TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

VIENNA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

D I P L O M A R B E I T

Summierung von Jacobi Polynom Reihen durch ein Gronwall Verfahren

ausgeführt am Institut für
Analysis and Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von Univ.Prof. Dr.phil. Roman Schnabl

durch

Maximilian Kleinert

Ditscheinergasse 4/5
1030 Wien

Datum | Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Summierungsverfahren

1.1 Grundlagen von Summierungsverfahren

In der Theorie der *Summierungsverfahren* beschäftigt man sich mit der Frage, wie man — nicht notwendigerweise konvergenten — Folgen oder Reihen einen Grenzwert zuordnen kann. Man spricht von einer *Limitierungsvorschrift* A, wenn A gewissen Folgen einen Grenzwert zuordnet. In vielen Fällen wird eine Vorschrift durch eine Matrixtransformation definiert. Das *Wirkfeld* $\mathfrak{A}$ eines Verfahrens bezeichnet die Menge aller durch die Vorschrift erfaßten Folgen.

Natürlich ist man auch daran interessiert, verschiedene Verfahren miteinander zu vergleichen. Besitzen zwei Verfahren A und B das gleiche Wirkfeld, so nennt man sie *äquivalent* und schreibt dafür $A \sim B$. Zwei Verfahren heißen *verträglich*, wenn niemals ein und derselben Folge verschiedene Grenzwerte zugeordnet werden. Man nennt ein Verfahren A *stärker* als B falls $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ gilt und schreibt dafür auch $B \subseteq A$. Gilt sogar $\mathfrak{B} \subsetneqq \mathfrak{A}$, dann heißt A *echt stärker* als B ($B \subset A$). Man spricht von *unvergleichbaren* Verfahren A und B ($A \supset\!\subset B$), wenn weder $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ noch $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ gilt. Ordnet ein Verfahren A jeder konvergenten Folge ihren eigentlichen Grenzwert zu, so heißt A *permanent* oder *regulär*.

Ein Matrixverfahren besteht aus einer Matrix A der Gestalt $(a_{lk})_{l,k=0,1,\ldots}$ mit komplexen Einträgen und die zugehörige *Matrixtransformation* hat die Form

$$(t_l)_{l\in\mathbb{N}} = A(s_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad t_l = \sum_{k=0}^{\infty} a_{lk} s_k \quad (l = 0, 1, \ldots).$$

Da jeder Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eindeutig eine Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} u_m$ zugeordnet werden kann, die s_n als Teilsumme hat, ist es möglich die Matrixtransformation für die Reihenglieder zu erklären

$$(t_l)_{l\in\mathbb{N}} = A(s_k)_{k\in\mathbb{N}} = \tilde{A}(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad t_l = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{a}_{lm} u_m \quad (l = 0, 1, \ldots).$$

In diesem Fall spricht man von einem Matrixverfahren A in *Reihe-Folge Form* und analog von einem Verfahren in *Reihe-Reihe* oder *Folge-Reihe Form*.
Eine Zusammenstellung der meisten Verfahren und die wichtigsten Resultate findet man in [11].

1.2 Cesàro Verfahren

Sei $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ die n-te Partialsumme der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und kovergiert das arithmetische Mittel der aus den Partialsummen gebildeten Folge gegen einen Wert s, also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = s,$$

dann nennt man s die $(C1)$ Summe der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und den $(C1)$ Limes von s_n. Man sagt auch die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist $(C1)$ summierbar zum Wert s. Dieses Verfahren heißt Cesàro Verfahren und wird auch mit C_1 bezeichnet. Die Permanenz des C_1 Verfahrens folgt unmittelbar aus dem Cauchy'schen Grenzwertsatz.
Eine Verallgemeinerung ist das C_k $(k = 1, 2\ldots)$ Verfahren, welches eine modifizierte Iteration des C_1 Verfahrens ist. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, dann definiert man zunächst die Größen

$$S_n^{(k)} = S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \cdots + S_n^{(k-1)} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots$$

und für $k = 0$ setzt man

$$S_n^{(0)} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

Das C_k Verfahren ist dann gegeben durch

$$C_n^{(k)} := \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{n}}. \tag{1.1}$$

Gilt $C_n^{(k)} \to s$ für $n \to \infty$, dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (Ck) summierbar zur Summe s. Die Größen $S_n^{(k)}$ kann man explizit durch die Folgenglieder a_n ausdrücken. Beachtet man, dass $S_n^{(k)} = \sum_{l=0}^{n} S_l^{(k-1)}$, so erhält man für die erzeugende Funktion

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} S_l^{(k-1)} x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k-1)} x^n\right) = \\
&= \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k-1)} x^n = \cdots = \left(\frac{1}{1-x}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)} x^n = \\
&= \left(\frac{1}{1-x}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} a_l x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.
\end{aligned}$$

Die Funktion $(1-x)^{-k-1}$ besitzt die Reihenentwicklung

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n$$

und daher erhält man für die gesuchten Größen $S_n^{(k)}$

$$S_n^{(k)} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n-l+k-1}{n-l} S_n^{(0)} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n-l+k}{n-l} a_l. \tag{1.2}$$

Die Gleichung (1.2) läßt eine weitere Verallgemeinerung für beliebige $k \in \mathbb{R}$ zu. Da $\binom{n+k}{n} = 0$ für $n > -k-1$, muss wegen Gleichung (1.1) stets $k > -1$ gelten. Man erhält daher folgende Definition:

1.2.1 Definition. Sei $(a_i k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $s_l = a_0 + a_1 + \cdots a_l$ und $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > -1$, dann ist das *Cesàro Verfahren* C_α durch die Transformation

$$C_n^{(\alpha)} = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{l=0}^{n} \binom{n-l+\alpha-1}{n-l} s_l = \frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha}{n-k} a_k$$

gegeben.

1.3 Abel Verfahren

Ein weiteres Summierungsverfahren ist das Abel Verfahren, welches auch nach Euler oder Poisson benannt ist.

1.3.1 Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Das *Abel Verfahren* A_1 ist dann durch die Beziehung

$$t_z = t(z) = (1-z)\sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \quad (0 \le z \to 1-)$$

gegeben.

1.3.2 Bemerkung. Die Permanenz des Abel Verfahrens folgt aus dem Abelschen Grenzwertsatz.

1.3.3 Beispiel. Betrachtet man die Folge $a_n = (-1)^n$, dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent. Es gilt aber

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z} \quad \text{für} \quad |z| < 1$$

und weiters

$$\lim_{z\to 1-} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}.$$

Also ist die Folge $a_n = (-1)^n$ Abel summierbar zum Wert 1/2.

1.3.4 Satz. *Ist eine Folge C_α $(\alpha > -1)$ summierbar, dann ist sie auch A_1 summierbar zum selben Wert.*

Beweis. siehe [5, Seite 108]. □

1.4 Nörlund Verfahren

1.4.1 Definition. Sei $(a_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge, $s_l = a_0 + a_1 + \cdots a_l$ und $P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n$ wobei $p_n \geq 0$ sowie $p_0 > 0$. Weiters sei $p(z)$ die Erzeugende Funktion der p_n, $n \in \mathbb{N}$, dann ist das *Nörlund Verfahren* $(N,p) = N_p$ durch

$$t_n = \frac{1}{P_n}\sum_{l=0}^{n} p_{n-l}s_l = \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} P_{n-k}a_k \quad (l = 0, 1, \dots)$$

gegeben.

1.4.2 Bemerkung. Die Wahl $p(z) = (1-z)^{-\alpha}$ mit $\alpha > -1$ liefert gerade das C_α-Verfahren, denn es gilt

$$[z^l]p(z) = p_l = \binom{l+\alpha-1}{l}$$

und

$$P_n = \sum_{l=0}^{n}\binom{l+\alpha-1}{l} = \binom{n+\alpha}{n}.$$

Also ist jedes Cesàro Verfahren ein Nörlund Verfahren.

1.4.3 Satz. *Die Bedingung*

$$\frac{p_n}{P_n} \to 0 \quad \textit{für} \quad n \to \infty$$

ist hinreichend und notwendig für die Permanenz des (N,p)-Verfahrens.

Beweis. siehe [5, Seite 64]. □

1.4.4 Bemerkung. Das C_α-Verfahren ist permanent, denn es gilt:

$$\frac{\binom{n+\alpha-1}{n}}{\binom{n+\alpha}{n}} = \frac{\alpha}{n+\alpha} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

1.5 Allgemeine Euler Verfahren

1.5.1 Definition. Sei $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge, dann ist das *allgemeine Euler-Verfahren* $(E,p) = E_p$ definiert durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n w^n = \sum_{m=0}^{\infty} u_m z^m \quad \text{wobei} \quad z = p(w) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k w^k.$$

Weiters sei $p(w)$ holomorph und schlicht für $|w| \leq 1$ und es soll $p(0) = 0$ sowie $p(1) = 1$ gelten.

1.5.2 Satz. *Ist $p_j \geq 0$ und gilt $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, dann ist (E,p) permanent.*

1.6 Gronwall Verfahren

T. H. Gronwall führte in [4] ein neues Summationsverfahren ein. Es basiert auf zwei Funktionen $p(w)$ und $g(w)$ mit folgenden Eigenschaften:
Die Funktion $p(w)$ ist holomorph für $|w| \leq 1$ außer bei $w = 1$ und $z = p(w)$ bildet $|w| < 1$ schlicht[1] auf ein Gebiet D innerhalb von $|z| < 1$ ab, wobei $p(0) = 0$ und $p(1) = 1$. Die inverse Funktion ist holomorph auf ∂D außer bei $z = 1$ und in diesem Punkt gilt die Entwicklung

$$1 - w = (1-z)^{\lambda}(a + a_1(1-z) + \cdots), \quad \lambda \geq 1,\ a > 0. \tag{1.3}$$

Die Funktion $q(w)$ besitzt die Potenzreihenentwicklung

$$q(w) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n w^n, \quad q_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

und $q(w) \neq 0$ für $|w| < 1$. Weiters soll gelten

$$q(w) = (1-w)^{-\alpha} + \gamma(w), \quad \alpha > 0 \tag{1.5}$$

wobei $\gamma(w)$ für $|w| \leq 1$ holomorph ist.

1.6.1 Definition. Ein Gronwall Verfahren $G(p,q)$ ist durch zwei Funktionen $p(w)$ und $q(w)$ bestimmt, wobei $p(w)$ sowie $q(w)$ die oben gemachten Voraussetzungen erfüllen. Die Größen t_n werden erzeugt durch die Identität

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m z^m = \frac{1}{q(w)} \sum_{n=0}^{\infty} q_n t_n w^n \tag{1.6}$$

und gilt

$$t_n \to s \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

dann ist die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ Gronwall summierbar zur Summe s.

[1] d.h. $p(w)$ ist holomorph und injektiv für $|w| < 1$.

Für das Gronwall Verfahren gelten folgende drei Sätze (siehe [4]):

1.6.2 Satz. *Die Reihe* $\sum u_n$ *sei* $G(p,q)$ *summierbar zum Wert* s *und die in einer Umgebung von* $z = 0$ *definierte Funktion*

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$$

sei holomorph im inneren von D. *Dann gilt*

$$\varphi(z) \to s \quad \textit{für} \quad z \to 1$$

gleichmäßig für jede Annäherung innerhalb von D, *welche* $z = 1$ *im inneren von*

$$z = 1 - re^{i\varphi}, \quad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0, \ \varphi_o < \frac{\pi}{2\lambda} \quad \textit{und} \quad r \geq 0$$

erreicht.

1.6.3 Satz (Zusammenhang mit dem C_k Verfahren). *Ist* $\lambda > 1$ *in* (1.3), *dann gilt* $C_k \subset G(p,q)$ *mit Verträglichkeit.*

1.6.4 Satz. *Seien* $G(p,q)$ *sowie* $G(p_1,q_1)$ *zwei Gronwall Verfahren mit den Konstanten* λ *sowie* λ_1 *und den Bildgebieten* D *bewziehungsweise* D_1. *Es gilt* $G(p,q) \subset G(p_1,q_1)$ *mit Verträglichkeit, falls* $\lambda_1 > \lambda$ *und* $D_1 \subseteq D$.

1.6.5 Lemma. *Das Gronwall Verfahren* $G(p,q)$ *setzt sich aus dem Nörlund Verfahren (Reihe-Folge Form) und dem allgemeinen Euler Verfahren (Reihe-Reihe Form) zusammen:*

$$G(p,q) = N(q)E(p).$$

Beweis. Summiert man die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} u_m$ mit dem allgemeinen Euler Verfahren E_p, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n w^n = \sum_{m=0}^{\infty} u_m z^m \quad \text{wobei} \quad z = p(w) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k w^k.$$

Gleichung (1.6) schreibt sich daher als

$$q(w) \sum_{k=0}^{\infty} v_k w^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} q_{k-j} v_j w^k = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t_n w^n$$

und man erhält durch Koeffizientenvergleich

$$\sum_{j=0}^{n} q_{n-j} v_j = q_n t_n.$$

Setzt man $q_n = \sum_{k=0}^{n} \tilde{q}_k = \tilde{Q}_n$, dann erhält man

$$t_n = \frac{1}{\tilde{Q}_n} \sum_{j=0}^{n} \tilde{Q}_{n-j} v_j.$$

Also sind die Größen t_n gegeben durch ein Nörlund Verfahren $N(\tilde{q})$ mit $\tilde{q}(z) = q(z)(1-z)$. □

1.6.6 Lemma. *Für $\delta > 0$ wird durch die beiden Funktionen*

$$p(w) = \frac{1-\sqrt{1-w}}{1+\sqrt{1-w}} \quad \textit{und} \quad q(w) = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-w}\right)^{1-\delta}}{\sqrt{1-w}}$$

ein Gronwall Verfahren gegeben. Für die Folgenglieder t_n dieses Verfahrens gilt:

$$t_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{m!}{(n+\delta)_m} u_m.$$

Beweis. Zunächst muss man die geforderten Voraussetzungen für $p(w)$ sowie $q(w)$ überprüfen. Die Funktion $p(w)$ ist holomorph für $|w| \leq 1$ außer bei $w = 1$ und für den positiven Zweig der Wurzel gilt $p(0) = 0$ sowie $p(1) = 1$. Definiert man $g(w) := \sqrt{1-w}$ und $h(w) := \frac{1-w}{1+w}$, dann gilt

$$z = p(w) = h\left(g(w)\right).$$

Die Funktion $g(w)$ bildet daher die längs der reellen Achse von $w = 1$ bis $w = +\infty$ aufgeschlitzte Ebene, welche in Polorkoordinaten gegeben wird durch,

$$1 - w = \rho e^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad -\psi < \varphi < \psi,\ \rho > 0$$

auf die rechte Halbebene

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},\ r > 0$$

ab. Diese Abbildung ist holomorph und auch injektiv, also schlicht. Die Cayley Transformation $f(w) := \frac{i-w}{i+w}$ bildet die obere Halbebene $\{z : \mathfrak{Im}\, z > 0\}$ konform auf den Einheitskreis $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ ab. Daher bildet $h(w) = f(iw)$ die rechte Halbebene $\{z : \mathfrak{Re}\, z > 0\}$ konform auf $\mathbb{D}$ ab. Somit ist die Abbildung $p(w)$ für $|w| < 1$ schlicht mit Bildgebiet $D \subseteq \mathbb{D}$.
Sei $z = p(w)$, dann gilt

$$\frac{1-z}{1+z} = \sqrt{1-w}. \tag{1.7}$$

und daher für die inverse Funktion

$$p^{-1}(z) = \frac{4z}{(1+z)^2}.$$

Die inverse Funktion ist also für $z \neq -1$ holomorph. Für $|z| < 1$ gilt

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

und somit

$$(1+z)^{-2} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{z-1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n \quad \text{für} \quad \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1.$$

Wegen (1.7) gilt daher

$$1 - w = (1-z)^2 \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (1-z)^n \quad \text{für} \quad \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1,$$

also ist (1.3) erfüllt mit $\lambda = 2 \geq 1$ und $a = \frac{1}{4} > 0$. Nach der Cauchy'schen Integralformel gilt für den Koeffizienten q_n in $q(w) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n w^n$

$$q_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(0+)} \frac{q(w)}{w^{n+1}} dw.$$

Mit Hilfe der Substitution

$$w = \frac{4s}{(s+1)^2} \quad \Rightarrow \quad dw = \left(\frac{4}{(s+1)^2} - \frac{8s}{(s+1)^3}\right) ds = \frac{4(1-s)}{(1+s)^3} ds$$

erhält man zunächst für $\sqrt{1-w}$

$$\sqrt{1-w} = \frac{\sqrt{(s+1)^2 - 4s}}{1+s} = \frac{1-s}{1+s}$$

und daher für $q(w)$

$$q(w(s)) = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1-s}{1+s}\right)^{1-\delta}}{\frac{1-s}{1+s}} = \frac{(1+s)^\delta}{1-s}.$$

Somit gilt für den gesuchten Koeffizienten q_n

$$q_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(0+)} \frac{(1+s)^\delta}{1-s}\frac{4(1-s)}{(1+s)^3}\frac{(1+s)^{2n+2}}{4^{n+1}s^{n+1}} ds = \frac{1}{2\pi i}\oint_{(0+)} \frac{(1+s)^{\delta+2n-1}}{4^n s^{n+1}} ds =$$

$$= \frac{1}{4^n}[s^n](1+s)^{\delta+2n-1} = \frac{1}{4^n}\binom{\delta+2n-1}{n} = \frac{1}{4^n}\frac{(\delta+n)_n}{n!}.$$

Da stets $\delta > 0$ gilt, ist $q_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiters besitzt $q(w)$ für $|w| < 1$ keine Nullstellen.

Um die Folgenglieder t_n zu bestimmen, muss man zunächst die Koeffizienten $t_n q_n$ berechnen. Wegen Gleichung (1.6) und der Cauchy'schen Integralformel gilt für $t_n q_n$:

$$t_n q_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(0+)} \frac{q(w) \sum_{m=0}^{\infty} u_m z^m}{w^{n+1}} dw.$$

Durch die Substitution $w = 4z/(1+z)^2$ ergibt sich daher

$$\begin{aligned} t_n q_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{(0+)} \frac{(1+z)^\delta}{1-z} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} u_m z^m}{z^{n+1} 4^{n+1}} \frac{(1+z)^{2n+2} 4(1-z)}{(1+z)^3} dz = \\ &= \frac{1}{4^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{(0+)} \frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty} u_m z^m (1+z)^{\delta+2n-1}}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{4^n} \sum_{m=0}^{n} u_m \binom{\delta+2n-1}{n-m}. \end{aligned}$$

Man erhält also für t_n

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{n!}{(\delta+n)_n} \sum_{m=0}^{n} u_m \frac{(\delta+2n-1)\cdots(\delta+n+m)}{(n-m)!} = \\ &= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} m! \frac{1}{(\delta+n)\cdots(\delta+n+m-1)} u_m = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{m!}{(n+\delta)_m} u_m. \end{aligned}$$

□

Kapitel 2

Jacobi Polynom Reihen

2.1 Klassische orthogonale Polynome

Zunächst sollen die grundlegenden Eigenschaften von orthogonalen Polynomen kurz dargestellt werden. Man interessiert sich für orthogonale Polynome bezüglich einer Belegungsfunktion $p(x)$ auf einem Intervall $[a, b]$, wobei auch unendliche Intervalle — also $a = -\infty$ und/oder $b = \infty$ — zulässig sein sollen. Die Belegungsfunktion $p(x)$ soll auf dem Intervall $[a, b]$ integrierbar und bis auf eine Nullmenge positiv sein.
Die Menge $\mathcal{P}_n$ bezeichnet alle Polynome mit exaktem Grad n und $\mathcal{P}_{\leq n}$ alle Polynome deren Grad maximal n beträgt.

2.1.1 Definition. Unter den oben gemachten Voraussetzungen für das Intervall $[a, b]$ sowie für die Belegungfunktion $p(x)$ heißen Polynome $P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\operatorname{grad} P_n(x) = n$ orthogonal im Intervall $[a, b]$ bezüglich $p(x)$ genau dann, wenn sie der Orthogonalitätsbedingung

$$\int_a^b p(x)P_m(x)P_n(x)dx = 0, \quad m \neq n \tag{2.1}$$

genügen. Der sogenannte Normierungsfaktor h_n ist definiert als

$$h_n := \int_a^b P_n^2(x)p(x)dx. \tag{2.2}$$

2.1.2 Korollar. *Sei $P_0(x), P_1(x), \ldots$ ein System orthogonaler Polynome im Intervall $[a, b]$, dann ist $P_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ orthogonal zu jedem Polynom niedrigeren Grades.*

Beweis. Man kann jedes beliebige Polynom $G_{n-1}(x)$ vom Grad kleiner gleich $n - 1$ eindeutig in der Form

$$G_{n-1}(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + \cdots + a_{n-1}P_{n-1}(x)$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 0, \dots, n-1$ darstellen. Daher gilt

$$\int\limits_a^b p(x) G_{n-1}(x) P_n(x) dx = a_0 \int\limits_a^b p(x) P_0(x) P_n(x) dx + \cdots + \\ + a_{n-1} \int\limits_a^b p(x) P_{n-1}(x) P_n(x) dx = 0.$$

Somit ist $P_n(x)$ orthogonal zu allen Polynomen deren Grad kleiner als n ist. □

2.1.3 Lemma (Eindeutigkeitssatz). *Erfüllen Polynome $P_0(x), P_1(x), \dots$ die Orthogonalitätsbedingung (2.1) bezüglich der Belegungsfunktion $p(x)$ im Intervall $[a, b]$ und gilt weiters $\operatorname{grad} P_n(x) = n,\ n \in \mathbb{N}$, dann ist jedes Polynom $P_n(x)$ bis auf eine von Null verschiedene Konstante eindeutig bestimmt.*

Beweis. Diese Aussage läßt sich durch vollständige Induktion nach dem Grad n zeigen. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist klar, da ein Polynom vom Grad 0 gerade eine Konstante ist. Induktionsschritt $n-1 \mapsto n$: Alle Polynome $P_i(x)$ für $i = 0, \dots, n-1$ seinen also bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Weiters besitzt $P_n(x)$ eine Darstellung der Form

$$P_n(x) = a_0 P_0(x) + \cdots + a_{n-1} P_{n-1(x)} + b_n x^n.$$

Somit gilt für $i = 0, \dots, n-1$

$$\int\limits_a^b p(x) P_i(x) P_n(x) dx = a_i \int\limits_a^b p(x) \left[P_i(x)\right]^2 dx + b_n \int\limits_a^b p(x) P_i(x) x^n dx = 0,$$

und daher

$$a_i = -b_n \frac{\int_a^b p(x) P_i(x) x^n dx}{\int_a^b p(x) \left[P_i(x)\right]^2 dx} \quad \text{für} \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Also sind die Konstanten $a_0, \dots, a_{n-1}$ bis auf b_n nicht von $P_n(x)$ abhängig. □

2.1.4 Satz (Nullstellensatz). *Die Nullstellen eines orthogonalen Polynoms $P_n(x)$ sind alle einfach, reell und liegen in (a, b).*

Beweis. Bezeichnet man mit $x_1, \dots, x_m$ $(0 \leq m \leq n)$ die verschiedenen Nullstellen von $P_n(x)$ die in (a, b) liegen und an denen $P_n(x)$ das Vorzeichen wechselt. Definiert man nun ein Polynom $G_m(x)$ vom Grad m durch

$$G_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ (x - x_1) \cdots (x - x_m) & \text{für } m > 0, \end{cases}$$

dann wechselt $G_m(x)$ im Intervall (a, b) an den gleichen Stellen wie $P_n(x)$ das Vorzeichen. Somit hat $G_m(x)P_n(x)$ in ganz (a, b) konstantes Vorzeichen. Da die Belegungsfunktion $p(x)$ bist auf eine Nullmenge stets positiv ist folgt

$$\int_a^b p(x)G_m(x)P_n(x)dx \neq 0.$$

Nach Korollar 2.1.2 ist $P_n(x)$ zu allen Polynomen niedrigeren Grades orthogonal, weshalb $m = n$ sein muss. □

2.1.5 Satz (Formel von Rodriguez). *Bezeichne D den gewöhnlichen Ableitungsoperator und die Funktion $g(x)$ sei definiert durch*

$$X(x) = \begin{cases} (b-x)(x-a) & \text{für } |a| < \infty,\ |b| < \infty \\ x - a & \text{für } |a| < \infty,\ b = \infty \\ 1 & \text{für } -a = b = \infty. \end{cases} \tag{2.3}$$

Handelt es sich bei der Funktion

$$F_n(x) = \frac{1}{p(x)} D^n \left[p(x)X^n(x)\right] \tag{2.4}$$

um ein Polynom vom Grad n, dann unterscheidet sich $F_n(x)$ von dem zu der Belegungsfunktion $p(x)$ und dem Intervall $[a, b]$ gehörenden orthogonalen Polynom $P_n(x)$ lediglich um einen konstanen Faktor, d.h.:

$$P_n(x) = \frac{1}{K_n} F_n(x) = \frac{1}{K_n p(x)} D^n \left[p(x)X^n(x)\right]. \tag{2.5}$$

Beweis. Nach Lemma 2.1.3 sind die orthogonalen Polynome durch die Belegungsfunktion $p(x)$ sowie das zugehörige Intervall $[a, b]$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Es genügt also zu überprüfen, dass $F_n(x)$ die Orthogonalitätsbedingungen (2.1) erfüllt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $F_n(x)$ zu allen Polynomen niedrigeren Grades orthogonal ist, also wenn für jedes $g_{n-1}(x) \in \mathcal{P}_{\leq n-1}$ gilt:

$$\int_a^b p(x)g_{n-1}(x)F_n(x)dx = \int_a^b g_{n-1}(x)D^n \left[p(x)X^n(x)\right] = 0. \tag{2.6}$$

·) Für ein endliches Grundintervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ gilt $D^r[p(x)X^n(x)]|_{x=a}^b = 0$ für $r = 0, \dots, n-1$. Weiters ist $g_{n-1}^{(n)}(x) \equiv 0$ und deshalb erhält man durch n-fache partielle Integration

$$\int_a^b g_{n-1}(x)D^n \left[p(x)X^n(x)\right] = (-1)^n \int_a^b g_{n-1}^{(n)}(x)p(x)X^n(x) = 0.$$

·) Für die beiden anderen Fälle (siehe [10]) gilt ebenfalls

$$g_{n-1}^{(r-1)}(x)D^{n-r}[p(x)X^n]|_{x=a}^b = 0 \quad \text{für} \quad r = 1, 2, \ldots, n$$

und somit ist (2.6) erfüllt.

□

Interessant ist natürlich, welche Eigenschaften die Belegungsfunktion $p(x)$ haben muss, damit durch Gleichung (2.4) auch tatsächlich ein Polynom gegeben ist.

2.1.6 Satz. *Sei $X(x)$ wie in (2.3) definiert, dann ist durch*

$$F_n(x) = \frac{1}{p(x)} D^n \left[p(x)X^n(x)\right]$$

ein Polynom vom Grad n gegeben, genau dann wenn

$$p(x) = \begin{cases} (b-x)^\alpha (x-a)^\beta & \text{für } |a| < \infty,\ |b| < \infty \\ e^{-x}(x-a)^\alpha & \text{für } |a| < \infty,\ b = \infty \\ e^{-\frac{1}{2}x^2} & \text{für } -a = b = \infty \end{cases} \tag{2.7}$$

wobei $\alpha > -1$ und $\beta > -1$.

Beweis.
·) Zunächst soll der Fall eines endlichen Grundintervalls $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ untersucht werden. Sei $F_1(x) = Ax + B$ ein lineares Polynom, dann gilt

$$F_1(x) = \frac{1}{p(x)} D[p(x)X(x)] = \frac{p'(x)}{p(x)} X(x) + X'(x)$$

und somit

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{Ax + B - X'(x)}{X(x)}.$$

Setzte man die Funktion $X(x) = (b-x)(x-a)$ ein und führt eine Partialbruchzerlegung durch, so erhält man für geeignete Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = -\frac{\alpha}{b-x} + \frac{\beta}{x-a}.$$

Daraus folgt $p(x) = C(b-x)^\alpha (x-a)^\beta$, wobei $\alpha > -1$ und $\beta > -1$ gelten muss, da sonst die Integrierbarkeit der Belegungsfunktion $p(x)$ am Intervall $[a, b]$ nicht gegeben ist.
Geht man umgekehrt von einer Belegungsfunktion $p(x) = C(b-x)^\alpha (x-a)^\beta$ mit $\alpha > -1$ und $\beta > -1$ aus, so muss man zeigen, dass $F_n(x)$ ein Polynom

vom Grad n ist. Nach der Definition der $F_n(x)$ und durch Anwendung der Leibniz'schen Regel gilt:

$$F_n(x) = (b-x)^{-\alpha}(x-a)^{-\beta}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k\left[(b-x)^{n+\alpha}\right]D^{n-k}\left[(x-a)^{n+\beta}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(n+\alpha)\cdots(n+\alpha-k+1)(b-x)^{n-k}\cdot$$

$$\cdot(n+\beta)\cdots(\beta+k+1)(x-a)^k.$$

Somit ist $F_n(x)$ ein Polynom vom Grad kleiner gleich n. Für den Koeffizienten von x^n erhält man

$$[x^n]F_n(x) = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n+\alpha)\cdots(n+\alpha-k+1)(n+\beta)\cdots(\beta+k+1).$$

Wegen $\alpha > -1$ und $\beta > -1$ sind für $n > 0$ alle Summanden positiv und daher auch $[x^n]F_n(x) \neq 0$. Da per Definition $F_0(x) \equiv 1$ gilt, ist $F_n(x)$ stets ein Polynom vom Grad n für alle $n \in \mathbb{N}$.
·) Die beiden Fälle mit unendlichem Grundintervall beweist man auf eine ähnliche Weise. Einen vollständigen Beweis findet man in [10, Seite 131].

□

2.1.7 Satz. *Das klassische orthogonle Polynom $P_n(x)$ ist Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$Xy'' + K_1P_1y' + \lambda_n y = 0.$$

Dabei ist λ_n gegeben durch

$$\lambda_n = -n\left([x]K_1P_1(x) + \frac{n-1}{2}X''(x)\right).$$

Beweis. Ein wichtiges Beweismittel ist die Formel von Rodriguez. Beachtet man weiters, dass $X(x)$ maximal ein Polynom zweiten Grades ist, so erhält man einerseits

$$D^{n+1}\left[XD(pX^n)\right] =$$

$$= XD^{n+2}(pX^n) + (n+1)X'D^{n+1}(pX^n) + \binom{n+1}{2}X''D^n(pX^n) =$$

$$= K_n\left(XD^2(pP_n) + (n+1)X'D(pP_n) + \frac{n(n+1)}{2}X''pP_n\right).$$

Andererseits gilt

$$D^{n+1}\left[XD(pX^n)\right] =$$

$$= D^{n+1}\left[XD\left((pX)X^{n-1}\right)\right] = D^{n+1}\left[X^nD(pX) + (n-1)X^npX'\right] =$$

$$= D^{n+1}\left[X^nK_1pP_1 + (n-1)X'pX^n\right] = D^{n+1}\left[\left(K_1P_1 + (n-1)X'\right)pX^n\right] =$$

$$= K_n\left\{\left(K_1P_1 + (n-1)X'\right)D(pP_n) + (n+1)(DK_1P_1 + (n-1)X'')pP_n\right\}.$$

Vergleicht man diese beiden Gleichungen gelangt man zu folgender Differentialgleichung

$$XD^2(pP_n) + (2X' - K_1P_1)D(pP_n) - (n+1)\left(DK_1P_1 + \frac{n+2}{2}\right)pP_n = 0.$$

$$XP_n'' + \left(2X\frac{p'}{p} + 2X' - K_1P_1\right)P_n' + \\ + \left[X\frac{p''}{p} + (2X' - K_1P_1)\frac{p'}{p} - (n+1)\left(DK_1P_1 + \frac{n-2}{2}X''\right)\right]P_n = 0$$

Wegen

$$K_1pP_1 = D(pX) = pX' + p'X \quad \Rightarrow \quad X\frac{p'}{p} = K_1P_1 - X',$$

sowie

$$D^2(pX) = p''X + 2p'X' + pX'' = K_1(p'P_1 + pP_1') \\ \Rightarrow X\frac{p''}{p} = (K_1P_1 - 2X')\frac{p'}{p} + K_1DP_1 - X''$$

gelangt man zu der gesuchten Differentialgleichung

$$XP_n'' + K_1P_1P_n' - n\left([x]K_1P_1 + \frac{n-1}{2}X''\right)y = 0. \qquad \square$$

2.2 Hypergeometrische Funktionen

2.2.1 Definition. Die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion ist definiert durch

$${}_pF_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_p)_n z^n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_q)_n n!}.$$

Die Funktion ${}_2F_1(a, b; c; z)$ wird als Gauss'sche hypergeometrische Funktion oder auch als *die* hypergeometrische Funktion bezeichnet.

2.2.2 Bemerkung. Betrachtet man die Funktion $q(z)$ des Gronwall Verfahrens aus Lemma 1.6.6, also

$$q(z) = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-z}\right)^{1-\delta}}{\sqrt{1-z}},$$

dann gilt für die Koeffizienten q_n bekanntlich

$$q_n = \frac{1}{4^n}\frac{(\delta+n)_n}{n!}.$$

Daraus erhält man weiter

$$\begin{aligned}
q_n &= \frac{1}{4^n}\frac{\delta(\delta+1)\cdots(\delta+n-1)\cdot(\delta+n)\cdots(\delta+2n-1)}{\delta(\delta+1)\cdots(\delta+n-1)n!} = \\
&= \frac{1}{4^n}\frac{\delta(\delta+2)\cdots(\delta+2n-2)(\delta+1)(\delta+3)\cdots(\delta+2n-1)}{(\delta)_n n!} = \\
&= \frac{1}{4^n}\frac{2^n\frac{\delta}{2}\left(\frac{\delta}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{\delta}{2}+n-1\right)\cdot 2^n\left(\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\delta}{2}+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{\delta}{2}+n-\frac{1}{2}\right)}{(\delta)_n n!} = \\
&= \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)_n\left(\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2}\right)_n}{(\delta)_n n!}.
\end{aligned}$$

Es gilt (siehe [1, Seite 185])

$$ {}_2F_1\left(a, a+\frac{1}{2}; 2a; z\right) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-z}}\right)^{2a-1}$$

und somit erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n = {}_2F_1\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}+\frac{1}{2}; \delta; z\right) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-z}}\right)^{\delta-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-z}\right)^{1-\delta}}{\sqrt{1-z}}.$$

Also ist die Funktion $q(z)$ eine hypgergeometrische Funktion.

2.2.3 Satz. *Die Funktion ${}_2F_1(a,b;c;z)$ ist Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung*

$$z(1-z)y'' + [c-(a+b+1)z]y' - aby = 0. \tag{2.8}$$

Beweis. Diese Differentialgleichung kann mit Hilfe des Frobenius Ansatzes gelöst werden. Sei

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

dann erhält man für die erste und zweite Ableitung

$$y'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1} \quad \text{sowie} \quad y''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2}.$$

Durch einsetzen in die Gleichung (2.8) ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
&z(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2} + \\
&\qquad + [c-(a+b+1)z]\sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1} - ab\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0.
\end{aligned}$$

Faßt man die Terme nach den Potenzen von z zusammen so erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+1)(n+c)a_{n+1}-(n+a)(n+b)a_n\Big)z^n=0.$$

Die gesuchten Koeffizienten a_n sind daher durch die Rekursion

$$a_{n+1}=\frac{(n+a)(n+b)}{(n+a)(n+c)}a_n$$

gegeben und somit ist die Funktion

$$y(z)=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}={}_2F_1(a,b;c;z)$$

eine Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung. □

2.2.4 Bemerkung. Die Differential Gleichung (2.8) wird durch die Substitution $y=z^{1-c}\tilde{y}$ in eine Differentialgleichung des selben Typs übergeführt. Man erhält (siehe [10])

$$z(1-z)\tilde{y}''+[2-c-(a-c+1+b-c+1)z]\tilde{y}'-(a-c+1)(b-c+1)\tilde{y}=0.$$

Nach dem vorigen Satz ist daher die Funktion ${}_2F_1(a-c+1,b-c+1;2-c;z)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Weiters sind die Funktionen ${}_2F_1(a,b;c;z)$ sowie $z^{1-c}{}_2F_1(a-c+1,b-c+1;2-c;z)$ linear unabhängig und bilden deshalb ein Fundamentalsystem von Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung von (2.8) ist dann durch

$$y(z)=A{}_2F_1(a,b;c;z)+Bz^{1-c}{}_2F_1(a-c+1,b-c+1;2-c;z)$$

gegeben, wobei A und B beliebige Konstanten sind.

2.3 Jacobi Polynome

2.3.1 Definition. Jacobi Polynome sind Orthogonalpolynome bezüglich der Belegungsfunktion

$$p(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\quad \text{für}\quad \alpha,\beta>-1$$

auf dem Intervall $[-1,1]$. Man bezeichnet sie mit $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ und sie sollen durch die Forderung

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}$$

normiert werden.

Mit Hilfe der Formel von Rodriguez (Gleichung (2.5)) und durch Anwendung der Leibniz'schen Regel erhält man

$$
\begin{aligned}
K_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} D^n \left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right] = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n+\alpha)\cdots(n+\alpha-k+1)\cdot \\
&\quad \cdot (n+\beta)\cdots(k+\beta+1)(1-x)^{n-k}(1+x)^k = \\
&= (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}(x-1)^{n-k}(x+1)^k.
\end{aligned}
$$

Wertet man an der Stelle $x = 1$ aus, so ergibt sich für die Konstante K_n

$$K_n = (-2)^n n!.$$

Also besitzen die Jacobi Polynome die explizite Darstellung

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}(x-1)^{n-k}(x+1)^k,$$

und sie können auch durch die Beziehung

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right] \tag{2.9}$$

definiert werden.

2.3.2 Satz. *Die Jacobi Polynome sind hypergeometrische Funktionen, denn sie besitzen folgende Darstellung*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \binom{n+\alpha}{n}\, {}_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right). \tag{2.10}$$

Beweis. Nach Satz 2.1.7 sind die Jacobi Polynome Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Da in diesem Fall $X = 1-x^2$, $X' = -2x$ sowie $X'' = -2$ gilt, erhält man wegen $K_1 = -2$ und

$$K_1 P_n^{(\alpha,\beta)} 1(x) = -(\alpha+\beta+2)x + (\beta-\alpha)$$

unmittelbar $\lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1)$. Also erfüllen die Jacobi Polynome die Differentialgleichung

$$(1-x)^2 y'' + [(\beta-\alpha) - (\alpha+\beta+2)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1) = 0.$$

Durch die Substitution $x = 1-2t$ erhält man die hypergeometrische Differentialgleichung

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2} + [(\alpha+1) - (\alpha+\beta+2)t]\frac{dy}{dt} + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0.$$

Wegen Satz 2.2.3 ist die Funktion ${}_2F_1(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; t)$ eine Lösung dieser Gleichung. Für die Jacobi Polynome gilt daher

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = A_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right).$$

Wertet man diesen Ausdruck an der Stelle $x = 1$ aus, so erhält man für die Konstante A

$$A = P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n},$$

und schliesslich die gewünschte Darstellung für $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. □

2.3.3 Lemma. *Der Normierungsfaktor der Jacobi Polynome $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ist gegeben durch*

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\ \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

Beweis. Es muss also das Integral

$$h_n^{\alpha,\beta} = \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2 dx$$

berechnet werden. Nach Gleichung (2.9) gilt daher

$$h_n^{\alpha,\beta} = \int_{-1}^{1} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d}{dx^n} \left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right] P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx$$

und durch n-malige partielle Integration ergibt sich, da die Auswertungen am Rand keinen Beitrag liefern

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} (1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta} \frac{d}{dx^n} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx.$$

Für die n-te Ableitung des Jacobi Polynoms $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ erhält man

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx^n} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = n![x^n]P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k} = \\ = \frac{n!}{2^n}\binom{2n+\alpha+b}{n} = \frac{n!}{2^n} \frac{(2n+\alpha+\beta)\cdots(n+\alpha+\beta+1)}{n!} = \\ = \frac{1}{2^n} \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.\end{aligned}$$

Also gilt für den Normierungskoeffizienten

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^{2n} n!\ \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \int_{-1}^{1} (1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta} dx.$$

Das Integral wird durch die Substitution $x = 2t - 1$ übergeführt in

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta} dx = 2^{2n+\alpha+\beta+1} \int_{0}^{1} t^{n+\beta}(1-t)^{n+\alpha} dt =$$
$$= 2^{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)}$$

und man erhält insgesamt

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\ \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$ □

2.3.4 Definition. Mit $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ werden die *verschobenen* Jacobi Polynome bezeichnet. Sie gehen durch die lineare Substitution $x = 1 - 2t$ aus den Jacobi Polynomen $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ hervor, also

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(t) := P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2t).$$

2.3.5 Korollar. *Die verschobenen Jacobi Polynome $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ genügen der hypergeometrischen Differentialgleichung*

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha+1) - (\alpha+\beta+2)x]\frac{dy}{dx} + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0 \quad (2.11)$$

und es gilt

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_2F_1(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; x).$$

Beweis. Beide Aussagen wurden bereits im Beweis von Satz 2.3.2 gezeigt. □

2.3.6 Satz. *Der Operator $\mathcal{D}$ sei definiert durch*

$$\mathcal{D}(f)(x) := x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta+1}\frac{d}{dx}f(x)\right),$$

dann gilt

$$\mathcal{D}R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -n(n+\alpha+\beta+1)R_n^{(\alpha,\beta)}.$$

Beweis. Unter Berücksichtigung der Produktregel erhält man für den Operator $\mathcal{D}$ weiter

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(f)(x) = x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\Big((\alpha+1)x^{\alpha}(1-x)^{\beta+1}f'(x)- \\ -x^{\alpha+1}(\beta+1)x^{\beta}f'(x)+x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta+1}f''(x)\Big) = \\ = ((\alpha+1)-(\alpha+\beta+2)x)\,f'(x)+x(1-x)f''(x).\end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der Differentialgleichung (2.11) folgt somit

$$\mathcal{D}R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -n(n+\alpha+\beta+1)R_n^{(\alpha,\beta)}. \qquad \square$$

2.4 Jacobi Polynom Reihen

Für die Jacobi Polynome $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ erklärte Askey [2] eine formale Fourier Jacobi Reihe von $f(x) \in L^1_{\alpha,\beta}[-1,1]$, d.h. $f(x)$ ist meßbar und

$$\|f\|_1 = \|f\|_{1,\alpha,\beta} = \int_{-1}^{1} |f(x)|(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx < \infty,$$

durch

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(1)}{h_n^{\alpha,\beta}},$$

wobei

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx. \tag{2.12}$$

Um diese Entwicklung auf die verschobenen Jacobi Polynome $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ zu übertragen, führt man die Substitution $x = 1-2t$ durch. Setzt man $f(1-2t) = \tilde{f}(t)$, so erhält man für Gleichung (2.12)

$$a_n = \int_{0}^{1} \tilde{f}(t)\frac{R_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{R_n^{(\alpha,\beta)}(0)}t^{\alpha}(1-t)^{\beta}2^{\alpha+\beta+1}dt.$$

Die formale Entwicklung nach den Polynomen $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ einer Funktion $f(x)$ ist dann gegeben durch

$$\tilde{f}(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n R_n^{(\alpha,\beta)}(t) R_n^{(\alpha,\beta)}(0)}{h_n^{\alpha,\beta}}.$$

Für die klassischen Jacobi Polynome führte ebenfalls Askey [2] einen Faltungsoperator ein. Seien f, g in L^1 mit den Fourier-Jacobi Koeffizienten a_n und b_n, dann hat die Funktion $h(x) = (f * g)(x)$ die Koeffizienten $c_n = a_n b_n$. Die Funktion $h(x)$ ist gegeben durch

$$h(x) = \int_{-1}^{1} f(y) g(x; y)(1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta} dy$$

wobei

$$g(x; y) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(y)}{h_n^{\alpha,\beta}}$$

die verallgemeinerte Transformation von $g(x)$ ist.
Analog kann der Faltungsoperator auch für die verschobenen Jacobi Polynome $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ erklärt werden.

2.4.1 Definition. Seien $f, g \in L^1_{\alpha,\beta}[0,1]$ und a_n, b_n die jeweiligen Fourier Jacobi Koeffizienten. Die Funktion $h(x) = (f * g)(x)$ besitzt in ihrer Jacobi Polynom Reihen Entwicklung die Koeffizienten $c_n = a_n b_n$ und ist gegeben durch

$$h(x) = \int_{0}^{1} f(y) g(x; y) y^{\alpha}(1-y)^{\beta} 2^{\alpha+\beta+1}.$$

2.4.2 Lemma. *Der Fourier-Jacobi Koeffizient der Funktion* $f(x) = ((1 + x)/2)^n$ *ist durch*

$$a_k = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+k+\alpha+\beta+2)} \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)}$$

gegeben. Insbesondere gilt folgende Identität

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} c_{k,n} P_k^{(\alpha,\beta)}(x) P_k^{(\alpha,\beta)}(1),$$

wobei

$$c_{k,n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1) n! (2k+\alpha+\beta+1) k!\ \Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+k+\alpha+\beta+2)(n-k)!\ \Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}.$$

Beweis. Benutzt man Definition (2.9) der Jacobi Polynome, so erhält man für den Fourier-Jacobi Koeffizienten

$$a_k = \frac{k!}{(\alpha+1)_k} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^n D^k \left[(1-x)^{k+\alpha}(1+x)^{k+\beta}\right] dx.$$

Durch k-fache partielle Integration ergibt sich, da für $r = 0, \dots, k-1$ stets $D^r[(1-x)^{k+\alpha}(1+x)^{k+\beta}]|_{-1}^{1} = 0$ gilt, für a_k weiter

$$a_k = \frac{(-1)^k}{(\alpha+1)_k 2^k} \frac{(-1)^k}{2^n} \int_{-1}^{1} n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k} \cdot (1-x)^{k+\alpha}(1+x)^{k+\beta} dx.$$

Dieses Integral läßt sich durch die Substitution $x = 1-2t$ auf die Beta-Funktion zurückführen. Also erhält man

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \frac{1}{2^{n+k}} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)} 2^{n+k+\alpha+\beta+1} \int_0^1 t^{k+\alpha}(1-t)^{n+\beta} dt = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)} 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+k+\alpha+\beta+2)} = \\ &= 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+k+\alpha+\beta+2)} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)}. \end{aligned}$$

Um die angegebene Identität zu zeigen, muss man lediglich $c_{k,n} = a_k / h_k^{\alpha,\beta}$ berechnen. Die Größe $h_k^{\alpha,\beta}$ (Lemma 2.3.3) ist gegeben durch

$$h_k^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2k+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{k!\,\Gamma(k+\alpha+\beta+1)},$$

und es ergibt sich sofort

$$c_{k,n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)n!(2k+\alpha+\beta+1)k!\,\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+k+\alpha+\beta+2)(n-k)!\,\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}.$$

□

2.5 Variationsmindernde Kerne

Sei $K_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(c_k P_k^{(\alpha,\beta)}(x) P_k^{(\alpha,\beta)}(1) \right) / h_k^{\alpha,\beta}$ ein polynomieller Kern, dann gilt

$$(K_n * f)(x) = K_n f(x) = \int_{-1}^{1} K_n(x;y) f(y)(1-y)^\alpha (1+y)^\beta dy.$$

Horton betrachtete in [6] die Familie der Kerne

$$K_n(x) = t_n \left(\frac{1+x}{2} \right)^n = t_n \sum_{k=0}^{n} c_{k,n} P_k^{(\alpha,\beta)}(x) P_k^{(\alpha,\beta)}(1) \tag{2.13}$$

mit $c_{k,n}$ aus Lemma 2.4.2 und dem Normierungsfaktor t_n

$$t_n = \left[\int_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^n (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \right]^{-1} = \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(\alpha+1)}.$$

Die verallgemeinerte Transformation ist dann (siehe [2])

$$K_n(x;y) = t_n \left(\frac{1+x}{2}\right)^n \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}((1+xy)/(x+y))}{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)}.$$

Dieser Kern ist eine Verallgemeinerung des de la Vallée Poussin Kerns, denn für $\alpha = \beta = -1/2$ und $x = \cos\varphi$ erhält man

$$K_n(\cos\varphi) = \frac{1}{\pi} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^{2n}.$$

Betrachtet man eine endliche Folge von reellen Zahlen $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, so bezeichnet man mit $v_{1\leq i\leq n}(\alpha_i)$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in dieser Folge. Die Variation einer reellwertigen Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a,b]$ ist dann definiert als

$$v_{[a,b]}(f(x)) = \sup v_{1\leq i\leq n}(f(x_i))$$

wobei das Supremum über alle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $a < x_1 < \cdots < x_n < b$ zu bilden ist.

Horton zeigte in [6], dass die in (2.13) definierten Kerne variationsmindernd sind, dass heisst es gilt

$$v_{[a,b]}\left(K_n f(x)\right) \leq v_{[a,b]}(f(x)).$$

Kapitel 3

Operatoren

3.1 Bernsteinoperator

3.1.1 Definition. Der n-te *Bernsteinoperator* B_n ist definiert durch

$$\mathrm{B}_n(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3.1}$$

für $f \in C[0,1],\ x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$.

3.1.2 Lemma. *Der Operator* B_n *besitzt folgende grundlegende Eigenschaften:*

(i) B_n *ist linear, d.h.* $\mathrm{B}_n(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{B}_n(f) + \mu \mathrm{B}_n(g) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ f, g \in C[0,1]$.

(ii) B_n *ist positiv, d.h. für* $f \in C[0,1]$ *mit* $f \geq 0$ *folgt stets* $\mathrm{B}_n(f) \geq 0$.

(iii) $\mathrm{B}_n : C[0,1] \longrightarrow \mathcal{P}_{\leq n}$*, d.h. der* n*-te Bernsteinoperator bildet stetige Funktionen auf Polynome ab deren Grad höchstens* n *beträgt.*

(iv) Für $s \leq n$ *und* $f \in \mathcal{P}_s$ *gilt* $\mathrm{B}_n(f) \in \mathcal{P}_s$*. Ist* $f_s(x) := x^s$*, dann gilt* $[x^s]\, \mathrm{B}_n(f_s)(x) = \binom{n}{s} \frac{s!}{n^s}$.

Beweis.
ad (i) : Klar.
ad (ii) : Ist $f(x) \geq 0$ für $x \in [0,1]$, dann ist auch $f(\frac{k}{n}) \geq 0,\ k = 0, \ldots, n$. Somit ist jeder Summand nicht negativ und daher ist $\mathrm{B}_n(f)(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$.
ad (iii) : Da in der Summe lediglich bis n summiert wird, ist die höchste vorkommende Potenz maximal gleich n. Somit handelt es sich um ein Polynom dessen Grad kleiner gleich n ist.

ad (iv) : Differenziert man Gleichung (3.1), so erhält man (siehe [7])

$$\mathrm{B}_n(f)'(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \left[kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}\right] =$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \binom{n-1}{k} x^k(1-x)^{n-k-1}. \tag{3.2}$$

Der Ausdruck $f((k+1)/n)) - f(k/n)$ kann mit Hilfe des Differenzen Operators $\Delta_q f(x) := f(x+q) - f(x)$, $q \in \mathbb{C}$, als $\Delta_{1/n} f(k/n)$ geschrieben werden. Erklärt man den Differenzenoperator der k-ten Ordnung durch $\Delta_q^k f(x) = \Delta_q(\Delta_q^{k-1} f(x))$, so erhält man durch wiederholtes Differenzieren der Gleichung (3.2) für die (s)-te Ableitung von $\mathrm{B}_n(f)(x)$, $s = 1, 2, \ldots, n$:

$$\mathrm{B}_n(f)^{(s)}(x) = n(n-1)\cdots(n-s+1) \sum_{k=0}^{n-s} \Delta_{1/n}^s f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n-s}{k} x^k(1-x)^{n-k-s}.$$

Für den Koeffizienten von x^s in $\mathrm{B}_n(f)(x)$ gilt daher

$$[x^s]\,\mathrm{B}_n(f)(x) = \frac{\mathrm{B}_n(f)^{(s)}(0)}{s!} = \binom{n}{s} \Delta_{1/n}^s f(0)$$

und weiters

$$\mathrm{B}_n(f)(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \Delta_{1/n}^s f(0) x^s.$$

Da der Differenzenoperator Δ den Grad eines Polynoms immer um eins reduziert, gilt für ein Polynom $g \in \mathcal{P}_s$ und $k > s$ stets $\Delta_{1/n}^k g(x) = 0$. Daher bildet der n-te Bernsteinoperator ein Polynom vom Grad s, $s < n$ wieder auf ein Polynom von Grad s ab.

Erklärt man für $a \in \mathbb{R}$ den Verschiebungsoperaor $E^a f(x) := f(x+a)$, dann schreibt sich der Differenzenoperator als $\Delta_a = (E^a - I)$, wobei I der Identische Operator ist. Es gilt daher für $\Delta_{1/n}^k$:

$$\Delta_{1/n}^k f(x) = (E^{1/n} - I)^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} E^{j/n} f(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} f\left(x + \frac{j}{n}\right).$$

Wendet man $\Delta_{1/n}^s$ auf $f_s(x) := x^s$ an, dann ergibt sich

$$\Delta_{1/n}^s f_s(0) = \frac{1}{n^s} \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} (-1)^{s-j} j^s = \frac{s!}{n^s} S_{s,s},$$

wobei mit $S_{n,k}$ *Stirlingzahlen 2. Art* bezeichnet werden. Da $S_{s,s} = 1$, für alle $s \in \mathbb{N}$, erhält man abschließend

$$[x^s]\,\mathrm{B}_n(f_s)(x) = \binom{n}{s}\frac{s!}{n^s}.$$

$\square$

3.1.3 Bemerkung. Die *Stirlingzahlen 2. Art* $S_{n,k},\ n \geq 0,\ 0 \leq k \leq n$, sind durch

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S_{n,k}(x)_k$$

definiert und besitzen die explizite Darstellung

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n.$$

3.1.4 Beispiel. Für $f_i(x) := x^i,\ i = 0,1,2$ soll das Bild unter dem n-ten Bersteinoperator berechnet werden. Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt

$$g(t) := \left[(1-x) + xe^t\right]^n = \sum_{k=0}^{n} e^{kt}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Wertet man an der Stelle $t = 0$ aus, so ergibt sich

$$g(0) = 1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \mathrm{B}_n(f_0)(x).$$

Für die erste und zweite Ableitung von $g(t)$ nach t erhält man

$$\begin{aligned}
g'(t) &= n\left[(1-x) + xe^t\right]^{n-1} xe^t = \sum_{k=0}^{n} ke^{kt}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\\
g''(t) &= n(n-1)\left[(1-x) + xe^t\right]^{n-2}\left(xe^t\right)^2 + n\left[(1-x) + xe^t\right]^{n-1} xe^t =\\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 e^{kt}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Auswertung an der Stelle $t = 0$ ergibt

$$\begin{aligned}
g'(0) &= nx = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = n\,\mathrm{B}_n(f_1)(x) \quad \text{sowie}\\
g''(0) &= n(n-1)x^2 + nx = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = n^2\,\mathrm{B}_n(f_2)(x).
\end{aligned}$$

Daraus erhält man sofort $\mathrm{B}_n(f_1)(x) = x$ und $\mathrm{B}_n(f_2)(x) = x^2 - \frac{x(x-1)}{n}$.

3.2 Betaoperator

3.2.1 Definition. Für $f \in C[0,1],\ x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ ist der n-te *Betaoperator* $\mathrm{I}_n^{(\alpha,\beta)}$ gegeben durch

$$\mathrm{I}_n^{(\alpha,\beta)}(f)(x) := \frac{\int_0^1 t^{nx+\alpha}(1-t)^{n(1-x)+\beta} f(t)dt}{B(nx+\alpha+1, n(1-x)+\beta+1)},$$

wobei $B(a,b)$ die Beta-Funktion ist und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha, \beta > -1$.

3.2.2 Lemma. *Der Betaoperator hat folgende Eigenschaften:*

(i) $\mathrm{I}_n^{(\alpha,\beta)}$ *ist ein positiver linearer Operator.*

(ii) $\mathrm{I}_n^{(\alpha,\beta)} : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$.

(iii) Sei $f_s(x) := x^s$, *dann gilt* $\mathrm{I}_n^{(\alpha,\beta)}(f_s)(x) = \frac{(nx+\alpha+1)_s}{(n+\alpha+\beta+2)_s}$ *und somit erhält man für den höchsten Koeffizienten* $[x^s]\,\mathrm{I}_n^{(\alpha,\beta)}(f_s)(x) = \frac{n^s}{(n+\alpha+\beta+2)_s}$.

(iv) Für $s \leq n$ *und* $f \in \mathcal{P}_s$ *gilt* $\mathrm{I}_n^{(\alpha,\beta)}(f) \in \mathcal{P}_s$.

Beweis.
ad (i) : Sowohl die Linearität als auch die Positivität folgt aus den Eigenschaften des Integrals.
ad (ii) : Sei $f \in C[0,1]$ und bezeichnet man den Integranden im Zähler mit $g(x,t) := t^{nx+\alpha}(1-t)^{n(1-x)+\beta} f(t)$, dann ist $g(x,t)$ für $\alpha, \beta > -1$ stetig auf $[0,1] \times [0,1]$. Somit ist das Paramterintegral stetig auf $[0,1]$. Da die Funktion im Nenner ebenfalls stetig auf dem Intervall $[0,1]$ ist und dort keine Nullstellen besitzt ist $\mathrm{I}_n^{(\alpha,\beta)}(f)(x)$ stetig auf $[0,1]$.
ad (iii) : Wendet man den Betaoperator auf f_s an, so erhält man im Zähler ebenfalls eine Beta-Funktion

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n^{(\alpha,\beta)}(f_s)(x) &= \frac{B(nx+\alpha+s+1, n(1-x)+\beta+1)}{B(nx+\alpha+1, n(1-x)+\beta+1)} = \\ &= \frac{\Gamma(nx+\alpha+s+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+s+2)} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(nx+\alpha+1)} = \\ &= \frac{(nx+\alpha+1)_s}{(n+\alpha+\beta+2)_s}\end{aligned}$$

und daraus ergibt sich für den Koeffizienten von x^s

$$[x^s]\,\mathrm{I}_n^{(\alpha,\beta)}(f_s)(x) = \frac{n^s}{(n+\alpha+\beta+2)_s}.$$

ad (iv) : Diese Aussage ist auf Grund der Linearität des Operators eine unmittelbare Folgerung von (iii).

□

3.2.3 Bemerkung. Der Betaoperator wurde von A. Lupaş in [8] eingeführt. Er kann auch für $\alpha, \beta = -1$ durch stetige Fortsetzung an den Randpunkten erklärt werden.

3.3 Der Operator $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}$

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Eigenschaften des folgenden Operators zu studieren.

3.3.1 Definition. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta > -1$ ist der Operator $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}(f)(x) :&= \mathrm{B}_n \circ \mathrm{I}_n^{(\alpha,\beta)}(f)(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{\int_0^1 t^{k+\alpha}(1-t)^{n-k+\beta} f(t)dt}{B(k+\alpha+1, n-k+\beta+1)}. \end{aligned}$$

Abkürzend wird er geschrieben als

$$\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{h_{n,k}(f)}{b_{n,k}}$$

mit

$$\begin{aligned} h_{n,k}(f) &:= \int_0^1 t^{k+\alpha}(1-t)^{n-k+\beta} f(t)dt \quad \text{sowie} \\ b_{n,k} &:= B(k+\alpha+1, n-k+\beta+1). \end{aligned}$$

3.3.2 Korollar. *Der Operator* $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}$ *hat folgende Eigenschaften:*

(*i*) $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}$ *ist ein positiver linearer Operator.*

(*ii*) $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)} : C[0,1] \longrightarrow \mathcal{P}_{\leq n}$.

Beweis.
ad (*i*) : Klar, denn sowohl der Beta- als auch der Bernsteinoperator sind linear und positiv.
ad (*ii*) : Diese Aussage folgt unmittelbar aus Lemma 3.2.2 (ii) sowie Lemma 3.1.2 (iii).

□

Daher sind die Eigenfunktionen des Operators $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}$ Polynome deren Grad kleiner gleich n ist. Grundlegend für die Berechnung dieser Eigenfunktionen ist der folgende Satz:

3.3.3 Satz. *Der Operator* $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}$ *vertauscht mit dem Operator* $\mathcal{D}$*, dh:*

$$\mathcal{D}\,\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)} f = \mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)} \mathcal{D} f.$$

Beweis. Betrachtet man zuerst die linke Seite, so gilt für $(\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)} f)'(x)$

$$\begin{aligned}(\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)} f)'(x) = &\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}(1-x)^{n-k}\frac{h_{n,k}(f)}{b_{n,k}} - \\ &-\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k) x^{k}(1-x)^{n-k-1}\frac{h_{n,k}(f)}{b_{n,k}}.\end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta+1}$ und leitet ein weiteres mal nach x ab bekommt man

$$\begin{aligned}&\Big(x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta+1}(\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)} f)'(x)\Big)' = \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} k(k+\alpha)x^{k+\alpha-1}(1-x)^{n-k+\beta+1}\frac{h_{n,k}(f)}{b_{n,k}} - \\ &\quad -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} k(n-k+\beta+1)x^{k+\alpha}(1-x)^{n-k+\beta}\frac{h_{n,k}(f)}{b_{n,k}} - \\ &\quad -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} (n-k)(k+\alpha+1)x^{k+\alpha}(1-x)^{n-k+\beta}\frac{h_{n,k}(f)}{b_{n,k}} + \\ &\quad +\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} (n-k)(n-k+\beta)x^{k+\alpha+1}(1-x)^{n-k+\beta-1}\frac{h_{n,k}(f)}{b_{n,k}}.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich daher für die linke Seite

$$(\mathcal{D}\,\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)} f)(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} k(k+\alpha)x^{k-1}(1-x)^{n-k+1}\frac{h_{n,k}(f)}{b_{n,k}} - \tag{A1}$$

$$-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} k(n-k+\beta+1)x^{k}(1-x)^{n-k}\frac{h_{n,k}(f)}{b_{n,k}} - \tag{A2}$$

$$-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} (n-k)(k+\alpha+1)x^{k}(1-x)^{n-k}\frac{h_{n,k}(f)}{b_{n,k}} + \tag{A3}$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} (n-k)(n-k+\beta)x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}\frac{h_{n,k}(f)}{b_{n,k}}. \tag{A4}$$

Betrachtet man die rechte Seite, so muss man das Bild von $\mathcal{D}f(x)$ unter dem Operator $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}$ bestimmen. Setzt man $\mathcal{D}f(x)$ in den Operator $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}$ ein, so gilt

$$\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}\,\mathcal{D}f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\frac{\int_0^1 t^k(1-t)^{n-k}(t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta+1}f'(t))'dt}{B(k+\alpha+1,n-k+\beta+1)}.$$

Betrachtet man das Integral, so ergibt sich durch partielle Integration, da die Auswertung am Rand keinen Beitrag liefert, zunächst

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^k(1-t)^{n-k}(t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta+1}f'(t))'dt = \\
&= -\int_0^1 \left[kt^{k-1}(1-t)^{n-k}-(n-k)t^k(1-t)^{n-k-1}\right]t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta+1}f'(t)dt = \\
&= -\int_0^1 \left[kt^{k+\alpha}(1-t)^{n-k+\beta+1}-(n-k)t^{k+\alpha+1}(1-t)^{n-k+\beta}\right]f'(t)dt.
\end{aligned}$$

Führt man ein weiteres mal die partielle Integration aus, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big[k(k+\alpha)t^{k+\alpha-1}(1-t)^{n-k+\beta+1}-k(n-k+\beta+1)t^{k+\alpha}(1-t)^{n-k+\beta}- \\
&-(n-k)(k+\alpha+1)t^{k+\alpha}(1-t)^{n-k+\beta}+ \\
&\qquad\qquad +(n-k)(n-k+\beta)t^{k+\alpha+1}(1-t)^{n-k+\beta-1}\Big]f(t)dt.
\end{aligned}$$

Die recht Seite berechnet sich also zu

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}\,\mathcal{D}f)(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k+\alpha)x^k(1-x)^{n-k}\frac{h_{n,k-1}(f)}{b_{n,k}}- && \text{(B1)}\\
&\quad -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(n-k+\beta+1)x^k(1-x)^{n-k}\frac{h_{n,k}(f)}{b_{n,k}}- && \text{(B2)}\\
&\quad -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)(k+\alpha+1)x^k(1-x)^{n-k}\frac{h_{n,k}(f)}{b_{n,k}}+ && \text{(B3)}\\
&\quad +\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)(n-k+\beta)x^k(1-x)^{n-k}\frac{h_{n,k+1}(f)}{b_{n,k}}. && \text{(B4)}
\end{aligned}$$

Vergleicht man linke und rechte Seite, so sieht man, dass die Summen (A2) und (B2) sowie (A3) und (B3) gleich sind. Die Summe (B1) liefert für $k=0$

keinen Beitrag und man kann deshalb erst ab $k = 1$ summieren. Verschiebt man weiters die Summationsgrenzen, $k = j + 1$, so erhält man

$$\mathrm{B1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} (j+1)(j+\alpha+1) x^{j+1} (1-x)^{n-j-1} \frac{h_{n,j}(f)}{b_{n,j+1}}. \tag{3.3}$$

Beachtet man

$$\binom{n}{j+1}(j+1) = \frac{n \cdots (n-j)}{(j+1)!}(j+1) = \binom{n}{j}(n-j)$$

sowie

$$b_{n,j+1} = B(j+1+\alpha+1, n-j-1+\beta+1) = \frac{\Gamma(j+\alpha+2)\Gamma(n-j+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)} =$$
$$= \frac{(j+\alpha+1)\Gamma(j+\alpha+1)\Gamma(n-j+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)(n-j+\beta)} = \frac{j+\alpha+1}{n-j+\beta}\, b_{n,j},$$

so schreibt sich Gleichung (3.3) als

$$\mathrm{B1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (n-j)(n-j+\beta) x^{j+1} (1-x)^{n-j-1} \frac{h_{n,j}(f)}{b_{n,j}} = \mathrm{A4}.$$

Die Summe (B4) liefert für $k = n$ keinen Betrag und nach der Substitution $k = j - 1$ ergibt sich

$$\mathrm{B4} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} (n-j+1)(n-j+\beta+1) x^{j-1} (1-x)^{n-j+1} \frac{h_{n,j}(f)}{b_{n,j-1}}. \tag{3.4}$$

Durch Umformung des Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{j-1}(n-j+1) = \frac{n \cdots (n-j+2)(n-j+1)}{(j-1)!}\frac{j}{j} = \binom{n}{j} j$$

und wegen

$$b_{n,j-1} = B(j-1+\alpha+1, n-j+1+\beta+1) = \frac{\Gamma(j+\alpha)\Gamma(n-j+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)} =$$
$$= \frac{(n-j+\beta+1)\Gamma(j+\alpha+1)\Gamma(n-j+\beta+1)}{(j+\alpha)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)} = \frac{n-j+\beta+1}{j+\alpha}\, b_{n,j}$$

erhält man für Gleichung (3.4)

$$\mathrm{B4} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} j(j+\alpha) x^{j-1} (1-x)^{n-j+1} \frac{h_{n,j}(f)}{b_{n,j}} = \mathrm{A1}. \qquad \square$$

3.3.4 Korollar. *Die beiden Operatoren $\mathcal{D}$ und $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}$ besitzen die selben Eigenfunktionen.*

Beweis. Nach Satz 2.3.6 gilt $\mathcal{D}R_s^{(\alpha,\beta)} = \mu_s R_s^{(\alpha,\beta)}$ und wegen Satz 3.3.3 folgt daher

$$\mathcal{D}\,\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}\,R_s^{(\alpha,\beta)} = \mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}\,\mathcal{D}R_s^{(\alpha,\beta)} = \mu_s\,\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}\,R_s^{(\alpha,\beta)}.$$

Somit ist $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}\,R_s^{(\alpha,\beta)}$ eine Eigenfunktion des Operators $\mathcal{D}$ und erfüllt deshalb

$$\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}\,R_s^{(\alpha,\beta)} = \lambda_s R_s^{(\alpha,\beta)}.$$

□

3.3.5 Satz. *Sei $R_s^{(\alpha,\beta)}(x)$ das s-te verschobene Jacobi Polynom auf dem Intervall $[0,1]$, dann gilt für $s \le n$:*

$$\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}\,R_s^{(\alpha,\beta)} = \binom{n}{s}\frac{s!}{\left(n+\alpha+\beta+2\right)_s}\,R_s^{(\alpha,\beta)}.$$

Beweis. Nach Korollar 3.3.4 gilt $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}\,R_s^{(\alpha,\beta)} = \lambda_s R_s^{(\alpha,\beta)}$. Schreibt man die verschobenen Jacobi Polynome $R_s^{(\alpha,\beta)}$ in der Form $R_s^{(\alpha,\beta)}(x) = c_s x^s + g_{s-1}(x)$, wobei $g_{s-1}(x)$ ein Polynom mit $\operatorname{grad} g_{s-1}(x) \le s-1$ ist, so erhält man

$$\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}\,R_s^{(\alpha,\beta)} = c_s\,\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}(x^s) + \mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}\,g_{s-1},$$

andererseits gilt

$$\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}\,R_s^{(\alpha,\beta)} = \lambda_s R_s^{(\alpha,\beta)} = c_s\lambda_s x^s + \lambda_s g_{s-1}.$$

Da $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}$ Polynome vom Grad $s-1$ auf Polynome mit Grad $\le s-1$ abbildet gilt, $\lambda_s = [x^s]\,\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}(x^s)(x)$.
Nach Lemma 3.2.2 (iii) gilt für den Betaoperator

$$[x^s]\,\mathrm{I}_n^{(\alpha,\beta)}(x^s)(x) = \frac{n^s}{(n+\alpha+\beta+2)_s}$$

und wegen Lemma 3.1.2 (iv) gilt für den Bernsteinoperator

$$[x^s]\,\mathrm{B}_n(x^s)(x) = \binom{n}{s}\frac{s!}{n^s}.$$

Somit erhält man insgesamt

$$[x^s]\,\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}(x^s)(x) = \frac{n^s}{(n+\alpha+\beta+2)_s}\binom{n}{s}\frac{s!}{n^s} = \binom{n}{s}\frac{s!}{\left(n+\alpha+\beta+2\right)_s} = \lambda_s.$$

□

3.3.6 Satz. *Sei* $\delta := \alpha + \beta + 2$ *und schreibt man für* $\mathrm{V}_k^{(\alpha,\beta)}$ *abkürzend* V_k, *dann gilt*

$$\mathrm{V}_n\,\mathrm{V}_m = \sum_{s=0}^{\min(n,m)} \binom{n}{s}\binom{m}{s} s! \frac{\Gamma(m+\delta)\Gamma(n+\delta)}{\Gamma(s+\delta)\Gamma(m+n+\delta)}\,\mathrm{V}_s\,.$$

Beweis. Es genügt diese Identität für die Eigenfunktionen des Operators V_n zu zeigen. Bringt man zunächst alle Terme die nicht von s abhängen auf die linke Seite, dann gelangt man zur folgenden Gleichung

$$\frac{\Gamma(m+n+\delta)}{\Gamma(m+\delta)\Gamma(n+\delta)}\,\mathrm{V}_n\,\mathrm{V}_m = \sum_{s=0}^{\min(n,m)} \binom{n}{s}\binom{m}{s} \frac{s!}{\Gamma(s+\delta)}\,\mathrm{V}_s\,.$$

Wendet man die linke Seite auf die Funktion $R_r(x) := R_r^{(\alpha,\beta)}(x)$ an, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(m+n+\delta)}{\Gamma(m+\delta)\Gamma(n+\delta)}\,\mathrm{V}_n\,\mathrm{V}_m\,R_r &= \\ &= \frac{\Gamma(m+n+\delta)}{\Gamma(m+\delta)\Gamma(n+\delta)}\binom{n}{r}\binom{m}{r}\frac{r!\;r!}{(n+\delta)_r(m+\delta)_r}R_r.\end{aligned}$$

Für die rechte Seite ergibt sich nach Anwendung auf die Funktion $R_r(x)$

$$\sum_{s=r}^{\min(m,n)} \binom{n}{s}\binom{m}{s}\frac{s!}{\Gamma(s+\delta)}\binom{s}{r}\frac{r!}{(s+\delta)_r}R_r.$$

Setzt man $s = r+k$ und beachtet, dass $\Gamma(s+\delta)(s+\delta)_r = \Gamma(s+\delta+r)$, dann ergibt sich weiter

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{r+k}\binom{n}{r+k}\frac{(r+k)!}{\Gamma(2r+\delta+k)}\frac{(r+k)!}{k!}R_r.$$

Da für $k > \min(m-r, n-r)$ die Summe keinen Betrag liefert, ist es zulässig über alle $k \in \mathbb{N}$ zu summieren. Wegen

$$\begin{aligned}\binom{m}{r+k}(r+k)! &= m(m-1)\cdots(m-r+1)(m-r)\cdots(m-r-k+1) = \\ &= \binom{m}{r} r!(-1)^k(-m+r)_k\end{aligned}$$

gilt daher

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{r+k}\binom{n}{r+k}\frac{(r+k)!}{\Gamma(2r+\delta+k)}\frac{(r+k)!}{k!}R_r &= \\ &= \binom{n}{r}r!\binom{m}{r}r!\frac{1}{\Gamma(2r+\delta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-m+r)_k(-n+r)_k}{k!(2r+\delta)_k}R_r = \\ &= \binom{n}{r}r!\binom{m}{r}r!\frac{1}{\Gamma(2r+\delta)}\,{}_2F_1(-m+r,-n+r;2r+\delta;1)R_r.\end{aligned}$$

Vergleicht man nun linke und rechte Seite

$$\frac{\Gamma(m+n+\delta)}{\Gamma(m+\delta)\Gamma(n+\delta)}\binom{n}{r}\binom{m}{r}\frac{r!\,r!}{(n+\delta)_r(m+\delta)_r}R_r =$$
$$= \binom{n}{r}\binom{m}{r}\frac{r!\,r!}{\Gamma(2r+\delta)}{}_2F_1(-m+r,-n+r;2r+\delta;1)R_r.$$

Es bleibt also noch zu zeigen

$${}_2F_1(-m+r,-n+r;2r+\delta;1) = \frac{\Gamma(2r+\delta)\Gamma(m+n+\delta)}{\Gamma(m+\delta)\Gamma(n+\delta)}.$$

Dies ist gerade die Aussage der Gauß'schen Summenformel (siehe [1, Seite 66]): Für $\mathfrak{Re}\,(c-a-b) > 0$ gilt

$${}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Da stets $2r+\delta-(-m+r)-(-n+r) = m+n+\delta > 0$ gilt, ist die Voraussetzung erfüllt und damit der Satz bewiesen. □

Der folgenden Satz liefert eine Aussage darüber, wann ein positiver linearer Operator eine stetige Funktion gleichmäßig approximiert (siehe [9]). Eine etwas allgemeinere Version findet man in [3].

3.3.7 Satz (Bohman-Korovkin). *Sei $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver linearer Operatoren von $C[a,b]$ auf sich und $f_i(x) = x^i$. Gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_i - L_n f_i\|_{[a,b]} = 0 \quad \text{für } i = 0,1,2$$

dann konvergiert $L_n f$ gleichmäßig gegen f für $f \in C[a,b]$.

Beweis. Wegen $f \in C[a,b]$ ist f auch gleichmäßig stetig. Sei also $x_0 \in [a,b]$ beliebig aber fest, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sodass für alle $x \in [a,b]$ mit $|x-x_0| < \delta$ gilt: $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. Definiert man $\rho_{x_0}(x) := (x-x_0)^2$, dann erhält man wegen

$$|f(x)-f(x_0)| \le 2\,\|f\|_{[a,b]} \le 2\,\|f\|_{[a,b]}\,\frac{\rho_{x_0}(x)}{\delta^2} \quad \text{für} \quad |x-x_0| \ge \delta$$

insgesamt für alle $x \in [a,b]$ die Abschätzung

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon f_0(x) + 2\,\|f\|_{[a,b]}\,\frac{\rho_{x_0}(x)}{\delta^2}.$$

Da L_n ein positiver linearer Operator ist, gilt für alle Funktionen $g,h \in C[a,b]$ die Implikation

$$|g| \le h \;\Rightarrow\; |L_n g| \le L_n h.$$

Somit folgt die Ungleichung

$$|L_n(f)(x_0) - f(x_0)L_n(f_0)(x_0)| < \varepsilon L_n(f_0)(x_0) + \frac{2\,\|f\|_{[a,b]}}{\delta^2} L_n(\rho_{x_0})(x_0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und einer festen Stelle x_0. Daraus erhält man weiter

$$\begin{aligned} &|f(x_0) - L_n(f)(x_0)| \leq \\ &\qquad \leq |f(x_0) - f(x_0)L_n(f_0)(x_0)| + |L_n(f)(x_0) - f(x_0)L_n(f_0)(x_0)| < \\ &\qquad < \|f\|_{[a,b]} \|f_0 - L_n f_0\|_{[a,b]} + \varepsilon \|L_n f_0\|_{[a,b]} + \frac{2\,\|f\|_{[a,b]}}{\delta^2} \|L_n \rho_{x_0}\|_{[a,b]} . \end{aligned}$$

Da x_0 beliebig gewählt wurde, gilt diese Abschätzung für alle $x_0 \in [a,b]$. Nach Voraussetzung konvergiert $L_n f_0$ gleichmäßig gegen f_0 und daher folgt

$$\|L_n f_0\|_{[a,b]} \leq \|L_n f_0 - f_0\|_{[a,b]} + \|f_0\|_{[a,b]} < 1 + \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq n_1(\varepsilon).$$

Weiters gilt für alle $x_0 \in [a,b]$

$$\begin{aligned} |L_n(\rho_{x_0})(x_0)| &= \left|L_n(f_2)(x_0) - 2x_0 L_n(f_1)(x_0) + x_0^2 L_n(f_0)(x_0)\right| = \\ &= |L_n(f_2)(x_0) - f_2(x_0) - 2x_0(L_n(f_1)(x_0) - f_1(x_0)) + \\ &\qquad\qquad + x_0^2(L_n(f_0)(x_0) - f_0(x_0)\big| . \end{aligned}$$

Setzt man $C := \max\{2|a|, 2|b|, a^2, b^2\}$, so folgt

$$\|L_n \rho_{x_0}\|_{[a,b]} \leq \|f_2 - L_n f_2\|_{[a,b]} + C\,\|f_1 - L_n f_1\|_{[a,b]} + C\,\|f_0 L_n f_0\|_{[a,b]} < \varepsilon$$

für ein hinreichend großes $n \geq n_2(\varepsilon)$. Insgesamt erhält man daher für $n \geq \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$

$$\|f - L_n f\|_{[a,b]} < \|f\|_{[a,b]}\,\varepsilon + \varepsilon(1+\varepsilon) + \frac{2\,\|f\|_{[a,b]}}{\delta^2}\varepsilon.$$

Da $\|f\|_{[a,b]}$ sowie δ nicht von n abhängig sind und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt wurde gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n f\|_{[a,b]} = 0.$$

□

3.3.8 Satz. *Sei $f \in C[0,1]$, dann konvergiert $\mathrm{V}_n f$ gleichmäßig gegen f.*

Für den Beweis sowie den restlichen Teil dieser Arbeit sei $\delta := \alpha + \beta + 2$.

Beweis. Nach dem Satz von Bohman-Korovkin (Satz 3.3.7) genügt es, die Testfunktionen $f_i(x) = x^i$ für $i = 0, 1, 2$ zu betrachten. Für den Bernstein-sowie den Betaoperator gilt (siehe Beispiel 3.1.4 beziehungsweise Lemma 3.2.2 (iii)):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{B}_n(f_0)(x) = 1 \qquad \mathrm{B}_n(f_1)(x) = x \quad \mathrm{B}_n(f_2)(x) = x^2 - \frac{x(x-1)}{n}\\
&\mathrm{I}_n^{(\alpha,\beta)}(f_0)(x) = 1 \quad \mathrm{I}_n^{(\alpha,\beta)}(f_1)(x) = \frac{nx+\alpha+1}{n+\delta}\\
&\mathrm{I}_n^{(\alpha,\beta)}(f_2)(x) = \frac{(nx+\alpha+1)_2}{(n+\delta)_2} = \frac{n^2x^2+nx(2\alpha+3)+(\alpha+1)(\alpha+2)}{(n+\delta)(n+\delta+1)}.
\end{aligned}$$

Für den zusammengesetzten Operator $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}$ folgt daher

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}(f_0)(x) &= 1,\\
\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}(f_1)(x) &= \frac{nx+\alpha+1}{n+\delta},\\
\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}(f_2)(x) &= \frac{n^2x^2-nx(x-1)+nx(2\alpha+3)+(\alpha+1)(\alpha+2)}{(n+\delta)(n+\delta+1)} =\\
&= \frac{n(n-1)x^2+2nx(\alpha+2)+(\alpha+1)(\alpha+2)}{(n+\delta)(n+\delta+1)}.
\end{aligned}$$

Da $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}(f_0)(x) = 1$ erhält man unmittelbar

$$\left\| f_0 - \mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)} f_0 \right\|_{[0,1]} = 0.$$

Für die Testfunktion $f_1(x) = x$ erhält man

$$\begin{aligned}
\left\| f_1 - \mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)} f_1 \right\|_{[0,1]} &= \sup_{x\in[0,1]} \left| x - \frac{nx+\alpha+1}{n+\delta} \right| =\\
&= \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{x\delta-\alpha-1}{n+\delta} \right| = \frac{\max\{\alpha,\beta\}+1}{n+\delta}
\end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f_1 - \mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)} f_1 \right\|_{[0,1]} = 0.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)} f_2$ gleichmäßig gegen f_2 konvergiert.

$$
\begin{aligned}
&\left\| f_2 - \mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)} f_2 \right\|_{[0,1]} = \\
&= \sup_{x\in[0,1]} \left| x^2 - \frac{n(n-1)x^2 + 2nx(\alpha+2) + (\alpha+1)(\alpha+2)}{(n+\delta)(n+\delta+1)} \right| = \\
&= \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{(2n+2n\delta+\delta^2+\delta)x^2 - 2nx(\alpha+2) - (\alpha+1)(\alpha+2)}{(n+\delta)(n+\delta+1)} \right| \leq \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} \left\{ \left| \frac{(2n+2n\delta+\delta^2+\delta)x^2}{(n+\delta)(n+\delta+1)} \right| + \left| \frac{2nx(\alpha+2)}{(n+\delta)(n+\delta+1)} \right| + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left| \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{(n+\delta)(n+\delta+1)} \right| \right\} \leq \\
&\leq \underbrace{\frac{2n+2n\delta+\delta^2+\delta}{(n+\delta)(n+\delta+1)}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2n(\alpha+2)}{(n+\delta)(n+\delta+1)}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{(n+\delta)(n+\delta+1)}}_{\to 0} \to 0.
\end{aligned}
$$

Der Operator $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)}$ approximiert die Testfunktionen $f_i(x) = x^i$ für $i = 0, 1, 2$ gleichmäßig und somit alle stetigen Funktionen $f \in C[0,1]$. $\square$

3.3.9 Satz. *Eine Jacobi Polynom Reihe* $\sum a_m R_m^{(\alpha,\beta)}(x)$ *wird durch das Gronwall Verfahren* $G(p,q)$ *mit*

$$p(w) = \frac{1-\sqrt{1-w}}{1+\sqrt{1-w}} \quad \textit{und} \quad q(w) = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-w}\right)^{1-\delta}}{\sqrt{1-w}}$$

gleichmäßig summiert.

Beweis. Nach Lemma 1.6.6 gilt für die Folgenglieder t_n dieses Gronwall Verfahrens

$$t_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{m!}{(n+\delta)_m} u_m.$$

Summiert man eine Jacobi Polynom Reihe, so erhält man

$$t_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{m!}{(n+\delta)_m} a_m R_m^{(\alpha,\beta)}(x) = \mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m R_m^{(\alpha,\beta)}(x) \right).$$

Nach Satz 3.3.8 konvergiert $\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)} \left(\sum a_m R_m^{(\alpha,\beta)} \right)$ gleichmäßig. $\square$

3.3.10 Satz. *Besitzt* $f \in L^1_{\alpha,\beta}[0,1]$ *die Darstellung*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{R_k^{(\alpha,\beta)}(t) R_k^{(\alpha,\beta)}(0)}{h_k^{\alpha,\beta}},$$

dann gilt

$$\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)} f = f * v_n \quad \mathit{mit} \quad v_n(t) = \frac{(1-t)^n}{B(\alpha+1, n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}.$$

Beweis. Nach Satz 3.3.5 gilt

$$\mathrm{V}_n^{(\alpha,\beta)} f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k \frac{R_k^{(\alpha,\beta)}(t) R_k^{(\alpha,\beta)}(0)}{h_k^{\alpha,\beta}} \quad \text{wobei} \quad \lambda_k = \binom{n}{k} \frac{k!}{(n+\delta)_k}.$$

Es ist also eine Funktion gesucht mit den Koeffizienten λ_k in ihrer Jacobi Polynom Reihen Entwicklung. Nach Lemma 2.4.2 gilt

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(x) P_k^{(\alpha,\beta)}(1)}{h_k^{\alpha,\beta}},$$

wobei die Koeffizienten a_k durch

$$a_k = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+k+\delta)} \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)}$$

gegeben sind. Für die Koeffizienten a_k erhält man weiter

$$\begin{aligned} a_k &= \binom{n}{k} k! \frac{1}{(n+\delta)_k} \frac{\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\delta)} \cdot 2^{\alpha+\beta+1} = \\ &= \binom{n}{k} \frac{k!}{(n+\delta)_k} 2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, n+\beta+1). \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x) = ((1+x)/2)^n$ besitzt somit folgende Jacobi Polynom Reihen Entwicklung

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{(n+\delta)_k} \frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(x) P_k^{(\alpha,\beta)}(1)}{h_k^{\alpha,\beta}} 2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, n+\beta+1).$$

Führt man die Substitution $x = 1 - 2t$ durch, um zu den verschobenen Jacobi Polynomen $R_k^{(\alpha,\beta)}(t)$ zu gelangen, ergibt sich

$$\frac{(1-t)^n}{B(\alpha+1, n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{(n+\delta)_k} \frac{R_k^{(\alpha,\beta)}(t) R_k^{(\alpha,\beta)}(0)}{h_k^{\alpha,\beta}}.$$

Hierbei handelt es sich bereits um die gesuchte Funktion und daher gilt

$$v(t) = \frac{(1-t)^n}{B(\alpha+1, n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}.$$

□

Literaturverzeichnis

[1] Andrews, G. E., R. Askey und R. Roy: *Special functions*, Bd. 71 d. Reihe *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[2] Askey, R.: *Orthogonal polynomials and special functions*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1975.

[3] DeVore, R. A.: *The approximation of continuous functions by positive linear operators*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[4] Gronwall, T. H.: *Summation of series and conformal mapping*. Ann. of Math. (2), 33(1):101–117, 1932.

[5] Hardy, G. H.: *Divergent Series*. Oxford, at the Clarendon Press, 1949.

[6] Horton, R.: *Jacobi polynomials. IV. A family of variation diminishing kernels*. SIAM J. Math. Anal., 6:544–550, 1975.

[7] Lorentz, G. G.: *Bernstein polynomials*. Chelsea Publishing Co., New York, 1986.

[8] Lupaş, A.: *Die Folge der Betaoperatoren*. Dissertation, Stuttgart, 1972.

[9] Müller, M. W.: *Approximationstheorie*. Studien-Texte Mathematik. Wiesbaden: Akademische Verlagsgesellschaft, 1978.

[10] Tricomi, F. G.: *Vorlesungen über Orthogonalreihen*. Zweite, Korrigierte Auflage. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 76. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[11] Zeller, K. und W. Beekmann: *Theorie der Limitierungsverfahren*. Zweite, erweiterte und verbesserte Auflage. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 15. Springer-Verlag, Berlin, 1970.