

DISSERTATION

Fließzonentheorie I. und II. Ordnung für den Einzelstab mit offenem Dreiblechquerschnitt

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der technischen Wissenschaften

begutachtet von

O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Helmut Rubin

Technische Universität Wien
Institut für Baustatik (E211)

und

Univ.Doiz. Dipl.-Ing. Dr.techn. Roman Lackner

Technische Universität Wien
Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen (E202)

eingereicht an der Technischen Universität Wien

Fakultät für Bauingenieurwesen

von

Dipl.-Ing. Christoph Hagel

Matr.Nr. 9325957

A-3511 Furth, Dir.Priesnerstraße 402

Wien, im Dezember 2004

Vorwort

Vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als Universitätsassistent am Institut für Baustatik an der Technischen Universität Wien.

An dieser Stelle möchte ich Herrn O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Helmut Rubin, dem Vorstand des Instituts für Baustatik, für die freundliche Betreuung dieser Arbeit danken.

Herrn Univ.Doiz. Dipl.-Ing. Dr.techn. Roman Lackner gilt mein besonderer Dank für die Übernahme des Koreferats.

Des Weiteren möchte ich allen danken, die – in welcher Form auch immer – zum Gelingen vorliegender Arbeit beigetragen haben.

Kurzfassung

Wird ein System über seine elastische Grenze beansprucht, sind die Voraussetzungen für die Anwendung der normal gebräuchlichen Elastizitätstheorie nicht mehr erfüllt und es müssen die auftretenden physikalischen Nichtlinearitäten berücksichtigt werden. Um das tatsächliche Systemverhalten bei jeder beliebigen Laststufe bis zur Traglast beschreiben zu können, bedient man sich der so genannte Fließzonentheorie. Sie erfasst das plastische Materialverhalten (im Gegensatz zur Fließgelenktheorie) in jeder plastizierten Zone des Systems und stellt damit eine wesentlich genauere Beschreibung der Realität dar.

In dieser Arbeit wird der Einzelstab mit offenem Dreiblechquerschnitt bei statisch bestimmter Lagerung unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion anhand der Fließzonentheorie untersucht. Der betrachtete Dreiblechquerschnitt stellt einen typischen Querschnitt des Stahlbaus dar. Dementsprechend wird zur Beschreibung des Materialverhaltens ein linear elastisches – ideal plastisches Werkstoffgesetz (Baustahl) angenommen.

Ausgehend von der Betrachtung eines allgemeinen Dreiblechquerschnitts wird eine Theorie zur Beschreibung des Systemverhaltens von Einzelstäben bis zur Traglast hergeleitet. Das Gleichgewicht wird dabei zunächst am unverformten System formuliert; man spricht daher von der Fließzonentheorie I. Ordnung. Auf ihr aufbauend wird durch Erweiterung die Fließzonentheorie II. Ordnung angegeben, die als Sonderfall die Fließzonentheorie I. Ordnung beinhaltet. Bei der Beschreibung des Tragverhaltens mittels Fließzonentheorie II. Ordnung wird das Gleichgewicht am verformten System gebildet, was bei einer Untersuchung von stabilitätsgefährdeten Systemen unerlässlich ist. Die vorgestellte Theorie kommt mit Hilfe eines Computerprogramms zur Anwendung. Durch Berechnung von Systemen, die in der Literatur bzw. in Versuchen untersucht wurden, werden die mit dieser Theorie erhaltenen Ergebnisse verifiziert. Sowohl für Theorie I. als auch für Theorie II. Ordnung werden ausgewählte Systeme untersucht. Die dabei auftretenden grundlegenden Phänomene werden analysiert und diskutiert.

Abstract

If the load on a system exceeds the elastic limit, the assumptions for the theory of elasticity are no longer valid and the effects of the physical nonlinearities of the material have to be taken into account. In order to describe the behaviour of a system at any level of loading up to the ultimate load, the so called yield-zone theory has to be applied. This theory implies the plastic material behaviour in every zone of the system (in contrary to the plastic hinge theory) and thus is a much more accurate image of reality.

In this paper the statically determined single beam with open 3-plate-cross-section is investigated. The effects of warping torsion are considered. The 3-plate-cross-section is a typical cross-section for steel constructions. Hence, the material behaviour is defined by a linear elastic – ideal plastic material law (structural steel).

In the first part of the paper the equilibrium is formulated for the undeformed system and consequently the first order yield-zone theory for the investigated systems is presented. On the basis of this theory the second order yield-zone theory is derived. In the case of the second order yield-zone theory the equilibrium is formulated for the deflected system, which is necessary for the calculation of stability sensitive systems. Within the second order yield-zone theory the first order yield-zone theory is embedded as a special case. The application of the presented theory is achieved by a computer program. The results of the calculations are verified by examples from literature and experiments. Selected examples for first and second order theory are given. The obtained results and the appearing phenomenon are analyzed and discussed.

Inhaltsübersicht

Inhaltsübersicht	v
Inhaltsverzeichnis	vi
1 Einleitung	1
2 Bezeichnungen	3
3 Grundlagen	8
4 Fließzonentheorie I. Ordnung	16
5 Untersuchungen zur Fließzonentheorie I. Ordnung	60
6 Fließzonentheorie II. Ordnung.....	86
7 Untersuchungen zur Fließzonentheorie II. Ordnung.....	103
8 Zusammenfassung	118
Literaturverzeichnis	120
Abbildungsverzeichnis	123
Tabellenverzeichnis	125

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsübersicht	v
Inhaltsverzeichnis	vi
1 Einleitung	1
2 Bezeichnungen	3
2.1 Geometrie, Querschnitt, Material	3
2.2 Einwirkungen	4
2.3 Schnittgrößen.....	4
2.4 Verformungsgrößen.....	7
3 Grundlagen	8
3.1 Annahmen	8
3.2 Stoffgesetz	9
3.3 Betrachtete Querschnitte	10
3.4 Betrachtete Lagerungsfälle und Einwirkungen	12
3.5 Schnittgrößen.....	14
4 Fließzonentheorie I. Ordnung	16
4.1 Allgemeines.....	16
4.2 Definition der Unbekannten	19
4.3 Kinematische Beziehungen	22
4.4 Schnittgrößen nach Elastizitätstheorie	25
4.4.1 Teilschnittgrößen nach Elastizitätstheorie	25
4.4.2 Gesamtschnittgrößen nach Elastizitätstheorie	26
4.5 Bezug zur herkömmlichen Wölbkrafttorsionstheorie	31
4.6 Bestimmungsgleichungen nach Elastizitätstheorie	34

4.7	Bestimmungsgleichungen nach Plastizitätstheorie	37
4.8	Berücksichtigung von Schubspannungen.....	41
4.8.1	Allgemeines	41
4.8.2	Vergleichsspannung.....	42
4.8.3	Anwendung auf den Dreiblechquerschnitt.....	43
4.9	Mathematische Grundlagen.....	48
4.9.1	Numerische Integration.....	48
4.9.2	Integrationsmatrizen für das Gleichungssystem	51
4.9.3	Numerische Differentiation	53
4.9.4	Lösung der Gleichungssysteme	54
4.9.5	Bestimmung der Verformungsgrößen.....	57
5	Untersuchungen zur Fließzonentheorie I. Ordnung	60
5.1	Allgemeines.....	60
5.2	I-Träger unter doppelter Biegung und Normalkraft.....	61
5.3	Durchbiegung unter Traglast.....	66
5.4	U-Träger unter Gleich- und Einzellast	71
5.4.1	Lastfall Gleichlast	71
5.4.2	Lastfall Einzellast.....	77
6	Fließzonentheorie II. Ordnung.....	86
6.1	Allgemeines.....	86
6.2	Gleichgewichtsbedingungen	88
6.2.1	Kräftegleichgewichtsbedingungen.....	88
6.2.2	Momentengleichgewichtsbedingungen.....	89
6.3	Umrechnungsbeziehungen	90
6.4	Bestimmungsgleichungen	93
6.4.1	Allgemeines	93
6.4.2	Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung	93
6.4.3	Integralterm K	96
6.4.4	Gleichungssysteme	100
6.5	Berücksichtigung von Schubspannungen.....	101

7	Untersuchungen zur Fließzonentheorie II. Ordnung.....	103
7.1	Allgemeines.....	103
7.2	I-Träger unter doppelter Biegung und Normalkraft.....	104
7.3	Vergleichsrechnung mit Versuchen.....	108
7.3.1	I-Träger unter zweiachsig außermittiger Druckkraft.....	108
7.3.2	U-Träger unter Einzellast.....	113
7.3.2.1	Einzellast in Feldmitte – Lastangriff unter Schubmittelpunkt M.....	113
7.3.2.2	Einzellast in Feldmitte – Lastangriff über Stegschwerpunkt S.....	114
8	Zusammenfassung.....	118
	Literaturverzeichnis.....	120
	Abbildungsverzeichnis.....	123
	Tabellenverzeichnis.....	125

1 Einleitung

Die gebräuchlichste und einfachste Theorie zur Beschreibung des Tragverhaltens von Stäben ist die lineare Elastizitätstheorie. Sie beschreibt das Systemverhalten solange, bis in mindestens einem Punkt die Fließspannung erreicht wird. Diese Laststufe wird als elastische Grenze bezeichnet und stellt die Anwendungsgrenze der Elastizitätstheorie dar. Im Allgemeinen versagt der Stab bei dieser Laststufe noch nicht, da noch teilweise beträchtliche Tragfähigkeitsreserven vorhanden sind. Eine Berechnung nach Elastizitätstheorie gibt demnach keinen Aufschluss über die tatsächliche Tragfähigkeit respektive Sicherheit gegenüber Versagen. Um die Tragfähigkeit des Systems ermitteln und das Tragverhalten auch über die elastische Grenze hinaus beschreiben zu können, muss das elasto-plastische Werkstoffverhalten berücksichtigt werden. Einerseits aus Gründen der Tragsicherheit von Konstruktionen und andererseits aus solchen der Wirtschaftlichkeit kommt einer elasto-plastischen Berechnung große Bedeutung zu.

Die analytische Beschreibung des Systemverhaltens oberhalb der elastischen Grenze ist abgesehen von Sonderfällen sehr aufwendig. Eine gebräuchliche Näherungstheorie zur Bestimmung von Traglasten ist die Fließgelenktheorie (Traglastverfahren), die die Plastizierung in bestimmten Querschnitten berücksichtigt. Im Gegensatz zur für die praktische Rechnung geeignete Fließgelenktheorie berücksichtigt die hier vorgestellte Fließzonentheorie nicht nur die Plastizierung in einem bestimmten Querschnitt, sondern erfasst den Zustand des Materials über den gesamten Bereich des Stabes (im Querschnitt und über die Stablänge). Die Fließgelenktheorie stellt eine auf der grobe Näherungstheorie der Fließzonentheorie dar. Die Berücksichtigung der plastischen Bereiche des Trägers ist für eine exakte Beschreibung des Tragverhaltens unerlässlich, zumal sich bei einem Einfeldträger mit Rechteckquerschnitt unter Gleichlast die plastischen Zonen bei Traglast über mehr als die halbe Trägerlänge ausbreiten.

In der vorliegenden Arbeit wird das elasto-plastische Tragverhalten eines Stabes mit Dreiblechquerschnitt durch die Fließzonentheorie I. und II. Ordnung beschrieben. Da der Dreiblechquerschnitt eine für den Stahlbau typische Querschnittsform darstellt, wird als Material ausschließlich Baustahl betrachtet. Die untersuchten Systeme sind vorwiegend biegebeansprucht; d.h. dass ein Versagen durch Schubspannungen alleine nicht auftritt und somit ausgeschlossen werden kann.

Nach dieser Einleitung folgt in den nächsten beiden Kapiteln eine Übersicht der verwendeten Bezeichnungen und eine Beschreibung der zugrunde gelegten Annahmen. Ausgehend von der Betrachtung des Verzerrungszustands am Querschnitt werden zunächst Gleichungen zur Beschreibung der elastischen Wölbkrafttorsionstheorie erarbeitet. Durch Erweiterung der Gleichungen zur Berücksichtigung des elasto-plastischen Werkstoffverhaltens wird die Herleitung der Fließzonentheorie I. Ordnung für den Einzelstab mit konstantem offenem Dreiblechquerschnitt in Kapitel 4 gezeigt. Die vorgestellte Theorie wird in Bezugsachsen, die horizontal (gurtparallel) und vertikal (stegparallel) verlaufen, formuliert. Der Koordinatenursprung wird im Mittelpunkt des Stegblechs angenommen. Eine Bestimmung des Schwer- und Schubmittelpunkts sowie der Hauptachsen, wie es für die herkömmliche Vorgehensweise notwendig ist, entfällt. Die Anwendbarkeit der hergeleiteten Theorie wird mittels eines in Visual-Basic erstellten Programms erreicht. Unter Verwendung des Programms kann die für eine Handrechnung ungeeignete Theorie an Beispielen angewendet werden. In Kapitel 5 werden ausgewählte Ergebnisse nach Fließzonentheorie I. Ordnung präsentiert. Um den Einfluss der Verformungen auf das Systemverhalten zu berücksichtigen, werden, aufbauend auf der Fließzonentheorie I. Ordnung, die beschreibenden Gleichungen am verformten System formuliert. Wie schon beim Übergang von Elastizitätstheorie auf Fließzonentheorie I. Ordnung wird die Veränderung von Fließzonentheorie I. zu II. Ordnung durch Erweiterungen der Gleichungen erlangt. In Kapitel 6 werden die hierzu notwendigen Terme angegeben. Analog zur Erweiterung der Theorie wird auch das Visual-Basic-Programm erweitert. Um die Bedeutung der Theorie II. Ordnung bei Fließzonentheorie zu zeigen, werden in Kapitel 7 Vergleiche mit der Theorie I. Ordnung gebracht. Des Weiteren werden Versuchsergebnisse der Veröffentlichung [11] nachgerechnet und die hier vorgestellte Theorie verifiziert.

2 Bezeichnungen

2.1 Geometrie, Querschnitt, Material

x, y, z	Koordinatensystem bezogen auf die Achsen in unverformter Lage
ξ, η, ζ	Koordinatensystem bezogen auf die Achsen in verformter Lage
a	halbe Höhe des Stegblechs
s	Dicke des Stegblechs
b_O, b_U	halbe Breite des Obergurts/Untergurts
t_O, t_U	Dicke des Obergurts/Untergurts
e_O, e_U	Ausmitte des Obergurts/Untergurts
A_S, A_O, A_U	Fläche des Steges/Obergurts/Untergurts
A	Fläche des Gesamtquerschnitts
I_y, I_z	Flächenmoment 2. Grades um die y -/ z -Achse
I_O, I_U	Flächenmoment 2. Grades des Obergurts/Untergurts um die z -Achse
S_O, S_U	Flächenmoment 1. Grades des Obergurts/Untergurts um die z -Achse
I_{xx}	Wölbwiderstand um die x -Achse
I_T	Drillwiderstand des Querschnitts
B	Matrix zur Darstellung der Schnittgrößen SG^{el} in den Unbekannten ε
C	Matrix zur Darstellung der Unbekannten ε in den Schnittgrößen SG^{el}
S	Stegmittelpunkt (Ursprung der Koordinatensysteme)
M	Schubmittelpunkt
c_y	y -Koordinate des Schubmittelpunktes
c_z	z -Koordinate des Schubmittelpunktes
E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
f_y	Fließspannung des Materials
τ_y	Fließschubspannung des Materials
ε_y	Fließdehnung des Materials
$f_{y,red}$	reduzierte Fließspannung des Materials
$\varepsilon_{y,red}$	reduzierte Fließdehnung des Materials

σ_V	Vergleichsspannung
σ	Normalspannung
τ	Schubspannung
l	Länge des Stabes
l_1, l_2	Länge des linken/rechten Bereichs des Stabes
n	Anzahl der Stützstellen/Berechnungsquerschnitte über Stablänge
n_1, n_2	Anzahl der Stützstellen/Berechnungsquerschnitte im linken/rechten Bereich
η	Integrationsmatrix für die einfache Integration
χ	Integrationsmatrix für die zweifache Integration
ρ	Differentiationsmatrix für die einfache Differentiation
δ_{ij}	Kroneckersymbol

2.2 Einwirkungen

P_x, P_y, P_z	Einzellast in x -/ y -/ z -Richtung
q_y, q_z	Streckenlast in y -/ z -Richtung
q_{y1}, q_{z1}	Streckenlast in y -/ z -Richtung im linken Bereich des Stabes
q_{y2}, q_{z2}	Streckenlast in y -/ z -Richtung im rechten Bereich des Stabes
e_y, e_z	Abstand einer Belastung in y -/ z -Richtung von der x -Achse
M_x^e	Einzeltorsionsmoment in x -Richtung
m_x	Streckentorsionsmoment in x -Richtung
m_x^{II}	Zusatzstreckentorsionsmoment in x -Richtung bei Theorie II. Ordnung
ν	Lastfaktor

2.3 Schnittgrößen

Schnittgrößen bezogen auf die Achsen in unverformter Lage

S	Stablängskraft in x -Richtung
Q_y	Querkraft in y -Richtung
Q_z	Querkraft in z -Richtung
M_x	Moment um die x -Achse
M_y	Moment um die y -Achse
M_z	Moment um die z -Achse

resultierende Schnittgrößen bezogen auf die Achsen in verformter Lage

$N_{,res}$	resultierende Normalkraft in ξ -Richtung
$Q_{\eta,res}$	resultierende Querkraft in η -Richtung
$Q_{\zeta,res}$	resultierende Querkraft in ζ -Richtung
$M_{\xi,res}$	resultierendes Moment um die ξ -Achse
$M_{\eta,res}$	resultierendes Moment um die η -Achse
$M_{\zeta,res}$	resultierendes Moment um die ζ -Achse

Schnittgrößen bezogen auf die Achsen in verformter Lage

N	Normalkraft aus Normalspannungen in ξ -Richtung
Q_{η}	Querkraft aus Schubspannungen in η -Richtung
Q_{ζ}	Querkraft aus Schubspannungen in ζ -Richtung
M_{ξ}	Moment aus Schubspannungen um die ξ -Achse
M_{η}	Moment aus Normalspannungen um die η -Achse
M_{ζ}	Moment aus Normalspannungen um die ζ -Achse

Schnittgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen nach Theorie I. Ordnung (...^{Last})

N^{Last}	Normalkraft in x -Richtung
Q_y^{Last}	Querkraft in y -Richtung
Q_z^{Last}	Querkraft in z -Richtung
M_x^{Last}	Moment um die x -Achse
M_y^{Last}	Moment um die y -Achse
M_z^{Last}	Moment um die z -Achse

Schnittgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen nach Theorie II. Ordnung (...^{Last})

N^{Last}	Normalkraft in ξ -Richtung
M_{ξ}^{Last}	Moment um die ξ -Achse
M_{η}^{Last}	Moment um die η -Achse
M_{ζ}^{Last}	Moment um die ζ -Achse

elastische Schnittgrößen aus dem Verzerrungszustand (...^{el})

N^{el}	elastische Normalkraft in x -/ ξ -Richtung
M_y^{el}, M_{η}^{el}	elastisches Moment um die y -/ η -Achse
M_z^{el}, M_{ζ}^{el}	elastisches Moment um die z -/ ζ -Achse
$M_{xx}^{el}, M_{\xi\xi}^{el}$	elastisches Bimoment der Gurtmomente um die x -/ ξ -Achse
\mathbf{SG}^{el}	Vektor der elastischen Schnittgrößen N^{el} , M_y^{el} , M_z^{el} und M_{xx}^{el}
$N_{...}^{el}$	elastische Normalkraft eines Blechs in x -/ ξ -Richtung
$M_{...}^{el}$	elastisches Moment eines Blechs um die angegebene Achse

Δ -Schnittgrößen aus dem Verzerrungszustand (Δ -...)

ΔN	Δ -Normalkraft in x -/ ξ -Richtung
$\Delta M_y, \Delta M_\eta$	Δ -Moment um die y -/ η -Achse
$\Delta M_z, \Delta M_\zeta$	Δ -Moment um die z -/ ζ -Achse
$\Delta M_{xx}, \Delta M_{\xi\xi}$	Δ -Bimoment der Gurtmomente um die x -/ ξ -Achse
ΔN_{\dots}	Δ -Normalkraft eines Blechs in x -/ ξ -Richtung
ΔM_{\dots}	Δ -Moment eines Blechs um die angegebene Achse

Ableitung der Δ -Schnittgrößen nach den Verzerrungen

$\Delta \mathbf{N}_{,i}$	Vektor der Ableitungen von ΔN nach den Unbekannten
$\Delta \mathbf{M}_{y,i}, \Delta \mathbf{M}_{\eta,i}$	Vektor der Ableitungen von $\Delta M_y / \Delta M_\eta$ nach den Unbekannten
$\Delta \mathbf{M}_{z,i}, \Delta \mathbf{M}_{\zeta,i}$	Vektor der Ableitungen von $\Delta M_z / \Delta M_\zeta$ nach den Unbekannten
$\Delta \mathbf{N}_{\dots,i}$	Vektor der Ableitungen von ΔN_{\dots} für ein Blech nach den Unbekannten
$\Delta \mathbf{M}_{\dots,i}$	Vektor der Ableitungen von ΔM_{\dots} für ein Blech nach den Unbekannten

Schnittgrößen aus dem Verzerrungszustand

$N^{el-\Delta}$	Normalkraft in x -/ ξ -Richtung
$M_y^{el-\Delta}$	Moment um die y -Achse
$M_z^{el-\Delta}$	Moment um die z -Achse
$M_\eta^{el-\Delta}$	Moment um die η -Achse
$M_\zeta^{el-\Delta}$	Moment um die ζ -Achse
$M_{xx}^{el-\Delta}$	Bimoment der Gurtmomente um die x -Achse
$M_{\xi\xi}^{el-\Delta}$	Bimoment der Gurtmomente um die ξ -Achse

Torsionsschnittgrößen

M_x, M_ξ	Torsionsmoment um die x -/ ξ -Achse
$M_{x,p}, M_{\xi,p}$	primäres Torsionsmoment um die x -/ ξ -Achse
$M_{x,s}, M_{\xi,s}$	sekundäres Torsionsmoment um die x -/ ξ -Achse
$M_{xx}, M_{\xi\xi}$	Bimoment der Gurtmomente um die x -/ ξ -Achse
M_T	Torsionsmoment um die Schubmittelpunktsachse
M_ω	Wölbmoment um die Schubmittelpunktsachse
K	Koeffizient zur Berücksichtigung der Torsion durch Normalspannungen
K^{el}	elastischer Anteil von K
ΔK	Δ -Anteil von K

2.4 Verformungsgrößen

Lastverformungsgrößen

v	Lastverschiebung in y -Richtung
w	Lastverschiebung in z -Richtung
ϑ	Querschnittsdrehwinkel um die x -Achse aus Einwirkungen
φ_y	Querschnittsdrehwinkel um die y -Achse aus Einwirkungen
φ_z	Querschnittsdrehwinkel um die z -Achse aus Einwirkungen
ϑ'	Verdrillung um die x -Achse aus Einwirkungen
κ_y	Krümmung um die y -Achse aus Einwirkungen
κ_z	Krümmung um die z -Achse aus Einwirkungen
κ_ω	Wölbverzerrung um die x -Achse aus Einwirkungen

Vorverformungsgrößen

v^v	Vorverschiebung in y -Richtung
w^v	Vorverschiebung in z -Richtung
ϑ^v	Querschnittsdrehwinkel um die x -Achse aus Vorverformung
φ_y^v	Querschnittsdrehwinkel um die y -Achse aus Vorverformung
φ_z^v	Querschnittsdrehwinkel um die z -Achse aus Vorverformung
$(\vartheta^v)'$	Vorverdrillung um die x -Achse
κ_y^v	Krümmung um die y -Achse aus Vorverformung
κ_z^v	Krümmung um die z -Achse aus Vorverformung
$(\vartheta^v)''$	2. Ableitung der Vorverformung ϑ^v
ε	Längsdehnung
ε	Vektor der Unbekannten $\varepsilon_S, \kappa_y, \kappa_z$ und κ_ω bzw. $\varepsilon_S, \kappa_\eta, \kappa_\zeta$ und κ_ω

3 Grundlagen

3.1 Annahmen

Für die Berechnung des Einzelstabes mit konstantem offenem Dreiblechquerschnitt nach Fließzonentheorie I. bzw. II. Ordnung müssen gewisse vereinfachende Annahmen bei der Beschreibung des Systemverhaltens gemacht werden. Diese Vereinfachungen entsprechen im Prinzip den üblichen Annahmen der technischen Biegelehre. Zur Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion einerseits und der Fließzonentheorie andererseits werden diese noch erweitert. Im Einzelnen werden folgende Annahmen getroffen:

- isotropes Material: Stoffgesetz linear elastisch - ideal plastisch
- konstitutive Beziehung $M_{x,p} = GI_T \vartheta'$ der *St. Venant*'schen Torsion bleibt auch bei Plastizität erhalten
- Fließdehnungen nur in Stablängsrichtung
- Querschnittsabmessungen sind klein gegenüber Stablänge
- Blechdicke \ll Blechbreite
- Querschnitt bleibt formtreu
- Beulen der Querschnittsbleche tritt nicht auf
- Normalkraft ist über Stablänge konstant
- Schubversagen tritt nicht auf
- Schubverformungen aus (blechparallelen) Querkräften werden vernachlässigt
- geometrische Linearität: kleine Verschiebungen und Rotationen
- Wagner-Hypothese: Blechquerschnitte bleiben eben

3.2 Stoffgesetz

Das Werkstoffverhalten wird durch die Spannungs-Verzerrungsbeziehung beschrieben. Diese Beziehung wird durch das so genannte Stoffgesetz ausgedrückt. Eine anschauliche – und einfach zu gewinnende – Darstellung des Werkstoffverhaltens wird durch Spannungs-Dehnungsdiagramme einaxialer Versuche vermittelt. Trotz der großen Vielfalt dieser Diagramme können sie qualitativ in zwei Klassen eingeteilt werden; nämlich in solche für zähe und solche für spröde Materialien. Während zähe Materialien große Verzerrungen ertragen können und so das Versagen langsam auftritt, können spröde Materialien dies nicht und versagen abrupt.

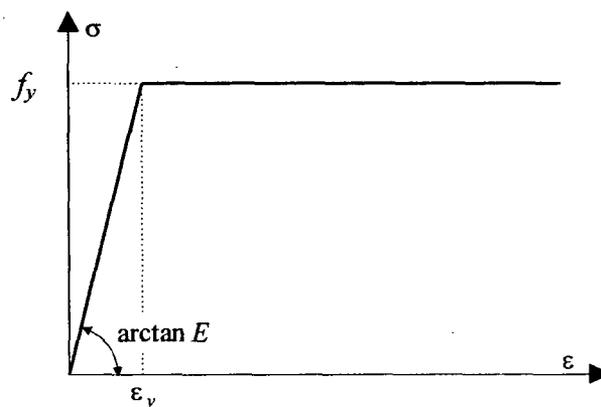


Abbildung 1: Idealisiertes Spannungs-Dehnungsdiagramm

Das in Kapitel 3.1 angenommene Stoffgesetz (linear elastisch - ideal plastisch) kennzeichnet ein zähes Material mit einem idealisierten Spannungs-Dehnungsdiagramm, wie es in Abbildung 1 dargestellt ist. Für einen naturharten Baustahl unter einaxialer Zugbeanspruchung ist das in Abbildung 1 wiedergegebene Diagramm eine gute Näherung; bis zur Fließspannung f_y sind die Dehnungen ϵ in guter Näherung proportional zur Normalspannung σ . In diesem als linear elastisch bezeichneten Bereich der Spannungs-Dehnungsbeziehung lautet das Stoffgesetz bei einaxialer Beanspruchung nach *Hooke*:

$$\sigma = E\epsilon \quad (3.1)$$

Wird das Material bei Erreichen der Streckgrenze f_y weiter beansprucht, können nach Abbildung 1 unter Vernachlässigung der Werkstoffverfestigung keine größeren Spannungen als f_y auftreten und die Dehnungen ϵ wachsen unbeschränkt an. Dieses Verhalten bezeichnet man als ideal plastisch. Die in Abbildung 1 dargestellte Spannungs-Dehnungslinie wird bei der Herleitung der Fließzonentheorie für Zug- und Druckspannungen zugrunde gelegt.

3.3 Betrachtete Querschnitte

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich Stäbe mit konstantem Dreiblechquerschnitt untersucht. Der betrachtete Dreiblechquerschnitt kann als verallgemeinerter I-Querschnitt angesehen werden, der die Sonderfälle U-, Z-, sowie doppelt- und einfachsymmetrisches I-Profil einschließt. In [3] findet sich für diese Form des Querschnitts auch die Bezeichnung HVH-Querschnitt. In Abbildung 2 ist ein Linienmodell eines allgemeinen Querschnitts der betrachteten Form mit den beschreibenden Bezeichnungen dargestellt. Die einzelnen Bleche werden durch ihre halbe Höhe bzw. Breite (a , b_O , b_U) und ihre in Abbildung 2 nicht dargestellte Dicke (Stegdicke s , Gurticken t_O , t_U) beschrieben. Der Querschnitt besteht stets aus einem vertikalen Stegblech und zwei horizontalen Gurtblechen. Die horizontale Lage der Gurtbleche kann beliebig variieren und wird durch die Ausmitten e_O und e_U , die den Abstand des jeweiligen Blechschwerpunktes von der Stegebene angeben, festgelegt.

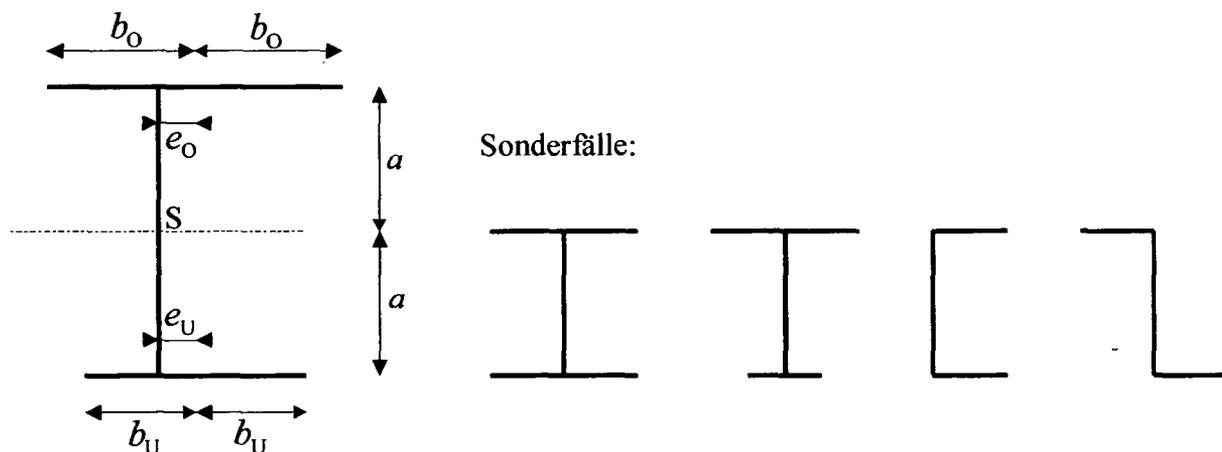


Abbildung 2: Betrachteter Querschnitt und Sonderfälle

Bei der Idealisierung eines realen Querschnitts (Walzprofil) wird die Steghöhe ($2a$) gleich dem Abstand der Gurtachsen gewählt. Für die Gurte werden die idealen Längen- und Dickenabmessungen gleich den realen gesetzt. Die Flächen der Gurte ergeben sich dann als Produkte von Gurtbreite und Gurt Dicke. Die idealisierte Stegfläche wird als Differenz von Gesamtfläche und der Summe der Gurtflächen erhalten. Mit der Steghöhe $2a$ erhält man dann die idealisierte Stegdicke s . Dieses Vorgehen entspricht der Idealisierung in [12].

Zur Beschreibung des Systems wird ein rechtsdrehendes Koordinatensystem, dessen Ursprung in S (Mittelpunkt des Stegblechs) liegt, verwendet. Die x -Achse dieses Koordinatensystems wird durch eine Parallele zur Verbindungslinie der Stegblechmittelpunkte in unver-

formter Lage gebildet. Betrachtet man das unverformte System, ist die x -Achse gleich dieser Verbindungslinie. In der Querschnittsebene liegt die y -Achse horizontal (gurtparallel) und die z -Achse vertikal (stegparallel). Die positiven Richtungen der Koordinatenachsen x, y, z sind in Abbildung 3 links dargestellt. Darüber hinaus sind die positiv definierten Verschiebungen in Richtung der y - und z -Achse v und w sowie die Verdrehung um die x -Achse ϑ angegeben. Die Horizontalverschiebung v ist das Mittel der horizontalen Ober- und Untergurtverschiebung. Die in Abbildung 3 nicht dargestellte Längsverschiebung des Querschnitts ist für diese Arbeit nicht von Bedeutung. Die Querschnittsdrehwinkel φ_y und φ_z sind, wie der Torsionsdrehwinkel ϑ , in Richtung der Koordinatenachsen positiv definiert. In dieser Arbeit wird zur Beschreibung des Biegetorsionsproblems nach Fließzonentheorie – bis auf die Formulierung des Gleichgewichts nach Theorie II. Ordnung am verformten System – ausschließlich dieses Koordinatensystem verwendet. Eine Beschreibung in den Querschnittshauptachsen und der Schubmittelpunktsachse (und somit auch deren Bestimmung) ist für das hier vorgestellte Lösungskonzept nicht notwendig.

Analog zur Beschreibung der Verschiebungsgrößen werden auch die Schnittgrößen des Querschnitts ($N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$) auf dieses Koordinatensystem bezogen. Zusätzlich wird noch das Bimoment M_{xx} , das als Moment der Gurtmomente bezüglich der x -Achse definiert wird, eingeführt. Die positiv definierten Richtungen der für das Lösungskonzept relevanten Schnittgrößen N, M_x, M_y, M_z sind in Abbildung 3 rechts dargestellt. Die Definition des positiven Bimoments M_{xx} erfolgt in Kapitel 4. Nach [15] wird anders als bei den Momente M_x und M_y das Moment M_z entgegen der Richtung der zugehörigen z -Achse definiert! Die in Abbildung 3 nicht dargestellten Schnittgrößen Q_y und Q_z (in S) wirken positiv in Richtung der y - bzw. z -Achse.

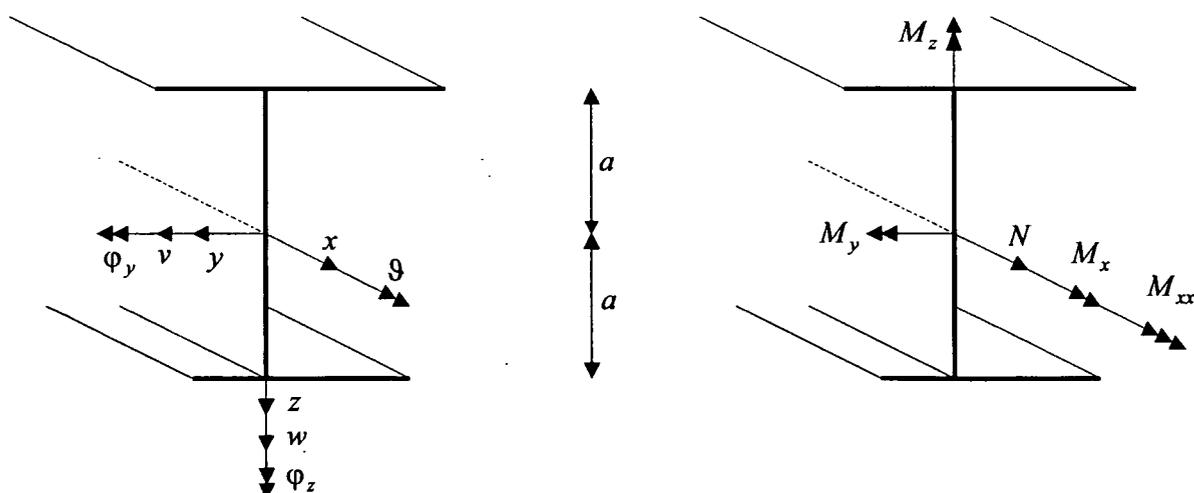


Abbildung 3: Koordinatensystem, Verschiebungsgrößen und Schnittgrößen

3.4 Betrachtete Lagerungsfälle und Einwirkungen

Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Systeme sind für Biegung statisch bestimmt gelagert; d.h. die Biegemomente M_y und M_z lassen sich bei Berechnung nach Theorie I. Ordnung vorweg bestimmen und gehen als bekannte Größen in die Rechnung ein. Für das Torsionsmoment M_x gilt dies nur bei den Lagerungsfällen *frei-eingespannt* und *gabelgelagert-eingespannt verschieblich*. Bei beidseitiger Gabellagerung besteht keine statische Bestimmtheit für M_x . Wie in Kapitel 3.5 gezeigt wird, kann der Verlauf von M_x bei beidseitiger Gabellagerung aber einfach bestimmt werden. Die Systemlänge wird mit l bezeichnet. Die betrachteten Lagerungsfälle und die entsprechenden Randbedingungen sind in Tabelle 1 angegeben.

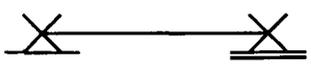
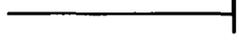
		<i>gabelgelagert</i>		<i>frei</i>		<i>gabelgelagert</i>	
		<i>gabelgelagert</i>		<i>eingespannt</i>		<i>eingespannt verschieblich</i>	
							
Randbedingungen	x-Achse	$\vartheta = 0$	$\vartheta = 0$	$M_{xx} = 0$	$\vartheta = 0$	$\vartheta = 0$	$\vartheta' = 0$
		$M_{xx} = 0$	$M_{xx} = 0$	$M_x = 0$	$\vartheta' = 0$	$M_{xx} = 0$	$M_x = 0$
	y-Achse	$v = 0$	$v = 0$	$M_y = 0$	$v = 0$	$v = 0$	$\varphi_y = 0$
		$M_y = 0$	$M_y = 0$	$Q_y = 0$	$\varphi_y = 0$	$M_y = 0$	$Q_y = 0$
	z-Achse	$w = 0$	$w = 0$	$M_z = 0$	$w = 0$	$w = 0$	$\varphi_z = 0$
		$M_z = 0$	$M_z = 0$	$Q_z = 0$	$\varphi_z = 0$	$M_z = 0$	$Q_z = 0$

Tabelle 1: Betrachtete Lagerungsfälle

Als Einwirkungen werden – wie in Abbildung 4 rechts angegeben – sowohl Strecken- und Einzellasten als auch Strecken- und Einzeltorsionsmomente berücksichtigt. Die Belastungsaufbringung erfolgt quasistatisch. Für die Belastungen wird Richtungstreue angenommen. Die Einzellasten P_y und P_z in Richtung der y - bzw. z -Achse wirken an beliebiger Stelle im Feld. Der Lastangriffspunkt einer Einzellast in Querschnittsebene wird durch seine Koordinaten e_z und e_y vom Stegblechmittelpunkt S festgelegt. In Abbildung 4 links sind diese Koordinaten für die Einzellasten P_y und P_z dargestellt. Die Ausmitte normal zur Krafrichtung erzeugt dabei – sowohl bei Theorie I. Ordnung als auch bei Theorie II. Ordnung – ein eingepprägtes Einzeltorsionsmoment, während die Ausmitte in Krafrichtung nur bei Formulierung des Gleichgewichts am verformten System (Theorie II. Ordnung) ein zusätzliches Einzeltorsionsmoment

mit sich bringt. Die Streckenlasten q_y und q_z können in den zwei Bereichen des Stabes (l_1, l_2) unterschiedliche Werte annehmen. Entsprechend ihrer Wirkungsrichtung werden sie – wie in Abbildung 4 rechts dargestellt – mit q_{y1} und q_{y2} bzw. q_{z1} und q_{z2} bezeichnet. Wie bei den Einzellasten wird der Lastangriffspunkt einer Streckenlast im Querschnitt durch die Koordinaten e_z und e_y , die den Abstand vom Stegblechmittelpunkt S angeben, beschrieben. Durch die Ausmitten einer Streckenlast kommt es zu einem Streckentorsionsmoment um die x -Achse. Für die Auswirkungen der Ausmitten normal bzw. in Krafrichtung bei Streckenlasten gilt dasselbe wie für die Ausmitten von Einzellasten.

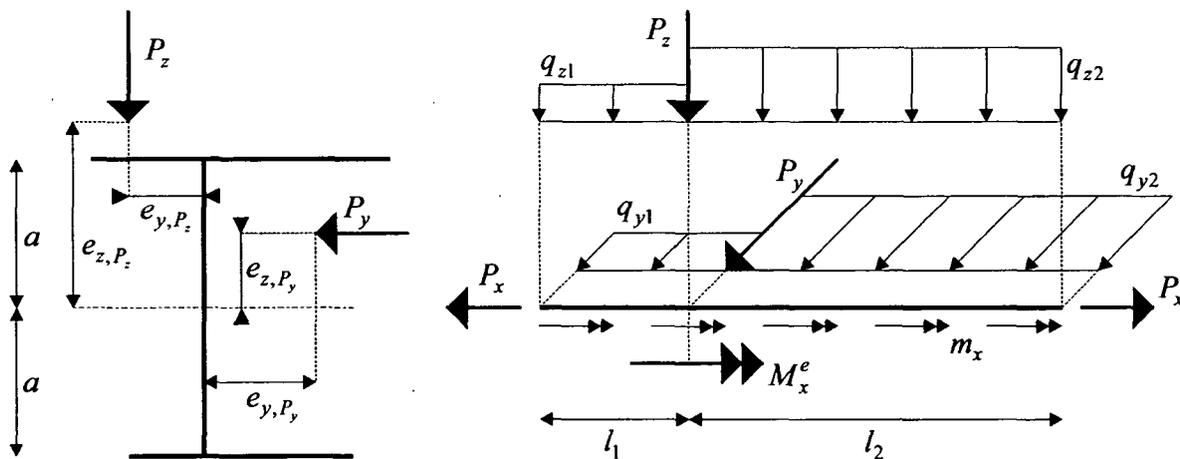


Abbildung 4: Betrachtete Einwirkungen

Die Einzellast P_x wirkt an beiden Stabenden und kann ebenfalls mit den Exzentrizitäten e_z und e_y vom Ursprung des Koordinatensystems angreifen; bei exzentrischem Lastangriff erzeugt P_x neben einer konstanten Normalkraft auch konstante Biegemomente um die y - und z -Achse. Greift die Last P_x bei einem allgemeinen Profil im Koordinatenursprung S an, entstehen keine Biegemomente um die y - und z -Achse. Es kommt aber neben einem konstantem Dehnungszustand auch zu Krümmungen und Wölbverzerrungen über die Stablänge. Des Weiteren werden als Einwirkungen noch ein über den Stab konstantes Streckentorsionsmoment m_x sowie ein eingprägtes Einzeltorsionsmoment M_x^e an beliebiger Stelle des Stabes berücksichtigt.

3.5 Schnittgrößen

In diesem Kapitel wird die Berechnung der Schnittgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System (Theorie I. Ordnung) angegeben. Diese Schnittgrößen werden auch als Schnittgrößen aus den Einwirkungen bezeichnet. Für die in Kapitel 3.4 betrachteten Einwirkungen und Randbedingungen lassen sich alle Schnittgrößen – bis auf das Torsionsmoment M_x bei beidseitiger Gabellagerung – aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln. Als Bezugssystem wird das in Kapitel 3.3 beschriebene Koordinatensystem x, y, z verwendet. Die erhaltenen Schnittgrößen werden mit dem Index ...^{Last} versehen. Im Einzelnen werden folgende Schnittgrößen ermittelt:

- N^{Last} , Q_y^{Last} und Q_z^{Last}
- M_x^{Last} , M_y^{Last} und M_z^{Last}

Für die Herleitung der Fließzonentheorie werden im Folgenden die Schnittgrößen N^{Last} , M_y^{Last} , M_z^{Last} und M_x^{Last} verwendet. Für die Normalkraft ergibt sich:

$$N^{Last} = P_x \quad (3.2)$$

Die Querkräfte und Biegemomente werden anhand der Differentialbeziehung

$$M''_{...} = Q'_{...} = -q_{...} \quad (3.3)$$

ermittelt. Die Querkräfte Q_y^{Last} und Q_z^{Last} lassen sich nach Ermittlung der statisch bestimmten Auflagerkräfte am linken Auflager (und damit der Querkräfte am linken Ende des Stabes Q_{y0}^{Last} und Q_{z0}^{Last}) an jeder beliebigen Stelle des Stabes angeben:

$$Q_y^{Last} = Q_{y0}^{Last} - \int_0^x q_y dx \quad (3.4)$$

$$Q_z^{Last} = Q_{z0}^{Last} - \int_0^x q_z dx \quad (3.5)$$

Für die Biegemomente entfallen nach den Randbedingungen in Tabelle 1 die Integrationskonstanten und man erhält durch Integration der Gleichungen (3.4) und (3.5):

$$M_y^{Last} = \int_0^x Q_z^{Last} dx \quad (3.6)$$

$$M_z^{Last} = \int_0^x Q_y^{Last} dx \quad (3.7)$$

Das Torsionsmoment M_x^{Last} für die Lagerungsfälle *frei-eingespannt* und *gabelgelagert-eingespannt verschieblich* lässt sich durch Integration der Differentialbeziehung für das Torsionsmoment und Bestimmung der Integrationskonstanten M_{x0}^{Last} zu

$$M_x^{Last} = M_{x0}^{Last} - \int_0^x m_x dx \quad (3.8)$$

angeben. Die Integrationskonstante M_{x0}^{Last} verschwindet für den Lagerungsfall *frei-eingespannt* und ergibt sich beim Lagerungsfall *gabelgelagert-eingespannt verschieblich* als resultierendes Torsionsmoment aller angreifenden Einwirkungen. Bei beidseitiger Gabellagerung muss nach [15] die Verträglichkeitsbedingung

$$\vartheta_n = \vartheta_0 + \frac{1}{GI_T} \left(\int_0^l M_x dx - M_{xx,n} + M_{xx,0} \right) \quad \text{bzw.} \quad \int_0^l M_x^{Last} dx = 0 \quad (3.9)$$

erfüllt sein. Diese ist nur gültig, weil die konstitutive Beziehung der primären Torsion auch bei Plastizität erhalten bleibt. Da auch für die Querkräfte das Integral über die Stablänge verschwinden muss, ergibt sich für das Torsionsmoment bei beidseitiger Gabellagerung ein aus den Querkraftlinien der einzelnen Lastfälle bestimmbarer Verlauf:

$$M_x^{Last} = Q_y^{Last} e_z + Q_z^{Last} e_y \quad (3.10)$$

Wirken an einem beidseitig gabelgelagerten System mehrere Strecken- oder Einzellasten, so muss das Torsionsmoment M_x^{Last} durch mehrmalige Anwendung der Gleichung (3.10) und Superposition berechnet werden.

Bei der Formulierung des Gleichgewichts am verformten System nach Theorie II. Ordnung werden die Schnittgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen (ausgehend von den in diesem Kapitel ermittelten Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung) im Zuge der Berechnung des Systems iterativ bestimmt. Die erforderlichen Formeln werden in Kapitel 6.4.2 angegeben.

4 Fließzonentheorie I. Ordnung

4.1 Allgemeines

In diesem Kapitel wird die theoretische Basis zur Lösung des Biegetorsionsproblems am Einzelstab mit offenem Dreiblechquerschnitt mit den in Kapitel 3 getroffenen Annahmen nach Fließzonentheorie I. Ordnung hergeleitet. Ziel der Berechnung ist es, den Verzerrungszustand und damit alle Zustandsgrößen über die Stablänge bei beliebigen Laststufen beschreiben und Traglasten bestimmen zu können.

Das Gleichgewicht wird nach Theorie I. Ordnung am unverformten System formuliert. Die aus den äußeren Einwirkungen resultierenden Schnittgrößen können damit bei den in Tabelle 1 angegebenen Lagerungsfällen vorweg bestimmt werden und gehen als bekannte Größen (N^{Last} , Q_y^{Last} , Q_z^{Last} , M_x^{Last} , M_y^{Last} und M_z^{Last} nach Kapitel 3.5) in die Rechnung ein; sie lassen sich für jede beliebige Stelle des Stabes angeben.

Da die bei der Berechnung durchzuführenden Integrationen auf numerischem Weg erfolgen, wird der Stab mit der Länge l in n (beliebig viele) Abschnitte unterteilt. Man erhält so $n+1$ Stützstellen, die als Berechnungsquerschnitte bezeichnet werden. Um die durch die Einzellasten im Feld auftretenden Unstetigkeiten zu berücksichtigen, muss der Stab für die numerische Integration in zwei Bereiche (l_1 , l_2) links und rechts von der Einzellast unterteilt werden. Der linke Bereich (l_1) wird dabei in n_1 Abschnitte gleicher Länge und der rechte Bereich (l_2) in n_2 Abschnitte gleicher Länge unterteilt. Die Summe von n_1 und n_2 ergibt die Anzahl der Abschnitte n .

Als Unbekannte werden in jedem Berechnungsquerschnitt vier Größen gewählt, die den Verzerrungszustand eindeutig beschreiben. Die Definition der Unbekannten, die im Vektor ε zusammengefasst sind, wird in Kapitel 4.2 beschrieben. Ausgehend von der Berechnung der elastischen Schnittgrößen aus den Verzerrungen an einem Blech, werden die elastischen Teilschnittgrößen des Querschnitts als Funktion der Unbekannten ermittelt. Durch Überlagerung der elastischen Teilschnittgrößen lassen sich auch die elastischen Gesamtschnittgrößen als Funktion der Unbekannten darstellen. Dieser Zusammenhang wird durch die Matrix \mathbf{B} angegeben. Für die Berechnung der elastischen Schnittgrößen wird die unbeschränkte Gültigkeit

des *Hooke*'schen Gesetzes angenommen. Die Formulierung der elastischen Schnittgrößen basiert auf den Herleitungen in [13].

Um die vier Unbekannten im Querschnitt nach Elastizitätstheorie zu ermitteln, stehen für jeden Querschnitt vier Bestimmungsgleichungen (Momentengleichgewicht um die x -, y - und z -Achse und Kräftegleichgewicht in x -Richtung) zur Verfügung. In diesen Gleichungen werden die aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelten Schnittgrößen aus Kapitel 3.5 den Schnittgrößen als Funktion der Unbekannten gleichgesetzt. Durch die Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion ergibt sich im allgemeinen Fall eine Abhängigkeit des Verzerrungszustandes in einem Berechnungsquerschnitt r von allen anderen Berechnungsquerschnitten.

Die Gleichungen nach Plastizitätstheorie (Fließzonentheorie) werden aus jenen der Elastizitätstheorie durch Erweiterung um so genannte Δ -Schnittgrößen erhalten. Die Δ -Schnittgrößen stellen jenen Anteil der elastischen Schnittgrößen dar, der vom Material aufgrund des bilinearen Stoffgesetzes nicht aufgenommen werden kann ($\varepsilon > \varepsilon_y$). Die Ermittlung der Δ -Schnittgrößen erfolgt analog zum Vorgehen bei der Bestimmung der elastischen Schnittgrößen. Aus den Δ -Teilschnittgrößen für jedes Blech werden die Δ -Schnittgrößen für den Gesamtquerschnitt ermittelt. Bei der Berechnung der Δ -Schnittgrößen für das Einzelblech müssen Fallunterscheidungen getroffen werden. Die sich aus einem Verzerrungszustand ergebenden Schnittgrößen berechnen sich dann aus der Differenz von elastischen und Δ -Schnittgrößen. Die Bestimmungsgleichungen nach Plastizitätstheorie haben den gleichen Aufbau wie jene nach Elastizitätstheorie. Die aus den Verzerrungen ermittelten elastischen Schnittgrößen werden aber um die Δ -Schnittgrößen vermindert.

Bei den in die Bestimmungsgleichungen eingehenden Δ -Schnittgrößen werden entsprechend den Annahmen in Kapitel 3.1 nur die Dehnungen in Stablängsrichtung berücksichtigt. Um auch den Einfluss von Schubspannungen auf das Systemverhalten berücksichtigen zu können, wird die Fließspannung f_y bzw. die zugehörige Fließdehnung ε_y anhand einer Vergleichsspannung σ_V auf einen reduzierten Wert $f_{y,red}$ bzw. $\varepsilon_{y,red}$ herabgesetzt. Die Berechnung der Δ -Schnittgrößen erfolgt dann mit der reduzierten Fließdehnung $\varepsilon_{y,red}$. Die Berücksichtigung von Schubspannungen kann zur Abminderung der rechnerisch ermittelten Tragfähigkeit eines Systems führen.

Die mathematische Lösung der vier Bestimmungsgleichungen jedes Berechnungsquerschnitts wird durch die Lösung eines 3×3 -Gleichungssystems für jeden Berechnungsquerschnitt ei-

nerseits und eines $(n+1) \times (n+1)$ -Gleichungssystems für den Stab andererseits realisiert. Die numerische Integration im Zuge der Lösung wird mit so genannten Integrationsmatrizen, die sowohl für die ein- als auch für die zweifache Integration angewendet werden, durchgeführt. Die Genauigkeit dieser Integrationsmethode hängt von der Anzahl der Stabunterteilungen n ab. Durch feineres Unterteilen des Stabes (Erhöhung von n) kann die Genauigkeit beliebig gesteigert werden. Die Lösungen der beiden Gleichungssysteme werden iterativ mit dem Verfahren nach *Newton-Raphson* bestimmt. Die Abhängigkeit der Unbekannten beider Arten von Gleichungssystemen voneinander, bedingt einen Iterationsprozess bei der Ermittlung des Verzerrungszustands: Die Lösungen der Gleichungssysteme für die Querschnitte gehen in jedem Iterationsschritt bei der Lösung des Gleichungssystems für den Stab als bekannte Größen ein. Es ist also zwischen den Iterationen zur Bestimmung der Lösungen der Gleichungssysteme und jener über die Gleichungssysteme zu unterscheiden. Die Iteration über die Gleichungssysteme wird als Gesamtiteration bezeichnet. Genauso verhält es sich umgekehrt. Nach Ermittlung des Verzerrungszustands in jedem Berechnungsquerschnitt, können schließlich der Spannungszustand und alle Verformungsgrößen berechnet werden.

4.2 Definition der Unbekannten

Entsprechend der bei Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion auftretenden vier Freiheitsgrade des Querschnitts werden für jeden bei der Rechnung betrachteten Querschnitt vier Unbekannte gewählt. Die Unbekannten sind die Verzerrung des Koordinatenursprungs ε_S , die beiden Krümmungen κ_y und κ_z , sowie die Wölbverzerrung κ_ω . Mit diesen vier Größen lässt sich jeder beliebige Dehnungszustand im Querschnitt beschreiben. Für jeden Berechnungsquerschnitt r werden sie im Vektor ε zusammengefasst.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_S \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \kappa_\omega \end{bmatrix} \text{ bzw. } \varepsilon_r = \begin{bmatrix} \varepsilon_{Sr} \\ \kappa_{yr} \\ \kappa_{zr} \\ \kappa_{\omega r} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

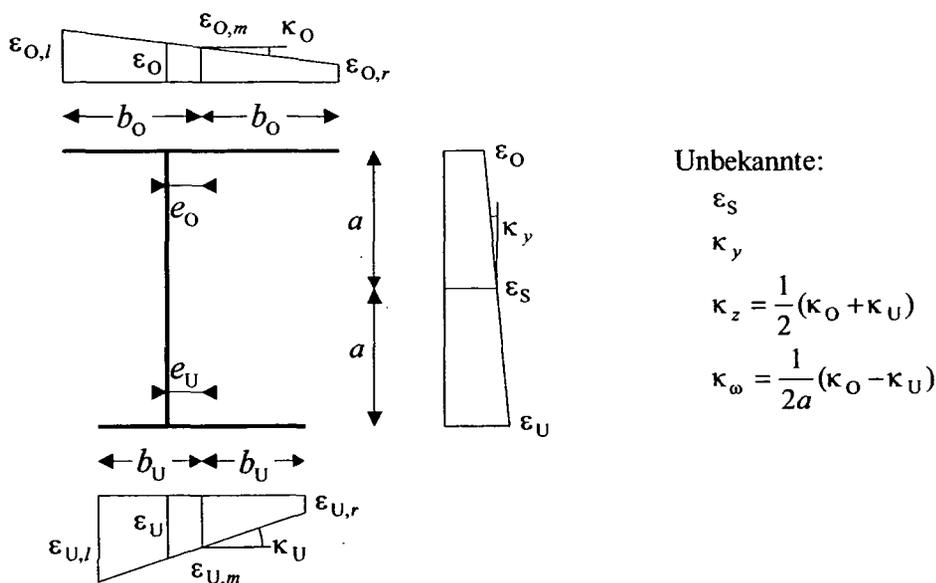


Abbildung 5: Allgemeiner Dehnungszustand des Querschnitts

Aus Gründen der Anschaulichkeit wird bei der Beschreibung eines allgemeinen Dehnungszustandes des Querschnitts wie in Abbildung 5 zunächst nur von der Längsdehnung im Koordinatenursprung ε_S und den Krümmungen der Einzelbleche κ_S , κ_O und κ_U Gebrauch gemacht. Die Blechkrümmung des Steges κ_S entspricht der Unbekannten κ_y in Abbildung 5. Mit Hilfe dieser vier Größen lässt sich ein allgemeiner Dehnungszustand sehr einfach be-

schreiben. Gemäß Abbildung 5 ergeben sich die Dehnungen an den Endpunkten und im Schwerpunkt des Stegblechs S zu:

$$\varepsilon_O = \varepsilon_S - \kappa_S a; \quad \varepsilon_S = \varepsilon_S; \quad \varepsilon_U = \varepsilon_S + \kappa_S a \quad (4.2)$$

Für die entsprechenden Punkte der Gurte erhält man:

$$\varepsilon_{O,l} = \varepsilon_{O,m} + \kappa_O b_O; \quad \varepsilon_{O,m} = \varepsilon_O - \kappa_O e_O; \quad \varepsilon_{O,r} = \varepsilon_{O,m} - \kappa_O b_O \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_{U,l} = \varepsilon_{U,m} + \kappa_U b_U; \quad \varepsilon_{U,m} = \varepsilon_U - \kappa_U e_U; \quad \varepsilon_{U,r} = \varepsilon_{U,m} - \kappa_U b_U \quad (4.4)$$

Um den Übergang auf die in (4.1) dargestellten Unbekannten zu vollziehen, bedient man sich der Umrechnungsbeziehungen zwischen den anschaulichen Gurtkrümmungen κ_O bzw. κ_U und dem Mittel der Gurtkrümmungen κ_z bzw. der Wölbverzerrung κ_ω :

$$\kappa_z = (\kappa_O + \kappa_U)/2; \quad \kappa_\omega = (\kappa_O - \kappa_U)/(2a) \quad (4.5)$$

$$\kappa_O = \kappa_z + \kappa_\omega a; \quad \kappa_U = \kappa_z - \kappa_\omega a \quad (4.6)$$

Setzt man die Gleichungen (4.6) in die Gleichungen (4.2), (4.3) und (4.4) ein, erhält man die in Abbildung 5 bezeichneten Dehnungen in Abhängigkeit von den Unbekannten in (4.1). Die Ergebnisse dieses Schrittes werden hier nicht mehr für alle Dehnungen der Gleichungen (4.2) bis (4.4) angeführt. Für die Verzerrungen der Blechschwerpunkte $\varepsilon_{\dots,m}$ ergibt sich:

$$\varepsilon_{S,m} = \varepsilon_S \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{O,m} = \varepsilon_S - \kappa_y a - \kappa_z e_O - \kappa_\omega a e_O \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_{U,m} = \varepsilon_S + \kappa_y a - \kappa_z e_U + \kappa_\omega a e_U \quad (4.9)$$

Da in weiterer Folge immer wieder auf die Einzelbleche des Querschnitts Bezug genommen wird, ist eine Darstellung des Verzerrungszustandes jedes Blechs durch die Unbekannten zweckmäßig. Eine einheitliche Vorgehensweise bei dieser Darstellung ist für die Anschaulichkeit und auch für die Programmierbarkeit von Vorteil. Die Beschreibung des Verzerrungszustandes eines Einzelblechs erfolgt jeweils durch die Verzerrung des Blechschwerpunkts $\varepsilon_{\dots,m}$ und die Blechkrümmung κ_{\dots} . Mit der in (4.1) gewählten vektoriellen Schreibweise der Unbekannten ergibt sich für den Steg:

$$\varepsilon_{S,m} = \varepsilon_{S,j}^T \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_S \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \kappa_\omega \end{bmatrix}; \quad \kappa_S = \kappa_{S,j}^T \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_S \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \kappa_\omega \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Die Verzerrungen der Gurtschwerpunkte ergeben sich aus den Gleichungen (4.8) und (4.9). Aus den Gleichungen (4.6) erhält man die Krümmung der Gurte. In Vektorschreibweise kann dies in folgender Form dargestellt werden:

$$\varepsilon_{O,m} = \varepsilon_{O,i}^T \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & -a & -e_O & -ae_O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_S \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \kappa_\omega \end{bmatrix}; \quad \kappa_O = \kappa_{O,i}^T \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_S \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \kappa_\omega \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\varepsilon_{U,m} = \varepsilon_{U,i}^T \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & a & -e_U & ae_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_S \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \kappa_\omega \end{bmatrix}; \quad \kappa_U = \kappa_{U,i}^T \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_S \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \kappa_\omega \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$\varepsilon_{\dots,i}$ und $\kappa_{\dots,i}$ stellen die Vektoren der Ableitungen der Verzerrung des jeweiligen Blechschwerpunktes bzw. der jeweiligen Blechkümmung nach den Unbekannten dar.

4.3 Kinematische Beziehungen

Die kinematische Beziehungen beschreiben den Zusammenhang zwischen den äußeren und inneren Weggrößen; d.h. zwischen den Verschiebungen und Verzerrungen einerseits und den Verdrehungen und Krümmungen andererseits. Da in Kapitel 3.1 geometrische Linearität vorausgesetzt wird, können Terme höherer Ordnung in den kinematischen Beziehungen vernachlässigt werden. Die kinematische Beziehung für die Verschiebung in x -Richtung wird hier nicht angegeben, da sie für diese Arbeit nicht von Interesse ist.

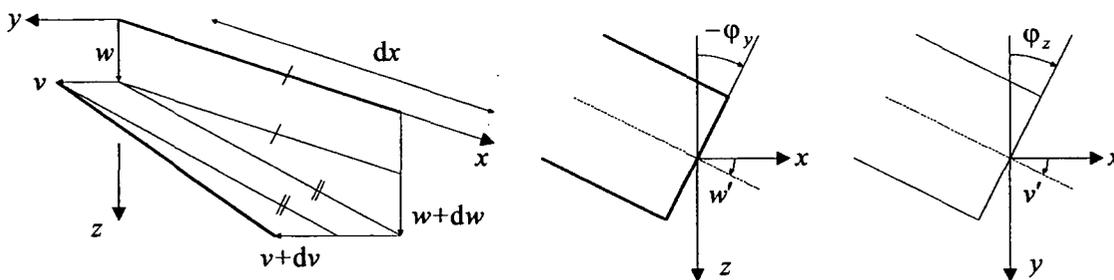


Abbildung 6: Kinematische Beziehungen für die Verschiebungen

Gemäß Abbildung 6 lautet die kinematische Beziehung für die Verschiebung in z -Richtung:

$$w + dw = w - \varphi_y dx \quad (4.13)$$

$$w' = -\varphi_y \quad (4.14)$$

Für die Verschiebung in y -Richtung ergibt sich:

$$v + dv = v + \varphi_z dx \quad (4.15)$$

$$v' = \varphi_z \quad (4.16)$$

Obwohl der Gesamtquerschnitt bei einer allgemeinen Verformung nicht eben bleibt, werden die in den Gleichungen (4.14) und (4.16) auftretenden Größen φ_y und φ_z wie schon in den Kapiteln 2 und 3 als Querschnittsdrehwinkel bezeichnet. Der Querschnittsdrehwinkel φ_y gibt dabei den Drehwinkel des Stegblechs an. Der Querschnittsdrehwinkel φ_z hingegen kann keiner physikalischen Größe direkt zugeordnet werden. Er stellt entsprechend der Definition von v den Mittelwert der Gurtblechdrehwinkel dar. Nur im Falle verschwindender Querschnittsverwölbung ist der Querschnittsdrehwinkel φ_z gleich den Gurtdrehwinkeln. Durch die Vernachlässigung der Schubverformungen können die Querschnittsdrehwinkel allein aus den Ableitungen der Verschiebungen bestimmt werden.

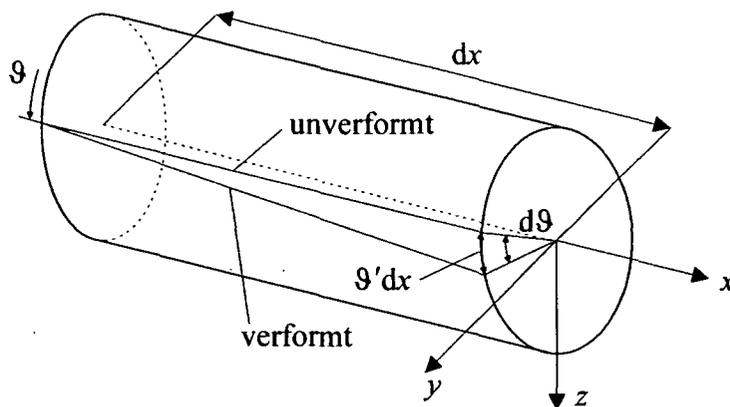


Abbildung 7: Kinematische Beziehung für die Verdrehungen um die x-Achse

Die Relativverdrehung zweier Enden eines infinitesimalen Elements der Länge dx um die x -Achse wird mit $d\vartheta$ bezeichnet. Bei der Verdrehung werden die ursprünglich parallel zur Stabachse gelegenen Stabfasern zu Schraubenlinien verformt. Diese Art der Verformung wird Verdrillung oder Verwindung genannt. Nach Abbildung 7 ergibt sich für die kinematische Beziehung um die x -Achse:

$$\vartheta + d\vartheta = \vartheta + \vartheta' dx \tag{4.17}$$

$$(\vartheta)' = \vartheta' \tag{4.18}$$

In Gleichung (4.18) ist zwischen den formal ähnlichen Ausdrücken auf der linken und rechten Seite zu unterscheiden: $(\vartheta)'$ ist die Ableitung des Torsionsdrehwinkels ϑ , ϑ' die Verdrillung oder Verwindung des Querschnitts.

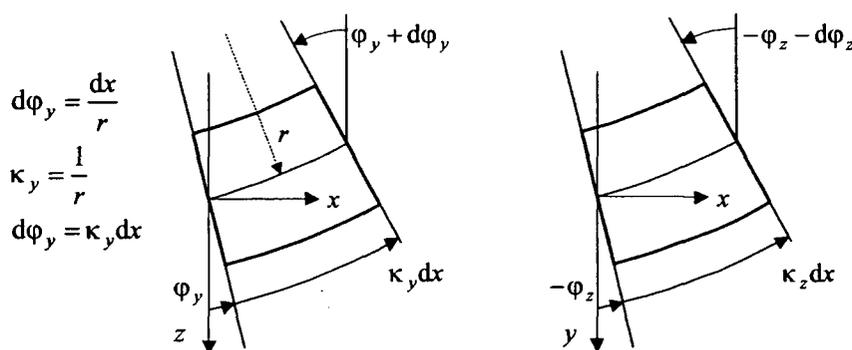


Abbildung 8: Kinematische Beziehungen für die Verdrehungen um die y- und z-Achse

Die kinematische Beziehung für die Verdrehung um die y -Achse unter Berücksichtigung von Abbildung 8 lautet:

$$\varphi_y + d\varphi_y = \varphi_y + \kappa_y dx \quad (4.19)$$

$$\varphi'_y = \kappa_y \quad (4.20)$$

Für die Verdrehung um die z-Achse gilt:

$$-\varphi_z - d\varphi_z = -\varphi_z + \kappa_z dx \quad (4.21)$$

$$\varphi'_z = -\kappa_z \quad (4.22)$$

Aus den Gleichungen (4.13) bis (4.22) folgen die Beziehungen zwischen den Verschiebungen und den Krümmungen:

$$w'' = -\kappa_y \quad (4.23)$$

$$v'' = -\kappa_z \quad (4.24)$$

Um zu einem analogen Zusammenhang zu (4.26) bzw. (4.24) für den Querschnittsdrehwinkel um die x-Achse zu gelangen, stellt man die Verdrehung \mathcal{G} durch die Gurtverschiebungen v_O und v_U dar:

$$\mathcal{G} = (v_O - v_U)/(2a) \quad (4.25)$$

Nach zweimaliger Differentiation dieser Beziehung erhält man:

$$\mathcal{G}'' = (v''_O - v''_U)/(2a) \quad (4.26)$$

Die Beziehung der Gleichung (4.24) für den Gesamtquerschnitt ist in gleicher Form auch für Ober- und Untergurt gültig:

$$v''_O = -\kappa_O; \quad v''_U = -\kappa_U \quad (4.27)$$

Damit ergibt sich für die zweifache Ableitung der Torsionsverdrehung \mathcal{G} unter Berücksichtigung der Formel für die Wölbverzerrung in der zweiten Gleichung in (4.5):

$$\mathcal{G}'' = -\kappa_\omega \quad (4.28)$$

4.4 Schnittgrößen nach Elastizitätstheorie

4.4.1 Teilschnittgrößen nach Elastizitätstheorie

In diesem Kapitel wird die Ermittlung der elastischen Schnittgrößen N_{Blech}^{el} und M_{Blech}^{el} aus den Verzerrungen an einem Rechteckquerschnitt (Blech) gezeigt. Die Schnittgrößen N_{\dots}^{el} und M_{\dots}^{el} der drei Bleche werden als elastische Teilschnittgrößen des Querschnitts bezeichnet. Sie werden nach der im Folgenden beschriebenen Vorgangsweise ermittelt. In Abhängigkeit des Verzerrungszustandes des Rechteckquerschnitts, beschrieben durch die Verzerrung ε_{Blech} und die Krümmung κ_{Blech} , werden die elastischen Teilschnittgrößen angegeben. Die Normalkraft N_{Blech}^{el} wird als Zugkraft positiv definiert; das Moment M_{Blech}^{el} wird um die in Abbildung 9 eingezeichnete Flächenhalbierende des Rechteckquerschnitts gebildet.

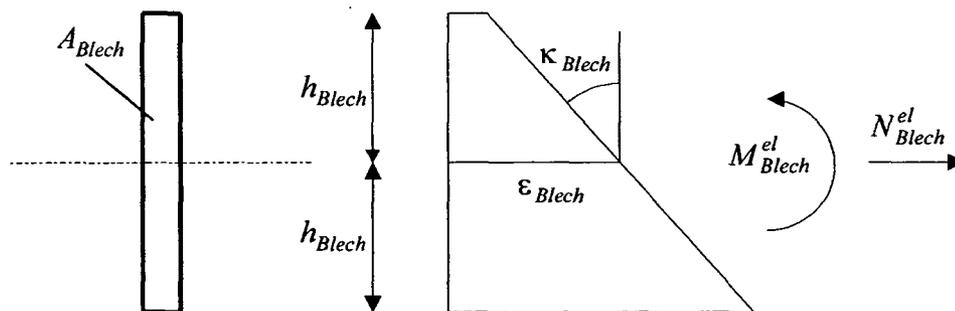


Abbildung 9: Verzerrungszustand und elastische Schnittgrößen des Einzelblechs

Bei der Berechnung der elastischen Schnittgrößen wird die uneingeschränkte Gültigkeit des *Hooke'schen* Gesetzes aus der Gleichung (3.1) angenommen. Sind alle Dehnungen des Blechs kleiner oder gleich der Fließdehnung ε_y , ist die Annahme des *Hooke'schen* Gesetzes korrekt und es kann in jeder Faser des Querschnitts die angenommene Spannung $\sigma = E\varepsilon$ aktiviert werden. Die mit diesen Spannungen ermittelten Schnittgrößen entsprechen dann den tatsächlich wirkenden. Wird die Fließdehnung ε_y von den Dehnungen des Blechs an zumindest einer Stelle überschritten, ändert sich bei der Ermittlung von N_{Blech}^{el} und M_{Blech}^{el} nichts; es handelt sich dann allerdings nicht mehr um Schnittgrößen, die auch tatsächlich am Querschnitt wirken. Da in jenen Fasern in denen die Fließdehnung überschritten wird, anstelle der für die Berechnung der elastischen Schnittgrößen angenommenen Spannung $\sigma = E\varepsilon$ maxi-

mal die Fließspannung f_y wirken kann, stellen die elastischen Schnittgrößen eine Überschätzung der tatsächlich am Querschnitt auftretenden Schnittgrößen dar. Für den in Abbildung 9 dargestellten Rechteckquerschnitt und den skizzierten Verzerrungszustand (ε_{Blech} , κ_{Blech}) ergibt sich:

$$N_{Blech}^{el} = EA_{Blech}\varepsilon_{Blech}; \quad M_{Blech}^{el} = 1/3 EA_{Blech}h_{Blech}^2\kappa_{Blech} \quad (4.29)$$

Wendet man die Formeln für N_{Blech}^{el} und M_{Blech}^{el} aus (4.29) für die drei Bleche des Querschnitts an und setzt für ε_{Blech} und κ_{Blech} jeweils die in den Gleichungen (4.10) bis (4.12) angegebenen Formeln für die Blechschwerpunktsverzerrung und Blechkrümmung ein, ergibt sich für die Beziehung zwischen den Unbekannten im Querschnitt und den elastischen Teilschnittgrößen des Querschnitts:

$$\begin{bmatrix} N_S^{el} \\ M_S^{el} \\ N_O^{el} \\ M_{O,m}^{el} \\ N_U^{el} \\ M_{U,m}^{el} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} A_S & & & & & \\ & \frac{1}{3}A_S a^2 & & & & \\ A_O & -A_O a & -A_O e_O & -A_O e_O a & & \\ & & \frac{1}{3}A_O b_O^2 & \frac{1}{3}A_O b_O^2 a & & \\ A_U & A_U a & -A_U e_U & A_U e_U a & & \\ & & \frac{1}{3}A_U b_U^2 & -\frac{1}{3}A_U b_U^2 a & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_S \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \kappa_\omega \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Die Bezugsachse für die Momente der Teilschnittgrößen in (4.30) ist stets die in Abbildung 9 dargestellte Flächenhalbierende des jeweiligen Blechs. Für die Gurte sind die Flächenhalbierenden Parallele zur z -Achse. Da die Bezugsachsen durch den jeweiligen Blechschwerpunkt verlaufen, werden sie mit dem Index \dots_m versehen. Beim Steg fällt die Bezugsachse immer mit der y -Achse des Koordinatensystems zusammen. Da das Stegmoment in der Folge auf keine andere Achse bezogen wird, entfällt beim Stegmoment der Index \dots_m .

4.4.2 Gesamtschnittgrößen nach Elastizitätstheorie

Die Wirkungsorte und die positiven Richtungen der Gesamtschnittgrößen N , M_y , M_z und M_{xx} wurden bereits in Abbildung 3 dargestellt. Die elastischen Gesamtschnittgrößen N^{el} , M_y^{el} , M_z^{el} und M_{xx}^{el} lassen sich aus den elastischen Teilschnittgrößen der einzelnen Bleche in (4.30) ermitteln. Die Normalkraft N^{el} des Gesamtquerschnitts ergibt sich als Summe der Normalkräfte N_{\dots}^{el} der drei Bleche.

$$N^{el} = N_S^{el} + N_O^{el} + N_U^{el} \quad (4.31)$$

Das elastische Biegemoment um die y -Achse M_y^{el} wird aus dem Stegmoment M_S^{el} und den Anteilen der Normalkräfte der Gurte gebildet.

$$M_y^{el} = M_S^{el} - N_O^{el}a + N_U^{el}a \quad (4.32)$$

Das Moment um die z -Achse wird durch Summation der Gurtmomente M_O^{el} und M_U^{el} erhalten. Diese Gurtmomente unterscheiden sich von den in (4.30) angegebenen Momenten $M_{O,m}^{el}$ und $M_{U,m}^{el}$ durch eine Verschiebung der Bezugsachsen. Bei den Gurtmomenten $M_{O,m}^{el}$ und $M_{U,m}^{el}$ aus (4.30) wird als Bezugsachse eine Parallele zur z -Achse durch den Blechschwerpunkt angenommen, während die Momente M_O^{el} und M_U^{el} die z -Achse selbst als Bezugsachse haben. In Abbildung 10 werden die beiden unterschiedlichen Darstellungsmöglichkeiten der Gurtmomente gezeigt. Die Verschiebung der Bezugsachsen resultiert in einem Zusatzmoment, das durch die Normalkraft des Gurtblechs hervorgerufen wird. Die neuen Gurtmomente ergeben sich aus den bekannten Teilschnittgrößen zu:

$$M_O^{el} = M_{O,m}^{el} - N_O^{el}e_O; \quad M_U^{el} = M_{U,m}^{el} - N_U^{el}e_U \quad (4.33)$$

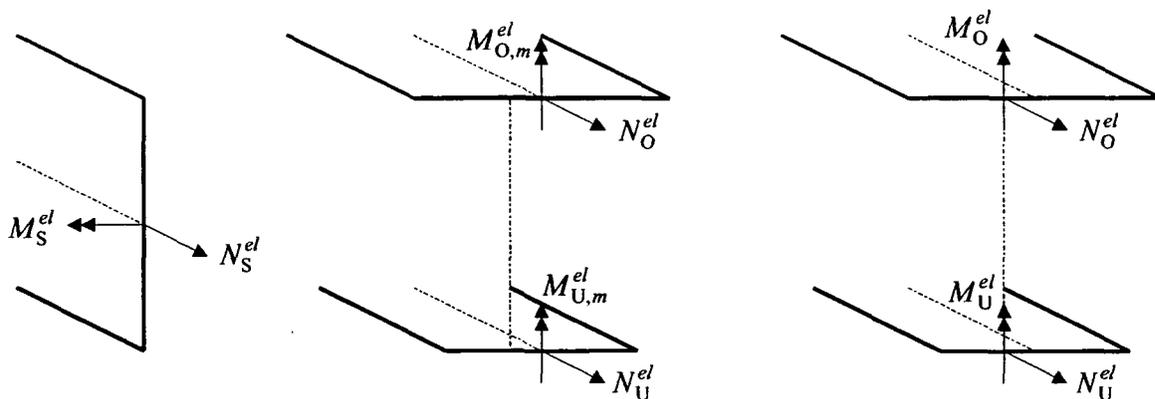


Abbildung 10: Elastische Teilschnittgrößen

In Abbildung 10 links und Mitte werden alle elastischen Teilschnittgrößen aus (4.30) dargestellt. Abbildung 10 rechts zeigt die auf die z -Achse bezogenen Gurtmomente, die für die Ermittlung der elastischen Gesamtschnittgrößen M_z^{el} und M_{xx}^{el} herangezogen werden. Für das Moment um die z -Achse gilt:

$$M_z^{el} = M_O^{el} + M_U^{el} \tag{4.34}$$

Als vierte elastische Gesamtschnittgröße wird schließlich das Bimoment M_{xx}^{el} als Moment der in der z-Achse wirkenden Gurtmomente M_O^{el} und M_U^{el} bezüglich der x-Achse definiert:

$$M_{xx}^{el} = (M_O^{el} - M_U^{el})a \tag{4.35}$$

Durch die Definition von M_{xx}^{el} mit den auf die z-Achse bezogenen Gurtmomenten ergibt sich – wie im Folgenden noch gezeigt wird – die Ableitung des Bimoments M_{xx}^{el} als sekundäres Torsionsmoment um die x-Achse. Betrachtet man das Momentengleichgewicht um die z-Achse am Obergurt in Abbildung 11, so kommt in dieser Beziehung der an der Stegoberkante wirkende Schubfluss T_O^{el} nicht vor. Aus dieser Gleichgewichtsbedingung ergibt sich für das Obergurtmoment:

$$(M_O^{el})' = Q_O^{el} \tag{4.36}$$

Analog erhält man für den Untergurt:

$$(M_U^{el})' = Q_U^{el} \tag{4.37}$$

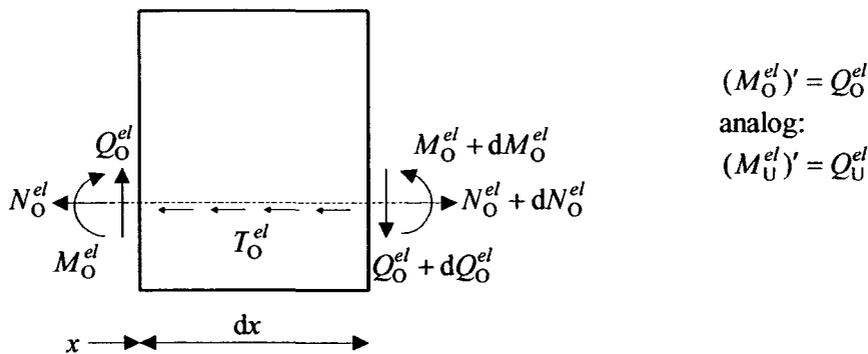


Abbildung 11: Momentengleichgewicht am Obergurt

Leitet man die Gleichung (4.35) ab und setzt die Beziehungen aus (4.36) und (4.37) ein, ergibt die Ableitung des Bimoments M_{xx}^{el} das sekundäre Torsionsmoment um die x-Achse:

$$(M_{xx}^{el})' = M_{x,s}^{el} = (Q_O^{el} - Q_U^{el})a \tag{4.38}$$

Als Vorgriff auf die Fließzonentheorie soll hier erwähnt werden, dass die Gleichungen (4.31) bis (4.38) auch ohne den Index ...^{el} ihre Gültigkeit behalten, da es sich um Gleichgewichtsbedingungen handelt.

Die Beziehungen (4.31) bis (4.35) geben den Zusammenhang zwischen den elastischen Teilschnittgrößen und den elastischen Gesamtschnittgrößen an. Wählt man zur Beschreibung des Zusammenhangs die Vektordarstellung, ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} N^{el} \\ M_y^{el} \\ M_z^{el} \\ M_{xx}^{el} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -a & a \\ & & -e_O & 1 & -e_U & 1 \\ & & -e_O a & a & e_U a & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_S^{el} \\ M_S^{el} \\ N_O^{el} \\ M_{O,m}^{el} \\ N_U^{el} \\ M_{U,m}^{el} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

In der Beziehung in (4.39) sind die Teilschnittgrößen, die sich auf die Flächenhalbierende beziehen, verwendet. Die bei der Bildung der Gesamtschnittgrößen stattfindende Verschiebung der Bezugsachsen wird durch die Koeffizienten der Matrix berücksichtigt. Auf diese Art ist ein einheitliches Vorgehen bei der Ermittlung der elastischen Teilschnittgrößen gewährleistet. Um die Gesamtschnittgrößen des Querschnitts in Abhängigkeit der Verzerrungen darzustellen, wird für den Vektor der Teilschnittgrößen in (4.39) die Beziehung aus (4.30) eingesetzt. Führt man die Multiplikation der Matrizen durch, erhält man den Zusammenhang zwischen elastischen Gesamtschnittgrößen und Verzerrungen des Querschnitts zu:

$$\begin{bmatrix} N^{el} \\ M_y^{el} \\ M_z^{el} \\ M_{xx}^{el} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & (-A_O + A_U)a & -(S_O + S_U) & -(S_O - S_U)a \\ (-A_O + A_U)a & I_y & (S_O - S_U)a & (S_O + S_U)a^2 \\ -(S_O + S_U) & (S_O - S_U)a & I_z & (I_O - I_U)a \\ -(S_O - S_U)a & (S_O + S_U)a^2 & (I_O - I_U)a & I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \kappa_\omega \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Fasst man die elastischen Gesamtschnittgrößen N^{el} , M_y^{el} , M_z^{el} und M_{xx}^{el} im Vektor SG^{el} zusammen und bezeichnet die Matrix in (4.40) mit B , ergibt sich:

$$SG^{el} = E B \cdot \varepsilon \quad (4.41)$$

Die für die Berechnung der Matrix B erforderlichen Querschnittswerte sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

	$A_O \dots$	$A_S \dots$	$A_U \dots$		$A_O \dots$	$A_S \dots$	$A_U \dots$
$A =$	1	1	1	$I_O =$	$1/3 b_O^2 + e_O^2$		
$S_O =$	e_O			$I_U =$			$1/3 b_U^2 + e_U^2$
$S_U =$			e_U	$I_z =$	$1/3 b_O^2 + e_O^2$		$1/3 b_U^2 + e_U^2$
$I_y =$	a^2	$1/3 a^2$	a^2	$I_{xx} =$	$(1/3 b_O^2 + e_O^2) a^2$		$(1/3 b_U^2 + e_U^2) a^2$

Tabelle 2: Querschnittswerte zur Bestimmung der Koeffizienten der Matrix B

Aus der allgemeinen Form der Matrix \mathbf{B} erkennt man, dass für den Fall eines doppelsymmetrischen Querschnittes lediglich die Hauptdiagonale besetzt ist; d.h. die Beziehungen für die vier Unbekannten sind entkoppelt, weil in diesem Fall die hier gewählten Koordinatenachsen mit den Hauptachsen des Querschnitts zusammenfallen. Für einen einfach symmetrischen Querschnitt um die y -Achse ergibt sich eine Entkopplung der ersten beiden und letzten beiden Gleichungen. Für einen U-Querschnitt bilden die erste und dritte sowie die zweite und die vierte Gleichung zwei entkoppelte Gleichungssysteme. Bei einem Z-Querschnitt sind die erste und vierte sowie die zweite und dritte Zeile des Gleichungssystem getrennt berechenbar.

Mit der in (4.40) angegebenen Matrix \mathbf{B} lassen sich aus einem allgemeinen Verzerrungszustand die elastischen Gesamtschnittgrößen N^{el} , M_y^{el} , M_z^{el} und M_{xx}^{el} berechnen. Bei der Berechnung dieser wird die Gültigkeit des *Hooke'schen* Gesetzes angenommen. Die so erhaltenen elastischen Schnittgrößen entsprechen, wenn im Querschnitt Fließen auftritt, nicht den im Querschnitt wirkenden; sie stellen die tatsächlich wirkenden Schnittgrößen dar, wenn die Annahme des *Hooke'schen* Gesetzes zutreffend war.

4.5 Bezug zur herkömmlichen Wölbkrafttorsionstheorie

Das in (4.35) definierte Bimoment M_{xx}^{el} entspricht nur bei Profilen, bei denen der Schubmittelpunkt mit dem Stegblechmittelpunkt zusammenfällt, dem in der Literatur gebräuchlichen Wölbmoment M_ω . In [8] wird die Theorie der elastischen Wölbkrafttorsion in ihrer üblichen Form behandelt. Dabei wird als Bezugsachse der Torsion die Schubmittelpunktsachse angenommen. Anstelle des hier definierten Bimoments der Gurtmomente um die x -Achse M_{xx}^{el} tritt das auf die Schubmittelpunktsachse bezogene Wölbmoment M_ω . Um zu zeigen, dass sich die in dieser Arbeit verwendete Formulierung mit dem Bimoment M_{xx}^{el} für Elastizitätstheorie in die der klassischen Wölbkrafttorsionstheorie mit M_ω überführen lässt, wird der Zusammenhang anhand der bisher angegebenen Formeln hergeleitet. Dazu wird zunächst von der Beziehung in (4.40) Gebrauch gemacht. Durch Inversion der Matrix \mathbf{B} erhält man die Unbekannten ε in Abhängigkeit der Schnittgrößen \mathbf{SG}^{el} :

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{SG}^{el} \quad (4.42)$$

Bezeichnet man die invertierte Matrix \mathbf{B} mit \mathbf{C} erhält man:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_S \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \kappa_\omega \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \mathbf{C} \cdot \mathbf{SG}^{el} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{el} \\ M_y^{el} \\ M_z^{el} \\ M_{xx}^{el} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1} \quad (4.43)$$

Die vierte Zeile dieser Beziehung gibt die Wölbverzerrung als Funktion der elastischen Gesamtschnittgrößen an:

$$\kappa_\omega = 1/E (c_{41} N^{el} + c_{42} M_y^{el} + c_{43} M_z^{el} + c_{44} M_{xx}^{el}) \quad (4.44)$$

Setzt man

$$M_\omega^{el} = M_{xx}^{el} - c_x N^{el} - c_y M_y^{el} - c_z M_z^{el} \quad (4.45)$$

$$\text{mit } c_x = -c_{41}/c_{44}; \quad c_y = -c_{42}/c_{44}; \quad c_z = -c_{43}/c_{44}$$

erhält man für die Wölbverzerrung:

$$\kappa_{\omega} = 1/E c_{44} M_{\omega}^{el} \quad (4.46)$$

Definiert man noch

$$I_{\omega} = 1/c_{44} \quad (4.47)$$

so erhält man die konstitutive Beziehung für die Wölbverzerrung wie in [8] zu:

$$\kappa_{\omega} = 1/EI_{\omega} M_{\omega}^{el} \quad (4.48)$$

Das hier angeführte Wölbmoment M_{ω}^{el} entspricht also dem in [8] verwendeten M_{ω} .

Das Torsionsmoment M_x setzt sich unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion aus einem primären und einem sekundären Torsionsmoment zusammen.

$$M_x = M_{x,p} + M_{x,s} \quad (4.49)$$

Das primäre – oder *St. Venant'sche* – Torsionsmoment wird von den primären Schubspannungen gebildet. Die Charakteristik dieser primären Schubspannungen ist es, dass sie ohne gleichzeitig auftretende Normalspannungen wirken. Obwohl das primäre Torsionsmoment von der Lage der Bezugsachse unabhängig ist, wird es zur Unterscheidung zwischen dem primären Torsionsmoment nach Theorie I. und II. Ordnung mit dem Index ... x versehen. Die konstitutive Beziehung für das primäre Torsionsmoment aus [6] wurde bereits in Kapitel 3.1 angegeben:

$$M_{x,p} = GI_T \mathcal{G}' \quad (4.50)$$

Der Drillwiderstand I_T wird nach der üblichen Formel für dünnwandige offene Querschnitte berechnet. Es ist zu beachten, dass die konstitutive Beziehung für $M_{x,p}$ gemäß den Annahmen in Kapitel 3.1 auch bei Plastizität ihre Gültigkeit behält. Für das sekundäre Torsionsmoment um die x -Achse leitet man – wie in (4.38) angegeben – die erste Gleichung von (4.45) ab. Da die Querschnittswerte c_x , c_y und c_z für konstante Querschnittshöhen über die Stablänge konstant sind, müssen nur die Schnittgrößen abgeleitet werden. Die als konstant vorausgesetzte Normalkraft bedingt allerdings, dass der Normalkraftterm der ersten Gleichung in (4.45) bei der Ableitung verschwindet. Unter Berücksichtigung des Momentengleichgewichts um die y - bzw. z -Achse

$$M'_y = Q_z ; \quad M'_z = Q_y \quad (4.51)$$

und der Gleichung (4.38) erhält man

$$M_{x,s} = (M_{\omega}^{el})' + c_y Q_z + c_z Q_y \quad (4.52)$$

Das Gesamttorsionsmoment um die x -Achse lässt sich dann zu

$$M_x = M_{x,p} + M_{x,s} = M_{x,p} + (M_{\omega}^{el})' + c_y Q_z + c_z Q_y \quad (4.53)$$

anschreiben. In der herkömmlichen Theorie der Wölbkrafttorsion gilt für einen allgemeinen Querschnitt mit dem Torsionsmoment M_T um den Schubmittelpunkt M nach [8]:

$$M_T = M_p + M_{\omega}' \quad (4.54)$$

Durch Vergleich der Gleichungen (4.53) und (4.54) ergibt sich:

$$M_T = M_x - c_y Q_z - c_z Q_y \quad (4.55)$$

Das auf den Schubmittelpunkt bezogene Torsionsmoment M_T lässt sich also durch das Torsionsmoment um die x -Achse und die Querkräfte Q_y und Q_z ausdrücken.

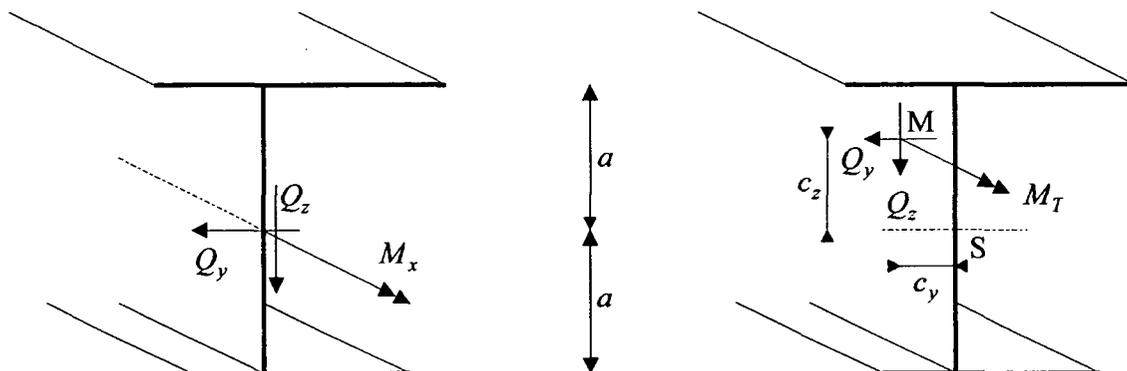


Abbildung 12: Verschiebung der Bezugsachse für das Torsionsmoment

In Abbildung 12 ist der Übergang von der x -Achse als Bezugsachse für das Torsionsmoment auf die Schubmittelpunktsachse dargestellt. Durch die Verschiebung der Bezugsachse des Torsionsmoments von S nach M entstehen die Terme der Querkräfte Q_y und Q_z in (4.55). Mit den Multiplikatoren c_y und c_z ist auch die Lage des Schubmittelpunktes M – wie in Abbildung 12 dargestellt – festgelegt. Die Schubmittelpunktskoordinaten c_y und c_z ergeben sich aus den Gleichungen in (4.45). Will man die Torsion (4. Zeile in (4.43)) unabhängig von den anderen Schnittgrößen darstellen, kann man dies durch Einsetzen der ersten Gleichung aus (4.45) in die Beziehung (4.43) erreichen.

4.6 Bestimmungsgleichungen nach Elastizitätstheorie

Zur Lösung des Biegetorsionsproblems wird – wie in Kapitel 4.1 erwähnt – der Stab in beliebig viele Abschnitte n unterteilt. Diese Abschnitte werden von den sogenannten Berechnungsquerschnitten begrenzt. Für jeden dieser Querschnitte müssen die Unbekannten nach Gleichung (4.1) ermittelt werden. Insgesamt treten also $4(n+1)$ unbekannte Größen – vier pro Berechnungsquerschnitt – auf. Für die Ermittlung der Unbekannten stehen für jeden Berechnungsquerschnitt vier Bestimmungsgleichungen zur Verfügung. In den Bestimmungsgleichungen werden die Schnittgrößen als Funktion des noch unbekanntem Verzerrungszustandes jenen aus den Gleichgewichtsbedingungen aus Kapitel 3.5 gegenübergestellt; diese Beziehungen stellen die für den Querschnitt angewandten konstitutiven Beziehungen dar. In allgemeiner Form lauten die Gleichungen für jeden Berechnungsquerschnitt $r = 0 \dots n$:

$$N_r^{el}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{yr}, \kappa_{zr}, \kappa_{\omega r}) = N_r^{Last} \quad (4.56)$$

$$M_{yr}^{el}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{yr}, \kappa_{zr}, \kappa_{\omega r}) = M_{yr}^{Last} \quad (4.57)$$

$$M_{zr}^{el}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{yr}, \kappa_{zr}, \kappa_{\omega r}) = M_{zr}^{Last} \quad (4.58)$$

$$M_{x,pr} + M_{x,sr}^{el} = M_{xr}^{Last} \quad (4.59)$$

Bei den Gleichungen (4.56) bis (4.59) ist zwischen den ersten drei Gleichungen einerseits und der vierten Gleichung andererseits zu unterscheiden. Während die ersten drei Gleichungen, wie in (4.56) bis (4.58) angegeben, in die Berechnung eingehen, wird die Gleichung (4.59) in integrierter Form weiterverwendet. Die ersten drei Gleichungen werden zur Ermittlung der Unbekannten ε_S , κ_y und κ_z herangezogen. Unter Berücksichtigung der Matrix \mathbf{B} aus (4.41) können die ersten drei Gleichungen für jeden Berechnungsquerschnitt r in folgender Form angeschrieben werden:

$$E \begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_S \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \end{bmatrix} \kappa_{\omega} = \begin{bmatrix} N_r^{Last} \\ M_y^{Last} \\ M_z^{Last} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Bei der analytischen Lösung des 3×3 -Gleichungssystems in (4.60) für ε_S , κ_y und κ_z geht die Wölbverzerrung κ_{ω} bei jedem Gesamtiterationsschritt als bekannte Größe ein. Die Wölbverzerrungen κ_{ω} aller Berechnungsquerschnitte sind durch die Lösung des sich aus der Gleichung

chung (4.59) ergebenden Gleichungssystem im vorhergehenden Gesamtiterationsschritt bekannt.

Die Gleichung (4.59) hat unter Berücksichtigung von (4.38) für das sekundäre und (4.50) für das primäre Torsionsmoment die Form:

$$GI_T \mathcal{G}' + (M_{xx}^{el})' = M_x^{Last} \quad (4.61)$$

Durch Integration ergibt sich:

$$GI_T \int_0^x \mathcal{G}' dx + \int_0^x (M_{xx}^{el})' dx = \int_0^x M_x^{Last} dx \quad (4.62)$$

Der erste Term der Gleichung (4.62) stellt das integrierte primäre Torsionsmoment dar. Da die Torsionssteifigkeit GI_T über die Stablänge konstant ist, muss nur die Verdrillung \mathcal{G}' integriert werden. Der zweite Term – das integrierte sekundäre Torsionsmoment – ergibt gemäß (4.38) das Bimoment M_{xx}^{el} , das unter Ausnutzung der Matrix \mathbf{B} in Gleichung (4.41) aus den Verzerrungen des Querschnitts bestimmt werden kann. Der Wert des Integrals des Torsionsmoments aus den Einwirkungen M_x^{Last} auf der rechten Seite der Gleichung (4.62) lässt sich für jede Stelle des Stabes durch Integration des Torsionsmoments in Gleichung (3.10) bestimmen. Führt man die Integration für die linke Seite von (4.62) aus, erhält man unter Berücksichtigung der Anfangswerte:

$$GI_T (\mathcal{G} - \mathcal{G}_0) + M_{xx}^{el} - M_{xx0}^{el} = \int_0^x M_x^{Last} dx \quad (4.63)$$

Der Relativedrehwinkel $(\mathcal{G} - \mathcal{G}_0)$ kann unter Berücksichtigung der kinematischen Beziehung in (4.28) als negatives zweifaches Integral der Unbekannten κ_ω dargestellt werden.

$$(\mathcal{G} - \mathcal{G}_0) = - \int_0^x \int_0^x \kappa_\omega dx dx \quad (4.64)$$

Durch die zweifache Integration über die x -Koordinate ist der Torsionsdrehwinkel \mathcal{G} vom Verlauf der Wölbverzerrung κ_ω abhängig; bei der numerischen Integration gehen demnach bei der Berechnung von \mathcal{G} für einen bestimmten Querschnitt die Wölbverzerrungen aller Berechnungsquerschnitte ein. In der Bestimmungsgleichung (4.59) treten somit nicht nur die vier Unbekannten des betrachteten Querschnitts, sondern im allgemeinen Fall auch die Wölbverzerrungen aller anderen Berechnungsquerschnitte auf. Die für die numerische Integration

verwendeten Integrationsmatrizen werden in Kapitel 4.9.1 angegeben. Das Bimoment M_{xx}^{el} hingegen kann durch den Vektor der vier Unbekannten im Querschnitt ε dargestellt werden. Aus der vierten Zeile der Beziehung in (4.41) erhält man:

$$M_{xx}^{el} = Eb_{41}\varepsilon_S + Eb_{42}\kappa_y + Eb_{43}\kappa_z + Eb_{44}\kappa_\omega \quad (4.65)$$

Setzt man die Beziehungen aus (4.64) und (4.65) in die Gleichung (4.63) ein und berücksichtigt, dass die Integrationskonstante M_{xx0}^{el} in (4.63) nach den Randbedingungen in Tabelle 1 für alle hier behandelten Lagerungsfälle verschwindet, erhält man die Ausgangsgleichung für das Gleichungssystem zur Bestimmung der Wölbverzerrungen in den Berechnungsquerschnitten zu:

$$GI_T \cdot \int_0^x \int_0^x -\kappa_\omega dx dx + Eb_{44}\kappa_\omega = \int_0^x M_x^{Last} dx - Eb_{41}\varepsilon_S - Eb_{42}\kappa_y - Eb_{43}\kappa_z \quad (4.66)$$

Durch die zweifache numerische Integration der Wölbverzerrung, bei deren Berechnung alle κ_ω der Berechnungsquerschnitte r eingehen, liefert die Gleichung (4.66) ein $(n+1) \times (n+1)$ -Gleichungssystem zur Bestimmung der Wölbverzerrungen. Der Aufbau des Gleichungssystems wird in Kapitel 4.9.4 gezeigt. Die Unbekannten ε_S , κ_y und κ_z gehen bei der Lösung des Gleichungssystems in jedem Gesamtiterationsschritt als bekannte Größen ein. Die Verzerrung ε_S und die Krümmungen κ_y und κ_z aller Berechnungsquerschnitte sind durch die Lösung der Gleichungssysteme aus (4.60) im Zuge des jeweiligen Gesamtiterationsschrittes bekannt.

Die Lösung der in diesem Kapitel angegebenen Gleichungen stellt eine beliebig genaue Lösung des Biegetorsionsproblems nach Elastizitätstheorie für die betrachteten Systeme dar. Ausgehend von den Bestimmungsgleichungen dieses Kapitels wird in Kapitel 4.7 die Herleitung der Fließzonentheorie I. Ordnung für den Einzelstab mit offenem Dreiblechquerschnitt angegeben.

4.7 Bestimmungsgleichungen nach Plastizitätstheorie

Die Ausführungen zu den Bestimmungsgleichungen in Kapitel 4.6 beschränken sich auf elastisches Materialverhalten. Um das in Kapitel 3.2 beschriebene bilineare Materialverhalten zu erfassen, werden die allgemeinen Bestimmungsgleichungen aus (4.56) bis (4.59) modifiziert. Die aus dem Verzerrungszustand des Querschnitts berechneten elastischen Schnittgrößen werden weiterhin wie in Kapitel 4.4 angegeben ermittelt. Da es sich aber im Falle der (auch nur teilweisen) Plastizierung des Querschnitts um nicht tatsächlich wirkende Schnittgrößen handelt, die eine Überschätzung der tatsächlich vorhandenen darstellen, müssen diese um sogenannte Δ -Schnittgrößen abgemindert werden. Die Gleichungen nach Elastizitätstheorie in (4.56) bis (4.59) werden für die Plastizitätstheorie unter Verwendung der Δ -Schnittgrößen neu formuliert, wobei für die Gleichung (4.59) bereits die integrierte Form der Gleichung (4.62) angegeben wird:

$$N_r^{el-\Delta} = N_r^{el}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{yr}, \kappa_{zr}, \kappa_{\omega r}) - \Delta N_r(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{yr}, \kappa_{zr}, \kappa_{\omega r}) = N_r^{Last} \quad (4.67)$$

$$M_{yr}^{el-\Delta} = M_{yr}^{el}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{yr}, \kappa_{zr}, \kappa_{\omega r}) - \Delta M_{yr}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{yr}, \kappa_{zr}, \kappa_{\omega r}) = M_{yr}^{Last} \quad (4.68)$$

$$M_{zr}^{el-\Delta} = M_{zr}^{el}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{yr}, \kappa_{zr}, \kappa_{\omega r}) - \Delta M_{zr}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{yr}, \kappa_{zr}, \kappa_{\omega r}) = M_{zr}^{Last} \quad (4.69)$$

$$GI_T \int_0^{x_r} g' dx + \int_0^{x_r} (M_{xx}^{el}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{yr}, \kappa_{zr}, \kappa_{\omega r}) - \Delta M_{xx}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{yr}, \kappa_{zr}, \kappa_{\omega r}))' dx = \int_0^{x_r} M_x^{Last} dx \quad (4.70)$$

Der erste Term in der Gleichung (4.70) bleibt im Vergleich zur Bestimmungsgleichung nach Elastizitätstheorie unverändert, da die konstitutive Beziehung der primären Torsion auch für die Plastizitätstheorie als gültig vorausgesetzt wird. Der zweite Term der Gleichung (4.70) stellt das integrierte sekundäre Torsionsmoment nach Fließzonentheorie dar. Die Gleichungen (4.67) bis (4.70) unterscheiden sich von den Gleichungen nach Elastizitätstheorie formal nur durch das Auftreten der Δ -Schnittgrößen. Um die Bestimmungsgleichungen nach Plastizitätstheorie anwenden zu können, muss aber noch eine allgemeine Form der Darstellung der Δ -Schnittgrößen aus dem Verzerrungszustand gefunden werden.

Genau wie bei der Ermittlung der elastischen Gesamtschnittgrößen steht am Beginn der Ermittlung der Δ -Gesamtschnittgrößen die Betrachtung eines einzelnen Blechs (Rechteckquerschnitt). Im Weiteren werden wieder Teilschnittgrößen (Δ -Teilschnittgrößen) gebildet und aus diesen durch Überlagerung der einzelnen Anteile die Δ -Gesamtschnittgrößen errechnet. Aus der in Abbildung 13a) dargestellten Dehnungsverteilung können nach Gleichung (4.29) die elastischen Schnittgrößen N_{Blech}^{el} und M_{Blech}^{el} errechnet werden. Geht der Dehnungsverlauf im

Blech – wie es in Abbildung 13a) der Fall ist – aber über die Fließdehnung ε_y hinaus, stellen die elastischen Schnittgrößen nicht die tatsächlich wirkenden dar. Die über die Fließdehnung beanspruchten Fasern des Blechs nehmen aber nur die Fließspannung f_y und nicht die aus dem *Hooke'schen* Gesetz errechenbare Spannung auf. Die in Abbildung 13b) schraffiert dargestellte Spannungsverteilung wird bei der Ermittlung der elastischen Schnittgrößen (SG^{el}) zugrunde gelegt, während tatsächlich aber nur die schraffiert dargestellte Spannungsverteilung in Abbildung 13c) auftritt (SG). Die Differenz aus elastischer und tatsächlich wirkender Schnittgröße wird als Δ -Schnittgröße bezeichnet; die für die Δ -Schnittgrößen (ΔSG) relevante Spannungsverteilung ist in Abbildung 13d) schraffiert angegeben. Die Dehnungs- und Spannungsverteilungen in Abbildung 13 sind ohne Vorzeichen angegeben; sie können sowohl Zug- als auch Druckspannungen darstellen.

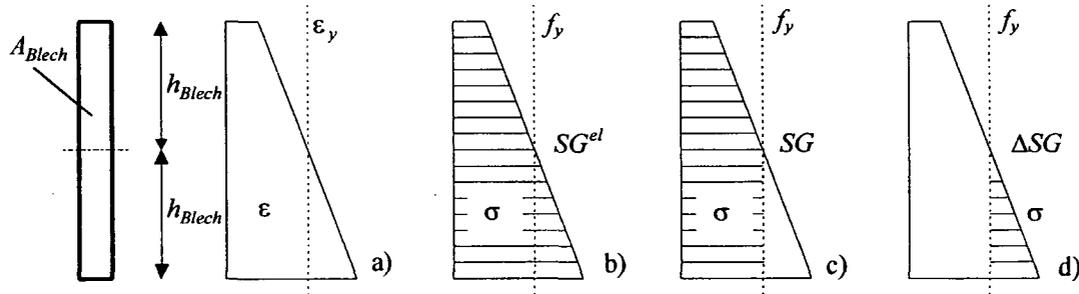


Abbildung 13: Spannungsverteilungen für SG^{el} , SG und ΔSG

Die Δ -Schnittgrößen des Einzelblechs werden in Anlehnung an die elastischen Schnittgrößen mit ΔN_{Blech} und ΔM_{Blech} bezeichnet. Das Biegemoment ΔM_{Blech} ist dabei auf die in Abbildung 13 links eingezeichnete flächenhalbierende des Blechs bezogen. Die Normalkraft ΔN_{Blech} wird als Zugkraft positiv definiert. Da die Bestimmung der Δ -Schnittgrößen am Einzelblech je nach Spannungsverlauf mit unterschiedlichen Formeln erfolgen muss, sind in Tabelle 3 die notwendigen Fallunterscheidungen und Formeln zur Ermittlung von ΔN_{Blech} und ΔM_{Blech} zusammengestellt. Des Weiteren sind noch die Vektoren $\Delta \mathbf{M}_{Blech,j}$ und $\Delta \mathbf{N}_{Blech,i}$, die die Ableitungen der Δ -Schnittgrößen nach den vier Unbekannten des Querschnitts beinhalten, angegeben. Sie werden für die in Kapitel 4.9.4 gezeigte mathematische Lösung der Gleichungssysteme benötigt. Nach Berechnung der Dehnungen an den Blechendenpunkten werden die Bedingungen in der linken Spalte der Tabelle 3 überprüft. Sind die Bedingungen für einen der sechs Fälle erfüllt, müssen die in der rechten Spalte angegebenen Formeln angewendet werden. Für den Fall, dass die Bedingungen zweier Fälle erfüllt sind, muss superponiert werden.

		$\varepsilon_{...m} = \varepsilon_{...}^T \cdot \varepsilon; \quad \kappa_{...} = \kappa_{...}^T \cdot \varepsilon$		
		$\varepsilon_{...l} = \varepsilon_{...m} + h \kappa_{...}; \quad \varepsilon_{...r} = \varepsilon_{...m} - h \kappa_{...}$		
		$\varepsilon_{...j}$ und $\kappa_{...j}$ nach Gleichungen (4.10) bis (4.12)		
Bedingung	Verzerrungen	C_1	C_2	Formeln für $\Delta N_{...}$, $\Delta M_{...}$, $\Delta N_{...j}$ und $\Delta M_{...j}$
$\varepsilon_{...l} > \varepsilon_y$ $\varepsilon_{...r} > \varepsilon_y$		+1		$\Delta N_{...} = EA \varepsilon_{...m} - EA \varepsilon_y C_1$ $\Delta M_{...} = \frac{1}{3} EA h^2 \kappa_{...}$
$\varepsilon_{...l} < -\varepsilon_y$ $\varepsilon_{...r} < -\varepsilon_y$		-1		$\Delta N_{...j} = EA \varepsilon_{...j}$ $\Delta M_{...j} = \frac{1}{3} EA h^2 \kappa_{...j}$
$\varepsilon_{...l} > \varepsilon_y$ $\varepsilon_{...r} \leq \varepsilon_y$		+1	+1	$\Delta \varepsilon_{...} = \varepsilon_{...m} + C_2 \kappa_{...} h - \varepsilon_y C_1; \quad \alpha_{...} = \frac{\Delta \varepsilon_{...}}{C_2 \kappa_{...} h}$ $\Delta \varepsilon_{...j} = \varepsilon_{...j} + C_2 h \kappa_{...j}$
$\varepsilon_{...l} \leq \varepsilon_y$ $\varepsilon_{...r} > \varepsilon_y$		+1	-1	$\Delta N_{...} = \frac{1}{4} \alpha^2 EA \kappa_{...} h C_2$ $\Delta M_{...} = \Delta N_{...} h \left(1 - \frac{\alpha}{3} \right) C_2$
$\varepsilon_{...l} < -\varepsilon_y$ $\varepsilon_{...r} \geq -\varepsilon_y$		-1	+1	$\Delta N_{...j} = \frac{1}{2} \alpha EA \Delta \varepsilon_{...j} - \frac{1}{4} \alpha^2 EA h C_2 \Delta \kappa_{...j}$ $\Delta M_{...j} = \frac{1}{4} \alpha EA h C_2 (2 - \alpha) \Delta \varepsilon_{...j} -$
$\varepsilon_{...l} \geq -\varepsilon_y$ $\varepsilon_{...r} < -\varepsilon_y$		-1	-1	$-\frac{1}{12} \alpha^2 EA h^2 C_2^2 (3 - 2\alpha) \Delta \kappa_{...j}$

Tabelle 3: Ermittlung der Δ -Schnittgrößen und deren Ableitungen am Einzelblech

Nach Anwendung der Tabelle 3 auf Steg, Ober- und Untergurt kennt man die Δ -Teilschnittgrößen des Querschnitts. Aus diesen lassen sich, analog zu der Beziehung für die elastischen Teil- und Gesamtschnittgrößen in (4.39), die Δ -Gesamtschnittgrößen errechnen.

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_y \\ \Delta M_z \\ \Delta M_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta N_S \\ \Delta M_S \\ \Delta N_O \\ \Delta M_{O,m} \\ \Delta N_U \\ \Delta M_{U,m} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Sind die Δ -Schnittgrößen bekannt, liefern die Gleichungen (4.67) bis (4.69) ein 3×3 -Gleichungssystem zur Bestimmung der Unbekannten ε_s , κ_y und κ_z in jedem Berechnungsquerschnitt r :

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \end{bmatrix} \kappa_\omega - \begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_y \\ \Delta M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{Last} \\ M_y^{Last} \\ M_z^{Last} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Die Δ -Schnittgrößen gehen bei der Lösung – so wie die Wölbverzerrung κ_ω – in jedem Gesamtiterationsschritt als bekannte Größen ein. Ihr Wert wird gleich dem Wert aus dem vorhergehenden Iterationsschritt gesetzt. Die Gleichung (4.70) unterscheidet sich von der entsprechenden Gleichung nach Elastizitätstheorie lediglich durch den Term ΔM_{xx} . Der Relativedrehwinkel $(\vartheta - \vartheta_0)$ kann nach wie vor nach Gleichung (4.64) ermittelt werden. Alternativ ist auch eine Berechnung mit der in [15] angegebenen Formel

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{1}{GI_T} \left(\int_0^x M_x dx - M_{xx} + M_{xx,0} \right) \quad (4.73)$$

möglich. Die Ausgangsgleichung für das Gleichungssystem zur Bestimmung der Wölbverzerrungen in den Berechnungsquerschnitten nach Fließzonentheorie lautet dann:

$$GI_T \int_0^x \int_0^x -\kappa_\omega dx dx + Eb_{44} \kappa_\omega = \int_0^x M_x^{Last} dx - Eb_{41} \varepsilon_s - Eb_{42} \kappa_y - Eb_{43} \kappa_z + \Delta M_{xx} \quad (4.74)$$

Die Lösung der Gleichungssysteme aus (4.72) und (4.74) wird in Kapitel 4.9.4 gezeigt. Die in diesem Kapitel angegebenen Gleichungen stellen bei Vernachlässigung der Δ -Schnittgrößen die Bestimmungsgleichungen nach Elastizitätstheorie aus Kapitel 4.6 dar. Die Elastizitätstheorie ist damit als Sonderfall der Fließzonentheorie in den Gleichungen dieses Kapitels eingeschlossen.

4.8 Berücksichtigung von Schubspannungen

4.8.1 Allgemeines

In Kapitel 4.7 werden die Δ -Schnittgrößen für die Gleichungssysteme nach Fließzonentheorie anhand der Dehnungen, die über die Fließdehnung ε_y hinausgehen, berechnet. Zur Beurteilung ob das Material fließt, werden dabei ausschließlich die Normalspannungen mit der Streckgrenze f_y (oder die Dehnungen mit der Fließdehnung ε_y) verglichen; bei diesem Vorgehen wird praktisch von einem einaxialen Spannungszustand (nur σ -Spannungen) in jeder Stabfaser ausgegangen. Die in der Stabtheorie auftretenden Schubspannungen werden dadurch vernachlässigt. Um den tatsächlichen Spannungszustand (σ - und τ -Spannungen) im Stab bezüglich Fließens beurteilen zu können, muss man sich sogenannter Anstrengungshypothesen bedienen. Ziel dieser Hypothesen ist es, einen Vergleich zwischen dem mechanischen Zustand in einem Körperpunkt und dem mechanischen Zustand bei Fließ- bzw. Bruch eintritt eines einaxial beanspruchten Probestabes herzustellen. Je nach Beschaffenheit des Werkstoffes wird eine unterschiedliche Zahl an Parametern zur Erstellung einer solchen Hypothese benötigt. Für zähe Materialien bezeichnet man die Anstrengungshypothese als Fließhypothese.

Der Vergleich einer Fließhypothese besteht aus der Gegenüberstellung einer sogenannten Vergleichsspannung σ_V , die aus dem Spannungszustand im Körperpunkt ermittelt wird, und der Fließgrenze des Materials f_y aus einem einaxialen Versuch. Ist die Vergleichsspannung betragsmäßig kleiner als die Fließgrenze, spricht man von elastischem Materialverhalten; überschreitet die Vergleichsspannung f_y , so tritt im betrachteten Körperpunkt Fließen auf. Für Materialien, die sich unter Zug- und Druckbeanspruchung bis zur Fließgrenze gleich verhalten, reicht zur Charakterisierung des Materialverhaltens die Fließspannung f_y als einziger Parameter. Für isotrope Materialien lassen sich Fließhypothesen anschaulich im Hauptspannungsraum (gebildet durch die Koordinatenachsen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) darstellen. Eine in diesem Raum dargestellte Fließhypothese wird als Fließfläche bezeichnet. Durch den relativ einfachen Spannungszustand für den Fall Stabtheorie wird die Fließfläche zu einer Fließkurve reduziert. Die in dieser Arbeit angenommene Fließkurve ist in Abbildung 14 dargestellt.

4.8.2 Vergleichsspannung

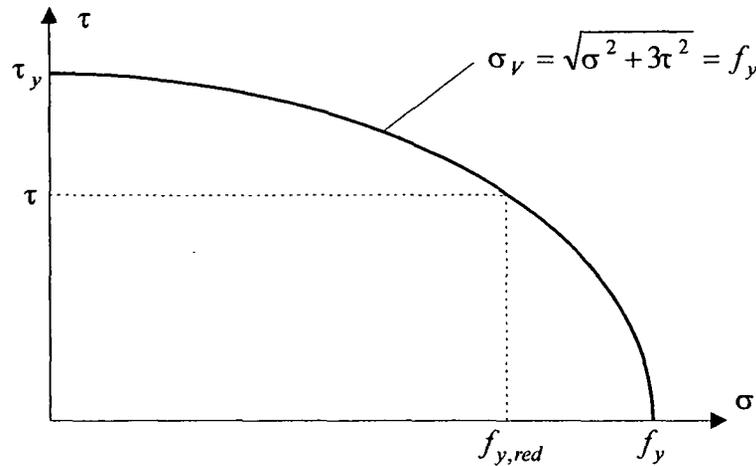
Für die Berechnung der Vergleichsspannung wird die Fließhypothese nach *von Mises* verwendet. Diese Hypothese setzt Isotropie des Werkstoffes, sowie gleiche Beträge der Fließgrenze für einaxialen Zug bzw. Druck voraus. Die Fließhypothese nach *von Mises* beruht auf der Annahme, dass bei metallischen Werkstoffen der gestaltändernde Anteil der spezifischen Verzerrungsenergie für den Fließeintritt maßgebend ist. Ausgehend von dieser Überlegung erhält man für die Vergleichsspannung σ_V unter Zugrundelegung eines Spannungszustandes nach Stabtheorie:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (4.75)$$

In [5] wird eine ausführliche Herleitung der allgemeinen Fließhypothese nach *von Mises* angegeben. Mit der Vergleichsspannung σ_V aus (4.75) kann der Einfluss auf das Materialverhalten von Normal- und Schubspannungen – wie sie im Querschnitt eines Stabes wirken – erfasst werden. Unter der Voraussetzung reiner Schubbeanspruchung erhält man mit der Normalspannung $\sigma = 0$ und der Vergleichsspannung σ_V gleich der Streckgrenze f_y aus (4.75) die Fließschubspannung τ_y zu

$$\tau_y = \frac{f_y}{\sqrt{3}} \quad (4.76)$$

Zur Veranschaulichung der Vergleichsspannung σ_V aus Gleichung (4.75) und des Einflusses der Normal- bzw. Schubspannungen auf diese wird in Abbildung 14 eine grafische Darstellung der Vergleichsspannung σ_V im ersten Quadranten der σ - τ -Ebene gezeigt. Für die anderen drei Quadranten der σ - τ -Ebene ergeben sich analoge Verläufe. Die Linie in Form einer Ellipse (in Abbildung 14 Viertelellipse) stellt alle σ - τ -Kombinationen, für die die Vergleichsspannung σ_V den Wert der Fließdehnung f_y annimmt, dar. Diese Linie ist die Fließkurve der Anstrengungshypothese nach *von Mises*. Alle Kombinationen von σ und τ , die innerhalb dieser Ellipse liegen, stellen einen elastischen Spannungszustand dar; alle auf der Ellipse liegenden Kombinationen beanspruchen das Material plastisch.

Abbildung 14: Vergleichsspannung σ_v

Zur Berücksichtigung der Schubspannungen in der Berechnung wird die Fließgrenze f_y auf eine so genannte reduzierte Fließgrenze $f_{y,red}$ abgemindert. Bei dieser Vorgehensweise müssen zunächst die Schubspannungen bestimmt werden; diese werden dann in die Formel der Vergleichsspannung aus (4.75) eingesetzt und nach σ aufgelöst. Damit ergibt sich die reduzierte Fließspannung:

$$f_{y,red} = f_y \sqrt{1 - (\tau/\tau_y)^2} \quad (4.77)$$

Die Reduktion der Fließspannung geht einher mit einer Reduktion der Fließdehnung von ε_y auf $\varepsilon_{y,red}$:

$$\varepsilon_{y,red} = f_{y,red} / E \quad (4.78)$$

In Abbildung 14 ist die Vorgehensweise zur Ermittlung einer reduzierten Fließspannung grafisch dargestellt. Es ist leicht zu erkennen, dass erst größere Schubspannungen zu nennenswerten Abminderungen der Fließspannung führen.

4.8.3 Anwendung auf den Dreiblechquerschnitt

Bei der Anwendung des in Kapitel 4.8.2 vorgestellten Vorgehens zur Abminderung der Fließgrenze wird der Gesamtquerschnitt in seine Einzelbleche zerlegt. Ein einzelnes Blech des Querschnitts wird im Allgemeinen durch Normalkraft, Biegemoment, Querkraft und ein (primäres) Torsionsmoment (N_{Blech} , M_{Blech} , Q_{Blech} und $M_{p,Blech}$) beansprucht. Die Schnittgrößen Q_{Blech} und $M_{p,Blech}$ erzeugen dabei Schub-, die Schnittgrößen N_{Blech} und M_{Blech} Normalspan-

nungen. Die Schubspannungen hervorrufenden Schnittgrößen Q_{Blech} und $M_{p,Blech}$ resultieren aus den Gesamtschnittgrößen $M_{x,p}$, $M_{x,s}$ und Q_y bzw. Q_z . Während $M_{p,Blech}$ nur aus dem primären Gesamttorsionsmoment $M_{x,p}$ entsteht, werden die Querkräfte der Gurtbleche nicht nur aus den Querkräften Q_y und Q_z , sondern auch aus dem sekundären Torsionsmoment $M_{x,s}$ gebildet. Auf die Bestimmung der Blechschnittgrößen aus den Gesamtschnittgrößen wird etwas später in diesem Kapitel eingegangen.

Da in dieser Arbeit vorwiegend biegebeanspruchte Systeme betrachtet werden, muss zur Abschätzung der Auswirkung der Schubspannung auf das Tragverhalten keine genaue Berechnung der Schubspannungen erfolgen. Die Berücksichtigung der Schubspannungen soll lediglich die Abminderung der Tragfähigkeit eines aufgrund der Biegebeanspruchung versagenden Systems wiedergeben. Eine Berechnung der Tragfähigkeit, die allein durch Schubspannungen erreicht wird, ist nicht Ziel dieser Arbeit. Die für die Abminderung der Fließgrenze angesetzte Schubspannungsverteilung muss also nicht der realen entsprechen; es wird daher von einer konstanten Schubspannungsverteilung aus Q_{Blech} und $M_{p,Blech}$ über die gesamte Blechfläche ausgegangen. Diese Verteilung hat den Vorteil, dass für alle Fasern des Blechs die Fließspannung um denselben Betrag ermäßigt wird, was eine einfache Umsetzung in der Berechnung und der weiteren Verwendung der Tabelle 3 bedeutet. Der so ermittelte Schubspannungszustand, der nicht den tatsächlichen widerspiegelt, ist eine gute Annahme zur Berücksichtigung der Interaktion zwischen Normal- und Schubspannungen. Diese Vorgehensweise entspricht der von Heymann/Datton [2], die anhand von Versuchsergebnissen validiert wurde. Die Gleichungssysteme der Bestimmungsgleichungen in Kapitel 4.7 werden durch die Berücksichtigung der Schubspannungen nicht verändert. Der einzige Unterschied in der Berechnung ist, dass die in Kapitel 4.7 mit der Fließdehnung ε_y ermittelten Δ -Schnittgrößen nun mit der reduzierten Fließdehnung $\varepsilon_{y,red}$ berechnet werden.

Ziel der folgenden Herleitung ist es, eine konstante Schubspannungsverteilung für einen Rechteckquerschnitt (Blech) zu berechnen, die die Gleichgewichtsbedingungen für die Querkraft Q_{Blech} und das Torsionsmoment $M_{p,Blech}$ erfüllt. Der betrachtete Rechteckquerschnitt hat die Höhe $2h$ und die Dicke t . Ausgangspunkt dafür ist das so genannte Hohlkastenmodell. Dabei wird das Blech gedanklich in einen das Torsionsmoment aufnehmenden äußeren Hohlkasten und ein die Querkraft aufnehmendes inneres Rechteck aufgeteilt. Die zugehörigen Spannungsverteilungen sind in Abbildung 15 links und Mitte dargestellt. Überlagert man die Schubspannungen aus dem Torsionsmoment mit jenen aus der Querkraft, ergibt sich der in Abbildung 15 rechts dargestellte Schubspannungszustand.

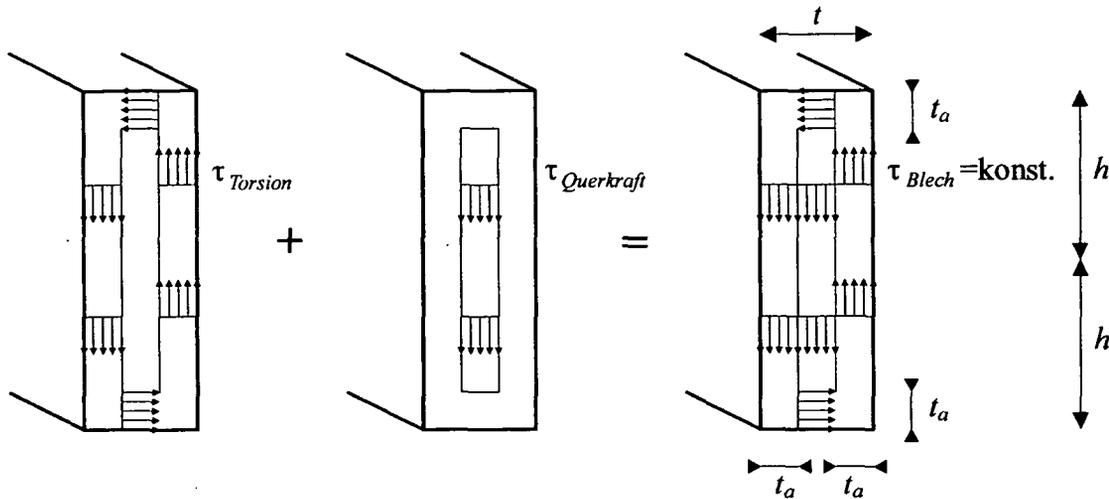


Abbildung 15: Hohlkastenmodell für konstante Schubspannungen in einem Blech

In Abbildung 15 links ist der Schubspannungsverlauf zufolge eines Torsionsmoments $M_{p,Blech}$ dargestellt. Im gedanklichen Hohlkasten mit der Wandstärke t_a wirken die Schubspannungen $\tau_{Torsion}$. Das Torsionsmoment $M_{p,Blech}$ lässt sich aus den Schubspannungen $\tau_{Torsion}$ mittels der Formel

$$M_{p,Blech} = 2t_a(t-t_a)(2h-t_a)\tau_{Torsion} \quad (4.79)$$

errechnen. Durch Umformung der Gleichung (4.79) und Ersetzen des Terms $(2h-t_a)$ durch $(2h-t/2)$, was bei den betrachteten $2h/t$ -Verhältnissen gerechtfertigt ist, erhält man die Torsionsschubspannung $\tau_{Torsion}$ zu:

$$\tau_{Torsion} = \frac{M_{p,Blech}}{t_a(t-t_a)(4h-t)} \quad (4.80)$$

Die in Abbildung 15 Mitte dargestellten Schubspannungen im inneren Rechteck des Hohlkastens werden zur Abtragung der Querkraft herangezogen. Der Zusammenhang zwischen den Schubspannungen $\tau_{Querkraft}$ und der Querkraft Q_{Blech} ergibt sich zu

$$Q_{Blech} = (t-2t_a)(2h-2t_a)\tau_{Querkraft} \quad (4.81)$$

Durch Umformen der Gleichung (4.81) und Überschätzung der Fläche des Rechtecks durch Ersetzen des Terms $(2h-2t_a)$ durch $2h$ erhält man für die Wandstärke des Hohlkastens:

$$t_a = \frac{t}{2} - \frac{Q_{Blech}}{4h\tau_{Querkraft}} \quad (4.82)$$

Um den gewünschten konstanten Schubspannungszustand aus Querkraft und Torsionsmoment zu erhalten, muss die Bedingung

$$\tau_{Torsion} = \tau_{Querkraft} = \tau_{Blech} \quad (4.83)$$

erfüllt sein. Durch Einsetzen der Gleichung (4.82) in (4.80) und Berücksichtigung der Gleichung (4.83) ergibt sich eine quadratische Gleichung für τ_{Blech} . Die Lösung dieser Gleichung ergibt die gesuchte, über den Blechquerschnitt konstante Schubspannung τ_{Blech} :

$$\tau_{Blech} = \frac{2|M_{p,Blech}|}{t^2(4h-t)} + \sqrt{\left(\frac{2M_{p,Blech}}{t^2(4h-t)}\right)^2 + \left(\frac{Q_{Blech}}{2ht}\right)^2} \quad (4.84)$$

Ist die aus Gleichung (4.84) berechnete Schubspannung τ_{Blech} kleiner als die in (4.76) angegeben Fließschubspannung τ_y , kann mit ihr die reduzierte Fließspannung $f_{y,red}$ nach Gleichung (4.77) berechnet werden. Unter Annahme der reduzierten Fließspannung $f_{y,red}$ müssen dann die Normalspannungen erzeugenden Schnittgrößen (N_{Blech} und M_{Blech}) aufgenommen werden. Wird die Fließschubspannung überschritten, kann das Blech die Schnittgrößen Q_{Blech} und $M_{p,Blech}$ nicht aufnehmen.

Zur Berechnung des Schubspannungszustandes nach Gleichung (4.84) müssen noch die Schnittgrößen Q_{Blech} und $M_{p,Blech}$ für jedes der drei Bleche ermittelt werden. Die für die Berechnung aller Q_{Blech} relevanten Gesamtschnittgrößen sind die statisch bestimmten Querkräfte Q_y^{Last} und Q_z^{Last} sowie das aus der Berechnung bekannte sekundäre Torsionsmoment $M_{x,s}$. Für die Fließzonentheorie muss die Gleichung (4.38) um die entsprechende Δ -Schnittgröße erweitert werden:

$$M_{x,s} = (M_{xx}^{el-\Delta})' = (M_{xx}^{el})' - \Delta M'_{xx} \quad (4.85)$$

Die Querkraft Q_z^{Last} wird zur Gänze durch das Stegblech aufgenommen:

$$Q_s = Q_z^{Last} \quad (4.86)$$

Zur Ermittlung der Gurtquerkräfte werden zwei Bedingungen ausgenützt: einerseits ergibt die Summe der Querkräfte der Gurte die Querkraft des Gesamtquerschnitts Q_y^{Last} ; andererseits bilden sie das sekundäre Torsionsmoment $M_{x,s}$. Aus diesen beiden Bedingungen erhält man ein Gleichungssystem für die Bestimmung der Gurtquerkräfte Q_O und Q_U :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_o \\ Q_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_y^{Last} \\ M_{x,s}/a \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Das primäre Torsionsmoment wird prinzipiell wie bei Elastizitätstheorie aufgeteilt: Das Torsionsmoment für ein Blech ergibt sich proportional zum Verhältnis der Torsionssteifigkeiten des Einzelblechs und des Gesamtquerschnitts zu:

$$M_{p,Blech} = \frac{I_{T,Blech}}{I_T} M_{x,p} \quad (4.88)$$

Für den Fall, dass durch diese Aufteilung des primären Torsionsmomentes $M_{x,p}$ in Gleichung (4.88) ein Querschnittsblech über sein plastisches Torsionsmoment belastet würde, ein Fall der in dieser Arbeit nicht zur Anwendung kommt, kann die Aufteilung proportional zum Verhältnis der plastischen Torsionsmomente von Einzelblech und Gesamtquerschnitt vorgenommen werden.

$$M_{p,Blech} = \frac{M_{p,pl,Blech}}{M_{p,pl}} M_{x,p} \quad (4.89)$$

Dabei ist zu beachten, dass das plastische Torsionsmoment $M_{p,pl,Blech}$ für ein Blech unter Berücksichtigung der aufzunehmenden Querkraft nach Gleichung (4.80) errechnet wird.

$$M_{p,pl,Blech} = t_a(t - t_a)(4h - t)\tau_y \quad (4.90)$$

mit

$$t_a = \frac{t}{2} - \frac{Q_{Blech}}{4h\tau_y} \quad (4.91)$$

Das plastische Torsionsmoment des Gesamtquerschnitts $M_{p,pl}$ in (4.89) wird durch Summation der plastischen Torsionsmomente der einzelnen Bleche nach (4.90) erhalten.

Die unterschiedlichen Aufteilungen des primären Torsionsmoments in den Gleichungen (4.88) und (4.89) gewährleisten, dass bei Versagen des Querschnitts aufgrund von Schubbeanspruchung allein der Querschnitt voll ausgenutzt werden könnte. In dieser Arbeit steht das Versagen biegebeanspruchter Systeme, bei denen der Einfluss der Schubspannungen berücksichtigt wird, im Vordergrund. Das Versagen allein durch Schubbeanspruchung wird deswegen hier nicht weiter behandelt; eingehende Untersuchungen zur Querschnittstragfähigkeit bei ausschließlicher Beanspruchung durch Schubspannungen wurden in [1] und [16] veröffentlicht.

4.9 Mathematische Grundlagen

4.9.1 Numerische Integration

Die numerische Integration des Integrals in Gleichung (4.74) wird mittels so genannter Integrationsmatrizen für die ein- und zweifache Integration aus [14] durchgeführt. Die Matrix für die einfache Integration wird mit η , die Matrix für die zweifache Integration mit χ bezeichnet. Als die zu integrierende Funktion wird in der Folge die allgemeine Funktion f'' angenommen. Für die Funktion f'' wird vorausgesetzt, dass sie innerhalb der Integrationsgrenzen keinen Knick oder Sprung aufweist. Die Integrationskonstanten werden bei den Integrationsmatrizen zu 0 angenommen; für die Berechnung müssen sie den auftretenden Randbedingungen angepasst werden. Für die Integration wird für die zu integrierende Funktion f'' im Bereich zweier Abschnitte eine quadratische Parabel angenommen. Die so erhaltenen Matrizen werden entsprechend der zugrunde gelegten Funktionen mit η^{par} und χ^{par} bezeichnet. In [14] werden die Integrationsmatrizen zur Bestimmung von Biegemomenten und Querkräften eingesetzt. Ausgangspunkt ist dabei die Differentialbeziehung für Biegemoment, Querkraft und Belastung:

$$M'' = Q' = -q \quad (4.92)$$

Eine formal analoge Differentialbeziehung kann man unter Berücksichtigung der kinematischen Beziehungen aus Kapitel 4.3 für den Torsionsdrehwinkel ϑ anschreiben:

$$\vartheta'' = (\vartheta')' = -\kappa_\omega \quad (4.93)$$

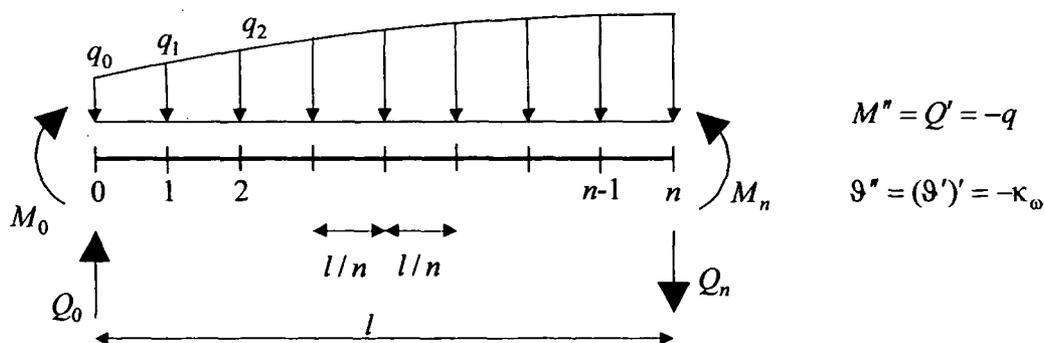


Abbildung 16: Numerische Integration für einen allgemeinen Stab der Länge l

In Abbildung 16 wird die Beziehung für die Streckenlast q , die Querkraft Q und das Moment M an einem allgemeinem Stab der Länge l gezeigt. Aus Gründen der Anschaulichkeit wird in Abbildung 16 die Differentialbeziehung für das Biegemoment und nicht für die Verdrehung ϑ dargestellt. Durch die vollständige Analogie der Beziehungen (4.92) und (4.93) können die Integrationsmatrizen aus [14] übernommen werden. Für die numerische Integration von f'' wird der Stab in n Abschnitte gleicher Länge unterteilt. Man erhält so die in Abbildung 16 dargestellten $n+1$ äquidistanten Stützstellen, deren Werte f_r'' (mit $r = 0..n$) bei der numerischen Integration berücksichtigt werden. Um die Werte der einfachen Integration der Funktion f'' an den Stützstellen zu erhalten, muss zunächst die Matrix η^{par} mit dem aus den Stützstellenwerten f_r'' gebildeten Vektor \mathbf{f}'' multipliziert werden. Nach Multiplikation des Ergebnisvektors mit dem Faktor c_η erhält man die Werte der einfach integrierten Funktion f' an den Stützstellen als Vektor \mathbf{f}' .

$$\mathbf{f}' = \begin{bmatrix} 0 \\ \int_0^1 f'' dx \\ 0 \\ \int_0^1 f'' dx \\ \dots \\ \int_0^n f'' dx \\ 0 \end{bmatrix} = c_\eta \eta^{par} \cdot \mathbf{f}'' \quad (4.94)$$

Die Integrationskonstante wird dabei nicht berücksichtigt. Analoges Vorgehen mit der Matrix χ^{par} und der Konstanten c_χ liefert den Vektor der Werte der zweifach integrierten Funktion \mathbf{f} ; wie bei der einfachen Integration sind auch hier beide Integrationskonstanten 0.

$$\mathbf{f}'' = \begin{bmatrix} 00 \\ \iint f'' dx dx \\ 00 \\ \iint f'' dx dx \\ \dots \\ \iint f'' dx dx \\ 00 \end{bmatrix} = c_\chi \chi^{par} \cdot \mathbf{f}'' \quad (4.95)$$

Für die Matrix η^{par} für die einfache Integration einer allgemeinen Funktion f'' gelten folgende Bildungsgesetze:

$$\bar{f}'_0 = 0; \bar{f}'_1 = 10f''_0 + 16f''_1 - 2f''_2; \bar{f}'_2 = 8f''_0 + 32f''_1 + 8f''_2 \quad (4.96)$$

$$\text{für } r > 2: \bar{f}'_r = \bar{f}'_{r-1} + f''_{r-3} - 5f''_{r-2} + 19f''_{r-1} + 9f''_r \quad (4.97)$$

$$f'_r = c_\eta \bar{f}'_r + f'_0 \quad \text{mit } c_\eta = 1/24 \cdot l/n \quad (4.98)$$

Damit ergibt sich die beliebig große $(n+1) \times (n+1)$ Matrix η^{par} :

$$\eta^{par} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 10 & 16 & -2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 8 & 32 & 8 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 9 & 27 & 27 & 9 & 0 & 0 & \dots \\ 9 & 28 & 22 & 28 & 9 & 0 & \dots \\ 9 & 28 & 23 & 23 & 28 & 9 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

Unter Verwendung der Matrix η^{par} für die einfache Integration gilt für die zweifache Integration:

$$\bar{f}_0 = 0; \bar{f}_1 = 7f_0'' + 6f_1'' - f_2''; \bar{f}_2 = 16f_0'' + 32f_1'' \quad (4.100)$$

$$\text{für } r > 2: \bar{f}_r = \bar{f}_{r-1} + \bar{f}_r' + f_{r-2}'' - 6f_{r-1}'' - 7f_r'' \quad (4.101)$$

$$f_r = c_\chi \bar{f}_r + x \cdot f_0' + f_0 \quad \text{mit } c_\chi = 1/24 \cdot (l/n)^2 \quad (4.102)$$

Damit ergibt sich die Matrix χ^{par} zu:

$$\chi^{par} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 7 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 16 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 25 & 60 & 21 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 34 & 88 & 44 & 24 & 2 & 0 & \dots \\ 43 & 116 & 67 & 48 & 24 & 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

Als Alternative zu den in (4.99) und (4.103) angegebenen Integrationsmatrizen, die als annähernde Funktionen quadratische Parabeln verwenden, können auch Integrationsmatrizen, die eine lineare Verteilung zwischen den Stützstellen zugrunde legen, verwendet werden. Diese Matrizen werden mit η^{lin} und χ^{lin} bezeichnet. Für die einfache Integration ergibt sich:

$$\eta^{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 12 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 12 & 24 & 12 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 12 & 24 & 24 & 12 & 0 & 0 & \dots \\ 12 & 24 & 24 & 24 & 12 & 0 & \dots \\ 12 & 24 & 24 & 24 & 24 & 12 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

Und für die zweifache Integration gilt:

$$\chi^{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 20 & 24 & 4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 32 & 48 & 24 & 4 & 0 & 0 & \dots \\ 44 & 72 & 48 & 24 & 4 & 0 & \dots \\ 56 & 96 & 72 & 48 & 24 & 4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

Da der Aufbau dieser Integrationsmatrizen selbst erklärend ist, werden für sie keine Bildungsgesetze angegeben. Die Koeffizienten der linearen Integrationsmatrizen η^{lin} und χ^{lin} werden so gewählt, dass die Faktoren c_η und c_χ der Integrationsmatrizen η^{par} und χ^{par} aus (4.99) und (4.103) übernommen werden können und ein völlig analoges Vorgehen möglich ist. Für die numerische Integration können entweder die Integrationsmatrizen η^{par} und χ^{par} oder η^{lin} und χ^{lin} verwendet werden. Welche Integrationsmatrizen zum Einsatz kommen, ist von der Güte der Konvergenz der jeweiligen Matrizen beim betrachteten Beispiel abhängig. In Summenschreibweise ergibt sich für die allgemeinen Integrationsmatrizen mit den Integrationskonstanten f_0 und f'_0 :

$$r = 0 \dots n: f'_r = c_\eta \sum_{i=0}^n \eta_{ri} f_i'' + f'_0 \quad \text{mit } c_\eta = 1/24 \cdot (l/n) \quad (4.106)$$

$$r = 0 \dots n: f_r = c_\chi \sum_{i=0}^n \chi_{ri} f_i'' + x f'_0 + f_0 \quad \text{mit } c_\chi = 1/24 \cdot (l/n)^2 \quad (4.107)$$

Die Integrationsmatrizen werden zum einen für die Gleichung (4.74) und damit zur Bestimmung des Gleichungssystems für die Wölbverzerrungen angewendet, zum anderen, um aus den bereits ermittelten Größen κ_y , κ_z und κ_ω mit Hilfe der kinematischen Beziehungen des Kapitels 4.3 die Verformungsgrößen zu bestimmen.

4.9.2 Integrationsmatrizen für das Gleichungssystem

Für die Anwendung der Integrationsmatrizen auf die betrachteten Systeme müssen diese noch den Randbedingungen aus Tabelle 1 angepasst werden. Des Weiteren muss sichergestellt sein, dass die Voraussetzungen für die Integrationsmatrizen (bei η^{par} und χ^{par} kein Knick, kein Sprung – bei η^{lin} und χ^{lin} kein Sprung) erfüllt sind. Da jene Stelle im Feld, an der eine eventuell vorhandene Einzellast wirkt, eine Unstetigkeitsstelle darstellt, wird der Stab entsprechend

Abbildung 4 in einen linken und einen rechten Bereich (l_1, l_2) geteilt. Für beide Bereiche sind dann die zu integrierenden Funktionen stetig und die in Kapitel 4.9.1 beschriebenen Voraussetzungen der Integrationsmatrizen sind gegeben. Der linke Stabbereich (l_1) wird dabei in n_1 , der rechte (l_2) in n_2 Abschnitte unterteilt.

Zur Bestimmung des Gleichungssystems für die Wölbverzerrungen κ_ω ist es notwendig den Relativdrehwinkel $(\vartheta - \vartheta_0)$ aus Gleichung (4.64) mit Hilfe der Integrationsmatrizen durch die Wölbverzerrungen darzustellen. Dazu werden zunächst folgende Konstanten definiert:

$$c_{\eta 1} = (1/24)(l_1/n_1); \quad c_{\chi 1} = (1/24)(l_1/n_1)^2 \quad (4.108)$$

$$c_{\eta 2} = (1/24)(l_2/n_2); \quad c_{\chi 2} = (1/24)(l_2/n_2)^2 \quad (4.109)$$

Nach Anwendung der Integrationsmatrizen auf den linken und rechten Stababschnitt und Koppelung der so erhaltenen Ausdrücke erhält man für den Relativdrehwinkel $(\vartheta - \vartheta_0)$ unter Berücksichtigung der Randbedingungen für den Lagerungsfall *gabelgelagert-gabelgelagert* aus Tabelle 1 in Kapitel 3.4:

für $r = 0 \dots n_1$:

$$(\vartheta_r - \vartheta_0) = \left(\frac{1}{l} c_{\chi 1} \sum_{i=0}^{n_1} \chi_{n_1 i} \kappa_{\omega i} + \frac{l_2}{l} c_{\eta 1} \sum_{i=0}^{n_1} \eta_{n_1 i} \kappa_{\omega i} + \frac{1}{l} c_{\chi 2} \sum_{i=0}^{n_2} \chi_{n_2 i} \kappa_{\omega i} \right) \left(\frac{r}{n_1} \right) l_1 - c_{\chi 1} \sum_{i=0}^{n_1} \chi_{r i} \kappa_{\omega i} \quad (4.110)$$

für $r = n_1 + 1 \dots n$:

$$(\vartheta_r - \vartheta_0) = \vartheta_{n_1} + \left(\frac{1}{l} c_{\chi 1} \sum_{i=0}^{n_1} \chi_{n_1 i} \kappa_{\omega i} + \left(\frac{l_2}{l} - 1 \right) c_{\eta 1} \sum_{i=0}^{n_1} \eta_{n_1 i} \kappa_{\omega i} + \frac{1}{l} c_{\chi 2} \sum_{i=0}^{n_2} \chi_{n_2 i} \kappa_{\omega i} \right) \left(\frac{r - n_1}{n_2} \right) l_2 - c_{\chi 2} \sum_{i=0}^{n_2} \chi_{r i} \kappa_{\omega i} \quad (4.111)$$

Bei den Lagerungsfällen *frei-ingespannt* und *gabelgelagert-ingespannt verschieblich* ergibt sich für den Ausdruck $(\vartheta - \vartheta_0)$:

für $r = 0 \dots n_1$:

$$(\vartheta_r - \vartheta_0) = \left(c_{\eta 2} \sum_{i=0}^{n_2} \eta_{n_2 i} \kappa_{\omega i} + c_{\eta 1} \sum_{i=0}^{n_1} \eta_{n_1 i} \kappa_{\omega i} \right) \left(\frac{r}{n_1} \right) l_1 - c_{\chi 1} \sum_{i=0}^{n_1} \chi_{r i} \kappa_{\omega i} \quad (4.112)$$

für $r = n_1 + 1 \dots n$:

$$(\vartheta_r - \vartheta_0) = \vartheta_{n_1} + c_{\eta 2} \sum_{i=0}^{n_2} \eta_{n_2 i} \kappa_{\omega i} \left(\frac{r - n_1}{n_2} \right) l_2 - c_{\chi 2} \sum_{i=0}^{n_2} \chi_{r i} \kappa_{\omega i} \quad (4.113)$$

$$r = 0 \dots n: f'_r = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}|_0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}|_1 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x}|_n \end{bmatrix} = c_\rho \sum_{i=0}^n \rho_n f_i \quad \text{mit } c_\rho = (1/2)(n/l) \quad (4.116)$$

Wie bei den Integrationsmatrizen ist eine Anwendung der Differentiationsmatrix ρ nur für stetige Funktionen zulässig. Die Differentiationsmatrix ρ und die Konstante c_ρ müssen demnach bei Auftreten einer Unstetigkeitsstelle für den linken und rechten Teilbereich des Stabes separat angewendet werden.

4.9.4 Lösung der Gleichungssysteme

Die in Kapitel 4.7 aus den Bestimmungsgleichungen hergeleiteten Gleichungssysteme für die Berechnungsquerschnitte r bzw. die Ausgangsgleichungen für das Gleichungssystem zur Bestimmung der Wölbverzerrungen nach Plastizitätstheorie werden in diesem Kapitel in der für die Lösung erforderlichen Form angegeben. Die Lösung erfolgt mit dem Iterationsverfahren nach *Newton-Raphson*. Die in diesem Kapitel behandelten Gleichungssysteme nach Plastizitätstheorie stellen lediglich eine Erweiterung der Gleichungssysteme nach Elastizitätstheorie dar; die Erweiterung ergibt sich aus dem Auftreten der in Kapitel 4.7 angegebenen Δ -Schnittgrößen, die durch das Überschreiten der Fließdehnung bzw. reduzierten Fließdehnung des Materials hervorgerufen werden. Bei Einwirkungen, die rein elastisches Materialverhalten hervorrufen, verschwinden die Δ -Schnittgrößen und die Gleichungssysteme der Plastizitätstheorie gehen in die der Elastizitätstheorie über. Es muss zwischen zwei Arten von Gleichungssystemen unterschieden werden: Zum einen ergibt sich für jeden Berechnungsquerschnitt r ein Gleichungssystem zur Bestimmung von ε_{Sr} , κ_{yr} und κ_{zr} :

$$r = 0 \dots n: \begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{Sr} \\ \kappa_{yr} \\ \kappa_{zr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \end{bmatrix} \kappa_{\omega r} - \begin{bmatrix} \Delta N_r \\ \Delta M_{yr} \\ \Delta M_{zr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_r^{Last} \\ M_{yr}^{Last} \\ M_{zr}^{Last} \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

Zum anderen erhält man aus der Bestimmungsgleichung für die Wölbverzerrungen aus (4.74) und unter Berücksichtigung der Integrationsmatrizen aus Kapitel 4.9.2 ein $(n+1) \times (n+1)$ -Gleichungssystem für die Unbekannten κ_ω :

für $r = 0 \dots n$:

$$GI_T \sum_{i=0}^n di_{r,i} \kappa_{\omega_i} + Eb_{44} \kappa_{\omega_r} = \int_0^x M_x^{Last} dx - Eb_{41} \varepsilon_{S_r} - Eb_{42} \kappa_{y_r} - Eb_{43} \kappa_{z_r} + \Delta M_{xx_r} \quad (4.118)$$

Das Gleichungssystem in (4.117) kann als Gleichungssystem für den Querschnitt, das in (4.118) als Gleichungssystem für den Stab bezeichnet werden. Da die Gleichungssysteme in (4.117) und (4.118) durch die darin auftretenden Unbekannten voneinander abhängig sind, müssen im Iterationsprozess abwechselnd die Gleichungssysteme für alle Querschnitte und das für den Stab gelöst werden, bis bei allen ermittelten Lösungen ausreichende Genauigkeit gegeben ist.

Die Lösung der Gleichungssysteme (4.117) und (4.118) erfolgt mit dem Verfahren von *Newton-Raphson*. Zur Erläuterung des Lösungsweges sind im Folgenden die notwendigen Formeln für ein allgemeines Gleichungssystem angegeben: Es sei eine beliebige Anzahl $n+1$ von Funktionen f_r in den Unbekannten x_r , die den vorgegebenen Werten f_r^{soll} (mit $r = 0 \dots n$) entsprechen sollen, gegeben.

$$f_r(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = f_r^{soll}; \quad r = 0 \dots n \quad (4.119)$$

Bildet man das Residuum

$$R_r(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = f_r(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) - f_r^{soll}; \quad r = 0 \dots n \quad (4.120)$$

erhält man nach *Newton-Raphson* für die Verbesserung der Unbekannten x_r :

$$R_r^{alt} + \sum_{i=0}^n \frac{\partial R_r}{\partial x_i} \delta x_i = 0; \quad r = 0 \dots n \quad (4.121)$$

Aus den Gleichungen (4.119) bis (4.121) erhält man ein lineares Gleichungssystem für die Verbesserungen der Unbekannten x_r :

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial f_r}{\partial x_i} \delta x_i = f_r^{soll} - f_r; \quad r = 0 \dots n \quad (4.122)$$

Fasst man die Unbekannten x_r im Vektor \mathbf{x} und die Verbesserungen δx_r im Vektor $\delta \mathbf{x}$ zusammen, erhält man nach Lösung des Gleichungssystems in (4.122) die verbesserten Werte durch

$$\mathbf{x}^{neu} = \mathbf{x}^{alt} + \delta\mathbf{x} \quad \text{oder} \quad \text{für } r = 0 \dots n: x_r^{neu} = x_r^{alt} + \delta x_r \quad (4.123)$$

Mit den verbesserten Werten wird dieses Vorgehen so lange wiederholt bis die gewünschte Genauigkeit für den Lösungsvektors erreicht wird.

Wendet man das Verfahren von *Newton-Raphson* auf die ersten drei allgemein formulierten Bestimmungsgleichung der Plastizitätstheorie in (4.67) bis (4.69) an, erhält man für die Verbesserungen der Unbekannten jedes Berechnungsquerschnitts r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N^{el-\Delta}}{\partial \varepsilon_s} \delta \varepsilon_s + \frac{\partial N^{el-\Delta}}{\partial \kappa_y} \delta \kappa_y + \frac{\partial N^{el-\Delta}}{\partial \kappa_z} \delta \kappa_z &= N^{Last} - N^{el-\Delta} \\ \frac{\partial M_y^{el-\Delta}}{\partial \varepsilon_s} \delta \varepsilon_s + \frac{\partial M_y^{el-\Delta}}{\partial \kappa_y} \delta \kappa_y + \frac{\partial M_y^{el-\Delta}}{\partial \kappa_z} \delta \kappa_z &= M_y^{Last} - M_y^{el-\Delta} \\ \frac{\partial M_z^{el-\Delta}}{\partial \varepsilon_s} \delta \varepsilon_s + \frac{\partial M_z^{el-\Delta}}{\partial \kappa_y} \delta \kappa_y + \frac{\partial M_z^{el-\Delta}}{\partial \kappa_z} \delta \kappa_z &= M_z^{Last} - M_z^{el-\Delta} \end{aligned} \quad (4.124)$$

Für das Gleichungssystem in (4.117) ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_s \\ \delta \kappa_y \\ \delta \kappa_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta N_{, \varepsilon_s} & \Delta N_{, \kappa_y} & \Delta N_{, \kappa_z} \\ \Delta M_{y, \varepsilon_s} & \Delta M_{y, \kappa_y} & \Delta M_{y, \kappa_z} \\ \Delta M_{z, \varepsilon_s} & \Delta M_{z, \kappa_y} & \Delta M_{z, \kappa_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_s \\ \delta \kappa_y \\ \delta \kappa_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{Last} \\ M_y^{Last} \\ M_z^{Last} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N^{el-\Delta} \\ M_y^{el-\Delta} \\ M_z^{el-\Delta} \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

Auf der linken Seite von (4.125) stehen die Ableitungen der aus den Verzerrungen ermittelten Schnittgrößen ($\dots^{el-\Delta}$) nach den Unbekannten des Gleichungssystems. Die erste Matrix stellt den Anteil der elastischen Schnittgrößen dar und wird direkt aus der Matrix \mathbf{B} erhalten. Die Koeffizienten der zweiten Matrix werden aus der Tabelle 3 ermittelt. Auf der rechten Seite steht die Differenz zwischen den aus den Gleichgewichtsbedingungen berechneten (\dots^{Last}) und den aus den Verzerrungen ermittelten Schnittgrößen ($\dots^{el-\Delta}$).

Aus Gleichung (4.118) liefert das Verfahren von *Newton-Raphson* folgendes Gleichungssystem für die Verbesserungen der Wölbverzerrungen $\delta \kappa_{\omega r}$:

$$GI_T \begin{bmatrix} di_{00} + \frac{Eb_{44}}{GI_T} & di_{01} & \dots & \dots & \dots & di_{0n-1} & di_{0n} \\ d_{10} & di_{11} + \frac{Eb_{44}}{GI_T} & \dots & \dots & \dots & di_{1n-1} & di_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ di_{n-10} & di_{n-11} & \dots & \dots & \dots & di_{n-1n-1} + \frac{Eb_{44}}{GI_T} & di_{n-1n} \\ di_{n0} & di_{n1} & \dots & \dots & \dots & di_{nn-1} & di_{nn} + \frac{Eb_{44}}{GI_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\kappa_{\omega 0} \\ \delta\kappa_{\omega 1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \delta\kappa_{\omega n-1} \\ \delta\kappa_{\omega n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ R_{n-1} \\ R_n \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

mit

$$\begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ R_{n-1} \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^0 M_x^{Last} dx - Eb_{41}\varepsilon_{S0} - Eb_{42}\kappa_{y0} - Eb_{43}\kappa_{z0} + \Delta M_{xx0} - GI_T \sum_{t=0}^n (di_{0t} + \delta_{0t} \frac{Eb_{44}}{GI_T}) \kappa_{\omega t} \\ \int_0^1 M_x^{Last} dx - Eb_{41}\varepsilon_{S1} - Eb_{42}\kappa_{y1} - Eb_{43}\kappa_{z1} + \Delta M_{xx1} - GI_T \sum_{t=0}^n (di_{1t} + \delta_{1t} \frac{Eb_{44}}{GI_T}) \kappa_{\omega t} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \int_0^{n-1} M_x^{Last} dx - Eb_{41}\varepsilon_{S n-1} - Eb_{42}\kappa_{y n-1} - Eb_{43}\kappa_{z n-1} + \Delta M_{xx n-1} - GI_T \sum_{t=0}^n (di_{n-1t} + \delta_{n-1t} \frac{Eb_{44}}{GI_T}) \kappa_{\omega t} \\ \int_0^n M_x^{Last} dx - Eb_{41}\varepsilon_{Sn} - Eb_{42}\kappa_{yn} - Eb_{43}\kappa_{zn} + \Delta M_{xxn} - GI_T \sum_{t=0}^n (di_{nt} + \delta_{nt} \frac{Eb_{44}}{GI_T}) \kappa_{\omega t} \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

4.9.5 Bestimmung der Verformungsgrößen

Da die Schnittgrößen bereits als bekannt vorausgesetzt werden, müssen noch die Verformungsgrößen und die Aufteilung des Torsionsmoments ermittelt werden. Nach Bestimmung der Unbekannten mittels der Gleichungssysteme aus Kapitel 4.9.4 ist für jeden Berechnungsquerschnitt r der Vektor der vier Unbekannten ε_r und somit der Verzerrungszustand bekannt. Nachdem die Schnittgrößen bei den betrachteten Systemen schon als bekannte Größen in die Berechnung eingehen, müssen diese nicht aus den Verzerrungen bestimmt werden; lediglich die Aufteilung des Torsionsmoments M_x in primäres und sekundäres Torsionsmoment muss aus dem Verzerrungszustand abgeleitet werden. Um die Verzerrungen über die Stablänge zu beschreiben, werden die Unbekannten κ_y , κ_z und κ_ω aller $n+1$ Berechnungsquerschnitte in den Vektoren κ_y , κ_z und κ_ω zusammengefasst. Mit dieser Darstellung können durch Multi-

plikation der Vektoren κ_y , κ_z und κ_ω mit an die Randbedingungen aus Tabelle 1 angepassten Integrationsmatrizen die Verformungsgrößen in einer für die Programmierung recht günstigen Form berechnet werden. Aus den Gleichungen der kinematischen Beziehungen in Kapitel 4.3 lassen sich dann aus den Vektoren κ_y und κ_z die Querschnittsdrehwinkel um die y - und z -Achse sowie die Verschiebungen v und w bestimmen; aus der Wölbverzerrung κ_ω folgen die Verdrillung und die Verdrehung um die x -Achse.

	<i>gabelgelagert</i> <i>gabelgelagert</i>	<i>frei</i> <i>eingespannt</i>	<i>gabelgelagert</i> <i>eingespannt verschieblich</i>
int1=	int1^{g-g}	int1^{f-e}	int1^{g-ev}
int2=	int2^{g-g}	int2^{f-e}	int2^{g-ev}

Tabelle 4: Integrationsmatrizen zur Bestimmung der Verformungsgrößen

In Tabelle 4 sind die für die unterschiedlichen Randbedingungen anzuwendenden Integrationsmatrizen aufgelistet. Die Matrizen für die einfache Integration werden dabei mit **int1**, jene für die zweifache Integration mit **int2** bezeichnet. Auf die Angabe der Berechnung der Koeffizienten wird verzichtet; für die Matrix **int2** bei den Lagerungsfällen *gabelgelagert-gabelgelagert* und *gabelgelagert-eingespannt verschieblich* werden die Koeffizienten analog zu denen der Matrix **di** in Kapitel 4.9.2 gebildet.

Genau wie die Werte der Verzerrungen der Berechnungsquerschnitte werden auch die Werte der Verformungsgrößen an den Stützstellen des Stabes in Vektoren zusammengefasst. Die Vektoren der Verschiebungen v und w , sowie jener für die Verdrehung um die Stabachse ϑ können anhand der Formeln

$$v = \mathbf{int2} \cdot \kappa_z; \quad w = \mathbf{int2} \cdot \kappa_y; \quad \vartheta = \mathbf{int2} \cdot \kappa_\omega \quad (4.128)$$

berechnet werden. Für die Vektoren der abgeleiteten Verschiebungen, durch die gleichzeitig die Querschnittsdrehwinkel φ_y und φ_z aller Berechnungsquerschnitte bestimmt sind, sowie für den Vektor der Verdrillung gilt:

$$\mathbf{v}' = \text{int} \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\kappa}_z; \quad \mathbf{w}' = \text{int} \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\kappa}_y; \quad \mathcal{G}' = \text{int} \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\kappa}_\omega \quad (4.129)$$

Der Verlauf des primären Torsionsmoments kann mittels der konstitutiven Beziehung und der Verdrillung aus der dritten Gleichung in (4.129) erhalten werden. Das sekundäre Torsionsmoment kann danach aus der Differenz des Gesamttorsionsmomentes M_x und des primären Torsionsmoments $M_{x,p}$ berechnet werden. Eine andere Möglichkeit ist die Bestimmung des sekundären Torsionsmoments $M_{x,s}$ mittels der Differentiationsmatrix $\boldsymbol{\rho}$ aus dem Bimoment M_{xx} , das durch den Verzerrungszustand in jedem Berechnungsquerschnitt bekannt ist. In Vektorschreibweise ergibt sich:

$$\mathbf{M}_{x,s} = \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{M}_{xx} \quad (4.130)$$

5 Untersuchungen zur Fließzonentheorie I. Ordnung

5.1 Allgemeines

Die Berechnungen in diesem Kapitel werden mit Hilfe eines in Visual-Basic erstellten Programms, das auf der Theorie des Kapitels 4 basiert, durchgeführt. Im Zuge der, bei der Lösung der Gleichungssysteme angewendeten Iteration, wird die Belastung inkrementell gesteigert. Dieses Vorgehen liefert für jede betrachtete Laststufe Ergebnisse. Mit diesen kann die Entwicklung der Zustandsgrößen des Systems bei Laststeigerung und vor allem bei Plastizierung beobachtet werden. Zur Veranschaulichung werden die Ergebnisse in Last-Zustandsgrößen-diagrammen dargestellt. Die auf das System wirkenden Lasten werden alle mit einem gemeinsamen Lastfaktor ν ($0 \leq \nu < 1$) multipliziert. Die Laststufe bei $\nu = 1$ stellt dabei die Traglast des Systems nach Theorie I. Ordnung unter der betrachteten Einwirkungskombination dar, die mittels Interaktionsbedingungen vorweg bestimmt werden kann (sh. [10], [11], [15]). Da die Laststufe der Traglast mit dem Visual-Basic-Programm nicht berechnet werden kann ($\kappa \rightarrow \infty$), werden für die Untersuchung des Traglastzustands Laststufen, die maximal ein Promille unter der Traglast ($\nu \geq 0,999$) liegen, herangezogen.

Als erstes System wird in Kapitel 5.2 ein beidseitig gabelgelagerter I-Träger unter doppelter Biegung und Normalkraft behandelt. Das gewählte Beispiel entspricht dem Fall des „mittelschlanken“ Trägers aus [12]. In Kapitel 5.3 werden die Durchbiegungen eines beidseitig gabelgelagerten I-Trägers unter Gleich-, Teilstrecken- und Einzellast in y - und z -Richtung (Biegung um die schwache bzw. starke Achse) bei Laststeigerung bis zur Traglast untersucht. Beim Lastfall der Einzellast nimmt die Durchbiegung unter Traglast einen endlichen Wert an. Für den Wert der Durchbiegung wird eine analytische Formel angegeben. In Kapitel 5.4 wird ein beidseitig gabelgelagerter Träger mit U-Querschnitt untersucht. Als Belastungen werden eine Gleichlast und eine Einzellast nach 0,4I in z -Richtung angenommen. Die Lasten werden jeweils mit unterschiedlichen Ausmitten angesetzt, um Aussagen über den Einfluss der Torsion machen zu können. Für alle Beispiele wird ein E -Modul von 21000 kN/cm^2 und ein G -Modul von 8100 kN/cm^2 angenommen. Die Fließgrenze wird mit 24 kN/cm^2 festgesetzt. Die Ergebnisse der Kapitel 5.2 bis 5.4 entstammen Berechnungen ohne die in Kapitel 4.8 angegebene Schubberücksichtigung, da parallel durchgeführte Berechnungen mit Berücksichtigung der Schubspannungen keine signifikant veränderten Ergebnisse lieferten.

5.2 I-Träger unter doppelter Biegung und Normalkraft

In diesem Kapitel wird ein beidseitig gabelgelagerter I-Träger unter Normalkraft- und doppelter Biegebeanspruchung, wie er in [12] behandelt wird, anhand der in Kapitel 4 vorgestellten Theorie (Fließzonentheorie I. Ordnung) untersucht. Wählt man als Beispiel den in [12] als „mittelschlank“ bezeichneten Stab und die in [12] allen numerischen Berechnungen zugrunde gelegten Werte des HEB-200-Profiles, ergeben sich die Einwirkungen und Abmessungen des Systems nach Tabelle 5. Die angegebenen Einwirkungen stellen in der betrachteten Kombination die Traglast des Systems dar und werden deshalb mit dem Index ...^T versehen. Alle Lasten greifen ohne Exzentrizitäten an.

		$b_O = 0,1 \text{ m}$	$t_O = 0,015 \text{ m}$	$e_O = 0$
		$a = 0,0925 \text{ m}$	$s = 0,00978 \text{ m}$	
		$b_U = 0,1 \text{ m}$	$t_U = 0,015 \text{ m}$	$e_U = 0$
$l = 3,86 \text{ m}$	$P_x^T = -1124,64 \text{ kN}$	$q_y^T = 29,56 \text{ kN/m}$	$q_z^T = 23,14 \text{ kN/m}$	

Tabelle 5: Systembeschreibung 5.2

Für die Bestimmung der Torsionssteifigkeit GI_T wird der Drillwiderstand des Querschnitts nicht nach der Formel für dünnwandige offene Querschnitte berechnet, sondern einer Profiltabelle entnommen. Man erhält so für GI_T einen Wert von $48,2 \text{ kNm}^2$, der auch den Berechnungen in [12] zugrunde gelegt wurde. Durch die Doppelsymmetrie des Querschnitts fallen der Schubmittelpunkt, der Schwerpunkt und der Ursprung des in dieser Arbeit verwendeten Koordinatensystems (x, y, z) in einen Punkt. Die Achsen (x, y, z) entsprechen den Hauptachsen des Systems. Da die Belastungen (ohne Exzentrizitäten) im Schubmittelpunkt angreifen, erfährt der Träger keine planmäßige Torsion ($M_T \equiv M_x \equiv 0$). Die Berechnung des Systems kann aufgrund der Symmetrie am halben System mit den Lagerungsbedingungen *gabelgelagert - eingespannt verschieblich* erfolgen, was eine wesentliche Verkürzung der Rechenzeit mit sich bringt. Nach Berechnung erhält man das in Abbildung 17 dargestellte Last-Verschiebungsdiagramm für die Horizontal- und Vertikalverschiebung in Systemmitte und das in Abbildung 18 angegebene Last-Verdrehungsdiagramm für die Torsionsverdrehung ebenfalls in Systemmitte.

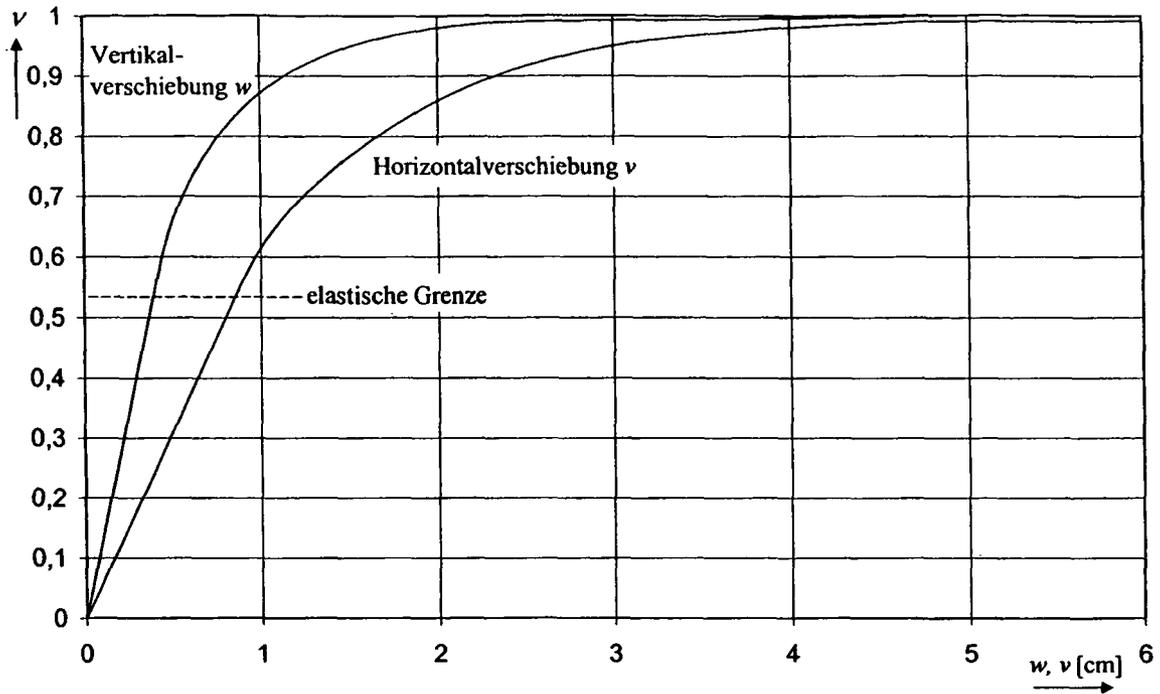


Abbildung 17: Last-Verschiebungsdiagramm 5.2

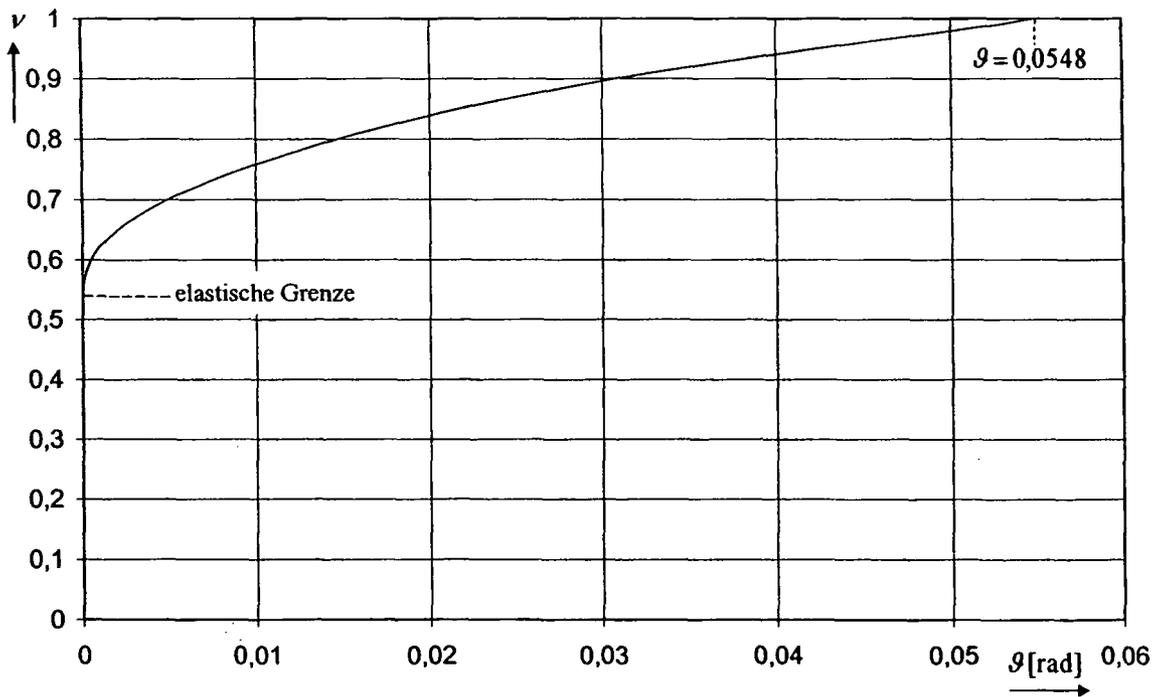


Abbildung 18: Last-Verdrehungsdiagramm 5.2

Das Last-Verschiebungsdiagramm in Abbildung 17 für die Durchbiegungen in Systemmitte zeigt, dass sowohl die Vertikalverschiebung w als auch die Horizontalverschiebung v bei Annäherung an die Traglast gegen unendlich streben. Die elastische Grenze, bis zu der die Durchbiegungen mit der Belastung in linearem Zusammenhang stehen, ist bei 53,3 % der

Traglast ($\nu = 0,533$) erreicht. Ab der elastischen Grenze wird die Steigung der Last-Verschiebungskurve, die die Systemsteifigkeit angibt, kontinuierlich geringer. Im Gegensatz zu den Verschiebungen erreicht der Torsionsdrehwinkel ϑ in Abbildung 18 unter Traglast einen endlichen Grenzwert. Nach den in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen ergibt sich ein maximaler Wert von $\vartheta = 0,0548$, der jenem in [12] entspricht. Zu Torsionsverdrehungen kommt es nach Abbildung 18 erst ab der elastischen Grenze (bei $\nu = 0,533$). Solange sich das System elastisch verhält, tritt – nachdem die Belastung im Schubmittelpunkt angreift – keine Torsion auf. Erst das Entstehen eines Bimoments M_{xx} und der damit einhergehenden Δ -Schnittgröße ΔM_{xx} bei Plastizierung ruft Torsionsgrößen hervor. Da bei Erreichen der elastischen Grenze (die Spannung in einem Punkt des Systems erreicht die Fließgrenze) in diesem Beispiel der Obergurt zu plastizieren beginnt, während der Untergurt noch elastisch ist, ergeben sich durch die Bilinearität des Materialgesetzes unterschiedliche Gurtmomente und daraus folgend auch ein Bimoment M_{xx} . Durch die Doppelintegration der Wölbverzerrungen in Gleichung (4.118), ergeben sich ab der elastischen Grenze Werte für κ_ω über die gesamte Stablänge. Aus der Ableitung des über die Stablänge veränderlichen Bimoments M_{xx} ergibt sich ein sekundäres Torsionsmoment $M_{x,s}$. Da aber nach wie vor die Gleichgewichtsbedingung $M_x \equiv 0$ gültig ist, muss neben dem sekundären Torsionsmoment auch ein primäres Torsionsmoment $M_{x,p}$ gleicher Größe, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen, wirken.

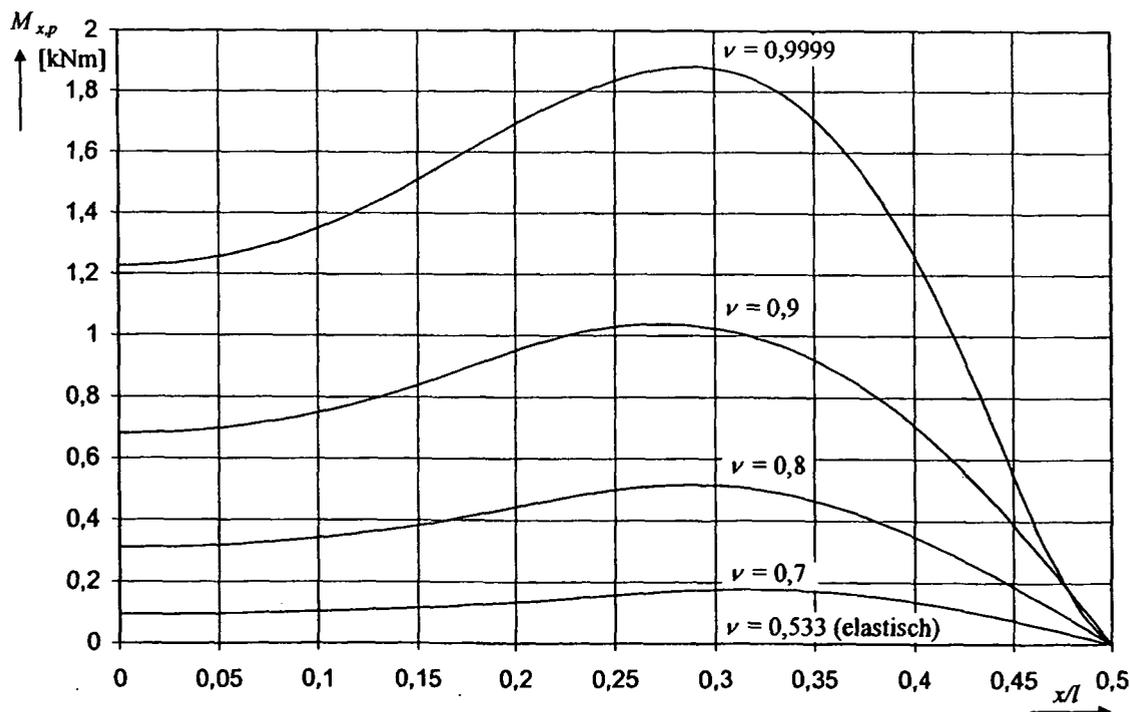


Abbildung 19: Entwicklung von $M_{x,p}$ bei Laststeigerung

Das Auftreten von Torsion bei Plastizierung des Systems, kann durch die stetige Veränderung der Lage des Schubmittelpunktes (Kraftangriffspunkt der Komponenten Q_y und Q_z , bei dem keine Verdrehung des Stabes auftritt) bei Belastungssteigerung und damit zunehmender Plastizierung erklärt werden. Der nach Elastizitätstheorie ermittelte Schubmittelpunkt verliert daher bei Plastizität seine ausgezeichnete Lage.

In Abbildung 19 wird der Verlauf des primären Torsionsmomentes $M_{x,p}$ (sekundäres Torsionsmoment analog, jedoch mit anderem Vorzeichen) bei verschiedenen Laststufen über die halbe Stablänge dargestellt. Bei der Laststufe $\nu = 0,533$ (elastische Grenze) gibt es noch keine Torsionsschnittgrößen. Erst bei Plastizierung des Systems entwickeln sich primäre und sekundäre Torsionsmomente über die Stablänge. Es bildet sich dabei ein immer deutlicheres Maximum zwischen $x/l = 0,25$ und $0,35$ aus. Die Torsionsmomente wachsen vor allem bei Annäherung an die Traglast rasch an. Es ist zu beachten, dass bei offenen Profilen das plastische primäre Torsionsmoment wesentlich geringer ist als das plastische sekundäre. Für den hier betrachteten HEB-200 beträgt das plastische primäre Torsionsmoment nur ca. 10 % des plastischen sekundären Torsionsmoments. Bei der Berücksichtigung von Schubspannungen wirkt sich der Anteil des primären Torsionsmoments deshalb stärker auf die Herabsetzung der Traglast aus als der des sekundären. In diesem Beispiel ändert sich die Traglast des Systems unter Berücksichtigung der Schubspannungen nicht, da der versagende Querschnitt in Feldmitte aus Symmetriegründen frei von Querkräften und Torsionsmomenten ist.

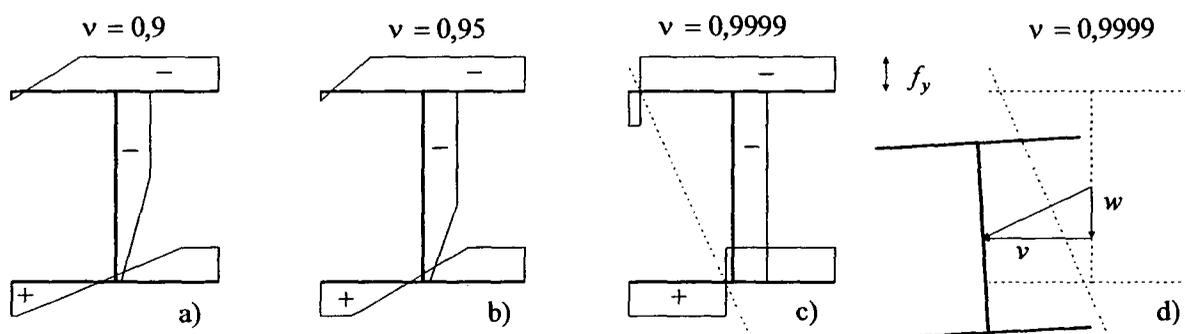


Abbildung 20: Spannungsverläufe; verformte Lage unter Traglast

In Abbildung 20 sind die Spannungsverläufe des Querschnitts in Feldmitte für verschiedene Laststufen dargestellt. Abbildung 20a) und b) zeigen die teilplastische Spannungsverteilung bei $\nu = 0,9$ bzw. $\nu = 0,95$. Abbildung 20c) zeigt die vollplastische Spannungsverteilung unter Traglast ($\nu = 0,9999$). Die aus der Berechnung erhaltene Spannungsverteilung, deren Nulllinie durch beide Gurte verläuft, ist identisch mit jener, die sich aus der Interaktionsbeziehung

in [11] ergibt. In Abbildung 20d) sind der Querschnitt in Systemmitte in verformter Lage und die Nulllinie am unverformten Querschnitt angegeben. Die Torsionsverdrehung ist nach Abbildung 20d) relativ gering. Die Gesamtverschiebung des Querschnitts steht normal auf die Nulllinie, da der Einfluss der resultierenden Krümmung im versagenden Querschnitt stärker ist als jener der Krümmungen über die restliche Stablänge. Bei der vollplastischen Spannungsverteilung unter Traglast in Abbildung 20c) ergibt sich für das Bimoment M_{xx} ein Wert von $-2,64 \text{ kNm}^2$. Für den Fall des doppelsymmetrischen I-Querschnitts ist das Bimoment M_{xx} gleich dem Wölbmoment M_{ω} ; d.h. $M_{\omega} = -2,64 \text{ kNm}^2$. Das Wölbmoment nimmt also unter Traglast einen Wert ungleich 0 an, obwohl der Träger keine planmäßige Torsion erfährt. Dieses Wölbmoment $M_{\omega} \neq 0$ kann als ein den Schnittgrößen N , M_y und M_z zugeordneter Eigen Spannungszustand verstanden werden.

5.3 Durchbiegung unter Traglast

Im Folgenden werden die Durchbiegungen an einem vier Meter langem ($l = 4 \text{ m}$) beidseitig gabelgelagerten I-Träger unter verschiedenen Lastfällen untersucht. Als Querschnitt wird wieder ein HEB-200 gewählt, jedoch wird der Querschnitt diesmal wie in [9] idealisiert. Bei dieser Art der Idealisierung bleibt die Steghöhe im Vergleich zu Kapitel 3.3 unverändert, allerdings wird diesmal die idealisierte Stegdicke gleich der realen gewählt und aus ihr die idealisierten Gurticken errechnet.

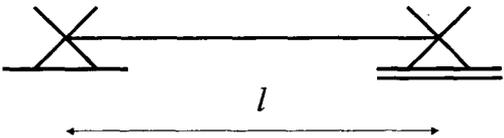
	$b_O = 0,1 \text{ m}$	$t_O = 0,01536 \text{ m}$	$e_O = 0$
	$a = 0,0925 \text{ m}$	$s = 0,009 \text{ m}$	
	$b_U = 0,1 \text{ m}$	$t_U = 0,01536 \text{ m}$	$e_U = 0$

Tabelle 6: Systembeschreibung 5.3

Die betrachteten Lastfälle lassen sich in zwei Gruppen einteilen: Die erste Gruppe erzeugt Biegemomente um die starke y -Achse, die zweite Biegemomente um die schwache z - Achse. Für jede dieser Gruppen werden jeweils fünf Lastfälle berechnet: Einzellast in Feldmitte, Teilstreckenlast über 20, 40 und 80 cm in Feldmitte und Gleichlast. In Tabelle 7 ist das für die Berechnung zugrunde gelegte (halbe) System mit den Teilstreckenlasten dargestellt. Des Weiteren sind die Traglasten für alle zehn untersuchten Lastfälle angegeben.

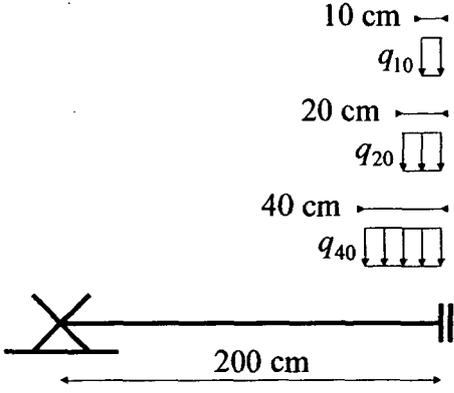
	Biegung um die y -Achse		Biegung um die z -Achse
Lf P	$P_z^T = 77,45 \text{ kN}$		$P_y^T = 36,87 \text{ kN}$
Lf q_{10}	$q_{z10}^T = 794,35 \text{ kN/m}$		$q_{y10}^T = 378,15 \text{ kN/m}$
Lf q_{20}	$q_{z20}^T = 407,63 \text{ kN/m}$		$q_{y20}^T = 194,05 \text{ kN/m}$
Lf q_{40}	$q_{z40}^T = 215,14 \text{ kN/m}$		$q_{y40}^T = 102,42 \text{ kN/m}$
Lf q	$q_z^T = 77,45 \text{ kN/m}$		$q_y^T = 36,87 \text{ kN/m}$

Tabelle 7: Traglasten für das System 5.3

Die Lasten greifen im Schubmittelpunkt des Querschnitts an, somit kommt es zu keiner planmäßigen Torsion. Bei den betrachteten Lastfällen bleiben die Symmetrieeigenschaften des Querschnitts auch bei Plastizierung erhalten und es kommt auch bei Beanspruchung über der elastischen Grenze – anders als beim Beispiel in Kapitel 5.2 – zu keiner Torsion. Bei den Lastfällen für Biegung um die y -Achse (Belastung in z -Richtung) ergibt sich die elastische Grenze erst bei 96 % (I-Querschnitt) der Traglast; für Biegung um die schwache Achse hingegen bereits bei 67 % (Rechteckquerschnitt). Nach Berechnung aller Lastfälle bis zu einer Laststufe von $\nu = 0,99999$ ergeben sich die in Abbildung 21 ab einem Lastfaktor von $\nu = 0,6$ angegebenen Last-Verschiebungsdiagramme für die Durchbiegungen in Feldmitte des gabelgelagerten Stabes.

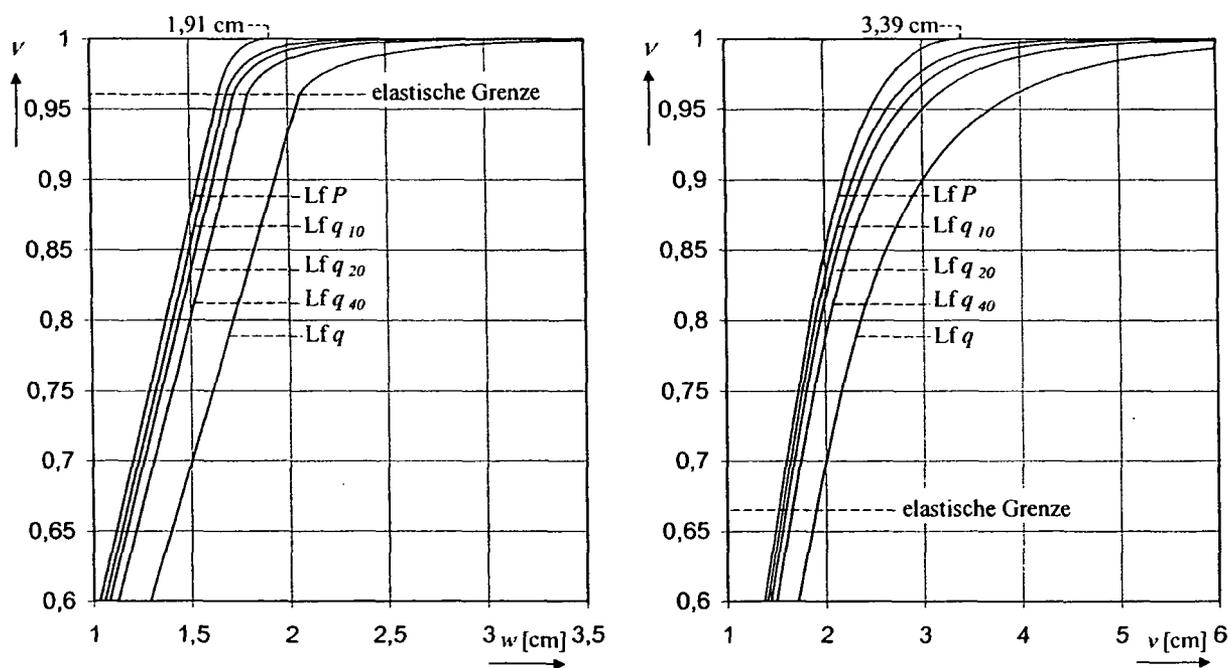


Abbildung 21: Last-Verschiebungsdiagramme für Biegung um die y - und z -Achse

Bei den Last-Verschiebungsdiagrammen in Abbildung 21 für die Lastfälle für Biegung um die starke (Abbildung 21 links) und die schwache Achse (Abbildung 21 rechts) stellt sich für die einzelnen Lastfälle ein qualitativ ähnlicher Verlauf ein. Die größten Verschiebungen ergeben sich jeweils beim Lastfall q ; die kleinsten für den Lastfall P . Während die Verschiebungen für die Lastfälle der Gleich- und Teilstreckenlasten bei Annäherung an die Traglast gegen unendlich streben, läuft die Linie für den Lastfall P in beiden Diagrammen in Abbildung 21 gegen einen endlichen Grenzwert. Um diesen Sachverhalt zu verdeutlichen, sind in Abbildung 22 und 23 vergrößerte Ausschnitte der Last-Verschiebungsdiagramme angegeben.

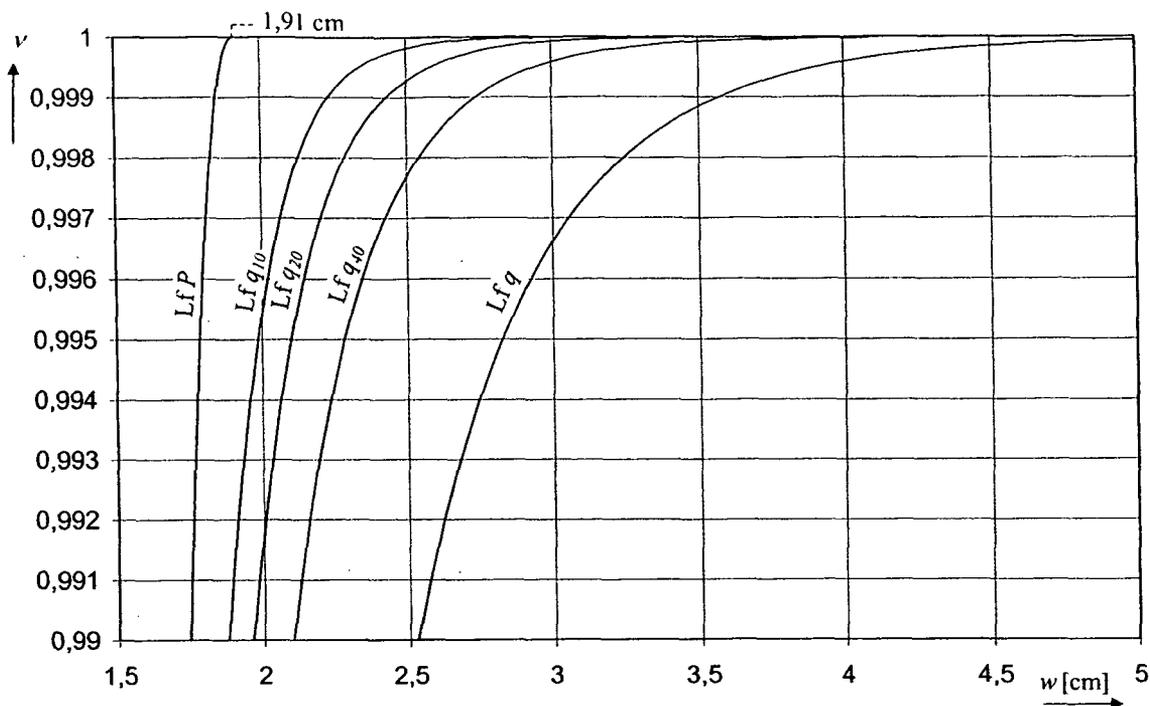


Abbildung 22: Last-Verschiebungsdiagramm für Biegung um die starke Achse

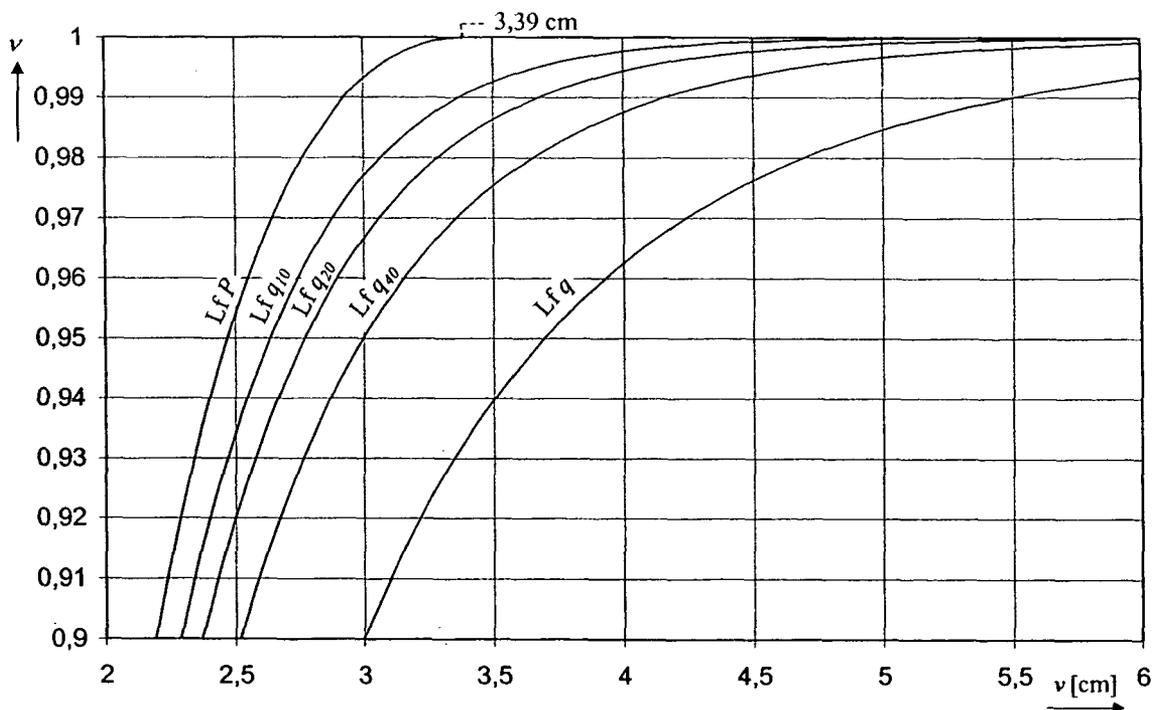


Abbildung 23: Last-Verschiebungsdiagramm für Biegung um die schwache Achse

In den Last-Verschiebungsdiagrammen in den Abbildungen 22 und 23 sieht man deutlich, dass die Last-Verschiebungskurven für die Lastfälle der Einzellasten ($Lf P$) auf einen endlichen Grenzwert zulaufen. Der Wert der Durchbiegungen unter Traglast kann für dieses Beispiel mittels analytischer Formeln ermittelt werden.

Um die Durchbiegungen unter Traglast zu bestimmen, wird vom Verlauf des Biegemoments ausgegangen. Das Biegemoment – je nach Lastfall um die starke oder schwache Achse – ist bei beidseitiger Gabellagerung statisch bestimmt. Der Verzerrungszustand im Querschnitt lässt sich bei den untersuchten Lastfällen – sowohl für elastische als auch für plastizierte Querschnitte – durch nur eine unbekannte Krümmung (entweder Krümmung des Steges oder der Gurte) beschreiben. Für den Fall der Biegung um die starke Achse lässt sich der Zusammenhang zwischen Biegemoment und Krümmung im elastischen Bereich durch die Beziehungen

$$M_y = \kappa_y EI_y \quad \text{bzw.} \quad \kappa_y = \frac{M_y}{EI_y} \tag{5.1}$$

beschreiben. Für den plastischen Bereich des Stabes ergibt sich

$$M_y = \frac{1}{6} A_s f_y a \left(3 - \frac{\varepsilon_y^2}{\kappa_y^2 a^2} \right) + 2 A_G f_y a \tag{5.2}$$

$$\kappa_y = \frac{1}{\frac{a}{\varepsilon_y} \sqrt{3 - \frac{M_y - 2 A_G f_y a}{A_s f_y a / 6}}} \tag{5.3}$$

In Abbildung 24 sind die Verläufe des Biegemoments M_y und der Krümmung κ_y unter Traglast für den Lastfall der Einzellast skizziert.

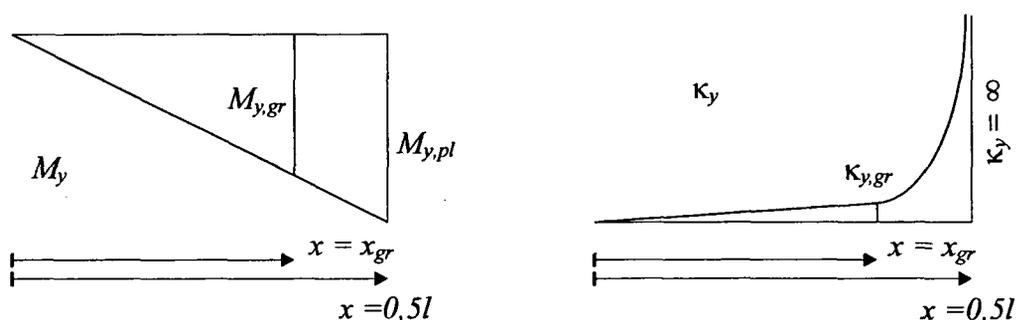


Abbildung 24: Momenten- und Krümmungsverlauf für Lastfall Einzellast

Die Koordinate x_{gr} gibt einerseits die Grenze zwischen elastischem und plastischem Bereich und andererseits die Grenze für die Integration an. Durch zweifache Integration der Funktionen der Krümmungen im elastischen und plastischen Bereich des Stabes aus den Gleichungen (5.1) und (5.3) ergibt sich nach einigen Vereinfachungen eine Formel zur Bestimmung der Durchbiegung in Feldmitte. Für die Lastfälle der Einzellast (Lf P) erhält man folgende Formeln zur Berechnung der Durchbiegungen unter Traglast in Feldmitte:

$$\text{Lf } P \text{ in } z\text{-Richtung: } \max w = \frac{1}{12} \frac{\varepsilon_y}{a} l^2 (1 + 4\alpha - \alpha^2) \quad (5.4)$$

$$\text{Lf } P \text{ in } y\text{-Richtung: } \max v = \frac{1}{12} \frac{\varepsilon_y}{b_0} l^2 (1 + 4\alpha - \alpha^2) \quad (5.5)$$

$$\text{mit } \frac{1}{\alpha} = 12 \frac{A_G}{A_S} + 3; \quad A_G = A_O = A_U \quad (5.6)$$

Wertet man die Formeln in (5.4) und (5.5) für das betrachtete System aus, so erhält man für die Durchbiegungen unter Traglast bei den Lastfällen der Einzellast:

$$\text{Max } w = 1,91 \text{ cm bzw. } \max v = 3,39 \text{ cm}$$

Die so ermittelten Werte stimmen mit jenen in den Last-Verschiebungsdiagrammen überein. Für den Lastfall der Gleichlast liefert die zweifache Integration der Krümmungen in den Gleichungen (5.1) und (5.3) keine Formel zur Bestimmung der Durchbiegung unter Traglast, da das Integral für den Lastfall Gleichlast unendlich wird. Der Grund dafür liegt in der unterschiedlichen Form der Funktion der statisch bestimmten Momentenlinie beim Lastfall Gleichlast. Während beim Lastfall Einzellast das Biegemoment eine lineare Funktion ist, wird das Biegemoment beim Lastfall Gleichlast durch eine quadratische Parabel beschrieben. Die Integration über die mit dieser Momentenlinie beschriebenen Krümmungen liefert eine unendliche Durchbiegung. Da die Funktionen der Momentenlinien der Teilstreckenlasten einen ähnlichen Aufbau zu der einer Gleichlast haben, ergeben sich auch für die Teilstreckenlasten unendliche Durchbiegungen. Diese Ergebnisse entsprechen jenen, die den Last-Verschiebungsdiagrammen zugrunde liegen.

5.4 U-Träger unter Gleich- und Einzellast

5.4.1 Lastfall Gleichlast

In diesem Kapitel wird ein beidseitig gabelgelagerter Stab mit U-Querschnitt unter Gleichlast in z -Richtung untersucht. Um Aussagen über den Einfluss der Torsion auf das Tragverhalten des Systems machen zu können, wird die Lage des Angriffspunktes der Gleichlast variiert. Es werden drei verschiedene Lastausmitten (Lastfälle) untersucht:

- $e_y = 0$: Last greift im Koordinatenursprung S an
- $e_y = c_y/2$: Last greift in der Mitte zwischen S und M an ($e_y = 1,79$ cm)
- $e_y = c_y$: Last greift im Schubmittelpunkt M an ($e_y = 3,57$ cm)

c_y ist der Schubmittelpunktsabstand vom Steg in y -Richtung gemäß Kapitel 4.5. Die z -Koordinate des Kraftangriffspunktes ist für eine Berechnung nach Theorie I. Ordnung ohne Belang. Eine Darstellung des Systems und die Angabe der für die Systemberechnung notwendigen Werte sind in Tabelle 8 zusammengestellt.

	$a = 0,12$ m	$b_O = 0,05$ m	$b_U = 0,05$ m
	$s = 0,01$ m	$t_O = 0,01$ m	$t_U = 0,01$ m
	$l = 4,12$ m	$e_O = 0,05$ m	$e_U = 0,05$ m

Tabelle 8: Systembeschreibung 5.4.1

Die Traglast q_z^T ergibt sich für alle drei untersuchten Lastfälle zu 43,45 kN/m. Für die Lastfälle $e_y = 0$ und $e_y = c_y/2$ tritt planmäßige Torsion auf, während es beim Lastfall $e_y = c_y$ (Last im Schubmittelpunkt) zu keiner planmäßigen Torsion kommt ($M_T \equiv 0$). Es ist jedoch zu beachten, dass beim Lastfall $e_y = 0$ das Torsionsmoment M_x verschwindet und bei den anderen beiden Lastfällen vorhanden ist. Die Berechnung kann aus Symmetriegründen am halben System erfolgen. Für die Last-Verformungsdiagramme werden die Verformungsgrößen des Querschnitts in Systemmitte betrachtet.

In Abbildung 25 sind die Last-Verschiebungskurven der drei untersuchten Lastfälle in einem Diagramm zusammengestellt. Bei allen Lastfällen streben die Verschiebungen bei Annähe-

rung an die Traglast gegen unendlich. Die elastische Grenze ist beim Lastfall $e_y = 0$ bereits bei 65 % der Traglast erreicht. Der Grund für den im Vergleich zu den beiden anderen Lastfällen niedrigen Wert der elastischen Grenze ist der stärkere Einfluss der Torsion bei dieser Lastausmitte. Für den Lastfall $e_y = c_y/2$ ist der Einfluss der Torsion schon deutlich geringer. Bei der Lastausmitte $e_y = c_y$ kommt es bei Belastung des Systems unter der elastischen Grenzlast zu keiner Torsion und es wird so die höchste elastische Grenzlast aller möglichen Lastausmitten bei $e_y = c_y$ erreicht. Generell lässt sich sagen: je weiter entfernt die Last vom Schubmittelpunkt angreift, desto niedriger ist die elastische Grenzlast und desto größer sind die auftretenden Verschiebungen. Die Traglast ist jedoch für alle drei Lastfälle die gleiche. Bei der Last-Verschiebungskurve für $e_y = c_y$ in Abbildung 25 bildet sich bei der elastischen Grenze ein Knick. Dieser Knick spiegelt die sprunghafte Änderung der Steifigkeit des Systems wider. Da beim Lastfall $e_y = c_y$ die Gurte unterhalb der elastischen Grenze keine Krümmungen haben, sind diese bei Erreichen der elastischen Grenze vollplastisch und der elastische Restquerschnitt des U-Querschnitts wird ab dann nur noch vom Stegblech gebildet. Diese plötzliche (unstetige) Veränderung bedingt den Knick im Last-Verschiebungsdiagramm in Abbildung 25 für den Lastfall $e_y = c_y$.

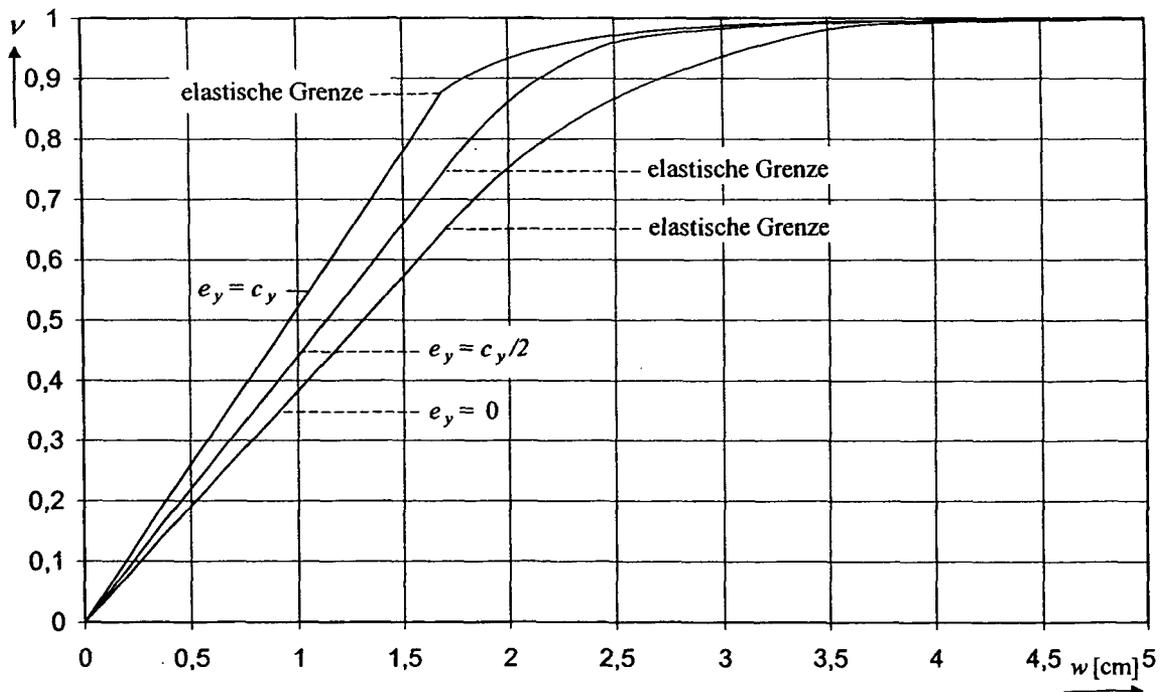


Abbildung 25: Last-Verschiebungsdiagramm 5.4.1

In Abbildung 26 sind die Last-Verdrehungskurven für die drei Lastfälle dargestellt. Bei allen Lastfällen hat die Torsionsverdrehung unter Traglast einen endlichen Grenzwert. Für die Ausmitte $e_y = c_y$ bleibt die Verdrehung bis zur elastischen Grenze gleich 0 (keine planmäßige

Torsion). Bei der elastischen Grenze bildet sich im Last-Verdrehungsdiagramm wie auch schon im Last-Verschiebungsdiagramm ein Knick aus. Bei weiterer Laststeigerung ist der Verlauf des Torsionsdrehwinkels linear. Auch bei den beiden anderen Lastfällen stellt sich am Ende der Belastungsgeschichte ein linearer Verlauf der Last-Verdrehungskurven ein. Im Last-Verdrehungsdiagramm in Abbildung 26 sind für jede der drei Last-Verdrehungslinien zwei ausgezeichnete Laststufen eingezeichnet: Die erste ist die elastische Grenze, oberhalb der die Verdrehung mit der Belastung in nichtlinearem Zusammenhang steht; diese Nichtlinearität besteht allerdings nur bis zur zweiten in Abbildung 26 hervorgehobenen Laststufe ($M_{xx} = M_{xx,pl}$), oberhalb der sich wieder ein linearer Zusammenhang zwischen Torsionsverdrehung und Belastung einstellt. Für die Lastausmitte $e_y = c_y$ fallen diese beiden ausgezeichneten Laststufen zusammen.

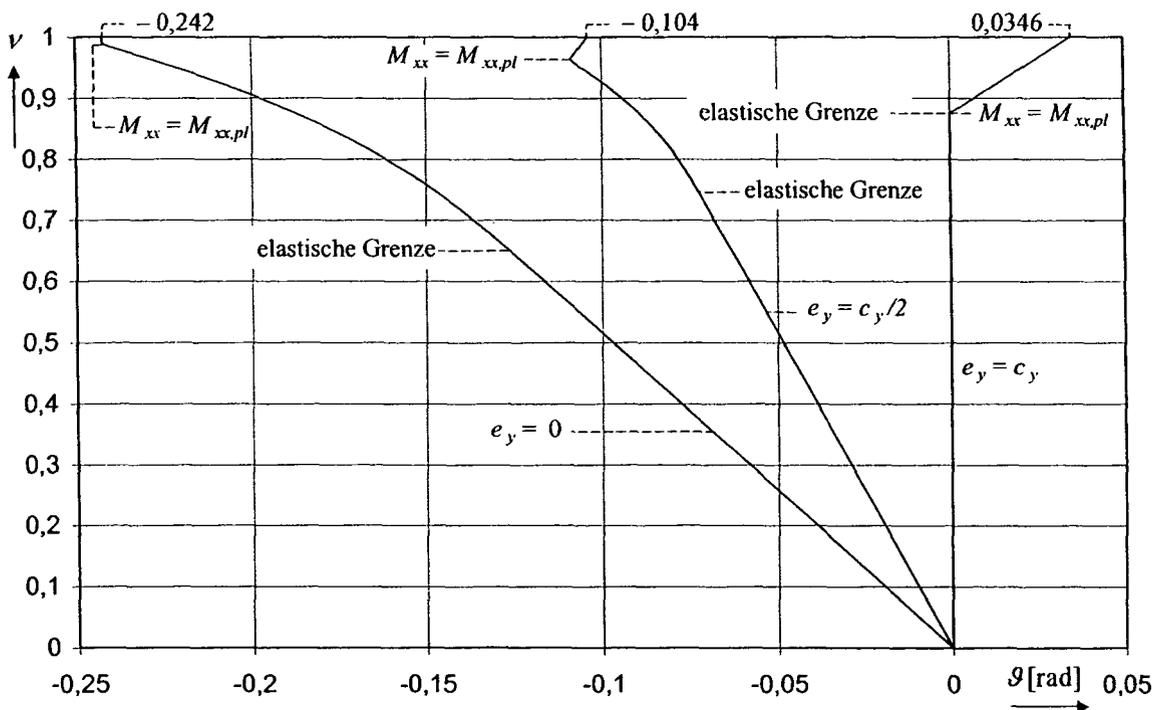


Abbildung 26: Last-Verdrehungsdiagramm 5.4.1

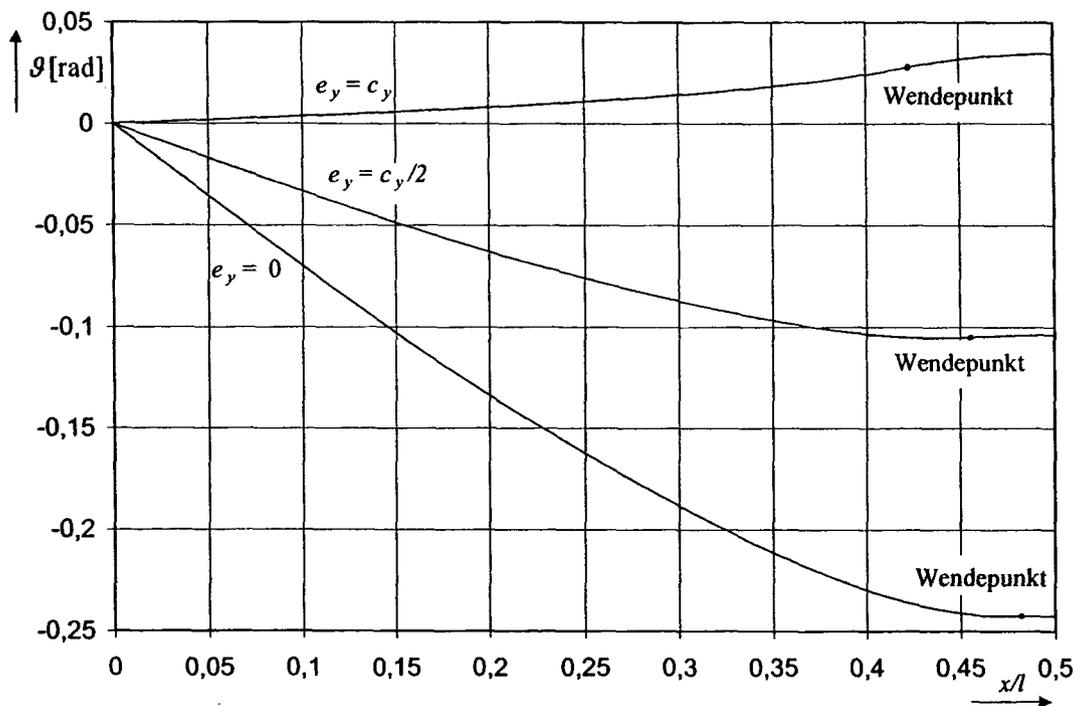
Nach Gleichung (4.73) lässt sich der Torsionsdrehwinkel ϑ für das hier betrachtete Beispiel eines beidseitig gabelgelagerten Stabes mit Hilfe der Formel

$$\vartheta = \frac{1}{GI_T} (M_y e_y - M_{xx}) \quad (5.7)$$

berechnen. Die Formel in (5.7) ist nur dann auch für Plastizitätstheorie gültig, wenn GI_T als konstant angenommen wird. Aus der Gleichung für die Torsionsverdrehung in (5.7) kann man erkennen, dass, wenn das Bimoment M_{xx} bei Belastungssteigerung den maximalen Wert von

$M_{xx,pl}$ erreicht, sich der Torsionsdrehwinkel nur mehr in Abhängigkeit vom Produkt $M_y e_y$ – also linear mit der Belastung – verändert. Das plastische Bimoment $M_{xx,pl}$ (für dieses Beispiel: $M_{xx,pl} = 2,88 \text{ kNm}^2$) ist für den U-Querschnitt dann erreicht, wenn beide Gurte mit entgegengesetzten Spannungen voll durchplastiziert sind. Für den Fall $e_y = c_y$ ist das ab der elastischen Grenze der Fall und somit verändert sich ab dieser Laststufe der Torsionsdrehwinkel linear – wie in Abbildung 26 dargestellt. Aus dem gleichen Grund wird der Torsionsdrehwinkel für den Lastfall $e_y = c_y/2$ ab dem Zeitpunkt der Vollplastizität der Gurte betragsmäßig wieder kleiner und läuft linear auf seinen Grenzwert unter Traglast. Bei der Ausmitte $e_y = 0$ verändert sich der Torsionsdrehwinkel ab der Laststufe $M_{xx} = M_{xx,pl}$ gemäß Gleichung (5.7) nicht mehr ($M_y e_y = 0$) und bleibt bis zum Erreichen der Traglast konstant. Die Grenzwerte der Torsionsdrehwinkel unter Traglast können nach Gleichung (5.7) berechnet werden. In Übereinstimmung mit den Berechnungen dieser Arbeit ergibt sich:

$$\text{für } e_y = 0: \vartheta = -0,242; \quad \text{für } e_y = c_y/2: \vartheta = -0,104; \quad \text{für } e_y = c_y: \vartheta = 0,0346 \quad (5.8)$$


 Abbildung 27: Verläufe von ϑ bei Traglast

In Abbildung 27 sind die Torsionsverdrehungen über die halbe Stablänge bei einer Laststufe von $\nu = 0,9999$ (Traglast) dargestellt. Bei allen drei Lastfällen ergibt sich im Verlauf von ϑ über die halbe Stablänge ein Wendepunkt (Vorzeichenwechsel von κ_ω). Es ist daher sinnvoll die Verläufe der Wölbverzerrungen über die halbe Stablänge, wie in Abbildung 28 angegeben, zu untersuchen ($\kappa_\omega = -\vartheta''$). Die Wölbverzerrungen wechseln für die Ausmitten $e_y = c_y/2$

und $e_y = c_y$ an der Stelle des Wendepunktes sprunghaft das Vorzeichen und verlaufen danach konstant. Der Wölbverzerrungsverlauf beim Lastfall $e_y = 0$ springt an dieser Stelle auf 0.

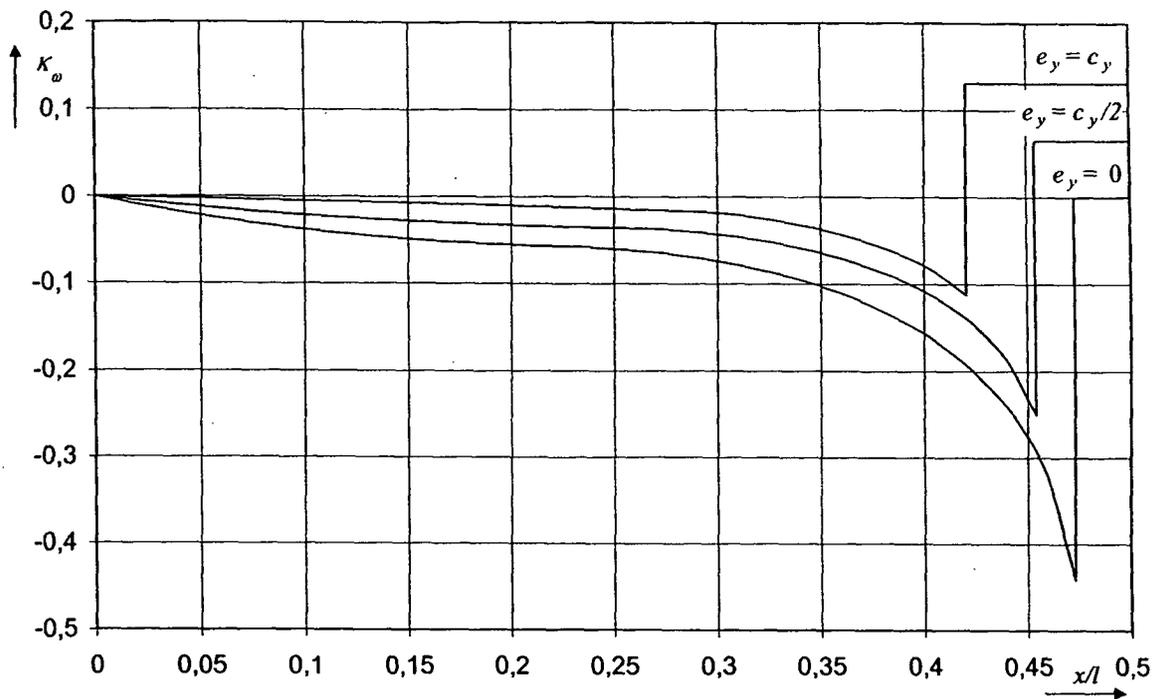


Abbildung 28: Verläufe von κ_ω bei Traglast

Um die Unstetigkeiten im Verlauf der Wölbverzerrungen in der Berechnung korrekt zu erfassen, wird das Visual-Basic-Programm modifiziert. Es wird dabei nur noch der Bereich links des Wendepunktes betrachtet. Der konstante Verlauf der Wölbverzerrungen entsteht in jenem Bereich des Stabes, in dem die Gurte vollplastiziert sind ($M_{xx} = M_{xx,pl}$). Anhand der Ausgangsgleichung für die Bestimmung der Wölbverzerrungen kann der konstante Wert von κ_ω in diesem Bereich berechnet werden. Die vierte Bestimmungsgleichung lautet in allgemeiner Form:

$$GI_T(\vartheta - \vartheta_0) + M_{xx} = \int_0^x M_x^{Last} dx \tag{5.9}$$

Da im Bereich vollplastizierter Gurte das Bimoment $M_{xx} (= M_{xx,pl})$ konstant ist, ergibt sich durch Differentiation der Gleichung (5.9) für den betrachteten Fall:

$$GI_T \vartheta' = M_x^{Last} \tag{5.10}$$

Durch Ersetzen des Torsionsmoments M_x^{Last} durch den Ausdruck $Q_z^{Last} e_y$ gemäß Gleichung (3.10), Differenzieren der Gleichung (5.10) und Berücksichtigung der Differentialbeziehung zwischen Querkraft und Gleichlast erhält man:

$$GI_T \vartheta'' = -q_z e_y \tag{5.11}$$

Einsetzen der kinematischen Beziehung für die Verdrehung um die x -Achse liefert für die Wölbverzerrung κ_ω im Bereich vollplastischer Gurte:

$$\kappa_\omega = \frac{q_z e_y}{GI_T} \tag{5.12}$$

Für die drei hier untersuchten Ausmitten ergeben sich für die Wölbverzerrungen im Bereich vollplastischer Gurte nach Gleichung (5.12) folgende Zahlenwerte:

$$\text{Für } e_y = 0: \kappa_\omega = 0; \quad \text{für } e_y = c_y/2: \kappa_\omega = 0,0653; \quad \text{für } e_y = c_y: \kappa_\omega = 0,131 \tag{5.13}$$

In Abbildung 29 sind schließlich die Torsionsmomente M_x und die sekundären Torsionsmomente $M_{x,s}$ für die drei Lastfälle über die halbe Stablänge bei der Laststufe $\nu = 0,9999$ dargestellt.

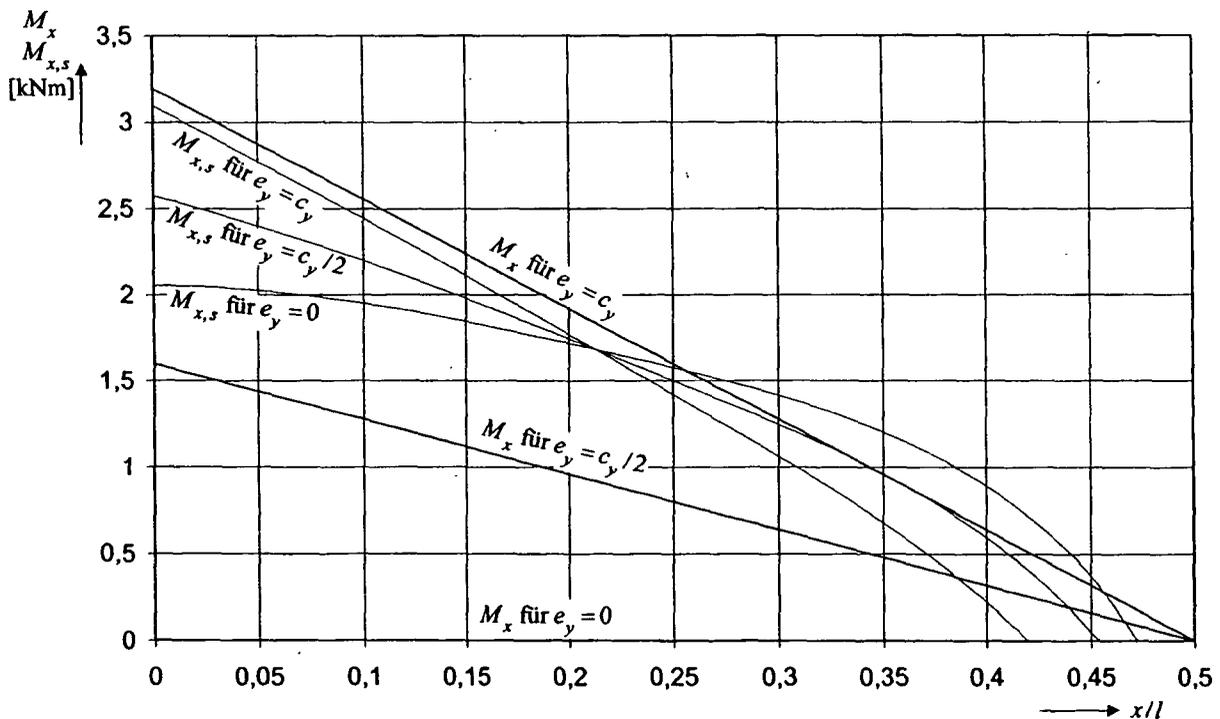


Abbildung 29: Verläufe der Torsionsmomente bei Traglast

Das primäre Torsionsmoment kann als Differenz aus M_x und $M_{x,s}$ berechnet werden.

$$M_{x,p} = M_x - M_{x,s} \tag{5.14}$$

Nach Abbildung 29 verschwindet das sekundäre Torsionsmoment $M_{x,s}$ im Bereich vollplastischer Gurte. Da in diesem Bereich die Gurtmomente konstant sind, ergeben sich die Querkräfte der Gurte zu 0 und können kein sekundäres Torsionsmoment abtragen. Mit dem Verschwinden des sekundären Torsionsmoments $M_{x,s}$ muss das Gesamttorsionsmoment M_x zur Gänze vom primären Torsionsmoment aufgenommen werden.

5.4.2 Lastfall Einzellast

In Kapitel 5.4.1 wird der beidseitig gabelgelagerte Stab mit U-Querschnitt unter Gleichlast in z-Richtung behandelt. In diesem Kapitel wird dasselbe System mit einer anderen Belastung untersucht. Als Belastung wird eine in z-Richtung wirkende Einzellast P_z , die in einer Entfernung von $0,4l$ vom linken Auflager wirkt, angesetzt. In der Querschnittsebene wirkt die Einzellast mit denselben drei Ausmitten ($e_y = 0$, $e_y = c_y/2 = 1,79$ cm, $e_y = c_y = 3,57$ cm), die für die Gleichlast in Kapitel 5.4.1 untersucht werden. Die Traglast P_z^T beträgt für alle drei betrachteten Lastausmitten 93,22 kN. Das System und die für die Berechnung notwendigen Querschnittsabmessungen sind in Tabelle 9 angegeben.

	$a = 0,12$ m	$b_0 = 0,05$ m	$b_U = 0,05$ m
	$s = 0,01$ m	$t_0 = 0,01$ m	$t_U = 0,01$ m
	$l = 4,12$ m	$e_0 = 0,05$ m	$e_U = 0,05$ m

Tabelle 9: Systembeschreibung 5.4.2

Da die Belastung nicht symmetrisch ist, muss die Berechnung am ganzen System erfolgen. Der für die Last-Verformungsdiagramme betrachtete Querschnitt ist jener an der Stelle der Einzellast. In Abbildung 30 sind die Last-Verschiebungskurven der drei untersuchten Lastfälle dargestellt. Wie beim Lastfall Gleichlast kommt es bei größer werdender Torsionsbeanspruchung zu einer Verminderung der elastischen Grenze. Der wesentliche Unterschied zwischen den Last-Verschiebungskurven für den Träger unter Gleichlast und dem unter Einzellast besteht darin, dass die Verschiebungen beim Lastfall der Einzellast nicht gegen unendlich laufen. Wie beim I-Träger in Kapitel 5.3 ergeben sich auch für den U-Träger unter Einzellast endliche Werte der Durchbiegungen bei Traglast.

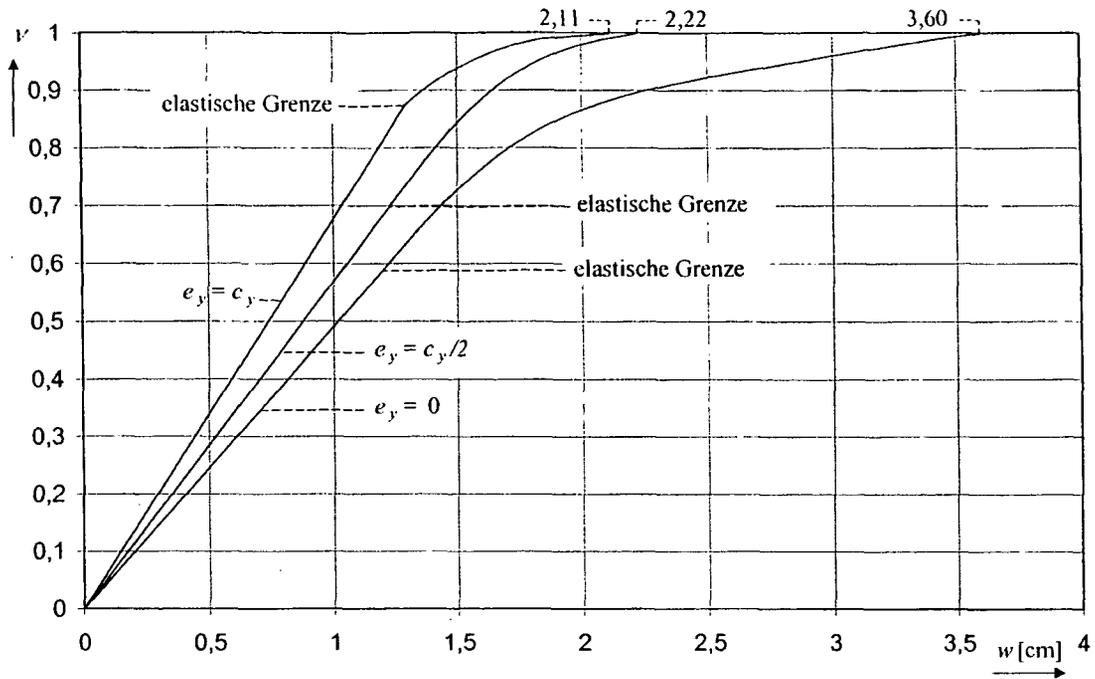


Abbildung 30: Last-Verschiebungsdiagramm 5.4.2

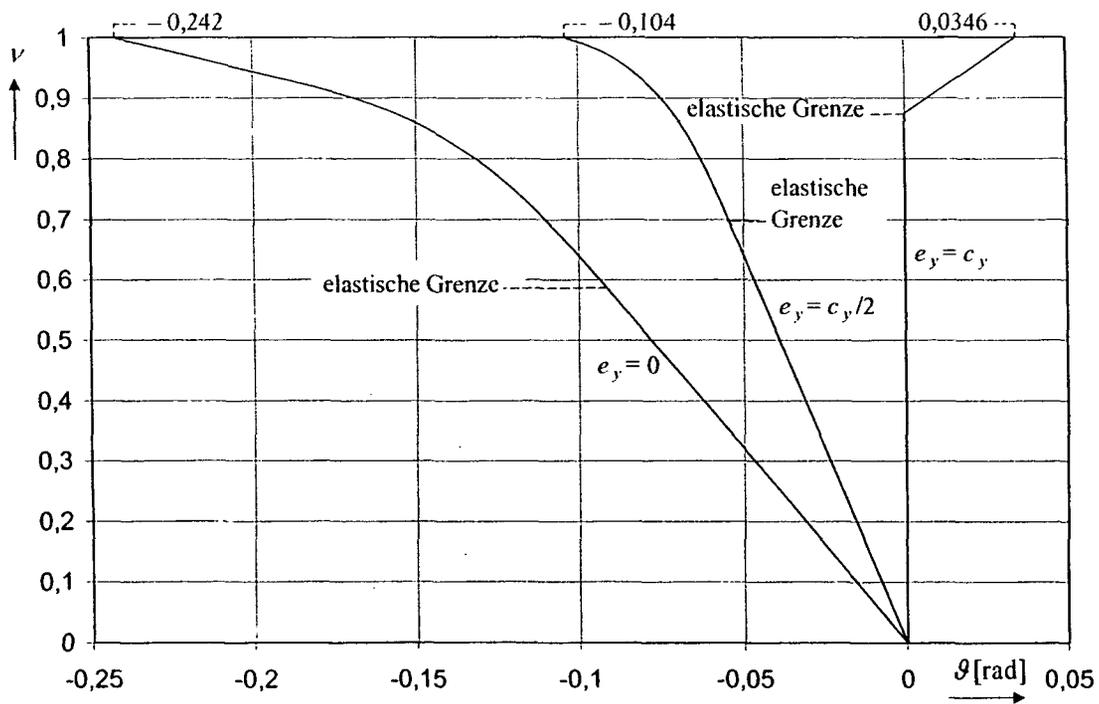


Abbildung 31: Last-Verdrehungsdiagramm 5.4.2

Die Last-Torsionsverdrehungslinien der drei Lastfälle sind in Abbildung 31 dargestellt. Die Grenzwerte des Torsionsdrehwinkels in Abbildung 31 bei Traglast lassen sich mit der in (5.7) angegebenen Formel ermitteln. Für die drei untersuchten Laststellungen erhält man:

$$\text{für } e_y = 0: \mathcal{J} = -0,242; \quad \text{für } e_y = c_y/2: \mathcal{J} = -0,104; \quad \text{für } e_y = c_y: \mathcal{J} = 0,0346 \quad (5.15)$$

Die Werte in (5.15) sind dieselben wie bei der Berechnung des Lastfalls Gleichlast in (5.8). Nach Gleichung (5.7) ist der Torsionsdrehwinkel unter Traglast nur von Größen des Querschnitts und der Ausmitte abhängig. Der erste Term in der Klammer ist das Produkt von plastischen Moment um die y -Achse $M_{y,pl}$ und der Ausmitte e_y . Der zweite Term ist das plastische Bimoment $M_{xx,pl}$. Der Torsionsdrehwinkel hängt dadurch weder von der Art der Belastung noch von der Stablänge ab! Die Entwicklung von \mathcal{J} bei Laststeigerung beim Lastfall Einzelast unterscheidet sich allerdings von der beim Lastfall Gleichlast insofern, als sich unter Einzelast das plastische Bimoment $M_{xx,pl}$ – außer für die Ausmitte $e_y = c_y$ – erst bei Traglast einstellt. Somit kommt es oberhalb der elastischen Grenze zu keinem linearen Zusammenhang zwischen der Torsionsverdrehung und der Belastung oberhalb der elastischen Grenze wie in Kapitel 5.4.1.

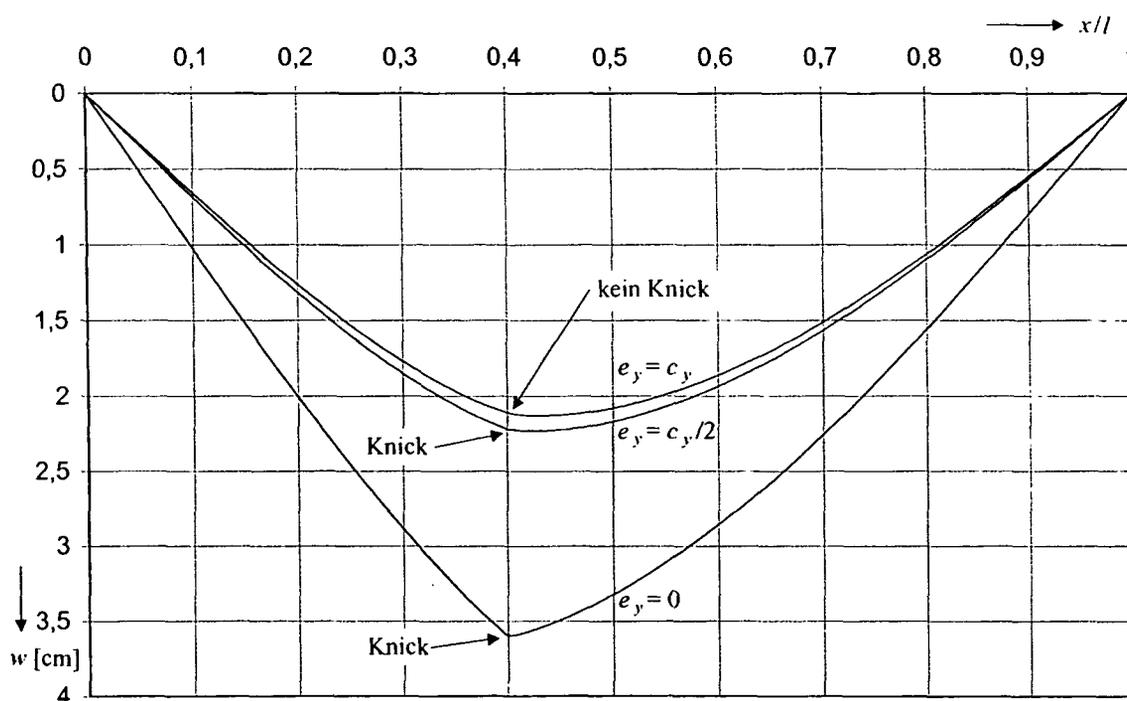
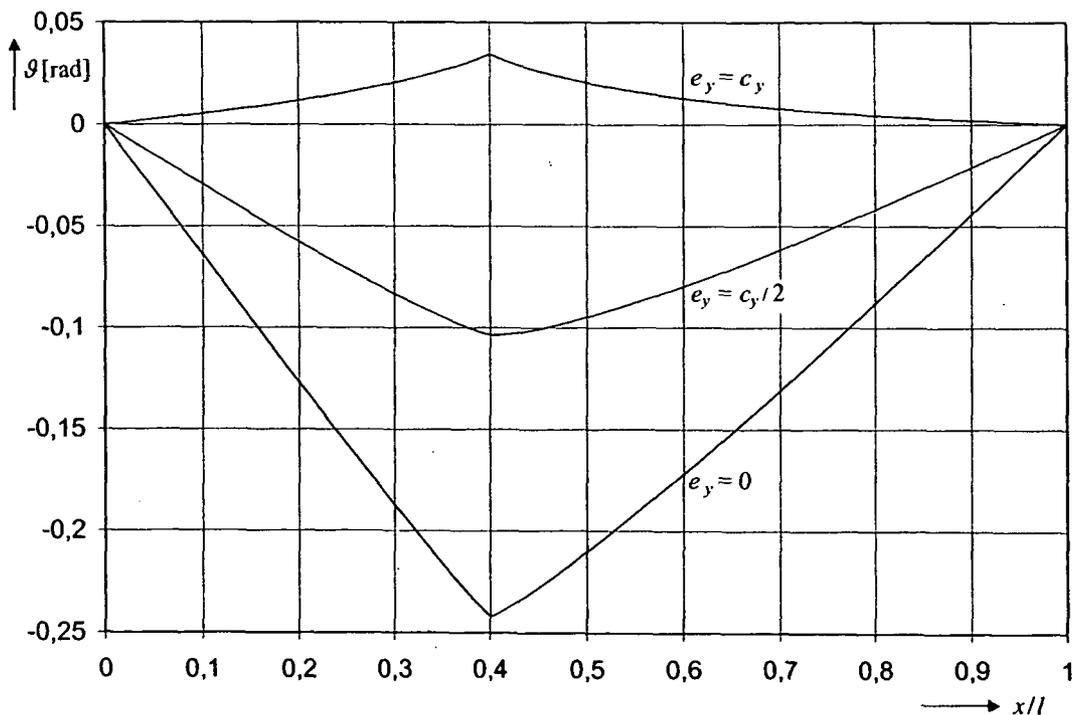


Abbildung 32: Verläufe von w bei Traglast

In Abbildung 32 und Abbildung 33 sind die Biegelinien bzw. die Torsionsverdrehungslinien der drei Lastfälle bei Traglast ($\nu = 0,999$) dargestellt. Bei den Biegelinien in Abbildung 32 ist beim Lastfall $e_y = 0$ ein deutlicher und beim Lastfall $e_y = c_y/2$ ein leichter Knick festzustellen, während für die Biegelinie bei $e_y = c_y$ ein stetiger Verlauf erkennbar ist. Betrachtet man die Stegkrümmungen $\kappa_s (= \kappa_y)$ der drei Lastfälle bei $\nu = 0,999$, so ergibt sich bei jeder der drei Lastausmitten derselbe Verlauf; d.h. die Krümmungen der Biegelinien in Abbildung 32 sind

für die drei dargestellten Lastfälle über die gesamte Stablänge gleich. Die unterschiedlichen Biegelinie können daher nur durch den Knick, der sich an der Stelle der Last ausbildet, entstehen. Ein ähnliches Bild wie für die Biegelinien ergibt sich auch für die Torsionsverdrehungslinien in Abbildung 33. Allerdings tritt dort an der Stelle der Last bei allen drei Lastausmitten ein Knick auf. Das Auftreten eines Knicks an der Stelle der Einzellast in der ϑ -Linie bedingt im allgemeinen Fall ein primäres Torsionsmoment links und rechts von der Einzellast ($\vartheta' \neq 0$). Die Krümmungen der Torsionsverdrehungslinien werden durch die Wölbverzerrungen bestimmt. Wie bei den Stegkrümmungen ergibt sich auch für die Wölbverzerrungen unter Traglast für alle drei Lastausmitten derselbe Verlauf. Wie man in Abbildung 33 erkennen kann, unterscheiden sich die Verläufe der Torsionsverdrehung nur durch die unterschiedlichen Knickwinkel an der Stelle der Einzellast. Da unter der gegebenen Belastung alle Längsdehnungen nur durch die Stegkrümmung und die Wölbverzerrung beschrieben werden ($\varepsilon_s = 0$, $\kappa_z = 0$), stellt sich unter Traglast für alle Lastausmitten der gleiche Normalspannungszustand über die gesamte Stablänge ein.

Abbildung 33: Verläufe von ϑ bei Traglast

In Abbildung 33 sieht man, dass der entstehende Knickwinkel in der ϑ -Linie (eingeprägte Verdrillung $(\vartheta')^\circ$) zwischen den Lastausmitten $e_y = c_y/2$ und $e_y = c_y$ sein Vorzeichen wechselt; d.h. es gibt eine Lastausmitte e_y ($c_y/2 < e_y < c_y$), bei der der Knickwinkel verschwindet. Ver-

gleichet man die ϑ -Linien in Abbildung 33 mit den Biegelinien in Abbildung 32, so ist auffällig, dass die Werte der maximalen Torsionsdrehwinkel entsprechend der Gleichung (5.7) linear von der Ausmitte der Last abhängen, während dies für die maximalen Werte der Durchbiegung offensichtlich nicht der Fall ist. Um einerseits die Größe der Knickwinkel in den ϑ -Linien und andererseits den Zusammenhang zwischen den Knickwinkeln in den ϑ -Linien und jenen in den Biegelinien zu bestimmen, wird der beidseitig gabelgelagerte Stab für die Berechnung in zwei Kragträger ($0,4l$ und $0,6l$) zerlegt und am freien Ende mit der jeweiligen Auflagerkraft belastet. Aus der Berechnung dieser beiden Systeme kann die Lösung des Gesamtsystems erhalten werden. Der Unterschied zwischen den Ergebnissen der Berechnung der Teilsysteme und des Gesamtsystems ist eine Starrkörperbewegung und eine konstante Verdrillung. Der auftretende Knickwinkel des Gesamtsystems wird dabei zum Teil vom linken und zum Teil vom rechten Teilsystem gebildet. Um die Knickwinkel am Gesamtsystem bestimmen zu können, werden zunächst die Sonderfälle der Ausmitten, bei denen sich die Knickwinkel der Teilsysteme zu 0 ergeben, ermittelt.

Da für den Kragträger (Lagerungsfall *frei-eingespannt*) die Randbedingung $\vartheta' = 0$ an der Einspannstelle angenommen wird, kommt es bei allgemeinen Laststellungen (Knickwinkel in ϑ -Linie ungleich 0) zu einer Verletzung der Gleichgewichtsbedingung um die x -Achse im Querschnitt der Einspannung. Um für das Teilsystem des Kragträgers jene Ausmitte, bei der die eingeprägte Verdrillung $(\vartheta')^e$ verschwindet, zu finden, wird die Ausmitte e_y so lange variiert, bis die Torsionsgleichgewichtsbedingung am Einspannquerschnitt erfüllt ist. Ist die Torsionsgleichgewichtsbedingung am Einspannquerschnitt erfüllt, ergeben sich die eingeprägte Verdrillung $(\vartheta')^e$ und das primäre Torsionsmoment des betrachteten Teilsystems zu 0 (an der Einspannstelle: $M_{x,s} = M_x$). Für den Kragarm der Länge $0,4l$ verschwindet das primäre Torsionsmoment im Einspannquerschnitt bei einer Ausmitte von $e_y = 2,36$ cm; für den Kragarm der Länge $0,6l$ ist das bei $e_y = 1,61$ cm der Fall. Aus diesen beiden Fällen lassen sich aus der konstitutiven Beziehung für das primäre Torsionsmoment alle eingeprägten Verdrillungen $(\vartheta')^e$ der betrachteten Lastfälle am Teil- und Gesamtsystem bestimmen. In Tabelle 10 sind die Knickwinkel bei verschiedenen Ausmitten zusammengestellt:

	$M_{x,links}$	$(\mathcal{G}')^e_{links}$	$(\mathcal{G}')^e_{gesamt}$	$(\mathcal{G}')^e_{rechts}$	$M_{x,rechts}$
$e_y = 0$	0	-0,111	-0,161	-0,0505	0
$e_y = 1,61 \text{ cm}$	0,900	-0,0353	-0,0353	0	-0,600
$e_y = c_y/2 = 1,79 \text{ cm}$	0,995	-0,0273	-0,0219	0,00533	-0,663
$e_y = 2,06 \text{ cm}$	1,15	-0,0141	0	0,0141	-0,767
$e_y = 2,36 \text{ cm}$	1,32	0	0,0235	0,0235	-0,879
$e_y = c_y = 3,57 \text{ cm}$	2,00	0,0570	0,118	0,0615	-1,33

Tabelle 10: Eingeprägte Verdrillungen

In der linken Spalte der Tabelle 10 sind die betrachteten Ausmitten angegeben. Die Spalten $M_{x,links}$ und $M_{x,rechts}$ geben das Torsionsmoment des linken bzw. rechten Bereich des Stabes an. In den drei mittleren Spalten sind die bei der jeweiligen Ausmitte auftretenden Knickwinkel $(\mathcal{G}')^e_{links}$, $(\mathcal{G}')^e_{rechts}$ und $(\mathcal{G}')^e_{gesamt}$ angegeben. Der Knickwinkel des Gesamtsystems ergibt sich als Summe der Knickwinkel der Teilsysteme. Durch Formulierung der Verträglichkeitsbedingung an der Stelle der Last, kann mit den Formeln für die eingeprägte Verdrillung des linken und rechten Teilsystems jene Ausmitte berechnet werden, bei der der Knick in der \mathcal{G} -Linie verschwindet ($e_y = 2,06 \text{ cm}$). Bei einer Ausmitte der Last von $e_y = 1,61 \text{ cm}$ hat nach Tabelle 10 die \mathcal{G} -Linie unmittelbar rechts der Last eine horizontale Tangente ($(\mathcal{G}')^e_{rechts} = 0$) und es verschwindet an dieser Stelle das primäre Torsionsmoment. Unmittelbar links der Last stellt sich ein Knickwinkel ein und es kommt dort zu einem primären Torsionsmoment. Eine anschaulichere Darstellung des Sachverhalts ist in Abbildung 34 angeführt. Für die Ausmitte $e_y = 1,61 \text{ cm}$ ergibt sich das Gesamttorsionsmoment M_x im rechten Bereich des Stabes nach Tabelle 10 zu $-0,6 \text{ kNm}$. Das ist genau der in Abbildung 34 angegebene Wert des sekundären Torsionsmoments rechts von der Last. Das primäre Torsionsmoment $M_{x,p}$ verschwindet an dieser Stelle. Das sekundäre Torsionsmoment ist daher gleich groß wie das Gesamttorsionsmoment M_x .

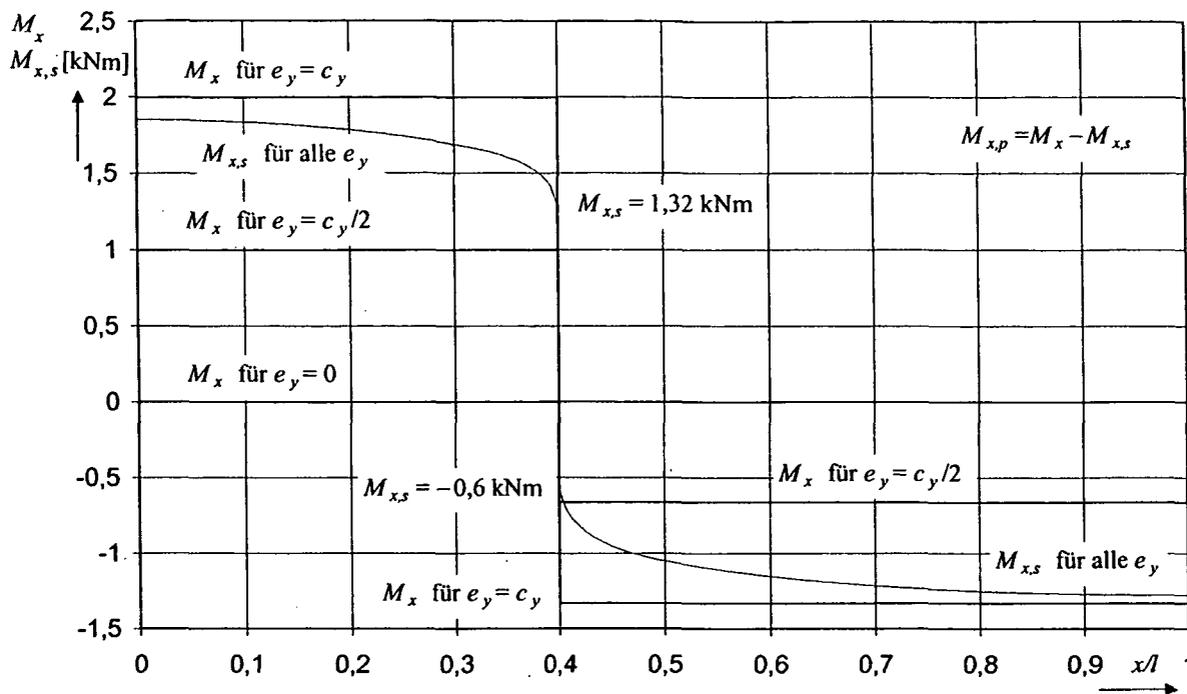


Abbildung 34: Torsionsmomente unter Traglast

In Abbildung 34 sind die Torsionsmomente M_x und das sekundäre Torsionsmoment $M_{x,s}$ für die drei untersuchten Lastausmitten dargestellt. Die in Abbildung 34 eingetragenen sekundären Torsionsmomente an der Stelle $0,4l$ findet man in Tabelle 10 dort wieder, wo sich die eingepreßte Verdrillung $(\theta')^e$ für das linke bzw. rechte Teilsystem zu 0 ergibt, da dort das primäre Torsionsmoment verschwindet und das Gesamttorsionsmoment vom sekundären Torsionsmoment aufgenommen werden muss. Da das eingetragene sekundäre Torsionsmoment für alle Lastausmitten gilt, ist eine Bestimmung der Aufteilung zwischen primären und sekundärem Torsionsmoment für beliebige Lastausmitten sehr einfach möglich. Eine Veränderung der Ausmitte bedeutet lediglich eine Parallelverschiebung der Gesamttorsionsmomentenlinien des linken und rechten Bereichs in Abbildung 34. Für die Ausmitte $e_y = 2,06$ cm liegt das Gesamttorsionsmoment im linken Bereich des Stabes um genau denselben Betrag unterhalb des eingezeichneten sekundären Torsionsmoments $M_{x,s} = 1,32$ kNm wie im rechten Bereich unterhalb von $M_{x,s} = -0,6$ kNm. Damit ergibt sich – entsprechend dem verschwindenden Knickwinkel – ein glatter Verlauf des primären Torsionsmoments bei $e_y = 2,06$ cm.

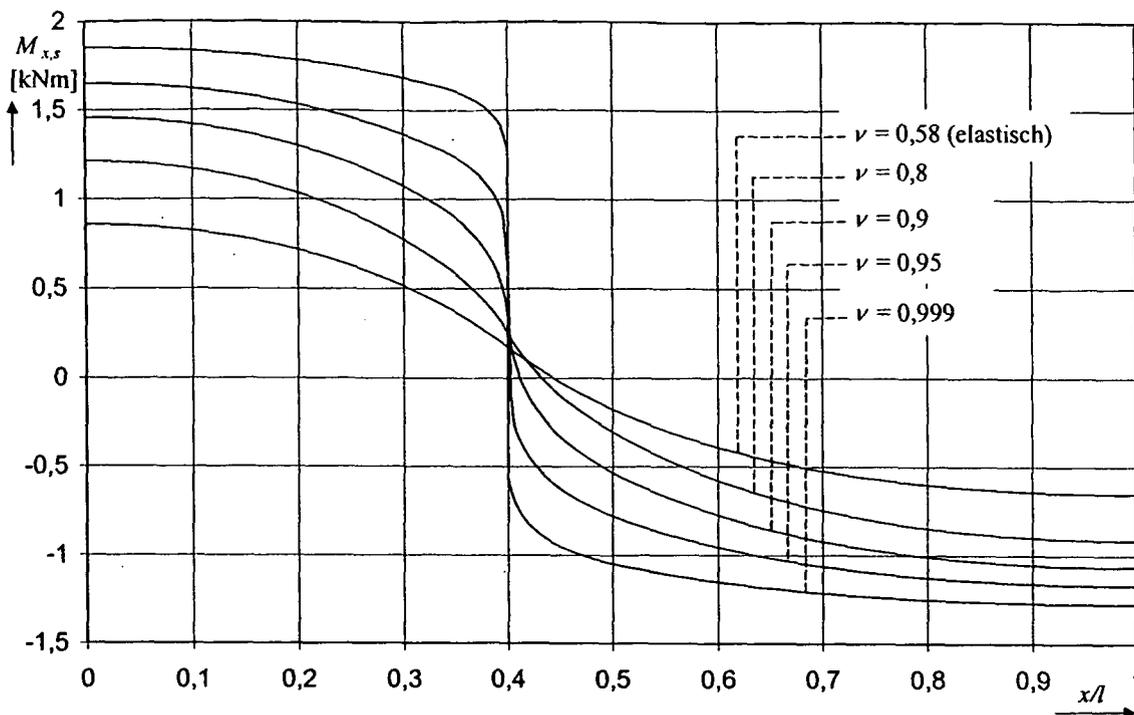


Abbildung 35: Entwicklung $M_{x,s}$ bei Laststeigerung für $e_y = 0$

In Abbildung 35 ist die Entwicklung des sekundären Torsionsmomentes unter Laststeigerung dargestellt. Im elastischen Bereich ($\nu = 0,58$) ist der Verlauf von $M_{x,s}$ stetig und der Nulldurchgang ergibt sich rechts von der Last. Mit zunehmender Plastizierung verschiebt sich die Stelle des Nulldurchgangs immer weiter zur Stelle der Belastung und die Werte des sekundären Torsionsmoments wachsen an. Unter Traglast ergibt sich an der Stelle der Last ein Sprung im Verlauf des sekundären Torsionsmoments $M_{x,s}$ und bis auf einen speziellen Verlauf des Gesamttorsionsmoment M_x (bei $e_y = 2,06$ cm) auch ein Sprung im primären Torsionsmoment.

Für den Zusammenhang zwischen dem Knickwinkel in der ϑ -Linie und jenem in der Biegelinie ist das Vorzeichen der eingepprägten Verdrillung $(\vartheta')^e$ von entscheidender Bedeutung. Während bei negativen eingepprägten Verdrillungen $((\vartheta')^e < 0)$ Knickwinkel in der Biegelinie auftreten, ergibt sich bei positiven eingepprägten Verdrillungen $((\vartheta')^e > 0)$ für die Biegelinie ein stetiger Verlauf (siehe Abbildung 32 und Abbildung 33). Aus kinematischen Überlegungen ergibt sich, dass der Steg (und damit die Biegelinie) nur bei einer negativen eingepprägten Verdrillung ebenfalls einen Knickwinkel erfährt. Dieser lässt sich mit der Formel

$$(w')^e = 2b(\vartheta')^e \tag{5.16}$$

berechnen. Bei positiver eingepprägter Verdrillung hingegen ergibt sich für den Steg kein Knickwinkel und somit nimmt die Biegelinie für alle Ausmitten $e_y > 2,06$ cm dieselbe stetige Form ein (siehe $e_y = c_y$ in Abbildung 32).

Da im versagenden Querschnitt für den Lastfall der Einzellast durch den Sprung der Querkraft und der Torsionsmomente an der Stelle der Last auch Schubspannungen wirken, vermindern diese die Traglast des Systems. Für die untersuchten Lastfälle ist der Einfluss der Schubspannungen bei einer Lastausmitte von $e_y = 0$ am stärksten. Die Traglast wird allerdings auch in diesem Fall nur um 2,5 % vermindert. Der geringste Einfluss der Schubspannungen ergibt sich bei einer Ausmitte von $e_y = 2,06$ cm, da hier das auftretende primäre Torsionsmoment links und rechts von der Last gleich groß ist und somit die minimale Beanspruchung durch primäre Torsion darstellt. Mit zunehmender Entfernung von dieser Lastausmitte sinkt die erreichbare Traglast ab, da bei gleichbleibendem sekundären Torsionsmoment das primäre Torsionsmoment ansteigt. Die Abminderung der Traglast ist für die betrachteten Lastfälle so gering, dass eine Vernachlässigung der Schubspannungen gerechtfertigt ist.

6 Fließzonentheorie II. Ordnung

6.1 Allgemeines

Eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung ist dadurch charakterisiert, dass die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am verformten System vorgenommen wird; d.h. dass die Schnittgrößen von der Gesamtverformung des Systems abhängig sind. Die Gesamtverformung setzt sich im Allgemeinen aus einer Lastverformung und einer anzusetzenden Vorverformung zusammen. Während die Lastverformung aufgrund von wirkenden Schnittgrößen auftritt, ist die Vorverformung am unbelasteten, spannungslosen System vorhanden. Bei Stabilitätsgefährdeten Systemen sind stets Vorverformungen anzusetzen. Sie können als geometrische Ersatzimperfektionen für alle Abweichungen vom planmäßigen Zustand angesehen werden. Ihr Einfluss auf die Tragwirkung des Systems besteht in der Abhängigkeit der Schnittgrößen von den Gesamtverformungen. Vorverformungen werden als Vorverschiebungen in y - und z -Richtung sowie als Vorverdrehung um die x -Achse berücksichtigt. Zur Unterscheidung gegenüber den Lastverformungen werden die Vorverformungen mit dem Index ...^v versehen (v^v, w^v, ϑ^v). Es wird angenommen, dass die Vorverformungen über die Stablänge lineare oder parabolische Verläufe annehmen können.

Bei den Schnittgrößen ist nach Theorie II. Ordnung zwischen zwei möglichen Darstellungen zu unterscheiden; sie können entweder auf die Achsen in unverformter Lage (x, y, z) oder auf die Achsen in verformter Lage (ξ, η, ζ) bezogen werden. Beide Koordinatensysteme haben ihren Ursprung im Stegblechmittelpunkt S in ausgelenkter Lage. Das Koordinatensystem in unverformter Lage (x, y, z) ist das in Kapitel 3.3 beschriebene. Das Koordinatensystem in verformter Lage ist ebenfalls ein rechtsdrehendes rechtwinkeliges, das sich vom x, y, z -Koordinatensystem durch eine Relativverdrehung unterscheidet. Die ξ -Achse des Koordinatensystems in verformter Lage zeigt in die Richtung der verformten Stabachse. Die η -Achse ergibt sich als Gurtparallele, die ζ -Achse als Stegparallele des Querschnitts in verformter Lage. Durch die vorausgesetzte Formtreue des Querschnitts stehen die η - und ζ -Achse normal aufeinander. In Abbildung 36 sind die beiden unterschiedlichen Darstellungsmöglichkeiten mit ihren jeweiligen Bezeichnungen angegeben.

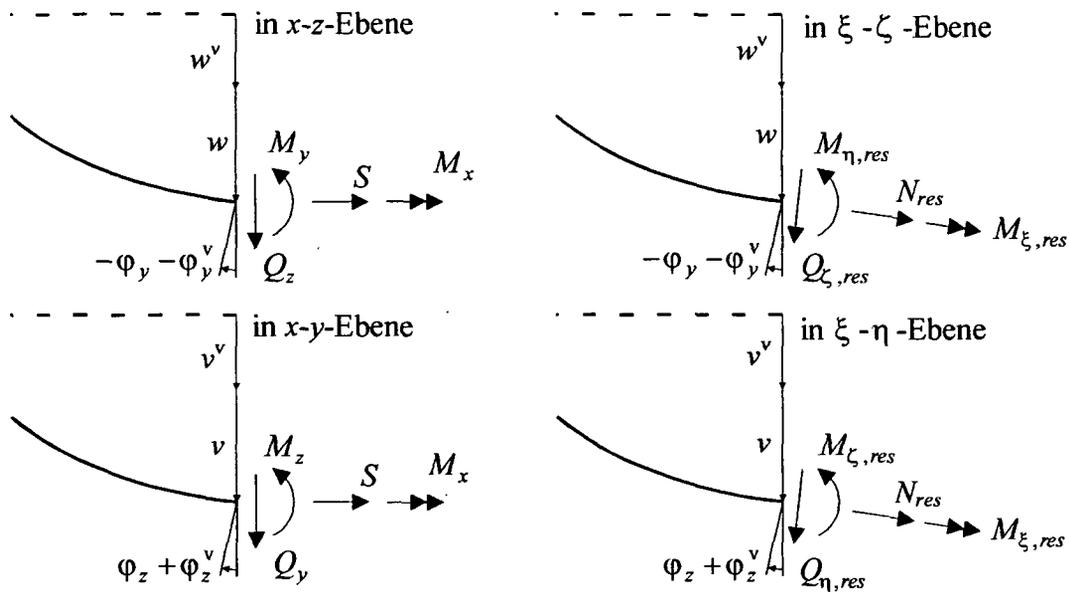


Abbildung 36: Schnittgrößen in den x, y, z - bzw. ξ, η, ζ -Koordinaten

Die Schnittgrößen des ξ, η, ζ -Koordinatensystems in Abbildung 36 rechts sind mit dem Index *...res* (resultierend) versehen. Dieser Index deutet an, dass für diese Schnittgrößen Zusatzterme der Theorie II. Ordnung, die aufgrund der unterschiedlichen Richtungen der Stabfasern auftreten, berücksichtigt werden. Eine genauere Beschreibung dieses Sachverhalts wird in Kapitel 6.3 angegeben, wo auch die Umrechnungsbeziehung zwischen den Schnittgrößen des ξ, η, ζ - und x, y, z -Koordinatensystems angegeben wird. Mit den Schnittgrößen in den x, y, z -Achsen in Abbildung 36 links werden in Kapitel 6.2 die Gleichgewichtsbedingungen formuliert. Die Schnittgrößen in den ξ, η, ζ -Achsen müssen für die konstitutiven Beziehungen und für die zu führenden Spannungsnachweise verwendet werden.

Das Vorgehen bei der Lösung eines Systems nach Fließzonentheorie II. Ordnung baut auf dem nach Fließzonentheorie I. Ordnung auf. Die Bestimmungsgleichungen stellen wieder die aus den Verzerrungen ermittelten Schnittgrößen jenen aus den Gleichgewichtsbedingungen gegenüber. Das Vorgehen bei der Ermittlung der Schnittgrößen aus den Verzerrungen des Querschnitts ändert sich dabei nicht. Die so erhaltenen Schnittgrößen beziehen sich jedoch auf die Achsen in verformter Lage (ξ, η, ζ). Der wesentliche Unterschied bei der Berechnung nach Theorie II. Ordnung besteht in der Ermittlung der Schnittgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen, da diese von den Gesamtverformungen abhängig sind. Durch die Abhängigkeit der Schnittgrößen von den Verformungen können sie nicht mehr – wie bei Theorie I. Ordnung – vorweg bestimmt werden und gehen somit nicht mehr als bekannte Größen in die Rechnung ein, sondern müssen beim Lösen der Gleichungssysteme iterativ ermittelt werden.

6.2 Gleichgewichtsbedingungen

6.2.1 Kräftegleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsformulierung am gesamtverformten System erfolgt für die Kräfte in diesem Kapitel und für die Momente in Kapitel 6.2.2 mittels der in Abbildung 36 links dargestellten Schnittgrößen, die sich auf das x -, y -, z -Koordinatensystem beziehen.

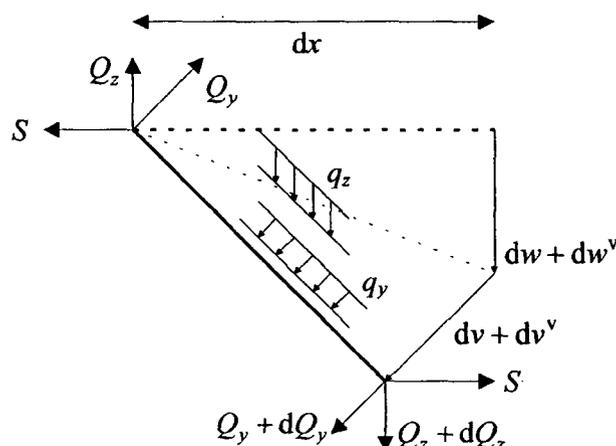


Abbildung 37: Kräftegleichgewicht am Stabelement der Länge dx

Da gemäß Kapitel 3.4 keine Lasten im Feld in x -Richtung berücksichtigt werden (Annahme S ist konstant), muss die allgemeine Gleichgewichtsbedingung in Stablängsrichtung nicht formuliert werden; für die Stablängskraft S gilt:

$$S = P_x \tag{6.1}$$

Nach Abbildung 37 lautet die Kräftegleichgewichtsbedingung am infinitesimalen Stabelement der Länge dx nach Theorie II. Ordnung in y -Richtung:

$$\sum F_y = 0 \tag{6.2}$$

$$Q_y + dQ_y + q_y dx - Q_y = 0 \tag{6.3}$$

$$Q'_y + q_y = 0 \tag{6.4}$$

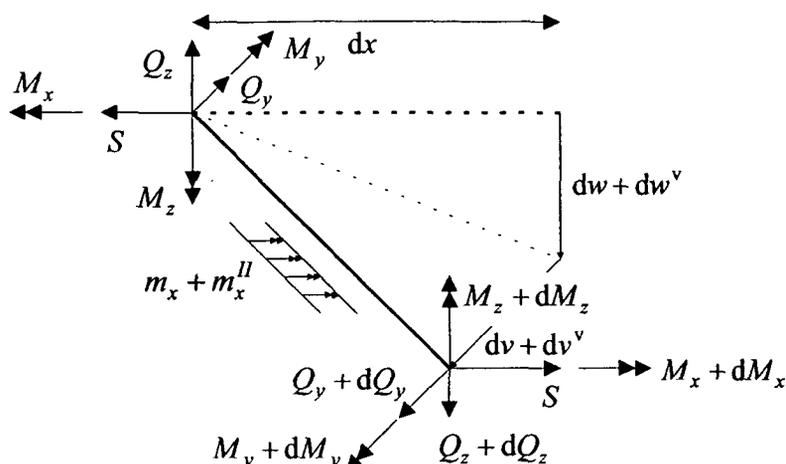
Für die z -Richtung ergibt sich:

$$\sum F_z = 0 \tag{6.5}$$

$$Q_z + dQ_z + q_z dx - Q_z = 0 \tag{6.6}$$

$$Q'_z + q_z = 0 \tag{6.7}$$

6.2.2 Momentengleichgewichtsbedingungen


 Abbildung 38: Momentengleichgewicht am Stabelement der Länge dx

Für die Momentengleichgewichtsbedingungen nach Theorie II. Ordnung sind vor allem die Zusatzmomente aus den Schnittgrößen zu beachten. Nach Abbildung 38 lautet die Gleichgewichtsbedingung um die x -Achse:

$$\sum M_x = 0 \quad (6.8)$$

$$(M_x + dM_x) + (Q_z + dQ_z)(dv + dv^v) - (Q_y + dQ_y)(dw + dw^v) + (m_x + m_x'')dx - M_x = 0 \quad (6.9)$$

$$M_x' + Q_z(v' + (v^v)') - Q_y(w' + (w^v)') + m_x + m_x'' = 0 \quad (6.10)$$

$$\text{mit } m_x'' = q_z e_{z,q_z} (\mathcal{G} + \mathcal{G}^v) + q_y e_{y,q_y} (\mathcal{G} + \mathcal{G}^v) \quad (6.11)$$

Um die y -Achse ergibt sich:

$$\sum M_y = 0 \quad (6.12)$$

$$(M_y + dM_y) - (Q_z + dQ_z)dx + S(dw + dw^v) - M_y = 0 \quad (6.13)$$

$$M_y' - Q_z + S(w' + (w^v)') = 0 \quad (6.14)$$

Und für die z -Achse erhält man schließlich:

$$\sum M_z = 0 \quad (6.15)$$

$$(M_z + dM_z) - (Q_y + dQ_y)dx + S(dv + dv^v) - M_z = 0 \quad (6.16)$$

$$M_z' - Q_y + S(v' + (v^v)') = 0 \quad (6.17)$$

Wie man aus den Gleichungen (6.1) bis (6.17) erkennen kann, schlägt sich die Formulierung des Gleichgewichts nach Theorie II. Ordnung nur in den Formeln der Momentengleichgewichtsbedingungen nieder.

6.3 Umrechnungsbeziehungen

Die Umrechnungsbeziehungen beschreiben die Transformation der Achsen in verformter Lage (ξ, η, ζ) auf die Achsen in unverformter Lage (x, y, z) . Da in dieser Arbeit gemäß Kapitel 3.1 geometrische Linearität vorausgesetzt wird, werden die Umrechnungsbeziehungen in ihrer linearisierten Form verwendet; d.h. Terme höherer Ordnung werden nicht berücksichtigt. Der Sinus ergibt sich dann gleich dem Argument und der Cosinus zu 1. Unter Berücksichtigung von Abbildung 39 ergeben sich die Umrechnungsbeziehungen zu:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -(\varphi_z + \varphi_z^v) & (\varphi_y + \varphi_y^v) \\ (v + v^v)' & 1 & -(\vartheta + \vartheta^v) \\ (w + w^v)' & (\vartheta + \vartheta^v) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

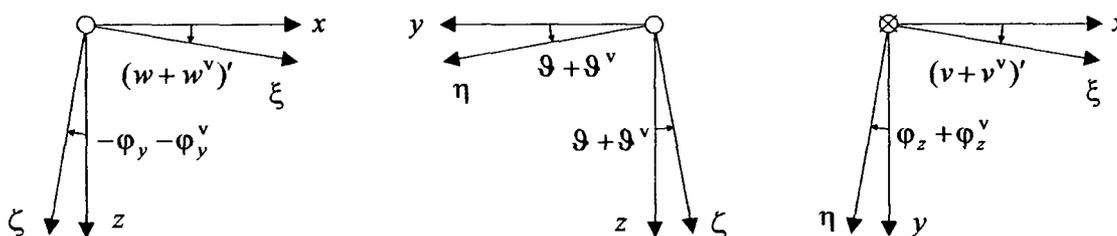


Abbildung 39: Drehung des Koordinatensystems

In den kinematischen Beziehungen (4.14) und (4.16) wird der Zusammenhang zwischen den Querschnittsdrehwinkeln φ_y und φ_z und den Ableitungen der Verschiebungen w' und v' angegeben. Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen werden in der Umrechnungsbeziehung (6.18) in der Folge anstelle der Querschnittsdrehwinkel die Ableitung der Verschiebungen verwendet.

Die Umrechnungsbeziehung in (6.18) für die Koordinatenachsen gilt in analoger Form auch für die auf die jeweiligen Koordinatensysteme bezogenen Schnittgrößen; d.h. man kann die resultierenden Schnittgrößen in den ξ, η, ζ -Achsen in die auf die x, y, z -Achsen durch eine zu (6.18) analoge Beziehung umrechnen. Es ist zu beachten, dass die Momente M_z und $M_{\zeta, res}$ entgegen der positiven Richtung der z -Achse definiert sind. Deshalb wird die dritte Zeile und die dritte Spalte der Umrechnungsmatrix für die Momente mit dem Faktor (-1) multipliziert.

$$\begin{bmatrix} S \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -(v+v^v)' & -(w+w^v)' \\ (v+v^v)' & 1 & -(\mathcal{G}+\mathcal{G}^v) \\ (w+w^v)' & (\mathcal{G}+\mathcal{G}^v) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{res} \\ Q_{\eta,res} \\ Q_{\zeta,res} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -(v+v^v)' & (w+w^v)' \\ (v+v^v)' & 1 & (\mathcal{G}+\mathcal{G}^v) \\ -(w+w^v)' & -(\mathcal{G}+\mathcal{G}^v) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{\xi,res} \\ M_{\eta,res} \\ M_{\zeta,res} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

N_{res} , $Q_{\eta,res}$ und $Q_{\zeta,res}$ sind die resultierenden Kräfte in Richtung der ξ -, η -, ζ -Achsen. Sie ersetzen die Kräfte S , Q_y und Q_z statisch gleichwertig. Die beiden Kräftegruppen haben also die gleiche Resultierende. Genauso werden durch die Momente $M_{\xi,res}$, $M_{\eta,res}$ und $M_{\zeta,res}$ die Momente M_x , M_y und M_z statisch gleichwertig ersetzt. Analog zu den Kräften gilt für die Momente, dass die Momente um die ξ -, η -, ζ -Achsen und die Momente um die x -, y -, z -Achsen dieselbe Resultierende haben. Die in den Beziehungen (6.19) und (6.20) angegebenen resultierenden Schnittgrößen N_{res} , $Q_{\eta,res}$, $Q_{\zeta,res}$, $M_{\xi,res}$, $M_{\eta,res}$ und $M_{\zeta,res}$ stellen jene Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung dar, die unter Berücksichtigung der Drehwinkel der Stabfasern erhalten werden. Da die Stabfasern im Querschnitt durch die Verdrillung unterschiedliche Richtungen aufweisen, wirken auch die Spannungen in verschiedene Richtungen. Durch die verschiedenen Richtungen der Stabfasern haben alle resultierenden Schnittgrößen Anteile aus Normal- und Schubspannungen. Es entstehen damit Zusatzterme nach Theorie II. Ordnung aus der Querschnittsbetrachtung. Diese Zusatzterme stellen den Unterschied zwischen den resultierenden Schnittgrößen (aus Normal- und Schubspannungen) und den Schnittgrößen ohne Berücksichtigung der Verdrillung (entweder aus Normal- oder Schubspannungen) dar. In [7] werden die Zusatzterme für alle Schnittgrößen angegeben. In dieser Arbeit soll aber – wie in der Literatur (siehe [12]) üblich – nur der Zusatzterm für das Torsionsmoment berücksichtigt werden; für die resultierenden Schnittgrößen ergibt sich dann:

$$N_{res} = N = \int_A \sigma_{\xi} dA \quad (6.21)$$

$$Q_{\eta,res} = Q_{\eta} = \int_A \tau_{\xi\eta} dA \quad (6.22)$$

$$Q_{\zeta,res} = Q_{\zeta} = \int_A \tau_{\xi\zeta} dA \quad (6.23)$$

$$M_{\xi,res} = M_{\xi} + (\mathcal{G} + \mathcal{G}^v)' \int_A (y^2 + z^2) \sigma_{\xi} dA = \int_A (y \tau_{\xi\zeta} - z \tau_{\xi\eta}) dA + (\mathcal{G} + \mathcal{G}^v)' \int_A (y^2 + z^2) \sigma_{\xi} dA \quad (6.24)$$

$$M_{\eta,res} = M_{\eta} = \int_A z \sigma_{\xi} dA \quad (6.25)$$

$$M_{\zeta,res} = M_{\zeta} = \int_A y \sigma_{\xi} dA \quad (6.26)$$

Der Zusatzterm in (6.24) stellt das Torsionsmoment, das sich aus den Abtriebskräften der Längsspannungen σ_ξ aufgrund der Verdrillung \mathcal{G} ergibt, dar. Um den Zusatzterm kürzer anschreiben zu können, vereinbart man

$$K = \int_A (y^2 + z^2) \sigma_\xi \, dA = \int_A r^2 \sigma_\xi \, dA \quad (6.27)$$

und erhält so:

$$M_{\xi, res} = M_\xi + (\mathcal{G} + \mathcal{G}^v)' K \quad (6.28)$$

Der Integralterm K entspricht dem Wagner-Koeffizienten der herkömmlichen Theorie der Wölbkrafttorsion, die sich auf die Hauptachsen des Systems bezieht. Der Wagner-Koeffizient bezieht sich auf den Schubmittelpunkt M , da auch das Torsionsmoment auf diesen Punkt bezogen wird. In dieser Arbeit muss als Bezugspunkt dementsprechend der Ursprung des Koordinatensystems S angenommen werden, da auch das Torsionsmoment M_ξ um diesen Punkt gebildet wird.

Setzt man für die resultierenden Schnittgrößen in (6.19) und (6.20) die Ausdrücke aus den Gleichungen (6.21) bis (6.26) ein und streicht die zu vernachlässigenden Terme ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} S \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ (v + v^v)' & 1 & -(\mathcal{G} + \mathcal{G}^v) \\ (w + w^v)' & (\mathcal{G} + \mathcal{G}^v) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q_\eta \\ Q_\zeta \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -(v + v^v)' & (w + w^v)' \\ & 1 & (\mathcal{G} + \mathcal{G}^v) \\ & -(\mathcal{G} + \mathcal{G}^v) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_\xi + (\mathcal{G} + \mathcal{G}^v)' K \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

Die Stablängskraft wird gemäß Gleichung (6.29) gleich der Normalkraft angenommen. Der Einfluss der Querkräfte auf die Normalkraft wird dabei vernachlässigt. Im Weiteren wird deshalb in allen Formeln anstelle der Stablängskraft S die Normalkraft N verwendet. Der Einfluss des Torsionsmoments auf die Biegemomente wird in (6.30) nicht berücksichtigt, da für die betrachteten vorwiegend biegebeanspruchten Systeme die Torsionsmomente gegenüber den Biegemomenten klein bleiben. Die Zusatzterme der resultierenden Schnittgrößen werden – wie in den Gleichungen (6.21) bis (6.26) angegeben – bis auf den Term des Torsionsmoments vernachlässigt. Die getroffenen Annahmen entsprechen jenen in [7].

6.4 Bestimmungsgleichungen

6.4.1 Allgemeines

Die Bestimmungsgleichungen nach Fließzonentheorie II. Ordnung entsprechen vom Aufbau her jenen aus 4.7 für die Fließzonentheorie I. Ordnung; sie werden allerdings in den Achsen in verformter Lage formuliert. Für $r = 0 \dots n$ erhält man:

$$N_r^{el}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{\eta r}, \kappa_{\zeta r}, \kappa_{\omega r}) - \Delta N_r(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{\eta r}, \kappa_{\zeta r}, \kappa_{\omega r}) = N_r^{Last} \quad (6.31)$$

$$M_{\eta r}^{el}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{\eta r}, \kappa_{\zeta r}, \kappa_{\omega r}) - \Delta M_{\eta r}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{\eta r}, \kappa_{\zeta r}, \kappa_{\omega r}) = M_{\eta r}^{Last} \quad (6.32)$$

$$M_{\zeta r}^{el}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{\eta r}, \kappa_{\zeta r}, \kappa_{\omega r}) - \Delta M_{\zeta r}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{\eta r}, \kappa_{\zeta r}, \kappa_{\omega r}) = M_{\zeta r}^{Last} \quad (6.33)$$

$$GI_T \int_0^{x_r} \mathcal{G}' dx + \int_0^{x_r} (M_{\xi\xi}^{el}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{\eta r}, \kappa_{\zeta r}, \kappa_{\omega r}) - \Delta M_{\xi\xi}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{\eta r}, \kappa_{\zeta r}, \kappa_{\omega r}))' dx = \int_0^{x_r} M_{\xi}^{Last} dx \quad (6.34)$$

$$\text{bzw. } GI_T \int_0^{x_r} \mathcal{G}' dx + (M_{\xi\xi}^{el}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{\eta r}, \kappa_{\zeta r}, \kappa_{\omega r}) - \Delta M_{\xi\xi}(\varepsilon_{Sr}, \kappa_{\eta r}, \kappa_{\zeta r}, \kappa_{\omega r})) = \int_0^{x_r} M_{\xi}^{Last} dx$$

Da für den Querschnitt Formtreue vorausgesetzt wird, bleibt das Vorgehen zur Bestimmung der elastischen und Δ -Schnittgrößen aus dem Verzerrungszustand aus den Kapiteln 4.4 und 4.7 bestehen und die dort angegebenen Formeln können unverändert angewendet werden; die auf diesem Weg ermittelten Schnittgrößen sind dann auf die ξ -, η -, ζ -Achsen bezogen. Dementsprechend müssen die in den Bestimmungsgleichungen gegenübergestellten Schnittgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen ebenfalls in den ξ -, η -, ζ -Achsen dargestellt werden. Diese veränderte Formulierung stellt den wesentlichen Unterschied zwischen den Bestimmungsgleichungen nach Theorie I. und II. Ordnung dar. Während nach Theorie I. Ordnung die Schnittgrößen vorweg bestimmt werden können, müssen sie bei Theorie II. Ordnung im Zuge der Rechnung iterativ ermittelt werden. Die Schnittgrößen aus den Einwirkungen werden sehr anschaulich in zwei Anteilen angeschrieben: Der erste entspricht der jeweils zuzuordnenden Schnittgröße nach Theorie I. Ordnung; der zweite fasst die Zusatzterme nach Theorie II. Ordnung zusammen. Durch diese Vorgehensweise müssen die Bestimmungsgleichungen aus dem Kapitel 4.7 lediglich um Zusatzterme der Theorie II. Ordnung erweitert werden.

6.4.2 Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung

Für die Schnittgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen nach Theorie II. Ordnung, die auf der rechten Seite der Gleichungen (6.31) bis (6.34) auftreten, besteht der Unterschied zur

Theorie I. Ordnung darin, dass nicht alle vorab ermittelt werden können. Bis auf die Normalkraft N , die nach (6.29) gleich der statisch bestimmten Stablängskraft S ist, müssen die Schnittgrößen im Zuge der Rechnung iterativ ermittelt werden. Die Normalkraft N nach Theorie II. Ordnung bleibt also im Vergleich zur Theorie I. Ordnung unverändert und ergibt sich nach Gleichung (3.2) zu:

$$N^{Last} = P_x \quad (6.35)$$

Zur Ermittlung des Biegemoments um die η -Achse ($M_{\eta r}^{Last}$ in Gleichung (6.32)) wird die Gleichgewichtsbedingung (6.14) unter Berücksichtigung der Randbedingungen integriert:

$$M_y = \int_0^x Q_z dx - N \int_0^x (w + w')' dx \quad (6.36)$$

Das Integral über die statisch bestimmte Querkraft Q_z von 0 bis x entspricht dem Biegemoment M_y^{Last} an der Stelle x nach Theorie I. Ordnung in Kapitel 3.5. Durch Einsetzen der dritten Zeile

$$M_y = M_\eta + M_\zeta (\vartheta + \vartheta^v) \quad (6.37)$$

der Umrechnungsbeziehung (6.30), ergibt sich für die rechte Seite der Gleichung (6.32):

$$M_\eta^{Last} = M_y^{Last} - N^{Last} \int_0^x (w + w')' dx - M_\zeta^{Last} (\vartheta + \vartheta^v) \quad (6.38)$$

Durch analoges Vorgehen für M_ζ^{Last} erhält man:

$$M_\zeta^{Last} = M_z^{Last} - N^{Last} \int_0^x (v + v')' dx + M_\eta^{Last} (\vartheta + \vartheta^v) \quad (6.39)$$

Durch die Abhängigkeit der Biegemomente voneinander und von den Verformungsgrößen in den Gleichungen (6.38) und (6.39) können diese erst durch Iteration bei der Berechnung bestimmt werden. Neben der Normalkraft und den Biegemomenten muss für die rechte Seite der Bestimmungsgleichungen noch das Integral des Torsionsmomentes M_ξ^{Last} bestimmt werden. Ausgangspunkt für die Bestimmung der rechten Seite von Gleichung (6.34) ist das Momentengleichgewicht um die x -Achse wie es in Gleichung (6.10) formuliert ist:

$$M'_x + Q_z(v + v^v)' - Q_y(w + w^v)' + m_x + m_x'' = 0 \quad (6.40)$$

Die Querkräfte Q_y und Q_z in Gleichung (6.40) können durch Umformen der Gleichgewichtsbedingungen für die Biegemomente in (6.14) und (6.17) durch

$$Q_y = M'_z + N(v + v^v)'; \quad Q_z = M'_y + N(w + w^v)' \quad (6.41)$$

ersetzt werden. Die Momente M_y und M_z in (6.41) werden durch die Momente in den Achsen in verformter Lage gemäß der Umrechnungsbeziehung in (6.30) dargestellt.

$$M_y = M_\eta + (\mathcal{G} + \mathcal{G}^v)M_\zeta; \quad M_z = M_\zeta - (\mathcal{G} + \mathcal{G}^v)M_\eta \quad (6.42)$$

Um das Torsionsmoment um die ξ -Achse zu erhalten, wird für die Ableitung des Torsionsmoments M_x in (6.40) die abgeleitete erste Zeile der Umrechnungsbeziehung (6.30) eingesetzt:

$$M'_x = (M'_\xi + (\mathcal{G} + \mathcal{G}^v)'K - (v + v^v)'M_\eta + (w + w^v)'M_\zeta)' \quad (6.43)$$

Dabei ist zu beachten, dass im Zusatzterm des Torsionsmoments sowohl die Verdrillung als auch der Integralterm K über x veränderlich ist und somit die Kettenregel angewendet werden muss. Aus der Gleichung (6.40) ergibt sich nach Umformung und Ausnutzung der kinematischen Beziehungen in den Gleichungen (4.23), (4.24) und (4.28):

$$M'_\xi = -m_x - m_x'' + (\kappa_\omega - (\mathcal{G}^v)''K - (\mathcal{G} + \mathcal{G}^v)'K' - (\kappa_z + \kappa_z^v)M_\eta + (\kappa_y + \kappa_y^v)M_\zeta - (v + v^v)'((\mathcal{G} + \mathcal{G}^v)M_\zeta)' - (w + w^v)'((\mathcal{G} + \mathcal{G}^v)M_\eta)') \quad (6.44)$$

Durch zweifache Integration der Gleichung (6.44) und Vernachlässigung der letzten beiden Terme, in denen jeweils Verformungsgrößen multipliziert werden, erhält man für die rechte Seite von (6.34):

$$\int_0^x M'_\xi{}^{Last} dx = \int_0^x M_x{}^{Last} dx + \int_0^x \int_0^x -m_x'' dx dx + \int_0^x \int_0^x ((\kappa_\omega - (\mathcal{G}^v)''K - (\mathcal{G} + \mathcal{G}^v)'K' - (\kappa_z + \kappa_z^v)M_\eta^{Last} + (\kappa_y + \kappa_y^v)M_\zeta^{Last}) dx dx \quad (6.45)$$

Damit liegen alle Terme der rechten Seite der Bestimmungsgleichungen in der für die Berechnung notwendigen Form vor. Der besseren Übersichtlichkeit wegen werden sie noch einmal zusammengefasst:

$$N^{Last} = N^{Last} \quad (6.46)$$

$$M_{\eta}^{Last} = M_y^{Last} - N^{Last} \int_0^x (w' + (w^v)') dx - M_{\zeta}^{Last} (\mathcal{G} + \mathcal{G}^v) \quad (6.47)$$

$$M_{\zeta}^{Last} = M_z^{Last} - N^{Last} \int_0^x (v' + (v^v)') dx + M_{\eta}^{Last} (\mathcal{G} + \mathcal{G}^v) \quad (6.48)$$

$$\int_0^x M_{\xi}^{Last} dx = \int_0^x M_x^{Last} dx + \int_0^x \int_0^x -m_x^{II} dx dx + \int_0^x \int_0^x ((\kappa_{\omega} + \kappa_{\omega}^v)K - (\mathcal{G}' + (\mathcal{G}^v)')K' - (\kappa_z + \kappa_z^v)M_{\eta}^{Last} + (\kappa_y + \kappa_y^v)M_{\zeta}^{Last}) dx dx \quad (6.49)$$

Die Ausdrücke in den Gleichungen (6.46) bis (6.49) haben immer den gleichen Aufbau. Ausgehend von den Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung werden die Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung durch Zusatzterme erhalten (außer bei der statisch bestimmten Normalkraft, wo die Zusatzterme entfallen). Die Zusatzterme sind alle von Verformungsgrößen und anderen Schnittgrößen abhängig und können dadurch erst im Laufe der Berechnung iterativ ermittelt werden. Die Zusatzterme für die Biegemomente in den Gleichungen (6.47) und (6.48) können relativ einfach berechnet werden. Für den Zusatzterm des Torsionsmoments in der Gleichung (6.49) muss neben den Verformungs- und Schnittgrößen auch der Integralterm K und dessen Ableitung bestimmt werden. Die Berechnung von K wird in Kapitel 6.4.3 gezeigt.

6.4.3 Integralterm K

Der Integralterm K , der bei der Berücksichtigung des Torsionsmoments zufolge der Normalspannungen benötigt wird, berechnet sich nach Gleichung (6.27) anhand der Formel:

$$K = \int_A r^2 \sigma_{\xi} dA \quad (6.50)$$

Die Berechnung von K erfolgt in analoger Weise zur Ermittlung der Schnittgrößen aus den Verzerrungen. K wird dabei in einen elastischen Anteil K^{el} und in einen Δ -Anteil ΔK zerlegt, so dass gilt:

$$K = K^{el} - \Delta K \quad (6.51)$$

Bei der Berechnung des elastischen Anteils von K für einen Berechnungsquerschnitt wird wie bei den elastischen Schnittgrößen zunächst das einzelne Blech betrachtet. Um K_{Blech}^{el} an einem Blech ermitteln zu können, müssen die Verzerrungen des Blechs bekannt sein. Da für die Bestimmung von K_{Blech}^{el} die Gültigkeit des *Hooke'schen* Gesetzes vorausgesetzt wird, ergibt

sich über die Blechlänge ein linearer Spannungsverlauf. Die Normalspannung in einem beliebigen Punkt des Blechs kann somit mittels der Funktion

$$\sigma_{\xi}(x_{Blech}) = E\varepsilon(x_{Blech}) = E(\varepsilon_{Blech,0} - \kappa_{Blech}x_{Blech}) \tag{6.52}$$

berechnet werden. Der jeweilige Nullpunkt der Koordinate x_{Blech} wird für die Gurte in den Anschlusspunkten zum Steg und für den Steg im Stegblechmittelpunkt angenommen; dementsprechend nimmt ε_0 entweder den Wert der Dehnung der Stegoberkante, Stegunterkante oder Stegmitte an. Da sich der Querschnitt aus zwei horizontalen Gurtblechen und einem vertikalen Stegblech zusammensetzt, ergibt sich für der quadrierte Abstand eines Querschnittspunktes zum Ursprung des Koordinatensystems r^2 aus Gleichung (6.50) als quadratische Funktion der Variablen x_{Blech} :

$$r^2(x_{Blech}) = r_0^2 + x_{Blech}^2 \tag{6.53}$$

Die Konstante r_0^2 in Gleichung (6.53) ist dabei der quadrierte Abstand des Querschnittspunktes an der Stelle $x_{Blech} = 0$. Mit den getroffenen Annahmen erhält man für die Gurte $r_0^2 = a^2$ und für den Steg $r_0^2 = 0$. Für K_{Blech}^{el} ergibt sich unter Berücksichtigung von

$$dA_{Blech} = t_{Blech} dx_{Blech} \tag{6.54}$$

und der Gleichungen (6.52) und (6.53):

$$K_{Blech}^{el} = Et_{Blech} \int_{x_{Blech,l}}^{x_{Blech,r}} (r_{Blech,0}^2 + x_{Blech}^2)(\varepsilon_{Blech,0} - \kappa_{Blech}x_{Blech}) dx_{Blech} \tag{6.55}$$

In Tabelle 11 sind das ausgewertete Integral und die für die Anwendung nötigen Formeln zur Ermittlung von $K_{...}^{el}$ eines einzelnen Blechs zusammengestellt.

	$\varepsilon_{...m} = \varepsilon_{...j}^T \cdot \varepsilon; \quad \kappa_{...} = \kappa_{...j}^T \cdot \varepsilon$
	$\varepsilon_{...j} = \varepsilon_{...m} + h_{...} \kappa_{...}; \quad \varepsilon_{...r} = \varepsilon_{...m} - h_{...} \kappa_{...}$
	$l_{...l} = h_{...} - e_{...}; \quad l_{...r} = h_{...} + e_{...}$
	$\varepsilon_{...0} = \varepsilon_{...l} \frac{l_{...r}}{h_{...}} + \varepsilon_{...r} \frac{l_{...l}}{h_{...}}$
	$K_{...}^{el} = Et_{...} \left[r_{...0}^2 \varepsilon_{...0} x - \frac{1}{2} r_{...0}^2 \kappa_{...} x^2 + \frac{1}{3} \varepsilon_{...0} x^3 - \frac{1}{4} \kappa_{...} x^4 \right]_{x=-l_{...l}}^{x=l_{...r}}$

Tabelle 11: Ermittlung von K^{el} für das Einzelblech

Nach Ermittlung von $K_{...}^{el}$ aller Bleche nach Tabelle 11 erhält man für den Gesamtquerschnitt K^{el} zu:

$$K^{el} = K_S^{el} + K_O^{el} + K_U^{el} \quad (6.56)$$

Um den tatsächlichen Wert des Integralterms K im Berechnungsquerschnitt nach Gleichung (6.51) berechnen zu können, muss noch der zugehörige Δ -Wert ΔK ermittelt werden, was durch ähnliches Vorgehen wie bei den Δ -Schnittgrößen geschieht. Für die Ermittlung von ΔK des Gesamtquerschnitts werden zunächst wieder die Einzelbleche betrachtet: dabei werden alle Dehnungen im Blech, die über die Fließdehnung ε_y bzw. die reduzierte Fließdehnung $\varepsilon_{y,red}$ hinausgehen und damit nach dem für die Bestimmung von $K_{...}^{el}$ zugrunde gelegten *Hooke'schen* Gesetz Spannungen erzeugen, die über der Fließgrenze f_y bzw. der reduzierten Fließgrenze $f_{y,red}$ liegen, berücksichtigt. Der quadrierte Abstand eines Querschnittspunktes vom Koordinatenursprung S kann wie bei der Bestimmung von $K_{...}^{el}$ der Gleichung (6.53) entnommen werden. Es müssen jedoch wie bei den Δ -Schnittgrößen Fallunterscheidungen getroffen werden, da die Formeln für $\Delta K_{...}$ vom vorliegenden Spannungsverlauf abhängig sind. In Tabelle 12 sind die für die Bestimmung von $\Delta K_{...}$ notwendigen Formeln und Fallunterscheidungen für das Einzelblech zusammengefasst. Nach Berechnung der Dehnungen an den Blechendpunkten, müssen die Bedingungen in der linken Spalte der Tabelle 12 überprüft werden. Sind die Bedingungen für einen der sechs Fälle erfüllt, wird die Formel für $\Delta K_{...}$ mit den in den Spalten A und B angegebenen Integrationsgrenzen ausgewertet. Für den Fall, dass die Bedingungen zweier Fälle erfüllt sind, muss superponiert werden.

Nach Bestimmung der Werte $\Delta K_{...}$ für alle Bleche, ergibt sich für den Gesamtquerschnitt:

$$\Delta K = \Delta K_S + \Delta K_O + \Delta K_U \quad (6.57)$$

Durch Subtraktion von ΔK vom elastischen Anteil K^{el} nach Gleichung (6.51) erhält man den Integralterm K . Nach numerischer Ableitung von K mit der Differentiationsmatrix kann der Zusatzterm für das integrierte Torsionsmoment M_{ξ}^{Last} in Gleichung (6.49) bestimmt werden.

		$\epsilon_{...m} = \epsilon_{...j}^T \cdot \epsilon; \quad \kappa_{...} = \kappa_{...j}^T \cdot \epsilon$				
		$\epsilon_{...j} = \epsilon_{...m} + h \kappa_{...}; \quad \epsilon_{...r} = \epsilon_{...m} - h \kappa_{...}$				
		$l_{...l} = h - e_{...}; \quad l_{...r} = h + e_{...}$				
		$\epsilon_{...0} = \epsilon_{...j} \frac{l_{...r}}{h_{...}} + \epsilon_{...r} \frac{l_{...l}}{h_{...}}$				
		$\Delta \epsilon_{...} = \epsilon_{...m} + C_2 \kappa_{...} h_{...} - \epsilon_y C_1$				
$\Delta K_{...} = Et \left[r_{...0}^2 \epsilon_{...0} x - \frac{1}{2} r_{...0}^2 \kappa_{...} x^2 + \frac{1}{3} \epsilon_{...0} x^3 + \frac{1}{4} \kappa_{...} x^4 - r_{...0}^2 C_1 \epsilon_y x - \frac{1}{3} C_1 \epsilon_y x^3 \right]_{x=A}^{x=B}$						
Bedingung	Verzerrungen	C_1	C_2	A	B	Hilfswert
$\epsilon_{...l} > \epsilon_y$ $\epsilon_{...r} > \epsilon_y$		+1		$-l_{...l}$	$l_{...r}$	
$\epsilon_{...l} < -\epsilon_y$ $\epsilon_{...r} < -\epsilon_y$		-1				
$\epsilon_{...l} > \epsilon_y$ $\epsilon_{...r} \leq \epsilon_y$		+1	+1	$-l_{...l}$	$-l_{...l} + \alpha h_{...}$	$\alpha_{...} = \frac{\Delta \epsilon_{...}}{C_2 \kappa_{...} h_{...}}$
$\epsilon_{...l} \leq \epsilon_y$ $\epsilon_{...r} > \epsilon_y$		-1	+1			
$\epsilon_{...l} < -\epsilon_y$ $\epsilon_{...r} \geq -\epsilon_y$		+1	-1	$l_{...r} - \alpha h_{...}$	$l_{...r}$	
$\epsilon_{...l} \geq -\epsilon_y$ $\epsilon_{...r} < -\epsilon_y$		-1	-1			

Tabelle 12: Ermittlung von ΔK für das Einzelblech

6.4.4 Gleichungssysteme

Die Gleichungssysteme für jeden Berechnungsquerschnitt r bleiben auf der linken Seite im Vergleich zur Theorie I. Ordnung unverändert. Die aus den Verzerrungen ermittelten Schnittgrößen (elastische Schnittgrößen und Δ -Schnittgrößen) werden für den Fall der Theorie II. Ordnung allerdings auf die Achsen in verformter Lage bezogen. Die Schnittgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen auf der rechten Seite werden gemäß den Formeln aus (6.46) bis (6.48) erweitert. Sie müssen bei der Rechnung durch Iteration ermittelt werden. Für jeden Berechnungsquerschnitt r ergibt sich dann folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_S \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \end{bmatrix} \kappa_\omega - \begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_\eta \\ \Delta M_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{Last} \\ M_y^{Last} - N^{Last} \int_0^x (w' + (w^v)') dx - M_\zeta^{Last} (\vartheta + \vartheta^v) \\ M_z^{Last} - N^{Last} \int_0^x (v' + (v^v)') dx + M_\eta^{Last} (\vartheta + \vartheta^v) \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

Die Ausgangsgleichung für das Gleichungssystem der Wölbverzerrungen nach Fließzonentheorie II. Ordnung stellt eine Erweiterung der Gleichung (4.74) nach Theorie I. Ordnung um den in (6.45) angegebenen Zusatzterm dar.

$$\begin{aligned} GI_T \int_0^x \int_0^x -\kappa_\omega dx dx + Eb_{44} \kappa_\omega &= \int_0^x M_x^{Last} dx - Eb_{41} \varepsilon_S - Eb_{42} \kappa_y - Eb_{43} \kappa_z + \Delta M_{\xi\xi} + \\ &+ \int_0^x \int_0^x -m_x^{II} dx dx + \int_0^x \int_0^x ((\kappa_\omega + \kappa_\omega^v) K - (\vartheta' + (\vartheta^v)') K' - (\kappa_z + \kappa_z^v) M_\eta^{Last} + (\kappa_y + \kappa_y^v) M_\zeta^{Last}) dx dx \end{aligned} \quad (6.59)$$

Die im Zusatzterm vorkommenden Integrationen in (6.59) werden mit den Integrationsmatrizen aus Kapitel 4.9.2 durchgeführt. Die Lösungen der Gleichungssysteme werden mit dem in Kapitel 4.9.4 beschriebenen Verfahren von *Newton-Raphson* genau wie bei Theorie I. Ordnung erhalten. Bei jedem Iterationsschritt müssen aber die Zusatzterme nach Theorie II. Ordnung berechnet und berücksichtigt werden, was aber für die Berechnung keinen wesentlichen Unterschied darstellt. Die Berechnung der Lastverformungsgrößen kann mit den in Kapitel 4.9.5 angegebenen Formeln erfolgen.

6.5 Berücksichtigung von Schubspannungen

Prinzipiell bleibt das Vorgehen zur Berücksichtigung der Schubspannungen auf das Systemverhalten nach Theorie I. Ordnung aus Kapitel 4.8 bestehen. Die Schubspannungsverteilung wird wieder für jedes Blech als konstant vorausgesetzt, um über die Vergleichsspannung für jedes Blech eine einheitliche reduzierte Fließspannung $f_{y,red}$ und daraus folgend eine reduzierte Fließdehnung $\varepsilon_{y,red}$ zu erhalten. Die Aufteilungen der Querkräfte und des primären Torsionsmoments bleiben ebenfalls erhalten. Es ist allerdings zu beachten, dass die für die Spannungen relevanten Schnittgrößen, jene in den ξ -, η -, ζ -Achsen sind.

Das primäre und das sekundäre Torsionsmoment wird in analoger Form zur Theorie I. Ordnung berechnet. Für das primäre Torsionsmoment um die ξ -Achse gilt gemäß Kapitel 3.1 die konstitutive Beziehung:

$$M_{\xi,p} = GI_T \vartheta' \quad (6.60)$$

Die Aufteilung des primären Torsionsmoments kann dem Kapitel 4.8.3 entnommen werden. Es muss dort lediglich der Index \dots_x mit dem Index \dots_ξ getauscht werden. Das sekundäre Torsionsmoment um die ξ -Achse $M_{\xi,s}$ kann mit Hilfe der Differentiationsmatrix aus der Ableitung des Bimoments $M_{\xi\xi}$ berechnet werden.

$$M_{\xi,s} = (M_{\xi\xi}^{el} - \Delta M_{\xi\xi})' \quad (6.61)$$

Die Querkräfte in den ξ -, η -, ζ -Achsen lassen sich durch die in (6.29) angegebene Umrechnungsbeziehung aus den statisch bestimmten Querkraften Q_y und Q_z sowie der Normalkraft N nach Bestimmung der Gesamtverformungen berechnen. Durch Inversion der Matrix in (6.29) erhält man:

$$\begin{bmatrix} N \\ Q_\eta \\ Q_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ (v+v')' & 1 & -(\vartheta+\vartheta') \\ (w+w')' & (\vartheta+\vartheta') & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

Die Querkraft in ζ -Richtung wird zur Gänze vom Stegblech aufgenommen:

$$Q_s = Q_\zeta \quad (6.63)$$

Für die Bestimmung der Gurtquerkräfte Q_O und Q_U stehen wie bei Theorie I. Ordnung wieder zwei Bedingungen zur Verfügung: zum einen ergibt die Summe der Querkräfte der Gurte die Querkraft des Gesamtquerschnitts in η -Richtung Q_η ; zum anderen bilden die Gurtquerkräfte Q_O und Q_U mit dem Abstand a das auf die ξ -Achse bezogene sekundäre Torsionsmoment $M_{\xi,s}$. Aus diesen Bedingungen erhält man für die Bestimmung der Gurtquerkräfte Q_O und Q_U :

$$Q_O = \frac{1}{2}Q_\eta + \frac{1}{2} \frac{M_{\xi,s}}{a} \quad (6.64)$$

$$Q_U = \frac{1}{2}Q_\eta - \frac{1}{2} \frac{M_{\xi,s}}{a} \quad (6.65)$$

Mit den für das Einzelblech bekannten Schnittgrößen, kann die Berechnung der konstanten Schubspannungen aus Gleichung (4.84) und danach die der reduzierten Fließspannung aus der Gleichung (4.77) erfolgen.

7 Untersuchungen zur Fließzonentheorie II. Ordnung

7.1 Allgemeines

Die Berechnungen in diesem Kapitel werden mit Hilfe eines in Visual-Basic erstellten Programms, das auf dem in Kapitel 5 verwendeten aufbaut, durchgeführt. Die in Kapitel 6 erläuterten Erweiterungen der Theorie II. Ordnung werden dabei so berücksichtigt, dass die Möglichkeit der Berechnung nach Theorie I. Ordnung (durch Nullsetzen der Erweiterungsterme für die Theorie II. Ordnung) gegeben ist. Im Zuge der Berechnung wird die Last inkrementell gesteigert. Durch dieses Vorgehen lassen sich die nicht vorweg bestimmbareren Traglasten nach Theorie II. Ordnung ermitteln; darüber hinaus werden für jede betrachtete Laststufe Ergebnisse geliefert. Mit diesen kann die Entwicklung der Zustandsgrößen bei Laststeigerung und vor allem bei Plastizierung beobachtet werden. Zur Veranschaulichung werden die Ergebnisse in Last-Zustandsgrößendiagrammen dargestellt.

In Kapitel 7.2 wird ein I-Träger unter doppelter Biegung und Normalkraft nach Theorie II. Ordnung untersucht. Es handelt sich dabei um das System aus [12], das schon in Kapitel 5.2 nach Fließzonentheorie I. Ordnung behandelt wird. Um den starken Einfluss der Theorie II. Ordnung zu verdeutlichen, wird der Traglastfaktor ν in diesem Beispiel auf die Traglast nach Theorie I. Ordnung bezogen. In Kapitel 7.3 werden Systeme behandelt, die im Rahmen eines Forschungsvorhabens der Stahlbaulehrstühle Aachen, Berlin und Bochum als Versuche durchgeführt wurden. Drei der in [4] veröffentlichten Versuche werden mit dem im Zuge dieser Arbeit erstellten Visual-Basic-Programms nachgerechnet. Die Ergebnisse werden mit den Versuchsergebnissen und mit jenen der begleitenden Berechnungen mit Abaqus aus [4] verglichen. Das erste System stellt eine Stütze in Form eines HEB-200, der durch eine zweiachsig außermittige Druckkraft belastet wird, dar. Beim zweiten und dritten untersuchten Versuch wird jeweils ein UPE-200 durch eine Einzellast in Feldmitte belastet, wobei die Versuchsanordnung des zweiten Systems so gewählt wurde, dass der Einfluss der Theorie II. Ordnung gering bleibt. Beim dritten System hingegen handelt es sich um einen stark biegedrillknickgefährdeten Träger. Die Abmessungen und Materialkennwerte der Systeme werden entsprechend den Angaben in [4] gewählt.

7.2 I-Träger unter doppelter Biegung und Normalkraft

In diesem Kapitel soll der in Kapitel 5.2 nach Theorie I. Ordnung berechnete I-Träger nach Theorie II. Ordnung berechnet werden. Die Systembeschreibung kann Tabelle 5 entnommen werden und wird deshalb hier nicht noch einmal angeführt. Die Lasten greifen im Schubmittelpunkt an und es werden keine Vorverformungen angesetzt. Um die Ergebnisse nach Theorie II. Ordnung mit jenen nach Theorie I. Ordnung vergleichen zu können, wird auch in diesem Kapitel die dort angegebene Traglastkombination als Bezugsgröße für den Lastfaktor ν herangezogen. Aus Symmetriegründen reicht zur Berechnung des Systems die Betrachtung einer Systemhälfte. Für die Last-Verformungsdiagramme werden die Verformungsgrößen des Querschnitts in Feldmitte betrachtet.

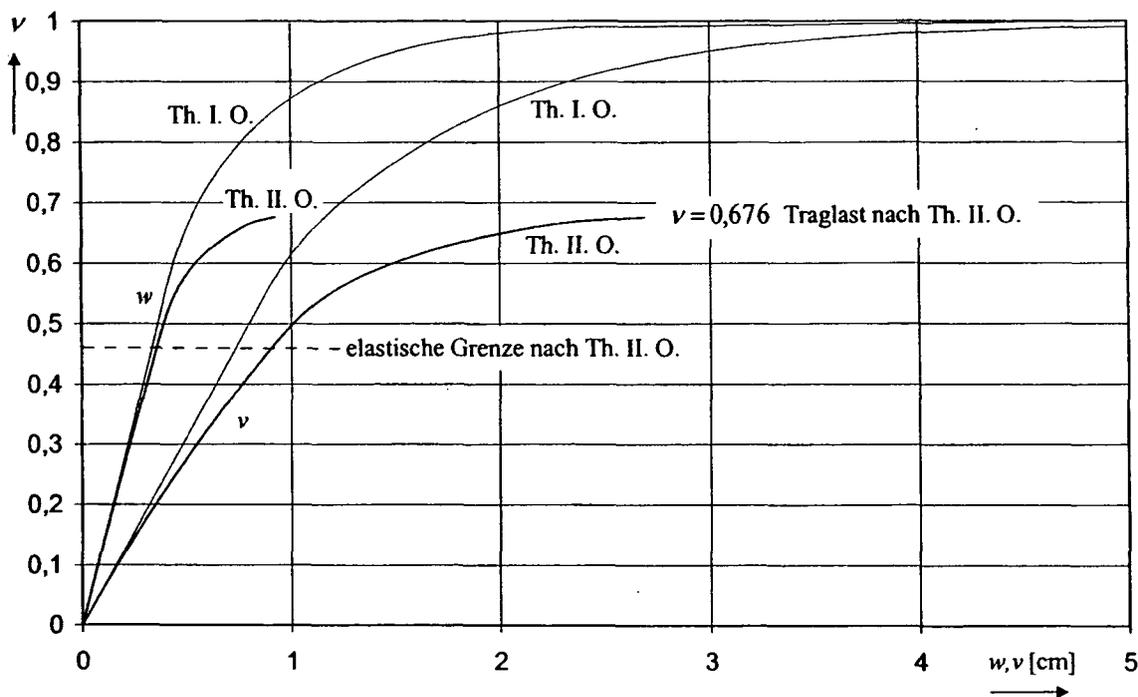


Abbildung 40: Last-Verschiebungsdiagramm 7.2

In Abbildung 40 sind die Last-Verschiebungskurven der Horizontalverschiebung ν und der Vertikalverschiebung w nach Theorie I. und II. Ordnung dargestellt. Im Gegensatz zu den Last-Verschiebungskurven nach Theorie I. Ordnung verlaufen jene nach Theorie II. Ordnung auch unterhalb der elastischen Grenze bei $\nu = 0,46$ (vgl. $\nu = 0,533$ bei Theorie I. Ordnung) nichtlinear. Die Horizontalverschiebung ν wächst dabei im Vergleich zur Vertikalverschiebung w unter Berücksichtigung der Theorie II. Ordnung stärker an. Dafür sind zum einen die

größeren Verschiebungen in horizontaler Richtung, die durch die Normalkraft zusätzliche Biegemomente um die ζ -Achse erzeugen, und zum anderen die durch die Torsionsverdrehung auftretende Verlagerung vom Biegemoment um die starke hin zum Biegemoment um die schwache Achse verantwortlich. Der bedeutendere Effekt der Theorie II. Ordnung in diesem Beispiel ist allerdings jener der vergrößerten Biegemomente durch die Normalkraft. Die Traglast nach Theorie II. Ordnung ergibt sich nach Abbildung 40 bei 67,6 % ($\nu = 0,676$) der Traglast nach Theorie I. Ordnung. In Tabelle 13 sind die Anteile der Biegemomente bei $\nu = 0,676$ entsprechend den Gleichung (6.47) und (6.48) aufgeschlüsselt:

$M_{\eta}^{Last} =$	M_y^{Last}	$-N^{Last} \int_0^x (w' + (w^v)') dx$	$-M_{\zeta}^{Last} (\vartheta + \vartheta^v)$
42,36 =	37,25	- (-7,00)	-1,89
$M_{\zeta}^{Last} =$	M_z^{Last}	$-N^{Last} \int_0^x (v' + (v^v)') dx$	$+M_{\eta}^{Last} (\vartheta + \vartheta^v)$
51,16 =	29,16	- (-20,43)	+1,57

Tabelle 13: Anteile der Biegemomente [kNm] bei $\nu = 0,676$

In Abbildung 41 ist das Last-Verdrehungsdiagramm für die Torsionsverdrehung des Querschnitts in Feldmitte nach Theorie I. und II. Ordnung angegeben. Zum Unterschied zur Theorie I. Ordnung kommt es nach Theorie II. Ordnung schon unterhalb der elastischen Grenze zu Verdrehungen, die allerdings gering bleiben und erst bei Plastizierung stark anwachsen.

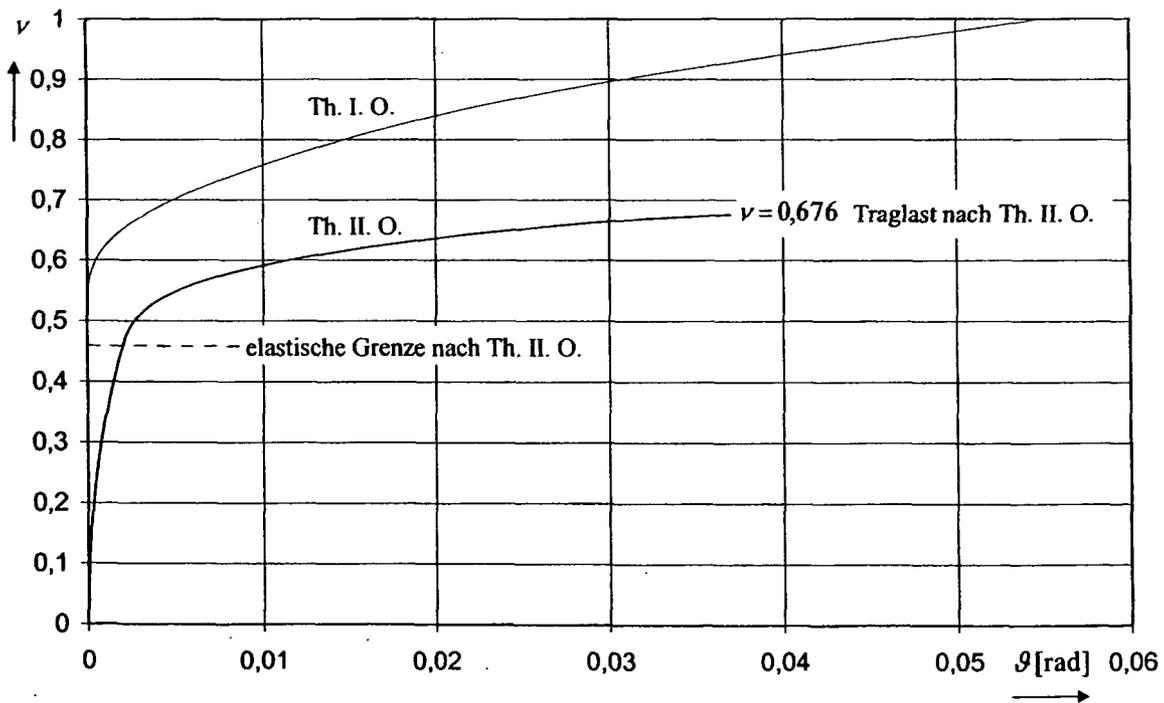


Abbildung 41: Last-Verdrehungsdiagramm 7.2

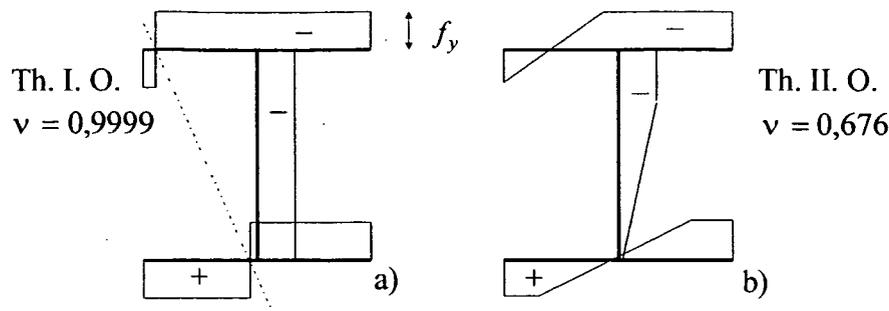
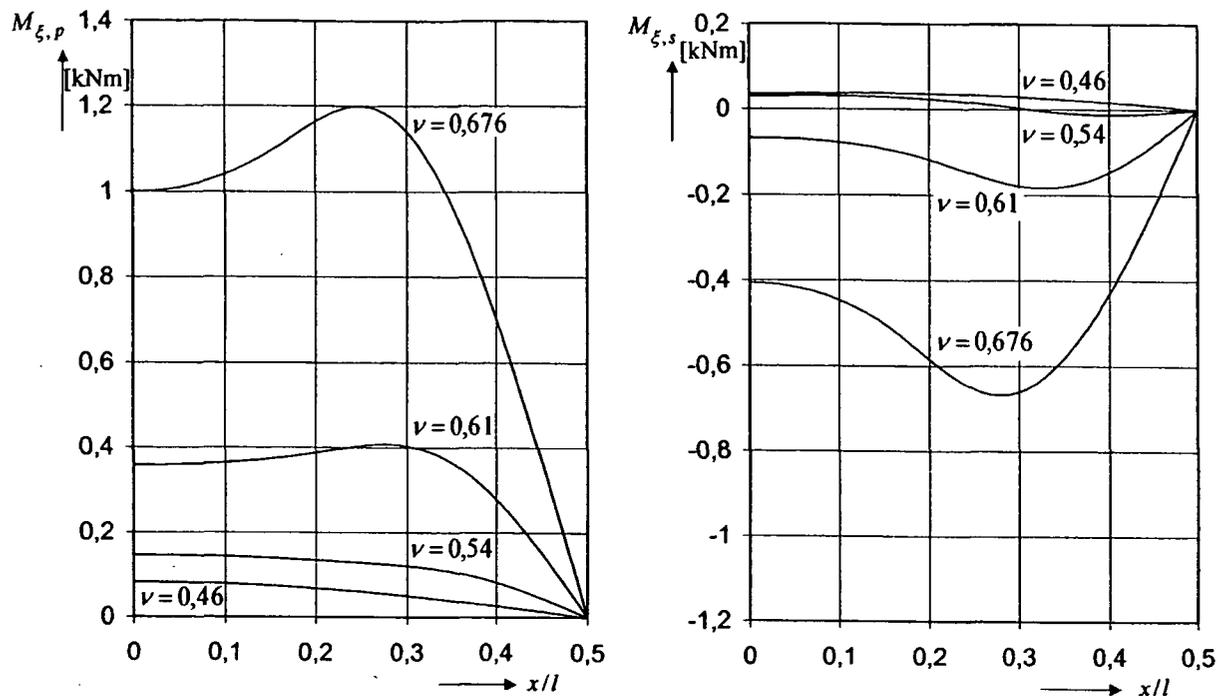


Abbildung 42: Spannungsverläufe unter Traglast nach Theorie I. und II. Ordnung

In Abbildung 42 sind die Spannungsverläufe des Querschnitts in Feldmitte unter Traglast nach Theorie I. und Theorie II. Ordnung dargestellt. Während sich bei Theorie I. Ordnung – wie in Abbildung 42a) gezeigt – eine vollplastische Spannungsverteilung einstellt, ist der Spannungsverlauf unter Traglast nach Theorie II. Ordnung in Abbildung 42b) nur teilplastisch. Das Versagen erfolgt nicht durch vollständiges Durchplastizieren des Querschnitts, sondern durch Instabilwerden des Gleichgewichts durch die als Druckkraft wirkende Normalkraft. Es kommt also nicht zu einem Querschnitts- sondern zu einem Systemversagen. Bei Systemen mit Längsdruck versagt ein nach Fließzonentheorie II. Ordnung berechnetes System stets durch Instabilwerden des Gleichgewichts. Die fortschreitende Plastizierung des Systems (im Querschnitt und in Stablängsrichtung) bei Laststeigerung vermindert die Systemsteifigkeit so weit, bis an der Laststufe der Traglast für das System kein stabiles Gleichgewicht mehr gefunden werden kann. Eine Berechnung der Traglast unter Berücksichtigung des Einflusses der Schubspannungen bringt keine signifikante Veränderung der Traglast ($\nu = 0,676$).

Bei einer Berechnung nach Theorie I. Ordnung erfährt der Träger durch die im Schubmittelpunkt angreifenden Lasten keine planmäßige Torsion ($M_T \equiv M_x \equiv 0$) und bleibt deswegen im elastischen Bereich frei von Torsionsverdrehungen. Bei einer Berechnung nach Theorie II. Ordnung hingegen entsteht schon unterhalb der elastischen Grenze ein Torsionsmoment M_ξ um die verformte Stabachse. Aus Gleichung (6.49) ist das Auftreten eines Torsionsmoments M_ξ aus den Zusatztermen unmittelbar ersichtlich. In Abbildung 43 sind das primäre und das sekundäre Torsionsmoment $M_{\xi,p}$ und $M_{\xi,s}$, die einen antimetrischen Verlauf über die Stablänge annehmen, über die halbe Stablänge bei vier verschiedenen Laststufen dargestellt. Für die elastische Grenze bei $\nu = 0,46$ ergeben sich relativ geringe primäre und sekundäre Torsionsmomente, die aber bei Plastizierung überproportional anwachsen. Besonders bei Annäherung an die Traglast (zwischen $\nu = 0,61$ und $\nu = 0,676$) steigen die Torsionsmomente erheblich an.

Abbildung 43: Entwicklung von $M_{\xi,p}$ und $M_{\xi,s}$ bei Laststeigerung

Während es bei Theorie I. Ordnung bei Belastungen oberhalb der elastischen Grenze durch die Gleichgewichtsbedingung $M_x = 0$ zu primären und sekundären Torsionsmomenten gleicher Größe kam, ergeben sich bei Theorie II. Ordnung primäre und sekundäre Torsionsmomente unterschiedlicher Größe. Bei der Darstellung der Torsionsmomente über die halbe Stablänge in Abbildung 43 wird für beide Diagramme der gleiche Maßstab verwendet. Es zeigt sich, dass das primäre Torsionsmoment unter Traglast fast doppelt so groß ist wie das sekundäre. Die Formen der Torsionsmomentenlinien unter Traglast in Abbildung 43 sind ähnlich zu jenen nach Theorie I. Ordnung in Abbildung 19; die Maxima für das primäre und sekundäre Torsionsmoment ergeben sich hier allerdings an unterschiedlichen Stellen des Stabes.

7.3 Vergleichsrechnung mit Versuchen

7.3.1 I-Träger unter zweiachsig außermittiger Druckkraft

Als erster von drei Versuchen aus [4] wird ein I-Träger unter zweiachsig außermittig angreifender Druckkraft ($e_y = 1,4 \text{ cm}$; $e_z = 2,9 \text{ cm}$) untersucht. Eine Systembeschreibung entsprechend der in [4] angegebenen Messwerte ist in Tabelle 14 angegeben.

		$b_O = 10,01 \text{ cm}$	$t_O = 1,508 \text{ cm}$	$e_O = 0$
		$a = 9,408 \text{ cm}$	$s = 0,875 \text{ cm}$	
		$b_U = 10,01 \text{ cm}$	$t_U = 1,508 \text{ cm}$	$e_U = 0$
$l = 283 \text{ cm}$	$E = 21000 \text{ kN/cm}^2$	$G_{Ersatz} = 9498 \text{ kN/cm}^2$	$f_y = 40,7 \text{ kN/cm}^2$	

Tabelle 14: Systembeschreibung 7.3.1

Um trotz Querschnittsidealisierung die Torsionssteifigkeit GI_T eines Walzprofils richtig zu berücksichtigen, wird für die Berechnung – wie in [4] – anstelle des wirklichen Schubmoduls G ein Ersatzschubmodul G_{Ersatz} verwendet. Mit diesem erhöhten Ersatzschubmodul ergibt sich in der Rechnung die tatsächlich vorhandene Torsionssteifigkeit des Walzprofils. Als Vorverschiebungen werden quadratische Parabeln in y - und z -Richtung angesetzt. Die Stiche der Parabeln werden entsprechend der vor dem Versuch gemessenen Imperfektionen zu $\max w^y = 0,006 \text{ cm}$ und $\max v^y = -0,015 \text{ cm}$ angesetzt [4]. Die bei der Versuchsanordnung vorhandenen Stirnplatten und Überstände an den Auflagern wirken für das System wie Wölbfedern. Damit treten an der Stelle der Gabellagerung Wölbmomente auf. Darüber hinaus kommt es durch die außermittig angreifende Normalkraft zu Lastwölbmomenten. Bei der Nachrechnung der Versuche mit Abaqus und auch in dieser Arbeit werden diese Effekte nicht berücksichtigt. Die Berechnung kann aus Symmetriegründen am halben System erfolgen. Es ergeben sich dann die in Abbildung 44 dargestellten Last-Verformungskurven für den Querschnitt in Stabmitte, die sehr gut mit den im Versuch gemessenen und mit Abaqus berechneten Ergebnissen übereinstimmen. Die Traglast ist bei einer Druckkraft von 1701 kN (vgl. 2611 kN bei Theorie I. Ordnung) erreicht. Die elastische Grenze ergibt sich bei einer Laststufe von $\nu = 0,83$. Die Verläufe der Last-Verformungskurven sind qualitativ ähnlich zu jenen in Kapitel 7.2.

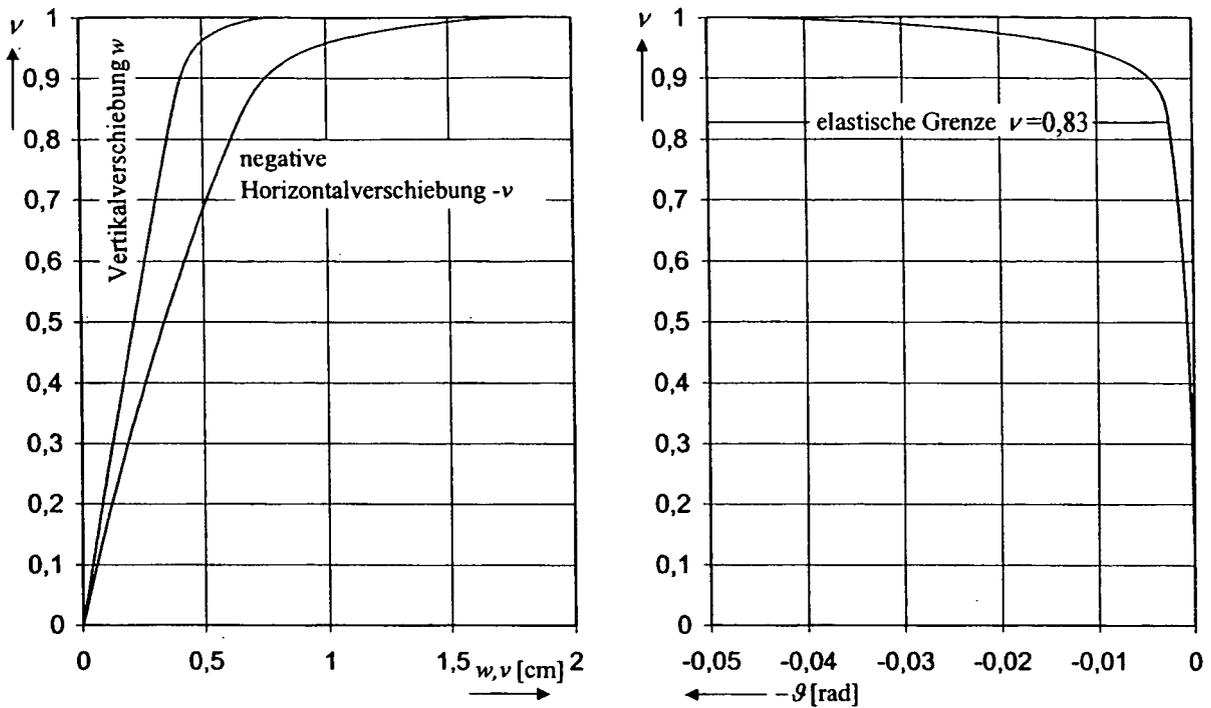


Abbildung 44: Last-Verformungsdiagramme 7.3.1

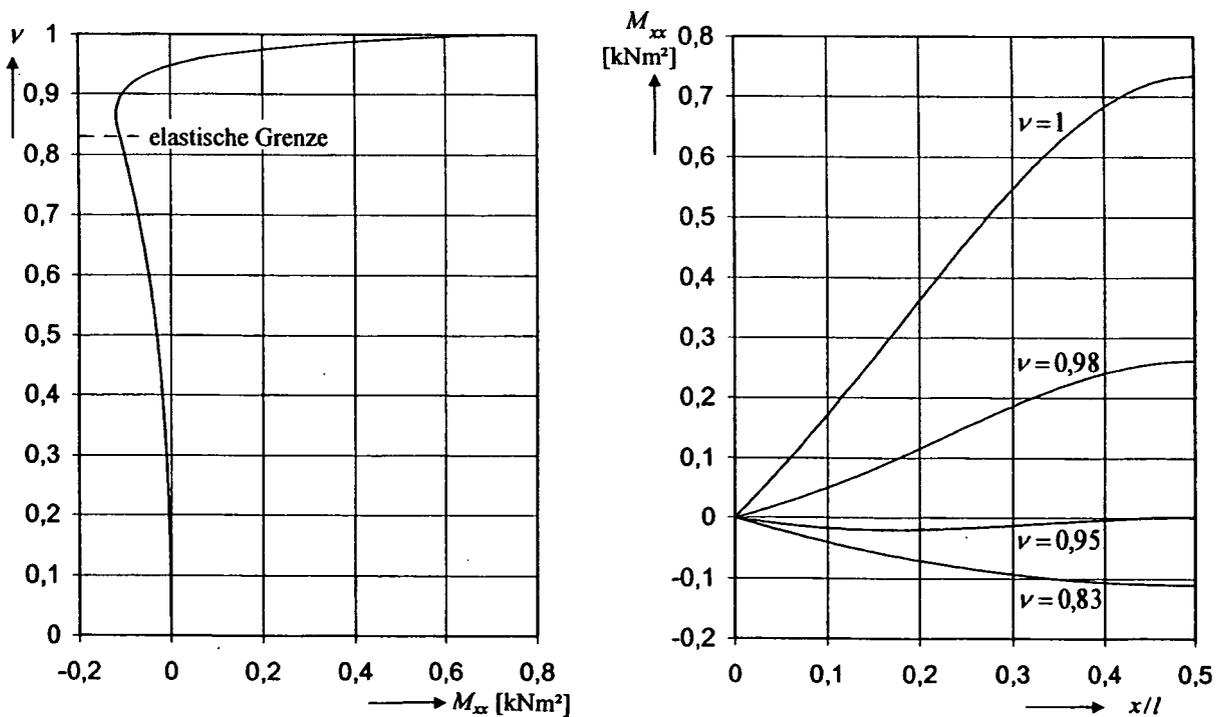


Abbildung 45: Bimoment M_{xx} bei Laststeigerung

In Abbildung 45 links ist die Entwicklung des Bimoments M_{xx} ($= M_{\omega}$) in Stabmitte bei Laststeigerung dargestellt. In Abbildung 45 rechts ist der Verlauf des Bimoments über die halbe Stablänge bei vier unterschiedlichen Laststufen angegeben. Das Bimoment M_{xx} nimmt im e-

lastischen Bereich über die gesamte Stablänge immer negative Werte an, da das negative Gurtmoment des Obergurts betragsmäßig größer ist als das ebenfalls negative Untergurtmoment ($M_{xx} = (M_O - M_U)a$). Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts sind in Abbildung 46 rechts die Dehnungen der Gurte für die Laststufen $\nu = 0,83$ (elastische Grenze), $\nu = 0,95$ und die der Traglast angegeben. Ab der elastischen Grenze kommt es im Obergurt zu Plastifizierungen, während der Untergurt noch weiter elastisch bleibt. Bei weiterer Laststeigerung wächst durch die bilineare Spannungsverteilung das Moment des Obergurts immer weniger an, während das Moment des fast bis zur Traglast elastischen Untergurts weiterhin zunimmt. Dieser Umstand resultiert in einem Vorzeichenwechsel des Bimoments M_{xx} bei $\nu = 0,95$ und einem Maximum unter Traglast.

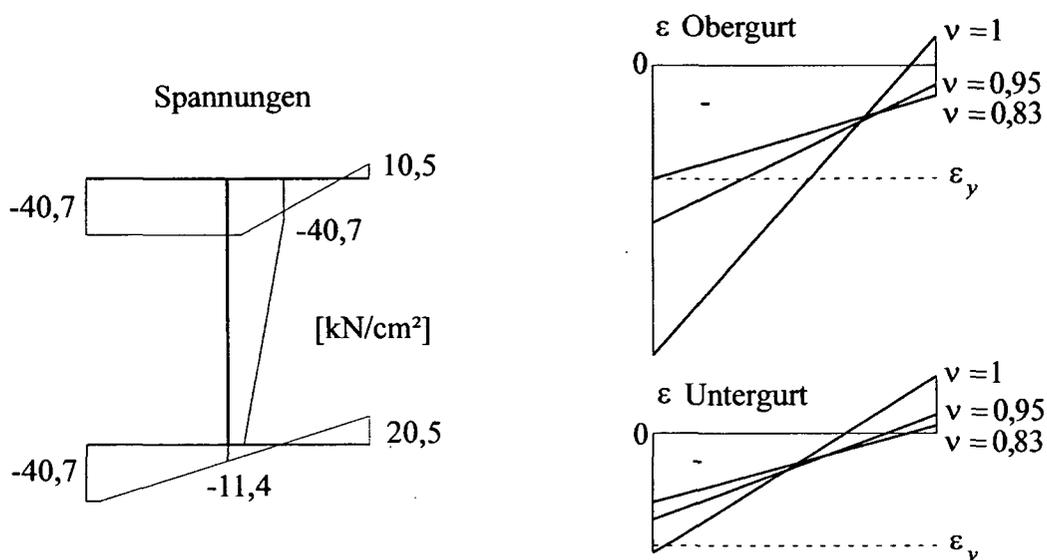


Abbildung 46: Spannungsverlauf unter Traglast; Dehnungen im Ober- und Untergurt

Bei $\nu = 0,95$ ergibt sich das Bimoment $M_{xx} (= M_\omega)$ zu 0. Dies bedeutet allerdings nicht wie bei Elastizitätstheorie, dass Ober- und Untergurt gleiche Krümmungen aufweisen und damit die Wölbverzerrung κ_ω gleich 0 ist, sondern dass die Differenz der Gurtmomente, die nunmehr aus einer bilinearen Spannungsverteilung berechnet werden, verschwindet ($\kappa_\omega \neq 0$). Nach Abbildung 45 rechts sind die Werte für das Bimoment bei der elastischen Grenze über den gesamten Stabverlauf negativ. Durch die Ausbreitung der plastischen Zone verändert sich der Verlauf des Bimoments aber grundlegend. Unter Traglast stellen sich schließlich über den gesamten Stabverlauf positive Werte für M_{xx} ein.

In Abbildung 46 links ist der Spannungsverlauf im Querschnitt in Feldmitte unter Traglast angegeben. Die Spannungen in Abbildung 46 links stimmen recht gut mit den in [4] angegebenen Spannungen aus der Berechnung mit Abaqus überein. Es kommt unter Traglast zu einer teilplastischen Spannungsverteilung. Die Querschnittstragfähigkeit wird nicht voll ausgenutzt; das System versagt – wie es schon beim Beispiel in Kapitel 7.2 der Fall war – durch Stabilitätsversagen. Die Systemsteifigkeit wird durch die Berücksichtigung von Fließzonen deutlich herab gesetzt; ein Versagen des Systems durch Stabilitätsverlust wird dadurch begünstigt. Die Fließzonen breiten sich in dem betrachteten Beispiel über die gesamte Trägerlänge aus.

Durch die Formulierung des Gleichgewichts am gesamtverformten System nach Theorie II. Ordnung kommt es zu einer Zunahme der Schnittgrößen im Vergleich zur Theorie I. Ordnung. Für das Biegemoment in Feldmitte um die starke Achse (M_η) ergibt sich unter Traglast eine Zunahme um 21 %; das Biegemoment um die schwache Achse (M_ζ) erfährt eine Zunahme von 136 %! Diese Werte sowie die Herabsetzung der Traglast auf 65 % der Traglast nach Theorie I. Ordnung zeigen, dass für dieses Beispiel eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung unerlässlich ist.

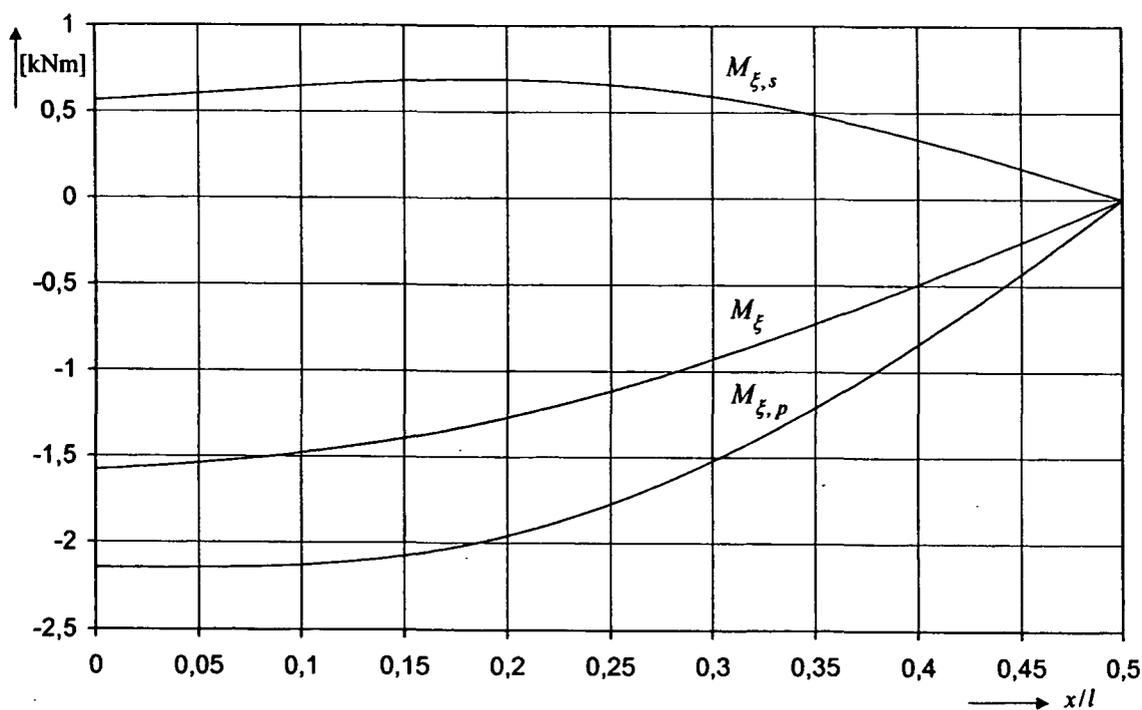


Abbildung 47: Torsionsmomente unter Traglast

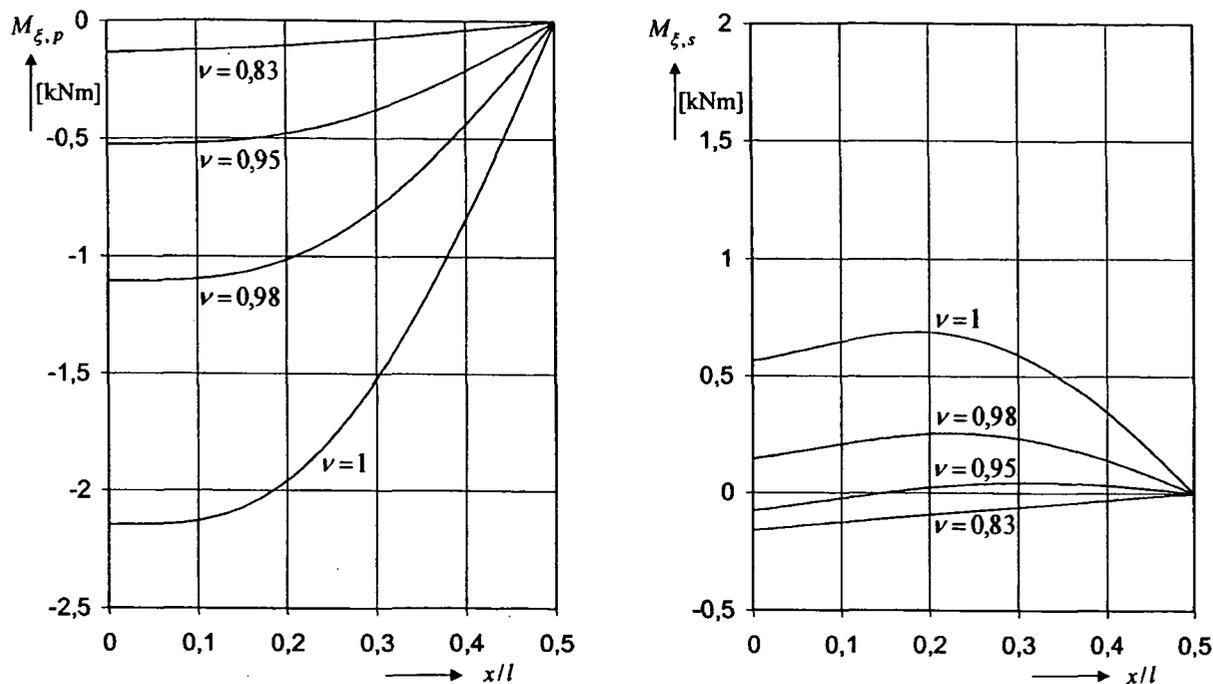


Abbildung 48: Entwicklung von $M_{\xi,p}$ und $M_{\xi,s}$ bei Laststeigerung

In Abbildung 47 sind die Verläufe des primären, des sekundären und des Gesamttorsionsmomentes über die halbe Stablänge dargestellt (Verlauf antimetrisch). Als grundlegender Unterschied zur Theorie I. Ordnung ist das Torsionsmoment um die verformte Stabachse M_{ξ} nicht gleich 0 und es ergeben sich primäre und sekundäre Torsionsmomente unterschiedlicher Größe, wobei der Maximalwert des primären Torsionsmoments etwa dreimal so groß ist wie der des sekundären Torsionsmoments. Bei der Darstellung der Entwicklung der Torsionsmomente $M_{\xi,p}$ und $M_{\xi,s}$ in Abbildung 48 erkennt man, dass diese erst ab der elastischen Grenze bei $\nu = 0,83$ und besonders bei Annäherung an die Traglast stark anwachsen. In Tabelle 15 sind die Ergebnisse aus [4] den Ergebnissen dieser Arbeit gegenübergestellt.

Ergebnisse	des Versuchs	mit Abaqus	dieser Arbeit
Traglast P_x [kN]	-1706	-1671	-1701
ϑ [rad]	-0,035	-0,046	-0,0453
M_{η} [kNm]	-	61,91	59,44
M_{ζ} [kNm]	-	-60,04	-56,20
$M_{\omega} \hat{=} -M_{xx}$ [kNm ²]	-	-0,9404	-0,7338

Tabelle 15: Ergebnisse 7.3.1 in Stabmitte

7.3.2 U-Träger unter Einzellast

7.3.2.1 Einzellast in Feldmitte – Lastangriff unter Schubmittelpunkt M

Beim in diesem Kapitel betrachteten U-Träger handelt es sich um das Beispiel 4 aus [4]. Die zur Berechnung notwendigen Werte zur Beschreibung des Systems (UPE-200) sind in Tabelle 16 zusammengestellt.

	$b_O = 4,053 \text{ cm}$	$t_O = 1,052 \text{ cm}$	$e_O = 4,053 \text{ cm}$
	$a = 9,489 \text{ cm}$	$s = 0,602 \text{ cm}$	
	$b_U = 4,053 \text{ cm}$	$t_U = 1,052 \text{ cm}$	$e_U = 4,053 \text{ cm}$
$l = 89,85 \text{ cm}$	$E = 21000 \text{ kN/cm}^2$	$G_{Ersatz} = 8583 \text{ kN/cm}^2$	$f_y = 40,75 \text{ kN/cm}^2$

Tabelle 16: Systembeschreibung 7.3.2.1

Als Vorverformung wird eine Verschiebung in Form einer quadratischen Parabel in y -Richtung angenommen. Der durch Messungen vor dem Versuch ermittelte Stich dieser Parabel in Feldmitte beträgt $-0,3 \text{ cm}$. Da die Last 44 cm unterhalb des Schubmittelpunktes eingeleitet wird ($e_z = -44 \text{ cm}$), ist der Einfluss des Biegedrillknickens gering und man erhält so eine Traglast von $P_z^T = 391 \text{ kN}$, die nur minimal unter der Traglast nach Theorie I. Ordnung liegt. Der in Abbildung 49 dargestellte Spannungszustand unter Traglast nach Theorie II. Ordnung ist zwar teilplastisch, die Bereiche elastischer Dehnungen sind aber minimal. Da die Traglast nach Theorie II. Ordnung bei $99,8 \%$ der Traglast nach Theorie I. Ordnung liegt, kann man praktisch von Vollplastizität sprechen.

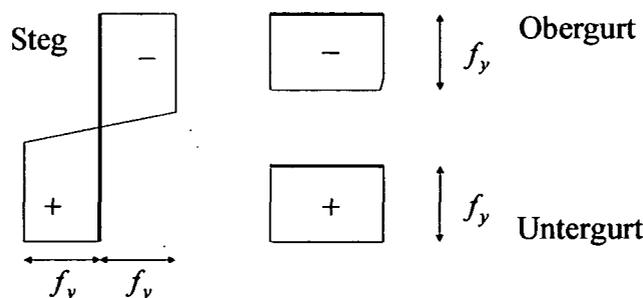


Abbildung 49: Spannungsverlauf unter Traglast

In Tabelle 17 sind die Ergebnisse des Versuchs, der Berechnung mit Abaqus und jene dieser Arbeit zusammengestellt.

Ergebnisse	des Versuchs	mit Abaqus	dieser Arbeit
Traglast P_z [kN]	407,9	393,4	391
ϑ [rad]	-0,022	-0,001	-0,001
M_η [kNm]	-	87,93	87,83
M_ζ [kNm]	-	0	0
M_ω [kNm ²]	-	-0,2291	-0,2408

Tabelle 17: Ergebnisse 7.3.2.1 in Stabmitte

7.3.2.2 Einzellast in Feldmitte – Lastangriff über Stegswerepunkt S

In diesem Kapitel wird das Beispiel 5 aus [4] untersucht. Es handelt sich dabei wie in Kapitel 7.3.2.1 um einen U-Träger (UPE-200); allerdings wurde die Versuchsanordnung so gewählt, dass sich die Effekte der Theorie II. Ordnung stark auswirken. Das System und die Belastung sind in Tabelle 18 angegeben.

	$b_0 = 3,972 \text{ cm}$	$t_0 = 1,131 \text{ cm}$	$e_0 = 3,972 \text{ cm}$
	$a = 9,500 \text{ cm}$	$s = 0,618 \text{ cm}$	
	$b_U = 3,972 \text{ cm}$	$t_U = 1,131 \text{ cm}$	$e_U = 3,972 \text{ cm}$
$l = 280 \text{ cm}$	$E = 21000 \text{ kN/cm}^2$	$G_{Ersatz} = 8477 \text{ kN/cm}^2$	$f_y = 40 \text{ kN/cm}^2$

Tabelle 18: Systembeschreibung 7.3.2.2

Die Last P_z greift in diesem Beispiel 21,5 cm oberhalb des Stegblechmittelpunkts an ($e_z = 21,5 \text{ cm}$). Der Träger wird somit durch Biegung und Torsion beansprucht. Die veränderte Lage des Kraftangriffspunktes und die größere Systemlänge im Vergleich zum Beispiel in 7.3.2.1 führen zu einer Erhöhung der Biegedrillknickgefahr. Als Vorverformungen werden in diesem Beispiel sowohl Vorverschiebungen in y - als auch in z -Richtung angenommen. Die durch Messungen ermittelten Stiche der Parabeln betragen $\max v^v = 0,357 \text{ cm}$ und $\max w^v = -0,082 \text{ cm}$. In Abbildung 50 sind die Last-Verformungsdiagramme dieses Beispiels angegeben. In den Last-Verformungsdiagrammen ist die qualitative Ähnlichkeit der Horizontalverschie-

bungs- und Torsionsverdrehungslinien auffällig. Dieser Sachverhalt ergibt sich dadurch, dass die auftretenden Verdrehungen eine Verlagerung der Biegemomente von der starken hin zur schwachen Achse bewirken. Die Traglast ergibt sich bei einer Last $P_z^T = 53,0 \text{ kN}$. Für die Last-Verformungsdiagramme werden die Verformungsgrößen des Querschnitts in Feldmitte betrachtet:

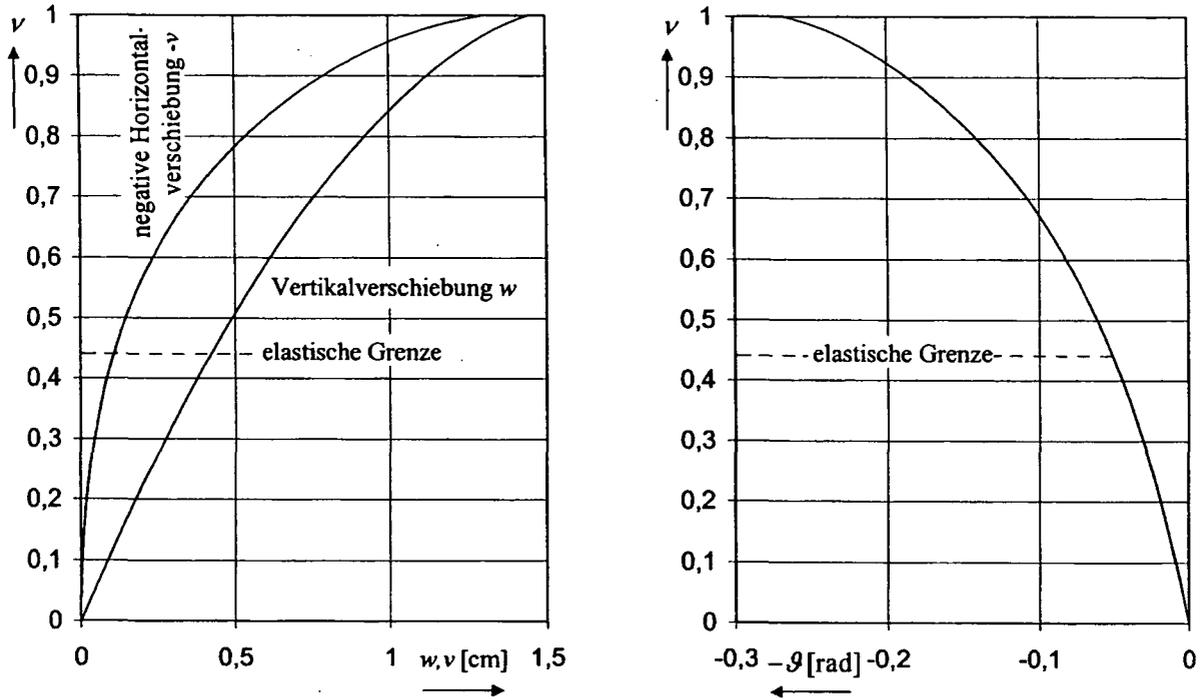


Abbildung 50: Last-Verformungsdiagramme 7.3.2.2

In Tabelle 19 sind die Anteile der Biegemomente angegeben. Man sieht, dass das Biegemoment um die schwache Achse ausschließlich von der Verdrehung des Querschnitts abhängt.

$M_\eta^{Last} =$	M_y^{Last}	$-N^{Last} \int_0^x (w' + (w^v)') dx$	$-M_\zeta^{Last} (\vartheta + \vartheta^v)$
34,64 =	37,10	-0	-2,46
$M_\zeta^{Last} =$	M_z^{Last}	$-N^{Last} \int_0^x (v' + (v^v)') dx$	$+M_\eta^{Last} (\vartheta + \vartheta^v)$
-9,24 =	0	-0	-9,24

Tabelle 19: Anteile der Biegemomente [kNm] unter Traglast

Die elastische Grenze ergibt sich durch den Einfluss der Torsion schon bei 44 % der Traglast. Durch die weit über dem Steg angreifende Last ist das System sehr stabilitätsgefährdet. Der Einfluss der Theorie II. Ordnung (Stabilitätsversagen) ist bei diesem System wesentlich aus-

geprägter als beim System in 7.3.2.1. Die Spannungsverteilung im Mittelquerschnitt ist teilplastisch; der Querschnitt ist bei weitem noch nicht durchplastiziert. Vergleicht man die Traglast nach Theorie I. und II. Ordnung, so ergibt sich die Traglast nach Theorie II. Ordnung bereits bei 41 % der Traglast nach Theorie I. Ordnung. Die Ergebnisse des Versuchs, der Berechnung mit Abaqus und dieser Arbeit sind in Tabelle 20 zusammengestellt.

Ergebnisse	des Versuchs	mit Abaqus	dieser Arbeit
Traglast P_z [kN]	51,2	53,5	53,0
ϑ [rad]	-0,32	-0,27	-0,27
M_η [kNm]	-	36,05	34,64
M_ζ [kNm]	-	-9,49	-9,24

Tabelle 20: Ergebnisse 7.3.2.2 in Stabmitte

In Abbildung 51 sind die Verläufe des primären, sekundären und Gesamttorsionsmoments unter Traglast über die halbe Stablänge dargestellt. Das Torsionsmoment M_ζ ergibt sich ausschließlich aus der Wirkung der Fließzonentheorie II. Ordnung ($M_x = 0$)! Der Wert des Torsionsmomentes M_ζ bei $x/l = 0,5$ stellt die Hälfte des eingepprägten Torsionsmoments durch die am gesamtverformten System wirkende Kraft P_z dar.

$$M_\zeta(x = 0,5l) = -\frac{1}{2} P_z e_z \vartheta = -1,54 \text{ kNm} \quad (7.1)$$

Das Torsionsmoment in Feldmitte wird zur Gänze durch das sekundäre Torsionsmoment abgetragen. Die qualitative Aufteilung in primäres und sekundäres Torsionsmoment ändert sich im Verlauf der Belastungsgeschichte in diesem Beispiel nicht.

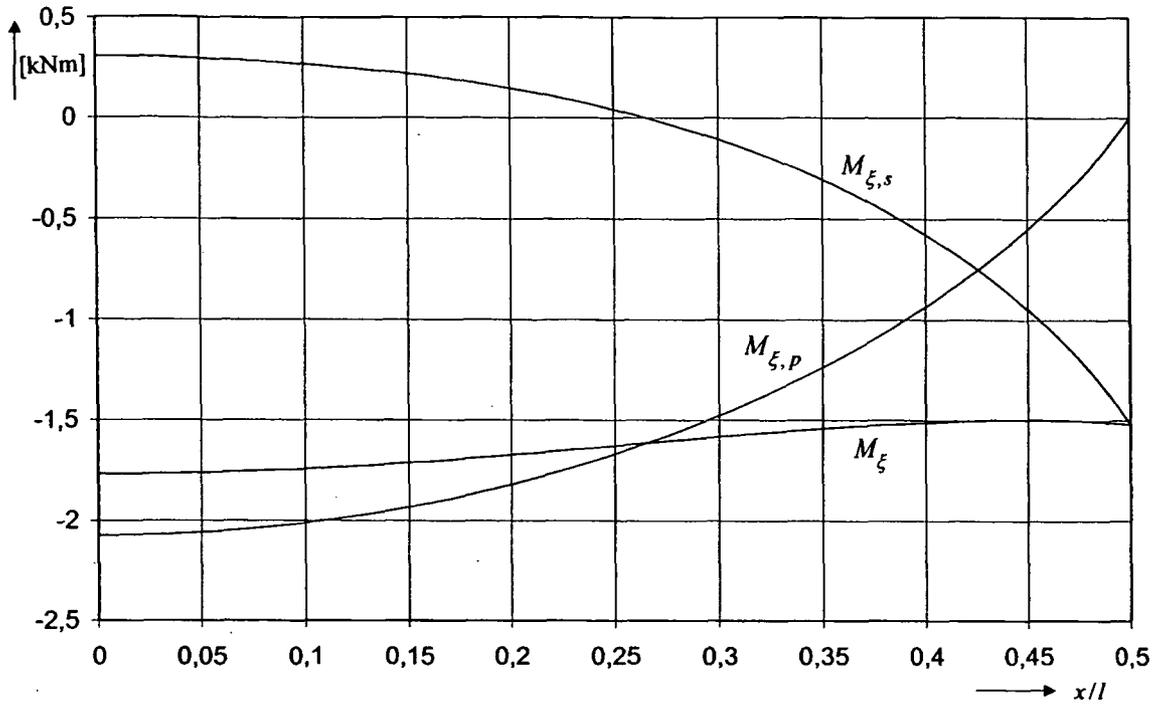


Abbildung 51: Torsionsmomente unter Traglast

8 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Konzept zur Berechnung von Stäben mit offenem Dreiblechquerschnitt, die bis zu ihrer Tragfähigkeit beansprucht werden, entwickelt. Bei Belastungen oberhalb der elastischen Grenze wird dabei das nichtlineare (linear elastisch – ideal plastische) Materialverhalten im gesamten plastizierten Bereich des Stabes berücksichtigt. Man spricht deshalb von der Fließzonentheorie. Im Zuge der Formulierung der Fließzonentheorie wird das Gleichgewicht sowohl am unverformten (Fließzonentheorie I. Ordnung) als auch am verformten System (Fließzonentheorie II. Ordnung) gebildet. Die zur Lösung herangezogenen Gleichungen stellen die durch die Verzerrungsgrößen dargestellten Schnittgrößen jenen aus den Gleichgewichtsbedingungen gegenüber. Diese Bestimmungsgleichungen werden für die Normalkraft und die Momente um alle drei Achsen formuliert. Für das Momentengleichgewicht um die Stablängsachse werden die Effekte der Wölbkrafttorsion berücksichtigt. Eine Kenntnis des Schwerpunkts, Schubmittelpunkts sowie der Trägheitshauptachsen ist beim vorgestellten Konzept nicht notwendig. Die Nichtlinearität des Materials wird dabei durch so genannte Δ -Werte in den Bestimmungsgleichungen erfasst. Diese Δ -Werte stellen die Differenz zwischen den elastischen Schnittgrößen (nach *Hooke'schem* Gesetz) und den tatsächlich wirkenden Schnittgrößen dar. Die numerische Lösung der Bestimmungsgleichungen erfolgt mit dem Verfahren von *Newton-Raphson*. Je nach Feinheit der Diskretisierung lassen sich damit beliebig genaue Ergebnisse erreichen. Da die präsentierte Theorie für eine Handrechnung ungeeignet ist, wird sie mittels eines Computerprogramms für praktische Beispiele anwendbar gemacht.

Anhand von Berechnungen ausgewählter Beispiel wird zunächst die Charakteristik der Fließzonentheorie I. Ordnung und später jene der Fließzonentheorie II. Ordnung gezeigt; dabei auftretende Phänomene werden aufgezeigt und diskutiert. Mittels der Fließzonentheorie I. Ordnung wird gezeigt, dass bei Belastung des Systems über die elastische Grenze (Plastizierung) der Schubmittelpunkt (nach Elastizitätstheorie) seine ausgezeichneten Eigenschaften verliert. Durch Berechnungen bis zur Traglast können Interaktionsbeziehungen überprüft werden. Unter Traglast stellt sich nach Fließzonentheorie I. Ordnung im meistbeanspruchten Querschnitt immer eine vollplastische Spannungsverteilung ein. Mit ihr ist die Versagensachse und damit der Versagensmechanismus festgelegt. Ein durch die vollplastische Spannungsverteilung erchenbares Wölbmoment ist dabei für die Interaktionsbeziehung ohne Bedeutung. Des Weiteren wird festgestellt, dass die Durchbiegung unter Traglast für den Lastfall einer Einzellast

endliche Werte annimmt. Die Behandlung des U-Trägers unter Gleich- und Einzellast zeigt, dass bei Belastung über die elastische Grenze das nichtlineare Materialverhalten nicht abschätzbare Phänomene mit sich bringt.

Die Untersuchungen nach Fließzonentheorie II. Ordnung zeigen, dass bei einer Berechnung nach Fließzonentheorie das Gleichgewicht stets am verformten System formuliert werden sollte, da die nach Fließzonentheorie II. Ordnung errechnete Traglast eines Systems stets unter jener nach Fließzonentheorie I. Ordnung liegt. Maßgebend für die Traglast nach Theorie II. Ordnung ist dabei nicht (wie bei Theorie I. Ordnung) das Versagen eines Querschnitts durch seine Querschnittstragfähigkeit, sondern immer das Versagen des Systems durch Stabilitätsverlust.

Abschließend kann festgehalten werden, dass bei Belastungen oberhalb der elastischen Grenze teilweise unerwartete Effekte auftreten, die nur durch eine Berechnung mittels Fließzonentheorie erfasst werden können. Während die gebräuchlichere Fließgelenktheorie (Traglastverfahren) zur Berechnung von Traglasten verwendet werden kann, muss zur Beschreibung des Systemverhaltens unbedingt die Fließzonentheorie zur Anwendung kommen.

Literaturverzeichnis

- [1] BÄCKLUND, J., AKESSN, B.: Plastisches Saint-Venantsches Torsionswiderstandsmoment offener Walzprofile; Der Stahlbau 10 (1972), S. 302-306
- [2] HEYMANN, J., DUTTON, V. L.: Plastic Design of Plate Girders with Unstiffened Webs; Welding&Metal Fabrication, July 1954, S. 265-272
- [3] KINDMANN, Rolf, FRICKEL, Jörg: Elastische und plastische Querschnittstragfähigkeit, Grundlagen, Methoden, Berechnungsverfahren, Beispiele; Ernst&Sohn Verlag, Berlin 2002
- [4] KINDMANN, Rolf, WOLF, Christian: Ausgewählte Versuchsergebnisse und Erkenntnisse zum Tragverhalten von Stäben aus I- und U-Profilen; Der Stahlbau 73 (2004), Heft 9, S. 683-692
- [5] MANG, Herbert, HOFSTETTER, Günter: Festigkeitslehre; Springer-Verlag, Wien u.a., 2000
- [6] MESKOURIS, Konstantin, HAKE, Erwin: Statik der Stabtragwerke, Einführung in die Tragwerkslehre, Springer-Verlag, Berlin u.a., 1999
- [7] PILGRAM, Wilhelm: Elastizitätstheorie II. Ordnung für den räumlich beanspruchten Stab nach dem Reduktionsverfahren; Dissertation am Institut für Baustatik, TU Wien, 2002
- [8] ROIK, K., CARL, J., LINDNER, J.: Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe; Ernst&Sohn Verlag, Berlin, 1972
- [9] ROWOHL, Dominic: Fließzonentheorie für offene Profile am Einzelstab; Dissertation am Institut für Baustatik, TU Wien, 2005
- [10] RUBIN, Helmut: Interaktionsbeziehungen zwischen Biegemoment, Querkraft und Normalkraft für einfachsymmetrische I- und Kasten-Querschnitte bei Biegung um die starke und für doppelsymmetrische I-Querschnitte bei Biegung um die schwache Achse; Der Stahlbau 47 (1978), Heft 3, S. 76-85
- [11] RUBIN, Helmut: Interaktionsbeziehungen für doppelsymmetrische I- und Kasten-Querschnitte bei zweiachsiger Biegung und Normalkraft; Der Stahlbau 47 (1978) Heft 5 und 6, S. 145-151 und S. 174-181
- [12] RUBIN, Helmut: Das Tragverhalten von I-Trägern unter N -, M_y - und M_z -Beanspruchung nach Fließzonentheorie I. und II. Ordnung unter Berücksichtigung der Torsionseinflüsse; Der Stahlbau 70 (2001), Heft 11, S. 846-856
- [13] RUBIN, Helmut: Zur Berechnung von Stäben mit 3-Blech-Querschnitt unter Normalkraft, doppelter Biegung und Wölbkrafttorsion, Der Stahlbau 72 (2003), Heft 12, S. 853-865

- [14] RUBIN, Helmut: Skriptum zur Vorlesung Baustatik 1; Institut für Baustatik, TU Wien, 2004
- [15] RUBIN, Helmut: Zur plastischen Tragfähigkeit von 3-Blech-Querschnitten unter Normalkraft, doppelter Biegung und Wölbkrafttorsion, Der Stahlbau 74 (2005), Heft 1, S. 47-61
- [16] WEBER, Michail: Traglasten von torsionsbeanspruchten dünnwandigen Stäben; Der Stahlbau 72 (2003), Heft 4, S. 254-261

Weiterführende Literatur

- [17] BOCHMANN, Fritz: Statik im Bauwesen, Band 2: Festigkeitslehre; 16., stark bearbeitete Auflage; Verlag für Bauwesen, Berlin, 1995
- [18] DIN 18800 (11.90): Stahlbauten; Teil 1: Bemessung und Konstruktion, Teil 2: Stabilitätsfälle, Knicken von Stäben und Stabwerken, Teil 3: Stabilitätsfälle, Plattenbeulen
- [19] DREWS, Detlef, KADDIK, Michael, SCHWAB, Heinz: GoTo Visual Basic 6; Addison-Wesley-Longman Verlag, Bonn, 1999
- [20] HAUPT, Horst F.: Visual Basic Referenz; 2. überarbeitete und erweiterte Auflage; Franzis-Verlag, Poing, 1999
- [21] KINDMANN, Rolf, FRICKEL, Jörg: Grenztragfähigkeit von I-Querschnitten für beliebige Schnittgrößen; Der Stahlbau 68 (1999), Heft 4, S. 290-301
- [22] KINDMANN, Rolf, FRICKEL, Jörg: Grenztragfähigkeit von häufig verwendeten Stabquerschnitten für beliebige Schnittgrößen; Der Stahlbau 68 (1999), Heft 10, S. 817-828
- [23] KINDMANN, Rolf, FRICKEL, Jörg: Zweite Zuschrift zu „Grenztragfähigkeit von I-Querschnitten für beliebige Schnittgrößen“; Der Stahlbau 69 (2000), Heft 3, S. 206-310
- [24] MUTSCH, Gerald, REITINGER, Michael: Das Programmierbuch Visual Basic 4.0; 1.Auflage; SYBEX-Verlag, Düsseldorf, 1996
- [25] OSTERIEDER, Peter: Tragfähigkeit von Stahlquerschnitten mit Schnittkraftinteraktion; Brandenburgische Technische Universität Cottbus
- [26] OSTERIEDER, Peter, WERNER, Frank, KRETZSCHMAR, Joachim: Biegedrillknicknachweis Elastisch-Plastisch für gewalzte I-Querschnitte; Der Stahlbau 67 (1998), Heft 10, S. 794-801
- [27] PETERSEN, Christian: Stahlbau, Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten; Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 1988
- [28] RUBIN, Helmut: Baustatik ebener Stabwerke, Stahlbau Handbuch; Band 1, Teil A; Stahlbau-Verlagsgesellschaft mbH, Köln, 1993

-
- [29] RUBIN, Helmut: Stellungnahme zu Rubin: Grundlage für die N -, M_y - und M_z -Interaktionsbeziehungen von I-Querschnitten, Der Stahlbau 70 (2001), Heft 4, S. 300-302
- [30] RUBIN, Helmut, SCHNEIDER, Klaus-Jürgen: Baustatik Theorie I. und II. Ordnung; 4., neu bearbeitete und erweiterte Auflage; Werner-Verlag; Düsseldorf 2002
- [31] SCHNEIDER, Klaus-Jürgen: Baustellen-Tafeln; 1. Auflage; Bauwerk-Verlag, Berlin, 2000
- [32] SCHNEIDER, Klaus-Jürgen: Bautabellen für Ingenieure; 16. Auflage; Werner-Verlag, München, 2004
- [33] ZEIDLER, Eberhard: Teubner-Taschenbuch der Mathematik; 1. Auflage; Teubner-Verlag, Leipzig, 1996

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Idealisiertes Spannungs-Dehnungsdiagramm	9
Abbildung 2: Betrachteter Querschnitt und Sonderfälle	10
Abbildung 3: Koordinatensystem, Verschiebungsgrößen und Schnittgrößen	11
Abbildung 4: Betrachtete Einwirkungen	13
Abbildung 5: Allgemeiner Dehnungszustand des Querschnitts	19
Abbildung 6: Kinematische Beziehungen für die Verschiebungen	22
Abbildung 7: Kinematische Beziehung für die Verdrehungen um die x -Achse	23
Abbildung 8: Kinematische Beziehungen für die Verdrehungen um die y - und z -Achse.....	23
Abbildung 9: Verzerrungszustand und elastische Schnittgrößen des Einzelblechs	25
Abbildung 10: Elastische Teilschnittgrößen	27
Abbildung 11: Momentengleichgewicht am Obergurt.....	28
Abbildung 12: Verschiebung der Bezugsachse für das Torsionsmoment.....	33
Abbildung 13: Spannungsverteilungen für SG^{el} , SG und ΔSG	38
Abbildung 14: Vergleichsspannung σ_V	43
Abbildung 15: Hohlkastenmodell für konstante Schubspannungen in einem Blech	45
Abbildung 16: Numerische Integration für einen allgemeinen Stab der Länge l	48
Abbildung 17: Last-Verschiebungsdiagramm 5.2.....	62
Abbildung 18: Last-Verdrehungsdiagramm 5.2.....	62
Abbildung 19: Entwicklung von $M_{x,p}$ bei Laststeigerung	63
Abbildung 20: Spannungsverläufe; verformte Lage unter Traglast	64
Abbildung 21: Last-Verschiebungsdiagramme für Biegung um die y - und z -Achse.....	67
Abbildung 22: Last-Verschiebungsdiagramm für Biegung um die starke Achse	68
Abbildung 23: Last-Verschiebungsdiagramm für Biegung um die schwache Achse	68
Abbildung 24: Momenten- und Krümmungsverlauf für Lastfall Einzellast	69
Abbildung 25: Last-Verschiebungsdiagramm 5.4.1	72
Abbildung 26: Last-Verdrehungsdiagramm 5.4.1	73
Abbildung 27: Verläufe von ϑ bei Traglast	74
Abbildung 28: Verläufe von κ_ω bei Traglast	75
Abbildung 29: Verläufe der Torsionsmomente bei Traglast.....	76
Abbildung 30: Last-Verschiebungsdiagramm 5.4.2.....	78
Abbildung 31: Last-Verdrehungsdiagramm 5.4.2.....	78

Abbildung 32: Verläufe von w bei Traglast	79
Abbildung 33: Verläufe von ϑ bei Traglast	80
Abbildung 34: Torsionsmomente unter Traglast.....	83
Abbildung 35: Entwicklung $M_{x,s}$ bei Laststeigerung für $e_y = 0$	84
Abbildung 36: Schnittgrößen in den x,y,z - bzw. ξ, η, ζ -Koordinaten	87
Abbildung 37: Kräftegleichgewicht am Stabelement der Länge dx	88
Abbildung 38: Momentengleichgewicht am Stabelement der Länge dx	89
Abbildung 39: Drehung des Koordinatensystems	90
Abbildung 40: Last-Verschiebungsdiagramm 7.2.....	104
Abbildung 41: Last-Verdrehungsdiagramm 7.2.....	105
Abbildung 42: Spannungsverläufe unter Traglast nach Theorie I. und II. Ordnung.....	106
Abbildung 43: Entwicklung von $M_{\xi,p}$ und $M_{\xi,s}$ bei Laststeigerung	107
Abbildung 44: Last-Verformungsdiagramme 7.3.1	109
Abbildung 45: Bimoment M_{xx} bei Laststeigerung	109
Abbildung 46: Spannungsverlauf unter Traglast; Dehnungen im Ober- und Untergurt	110
Abbildung 47: Torsionsmomente unter Traglast.....	111
Abbildung 48: Entwicklung von $M_{\xi,p}$ und $M_{\xi,s}$ bei Laststeigerung	112
Abbildung 49: Spannungsverlauf unter Traglast.....	113
Abbildung 50: Last-Verformungsdiagramme 7.3.2.2	115
Abbildung 51: Torsionsmomente unter Traglast.....	117

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Betrachtete Lagerungsfälle	12
Tabelle 2: Querschnittswerte zur Bestimmung der Koeffizienten der Matrix B	29
Tabelle 3: Ermittlung der Δ -Schnittgrößen und deren Ableitungen am Einzelblech	39
Tabelle 4: Integrationsmatrizen zur Bestimmung der Verformungsgrößen	58
Tabelle 5: Systembeschreibung 5.2	61
Tabelle 6: Systembeschreibung 5.3	66
Tabelle 7: Traglasten für das System 5.3	66
Tabelle 8: Systembeschreibung 5.4.1	71
Tabelle 9: Systembeschreibung 5.4.2	77
Tabelle 10: Eingeprägte Verdrillungen	82
Tabelle 11: Ermittlung von K^{el} für das Einzelblech	97
Tabelle 12: Ermittlung von ΔK für das Einzelblech.....	99
Tabelle 13: Anteile der Biegemomente [kNm] bei $\nu = 0,676$	105
Tabelle 14: Systembeschreibung 7.3.1	108
Tabelle 15: Ergebnisse 7.3.1 in Stabmitte	112
Tabelle 16: Systembeschreibung 7.3.2.1	113
Tabelle 17: Ergebnisse 7.3.2.1 in Stabmitte	114
Tabelle 18: Systembeschreibung 7.3.2.2	114
Tabelle 19: Anteile der Biegemomente [kNm] unter Traglast	115
Tabelle 20: Ergebnisse 7.3.2.2 in Stabmitte	116