversuch [37].

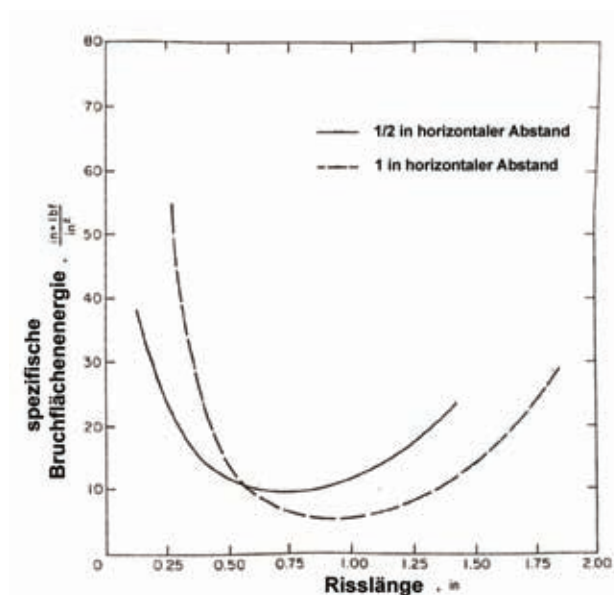


Abbildung 101: Spezifische Bruchflächenenergie als Funktion der Risslänge [37]

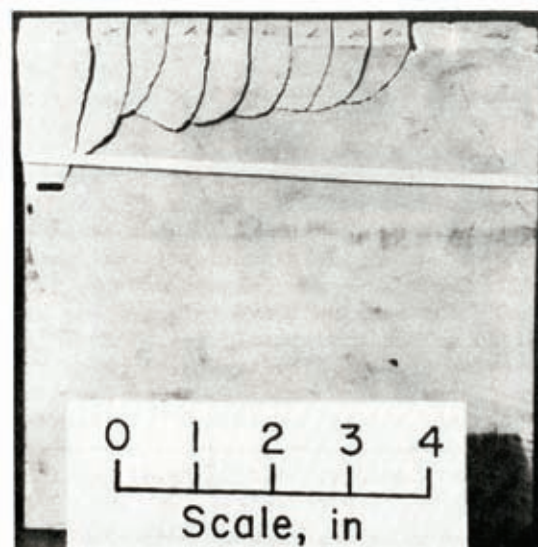


Abbildung 102: Unterschiedliche Formen der "Gestein-Chips" nach der Versuchsdurchführung [37]

– *Schlussfolgerungen*

Eine der wesentlichsten Aussagen der Durchführung dieser drei unterschiedlichen Versuchsaufbauten ist, dass der Beginn des Bruchprozesses, die Zertrümmerung des Gesteins direkt unterhalb der Meißelspitze und die Rissinitiierung, eine hohe spezifische Bruchflächenenergie verlangt. Dies bedeutet, dass relativ viel Energie dafür aufgewendet werden muss, ohne dass bereits große Bruchflächen geschaffen werden. Es sollte demzufolge das Bestreben sein, die am Beginn benötigte Energie zu verringern, wofür weiterführende Untersuchungen, die speziell auf die Rissentstehung abzielen, notwendig sind.

Ein weiteres Resultat der Versuche ist, dass durch Schaffung einer freien Oberfläche die Risse, die unter keilförmigen Eindringkörpern entstehen, dazu genutzt werden können, dass "Gestein-Chips" leichter entstehen. Da das Risswachstum, welches schließlich zur Bildung dieser "Gestein-Chips" führt, sehr energieeffizient vorangetrieben werden kann, ist dies eine sehr wirtschaftliche Lösung, um ein verhältnismäßig großes Volumen an Gestein unter geringem Energieaufwand vom Gestein zu lösen. Diese Technik wird heutzutage bereits bei der Hinterschneidetechnik von Diskenmeißeln angewendet. Somit muss das Bestreben bei der Lösung von Gestein immer dahingehend sein, dass man einen Riss relativ kontrolliert und mit möglichst wenig Energieaufwand zu einer freien Oberfläche führt, um somit "Gestein-Chips" zu erhalten (siehe hierzu auch Abschnitt 5 „Gesteinslösung bei Diskenmeißeln“ auf Seite 25 und Abschnitt 6 „Gesteinslösung bei Schrämmmeißeln“ auf Seite 37).

8 Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Diplomarbeit wird der Lösevorgang von Festgestein, durch die unterschiedlichsten Lösewerkzeuge untersucht. Dies erfolgt in Hinblick auf die mögliche Optimierung der Meißelwerkzeuge, die beim Schlagbohrverfahren zur Herstellung von Bohrpfählen zum Einsatz kommen. Bohrmeißel finden bei diesem Pfahlherstellungsverfahren genau dann Verwendung, wenn der anstehende Untergrund nur mehr schlagend gelöst werden kann. Die Ausführung dieser Meißel reicht von der Flachform, über Kreuz- und Sternform bis hin zur Ringform und etwaigen Mischformen.

Die Art der Gesteinslösung (schneidend, reißend, drückend oder schlagend) in Verbindung mit den zur Anwendung kommenden Werkzeugen und Maschinen hängen unter anderem von der Beschaffenheit des Untergrundes und der Größe des herzustellenden Hohlraumes ab. Die verwendeten Werkzeuge lassen sich dabei aufgrund des Lösemechanismus und ihrer Form in Diskenmeißel, Schrämmmeißel und Eindringkörper unterteilen. Diese unterschiedlichen Mechanismen der Gesteinslösung können durch Modelle und Theorien analytisch erfasst werden.

Die für die Werkzeuge vorhandenen analytischen Modelle wurden im Rahmen dieser Diplomarbeit neu hergeleitet und beschrieben. Dadurch ist es beispielsweise möglich die erforderliche Kraft zu bestimmen, die auf einen Diskenmeißel wirken muss, um eine bestimmte Eindringtiefe zu erhalten. Außerdem wird mit Hilfe dieses Modells auch noch eine Formel für die Rollkraft angegeben. Ausgehend von diesen zwei Gleichungen, die von unterschiedlichen Parametern (Druckfestigkeit, Schneidenwinkel der Diske, Diskendurchmesser und Eindringtiefe) abhängen, werden Parameterstudien durchgeführt, um die Auswirkungen auf die Eindringkraft und die Rollkraft zu analysieren. Der Diskendurchmesser und die Schneidgeschwindigkeit haben vernachlässigbaren oder nur sehr geringen Einfluss auf die Kräfte und auf die Leistung der Diskenmeißel. Der interessanteste Parameter in Hinblick auf eine Optimierung von Meißeln ist der Abstand zwischen zwei nebeneinander laufenden Disken. Mit Hilfe des vorgestellten Modells ist es möglich einen optimalen Abstand anzugeben, der auf das zu lösende Gestein abgestimmt ist. Dabei nimmt die erzielte Leistung ein Maximum, die spezifische Energie hingegen ein Minimum an. Kritisch zu betrachten, bei diesem Modell, ist jedoch die angenommene waagrechte Bruchfläche zwischen zwei Diskenmeißeln.

Für die Beschreibung des Lösemechanismus bei Schrämmmeißeln werden in dieser Diplomarbeit zwei unterschiedliche Modelle verwendet und miteinander verglichen. Beide Modelle ermöglichen es die notwendige Bohrkraft (notwendige Kraft für die Ausbildung eines "Gestein-Chips"), in Abhängigkeit von der Angriffstiefe, Scherfestigkeit bzw. Zugfestigkeit des Gesteins und weiterer Parameter, zu bestimmen. Den wesentlichen Unterschied zwischen den beiden Theorien stellt die Annahme dar, dass es in einem Fall durch Überschreiten der Scherfestigkeit und im anderen Fall durch Überschreiten der zulässigen Zugspannung zum Bruch und somit zur Ausbildung eines "Gestein-Chips" kommt. Eines der beiden Modelle wird auch auf stumpfe Schrämmmeißel ausgeweitet, wodurch eindeutig ersichtlich wird, dass der Verschleiß von Meißelwerkzeugen einen entscheidenden Faktor für die Effizienz beim Lösen von Festgestein darstellt.

Der Mechanismus bei der Gesteinslösung von Eindringkörpern entspricht weitgehend dem Lösemechanismus der Bohrmeißel beim Schlagbohrverfahren. Aufgrund der Komplexität wird dieses Thema auch am umfangreichsten analysiert. Der Eindringvorgang, das damit einhergehende Rissbild und somit der Lösemechanismus von einem stumpfen und einem spitzen Eindringkörper unterscheiden sich grundlegend voneinander. Allerdings können sich unter bestimmten Voraussetzungen stumpfe Eindringkörper auch wie spitze Eindringkörper verhalten und umgekehrt. In der vorliegenden Diplomarbeit wird das cavity expansion model ("Hohlraumaufweitungs-Modell"), auf dem viele andere Modelle und Theorien für den Eindring- und Bruchvorgang aufbauen, hergeleitet und beschrieben.

Einer der wesentlichen Punkte des "Hohlraumaufweitungs-Modells" ist die Unterteilung in einen plastischen und elastischen Bereich unterhalb des Eindringkörpers. Die plastische Zone umfasst jenen Bereich um den Eindringkörper, der irreversible Verformungen erfährt. Der elastische Bereich grenzt an den plastischen an und umfasst den gesamten weiteren Bereich des beanspruchten Materials. Durch das "Hohlraumaufweitungs-Modell" ist es möglich, die Größe der plastischen Zone und die Eindringkraft in Abhängigkeit der Eindringtiefe zu ermitteln. Ausgehend von diesem Modell werden noch weitere Theorien vorgestellt, die sowohl die Rissentstehung an der elastisch-plastischen Grenzfläche als auch die Rissausbreitung beschreiben. Durch diese Modelle ist es wiederum möglich Gleichungen für die resultierende Kraft in Abhängigkeit der Risslänge aufzustellen. Im Rahmen dieser Diplomarbeit werden auch zwei experimentelle Untersuchungen angeführt, mit denen es möglich ist die Rissentstehung und Rissausbreitung zu beobachten. Diese Modelle und Untersuchungen zeigen, dass die Rissentstehung durch Fehlstellen oder kleine Anrisse im Material (Gestein) begünstigt wird, aber trotz alledem verhältnismäßig viel Energie aufgewendet werden muss, um einen Riss zu initiieren. Für die Vergrößerung eines bereits bestehenden Risses wird nur relativ wenig Energie benötigt. Außerdem besteht durch gewisse Randbedingungen wie etwa freie Oberflächen die Möglichkeit, einen Riss in eine gewünschte Richtung zu lenken, was durch die angeführten Ergebnisse zu erkennen ist.

8.2 Ausblick

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde die Gesteinslösung durch verschiedene Werkzeuge analysiert und durch verschiedene Modelle und Theorien analytisch erfasst. Der Einfluss und Zusammenhang verschiedenster Parameter auf die Löseleistung und die Entstehung von Bruchflächen und Rissen konnte identifiziert und beschrieben werden. An geeigneter Stelle wurden Hinweise auf eine mögliche Optimierung von Meißelwerkzeugen gegeben. Die daraus resultierenden weiterführenden Untersuchungen für Lösewerkzeuge des Schlagbohrverfahrens, sowie mögliche weitere Forschungsschwerpunkte werden im Folgenden behandelt.

Zunächst erscheint es bedeutsam, ob und in welchem Ausmaß die praktischen Randbedingungen bei der Gesteinslösung in einem Bohrloch Auswirkungen auf den Lösemechanismus der eingesetzten Meißelwerkzeuge haben. Es ist zum Beispiel anzunehmen, dass die Überlagerung durch Gestein und der damit vorhandene Überlagerungsdruck, Auswirkungen auf das Bruchverhalten und somit den Mechanismus der Gesteinslösung, vor allem am Rand des Bohrloches, hat. Dazu könnten entsprechende Versuche durchgeführt werden, die den Spannungszustand an der Sohle eines Bohrloches berücksichtigen. Dabei sollte wie bereits erwähnt vermehrt Augenmerk auf die Randbereiche gelegt werden, da hier eine Bildung von "Gestein-Chips" nur zum Bohrlochinneren möglich ist.

Ausgehend von diesen experimentellen Untersuchungen wäre ein Vergleich von den erhaltenen Resultaten mit analytischen Ergebnissen bestehender Modelle und Theorien empfehlenswert. Dadurch wäre es möglich zu erkennen, welches Modell am ehesten dieses spezielle Problem der Gesteinslösung beschreiben könnte. Weiters ist eine Spezialisierung, Weiterentwicklung oder Anpassung einer in dieser Arbeit präsentierten Theorien oder Modelle denkbar. Obwohl ein solches theoretisches Modell vermutlich nur mit Versuchsergebnissen aus Laborbedingungen gute Übereinstimmung erbringen könnte, ist eine qualitative Erweiterung (bzw. Vereinfachung) des Modells auf baupraktische Bedingungen durchaus denkbar. Ziel eines solchen Modells könnte es somit sein die Löseleistung und die aufgewendete Energie in Abhängigkeit von Meißelparametern und Gesteinseigenschaften ausdrücken zu können. Auch die Anwendung numerischer Methoden als Vergleich beziehungsweise zur Modellentwicklung kann angedacht werden.

Letztlich könnten neue leistungsfähigere Werkzeuge entwickelt oder die bestehenden Verfahren optimiert werden, mit dem Ziel einer höheren Effektivität. Dafür sollten vor allem auch noch weiterführende Untersuchungen zur Rissentstehung durchgeführt werden, da hier noch verhältnismäßig

viel Energie aufgewendet werden muss. Hier wäre also erhebliches Einsparungspotential vorhanden, wenn eine verfahrenstechnische Lösung gefunden werden kann. Von Interesse ist auch, wie bereits bestehende Risse durch entsprechende Werkzeugausbildung (Geometrie, Oberfläche, etc.) genutzt werden können, um einen möglichst effizienten Gesteinslöseprozess zu initiieren.

Literatur

- [1] *Herrenknecht AG - Tunnelvortriebstechnik* <http://www.herrenknecht.de>
- [2] *Katalog der Firma Emde Industrie-Technik GmbH*. Nassau
- [3] *Katalog der Firma Bauer*. Schrobenuhausen
- [4] ALEHOSSEIN, H. ; DETOURNAY, E. ; HUANG, H. : An Analytical Model for the Indentation of Rocks by Blunt Tools. In: *Rock Mechanics and Rock Engineering* 33 (2000), Nr. 4, S. 267 – 284
- [5] BISHOP, R. ; HILL, R. ; MOTT, N. : The theory of indentation and hardness tests. In: *Proceedings of the Physical Society* 57 (1945), Nr. 3, S. 147 – 159
- [6] BLUMENAUER, H. ; PUSCH, G. : *Technische Bruchmechanik*. 3., überarbeitete Auflage. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1993
- [7] BRANDL, H. : *Studienblätter zur Vorlesung Grundbau und Bodenmechanik, Technische Universität Wien, Institut für Grundbau und Bodenmechanik*. 2007
- [8] BURKHARD PETACK, G. K.: *Continuous Surface Miner - Neue Grenzen für sprengstoffloses Gewinnen von Festgestein*. TU Dresden, 2004
- [9] CHAUDHRI, M. M. ; LIANGYI, C. : The orientation of the Hertzian con crack in soda-lime glass formed by oblique dynamic and quasi-static loading with a hard sphere. In: *Journal of Materials Science* 24 (1989), S. 3441 – 3448
- [10] CHEN, L. ; LABUZ, J. : Indentation of rock by wedge-shaped tools. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 43 (2006), Nr. 7, S. 1023 – 1033
- [11] CHIAIA, B. : Fracture mechanisms induced in a brittle material by a hard cutting indenter. In: *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), Nr. 38, S. 7747 – 7768
- [12] CHIANG, S. S. ; MARSHALL, D. B. ; EVANS, A. G.: The response of solids to elastic/plastic indentation. I. Stresses and residual stresses. In: *Journal of Applied Physics* 53 (1982), Nr. 1, S. 298 – 311
- [13] CHIANG, S. S. ; MARSHALL, D. B. ; EVANS, A. G.: The response of solids to elastic/plastic indentation. II. Fracture initiation. In: *Journal of Applied Physics* 53 (1982), Nr. 1, S. 312 – 317
- [14] DALZIEL, J. ; DAVIES, E. : Initiation of Cracks in Coal Specimens by Blunted Wedges. In: *The Engineer* (1964), S. 217 – 220
- [15] EVANS, I. : The force required to cut coal with blunt wedges. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts* 2 (1965), Nr. 1, S. 1 – 12
- [16] EVANS, I. ; POMEROY, C. D.: *The Strength, Fracture and Workability of Coal*. Pergamon Press, 1966
- [17] GEOFORUM.COM - THE SOURCE FOR GEO-INFORMATION: *Short history of piling*. In: *Pile info* <http://www.geoforum.com/>
- [18] GIRSCH, I. E.: *Bohrpfähle*. In: *VÖBU Bohrhandbuch*. 2. Aufl., Bd. 2. Eigenverlag VÖBU (Vereinigung österreichischer Bohr-, Brunnenbau- und Spezialtiefbauunternehmungen), 2004

- [19] GOODRICH, R. H.: High Pressure Rotary Drilling Machines. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts* 94 (1957)
- [20] GROSS, D. : *Bruchmechanik: Mit einer Einführung in die Mikromechanik*. 4., bearb. Aufl. Springer Verlag, 2006. – ISBN 9783540371137
- [21] GUO, H. : *Rock Cutting Studies Using Fracture Mechanics Principles*. 1990
- [22] GUO, H. : *Rock Cutting Using Fracture Mechanics Principles*. PhD Thesis, University of Wollongong, 1990
- [23] HAHN, H. G.: *Bruchmechanik: Einführung in die theoretischen Grundlagen (Leitfaden der angewandten Mathematik und Mechanik)*. B. G. Teubner Verlag, 1976. – ISBN 9783519023296
- [24] HEARTL, H. : *Historischer Überblick über die Bohrtechnik*. In: *VÖBU Bohrhandbuch*. 2. Aufl., Bd. 2. Eigenverlag VÖBU (Vereinigung österreichischer Bohr-, Brunnenbau- und Spezialtiefbauunternehmungen), 2004
- [25] HERTZ, H. : *Gesammelte Werke. Drei Bände. Band 1(1895): Schriften Vermischten Inhalts. Band II(1895): Untersuchungen Über Die Ausbreitung Der Elektrischen Kraft. Zweite Unveränderte Auflage. Band III(1894): Die Prinzipien Der Mechanik in Neuem Zusammenhange*. Johann Ambrosius Barth, 1895
- [26] HILL, R. : *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, USA, 1998. – ISBN 9780198503675
- [27] HOOD, M. ; ALEHOSSEIN, H. : A development in rock cutting technology. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 37 (2000), Nr. 1-2, S. 297 – 305
- [28] HUANG, H. : *Discrete Element Modeling of Tool-Rock Interaction*. 1999
- [29] JOHNSON, K. : The correlation of indentation experiments. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 18 (1970), Nr. 2, S. 115 – 126
- [30] JOHNSON, K. : *Contact mechanics*. 9. Cambridge University Press, 1985
- [31] JÖRN M. SEITZ, H.-G. S.: *Bohrpfähle*. Ernst & Sohn Verlag, 2000
- [32] K. BURTH, W. B.: *Plastizität*. Verlag Vieweg, 1992. – ISBN 3528088265
- [33] KALISZKY, S. : *Plastizitätslehre*. Verlag des Vereins Deutscher Ingenieure, Düsseldorf, 1984. – ISBN 3184004473
- [34] KLUCKERT, K.-D. : *Rückblick auf 40 Jahre Bohrpfahltechnik - Gibt es noch Impulse für die Zukunft?* TBG Ausgabe, Köln. 1999
- [35] KOHLBÖCK, D. : *Analytische, numerische und experimentelle Untersuchungen von Meißelarbeiten bei der Pfahlherstellung mit dem Schlagbohrverfahren unter besonderer Berücksichtigung der Grundwasserbedingungen*. 2008
- [36] KOLYMBAS, D. : *Pfahlgründungen*. Springer, 1989
- [37] LARSON, D. A. ; MORRELL, R. J. ; MADES, J. F.: *An Investigation of Crack Propagation With a Wedge Indenter To Improve Rock Fragmentation Efficiency*. Bureau of Mines report of investigations, 1987
- [38] LAWN, B. R. ; EVANS, A. G.: A model for crack initiation in elastic/plastic indentation fields. In: *Journal of Materials Science* 12 (1977), S. 2195 – 2199

- [39] LAWN, B. R. ; FULLER, E. R.: Equilibrium penny-like cracks in indentation fracture. In: *Journal of Materials Science* 10 (1975), Nr. 12, S. 2016 – 2024
- [40] LAWN, B. R. ; SWAIN, M. V.: Microfracture beneath point indentations in brittle solids. In: *Journal of Materials Science* 10 (1975), S. 113 – 122
- [41] LAWN, B. ; MARSHALL, D. : *The indentation fracture and growth degradation in ceramics, Fracture Mechanics of Ceramics*. Plenum Press, 1978
- [42] LAWN, B. : *Fracture of Brittle Solids*. 2. Cambridge University Press, 1993
- [43] LEITNER, W. : *Baubetriebliche Modellierung der Prozesse maschineller Tunnelvortriebe im Festgestein*. Books on Demand GmbH, 2004. – ISBN 9783833418440
- [44] LIU, H. ; LINDQVIST, P.-A. : Numerical simulation of the rock fragmentation process. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 39 (2002), Nr. 39, S. 491 – 505
- [45] M., B. : *Historische Pfahlgründungen*. Institut für Baugeschichte der Universität Karlsruhe, 1992
- [46] MANG, H. A. ; HOFSTETTER, G. : *Festigkeitslehre*. 3., aktualisierte Aufl. Springer, 2008. – ISBN 9783211724538
- [47] MARSH, D. : Plastic flow in glass. In: *Proceedings of the Royal Society of London* 279 (1964), Nr. 1378, S. 420 – 435
- [48] MERCHANT, M. E.: Mechanics of the Metal Cutting Process. I. Orthogonal Cutting and a Type 2 Chip. In: *Journal of Applied Physics* 16 (1945), Nr. 5, S. 267–275
- [49] MERCHANT, M. E.: Mechanics of the Metal Cutting Process. II. Plasticity Conditions in Orthogonal Cutting. In: *Journal of Applied Physics* 16 (1945), Nr. 6, S. 318–324
- [50] MURAKAMI, Y. : *Stress Intensity Factors Handbook (2-volume set)*. Pergamon Press, 1987
- [51] NISHIMATSU, Y. : The mechanics of rock cutting. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts* 9 (1972), Nr. 2, S. 261 – 270
- [52] OSTOJIC, P. ; MCPHERSON, R. : A review of indentation fracture theory: its development, principles and limitations. In: *International Journal of Fracture* 33 (1987), Nr. 33, S. 297 – 312
- [53] PARIS, P. C. ; SIH, G. C.: Stress Analysis of Cracks. In: *Fracture Toughness Testing and its Applications* (1965)
- [54] PIGISCH, N. : *Gründungen auf nicht ausreichend tragfähigem Untergrund, Großer Entwurf am Institut für Grundbau und Bodenmechanik der Technischen Universität Wien*. 2003
- [55] POPOV, V. L.: *Kontaktmechanik und Reibung: Von der Nanotribologie bis zur Erdbebendynamik (German Edition)*. 2., überarb. Auflage. Springer, 2010. – ISBN 9783642133015
- [56] ROSSMANITH, H.-P. (Hrsg.): *Grundlagen der Bruchmechanik (German Edition)*. 1. Auflage. Springer Verlag, 1982. – ISBN 9783211816837
- [57] ROSSMANITH, H. (Hrsg.): *Rock Fracture Mechanics (CISM International Centre for Mechanical Sciences)*. 1. Auflage. Springer Verlag, 2004. – ISBN 9783211817476
- [58] ROXBOROUGH, F. F. ; PHILLIPS, H. R.: Rock excavation by disc cutter. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts* 12 (1975), Nr. 12, S. 361 – 366

-
- [59] STRAUB, H. : *Die Geschichte der Bauingenieurkunst - Ein Überblick von der Antike bis in die Neuzeit*. 4. überarbeitete und erweiterte Auflage. Birkhäuser Verlag Basel, 1992
- [60] SWAIN, M. V. ; LAWN, B. R.: Indentation Fracture in Brittle Rocks and Glasses. In: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts* 13 (1976), S. 311 – 319
- [61] SZABO, M. : *Der Einsatz des Greiferbohrverfahrens unter Grundwasserbedingungen*. 2007
- [62] TIMOSHENKO, S. ; GOODIER, J. : *Theory of Elasticity*. 3. McGraw-Hill Book Co, 1970
- [63] WIEDERHORN, S. ; LAWN, B. : Strength Degradation of Glass Resulting from Impact with Spheres. In: *Journal of the Ceramic Society* 60 (1977), Nr. 60, S. 451 – 458

Anhang A Ursachen und Ausbildungen eines Bruches

Der Grund warum und in welcher Art und Weise sich ein Bruch ausbildet, hängt entscheidend von den mikroskopischen Eigenschaften des betrachteten Materials ab. Das makroskopische Bruchverhalten und Erscheinungsbild wird somit von den mikroskopischen Vorgängen beeinflusst. Aus diesem Grund wird im Folgenden ein kurzer Überblick sowohl über die mikroskopischen als auch über die makroskopischen Bruchmechanismen gegeben. Dies geschieht unter Berücksichtigung der Literatur über die theoretischen Grundlagen der Bruchmechanik von Gross [20], Hahn [23] und Rossmannith [56] als auch der Literatur über technische Bruchmechanik von Blumenauer und Push [6].

Anhang A.1 Mikrorissbildung und deren Ursachen

Unter einem Bruch auf mikroskopischer Ebene versteht man zum Beispiel die Lösung der Bindungen zwischen Atomen, Ionen oder Molekülen. Diese Trennung führt dann in weiterer Folge dazu, dass ein ursprünglich ganzer Körper in ein oder mehrere Teile getrennt wird. Um die Bindung zwischen Elementen lösen zu können, muss eine Arbeit geleistet werden, die der *Oberflächenenergie* Γ^0 (gespeicherte Energie an der Oberfläche) entspricht und als

$$\Gamma^0 = \gamma^0 A \quad (455)$$

definiert ist. Dabei ist γ^0 die *spezifische Oberflächenenergie* und A die neue frei geschaffene Oberfläche.

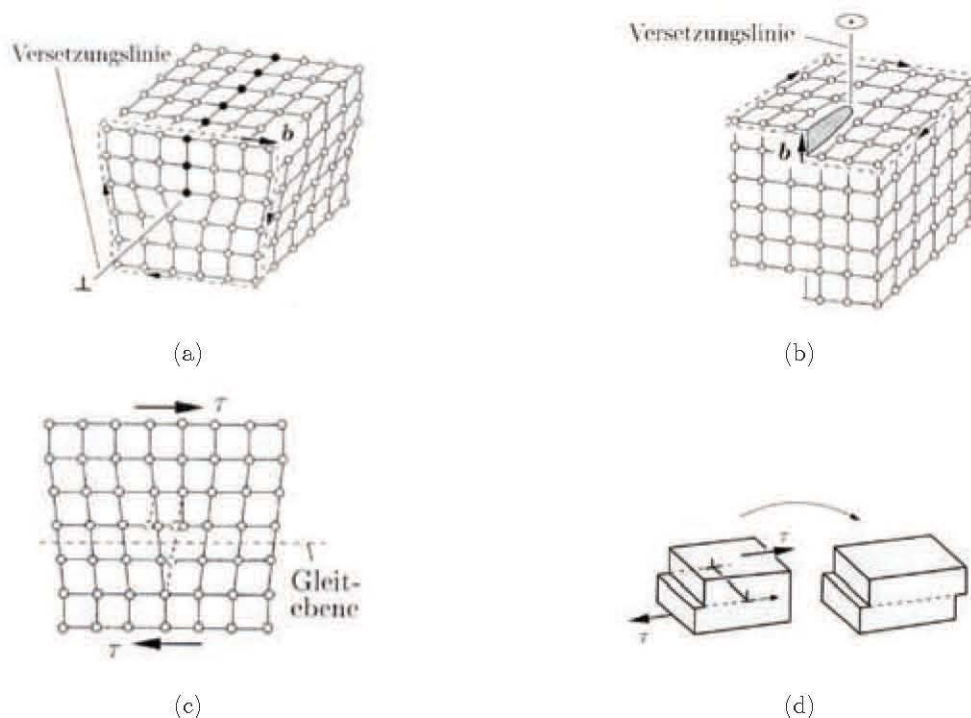


Abbildung 103: Versetzungen und Ausbildung von Gleitebenen im Kristallgitter [20]

Ursachen für das Auslösen eines Bruches bei äußeren Einwirkungen können zum Beispiel Einschlüsse mit unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften, Hohlräume oder Mikrorisse sein. Außerdem kann es bei Materialien, die aus Kristallen aufgebaut sind, durch Fehler in der Kristallstruktur zu Brucherscheinungen kommen. Hierbei spielt vor allem die Versetzung in dem Kristallgitter eine entscheidende Rolle. Diese Versetzung kann unterschiedlichste Formen annehmen, wie sie in Abb. 103

auf Seite 155 zu sehen sind. In der Umgebung von sogenannten Versetzungslinien kommt es unter Einwirkung von Schubspannungen zur Ausbildung von Gleitebenen, was in weiterer Folge zur Bildung neuer Oberflächen führt (Abb. 103(c) auf Seite 155 und Abb. 103(d) auf Seite 155). Durch den Aufstau von Versetzungen an Hindernissen, wie etwa einer Korngrenze oder eines Einschlusses, kommt es zu Spannungskonzentrationen. Diese Konzentration an Spannungen bewirkt ein Lösen der Bindungen entlang von Gitterebenen, wodurch ein transkristalliner Riss (Abb. 104(a) auf Seite 156) entsteht. Im Unterschied dazu entsteht der interkristalline Bruch (Abb. 104(b) auf Seite 156) durch das Lösen der Bindungen zwischen den einzelnen Kristallen.



Abbildung 104: mikroskopische Rissbildung [20]

Eine weitere Möglichkeit der Riss- und Bruchbildung bei kristallinen Materialien wird durch den Einschluss von Partikeln ausgelöst. Sofern Versetzungen vorhanden sind, kommt es zu einem Stau dieser an den Partikeln, was zu einer Hohlrumbildung um diese Fremkörper führt. Bei weiterer Beanspruchung können sich solche Hohlräume zusammenschließen und schließlich zur vollständigen Trennung des Werkstoffes führen (siehe Abb. 105 auf Seite 156).

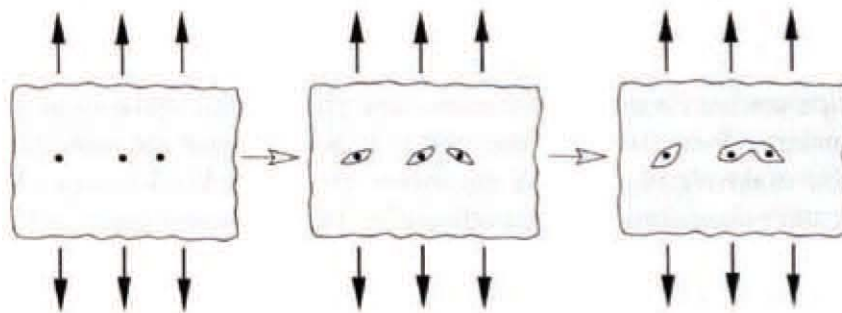


Abbildung 105: Lochbildung und Lochvereinigung, ausgelöst durch eingeschlossene Partikel [20]

Anhang A.2 Ausbreitung und Arten makroskopischer Risse

In der Kontinuumsmechanik sind, makroskopisch betrachtet, in jedem Material bereits Risse vorhanden. Diese Risse können entweder makroskopische Risse sein oder sehr kleine Risse sein, die nur hypothetisch angenommen werden. Wenn man nun die eigentliche Rissentstehung, die nicht mit der Kontinuumsmechanik beschrieben werden kann, ausklammert, ist das Risswachstum der entscheidende Prozess im Verlauf des Bruchvorganges.

Liegt noch kein Risswachstum vor, das heißt der Riss verändert sich in seiner Größe nicht, spricht man von einem *stationären* Riss. Wird ein bestimmter Spannungszustand oder Belastungszustand erreicht, beginnt sich der Riss auszubreiten, so dass ein *instationärer* Riss vorliegt. Der Beginn der Rissausbreitung wird auch *Rissinitüierung* genannt. Es gibt mehrere Möglichkeiten der *Riss-*

ausbreitung. Falls zur Vergrößerung eines Risses eine Erhöhung der Belastung notwendig ist, wird das Risswachstum als *stabil* bezeichnet. Breitet sich ein Riss aber ohne weitere Belastungserhöhung spontan aus, spricht man von einem *instabilen* Risswachstum. Erfolgt die Rissausbreitung allmählich unter konstanter Belastung, so bezeichnet man dies als *subkritisches* Risswachstum. Dies ist vor allem für Kriech-, Schwing- und Ermüdungsbrüche charakteristisch. Geht ein sich schnell ausbreitender Riss in einen stationären Riss über, spricht man von *Rissauffang* oder *Rissarrest*. Die unterschiedlichen Möglichkeiten der Rissausbreitung sind schematisch in Abb. 106 auf Seite 157 dargestellt.

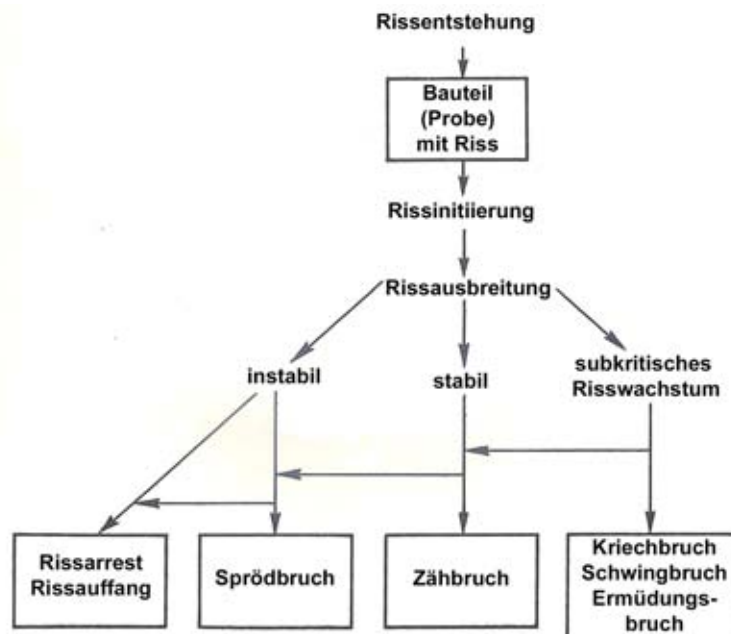


Abbildung 106: Mögliche Bruchvorgänge; von der Rissentstehung bis zum eigentlichen Bruch (in Anlehnung an [6])

Ein mögliches Ende des Bruchvorganges ist, dass der Riss sich nicht mehr ausbreitet, wenn ein Rissarrest vorliegt, oder wenn der Körper vollständig durchtrennt ist. Das Bruchereignis als Ganzes lässt sich in unterschiedliche Brucharten einteilen, die jeweils typische Bruchmerkmale aufweisen. Der *duktile* Bruch (*Zähbruch*) ist durch die sichtbaren plastischen Verformungen um die Bruchstelle gekennzeichnet. Von einem *Sprödbruch* wird, im Gegensatz zum Zähbruch, dann gesprochen wenn nur sehr kleine inelastische Deformationen auftreten. Außerdem unterscheidet man noch den *Schwingbruch* oder *Ermüdungsbruch*, der durch zyklische Beanspruchung auftritt und den *Kriechbruch*, der als Folge von Kriechverformungen eintritt.

Welches Bruchverhalten eintritt, hängt von vielen Faktoren, wie Temperatur, Geschwindigkeit der Lastaufbringung oder dem Spannungszustand ab. So ist es möglich, dass sich ein und das selbe Material unter verschiedenen Temperaturen einmal spröde und einmal duktil verhält.

Genauso wie bei den Mikrorissen lässt sich auch bei den makroskopischen Rissen eine charakteristische Größe einführen, die jene Arbeit beschreibt, die von den Bindungskräften geleistet wird, während neue Bruchflächen geschaffen werden. Diese sogenannte *effektive Bruchflächenenergie* Γ , analog zu der Oberflächenenergie, ist als

$$\Gamma = \gamma \cdot A \quad (456)$$

definiert. Wobei γ die *spezifische Bruchflächenenergie* und A die makroskopische Bruchfläche darstellt.

Anhang B Lineare Bruchmechanik

In diesem Anhang wird ein Überblick über die Lineare Bruchmechanik, ausgehend von den unterschiedlichen Rissöffnungsarten über den Spannungs- und Verzerrungszustand bis hin zu einem Bruchkriterium gegeben. Dies erfolgt unter Verwendung der grundlegenden Literatur über Festigkeitslehre von Mang und Hofstetter [46] als auch der Literatur über die Grundlagen der Bruchmechanik von Gross [20], Hahn [23] und Rossmannith [56] und [57]. Weiters wird auch noch die Literatur von Blumenauer und Push [6] über technische Bruchmechanik berücksichtigt.

Anhang B.1 Allgemeines

Ein Riss, aus makroskopischer Sicht, kann als Einschnitt in einem Körper aufgefasst werden. Wie in Abb. 107 auf Seite 158 ersichtlich, weist ein Riss eine gewisse *Rissbreite*, *Risslänge* und *Risstiefe* auf. Die neu geschaffenen Oberflächen werden als *Rissoberflächen* bezeichnet, welche durch die sogenannten *Rissufer* oder *Rissflanken* begrenzt sind. Die *Rissfront* oder *Rissspitze* ist der vorderste Teil des Risses, an dem dieser auch endet.

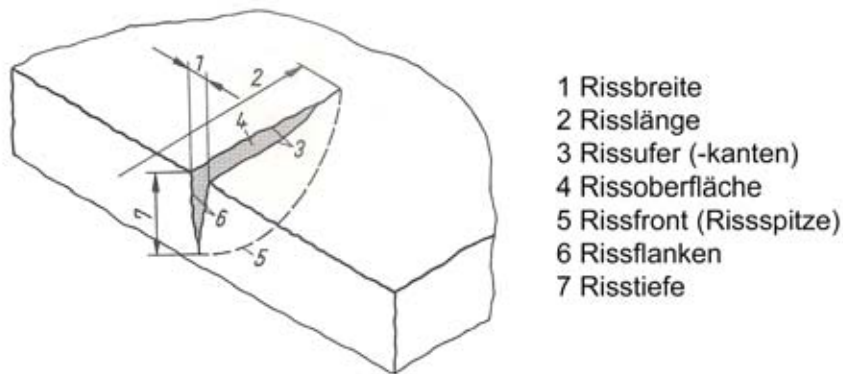


Abbildung 107: Rissgeometrie [6]

Wie in Abb. 108 auf Seite 159 dargestellt, kann man die Art wie ein Riss zustande kommt prinzipiell in drei *Rissöffnungsarten* unterteilen. *Modus I* ist durch das symmetrische Auseinanderklaffen der beiden Rissoberflächen in y -Richtung gekennzeichnet. Die *Modus II* Rissöffnung ist allerdings asymmetrisch und erfolgt durch eine Verschiebung der beiden Rissoberflächen zueinander, normal auf die Rissfront. Durch eine Relativbewegung der Rissoberflächen tangential zu der Rissfront ist der *Modus III* gekennzeichnet. Diese Rissöffnungsarten können entweder nur auf die unmittelbare Umgebung der Rissfront beschränkt sein, oder aber auch auf den gesamten Körper zutreffen.

Einen wesentlichen Einfluss auf den Bruchvorgang hat die sogenannte *Prozesszone* (siehe auch Abb. 112 auf Seite 163). Darunter wird jener Bereich um die Rissfront (Rissspitze) verstanden, in dem der mikroskopische Prozess der Bindungslösung stattfindet. Dieser komplexe Vorgang kann allerdings mit den Mitteln der linearen Bruchmechanik und Kontinuumsmechanik nicht beschrieben werden. Demzufolge wird dieser Bereich als vernachlässigbar klein gegenüber den Abmessungen des eigentlichen Körpers angenommen, was in vielen Fällen auch zutreffend ist. Eine weitere Einschränkung der linearen Bruchmechanik ist, dass der gesamte Körper als linear elastisch angenommen wird.

Abgesehen von der Prozesszone hat das *Rissspitzenfeld* einen erheblichen Einfluss auf den gesamten Bruchvorgang. Unter dem Rissspitzenfeld versteht man die Umgebung der Rissspitze mit den vorherrschenden Spannungszuständen und Verformungen. Deshalb ist es mit Hilfe des Rissspitzenfeldes möglich indirekt die Vorgänge der Prozesszone zu bestimmen. In Anhang B.2 wird das

Risspitzenfeld für ein isotropes linear elastisches Material unter statischer Beanspruchung genauer analysiert.

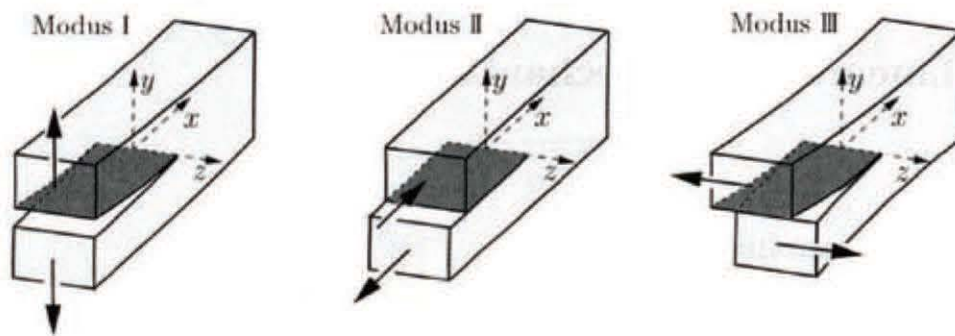


Abbildung 108: Rissöffnungsarten [20]

Anhang B.2 Das Risspitzenfeld

In diesem Abschnitt wird das Risspitzenfeld als zweidimensionales Problem behandelt. Dabei wird, wie in Abb. 109 auf Seite 159 dargestellt, die unmittelbare Umgebung mit dem Radius R um die Risspitze untersucht. Aus diesem Grund wird auch ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in die Risspitze gelegt.

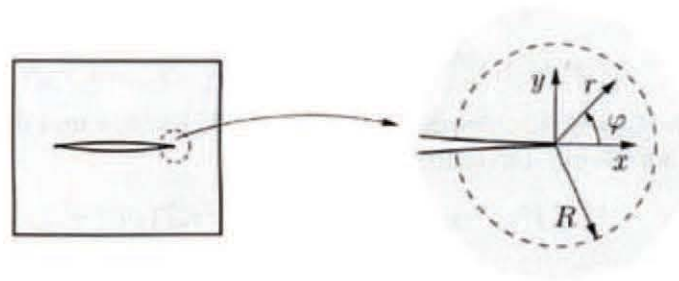


Abbildung 109: Risspitzenfeld (Umgebung der Risspitze) [20]

- **Modus III (entspricht longitudinalem Schub)**

Da durch longitudinalen Schub nur Verschiebungen senkrecht zu der x,y -Ebene auftreten, was der Rissöffnung Modus III entspricht, stellt dieser Spannungszustand ein einfaches ebenes Problem dar. Um die Spannungen und Verschiebungen im Risspitzenfeld zu erhalten, ist nämlich nur eine komplexe Funktion notwendig. Über die Lösung eines Eigenwertproblems führt diese komplexe Funktion auf die Spannungen und Verschiebungen, die sich als Summe der zu den Eigenwerten gehörenden Eigenfunktionen wie folgt anschreiben lassen:

$$\tau_{\alpha z} = r^{-1/2} \cdot \hat{\tau}_{\alpha z}^{(1)}(\varphi) + \hat{\tau}_{\alpha z}^{(2)}(\varphi) + r^{1/2} \cdot \hat{\tau}_{\alpha z}^{(3)}(\varphi) + \dots \quad (457)$$

$$w - w_0 = r^{1/2} \cdot \hat{w}^{(1)}(\varphi) + r \cdot \hat{w}^{(2)}(\varphi) + r^{3/2} \cdot \hat{w}^{(3)}(\varphi) + \dots \quad (458)$$

Dabei sind $\tau_{\alpha z}$ mit $\alpha = x, y$ die Spannungen und w die Verschiebung normal zur x,y -Ebene. $\hat{\tau}_{\alpha z}^{(1)}(\varphi)$ und $\hat{w}^{(1)}(\varphi)$ sind Funktionen des Winkels φ und w_0 und machen es möglich eine

Starrkörperverschiebung zu beschreiben. Betrachtet man nur die unmittelbare Umgebung der Risspitze ($r \rightarrow 0$), dann können alle Terme, bis auf den ersten Term von den Gleichungen (457) und (458) vernachlässigt werden. So dass man die zum Rissspitzenfeld zugeordneten Spannungen und Verschiebungen als

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi/2) \\ \cos(\varphi/2) \end{Bmatrix} \quad (459)$$

$$w = \frac{2 \cdot K_{III}}{G} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin(\varphi/2) \quad (460)$$

mit

K_{III} ... Spannungsintensitätsfaktor
 G ... Schubmodul

anschreiben kann. Es ist deutlich zu erkennen, dass das Rissspitzenfeld durch den Faktor K_{III} , den sogenannten **Spannungsintensitätsfaktor**, bestimmt wird, der auch kurz K-Faktor genannt wird. Der Index weist darauf hin, dass es sich dabei um eine Modus III Rissöffnung handelt. Durch diesen Faktor lässt sich das Rissspitzenfeld charakterisieren und gibt dessen "Stärke" an. Sind die Spannungen und Verschiebungen in der Nähe der Risspitze bekannt, lässt sich der Spannungsintensitätsfaktor mit

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \tau_{yz}(\varphi = 0) \quad (461)$$

bestimmen. Abgesehen von den Spannungen und Verschiebungen ist der K-Faktor auch noch von der geometrischen Form und der Belastung des Körpers abhängig.

• Modus I und Modus II unter der Bedingung eines EVZ und eines ESZ

Die Spannungen und Verschiebungen für die Modus I und Modus II Rissöffnung erhält man für einen ebenen Verzerrungszustand (EVZ) oder einen ebenen Spannungszustand (ESZ) genauso wie davor für den longitudinalen Schubzustand, nur dass man nun zwei komplexe Funktionen als Ausgangspunkt hat. Nach der Lösung des Eigenwertproblems lassen sich die Spannungen σ_{ij} und Verschiebungen u_i mit $i, j = x, y$ wiederum als Summe der Eigenfunktionen anschreiben.

$$\sigma_{ij} = r^{-1/2} \cdot \hat{\sigma}_{ij}^{(1)}(\varphi) + \hat{\sigma}_{ij}^{(2)}(\varphi) + r^{1/2} \cdot \hat{\sigma}_{ij}^{(3)}(\varphi) + \dots \quad (462)$$

$$u_i - u_{i0} = r^{1/2} \cdot \hat{u}_i^{(1)}(\varphi) + r \cdot \hat{u}_i^{(2)}(\varphi) + r^{3/2} \cdot \hat{u}_i^{(3)}(\varphi) + \dots \quad (463)$$

Durch u_{i0} ist es möglich eine Starrkörperverschiebung zu beschreiben. Beschränkt man sich nun wiederum nur auf die unmittelbare Umgebung von der Risspitze ($r \rightarrow 0$) so ist nur der erste Term der Gleichungen (462) und (463) maßgebend. Dementsprechend lassen sich für das Nahfeld die Spannungen und Verschiebungen für **Modus I** Rissöffnung zu:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos(\varphi/2) \begin{Bmatrix} 1 - \sin(\varphi/2) \cdot \sin(3\varphi/2) \\ 1 + \sin(\varphi/2) \cdot \sin(3\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) \cdot \cos(3\varphi/2) \end{Bmatrix} \quad (464)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2 \cdot G} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot (\kappa - \cos \varphi) \begin{Bmatrix} \cos(\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) \end{Bmatrix} \quad (465)$$

und für *Modus II* Rissöffnung zu:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi/2) \cdot [2 + \cos(\varphi/2) \cdot \cos(3\varphi/2)] \\ \sin(\varphi/2) \cdot \cos(\varphi/2) \cdot \cos(3\varphi/2) \\ \cos(\varphi/2) \cdot [1 - \sin(\varphi/2) \cdot \sin(3\varphi/2)] \end{Bmatrix} \quad (466)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2 \cdot G} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \begin{Bmatrix} \sin(\varphi/2) \cdot [\kappa + 2 + \cos \varphi] \\ \cos(\varphi/2) \cdot [\kappa - 2 + \cos \varphi] \end{Bmatrix} \quad (467)$$

mit

$$\text{EVZ:} \quad \kappa = 3 - 4\nu \quad \sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \quad (468)$$

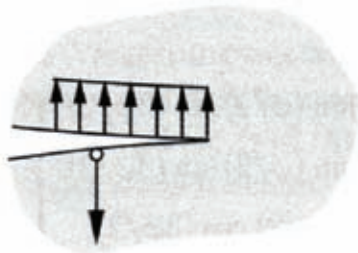
$$\text{ESZ:} \quad \kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \sigma_z = 0 \quad (469)$$

angeben. Durch die Spannungsintensitätsfaktoren K_I und K_{II} lässt sich wiederum die "Stärke" des Rissspitzenfeldes bestimmen. Genauso wie bei Modus III lassen sich auch hier die K-Faktoren über die Spannungen und Verschiebungen ermitteln, sofern diese bekannt sind.

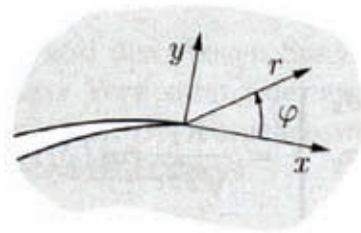
$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \sigma_y(\varphi = 0) \quad (470)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \tau_{xy}(\varphi = 0) \quad (471)$$

Durch die Gleichungen (459) und (460) sowie (464) bis (467) ist das Nahfeld um die Risspitze bestimmt. Dies gilt nicht nur für den wie in Abb. 109 auf Seite 159 angenommenen Fall eines *geraden* Risses mit *unbelasteten* Rissflanken, sondern auch wenn Kräfte an den Rissufer angreifen sollten (siehe Abb. 110(a) auf Seite 161) oder auch wenn der Riss im Bereich der Spitze gekrümmt sein sollte (siehe Abb. 110(b) auf Seite 161).



(a)



(b)

Abbildung 110: belastetes Rissufer sowie gekrümmter Riss im Bereich der Risspitze [20]

• Dreidimensionales Rissspitzenfeld

Ist die Rissfront gekrümmt (pfennigförmiger Innenriss oder halb elliptischer Oberflächenriss; siehe Abb. 111(a) auf Seite 162), oder ändert sich der Spannungszustand an der Rissfront über die Dicke des Körpers, reicht es nicht mehr aus, das Problem als ein zweidimensionales zu behandeln. In diesen Fällen ist es notwendig ein dreidimensionales Rissspitzenfeld zu betrachten, um das Problem analysieren zu können. Man kann davon ausgehen, dass für den dreidimensionalen Fall das Rissspitzenfeld lokal als ein ebenes Problem angenommen werden kann. Demzufolge ist es möglich das dreidimensionale Rissspitzenfeld aus den zuvor erläuterten drei Modi der Rissöffnung zu beschreiben. Wird nun, wie in Abb. 111(b) auf Seite 162 dargestellt, ein Koordinatensystem in einen Punkt P der Rissfront gelegt, so gilt für die Spannungen im Nahfeld ($r \rightarrow 0$) des Rissspitzenfeldes

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} [K_I \cdot \tilde{\sigma}_{ij}^I(\varphi) + K_{II} \cdot \tilde{\sigma}_{ij}^{II}(\varphi) + K_{III} \cdot \tilde{\sigma}_{ij}^{III}(\varphi)]. \quad (472)$$

In dieser Gleichung sind $\tilde{\sigma}_{ij}^I(\varphi)$, $\tilde{\sigma}_{ij}^{II}(\varphi)$ und $\tilde{\sigma}_{ij}^{III}(\varphi)$ Winkelfunktionen, die durch die Gleichungen (459), (464) und (466) bestimmt sind. Somit ist ersichtlich, dass die Umgebung der Rissfront durch die drei Spannungsintensitätsfaktoren K_I , K_{II} und K_{III} , die sich allerdings entlang der Rissfront ändern können ($K_I = K_I(s)$), charakterisiert werden kann.

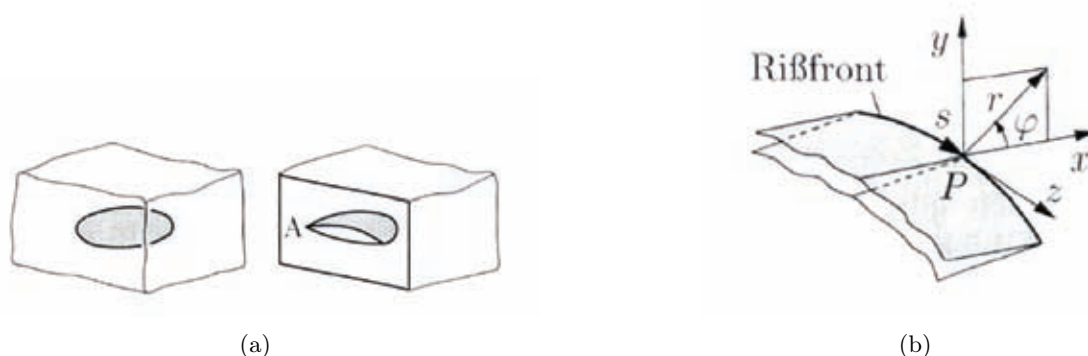


Abbildung 111: dreidimensionales Rissspitzenfeld [20]

Anhang B.3 Das K-Konzept

Für die nachfolgenden Überlegungen wird vorerst nur die Modus I Rissöffnung berücksichtigt. Wie in Anhang B.2 beschrieben, wird das Rissspitzenfeld durch den Spannungsintensitätsfaktor K_I eindeutig charakterisiert. Der Bereich um die Rissspitze, für den dies zutrifft, ist allerdings beschränkt und ist in Abb. 112 auf Seite 163 mit dem Radius R bezeichnet, da nur hier die Terme höherer Ordnung, aus den Gleichungen (462) und (463) vernachlässigt werden können. Außerdem ist der Bereich, der durch K_I bestimmt wird, auch zur Rissspitze hin begrenzt, da unmittelbar bei der Rissspitze die Prozesszone lokalisiert ist, deren charakteristische Abmessung in Abb. 112 auf Seite 163 mit ρ gekennzeichnet ist. Zwischen Prozesszone und K_I -bestimmtem Feld gibt es noch einen plastischen Bereich, in dem die Spannungen so hoch sind, dass sich jedes Material stark inelastisch verformt. Diese plastische Zone ist durch den Radius r_p in Abb. 112 auf Seite 163 gekennzeichnet.

Wird allerdings angenommen, dass der von K_I -bestimmte Bereich groß gegenüber der Prozesszone und der plastischen Zone ist, kann angenommen werden, dass dieser eingeschlossene Bereich von

dem K_I -bestimmten Feld gesteuert wird. Diese wichtige Annahme liegt dem *K-Konzept* zugrunde und ermöglicht die Aussage, dass die Prozesszone und die plastische Zone indirekt durch den Spannungsintensitätsfaktor K_I charakterisiert werden können. Dieser sogenannte K-Faktor kann nun, vergleichbar mit Spannungen, als Zustandsgröße betrachtet werden. Er beschreibt die "Belastung" des Rissspitzenfeldes. Daraus lässt sich nun ein Bruchkriterium formulieren, indem man eine materialspezifische Größe K_{Ic} einführt, bei dem der Bruch (Rissfortschritt) einsetzt, sobald der Spannungsintensitätsfaktor K_I diese Größe erreicht.

$$\boxed{K_I = K_{Ic}} \quad (473)$$

Ist dieser Zustand erreicht, kommt es in der Prozesszone zu einer Bindungslösung und damit verbunden zu einer Separation, die dann den Bruch des Materials zur Folge hat. Allerdings muss darauf hingewiesen werden, dass dabei angenommen wird, dass dieser Vorgang allein von der Größe des K-Faktors abhängt und nicht von der Belastungsgeschichte der Risspitze beeinflusst wird. Die **Bruchzähigkeit**, wie die Größe K_{Ic} genannt wird, ist ein Materialkennwert und kann mit entsprechenden Experimenten (siehe Anhang B.4) bestimmt werden.

Bis jetzt wurde nur die reine Modus I Rissöffnung betrachtet, aber die gleichen Überlegungen gelten ebenfalls für reine Modus II und Modus III Rissöffnung, so dass man, analog zu Gleichung (473), folgende Gleichungen aufstellen kann:

$$K_{II} = K_{IIc} \quad \text{Modus II} \quad (474)$$

$$K_{III} = K_{IIIc} \quad \text{Modus III} \quad (475)$$

Liegt eine kombinierte Rissöffnung vor, so lässt sich durch alle drei K-Faktoren, K_I , K_{II} und K_{III} ein allgemeines Bruchkriterium durch

$$f(K_I, K_{II}, K_{III}) = 0 \quad (476)$$

angeben.

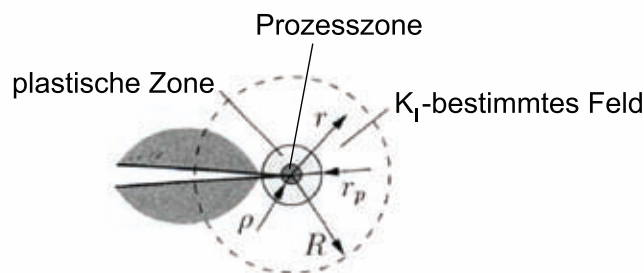
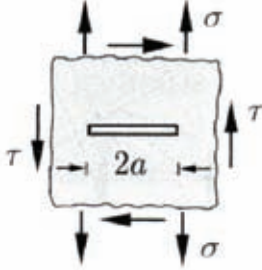
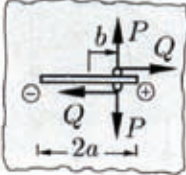
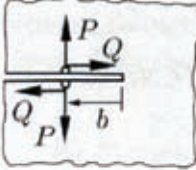
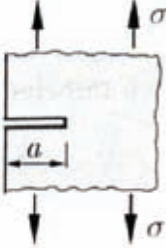
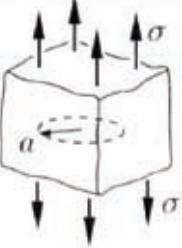


Abbildung 112: K-Konzept [20]

• K-Faktoren

Die Dimension der K-Faktoren ist $[\text{Spannung}] \cdot [\text{Länge}]^{1/2}$ und wird meist als $Nmm^{-3/2}$ oder $MPamm^{1/2}$ angegeben. Da wie bereits erläutert, die K-Faktoren eine entscheidende Rolle bei der Problematik des Bruchvorganges spielen, ist die Bestimmung dieser essentiell. Prinzipiell ist es möglich mit Hilfe der Formeln (461), (470) und (471) die Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren auf die Ermittlung der Spannungen und Verformungen zurück zu führen. Abgesehen davon ist es aber auch möglich über analytische Verfahren K-Faktoren zu erhalten. Ist das Problem von komplexerer Gestalt, kommen auch numerische und experimentelle Methoden zum Einsatz. Da allerdings Tabellenwerke für K-Faktoren, für die unterschiedlichsten Rissproblematiken existieren (siehe hierzu [50]), wird nicht näher auf die genaue Ermittlung dieser eingegangen, sondern nur exemplarisch ein Auszug aus diesen Tabellen angegeben.

Tabelle 7: K-Faktoren [20] und [50]

Risskonfiguration	K-Faktor
	$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$
	$\begin{Bmatrix} K_I^\pm \\ K_{II}^\pm \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot a}} \sqrt{\frac{a \pm b}{a \mp b}}$
	$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot b}}$
	$K_I = 1.1215 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$
	$K_I = \frac{3}{\pi} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a}$

Anhang B.4 Die Bruchzähigkeit

Die experimentelle Bestimmung der Bruchzähigkeit K_{Ic} erfolgt nach dem internationalen ASTM-Standard (*American Society for Testing and Materials*). In Abb. 113 auf Seite 165 sind zwei mögliche Versuchsanordnungen dargestellt, mit denen es möglich ist K_{Ic} zu bestimmen. Wesentlich ist, dass die Proben bereits über Anrisse verfügen. Falls dies der Fall ist, kann man über die aufgebrachte Belastung, bei der die Rissausbreitung einsetzt, die Bruchzähigkeit berechnen.

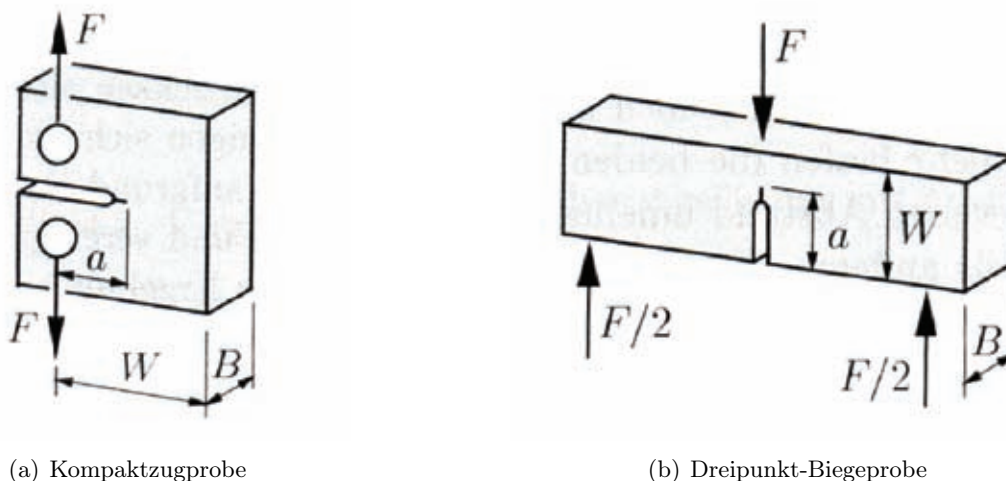


Abbildung 113: Experimentelle Ermittlung der Bruchzähigkeit [20]

Allerdings ist die Bruchzähigkeit nicht nur abhängig vom untersuchten Material sondern auch von einigen anderen Faktoren, wie zum Beispiel der Belastungsgeschichte (Belastungen vor der experimentellen Bestimmung der Bruchzähigkeit), der Temperatur oder des Umgebungsmediums. Außerdem ist natürlich auch die Mikrostruktur (z.B. Korngröße) noch ein wesentlicher Einflussparameter der Bruchzähigkeit. Um einen groben Überblick über die Größenordnung von K_{Ic} zu bekommen, sind in Tab. 8 auf Seite 165 einige Werte für die Bruchzähigkeit verschiedener Werkstoffe gegeben, die aber lediglich als Richtwerte verstanden werden sollten.

Tabelle 8: Bruchzähigkeit einiger Werkstoffe [20]

Material	$K_{Ic}[MPa\sqrt{mm}]$
hochfeste Stähle	800 ... 3000
Baustähle	1000 ... 4000
Al-Legierungen	600 ... 2000
Al_2O_3 -Keramik	120 ... 300
Marmor	40 ... 70
Glas	20 ... 40
Beton	5 ... 30

Anhang B.5 Energiebilanz

• Energiebetrachtung bei Rissausbreitung

Bevor auf die Energiebilanz während des Rissfortschrittes eingegangen wird, ist es von Vorteil den *Energiesatz* der Kontinuumsmechanik anzuschreiben

$$\dot{E} + \dot{K} = P + Q, \quad (477)$$

mit

\dot{E} ... Änderung der inneren Energie über die Zeit

\dot{K} ... Änderung der kinetischen Energie über die Zeit

P ... Leistung der äußeren Kräfte

Q ... Energietransport in den Körper, der nicht von P erfasst wird, wie zum Beispiel der Wärmetransport

In Worten ausgedrückt besagt dieser, dass die Änderung der Gesamtenergie eines Körpers der Energie, die dem Körper zugeführt wird, entspricht. Die Gleichung (477) lässt sich auch in der folgenden Form anschreiben:

$$(E + K)_2 - (E + K)_1 = \int_{t_1}^{t_2} (P + Q) dt \quad (478)$$

Wobei die tiefgestellten Zahlen links vom Gleichheitszeichen die Summen der inneren Energie und kinetischen Energie zum Zeitpunkt 2 und zum Zeitpunkt 1 darstellen. Für den Spezialfall eines quasistatisch belasteten ($\dot{K} = 0$) elastischen Materials bei dem außerdem $Q = 0$ ist, kann man den Energiesatz durch

$$\Pi_2^i - \Pi_1^i = W_{12}^a \quad (479)$$

anschreiben. Dabei berücksichtigt man außerdem

$$\begin{aligned} \Pi^i &= \int_V U dV \\ &= \int_V \rho e dV = E \end{aligned} \quad (480)$$

$$\begin{aligned} W_{12}^a &= \int_{\partial V} \left[\int_{u_1}^{u_2} \mathbf{t} du \right] dA \\ &= \int_{\partial V} \mathbf{t} \dot{\mathbf{u}} dA = P \end{aligned} \quad (481)$$

mit

U ... Verzerrungsenergiedichte

ρ ... Massendichte [Masse/Länge³]

e ... Beschleunigung

\mathbf{t} ... Spannungsvektor ($\mathbf{t} = t_i$)

\mathbf{u} ... Verschiebungsvektor

Dabei wird Π^i als elastisches Potential oder Formänderungsenergie und W_{12}^a als Arbeit der äußeren Kräfte bezeichnet.

Nun wird ein, wie in Abb. 114 auf Seite 167 dargestellter elastischer Körper mit einem Riss, auf dessen Rand ∂V_t äußere Lasten (z.B.: Totlasten oder Federkräfte) wirken und dessen Verschiebungen entlang des Randes ∂V_u festgehalten werden, betrachtet.

zur Folge hat, dass die an dem Rand angreifenden Kräfte keine Arbeit leisten können und somit das äußere Potential gleich Null ist ($\Delta\Pi^a = 0$), vereinfacht sich die Gleichung (485) zu

$$\Delta\Pi^i = \Delta W_\sigma. \quad (486)$$

Der andere Sonderfall nimmt ein elastisches Materialverhalten und Totlasten als äußere Belastung an. Demzufolge gilt der *Satz von Clapeyron* ($2\Pi^i = -\Pi^a$ oder $2\Pi^i + \Pi^a = 0$), so dass man über

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi^i + \Pi^a = -\frac{\Pi^a}{2} + \Pi^a \\ &= \frac{\Pi^a}{2} \end{aligned} \quad (487)$$

und mit Hilfe der Gleichung (486) das Ergebnis

$$\Delta\Pi = -\Pi^i = \frac{\Pi^a}{2} = \Delta W_\sigma \quad (488)$$

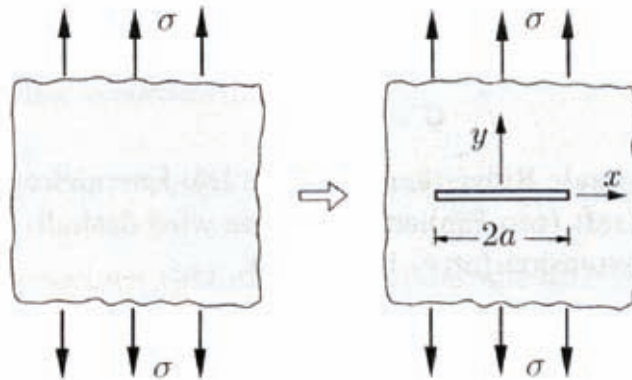


Abbildung 115: Energiefreisetzung bei Rissbildung [20]

erhält. Als Anwendung wird nun, wie in Abb. 115 auf Seite 168 zu sehen, eine unendlich ausgedehnte Ebene angenommen, die unter einachsiger Zug σ steht. Durch diese Belastung entsteht in der Ebene ein Riss mit der Länge $2a$. Mit Hilfe der Gleichung

$$v = \frac{1 + \kappa}{4 \cdot G} \cdot \sigma \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \quad (489)$$

für die Verschiebung des oberen Rissufers, lässt sich die Arbeit ΔW_σ für die Rissöffnung berechnen. Dies ist die Summe von der Arbeit, die am oberen und unteren Rissufer durch die Spannung geleistet wird.

$$\begin{aligned}
\Delta W_\sigma &= -2 \cdot \int_{-a}^a \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot v \, dx \\
&= -2 \cdot \int_{-a}^a \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \frac{1+\kappa}{4 \cdot G} \cdot \sigma \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \\
&= -\sigma^2 \cdot \frac{1+\kappa}{4 \cdot G} \cdot \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \\
&= -\sigma^2 \cdot a^2 \cdot \pi \cdot \frac{1+\kappa}{8 \cdot G}
\end{aligned} \tag{490}$$

Somit erhält man, sofern die im Unendlichen angreifenden Lasten Totlasten sind (Lasten bleiben konstant)

$$\Delta \Pi = -\Delta \Pi^i = \frac{\Delta \Pi^a}{2} = -\sigma^2 \cdot a^2 \cdot \pi \cdot \frac{1+\kappa}{8 \cdot G}. \tag{491}$$

Werden Verschiebungen im Unendlichen verhindert, so gilt nach dem ersten Sonderfall

$$\Delta \Pi = \Delta \Pi^i = -\sigma^2 \cdot a^2 \cdot \pi \cdot \frac{1+\kappa}{8 \cdot G}. \tag{492}$$

Die Potentialdifferenzen der Gleichungen (492) und (491) sind beide gleich und unterscheiden sich nur im Vorzeichen von $\Delta \Pi^i$. Die zwei Gleichungen (492) und (491) beschreiben das Potential der Ebene mit Riss, da das Potential der Ebene ohne Riss Null gesetzt werden kann. Abschließend sei auch noch darauf hingewiesen, dass bei den Sonderfällen (Gleichungen (486) bis (492)) nur das ebene Problem (Ermittlung der Arbeiten pro Einheitsdicke) behandelt wurde.

- **Energiefreisetzungsrate**

Das Verhältnis (siehe Gleichung (493)) von freigesetzter Energie $-d\Pi$, bei infinitesimalem Rissfortschritt, zu der dabei neu entstandenen Fläche dA bezeichnet man als **Energiefreisetzungsrate** (energy release rate).

$$\mathcal{G} = -\frac{d\Pi}{dA} \tag{493}$$

Betrachtet man nur das ebene Problem, so wird die freigesetzte Energie auf die Rissverlängerung da bezogen.

$$\mathcal{G} = -\frac{d\Pi}{da} \tag{494}$$

Da die Energiefreisetzungsrate die Dimension einer Kraft pro Länge hat, wird sie auch als **Rissausbreitungskraft** (crack extension force) bezeichnet, da man sie als jene Kraft, die einen Riss öffnet und ausbreitet, auffassen kann. Die Energiefreisetzungsrate lässt sich durch die K-Faktoren ausdrücken, was exemplarisch für die Modus I Rissöffnung gezeigt wird (siehe hierzu auch Abb. 116 auf Seite 170).

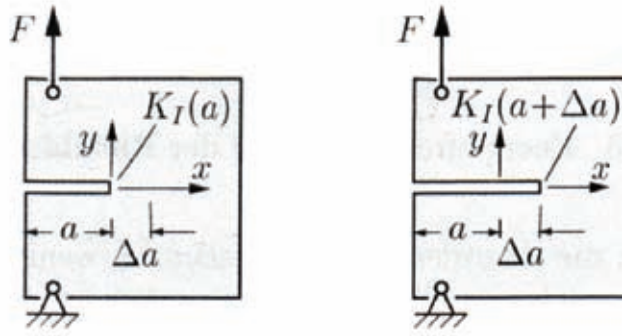


Abbildung 116: Darstellung zur Ermittlung der Energiefreisetzungsrate bei Modus I Rissöffnung [20]

In dem Körper vor dem Rissfortschritt wird wieder ein Riss mit Länge Δa angenommen, an dem die Normalspannungen laut Gleichung (464) mit

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos(\varphi/2) \cdot [1 + \sin(\varphi/2) \cdot \sin(3\varphi/2)]$$

\Rightarrow mit $r = x$ und $\varphi = 0$ (495)

$$\sigma_y(x) = \frac{K_I(a)}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \quad (496)$$

als äußere Kräfte angreifen. Diese Spannungen werden während der tatsächlichen Rissausbreitung auf Null reduziert, da beim dann vorliegenden Riss die Rissfronten unbelastet sind. Die obere und untere Rissfront des Risses Δa verschiebt sich laut der Gleichung (465) mit

$$v(x) = \frac{K_I(a + \Delta a)}{2 \cdot G} \cdot \sqrt{\frac{\Delta a - x}{2 \cdot \pi}} \cdot (\kappa + 1). \quad (497)$$

Somit lässt sich die Arbeit ΔW_σ bei Rissfortschritt wie folgt anschreiben:

$$\begin{aligned} \Delta W_\sigma = \Delta \Pi &= 2 \cdot \int_0^{\Delta a} -\frac{1}{2} \cdot \sigma_y(x) \cdot v(x) dx \\ &= - \int_0^{\Delta a} \frac{K_I(a)}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \frac{K_I(a + \Delta a)}{2 \cdot G} \cdot (\kappa + 1) \cdot \sqrt{\frac{\Delta a - x}{2 \cdot \pi}} \\ &= -\frac{\kappa + 1}{2 \cdot G} \cdot K_I(a) \cdot K_I(a + \Delta a) \cdot \int_0^{\Delta a} \sqrt{\frac{\Delta a - x}{4 \cdot \pi^2 \cdot x}} dx \\ &= -\frac{\kappa + 1}{4 \cdot G \cdot \pi} \cdot K_I(a) \cdot K_I(a + \Delta a) \cdot \int_0^{\Delta a} \sqrt{\frac{\Delta a - x}{x}} dx \end{aligned} \quad (498)$$

Das Integral aus der letzten Zeile dieser Gleichung hat den Wert $\frac{\Delta a \cdot \pi}{2}$, so dass sich die Gleichung (498) zu

$$\Delta W_\sigma = \Delta \Pi = -\frac{(\kappa + 1) \cdot \pi}{4 \cdot G \cdot \pi \cdot 2} \cdot K_I(a) \cdot K_I(a + \Delta a) \cdot \Delta a \quad (499)$$

vereinfacht. Dividiert man nun Gleichung (499) mit Δa und führt daraufhin den Grenzübergang $\Delta a \rightarrow 0$ durch, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\Delta \Pi}{\Delta a} \right\} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left\{ \frac{\kappa + 1}{8 \cdot G} \cdot K_I(a) \cdot K_I(a + \Delta a) \right\} \\ \mathcal{G} &= -\frac{d\Pi}{da} = \frac{\kappa + 1}{8 \cdot G} \cdot K_I^2. \end{aligned} \quad (500)$$

Für den ebenen Spannungszustand und den ebenen Verzerrungszustand lässt sich die Gleichung (500), unter Berücksichtigung des allgemeinen Zusammenhanges zwischen Schubmodul und Elastizitätsmodul $E = 2G \cdot (1 + \nu)$ ([46]) und den Gleichungen (468) und (469) zu

$$\mathbf{ESZ:} \quad (501)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{\frac{3-\nu}{1+\nu} + 1}{8 \cdot G} \cdot K_I^2 \\ &= \frac{\frac{(3-\nu)+(1+\nu)}{1+\nu}}{8 \cdot G} \cdot K_I^2 \\ &= \frac{4}{(1+\nu) \cdot 8 \cdot G} \cdot K_I^2 \\ &= \frac{K_I^2}{E} \end{aligned} \quad (502)$$

$$\mathbf{EVZ:} \quad (503)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{(3 - 4 \cdot \nu) + 1}{8 \cdot G} \cdot K_I^2 \\ &= \frac{4 \cdot (1 - \nu)}{8 \cdot G} \cdot K_I^2 \\ &= \frac{(1 - \nu) \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot K_I^2 \\ &= \frac{(1 - \nu^2) \cdot K_I^2}{E} \end{aligned} \quad (504)$$

anschreiben. Analog zu der eben beschriebenen Möglichkeit für Modus I Rissöffnung die Energiefreisetzungsrate mit dem Spannungsintensitätsfaktor auszudrücken, erhält man auch die Energiefreisetzungsrate für Modus II und Modus III Rissöffnung.

$$\mathcal{G} = \frac{\kappa + 1}{8 \cdot G} \cdot K_{II}^2 \quad (\text{Modus II}) \quad (505)$$

$$\mathcal{G} = \frac{\kappa + 1}{8 \cdot G} \cdot K_{III}^2 \quad (\text{Modus III}) \quad (506)$$

Für den allgemeinen Fall eines Rissfortschrittes unter Kombination aller drei Rissöffnungsmodi, kann man die Energiefreisetzungsrate zu

$$\mathcal{G} = \frac{1}{E'} \cdot (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2 \cdot G} \cdot K_{III}^2 \quad (507)$$

anschreiben, wobei $E' = E/(1-\nu^2)$ sowohl im EVZ als auch im dreidimensionalen Fall ist und $E' = E$ im ESZ ist.

Es ist aus den Gleichungen (500), (505) und (506) ersichtlich, dass \mathcal{G} direkt von den K-Faktoren abhängig ist. Somit ist in der linearen Bruchmechanik das Bruchkriterium für reine Modi mit den K-Faktoren (siehe Gleichung (473)) äquivalent mit folgendem Bruchkriterium:

$$\boxed{\mathcal{G}_I = \mathcal{G}_c} \quad (508)$$

Darin ist \mathcal{G}_c der **Risswiderstand** oder die **Risswiderstandskraft**, die als Materialkennwert angesehen werden kann. Die Gleichung (508) besagt, dass die bei einem Rissfortschritt freigesetzte Energie gleich der für den Bruchvorgang benötigten Energie ist. Dabei wird das Problem auf der Ebene der Energie betrachtet, was im Folgenden (Zusammenhang zwischen Energiesatz und Griffithschem Bruchkriterium) noch genauer und in modifizierter Form betrachtet wird. Andererseits kann man die Gleichung (508) auch so interpretieren, dass die Rissausbreitungskraft gleich der Risswiderstandskraft sein muss, damit es zum Bruch kommt.

• Zusammenhang zwischen Energiesatz und Griffithschem Bruchkriterium

Wie bereits in Anhang A.1 erläutert, kommt es während dem Bruchvorgang eines Körpers zu Bindungslösungen, die irreversibel sind. Die für diesen Vorgang typischen Energieformen kann man in der Energiebilanz (Gleichung (477)) in einem gesondertem Term $\dot{\Gamma}$ berücksichtigen. Zu diesem Term können unter anderem die Oberflächenenergie oder die Energie, die für die plastischen Verformungen in der Prozesszone benötigt wird, gezählt werden. Somit lässt sich der mit diesem Term ergänzte Energiesatz zu

$$\dot{E} + \dot{K} + \dot{\Gamma} = P + Q \quad (509)$$

anschreiben. Da sich der Prozess der Bindungslösung in der Prozesszone abspielt und dieser Bereich als klein gegenüber dem gesamten betrachteten Körper angenommen werden kann, lässt sich der erweiterte Energiesatz (Gleichung (509)) in einen Teil für die Prozesszone und in einen Teil für den restlichen Körper aufteilen.

$$\text{Prozesszone:} \quad \dot{\Gamma} = -P^* \quad (510)$$

$$\text{restlicher Körper:} \quad \dot{E} + \dot{K} = P + Q + P^* \quad (511)$$

Dabei wird $-P^*$ als jene Energie bezeichnet, die in die Prozesszone hineinfließt und durch

$$P^* = \int_{A_P} t_i \cdot \dot{u}_i dA \quad (512)$$

beschrieben werden kann (siehe auch Gleichung (481)).

Wie in Abb. 117 auf Seite 173 zu sehen, verschiebt sich die Prozesszone bei Rissfortschritt in der Zeit dt und es entsteht die Bruchfläche dA . Dabei werden alle Punkte entlang von dA zuerst durch die in der Prozesszone wirkenden Spannungen (die als äußere Kräfte aufgefasst werden) belastet und sind dann, sobald der Riss ausgebildet ist, vollkommen entlastet. Die bei diesem Prozess geleistete Arbeit lässt sich durch die Gleichung

$$dW_{\Sigma} = P^* dt = \int_{dA^{\pm}} \left[\int_{(1)}^{(2)} t_i du_i \right] d\bar{A} \quad (513)$$

ausdrücken (siehe auch Gleichung (481)).

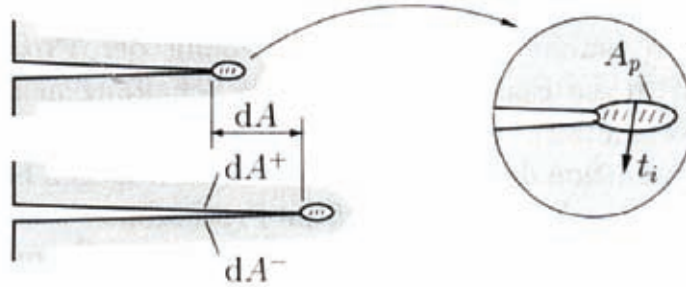


Abbildung 117: [20]

Die Kräfte wirken dabei auf die zwei gegenüberliegenden Flächen, die durch den Rissfortschritt entstehen, was in der Gleichung (513) durch dA^{\pm} verdeutlicht wird. Die Bruchenergie Γ ändert sich durch die Neubildung von Flächen dA während der Rissausbreitung um $d\Gamma$. Wird diese Energieänderung als über die Oberfläche dA^{\pm} verteilt angesehen, lässt sich diese *Bruchflächenenergie* zu

$$d\Gamma = \dot{\Gamma} dt = 2 \cdot \gamma dA \quad (514)$$

anschreiben (vergleiche Anhang A.2 und im Speziellen Gleichung (456)). In dieser Gleichung ist γ wiederum die spezifische Bruchflächenenergie, die entweder als Konstante oder als Funktion (z.B. als Funktion der Rissverlängerung $\Delta a \Rightarrow \gamma(\Delta a)$) angenommen werden kann. Um den Unterschied zwischen $\dot{\Gamma}$ und P^* herauszustreichen, sei hier nochmals darauf hingewiesen, dass $d\Gamma$ jene Energie beschreibt, die bei Risswachstum, durch Neubildung von Bruchflächen in andere Energieformen, wie zum Beispiel Wärme oder Oberflächenenergie, umgewandelt wird. Dies betrifft allerdings nur die Prozesszone, was einen wesentlichen Unterschied zu P^* darstellt, da dieser Parameter die Wirkung des gesamten Kontinuums auf die Prozesszone beschreibt. Beschränkt man sich nun wiederum nur auf elastische Körper und geht überdies noch von einem quasistatischen Risswachstum aus, kann man die Prozesszone als plastischen Bereich um die Rissspitze auffassen. Daraus folgt, dass die Bruchenergie Γ sowohl die Energie für die Bindungslösung als auch die Energie, die für plastische Deformationen benötigt wird, umfasst. Da der Bruchprozess als quasistatisch angenommen wird, kann man die kinetische Energie vernachlässigen. Außerdem wird davon ausgegangen, dass nur P ausschlaggebend ist und sonstige Energietransporte (wie zum Beispiel Wärmetransport), die unter Q zusammengefasst werden, keine Rolle spielen. Wird angenommen, dass die äußeren Kräfte das Potential Π^a haben, lässt sich der Energiesatz (509) unter Berücksichtigung von Gleichung (480) und $\dot{\Pi}^i dt = d\Pi^i$, $\dot{\Gamma} dt = d\Gamma$ und $P dt = -d\Pi^a$ wie folgt anschreiben.

$$\boxed{d\Pi^i + d\Pi^a + d\Gamma = 0} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{d\Pi}{dA} + \frac{d\Gamma}{dA} = 0} \quad (515)$$

Mit Hilfe der Definition für die Energiefreisetzungsrates (Gleichung (493)), sowie der Gleichung (514) und Einführung des Parameters $\mathcal{G}_c = 2 \cdot \gamma$ erhält man aus Gleichung (515) das **Griffithsche Bruchkriterium**.

$$\boxed{\mathcal{G} = \mathcal{G}_c} \quad (516)$$

Dieses Kriterium besagt, dass die Energie die am Beginn und während der Rissausbreitung frei wird (Energiefreisetzungsrates), genau jener Energie entspricht, die für den Bruchprozess benötigt wird.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass das Bruchkriterium basierend auf der Energie, in der linearen Bruchmechanik vollkommen äquivalent mit dem K-Konzept ist. Allerdings kommt das K-Konzept in der Praxis mehr zur Anwendung, da es leichter zu handhaben ist und für viele geometrische Risskonfigurationen bereits K-Faktoren in Handbüchern existieren.