



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

VIENNA  
UNIVERSITY OF  
TECHNOLOGY

# DISSERTATION

DOCTORAL THESIS

## Numerische Berechnung von Holzkonstruktionen unter Verwendung eines realitätsnahen orthotropen elasto-plastischen Werkstoffmodells

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktors der technischen Wissenschaften

eingereicht an der Technischen Universität Wien

Fakultät für Bauingenieurwesen

von

Dipl.-Ing. Martin Fleischmann

Matr.-Nr.: 94 25 039

Ozeanstraße 12/C/11

A-2353 Guntramsdorf

geboren am 13. Juli 1974 in Mödling, Österreich

Referent: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Eberhardsteiner  
Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen  
Technische Universität Wien  
Karlsplatz 13/202, 1040 Wien, Österreich

Koreferent: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Gerhard Schickhofer  
Institut für Holzbau und Holztechnologie, Technische Universität Graz  
Inffeldgasse 24, 8010 Graz, Österreich

Wien, im März 2005

*Martin Fleischmann*

## Vorwort und Danksagung

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Tätigkeit als Assistent im Laboratorium des Instituts für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen (vormals: Institut für Festigkeitslehre) der TU Wien entstanden. Die Themenstellung dieser Arbeit hat sich aus dem Rahmen des mehrjährigen Forschungsschwerpunktes „Werkstoffmodellierung von Holz“ am Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen ergeben. Für einen erfolgreichen Abschluss bedarf es einerseits der Nutzung verschiedener Ressourcen wie Laboreinrichtungen oder finanzieller Mittel für die Herstellung geeigneter Versuchskörper und andererseits der Unterstützung von Verwandten, Freunden, Universitätsangehörigen und wissenschaftlichen MitarbeiterInnen.

Mit diesen Zeilen möchte ich mich bei all jenen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Ein herzlicher Dank gilt meinem ständigen Wegbegleiter während meiner Assistententätigkeit, Prof. Josef EBERHARDSTEINER, der für alle meine Anliegen jederzeit ein offenes Ohr gehabt hat. Den weiteren Projektmitarbeitern des Holzforschungsschwerpunktes, Peter MACKENZIE-HELNWEIN, Herbert MÜLLNER und Michela GOLFIERI verdanke ich eine sehr gute Basis für meine Arbeit. Bei der Durchführung der Experimente wurde ich von den Institutsmitarbeitern Lubomir ONDRIS, Christian SCHMID, Wolfgang DÖRNER und Johannes KRONAWETTER tatkräftig unterstützt. Bei Herrn Rüdiger BAUMGARTNER von der Höheren technischen Bundes-Lehr- und Versuchsanstalt Mödling möchte ich mich für die sorgfältige Herstellung der Probekörper bedanken.

Für die unkomplizierte und schnelle Erledigung administrativer Angelegenheiten gilt mein Dank Martina PÖLL. Einen wesentlichen Anteil an der Schaffung eines angenehmen Arbeitsklimas im Institut hat Prof. Herbert MANG, welcher trotz zahlreicher weiterer beruflicher Verpflichtungen für die Anliegen seiner MitarbeiterInnen jederzeit zur Verfügung stand. Für die Unterstützung durch fachliche und persönliche Gespräche bedanke ich mich bei allen weiteren, namentlich nicht genannten InstitutsmitarbeiterInnen.

Für die ausgezeichnete Zusammenarbeit im Rahmen der Durchführung von Strukturversuchen mit dem Institut für Holzbau und Holztechnologie der TU Graz (Kompetenzzentrum kind-holz.bau forschung gmbh) möchte ich mich vor allem bei meinem Koreferenten, Prof. Gerhard SCHICKHOFER sowie Herrn Harald KRENN bedanken.

Wien, im März 2005

Martin Fleischmann

# Kurzfassung

Holz zählt neben Beton und Stahl zu den Massenbaustoffen im Bauwesen. Dennoch wurde das mechanische Verhalten von Holz in der Vergangenheit nicht in jenem Maße wissenschaftlich untersucht, wie man es sich erwarten würde. Um realitätsnahe Berechnungen von Holzkonstruktionen mit modernen numerischen Berechnungsverfahren, wie z. B. der *Finite-Elemente-Methode* (FEM) durchführen zu können, benötigt man geeignete Werkstoffgesetze. Ein solches Materialmodell hat MACKENZIE-HELNWEIN in [8] für technologisch einwandfreies, d. h. fehlerfreies Fichtenholz entwickelt.

Ziel dieser Arbeit ist die anwendungsorientierte Umsetzung des genannten Werkstoffmodells, dessen Implementierung in eine FE-Software sowie die Durchführung von numerischen Tragfähigkeitsanalysen mit Hilfe der FEM und die Validierung des Materialmodells durch den Vergleich der Ergebnisse der FE-Simulationen mit parallel durchgeführten Experimenten auf Strukturebene.

Das von MACKENZIE-HELNWEIN in [8] vorgestellte orthotrope Einflächenplastizitätsmodell mit der Berücksichtigung von nicht assoziierten Ver- und Entfestigungsgesetzen basiert auf umfangreichen experimentellen Untersuchungen an fehlerfreiem Fichtenholz, welche von EBERHARDSTEINER [1] durchgeführt wurden. Unter weiteren, am Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen der TU Wien durchgeführten Arbeiten, dient die Diplomarbeit von MÜLLNER [9] als weitere wesentliche Grundlage für diese Arbeit.

Für eine praktische Anwendung des Werkstoffmodells von MACKENZIE-HELNWEIN im Ingenieurholzbau waren folgende, im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Schritte, erforderlich:

- Durchführung von ergänzenden Experimenten an Holzprobekörpern mit fehlerfreiem Fichtenholz zur Bestimmung des vollständigen zweidimensionalen Satzes von orthotropen Materialparametern.
- Durchführung von Experimenten an Holzprobekörpern mit ausgewählten Holzmerkmalen (Ästen) zur Bestimmung von Materialkennwerten realer Bretter.
- Adaptierung des Werkstoffmodells und Berücksichtigung der Versuchsergebnisse im Materialmodell.
- Implementierung des Materialmodells in eine Finite-Elemente-Software und Überprüfung des Programmcodes anhand von Testbeispielen.
- Durchführung von Struktursimulationen mit Hilfe der FEM von Fichtenholzkonstruktionen und Vergleich der Ergebnisse mit korrespondierenden Experimenten.

Abgesehen von dem im Holzbau üblichen Streubereich der Materialkennwerte liefern die in dieser Arbeit durchgeführten Tragfähigkeitsprognosen befriedigende Ergebnisse.

# Abstract

Although wood is used as a favourite building material among concrete and steel, the mechanical behaviour was not scientifically investigated yet as one would expect. To be able to perform more realistic simulations of timber constructions with modern numerical simulation methods like the *Finite Element Method* (FEM), a suitable constitutive material model is required. Such a material model was developed by MACKENZIE-HELNWEIN in [8] for clear spruce wood.

The aim of this thesis is the application-oriented adaption and usage of the mentioned material model, its implementation in a FE software as well as performing ultimate load analyses using FEM and the validation of the material model by means of the comparison of results of FE Simulations and experiments on the structure level.

The orthotropic single-surface plasticity model by MACKENZIE-HELNWEIN [8] regarding non-associated hardening and softening laws based on a comprehensive series of biaxial tests on clear spruce wood, performed by EBERHARDSTEINER [1]. Among further works at the Institute for Mechanics of Materials and Structures at the Vienna University of Technology, the diploma thesis of MÜLLNER [9] is an essential basis of this work.

The practical application of the material model of MACKENZIE-HELNWEIN in the field of timber engineering requires the following steps, performed in this work:

- Performing additional experiments on wooden specimens with clear spruce wood for the determination of the full set of two dimensional orthotropic material parameters.
- Performing experiments on wooden specimens with selected knots for the determination of the material parameters of real boards.
- Adaptation of the constitutive material model and considering the results of the mentioned tests in the material model.
- Implementation of the material model in a Finite Element software and verification of the program code by means of test examples.
- Performing numerical simulations of wooden structures using the FEM and comparison of the results with those of corresponding experiments.

Except for the common scatter of material parameters in timber engineering, the results of the prediction of the ultimate load, performed in this thesis, are satisfying.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Zielsetzung	1
1.2	Stand der Forschung	2
1.3	Gliederung der Arbeit	4
<b>2</b>	<b>Die Anatomie von Holz</b>	<b>6</b>
2.1	Die Struktur von Holz	6
2.2	Wesentliche physikalische und mechanische Holzeigenschaften	8
<b>3</b>	<b>Biaxiale Bruchversuche an Fichtenholz</b>	<b>10</b>
3.1	Prüfeinrichtung	10
3.1.1	Biaxiales Belastungssystem	10
3.1.2	Berührungsloses Deformationsmesssystem	11
3.2	Probekörper	12
3.3	Versuchsablauf	15
3.3.1	Wahl der Verschiebungsvorgabe	16
3.3.2	Wahl der Deformationsgeschwindigkeit	18
3.4	Versuchsumfang	19
3.4.1	Biaxiale Bruchversuche mit fehlerfreiem Fichtenholz	19
3.4.2	Biaxiale und uniaxiale Bruchversuche mit ausgewählten Ästen	20
3.4.3	Ergänzende uniaxiale Versuche mit fehlerfreiem Fichtenholz	21
3.4.4	Versuchsübersicht	21
<b>4</b>	<b>Theoretische Grundlagen zur Materialmodellierung</b>	<b>23</b>
4.1	Varianten der Materialmodellierung	23
4.1.1	Ebenen der Materialmodellierung	23
4.1.2	Richtungsabhängigkeit der Materialeigenschaften	23
4.1.3	Ursachen von Nichtlinearität	24

4.2	Grundlagen der Plastizitätstheorie . . . . .	24
4.2.1	Grundgleichungen der Plastizitätstheorie . . . . .	25
4.2.2	Ermittlung des Konsistenzparameters . . . . .	28
4.2.3	Diskretisierte Form der Grundgleichungen . . . . .	30
4.2.4	Lösungsalgorithmus für das Projektionsverfahren . . . . .	31
4.2.5	Berechnung der elasto-plastischen Tangente $C_{n+1}^{ep}$ . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Modellierung von fehlerfreiem Fichtenholz</b> . . . . .	<b>34</b>
5.1	Wahl des Materialmodells . . . . .	34
5.2	Ermittlung eines $\overline{RT}$ -Äquivalents . . . . .	35
5.2.1	Vorgangsweise . . . . .	35
5.2.2	Ermittlung des $R$ - sowie $T$ -Anteiles von Fichtenholzbrettern . . . . .	37
5.3	Elastisches Werkstoffverhalten ( $f \leq 0$ ) . . . . .	39
5.3.1	Ermittlung der elastischen Materialparameter aus biaxialen Experimenten . . . . .	40
5.3.2	Ermittlung der elastischen Materialparameter aus uniaxialen Zugversuchen . . . . .	40
5.3.3	Heranziehen der Materialkennwerte aus Holzbaukonstruktionsnormen . . . . .	43
5.4	Definition der Fließfläche . . . . .	43
5.4.1	Parameteridentifikation für die Fließfläche in der $LR$ -Ebene . . . . .	44
5.4.2	Parameteridentifikation für die Fließfläche in der $LR$ -Ebene in Abhängigkeit von der Rohdichte $\rho$ . . . . .	51
5.4.3	Parameteridentifikation für die Fließfläche in der $\overline{LRT}$ -Ebene . . . . .	52
5.5	Beschreibung des plastischen Verhaltens . . . . .	57
5.5.1	Einführende mathematische Grundlagen . . . . .	57
5.5.2	Aktualisierung der Fließregel . . . . .	58
5.5.3	Kurvendiskussion der Hauptschnitte des Ellipsoids . . . . .	59
5.5.4	Definition der Evolutionsgesetze . . . . .	64
5.5.5	Zusammenfassung der Evolutionsgesetze . . . . .	71
5.5.6	Aktualisierung der Parameterwerte $p$ der Fließfläche für einen allgemeinen Spannungszustand . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Berücksichtigung von Holzmerkmalen in der Werkstoffmodellierung</b> . . . . .	<b>74</b>
6.1	Ausgewählte Holzmerkmale . . . . .	74
6.2	Überblick über das Normungswesen im Holzbau . . . . .	75
6.2.1	Auflistung diverser Normen . . . . .	75
6.2.2	Ermittlung der Steifigkeits- und Festigkeitswerte . . . . .	76

6.2.3	Sortiervorschriften mit besonderer Berücksichtigung der Astigkeit . . . . .	76
6.2.4	Zukünftige Normung der Holzsortierung . . . . .	77
6.2.5	Weitere Möglichkeiten zur Bestimmung der Astigkeit . . . . .	77
6.3	Erläuterung des Konzeptes für die Einarbeitung der wesentlichen Holzmerkmale in das Materialmodell . . . . .	77
6.4	Definition eines Astparameters . . . . .	78
6.5	Dokumentation der Ergebnisse der Versuche mit ausgewählten Ästen . . . . .	81
6.5.1	Zugbeanspruchung in $L$ -Richtung . . . . .	81
6.5.2	Zugbeanspruchung in $\overline{RT}$ -Richtung . . . . .	84
6.5.3	Druckbeanspruchung in $L$ -Richtung . . . . .	86
6.5.4	Druckbeanspruchung in $\overline{RT}$ -Richtung . . . . .	89
6.6	Bestimmung der Fließfläche für die $\overline{LRT}$ -Ebene unter der Berücksichtigung des Astparameters $ksa$ . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Algorithmische Behandlung des elasto-plastischen Materialmodells und Implementation in eine FE-Software</b>	<b>92</b>
7.1	Algorithmische Behandlung des elasto-plastischen Materialmodells . . . . .	92
7.1.1	Zusammenstellung der numerischen Integrationsgleichungen . . . . .	92
7.1.2	Formulierung des Newton-Raphson-Verfahrens . . . . .	94
7.1.3	Zerlegung des Tangentenoperators $DR_{n+1}^{(k)}$ in $DR_j$ . . . . .	96
7.1.4	Berechnung des Zuwachses $\Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}$ . . . . .	99
7.1.5	Berechnung der konsistenten algorithmischen Tangente $\mathbf{C}_{n+1}^{ep}$ . . . . .	102
7.2	Implementierung des elasto-plastischen Materialmodells in eine FE-Software . . . . .	104
7.2.1	Ablauf einer physikalisch nichtlinearen Strukturberechnung . . . . .	105
7.2.2	Verifikation des Programmcodes anhand von Testbeispielen . . . . .	107
<b>8</b>	<b>Anwendungsbeispiele</b>	<b>115</b>
8.1	Kleinstruktur in I-Form . . . . .	115
8.2	Kreisförmiger Durchbruch in einem Biegeträger . . . . .	118
8.3	Dreibock . . . . .	130
<b>9</b>	<b>Schlussbemerkung</b>	<b>138</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>141</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>146</b>

---

Literaturverzeichnis	148
<b>A Uniaxiale Druckversuche in radialer Richtung</b>	<b>152</b>
A.1 Beschreibung der Versuchskonfiguration . . . . .	152
A.2 Entwicklung eines rheologischen Modells für die Beschreibung des mechanischen Verhaltens von fehlerfreiem Fichtenholz für Druckbeanspruchung in radialer Richtung . . . . .	154
A.3 Simulationsbeispiel . . . . .	159
<b>B Versuchsprogramm, Versuchsparameter</b>	<b>160</b>
B.1 Biaxiale Bruchversuche mit fehlerfreiem Fichtenholz in der <i>LT</i> -Ebene . . . . .	160
B.2 Bruchversuche mit ausgewählten Ästen . . . . .	162
<b>C Koeffizientenfunktionen der Matrix K</b>	<b>165</b>
<b>D Koeffizientenfunktionen der Matrix L</b>	<b>168</b>
<b>E Messdaten der Leimbinderlamellen</b>	<b>169</b>



# Kurzzeichen und deren Benennungen

Hinweis: Die nachfolgende Liste enthält nur alle wesentlichen, physikalisch direkt interpretierbaren Größen, d. h., dass z. B. diverse für Abkürzungen verwendete Buchstaben nicht enthalten sind.

## Große lateinische Buchstaben

$E$	Elastizitätsmodul
$F_{ul}$	Traglast ( <u>U</u> ltimate <u>L</u> oad)
$F$	Lastvektor
$G_f$	Energiefreisetzungsrage
$K$	Verfestigungsmodul
$K$	Struktursteifigkeitsmatrix
$L$	Längsrichtung eines Stamms, faserparallele Richtung (Wuchsrichtung), 1. Materialhaupttrichtung
$M$	Strukturtensor
$R$	Residuum
$R$	radiale Richtung eines Stamms; Regressionskoeffizient
$T$	tangentiale Richtung eines Stamms
$\overline{RT}$	$\overline{RT}$ -Äquivalent, 2. Materialhaupttrichtung
$W$	Verzerrungsenergiedichte

## Kleine lateinische Buchstaben

$f$	skalärer Wert der Fließfunktion
$f_{yc}$	Fließspannung bei uniaxialer Druckbeanspruchung
$f_{yt}$	Fließspannung bei uniaxialer Zugbeanspruchung
$k_{sa}$	Astparameter
$q$	spannungsähnliche Variable
$u$	Holzfeuchte
$u$	Verschiebungsvektor
$u_i, v_i$	Verschiebungsvorgaben
$\dot{u}$	Deformationsgeschwindigkeit
$x, y$	Koordinaten (-achsen)

## Kleine griechische Buchstaben

$\gamma$	Konsistenzparameter
$\alpha$	Zustandsvariable
$\varepsilon_i$	Verzerrungstensorkomponente (2. Index unterdrückt)
$\varepsilon$	Verzerrungstensor
$\kappa$	biaxiales Beanspruchungsverhältnis
$\rho$	Holzrohddichte
$\sigma_i$	Normalspannungskomponente (2. Index unterdrückt)
$\sigma$	Spannungstensor
$\tau_i$	Schubspannungskomponente (2. Index unterdrückt)
$\tau$	Relaxationszeit
$\varphi$	Faserrichtung, Faserwinkel
$\psi$	freie HELMHOLTZ-Energie

## Sonstige Symbole

$\mathcal{D}$	Dissipation
$\mathcal{E}$	Gesamtenergie
$\mathcal{H}$	Verfestigungspotential
$\mathbb{C}$	Materialtensor
$l_c$	charakteristische Länge

# Kapitel 1

---

## Einleitung

Die zur Herstellung einer Holzkonstruktion am häufigsten verwendeten Ausgangselemente sind Bretter. Daraus werden vorwiegend durch Verleimung Konstruktionsteile wie z. B. Holzleimbinder hergestellt, welche als Haupttragelemente in Bauwerken Anwendung finden. Derzeit kommt in den Ingenieurbüros und in der Holzverarbeitenden Industrie bei der Berechnung von Holzbauteilen fast ausschließlich die *Technische Biegelehre* zur Anwendung. Diese setzt isotropes und linear elastisches Materialverhalten voraus. Da Holz jedoch einen orthotropen Werkstoff mit vor allem im Druckbereich nichtlinearem Materialverhalten darstellt, kann die Technische Biegelehre nicht für alle auftretenden Probleme (z. B. bei Konstruktionsdetails) sinnvoll eingesetzt werden. Man denke u. a. an die in Auflagerbereichen auftretenden mehraxialen Spannungszustände oder Querkzugspannungen bei gekrümmten Holzleimbändern.

Um eine realitätsnähere Berechnung mit modernen numerischen Berechnungsverfahren, wie z. B. der *Finite-Elemente-Methode* (FEM) durchführen zu können, benötigt man geeignete Werkstoffgesetze. Derartige, das mechanische Verhalten<sup>1</sup> von biaxial beanspruchtem Fichtenholz beschreibende Materialmodelle sind jedoch zur Zeit lediglich in geringem Maß verfügbar. Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag liefern, dieses Defizit zu verringern.

### 1.1 Zielsetzung

Es soll ein numerisches Berechnungsmodell für biaxial beanspruchtem heimischen Fichtenholz entwickelt werden, welches für Finite-Elemente-Berechnungen (FE-Berechnungen) eingesetzt werden kann. Ein derartiges Modell kann zur Berechnung von Bauteilen (und Konstruktionen), welche aus Brettern und/oder Kanthölzern gefertigt sind, sowie zur Berechnung von Schalentragsystemen aus Holz verwendet werden. Bis dato existieren kaum Bauwerke, wo Holz tatsächlich in Schalentragsfunktion eingesetzt wird. Mögliche Ursachen dafür könnten

---

<sup>1</sup>Darunter versteht man im Allgemeinen das Steifigkeits- und Festigkeitsverhalten von Werkstoffen

in der Fertigung, in bauphysikalischen Problemen oder im Fehlen geeigneter Berechnungsmodelle liegen. Dem letzten Argument soll durch diese Arbeit entgegen gewirkt werden.



**Abbildung 1.1:** Ein Hallenbauwerk mit tragender Holzkonstruktion (Ruderpavillon in Linz, hergestellt vom Holzbauunternehmen *WIEHAG* in Altheim, Oberösterreich)

Als Basis zur Entwicklung dieses mechanischen Modells dienen umfangreiche experimentelle Untersuchungen, welche ausführlich in dieser und in einer vorangegangenen Arbeit [1] dokumentiert sind.

Die Abstimmung des Materialmodells auf die Holzart Fichte leitet sich aus der Tatsache ab, dass der Anteil von Fichtenholz als Bauholz in Österreich fast bei 100% liegt. (Das österreichische Staatsgebiet ist zu 47% bewaldet, der nutzbare Holzvorrat beträgt 1 Mrd. m<sup>3</sup>. Jährlich wachsen rund 27 Mio. m<sup>3</sup> Holz nach, wovon etwa zwei Drittel geerntet werden, d. h. dass sich der Holzvorrat nach wie vor vergrößert. Bezogen auf die Fläche des Waldes beträgt der Anteil der Fichte knapp 57%, gefolgt von der Kiefer mit 6% Flächenanteil [2].)

## 1.2 Stand der Forschung

Ein ausführlicher Überblick über die teilweise schon mehr als einige Jahrzehnte zurückliegenden Forschungsarbeiten sowie die daraus resultierenden mechanischen Eigenschaften sind im Kapitel 2 der Arbeit von EBERHARDSTEINER [1] enthalten. Die Anfänge der experimentellen Bestimmung von Werkstoffkenngrößen in der Holzforschung reichen bis etwa in das Jahr 1930 zurück.

In [1] hat EBERHARDSTEINER die Durchführung einer umfangreichen Versuchsserie an fehlerfreiem Fichtenholz dokumentiert. Den Hauptteil dieser experimentellen Untersuchung

bilden 439 biaxiale Versuche, wobei die Beanspruchung größtenteils schräg zur Faser erfolgte. Zur mechanischen Charakterisierung des Werkstoffs wurden darüber hinaus jeweils 100 einaxiale Zugversuche in Längsrichtung des Stamms ( $L$ -Richtung, siehe Abb. 3.13) als auch in radialer Richtung ( $R$ -Richtung) durchgeführt. Ein wesentliches Ergebnis ist eine in den Materialhauptrichtungen ( $L$  und  $R$ ) formulierte Bruchfläche.

Darauf aufbauend hat HELNWEIN et al. in [6] den Einfluss von Druckbeanspruchung in radialer Richtung im Rahmen der Plastizitätstheorie realitätsnäher berücksichtigt. Diese führt zu physikalisch nichtlinearem Materialverhalten, dessen Nichtlinearität wesentlich stärker als bei Druckbeanspruchung in Längsrichtung ausgeprägt ist.

Zur gezielten Identifikation von Materialparametern des in [6] vorgestellten *Radial Compression Models* wurde eine kleine Serie ergänzender Druckversuche an astfreiem Holz durchgeführt, welche im Anhang A und in [7] dokumentiert sind. In dieser Arbeit wird u. a. ein erster, einfacher Ansatz vorgestellt, wie die beobachteten viskosen Materialeffekte in einem Materialmodell berücksichtigt werden können. Diese bleiben jedoch, im Rahmen der Entwicklung des Werkstoffmodelles für die gegenständliche Arbeit unberücksichtigt.

Aufbauend auf [6] hat MACKENZIE-HELNWEIN et al. in [8] ein orthotropes, elasto-plastisches Materialmodell für fehlerfreies Fichtenholz in der  $LR$ -Ebene entwickelt, welches als Grundlage für die vorliegende Arbeit verwendet wird. Eine weitere Hilfestellung bietet die Diplomarbeit von MÜLLNER [9].

Die nachfolgende Abbildung gibt einen Überblick über die für die vorliegende Arbeit relevanten Forschungsaktivitäten des Instituts für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen zum Werkstoff Holz:

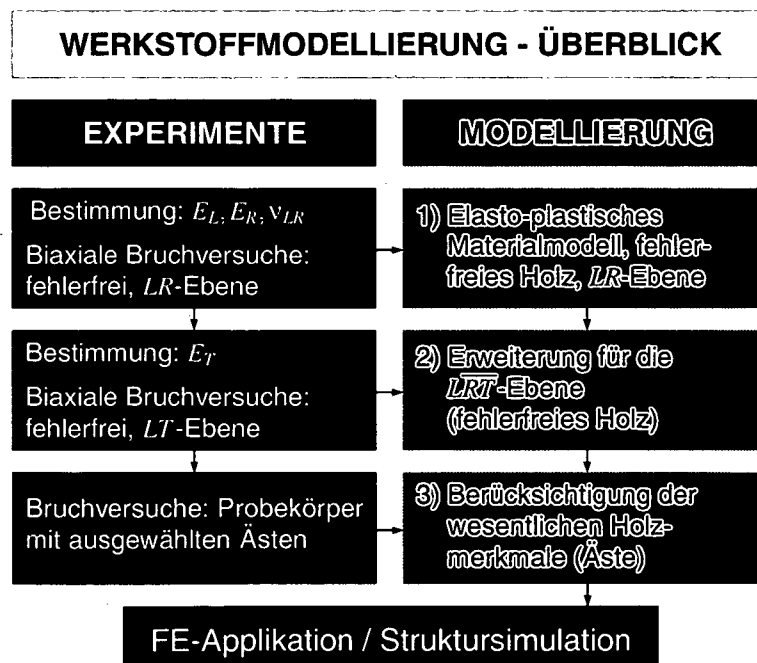


Abbildung 1.2: Überblick über die Forschungsaktivitäten des Instituts für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen zum Werkstoff Holz

Diese Arbeit betrifft im Wesentlichen jeweils die zweiten und dritten Blöcke der beiden Spalten sowie den letzten Block „FE-Applikation / Struktursimulation“. Der erste Block der linken Spalte repräsentiert einen Teil der Arbeit von EBERHARDSTEINER [1], der erste Block der rechten Spalte wird stellvertretend für die Arbeiten von MACKENZIE-HELNWEIN et al. [8] und MÜLLNER [9] angeführt.

Im Jahr 2002 wurde eine Literatursuche mit dem Ziel durchgeführt, den Stand der Forschung in der Materialmodellierung des Werkstoffes Holz beurteilen zu können. Hauptaugenmerk galt dabei der Berücksichtigung von Ästen im Materialmodell.

Umfangreiche Literatur ist über den Bereich „viskoses Verhalten von Holz“ vorhanden.

Den Einfluss von Ästen auf die Biege- und Knickfestigkeit von Fichtenholz (in  $L$ -Richtung) hat KUČERA in [10] bestimmt. Eine Arbeit von MACHADO et al. [11] beinhaltet den Einfluss des Markstrahls und den von Ästen auf die Druck- und Biegefestigkeit von Föhrenholz. ZANDBERGS und SMITH beschäftigten sich in [12] mit dem Bruchverhalten im Bereich eines Astes unter der Berücksichtigung schräger Faserrichtung.

Das Verhalten von Holz unter Druckbeanspruchung in radialer Richtung ( $R$ -Richtung) hat TABARSA und HEI CHUI in [13] untersucht. Angaben über die Materialeigenschaften in tangentialer Richtung ( $T$ -Richtung) bei Druckbeanspruchung sind in [14] enthalten.

In den gesamten Publikationen wurde im Wesentlichen auf der Basis uniaxialer Versuche jeweils ein einzelner mechanischer Effekt detailliert behandelt. Für die Erstellung eines Materialmodelles, welches für die Berechnung von Holzbaukonstruktionen eingesetzt werden soll, müssten diese verschiedenen Erkenntnisse zusammengeführt werden. Dies wäre aber nur sehr eingeschränkt möglich, da man die Beschreibung eines orthotropen Werkstoffes unter räumlicher Beanspruchung nicht ausschließlich durch uniaxiale Experimente für die einzelnen in die Materialhauptrichtungen durchführen kann. Daher sind die in diesem Unterkapitel erwähnten Veröffentlichungen nur beschränkt für diese Arbeit verwertbar.

## 1.3 Gliederung der Arbeit

Das nachfolgende Kapitel 2 gibt eine Einführung in die Anatomie von Holz. Die Versuchskonfiguration für die Werkstoffexperimente (Prüfeinrichtung, Probekörper und Versuchsumfang) werden im Kapitel 3 beschrieben. Eine Auflistung der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente ist im Anhang B enthalten. Kapitel 4 enthält theoretische Grundlagen zur Materialmodellierung.

Auf der Basis der Arbeiten [1], [8] und [9] wird im Kapitel 5 ein Materialmodell für fehlerfreies Fichtenholz vorgestellt. Darauf aufbauend werden im Kapitel 6 die Einflüsse der wesentlichen Holzmerkmale auf die mechanischen Eigenschaften eingearbeitet. Im Kapitel 7 werden algorithmische Aspekte und Problemstellungen im Zusammenhang mit der Implementierung des Werkstoffmodells in ein FE-Softwarepaket behandelt.

Die Anwendung und Verifikation des elasto-plastischen Materialmodells erfolgt im Kapitel 8. Dieses Kapitel beinhaltet numerische Simulationen von Holzkonstruktionsbauteilen mit Hilfe

der FEM, wobei die Verifikation des Werkstoffmodells durch begleitende Strukturversuche erfolgt.

Eine eindimensionale Erweiterung des Materialmodells zur Berücksichtigung viskoser Effekte bei einaxialer Druckbeanspruchung in radialer Richtung des Stamms wird im Anhang A vorgestellt.

Der dieser Arbeit beigelegte Datenträger (DVD) enthält die Arbeit im pdf-Format und weiteres Bildmaterial der Werkstoffversuche bzw. Strukturversuche. Ein Überblick über den Inhalt dieser DVD ist in der Datei `inhalt.rtf` enthalten.

# Kapitel 2

## Die Anatomie von Holz

Dieses Kapitel gibt eine kurze zusammenfassende Einführung in die Anatomie von Holz und soll dem besseren Verständnis von zahlreichen mechanischen Eigenschaften dienen.

Umfassende Arbeiten auf diesem Gebiet haben KOLLMANN [3] und NIEMZ [4] geleistet. Die in diesem Kapitel angeführten Daten stammen vorwiegend aus diesen beiden Werken, einige Textpassagen sind [5] entnommen.

### 2.1 Die Struktur von Holz

Die Struktur von Holz kann man in eine Makro-, Mikro- und Submikrostruktur unterteilen. Unter Makrostruktur (Abb. 2.1) sind die mit bloßem Auge oder mit der Lupe sichtbaren, unter Mikrostruktur die im Mikroskop sichtbaren und unter Submikrostruktur die im Elektronenmikroskop sichtbaren Strukturmerkmale zu verstehen. Die Eigenschaften von Holz werden durch alle drei Strukturmerkmale gleichermaßen bestimmt [4].

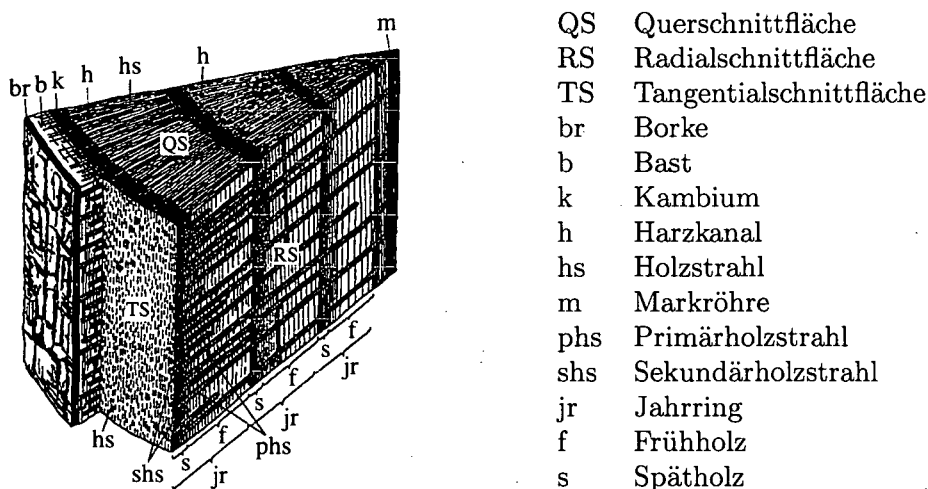
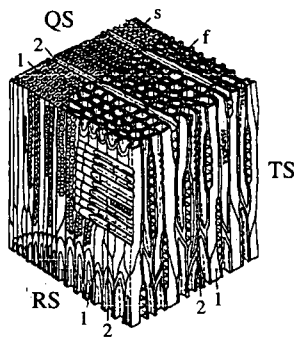


Abbildung 2.1: Makrostruktur von Nadelholz [4]



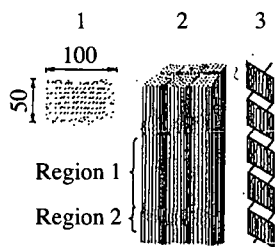
Die Mikrostruktur (Abb. 2.2) von Nadelholz zeigt einen relativ einfachen Aufbau aus 90 bis 95 % Tracheiden. Letztere bestehen aus 2 bis 5 mm langen und 10 bis 50  $\mu\text{m}$  dünnen Zellen mit abgeflachten oder sich verjüngenden, geschlossenen Enden. Die Tracheiden bilden radiale Reihen aus und sind längs zur Stammachse ausgerichtet. Im Übergang vom Früh- zum Spätholz werden die Zellwände dicker, während die Zelldurchmesser kleiner werden. Am Ende der Wachstumsperiode sind die Tracheiden englumig mit kleinem radialem Durchmesser ausgebildet, während zum Beginn der folgenden Wachstumsperiode weitlumige Tracheiden mit großen Durchmessern vom Baum gebildet werden. Aus diesem unterschiedlichen Wachstum resultiert das Rohdichteverhältnis aus Spät- und Frühholz von 3 : 1 [5].



- QS Querschnitt
- TS Tangentialschnitt
- RS Radialschnitt
- 1 Tracheiden
- 2 Holzstrahlen
- f Frühholz
- s Spätholz

Abbildung 2.2: Mikrostruktur von Nadelholz [4]

Die elementare Gerüstsubstanz der Holzzellwände im submikroskopischen Bereich (Abb. 2.3) ist die Zellulose, die zu größeren Struktureinheiten, den Elementarfibrillen, zusammengefasst wird. Diese wiederum sind zu fadenförmigen Mikrofibrillen zusammengefügt. Die Anzahl der Zelluloseketten in jeder Mikrofibrille wird auf 100 bis 2000 geschätzt. Die Zellulose (Abb. 2.4) in einer Mikrofibrille ist in eine Hemizellulosematrix eingebettet und wird von Lignin umgeben [5].



- 1 Querschnitt durch Mikrofibrillen
- 2 Mikrofibrillen, bestehend aus Elementarfibrillen
- 3 Helixstruktur der Zellulosemoleküle

Abbildung 2.3: Submikrostruktur von Nadelholz [4]

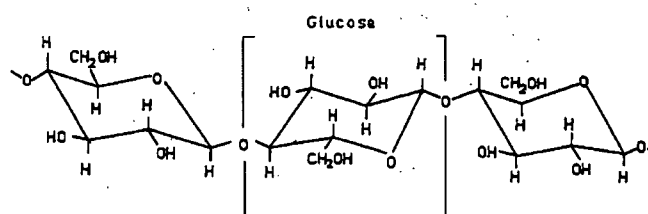
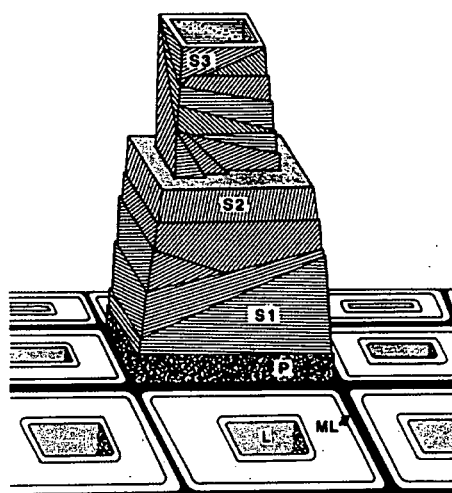


Abbildung 2.4: Zellulosemolekül [4]

Der geschichtete Aufbau der Faserzellwand wird in Abb. 2.5 gezeigt. Zwischen den einzelnen Zellen liegt eine Schicht, die Mittellamelle (ML), die die Zellen zu einem Gewebe zusammenklebt. Die Mittellamelle besteht überwiegend aus Lignin und Pektin und enthält praktisch keine Zellulose. In der Primärwand (P) bilden die Mikrofibrillen ein unregelmäßiges Netzwerk. Im normalen Holzgewebe besteht die Sekundärwand aus drei völlig unterschiedlichen Schichten  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$ . Die äußere Schicht  $S_1$  ist sehr dünn (0.1 bis 0.2  $\mu\text{m}$ ) und weist einen Fibrillenwinkel (Winkel zwischen der Zell-Längsachse und der Fibrillenrichtung) von etwa 50 bis 70° auf. Der größte Teil der Sekundärwand besteht aus der  $S_2$ -Schicht, die mehrere Mikrometer dick ist. Die Mikrofibrillen sind in der Regel unter einem relativ kleinen Winkel zur Faserachse geneigt (5 bis 20°). Innerhalb der  $S_3$ -Schicht sind die Mikrofibrillen leicht geneigt, jedoch nicht streng orientiert [5].



L	Zelllumen
ML	Mittellamelle
P	Primärwand
$S_1, S_2, S_3$	Schichten der Sekundärwand

Abbildung 2.5: Schematischer Aufbau der Zellwand einer Holzfaser [5]

Aus der Sicht des Ingenieurs ist die Zellwand eine äußerst effiziente Konstruktion. Die vorherrschende  $S_2$ -Schicht aus beinahe axial gerichteten Mikrofibrillen-Bündeln übernimmt sehr wirkungsvoll Zugkräfte. Bei Druck entstehen aus den Mikrofibrillen-Bündeln lange, schlanke Stützen, die durch die verstärkende leicht geneigte innere und äußere  $S_1$ - und  $S_3$ -Schicht am Ausknicken gehindert werden [5].

## 2.2 Wesentliche physikalische und mechanische Holzeigenschaften

Durch den im Unterkapitel 2.1 näher beschriebenen länglichen Aufbau der Zellen und Orientierung der Zellwände sowie durch unterschiedliche Zellgrößen während einer Wachstumsperiode verhält sich Holz *mechanisch anisotrop*. Diese Tatsache wird im Materialmodell durch Anwendung eines *orthotropen Modellgesetzes* berücksichtigt.

Als wesentliche physikalische Kenngröße von Holz gilt die *Rohdichte*, welche praktisch alle anderen Holzeigenschaften beeinflusst. Für Fichte (*Picea abies*, *Picea excelsa*) wird in [4] ein

Schwankungsbereich für die Darrdichte von  $\rho = 0.28$  bis  $0.60 \text{ g/cm}^3$  angegeben, der Mittelwert liegt bei  $\rho_{\text{Mittel}} = 0.42 \text{ g/cm}^3$ . Ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Rohdichte und einzelnen Materialparametern konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht gefunden werden (siehe Unterkapitel 5.3.2 und 5.4.2).

Ein weiterer, die mechanischen Eigenschaften beeinflussender Parameter, ist die *Holzfeuchtigkeit*  $u$ . Die Festigkeit des Holzes sinkt mit zunehmendem Feuchtegehalt bis zum Erreichen des Fasersättigungspunktes. Wird dieser Punkt überschritten und somit freies Wasser in das Makrosystem eingelagert, so hat dies nur mehr eine geringe Auswirkung auf die Festigkeit. Weiters steigen die Kriechverformungen von Holz bei Langzeitbeanspruchung mit zunehmendem Feuchtegehalt an. In der Fertigung von Holzbauteilen wird der Schwankungsbereich für  $u$  eingeschränkt, während der Lebensdauer eines Holzbauwerkes treten jedoch i. d. R. unvermeidbare, teilweise auch größere Feuchtigkeitsschwankungen auf. Um diesen Einfluss im Materialmodell berücksichtigen zu können, wären Versuche erforderlich gewesen, welche den Rahmen dieser Arbeit überschritten hätten. Daher bleibt die Abhängigkeit der Materialparameter von der Holzfeuchtigkeit unberücksichtigt.

Ziel dieser Arbeit ist es, alle für das Werkstoffgesetz erforderlichen Materialparameter durch geeignete Experimente zu identifizieren bzw. eine Bestimmbarkeit mit den derzeit in Betrieb befindlichen Geräten (Holzsortierungsanlagen) zu ermöglichen.

## Biaxiale Bruchversuche an Fichtenholz

Dieses Kapitel enthält zusammenfassende Informationen über die biaxiale Prüfeinrichtung sowie die für die Werkstoffversuche verwendeten Probekörper. Eine ausführliche Beschreibung aller Komponenten ist in der Arbeit von EBERHARDSTEINER [1] zu finden. Alle wesentlichen, im Kapitel 3 der genannten Arbeit angeführten Überlegungen betreffend der Versuchseinrichtung und Probekörpergestaltung haben auch für diese Arbeit Gültigkeit. In den Unterkapiteln 3.3 und 3.4 wird der Versuchsablauf bzw. der Versuchsumfang beschrieben.

### 3.1 Prüfeinrichtung

Die für alle Bruchversuche verwendete Prüfeinrichtung besteht aus drei Komponenten:

- biaxiales Belastungssystem (siehe Unterkapitel 3.1.1),
- berührungsloses Deformationsmesssystem (siehe Unterkapitel 3.1.2).
- Probekörper (siehe Unterkapitel 3.2).

#### 3.1.1 Biaxiales Belastungssystem

Die servohydraulisch gesteuerte Belastungseinrichtung wurde am Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen entwickelt. Das lastabtragende Element (rote Teile der Abb. 3.1) besteht aus einem mehrfach ausgesteiften, geschweißten Stahldoppelrahmen. Die Lastübertragung vom Probekörper zum Rahmen erfolgt über 24 Belastungsachsen, welche an Verankerungsblöcken frei drehbar gelagert sind und die aufgebrachten Kräfte auf vier, in den Eckbereichen des Rahmensystems befindliche Konsolen, welche über Passbolzen mit der Doppelrahmenkonstruktion verbunden sind, übertragen. Die Gesamtmasse der mechanischen Belastungseinrichtung beträgt 3740 kg.

Der Kolbenhub des Zylinders einer Belastungsachse wurde im Hinblick auf eine hohe Positionierungsgenauigkeit auf  $\pm 5$  mm beschränkt, die kurzzeitig maximal erreichbaren Zug- bzw. Druckkräfte betragen in Richtung der Belastungsachsen etwa 15-17 kN. Dies entspricht einer senkrecht zum Probenkörpertrand in einem Lastenleitungspunkt ausübbarer resultierenden Zug- bzw. Druckkraft von etwa 24 kN. Die tatsächlich erreichbare Genauigkeit der Positionierung eines Hydraulikzylinders liegt bei etwa 2-3  $\mu$ m.

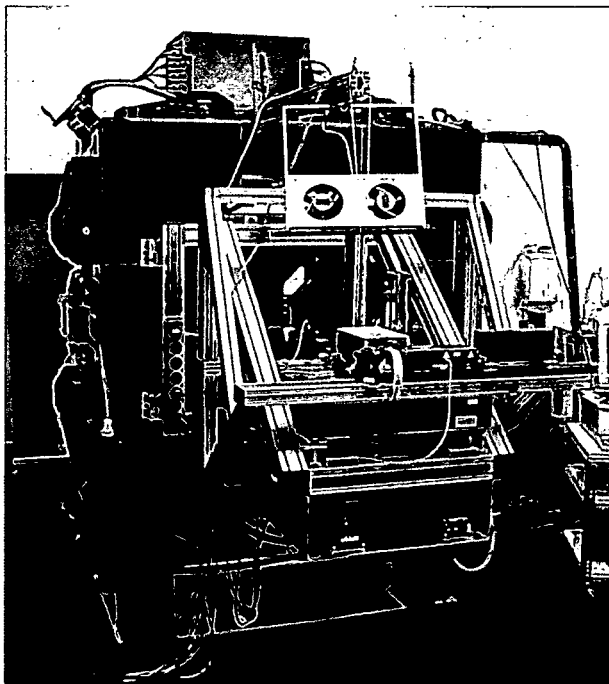
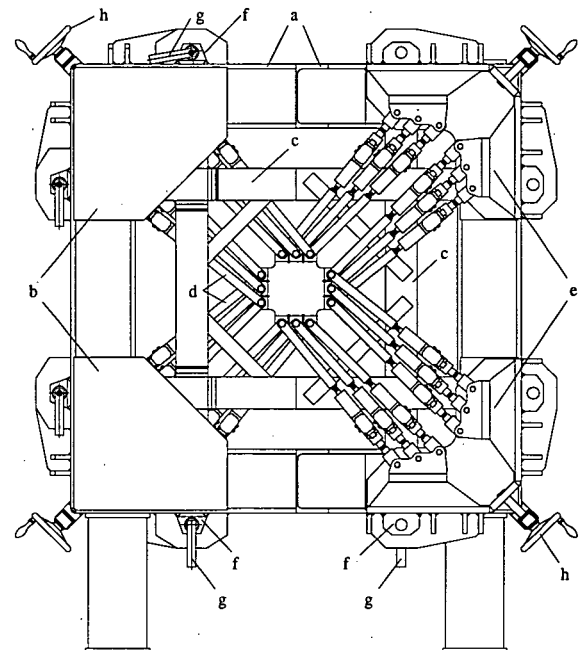


Abbildung 3.1: Biaxiales Belastungs- und Deformationsmesssystem



a.....Doppelstahlrahmen e.....Verankerungsblöcke  
 b.....Aussteifungsbleche f.....Bolzenhalterungen  
 c.....Aussteifungsrahmen g.....Verbindungsbolzen  
 d.....Belastungsachsen h.....Handkurbeln

Abbildung 3.2: Mechanische Belastungseinrichtung

Die Steuerung der Festigkeitsprüfmaschine erfolgt EDV-orientiert durch eine am Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen entwickelte Software. Um Schwingungen aus dem Untergrund (z.B. durch nahe am Labor vorbeifahrende Züge) abfangen zu können, ist die gesamte Prüfeinrichtung auf einem schwingungsgetilgten Maschinenfundament gelagert.

### 3.1.2 Berührungsloses Deformationsmesssystem

Zur berührungslosen Deformationsanalyse wird ein elektronisches Speckle-Pattern-Interferometrie (ESPI)-System eingesetzt. Damit ist es im gegenständlichen Fall möglich, wahlweise ein-, zwei oder dreidimensionale Deformationszustände zu erfassen. Die Messempfindlichkeit des eingesetzten interferometrischen Verfahrens liegt in der Größenordnung eines Bruchteils der verwendeten Lichtwellenlänge des Lasers ( $\lambda = 532$  nm). Die tatsächliche Messgenauigkeit des ESPI-Systems ist jedoch beträchtlich geringer. Mögliche Ursachen sind das Auftreten von Störungen und Fehlereinflüssen während einer Messung und Fehler und Ungenauigkeiten bei der Auswertung der Messdaten. Weiters hat auch die Positionierungsgenauigkeit des Be-

lastungssystemes (siehe Unterkapitel 3.1.1) einen Einfluss auf die Messgenauigkeit einzelner Deformationsschritte.

Der gesamte Aufbau des ESPI-Systems ist auf einer schwingungsgedämpften Wabenplatte angebracht. Alle Tragkonstruktionen zur Montage optischer Komponenten sind ausschließlich mit der Wabenplatte verschraubt und bestehen aus steifen Aluminium-Systemprofilen. Die Wabenplatte wird ebenfalls von einer Aluminium-Systemprofile-Rahmenkonstruktion getragen, welche fest mit dem Stahlrahmen der Belastungseinrichtung verbunden ist. Die im Bildvordergrund erkennbaren Komponenten der Abb. 3.1 sind Bestandteile des ESPI-Messsystems.

## 3.2 Probekörper

Die Experimente im Rahmen dieser Arbeit wurden mit zwei Probekörperformen mit jeweils zwei unterschiedlichen Ausformungen durchgeführt:

- Typ A1 - kreuzförmiger Holzprobekörper entsprechend der Arbeit von EBERHARDSTEINER [1] (Abmessungen siehe Abb. 3.3)
- Typ A2 - kreuzförmiger Holzprobekörper wie Typ A1, jedoch ohne Schlitz im Lasteinleitungsbereich (Abmessungen siehe Abb. 3.4)
- Typ B1 - geringfügig modifizierte Form des Typs A zur Durchführung von uniaxialen Versuchen (Abmessungen siehe Abb. 3.5)
- Typ B2 - wie Typ B1, jedoch ohne Schlitz im Lasteinleitungsbereich (Abmessungen siehe Abb. 3.6)

Die Form des Probekörpers ist das Ergebnis umfangreicher experimenteller Voruntersuchungen und numerischer Optimierungsanalysen mittels der FEM. Wesentliche Merkmale des in [1] ausführlich beschriebenen Probekörpers (Typ A1) sind je drei diskrete Lasteinleitungspunkte pro Rand, beidseitig aufgeklebte Stahlplättchen zur Vermeidung einer vorzeitigen Zerstörung im Lasteinleitungsbereich aufgrund der auftretenden konzentrierten Kräfte, Anordnung von Schlitz zwischen Lasteinleitungs- und Messbereich zur Verhinderung unerwünschter Kraftflüsse sowie ein quadratisches Prüffeld mit gegenüber den Lasteinleitungsbereichen deutlich reduzierter Holzdicke.

Die Dicken des Prüffeldes sind im Anhang B angegeben und betragen für Zug- bzw. Druckversuche mit fehlerfreiem Holz  $t = 4.5$  mm bzw.  $7.5$  mm. Die Experimente mit ausgewählten Ästen wurden vorwiegend mit Prüffeldstärken von  $t = 8$  mm bzw.  $10$  mm durchgeführt. Die Erhöhung der Holzstärken gegenüber den fehlerfreien Proben war erforderlich, da die Äste bei der Bearbeitung mit einer CNC-Fräse bei geringeren Stärken durch den aus der höheren Rohdichte im Astbereich resultierenden höheren Fräsdruck beschädigt wurden bzw. teilweise aus dem Probekörper herausfielen. Dies führte zu einer Erhöhung des Nettoquerschnittes im Prüffeld, wodurch auch vereinzelt Brüche im Lasteinleitungsbereich auftraten. Dies konnte durch Weglassen der Schlitz (Probekörpertypen A2 bzw. B2) im Lasteinleitungsbereich verhindert werden, wobei das Beanspruchungsverhalten im Messfeld nur unwesentlich beeinflusst wird.

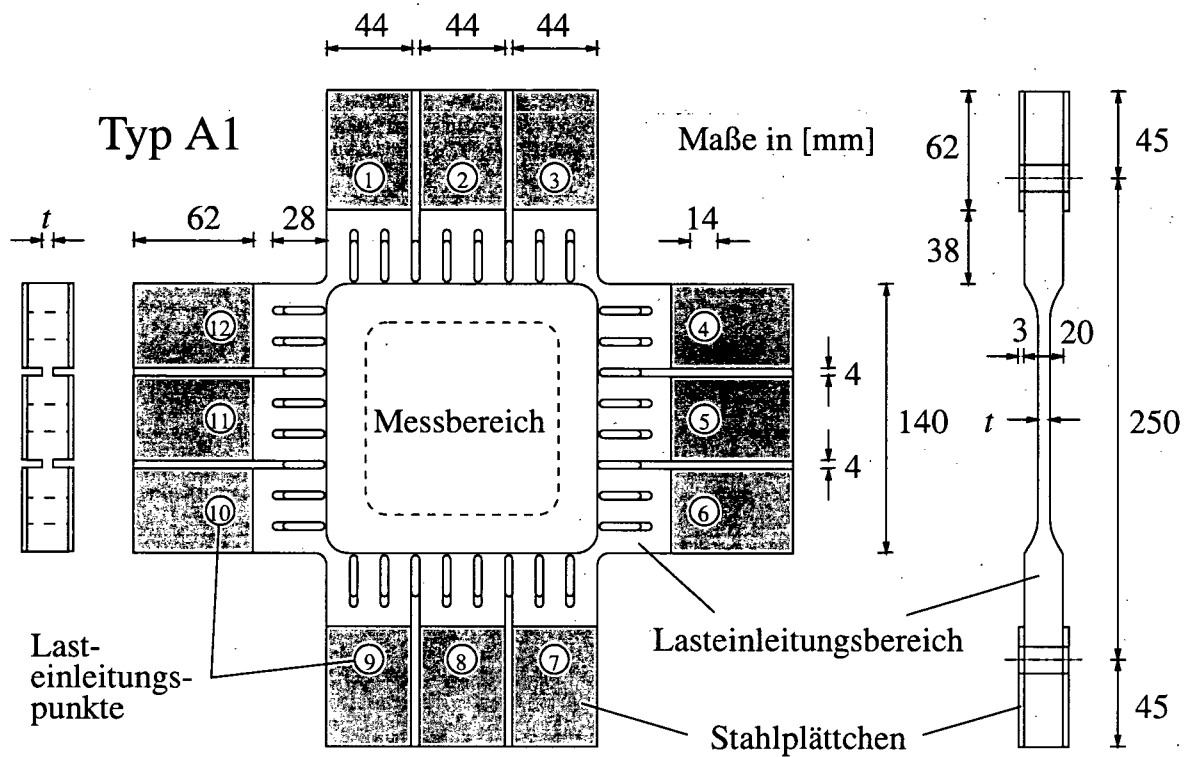


Abbildung 3.3: Biaxialer Holzprobekörper - Typ A1

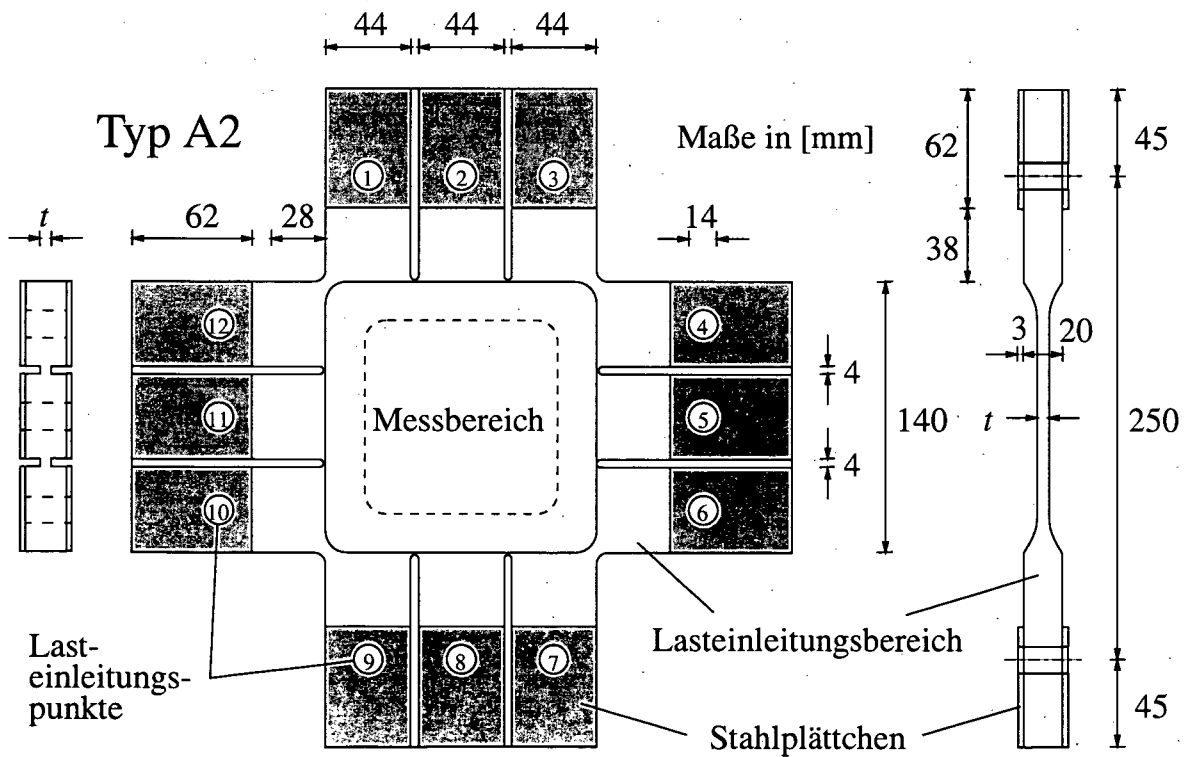


Abbildung 3.4: Biaxialer Holzprobekörper - Typ A2

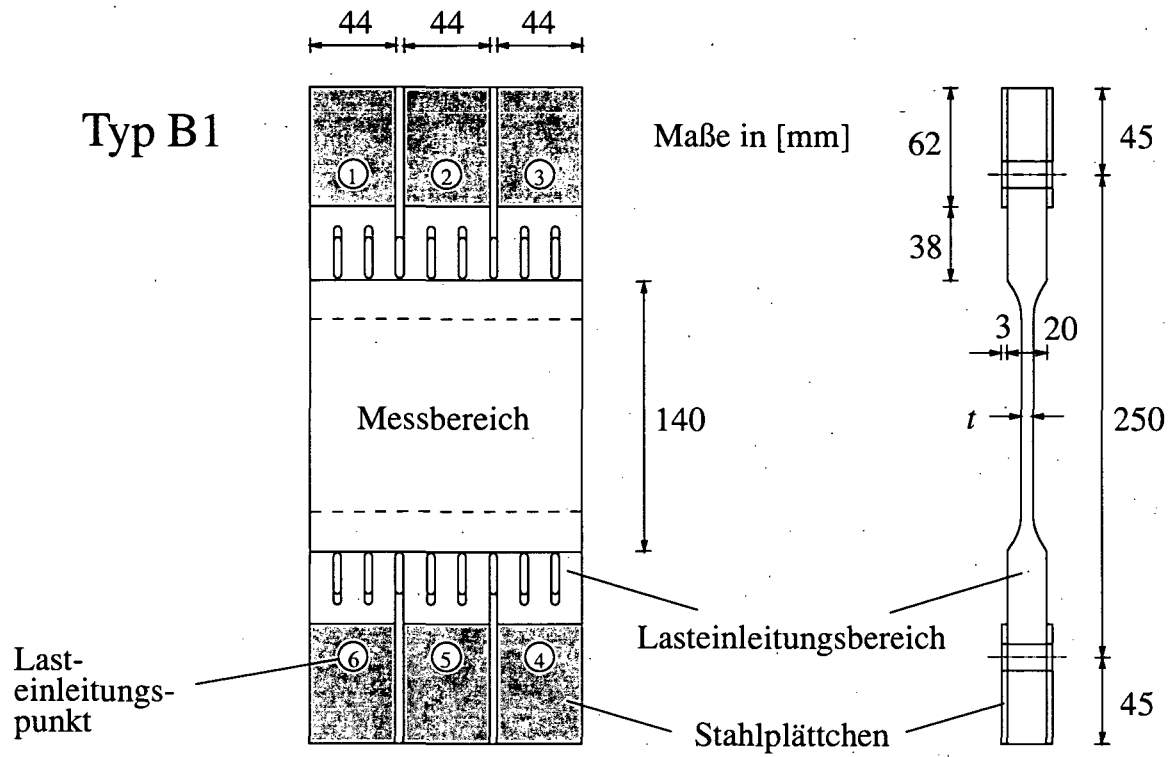


Abbildung 3.5: Uniaxialer Holzprobekörper - Typ B1

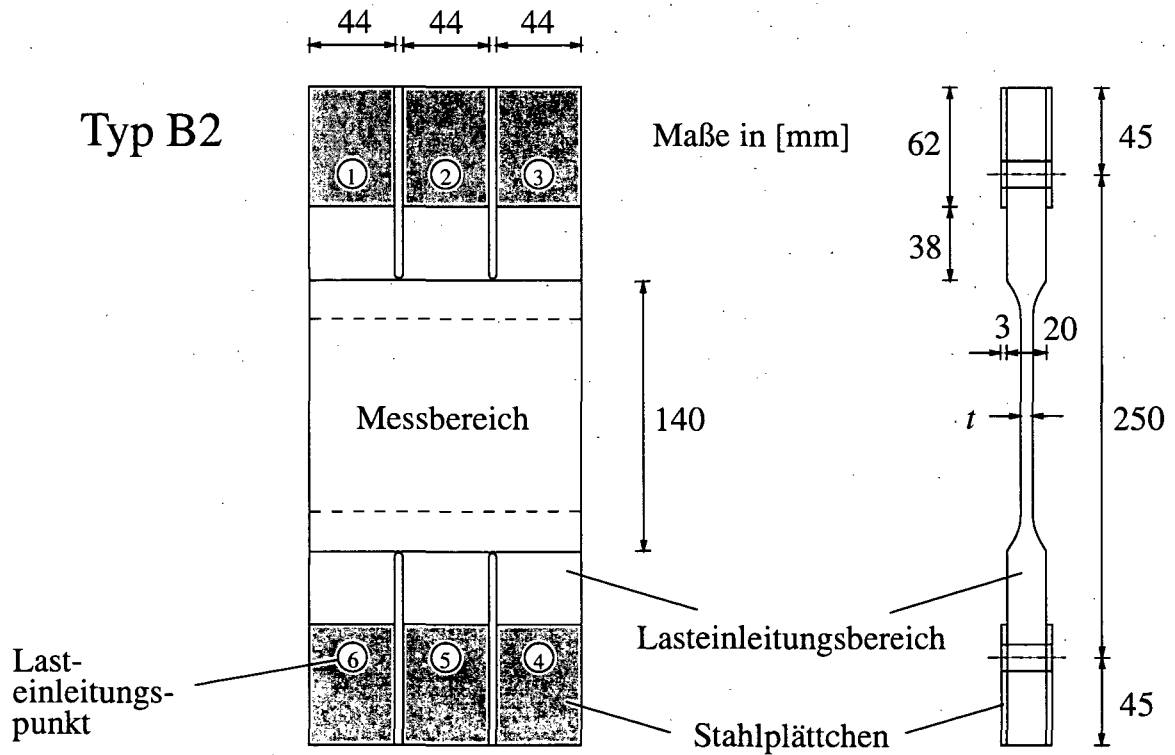
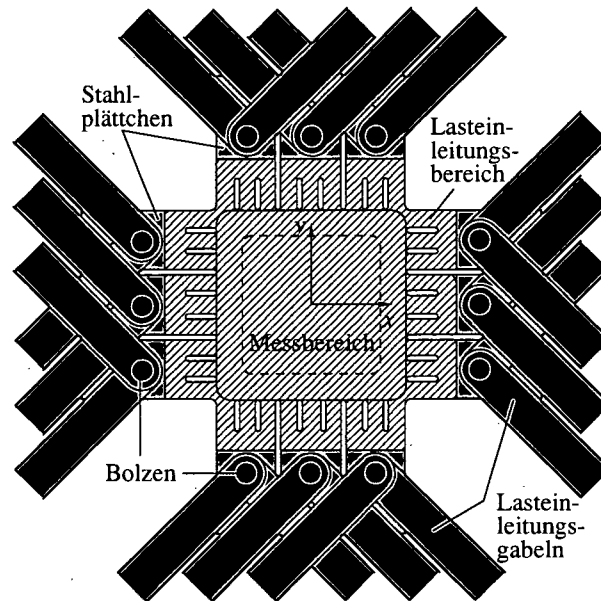


Abbildung 3.6: Uniaxialer Holzprobekörper - Typ B2



Die Beanspruchung der Probekörper erfolgt verschiebungsgesteuert durch etwa um  $45^\circ$  zum Probekörperrand geneigte Belastungsachsen. Gefertigt wurden alle Probekörper aus österreichischem Fichtenholz mittels einer CNC-Maschine an der *Höheren Technischen Bundeslehr- und Versuchsanstalt Mödling*. Die Lagerung der Probekörper erfolgte vor Versuchsbeginn über mehrere Tage in einem Klimaraum bei einer Temperatur von  $20^\circ\text{C}$  und einer relativen Luftfeuchtigkeit von 65 %. Auf diese Weise wurde eine konstante Holzausgleichsfeuchtigkeit von  $u = 12\%$  sichergestellt.



**Abbildung 3.7:** Lasteinleitungssystem für einen ebenen Holzprobekörper (Typ A1) unter biaxialer Beanspruchung

### 3.3 Versuchsablauf

Ein Routineversuch lässt sich grundsätzlich in drei Schritte gliedern:

- Einrichtphase,
- Vorspannphase und
- Belastungsphase.

Das Ziel des Einrichtvorganges ist die zerstörungs- und kraftfreie Montage des Probekörpers in der Prüfeinrichtung. Anschließend erfolgt der Vorspannvorgang mit der Aufgabenstellung, die im Zusammenhang mit der beweglichen Lagerung der 24 Belastungsachsen auftretenden Spiele unter Berücksichtigung der während der nachfolgenden Belastungsphase aufgetragenen Beanspruchung (uniaxialer Zug bzw. Druck oder biaxialer Zug- oder Druck- bzw. gemischte Zug- und Druckbeanspruchung) zu beseitigen. Es werden jeweils senkrecht zum Probenrand wirkende, betragsmäßig gleich große Lasteinleitungskräfte  $F_i$  aufgebracht:

$$\vec{F}_i = \pm 0.30 \text{ kN} = \text{konst.} \quad i = 1, \dots, 12 \text{ (Typ A)} \quad \text{bzw.} \quad i = 1, \dots, 6 \text{ (Typ B)}. \quad (3.1)$$

Die Größenordnung von  $\vec{F}_i = 0.30 \text{ kN}$  ist das Ergebnis von Voruntersuchungen und kann bei einigen Versuchen von diesem Wert abweichen.

Die Belastungsphase erfolgt i. d. R. durch proportionale, schrittweise verschiebungsgesteuerte Beanspruchung bis zum Bruch des Probekörpers im Falle von sprödem Zugversagen bzw. bis zum maximal möglichem Verschiebungsweg der Prüfeinrichtung bei duktilem Druckversagen (siehe Abb. 3.8).

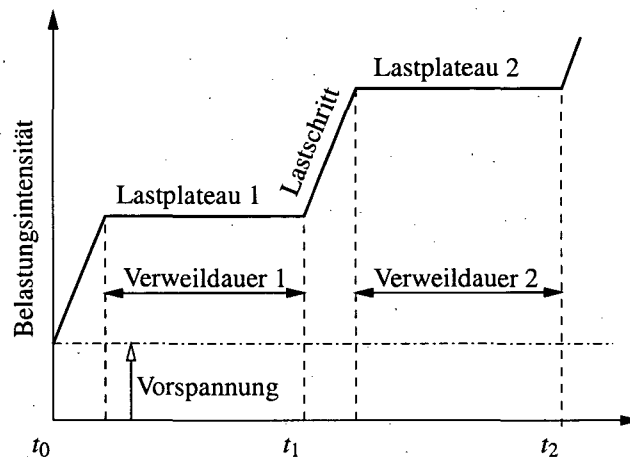


Abbildung 3.8: Zeitlicher Ablauf der Belastungsschritte

Die Deformationsmessungen mit dem ESPI-System erfolgen automatisch gesteuert während der einzelnen Lastplateaus. Die Ist-Zustände des Belastungssystems (Kräfte und Wege) werden ebenfalls digital aufgezeichnet.

Als Kriterium zur Festlegung des Bruchpunktes eines Versuches diene das Erreichen eines Maximalwertes einer der beiden Spannungskomponenten  $\sigma_x$  bzw.  $\sigma_y$ .

### 3.3.1 Wahl der Verschiebungsvorgabe

Versuche zur Bestimmung von Materialparametern erfordern homogene Verzerrungszustände im Messbereich des Probekörpers. Die Erfüllung dieser Forderung hat sich als anspruchsvolle Aufgabenstellung erwiesen und ist in [1] im Unterkapitel 3.2.3 ausführlich dokumentiert.

Diese Problematik hat im Wesentlichen zwei Ursachen:

- Wird Holz schräg zur Faserrichtung mit Normalkräften beansprucht, treten neben Normalverzerrungen auch Schubverzerrungen auf (siehe Abb. 3.9). Unter einem allgemeinen Beanspruchungszustand stimmen daher die Spannungshaupttrichtungen nicht mit den Verzerrungshaupttrichtungen überein.
- Die Steifigkeiten parallel und normal zur Faser weisen deutliche Unterschiede auf.

Die in [1] ermittelte Verschiebungsvorschrift wird in dieser Arbeit für alle Probekörper des Typs A unverändert übernommen. Sie wurde ausgehend von einem bestimmten normierten Beanspruchungsverhältnis  $\kappa = \bar{u} : \bar{v} = +1 : 0$  für verschiedene Faserrichtungen  $\varphi$  bestimmt.

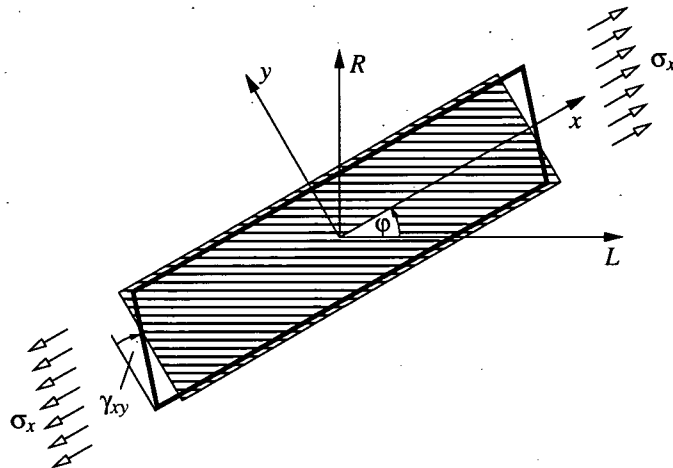


Abbildung 3.9: Schubdeformation bei einaxialer Beanspruchung schräg zur Faserrichtung

$\kappa$  bezeichnet das Verhältnis der Verschiebungskomponenten normal zum Rand der mittleren seitlichen Lasteinleitungspunkte 5 und 11 ( $u_5 \equiv \bar{u}$ ) zu den mittleren oberen und unteren Lasteinleitungspunkte 2 und 8 ( $v_2 \equiv \bar{v}$ ) (siehe Abb. 3.10). Verschiebungen normal zum Rand, die eine Zugbeanspruchung des Probekörpers zur Folge haben werden, sind mit einem positiven Vorzeichen, solche die eine Druckbeanspruchung verursachen, mit einem negativen Vorzeichen bezeichnet. Die Verschiebungsvorgaben sind der Tabelle 3.2 in [1] zu entnehmen.

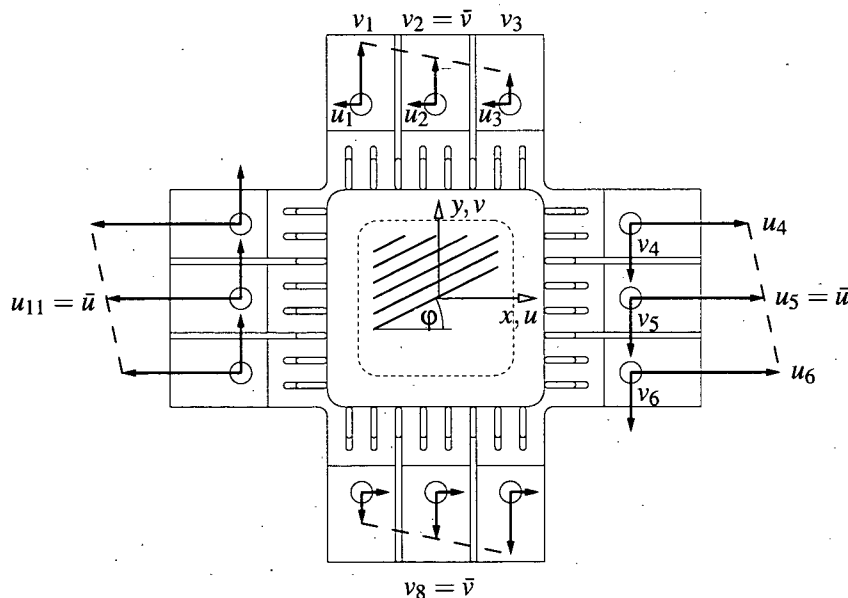


Abbildung 3.10: Antimetrische Verschiebungsvorschrift für ein biaxiales Beanspruchungsverhältnis  $\kappa = \bar{u} : \bar{v}$  für den Probekörper Typ A

Für den Probekörper Typ B ( $\varphi = 0^\circ$  bzw.  $90^\circ$ ) werden die Verschiebungen über die zwei Lasteinleitungsränder konstant vorgeschrieben ( $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = v_6 = \bar{v}$ ). Der Versuchsparameter  $\kappa \rightarrow \bar{\kappa}$  wird für Typ B in der Form  $\bar{\kappa} = +1$  bei Zugbeanspruchung und  $\bar{\kappa} = -1$  bei Druckbeanspruchung angegeben, da lediglich zwei der vier Lasteinleitungsränder der Biaxialprüfmaschine verwendet werden.

### 3.3.2 Wahl der Deformationsgeschwindigkeit

Der Bereich der Deformationsgeschwindigkeit wurde in [1] aufgrund verschiedener Systemparameter, welche in den Arbeiten von GINGERL [15] und PULAY [16] ausführlich beschrieben sind, festgelegt und wird für diese Arbeit übernommen. Als Standardwert wurde etwa  $\dot{u} = 1 \mu\text{m/s}$  gewählt, wobei das Maximum bei  $\dot{u} = 2 \mu\text{m/s}$  lag. Diese Werte liegen in jener Größenordnung, welche die Norm EN 789 [17] für die Bestimmung der mechanischen Eigenschaften von Holzbauwerkstoffen vorschreibt. Im Pkt. 7.4.1 dieser Norm wird angeführt, dass die Höchstlast bei einem Versuch im Mittel etwa nach 300 s erreicht werden muss. Rechnet man diesen Wert auf eine Deformationsgeschwindigkeit  $\dot{u}$  um, so erhält man etwa  $\dot{u} = 5 \mu\text{m/s}$  (Dieser Wert gilt für die Dehnung einer Zugfaser in Faserlängsrichtung bei einem Biegeversuch, welcher bis zum Bruch durchgeführt wird.).

Da Holz viskoses Materialverhalten aufweist, unterliegen die mechanischen Kenngrößen einem Zeiteinfluss. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ergänzend untersucht, in welcher Größenordnung die viskosen Spannungsanteile bei den gewählten Deformationsgeschwindigkeiten liegen. Dazu wurden drei biaxiale Relaxationsversuche ( $\varphi = 15^\circ$ ,  $\kappa = +5 : -4$ ) mit unterschiedlichen Verformungsgeschwindigkeiten  $\dot{u}$  im Verhältnis 1 : 10 : 100 durchgeführt.

In der Abb. 3.11 wird jeweils die größere der beiden Normalspannungskomponenten ( $\sigma_x$ ) in Abhängigkeit von den Belastungsschritten aufgetragen. Daraus lassen sich direkt die viskosen Spannungsanteile  $\sigma_v$  ablesen.

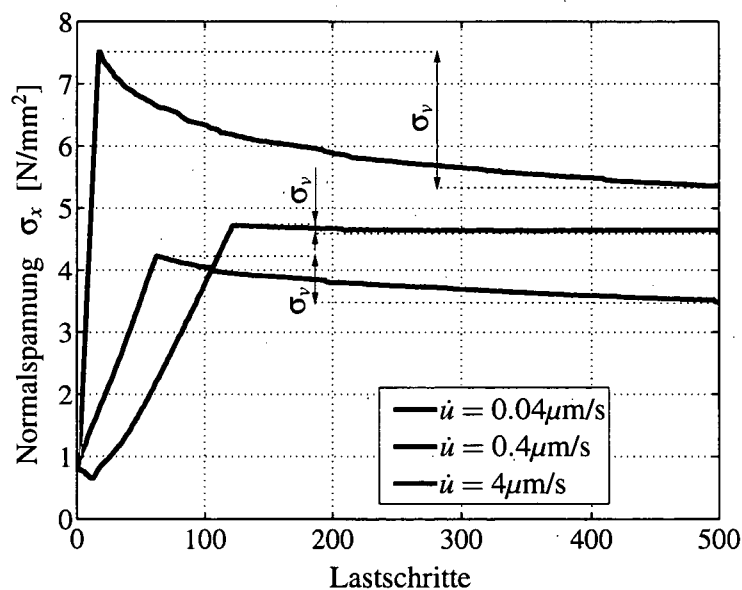


Abbildung 3.11: Viskose Spannungsanteile  $\sigma_v$  der Relaxationsversuche

Trägt man  $\sigma_v$  in Abhängigkeit von  $\dot{u}$  im logarithmischen Maßstab auf und führt mit den drei erhaltenen Messergebnissen eine lineare Regressionsrechnung durch, lassen sich die viskosen Spannungsanteile für den gewählten Bereich der Deformationsgeschwindigkeit direkt ablesen.

Wie aus der Abb. 3.12 ersichtlich ist, erreichen die viskosen Spannungsanteile  $\sigma_v$  für den gewählten Bereich der Versuchsgeschwindigkeit ( $\dot{u} = 0.5$  bis  $2.0 \mu\text{m/s}$ ) nicht vernachlässig-

bare Werte (17 bis 21%). Da jedoch die ermittelten Materialkennwerte der biaxialen Versuche mit den in den Normen angeführten Werten vergleichbar sein sollen, werden die auftretenden viskosen Spannungsanteile in Kauf genommen. Den in diesem Unterkapitel angeführten Sachverhalt sollte die Forschung in Zusammenarbeit mit der Holzbauindustrie zum Anlass nehmen, geänderte Konzepte für Versuchsgeschwindigkeiten (und Bestimmung der Materialkennwerte) zu erarbeiten.

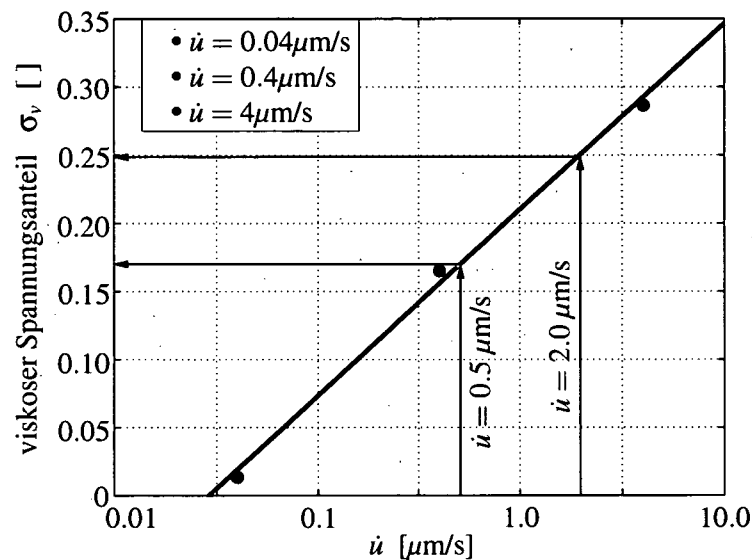


Abbildung 3.12: Viskoser Spannungsanteil  $\sigma_v$  in Abhängigkeit von der Deformationsgeschwindigkeit  $\dot{u}$

### 3.4 Versuchsumfang

#### 3.4.1 Biaxiale Bruchversuche mit fehlerfreiem Fichtenholz

Für die im Unterkapitel 5.2.1 angegebene Vorgangsweise für die Erstellung des orthotropen Werkstoffgesetzes werden zwei Arten von Versuchen mit fehlerfreiem Holz benötigt:

- a) Probekörper aus Kernbrettern (*LR*-Ebene) gefertigt (Typ A1).
- b) Probekörper aus Seitenbrettern (*LT*-Ebene) gefertigt (Typ A1).

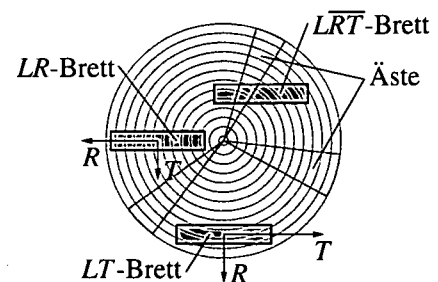
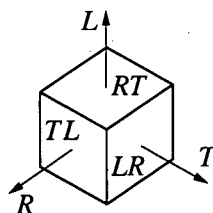
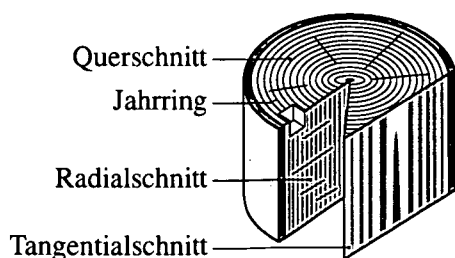


Abbildung 3.13: Abschnitt eines Baumstammes, Materialhauptrichtungen

Abbildung 3.14: Probenentnahme aus einem Stamm

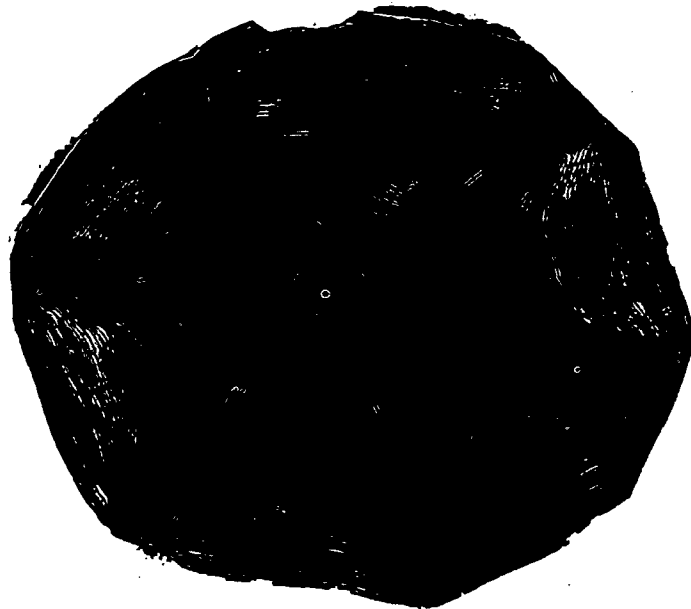
Versuche in der *LR*-Ebene sind in der Arbeit von EBERHARDSTEINER [1] in ausreichendem Umfang dokumentiert. Die Ergebnisse werden für diese Arbeit übernommen.

Für die aus Seitenbrettern in der *LT*-Ebene gefertigten Probekörper wird ausschließlich Typ A1 verwendet. Um ein möglichst ideales *LT*-Brett zu erhalten, sollte einerseits der Durchmesser des Stamms möglichst groß sein und das Brett so weit außen als möglich herausgeschnitten werden. Weiters werden Leimfugen sowohl im Lasteinleitungsbereich als auch im Messfeld zugelassen. Die Erfahrung zeigt, dass Leimfugen für ESPI-Messungen unproblematisch sind.

Die Anzahl der Versuche sind in Tab. 3.1 angegeben, eine vollständige Auflistung ist im Anhang B.1 enthalten.

### 3.4.2 Biaxiale und uniaxiale Bruchversuche mit ausgewählten Ästen

Im Kapitel 6 wird der Einfluss der wesentlichen Holzmerkmale auf die mechanischen Eigenschaften des Werkstoffes Holz berücksichtigt. Dazu wurden Versuche an ausgewählten Fichtenholzstücken mit unterschiedlich großen und verschiedener Anzahl von Ästen durchgeführt. Auf eine Unterscheidung in *LR*-Bretter bzw. *LT*-Bretter wird hier verzichtet, da man i. d. R. nur aus *LR*-nahen Brettern sinnvolle Astverteilungen für einen zweidimensionalen Probekörper erhalten kann (siehe Abb. 3.14).



**Abbildung 3.15:** Stammquerschnitt einer Fichte mit Ästen (Alter: 45 Jahre, Durchmesser: 41-48 cm, gut zu erkennen ist ein überwucherter Ast im linken oberen Bereich)

Für das im Kapitel 6 erläuterte Konzept zur Berücksichtigung der wesentlichen Holzmerkmale sind uniaxiale Experimente mit ausgewählten Ästen ausreichend (Typ B1 bzw. B2).

Da bei den Druckversuchen der Probekörper im Messfeldbereich ausbeulte, war es erforderlich, dieses Stabilitätsproblem durch seitliche Halterungen zu verhindern. Dies führte zur Verwendung eines kreuzförmigen Probekörpers vom Typ A2. (Trotz einer Abschätzung mit Hilfe der Knickformel nach EULER und Berücksichtigung eines Sicherheitsfaktors von über zwei, trat ein Ausbeulen des Messfeldbereiches auf. Die Ursache hierfür liegt mit großer Wahrscheinlichkeit im orthotropen Materialverhalten von Holz. Die Knickformel nach EULER setzt einen isotropen Werkstoff voraus.)

Die Anzahl der Versuche sind in Tab. 3.1 angegeben, eine vollständige Aufistung ist im Anhang B.2 enthalten.

### 3.4.3 Ergänzende uniaxiale Versuche mit fehlerfreiem Fichtenholz

Zur Bestimmung der Steifigkeitseigenschaften wurden ergänzende uniaxiale Zugversuche auf einer spindelgetriebenen Uniaxialprüfmaschine durchgeführt. Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls in  $L$ - und  $R$ -Richtung sowie die Querdehnungszahl  $\nu_{LR}$  wurde von EBERHARDSTEINER [1] durchgeführt. Der Elastizitätsmodul in  $T$ -Richtung wurde von GOLFIERI [18] untersucht. Die Ergebnisse dieser Experimente sind im Kapitel 5.3.2 angeführt.

Zwecks Überprüfung der Ergebnisse aus den biaxialen Bruchversuchen wurden in [1] zusätzlich uniaxiale Bruchversuche in  $L$ - und  $R$ -Richtung durchgeführt.

### 3.4.4 Versuchsübersicht

Tabelle 3.1: Übersicht über die durchgeführten Bruchversuche

Bruchversuche				
uni- / biaxial	biaxial			uniaxial
fehlerfrei / mit ausgew. Ästen	fehlerfrei		mit Ästen	mit Ästen
Probenentnahme	$LR$ -Brett	$LT$ -Brett	$L\overline{RT}$ -Brett	$L\overline{RT}$ -Brett
Probekörpertyp	A1	A1	A2	B1, B2
Anzahl *)	439 (423)	30 (12)	26 (24)	49 (28)

\*) Die Zahlenwerte in der Klammer entsprechen den für die Auswertung tatsächlichen verwendeten Versuchen.

**Tabelle 3.2:** Übersicht über die durchgeführten uniaxialen Zugversuche zur Bestimmung der Steifigkeitskennwerte und uniaxialen Festigkeiten

Uniaxiale Zugversuche			
Beanspruchungsrichtung	<i>L</i> -Richtung	<i>R</i> -Richtung	<i>T</i> -Richtung
Bestimmung des Elastizitätsmoduls	100	100	30
Bestimmung der Querdehnungszahl	100		
Bestimmung der uniaxialen Festigkeiten	100	100	



## Theoretische Grundlagen zur Materialmodellierung

### 4.1 Varianten der Materialmodellierung

#### 4.1.1 Ebenen der Materialmodellierung

Die Beschreibung von Materialien kann auf verschiedenen Ebenen erfolgen:

*Atomare-Ebene* → *Nano-Ebene* → *Mikro-Ebene* → *Meso-Ebene* → *Makro-Ebene*,

wobei nicht bei allen Werkstoffen alle Ebenen ausgeprägt sind. Für Beton kann diese fünfteilige Skala verwendet werden, bei Stahl treten die Mikro- und Meso-Ebene nicht auf. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die *Herleitung eines Materialmodells für Fichtenholz auf makroskopischer Ebene*, wobei die *Versagensmechanismen mikromechanisch begründet* werden (MACKENZIE-HELNWEIN [23]). Dabei wird das Materialmodell an die, aus den makroskopischen Experimenten erhaltenen, Spannungs-Dehnungsbeziehungen angepasst. Dafür ist ein homogener Verzerrungszustand im Messbereich der Probekörper erforderlich. Im Rahmen der makroskopischen Betrachtungsweise wird das Material als Kontinuum mit Materialparametern beschrieben.

#### 4.1.2 Richtungsabhängigkeit der Materialeigenschaften

Sind die Materialeigenschaften richtungsunabhängig, so spricht man von einem *isotropen* Werkstoff, im anderen Fall von einem *anisotropen* Werkstoff. Die anisotropen Werkstoffe werden weiters in die Gruppen

- *allgemeine Anisotropie* (z. B.: menschliche Haut)
- *orthogonale Anisotropie (Orthotropie)* (z. B.: Holz) und

- *transversale Isotropie* (z. B.: Lockergesteine)

eingeteilt. Im Rahmen dieser Arbeit wird *Fichtenholz* als *orthotroper Werkstoff* beschrieben, d.h. dass die Materialeigenschaften in drei orthogonale Richtungen im Raum verschieden berücksichtigt werden können. Entsprechend dem im Kapitel 3 vorgestellten Versuchskonzept (biaxiale Experimente) beschränkt sich die Formulierung des Materialmodells auf den Fall des *ebenen Spannungszustandes*.

### 4.1.3 Ursachen von Nichtlinearität

Zum Zwecke der präzisen Definition des Begriffs „nichtlineare Berechnung“ wird dieser im Nachfolgenden näher erläutert. Sind die Voraussetzungen

- Kleinheit von Verschiebungen, Rotationen und Verzerrungen,
- linear elastisches Materialverhalten sowie
- Randbedingungen, die im Zuge der Belastung ihr Wesen nicht ändern,

nicht erfüllt, so spricht man von nichtlinearem Verhalten. Die Ursachen von Nichtlinearität lassen sich entsprechend der Verletzung der Voraussetzungen der vorigen Auflistung in drei Gruppen zusammenfassen:

- *geometrische Nichtlinearität* (Berücksichtigung großer Deformationen),
- *physikalische Nichtlinearität* (nichtlineare Spannungs-Verzerrungs-Beziehung)
- *nichtlineare Randbedingungen* (Änderung des Modells im Laufe der Belastung, z. B. Kontakt, Reibung und Verformungsbehinderung).

Das in dieser Arbeit vorgestellte *Materialmodell* beschreibt die *physikalische Nichtlinearität* und beschränkt sich auf *kleine Deformationen* (kleine Verzerrungen). Nichtlineare Randbedingungen haben auf die Materialmodellierung keinen Einfluss und können im Rahmen von Finite-Elemente-Berechnungen entsprechend berücksichtigt werden.

Die Beschreibung des physikalisch nichtlinearen Materialverhaltens erfolgt im Rahmen der *Plastizitätstheorie*, womit man in der Lage ist, elasto-plastisches Materialverhalten zu beschreiben. Effekte der Materialschädigung bleiben unberücksichtigt (→ Schädigungstheorie).

## 4.2 Grundlagen der Plastizitätstheorie

Die drei wesentlichen Grundbausteine der Plastizitätstheorie sind:

1. eine *Fließfunktion* zur Definition der Grenze des elastischen Verhaltens,
2. eine *Fließregel* zur Beschreibung der Größe und Richtung der plastischen Deformationen und

3. ein Ver- bzw. Entfestigungsgesetz zur Bestimmung der Veränderung der Fließfläche im Zuge plastischer Deformationen.

Dieses Unterkapitel stellt die im Kapitel 7 verwendeten Grundgleichungen der Plastizitätstheorie vor und erläutert die Vorgangsweise bei der Ermittlung der zusätzlichen Variablen, die zur Beschreibung des plastischen Materialverhaltens erforderlich sind. Die Grundzüge des Projektionsverfahrens, welches zur Integration der plastischen Evolutionsgesetze dient, werden erläutert.

### 4.2.1 Grundgleichungen der Plastizitätstheorie

Die klassische Plastizitätstheorie wird durch einen Satz von Gleichungen beschrieben, die die Grenze des elastischen Verhaltens sowie die Evolution der inelastischen Verzerrungsgrößen bestimmen. Im folgenden Abschnitt werden diese Grundgleichungen kurz zusammengefasst. Die Plastizitätstheorie und die diskretisierte Form der Grundgleichungen sowie deren algorithmische Behandlung werden ausführlich in SIMO und HUGHES [19] beschrieben.

#### Primäre Zustandsvariablen:

Aus der CAUCHY'schen Definition eines elastischen Körpers, gemäß der in einem elastischen Körper die Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}, T)$  allein durch die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  und die Temperatur  $T$  bestimmt sind, folgt die Definition eines inelastischen Körpers in der Art, dass in diesem Fall die totalen Verzerrungen zusätzlich noch von anderen Einflüssen abhängen. Diese Einflüsse können mathematisch durch zusätzliche Variablen beschrieben werden. Es sind dies, die in der Plastizitätstheorie als interne (innere) Zustandsvariablen bezeichneten Größen  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  und  $\boldsymbol{\alpha}$  sowie die als externe Zustandsvariable bezeichnete Gesamtverzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  ist der inelastische oder plastische Teil der totalen Verzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .  $\boldsymbol{\alpha}$  steht für eine oder mehrere verzerrungsähnliche Variablen zur Beschreibung von Ver- und Entfestigung.

#### Additive Zerlegung der totalen Verzerrungen:

Die Gesamtverzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}$  wird, wie in der Theorie der kleinen Verschiebungen und Verzerrungen üblich, additiv in einen elastischen (reversiblen) Anteil  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  und in einen plastischen (irreversiblen) Anteil  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  zerlegt. Mathematisch ist dieser Zusammenhang zu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (4.1)$$

beschrieben. Diese Zerlegung gilt nur lokal, d. h. es ist nicht möglich, das gesamte Verschiebungsfeld in ein elastisches und ein plastisches Verschiebungsfeld aufzuteilen. Damit ist das in dieser Arbeit vorgestellte Materialmodell auf kleine Verschiebungen und Verzerrungen beschränkt.

#### Fließbedingung (Fließfunktion):

Die Fließbedingung begrenzt den Bereich rein elastischen Verhaltens im Spannungsraum. Alle zulässigen Spannungszustände müssen der Ungleichung

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad (4.2)$$

genügen. Das Gleichheitszeichen gilt ausschließlich im plastischen Bereich. Die veränderliche spannungsähnliche Variable  $\mathbf{q}$  bestimmt die aktuelle Ausdehnung der Fließfläche im Zuge eines Belastungsprozesses. Spannungszustände, die zu  $f > 0$  führen, sind in der Plastizitätstheorie nicht möglich.

### Hyperelastisches Materialgesetz:

Die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung für den Fall  $f \leq 0$  wird durch das folgende Gesetz beschrieben:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (4.3)$$

Darin bezeichnet  $\psi$  die freie HELMHOLTZ-Energie. Sie ist folgendermaßen definiert [19]:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\alpha}) = W(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \mathcal{H}(\boldsymbol{\alpha}), \quad (4.4)$$

wobei  $W$  die Verzerrungsenergiedichte und  $\mathcal{H}$  ein Verfestigungspotential bezeichnen. Durch die Beziehung (4.4) wird die freie HELMHOLTZ-Energie in zwei additive Anteile zerlegt. Schließlich benötigt man noch die Beziehung für die Verzerrungsenergiedichte  $W$ . Für ein linear elastisches Material lautet sie

$$W(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p). \quad (4.5)$$

Der Elastizitätstensor  $\mathbb{C}$  ist in diesem Fall konstant. Durch Einsetzen des Ergebnisses von (4.5) in (4.4) und anschließendem Einsetzen des Ergebnisses in (4.3) erhält man das verallgemeinerte HOOKE'sche Gesetz zu:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e. \quad (4.6)$$

### Assoziierte Fließregel – Evolutionsgleichung für $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ :

Im Fall  $f = 0$  tritt fließen ein. Bei assoziierter Plastizität wird die Evolution der plastischen Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  durch den Spannungsgradienten der Fließfläche und einem Proportionalitätsfaktor, dem sogenannten Konsistenzparameter  $\dot{\gamma}$ , wie folgt beschrieben:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (4.7)$$

$\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$  gibt die Richtung,  $\dot{\gamma}$  gibt die Größe der plastischen Verzerrungsrate  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  an.

### Verfestigungsgesetz:

Ver- bzw. Entfestigung wird mit Hilfe der spannungsähnlichen inneren Variablen  $\mathbf{q}$ , die von der verzerrungsähnlichen inneren Variablen  $\boldsymbol{\alpha}$  abhängt, gesteuert (siehe Gleichung (4.8)). Die entsprechende Definition ergibt sich aus der Ableitung der Gleichung (4.4) nach  $\boldsymbol{\alpha}$  zu [19]:

$$\mathbf{q} = -\frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = -\frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}. \quad (4.8)$$

**Assoziierte Verfestigungsregel – Evolutionsgleichung für  $\alpha$ :**

Im Falle assoziierter Plastizität wird die Evolution der internen plastischen Variablen  $\alpha$  durch den Gradienten der Fließfläche bezüglich  $\mathbf{q}$  und den skalaren Konsistenzparameter  $\dot{\gamma}$  mit

$$\dot{\alpha} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.9)$$

festgelegt.

**Kriterien für plastische Be- und Entlastung – Kuhn-Tucker-Bedingungen:**

Diese Kriterien lauten [19], [20]:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad (4.10a)$$

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad (4.10b)$$

$$\dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0. \quad (4.10c)$$

Die Bedingungen (4.10a) bis (4.10c) lassen zwei allgemeine Fälle zu:

1. Für  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0$  folgt aus (4.10c)  $\dot{\gamma} = 0$ . Die Rate der plastischen Verzerrungen verschwindet. Somit liegt ein rein elastischer Prozess vor.
2. Für  $\dot{\gamma} > 0$  folgt aus (4.10c) die Forderung  $f = 0$ . Somit müssen Zustände, die zu einer Veränderung der plastischen Variablen  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  und  $\alpha$  führen, auf der Fließfläche ( $f = 0$ ) liegen.

**Konsistenzbedingung:**

Zusätzlich zu den KUHN-TUCKER-Bedingungen muss die Konsistenzbedingung

$$\dot{\gamma} \dot{f} = 0 \quad (4.11)$$

erfüllt werden. Diese Bedingung lässt zwei allgemeine Fälle zu:

1. Wenn sowohl  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$  als auch  $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$  sind, dann entfernt sich ein auf der Fließfläche gelegener Spannungspunkt bei zusätzlicher Belastung nicht von dieser. Es liegt plastische Belastung vor und es gilt  $\dot{\gamma} \geq 0$ . (Für 2D- und 3D-Probleme gibt es plastische Belastung für die  $\dot{\gamma} = 0$  ist. Man spricht von neutraler Belastung [20].) Die Konsistenzbedingung (4.11) erlaubt die Ermittlung von  $\dot{\gamma}$ .
2. Wenn jedoch  $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0$  ist, dann muss  $\dot{\gamma} = 0$  gelten. Der Spannungspunkt wandert in den elastischen Bereich. Man spricht in diesem Fall von Entlastung.

**Dissipation – Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre:**

Die Differenz zwischen der aufgewendeten Leistung und der Rate der im Material gespeicherten freien HELMHOLTZ-Energiedichte wird als Dissipation  $\mathcal{D}$  bezeichnet. Unter Berücksichtigung von (4.3), (4.4), (4.5) und (4.8) kann sie als

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\psi} = \left( \boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \mathbf{q} \dot{\alpha} \geq 0 \quad (4.12)$$

angeschrieben werden. Die Dissipation ist für rein elastische Prozesse zu  $\mathcal{D} = 0$  definiert.

## 4.2.2 Ermittlung des Konsistenzparameters

In diesem Unterabschnitt wird die Ermittlung des Konsistenzparameters  $\dot{\gamma}$  aus den im Abschnitt 4.2.1 dargestellten Differentialgleichungssystem beschrieben. Dabei werden die zwei, für den Werkstoff Holz benötigten Fälle *Verfestigung* und *Entfestigung* unterschieden. Verfestigendes Materialverhalten tritt vor allem bei Druckbeanspruchung quer zur Faserlängsrichtung auf, entfestigendes Materialverhalten bei Zugbeanspruchung.

### 4.2.2.1 Verfestigung

Für plastische Belastung ( $\dot{\gamma} > 0$ ) folgt aus der Konsistenzbedingung (4.11) die Bedingung

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0. \quad (4.13)$$

In Gleichung (4.13) wird die Ratenform des verallgemeinerten HOOKE'schen Gesetzes (4.3) unter Berücksichtigung von (4.1) sowie die Ratenform des Verfestigungsgesetzes (4.8) eingesetzt. Man erhält dadurch

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{K} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} = 0, \quad (4.14)$$

wobei  $\mathbf{K} = -\partial \mathbf{q} / \partial \boldsymbol{\alpha}$  den Verfestigungsmodul bezeichnet. Durch Einsetzen der Fließregel (4.7) und der Verfestigungsregel (4.9) in Gleichung (4.14) erhält man

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\gamma} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{K} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \dot{\gamma} = 0. \quad (4.15)$$

Gleichung (4.15) stellt eine skalare Gleichung zur Bestimmung von  $\dot{\gamma}$  dar. Die gesuchte Beziehung für den Konsistenzparameter erhält man durch Umformen der Gleichung (4.15) zu

$$\dot{\gamma} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{K} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}}. \quad (4.16)$$

Über die Gleichungen (4.7), (4.9) und (4.16) sind somit die Raten  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  und  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$  bestimmt.

### 4.2.2.2 Entfestigung

Die Einführung der inneren Variable  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\alpha})$  ist nur sinnvoll bei Betrachtung von Verfestigung. Die Spannungsgröße  $\mathbf{q}(\boldsymbol{\alpha})$  repräsentiert innere Spannungen und führt zu einem Anteil  $\mathcal{H}(\boldsymbol{\alpha}) > 0$  an der freien HELMHOLTZ-Energie (siehe Gleichung (4.4)). Bei Betrachtung von Entfestigung wird dagegen keine Energie gespeichert ( $\mathcal{H}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$ ). Dadurch wird entsprechend Gleichung (4.8)  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Die Beziehung für die Entfestigungsregel wird daher folgendermaßen definiert:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = s \dot{\gamma}, \quad (4.17)$$

wobei die Hilfsgröße  $\mathbf{s}$  ein vom aktuellen Spannungszustand abhängiger Vektor ist. Der Unterschied zur Verfestigung liegt in der Lokalisierung der Entfestigungszone und führt zu einem diskreten Riss und der Energiedissipation entlang der Rissfläche.

Die Plastizitätstheorie arbeitet mit volumenspezifischen Größen. Bei der Beschreibung lokalisierter Phänomene würde dies zu einer Abhängigkeit von der Größe des Referenzvolumens führen.

Um dieses Problem zu beheben, muss die Energiebilanz im Zuge einer Rissbildung betrachtet werden. Dazu setzt man die dissipierte Energie nach Plastizitätstheorie innerhalb dieses Referenzvolumens (z.B. ein finites Element) gleich der dissipierten Energie in der Rissfläche entsprechend bruchmechanischer Überlegungen.

Die kontinuumsmechanische Dissipation  $\mathcal{D}$  gemäß (4.12) ist eine volumenspezifische Größe. Die bruchmechanische Energiefreisetzungsrates  $G_f$  dagegen ist eine flächenspezifische Größe, die bei vollständiger Ausbildung des Risses freigesetzt wird. Um die Größen vergleichen zu können, muss man die Gesamtenergie bei vollständiger Ausbildung eines Risses innerhalb eines vorgegebenen Kontrollvolumens  $V$  betrachten. Die Rissfläche innerhalb des Kontrollvolumens wird mit  $A$  bezeichnet. Da ab der vollständigen Ausbildung des Risses die Dissipation  $\mathcal{D}$  zu null wird, kann die dissipierte Gesamtenergie  $\mathcal{E}$  als

$$\mathcal{E} = \int_V \left( \int_0^\infty \mathcal{D} dt \right) dV = \int_A G_f dA \quad (4.18)$$

dargestellt werden. Das führt schließlich zur Identifikation einer charakteristischen Länge  $\ell_c = V/A$ . Details bezüglich der Ermittlung von  $\ell_c$  für isoparametrische finite Elemente findet man in OLIVER [21]. Im Rahmen dieser Arbeit wird dieses bruchmechanische Konzept im Rahmen der Materialmodellierung aufgrund numerischer Probleme nicht verwendet (siehe Unterkapitel 7.2.2).

Mit Hilfe dieser Grundlagen wird die Konsistenzbedingung für Entfestigung formuliert. Im Gegensatz zum Fall Verfestigung wird die Festigkeit  $Y(\boldsymbol{\alpha})$  als eine Spannungsgröße in der Fließbedingung  $f(\boldsymbol{\sigma}, Y)$  eingeführt. Für plastische Belastung ( $\dot{\gamma} > 0$ ) folgt damit aus der Konsistenzbedingung (4.11)

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} = 0. \quad (4.19)$$

In Gleichung (4.19) wird die Ratenform des verallgemeinerten HOOKE'schen Gesetzes (4.6) unter Berücksichtigung von (4.1) eingesetzt. Zusätzlich wird der Entfestigungsmodul  $\mathbf{K} = \partial Y(\boldsymbol{\alpha})/\partial \boldsymbol{\alpha}$  als Funktion von  $\boldsymbol{\alpha}$  eingeführt. Dies führt auf

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + \frac{\partial f}{\partial Y} \mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{s} \dot{\gamma} = 0. \quad (4.20)$$

Einsetzen der Fließregel (4.7) in Gleichung (4.20) ergibt

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\gamma} + \frac{\partial f}{\partial Y} \mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{s} \dot{\gamma} = 0. \quad (4.21)$$

Daraus erhält man die gesuchte Beziehung für den Konsistenzparameter zu:

$$\dot{\gamma} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial f}{\partial Y} \mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{s}} \quad (4.22)$$

Wenn ein Zustand  $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\alpha})$  bekannt ist, können die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  und die Festigkeit  $Y(\boldsymbol{\alpha})$  sowie der Entfestigungsmodul  $\mathbf{K}$  berechnet werden. Somit sind mittels (4.7), (4.17) und (4.22) auch die Raten  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  und  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$  bestimmt.

### 4.2.3 Diskretisierte Form der Grundgleichungen

Es wird eine geometrisch lineare und physikalisch nichtlineare Theorie angewendet. Geometrisch linear steht für die Beschränkung auf kleine Verschiebungen und die damit verbundene Linearisierung der kinematischen Beziehungen. Physikalisch nichtlinear bedeutet, dass ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen besteht. Zur Berechnung physikalisch nichtlinearer Probleme werden die Lasten in einzelnen Lastschritten (Inkrementen) aufgebracht.

Im Folgenden wird nun ein einzelnes Lastinkrement betrachtet, das sich über das Zeitintervall  $[t_n, t_{n+1}]$  erstreckt. Am Beginn des Intervalls werden die plastischen Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$  und die inneren Variablen  $\boldsymbol{\alpha}_n$  als bekannt angenommen. Die Indizes  $n$  und  $n + 1$  bezeichnen Größen zum Zeitpunkt  $t_n$  bzw.  $t_{n+1}$ .

Das Ziel ist, die Zustände  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$  und  $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$  am Ende des Intervalls  $[t_n, t_{n+1}]$  zu ermitteln. Dazu sind die Evolutionsgesetze im Zeitschritt  $[t_n, t_{n+1}]$  zu integrieren. Zur numerischen Integration wird das EULER-Rückwärts-Verfahren verwendet. Dieses implizite Integrationsverfahren wird im Folgenden anhand der Integration von (4.7) beschrieben:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\gamma} \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} dt \quad (4.23)$$

Für die linke Seite von (4.23) gilt

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{dt} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \quad (4.24)$$

Die rechte Seite von (4.23) ist im Allgemeinen nur numerisch zu lösen. Diese numerische Integration wird mittels des impliziten EULER-Rückwärts-Verfahrens gelöst. Das Charakteristikum dieses Verfahrens ist die Annahme, dass der Term  $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$  in Gleichung (4.23) für den Lastschritt  $n + 1$  ausgewertet wird und damit aus dem Integral herausgehoben werden kann. Für den übriggebliebenen Integranden auf der rechten Seite von (4.23) gilt somit

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\gamma} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d\gamma}{dt} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} d\gamma = \gamma_{n+1} \quad (4.25)$$



Bei  $\gamma_{n+1}$  handelt es sich um eine inkrementelle Größe über das Zeitintervall  $[t_n, t_{n+1}]$ . Einsetzen von (4.24) und (4.25) in (4.23) liefert

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \gamma_{n+1} \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} \quad (4.26)$$

Eine analoge Beziehung erhält man aus (4.9) zu

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + \gamma_{n+1} \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right|_{n+1} \quad (4.27)$$

Die zugehörigen Spannungsgrößen am Ende des Zeitintervalls folgen aus (4.3) und (4.8) zu

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad \text{und} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}). \quad (4.29)$$

Die totale Verzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  wird als bekannt vorausgesetzt. Die inkrementelle Form der KUHN-TUCKER-Bedingungen (4.10a) bis (4.10c) lautet

$$\gamma_{n+1} \geq 0, \quad (4.30a)$$

$$f_{n+1} = f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) \leq 0 \quad \text{und} \quad (4.30b)$$

$$\gamma_{n+1} f_{n+1} = 0. \quad (4.30c)$$

Die Gleichungen (4.26) bis (4.29) bilden mit den KUHN-TUCKER-Bedingungen (4.30a) bis (4.30c) als Zwangsbedingungen ein Gleichungssystem zur Bestimmung von  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ,  $\mathbf{q}_{n+1}$  und  $\gamma_{n+1}$ . Die diskrete Form der Konsistenzbedingung (4.11) wird durch die Bedingung (4.30c) ersetzt. Dieses vorgestellte Verfahren wird als *Projektionsverfahren* oder *Return Map Algorithmus* bezeichnet.

#### 4.2.4 Lösungsalgorithmus für das Projektionsverfahren

Das Projektionsverfahren nach Unterabschnitt 4.2.3 enthält Ungleichungen in Form der KUHN-TUCKER-Bedingungen. Diese erfordern einen zweistufigen Lösungsalgorithmus, der auf SIMO und TAYLOR [22] zurückgeht. Die folgende Darstellung beruht auf dem Buch von SIMO und HUGHES [19].

Die im Zuge des folgenden Algorithmus zu lösenden Gleichungen sind in der Regel nichtlinear und erfordern eine iterative Lösungsstrategie. Nichtsdestotrotz ermöglichen sie eine geschlossene Darstellung des Tangentenoperators des Projektionsverfahrens. Dieser wird häufig als *konsistente Tangente* bezeichnet.

Das Projektionsverfahren besteht im Wesentlichen aus drei Teilschritten:

1. Formulierung einer elastischen Prädiktorspannung.

2. Überprüfung, ob die elastische Prädiktorspannung die Fließbedingung  $f_{n+1} < 0$  verletzt.
3. Projektion der Prädiktorspannung auf die Fließfläche, wenn die Prädiktorspannung die Fließbedingung verletzt.

Zuerst führt man den sogenannten elastischen Prädiktor-Zustand (Trial-Zustand) ein. Er zeichnet sich durch das „Einfrieren“ der plastischen Verzerrungen aus. Man erhält den Prädiktor-Zustand zu

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p \text{ trial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \text{ und} \quad (4.31)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{\text{trial}} = \boldsymbol{\alpha}_n. \quad (4.32)$$

Den Prädiktor-Zustand des Spannungstensors erhält man damit zu

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p \text{ trial}}) = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p). \quad (4.33)$$

Den Prädiktor-Zustand der sogenannten Verfestigungsspannung erhält man mittels (4.32) aus (4.8) zu

$$\mathbf{q}_{n+1}^{\text{trial}} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{\text{trial}}) = \mathbf{q}(\boldsymbol{\alpha}_n) = \mathbf{q}_n. \quad (4.34)$$

Schließlich setzt man die Gleichungen (4.33) und (4.34) in die Fließbedingung (4.2) ein und erhält

$$f_{n+1}^{\text{trial}} = f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}, \mathbf{q}_{n+1}^{\text{trial}}). \quad (4.35)$$

Für den Fall, dass  $f_{n+1}^{\text{trial}} < 0$  ist, erhält man aus (4.30c)  $\gamma_{n+1} = 0$  und die zuvor getroffene Annahme eines elastischen Lastschrittes war richtig. Wenn aber  $f_{n+1}^{\text{trial}} \geq 0$  gilt, dann liegt im betrachteten Lastschritt plastisches Werkstoffverhalten vor und es gilt  $\gamma_{n+1} \geq 0$ . Um  $\gamma_{n+1}$  zu berechnen, definiert man die Residuen der Gleichungen (4.26) und (4.27) zu

$$\mathbf{R}_{n+1}^\varepsilon = -\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p + \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \gamma_{n+1} \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{n+1} = 0 \text{ und} \quad (4.36)$$

$$\mathbf{R}_{n+1}^\alpha = -\boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \boldsymbol{\alpha}_n + \gamma_{n+1} \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right|_{n+1} = 0. \quad (4.37)$$

Gemeinsam mit den Beziehungen (4.28), (4.29) und der Konsistenzbedingung  $f_{n+1} = 0$  erhält man ein nichtlineares Gleichungssystem in den Unbekannten  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ ,  $\mathbf{q}_{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$  und  $\gamma_{n+1}$ , das mit Hilfe des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens iterativ gelöst wird. Während der Projektion bleiben die Gesamtverzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  konstant.

Die geometrische Interpretation der grundsätzlichen Vorgangsweise im Rahmen des Projektionsverfahren ist für den Spezialfall idealer Plastizität in Abbildung 4.1 dargestellt.

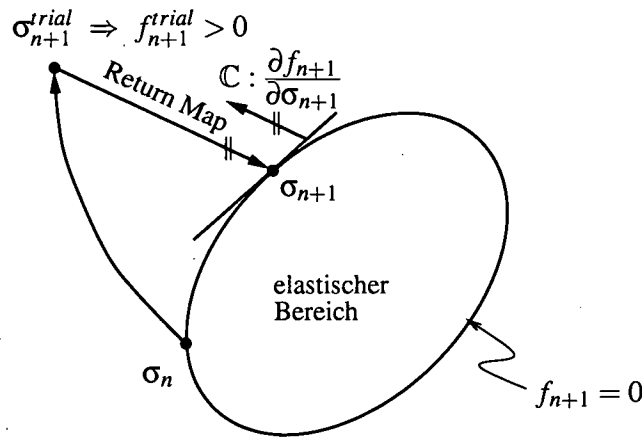


Abbildung 4.1: Geometrische Interpretation des Projektionsverfahrens

Beispiele mit uniaxialer Beanspruchung zur Illustration der Vorgangsweise sind in der Arbeit von MÜLLNER [9] enthalten.

#### 4.2.5 Berechnung der elasto-plastischen Tangente $\mathbb{C}_{n+1}^{ep}$

Nach erfolgter Projektion zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  bzw. der Konvergenz des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens sind alle Zustandsgrößen bekannt. Um eine effiziente numerische Implementierung für die Finite-Elemente-Methode zu erhalten, benötigt man die konsistente Linearisierung des beschriebenen Integrationsalgorithmus. Bei Beschränkung auf physikalische Nichtlinearität stellen die konstitutiven Gleichungen die einzige Ursache nichtlinearen Verhaltens dar. Daher müssen nur die konstitutiven Beziehungen für ein Inkrement linearisiert werden. Dies führt zur Ermittlung des Materialtensors  $\mathbb{C}$ , welcher im plastischen Bereich nicht mehr konstant ist ( $\rightarrow \mathbb{C}^{ep}$ ).

Für die Anwendung des Projektionsverfahrens wurde  $\epsilon_{n+1} = \text{konst.}$  gehalten und es folgte  $d\epsilon_{n+1} = 0$ . Die konsistente Tangente  $\mathbb{C}_{n+1}^{ep}$  ist mittels der differentiellen Beziehung

$$d\sigma_{n+1} = \frac{d\sigma_{n+1}}{d\epsilon_{n+1}} : d\epsilon_{n+1} = \mathbb{C}_{n+1}^{ep} : d\epsilon_{n+1} \quad (4.38)$$

definiert. Zur Berechnung von  $\mathbb{C}_{n+1}^{ep}$  muss man das Differential der Funktion  $\sigma_{n+1}(\epsilon_{n+1})$  bilden. Diese Funktion entspricht dem Ergebnis des Projektionsverfahrens für einen vorgegebenen Verzerrungszustand  $\epsilon_{n+1}$ .  $\mathbb{C}_{n+1}^{ep}$  beschreibt somit die Änderung des Ergebnisses  $\sigma_{n+1}$  des Projektionsverfahrens zufolge einer Änderung des Eingangsparameters  $\epsilon_{n+1}$ .

## Modellierung von fehlerfreiem Fichtenholz

Nach der Aufbereitung der theoretischen Grundlagen der Materialmodellierung wird nun in diesem Kapitel entsprechend Abb. 1.2 die Erweiterung des Einflächenplastizitätsmodells von MACKENZIE-HELNWEIN [8] für die  $LRT$ -Ebene beschrieben.

### 5.1 Wahl des Materialmodells

Im Rahmen der Plastizitätstheorie ist es möglich, das Materialmodell durch Verwendung mehrerer Fließflächen ( $\rightarrow$  *Mehrflächenplastizität*) beliebig genau an das Materialverhalten anzupassen. Der Werkstoff Holz weist im Zugbereich deutlich sprödes Versagen auf, im Druckbereich quer zur Faserlängsrichtung liegt ein ausgeprägtes duktileres Versagen vor. Diese Materialeigenschaften können durch Verwendung mehrerer Fließflächen und den damit verbundenen Evolutionsgesetzen modelliert werden. Ein derartiges Mehrflächenplastizitätsmodell wurde von MACKENZIE-HELNWEIN [23] entwickelt. Ein unerwünschter Effekt von Mehrflächenmodellen bei der Durchführung numerischer Berechnungen liegt darin, dass in den Eckbereichen von Mehrflächenmodellen (Grenze zwischen den einzelnen Fließflächen) im Allgemeinen numerische Probleme auftreten. Dieser Nachteil eines Mehrflächenmodells tritt bei Verwendung eines Einflächenmodells nicht auf. Ein Hauptziel dieser Arbeit ist die Durchführung von Struktursimulationen mit Hilfe der FEM. Im Hinblick auf möglichst numerisch stabil durchführbare FE-Simulationen wird daher im Rahmen dieser Arbeit ein Einflächenmodell [8] verwendet. Um die verschiedenen Versagensmoden in einem Einflächenmodell berücksichtigen zu können, ist es erforderlich, eine nicht assoziierte Ver- bzw. Entfestigungsregel zu verwenden (siehe Unterkapitel 7.1.1).

In der Regel werden Materialmodelle im Rahmen der Plastizitätstheorie in den Hauptspannungsrichtungen formuliert. Dies ist jedoch für einen orthotropen Werkstoff wie Fichtenholz

nicht möglich, da die Materialkennwerte nicht in jeder beliebigen Richtung bestimmt werden können. Daher ist das in dieser Arbeit verwendete Materialmodell in den Materialhauptrichtungen ( $L, \overline{RT}$  – siehe Unterkapitel 5.2) formuliert.

Die wesentlichen Eigenschaften des im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Werkstoffmodells sind:

- orthotropes Einflächenplastizitätsmodell,
- formuliert in den Materialhauptrichtungen  $L$  und  $\overline{RT}$ ,
- Verwendung einer nicht assoziierten Ver- bzw. Entfestigungsregel zur Beschreibung der verschiedenen Versagensmoden (sprödes bzw. duktils Verhalten),
- Beschränkung auf kleine Verzerrungen,
- Berücksichtigung von elastischen und plastischen Verzerrungsanteilen, viskose Effekte bleiben unberücksichtigt.

## 5.2 Ermittlung eines $\overline{RT}$ -Äquivalents

### 5.2.1 Vorgangsweise

Mit den Arbeiten von EBERHARDSTEINER [1] und MACKENZIE-HELNWEIN [8] kann das Materialverhalten von fehlerfreiem Fichtenholz in der  $LR$ -Ebene beschrieben werden. Da jedoch in der Holzverarbeitung nicht nur ausschließlich Kernbretter (aus der  $LR$ -Ebene herausgeschnitten) verwendet werden (siehe Abb. 5.1), muss bei der Entwicklung eines möglichst allgemein gültigen Werkstoffgesetzes auch die tangentialiale Richtung ( $T$ -Richtung) berücksichtigt werden.

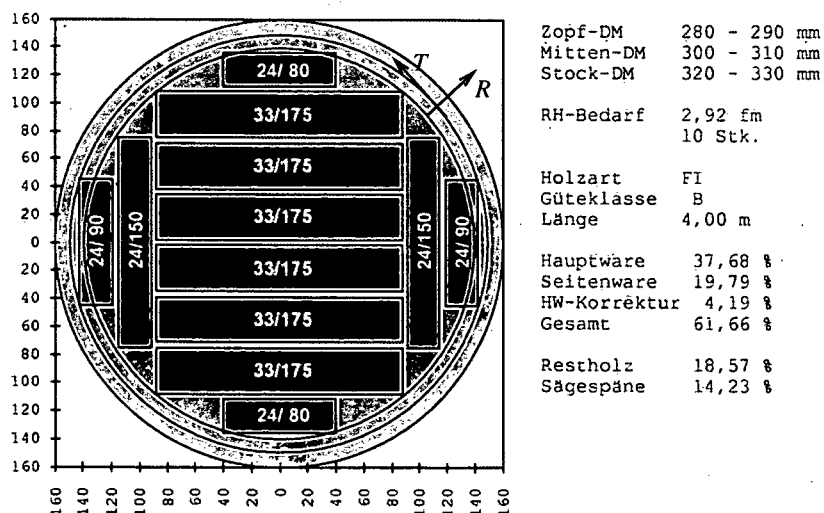
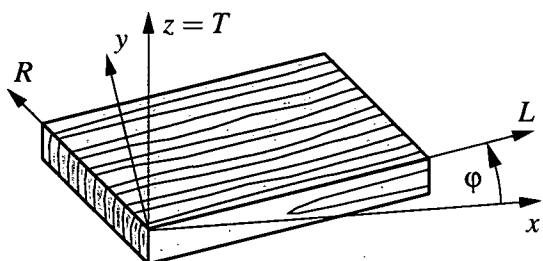
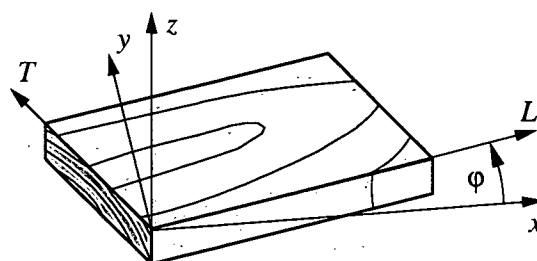


Abbildung 5.1: Beispiel für ein Schnittbild für Leimbinderlamellen

Dem Schnittbild in Abb. 5.1 ist zu entnehmen, dass die einzelnen Bretter einen fließenden Übergang von der  $LR$ -Ebene zur  $LT$ -Ebene zeigen.

Abbildung 5.2:  $LR$ -BrettAbbildung 5.3:  $LT$ -Brett

Würde man jedes einzelne Brett mit einem *orthotropen Materialmodell* beschreiben, so müsste die Lage des Kerns bekannt sein. Da während der Planung und Berechnung einer Holzkonstruktion noch nicht abgeschätzt werden kann, aus welchen Brettern ein Bauteil gefertigt wird, ist diese Art der Werkstoffbeschreibung für Finite-Elemente-Berechnungen ungeeignet. Daher wird in diesem Unterkapitel ein Weg aufgezeigt, wie man die Materialhaupttrichtungen  $R$  und  $T$  für das Werkstoffmodell zu einem  $\overline{RT}$ -Äquivalent zusammenführen kann.  $L$  wird in den Holzbau-Bemessungsnormen i. d. R. als faserparallele Richtung ( $0^\circ$ ) und  $\overline{RT}$  als fasernormale Richtung ( $90^\circ$ ) bezeichnet.

Die Berücksichtigung der Richtungen  $R$  und  $T$  durch ein  $\overline{RT}$ -Äquivalent wird durch den folgenden Arbeitsablauf erreicht:

1. Biaxiale Versuche in der  $LR$ -Ebene. (Diese sind in ausreichendem Umfang in [1] enthalten.)
2. Biaxiale Versuche in der  $LT$ -Ebene. (Diese wurden im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt und sind im Anhang B.1 dokumentiert.)
3. Bestimmung des  $\overline{RT}$ -Äquivalents. (Der Übergang vom  $LR$ -System in das  $\overline{LRT}$ -System zur Werkstoffbeschreibung wird in den Unterkapiteln 5.3 und 5.4 dargestellt.)

Die Zusammenführung der Materialhaupttrichtungen  $R$  und  $T$  erfordert qualitativ und quantitativ ähnliches Materialverhalten in diesen beiden Richtungen. Die Zulässigkeit dieser Voraussetzung wird für jeweils zwei Zug- und Druckversuche ( $\varphi = 0^\circ$ ,  $\kappa = 0 : +1$  (Querzugbeanspruchung) bzw.  $\kappa = 0 : -1$  (Querdruckbeanspruchung)) getrennt in  $R$ - und  $T$ -Richtung mit Hilfe der beiden Abbildungen 5.4 und 5.5 dokumentiert. Diese Abbildungen zeigen, dass sowohl die Steifigkeiten als auch die Festigkeiten in  $R$ - und  $T$ -Richtung sehr ähnlich sind. Die größeren Unterschiede bei den Druckversuchen liegen im üblichen Streubereich. Die Zulässigkeit der Reduzierung der beiden Materialhaupttrichtungen  $R$  und  $T$  auf ein  $\overline{LRT}$ -Äquivalent lässt sich weiters durch einen Vergleich mit den mechanischen Eigenschaften in Faserlängsrichtung  $L$  erklären. Sowohl die Steifigkeiten als auch die Festigkeiten sind in  $L$ -Richtung um eine Größenordnung höher als in  $R$ - bzw. in  $T$ -Richtung (üblich sind Faktoren von 10 bis 20). Unterschiede in  $R$ - bzw. in  $T$ -Richtung, wie sie aus den Abb. 5.4

und 5.5 erkennbar sind, sind vergleichsweise gering und können aus technischen Gründen vernachlässigt werden.

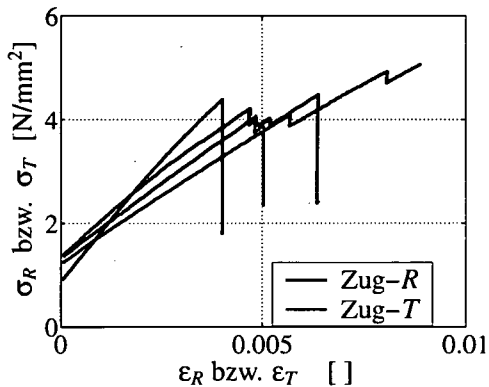


Abbildung 5.4: Ausgewählte  $\sigma\varepsilon$ -Diagramme für (Quer-) Zugbeanspruchung

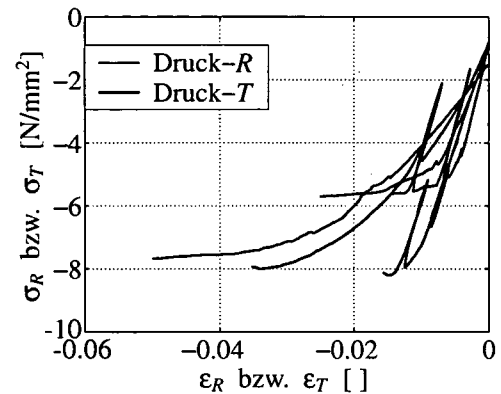


Abbildung 5.5: Ausgewählte  $\sigma\varepsilon$ -Diagramme für (Quer-) Druckbeanspruchung

### 5.2.2 Ermittlung des $R$ - sowie $T$ -Anteiles von Fichtenholzbrettern

Um aus den biaxialen  $LR$ - und  $LT$ -Versuchen das  $\overline{RT}$ -Äquivalent bestimmen zu können, ist es erforderlich, den prozentualen Anteil der  $R$ - bzw.  $T$ -Richtung eines Brettes zu kennen. Dazu wurde das in Abb. 5.1 dargestellte Schnittbild herangezogen. Unter Ausnutzung der doppelten Symmetrie wurden in einem Viertel des Stammquerschnitts in regelmäßigen Abständen ideale Jahresringe eingezeichnet und anhand dieser der  $R$ - sowie  $T$ -Anteil bestimmt.

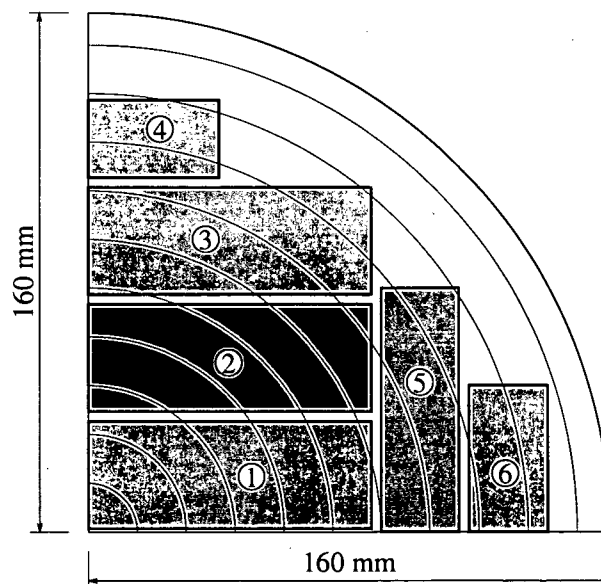


Abbildung 5.6: Gewählte Jahresringverteilung in einem Stammviertel der Abb. 5.1

Die Bestimmung der beiden Anteile wird exemplarisch für das Brett 2 aus Abb. 5.6 angeführt: Für jeden einzelnen Jahrring, welcher innerhalb des Bretts verläuft, werden die vertikalen

sowie horizontalen Anteile bestimmt. Für das Brett 2 entsprechen z. B. die vertikalen Projektionen den  $R$ -Anteilen und die horizontalen Projektionen den  $T$ -Anteilen.

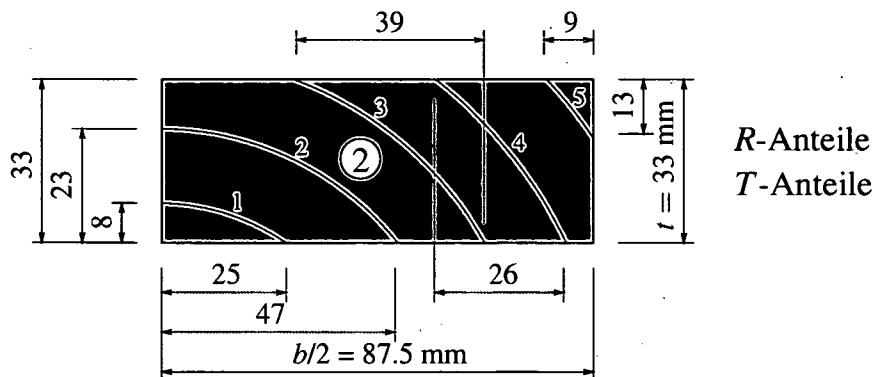


Abbildung 5.7: Bestimmung des  $R$ - sowie  $T$ -Anteiles von Brett 2 aus Abb. 5.6

Mit diesen projizierten Längen ist man in der Lage, den prozentualen Anteil der  $R$ - sowie  $T$ -Richtung eines Brettes zu berechnen. Für die radiale Richtung  $R$  ergibt sich entsprechend Abb. 5.6 für die Jahresringe 1 bis 5:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{8}{8 + 25} = 0.24 & R_2 &= \frac{23}{23 + 47} = 0.33 & R_3 &= \frac{33}{33 + 39} = 0.46 \\
 R_4 &= \frac{33}{33 + 26} = 0.56 & R_5 &= \frac{13}{13 + 9} = 0.59 & & & (5.1)
 \end{aligned}$$

Daraus wird das arithmetische Mittel gebildet, welches zugleich als prozentualer Anteil der  $R$ -Richtung von Brett 2 angesehen werden kann:

$$R\text{-Anteil (Brett 2)} = \frac{\sum_{i=1}^5 R_i}{5} = 0.44 \hat{=} 44\%, \quad T\text{-Anteil (Brett 2)} = 0.56 \hat{=} 56\%. \quad (5.2)$$

Diese Werte wurden für alle fünf in Abb. 5.6 dargestellten Bretter berechnet. Für die Ermittlung des  $R$ - sowie  $T$ -Anteiles des gesamten Baumstammes werden die Werte der sechs Bretter proportional der Fläche der einzelnen Bretter gewichtet und danach das arithmetische Mittel berechnet. Dies führt zu folgendem Ergebnis:

Tabelle 5.1:  $R$ - sowie  $T$ -Anteil von Fichtenholzbrettern

<b><math>R</math>- sowie <math>T</math>-Anteil von Fichtenholzbrettern</b>	
$R$ -Anteil =	40 % (exakt ermittelter Wert: 38.3 %)
$T$ -Anteil =	60 % (exakt ermittelter Wert: 61.2 %)

Für die Bestimmung der Materialkennwerte werden die gerundeten Werten ( $R$ -Anteil = 40 %,  $T$ -Anteil = 60 %) verwendet.



*Anmerkung:* Das gleiche Ergebnis hätte man auch erhalten, wenn man für die einzelnen Jahresringe die Tangentenneigungen (Anstiege der Tangenten in  $R$ - sowie  $T$ -Richtung) durch Differentiation berechnet hätte und diese über die Länge des Jahresringes in den Brettern summiert (integriert) hätte. (Dies lässt sich mit der Tatsache begründen, dass die Integration der Ableitungen einer Funktion für ein bestimmtes Intervall die Differenz der Funktionswerte der Intervallgrenzen ergibt.)

### 5.3 Elastisches Werkstoffverhalten ( $f \leq 0$ )

Die Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Holz erfolgt im elastischen Bereich ( $f \leq 0$ ) mit Hilfe des verallgemeinerten HOOKE'schen Gesetzes. Für einen orthotropen Werkstoff und Beschränkung auf einen ebenen (biaxialen) Spannungszustand erhält man das für die Materialhauptrichtungen  $L$  und  $\overline{RT}$  geltende linear elastische Spannungs-Verzerrungs-Gesetz zu

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_L \\ d\varepsilon_{\overline{RT}} \\ d\gamma_{\overline{LRT}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{\overline{RTL}}}{E_{\overline{RT}}} & 0 \\ -\frac{\nu_{\overline{LRT}}}{E_L} & \frac{1}{E_{\overline{RT}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{\overline{LRT}}} \end{bmatrix}}_{= \mathbb{D}} \begin{pmatrix} d\sigma_L \\ d\sigma_{\overline{RT}} \\ d\tau_{\overline{LRT}} \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

wobei differentielle Größen betrachtet werden. Die  $3 \times 3$ -Matrix wird als Nachgiebigkeitsmatrix  $\mathbb{D}$  bezeichnet. Sie wird mittels fünf elastischer Werkstoffparameter beschrieben. Unter der Voraussetzung der Existenz eines elastischen Potentials folgt die Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix  $\mathbb{D}$ . Daraus erhält man:

$$\nu_{\overline{LRT}} E_{\overline{RT}} = \nu_{\overline{RTL}} E_L. \quad (5.4)$$

Damit reduziert sich die Anzahl unabhängiger elastischer Konstanten auf vier. Mit der Annahme, dass die Schubverzerrungen zufolge reinen Schubs bei einer Drehung des Koordinatensystems um die Flächennormale zur  $\overline{LRT}$ -Ebene invariant sind, erhält man nach LEKHNITSKIJ [24] folgende zusätzliche Beziehung:

$$G_{\overline{LRT}} = \frac{E_L E_{\overline{RT}}}{E_L + E_{\overline{RT}} + 2\nu_{\overline{LRT}} E_{\overline{RT}}}. \quad (5.5)$$

Mit dieser Annahme verbleiben nur mehr drei unabhängige Materialparameter  $E_L$ ,  $E_{\overline{RT}}$  und  $\nu_{\overline{LRT}}$  in dem in Gleichung (5.3) angegebenen ebenen Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhang.

Der Steifigkeitsmatrix ergibt sich aus  $\mathbb{C} = \mathbb{D}^{-1}$ . Die folgende Darstellung gilt für ein Koor-

dinatensystem, welches mit den Materialhauptachsen übereinstimmt:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \frac{E_L}{\Delta} & \frac{\nu_{L\overline{RT}} E_{\overline{RT}}}{\Delta} & 0 \\ \frac{\nu_{L\overline{RT}} E_{\overline{RT}}}{\Delta} & \frac{E_{\overline{RT}}}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & G_{L\overline{RT}} \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

wobei  $\Delta = 1 - \nu_{L\overline{RT}} \nu_{\overline{RTL}}$  und (5.5) für  $G_{L\overline{RT}}$  gelten.

Im Rahmen dieser kontinuumsmäßigen Betrachtungsweise erfolgt eine Homogenisierung der Jahresringe, d.h. dass die Frühholzschichten mit den Spätholzschichten verschmiert werden. Aufgrund der hohen Anzahl von Jahresringen in einem Holzbauteil ist diese Vorgangsweise gerechtfertigt. Für die Bestimmung der elastischen Materialparameter für Fichtenholz werden in den folgenden Unterkapiteln drei Möglichkeiten aufgezeigt:

- Ermittlung aus den biaxialen Experimenten (siehe Unterkapitel 5.3.1),
- Ermittlung aus uniaxialen Zugversuchen (siehe Unterkapitel 5.3.2) und
- Heranziehen der Materialkennwerte aus Holzbaukonstruktionsnormen (siehe Unterkapitel 5.3.3).

### 5.3.1 Ermittlung der elastischen Materialparameter aus biaxialen Experimenten

Diese Variante hat MÜLLNER ausführlich im Kapitel 3 seiner Arbeit [9] behandelt. Aufgrund der stark unterschiedlichen Steifigkeiten in den Materialhauptrichtungen ( $E_L/E_{\overline{RT}} \approx 20$ ) ist das Gleichungssystem (5.3) numerisch sehr schlecht konditioniert. Dies bedeutet, dass die Lösung dieses Gleichungssystemes vielfach zu physikalisch unsinnigen Materialparametern führt. Die Ursache liegt in unvermeidlich auftretenden Messfehlern, welche als Eingangsgrößen in das Gleichungssystem verwendet werden. Aufgrund der stark unterschiedlichen Steifigkeiten in den Materialhauptrichtungen reichen bereits minimale Messfehler aus, um eine Ermittlung der Materialparameter mit dem Gleichungssystem (5.3) unmöglich zu machen. Auch eine Zuhilfenahme von Teilergebnissen aus uniaxialen Versuchen und Berücksichtigung als zusätzliche Randbedingungen für dieses Gleichungssystem brachte keine weiteren Verbesserungen. Eine **Ermittlung der Materialkennwerte** nach dieser Variante ist daher **nicht möglich**.

### 5.3.2 Ermittlung der elastischen Materialparameter aus uniaxialen Zugversuchen

Wie bereits im Unterkapitel 3.4.3 erwähnt, sind in [1] und [18] uniaxiale Zugversuche zur Bestimmung der Steifigkeitseigenschaften dokumentiert. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen werden in diesem Unterkapitel zusammengefasst.

Die folgenden Diagramme enthalten die ermittelten Materialkennwerte  $E_L$ ,  $E_R$ ,  $E_T$  und  $\nu_{LR}$  in Abhängigkeit von der Rohdichte  $\rho$ . Die Ermittlung der Werkstoffparameter erfolgte durch Mittelwertbildung der Messwerte aus Bereichen mit einem linearen Spannungs-Dehnungs-zusammenhang, wobei die Bereichsgrenzen für jeden Versuch individuell festgelegt wurden.

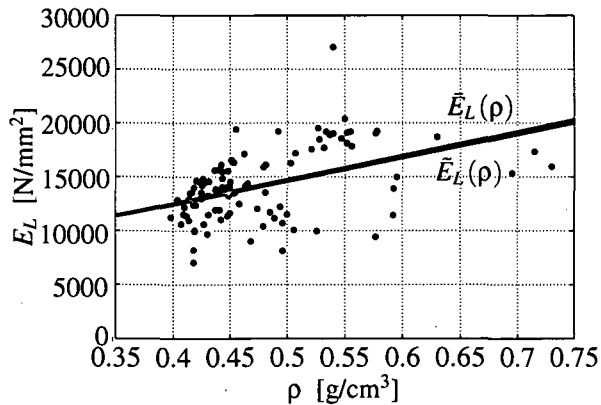


Abbildung 5.8: Elastizitätsmodul  $E_L$  in Abhängigkeit von  $\rho$

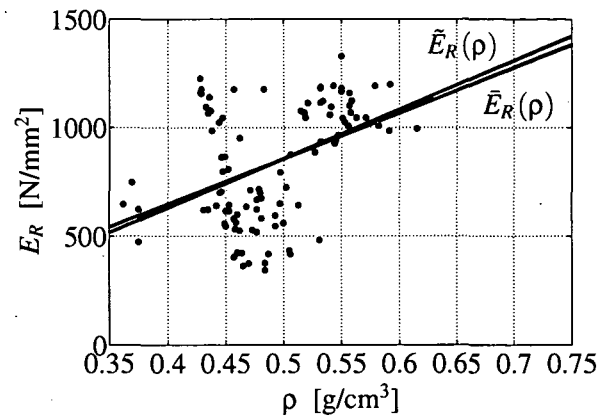


Abbildung 5.9: Elastizitätsmodul  $E_R$  in Abhängigkeit von  $\rho$

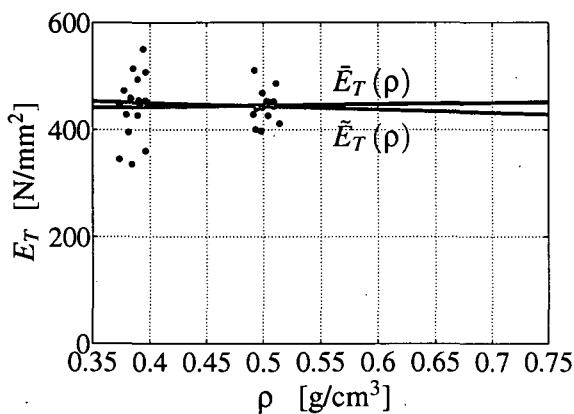


Abbildung 5.10: Elastizitätsmodul  $E_T$  in Abhängigkeit von  $\rho$

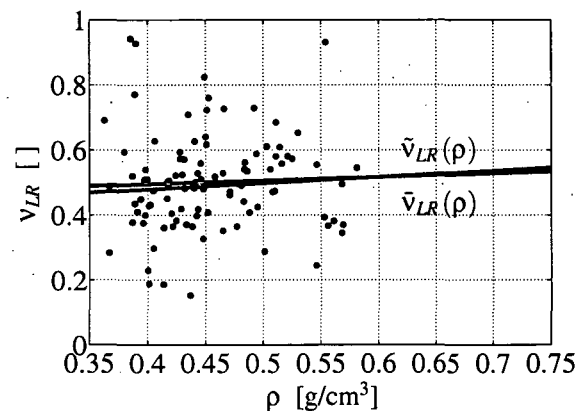


Abbildung 5.11: Querdehnungszahl  $\nu_{LR}$  in Abhängigkeit von  $\rho$

Die Gleichungen für die in den Diagrammen rot eingezeichneten Regressionsgeraden lauten:

$$\bar{E}_L(\rho) = [2.22 \rho + 0.364] \cdot 10^4, \quad R = 0.46, \quad (5.7)$$

$$\bar{E}_R(\rho) = [2.10 \rho - 0.192] \cdot 10^4, \quad R = 0.41, \quad (5.8)$$

$$\bar{E}_T(\rho) = [0.250 \rho + 4.32] \cdot 10^2, \quad R = 0.03, \quad (5.9)$$

$$\bar{\nu}_{LR}(\rho) = [0.112 \rho + 0.450], \quad R = 0.04, \quad (5.10)$$

mit  $E$  in  $[\text{N}/\text{mm}^2]$ ,  $\rho$  in  $[\text{g}/\text{cm}^3]$  und  $R$  als dem Regressionskoeffizienten. Die geringfügigen Unterschiede zu den Ergebnissen in [1] ergeben sich durch einen minimal modifizierten

Auswertalgorithmus bezüglich der Festlegung des linearen Spannungs-Dehnungszusammenhanges. Die grünen Linien sind Ergebnisse einer robusten Ausgleichsrechnung. Diese ist im Gegensatz zu den roten Regressionsgeraden von Ausreißern der Messwerte kaum beeinflusst. Der Unterschied zu den roten Regressionsgeraden ist sehr gering, d.h. dass die Messwerte nahezu eine symmetrische statistische Verteilung aufweisen. Die Regressionsgleichungen für die grünen Linien lauten:

$$\tilde{E}_L(\rho) = [2.17\rho + 0.387] \cdot 10^4, \quad (5.11)$$

$$\tilde{E}_R(\rho) = [2.26\rho - 0.272] \cdot 10^4; \quad (5.12)$$

$$\tilde{E}_T(\rho) = [-0.607\rho + 4.74] \cdot 10^2, \quad (5.13)$$

$$\tilde{\nu}_{LR}(\rho) = [0.191\rho + 0.403]. \quad (5.14)$$

Die vier Abbildungen 5.8, 5.9, 5.10 und 5.11 geben die bei Holz zu erwartenden relativ großen Streuungen wieder (KOLLMANN [3]). Eine Abhängigkeit der Elastizitätsmoduln  $E_L$  und  $E_R$  von der Rohdichte  $\rho$  ist noch erkennbar, eine solche für  $E_T$  und  $\nu_{LR}$  jedoch nicht mehr.

Diese Erkenntnis bestätigt die Ansicht von zahlreichen Fachleuten der Holzindustrie, dass die Materialparameter eine unterschiedlich starke Korrelation zur Rohdichte aufweisen. Die Heranziehung von  $\rho$  als alleinigem Klassifizierungsparameter (bzw. Sortierparameter) ist aus diesem Grund nicht möglich (siehe auch Unterkapitel 5.4.2). Daher werden im Rahmen dieser Arbeit die aus Experimenten ermittelten Materialkennwerte nicht in Abhängigkeit von der Holzrohddichte  $\rho$  angegeben.

Das arithmetische Mittel aller Experimente, welche in [1] dokumentiert und im Zuge dieser Arbeit durchgeführt wurden, liegt bei  $\rho = 0.44 \text{ g/cm}^3$ . Mit den Gleichungen (5.7) bis (5.10) erhält man folgende mittlere (theoretische) Materialparameter:

$$E_L = 13408 \text{ N/mm}^2$$

$$E_R = 732 \text{ N/mm}^2$$

$$E_T = 443 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu_{LR} = 0.49$$

Die Bestimmung der mittleren Steifigkeitskennwerte von fehlerfreien Holzproben dient dem Zweck der Vergleichsmöglichkeit mit den Werten aus den Konstruktionsnormen (siehe Unterkapitel 5.3.3). Da in diesen Normen nur zwischen faserparalleler und fasernormaler Richtung unterschieden wird, muss aus den Werten  $E_R$  und  $E_T$  der Wert für  $E_{\overline{RT}}$  berechnet werden. Berücksichtigt man die in der Tabelle 5.1 angegebene Gewichtung zwischen  $R$ - und  $T$ -Richtung, rundet die erhaltenen Ergebnisse physikalisch sinnvoll und verwendet Gl. (5.5) für die Ermittlung des Schubmoduls, erhält man den in Tabelle 5.2 angegebenen elastischen Materialparametersatz für einen ebenen Spannungszustand. (Hinweis: Für die Ermittlung von  $\nu_{LT}$  wurden keine Versuche durchgeführt, da angenommen wird, dass sich die Ergebnisse nur unwesentlich von denen der  $LR$ -Ebene unterscheiden. Daher gilt  $\nu_{LR} = \nu_{\overline{LR}}$ .)

**Tabelle 5.2:** Elastische Materialparameter für den ebenen Spannungszustand für Fichtenholz

Elastische Materialparameter	
$E_L$	= 13000 N/mm <sup>2</sup>
$E_{\overline{RT}}$	= 560 N/mm <sup>2</sup>
$\nu_{\overline{LRT}}$	= 0.50
$G_{\overline{LRT}}$	= 520 N/mm <sup>2</sup>

### 5.3.3 Heranziehen der Materialkennwerte aus Holzbaukonstruktionsnormen

Da die Anzahl der Versuche zur Bestimmung der mechanischen Eigenschaften von Holz in den verschiedenen Normenwerken deutlich höher ist, als die Versuchsserien, die den Ergebnissen in Tabelle 5.2 zu Grunde liegen, ist es für die Durchführung von Berechnungen realer Holzbauwerke sinnvoller, für die Wahl der Steifigkeitskennwerte auf Normenwerte zurückzugreifen.

In der DIN 1052 [25] sind in Tabelle F.5 in den Zeilen 8 bis 10 arithmetische Mittelwerte der Steifigkeitskennwerte abhängig von der Festigkeitsklasse angegeben. Da die Angabe einer Querdehnungszahl fehlt, kann der Wert für  $\nu_{\overline{LRT}}$  aus der Tabelle 5.2 übernommen werden.

Ist es im Zuge des Fertigungsprozesses von Holzbauwerken möglich, auf Daten der tatsächlich verwendeten Bretter oder Kanthölzer zurückzugreifen, so sind diese Werte selbstverständlich den Normwerten vorzuziehen.

## 5.4 Definition der Fließfläche

In [1] wurde das Bruchkriterium von TSAI und WU [26] als „Bruch“ umhüllende, d.h. zur Beschreibung der in den biaxialen Versuchen an fehlerfreien *LR*-Holzproben auftretenden Maximalspannungszustände verwendet. Eine Unterscheidung zwischen elastischen und plastischen Verzerrungsanteilen innerhalb der Bruchumhüllenden wurde nicht vorgenommen. Im Rahmen der Erstellung eines elasto-plastischen Materialmodells ist eine solche Abgrenzung jedoch zwingend erforderlich. Da sich die Maximalspannungszustände und die Grenze zwischen elastischen und plastischen Verzerrungszuständen bei Holz im Wesentlichen nur bei Druckbeanspruchung quer zur Faser voneinander unterscheiden, ist das Bruchkriterium von TSAI und WU auch für die Definition einer Fließfläche gut geeignet.

In Tensorschreibweise lautet die mathematische Beschreibung der Fließfläche

$$a_{ij} \sigma_{ij} + a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + a_{ijklmn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} + \dots = 1, \quad i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3 \quad (5.15)$$

mit  $a_{ij}$ ,  $a_{ijkl}$  und  $a_{ijklmn}$  als Informationen über das orthotrope Werkstoffverhalten enthaltende Tensoren 2., 4. und 6. Stufe. Diese streng tensorielle Formulierung verfügt über den Vorteil, dass sie invariant gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems ist, die Gesetze der Tensortransformation anwendbar sind und dass sie die gleichen Symmetrieeigenschaften wie die Steifigkeitsmatrix des zu beschreibenden Materials aufweist. Bei Beschränkung auf eine Formulierung zweiter Ordnung lautet das Kriterium (5.15) für ebene Spannungszustände und die Materialhaupttrichtungen 1 und 2 ( $L$  und  $RT$ ):

$$f = a_{11} \sigma_1 + a_{22} \sigma_2 + b_{1111} \sigma_1^2 + b_{2222} \sigma_2^2 + 2 b_{1122} \sigma_1 \sigma_2 + 4 b_{1212} \sigma_{12}^2 - 1 = 0 \quad (5.16)$$

mit

$$a_{11} = \frac{1}{f_{y_{t_1}}} - \frac{1}{f_{y_{c_1}}}, \quad a_{22} = \frac{1}{f_{y_{t_2}}} - \frac{1}{f_{y_{c_2}}} \quad (5.17)$$

sowie

$$b_{1111} = \frac{1}{f_{y_{t_1}} f_{y_{c_1}}}, \quad b_{2222} = \frac{1}{f_{y_{t_2}} f_{y_{c_2}}} \quad (5.18)$$

und

$$b_{1212} = \frac{1}{f_{y_{12}}^2} \quad (5.19)$$

Wie die Gleichungen (5.16) bis (5.19) zeigen, lassen sich, abgesehen von  $a_{1122}$ , die benötigten Tensorkomponenten durch einaxiale Zug- und Druckfließspannungen  $f_{y_{t_1}}$ ,  $f_{y_{t_2}}$ ,  $f_{y_{c_1}}$  und  $f_{y_{c_2}}$  – sowie durch die Schubfließspannung  $f_{y_{12}}$  ausdrücken. Im Rahmen dieser Arbeit werden alle sechs unabhängigen Materialparameter  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $b_{1111}$ ,  $b_{2222}$ ,  $b_{1122}$  und  $b_{1212}$  durch eine Regressionsrechnung aus den Ergebnissen der biaxialen Versuche bestimmt.

Die in Gl. (5.16) beschriebene Fließfläche ist bei Erfüllung der Bedingung

$$b_{1111} b_{2222} - b_{1122}^2 \geq 0 \quad (5.20)$$

im  $\sigma_1$ - $\sigma_2$ - $\sigma_{12}$ -Spannungsraum ein Ellipsoid, anderenfalls ist die Fließfläche nicht mehr geschlossen. Die Schnitte dieses Ellipsoids mit den Hauptebenen  $\sigma_1$ - $\sigma_2$ ,  $\sigma_2$ - $\sigma_{12}$  und  $\sigma_1$ - $\sigma_{12}$  ergeben jeweils Ellipsen. Die Schnittpunkte der Kurve mit der  $\sigma_1$ - und der  $\sigma_2$ -Achse entsprechen den Fließspannungen bei einaxialer Beanspruchung in Richtung dieser Achsen. Die Neigung sowie auch die Länge der Hauptachsen der Ellipse werden von der Tensorkomponente  $b_{1122}$  bestimmt.

### 5.4.1 Parameteridentifikation für die Fließfläche in der $LR$ -Ebene

In den Abbildungen 5.12 bis 5.16 sind die Spannungspfade im Hauptspannungsraum für die untersuchten Faserwinkel  $\varphi$  dargestellt. Die jeweils rechten oberen Quadranten des dargestellten ebenen Hauptspannungsraums entsprechen einer biaxialen Zugbeanspruchung ( $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$ ), die linken unteren Quadranten einer biaxialen Druckbeanspruchung ( $\sigma_1 < 0$ ,  $\sigma_2 < 0$ ). Die beiden anderen Bereiche des Hauptspannungsraums betreffen somit gemischte biaxiale Beanspruchungen ( $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 < 0$  bzw.  $\sigma_1 < 0$ ,  $\sigma_2 > 0$ ).

Für die Ermittlung der Fließfläche (= Grenze des elastischen Bereiches) wird folgende Vorgangsweise festgelegt: Solange der Spannungspfad linear verläuft, d. h. dass das Spannungsverhältnis  $\sigma_2/\sigma_1$  konstant ist, wird angenommen, dass es sich um einen elastischen Spannungszustand handelt. Auf Grund der vielfach spröden Versagensart ist für einen Großteil aller Experimente dies bis zum Versuchsende der Fall. Daher wird für die Bestimmung der Fließfläche der Versuchsendepunkt (Maximalspannungszustand) herangezogen. In den nachfolgenden Diagrammen sind diese Punkte durch einen schwarzen Punkt gekennzeichnet. In Bereichen mit dominanter Druckbeanspruchung quer zur Faserlängsrichtung treten deutliche Abweichungen von der Proportionalität der Spannungskomponenten auf. Die Bestimmung eines Fließspannungszustandes kann aus  $\sigma\varepsilon$ -Diagrammen nicht eindeutig durchgeführt werden, da für jeden Einzelversuch zwei Diagramme ( $\sigma_1\varepsilon_1$ -Pfad und  $\sigma_2\varepsilon_2$ -Pfad) vorhanden sind und die Nichtlinearitäten bei unterschiedlichen Niveaus beginnen. Daher wird bei diesen Versuchen als Grenze des elastischen Bereiches jener Punkt herangezogen, wo eine deutliche Nichtlinearität im Spannungspfad beginnt. Diese Annahme wird dadurch begründet, dass sich bei Auftreten idealer Plastizität ein Spannungspunkt bei Erreichen des Fließspannungszustandes bei Erhöhung der Belastung auf der Fließfläche weiterbewegt und sich nicht mehr davon entfernt. Daher weicht der Spannungspfad in diesem Fall von einem geraden Verlauf ab. Diese Punkte werden durch ein schwarzes Dreieck gekennzeichnet. Für die Experimente mit  $\kappa = 0 : -1$  und  $\varphi = 0^\circ$  bzw.  $7.5^\circ$  ist es erforderlich, diese Grenze in den  $\sigma\varepsilon$ -Diagrammen festzulegen (siehe Abb. 5.17 und 5.18), da in den Spannungspfaden keine Nichtlinearität erkennbar ist, obwohl plastisches Materialverhalten eindeutig auftritt.

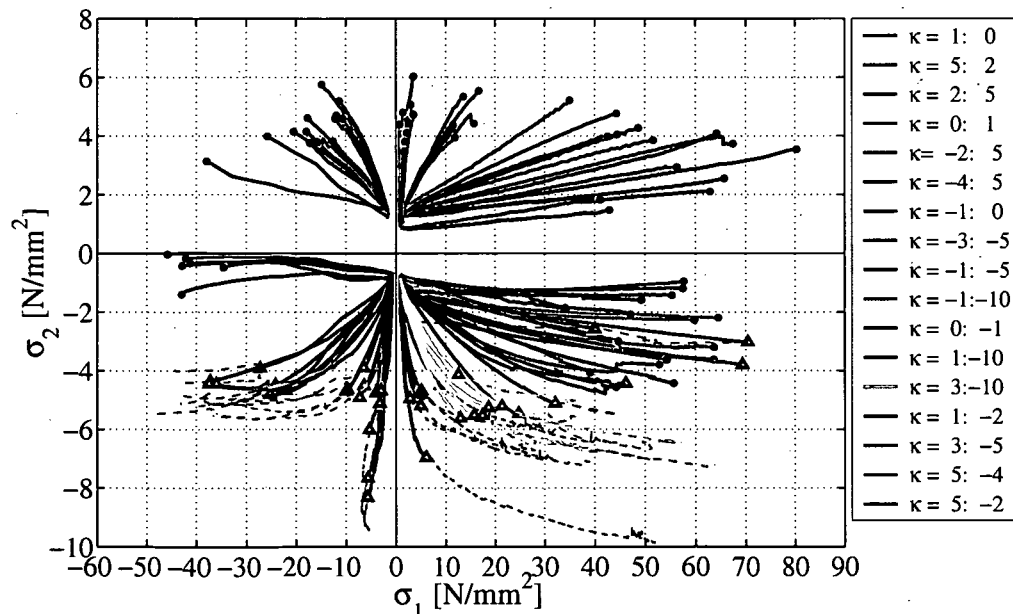


Abbildung 5.12: Spannungspfade  $\sigma_2/\sigma_1$  für  $\varphi = 0^\circ$

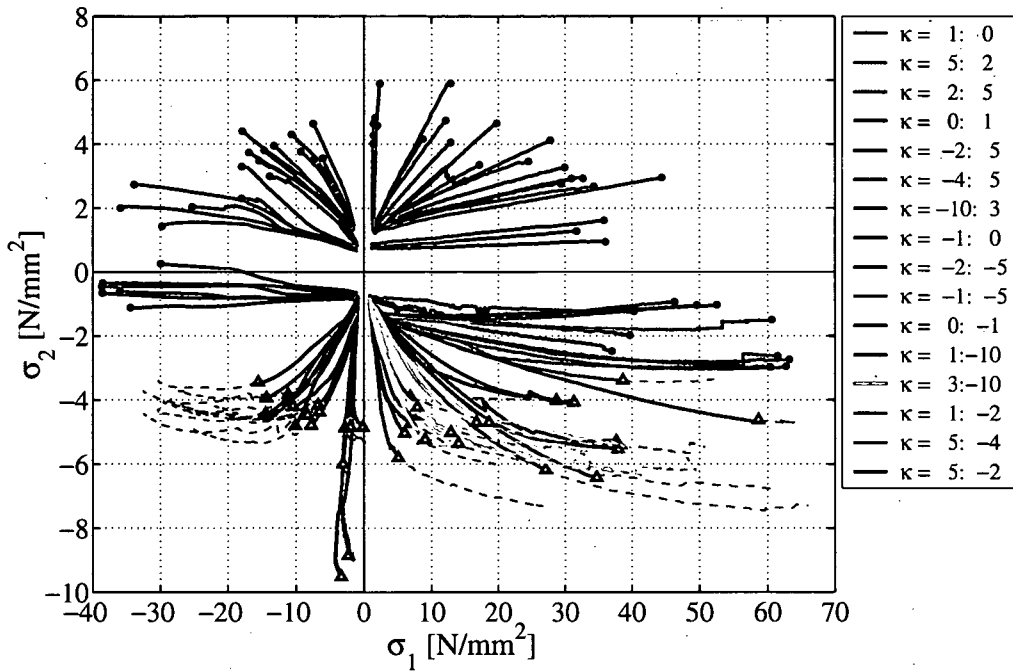


Abbildung 5.13: Spannungspfade  $\sigma_2/\sigma_1$  für  $\varphi = 7.5^\circ$

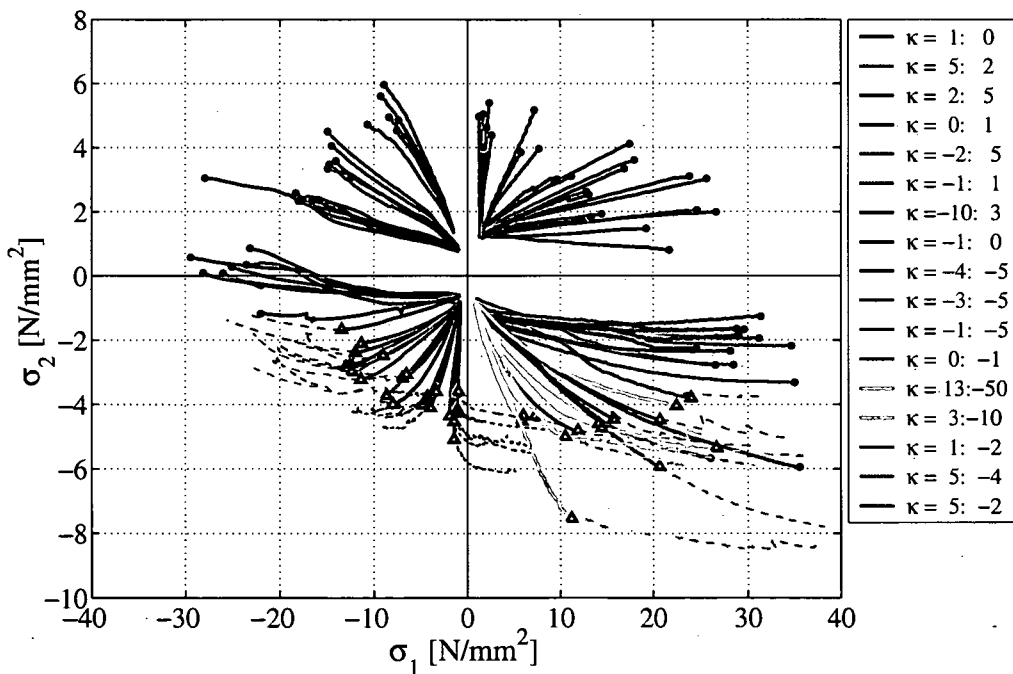


Abbildung 5.14: Spannungspfade  $\sigma_2/\sigma_1$  für  $\varphi = 15^\circ$



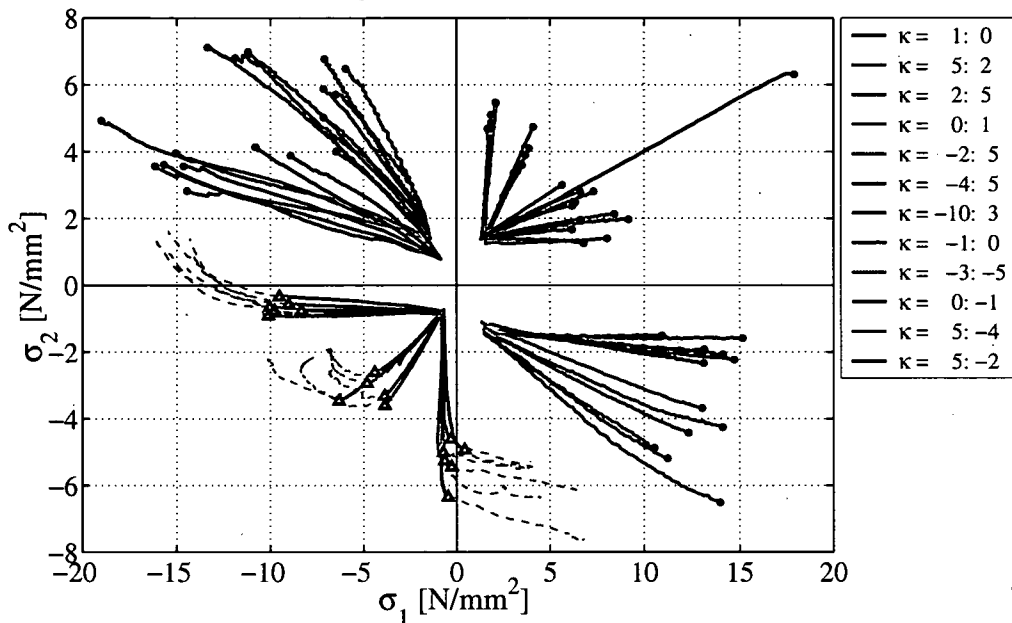


Abbildung 5.15: Spannungspfade  $\sigma_2/\sigma_1$  für  $\varphi = 30^\circ$

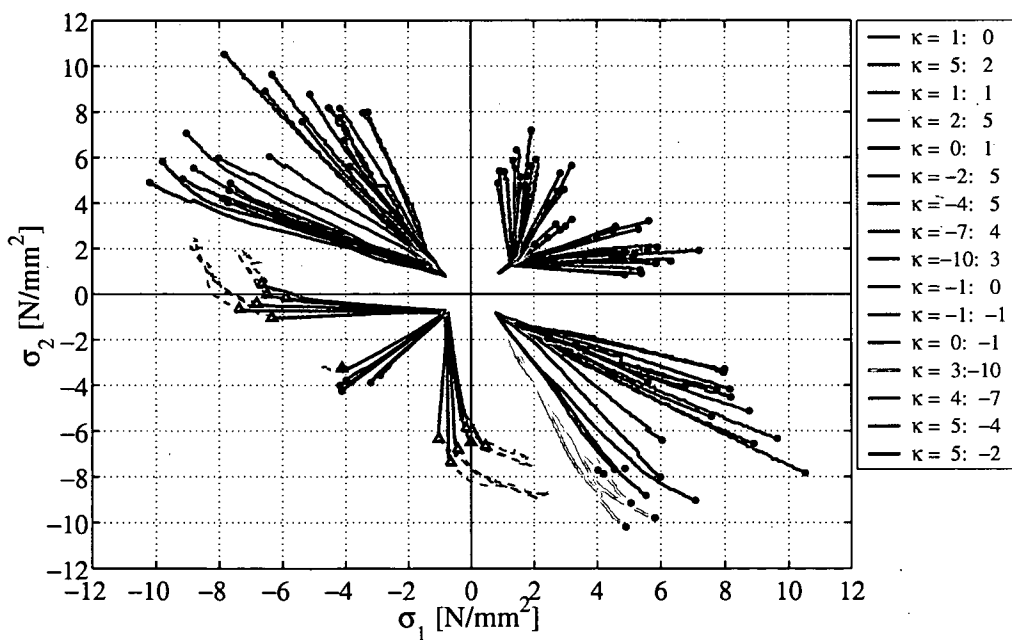


Abbildung 5.16: Spannungspfade  $\sigma_2/\sigma_1$  für  $\varphi = 45^\circ$

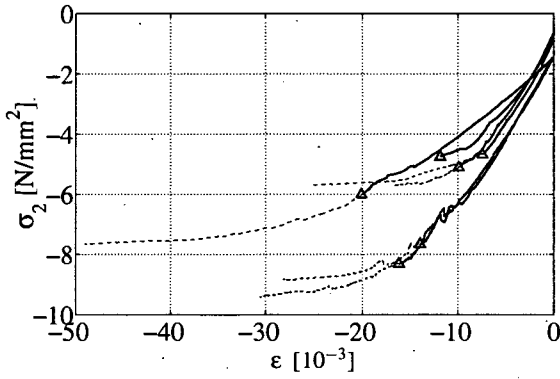


Abbildung 5.17:  $\sigma\varepsilon$ -Diagramm für  
 $\kappa = 0 : -1$  und  $\varphi = 0^\circ$

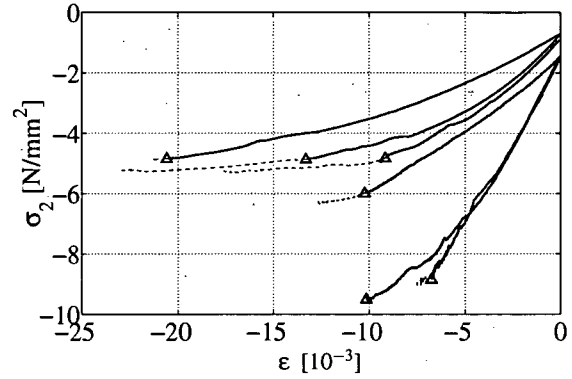


Abbildung 5.18:  $\sigma\varepsilon$ -Diagramm für  
 $\kappa = 0 : -1$  und  $\varphi = 7.5^\circ$

Für die Bestimmung der Fließfläche stehen durch Ausnutzung der Äquivalenz zweier Versuchskonfigurationen

$$\{\varphi; \kappa = \bar{u} : \bar{v}\} \equiv \{\varphi' = 90 - \varphi; \kappa' = 1/\kappa = \bar{u}' : \bar{v}'\} \quad (5.21)$$

mit  $\bar{u}' = \bar{v}$  und  $\bar{v}' = \bar{u}$  durch Spiegeln der Versuchsdaten um die Achse  $\varphi = 45^\circ$  insgesamt  $N = 2 \times 423 = 846$  Experimente zur Verfügung. Die im 12-System vorhandenen Versuchsdaten sind mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned} \sigma_L &= \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi + 2 \tau_{12} \sin \varphi \cos \varphi \\ \sigma_R &= \sigma_1 \sin^2 \varphi + \sigma_2 \cos^2 \varphi - 2 \tau_{12} \sin \varphi \cos \varphi \\ \tau_{LR} &= (-\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{12} \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (5.22)$$

in die Materialhauptrichtungen  $L$  und  $R$  zu transformieren. Die Ermittlung der Tensorkomponenten  $a_{LL}, a_{RR}, b_{LLLL}, b_{RRRR}, b_{LLRR}$  und  $b_{LRLR}$  der skalaren Fließfunktion

$$\begin{aligned} f &= \left( \sigma_L^{(p)}, \sigma_R^{(p)}, \tau_{LR}^{(p)} \right) = \\ &= a_{LL} \sigma_L + a_{RR} \sigma_R + b_{LLLL} \sigma_L^2 + b_{RRRR} \sigma_R^2 + 2 b_{LLRR} \sigma_L \sigma_R + 4 b_{LRLR} \tau_{LR}^2 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

erfolgt mittels nichtlinearer Regressionsrechnung durch Auffinden des Minimums der Funktion

$$\Phi(a_{LL}, a_{RR}, b_{LLLL}, b_{RRRR}, b_{LLRR}, b_{LRLR}) = \sum_{p=1}^N \left[ f \left( \sigma_L^{(p)}, \sigma_R^{(p)}, \tau_{LR}^{(p)} \right) \right]^2 \rightarrow \text{MINIMUM}, \quad (5.24)$$

wobei  $\sigma_L^{(p)}, \sigma_R^{(p)}$  und  $\tau_{LR}^{(p)}$ ,  $p = 1, \dots, N$  den in den Diagrammen 5.12 bis 5.16 festgelegten Fließspannungszuständen entspricht. Dies geschieht durch Lösung des aus dem Nullsetzen der partiellen Ableitungen von  $\Phi$  nach den unbekanntem Koeffizienten resultierenden Gleichungssystems

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_{LL}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_{RR}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_{LLLL}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_{RRRR}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_{LLRR}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_{LRLR}} = 0 \quad (5.25)$$

unter Sicherstellung von

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a_{LL}^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a_{RR}^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial b_{LLLL}^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a_{RRRR}^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a_{LLRR}^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial b_{LRLR}^2} > 0. \quad (5.26)$$

Dieses, aus den Gleichungen (5.25) erhaltene lineare Gleichungssystem hat die Form

$$\mathbf{A} \mathbf{k} = \mathbf{B} \quad (5.27)$$

wobei  $\mathbf{k}$  einen Vektor mit den 6 unbekanntenen Koeffizienten  $a_{LL}$ ,  $a_{RR}$ ,  $b_{LLLL}$ ,  $b_{RRRR}$ ,  $b_{LLRR}$  und  $b_{LRLR}$ , also einen  $(6 \times 1)$ -Vektor, darstellt.  $\mathbf{A}$   $((6 \times N) \cdot (N \times 6) = (6 \times 6))$  und  $\mathbf{B}$   $((N \times 1)$ -Vektor) erhält man aus (5.25) zu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sigma_L^{(1)} & \sigma_L^{(2)} & \dots & \sigma_L^{(N)} \\ \sigma_R^{(1)} & \sigma_R^{(2)} & \dots & \sigma_R^{(N)} \\ \sigma_L^{(1)^2} & \sigma_L^{(2)^2} & \dots & \sigma_L^{(N)^2} \\ \sigma_R^{(1)^2} & \sigma_R^{(2)^2} & \dots & \sigma_R^{(N)^2} \\ 2\sigma_L^{(1)}\sigma_R^{(1)} & 2\sigma_L^{(2)}\sigma_R^{(2)} & \dots & 2\sigma_L^{(N)}\sigma_R^{(N)} \\ 4\tau_{LR}^{(1)^2} & 4\tau_{LR}^{(2)^2} & \dots & 4\tau_{LR}^{(N)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L^{(1)} & \sigma_R^{(1)} & \sigma_L^{(1)^2} & \sigma_R^{(1)^2} & 2\sigma_L^{(1)}\sigma_R^{(1)} & 4\tau_{LR}^{(1)^2} \\ \sigma_L^{(2)} & \sigma_R^{(2)} & \sigma_L^{(2)^2} & \sigma_R^{(2)^2} & 2\sigma_L^{(2)}\sigma_R^{(2)} & 4\tau_{LR}^{(2)^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_L^{(N)} & \sigma_R^{(N)} & \sigma_L^{(N)^2} & \sigma_R^{(N)^2} & 2\sigma_L^{(N)}\sigma_R^{(N)} & 4\tau_{LR}^{(N)^2} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^N \sigma_L^{(p)} \\ \sum_{p=1}^N \sigma_R^{(p)} \\ \sum_{p=1}^N \sigma_L^{(p)^2} \\ \sum_{p=1}^N \sigma_R^{(p)^2} \\ 2 \sum_{p=1}^N \sigma_L^{(p)} \sigma_R^{(p)} \\ 4 \sum_{p=1}^N \tau_{LR}^{(p)^2} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Durch Lösung des Gleichungssystems (5.27) erhält man die unbekanntenen Koeffizienten zu

$$\begin{aligned} a_{LL} &= -0.006\,403\,633 \text{ mm}^2/\text{N} \\ a_{RR} &= 0.028\,609\,952 \text{ mm}^2/\text{N} \\ b_{LLLL} &= 0.000\,333\,531 \text{ mm}^4/\text{N}^2 \\ b_{RRRR} &= 0.032\,919\,207 \text{ mm}^4/\text{N}^2 \\ b_{LLRR} &= -0.000\,037\,055 \text{ mm}^4/\text{N}^2 \\ b_{LRLR} &= 0.003\,604\,386 \text{ mm}^4/\text{N}^2 \end{aligned}$$

Abb. 5.19 zeigt eine (verzerrte) dreidimensionale Darstellung der Fließfläche (Gl. (5.23)). Betrachtet man das Ellipsoid senkrecht zur  $\sigma_L$ - $\tau_{LR}$ -Ebene und stellt zusätzlich die mit Hilfe der Gleichungen (5.22) erhaltenen transformierten Messergebnisse dar (siehe Abb. 5.20), so lässt sich bei genauer Betrachtung erkennen, dass die Ergebnisse der verschiedenen Versuchskonfigurationen (Abb. 5.12, 5.13, 5.14, 5.15 und 5.16) allgemeine Schnitte durch das Ellipsoid darstellen. Die Abbildungen 5.21 und 5.22 zeigen maßstäbliche Hauptschnitte durch das Ellipsoid in der  $\sigma_L$ - $\sigma_R$ -Ebene bzw. in der  $\sigma_R$ - $\tau_{LR}$ -Ebene.

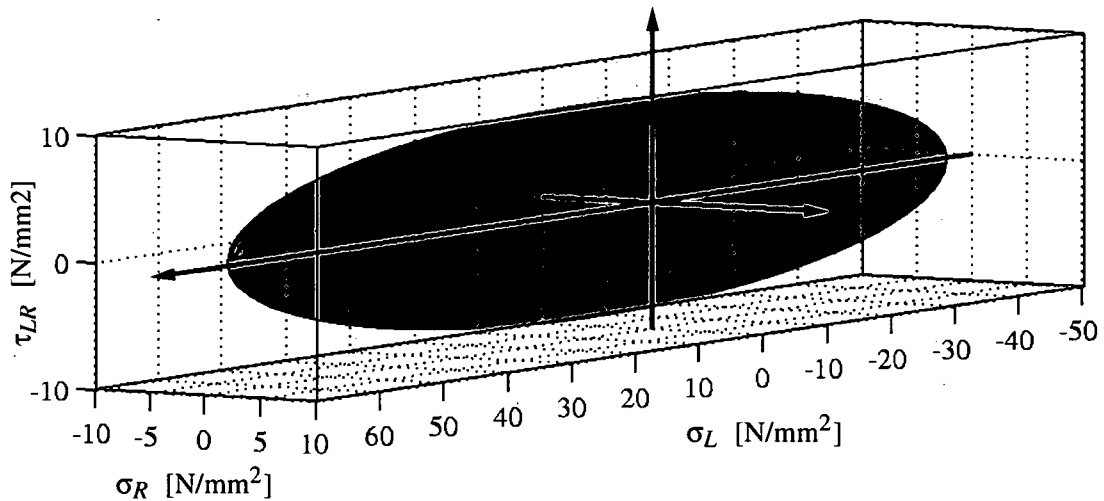


Abbildung 5.19: Fließfläche für fehlerfreies Fichtenholz in der  $LR$ -Ebene, verzerrt dargestellt

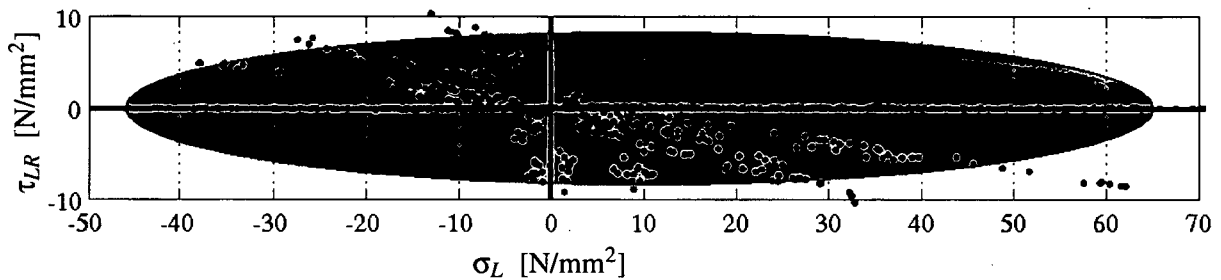


Abbildung 5.20: Seitenansicht der Fließfläche und Darstellung der Fließspannungszustände der biaxialen Experimente (Abb. 5.12, 5.13, 5.14, 5.15 und 5.16)

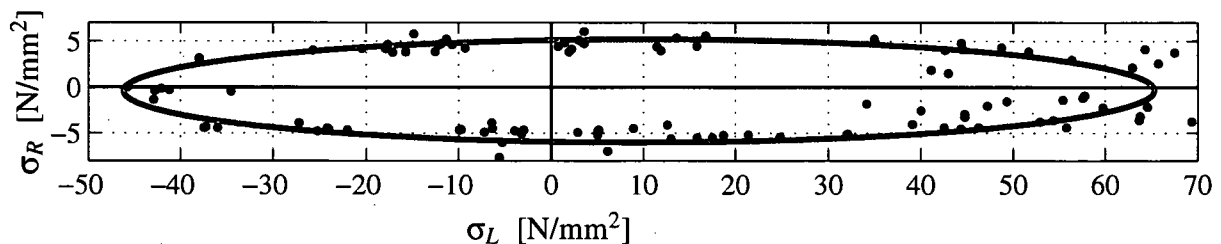


Abbildung 5.21: Hauptschnitt in der  $\sigma_L$ - $\sigma_R$ -Ebene durch die Fließfläche und Darstellung der Fließspannungszustände der biaxialen Experimente für  $\varphi = 0^\circ$

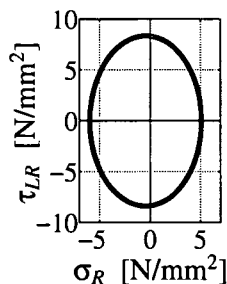


Abbildung 5.22: Hauptschnitt in der  $\sigma_R$ - $\tau_{LR}$ -Ebene durch die Fließfläche

### 5.4.2 Parameteridentifikation für die Fließfläche in der $LR$ -Ebene in Abhängigkeit von der Rohdichte $\rho$

In diesem Unterkapitel wird untersucht, ob es eine signifikante Abhängigkeit der Fließspannungszustände von der Rohdichte  $\rho$  gibt. Dies würde ermöglichen, dass man die Materialparameter der Fließfläche  $a_{LL}$ ,  $a_{RR}$ ,  $b_{LLLL}$ ,  $b_{RRRR}$ ,  $b_{LLRR}$  und  $b_{LRLR}$  ausschließlich von der Rohdichte abhängig machen könnte. Um diese Abhängigkeit zu ermitteln, wird die Fließfunktion auf die Abhängigkeit von vier Variablen erweitert ( $\sigma_L$ ,  $\sigma_R$ ,  $\tau_{LR}$  und neu  $\rho$ ). Dabei wird die skalare Fließfunktion um jene  $\rho$ -Koeffizienten erweitert, dass bei einer Vorgabe der Rohdichte  $\rho$  wieder die ursprüngliche Fließfunktion in der Abhängigkeit der drei Spannungskomponenten ( $\sigma_L$ ,  $\sigma_R$  und  $\tau_{LR}$ ) erhalten wird. Dies führt auf eine Erweiterung der Fließfunktion von sechs auf zehn Koeffizienten, wobei als vierter, zusätzlicher Index der Buchstabe  $D$  ( $\rightarrow$  density) verwendet wird:

$$f(\sigma_L, \sigma_R, \tau_{LR}, \rho) = a_{LL} \sigma_L + a_{RR} \sigma_R + a_{DD} \rho + b_{LLLL} \sigma_L^2 + b_{RRRR} \sigma_R^2 + b_{DDDD} \rho^2 + 2b_{LLRR} \sigma_L \sigma_R + 2b_{LLDD} \sigma_L \rho + 2b_{RRDD} \sigma_R \rho + 4b_{LRLR} \tau_{LR}^2 - 1 = 0. \quad (5.30)$$

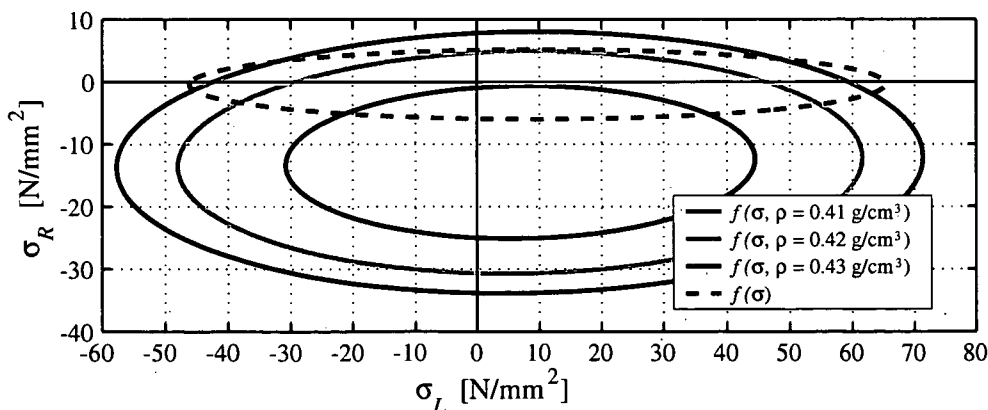
Für die Rücksubstitution durch Vorgabe einer Rohdichte  $\rho$  kann die Fließfunktion durch entsprechendes Umformen der Gleichung (5.30) wie folgt dargestellt werden:

$$f(\sigma_L, \sigma_R, \tau_{LR}) = (a_{LL} + 2b_{LLDD} \rho) c \sigma_L + (a_{RR} + 2b_{RRDD} \rho) c \sigma_R + b_{LLLL} c \sigma_L^2 + b_{RRRR} c \sigma_R^2 + 2b_{LLRR} c \sigma_L \sigma_R + 4b_{LRLR} c \tau_{LR}^2 - 1 = 0, \quad (5.31)$$

wobei

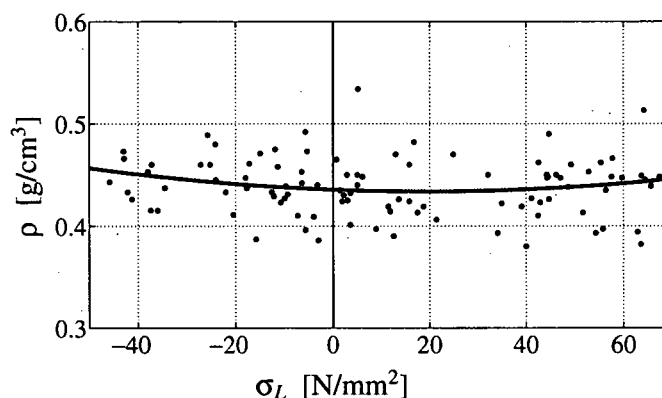
$$c = \frac{1}{-a_{DD} \rho - b_{DDDD} \rho^2 + 1}. \quad (5.32)$$

Durch eine entsprechende Erweiterung des Gleichungssystems (5.27) um die neu hinzugekommenen Einträge erhält man als Lösung folgende Fließflächen (ohne Angabe der Koeffizienten), dargestellt als Hauptschnitt in der  $\sigma_L$ - $\sigma_R$ -Ebene:



**Abbildung 5.23:** Hauptschnitt in der  $\sigma_L$ - $\sigma_R$ -Ebene durch die Fließfläche in Abhängigkeit von der Rohdichte  $\rho$

Aus der Abb. 5.23 erkennt man, dass die durch eine geringe Variation der Rohdichte um  $0.01 \text{ g/cm}^3$  erhaltenen Fließflächen physikalisch nicht sinnvoll sind. Zum Vergleich ist strichliert, in grüner Farbe die Fließfläche ohne Berücksichtigung der Rohdichte (wie in Abb. 5.21 dargestellt) eingezeichnet. Zur Verdeutlichung werden in Abb. 5.24 die Versuchsergebnisse für  $\varphi = 0$  in Abhängigkeit von den Fließspannungen  $\sigma_L$  dargestellt.

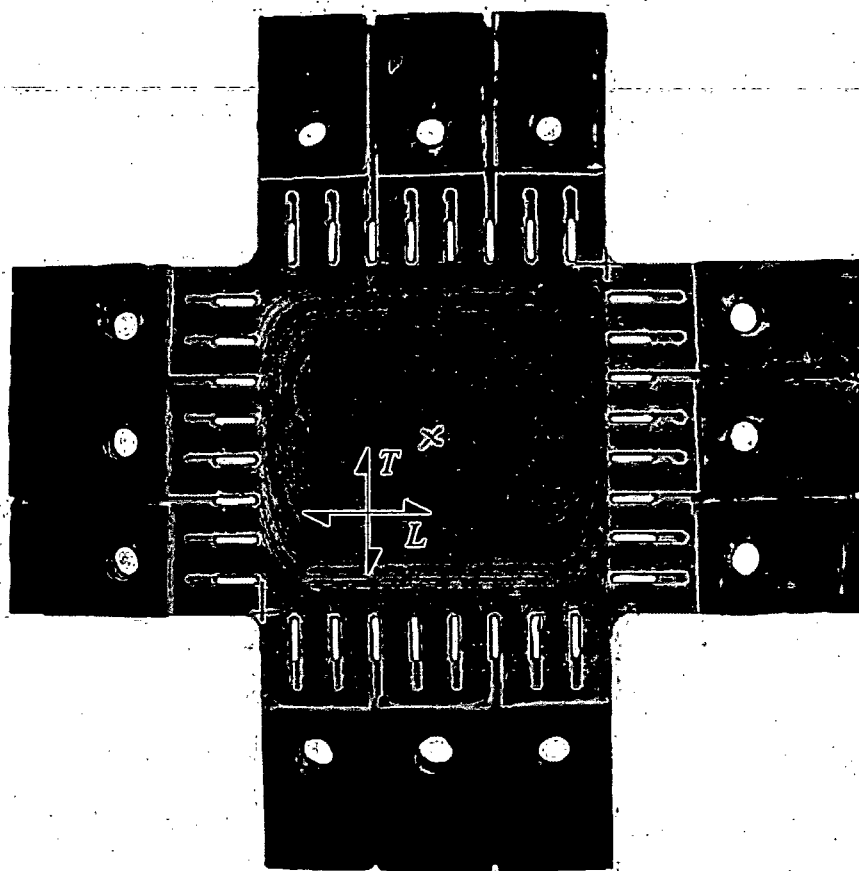
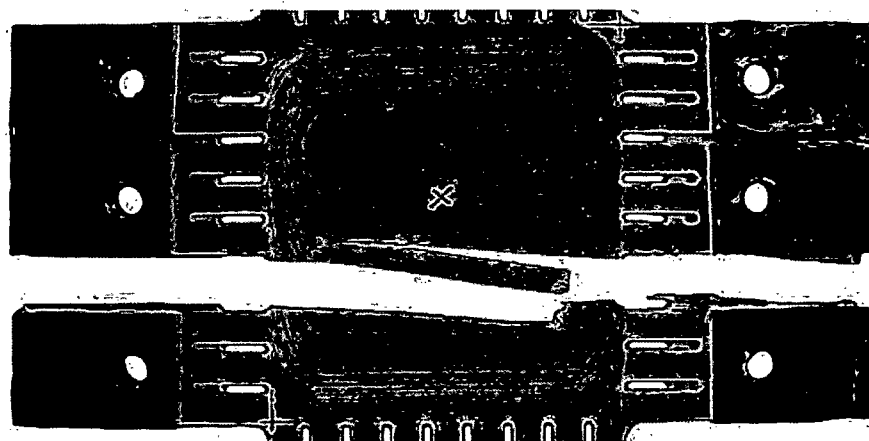


**Abbildung 5.24:** Darstellung der Fließspannungszustände für die Versuchsergebnisse für  $\varphi = 0^\circ$  in Abhängigkeit von der Rohdichte  $\rho$

Alleine die Betrachtung der Punktwolke lässt erkennen, dass es keine signifikante Abhängigkeit der Fließspannungen  $\sigma_L$  von der Rohdichte  $\rho$  gibt. Die in violetter Farbe eingezeichnete Kurve stellt einen Schnitt in der  $\sigma_L$ - $\rho$ -Ebene durch das mit Hilfe der Regressionsrechnung erhaltene Paraboloid ( $f_{\text{Paraboloid}} = f(\sigma_L, \sigma_R, \rho)$ ) dar. Mit Hilfe dieser Abbildung lässt sich erklären, warum es keine signifikante Abhängigkeit der Fließspannungen von der Rohdichte  $\rho$  gibt. Daher erfolgt im Rahmen der Materialmodellierung die Bestimmung der Materialparameter unabhängig von der Rohdichte.

### 5.4.3 Parameteridentifikation für die Fließfläche in der $\overline{LRT}$ -Ebene

Für den Übergang von der  $LR$ -Ebene in die  $\overline{LRT}$ -Ebene wurden zusätzlich biaxiale Experimente in der  $LT$ -Ebene durchgeführt. Eine Auflistung des gesamten Umfangs dieser Versuche ist im Anhang B.1 enthalten. Für die Identifikation von Materialparametern wurden die Ergebnisse von insgesamt zwölf Experimenten herangezogen. Fünf Versuche wurden mit den Parametern  $\varphi = 0^\circ$  und  $\kappa = 0 : +1$  durchgeführt, sieben Versuche mit  $\varphi = 0^\circ$  und  $\kappa = 0 : -1$ , davon vier mit zyklischer und drei mit proportionaler Belastung. Es handelte sich dabei um Experimente mit dominierender Zug- bzw. Druckbeanspruchung in  $T$ -Richtung. Für die Festlegung der Fließspannungszustände wurde für die durch sprödes Versagen gekennzeichneten Versuche ( $\varphi = 0^\circ, \kappa = 0 : +1$ ) die Maximalspannung herangezogen (siehe Abb. 5.27), für die Experimente mit der Konfiguration  $\varphi = 0^\circ, \kappa = 0 : -1$  wurde entsprechend Unterkapitel 5.4.1 vorgegangen (siehe Abbildungen 5.28 und 5.29). Da die Materialeigenschaften in  $T$ -Richtung sehr ähnlich der in  $R$ -Richtung sind, ist die geringe Anzahl an Versuchen ausreichend, weil die Eigenschaften der  $R$ -Richtung ausreichend bekannt sind.

Abbildung 5.25: Biaxialer Probekörper *LT27*Abbildung 5.26: Bruchbild des biaxialen Probekörpers *LT27* ( $\varphi = 0^\circ$ ,  $\kappa = 0 : +1$ )

Die Ursache für die nicht glatten  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Pfade der Versuche *LT27* und *LT30* in Abb. 5.27 resultieren aus fehlerhaften Messungen des ESPI-Systems. Da mit diesem System nur die Deformationen gemessen werden und die ermittelten Verzerrungen beim Bruchzustand keine Einfluss auf die für die Bestimmung der Fließfläche zu berechnende Bruchspannung haben, können diese beiden Experimente ebenfalls zur Parameteridentifikation für die Fließfläche herangezogen werden.

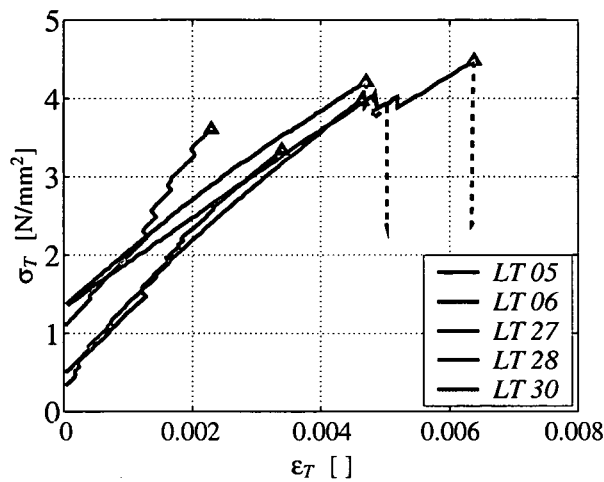


Abbildung 5.27:  $\sigma\varepsilon$ -Diagramm für die Versuche *LT05*, *LT06*, *LT27*, *LT28*, *LT30*  
 ( $\varphi = 0^\circ, \kappa = 0 : +1$ )

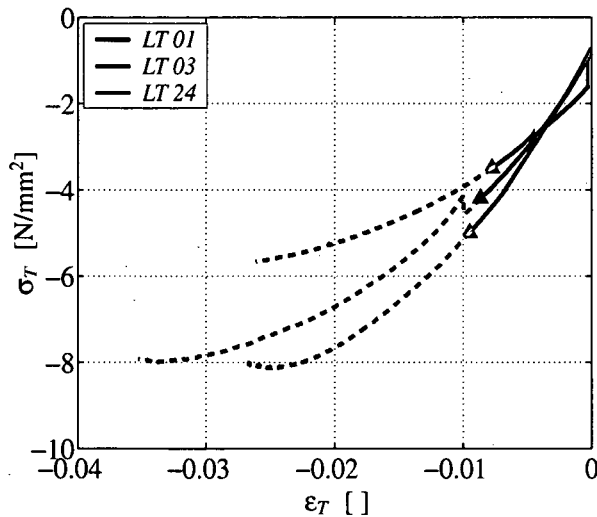


Abbildung 5.28:  $\sigma\varepsilon$ -Diagramm für die Versuche *LT01*, *LT03* und *LT24*  
 ( $\varphi = 0^\circ, \kappa = 0 : -1$ )

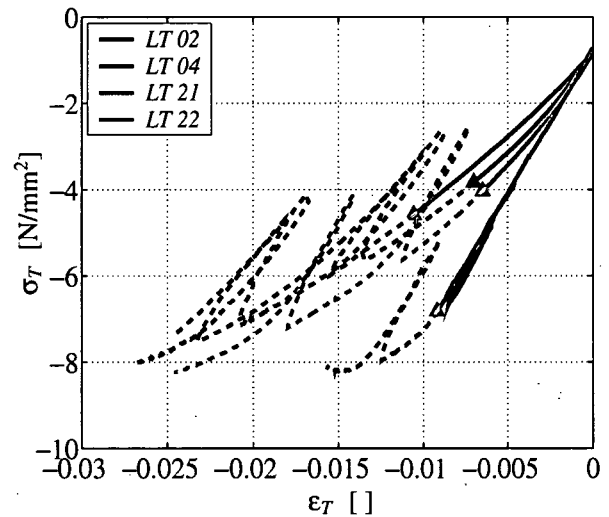


Abbildung 5.29:  $\sigma\varepsilon$ -Diagramm für die zyklischen Versuche *LT02*, *LT04*, *LT21* und *LT22* ( $\varphi = 0^\circ, \kappa = 0 : -1$ )

Ausgehend von der Fließfläche für die *LR*-Ebene wird für die Bestimmung der Fließfläche der *LRT*-Ebene folgende Vorgangsweise gewählt:

- Berechnung der Extremwerte der Fließspannungen der *LR*-Ebene mit Hilfe der Gleichungen (5.61) und (5.64). Diese ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
 \max f_{y_{tL}} &= 65.31 \text{ N/mm}^2 && (\text{zugeh. } \sigma_R = -0.36 \text{ N/mm}^2) \\
 \min f_{y_{cL}} &= -46.20 \text{ N/mm}^2 && (\text{zugeh. } \sigma_L = -0.49 \text{ N/mm}^2) \\
 \max f_{y_{tR}} &= 5.19 \text{ N/mm}^2 \\
 \min f_{y_{cR}} &= -6.04 \text{ N/mm}^2 \\
 \max \tau_{y_{LR}} &= 9.11 \text{ N/mm}^2
 \end{aligned}$$



- Ermittlung der Mittelwerte der Fließspannungen in  $T$ -Richtung (siehe Abb. 5.27, 5.28 und 5.29):

$$\begin{aligned}\max f_{y_{tT}} &= 3.92 \text{ N/mm}^2 \\ \min f_{y_{cT}} &= -4.56 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}$$

- Gewichtung der Fließspannungen in  $R$ - bzw.  $T$ -Richtung gemäß Tabelle 5.1:

$$\begin{aligned}\max f_{y_{t\overline{RT}}} &= 0.4 \cdot 5.19 + 0.6 \cdot 3.92 = 4.43 \text{ N/mm}^2 \\ \min f_{y_{c\overline{RT}}} &= 0.4 \cdot (-6.04) + 0.6 \cdot (-4.36) = -5.15 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}$$

Diese beiden Werte stellen die Fließspannungen in der  $\overline{RT}$ -Richtung dar.

- Berechnung der maximalen Schubfließspannung  $\max \tau_{y_{L\overline{RT}}}$  in der  $\overline{LRT}$ -Ebene. Dafür wird der gemäß Gl. (5.69) für die  $LR$ -Ebene ermittelte ideale Reibungswinkel  $\phi_0$  unverändert in die  $\overline{LRT}$ -Ebene übernommen:

$$\phi_{LR}^0 = \phi_{L\overline{RT}}^0 = \arctan \frac{2 \cdot 9.11}{5.19 + 6.04} = 58.1^\circ.$$

$\max \tau_{y_{\overline{RT}}}$  wurde mit Hilfe der Gl. (5.68) ermittelt:

$$\max \tau_{y_{L\overline{RT}}} = \frac{4.43 + 5.15}{2} \tan 58.1^\circ = 7.69 \text{ N/mm}^2.$$

- Ermittlung der Fließfläche für die  $\overline{LRT}$ -Ebene. Dafür werden die Extremwerte der Fließspannungen in  $L$ -Richtung von den Ergebnissen der  $LR$ -Versuche unverändert übernommen. Für die Extremwerte der Fließspannungen in  $\overline{RT}$ -Richtung sowie für die maximale Schubfließspannung werden die zuvor berechneten Werte verwendet. Mit diesen Vorgaben ist man in der Lage, die Koeffizienten der Fließfunktion für die  $\overline{LRT}$ -Ebene iterativ zu ermitteln. Dies geschieht durch Verwendung des Plastizitätsmodells (siehe Kapitel 7.1) durch inkrementelle Vorgabe der Zustandsvariablen  $\alpha$ . Durch Annahme von entfestigendem Materialverhalten sowohl für Zug- als auch für Druckbeanspruchung in  $RT$ -Richtung für diese Iteration kann die Fließfläche wie gewünscht verkleinert werden. Damit erhält man die Koeffizienten zu:

$$\begin{aligned}a_{LL} &= -0.006\,396\,256 \text{ mm}^2/\text{N} \\ a_{\overline{RTRT}} &= 0.032\,038\,931 \text{ mm}^2/\text{N} \\ b_{LLLL} &= 0.000\,333\,364 \text{ mm}^4/\text{N}^2 \\ b_{\overline{RTRTRTRT}} &= 0.045\,288\,484 \text{ mm}^4/\text{N}^2 \\ b_{\overline{LLRTRT}} &= -0.000\,050\,978 \text{ mm}^4/\text{N}^2 \\ b_{\overline{LRTLRT}} &= 0.004\,958\,488 \text{ mm}^4/\text{N}^2\end{aligned}$$

Ersetzt man in Gl. (5.23)  $R$  durch  $\overline{RT}$ , erhält man die Gleichung der Fließfläche zu:

$$\begin{aligned}f &= a_{LL} \sigma_L + a_{\overline{RTRT}} \sigma_{\overline{RT}} + b_{LLLL} \sigma_L^2 + b_{\overline{RTRTRTRT}} \sigma_{\overline{RT}}^2 + \\ &+ 2 b_{\overline{LLRTRT}} \sigma_L \sigma_{\overline{RT}} + 4 b_{\overline{LRTLRT}} \tau_{L\overline{RT}}^2 - 1 = 0.\end{aligned}\quad (5.33)$$

Die Abbildungen 5.30 und 5.31 zeigen maßstäbliche Hauptschnitte durch das Ellipsoid in der  $\sigma_L$ - $\sigma_{\overline{RT}}$ -Ebene bzw. in der  $\sigma_{\overline{RT}}$ - $\tau_{\overline{LRT}}$ -Ebene (blau dargestellt). Zum Vergleich sind in grüner Farbe jeweils die Fließfläche in der  $LR$ -Ebene dargestellt. Die violetten Punkte geben die Fließspannungszustände der  $LT$ -Versuche an (siehe Abb. 5.27, 5.28 und 5.29). Abbildung 5.32 zeigt eine verzerrte, dreidimensionale Darstellung der Fließfläche.

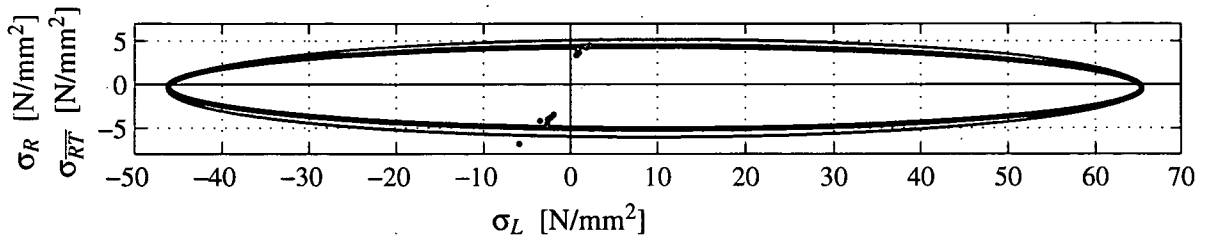


Abbildung 5.30: Hauptschnitt in der  $\sigma_L$ - $\sigma_{\overline{RT}}$ -Ebene durch die Fließfläche und Darstellung der Fließspannungszustände der biaxialen Experimente in der  $LT$ -Ebene

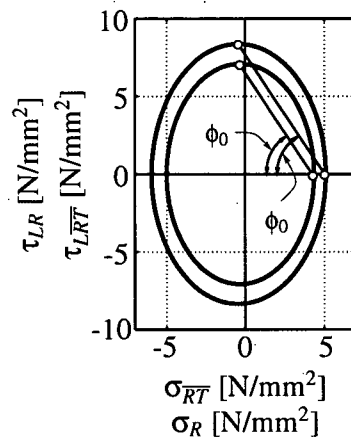


Abbildung 5.31: Hauptschnitt in der  $\sigma_{\overline{RT}}$ - $\tau_{\overline{LRT}}$ -Ebene durch die Fließfläche

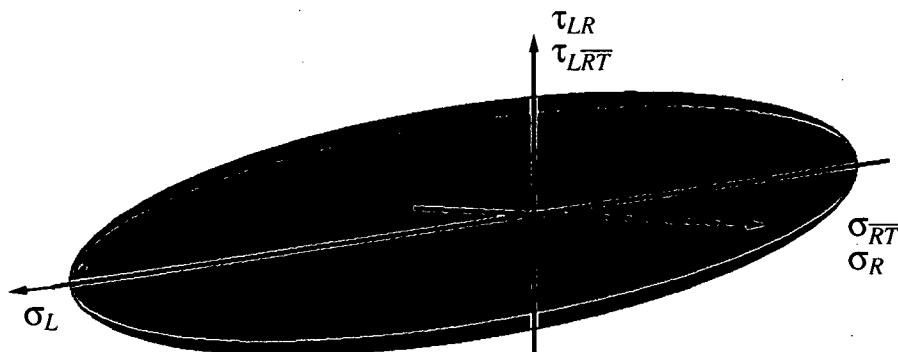


Abbildung 5.32: Fließfläche für fehlerfreies Fichtenholz, gültig für die  $\overline{LRT}$ -Ebene (in blauer Farbe) und in grüner Farbe für die  $LR$ -Ebene, verzerrt dargestellt

## 5.5 Beschreibung des plastischen Verhaltens

Bei Annahme assoziierter Verfestigung gemäß Gleichung (4.9) lässt das Einflächenmodell nur einen Verfestigungsparameter zu. Die Form der Fließfläche würde sich in alle Richtungen ähnlich verändern, d. h. dass man nur ein einziges Evolutionsgesetz (entweder für Verfestigung oder Entfestigung) für alle Spannungszustände vorschreiben könnte. Dies widerspricht dem in den Experimenten beobachteten und in der Literatur beschriebenen Materialverhalten von Holz. Das spröde Bruchverhalten im Zugbereich und das eher duktile Versagen im Druckbereich könnte im Werkstoffmodell nicht abgebildet werden. Aus diesem Grund werden nicht assoziierte Ver- und Entfestigungsgesetze eingeführt. Dies wird dadurch bewerkstelligt, dass anstelle einer assoziierten Verfestigungsvariablen  $\alpha$  ein Vektor

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{t_{\overline{RT}}} \quad \alpha_{c_{\overline{RT}}} \quad \alpha_{t_L} \quad \alpha_{c_L} \quad \alpha_{ref} \quad \alpha_{shr}]^T \quad (5.34)$$

definiert wird. Die Komponenten von  $\boldsymbol{\alpha}$  steuern die Extrema der Fließspannungen und somit die Gestalt der Fließfläche. Die mathematische Form der Fließfläche (Gl. 5.33) selbst bleibt bei beliebiger Beanspruchung unverändert. Um diese Gestaltsänderung des Ellipsoids zu kontrollieren, benötigt man entsprechende mathematische Ausdrücke für die Achsenschnittpunkte und die Extremwerte des Ellipsoids. Diese werden im Unterkapitel 5.5.3 hergeleitet. Einführende mathematische Grundlagen sind im Unterkapitel 5.5.1 enthalten, die Aktualisierung der assoziierten Fließregel, d. h. die Berechnung des plastischen Flusses für das Ellipsoid erfolgt im Unterkapitel 5.5.2. Anschließend werden im Unterkapitel 5.5.4 die verschiedenen Evolutionsgesetze definiert.

### 5.5.1 Einführende mathematische Grundlagen

Die Formulierung des Materialmodells erfolgt mit Hilfe von orthotropen Invarianten. Zur Beschreibung der Faserlängsrichtung  $L$ , der Richtung  $\overline{RT}$  (Querrichtung) und der Flächennormalen  $N$  auf die durch  $L$  und  $\overline{RT}$  aufgespannte Ebene werden die Einheitsvektoren

$$\mathbf{A}_L(\varphi) = \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\overline{RT}}(\varphi) = \begin{Bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_N = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$

verwendet, wobei  $\varphi$  den Faserwinkel bezeichnet. Die Strukturtenoren  $\mathbf{M}_i$ ,  $i \in \{L, \overline{RT}, N\}$  lassen sich aus den Einheitsvektoren  $\mathbf{A}_i$  wie folgt ermitteln (siehe MACKENZIE-HELNWEIN et al. [23]):

$$\mathbf{M}_L = \mathbf{A}_L \otimes \mathbf{A}_L, \quad \mathbf{M}_{\overline{RT}} = \mathbf{A}_{\overline{RT}} \otimes \mathbf{A}_{\overline{RT}} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_N = \mathbf{A}_N \otimes \mathbf{A}_N. \quad (5.36)$$

Bei Beschränkung auf ebene Spannungszustände erhält man drei orthotrope Invarianten des Spannungstensors zu

$$\sigma_L = \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_L, \quad \sigma_{\overline{RT}} = \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_{\overline{RT}} \quad \text{und} \quad \tau_{L\overline{RT}}^2 = \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_{\overline{RT}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_L. \quad (5.37)$$

Diese lassen sich als die Normalspannungskomponenten und das Quadrat der Schubspannung in einem durch die Vektoren  $\mathbf{A}_L$  und  $\mathbf{A}_{\overline{RT}}$  aufgespannten lokalen Koordinatensystem identifizieren. Die zugehörigen Invarianten des Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}$  erhält man analog zu

$$\varepsilon_L = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_L, \quad \varepsilon_{\overline{RT}} = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_{\overline{RT}} \quad \text{und} \quad \gamma_{\overline{LRT}}^2 = 4 \varepsilon_{\overline{LRT}}^2 = 4 \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_{\overline{RT}} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_L. \quad (5.38)$$

Die mathematische Beschreibung von orthotropen Materialien erfordert die Verwendung von Tensoren zweiter Stufe ( $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) und vierter Stufe ( $\mathbf{C}$ ). In der Kontinuumsmechanik besitzen diese Tensoren Symmetrieeigenschaften. Deshalb wird im Folgenden anstatt der Tensorschreibweise die Matrizenschreibweise verwendet. Zweidimensionale Tensoren zweiter Stufe werden zu einem Vektor, dreidimensionale Tensoren vierter Stufe zu einer Matrix umgeordnet.

Bei Betrachtung der jeweils dritten Terme der Gleichungen (5.37) und (5.38) fällt der Faktor 4 bei der Ermittlung der Invarianten  $\gamma_{\overline{LR}}^2$  auf. Dieser Faktor ergibt sich durch die Verwendung der Gleitung  $\gamma_{\overline{LRT}}$  anstelle der Tensorkomponente  $\varepsilon_{\overline{LRT}}$  und deren Zusammenhang  $\gamma_{\overline{LRT}} = 2 \varepsilon_{\overline{LRT}}$ .

### 5.5.2 Aktualisierung der Fließregel

In Unterkapitel 4.2.1 wurde in Gleichung (4.7) die so genannte assoziierte Fließregel definiert. Für das in dieser Arbeit verwendete Modell gemäß Gleichungen (5.33) erhält man aus (4.7)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{r}, \quad (5.39)$$

wobei

$$\mathbf{r} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a} + 2 \mathbf{b} : \boldsymbol{\sigma} \hat{=} \begin{Bmatrix} a_{LL} + 2b_{LLLL} \sigma_L + 2b_{LL\overline{RTRT}} \sigma_{\overline{RT}} \\ a_{\overline{RTRT}} + 2b_{LL\overline{RTRT}} \sigma_L + 2b_{\overline{RTRT}\overline{RTRT}} \sigma_{\overline{RT}} \\ 8b_{\overline{LRTLRT}} \tau_{\overline{LRT}} \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe ist und die Richtung der plastischen Verzerrungszuwächse angibt.  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  sind folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{a}(\mathbf{p}) = \begin{Bmatrix} a_{LL} \\ a_{\overline{RTRT}} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} b_{LLLL} & b_{LL\overline{RTRT}} & 0 \\ b_{LL\overline{RTRT}} & b_{\overline{RTRT}\overline{RTRT}} & 0 \\ 0 & 0 & 4b_{\overline{LRTLRT}} \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Die Vektordarstellung in (5.40) gilt ausschließlich für das Materialhauptsystem. In diesem hat  $\mathbf{r}$  die Koordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_L} & \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \tau_{\overline{LRT}}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \tau_{\overline{LRT}}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\overline{RT}}} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} r_1 & \frac{1}{2} r_3 \\ \frac{1}{2} r_3 & r_2 \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

Wegen der Symmetrie von  $\mathbf{r}$  wird in Folge die äquivalente Vektordarstellung

$$\vec{\mathbf{r}} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} \quad (5.43)$$

verwendet. Da im Folgenden keine Gefahr der Verwechslung besteht, wird auf den Pfeil von  $\vec{\mathbf{r}}$  in (5.43) verzichtet.

### 5.5.3 Kurvendiskussion der Hauptschnitte des Ellipsoids

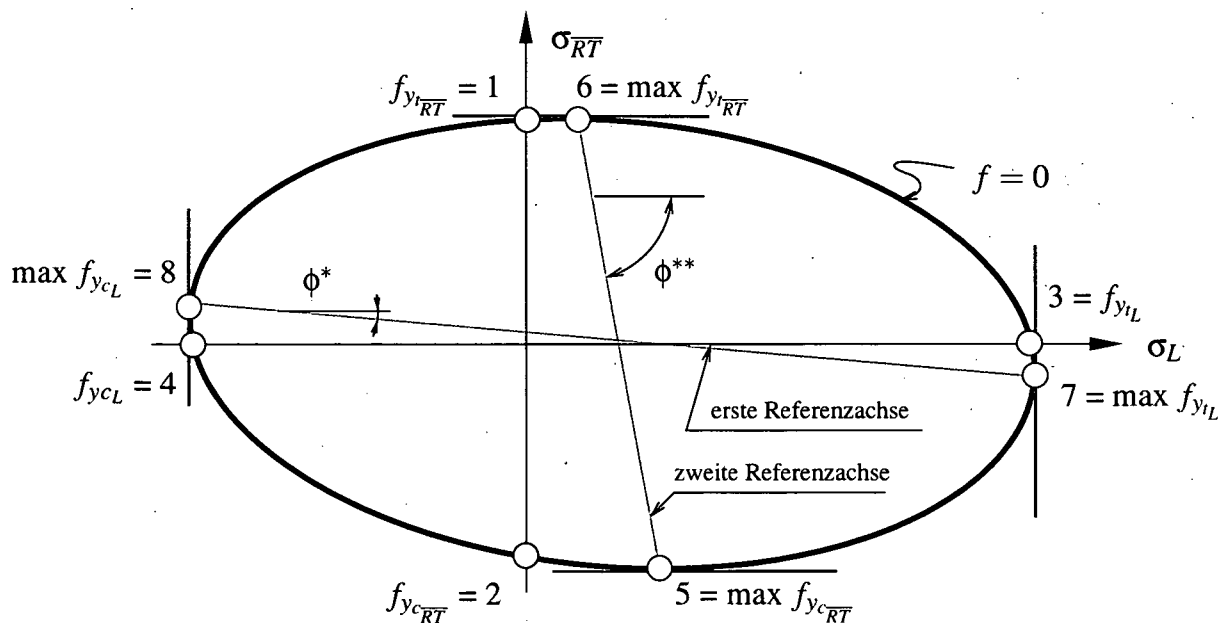
Die Gleichung des Schnittes des Ellipsoids nach TSAI und WU mit der  $\sigma_L$ - $\sigma_{\overline{RT}}$ -Ebene ( $\tau_{L\overline{RT}} = 0$ ) lautet:

$$f = a_{LL} \sigma_L + a_{\overline{RT}\overline{RT}} \sigma_{\overline{RT}} + b_{LLLL} \sigma_L^2 + b_{\overline{RT}\overline{RT}\overline{RT}\overline{RT}} \sigma_{\overline{RT}}^2 + 2b_{LL\overline{RT}\overline{RT}} \sigma_L \sigma_{\overline{RT}} - 1 = 0. \quad (5.44)$$

Dieser Hauptschnitt des Ellipsoids veranschaulicht die für Holz charakteristischen unterschiedlichen Festigkeiten für Zug- und Druckbeanspruchung in  $L$ - und  $\overline{RT}$ -Richtung. Für die Beschreibung des Nachbruchverhaltens (plastische Bereiche) definiert man die Festigkeiten als (Extremwerte der) Fließspannungen.

Um eine, auf Extremwerte von Fließspannungen beruhende Gestaltsänderung des Ellipsoids kontrollieren zu können, benötigt man entsprechende mathematische Ausdrücke für die Achsenschnittpunkte und die Extremwerte des Ellipsoids. Diese werden im Folgenden hergeleitet.

Abbildung 5.33 veranschaulicht die Aufgabenstellung. Zur Übersichtlichkeit werden die Punkte am Hauptschnitt des Ellipsoids festgelegt. Die Punkte 1 bis 4 markieren die Extremwerte der einaxialen Fließspannungen, die als Achsenschnittpunkte der Ellipse bezeichnet werden. Die Punkte 5 bis 8 markieren die Extremwerte der Fließspannungen. Zusätzlich sind die Neigungswinkel der Referenzachsen  $\phi^*$  und  $\phi^{**}$  eingetragen.



**Abbildung 5.33:** Festlegung charakteristischer Punkte auf dem Hauptschnitt des Ellipsoids in der  $\sigma_L$ - $\sigma_{\overline{RT}}$ -Ebene

- **Ermittlung der einaxialen Fließspannungen in  $\overline{RT}$ -Richtung**

Durch Einsetzen des Spannungszustandes  $\sigma_L = \tau_{L\overline{RT}} = 0$ ,  $\sigma_{\overline{RT}} = f_{y_{\overline{RT}}}$  in die Fließbe-

dingung (5.33) erhält man

$$f = a_{\overline{RTRT}} f_{y_{\overline{RT}}} + b_{\overline{RTRTRTRT}} f_{y_{\overline{RT}}}^2 - 1 = 0 \Rightarrow f_{y_{\overline{RT}}} = \frac{-a_{\overline{RTRT}} \pm \sqrt{a_{\overline{RTRT}}^2 + 4b_{\overline{RTRTRTRT}}}}{2b_{\overline{RTRT}}} \quad (5.45)$$

Mittels Gleichung (5.45) sind die Punkte 1 und 2 in Abbildung 5.33 definiert.

- **Ermittlung der einaxialen Fließspannungen in Längsrichtung**

Durch Einsetzen des Spannungszustandes  $\sigma_{\overline{RT}} = \tau_{\overline{LRT}} = 0$ ,  $\sigma_L = f_{y_L}$  in die Fließbedingung (5.33) erhält man

$$f = a_{LL} f_{y_L} + b_{LLLL} f_{y_L}^2 - 1 = 0 \Rightarrow f_{y_L} = \frac{-a_{LL} \pm \sqrt{a_{LL}^2 + 4b_{LLLL}}}{2b_{LLLL}} \quad (5.46)$$

Damit sind die Punkte 3 und 4 in Abbildung 5.33 definiert.

- **Bildung des Differentials  $df$  von  $f = f(\sigma_L, \sigma_{\overline{RT}}, \tau_{\overline{LRT}} = 0)$**

Da die Fließfläche durch  $f = 0$  definiert ist, verschwindet das zugehörige Differential  $df = 0$ . Ausgehend von der allgemeinen Form  $f = f(\sigma_L, \sigma_{\overline{RT}}, \tau_{\overline{LRT}})$  erhält man  $df$  zu

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_L} d\sigma_L + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\overline{RT}}} d\sigma_{\overline{RT}} = 0, \quad (5.47)$$

bzw. aus (5.33) zu

$$df = d\sigma_L (a_{LL} + 2b_{LLLL} \sigma_L + 2b_{\overline{LLRTRT}} \sigma_{\overline{RT}}) + d\sigma_{\overline{RT}} (a_{\overline{RTRT}} + 2b_{\overline{LLRTRT}} \sigma_L + 2b_{\overline{RTRTRTRT}} \sigma_{\overline{RT}}) = 0. \quad (5.48)$$

Der Vergleich der Gleichungen (5.47) und (5.48) liefert:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{\overline{RT}}} = a_{\overline{RTRT}} + 2b_{\overline{LLRTRT}} \sigma_L + 2b_{\overline{RTRTRTRT}} \sigma_{\overline{RT}}, \quad (5.49a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_L} = a_{LL} + 2b_{LLLL} \sigma_L + 2b_{\overline{LLRTRT}} \sigma_{\overline{RT}}. \quad (5.49b)$$

- **Ermittlung der Tangentenneigung an einer beliebigen Stelle der Ellipse**

Aus  $df = 0$  folgt

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_L} d\sigma_L + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\overline{RT}}} d\sigma_{\overline{RT}} = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma_{\overline{RT}}}{d\sigma_L} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_L}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{\overline{RT}}}} \quad (5.50)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (5.48) und (5.49a) in (5.50) erhält man die Tangentenneigung in einem Punkt  $(\sigma_L, \sigma_{\overline{RT}}, \tau_{\overline{LRT}} = 0)$  mit  $f = f(\sigma_L, \sigma_{\overline{RT}}, \tau_{\overline{LRT}} = 0)$  zu

$$\frac{d\sigma_{\overline{RT}}}{d\sigma_L} = -\frac{a_{LL} + 2b_{LLLL} \sigma_L + 2b_{\overline{LLRTRT}} \sigma_{\overline{RT}}}{a_{\overline{RTRT}} + 2b_{\overline{LLRTRT}} \sigma_L + 2b_{\overline{RTRTRTRT}} \sigma_{\overline{RT}}} \quad (5.51)$$

- **Bestimmung der Neigung der ersten Referenzachse der Ellipse**

Als erste Referenzachse wird im Folgenden jener Durchmesser der Ellipse bezeichnet, der die beiden Extremwerte der Spannungen in Längsrichtung (Punkte 7 und 8 in Abbildung 5.33) verbindet. Die Gleichung der ersten Referenzachse wird durch Nullsetzen von Gleichung (5.49a) und anschließendem Umformen zu

$$\sigma_{\overline{RT}} = -\frac{a_{\overline{RTRT}}}{2b_{\overline{RTRTRT}}} - \frac{b_{\overline{LLRTRT}}}{b_{\overline{RTRTRT}}} \sigma_L \quad (5.52)$$

erhalten. Ihre Neigung folgt durch Ableiten von (5.52) nach  $\sigma_L$  zu

$$\tan \phi^{*,0} = \frac{d\sigma_{\overline{RT}}}{d\sigma_L} = -\frac{b_{\overline{LLRTRT}}}{b_{\overline{RTRTRT}}} \quad (5.53)$$

Der obere Index 0 bezieht sich auf die initiale, unveränderte Fließfläche.

- **Bestimmung der Neigung der zweiten Referenzachse der Ellipse**

Als zweite Referenzachse wird im Folgenden jener Durchmesser der Ellipse bezeichnet, der die beiden Extremwerte der Spannungen in  $\overline{RT}$ -Richtung (Punkte 5 und 6 in Abbildung 5.33) verbindet. Die Gleichung der zweiten Referenzachse wird durch Nullsetzen von Gleichung (5.49b) und anschließendem Umformen zu

$$\sigma_L = -\frac{a_{LL}}{2b_{LLLL}} - \frac{b_{\overline{LLRTRT}}}{b_{LLLL}} \sigma_{\overline{RT}} \quad (5.54)$$

erhalten. Ihre Neigung folgt durch Ableiten von (5.54) nach  $\sigma_{\overline{RT}}$  zu

$$\tan \phi^{**,0} = \frac{d\sigma_L}{d\sigma_{\overline{RT}}} = -\frac{b_{\overline{LLRTRT}}}{b_{LLLL}} \quad (5.55)$$

- **Einführung der Abkürzungen  $X$  und  $Z$**

Zur Vereinfachung der weiteren Ausdrücke werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$Z = b_{LLLL} b_{\overline{RTRTRT}} - b_{\overline{LLRTRT}}^2 \quad (5.56)$$

$$X = \sqrt{a_{\overline{RTRT}}^2 b_{LLLL} - 2a_{LL} a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLRTRT}} + a_{LL}^2 b_{\overline{RTRTRT}} + 4Z} \quad (5.57)$$

Für eine Ellipse gilt immer  $Z > 0$ .

- **Extremwerte der Fließspannungen in  $\overline{RT}$ -Richtung**

Die Forderung einer Tangente parallel zur  $\sigma_L$ -Achse lautet

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_L} = a_{LL} + 2b_{\overline{LLRTRT}} \sigma_{\overline{RT}} + 2b_{LLLL} \sigma_L = 0 \quad (5.58)$$

Durch Auflösen nach  $\sigma_{\overline{RT}}$  erhält man

$$\sigma_{\overline{RT}} = -\frac{a_{LL} + 2b_{LLLL} \sigma_L}{2b_{\overline{LLRTRT}}} \quad (5.59)$$

Gleichung (5.59) wird in die Gleichung der Ellipse (5.33) eingesetzt. Nach Umformung und Verwendung der Abkürzungen (5.56) und (5.57) erhält man die Lage der Extremwerte auf der  $\sigma_L$ -Achse zu

$$\sigma_L = \frac{a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLRTRT}} - a_{LL} b_{\overline{RTRTRTRT}} \pm \frac{b_{\overline{LLRTRT}}}{\sqrt{b_{\overline{LLLL}}}} X}{2Z} \quad (5.60)$$

Dieses Ergebnis wird in Gleichung (5.59) eingesetzt und liefert die Extremwerte der Fließspannungen in  $\overline{RT}$ -Richtung zu

$$\max f_{y_{\overline{RT}}}, \min f_{y_{\overline{RT}}} = -\frac{a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLLL}} - a_{LL} b_{\overline{LLRTRT}} \pm \sqrt{b_{\overline{LLLL}}} X}{2Z} \quad (5.61)$$

Mittels der Gleichungen (5.60) und (5.61) ist die Lage der Extremwerte für  $\sigma_{\overline{RT}}$  festgelegt. Die Punkte 5 und 6 der Ellipse in Abbildung 5.33 markieren diese Extremwerte.

- **Extremwerte der Fließspannungen in Längsrichtung**

Die Forderung einer Tangente parallel zur  $\sigma_{\overline{RT}}$ -Achse lautet

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{\overline{RT}}} = a_{\overline{RTRT}} + 2b_{\overline{LLRTRT}} \sigma_L + 2b_{\overline{RTRTRTRT}} \sigma_{\overline{RT}} = 0. \quad (5.62)$$

Durch Auflösen nach  $\sigma_L$  erhält man

$$\sigma_L = -\frac{a_{\overline{RTRT}} + 2b_{\overline{RTRTRTRT}} \sigma_{\overline{RT}}}{2b_{\overline{LLRTRT}}} \quad (5.63)$$

Gleichung (5.63) wird in die Gleichung der Ellipse (5.33) eingesetzt. Nach der Umformung und der Verwendung der Abkürzungen (5.56) und (5.57) erhält man die Lage der Extremwerte auf der  $\sigma_{\overline{RT}}$ -Achse zu

$$\sigma_{\overline{RT}} = -\frac{a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLLL}} - a_{LL} b_{\overline{LLRTRT}} \pm \frac{b_{\overline{LLRTRT}}}{\sqrt{b_{\overline{RTRTRTRT}}}} X}{2Z} \quad (5.64)$$

Dieses Ergebnis wird nun in Gleichung (5.63) eingesetzt und liefert die Extremwerte der Fließspannungen in Längsrichtung zu

$$\max f_{y_L}, \min f_{y_L} = \frac{a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLRTRT}} - a_{LL} b_{\overline{RRRR}} \pm \sqrt{b_{\overline{RTRTRTRT}}} X}{2Z} \quad (5.65)$$

Mittels der Gleichungen (5.64) und (5.65) ist die Lage der Extremwerte für  $\sigma_L$  festgelegt. Die Punkte 7 und 8 der Ellipse in Abbildung 5.33 markieren diese Extremwerte.

- **Maximale Schubfließspannung  $\max \tau_{y_{L\overline{RT}}}$**

Der Extremwert der Schubfließspannung ist durch eine zur  $\sigma_L$ - $\sigma_{\overline{RT}}$ -Ebene parallele Tangentialebene an die Fließfläche gekennzeichnet.



Mathematisch bedeutet dies, dass das Differential von  $f(\sigma_L, \sigma_{\overline{RT}}, \tau_{L\overline{RT}})$  entsprechend (5.33) unter der Nebenbedingung  $d\tau_{L\overline{RT}} = 0$  verschwinden muss. Das ist gleichbedeutend mit dem gleichzeitigen Verschwinden der partiellen Ableitungen (5.49a) und (5.49b). Diese partiellen Ableitungen bilden ein  $2 \times 2$ -Gleichungssystem in den Unbekannten  $\sigma_L$  und  $\sigma_{\overline{RT}}$ . Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert

$$\sigma_L^* = \frac{a_{\overline{RT}\overline{RT}} b_{LL\overline{RT}\overline{RT}} - a_{LL} b_{\overline{RT}\overline{RT}\overline{RT}}}{2Z} \quad \text{und} \quad \sigma_{\overline{RT}}^* = \frac{a_{LL} b_{LL\overline{RT}\overline{RT}} - a_{\overline{RT}\overline{RT}} b_{LLLL}}{2Z}. \quad (5.66)$$

Durch Einsetzen der Beziehungen (5.66) in die Gleichung (5.33) erhält man das Maximum der Schubspannung zu

$$\max \tau_{y_{L\overline{RT}}} = \frac{X}{4 \sqrt{b_{L\overline{RT}L\overline{RT}}} Z}. \quad (5.67)$$

• **Ideeller Reibungswinkel  $\phi$**

Schließlich wird noch eine Beziehung für den ideellen Reibungswinkel in Abhängigkeit der Parameter des Ellipsoids hergeleitet. Aus Abbildung 5.34 entnimmt man für den initialen Fall den Zusammenhang

$$\max \tau_{y_{L\overline{RT}}}^0 - \frac{\max f_{y_{\overline{RT}}}^0 - \min f_{y_{\overline{RT}}}^0}{2} \tan \phi^0 = 0. \quad (5.68)$$

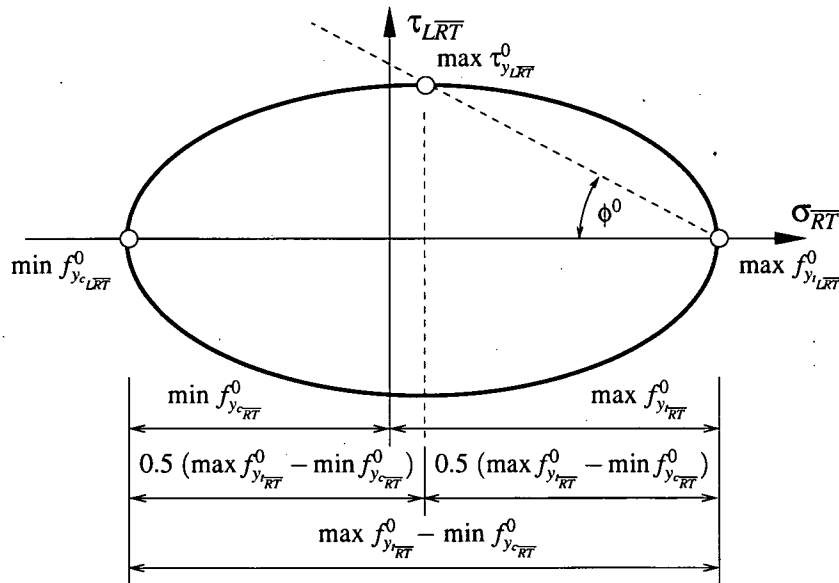


Abbildung 5.34: Zusammenhang zwischen  $\phi^0$  und der Schubfließspannung  $\max \tau_{y_{L\overline{RT}}}^0$

Durch Einsetzen der Beziehung (5.61) mit positivem Vorzeichen für  $\max f_{y_{\overline{RT}}}^0$ , der Beziehung (5.61) mit negativem Vorzeichen für  $\min f_{y_{\overline{RT}}}^0$  sowie der Beziehung (5.67) für  $\max \tau_{y_{L\overline{RT}}}^0$  erhält man eine Beziehung, die nur von den Parametern des Ellipsoids abhängt.

Damit kann ein ideeller Reibungswinkel  $\phi$  mittels der Parameter des Ellipsoids als

$$\phi = \arctan \frac{2 \max \tau_{y_{L\overline{RT}}} }{\max f_{y_{t\overline{RT}}} - \min f_{y_{c\overline{RT}}}} = \arctan \frac{X \sqrt{Z}}{2 (a_{LL} b_{LL\overline{RT}\overline{RT}} - a_{\overline{RT}\overline{RT}} b_{LLLL}) \sqrt{b_{L\overline{RT}L\overline{RT}}}} \quad (5.69)$$

ermittelt werden. Damit wird bei Auftreten von Zugentfestigung in  $\overline{RT}$ -Richtung die Schubfließspannung verringert.

#### 5.5.4 Definition der Evolutionsgesetze

Zur Steuerung der auf Extremwerten von Fließspannungen beruhenden Gestaltsänderung des Ellipsoids werden sechs Evolutionsgesetze benötigt, da die Fließfläche sechs (bei Veränderung unbekannte) Parameter enthält. Daher wird zusätzlich zu den fünf physikalischen Versagensmechanismen (Zugversagen in  $L$ - bzw.  $\overline{RT}$ -Richtung, Druckversagen in  $L$ - bzw.  $\overline{RT}$ -Richtung sowie Schubversagen in der  $L\overline{RT}$ -Ebene) ein sechstes Evolutionsgesetz für die Neigung der ersten Referenzachse des Ellipsoids eingeführt. Im Einzelnen:

1. Maximale Zugfließspannung in  $\overline{RT}$ -Richtung  $\max f_{y_{t\overline{RT}}}$
2. Minimale Druckfließspannung in  $\overline{RT}$ -Richtung  $\min f_{y_{c\overline{RT}}}$
3. Maximale Zugfließspannung in  $L$ -Richtung  $\max f_{y_{tL}}$
4. Minimale Druckfließspannung in  $L$ -Richtung  $\min f_{y_{cL}}$
5. Neigung der ersten Referenzachse der Ellipse  $\tan \phi^*$
6. Maximale Schubfließspannung in der  $L\overline{RT}$ -Ebene  $\max \tau_{y_{L\overline{RT}}}$ .

In [9] werden für die Beschreibung von entfestigendem Materialverhalten (tritt für Holz bei Zugversagen in  $L$ - und  $\overline{RT}$ -Richtung, bei Druckversagen in  $L$ -Richtung sowie bei Schubversagen in der  $L\overline{RT}$ -Ebene auf) Evolutionsgesetze, basierend auf bruchmechanischen Konzepten vorgestellt. Bei der Implementierung des Materialmodells in eine FE-Software und Durchführung von Strukturberechnungen traten wesentliche numerische Probleme auf, so dass im Rahmen dieser Arbeit auf die Verwendung des bruchmechanischen Konzeptes verzichtet wurde. Die im Folgenden definierten Evolutionsgesetze haben zunächst nur für fehlerfreies Fichtenholz in der  $L\overline{RT}$ -Ebene Gültigkeit.

##### 5.5.4.1 Maximale Zugfließspannung in $\overline{RT}$ -Richtung

Entsprechend dem, in den Experimenten festgestellten und aus der Literatur bekannten, ausgeprägten spröden Versagen wird ein Entfestigungsgesetz verwendet. Die Evolution der maximalen Zugfließspannung in  $\overline{RT}$ -Richtung wird mittels des Exponentialgesetzes

$$\max f_{y_{t\overline{RT}}}(\alpha_{t\overline{RT}}) = \max f_{y_{t\overline{RT}}}^0 \cdot e^{-k_{t\overline{RT}} \alpha_{t\overline{RT}}} \quad (5.70)$$

vorgegeben, wobei  $\max f_{yt_{\overline{RT}}}^0$  die initiale maximale Zugflußspannung bezeichnet. Die innere Variable  $\alpha_{t_{\overline{RT}}}$  dient ausschließlich zur Beschreibung der betrachteten Flußspannung und ergibt sich zu

$$\dot{\alpha}_{t_{\overline{RT}}} = \langle \mathbf{M}_R : \mathbf{r} \rangle \dot{\gamma}. \quad (5.71)$$

Es gilt  $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$ . Abbildung 5.35 veranschaulicht die Entwicklung von  $\max f_{yt_{\overline{RT}}}$  für  $\max f_{yt_{\overline{RT}}}^0 = 4.43 \text{ N/mm}^2$  (Zahlenwert siehe Unterkapitel 5.4.3) in Abhängigkeit von der inneren Variablen  $\alpha_{t_{\overline{RT}}}$ . Der Materialparameter  $k_{t_{\overline{RT}}}$  wird mit  $k_{t_{\overline{RT}}} = 10.0$  angenommen. Damit kann das spröde Versagen (vorerst) nicht realitätsgetreu nachgebildet werden, da die Entfestigung zu schwach abgebildet wird. Ein erforderlicher steilerer Abfall von  $f_{yt_{\overline{RT}}}$  führt ab Werten von etwa  $k_{t_{\overline{RT}}} > 10.0$  im Rahmen von Strukturberechnungen zu wesentlichen numerischen Problemen. Eine bessere physikalische Beschreibung des Zugversagens in  $\overline{RT}$ -Richtung wird im Kapitel 7.2.2 vorgestellt.

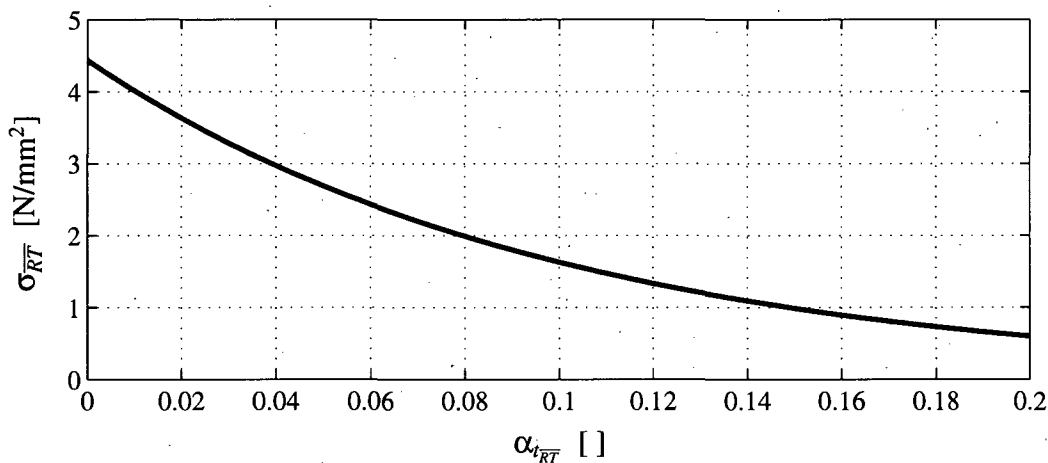


Abbildung 5.35: Verlauf des Evolutionsgesetzes für  $\max f_{yt_{\overline{RT}}}$

Da  $\max f_{yt_{\overline{RT}}}^0$  wie aus der Abbildung 5.35 ersichtlich, näherungsweise gleich groß wie der zugehörige uniaxiale Wert ist, kann er auch als Zugfestigkeit in  $\overline{RT}$ -Richtung bezeichnet werden.

#### 5.5.4.2 Minimale Druckflußspannung in $\overline{RT}$ -Richtung

Die Evolution der maximalen Druckflußspannung in  $\overline{RT}$ -Richtung wird mittels des exponentiellen Verfestigungsgesetzes

$$\min f_{yc_{\overline{RT}}}(\alpha_{c_{\overline{RT}}}) = \min f_{yc_{\overline{RT}}}^0 - Y_{1_{\overline{RT}}} \cdot (1 - e^{-k_{c_{\overline{RT}}} \alpha_{c_{\overline{RT}}}}) \quad (5.72)$$

beschrieben. Dabei bezeichnet  $\min f_{yc_{\overline{RT}}}^0$  die initiale Druckflußspannung,  $Y_{1_{\overline{RT}}}$  eine Verfestigungsspannung und  $k_{c_{\overline{RT}}}$  einen dimensionslosen Materialparameter. Dieses Evolutionsgesetz spiegelt durch die Beschreibung des duktilen Verhaltens die gutmütige Eigenschaft von Fichtenholz bei Druckbeanspruchung quer zur Faser wieder. Diese plastischen Reserven können im Rahmen von Traglastanalysen genutzt werden. Die bei größeren plastischen Verzerrungen

auftretende Kompaktion (Wiederanstieg der Steifigkeit, siehe etwa Abb. A.5) bleibt unberücksichtigt, da die Formulierung des Materialmodells auf kleine Verzerrungen beschränkt ist.

Die innere Variable  $\alpha_{c_{RT}}$  dient ausschließlich der Beschreibung der betrachteten Fließspannung. Für dominante Druckbeanspruchung quer zur Faser findet man in [23] folgende Beziehungen für die Rate der plastischen Verzerrungen

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \left[ -(\mathbf{M}_{RT} + c \mathbf{M}_L) + \frac{\mu}{2} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma} \right] \quad (5.73)$$

und für den zugehörigen Verfestigungsparameter

$$\dot{\alpha} = \dot{\gamma}. \quad (5.74)$$

Der Struktortensor vierter Stufe ist durch

$$\mathbb{M} = (\mathbf{A}_L \otimes \mathbf{A}_{RT} + \mathbf{A}_{RT} \otimes \mathbf{A}_L) \otimes (\mathbf{A}_L \otimes \mathbf{A}_{RT} + \mathbf{A}_{RT} \otimes \mathbf{A}_L) \quad (5.75)$$

definiert. Bei Zerlegung von  $\dot{\epsilon}^p$  in seine Komponenten erhält man

$$\dot{\epsilon}_{RT}^p = \mathbf{M}_{RT} : \dot{\epsilon}^p = -\dot{\gamma}. \quad (5.76)$$

Der Vergleich von (5.76) mit (5.74) führt auf

$$\dot{\alpha} = \langle -\dot{\epsilon}_{RT}^p \rangle = \langle -\mathbf{M}_{RT} : \dot{\epsilon}^p \rangle. \quad (5.77)$$

Dieser Zusammenhang wird nun für das vorliegende Einflächenmodell zur Definition von  $\alpha_{c_{RT}}$  unter Verwendung von (5.39) herangezogen und liefert

$$\dot{\alpha}_{c_{RT}} = \langle -\mathbf{M}_{RT} : \dot{\epsilon}_{RT}^p \rangle = \dot{\gamma} \langle -\mathbf{M}_{RT} : \mathbf{r} \rangle. \quad (5.78)$$

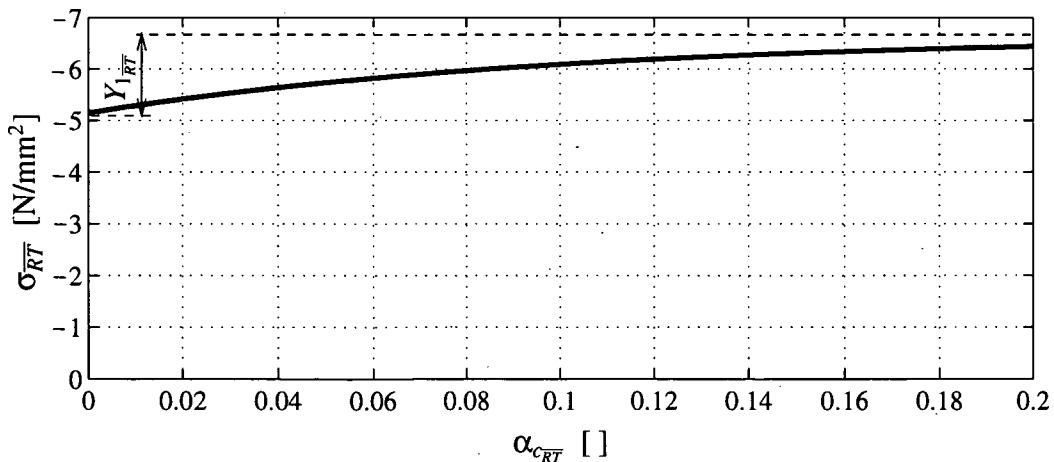


Abbildung 5.36: Verlauf des Evolutionsgesetzes für  $\min f_{yc_{RT}}$

Abbildung 5.36 zeigt die Entwicklung von  $\min f_{yc_{RT}}$  für  $\min f_{yc_{RT}}^0 = -5.15 \text{ N/mm}^2$  (Zahlenwert siehe Unterkapitel 5.4.3) und  $Y_{1_{RT}} = 1.5 \text{ N/mm}^2$ , in dem die innere Variable  $\alpha_{c_{RT}}$  als

Laufvariable gewählt wird. Der Materialparameter  $k_{c_{\overline{RT}}}$  wird mit  $k_{t_{\overline{RT}}} = 10.0$  angenommen. Der Wert  $Y_{1_{\overline{RT}}} = 1.5 \text{ N/mm}^2$  wurde mit Hilfe von Abb. A.5 bestimmt. Bei Vernachlässigung der Kompaktion lässt sich  $Y_{1_{\overline{RT}}}$  näherungsweise von  $\sigma_R = 3.5$  bis  $5.0 \text{ N/mm}^2$  festlegen (Anmerkung: Die  $T$ -Richtung verhält sich sehr ähnlich wie die  $R$ -Richtung [14], wodurch die Wahl von  $Y_{1_{\overline{RT}}}$  gerechtfertigt erscheint.).

### 5.5.4.3 Maximale Zugfließspannung in $L$ -Richtung

Zugversagen in  $L$ -Richtung ist wie Zugversagen in  $\overline{RT}$ -Richtung durch einen Spröbruch gekennzeichnet. Die Evolution der maximalen Zugfließspannung in  $L$ -Richtung wird daher mittels des exponentiellen Entfestigungsgesetzes

$$\max f_{yt_L}(\alpha_{t_L}) = \max f_{yt_L}^0 \cdot e^{-k_{t_L} \alpha_{t_L}} \quad (5.79)$$

vorgegeben, wobei  $\max f_{yt_L}^0$  die initiale maximale Zugfließspannung bezeichnet und zugleich näherungsweise den zugehörigen uniaxialen Maximalwert darstellt und somit auch als Zugfestigkeit in  $L$ -Richtung bezeichnet werden kann. Die innere Variable  $\alpha_{t_L}$  dient ausschließlich zur Beschreibung der betrachteten Fließspannung. In Analogie zur Definition des Entfestigungsparameters  $\alpha_{t_{\overline{RT}}}$  in Gleichung (5.71) kann ein Entfestigungsparameter für Zugbeanspruchung parallel zur Faser unter Berücksichtigung von (5.40) zu

$$\dot{\alpha}_{t_L} = \langle \mathbf{M}_L : \dot{\epsilon}^p \rangle = \dot{\gamma} \langle \mathbf{M}_L : \mathbf{r} \rangle \quad (5.80)$$

definiert werden. Er entspricht der plastischen, spezifischen Längenänderung in Faserichtung. Abbildung 5.37 veranschaulicht die Entwicklung von  $\max f_{yt_L}$  für  $\max f_{yt_L}^0 = 65.31 \text{ N/mm}^2$ , in dem die innere Variable  $\alpha_{t_L}$  als Laufvariable gewählt wird. Der Materialparameter  $k_{t_L}$  wird mit  $k_{t_L} = 8.0$  angenommen. Hierfür gelten dieselben Erläuterungen wie für Zugversagen in  $\overline{RT}$ -Richtung (Unterkap. 5.5.4.1).

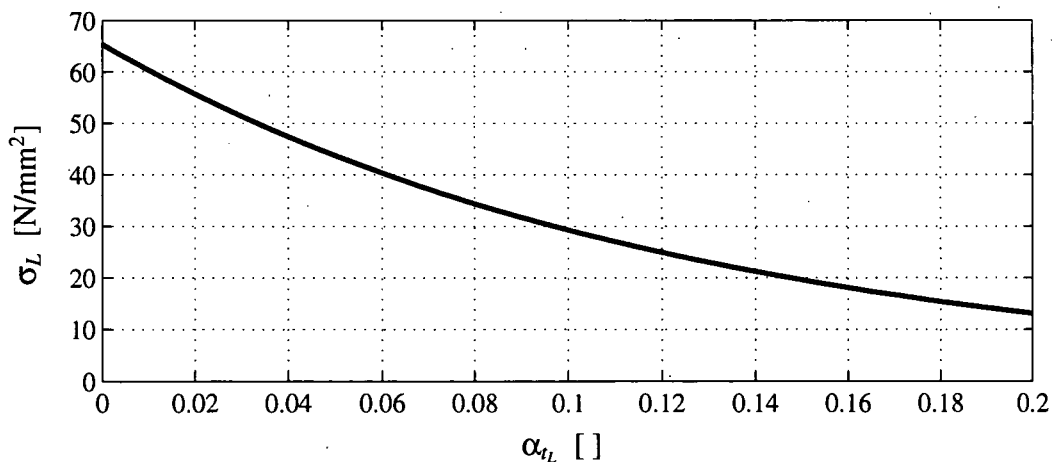


Abbildung 5.37: Verlauf des Evolutionsgesetzes für  $\max f_{yt_L}$

#### 5.5.4.4 Minimale Druckfließspannung in $L$ -Richtung

Die Evolution der minimalen Druckfließspannung in Längsrichtung wird durch

$$\min f_{y_{cL}}(\alpha_{cL}) = \min f_{y_{cL}}^0 + Y_{1L} \cdot (1 - e^{-k_{cL} \alpha_{cL}}) \quad (5.81)$$

beschrieben, wobei die Bedeutung des Fließspannungsanteiles  $Y_{1L}$  der Abbildung 5.38 zu entnehmen ist. Die innere Variable  $\alpha_{cL}$  dient ausschließlich der Beschreibung der betrachteten Festigkeit. In Analogie zur Definition des Verfestigungsparameters  $\alpha_{c_{RT}}$  in Gleichung (5.78) kann ein Entfestigungsparameter für Druckbeanspruchung parallel zur Faser unter Berücksichtigung von (5.40) zu

$$\dot{\alpha}_{cL} = \langle -\mathbf{M}_L : \dot{\epsilon}^p \rangle = \dot{\gamma} \langle -\mathbf{M}_L : \mathbf{r} \rangle \quad (5.82)$$

definiert werden. Kompaktionseinflüsse bei größeren plastischen Verzerrungen bleiben wie bei Druckbeanspruchung in  $\overline{RT}$ -Richtung unberücksichtigt. Abbildung 5.38 veranschaulicht die Entwicklung von  $\min f_{y_{cL}}$  für  $\min f_{y_{cL}}^0 = -46.20 \text{ N/mm}^2$ , wobei  $Y_{1L} = 10 \text{ N/mm}^2$  und  $k_{cL} = 5.0$  gewählt wird.

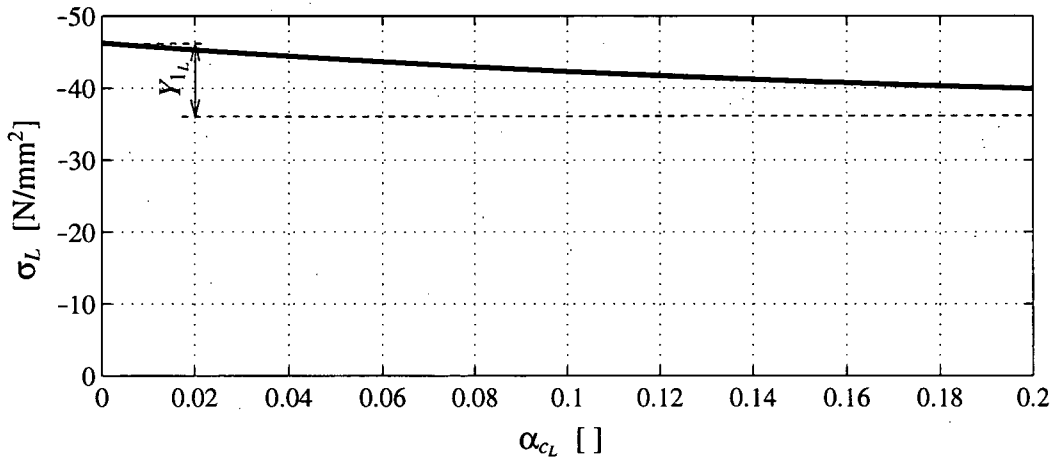


Abbildung 5.38: Verlauf des Evolutionsgesetzes für  $\min f_{y_{cL}}$

#### 5.5.4.5 Neigung der ersten Referenzachse der Ellipse $\tan \phi^*$

Die Neigung der ersten Referenzachse wird mittels

$$\tan \phi^*(\alpha_{ref}) = (\tan \phi^{*,0}) \cdot e^{-k_{t_{RT}} \alpha_{ref}} \quad (5.83)$$

modelliert, wobei  $\tan \phi^{*,0}$  die initiale Neigung der ersten Referenzachse bezeichnet. Physikalisch bedeutet dieses Evolutionsgesetz, dass die sehr geringe Anfangsneigung der Ellipse zur  $\sigma_L$ -Achse mit zunehmenden plastischen Verzerrungen bei Zugbeanspruchung in  $\overline{RT}$ -Richtung verschwindet und somit einen vernachlässigbaren Einfluss auf das Materialmodell hat. Dieses Evolutionsgesetz wird lediglich für die Bestimmung des sechsten Tsai-Wu-Parameters benötigt.

Die innere Variable  $\alpha_{ref}$  dient ausschließlich der Beschreibung der betrachteten Größe und wird analog zu der Variablen  $\alpha_{t_{RT}}$  definiert (siehe Gleichung (5.71)). Somit ergibt sich

$$\dot{\alpha}_{ref} = \langle \mathbf{M}_{\overline{RT}} : \mathbf{r} \rangle \dot{\gamma}. \quad (5.84)$$

Abbildung 5.39 veranschaulicht die Entwicklung von  $\tan \phi^*$  für  $\tan \phi^{*,0} = -0.001125628$  ( $\hat{=} \phi = -0.064^\circ$ ), in dem die innere Variable  $\alpha_{ref}$  als Laufvariable gewählt wird.

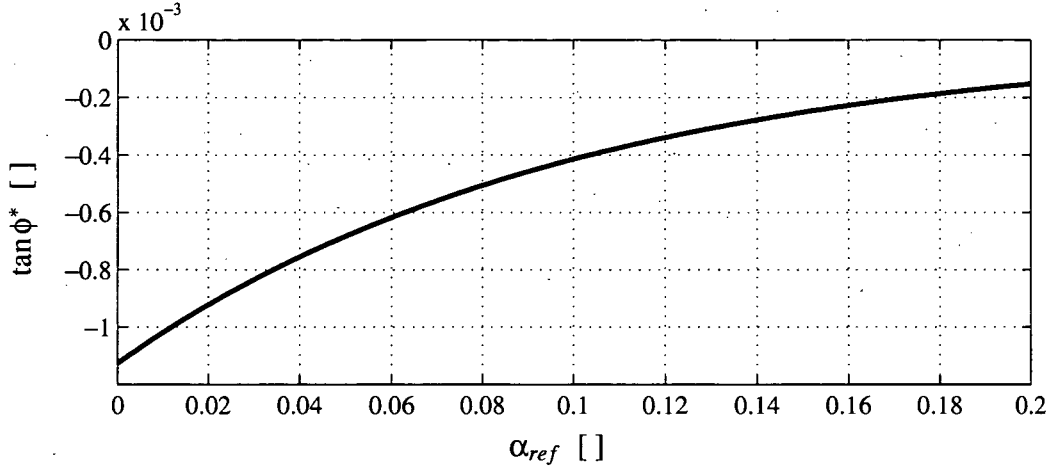


Abbildung 5.39: Verlauf des Evolutionsgesetzes für  $\tan \phi^*$

#### 5.5.4.6 Maximale Schubfließspannung in der $\overline{LRT}$ -Ebene

Der ideelle Reibungswinkel  $\phi$  wird durch

$$\phi(\alpha_{shr}) = \phi_\infty + (\phi_0 - \phi_\infty) e^{-k_{shr} \alpha_{shr}} \quad (5.85)$$

beschrieben, wobei  $\phi_0$  den initialen ideellen Reibungswinkel und  $\phi_\infty$  den Restreibungswinkel bezeichnen. Analog zu den anderen Evolutionsgesetzen wird ein Materialparameter  $k_{shr}$  und eine primäre Variable  $\alpha_{shr}$  eingeführt. Die innere Variable  $\alpha_{shr}$  dient ausschließlich der Beschreibung der betrachteten Schubfließspannung. In Analogie zur Definition des Entfestigungsparameters  $\alpha_{t_{RT}}$  in Gleichung (5.71) kann ein Entfestigungsparameter für Schubbeanspruchung unter Berücksichtigung von (5.40) zu

$$\dot{\alpha}_{shr} = \sqrt{4 \operatorname{tr} \mathbf{M}_{\overline{RT}} \dot{\epsilon}^p \mathbf{M}_L \dot{\epsilon}^p} = \dot{\gamma} \sqrt{4 \operatorname{tr} \mathbf{M}_{\overline{RT}} \mathbf{r} \mathbf{M}_L \mathbf{r}} \quad (5.86)$$

definiert werden.

Die aktuelle maximale Schubfließspannung wird auf der Basis des ideellen Reibungswinkels  $\phi$  beschrieben. Durch Auflösen der Gleichung (5.68) nach  $\tau_{\overline{LRT}}$  erhält man

$$\max \tau_{y_{\overline{LRT}}} = \frac{\max f_{y_{\overline{RT}}} - \min f_{y_{\overline{RT}}}}{2} \tan \phi. \quad (5.87)$$

Einsetzen von (5.70) für  $\max f_{yt_{RT}}$ , (5.72) für  $\min f_{yc_{RT}}$  und (5.85) für  $\phi$  führt auf das Evolutionsgesetz für die Schubfließspannung zu

$$\max \tau_{y_{LRT}} = \frac{1}{2} \left( \max f_{yt_{RT}}^0 \cdot e^{-k_{t_{RT}} \alpha_{t_{RT}}} + Y_{0_{RT}} - Y_{1_{RT}} \cdot (1 - e^{-k_{c_{RT}} \alpha_{c_{RT}}}) \right) \cdot \tan(\phi_{\infty} + (\phi_0 - \phi_{\infty}) e^{-k_{shr} \alpha_{shr}}). \quad (5.88)$$

Diese geometrische Interpretation von (5.88) ist in Abbildung 5.40 dargestellt.

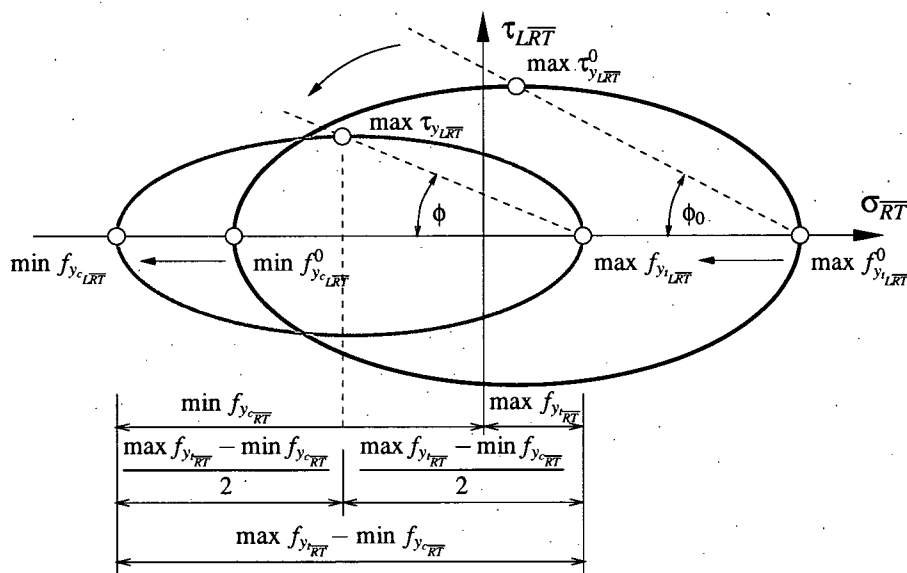


Abbildung 5.40: Zusammenhang zwischen  $\phi$  und der Schubfließspannung  $\max \tau_{y_{LRT}}$

Abbildung 5.41 veranschaulicht die Entwicklung von  $\max \tau_{y_{LRT}}$  für  $\max \tau_{y_{LRT}}^0 = 7.69 \text{ N/mm}^2$ ,  $k_{shr} = 8.0$  und  $\phi_{\infty} = 25^\circ$ , in dem die innere Variable  $\alpha_{shr}$  als Laufvariable gewählt wird.

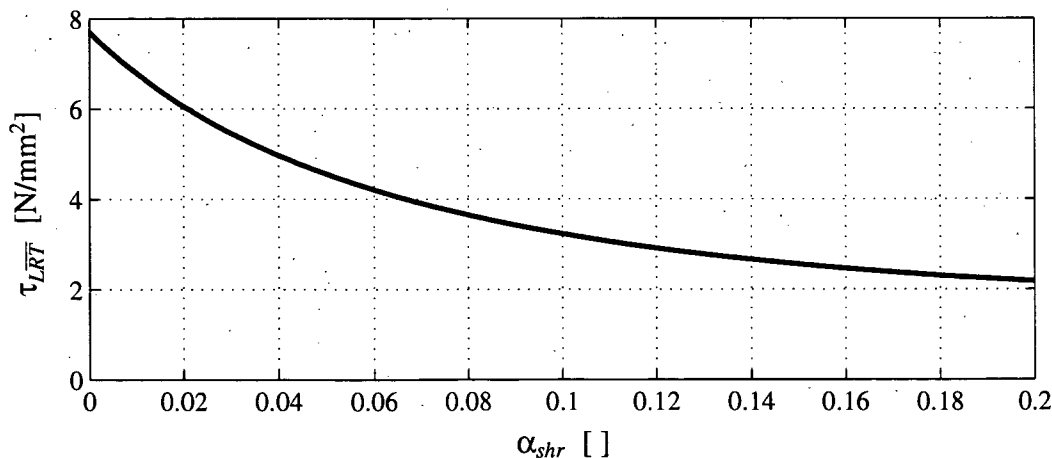


Abbildung 5.41: Verlauf des Evolutionsgesetzes für  $\max \tau_{y_{LRT}}$



### 5.5.5 Zusammenfassung der Evolutionsgesetze

Die verschiedenen Evolutionsgesetze, vorerst gültig für fehlerfreies Fichtenholz in der  $L\overline{RT}$ -Ebene für  $\max f_{y_{t\overline{RT}}}$  (5.70),  $\min f_{y_{c\overline{RT}}}$  (5.72),  $\max f_{y_{tL}}$  (5.79),  $\min f_{y_{cL}}$  (5.81),  $\tan \phi^*$  (5.83) und  $\max \tau_{L\overline{RT}}$  (5.87) bzw. (5.88) werden im Vektor

$$\mathbf{R}^* = \begin{pmatrix} \max f_{y_{t\overline{RT}}} \\ f_{y_{c\overline{RT}}} \\ \max f_{y_{tL}} \\ \min f_{y_{cL}} \\ \tan \phi^* \\ \max \tau_{L\overline{RT}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max f_{y_{t\overline{RT}}}^0 \cdot e^{-k_{t\overline{RT}} \alpha_{t\overline{RT}}} \\ \min f_{y_{c\overline{RT}}}^0 - Y_{1\overline{RT}} \cdot (1 - e^{-k_{c\overline{RT}} \alpha_{c\overline{RT}}}) \\ \max f_{y_{tL}}^0 \cdot e^{-k_{tL} \alpha_{tL}} \\ \min f_{y_{cL}}^0 + Y_{1L} \cdot (1 - e^{-k_{cL} \alpha_{cL}}) \\ (\tan \phi^{*,0}) \cdot e^{-k_{t\overline{RT}} \alpha_{ref}} \\ \frac{\max f_{y_{t\overline{RT}}} - \min f_{y_{c\overline{RT}}}}{2} \tan(\phi_\infty + (\phi_0 - \phi_\infty) e^{-k_{shr} \alpha_{shr}}) \end{pmatrix} \quad (5.89)$$

zusammengefasst.

In Unterabschnitt 4.2.2 wurde die Entfestigungsregel (4.17) folgendermaßen definiert:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{s} \dot{\gamma}. \quad (4.17)$$

Der vom aktuellen Spannungszustand abhängige Vektor  $\mathbf{s}$  wird durch die Zusammenfassung der verschiedenen Evolutionsgesetze für die Ver- bzw. Entfestigungsvariablen  $\dot{\alpha}_{t\overline{RT}}$  (5.71),  $\dot{\alpha}_{c\overline{RT}}$  (5.78),  $\dot{\alpha}_{tL}$  (5.80),  $\dot{\alpha}_{cL}$  (5.82),  $\dot{\alpha}_{ref}$  (5.84) und  $\dot{\alpha}_{shr}$  (5.86) zu

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{M}_{\overline{RT}} : \mathbf{r} \rangle \\ \langle -\mathbf{M}_{\overline{RT}} : \mathbf{r} \rangle \\ \langle \mathbf{M}_L : \mathbf{r} \rangle \\ \langle -\mathbf{M}_L : \mathbf{r} \rangle \\ \langle \mathbf{M}_{\overline{RT}} : \mathbf{r} \rangle \\ \sqrt{4 \operatorname{tr} \mathbf{M}_{\overline{RT}} \mathbf{r} \mathbf{M}_L \mathbf{r}} \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} \langle r_2 \rangle \\ \langle -r_2 \rangle \\ \langle r_1 \rangle \\ \langle -r_1 \rangle \\ \langle r_2 \rangle \\ 2 |r_3| \end{pmatrix} \quad (5.90)$$

erhalten. Der Tensor  $\mathbf{r}$  ist in Gleichung (5.40) definiert, seine Koordinaten  $r_i$  mit  $i = 1, 2, 3$  sind in Gleichung (5.42) festgelegt.

### 5.5.6 Aktualisierung der Parameterwerte $\mathbf{p}$ der Fließfläche für einen allgemeinen Spannungszustand

Alle Komponenten von  $\boldsymbol{\alpha}$  werden initial zu null angenommen. Das entspricht einem Material ohne plastischen Deformationen. Durch das Erreichen des plastischen Bereiches wachsen die Komponenten von  $\boldsymbol{\alpha}$  definitionsgemäß an. Dadurch verändern sich die charakteristischen

Fließspannungen gemäß den im Vektor  $\mathbf{R}^*$  in Gleichung (5.89) angegebenen Beziehungen und damit auch die Parameter  $\mathbf{p}$  der Fließfläche, wobei  $\mathbf{p}$  zu

$$\mathbf{p} = [a_{LL} \ a_{\overline{RTRT}} \ b_{LLLL} \ b_{\overline{RTRTRTRT}} \ b_{\overline{LLRTRT}} \ b_{\overline{LRTLRT}}]^T \quad (5.91)$$

definiert ist. Zur Bestimmung der sechs Parameter in  $\mathbf{p}$  sind sechs Gleichungen erforderlich. Dazu verwendet man die Verknüpfungsgleichungen zwischen den Extremwerten der Fließfunktion aus Unterabschnitt 5.5.3 und den Evolutionsgesetzen nach Unterabschnitt 5.5.4. Man erhält ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem in den sechs gesuchten Unbekannten. Die verwendeten Verknüpfungen sind:

1. Maximale Zugfließspannung in  $\overline{RT}$ -Richtung mittels Gleichungen (5.61) und (5.70),
2. Minimale Druckfließspannung in  $\overline{RT}$ -Richtung mittels Gleichungen (5.61) und (5.72),
3. Maximale Zugfließspannung in  $L$ -Richtung mittels Gleichungen (5.65) und (5.79),
4. Minimale Druckfließspannung in Längsrichtung mittels Gleichungen (5.65) und (5.81),
5. Neigung der ersten Referenzachse der Ellipse mittels Gleichungen (5.53) und (5.83),
6. Maximale Schubspannung mittels Gleichungen (5.67) und (5.88).

Die zwölf, in den beiden Klammern erwähnten Gleichungen werden nun im Residuumsvektor  $\mathbf{R}_f$  in der Form

$$\mathbf{R}_f = \mathbf{R}_p - \mathbf{R}^* = 0 \quad (5.92)$$

angeschrieben:

$$\mathbf{R}_f = \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2Z} (-a_{\overline{RTRT}} b_{LLLL} + a_{LL} b_{\overline{LLRTRT}} + X \sqrt{b_{LLLL}}) \\ \frac{1}{2Z} (-a_{\overline{RTRT}} b_{LLLL} + a_{LL} b_{\overline{LLRTRT}} - X \sqrt{b_{LLLL}}) \\ \frac{1}{2Z} (a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLRTRT}} - a_{LL} b_{\overline{RTRTRTRT}} + X \sqrt{b_{\overline{RTRTRTRT}}}) \\ \frac{1}{2Z} (a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLRTRT}} - a_{LL} b_{\overline{RTRTRTRT}} - X \sqrt{b_{\overline{RTRTRTRT}}}) \\ \frac{b_{\overline{LLRTRT}}}{b_{\overline{RTRTRTRT}}} \\ \frac{X}{4 \sqrt{b_{\overline{LRTLRT}}} Z} \end{array} \right\}}_{= \mathbf{R}_p} - \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} R_1^* \\ R_2^* \\ R_3^* \\ R_4^* \\ R_5^* \\ R_6^* \end{array} \right\}}_{= \mathbf{R}^*} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}}_{= \mathbf{0}} \quad (5.93)$$

Die Größen  $R_i^*$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$  sind die Komponenten des Vektors  $\mathbf{R}^*$  nach Gleichung (5.89). Für die Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems wird das NEWTON-RAPHSON-Iterationsverfahren verwendet. Für dieses Verfahren ist es notwendig, das Gleichungssystem in

eine TAYLOR-Reihe zu entwickeln. Durch Vernachlässigung von Termen höherer als erster Ordnung erhält man eine lineare Näherung des Gleichungssystems zu

$$\mathbf{R}_f(\mathbf{p}) \approx \mathbf{R}_f(\mathbf{p}^{(k)}) + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{R}_p}{\partial \mathbf{p}^{(k)}}}_{=: \mathbf{K}} \Big|_{\mathbf{p}^{(k)}} \cdot \Delta \mathbf{p} = \mathbf{R}_f(\mathbf{p}^{(k)}) + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{p}^{(k+1)} - \mathbf{p}^{(k)}) = \mathbf{0}, \quad (5.94)$$

wobei  $(k)$  einen bekannten Zustand nach dem  $k$ -ten Iterationsschritt und  $(k+1)$  den zu ermittelnden, neuen Näherungszustand bezeichnet. Durch Umformen von Gleichung (5.94) erhält man die verbesserte Lösung zu

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} - \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{R}_f^{(k)}. \quad (5.95)$$

Eine genaue Beschreibung dieses Verfahrens ist in [28] zu finden. Nach der Berechnung von Gleichung (5.95) wird  $k = k + 1$  gesetzt und diese Prozedur so lange wiederholt, bis die Konvergenzbedingung  $\|\mathbf{R}_f\| = \sqrt{\mathbf{R}_f \cdot \mathbf{R}_f} \leq TOL$  erfüllt ist.  $TOL$  ist eine vom Anwender zu definierende Toleranz und wird für alle im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen mit  $TOL = 10^{-12}$  angenommen. Das NEWTON-RAPHSON-Verfahren garantiert eine quadratische asymptotische Konvergenz.

$\mathbf{K}$  ist die Matrix der Ableitungen der sechs im Vektor  $\mathbf{R}_p$  (5.93) zusammengefassten Gleichungen nach den sechs im Vektor  $\mathbf{p}$  (5.91) zusammengefassten Parametern des Ellipsoids.  $\mathbf{K}$  stellt somit eine  $6 \times 6$ -Matrix dar.

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{R}_p}{\partial \mathbf{p}^{(k)}} = \begin{bmatrix} \frac{dR_{p,1}}{da_{LL}} & \frac{dR_{p,1}}{da_{\overline{RTRT}}} & \frac{dR_{p,1}}{db_{LLLL}} & \frac{dR_{p,1}}{db_{\overline{RTRTRTRT}}} & \frac{dR_{p,1}}{db_{LL\overline{RTRT}}} & \frac{dR_{p,1}}{db_{\overline{LRTLRT}}} \\ \frac{dR_{p,2}}{da_{LL}} & \frac{dR_{p,2}}{da_{\overline{RTRT}}} & \frac{dR_{p,2}}{db_{LLLL}} & \frac{dR_{p,2}}{db_{\overline{RTRTRTRT}}} & \frac{dR_{p,2}}{db_{LL\overline{RT}}} & \frac{dR_{p,2}}{db_{\overline{LRTLRT}}} \\ \frac{dR_{p,3}}{da_{LL}} & \frac{dR_{p,3}}{da_{\overline{RTRT}}} & \frac{dR_{p,3}}{db_{LLLL}} & \frac{dR_{p,3}}{db_{\overline{RTRTRTRT}}} & \frac{dR_{p,3}}{db_{LL\overline{RT}}} & \frac{dR_{p,3}}{db_{\overline{LRTLRT}}} \\ \frac{dR_{p,4}}{da_{LL}} & \frac{dR_{p,4}}{da_{\overline{RTRT}}} & \frac{dR_{p,4}}{db_{LLLL}} & \frac{dR_{p,4}}{db_{\overline{RTRTRTRT}}} & \frac{dR_{p,4}}{db_{LL\overline{RTRT}}} & \frac{dR_{p,4}}{db_{\overline{LRTLRT}}} \\ \frac{dR_{p,5}}{da_{LL}} & \frac{dR_{p,5}}{da_{\overline{RTRT}}} & \frac{dR_{p,5}}{db_{LLLL}} & \frac{dR_{p,5}}{db_{\overline{RTRTRTRT}}} & \frac{dR_{p,5}}{db_{LL\overline{RT}}} & \frac{dR_{p,5}}{db_{\overline{LRTLRT}}} \\ \frac{dR_{p,6}}{da_{LL}} & \frac{dR_{p,6}}{da_{\overline{RTRT}}} & \frac{dR_{p,6}}{db_{LLLL}} & \frac{dR_{p,6}}{db_{\overline{RTRTRTRT}}} & \frac{dR_{p,6}}{db_{LL\overline{RT}}} & \frac{dR_{p,6}}{db_{\overline{LRTLRT}}} \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

Die einzelnen Koeffizientenfunktionen von Gleichung (5.96) sind im Anhang C aufgelistet.

# Kapitel 6

---

## Berücksichtigung von Holzmerkmalen in der Werkstoffmodellierung

### 6.1 Ausgewählte Holzmerkmale

Unter Holzmerkmalen (Holzfehler) versteht man u. a. Äste, lokale Faserabweichungen um die Äste, Schrägfasrigkeit von Brettern, Druckholz, Drehwuchs, Harzgazellen und Risse. Ein wesentliches Holzmerkmal mit einem großen Einfluss auf die mechanischen Eigenschaften von Holz sind **Äste**. Untrennbar damit verbunden ist die **Faserabweichung um die Äste**, welches in der Literatur als eigenes Merkmal angeführt ist. Die Berücksichtigung dieser beiden Holzfehler im Materialmodell ist Gegenstand dieses Kapitels.

Durch die Verwendung eines orthotropen Modellgesetzes, wie es im Kapitel 5 ausführlich dargestellt ist, kann die globale **Schrägfasrigkeit** von Brettern (wird auch als **Faserneigung** bezeichnet) eines Holzbrettes ebenfalls berücksichtigt werden. Unter globaler Schrägfasrigkeit versteht man die Abweichung der Faserlängsrichtung des Holzes von der Achsrichtung eines Brettes oder Kantholzes. In Finite-Elemente-Berechnungen muss zur Berücksichtigung der Schrägfasrigkeit der Winkel zwischen der Längsachse des Bauteiles und der Faserlängsrichtung bekannt sein.

Weitere Holzmerkmale, welche ebenfalls einen Einfluss auf die mechanischen Eigenschaften haben, wie z. B. Druckholz oder Risse bleiben im Rahmen dieser Arbeit unberücksichtigt. Einerseits wird durch die Sortierung stark rissiges Holz aussortiert, andererseits ist der Einfluss von Druckholz auf die mechanischen Eigenschaften deutlich geringer als jener der Äste. (*„Es haben nicht alle möglichen Holzfehler einen Einfluss auf das mechanische Verhalten bzw. treten manche Fehler infolge der Sortierung nicht auf.“* aus GLOS [29])

## 6.2 Überblick über das Normungswesen im Holzbau

Der Übergang von fehlfreiem Holz auf Bauholz stellt einen wesentlichen Schritt in Richtung der Anwendbarkeit des Werkstoffmodells in der Praxis dar. Daher wird in diesem Unterkapitel ein Überblick über die im Holzbau angewendeten Normen mit besonderer Berücksichtigung der Sortiervorschriften gegeben.

### 6.2.1 Auflistung diverser Normen

Dieses Kapitel gibt eine Übersicht über die im deutschen Sprachraum gültigen Konstruktionsnormen und damit verbundenen Normen, wobei bei den Sortiernormen auch eine skandinavische Norm beigezogen wurde. Für die Erstellung dieses Überblicks gilt das Jahr 2002. Zu diesem Zeitpunkt waren mehrere Normen für ein und dasselbe Fachteilgebiet gleichzeitig gültig. Zusätzlich zu den Bemessungsnormen benötigt man einige weitere Normen, um alle, für die Berechnung eines Holzbauwerkes erforderlichen (Material-)Kennwerte zu erhalten. Diese Tatsache hat im Holzbau-Normungswesen in Europa dazu geführt, eine Vereinheitlichung zu erreichen. Dafür zuständig ist das technische Komitee CEN/TC 124.

Die nachfolgende Tabelle enthält einen Auszug über die im deutschen Sprachraum gültigen Holzbaunormen. Alle in dieser Arbeit angeführten Normen sind im Literaturverzeichnis mit der genauen Bezeichnung und Ausgabedatum angeführt.

**Tabelle 6.1:** Überblick über die Holzbaunormen im deutschen Sprachraum

Bemessungsnorm	Sicherheitskonzept	charakterist. Werte	Holzsortierung	
			visuell	maschinell
<b>EUROCODE 5</b> <b>ÖN ENV 1995-1-1</b> Februar 1995	semiprobabilist.	EN 338 *	EN 518 **,+	EN 519 +
<b>ÖNORM</b> <b>B4100-2</b> Dezember 1997	deterministisch	—	DIN 4074-1	DIN 4074-3 DIN 4074-4
<b>DIN 1052</b> August 2004	semiprobabilist.	EN 338 *	EN 518 **,+	DIN 4074-3 DIN 4074-4
<b>SIA 164</b> ++ 1992	deterministisch	—	SIA 164	nicht vorgesehen

\* Erläuterung siehe nachfolgender Text

\*\* verweist auf DIN 4074-1

+ abgelöst durch prEN 14081

++ abgelöst durch SIA 265

*Anmerkungen zur EN 338:* Im Jahr 2002 gab es für diese Norm neben der gültigen Version einen Entwurf zur Änderung. Die gültige Version (Ausgabe Februar 1995 als EN 338:1995 bzw. ÖNORM EN 338 Mai 1995) verweist für die visuelle Holzsortierung auf die EN 518 und für die maschinelle Sortierung auf die EN 519. Im Entwurf (Ausgabe Oktober 2000 als prEN 338:2000 bzw. ÖNORM EN 338 Februar 2001 (Entwurf)) sind die Anforderungen für visuell sortiertes Bauholz im EN.TC 124-1.1 Teil 1 festgelegt, maschinell sortiertes Bauholz muss den in EN.TC 124-1.1 Teil 2 und 3 festgelegten Anforderungen entsprechen. Weiters ist im Entwurf ein Verweis auf die EN 1912 angeführt. Diese Norm beinhaltet die Zuordnung von nationalen visuellen Sortierklassen und Holzarten in Festigkeitsklassen entsprechend EN 338. Die DIN 1052 beinhaltet ebenfalls den Verweis auf die EN 1912.

### 6.2.2 Ermittlung der Steifigkeits- und Festigkeitswerte

Die nachfolgende Tabelle enthält einen Überblick über die Einteilung von Nadelschnittholz in Festigkeitsklassen (bzw. Sortierklassen gem. ÖNORM B4100-2):

**Tabelle 6.2:** Einteilung von Nadelschnittholz in Festigkeitsklassen

Norm	Anzahl der Festigkeitsklassen
EN 338:1995	9
prEN 338:2000	12
ÖNORM B4100-2	visuell sortiert: 3 maschinell sortiert: 4
SIA 164	3

### 6.2.3 Sortiervorschriften mit besonderer Berücksichtigung der Astigkeit

Im Hinblick auf die Ermittlung des Einflusses von Ästen auf die mechanischen Eigenschaften wurde an fünf unterschiedlichen Schnittholzstücken die visuelle Sortierklasse anhand folgender Normen bestimmt:

- DIN 4074-1
- SIA 164 (schweizer Norm)
- NS-INSTA 142 (skandinavische Sortiernorm)

Die Sortierparameter sind für alle drei angeführten Normen sehr ähnlich. Maßgebend für die Zuordnung zu einer Festigkeitsklasse ist die größte Astansammlung in einem kurzen

Bereich eines Holzstückes (z.B. 150 mm lang). In diesem Feld werden die auftretenden Astdurchmesser in ein Verhältnis zur Breite des Holzstückes gesetzt, woraus ein dimensionsloser Parameter bestimmt wird. Mit diesem Zahlenwert wird die Festigkeitsklasse bestimmt.

Der einzige nennenswerte Unterschied zwischen den drei gewählten Normen besteht darin, dass die NS-INSTA 142 im Vergleich zur DIN 4074-1 und SIA 164 Äste in Kantennähe und im Kantenbereich des Schnittholzes strenger erfasst und bewertet.

#### 6.2.4 Zukünftige Normung der Holzsortierung

Die Holzindustrie hat die Bestrebung, die Einordnung von Bauholz in Festigkeitsklassen beizubehalten und sich dabei im Wesentlichen an der EN 338 zu orientieren.

Im Bereich der Holzsortierung werden voraussichtlich zukünftig die übergeordnet, europaweit gültigen Normen lediglich in Worten gefasste Richtlinien angeben, wie die Sortierung durchgeführt werden soll. Die exakte Umsetzung bleibt den einzelnen Staaten selbst überlassen. Das Ziel sollte sein, länderübergreifende, vergleichbare Festigkeitsklassen zu erhalten.

#### 6.2.5 Weitere Möglichkeiten zur Bestimmung der Astigkeit

Ein Standardwerk der Holztechnologie [3] sowie der Holzbau-Atlas [43] verweisen auf die DIN 52181 und DIN 4074.

In [45] ist im Unterkapitel 12.2.2 ein Konzept der Nettoquerschnitte zur Biegebemessung von Kanthölzern enthalten. Der Holzquerschnitt wird um den Astquerschnitt verringert und in dieser Form für die Bemessung verwendet.

Die US-Normen schreiben die Ermittlung von Kenngrößen fehlerfreier Kleinproben vor, worauf die Bestimmung der Bemessungswerte basiert.

### 6.3 Erläuterung des Konzeptes für die Einarbeitung der wesentlichen Holzmerkmale in das Materialmodell

Da aufgrund der fortschreitenden Entwicklung im Bereich der Holzsortierung der Anteil von stark astigem Holz in den Holzbauteilen laufend verringert wird und Äste nur mehr in einem kleinen, lokal abgegrenzten Bereich auftreten, bleibt deren Einfluss auf die *Steifigkeitseigenschaften* (elastische Materialparameter) im Weiteren unberücksichtigt. Daher haben Äste und die damit verbundenen lokalen Faserabweichungen um die Äste im Rahmen dieser Arbeit nur einen Einfluss auf die *Festigkeitseigenschaften*. Dies wird durch Definition eines Astparameters (siehe Unterkap. 6.4) erreicht, womit eine neue initiale Fließfläche bestimmt wird (siehe Unterkap. 6.6). Es wird weiters die Annahme getroffen, dass die mathematische Form der Fließfläche (Gl. (5.33)) unverändert bleibt.

Da die Auswahl und Fertigung von Probekörpern mit ausgewählten Ästen wesentlich komplizierter ist, als jene mit fehlerfreiem Fichtenholz, wurde ein möglichst einfaches Versuchskonzept entwickelt. Dieses sieht vor, dass quasi-uniaxiale Experimente mit vier Beanspruchungssituationen entsprechend den vier Achsenabschnitten der Fließfläche in der  $LRT$ -Ebene (Zug- bzw. Druckbeanspruchung in  $L$ - bzw.  $RT$ -Richtung) durchgeführt werden. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen werden im Unterkapitel 6.5 dokumentiert.

## 6.4 Definition eines Astparameters

Die Definition eines Astparameters erfolgte im Zuge der Versuchsdurchführung und -auswertung der Experimente mit ausgewählten Ästen (siehe Unterkap. 3.4.2). Dabei wurden die in den Holzbaunormen angeführten Sortierrichtlinien (siehe Unterkap. 6.2.3) miteinbezogen. Eine weitere Voraussetzung für die Festlegung des Astparameters war die Erfordernis, diesen mit derzeit in der Industrie in Verwendung befindlichen Holzsortierungsanlagen bestimmen zu können, ohne den Fertigungsprozess dadurch wesentlich zu beeinflussen. Nach der Untersuchung verschiedener Varianten wird der Astparameter  $ksa$  ("Knot-Sum-Area-Ratio" - Astsummenquerschnittsfläche) in der vorliegenden Arbeit wie folgt definiert:

$$ksa = \frac{\sum_{i=1}^m k_i + s \cdot \sum_{j=1}^n ek_j}{2b} \quad (6.1)$$

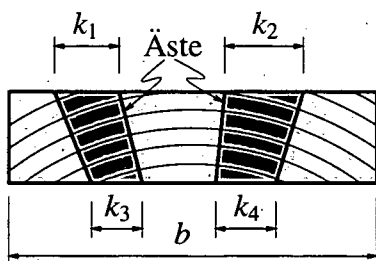


Abbildung 6.1: Brettquerschnitt ohne Kantenäste

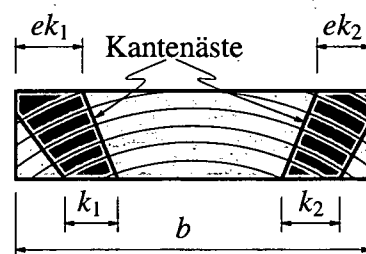


Abbildung 6.2: Brettquerschnitt mit Kantenästen

In Gleichung (6.1) bezeichnet  $k_i$  eine Einzelastbreite („knot“),  $ek_j$  die Breite eines angeschnittenen Astes (Kantenast, „ede knot“),  $s$  einen Erhöhungsfaktor für Kantenäste und  $b$  die Brettbreite. Die Ermittlung von  $ksa$  erfolgt in einem Brett bzw. in einer Lamelle im Bereich von Astansammlungen in Anlehnung an das Prinzip von ST. VENANT (siehe Abb.6.3) etwa in der Abmessung  $b$ . Dieses Prinzip besagt, dass bei Aufbringung einer Gleichgewichtsgruppe in einem Punkt  $P$  die Spannungen in der Entfernung  $b$  von  $P$  annähernd gleich null sind (siehe Abb. 6.3). Bezogen auf die Brettlängsrichtung sind i. d. R. mehrere  $ksa$ -Werte entsprechend der Anzahl von Astansammlungen zu bestimmen. Ein Beispiel für die Ermittlung von  $ksa$  ist der Abbildung 6.4 zu entnehmen.



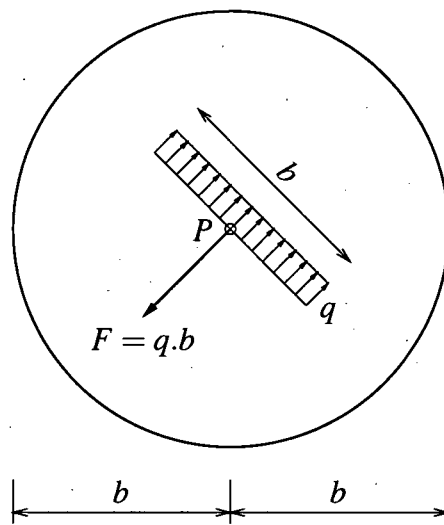
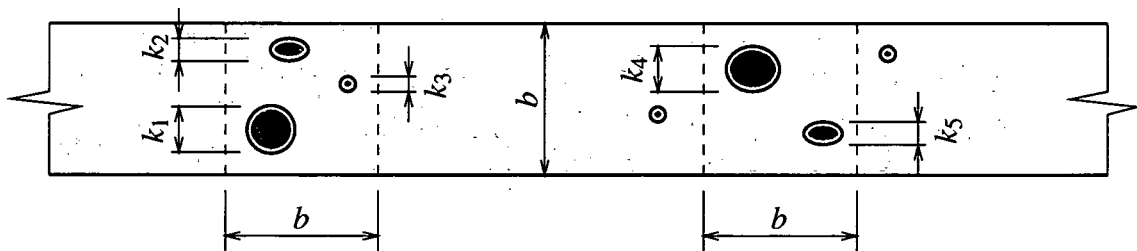


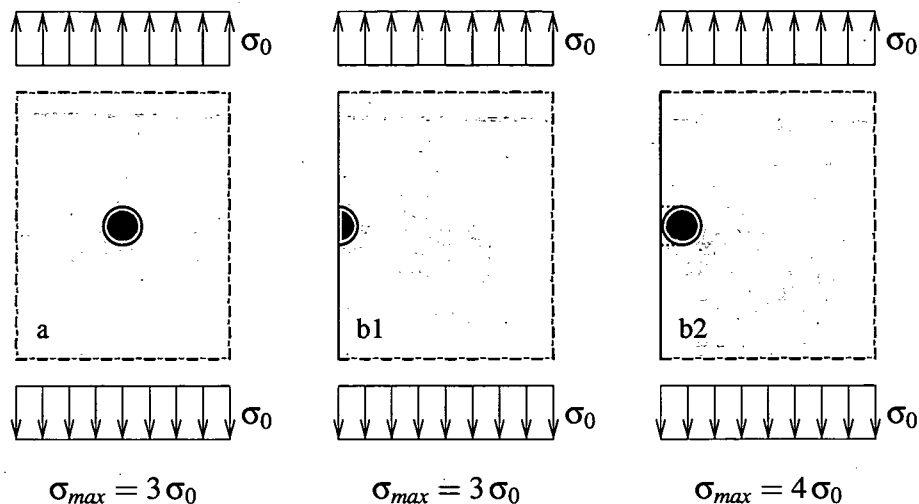
Abbildung 6.3: Prinzip von ST. VENANT

Abbildung 6.4: Abschnitt einer Lamelle – Beispiel für die Ermittlung von  $ksa$  für eine Brettoberfläche

$$ksa_1 = (k_1 + k_2 + k_3)/b$$

$$ksa_2 = (k_4 + k_5)/b$$

Der Erhöhungsfaktor  $s$  in Gl. (6.1) berücksichtigt, dass angeschnittene Äste die Festigkeit von Fichtenholz stärker reduzieren, als Äste, welche sich nur im inneren Bereich eines Bretts erstrecken. Dies wird in ähnlicher Weise in der skandinavischen Sortiernorm NS-INSTA 142 [42] berücksichtigt und wird in dieser Arbeit im Unterkapitel 6.5.1 dokumentiert. Dieses Phänomen lässt sich durch einen Vergleich mit zwei mechanischen Modellen sehr anschaulich erklären: Für Bretter mit nicht angeschnittenen Ästen verwendet man das Modell „Scheibe mit Loch“ unter uniaxialer Zugbeanspruchung, für Bretter mit angeschnittenen Ästen eignet sich das Modell „Kerbe“, ebenfalls unter uniaxialer Zugbeanspruchung. Die nachfolgende Abbildung 6.5 zeigt eine unendlich ausgedehnte Scheibe mit kreisförmigen Loch sowie zwei verschiedene Geometrien einer Außenkerbe.



**Abbildung 6.5:** Vergleich der maximalen Spannungen zwischen a) unendlich ausgedehnte Scheibe mit Loch und b1) bzw. b2) Außenkerbe

Vergleicht man bei diesen Modellen die maximal auftretende Spannung in Beanspruchungsrichtung, liegt diese bei dem Modell „Kerbe“ (siehe Fall b1 und b2 in Abb. 6.5) um bis zu 33% höher als bei dem Modell „Scheibe mit Loch“. In der Praxis können für angeschnittene Äste alle Fälle der Astgeometrien von b1 bis b2 auftreten. Die Zugfestigkeit eines Bretts mit einem angeschnittenen Ast ist somit i. d. R. geringer als jene, wo keine Äste angeschnitten werden. Aus praktischer Sicht kann dieses Phänomen dadurch bestätigt werden, dass bei angeschnittenen Ästen der Umlenkungsbereich entsprechend der lokalen Faserabweichungen um die Äste auf einer Seite des Astes fehlt und nicht zur Übertragung von Spannungen herangezogen werden kann.

Die Ermittlung der *ksa*-Werte kann durch Auswertung von Graustufenverteilungen anschließend an den Scanprozess im Zuge der maschinellen Holzsortierung erfolgen, wobei ein beidseitiges Scannen wünschenswert wäre. Für die Bestimmung des maßgebenden *ksa*-Faktors für ein gesamtes Brett (bzw. Lamelle) wird folgende Annahme getroffen:

Da die genaue Lage der Astansammlungen im Holzbauteil mit den derzeitigen Verleimungsprozessen nicht vorhergesagt werden kann, wird als maßgebender *ksa*-Faktor der Mittelwert aus den Astansammlungen je Lamelle herangezogen. Liegt eine Astansammlung direkt bei einer hoch beanspruchten Stelle, so weisen die Nachbarlamellen i. d. R. in diesem Bereich keine Astansammlungen und damit deutlich bessere Materialkennwerte auf, was zu einer gewissen Homogenisierung führt.

Mit dieser Variante der Bestimmung des Astparameters *ksa* werden nur die Lamellenoberflächen erfasst, so dass die Astgeometrien im Lamelleninneren unberücksichtigt bleiben. Durch eine entsprechende Weiterentwicklung des Sortierungsprozesses (Erfassung der Astgeometrien im inneren eines Bretts) könnte eine deutliche Verbesserung für die Bestimmung des *ksa*-Wertes erreicht werden.

## 6.5 Dokumentation der Ergebnisse der Versuche mit ausgewählten Ästen

Entsprechend dem im Unterkapitel 6.3 vorgestellten Konzept wird in diesem Abschnitt nur der Einfluss der Äste und lokalen Faserabweichungen um die Äste auf die Festigkeitseigenschaften beschrieben. Die Punktwolken der Abbildungen 6.12, 6.14, 6.17 und 6.22 zeigen jeweils die maximalen initialen Fließspannungen in Abhängigkeit vom Astparameter  $ksa$ . Für die Brettbreite  $b$  gemäß Gl. (6.1) gilt für die Auswertung aller Versuchsergebnisse die Abmessung des Messfeldes mit  $b = 140$  mm. Für Zugbeanspruchung in  $L$ - und  $\overline{RT}$ -Richtung sowie für Druckbeanspruchung in  $L$ -Richtung stellen die Messwerte zugleich den Maximalspannungszustand dar. Für Druckbeanspruchung in  $\overline{RT}$ -Richtung geben die Messwerte den Beginn des Verfestigungsbereiches an. Alle in blauer Farbe eingezeichneten Punkte sind Versuchsergebnisse ohne Kantenäste (siehe Abb. 6.1), grüne Punkte repräsentieren Versuchsergebnisse mit Kantenästen (= angeschnittene Äste, siehe Abb. 6.2). Der größere blaue Punkt in den vier Abbildungen 6.12, 6.14, 6.17 und 6.22 mit dem Astparameter  $ksa = 0$  entspricht den initialen maximalen Fließspannungen für die Fließfläche für fehlerfreies Holz der  $LRT$ -Ebene. Durch die Verwendung der roten Regressionskurven wird im Unterkapitel 6.6 die Fließfläche in Abhängigkeit von  $ksa$  ermittelt. Die Versuchskonfigurationen sind im Unterkapitel 3.4.2 dokumentiert, eine vollständige Auflistung der Experimente ist im Anhang B.2 enthalten.

Auf eine Unterteilung in eingewachsene Äste und nicht eingewachsene Äste (Durchfalläste) wird auf Grund der geringen Anzahl von Versuchen verzichtet. Außerdem ist es mit den derzeit in Verwendung stehenden maschinellen Holzsortierungsanlagen noch nicht möglich, zwischen diesen beiden Asttypen zu unterscheiden.

### 6.5.1 Zugbeanspruchung in $L$ -Richtung

Für die Ermittlung des Einflusses von Ästen und der lokalen Faserabweichungen um die Äste auf die Zugfestigkeit von Fichtenholz in  $L$ -Richtung stehen insgesamt 16 Versuchsergebnisse zur Verfügung, davon fünf mit Kantenästen.

Abbildung 6.7 zeigt das Bruchbild des Probekörpers  $K1$ . Die während der Zugbeanspruchung aufgetretenen Risse sind in roter Farbe gekennzeichnet, wobei der erste Riss in der Nähe des linken Astes auftrat. Dieser initiale Riss ist durch die im rechten, unteren Astbereich eingezeichnete viertelkreisförmige Linie erkennbar, welche unter dem Ast zugleich die größte Abweichung von der Faserlängsrichtung aufweist, wo weiters ein zweiter Riss seinen Ursprung hat. Der Versagensmechanismus ist extrem spröde und damit praktisch identisch mit jenem von Zugversagen in  $L$ -Richtung von fehlerfreiem Fichtenholz.

Ein Bruchbild eines Probekörpers mit angeschnittenen Ästen (Kantenästen) zeigt Abb. 6.8. Der initiale Riss trat bei diesem Probekörper oberhalb des linken Astes, ausgehend vom Rand auf. Die Rissbildung begann somit wie bei  $K1$  bei einer Stelle, wo die lokale Faserabweichung um den Ast sehr groß ist. Dieses Phänomen der initialen Rissbildung konnte

im Wesentlichen bei allen Experimenten mit ausgewählten Ästen und Zugbeanspruchung in *L*-Richtung festgestellt werden.



Abbildung 6.6: Probekörper *K1* vor Versuchsbeginn

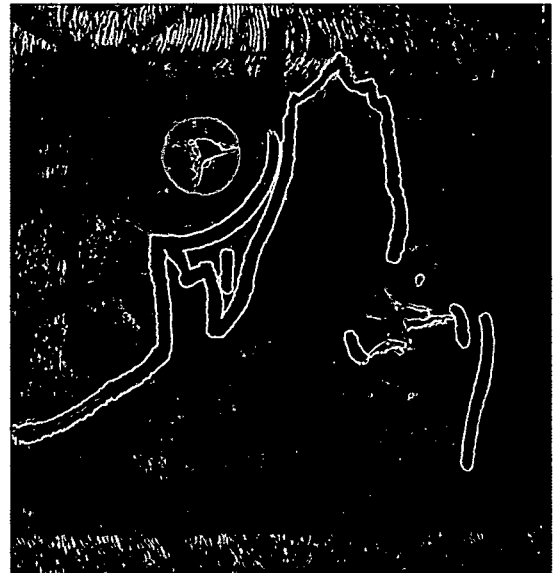
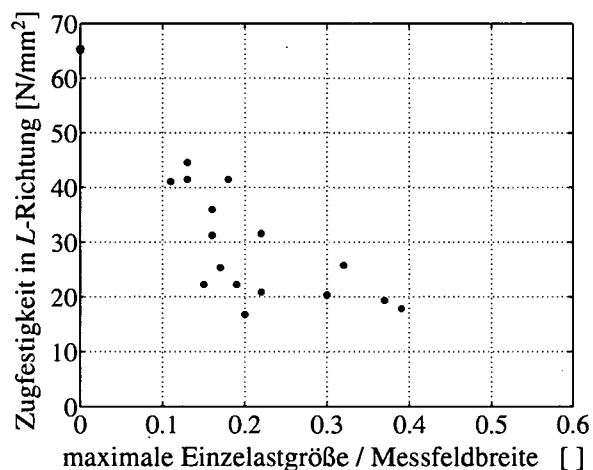


Abbildung 6.7: Bruchbild des Probekörpers *K1*

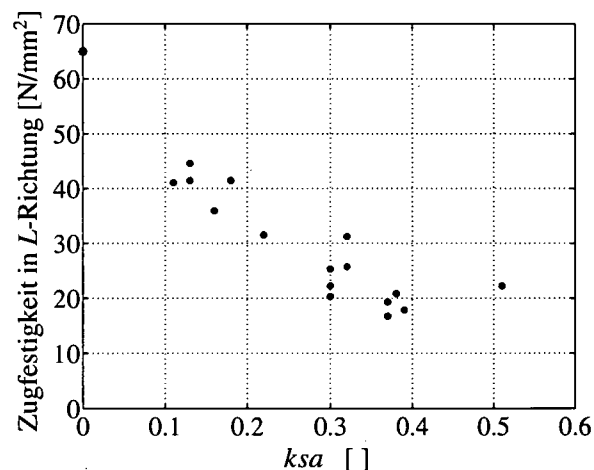


Abbildung 6.8: Bruchbild des Probekörpers *K10*

Die Abbildungen 6.9 und 6.10 sollen die Definition des Astparameters  $ksa$  näher erläutern. In der Abb. 6.10 sind die Versuchsergebnisse entsprechend Gl. (6.1) mit  $s = 1.0$  in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit aufgetragen, Abb. 6.9 zeigt den Zusammenhang zwischen der größten Einzelastabmessung im Messfeld und der Zugfestigkeit in  $L$ -Richtung. Vergleicht man diese beiden Ergebnisdarstellungen, so erkennt man, dass die Streuung der Messergebnisse in Abb. 6.10 geringer ist als in Abb. 6.9. Daher wurde der Astparameter entsprechend Gl. (6.1) festgelegt.



**Abbildung 6.9:** Abhängigkeit der Zugfestigkeit von der größten Einzelastabmessung



**Abbildung 6.10:** Abhängigkeit der Zugfestigkeit vom Astparameter  $ksa$  (Erhöhungsfaktor  $s = 1.0$ )

Für die Ermittlung eines funktionellen Zusammenhanges zwischen dem Astparameter und der Zugfestigkeit wird eine Exponentialfunktion der Form

$$\max f_{ytL}^0(ksa) = \max f_{ytL_{fehlerfrei}}^0 \cdot e^{rc \cdot ksa} \quad (6.2)$$

verwendet. Darin bezeichnet  $\max f_{ytL}^0$  die Zugfestigkeit (= initiale, maximale Fließspannung) in  $L$ -Richtung in Abhängigkeit vom Astparameter  $ksa$ ,  $\max f_{ytL_{fehlerfrei}}^0$  die initiale, maximale Zugfließspannung für fehlerfreies Fichtenholz (siehe Gl. (5.79)) und  $rc$  einen Regressionskoeffizienten. Die nichtlineare Regressionsrechnung wird gemäß Kapitel 56 aus [46] durchgeführt. Für die Ermittlung des Erhöhungsfaktors  $s$  für Kantenäste wird die grüne Kurve in Abb. 6.11 solange verschoben, bis sie mit der blauen Kurve deckungsgleich ist. Daraus erhält man den Wert für den Erhöhungsfaktor zu  $s \approx 1.20$ . Dieser Wert liegt somit im Schwankungsbereich des Modells „Kerbe“ (siehe Abb. 6.5,  $1.00 \leq s \leq 1.33$ ). Abb. 6.12 zeigt die Abhängigkeit der Zugfestigkeit in  $L$ -Richtung (= initiale, maximale Fließspannung) vom Astparameter  $ksa$ . Den Regressionskoeffizienten erhält man zu  $rc = -2.78$ , die initiale maximale Zugfließspannung für fehlerfreies Fichtenholz wird aus Unterabschnitt 5.4.3 übernommen. Setzt man diese beiden Werte in Gl. (6.2) ein, erhält man

$$\max f_{ytL}^0(ksa) [\text{N/mm}^2] = 65.31 \cdot e^{-2.78 \cdot ksa} \quad (6.3)$$

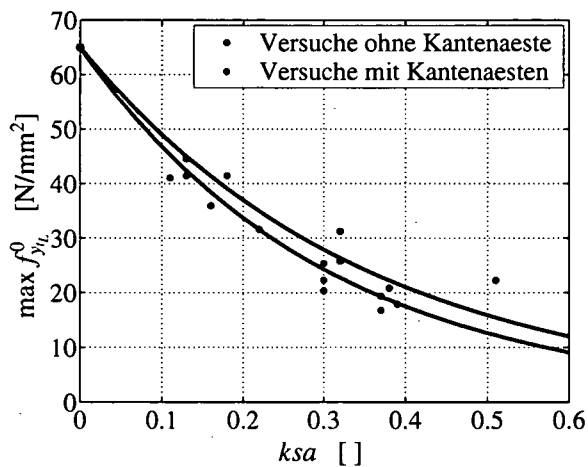


Abbildung 6.11: Regressionskurven für die Versuche mit (grün) und ohne (blau) Kantenaesten

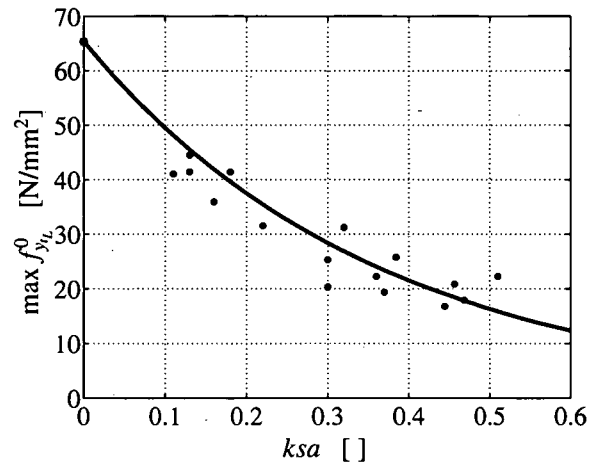


Abbildung 6.12: Abhängigkeit der Zugfestigkeit in  $L$ -Richtung vom Astparameter  $ksa$  (Erh.faktor  $s = 1.20$ )

### 6.5.2 Zugbeanspruchung in $\overline{RT}$ -Richtung

Für diese Beanspruchungskonfiguration konnten insgesamt zwölf Versuche zur Auswertung herangezogen werden, fünf davon mit angeschnittenen Ästen. Abbildung 6.13 zeigt ein typisches Bruchbild. Der Versagensmechanismus ist wie bei Zugbeanspruchung in  $L$ -Richtung extrem spröde und praktisch identisch mit dem Zugversagen von fehlerfreiem Fichtenholz in  $\overline{RT}$ -Richtung.

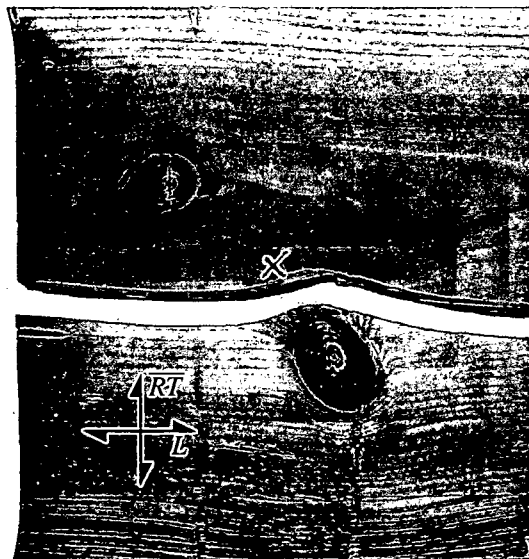
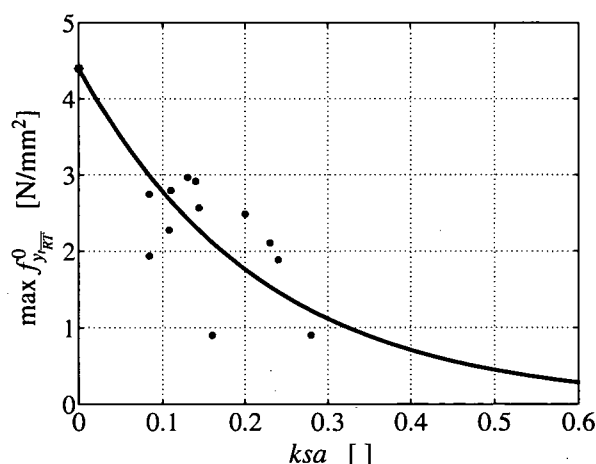


Abbildung 6.13: Bruchbild des Probekörpers  $K52$

Für die Ermittlung eines funktionellen Zusammenhanges zwischen Zugfestigkeit in  $\overline{RT}$ -Richtung und dem Astparameter  $ksa$  wird die gleiche Exponentialfunktion wie bei Zugbeanspruchung in  $L$ -Richtung verwendet. Der Erhöhungsfaktor für Kantenaeste wird mit  $s = 1.20$  ebenfalls übernommen. Eine unabhängige Bestimmung dieses Faktors für diese Beanspru-

chungskonfiguration wird aus nachfolgender Begründung als nicht sinnvoll erachtet. In der Holzindustrie wird der überwiegende Anteil an Holzbauteilen aus Leimbindern hergestellt. Das in dieser Arbeit vorgestellte Materialmodell soll im Wesentlichen zur Traglastberechnung derartiger Bauteile eingesetzt werden. Die Querkzugbeanspruchung bei Holzleimbauteilen erfolgt somit in Dickenrichtung der Bretter. Das Verhalten von Fichtenholz für diesen Beanspruchungsfall wird im Rahmen dieser Arbeit nicht explizit untersucht, da die Leimfugen bei Querkzugbeanspruchung jedenfalls höhere Festigkeitskennwerte als das Grundmaterial Holz aufweisen und daher die Materialeigenschaften der  $\overline{RT}$ -Richtung für das Versagen maßgebend sind. An dieser Stelle sei auch erwähnt, dass die bei Leimbindern vorhandenen Keilzinkenverbindungen i. d. R. höhere Längszugfestigkeiten als das Grundmaterial aufweisen. Durch das Konzept der verschmierten Berücksichtigung der wesentlichen Holzmerkmale ist durch die Wahl eines Astparameters  $ksa > 0$  eine eventuell auftretende Schwachstelle bei einer Keilzinkenverbindung automatisch abgedeckt. (*Hinweis:* Eine Traglastanalyse mit  $ksa = 0$  erscheint als sehr unrealistisch, da fehlerfreies (astfreies) Holz in der Praxis nicht verwendet wird.)

Abbildung 6.14 zeigt die Abhängigkeit der Zugfestigkeit (= maximale initiale Fließspannung) in  $\overline{RT}$ -Richtung vom Astparameter  $ksa$ . Wie aus der Fachliteratur bekannt ist, treten bei Querkzugbeanspruchung deutlich höhere Streuungen auf, als bei Zugbeanspruchung in Faserlängsrichtung. Analog zu Gl. (6.2) stellt Gl. (6.4) den entsprechend funktionellen Zusammenhang dar. Übernimmt man aus Unterabschnitt 5.4.3 die initiale, maximale Zugfließspannung für fehlerfreies Fichtenholz für Zugbeanspruchung in  $\overline{RT}$ -Richtung und führt die Regressionsrechnung analog wie bei Zugbeanspruchung in  $L$ -Richtung durch, erhält man Gl. (6.5).



**Abbildung 6.14:** Abhängigkeit der Zugfestigkeit in  $\overline{RT}$ -Richtung vom Astparameter  $ksa$  (Erhöhungsfaktor  $s = 1.20$ )

$$\max f_{yt_{\overline{RT}}}^0(ksa) = \max f_{yt_{\overline{RT}}_{fehlerfrei}}^0 \cdot e^{rc \cdot ksa} \quad (6.4)$$

$$\max f_{yt_{\overline{RT}}}^0(ksa) [\text{N/mm}^2] = 4.43 \cdot e^{-4.56 \cdot ksa} \quad (6.5)$$

### 6.5.3 Druckbeanspruchung in $L$ -Richtung

Aufgrund der Ausbeulung des Messfeldes während der Belastungsphase konnten für beide Druckbeanspruchungsfälle (Druck in  $L$ - und  $\overline{RT}$ -Richtung) keine uniaxialen Probekörper gemäß Abb. 3.6 verwendet werden. Daher wurden quasi-uniaxiale Druckversuche mit einem kreuzförmigen Probekörper des Typs A2 mit dem Beanspruchungsverhältnis  $\kappa = 0 : -1$  durchgeführt. Mit dieser Versuchskonfiguration wurde durch die starre seitliche Halterung ein Ausbeulen des Messfeldes verhindert. Die bei diesen Experimenten senkrecht zur Beanspruchungsrichtung entstehenden Druckspannungen sind vernachlässigbar.

Für Druckbeanspruchung in  $L$ -Richtung stehen insgesamt zwölf Versuchsergebnisse zur Verfügung. Experimente mit Kantenästen konnte durch die Verwendung des kreuzförmigen Probekörpers nicht durchgeführt werden. Die Abbildung 6.15 zeigt ein typisches Bruchbild für in Faserlängsrichtung druckbeanspruchtes Fichtenholz mit Ästen. In grüner Farbe ist die die Beanspruchungssituation eingezeichnet.

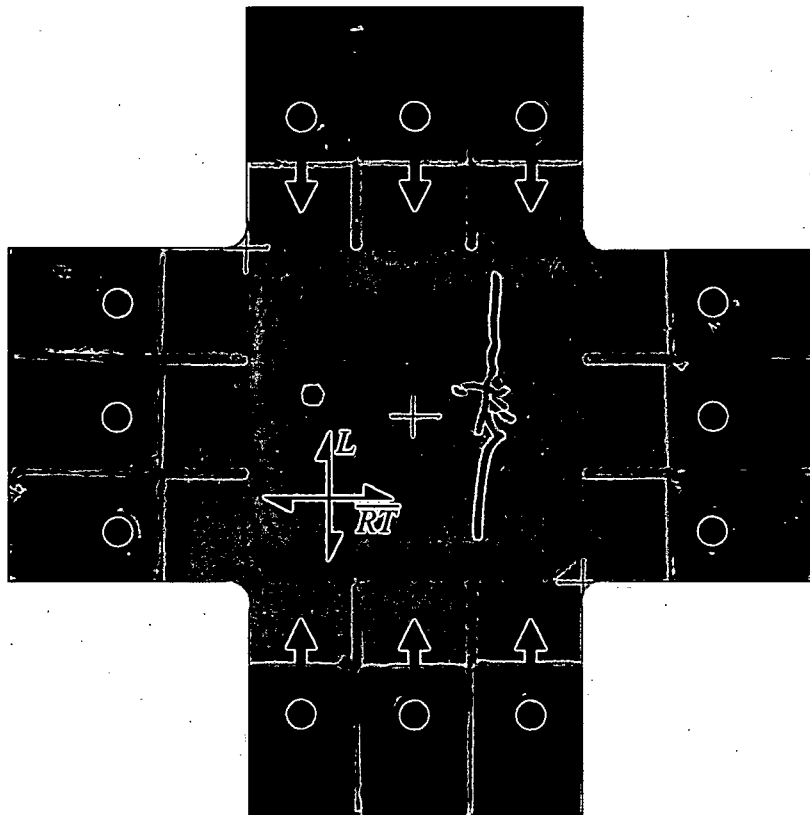


Abbildung 6.15: Bruchbild des Probekörpers K64

Ein wesentliches Kennzeichen dieser Versuchsserie ist die Ausbildung eines Risses in Faserlängsrichtung, ausgehend vom Ast selbst oder vom Nahbereich um einen Ast. Durch diese Rissausbildung kommt es zu einem deutlich spröderen Versagen als bei in Faserlängsrichtung druckbeanspruchtem fehlerfreiem Fichtenholz. Ein Rissbild, aufgenommen während der Versuchsdurchführung zeigt Abb. 6.16. Maßgebend für das Versagen bei Druckbeanspruchung in  $L$ -Richtung von Fichtenholz mit Ästen ist somit die Zugfestigkeit in  $\overline{RT}$ -Richtung



(Querzugfestigkeit) von fehlerfreiem Holz. Daher ergibt sich, wie aus Abb. 6.17 ersichtlich, keine signifikante Abhängigkeit der Druckfestigkeit in  $L$ -Richtung von Fichtenholz mit Ästen vom Astparameter  $ksa$ . Aus diesem Grund bleibt der Faktor  $ksa$  bei der Bestimmung der Längsdruckfestigkeit von fehlerbehaftetem Fichtenholz unberücksichtigt. Es wird aus allen Versuchsergebnissen das arithmetische Mittel gebildet, welches zugleich die initiale Druckfließspannung zu

$$\min f_{ycL}^0 = -30.5 \text{ N/mm}^2 \quad (6.6)$$

darstellt.



Abbildung 6.16: Bruchbild des Probekörpers K69 mit offenen Rissen in Faserlängsrichtung, aufgenommen während der Belastungsphase

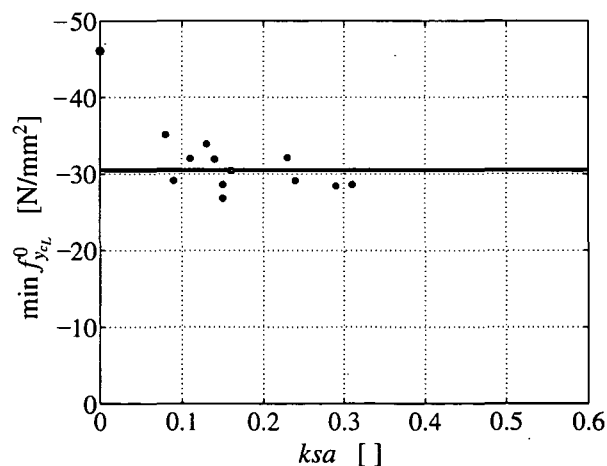
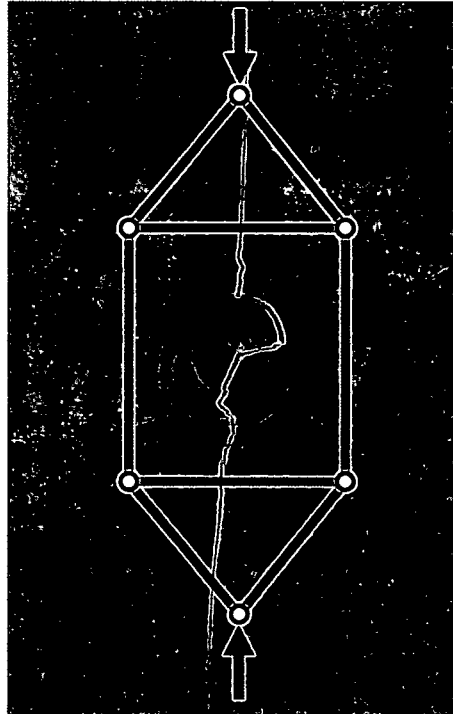


Abbildung 6.17: Abhängigkeit der Druckfestigkeit in  $L$ -Richtung vom Astparameter  $ksa$

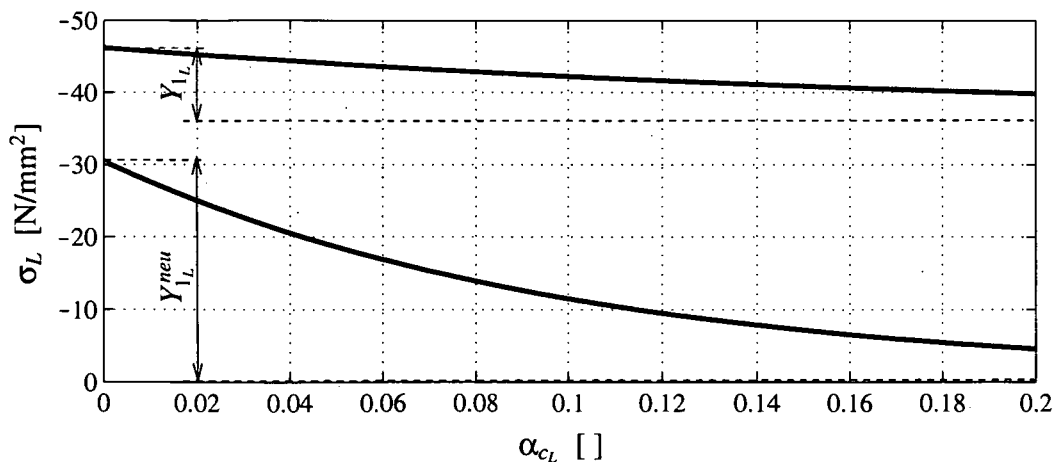
Der Versagensmechanismus für diesen Beanspruchungsfall kann mit Hilfe des Stabmodells gemäß Abb. 6.18 entsprechend begründet werden. Dieses Modell besteht aus sechs Druckstreben (rot) und zwei Zugbändern (grün), wobei durch das orthotrope Materialverhalten die

geringste Festigkeit in den Zugbändern vorhanden ist. Diese sind damit für den Bruch maßgebend. Durch die Einbettung des Stabmodells in das Kontinuum des Holzes kommt es bei diesem Stabmodell (statisch unterbestimmt) zu keinem kinematischen Versagen.



**Abbildung 6.18:** Stabmodell für das Versagen von fehlerbehaftetem Fichtenholz bei Druckbeanspruchung in Faserlängrichtung (Hintergrund: Ausschnitt des Bruchbildes des Probekörpers K61)

Da der Versagensmechanismus, wie bereits zuvor erwähnt, spröder als bei fehlerfreiem Fichtenholz ist, wird der Materialparameter  $Y_{1L}$  des Evolutionsgesetzes aus Gl. (5.81) auf  $Y_{1L} = 20 \text{ N/mm}^2$  entsprechend abgeändert. Dies bewirkt, wie aus Abb. 6.19 zu ersehen ist, eine stärkere Entfestigung.



**Abbildung 6.19:** Verändertes Evolutionsgesetz für Druckbeanspruchung in  $L$ -Richtung

### 6.5.4 Druckbeanspruchung in $\overline{RT}$ -Richtung

Für die Auswertung dieser Serie von Experimenten mit ausgewählten Ästen standen zwölf Versuche zur Verfügung. Wie bei Druckbeanspruchung in  $\overline{RT}$ -Richtung von fehlerfreiem Fichtenholz kommt es zu keinem Bruch, sondern zu einem duktilen Versagen. Die blauen Punkte in Abb. 6.22 stellen die Übergänge von einem annähernd linearen Spannungs-Dehnungs-Pfad zu einem deutlich ausgeprägten nichtlinearen Pfad dar, wobei die Festlegung dieser Punkte wie im Kapitel 5.4.1 erfolgte. Da keine signifikante Abhängigkeit vom Astparameter  $k_{sa}$  zu erkennen ist, wird die initiale Druckfließspannung in  $\overline{RT}$ -Richtung als arithmetischer Mittelwert aller zwölf Versuche zu

$$\min f_{y_{c_{RT}}}^0 = -3.48 \text{ N/mm}^2 \quad (6.7)$$

festgelegt.

Probekörper mit Astparametern von  $k_{sa} > 0.20$  sind auf Grund der Wuchseigenschaften eines Fichtenbaumes praktisch nicht herstellbar, da sich die Äste entsprechend der Vegetationsperioden immer auf einen sehr kleinen Bereich, gemessen in Faserlängsrichtung, beschränken.

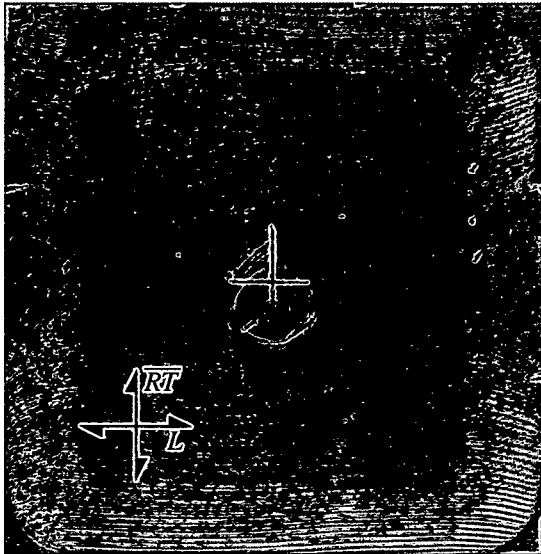


Abbildung 6.20: Messfeld des Probekörpers K72 nach Versuchsende

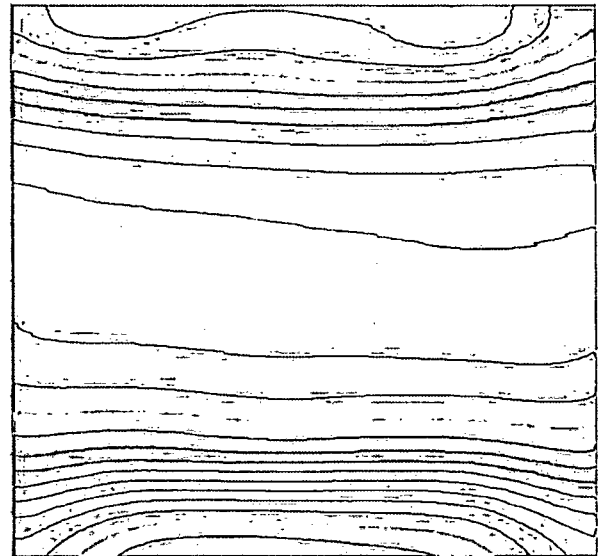


Abbildung 6.21: Deformationsverteilung in  $\overline{RT}$ -Richtung des Probekörpers K72, gemessen mit dem ESPI-System

Aus Abb. 6.21 lässt sich erkennen, dass der Ast zu einer lokalen Versteifung führt, da sich die Deformationen auf die ungestörten Bereiche oberhalb und unterhalb des Astes konzentrieren. Dies hat jedoch auf die Steifigkeitskennwerte einer Holzstruktur keinen signifikanten Einfluss. Im Vergleich zu fehlerfreiem Holz ergibt sich eine Reduzierung der Fließspannung von  $\min f_{y_{c_{RT}}}^0 = -5.15 \text{ N/mm}^2$  auf  $\min f_{y_{c_{RT}}}^0 = -3.48 \text{ N/mm}^2$ . Dieser neue Wert deckt sich mit den aus Abb. A.5 ablesbaren Werten für die Druckfließspannung in  $\overline{RT}$ -Richtung.

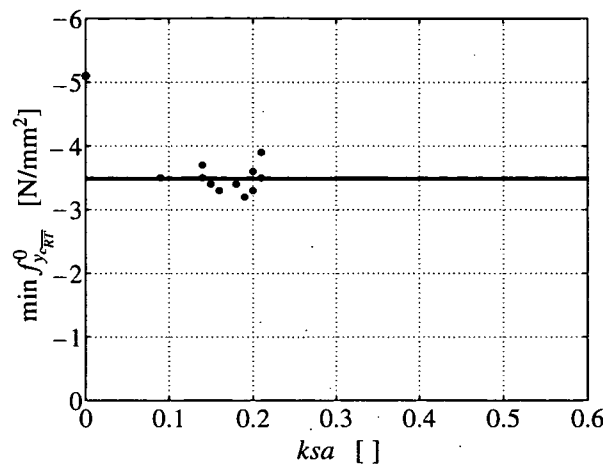


Abbildung 6.22: Abhängigkeit der Druckfestigkeit in  $\overline{RT}$ -Richtung vom Astparameter  $ksa$

## 6.6 Bestimmung der Fließfläche für die $\overline{LRT}$ -Ebene unter der Berücksichtigung des Astparameters $ksa$

Mit Hilfe der in den Abbildungen 6.12, 6.14, 6.17 und 6.22 dargestellten Zusammenhänge zwischen den initialen Fließspannungen und dem Astparameter  $ksa$  wird eine neue initiale Fließfläche unter Berücksichtigung des Wertes  $ksa$  für die  $\overline{LRT}$ -Ebene in gleicher Weise wie im Unterkapitel 5.4.3 bestimmt. Dies geschieht durch Vorgabe der vier Extremwerte der initialen Fließspannungen gemäß den Gleichungen (6.3), (6.5), (6.6) sowie (6.7), wobei die Koeffizienten der Fließfunktion durch Verwendung des Plastizitätsmodells siehe Unterkapitel 7.1) durch inkrementelle Vorgabe der Zustandsvariablen  $\alpha$  ermittelt werden. Für die Bestimmung der initialen Schubfließspannung wird der initiale ideale Reibungswinkel  $\phi_0$  analog zu Abbildung 5.31 konstant gehalten. Die Abbildungen 6.23 und 6.24 zeigen exemplarisch die Fließfläche für Fichtenholz mit der Berücksichtigung der wesentlichen Holzmerkmale für einen Astparameter von  $ksa = 0.30$ . Die initialen Fließspannungen ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
 \max f_{y_{tL}}^0 &= 28.44 \text{ N/mm}^2 \\
 \min f_{y_{cL}}^0 &= -30.50 \text{ N/mm}^2 \\
 \max f_{y_{t\overline{RT}}}^0 &= 1.13 \text{ N/mm}^2 \\
 \min f_{y_{c\overline{RT}}}^0 &= -3.48 \text{ N/mm}^2 \\
 \max \tau_{y_{\overline{LRT}}}^0 &= 3.70 \text{ N/mm}^2.
 \end{aligned}$$

Die zugehörigen Koeffizienten der Fließfunktion nach TSAI & WU lauten:

$$\begin{aligned}
 a_{LL} &= 0.003\,909\,394 \text{ mm}^2/\text{N} \\
 a_{\overline{RTRT}} &= 0.630\,531\,587 \text{ mm}^2/\text{N} \\
 b_{LLLL} &= 0.001\,590\,068 \text{ mm}^4/\text{N}^2 \\
 b_{\overline{RTRTRTRT}} &= 0.264\,221\,880 \text{ mm}^4/\text{N}^2 \\
 b_{\overline{LL\overline{RTRT}}} &= 0.000\,297\,416 \text{ mm}^4/\text{N}^2 \\
 b_{\overline{LRTLRT}} &= 0.028\,927\,675 \text{ mm}^4/\text{N}^2.
 \end{aligned}$$

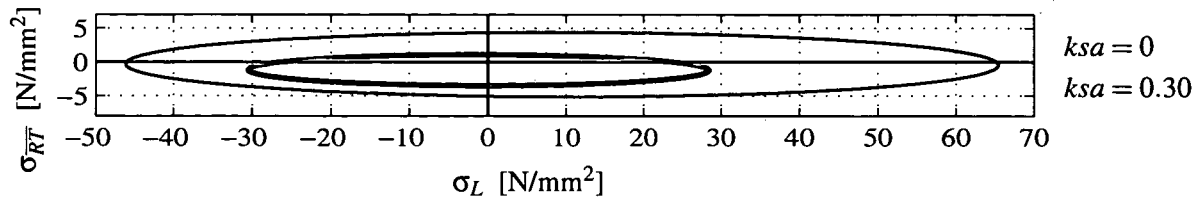


Abbildung 6.23: Hauptschnitt in der  $\sigma_L$ - $\sigma_{RT}$ -Ebene durch die Fließfläche in blauer Farbe für fehlerfreies Fichtenholz ( $ksa = 0$ ) und in roter Farbe für einen Astparameter von  $ksa = 0.30$

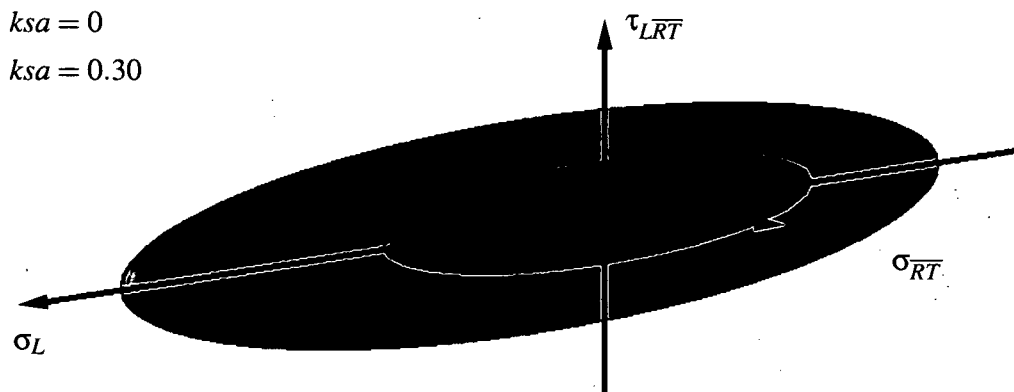


Abbildung 6.24: Fließfläche in der  $LRT$ -Ebene in blauer Farbe für fehlerfreies Fichtenholz ( $ksa = 0$ ) und in roter Farbe für einen Astparameter von  $ksa = 0.30$ , verzerrt dargestellt

## Algorithmische Behandlung des elasto-plastischen Materialmodells und Implementation in eine FE-Software

### 7.1 Algorithmische Behandlung des elasto-plastischen Materialmodells

Im folgenden Kapitel wird das im Unterabschnitt 4.2.4 beschriebene Projektionsverfahren auf das in den Kapiteln 5 und 6 beschriebene Materialmodell angewendet. Das Ziel ist es, einen bekannten Zustand zum Zeitpunkt  $t_n$  bei vorgegebenem totalen Verzerrungszustand  $\boldsymbol{\varepsilon}$  zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  auf den vollen Zustand zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  zu aktualisieren. Unter Zustand versteht man die Gesamtheit der Zustandsgrößen  $\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p}\}$ . Dieser Abschnitt ist im Wesentlichen aus der Arbeit von MÜLLNER [9] entnommen.

Im Rahmen einer FE-Simulation für Strukturberechnungen wird dieser Algorithmus für jeden Integrationspunkt und für jedes Belastungsinkrement durchlaufen. Genauere Informationen darüber sind im Unterkapitel 7.2 enthalten.

#### 7.1.1 Zusammenstellung der numerischen Integrationsgleichungen

In diesem Unterkapitel werden die erforderlichen Gleichungen zur numerischen Zeitintegration (Anwendung des Projektionsverfahrens) aufbereitet.

- **Fließbedingung (Fließfläche):**

Die Bestimmung der Parameter der initialen Fließfläche ist im Kapitel 6.6 enthalten. Bei jedem Inkrement verändern sich die Parameter  $\mathbf{p}_n$  zu

$$\mathbf{p}_{n+1} = [a_{LL,n+1} \ a_{\overline{RTRT},n+1} \ b_{LLLL,n+1} \ b_{\overline{RTRTRTRT},n+1} \ b_{\overline{LLRTRT},n+1} \ b_{\overline{LRTLRT},n+1}]^T, \quad (7.1)$$

- **Hyperelastisches Materialgesetz:**

Die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung wird durch das folgende Gesetz beschrieben:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p). \quad (7.2)$$

Diese Beziehung entspricht der Gleichung (4.28) aus Unterabschnitt 4.2.3. Unter Verwendung der Definition der Strukturtenoren aus (5.36) und (5.75) ergibt sich der Materialtensor  $\mathbb{C}$  aus Gleichung (7.2) zu

$$\mathbb{C} = \frac{E_L}{\Delta} \mathbf{M}_L \otimes \mathbf{M}_L + \frac{E_{\overline{RT}}}{\Delta} \mathbf{M}_{\overline{RT}} \otimes \mathbf{M}_R + \frac{\nu_{\overline{LRT}} E_{\overline{RT}}}{\Delta} (\mathbf{M}_L \otimes \mathbf{M}_{\overline{RT}} + \mathbf{M}_{\overline{RT}} \otimes \mathbf{M}_L) + G_{\overline{LRT}} \mathbf{M}, \quad (7.3)$$

wobei  $\Delta = 1 - \nu_{\overline{LRT}} \nu_{\overline{RTL}}$  und  $\nu_{\overline{RTL}} = \nu_{\overline{LRT}} E_{\overline{RT}} / E_L$  gilt. Die elastischen Materialparameter sind entsprechend Kapitel 5.3 zu bestimmen.

- **Kuhn-Tucker-Bedingungen und Konsistenzbedingung:**

Die inkrementelle Form der Kriterien für plastische Be- und Entlastung lauten:

$$\gamma_{n+1} \geq 0, \quad (7.4a)$$

$$f_{n+1} = f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) \leq 0 \text{ und} \quad (7.4b)$$

$$\gamma_{n+1} f_{n+1} = 0. \quad (7.4c)$$

Diese Beziehungen entsprechen den Gleichungen (4.30a) bis (4.30c) aus Unterabschnitt 4.2.3. Im Fall plastischer Verzerrungszustände erhält man mit  $\gamma_{n+1}$  eine zusätzliche skalare Unbekannte. Sie wird durch die aus der dritten KUHN-TUCKER-Bedingung (7.4c) folgenden Konsistenzbedingung  $f_{n+1} = 0$  bestimmt.

- **Assoziierte Fließregel:**

Die inkrementelle Form der assoziierten Fließregel ergibt sich aus Gleichung (5.39) aus Unterabschnitt 5.5.2 zu

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \gamma_{n+1} \mathbf{r}_{n+1}, \quad (7.5)$$

wobei sich  $\mathbf{r}_{n+1}$  aus (5.40) wie folgt ergibt

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{a}_{n+1} + 2 \mathbf{b}_{n+1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}. \quad (7.6)$$

- **Nicht-assozierte Ver- bzw. Entfestigungsregel:**

Die inkrementelle Form der nicht-assozierten Ver- bzw. Entfestigungsregel erhält man aus Gleichung (4.17) aus Unterabschnitt 5.5.5 zu

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + \gamma_{n+1} \mathbf{s}_{n+1}, \quad (7.7)$$

wobei  $\mathbf{s}_{n+1}$  gemäß (5.90) einzusetzen ist.

- **Evolutionsgesetze der charakteristischen Fließspannungen der Fließfläche :**

Die Evolutionsgesetze wurden im Unterabschnitt 5.5.5 im Vektor

$$\mathbf{R}_{n+1}^* = \mathbf{R}^*(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}) \quad (7.8)$$

zusammengefasst (siehe Gleichung (5.89)).

- **Aktualisierung der Parameterwerte  $\mathbf{p}_{n+1}$  :**

Im Unterabschnitt 5.5.6 wird der Residuumsvektor

$$\mathbf{R}_{f,n+1} = \mathbf{R}_p(\mathbf{p}_{n+1}) - \mathbf{R}_{n+1}^* \quad (7.9)$$

aufgestellt (siehe Gleichung (5.93)).

## 7.1.2 Formulierung des Newton-Raphson-Verfahrens

Die erforderlichen Beziehungen zur Lösung der Aufgabe werden in den Gleichungen (7.10a) bis (7.10f) zusammengefasst. Es handelt sich dabei um alle Zustandsgrößen, welche sich vom Zeitpunkt  $t_n$  zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  ändern. Die Gleichungen werden dabei bereits in der Form  $\mathbf{R}_j = \mathbf{0}$  angeschrieben. Sie enthalten weiters Querverweise zu jenen Beziehungen aus Unterkapitel 7.1.1, in denen die entsprechenden Gleichungen beschrieben wurden.

$$(7.2) \rightarrow \mathbf{R}_\sigma = \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p) = \mathbf{0}, \quad (7.10a)$$

$$(7.5) \rightarrow \mathbf{R}_\epsilon = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\epsilon}_n^p - \gamma_{n+1} \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{0}, \quad (7.10b)$$

$$(7.6) \rightarrow \mathbf{R}_r = \mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{a}_{n+1} - 2 \mathbf{b}_{n+1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{0}, \quad (7.10c)$$

$$(7.7) \rightarrow \mathbf{R}_\alpha = \boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}_n - \gamma_{n+1} \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{0}, \quad (7.10d)$$

$$(7.9) \rightarrow \mathbf{R}_f = \mathbf{R}_{p,n+1}(\mathbf{p}_{n+1}) - \mathbf{R}^*(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (7.10e)$$

$$(5.44) \rightarrow f_{n+1} = 0. \quad (7.10f)$$

Nun werden diese Gleichungen in TAYLOR-Reihen entwickelt und alle Terme höher als erster Ordnung vernachlässigt. Dies führt zur linearisierten Form der Gleichungen (7.10a) bis (7.10f)

$$\mathbf{R}_j(\mathbf{q}_{n+1} + \Delta \mathbf{q}_{n+1}) \approx \mathbf{R}_j(\mathbf{q}_{n+1}) + D\mathbf{R}_j \cdot \Delta \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{0}, \quad (7.11)$$



wobei  $j \in \{\sigma, \varepsilon, r, \alpha, \beta, f\}$  und

$$\mathbf{q}_{n+1} = [\sigma_{n+1} \quad \varepsilon_{n+1}^p \quad \mathbf{r}_{n+1} \quad \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \quad \mathbf{p}_{n+1} \quad \gamma_{n+1}]^T \quad (7.12)$$

den Vektor der unbekanntenen Größen bzw.  $\Delta \mathbf{q}_{n+1}$  dessen Zuwachs darstellen.  $DR_j$  ist der zugehörige Tangentenoperator, der die Ableitungen von  $\mathbf{R}_j(\mathbf{q}_{n+1})$  nach den Elementen von  $\mathbf{q}_{n+1}$  enthält. Das Projektionsverfahren ist durch  $\varepsilon_{n+1} = konst.$  und somit durch  $\Delta \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = konst.$  gekennzeichnet.

Das NEWTON-RAPHSON-Verfahren zur Lösung von  $\mathbf{R}_{j,n+1} = \mathbf{0}$  lautet

$$\mathbf{R}_{n+1} \approx \mathbf{R}_{n+1}^{(k)} + DR_{n+1}^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{0}, \quad (7.13)$$

wobei der Residuumsvektor als

$$\mathbf{R}_{n+1} = [\mathbf{R}_\sigma \quad \mathbf{R}_\varepsilon \quad \mathbf{R}_r \quad \mathbf{R}_\alpha \quad \mathbf{R}_f \quad R_f]^T \quad (7.14)$$

definiert ist.  $(k)$  bezeichnet einen bekannten Zustand nach dem  $k$ -ten Iterationsschritt.  $DR_{n+1}^{(k)}$  ist der zugehörige bekannte Tangentenoperator. Die Lösung von Gleichung (7.13) liefert

$$\Delta \mathbf{q}_{n+1} = - \left( DR_{n+1}^{(k)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{R}_{n+1}^{(k)}. \quad (7.15)$$

Sie führt zur verbesserten Lösung  $(k+1)$  als

$$\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} + \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} \quad \text{und} \quad \mathbf{R}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{R}_{n+1}(\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)}). \quad (7.16)$$

Diese Prozedur ist so lange zu wiederholen, bis

$$\| \mathbf{R}_{n+1}^{(k+1)} \| \leq TOL. \quad (7.17)$$

Sobald die Lösung mit ausreichender Genauigkeit ( $TOL = 10^{-12}$ ) ermittelt wurde, ist der Zustand zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  hinreichend genau bekannt.

Gleichung (7.13) ausführlich angeschrieben, gibt Aufschluss über die Größe des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_\sigma \\ \mathbf{R}_\varepsilon \\ \mathbf{R}_r \\ \mathbf{R}_\alpha \\ \mathbf{R}_f \\ R_f \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbb{I}_{(3)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I}_{(3)} & \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbb{I}_{(3)} & \mathbf{0} & \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X} & \mathbb{I}_{(6)} & \mathbf{0} & \mathbf{X} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X} & \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \sigma_{(3)} \\ \Delta \varepsilon_{(3)}^p \\ \Delta \mathbf{r}_{(3)} \\ \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(6)} \\ \Delta \mathbf{p}_{(6)} \\ \Delta \gamma_{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

Die in den runden Klammern angegebenen Zahlen geben die jeweilige Anzahl der Einträge des jeweiligen äquivalenten Vektors an.  $\mathbf{q}_{n+1}$  enthält somit 22 unbekannte Größen.

Im Tangentenoperator, darstellbar durch eine  $22 \times 22$ -Matrix, sind insgesamt 268 von 484 Einträgen identisch null. Die Symbole  $\mathbf{X}$  und  $\mathbb{I}_{(n)}$  markieren jene Bereiche der Matrix die ungleich null sind, wobei  $\mathbb{I}_{(n)}$  eine  $n \times n$ -Einheitsmatrix bezeichnet. Aufgrund der vielen Null-Einträge empfiehlt sich eine Zerlegung des Tangentenoperators, um den Rechenaufwand für die Inversion von  $DR_{n+1}^{(k)}$  in (7.15) zu reduzieren.

### 7.1.3 Zerlegung des Tangentenoperators $DR_{n+1}^{(k)}$ in $DR_j$

Im folgenden Unterkapitel wird der Tangentenoperator  $DR_{n+1}^{(k)}$  zeilenweise in  $DR_j$  für  $j \in \{\sigma, \varepsilon, r, \alpha, \beta, f\}$  zerlegt. Durch die Multiplikation der einzelnen  $DR_j$  mit dem Vektor  $\Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}$  fallen die Null-Einträge aus der Berechnung. Dies führt zu einer effizienten Lösung von (7.15). Die Zerlegung erfolgt als:

#### 1. Gleichungen für $j = \sigma$ :

Die erste Zeile von (7.18) lautet

$$\mathbf{R}_\sigma^{(k)} + DR_\sigma \cdot \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{0}. \quad (7.19)$$

Die Teilmatrix  $DR_\sigma$  erhält man zu

$$DR_\sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} & \mathbb{I}_{(3)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (7.20)$$

Durch Einsetzen von (7.20) in (7.19) und Umformen erhält man den Zuwachs der Spannungen zu

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = -\mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \mathbf{C} : \mathbf{R}_\sigma^{(k)}. \quad (7.21)$$

#### 2. Gleichungen für $j = \varepsilon$ :

Die zweite Zeile von (7.18) lautet

$$\mathbf{R}_\varepsilon^{(k)} + DR_\varepsilon \cdot \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{0}. \quad (7.22)$$

Die Teilmatrix  $DR_\varepsilon$  erhält man zu

$$DR_\varepsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{I}_{(3)} & -\gamma_{n+1}^{(k)} \mathbb{I}_{(3)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{r}_{n+1}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (7.23)$$

Durch Einsetzen von (7.23) in (7.22) und Umformen erhält man den Zuwachs der plastischen Verzerrungen zu

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} \Delta \gamma_{n+1} + \gamma_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{R}_\varepsilon^{(k)}. \quad (7.24)$$

### 3. Gleichungen für $j = r$ :

Die dritte Zeile von (7.18) lautet

$$\mathbf{R}_r^{(k)} + D\mathbf{R}_r \cdot \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{0}. \quad (7.25)$$

Die Teilmatrix  $D\mathbf{R}_r$  erhält man zu

$$D\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} -2\mathbf{b}_{n+1}^{(k)} & \mathbf{0} & \mathbb{I}_{(3)} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{R}_r^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

mit der aus (5.40) und dem initialen Parametersatz  $\mathbf{p}$  folgenden Beziehung

$$\frac{\partial \mathbf{R}_r^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2\sigma_{L,n+1}^{(k)} & 0 & -2\sigma_{RT,n+1}^{(k)} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2\sigma_{RT,n+1}^{(k)} & -2\sigma_{L,n+1}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8\tau_{LRT,n+1}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (7.27)$$

wobei  $\sigma_{L,n+1}^{(k)}$ ,  $\sigma_{RT,n+1}^{(k)}$  und  $\tau_{LRT,n+1}^{(k)}$  die Komponenten von  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}$  bezeichnen. In (7.26) ist  $\mathbf{b}_{n+1}^{(k)}$  durch (5.41) als lineare Funktion von  $\mathbf{p}_{n+1}^{(k)}$  und den Strukturtenoren definiert. (7.27) gilt ausschließlich für das Materialhauptsystem.

Durch Einsetzen von (7.26) in (7.25) und Umformen erhält man den Zuwachs von  $\Delta \mathbf{r}_{n+1}$  zu

$$\Delta \mathbf{r}_{n+1} = 2\mathbf{b}_{n+1}^{(k)} : \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{\partial \mathbf{R}_r^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} \cdot \Delta \mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{R}_r^{(k)}. \quad (7.28)$$

### 4. Gleichungen für $j = \alpha$ :

Die vierte Zeile von (7.18) lautet

$$\mathbf{R}_\alpha^{(k)} + D\mathbf{R}_\alpha \cdot \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{0}. \quad (7.29)$$

Die Teilmatrix  $D\mathbf{R}_\alpha$  erhält man zu

$$D\mathbf{R}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma_{n+1} \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}} & \mathbb{I}_{(6)} & \mathbf{0} & -\mathbf{s}_{n+1}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

mit

$$\frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} + \frac{\text{sign } r_2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\text{sign } r_2}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{\text{sign } r_2}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{\text{sign } r_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{\text{sign } r_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \text{ sign } r_3 \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

Durch Einsetzen von (7.30) in (7.29) und Umformen erhält man den Zuwachs von  $\Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$  zu

$$\Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}} : \Delta \mathbf{r}_{n+1} + \mathbf{s}_{n+1}^{(k)} \Delta \gamma_{n+1} - \mathbf{R}_\alpha^{(k)}. \quad (7.32)$$

5. Gleichungen für  $j = f$ :

Die fünfte Zeile von (7.18) lautet

$$\mathbf{R}_f^{(k)} + DR_f \cdot \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{0}. \quad (7.33)$$

Die Teilmatrix  $DR_f$  erhält man zu

$$DR_f = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^{*(k)}}{\partial \alpha_{n+1}^{(k)}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{p,n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (7.34)$$

Der in (7.34) aufscheinende Ausdruck  $\partial \mathbf{R}_{p,n+1}^{(k)} / \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}$  entspricht der Matrix  $\mathbf{K}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{K}|^{(k)}$  aus (5.96). Der Ausdruck  $\partial \mathbf{R}_{n+1}^{*(k)} / \alpha_{n+1}^{(k)}$  wird im Folgenden als Matrix  $\mathbf{L}_{n+1}^{(k)}$  bezeichnet. Im Anhang D wird  $\mathbf{L}_{n+1}^{(k)}$  detailliert dargestellt.

Durch Einsetzen von (7.34) in (7.33) und Umformen erhält man den Zuwachs von  $\mathbf{p}_{n+1}$  zu

$$\Delta \mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{K}_{n+1}^{(k)-1} \cdot \left( \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} \cdot \Delta \alpha_{n+1} - \mathbf{R}_f^{(k)} \right). \quad (7.35)$$

6. Konsistenzbedingung ( $j = f$ ):

Die sechste und letzte Zeile von (7.18) lautet

$$f_{n+1}^{(k)} + DR_f \cdot \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(k)} = 0. \quad (7.36)$$

Die Teilmatrix  $DR_f$  aus Gleichung (7.36) erhält man zu

$$DR_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma_{n+1}^{(k)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

mit

$$\frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma_{n+1}^{(k)}} = \mathbf{a}_{n+1}^{(k)} + 2 \mathbf{b}_{n+1}^{(k)} : \sigma_{n+1}^{(k)} \quad (7.38)$$

und unter Berücksichtigung von (5.44) für das Materialhauptsystem

$$\frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} = \begin{bmatrix} \sigma_{L,n+1}^{(k)} & \sigma_{RT,n+1}^{(k)} & \sigma_{L,n+1}^{(k)2} & \sigma_{RT,n+1}^{(k)2} & 2 \sigma_{L,n+1}^{(k)} \sigma_{RT,n+1}^{(k)} & 4 \tau_{LRT,n+1}^{(k)2} \end{bmatrix}. \quad (7.39)$$

Der Ausdruck  $\partial f_{n+1}^{(k)} / \partial \sigma_{n+1}^{(k)}$  stimmt erst im konvergierten Ergebnis mit  $\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}$  überein. Im Zuge der Iteration ist dieser Ausdruck nicht durch  $\mathbf{r}_{n+1}^{(k)}$  zu ersetzen.

Durch Einsetzen von (7.37) in (7.36) erhält man die linearisierte Form der Konsistenzbedingung zu

$$f_{n+1}^{(k)} + \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma_{n+1}^{(k)}} : \Delta \sigma_{n+1} + \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} \cdot \Delta \mathbf{p}_{n+1} = 0. \quad (7.40)$$

### 7.1.4 Berechnung des Zuwachses $\Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}$

Ziel dieses Unterkapitels ist es, eine Beziehung für den Zuwachs  $\Delta \gamma_{n+1}$  des inkrementellen Konsistenzparameters zu erhalten, die ausschließlich von bekannten Größen des jeweiligen Iterationsschritts abhängt. Damit können in der Folge alle in  $\Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}$  enthaltenen Zuwächse berechnet werden. Die Vorgangsweise wird in der Folge schrittweise erläutert.

Den Ausgangszustand stellen die im Unterkapitel 7.1.3 hergeleiteten Beziehungen für alle in  $\Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(k)}$  enthaltenen Zuwächse dar. Diese Beziehungen lauten:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = -\mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \mathbf{C} : \mathbf{R}_\sigma^{(k)} \quad (7.41a)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} \Delta \gamma_{n+1} + \gamma_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{R}_\varepsilon^{(k)} \quad (7.41b)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{n+1} = 2 \mathbf{b}_{n+1}^{(k)} : \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{\partial \mathbf{R}_r^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} \cdot \Delta \mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{R}_r^{(k)} \quad (7.41c)$$

$$\Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}} : \Delta \mathbf{r}_{n+1} + \mathbf{s}_{n+1}^{(k)} \Delta \gamma_{n+1} - \mathbf{R}_\alpha^{(k)} \quad (7.41d)$$

$$\Delta \mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{K}_{n+1}^{(k)-1} \cdot \left( \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} \cdot \Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \mathbf{R}_f^{(k)} \right) \quad (7.41e)$$

$$f_{n+1}^{(k)} + \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}} : \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} \cdot \Delta \mathbf{p}_{n+1} = 0. \quad (7.41f)$$

#### 1. Elimination von $\Delta \mathbf{p}_{n+1}$ :

Der Zuwachs  $\Delta \mathbf{p}_{n+1}$  gemäß (7.41e) wird in die Beziehungen (7.41c) und (7.41f) eingesetzt. Dadurch erhält man für (7.41c)

$$\Delta \mathbf{r}_{n+1} = 2 \mathbf{b}_{n+1}^{(k)} : \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{\partial \mathbf{R}_r^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} \cdot \mathbf{K}_{n+1}^{(k)-1} \cdot \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} \cdot \Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \mathbf{R}_r^{*(k)} \quad (7.42)$$

mit

$$\mathbf{R}_r^{*(k)} = \mathbf{R}_r^{(k)} - \frac{\partial \mathbf{R}_r^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} \cdot \mathbf{K}_{n+1}^{(k)-1} \cdot \mathbf{R}_f^{(k)} \quad (7.43)$$

und für (7.41f)

$$R_f^{*(k)} + \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}} : \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} \cdot \mathbf{K}_{n+1}^{(k)-1} \cdot \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} \cdot \Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1} = 0 \quad (7.44)$$

mit

$$R_f^{*(k)} = f_{n+1}^{(k)} - \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} \cdot \mathbf{K}_{n+1}^{(k)-1} \cdot \mathbf{R}_f^{(k)}. \quad (7.45)$$

## 2. Elimination von $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ :

Der Zuwachs  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$  gemäß (7.41b) wird in die Beziehung (7.41a) eingesetzt. Dadurch erhält man

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = -\mathbb{C} : \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} \Delta \gamma_{n+1} - \gamma_{n+1}^{(k)} \mathbb{C} : \Delta \mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{R}_\sigma^{*(k)} \quad (7.46)$$

mit

$$\mathbf{R}_\sigma^* = \mathbb{C} : (\mathbf{R}_\sigma^{(k)} - \mathbf{R}_\varepsilon^{(k)}). \quad (7.47)$$

## 3. Elimination von $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ :

Der Zuwachs  $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  gemäß (7.46) wird in die Beziehungen (7.42) und (7.44) eingesetzt. Dadurch erhält man für (7.42)

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_{n+1} = & -2 \mathbf{b}_{n+1}^{(k)} : \mathbb{C} : \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} \Delta \gamma_{n+1} - 2 \gamma_{n+1}^{(k)} \mathbf{b}_{n+1}^{(k)} : \mathbb{C} : \Delta \mathbf{r}_{n+1} - \\ & - \frac{\partial \mathbf{R}_r^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} \cdot \mathbf{K}_{n+1}^{(k)-1} \cdot \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} \cdot \Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \mathbf{R}_r^{** (k)} \end{aligned} \quad (7.48)$$

mit

$$\mathbf{R}_r^{** (k)} = \mathbf{R}_r^{*(k)} + 2 \mathbf{b}_{n+1}^{(k)} : \mathbf{R}_\sigma^{*(k)} \quad (7.49)$$

und die aktuelle Form der linearisierten Konsistenzbedingung zu

$$\begin{aligned} R_f^{** (k)} - \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}} : \mathbb{C} : \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} \Delta \gamma_{n+1} - \gamma_{n+1}^{(k)} \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}} : \mathbb{C} : \Delta \mathbf{r}_{n+1} + \\ + \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} \cdot \mathbf{K}_{n+1}^{(k)-1} \cdot \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} \cdot \Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (7.50)$$

mit

$$R_f^{** (k)} = R_f^{*(k)} - \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}} : \mathbf{R}_\sigma^{*(k)}. \quad (7.51)$$

## 4. Elimination von $\Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ :

Der Zuwachs  $\Delta \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$  gemäß (7.41d) wird in die Beziehung (7.48) eingesetzt. Dadurch erhält man

$$\Delta \mathbf{r}_{n+1} = \boldsymbol{\Pi}_{n+1}^{(k)} : \left( \boldsymbol{\Omega}_{n+1}^{(k)} \Delta \gamma_{n+1} - \mathbf{R}_r^{*** (k)} \right) \quad (7.52)$$

mit

$$\mathbf{R}_r^{***} = \mathbf{R}_r^{** (k)} - \frac{\partial \mathbf{R}_r^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} \cdot \mathbf{K}_{n+1}^{-1 (k)} \cdot \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} \cdot \mathbf{R}_\alpha^{(k)}, \quad (7.53)$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{n+1} = \left[ \mathbb{I}_{(3)} + 2 \gamma_{n+1}^{(k)} \mathbf{b}_{n+1}^{(k)} : \mathbb{C} + \gamma_{n+1}^{(k)} \frac{\partial \mathbf{R}_r^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} \cdot \mathbf{K}_{n+1}^{-1 (k)} \cdot \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} : \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}} \right]^{-1} \quad (7.54)$$

und

$$\boldsymbol{\Omega}_{n+1} = -2 \mathbf{b}_{n+1}^{(k)} : \mathbb{C} : \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} - \frac{\partial \mathbf{R}_r^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} \cdot \mathbf{K}_{n+1}^{-1 (k)} \cdot \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} \cdot \mathbf{s}_{n+1}^{(k)}. \quad (7.55)$$

5. Berechnung des Zuwachses  $\Delta\gamma_{n+1}$  des Konsistenzparameters:

In die aktuelle Form der linearisierten Konsistenzbedingung (7.50) werden die Zuwächse  $\Delta\mathbf{r}_{n+1}$  gemäß (7.52) und  $\Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$  gemäß (7.41d) eingesetzt. Durch Auflösen der daraus erhaltenen Beziehung nach  $\Delta\gamma_{n+1}$  erhält man die gesuchte Beziehung für den Zuwachs  $\Delta\gamma_{n+1}$  zu

$$\Delta\gamma_{n+1} = \frac{A_{n+1}^{(k)}}{B_{n+1}^{(k)}} \quad (7.56)$$

mit

$$\begin{aligned} A_{n+1}^{(k)} &= R_f^{**(k)} + \gamma_{n+1}^{(k)} \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} : \mathbb{C} : \Pi_{n+1}^{(k)} : \mathbf{R}_r^{***^{(k)}} - \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}} \cdot \mathbf{K}_{n+1}^{-1(k)} \cdot \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} \cdot \mathbf{R}_\alpha^{(k)} - \\ &- \gamma_{n+1}^{(k)} \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} \cdot \mathbf{K}_{n+1}^{-1(k)} \cdot \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} : \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}} : \Pi_{n+1}^{(k)} : \mathbf{R}_r^{***^{(k)}} \end{aligned} \quad (7.57)$$

und

$$\begin{aligned} B_{n+1}^{(k)} &= \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}} : \mathbb{C} : \mathbf{r}_{n+1}^{(k)} + \gamma_{n+1}^{(k)} \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}} : \mathbb{C} \cdot \Pi_{n+1}^{(k)} : \boldsymbol{\Omega}_{n+1}^{(k)} - \\ &- \gamma_{n+1}^{(k)} \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} \cdot \mathbf{K}_{n+1}^{(k)-1} \cdot \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} : \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{r}_{n+1}^{(k)}} : \Pi_{n+1}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{n+1}^{(k)} - \\ &- \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}} \cdot \mathbf{K}_{n+1}^{(k)-1} \cdot \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} \cdot \mathbf{s}_{n+1}^{(k)}. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Die restlichen Zuwächse werden durch schrittweises Rückeinsetzen in die Gleichungen (7.52)  $\rightarrow \Delta\mathbf{r}_{n+1}$ , (7.32)  $\rightarrow \Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ , (7.24)  $\rightarrow \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ , (7.21)  $\rightarrow \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  und (7.35)  $\rightarrow \Delta\mathbf{p}_{n+1}$  erhalten. Damit ist auch der Zuwachs

$$\Delta\mathbf{q}_{n+1}^{(k)} = - \left( D\mathbf{R}_{n+1}^{(k)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{R}_{n+1}^{(k)} \quad (7.59)$$

ermittelt.  $\Delta\mathbf{q}_{n+1}^{(k)}$  führt zur verbesserten Lösung  $(k+1)$  als

$$\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{q}_n^{(k)} + \Delta\mathbf{q}_{n+1}^{(k)} \quad \text{und} \quad \mathbf{R}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{R}_{n+1}(\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)}). \quad (7.60)$$

Diese Prozedur ist solange zu wiederholen, bis

$$\| \mathbf{R}_{n+1}^{(k+1)} \| \leq TOL. \quad (7.61)$$

Sobald die Lösung mit ausreichender Genauigkeit ( $TOL = 10^{-12}$ ) ermittelt wurde, ist der Zustand zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  hinreichend genau bekannt. MÜLLNER [9] hat im Rahmen seiner Arbeit mit dem Softwarepaket *MATLAB* ein Programm zur Überprüfung dieses Algorithmus erstellt und weiters gezeigt, dass das NEWTON-RAPHSON-Verfahren eine asymptotisch quadratische Konvergenzrate zur Lösung der beschriebenen Aufgabe gewährleistet.

### 7.1.5 Berechnung der konsistenten algorithmischen Tangente $\mathbb{C}_{n+1}^{ep}$

Die Grundlagen entnimmt man dem Unterkapitel 4.2.5. Mit dem Ergebnis des Projektionsverfahrens für einen vorgegebenen Verzerrungszustand  $\varepsilon_{n+1}$  ändert sich die linearisierte Gleichung (7.11) zu

$$\mathbf{R}_j + DR_j|_{\varepsilon_{n+1}=\text{konst.}} \cdot \Delta \mathbf{q}_{n+1} + DR_j|_{\mathbf{q}_{n+1}=\text{konst.}} : \Delta \varepsilon_{n+1} = \mathbf{0}, \quad (7.62)$$

wobei  $j \in \{\sigma, \varepsilon, r, \alpha, \beta, f\}$  gilt. Da der konvergierte Zustand zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  betrachtet wird, ist  $\mathbf{R}_j = \mathbf{0}$ . Der Tangentenoperator  $DR_j|_{\varepsilon_{n+1}=\text{konst.}}$  ist ident dem Tangentenoperator  $DR_{n+1}$  aus (7.13) für den konvergierten Zustand. Aufgrund dieser Äquivalenz und der Analogie zwischen (7.13) und (7.62) folgt

$$\Delta \mathbf{q}_{n+1} \Leftrightarrow d\mathbf{q}_{n+1}, \quad (7.63a)$$

$$\mathbf{R}_{n+1}^{(k)} \Leftrightarrow DR_{n+1}|_{\mathbf{q}_{n+1}=\text{konst.}} : d\varepsilon_{n+1}. \quad (7.63b)$$

Für die Lösung von (7.62) wird daher die gleiche Vorgehensweise wie in Unterkapitel 7.1.2 gewählt. Die Anwendung der Analogie (7.63b) auf die Gleichungen (7.10a) bis (7.10f) führt auf

$$\mathbf{R}_\sigma \Leftrightarrow DR_\sigma|_{\mathbf{q}_{n+1}=\text{konst.}} : d\varepsilon_{n+1} = -d\varepsilon_{n+1}, \quad (7.64a)$$

$$\mathbf{R}_j \Leftrightarrow DR_j|_{\mathbf{q}_{n+1}=\text{konst.}} : d\varepsilon_{n+1} = \mathbf{0} \quad \forall \quad j \neq \sigma. \quad (7.64b)$$

Durch Anwendung der Gleichung (7.63a) und Multiplikation von (7.41a) mit  $\mathbb{C}^{-1}$  erhält man

$$\mathbb{C}^{-1} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - d\varepsilon_{n+1} + d\varepsilon_{n+1}^p = \mathbf{0}. \quad (7.65)$$

Aus Gleichung (7.41b) und (7.41c) ergeben sich unter Berücksichtigung von (7.63b) die Gleichungen

$$d\varepsilon_{n+1}^p = \mathbf{r}_{n+1} d\gamma_{n+1} + \gamma_{n+1} d\mathbf{r}_{n+1} \quad \text{und} \quad (7.66)$$

$$d\mathbf{r}_{n+1} = 2\mathbf{b}_{n+1} : d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \cdot d\mathbf{p}_{n+1}. \quad (7.67)$$

Setzt man Gl. (7.67) in (7.66) ein und ermittelt aus den beiden Gleichungen (7.66) und (7.65)  $d\varepsilon_{n+1}^p$  und setzt diese beiden neu erhaltenen Ausdrücke gleich, so erhält man mit der Abkürzung

$$\Xi_{n+1}^{-1} = \mathbb{C}^{-1} + 2\gamma_{n+1} \mathbf{b}_{n+1} \quad (7.68)$$

die folgende Beziehung anstatt Gl. (7.41a) für die Ermittlung von  $\mathbb{C}_{n+1}^{ep}$

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \Xi_{n+1} : \left( d\varepsilon_{n+1} - \mathbf{r}_{n+1} \cdot d\gamma_{n+1} + \gamma_{n+1} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \cdot d\mathbf{p}_{n+1} \right). \quad (7.69)$$

In Analogie zu den Gleichungen (7.41a) bis (7.41f) verbleiben somit nur mehr fünf unbekannte Größen, da  $d\varepsilon_{n+1}^p$  bereits eliminiert wurde. Durch schrittweise Elimination der unbekannt



Größen  $d\mathbf{p}_{n+1}$ ,  $d\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$  und  $d\mathbf{r}_{n+1}$  analog zu Unterkapitel 7.1.4 erhält man eine Beziehung für  $d\gamma_{n+1}$  zu

$$d\gamma_{n+1} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}_{n+1} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}{\tilde{\mathbf{A}}_{n+1} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} : \tilde{\mathbf{C}}_{n+1} + \tilde{\mathbf{B}}} \quad (7.70)$$

mit den Abkürzungen

$$\mathbf{M}_{n+1} = \mathbf{K}_{n+1}^{-1} \cdot \mathbf{L}_{n+1} \quad (7.71)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Pi}}_{n+1} = \left( \mathbb{I} + \gamma_{n+1} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \cdot \mathbf{M}_{n+1} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \mathbf{r}_{n+1}} \right)^{-1} \quad (7.72)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{n+1} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} + 2 \cdot \gamma \cdot \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \cdot \mathbf{M}_{n+1} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \mathbf{r}_{n+1}} : \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_{n+1} \cdot \mathbf{b}_{n+1} \quad (7.73)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{n+1} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \cdot \mathbf{M}_{n+1} \cdot \left( \gamma_{n+1} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \mathbf{r}_{n+1}} : \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_{n+1} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \cdot \mathbf{M}_{n+1} - \mathbb{I} \right) \cdot \mathbf{s}_{n+1} \quad (7.74)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{n+1} = \mathbf{r}_{n+1} + \gamma_{n+1} \cdot \left( \gamma_{n+1} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \cdot \mathbf{M}_{n+1} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \mathbf{r}_{n+1}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_{n+1} - \mathbb{I} \right) \cdot \quad (7.75)$$

$$\cdot \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \cdot \mathbf{M}_{n+1} \cdot \mathbf{s}_{n+1} \quad (7.76)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} = \left[ \mathbf{C}_{n+1}^{-1} + 2 \cdot \gamma_{n+1} \cdot \left( \mathbb{I} - \gamma_{n+1} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \cdot \mathbf{M}_{n+1} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \mathbf{r}_{n+1}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}}_{n+1} \right) \cdot \mathbf{b}_{n+1} \right]^{-1} \cdot \quad (7.77)$$

Damit erhält man die Gleichung (7.69) zu

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} : \left( d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \tilde{\mathbf{C}}_{n+1} \cdot d\gamma_{n+1} \right) \quad (7.78)$$

Durch Auflösen des Klammersausdrucks und Einsetzen von Gl. (7.70) in (7.78) erhält man

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} : \tilde{\mathbf{C}}_{n+1} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{A}}_{n+1} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}{\tilde{\mathbf{A}}_{n+1} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} : \tilde{\mathbf{C}}_{n+1} + \tilde{\mathbf{B}}} \quad (7.79)$$

Hebt man auf der rechten Seite der Gleichung (7.79)  $d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  heraus und vergleicht das Ergebnis mit Gleichung (4.38), erhält man die konsistente elastoplastische Tangente zu

$$\mathbf{C}_{n+1}^{ep} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} - \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} : \tilde{\mathbf{C}}_{n+1} \otimes \tilde{\mathbf{A}}_{n+1} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}}{\tilde{\mathbf{A}}_{n+1} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} : \tilde{\mathbf{C}}_{n+1} + \tilde{\mathbf{B}}_{n+1}} \quad (7.80)$$

Abbildung 7.1 zeigt die geometrische Interpretation der konsistenten Tangente bei Betrachtung einer infinitesimal benachbarten Fließfläche.

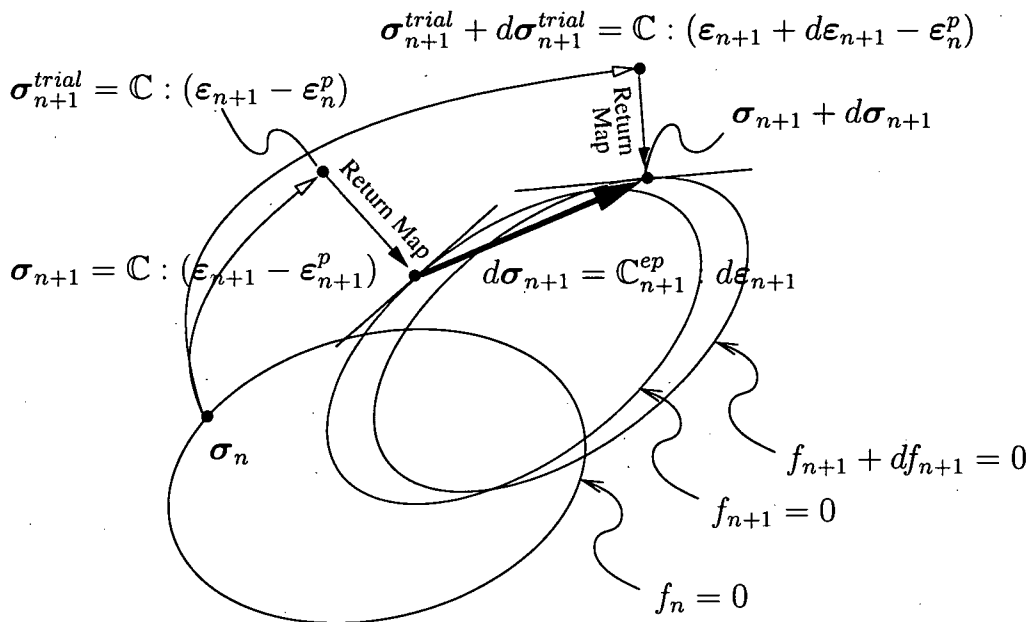


Abbildung 7.1: Geometrische Interpretation der konsistenten Tangente

## 7.2 Implementierung des elasto-plastischen Materialmodells in eine FE-Software

Das vorgestellte Materialmodell wird in das Finite-Elemente-Softwarepaket *MARC* (Version K6.2) für die Plattform *UNIX* implementiert. Dieses Softwarepaket stellt verschiedene User-Subroutinen zur Verfügung, wobei für die Implementierung eines eigenen Materialgesetzes die User-Subroutine *HYPELA* verwendet wird. Dazu wird das Materialmodell in der Programmiersprache *FORTRAN* geschrieben, wobei ursprünglich mit dem Sprachumfang *FORTRAN 77* begonnen wurde und zu einem späteren Zeitpunkt eine Umstellung auf *FORTRAN 90* erfolgte. Als Hilfe für die Erstellung des Programmcodes diente eine mit dem Softwarepaket *MATLAB* erstellte Version des Materialmodells von MÜLLNER [9]. Der Umfang des *FORTRAN*-Programmcodes beläuft sich auf etwa 30 Unterprogramme mit insgesamt 9300 Programmzeilen.

Mit dem erstellten Programmmodul des elasto-plastischen Materialmodells ist man in der Lage, Strukturberechnungen unter der Zugrundelegung eines ebenen Spannungszustandes durchzuführen. Durch Verwendung verschiedener Definitionsmöglichkeiten der Materialhauptrichtungen im *MARC*-Softwarepaket für anisotrope Werkstoffe können innerhalb einer ebenen Struktur beliebig viele Materialhauptrichtungen vorgegeben werden. Dies ermöglicht die Simulation einer aus mehreren Holzteilen zusammengesetzten Konstruktion. Des Weiteren können durch Hinzufügen eines kleineren Unterprogrammes beliebige Krümmungen der Faserlängsrichtung (z. B. gekrümmter Holzleimbinder) vorgegeben werden. Eine weitere Möglichkeit ist die Berücksichtigung eines lagenweisen Aufbaues einer Holzstruktur mit verschiedenen Faserrichtungen (z. B. Dreischichtplatte). Nicht implementiert ist die Möglichkeit der Vorgabe verschiedener Materialparametersätze für eine Berechnung.

### 7.2.1 Ablauf einer physikalisch nichtlinearen Strukturberechnung

Für physikalisch lineares Materialverhalten lautet die durch Formulierung eines Energieprinzips erhaltene Gleichgewichtsbedingung in Matrixform

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}. \quad (7.81)$$

Darin bezeichnen  $\mathbf{K}$  die Struktursteifigkeitsmatrix,  $\mathbf{u}$  den Verschiebungsvektor und  $\mathbf{F}$  den Lastvektor. Diese Gleichung zeigt den linearen Charakter des Systems. Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  ist eine lineare Funktion des Lastvektors  $\mathbf{F}$ . Wird die Belastung auf den  $k$ -fachen Wert ( $k\mathbf{F}$ ) erhöht, erhält man einen  $k$ -fachen Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$ . Im Falle von physikalisch nichtlinearem Materialverhalten tritt anstelle von (7.81) die Gleichung

$$\mathbf{K}_{T_{n+1}}^{(m-1)} \cdot \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(m)} = \Delta \mathbf{F}_{n+1}^{(m-1)}. \quad (7.82)$$

$\mathbf{K}_T$  bezeichnet die Tangentenstruktursteifigkeitsmatrix,  $\Delta \mathbf{u}$  den Verschiebungszuwachs innerhalb eines Iterationsschrittes  $m$  des Inkrementes  $n + 1$  und  $\Delta \mathbf{F}$  die Änderung des Lastvektors. Dieser setzt sich aus der Differenz zwischen dem Lastvektor  $\mathbf{F}^{ext}$  und dem Vektor der inneren Kräfte  $\mathbf{F}^{int}$  zusammen:

$$\Delta \mathbf{F}_{n+1}^{(m-1)} = \mathbf{F}_{n+1}^{ext} - \mathbf{F}_{n+1}^{int(m-1)}. \quad (7.83)$$

Die Lösung des Gleichungssystems (7.82) erfolgt inkrementell iterativ mit Hilfe des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens. Dieses Iterationsverfahren konvergiert in der verwendeten klassischen Form (*Pure Newton Raphson*) sehr rasch, hat aber den Nachteil eines großen rechentechnischen Aufwandes, da in jedem Iterationsschritt die Tangentenstruktursteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  berechnet und zur Ermittlung von  $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(m)}$  invertiert werden muss. Daher existieren Modifikationen des Verfahrens, die jedoch für die FE-Simulationen im Rahmen dieser Arbeit (Testbeispiele (siehe Kap. 7.2.2) und Strukturberechnungen (siehe Kap. 8)) nicht angewendet werden.

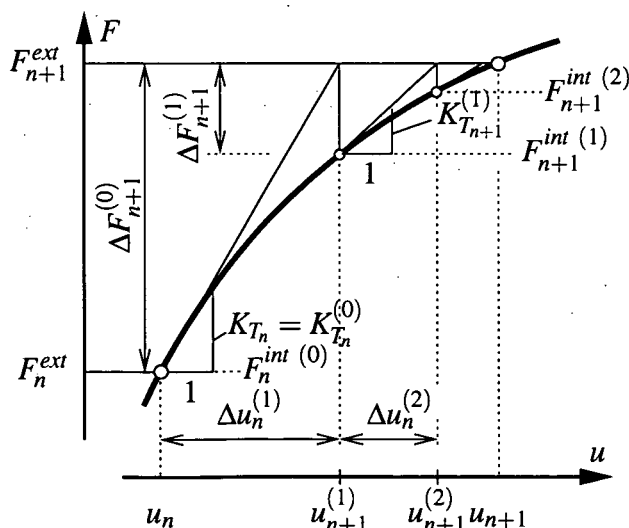


Abbildung 7.2: Prinzip des NEWTON-RAPHSON-Iterationenverfahrens, dargestellt für das Inkrement  $n + 1$

Bei einem Iterationsverfahren wird die Lösung stets nur approximiert. Daher benötigt man ein Kriterium zum Abbruch der Gleichgewichtsiteration. In Abhängigkeit von der Art der FE-Simulation (Verschiebungssteuerung oder Kraftsteuerung) wird entweder ein Verschiebungskriterium oder ein Kraftkriterium herangezogen. Mit Ausnahme einiger kleiner Testbeispiele werden im Rahmen dieser Arbeit alle FE-Berechnungen verschiebungsgesteuert durchgeführt.

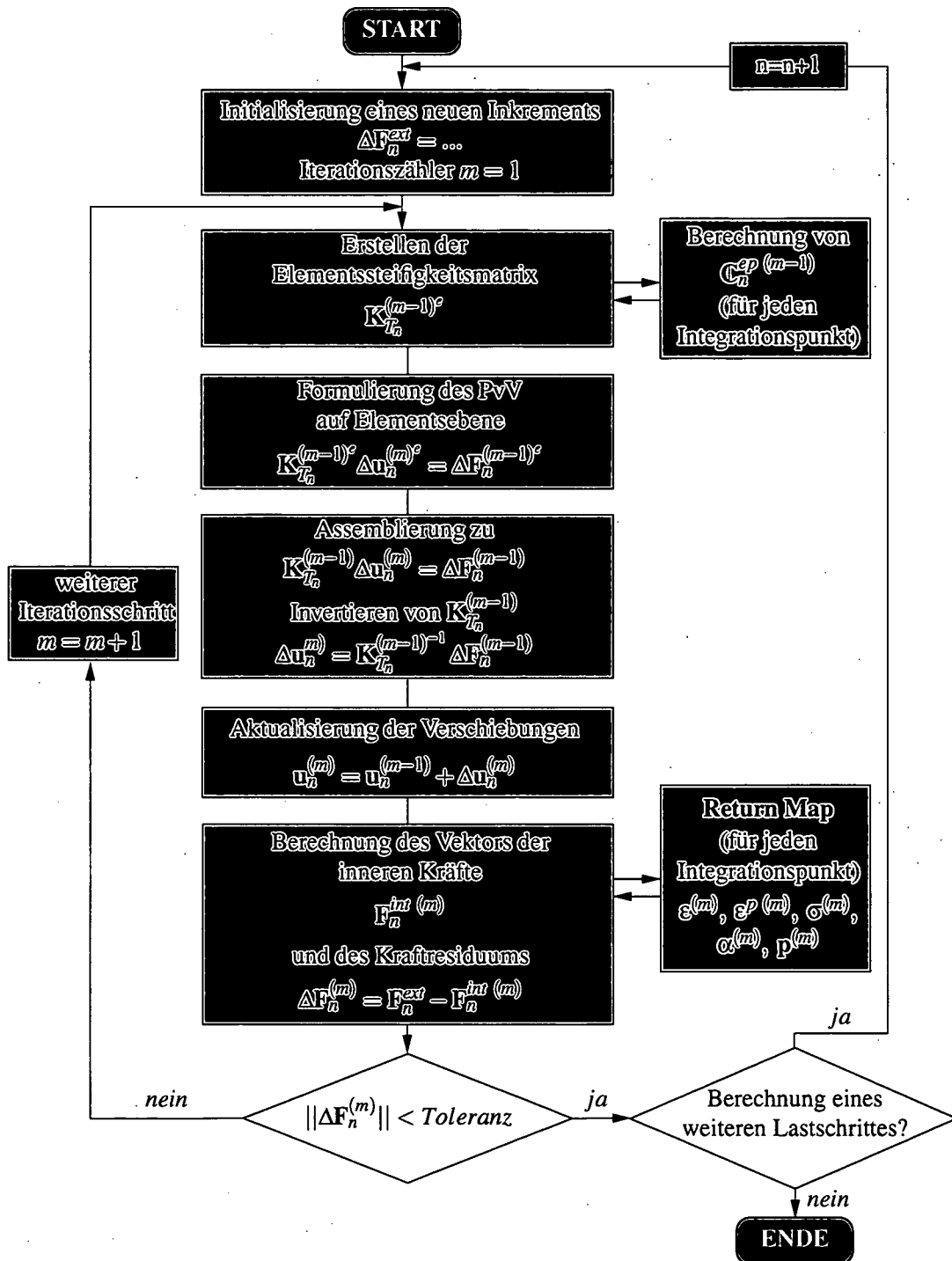


Abbildung 7.3: Struktogramm einer globalen, nichtlinearen FE-Berechnung

## 7.2.2 Verifikation des Programmcodes anhand von Testbeispielen

Zwecks Überprüfung des Programmcodes des Materialmodelles wurden verschiedene FE-Testbeispiele gerechnet. Diese werden in zwei Kategorien eingeteilt:

- Testbeispiele mit einem homogenen Deformationszustand und
- Testbeispiele mit einem inhomogenen Deformationszustand (Strukturberechnungen).

Die nachfolgende Dokumentation enthält alle wesentlichen Testberechnungen, welche zur Überprüfung des Programmcodes erforderlich waren. Im Zuge der Implementierung des Materialmodells in das Softwarepaket *MARC* wurden zahlreiche weitere Testbeispiele gerechnet, welche vor allem dazu dienten, Programmierfehler zu finden.

### 7.2.2.1 Testbeispiel mit einem homogenen Deformationszustand

#### 1. Berechnungen mit einem einzelnen Finiten Element

Diese Beispiele hatten folgende zwei Aufgaben:

- Überprüfung des Return-Map-Algorithmus und der konsistenten elasto-plastischen Tangente mit Hilfe des *MATLAB*-Codes von MÜLLNER [9].
- Überprüfung der Richtigkeit der inkrementellen Vorgangsweise (wie im Unterkapitel 7.2.1 beschrieben) für die Iterationsschritte  $m$  innerhalb eines Inkrementes  $n$  (Updateprozess aller erforderlichen Größen).

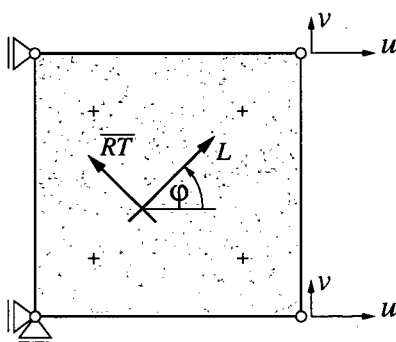


Abbildung 7.4: Geometrie des 1-Element-Beispiels

Mit einer Struktur, bestehend aus einem einzigen finiten Element (siehe Abb. 7.4) mit linearem Verschiebungsansatz wurden durch Verschiebungssteuerung alle fünf Evolutionsgesetze für die Entwicklung der plastischen Verzerrungen getrennt untersucht. Für die Zug- bzw. Druckbeanspruchung in  $L$ - bzw.  $\overline{RT}$ -Richtung wurden jeweils quasi-uniaxiale Deformationszustände aufgebracht, für die Überprüfung des Schub-Evolutionsgesetzes wurde ein gemischter Beanspruchungszustand angenommen.

Für die Beanspruchungszustände Druck in  $L$ - bzw. in  $\overline{RT}$ -Richtung sowie für Schubbeanspruchung in der  $LRT$ -Ebene traten bei Verwendung der Evolutionsgesetze wie in den Abbildungen 5.36, 5.41 und 6.19 dargestellt, keine numerischen Probleme auf. Daher werden diese drei genannten Evolutionsgesetze unverändert für alle weiteren (Test-)Beispiele verwendet. Bei Zugbeanspruchung in  $L$ - bzw. in  $\overline{RT}$ -Richtung traten, wie bereits in den

Unterkapiteln 5.5.4 und 5.5.4 erwähnt, bei Verwendung von physikalisch realistischen Evolutionsgesetzen (Erhöhung des Wertes  $k_{tL}$  bzw.  $k_{t\overline{RT}}$ ) mit einem steilen Abfall der Spannungen entsprechend dem extrem spröden Versagen numerische Probleme bei der lokalen Iteration in den Integrationspunkten (Return Map) auf. Der Iterationsalgorithmus konvergierte auch bei Vorgabe einer sehr hohen Toleranz nicht. Die Abb. 7.5 zeigt verschieden stark entfestigende Evolutionsgesetze. Der Bereich der numerisch instabilen Pfade wird für eine physikalisch sinnvolle Wiedergabe des spröden Materialverhaltens unbedingt benötigt. Daher wurde für die beiden Versagensmechanismen Zug in  $L$ - und  $\overline{RT}$ -Richtung nach einem modifizierten Entfestigungsalgorithmus gesucht. Wichtigstes Ziel dabei war, numerisch möglichst stabile FE-Strukturberechnungen durchführen zu können.

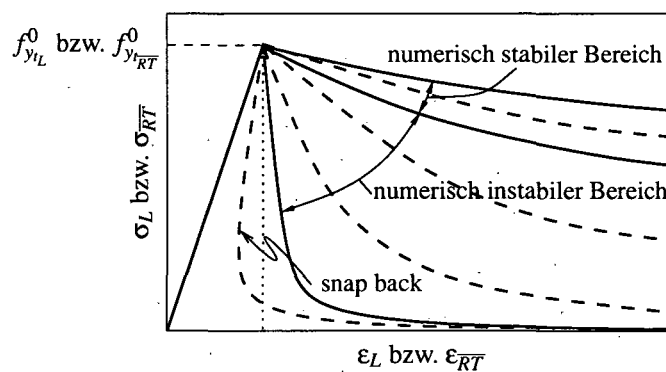


Abbildung 7.5: Numerisch stabile sowie instabile Entfestigungspfade

Dieses Ziel konnte durch Annahme einer sprunghaften Entfestigung erreicht werden. Dabei wird bei dem Überschreiten der Zugfließspannungen in  $L$ - und/oder in  $\overline{RT}$ -Richtung in jedem neuen Belastungssinkrement  $n$  beim jeweils ersten Iterationsschritt  $m$  eine neue Fließfläche derart vorgeschrieben, dass die Zugfließspannungen sprunghaft um einen gewissen Betrag vermindert werden. Die Größe dieses Betrages wird prozentuell von der initialen Fließspannung berechnet und beträgt je Inkrement  $n$  2%. Dieser Vorgang wiederholt sich für jedes Belastungssinkrement, bis eine Reduktion auf 6% der initialen Fließspannung erreicht wird (siehe Abb. 7.6 und 7.7). Bis zu dieser Grenze ist die gewünschte numerische Stabilität gewährleistet. Für diese gewählte Vorgangsweise ist der Abfall der Spannungen im  $\sigma\epsilon$ -Diagramm abhängig von der Größe des Belastungssinkrementes, was theoretisch nicht wünschenswert ist. Der Vorteil liegt jedoch darin, dass die numerische Stabilität für die globale Gleichgewichtssiteration deutlich erhöht werden kann. Erklärung: Je mehr Energie pro Belastungssinkrement  $n$  dissipiert, desto schlechter verläuft die Konvergenz der globalen Gleichgewichtssiteration. Dieses Problem kann durch die inkrementgrößenabhängige Entfestigung verbessert werden. Je größer das Belastungssinkrement und desto flacher der Abfall im  $\sigma\epsilon$ -Diagramm, desto weniger Energie dissipiert pro Integrationspunkt. Dies führt zu einer verbesserten numerischen Stabilität auf Strukturebene.

Für die Ermittlung der elasto-plastischen Tangente  $C^{ep}$  hat das in den Abbildungen 5.35 und 5.37 verwendete Evolutionsgesetz weiter Gültigkeit. Die Exponentialfunktion wird jeweils in die verbleibende Zugfestigkeit in  $L$ - und/oder in  $\overline{RT}$ -Richtung eingepasst, d.h., dass die Anfangsneigung mit zunehmender Entfestigung abnimmt, was sich ebenfalls positiv auf die

numerische Stabilität bei der Ermittlung von  $C^{ep}$  auswirkt.

Die beiden Abbildungen 7.6 und 7.7 zeigen das aus der zuvor beschriebenen Vorgangsweise resultierende Spannungs-Dehnungs-Diagramm für eine jeweils uniaxiale Zugbeanspruchung in  $L$ - bzw. in  $\overline{RT}$ -Richtung. Die Punkte stellen die einzelnen Belastungssinkremente dar.

Der beschriebene Entfestigungsalgorithmus hat den Nachteil, dass er unabhängig vom auftretenden Spannungszustand abläuft. Kommt es zu einer biaxialen Zugbeanspruchung, so würden unabhängig vom Spannungsverhältnis  $\sigma_L/\sigma_{\overline{RT}}$  beide sprunghaften Entfestigungen in gleicher Größe wirksam werden. Dies entspricht jedoch nicht dem realen physikalischen Verhalten. Eine nahezu uniaxiale Zugbeanspruchung in  $L$ -Richtung darf nicht zur Folge haben, dass die Entfestigung in  $\overline{RT}$ -Richtung ebenfalls in der gleichen Größenordnung erfolgt. Dies gilt auch umgekehrt für eine nahezu uniaxiale Zugbeanspruchung in  $\overline{RT}$ -Richtung. Dieser Schwachpunkt wird durch Einbau eines zusätzlichen, vom Spannungsverhältnis  $\sigma_L/\sigma_{\overline{RT}}$  abhängigen Kriteriums zur Steuerung der sprunghaften Entfestigungsgesetze beseitigt.

Das Auftreten eines sogenannten *snap-back* – einem Rücksprung des Entfestigungspfades (siehe Abb. 7.5) konnte in den Testbeispielen nicht beobachtet werden. Trotzdem wird dies durch einen entsprechenden Schalter im Programmcode verhindert.

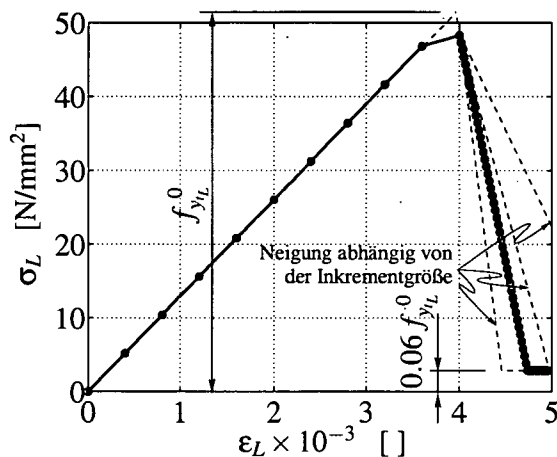


Abbildung 7.6: Sprunghafte Entfestigung bei Zugbeanspruchung in  $L$ -Richtung

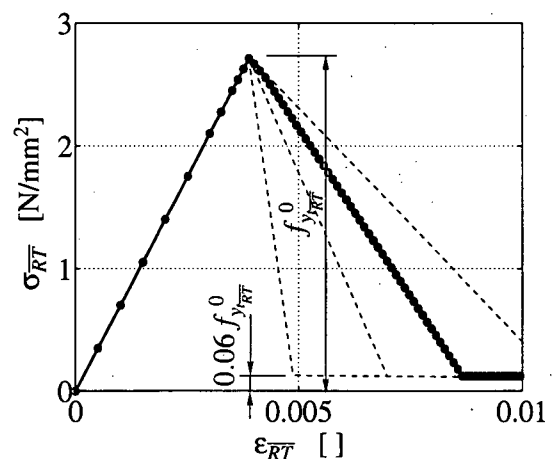


Abbildung 7.7: Sprunghafte Entfestigung bei Zugbeanspruchung in  $\overline{RT}$ -Richtung

Ausführliche Überlegungen im Bereich des Zugversagens von Holz sind in der Diplomarbeit von KOHLHAUSER [47] und von SCHMIDT et. al. in [48] enthalten.

Ein Beispiel für eine durch plastische Belastung entstehende veränderte Fließfläche für Zugbeanspruchung in  $L$ -Richtung zeigt Abb. 7.9. Weitere Illustrationen der verschiedenen Versagensmechanismen sind in der Arbeit von MÜLLNER [9] enthalten. (Hinweis: Im Rahmen von Strukturberechnungen gilt für jeden einzelnen Integrationspunkt mit plastischer Belastung eine andere Fließfläche.) Eine Übersicht über alle Evolutionsgesetze, wie sie für die weiteren FE-Simulationen verwendet werden, gibt Abb. 7.8.

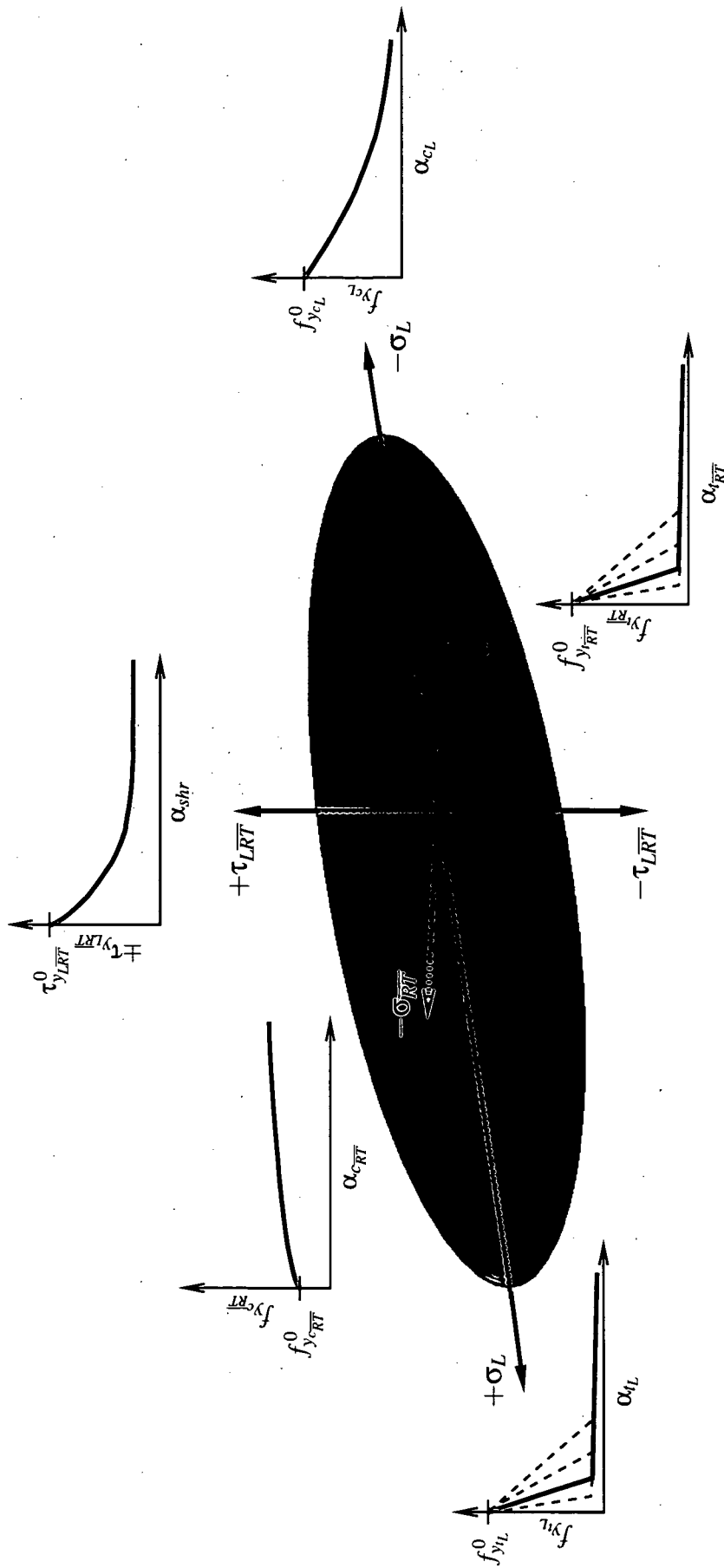


Abbildung 7.8: Initiale Fließfläche nach TSAI & WU sowie Evolutionsgesetze (verzerrt dargestellt)



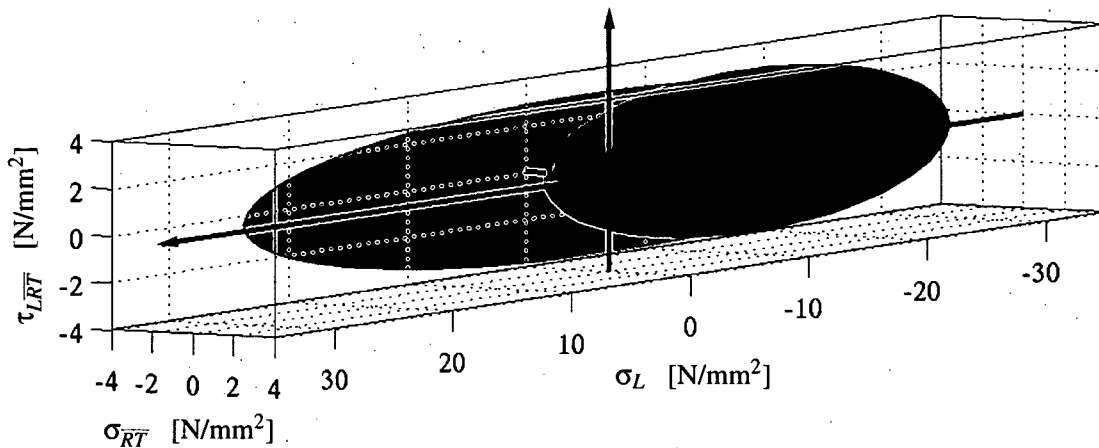


Abbildung 7.9: Initiale und veränderte Fließfläche bei Zugversagen in  $L$ -Richtung ( $k_{sa} = 0.30$ )

## 7.2.2.2 Testbeispiele mit einem inhomogenen Deformationszustand

### 2. Kragbalken, bestehend aus drei Materialien

Die gewählte Vorgangsweise für entfestigendes Materialverhalten ermöglicht keine diskrete Ausbildung von Rissen. Mittels eines möglichst einfachen Beispiels soll überprüft werden, ob durch das verwendete Konzept der Verschmierung von Rissen eine Abbildung dieser auf Strukturebene möglich ist. Dazu wird ein Kragbalken, bestehend aus acht finiten Elementen und drei verschiedenen Materialien in dem mit  $M$  gekennzeichneten Punkt (siehe Abb. 7.10) durch eine eingeprägte Verdrehung beansprucht. Es wird erwartet, dass sich in der oberen Elementsreihe ein Riss ausbildet, welcher dazu führen soll, dass einerseits das aufnehmbare Biegemoment um zumindest die Hälfte des maximalen Wertes absinkt und andererseits die Struktursteifigkeit im so genannten Nachbruchbereich deutlich geringer wird. Auf eine konkrete Dokumentation der Materialparameter für dieses Beispiel wird bewusst verzichtet, da diese keinen Einfluss auf das zu untersuchende Phänomen haben.

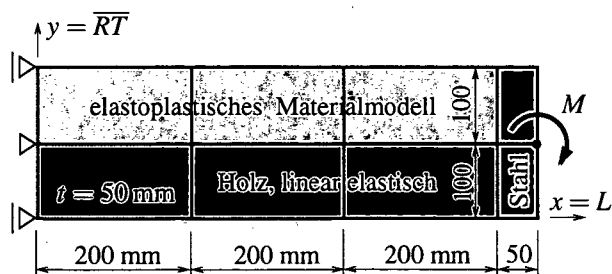


Abbildung 7.10: Geometrie des Kragbalken-Beispiels, bestehend aus acht Elementen

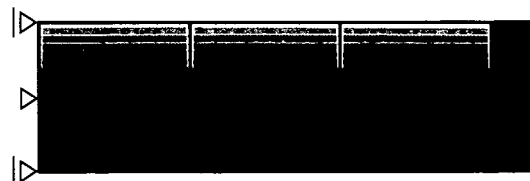


Abbildung 7.11: Verteilung der plastischen Verzerrungen in  $L$ -Richtung ( $\epsilon_L^p$ )

In der Abbildung 7.11 sind die blauen Bereiche durch  $\epsilon_L^p = 0$  gekennzeichnet. Alle anderen Farben stellen Bereiche mit  $\epsilon_L^p > 0$  dar, wobei die Größtwerte durch die gelbe Farbe gekenn-

zeichnet werden. In den Bereichen mit  $\varepsilon_L^p > 0$  bildet sich ein verschmierter Riss, ausgehend vom oberen Rand der Struktur verschmiert über die drei linken, oberen Elemente, aus. Dies entspricht exakt dem erwarteten Phänomen, da auf Grund der Beanspruchung kein Gradient im Spannungsverlauf in  $x = L$ -Richtung auftritt und der Riss somit gleichzeitig bei allen Elementen mit dem elasto-plastischen Materialmodell am Rand beginnen und bis zur Mitte fortschreiten muss.

Die Abbildung 7.12 zeigt, wie erwartet, dass das auftretende Reaktionsbiegemoment im Punkt  $M$  auf etwa 44% absinkt und die Struktursteifigkeit im Nachbruchbereich deutlich geringer ist. Bemerkung: Der Nachbruchpfad im Diagramm 7.12 (steiler Abfall des Reaktionsbiegemomentes nach dem Erreichen des Maximalwertes und geringerer Anstieg der Struktursteifigkeit als im elastischen Bereich nach vollständiger Rissausbildung) stellt einen Idealfall dar. Je größer die Anzahl der finiten Elemente und desto komplexer der Beanspruchungszustand, desto größer werden die numerischen Instabilitäten bei der globalen Gleichgewichtsiteration. Daher kann bei großen, durch ein sprödes Versagen gekennzeichnete FE-Strukturen nach Ausbildung verschmierter Risse der Abfall der Struktursteifigkeit nicht in der Steilheit wie im Diagramm 7.12 dargestellt, abgebildet werden.

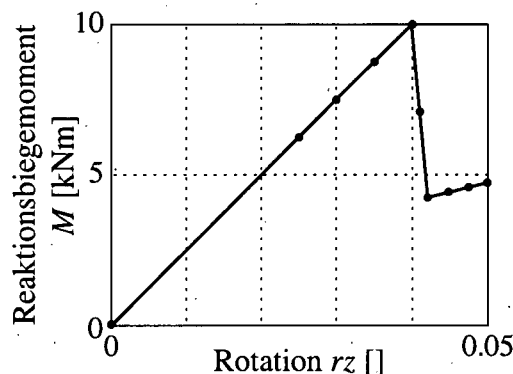


Abbildung 7.12: Reaktionsbiegemoment-Rotations-Diagramm

### 3. Biegebalken

Ziel dieses Testbeispiels ist es, einerseits den Übergang von kleinen auf größere FE-Strukturen in Hinblick auf die numerische Stabilität der globalen Gleichgewichtsiteration zu vollziehen und andererseits die Tauglichkeit des sprunghaften Entfestigungsalgorithmus zu überprüfen. Als FE-Struktur (siehe Abb. 7.13) wurde ein Einfeldträger herangezogen, wobei die Belastung durch Verschiebung des Knotens  $A$  in Feldmitte in vertikaler Richtung  $v$  erfolgte. Durch Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften wurde die halbe Struktur modelliert. Im Auflagerbereich sowie im Lasteinleitungsbereich wurden zur Lastverteilung Stahlplatten im FE-Modell verwendet. Auf eine konkrete Dokumentation der Materialparameter und Abmessungen wird wie bei Beispiel 2 verzichtet, da diese keinen Einfluss auf die Zielstellung dieses Beispiels haben.

Abb. 7.14 zeigt das Reaktionskraft-Vertikalverschiebungsdiagramm im Punkt  $A$ . Wie erwartet, weicht der Last-Verschiebungspfad bis zur Traglast nur gering von der Linearität ab, d.h. der Bruch ist sehr spröde, Spannungsumlagerungen sind nur in einem sehr geringen



Abbildung 7.13: Geometrie des Biegebalken-Beispiels

Maße möglich. Dies begründet sich aus der Tatsache, dass sowohl für Zugbeanspruchung als auch für Druckbeanspruchung in  $L$ -Richtung Entfestigungsgesetze verwendet werden. Der geringere Abfall des Evolutionsgesetzes für Druckbeanspruchung als für Zugbeanspruchung in  $L$ -Richtung reicht für eine Umlagerung der Spannungen nicht aus.

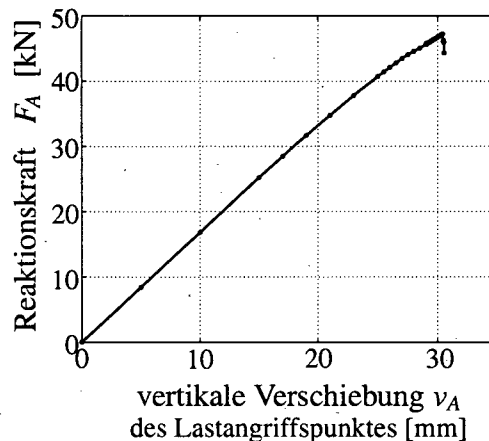


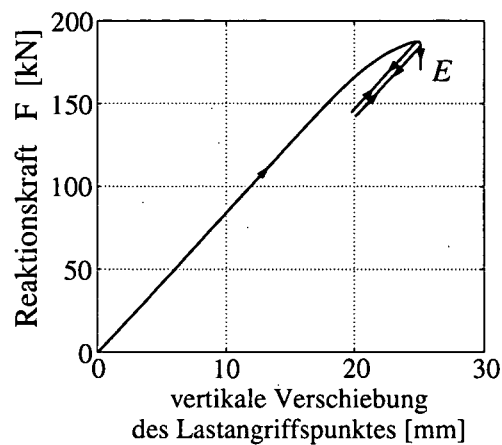
Abbildung 7.14: Reaktionskraft-Vertikalverschiebungsdiagramm des Biegebalkens

Mit der der FE-Struktur aus Abb. 7.13 wurde eine weitere Studie durchgeführt. Dabei wurde untersucht, wie groß der Einfluss ist, wenn der sprunghafte Abfall der Spannungen nicht wie bei Beispiel 1 erwähnt, bis auf 6% der initialen Fließspannung erfolgt (siehe auch Abb. 7.6 und 7.7). Die Ergebnisse zeigen, dass eine Absenken der initialen Fließspannungen bis auf ein Niveau von etwa 50% ausreichend wäre. Mit diesem Wert erreicht man annähernd die gleichen Traglasten, wie mit einer Reduktion auf 6%. Die Ursache liegt vermutlich im Konzept der verschmierten Rissbildung. Die zur Ausbildung eines diskreten Risses erforderliche dissipierende Energie setzt sich durch das Verschmieren des diskreten Risses überwiegend aus Anteilen über dem Spannungsniveau von 50% zusammen.

#### 4. Trägerdurchbruch mit nahezu ideal plastischem Materialverhalten

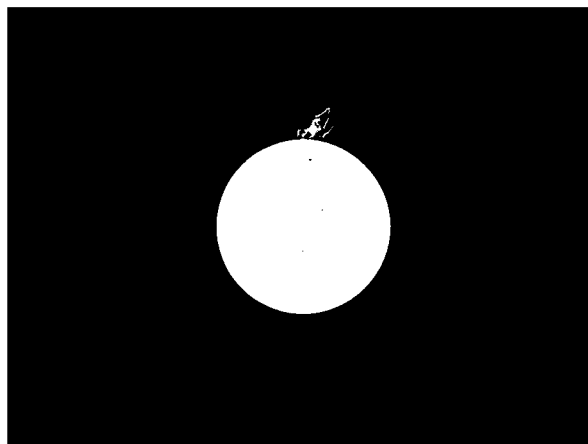
Mit diesem Beispiel wird getestet, ob Belastungszyklen mit dem Programmmodul richtig berechnet werden. Weiters soll überprüft werden, ob durch temporäre Veränderung aller Evolutionsgesetze durch Annahme eines nahezu ideal plastischen Materialverhaltens (sowohl für Druck- als auch für Zugbeanspruchung in beiden Materialhaupttrichtungen  $L$  und  $\overline{RT}$ ) ein

ausgeprägter nichtlinearer Last-Verschiebungspfad erzeugt werden kann. Als FE-Modell wird die gleiche Struktur wie im Unterkapitel 8.2 dokumentiert (Durchmesser des Durchbruches:  $d = 0.4 h$ ), verwendet.



**Abbildung 7.15:** Reaktionskraft-Vertikalverschiebungsdiagramm für den Lastangriffspunkt

Die Abb. 7.15 zeigt wie bei Beispiel 3 ein Reaktionskraft-Vertikalverschiebungsdiagramm des Lastangriffspunktes für einen Belastungs-Entlastungs-Wiederbelastungs-Entlastungs-Wiederbelastungszyklus. Es lässt sich ein deutliches nichtlineares Verhalten der Struktur erkennen. Die Entlastungspfade verlaufen richtigerweise parallel zur Anfangssteifigkeit der Struktur. Eine Weiterführung der verschiebungsgesteuerten Berechnung am Ende des Kraft-Verschiebungspfades (mit  $E$  gekennzeichneten Punkt im Diagramm 7.15) ist nicht mehr möglich, da die globale Gleichgewichtsiteration nicht mehr konvergiert.



**Abbildung 7.16:** Zonen mit plastischen Deformationen im Bereich des Durchbruchs im Traglastzustand (= Maximalkraft)

## Anwendungsbeispiele

Ein wichtiger und zugleich wesentlicher Schritt zur praktischen Anwendung des elasto-plastischen Materialmodells in der Industrie im Zuge der Berechnung von Holztragwerken ist die Verifikation des Werkstoffmodells anhand von Finite-Elemente-Simulationen und deren Vergleich mit Ergebnissen von Versuchen. Im Rahmen dieser Arbeit werden drei Beispiele detailliert behandelt, wobei jeweils ergänzende Experimente durchgeführt wurden. Es sind dies

- eine Kleinstruktur in I-Form,
- ein kreisförmiger Durchbruch in einem Biegeträger und
- ein Dreibock (Anschluss zweier Streben an einem Untergurt mit einfachen Versätzen)

Im Vordergrund bei der Beurteilung der FE-Berechnungen im Zusammenhang mit den Strukturversuchen stand der Vergleich der Traglast.

Die in den Unterkapiteln 8.2 und 8.3 dokumentierten Versuche wurden in Kooperation mit dem Institut für Holzbau und Holztechnologie der TU Graz durchgeführt.

### 8.1 Kleinstruktur in I-Form

Mit dem vorliegenden Beispiel soll gezeigt werden, wie der Übergang von den Materialversuchen und dem daraus entwickelten Materialmodell zu Experimenten und numerischen Simulationen auf die Strukturebene vollzogen wird. Dazu wird eine Kleinstruktur in I-Form aus fehlerfreiem Fichtenholz in der *LR*-Ebene in vierfacher Ausführung gefertigt (siehe Abb. 8.1 und 8.2). Die Abmessungen wurden so gewählt, dass die Versuchsdurchführung auf der im Unterkapitel 3.1.1 beschriebenen Biaxialprüfmaschine erfolgen kann. Der schräg zur Faserichtung durchgeführte Druckversuch erfolgt verschiebungsgesteuert, wobei der Probekörper in vertikaler Richtung um  $2 \times 1,25 = 2,50$  mm gestaucht wird.

Ziel dieses Beispiels ist es, zu überprüfen, in wie weit eine quantitative Übereinstimmung des Materialmodells mit den Versuchsergebnissen erzielt werden kann. Dazu ist es erforderlich, die Materialparameter für die FE-Simulation abweichend von den im Kapitel 5 angeführten Mittelwerten für die  $LR$ -Ebene anzunehmen (siehe Tabelle 8.1), da die Ergebnisse der numerischen Berechnung mit den Werten aus Kapitel 5 nicht zufriedenstellend waren.

Alle Materialparameter liegen jedoch innerhalb der üblichen Streubereiche, wie sie u.a. von EBERHARDSTEINER in [1] angegeben wurden.

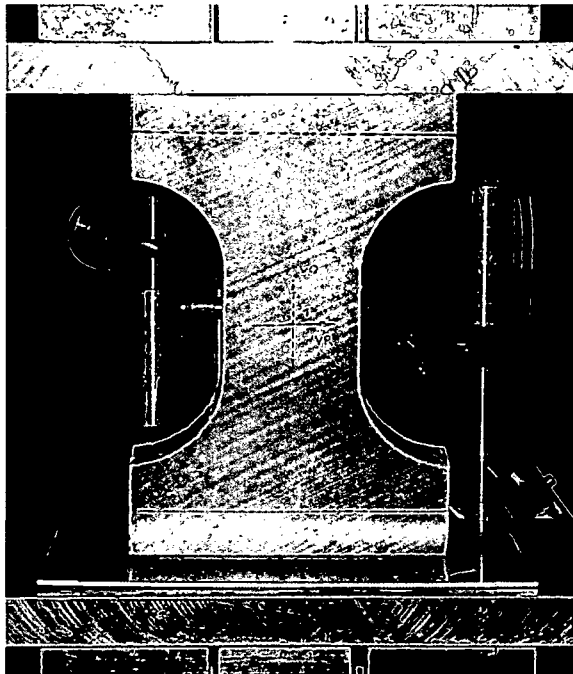


Abbildung 8.1: Referenzkonfiguration des Probekörpers

Tabelle 8.1: Materialparameter der Kleinstruktur in I-Form

Materialparameter		
$E_L$	[N/mm <sup>2</sup> ]	9 000
$E_R$	[N/mm <sup>2</sup> ]	500
$\nu_{LR}$	[ ]	0.50
$G_{LR}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	450
$\max f_{y_{tL}}^0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	+49.00
$\min f_{y_{cL}}^0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	-37.00
$\max f_{y_{tRT}}^0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	+3.40
$\min f_{y_{cRT}}^0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	-3.00
$\max \tau_{y_{LRT}}^0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	+6.50

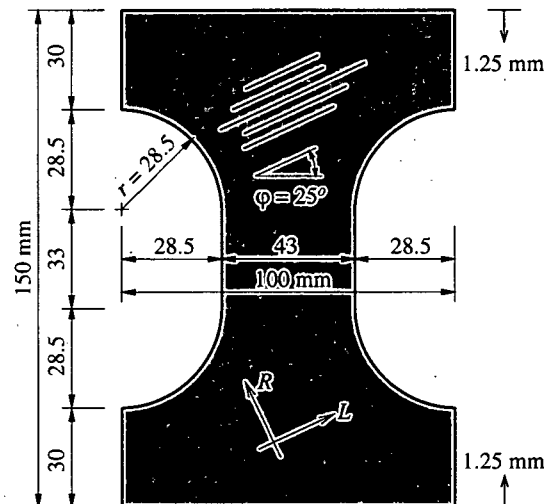


Abbildung 8.2: Abmessungen des Probekörpers

Die bei Versuchsbeginn unvermeidbar auftretenden Nichtlinearitäten im Last-Verschiebungsdiagramm wurden in Abbildung 8.5 durch Geraden (strichliert eingezeichnet) ersetzt. Eine Gegenüberstellung der flächenhaften Deformationen, gemessen mit dem ESPI-System, und den numerischen Ergebnissen war nicht möglich, da die Verschiebungen im plastischen Bereich stark lokal begrenzt auftraten und daher vom Speckle-Messsystem wegen zu großer Deformationen pro Schritt nicht mehr erfasst werden konnten.

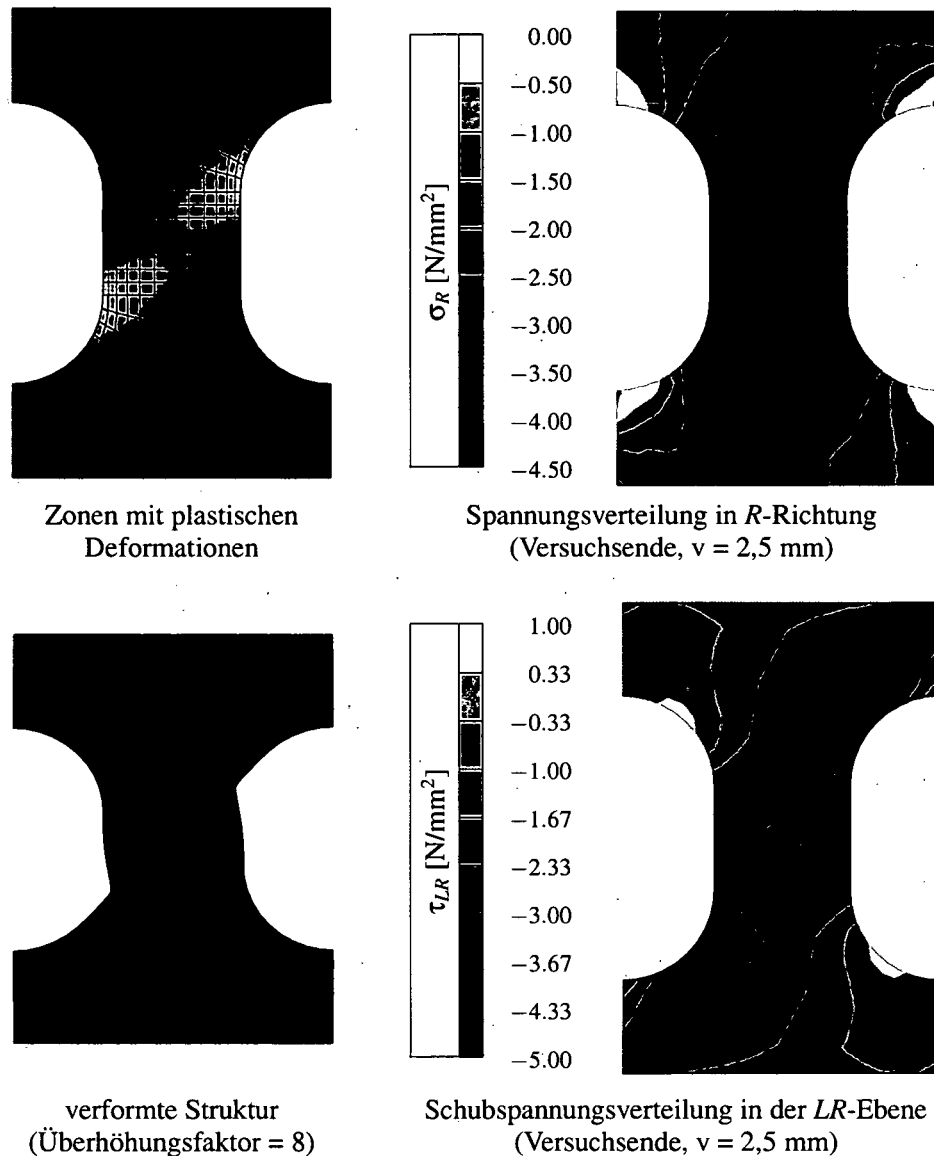


Abbildung 8.3: Ergebnisse der Finite-Elemente-Simulation

Betrachtet man die verformten Probekörper nach Versuchsende (siehe Abb. 8.4), so erkennt man, dass die Zonen mit plastischen Deformationen (Ausbildung von Gleitebenen in Faserlängsrichtung) sehr gut mit denen aus der FE-Berechnung übereinstimmen. Des Weiteren ist auch der beginnende Versagensmechanismus aus der numerischen Berechnung (Druck in radialer Richtung kombiniert mit Schubversagen) mit den Ergebnissen der Experimente gut vergleichbar.



Abbildung 8.4: Ausschnitt des deformierten Probekörpers (Nr. 2)

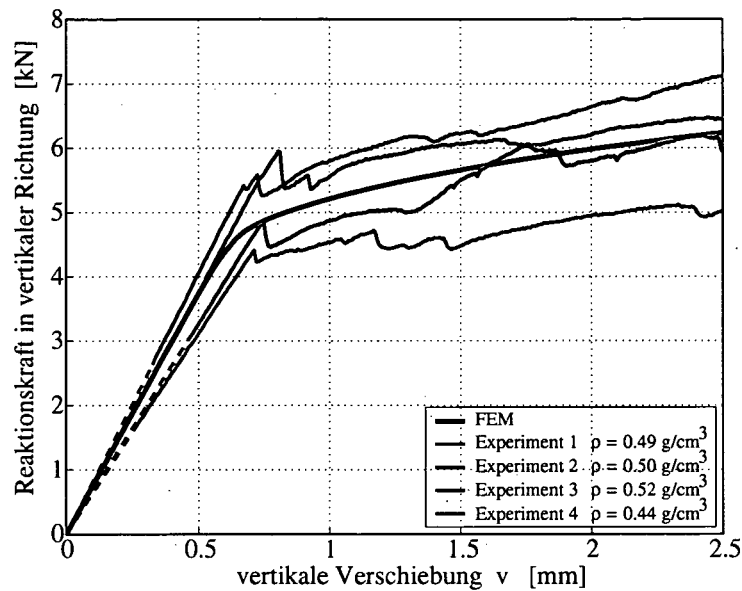


Abbildung 8.5: Last-Verschiebungsdiagramm

Durch Messung der Höhe des Probekörpers nach Versuchsende konnten die plastischen Deformationsanteile abgeschätzt werden. Diese lagen im Bereich von 1.5 bis 1.9 mm und stimmen mit den aus dem Diagramm 8.5 ablesbaren plastischen Deformationen überein. Dazu denkt man sich am Ende jedes Pfades eine Entlastungsgerade, welche parallel zur Anfangsneigung verläuft. Der Abschnitt vom Wert  $v = 0$  bis zum Schnittpunkt der gedachten Entlastungsgeraden mit der Abszisse ist ident mit den plastischen Deformationsanteilen.

#### Beurteilung des Beispiels:

Durch eine sinnvolle Annahme der Materialparameter können die Ergebnisse der FE-Simulation mit sehr guter Genauigkeit an die Versuchsergebnisse angepasst werden. Das Materialmodell ermöglicht somit eine für diesen Fall sehr gute Approximation des realen Verhaltens der Struktur. Die in diesem Beispiel gewählte Vorgehensweise der quasi-Anpassung der Materialparameter an die Ergebnisse der Experimente wurde ausschließlich für dieses Beispiel angewendet. Im Vordergrund bei diesem Beispiel stand nicht die Kalibrierung der Materialparameter, sondern, wie bereits erwähnt, die quantitative Beurteilung des Materialmodells. Dies konnte zur vollsten Zufriedenheit erfüllt werden.

## 8.2 Kreisförmiger Durchbruch in einem Biegeträger

Durchbrüche in Biegeträgern führen im Bereich der Öffnung zu ausgeprägten inhomogenen Spannungszuständen. Im Bauwesen kommt für die Berechnung von Stabtragwerken fast ausschließlich die lineare Stabtheorie (Technische Biegelehre, Theorie I. Ordnung) zur Anwendung. Der im Durchbruchbereich auftretende Spannungszustand kann mit der Stabtheorie nicht mehr erfasst werden, da Quernormalspannungskomponenten vernachlässigt werden. Solche Spannungskomponenten treten jedoch bei einer Trägeröffnung verstärkt auf und



führen gerade im Holzbau durch das orthotrope Materialverhalten (deutlich geringere Festigkeitskennwerte in Quer- als in Längsrichtung) zum Versagen. Daher wurden im Holzbau für Durchbrüche eigene Bemessungsmodelle entwickelt. Eines davon ist in der DIN 1052 [25] unter Punkt 11.3 enthalten.

Im Rahmen dieser Arbeit wird diese Problemstellung zur Traglastanalyse einer Fichtenholzstruktur mit sprödem Versagen herangezogen. Es wurden insgesamt neun Leimholzträger mit drei verschiedenen kreisförmigen Durchbruchgrößen gefertigt, d.h. je Konfiguration wurden drei Versuche durchgeführt. Ziel dieser Beispiele ist es, die aus den Experimenten ermittelten Traglasten (= Bruchlasten) mit den Ergebnissen aus der FE-Simulation zu vergleichen. Weiters sollen die Ergebnisse der numerischen Berechnungen eine Hilfestellung zur Beurteilung des Bemessungsmodells der DIN 1052 geben. In einer Arbeit von AICHER et al. [49] sind Versuche mit kreisförmigen Durchbrüchen in Leimholzträgern sowie verschiedene Bemessungsmodelle, basierend auf der linearen Stabtheorie, dokumentiert.

Die Abbildung 8.6 enthält alle Abmessungen der drei verschiedenen Versuchskonfigurationen. Die Bezeichnung der verschiedenen Versuchsserien erfolgt entsprechend der Variation der Durchmesser  $d$  der Durchbrüche, welche in Abhängigkeit von der Trägerhöhe  $h$  festgelegt wurden ( $d = 0.2 h \rightarrow$  Serie 02,  $d = 0.3 h \rightarrow$  Serie 03 und  $d = 0.4 h \rightarrow$  Serie 04). Die Position der Lochmitte ist nicht bei allen drei Serien gleich. Anstelle der Durchbruchmitte befindet sich der in den Abb. 8.6, Abb. 8.7 und 8.10 mit  $E$  gekennzeichnete Punkt jeweils an der gleichen Position. Diese Stelle wird von Aicher et al. [49] als maßgebender Punkt für die Nachweisführung gemäß DIN 1052 herangezogen und für diese Versuchsserie übernommen. Für die Auswertungen im Rahmen dieser Arbeit hat der genannte Punkt keine gesonderte Bedeutung.

Die Verleimung der Träger erfolgte bei dem Unternehmen *Holzleimbau Stingl GesmbH* in Trofaiach. Im Vorfeld wurden für jede einzelne Lamelle folgende Kenngrößen bestimmt:

- Rohdichte  $\rho$ ,
- Holzfeuchtigkeit  $u$  mit dem Messgerät *Hydromette M 2050* der Firma *GANN* (siehe Abb. 8.8),
- dynamischer E-Modul  $E_{dyn}$ , wobei die Messung der Ultraschalllaufzeit mit einem Gerät der Firma *SYLVATEST* (siehe Abb. 8.9) erfolgte, und die
- Bestimmung des Astparameters  $k_{sa}$  durch Abmessen der Astdurchmesser mit einem Lineal.

Alle Messdaten sowie die nach dem dynamischen E-Modul in Untergruppen eingeteilten nummerierten Lamellen und den daraus resultierenden Aufbauten der einzelnen Träger sind im Anhang E enthalten.

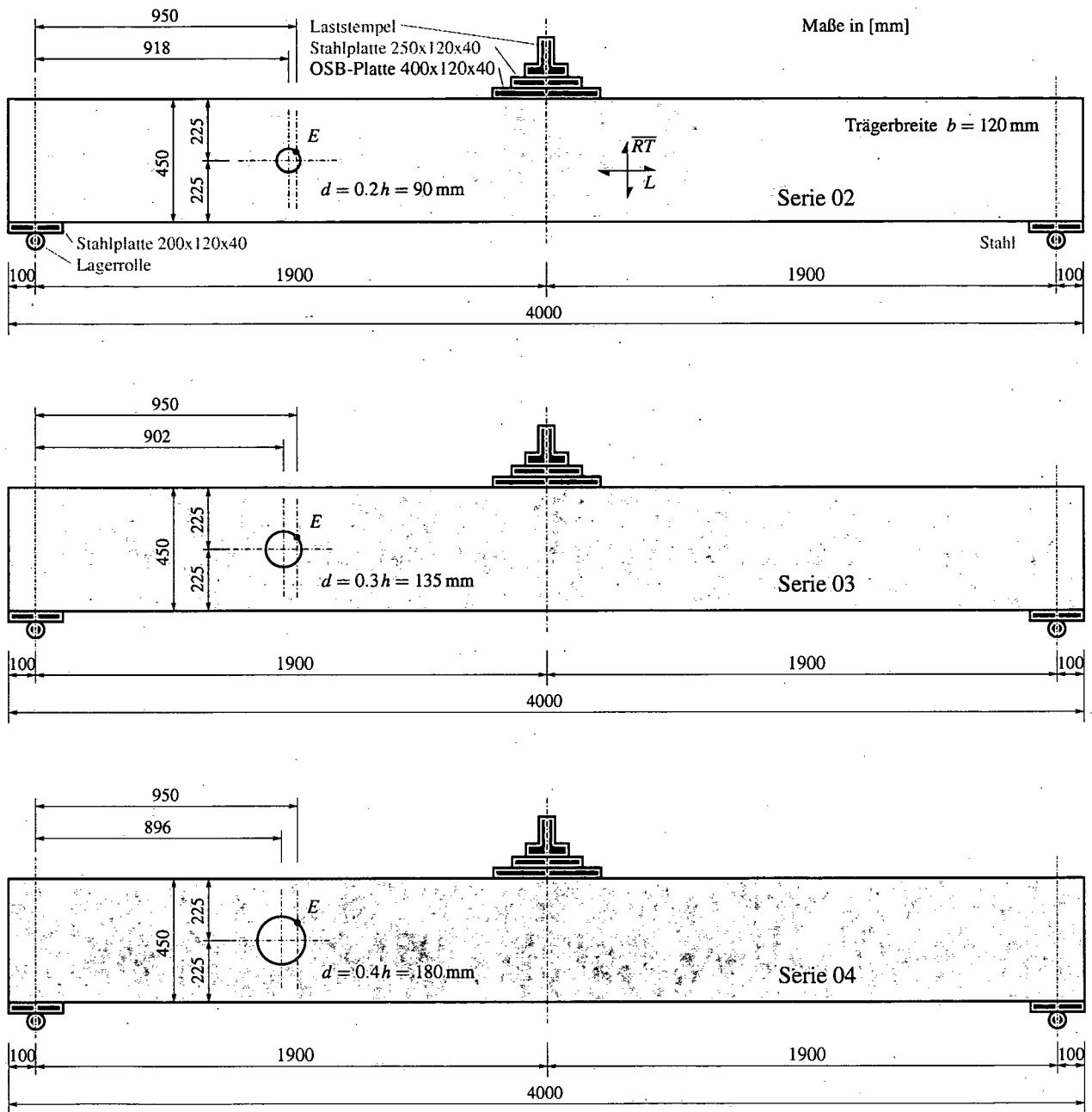


Abbildung 8.6: Geometrie der drei Träger mit einem runden Durchbruch

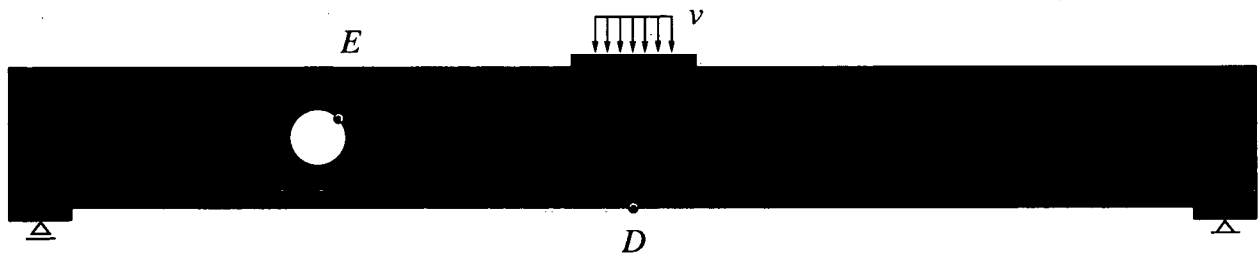


Abbildung 8.7: FE-Netz sowie Randbedingungen der Serie 04

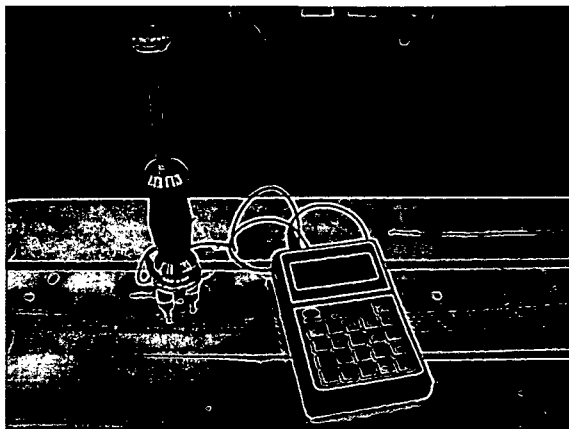


Abbildung 8.8: Holzfeuchtemessgerät *Hydromette M 2050* der Firma *GANN*

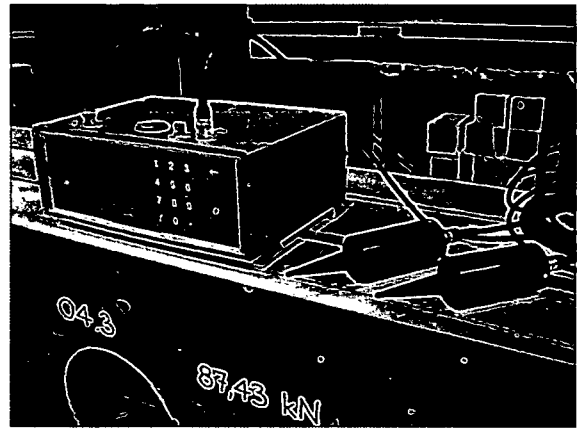


Abbildung 8.9: Ultraschalllaufzeitmessgerät der Firma *SYLVATEST*

Tabelle 8.2: Materialparameter der Leimbinder

Materialparameter der Leimbinder				
		02	03	04
$E_L$	[N/mm <sup>2</sup> ]	14 600	11 700	9 800
$E_{RT}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	450	390	330
$\nu_{LRT}$	[ ]	0.50	0.50	0.50
$G_{LRT}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	850	730	610
$ksa$	[ ]	0.28	0.32	0.45 <sup>*)</sup>
$\max f_{y_{tL}}^0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	+30.06	+26.89	+18.75
$\min f_{y_{cL}}^0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	-30.50	-30.50	-30.50
$\max f_{y_{tRT}}^0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	+1.23	+1.03	+0.57
$\min f_{y_{cRT}}^0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	-3.48	-3.48	-3.48
$\max \tau_{y_{LRT}}^0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	+3.78	+3.62	+3.25

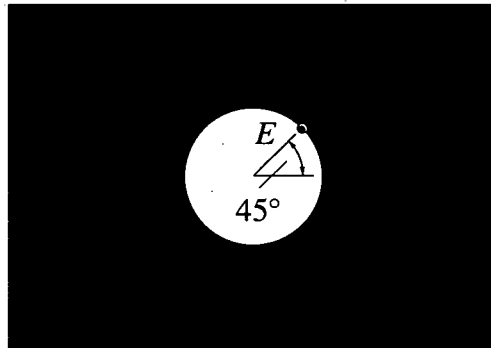
Tabelle 8.3: Materialparameter für die Stahlplatte und die OSB-Platte

Materialparameter	
<b>Stahlplatte</b>	
$E$	= 210 000 N/mm <sup>2</sup>
$\nu$	= 0.30
<b>OSB-Platte</b>	
$E_{laengs}$	= 6 000 N/mm <sup>2</sup>
$E_{quer}$	= 130 N/mm <sup>2</sup>
$\nu$	= 0.50
$G$	= 200 N/mm <sup>2</sup>

- \*) Die mit dem gemessenen Astparameter von  $ksa = 0.32$  durchgeführte Finite-Elemente-Simulation lieferte eine im Vergleich zu den Ergebnissen der Experimente extrem stark überhöhte Traglast. Eine mögliche Ursache liegt darin, dass die Gesamtanzahl der Äste in dieser Trägerserie wesentlich höher ist, als bei den beiden anderen Serien. Diese Tatsache bleibt bei der Ermittlung von  $ksa$  unberücksichtigt. Daher wird der Astparameter bewusst geändert.

Die Werte  $E_{RT}$  und  $G_{LRT}$  wurden aus der DIN 1052:2004-08 gemäß Tabelle F.5 interpoliert, die Querdehnungszahl  $\nu_{LRT}$  wurde von Tabelle 5.2 übernommen,  $E_L$  sowie  $ksa$  sind gemess-

sene Werte (siehe Anhang E), die initialen Fließspannungen sind mit dem Astparameter  $k_{sa}$  wie im Unterkapitel 6.6 dokumentiert, ermittelt worden.



**Abbildung 8.10:** Detail FE-Netz im Bereich des Durchbruchs der Serie 04

Das FE-Modell besteht aus finiten Schalenelementen (Diese ermöglichen eine beliebige Definition der Materialhaupttrichtungen.) mit linearen Verschiebungsansätzen, wobei die zwei Stahlplatten bei den Auflagern und die OSB-Platte im Lasteinleitungsbereich im starren Verbund berücksichtigt werden. Auf die Formulierung eines Kontaktproblem es zwischen den Platten und dem Träger wird verzichtet, da dies keinen Einfluss auf die Traglast hat. Die Simulationen erfolgen verschiebungsgesteuert durch Vorgabe der vertikalen Verschiebungen  $v$  in den mit Pfeilen gekennzeichneten Knoten der Abb. 8.7 am oberen Rand der OSB-Platte. Der numerische Kollaps tritt ein bis drei Inkremente nach dem Erreichen der Traglast ein. In den Abbildungen 8.14, 8.15 und 8.16 werden für den Pfad „FEM“ jeweils die Summe der vertikalen Auflagerkräfte in Abhängigkeit von der vertikalen Verschiebung des in der Abb. 8.7 mit  $D$  gekennzeichneten Punktes aufgetragen. An dieser Stelle wurde bei den Versuchen ein induktiver Wegaufnehmer angebracht (siehe Abb. 8.11). Die experimentell ermittelten Last-Verschiebungsdiagramme in den Abb. 8.14, 8.15 und 8.16 setzen sich aus dem gemessenen Weg im Punkt  $D$  sowie der Reaktionskraft der Prüfmaschine zusammen.

Die Last-Verschiebungsdiagramme der FE-Simulationen und der Strukturversuche verlaufen bis zur Traglast  $F_{ul}$  nahezu linear. Dies ist ein Kennzeichen für ein ausgeprägt sprödes Versagen, welches auch in den Experimenten beobachtet werden konnte. Das bei einigen Versuchen erkennbare Plateau (Zuwachs der Verschiebungen bei annähernd unveränderter Kraft) resultiert aus dem maßgebenden Rissfortschritt bis zum Kollaps. Bis zur Ausbildung eines bis zum Auflager durchlaufenden Risses ist der Träger für kurze Zeit in der Lage, die Last aufzunehmen. Bei den Probekörpern 02.3 und 03.2 wurde der Versuch vor der Ausbildung eines durchlaufenden Risses abgebrochen.

Die Durchführung der Versuche erfolgte im Bautechnikzentrum der TU Graz auf einer uniaxialen, spindelgetriebenen Prüfmaschine der Firma *Zwick – Roell*. Alle Probekörper wurden verschiebungsgesteuert bis zum Bruch mit einer Deformationsgeschwindigkeit von  $v = 2 \text{ mm/min}$  belastet.

Bei allen neun Versuchen kam es zu einem nahezu identischen Versagensmechanismus, wobei die Rissansätze im Punkt  $E$  und dem diametral gegenüberliegenden Punkt auftraten (siehe Abb. 8.19). Bei fortschreitender Belastung wurden diese beiden Risse länger, wobei das Versagen beim Durchreißen des unteren Risses bis zum Auflager erfolgte.

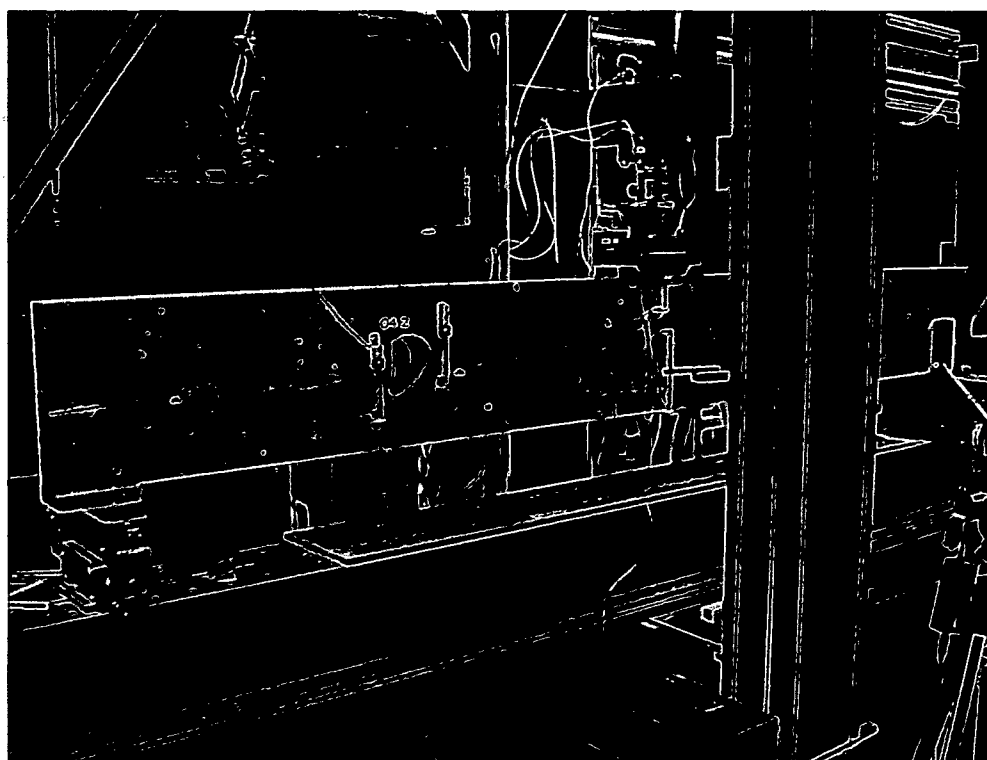


Abbildung 8.11: Versuchsaufbau (Probekörper Nr. 04.2)

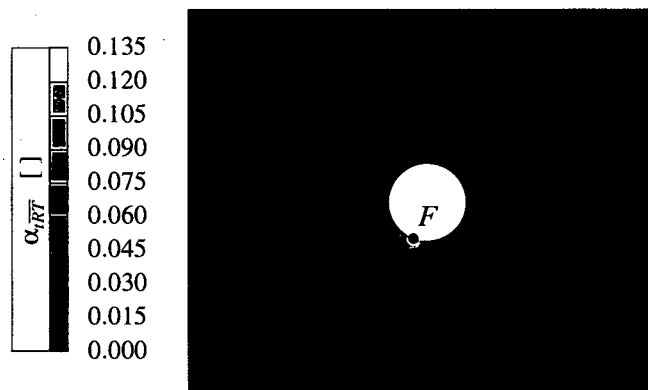
Eine Zusammenstellung der Traglasten der Versuchsergebnisse  $F_{ul_{EXP}}$  und der FE-Simulationen  $F_{ul_{FEM}}$  sowie der zugehörigen vertikalen Durchbiegungen  $v$  im Punkt  $D$  ist in der nachfolgenden Tabelle 8.4 enthalten. In der letzten Spalte der Tabelle sind weiters die aus den FE-Berechnungen erhalten elastischen Grenzlasten  $F_{el_{FEM}}$  angeführt.

**Tabelle 8.4:** Gegenüberstellung der Versuchsergebnisse und der Ergebnisse der Finite-Elemente-Simulationen für die Träger mit einem kreisförmigen Durchbruch

PK-Nr.	$F_{ul_{EXP}}$ [kN]	$F_{ul_{FEM}}$ [kN]	$v_{EXP}$ [mm]	$v_{FEM}$ [mm]	$F_{el_{FEM}}$ [kN]
02.1	167		23		
02.2	162	149	21	18	66
02.3	174		24		
03.1	110		17		
03.2	130	130	20	16	49
03.3	121		18		
04.1	79		13		
04.2	97	88	18	13	18
04.3	87		16		

Die Spannungsverteilungen im Durchbruchbereich im Traglastzustand sind der Abb. 8.17 zu entnehmen. Die erste Bilderzeile zeigt die „Biegelängsspannungen“  $\sigma_L$ , in der zweiten Zeile sind die Normalspannungen in  $\overline{RT}$ -Richtung dargestellt. Aus dieser Bilderzeile erkennt man, dass unter einem Winkel von  $45^\circ$  zur Horizontalen die größten Querkzugspannungen  $\sigma_{\overline{RT}}$  auftreten. Da die Querkzugfestigkeiten bei Holz sehr gering sind, wird in diesen Bereichen eine Rissbildung erwartet. Zusätzlich treten in den genannten Zonen nicht vernachlässigbare Schubspannungen  $\tau_{L\overline{RT}}$  auf. Die Überlagerung der drei Spannungskomponenten am Lochrand führt schließlich zu der Ausbildung eines initialen Risses, ausgehend vom Lochrand, welcher sich bei steigender Belastung in Richtung des Auflagers bzw. zur Trägermitte ausweitet. Die in der Abb. 8.18 dargestellten Zonen plastischer Deformationen verdeutlichen diesen Sachverhalt. Betrachtet man die Rissbilder der Abb. 8.19 so erkennt man, dass die Rissansatzpunkte sehr gut mit den plastischen Deformationen  $\alpha_{t\overline{RT}}$  übereinstimmen.

Für den in der Abbildung 8.12 mit  $F$  gekennzeichneten Punkt der Serie 02 wird in Abbildung 8.13 die initiale und modifizierte Fließfläche für den Wertebereich  $\sigma_L < 0$  dargestellt. Der am Durchbruchrand liegende Punkt  $A$  weist folgenden, auf der modifizierten Fließfläche liegenden Spannungszustand auf:  $\sigma_L = +15.20 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_{\overline{RT}} = +0.30 \text{ N/mm}^2$  und  $\tau_{L\overline{RT}} = -1.91 \text{ N/mm}^2$ . In der Abb. 8.13 ist der dem Spannungszustand zugeordnete gekoppelte Versagensmechanismus Entfestigung für Zugbeanspruchung in  $\overline{RT}$ -Richtung – Entfestigung für Zugbeanspruchung in  $L$ -Richtung – Entfestigung für Schubbeanspruchung durch zu erkennen, dass alle Bereiche der modifizierten Fließfläche innerhalb der initialen Fließfläche liegen. Der Extremwert der Fließspannung  $\max f_{yt\overline{RT}}$  sinkt auf 50 % ab.



**Abbildung 8.12:** Ausgewählter Punkt  $F$  der Serie 02 zur Visualisierung des Spannungszustandes im Traglastzustand

#### *Beurteilung des Beispiels:*

Für die im Holzbau übliche Streuung der Materialkennwerte entsprechen die mit Hilfe des elasto-plastischen Materialmodells prognostizierten Traglasten mit guter Genauigkeit den Ergebnissen aus den Versuchen. Allerdings muss die Erfassung und/oder die Ermittlung des Astparameters  $ksa$  genauer erfolgen. Die Sortierung der Lamellen anhand des  $E$ -Moduls in Faserlängsrichtung weist eine Proportionalität zum  $ksa$ -Wert auf. Daher könnte man im  $ksa$ -Faktor eine Abhängigkeit von  $E_L$  berücksichtigen. Eventuell wäre damit für die Serie 02 eine genauere Traglastermittlung möglich. Die Struktursteifigkeiten liegen in der numerischen Simulation bei allen drei Serien etwas über der aus den Experimenten bestimmten Steifigkeit.

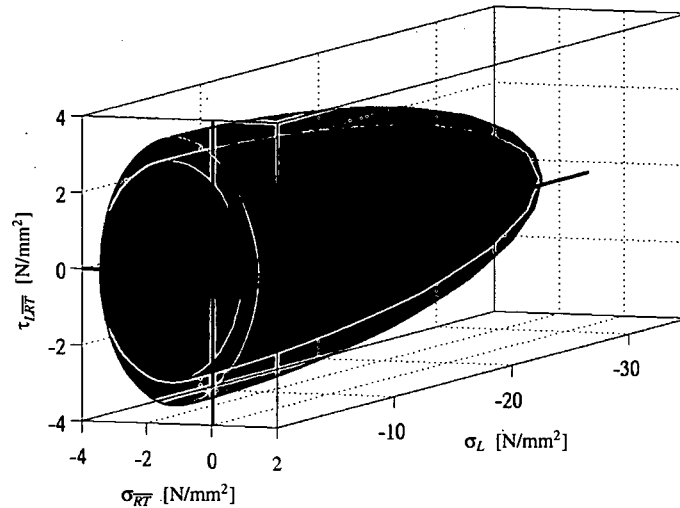


Abbildung 8.13: Initiale (hellrot,  $k_{sa} = 0.28$ ) und modifizierte Fließfläche (dunkelrot) des Punktes  $F$  für den Wertebereich  $\sigma_L < 0$  ( $\sigma_L = +6.16 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_{RT} = -3.08 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_{LRT} = -0.98 \text{ N/mm}^2$ ), verzerrt dargestellt

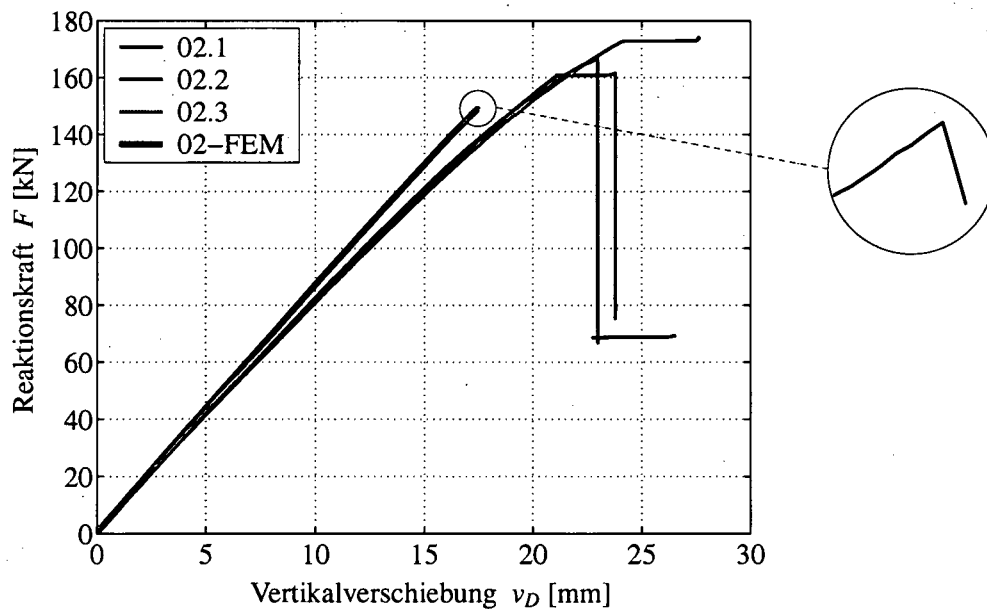


Abbildung 8.14: Last-Verschiebungsdiagramm der Serie 02

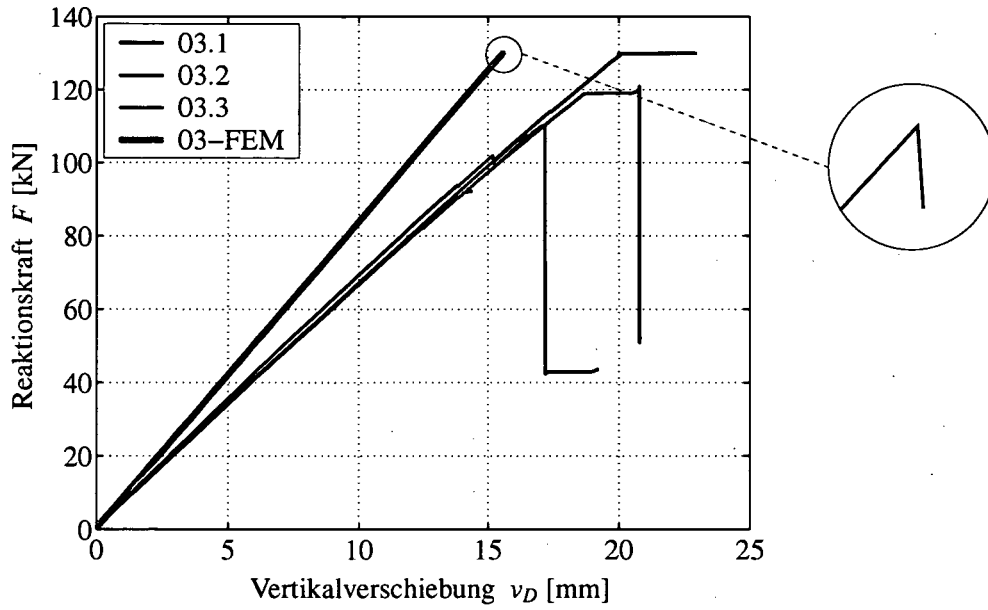


Abbildung 8.15: Last-Verschiebungsdiagramm der Serie 03

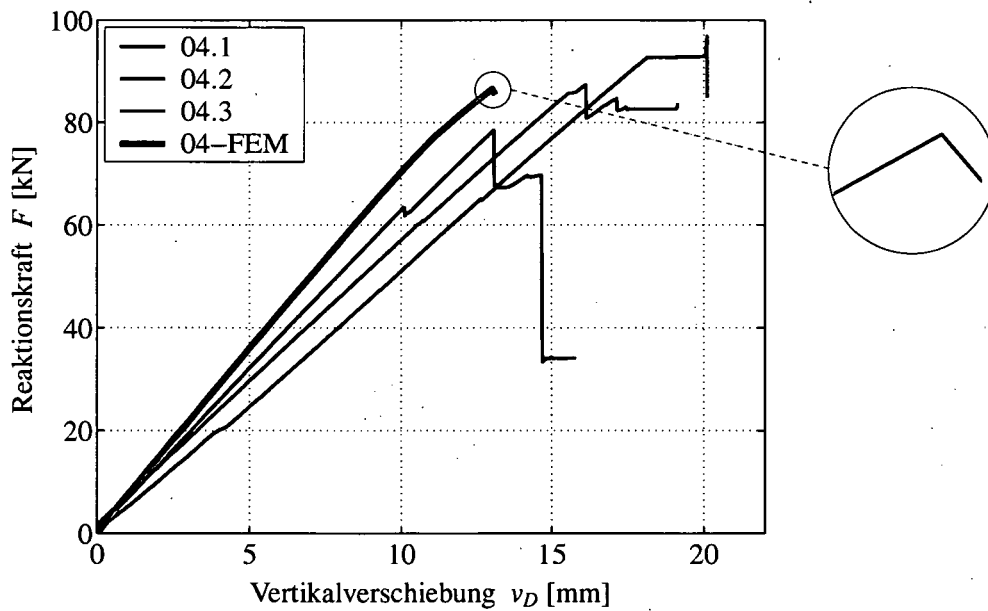


Abbildung 8.16: Last-Verschiebungsdiagramm der Serie 04



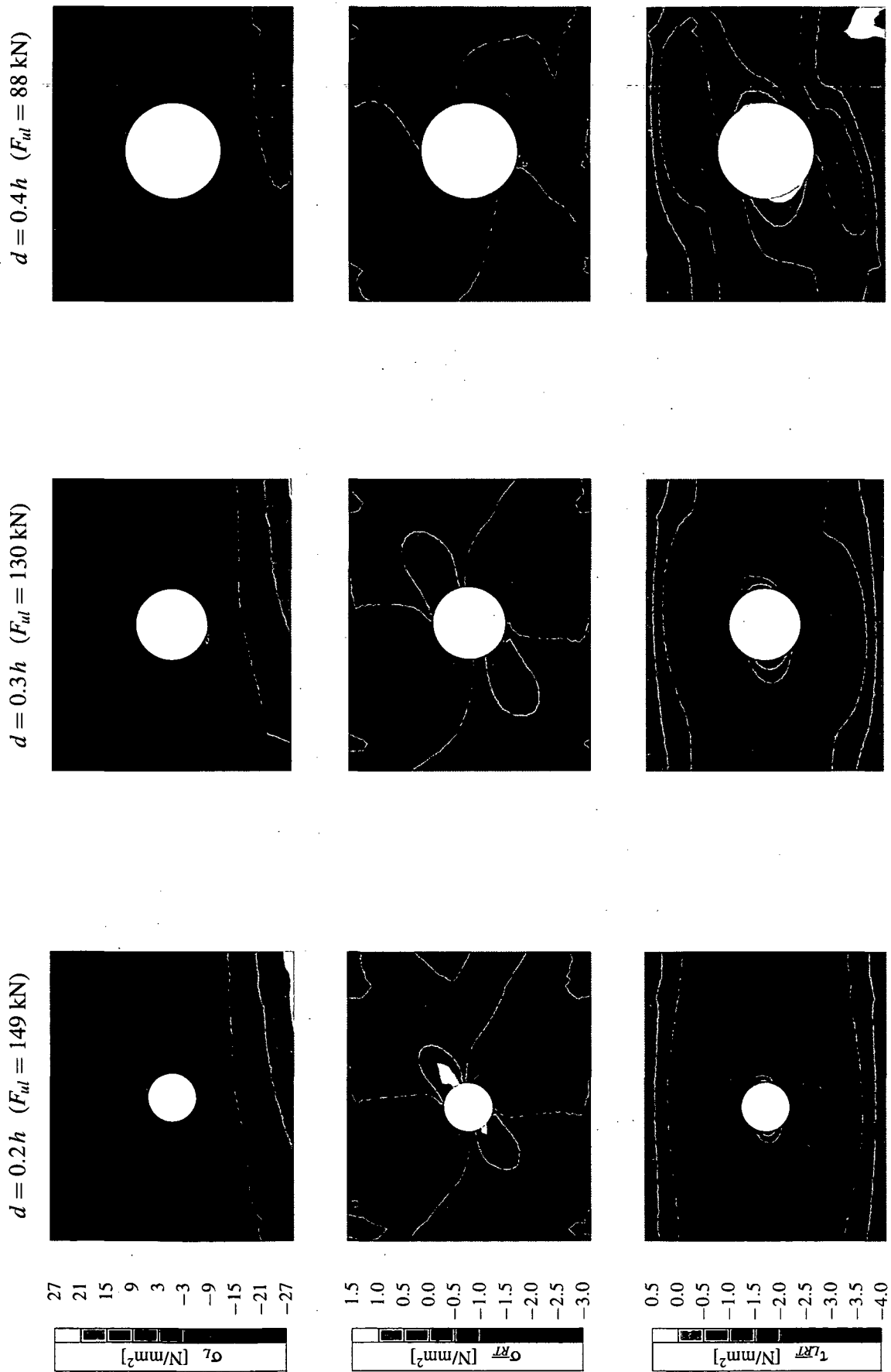


Abbildung 8.17: Spannungsverteilungen im Durchbruchbereich im Traglastzustand

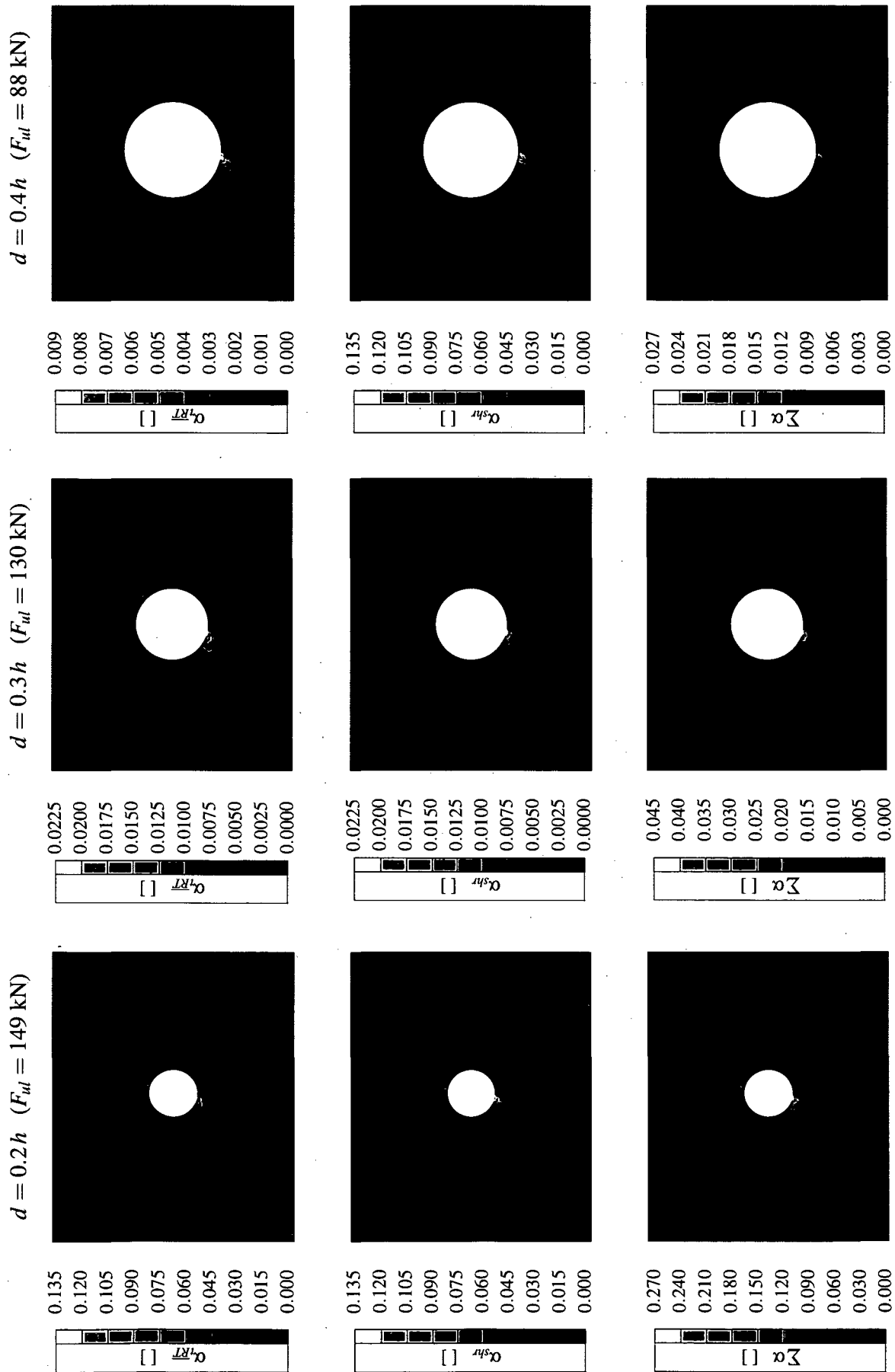
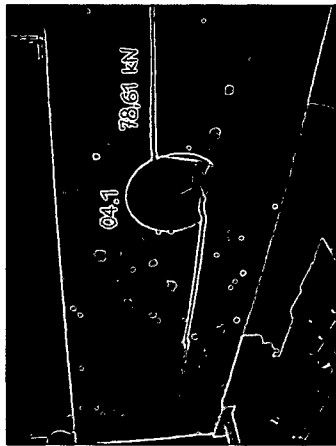


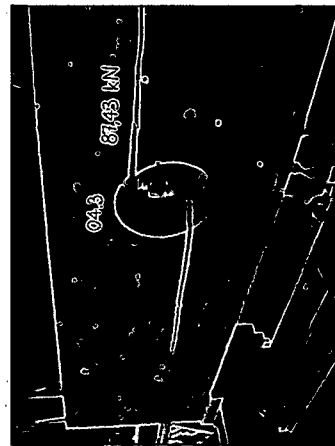
Abbildung 8.18: Zonen plastischer Deformationen im Durchbruchbereich im Traglastzustand



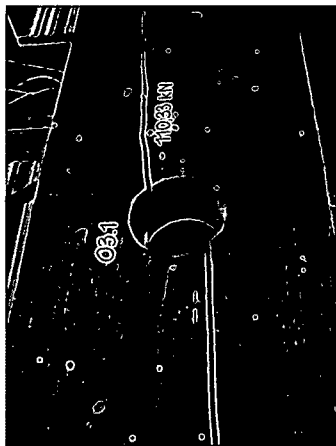
04.1



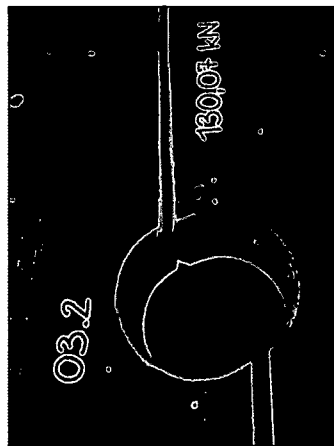
04.2



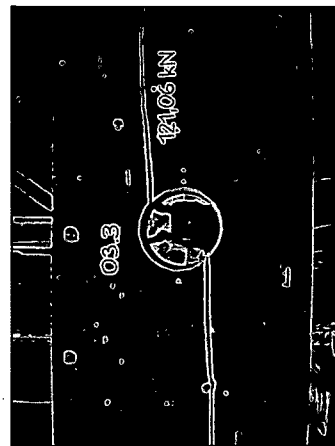
04.3



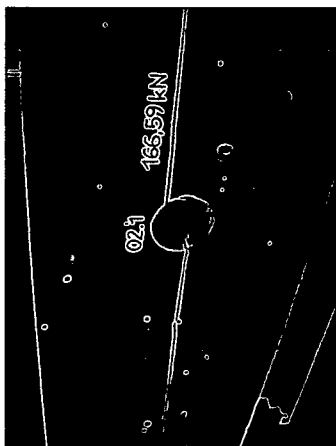
03.1



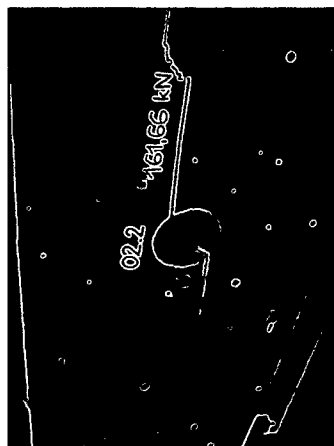
03.2



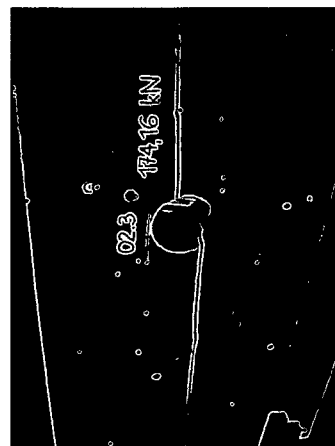
03.3



02.1



02.2

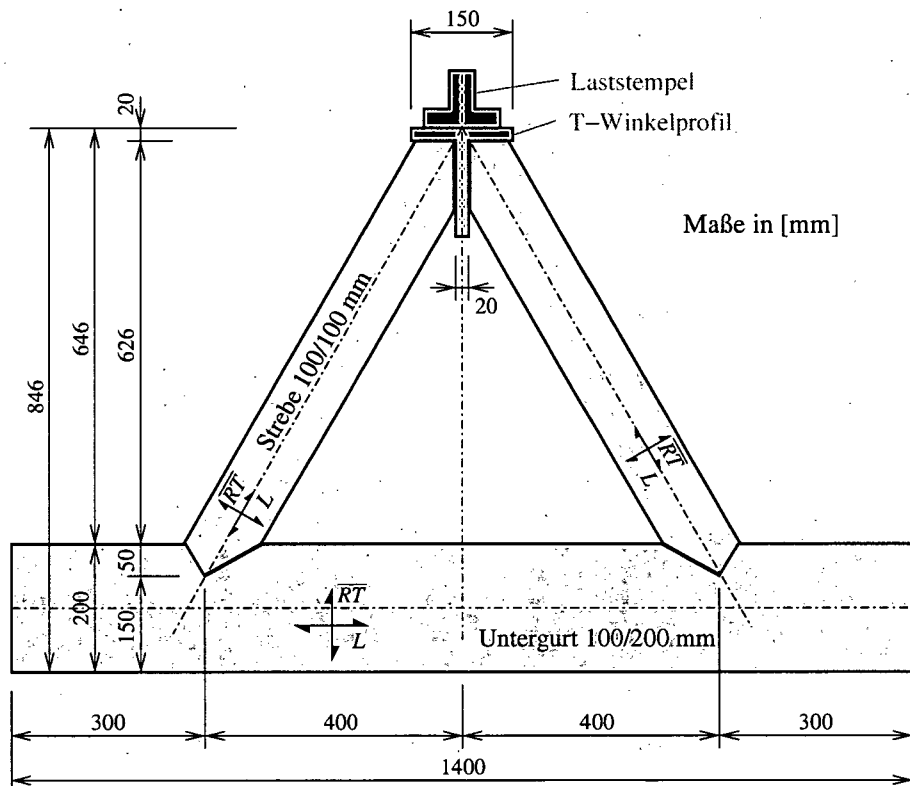


02.3

Abbildung 8.19: Bruchbilder im Durchbruchbereich nach Versuchsende

## 8.3 Dreibock

Im Gegensatz zu dem zuvor behandelten Beispiel eines kreisförmigen Durchbruchs in einem Biegeträger, das durch ein sehr sprödes Versagen gekennzeichnet war, soll nun eine Struktur mit einem duktilen Versagensmechanismus untersucht werden. Durch eine vorwiegend auf Querdruck beanspruchte Konstruktion soll gezeigt werden, wie auf Grund der Materialformulierung Tragreserven im plastischen Zustand einer Struktur ausgenutzt werden können. Die Abmessungen des aus unbeschädigten Teilen der Serie 03 der in Beispiel 8.2 beschriebenen Biegeträger in dreifacher Ausfertigung hergestellten Dreibocks ist Abb. 8.20 zu entnehmen.



**Abbildung 8.20:** Abmessungen des Dreibocks, bestehend aus zwei Streben und einem Untergurt, die Verbindung erfolgt über einfache Versätze

Das FE-Modell sowie die geometrischen Randbedingungen sind in Abb. 8.21 dargestellt. Durch Ausnutzung der Symmetrie von Struktur und Belastung muss lediglich die halbe Konfiguration modelliert werden. Wie bei Beispiel 8.2 werden finite Schalelemente mit linearen Verschiebungsansätzen verwendet.

Im Versatzbereich wird auf die Formulierung eines Kontaktproblems verzichtet. Für die Erstellung des Programmmoduls war es erforderlich, die Version *MARC K6.2* zu verwenden, da nur für diese Version der Programm-Quellcode zur Verfügung stand und dieser für die Implementierung des Materialmodells benötigt wurde. Kontaktformulierungen führen bei Verwendung dieser Softwareversion zu großen numerischen Problemen. Dies wurde im Zuge von Testberechnungen bestätigt und begründet den Verzicht auf die Kontaktformulierung.

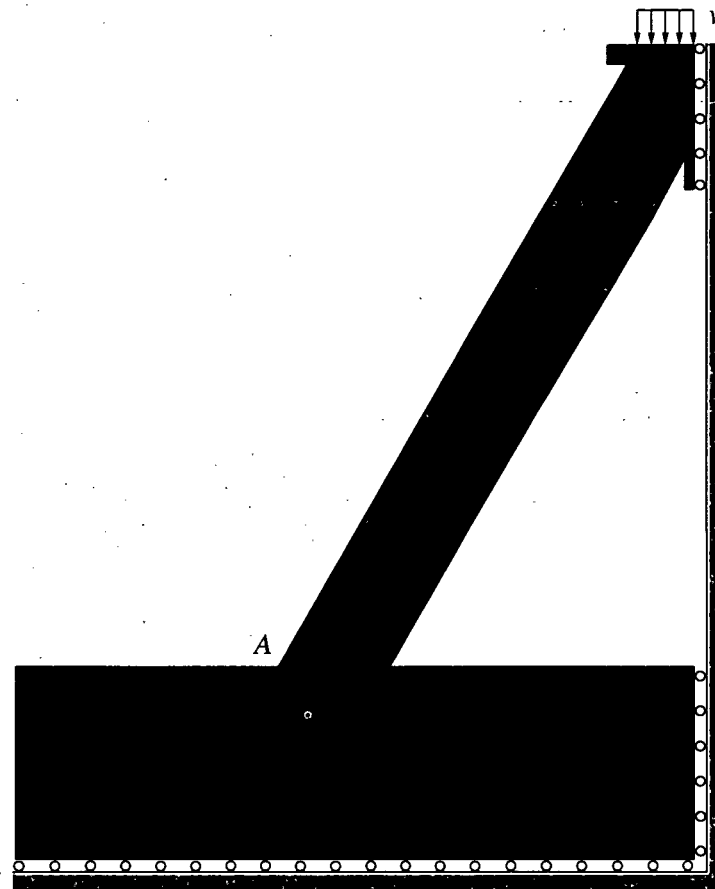


Abbildung 8.21: FE-Netz sowie Randbedingungen des Dreibocks

Die Beanspruchung der FE-Struktur erfolgt durch Vorgabe vertikaler Verschiebungen  $v$  in jenen Knotenpunkten des T-förmigen Stahlwinkels, die mit dem Laststempel in Kontakt sind. Die Materialparameter für die FE-Simulation sind für die Strebe und den Untergurt aus Tabelle 8.5 zu entnehmen, für den Stahlwinkel werden die Werte der Stahlplatte aus Tabelle 8.3 übernommen. Die elastischen Parameter für die Strebe und den Untergurt sind identisch mit jenen aus Tabelle 8.2, für den Astparameter wird jedoch ein Wert von  $k_{sa} = 0.00$  angenommen, da bei allen Probekörpern in jenen Bereichen, wo die zum Versagen führenden plastischen Deformationen auftreten, keine Äste sichtbar waren.

Die Versuchsdurchführung erfolgte wie bei den in Beispiel 8.2 beschriebenen Biegebalken im Bautechnikzentrum der TU Graz. Die Belastung erfolgte verschiebungsgesteuert mit einer Deformationsgeschwindigkeit von  $v = 0.7 \text{ mm/min}$ . Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 8.22 dargestellt.

In der Abb. 8.23 wird für das Ergebnis der FE-Simulation die Summe der vertikalen Reaktionskräfte in den korrespondierenden Knoten der Lasteinleitung in Abhängigkeit von der Absenkung  $v$  aufgetragen. Diese Werte sind vergleichbar mit den resultierenden Kräften der Prüfmaschine und der Absenkung der Traverse, wobei die zu Versuchsbeginn auftretenden Nichtlinearitäten durch die Extrapolation der Struktursteifigkeiten im elastischen Bereich ersetzt wurden (siehe strichlierte Pfadabschnitte in Abb. 8.23). (Der Deformations-

Tabelle 8.5: Materialparameter der Strebe und des Untergurtes

Materialparameter		
$E_L$	[N/mm <sup>2</sup> ]	11 700
$E_{\overline{RT}}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	390
$\nu_{\overline{LRT}}$	[ ]	0.50
$G_{\overline{LRT}}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	730
$ksa$	[ ]	0.00
$\max f_{y_{iL}}^0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	+65.24
$\min f_{y_{cL}}^0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	-30.50
$\max f_{y_{i\overline{RT}}}^0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	+4.40
$\min f_{y_{c\overline{RT}}}^0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	-3.48
$\max \tau_{y_{\overline{LRT}}}^0$	[N/mm <sup>2</sup> ]	+6.33

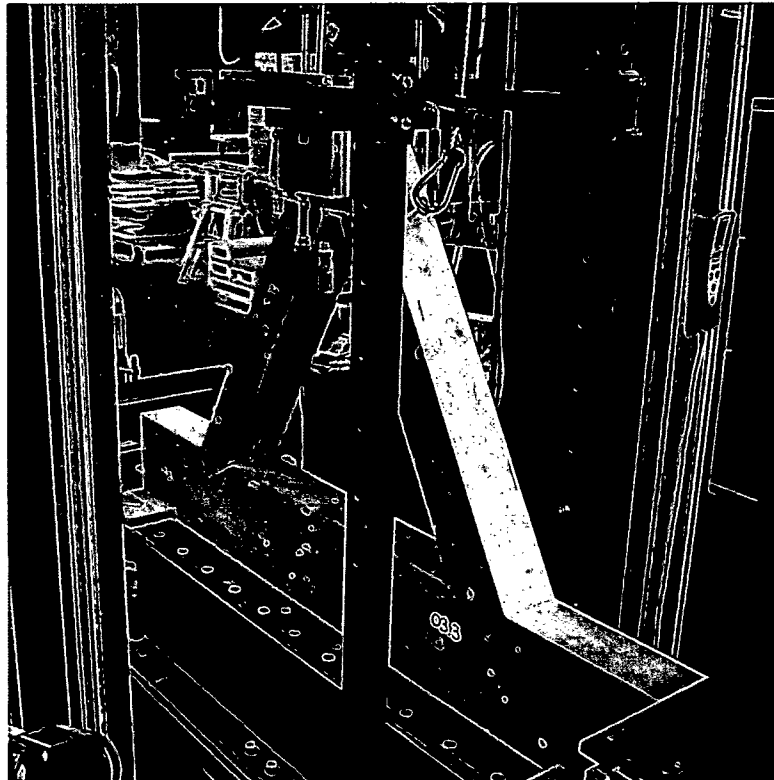


Abbildung 8.22: Versuchsaufbau (Probekörper Nr. 03.3)

unterschied zwischen Traverse und Laststempel ist im Vergleich zu den auftretenden Verformungswegen vernachlässigbar.) Die Simulation wurde mit einem Belastungs-Entlastungs-Wiederbelastungszyklus durchgeführt und nach dem Erreichen der Traglast abgebrochen.

Die Ergebnisse der FE-Simulation (siehe Abb. 8.25 und 8.26) bzw. die Versuchsergebnisse zeigen im Last-Verschiebungsdiagramm in Abb. 8.23 ein deutlich ausgeprägtes nichtlineares Verhalten. Dies ist ein Hinweis auf ein duktileres Verhalten der Struktur, welches auch bei den Versuchen beobachtet werden konnte.

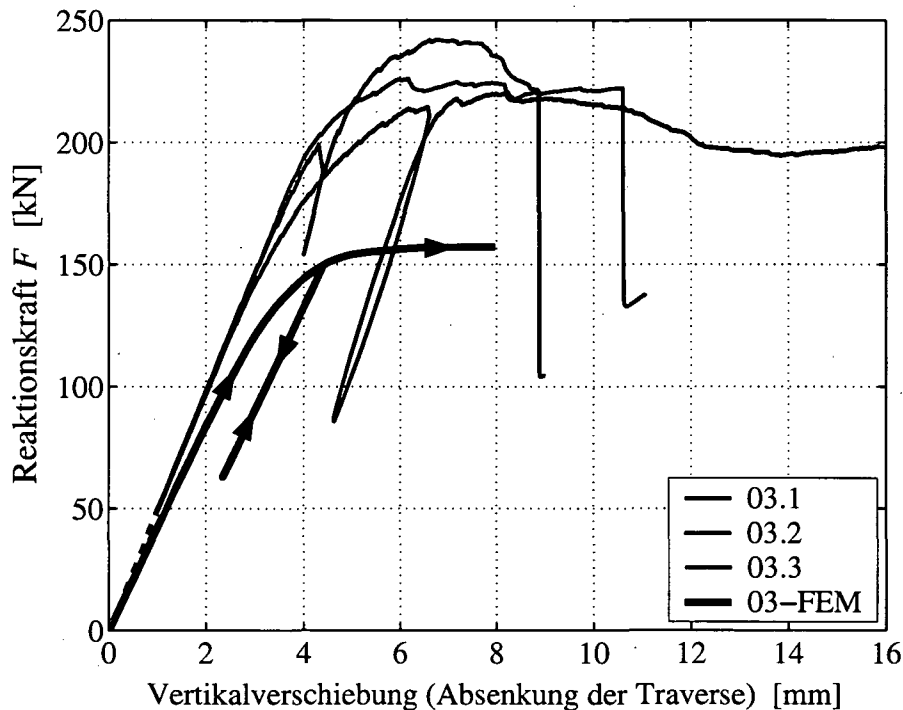


Abbildung 8.23: Last-Verschiebungsdiagramm

Beim Probekörper 03.1 erfolgte die Beanspruchung durch einen Belastungs-Entlastungs-Wiederbelastungszyklus, wobei der Versuch nach dem Erreichen der Traglast und der Ausbildung eines deutlichen Fließplateaus bei einer Vertikalverschiebung der Traverse von 16 mm abgebrochen wurde. Die durch die Entlastung und Wiederbelastung hervorgerufene Hysterese im Last-Verschiebungsdiagramm gibt einen Hinweis auf die viskosen Eigenschaften von Holz (vergleiche Abb. A.5).

Der (unerwünschte) Zyklus beim Probekörper 03.2 resultiert aus einem Softwarefehler der Steuerung der Prüfmaschine. Nach dem Erreichen der Traglast und einem geringen Abfall der Reaktionskraft kam es zu einem Quersugversagen des Vorholzbereiches (siehe mittleres Bild der rechten Spalte der Abb. 8.27). Zusätzlich kam es zum Aufbrechen einer Leimfuge in der rechten Strebe.

Der Probekörper 03.3 wurde proportional bis zum Bruch beansprucht. Nach dem Erreichen der Traglast und der Ausbildung eines Fließplateaus kam es wie beim Probekörper 03.2 zu einem Quersugversagen des Vorholzbereiches.

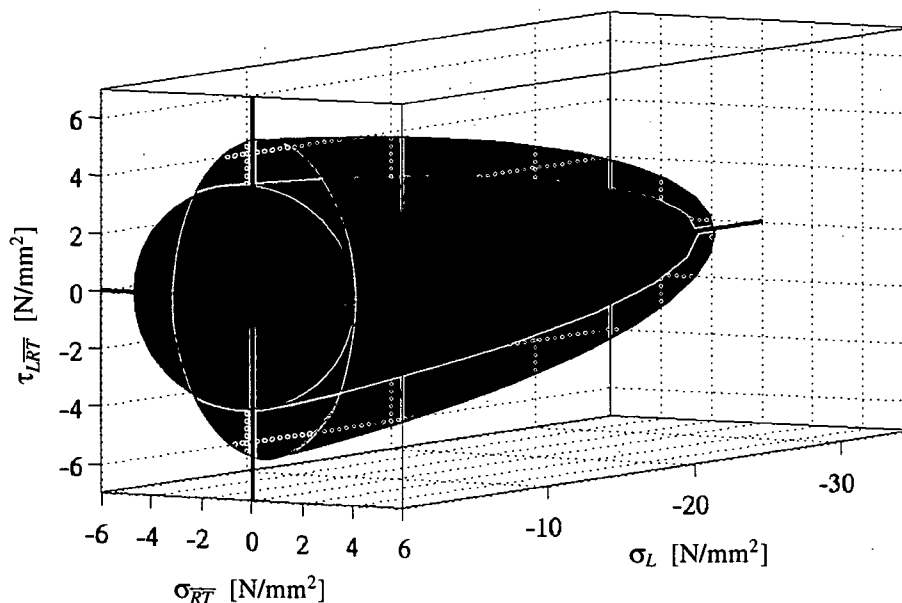
Ein klassisches Abscheren des Vorholzbereiches wurde bei keinem der drei Versuche beobachtet. Eine Zusammenstellung der Traglasten der Versuchsergebnisse  $F_{ul_{EXP}}$  und der FE-Simulationen  $F_{ul_{FEM}}$  sind in der nachfolgenden Tabelle 8.6 enthalten. In der letzten Spalte der Tabelle 8.6 ist die aus der FE-Berechnung erhaltene elastische Grenzlast  $F_{el_{FEM}}$  angeführt.

**Tabelle 8.6:** Gegenüberstellung der Versuchsergebnisse mit den Ergebnissen aus den Finite-Elemente-Simulationen für den Dreibock

PK-Nr.	$F_{ul_{EXP}}$ [kN]	$F_{ul_{FEM}}$ [kN]	$F_{el_{FEM}}$ [kN]
03.1	220		
03.2	242	157	62
03.3	226		

Der Abb. 8.26 entnimmt man, dass das Versagen, wie erwartet, durch eine Kombination der Versagensmechanismen „Druck in  $L$ -Ri.“, „Druck in  $\overline{RT}$ -Ri.“ sowie „Schub in der  $L\overline{RT}$ -Ebene“ verursacht wird ( $\alpha_{c_L} > 0$ ,  $\alpha_{c_{\overline{RT}}} > 0$ ,  $\varepsilon_{L\overline{RT}}^p = \alpha_{shr} > 0$ ,  $\alpha_{t_L} \approx 0$  und  $\alpha_{t_{\overline{RT}}} = 0$ ).

Für den in der Abb. 8.21 mit  $A$  gekennzeichneten Punkt wird in der nachfolgenden Abb. 8.24 die initiale und modifizierte Fließfläche für den Wertebereich  $\sigma_L < 0$  dargestellt. Der dem Untergurt zugeordnete Punkt  $A$  weist folgenden, auf der modifizierten Fließfläche liegenden Spannungszustand auf:  $\sigma_L = +6.16 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_{\overline{RT}} = -3.08 \text{ N/mm}^2$  und  $\tau_{L\overline{RT}} = -0.98 \text{ N/mm}^2$ . In der Abb. 8.24 ist der dem Spannungszustand zugeordnete gekoppelte Versagensmechanismus Verfestigung für Druckbeanspruchung in  $\overline{RT}$ -Richtung – Entfestigung für Schubbeanspruchung – schwache Entfestigung für Zugbeanspruchung in  $L$ -Richtung gut zu erkennen.



**Abbildung 8.24:** Initiale (hellrot,  $ksa = 0.00$ ) und modifizierte Fließfläche (dunkelrot) des Punktes  $A$  für den Wertebereich  $\sigma_L < 0$  ( $\sigma_L = +6.16 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_{\overline{RT}} = -3.08 \text{ N/mm}^2$ ,  $\tau_{L\overline{RT}} = -0.98 \text{ N/mm}^2$ ), verzerrt dargestellt



*Beurteilung des Beispiels:*

Ein Vergleich der Last-Verschiebungsdiagramme der FE-Simulation und der Experimente (Abb. 8.23) zeigt eine gute qualitative Übereinstimmung, d. h., dass der deutlich ausgeprägte nichtlineare Pfad der FE-Berechnung bis zum Erreichen der Traglast mit den Versuchsergebnissen gut übereinstimmt. Die Größe der Traglast der FE-Simulation liegt jedoch deutlich unter den Traglasten der Experimente. Zusätzlich zu den üblichen Streuungen der Materialkennwerte im Holzbau kann die zu geringe Traglast der numerischen Simulation folgende Ursachen haben:

- Im Versatzbereich treten zum Teil große Verzerrungen auf. Für den dominierenden Versagensmechanismus „Druckbeanspruchung in  $\overline{RT}$ -Richtung“ kommt es bei großen Verzerrungen zu einer Verfestigung (siehe Abb. A.5), welche im Werkstoffmodell auf Grund der Beschränkung auf kleine Verzerrungen nicht berücksichtigt ist. Dies kann auf Strukturebene zu höheren Traglasten führen.
- Die Festlegung der initialen Fließspannung für Druckbeanspruchung in  $\overline{RT}$ -Richtung gemäß Abb. 6.22 basiert auf einer geringen Anzahl von Experimenten. Zur Absicherung dieses Materialparameters sind für diesen Beanspruchungsfall weitere Werkstoffversuche erforderlich.

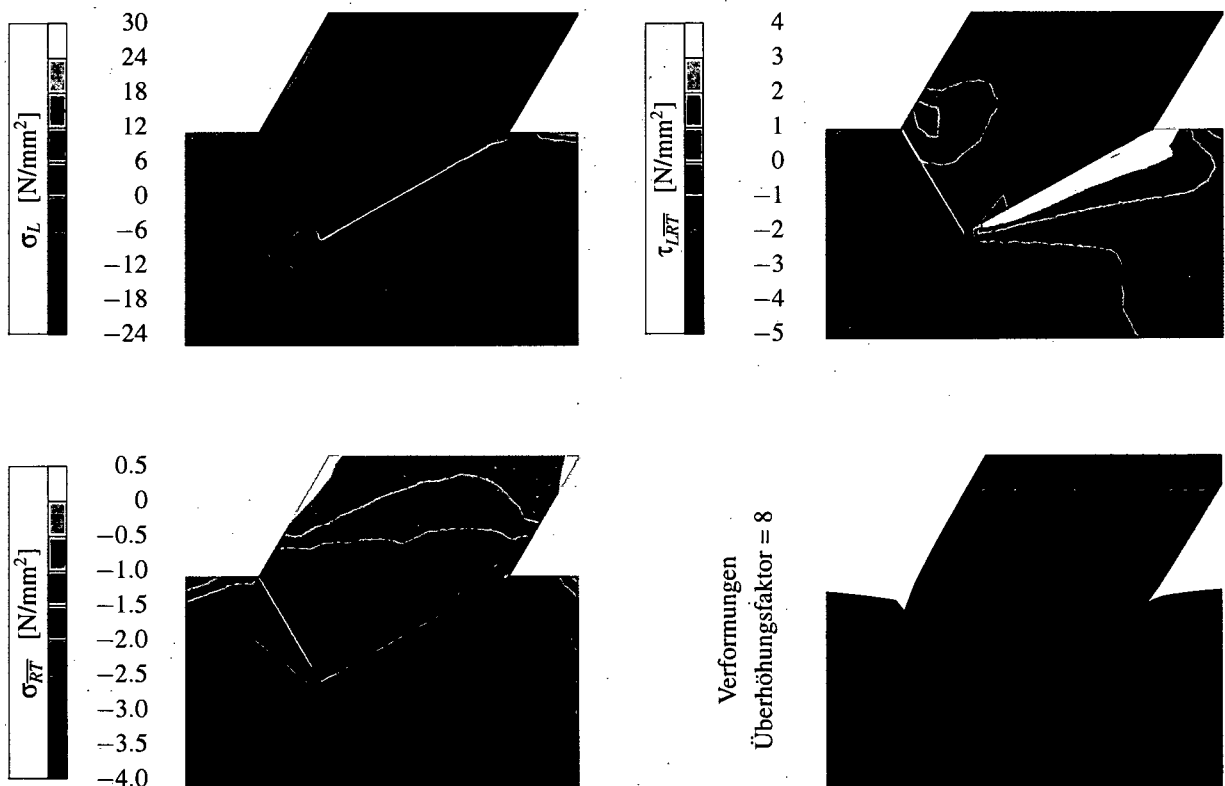


Abbildung 8.25: Spannungsverteilungen und verformte Struktur im Traglastzustand im Versatzbereich

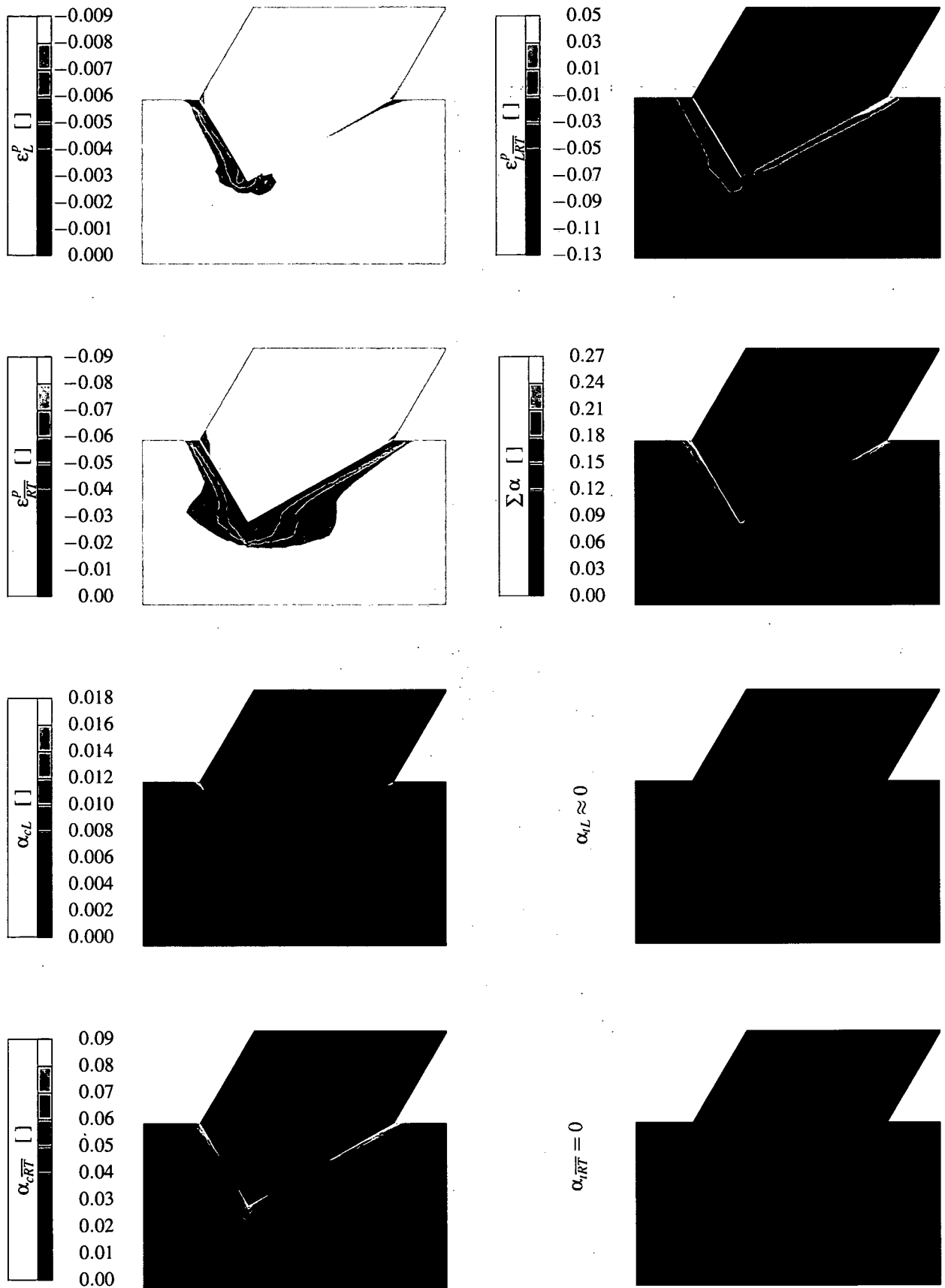
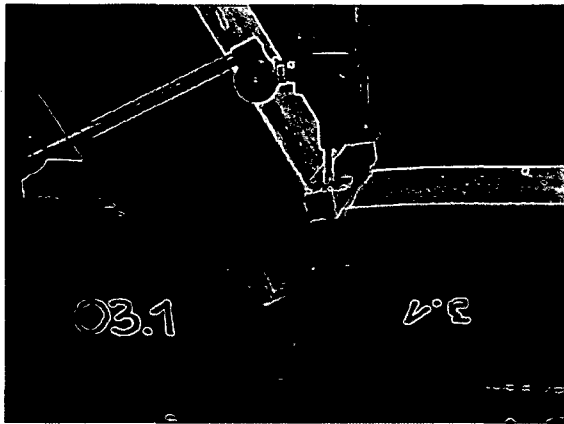
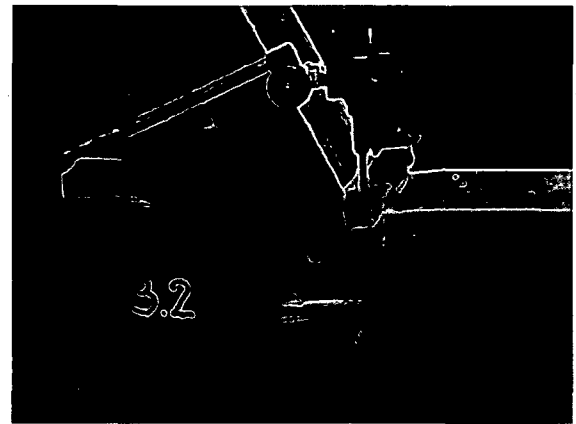


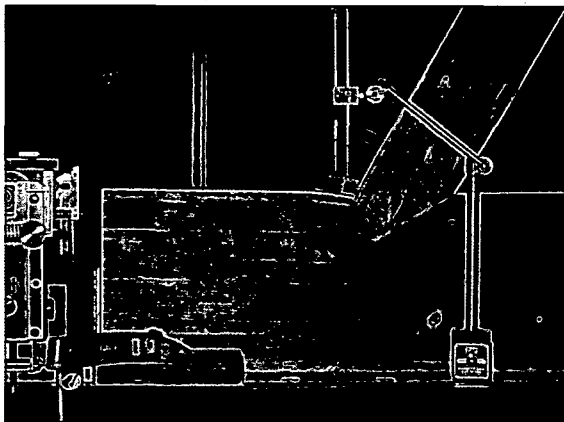
Abbildung 8.26: Zonen plastischer Deformationen im Traglastzustand im Versatzbereich



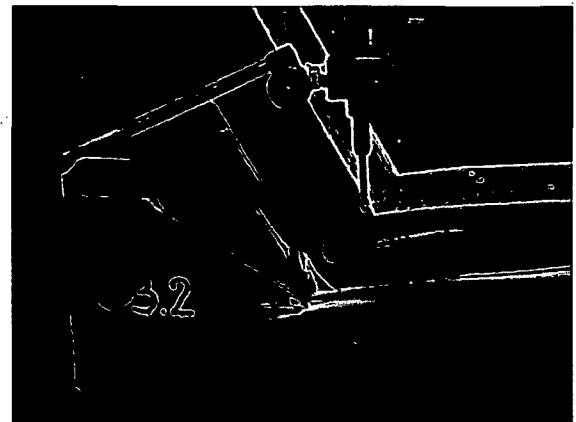
03.1 – rechter Versatz – Traglastzustand  
(Maximalkraft)



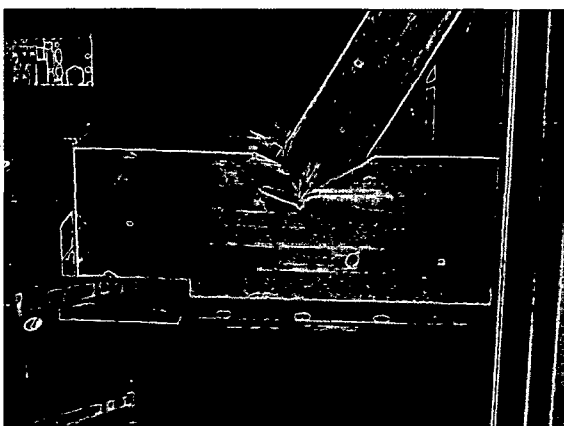
03.2 – rechter Versatz – Traglastzustand  
(Maximalkraft)



03.1 – linker Versatz – Traglastzustand  
(Maximalkraft)



03.2 – rechter Versatz – Bruchzustand  
(Versuchsende)



03.1 – linker Versatz – Bruchzustand  
(Versuchsende)



03.3 – rechter Versatz – Traglastzustand  
(Maximalkraft)

Abbildung 8.27: Probekörperbilder im Traglast- bzw. Bruchzustand

## Schlussbemerkung

Mit dem in den Kapiteln 5 und 6 vorgestellten elasto-plastischen Materialmodell ist es möglich, realitätsnahe Strukturberechnungen von biaxial beanspruchten Fichtenholzkonstruktionen durchzuführen. Die Verifikation des Werkstoffmodells anhand des Vergleichs von FE-Simulationen mit begleitenden Strukturversuchen im Kapitel 8 wurde erfolgreich durchgeführt. Somit wurde die Zielsetzung dieser Arbeit (siehe Unterkapitel 1.1) erfüllt.

Im Zuge der Auswertung der Strukturversuche und der vergleichenden FE-Berechnungen traten bei zwei Themenbereiche Probleme auf, welche im Rahmen zukünftiger Arbeiten verbessert werden sollten. Es sind dies die

- a) Problematik der Entfestigung bei Zugbeanspruchung in  $L$ - und  $\overline{RT}$ -Richtung sowie die
- b) Erfassung des Astparameters  $ksa$  von Leimbinderlamellen.

### ad a)

Durch das extrem spröde Verhalten bei Zugversagen in  $L$ - und  $\overline{RT}$ -Richtung von Fichtenholz kommt es bei Überschreitung der Zugfestigkeiten zu einem rasanten Abfall der Spannungen im Spannungs-Dehnungsdiagramm. Durch die Verwendung eines sprunghaften Entfestigungsalgorithmus im Materialmodell konnte dieses Verhalten auf Integrationspunktebene physikalisch richtig erfasst werden. Beim Übergang auf die Strukturebene traten jedoch bei sprödem Verhalten einer Struktur numerische Probleme auf, welche im Rahmen dieser Arbeit noch nicht optimal gelöst wurden.

### ad b)

Wie sich bei den Beispielen in den Unterkapiteln 8.2 und 8.3 gezeigt hat, reicht die Bestimmung des Astparameters  $ksa$  wie im Unterkapitel 6.4 vorgeschlagen, nicht aus. Eine

mögliche Erweiterung wäre z. B. die Miteinbeziehung der Gesamtanzahl der Äste in einem Brett in den *ksa*-Faktor. Je größer die Gesamtanzahl der Äste in einem Holzbauteil ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass Äste in hoch beanspruchten Strukturbereichen auftreten und zum Versagen der Konstruktion führen können. Bei der Berücksichtigung weiterer Eingangsgrößen ist allerdings darauf zu achten, dass diese Parameter in der Praxis zur Verfügung stehen sollten.

Ein ursprüngliches Ziel dieser Arbeit war es, das Werkstoffmodell auch für die **Berechnung von Holzschalentragwerken** (ohne Verwendung von Versteifungsrippen in Haupttragfunktion) einsetzen zu können. Das von MACKENZIE-HELNWEIN in [8] vorgestellte Materialmodell bietet eine Möglichkeit zur Berücksichtigung der Transversalschubkomponenten. Für die Bestimmung der dafür erforderlichen Materialkennwerte sind weitere Experimente erforderlich. Behandelt man das Thema der echten Holzschalen ausführlicher, so sind folgende Aspekte zu beachten:

- *mechanische* Aspekte:

Derzeit gibt es über den bei der Herstellung entstehenden Eigenspannungszustand in einfach oder doppelt gekrümmten Holzbauteilen kaum zuverlässige Untersuchungen. Richtet man sich nach den in den Normen enthaltenen Krümmungsradien, so können im unverleimten Zustand Spannungen in der Größenordnung der Zugfestigkeiten auftreten. Wie sich diese Spannungen nach der Verleimung abbauen und welchen Einfluss diese auf die Tragfähigkeit haben, ist weitgehend unbekannt.

Weiters ist zu beachten, dass bei einer Bemessung einer Holzschale aufgrund der geringen Steifigkeitskennwerte des Werkstoffes Holz i. d. R. der Gebrauchstauglichkeitsnachweis und nicht der Tragsicherheitsnachweis maßgebend ist. Das bedeutet, dass physikalisch nichtlineare Traglastberechnungen für Holzschalen nur von untergeordneter Bedeutung sein können.

- *fertigungstechnische* Aspekte:

Eine Verleimung der Brettlagen ist auf der Baustelle praktisch undurchführbar, wodurch die einzelnen Schalenteile Transportgröße haben müssen. Ob diese Teile sinnvoll in echter Schalentragfunktion eingesetzt werden können, muss durch Verwendung bzw. Entwicklung entsprechender Verbindungstechniken überprüft werden. Nagelverbindungen werden wegen der hohen Fertigungskosten (Handarbeit) eher selten eingesetzt.

- *bauhysikalische* Aspekte:

Eine Bewitterung der Außenseite einer Holzschale ohne Wetterschutz ist praktisch nicht möglich. Dies hat zur Folge, dass eine Holzschale von außen nicht erkennbar ist. Auch die Sichtbarkeit der Innenseite ist durch die erhöhten Anforderungen an die Wärmedämmung und Gebäudetechnik (Leitungsführungen) beeinträchtigt. Weiters muss der Brandschutz sichergestellt werden. Daher ist das architektonische Erscheinungsbild einer Holzschale wesentlich beeinträchtigt.

Mit dem Abschluss dieser Arbeit wird der am Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen eingerichtete mehrjährige Forschungsschwerpunkt zum Thema Werkstoff Holz mit der experimentellen Betrachtung des Materials auf makroskopischer Ebene im Wesentlichen beendet. Die ursprüngliche Zielsetzung mit der Entwicklung, Anwendung und Verifikation eines numerischen Berechnungsmodelles für den Werkstoff Fichtenholz wurde mit dieser Arbeit erreicht.

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Ein Hallenbauwerk mit tragender Holzkonstruktion (Ruderpavillon in Linz, hergestellt vom Holzbauunternehmen <i>WIEHAG</i> in Altheim, Oberösterreich)	2
1.2	Überblick über die Forschungsaktivitäten des Instituts für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen zum Werkstoff Holz	3
2.1	Makrostruktur von Nadelholz [4]	6
2.2	Mikrostruktur von Nadelholz [4]	7
2.3	Submikrostruktur von Nadelholz [4]	7
2.4	Zellulosemolekül [4]	7
2.5	Schematischer Aufbau der Zellwand einer Holzfasern [5]	8
3.1	Biaxiales Belastungs- und Deformationsmesssystem	11
3.2	Mechanische Belastungseinrichtung	11
3.3	Biaxialer Holzprobekörper - Typ A1	13
3.4	Biaxialer Holzprobekörper - Typ A2	13
3.5	Uniaxialer Holzprobekörper - Typ B1	14
3.6	Uniaxialer Holzprobekörper - Typ B2	14
3.7	Lasteinleitungssystem für einen ebenen Holzprobekörper (Typ A1) unter biaxialer Beanspruchung	15
3.8	Zeitlicher Ablauf der Belastungsschritte	16
3.9	Schubdeformation bei einaxialer Beanspruchung schräg zur Faserrichtung	17
3.10	Antimetrische Verschiebungsvorschrift für ein biaxiales Beanspruchungsverhältnis $\kappa = \bar{u} : \bar{v}$ für den Probekörper Typ A	17
3.11	Viskose Spannungsanteile $\sigma_v$ der Relaxationsversuche	18
3.12	Viskoser Spannungsanteil $\sigma_v$ in Abhängigkeit von der Deformationsgeschwindigkeit $\dot{u}$	19
3.13	Abschnitt eines Baumstammes, Materialhaupttrichtungen	19
3.14	Probenentnahme aus einem Stamm	19

3.15 Stammquerschnitt einer Fichte mit Ästen (Alter: 45 Jahre, Durchmesser: 41-48 cm, gut zu erkennen ist ein überwucherter Ast im linken oberen Bereich) . . . . .	20
4.1 Geometrische Interpretation des Projektionsverfahrens . . . . .	33
5.1 Beispiel für ein Schnittbild für Leimbinderlamellen . . . . .	35
5.2 <i>LR</i> -Brett . . . . .	36
5.3 <i>LT</i> -Brett . . . . .	36
5.4 Ausgewählte $\sigma\varepsilon$ -Diagramme für (Quer-) Zugbeanspruchung . . . . .	37
5.5 Ausgewählte $\sigma\varepsilon$ -Diagramme für (Quer-) Druckbeanspruchung . . . . .	37
5.6 Gewählte Jahresringverteilung in einem Stammviertel der Abb. 5.1 . . . . .	37
5.7 Bestimmung des <i>R</i> - sowie <i>T</i> -Anteiles von Brett 2 aus Abb. 5.6 . . . . .	38
5.8 Elastizitätsmodul $E_L$ in Abhängigkeit von $\rho$ . . . . .	41
5.9 Elastizitätsmodul $E_R$ in Abhängigkeit von $\rho$ . . . . .	41
5.10 Elastizitätsmodul $E_T$ in Abhängigkeit von $\rho$ . . . . .	41
5.11 Querdehnungszahl $\nu_{LR}$ in Abhängigkeit von $\rho$ . . . . .	41
5.12 Spannungspfade $\sigma_2/\sigma_1$ für $\varphi = 0^\circ$ . . . . .	45
5.13 Spannungspfade $\sigma_2/\sigma_1$ für $\varphi = 7.5^\circ$ . . . . .	46
5.14 Spannungspfade $\sigma_2/\sigma_1$ für $\varphi = 15^\circ$ . . . . .	46
5.15 Spannungspfade $\sigma_2/\sigma_1$ für $\varphi = 30^\circ$ . . . . .	47
5.16 Spannungspfade $\sigma_2/\sigma_1$ für $\varphi = 45^\circ$ . . . . .	47
5.17 $\sigma\varepsilon$ -Diagramm für $\kappa = 0 : -1$ und $\varphi = 0^\circ$ . . . . .	48
5.18 $\sigma\varepsilon$ -Diagramm für $\kappa = 0 : -1$ und $\varphi = 7.5^\circ$ . . . . .	48
5.19 Fließfläche für fehlerfreies Fichtenholz in der <i>LR</i> -Ebene, verzerrt dargestellt . . . . .	50
5.20 Seitenansicht der Fließfläche und Darstellung der Fließspannungszustände der biaxialen Experimente (Abb. 5.12, 5.13, 5.14, 5.15 und 5.16) . . . . .	50
5.21 Hauptschnitt in der $\sigma_L$ - $\sigma_R$ -Ebene durch die Fließfläche und Darstellung der Fließspannungszustände der biaxialen Experimente für $\varphi = 0^\circ$ . . . . .	50
5.22 Hauptschnitt in der $\sigma_R$ - $\tau_{LR}$ -Ebene durch die Fließfläche . . . . .	50
5.23 Hauptschnitt in der $\sigma_L$ - $\sigma_R$ -Ebene durch die Fließfläche in Abhängigkeit von der Rohdichte $\rho$ . . . . .	51
5.24 Darstellung der Fließspannungszustände für die Versuchsergebnisse für $\varphi = 0^\circ$ in Abhängigkeit von der Rohdichte $\rho$ . . . . .	52
5.25 Biaxialer Probekörper <i>LT27</i> . . . . .	53



5.26	Bruchbild des biaxialen Probekörpers $LT27$ ( $\varphi = 0^\circ, \kappa = 0 : +1$ ) . . . . .	53
5.27	$\sigma\varepsilon$ -Diagramm für die Versuche $LT05, LT06, LT27, LT28, LT30$ ( $\varphi = 0^\circ, \kappa = 0 : +1$ ) . . . . .	54
5.28	$\sigma\varepsilon$ -Diagramm für die Versuche $LT01, LT03$ und $LT24$ ( $\varphi = 0^\circ, \kappa = 0 : -1$ ) . . . . .	54
5.29	$\sigma\varepsilon$ -Diagramm für die zyklischen Versuche $LT02, LT04, LT21$ und $LT22$ ( $\varphi = 0^\circ, \kappa = 0 : -1$ ) . . . . .	54
5.30	Hauptschnitt in der $\sigma_L\text{-}\sigma_{\overline{RT}}$ -Ebene durch die Fließfläche und Darstellung der Fließspannungszustände der biaxialen Experimente in der $LT$ -Ebene . . . . .	56
5.31	Hauptschnitt in der $\sigma_{\overline{RT}}\text{-}\tau_{\overline{LRT}}$ -Ebene durch die Fließfläche . . . . .	56
5.32	Fließfläche für fehlerfreies Fichtenholz, gültig für die $\overline{LRT}$ -Ebene (in blauer Farbe) und in grüner Farbe für die $LR$ -Ebene, verzerrt dargestellt . . . . .	56
5.33	Festlegung charakteristischer Punkte auf dem Hauptschnitt des Ellipsoids in der $\sigma_L\text{-}\sigma_{\overline{RT}}$ -Ebene . . . . .	59
5.34	Zusammenhang zwischen $\phi^0$ und der Schubfließspannung $\max \tau_{y_{\overline{LRT}}}^0$ . . . . .	63
5.35	Verlauf des Evolutionsgesetzes für $\max f_{y_{\overline{RT}}}$ . . . . .	65
5.36	Verlauf des Evolutionsgesetzes für $\min f_{y_{c_{\overline{RT}}}}$ . . . . .	66
5.37	Verlauf des Evolutionsgesetzes für $\max f_{y_{c_L}}$ . . . . .	67
5.38	Verlauf des Evolutionsgesetzes für $\min f_{y_{c_L}}$ . . . . .	68
5.39	Verlauf des Evolutionsgesetzes für $\tan \phi^*$ . . . . .	69
5.40	Zusammenhang zwischen $\phi$ und der Schubfließspannung $\max \tau_{y_{\overline{LRT}}}$ . . . . .	70
5.41	Verlauf des Evolutiuongesetzes für $\max \tau_{y_{\overline{LRT}}}$ . . . . .	70
6.1	Brettquerschnitt ohne Kantenäste . . . . .	78
6.2	Brettquerschnitt mit Kantenästen . . . . .	78
6.3	Prinzip von ST. VENANT . . . . .	79
6.4	Abschnitt einer Lamelle – Beispiel für die Ermittlung von $ksa$ für eine Brettoberfläche . . . . .	79
6.5	Vergleich der maximalen Spannungen zwischen a) unendlich ausgedehnte Scheibe mit Loch und b1) bzw. b2) Außenkerbe . . . . .	80
6.6	Probekörper $K1$ vor Versuchsbeginn . . . . .	82
6.7	Bruchbild des Probekörpers $K1$ . . . . .	82
6.8	Bruchbild des Probekörpers $K10$ . . . . .	82
6.9	Abhängigkeit der Zugfestigkeit von der größten Einzelastabmessung . . . . .	83
6.10	Abhängigkeit der Zugfestigkeit vom Astparameter $ksa$ (Erhöhungsfaktor $s = 1.0$ ) . . . . .	83

6.11	Regressionskurven für die Versuche mit (grün) und ohne (blau) Kantenästen	84
6.12	Abhängigkeit der Zugfestigkeit in $L$ -Richtung vom Astparameter $ksa$ (Erh.faktor $s = 1.20$ )	84
6.13	Bruchbild des Probekörpers $K52$	84
6.14	Abhängigkeit der Zugfestigkeit in $\overline{RT}$ -Richtung vom Astparameter $ksa$ (Erhöhungsfaktor $s = 1.20$ )	85
6.15	Bruchbild des Probekörpers $K64$	86
6.16	Bruchbild des Probekörpers $K69$ mit offenen Rissen in Faserlängsrichtung, aufgenommen während der Belastungsphase	87
6.17	Abhängigkeit der Druckfestigkeit in $L$ -Richtung vom Astparameter $ksa$	87
6.18	Stabmodell für das Versagen von fehlerbehaftetem Fichtenholz bei Druckbeanspruchung in Faserlängsrichtung (Hintergrund: Ausschnitt des Bruchbildes des Probekörpers $K61$ )	88
6.19	Verändertes Evolutionsgesetz für Druckbeanspruchung in $L$ -Richtung	88
6.20	Messfeld des Probekörpers $K72$ nach Versuchsende	89
6.21	Deformationsverteilung in $\overline{RT}$ -Richtung des Probekörpers $K72$ , gemessen mit dem ESPI-System	89
6.22	Abhängigkeit der Druckfestigkeit in $\overline{RT}$ -Richtung vom Astparameter $ksa$	90
6.23	Hauptschnitt in der $\sigma_L$ - $\sigma_{\overline{RT}}$ -Ebene durch die Fließfläche in blauer Farbe für fehlerfreies Fichtenholz ( $ksa = 0$ ) und in roter Farbe für einen Astparameter von $ksa = 0.30$	91
6.24	Fließfläche in der $L\overline{RT}$ -Ebene in blauer Farbe für fehlerfreies Fichtenholz ( $ksa = 0$ ) und in roter Farbe für einen Astparameter von $ksa = 0.30$ , verzerrt dargestellt	91
7.1	Geometrische Interpretation der konsistenten Tangente	104
7.2	Prinzip des NEWTON-RAPHSON-Iterationserfahrens, dargestellt für das Inkrement $n + 1$	105
7.3	Struktogramm einer globalen, nichtlinearen FE-Berechnung	106
7.4	Geometrie des 1-Element-Beispiels	107
7.5	Numerisch stabile sowie instabile Entfestigungspfade	108
7.6	Sprunghafte Entfestigung bei Zugbeanspruchung in $L$ -Richtung	109
7.7	Sprunghafte Entfestigung bei Zugbeanspruchung in $\overline{RT}$ -Richtung	109
7.8	Initiale Fließfläche nach TSAI & WU sowie Evolutionsgesetze (verzerrt dargestellt)	110

7.9	Initiale und veränderte Fließfläche bei Zugversagen in $L$ -Richtung ( $k_{sa} = 0.30$ ) . . . . .	111
7.10	Geometrie des Kragbalken-Beispielen, bestehend aus acht Elementen . . . . .	111
7.11	Verteilung der plastischen Verzerrungen in $L$ -Richtung ( $\epsilon_L^p$ ) . . . . .	111
7.12	Reaktionsbiegemoment-Rotations-Diagramm . . . . .	112
7.13	Geometrie des Biegebalken-Beispielen . . . . .	113
7.14	Reaktionskraft-Vertikalverschiebungsdiagramm des Biegebalkens . . . . .	113
7.15	Reaktionskraft-Vertikalverschiebungsdiagramm für den Lastangriffspunkt . . . . .	114
7.16	Zonen mit plastischen Deformationen im Bereich des Durchbruchs im Traglastzustand (= Maximalkraft) . . . . .	114
8.1	Referenzkonfiguration des Probekörpers . . . . .	116
8.2	Abmessungen des Probekörpers . . . . .	116
8.3	Ergebnisse der Finite-Elemente-Simulation . . . . .	117
8.4	Ausschnitt des deformierten Probekörpers (Nr. 2) . . . . .	117
8.5	Last-Verschiebungsdiagramm . . . . .	118
8.6	Geometrie der drei Träger mit einem runden Durchbruch . . . . .	120
8.7	FE-Netz sowie Randbedingungen der Serie 04 . . . . .	120
8.8	Holzfeuchtemessgerät <i>Hydromette M 2050</i> der Firma <i>GANN</i> . . . . .	121
8.9	Ultraschalllaufzeitmessgerät der Firma <i>SYLVATEST</i> . . . . .	121
8.10	Detail FE-Netz im Bereich des Durchbruchs der Serie 04 . . . . .	122
8.11	Versuchsaufbau (Probekörper Nr. 04.2) . . . . .	123
8.12	Ausgewählter Punkt $F$ der Serie 02 zur Visualisierung des Spannungszustandes im Traglastzustand . . . . .	124
8.13	Initiale (hellrot, $k_{sa} = 0.28$ ) und modifizierte Fließfläche (dunkelrot) des Punktes $F$ für den Wertebereich $\sigma_L < 0$ ( $\sigma_L = +6.16 \text{ N/mm}^2$ , $\sigma_{\overline{RT}} = -3.08 \text{ N/mm}^2$ , $\tau_{\overline{LRT}} = -0.98 \text{ N/mm}^2$ ), verzerrt dargestellt . . . . .	125
8.14	Last-Verschiebungsdiagramm der Serie 02 . . . . .	125
8.15	Last-Verschiebungsdiagramm der Serie 03 . . . . .	126
8.16	Last-Verschiebungsdiagramm der Serie 04 . . . . .	126
8.17	Spannungsverteilungen im Durchbruchbereich im Traglastzustand . . . . .	127
8.18	Zonen plastischer Deformationen im Durchbruchbereich im Traglastzustand . . . . .	128
8.19	Bruchilder im Durchbruchbereich nach Versuchsende . . . . .	129
8.20	Abmessungen des Dreibocks, bestehend aus zwei Streben und einem Untergurt, die Verbindung erfolgt über einfache Versätze . . . . .	130

8.21	FE-Netz sowie Randbedingungen des Dreibocks . . . . .	131
8.22	Versuchsaufbau (Probekörper Nr. 03.3) . . . . .	132
8.23	Last-Verschiebungsdiagramm . . . . .	133
8.24	Initiale (hellrot, $k_{sa} = 0.00$ ) und modifizierte Fließfläche (dunkelrot) des Punktes $A$ für den Wertebereich $\sigma_L < 0$ ( $\sigma_L = +6.16 \text{ N/mm}^2$ , $\sigma_{\overline{RT}} = -3.08 \text{ N/mm}^2$ , $\tau_{L\overline{RT}} = -0.98 \text{ N/mm}^2$ ), verzerrt dargestellt . . . . .	134
8.25	Spannungsverteilungen und verformte Struktur im Traglastzustand im Ver- satzbereich . . . . .	135
8.26	Zonen plastischer Deformationen im Traglastzustand im Versatzbereich . . . .	136
8.27	Probekörperbilder im Traglast- bzw. Bruchzustand . . . . .	137
A.1	Geometrie des Probekörpers . . . . .	153
A.2	Typische Belastungsgeschichte für mehrere Zyklen . . . . .	153
A.3	Referenzkonfiguration eines Probekörpers . . . . .	153
A.4	Verformte Konfiguration eines Probekörpers . . . . .	153
A.5	Experimentell bestimmte Spannungs-Dehnungsbeziehungen bei zyklischer Be- lastung . . . . .	154
A.6	Rheologisches Materialmodell für Druckbeanspruchung in $R$ -Richtung . . . . .	154
A.7	Evolutionsgesetz . . . . .	155
A.8	Bestimmung des Viskositätsparameters $\eta$ aus den Experimenten . . . . .	157
A.9	Simulation eines Zyklus (Belastung – Entlastung – Wiederbelastung) . . . . .	159

# Tabellenverzeichnis

3.1	Übersicht über die durchgeführten Bruchversuche . . . . .	21
3.2	Übersicht über die durchgeführten uniaxialen Zugversuche zur Bestimmung der Steifigkeitskennwerte und uniaxialen Festigkeiten . . . . .	22
5.1	$R$ - sowie $T$ -Anteil von Fichtenholzbrettern . . . . .	38
5.2	Elastische Materialparameter für den ebenen Spannungszustand für Fichtenholz . . . . .	43
6.1	Überblick über die Holzbaunormen im deutschen Sprachraum . . . . .	75
6.2	Einteilung von Nadelschnittholz in Festigkeitsklassen . . . . .	76
8.1	Materialparameter der Kleinstruktur in I-Form . . . . .	116
8.2	Materialparameter der Leimbinder . . . . .	121
8.3	Materialparameter für die Stahlplatte und die OSB-Platte . . . . .	121
8.4	Gegenüberstellung der Versuchsergebnisse und der Ergebnisse der Finite-Elemente-Simulationen für die Träger mit einem kreisförmigen Durchbruch . . . . .	123
8.5	Materialparameter der Strebe und des Untergurtes . . . . .	132
8.6	Gegenüberstellung der Versuchsergebnisse mit den Ergebnissen aus den Finite-Elemente-Simulationen für den Dreibock . . . . .	134
B.1	Versuchsprogramm der durchgeführten biaxialen Bruchversuche mit fehlerfreiem Fichtenholz in der $LT$ -Ebene . . . . .	161
B.3	Versuchsprogramm der durchgeführten Bruchversuche mit ausgewählten Ästen in der $L\overline{RT}$ -Ebene . . . . .	162
E.1	Lamellenparameter der Versuchserie $d = 0.2h$ . . . . .	170
E.2	Lamellenparameter der Versuchserie $d = 0.3h$ . . . . .	171
E.3	Lamellenparameter der Versuchserie $d = 0.4h$ . . . . .	172

# Literaturverzeichnis

- [1] EBERHARDSTEINER Josef: *Mechanisches Verhalten von Fichtenholz - Experimentelle Bestimmung der biaxialen Festigkeitseigenschaften*. Springer-Verlag, Wien, New York (2002)
- [2] Homepage der Arbeitsgemeinschaft der österreichischen Holzwirtschaft („pro:Holz Austria“): [www.proholz.at](http://www.proholz.at)
- [3] KOLLMANN Franz: *Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe*. Zweite Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1982)
- [4] NIEMZ Peter: *Physik des Holzes und der Holzwerkstoffe*. DRW-Verlag (1993)
- [5] BLASS Hans Joachim, GÖRLACHER Rainer, STECK Günter: *Holzbauwerke nach EUROCODE 5 - Bemessung und Baustoffe - Step 1*. Fachverlag Holz, Düsseldorf (1995)
- [6] HELNWEIN Peter, EBERHARDSTEINER Josef, HANHIJÄRVI Antti: *Constitutive Model for the Short-Term Failure Analysis of Wood Under Multiaxial States of Stress: Effect of Radial Compression*. Proceedings of the First International Conference of the European Society for Wood Mechanics, (Ed.: P. Navi), European Society for Wood Mechanics, Swiss Federal Institute of Technology (EPFL), 285-294, Reprographie EPFL, Lausanne, Schweiz, 19.-21. April 2001 (2002)
- [7] FLEISCHMANN Martin, HELNWEIN Peter, EBERHARDSTEINER Josef: *Experimentelle Untersuchung des mechanischen Verhaltens von astfreiem Fichtenholz in radialer und tangentialer Richtung des Stamms*. PAMM - Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, 2 (2003), 1; 274 - 275.
- [8] MACKENZIE-HELNWEIN Peter, MÜLLNER Herbert W., EBERHARDSTEINER Josef und MANG Herbert A.: *Analysis of Layered Wooden Shells using an Orthotropic Elasto-Plastic Model for Multiaxial Loading of Clear Spruce Wood*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, in print.
- [9] MÜLLNER Herbert W.: *Konstitutives Modellieren von Fichtenholz unter biaxialer Beanspruchung mittels eines orthotropen Einflächenmodells unter Berücksichtigung von Ver- und Entfestigung*. Diplomarbeit, Institut für Festigkeitslehre, Technische Universität Wien (2003)

- [10] KUČERA Bohumil: *Holzfehler und ihr Einfluß auf die mechanischen Eigenschaften der Fichte und Kiefer*. Holztechnologie 14 (1973)
- [11] MACHADO J. S., CRUZ H.: *Strength Grading of Maritime Pine. Influence of Pith and Knots*. International Conference of IUFRO S5.02 Timber Engineering, Kopenhagen (1997)
- [12] ZANDBERGS J. G., SMITH F. W.: *Finite Element Fracture Prediction for Wood with Knots and Cross Grain*. Wood and Fiber Science, 20(1) (1988)
- [13] TABARSA Taghi, HEI CHUI Ying: *Stress-Strain Response of Wood under Radial Compression. Part I. Test Method and Influences of Cellular Properties*. Wood and Fiber Science, 32(2) (2000)
- [14] ADALIN C., MORLIER Pierre : *Wood Model for the dynamic behaviour of wood im multiaxial compression*. Holz als Roh- und Werkstoff 60, Springer-Verlag (2002)
- [15] GINGERL Manfred: *Realisierung eines optischen Deformationsmeßsystems zur experimentellen Untersuchung des orthotropen Materialverhaltens von Holz bei biaxialer Beanspruchung*. Dissertation, Institut für Festigkeitslehre, Technische Universität Wien (1998)
- [16] PULAY Franz M. J. A.: *Entwicklung einer Versuchseinrichtung zur Bestimmung des Verformungsverhaltens von Holz bei zweiachsiger Beanspruchung bis zum Bruch*. Dissertation, Institut für Festigkeitslehre, Technische Universität Wien (1994)
- [17] ÖNORM EN 789: *Holzbauwerke – Prüfverfahren – Bestimmung der mechanischen Eigenschaften von Holzbauwerkstoffen* (1. März 1996)
- [18] GOLFIERI Michela: *Svolgimento di esperimenti macroscopici scelti per il legno di abete rosso come fondamento per lo sviluppo di un modello elasto-plastico del materiale*. Diplomarbeit, Universität Bologna (2003)
- [19] SIMO J. C., HUGHES T. J. R.: *Computational Inelasticity*. Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer-Verlag (1998)
- [20] LUBLINER J.: *Plasticity Theory*, Macmillan Publishing Company, New York (1990)
- [21] OLIVER J.: *A Consistent Characteristic Length for Smeared Cracking Models*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, 461–474 (1989)
- [22] SIMO J. C., TAYLOR R. L.: *Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 48, 101–118 (1985)
- [23] MACKENZIE-HELNWEIN Peter, EBERHARDSTEINER Josef, MANG Herbert A.: *A Multi-Surface Plasticity Model for Clear Wood and its Application to the Finite Element Analysis of Structural Details*. Computational Mechanics, Vol. 31, 1-2, 204–218 (2003)

- [24] LEKHNITSKIJ S. G.: *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Mir Publishers, Moskau (1981)
- [25] DIN 1052:2004-08: *Entwurf, Berchnung und Bemessung von Holzbauwerken – Allgemeine Bemessungsregeln und Bemessungsregeln für den Hochbau*. (August 2004)
- [26] TSAI S., WU E.: *A General Theory of Strength for Anisotropic Materials*. Journal of Composite Materials, 5:58-80 (1971)
- [27] MACKENZIE-HELNWEIN Peter, EBERHARDSTEINER Josef, MANG Herbert A.: *Short-term mechanical behavior of biaxially stressed wood: Experimental observations and constitutive modeling as an orthotropic two-surface elasto-plastic material*. Holzfor-schung, 2004, accepted for publication.
- [28] ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L.: *The Finite Element Method*. Fourth ed., Vol. 2, McGraw-Hill, London (1991)
- [29] GLOS Peter: *Zur Bestimmung des Festigkeitsverhaltens von Brettschichtholz bei Druckbeanspruchung aus Werkstoff- und Einwirkungskenngrößen*. Dissertation, TU München (1978)
- [30] EUROCODE 5: *Bemessung und Konstruktion von Holzbauten – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau*. (Vornorm, Februar 1995)
- [31] ÖNORM B 4100-2: *Holzbau – Holztragwerke – Berechnung und Ausführung*. (Dezember 1997)
- [32] E DIN 1052:2000-05: *Entwurf, Berchnung und Bemessung von Holzbauwerken – Allgemeine Bemessungsregeln und Bemessungsregeln für den Hochbau*. (Entwurf, Mai 2000)
- [33] SIA 164: *Holzbau – Verständigung, Planung, Berechnung und Bemessung, Material, Ausführung, Überwachung und Unterhalt*. (Ausgabe 1992)
- [34] EN 338: *Bauholz für tragende Zwecke – Festigkeitsklassen*. (Mai 1995)
- [35] prEN 338: *Bauholz für tragende Zwecke – Festigkeitsklassen*. (Entwurf, Februar 2001)
- [36] EN 518: *Bauholz für tragende Zwecke – Sortierung – Anforderungen an Normen über visuelle Sortierung nach der Festigkeit*. (Februar 1995)
- [37] EN 519: *Bauholz für tragende Zwecke – Sortierung – Anforderungen an maschinell nach der Festigkeit sortiertes Bauholz und an Sortiermaschinen*. (Februar 1995)
- [38] DIN 4074-1: *Sortierung von Holz nach der Tragfähigkeit – Teil 1: Nadelschnittholz*. (Entwurf, Mai 2001)
- [39] DIN 4074-3: *Sortierung von Holz nach der Tragfähigkeit – Teil 3: Sortiermaschinen für Schnittholz, Anforderungen und Prüfung*. (Entwurf, Mai 2001)



- [40] DIN 4074-4: *Sortierung von Holz nach der Tragfähigkeit – Teil 4: Nachweis der Eignung zur maschinellen Schnittholzsortierung*. (Entwurf, Mai 2001)
- [41] DIN 1912: *Bauholz für tragende zwecke – Festigkeitsklassen – Zuordnung von visuellen Sortierklassen und Holzarten*. (August 1998)
- [42] NS-INSTA 142: *Nordiske regler for visuell styrkesortering av trelast – Nordic visual strength grading rules for timber*. (Juni 1997)
- [43] NATTERER Julius, HERZOG Thomas, VOLZ Michael: *Holzbau-Atlas Zwei*. Birkhäuser-Verlag, Basel, Boston, Berlin (2001)
- [44] DIN 52181: *Bestimmung der Wuchseigenschaften von Nadelschnittholz*. (August 1975)
- [45] BODIG Jozsef, JAYNE Benjamin A.: *Mechanics of Wood and Wood Composites*. Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York (1982)
- [46] SACHS Lothar: *Angewandte Statistik*. 7. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1992)
- [47] KOHLHAUSER Christoph: *A Multi-Surface Plasticity Model with Strain Softening for Failure Mechanisms of Clear Spruce Wood under Plain Biaxial Stress Conditions and Stabilization of its Numerical Implementation for Large Characteristic Lengths*. Diplomarbeit, Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen, Technische Universität Wien (2005)
- [48] SCHMIDT Jörg, GEISSLER Gordon, KALISKE Michael: *Zur Simulation des spröden Versagens von Holz*. Leipzig Annual Civil Engineering Report No. 9, Universität Leipzig (2004)
- [49] AICHER Simon, HÖFFLIN Lilian: *New Design Model for Round Holes in Glulam Beams*. Proceedings of the 8th World Conference on Timber Engineering (WCTE 2004), Volume I, Lahti, Finland (2004)

# Anhang **A**

---

## Uniaxiale Druckversuche in radialer Richtung

Die Spannungspfade der biaxialen Versuche in der  $LR$ -Ebene zeigen bei überwiegender Druckbeanspruchung in  $R$ -Richtung (siehe Abbildungen 5.12 bis 5.16) im Gegensatz zu den anderen Beanspruchungssituationen ein deutlich ausgeprägtes nichtlineares Verhalten. Zur gezielten Untersuchung dieses Materialverhaltens und der Identifikation von Materialparametern des in [6] von HELNWEIN et. al. vorgestellten *Radial Compression Models* wurden ergänzende uniaxiale Referenzversuche durchgeführt. Im Gegensatz zu allen anderen in dieser Arbeit dokumentierten Experimenten erlauben die vorliegenden Versuche qualitative und quantitative Aussagen über das zeitabhängige Verhalten von Fichtenholz. Die in diesem Anhang präsentierten Ergebnisse haben auch quantitativ für die tangentielle Richtung ( $T$ -Richtung) Gültigkeit (Wie bereits in Kapitel 5 erwähnt wurde, zeigen Versuchsergebnisse in [14] in  $T$ -Richtung fast identisches Materialverhalten wie die in diesem Abschnitt dokumentierten Ergebnisse der  $R$ -Richtung).

### A.1 Beschreibung der Versuchskonfiguration

Die untersuchten Probekörper wurden aus astfreiem Fichtenholz gefertigt. Der Sollquerschnitt aller Probekörper betrug  $b \times l = 70 \times 70$  mm, die Höhen betrug  $h = 45, 95$  bzw. 120 mm. Um eine möglichst homogene Ausrichtung der Jahresringe zu erhalten, wurden jeweils zwei Teile zu einem Probekörper verleimt (siehe Abb. A.1). Die Versuche wurden dehnungsgesteuert mit zyklischer Belastung bis in Bereiche großer Deformationen unter abschnittsweiser konstanter Dehnungsgeschwindigkeit durchgeführt ( $\dot{u} = 1$  bis 4 mm/min).

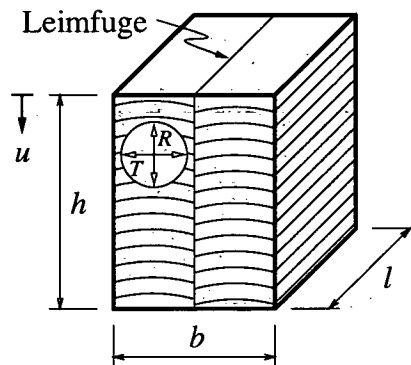


Abbildung A.1: Geometrie des Probekörpers

Zur Bestimmung von Materialkennwerten waren drei Versuche mit zyklischer Belastung geeignet. Ergänzend wurden vier Experimente mit proportionaler Belastung durchgeführt. Die Holzrohddichte aller Probekörper betrug im Mittel  $\rho = 0.42 \text{ g/cm}^3$ , die Holzfeuchtigkeit  $u = 11.7\%$ .

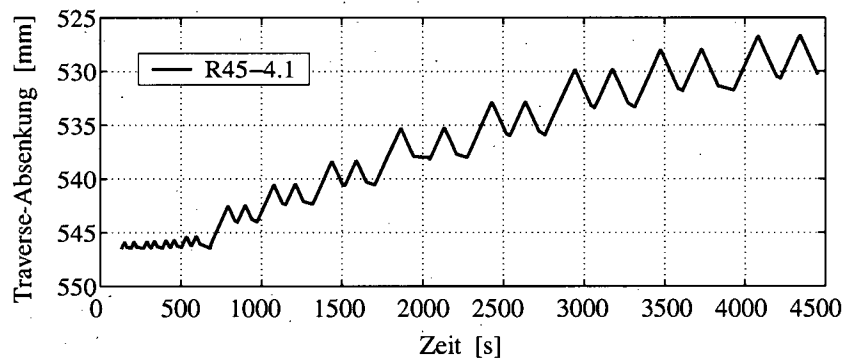


Abbildung A.2: Typische Belastungsgeschichte für mehrere Zyklen

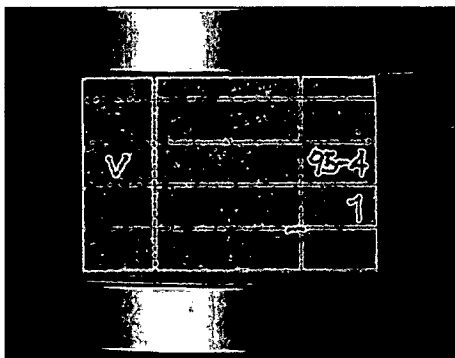


Abbildung A.3: Referenzkonfiguration eines Probekörpers

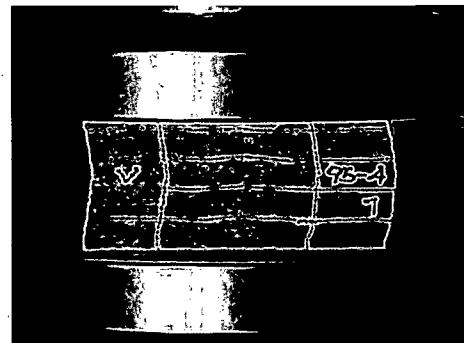


Abbildung A.4: Verformte Konfiguration eines Probekörpers

Wie aus den Abb. A.3 und A.4 erkennbar ist, konnte durch das Verleimen eine annähernd symmetrische Verteilung der Jahresringstruktur erreicht werden, wodurch auch bei größeren Deformationen homogene Verzerrungsverhältnisse auftraten.

## A.2 Entwicklung eines rheologischen Modells für die Beschreibung des mechanischen Verhaltens von fehlerfreiem Fichtenholz für Druckbeanspruchung in radialer Richtung

In Abb. A.5 wurden vier Versuche an Probekörpern unterschiedlicher Höhe zusammengefasst (Die in der Legende der Abb. A.5 nach dem Buchstaben R angeführte Zahl entspricht der Probenhöhe in [mm]). Die Abb. A.5 zeigt, dass das beobachtete Verhalten von der Probenhöhe weitgehend unabhängig ist. Bei Druckspannungen über  $\sigma_R \approx 3.5 \text{ N/mm}^2$  treten bleibende (plastische) Verformungen auf. Weiters zeigen Entlastungs-Wiederbelastungszyklen eine deutlich erkennbare Hysterese, die durch viskose Verzerrungsanteile erklärt werden kann. Abb. A.6 zeigt das rheologische Materialmodell, dessen Komponenten im Nachfolgenden einzeln beschrieben werden.

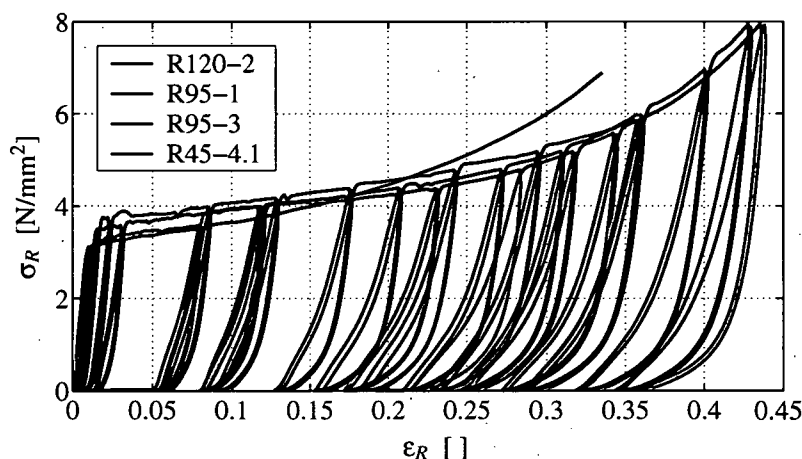


Abbildung A.5: Experimentell bestimmte Spannungs-Dehnungsbeziehungen bei zyklischer Belastung

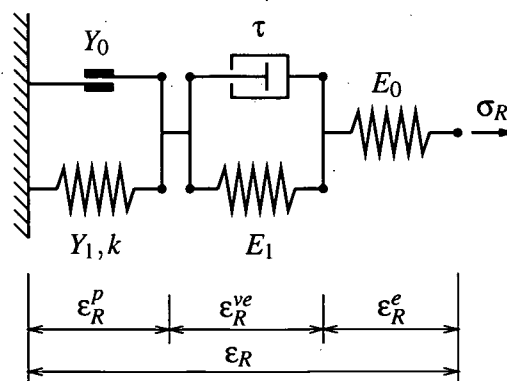


Abbildung A.6: Rheologisches Materialmodell für Druckbeanspruchung in  $R$ -Richtung

### a) Anpassung eines Plastizitätsmodells für kleine Verzerrungen

Dazu wird das von HELNWEIN et. al. in [6] vorgeschlagene orthotrope *Radial Compression Model*, welches in der *LR*-Ebene formuliert ist, für den vorliegenden eindimensionalen Fall spezialisiert:

Für die Fließbedingung

$$f_R(\sigma_R) = -\sigma_R + q - Y_0 = 0 \quad (\text{A.1})$$

wird die Verfestigungsspannung  $q$  benötigt. Diese wird durch ein exponentielles Evolutionsgesetz

$$q = -\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha} = -Y_1 [1 - \exp(-k\alpha)] \quad (\text{A.2})$$

beschrieben, wobei

$$\psi(\varepsilon_R, \varepsilon_R^p, \varepsilon_R^{ve}, \alpha) = \frac{1}{2} E_0 (\varepsilon_R - \varepsilon_R^p - \varepsilon_R^{ve})^2 + \frac{1}{2} E_1 (\varepsilon_R^{ve})^2 + \mathcal{H}(\alpha) \quad (\text{A.3})$$

die freie HELMHOLTZ-Energie darstellt.  $\sigma_R$  bezeichnet die Radialspannung,  $Y_0$  die initiale Fließspannung und  $Y_1$  die maximal erreichbare Verfestigungsspannung.  $k$  steuert die Evolution der Verfestigungsfunktion  $q(\alpha)$ .

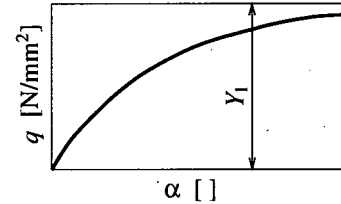


Abbildung A.7: Evolutionsgesetz

Im Rahmen der Plastizitätstheorie wird eine assoziierte Fließregel

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f_R}{\partial \sigma_R} \quad (\text{A.4})$$

und ein assoziiertes Verfestigungsgesetz

$$\dot{\alpha} = \dot{\gamma} \frac{\partial f_R}{\partial q} = \dot{\gamma} \quad (\text{A.5})$$

verwendet.

### b) Beschreibung der viskosen Einflüsse durch ein 3-Parameter-Modell

Das untersuchte Modell stellt eine Serienschaltung eines KELVIN-VOIGT'schen Körpers und eines HOOKE'schen Körpers dar (siehe Abb. A.6). Die drei Materialparameter sind der Kurzzeitelastizitätsmodul  $E_0$  sowie die partielle Steifigkeit  $E_1$  und die Relaxationszeit  $\tau$  ( $\eta = \tau E_1$ ). Nachfolgend wird die Differentialgleichung, welche das 3-Parameter-Modell beschreibt, hergeleitet:

$$\sigma_R = \sigma_R^e = \sigma_R^{Feder} + \sigma_R^{Dämpfer}, \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma_R = \sigma_R^e = E_0 \varepsilon_R^e, \quad (\text{A.7})$$

$$\sigma_R^{\text{Feder}} = E_1 \varepsilon_R^{\text{ve}}, \quad (\text{A.8})$$

$$\sigma_R^{\text{Dämpfer}} = \eta \dot{\varepsilon}_R^{\text{ve}} = \tau E_1 \dot{\varepsilon}_R^{\text{ve}}. \quad (\text{A.9})$$

Weiters gilt unter Vernachlässigung plastischer Verzerrungen ( $\varepsilon_R^p = 0$ ):

$$\varepsilon_R^e = \varepsilon_R - \varepsilon_R^{\text{ve}}. \quad (\text{A.10})$$

Setzt man Gl. (A.10) in Gl. (A.7) ein, so erhält man

$$\sigma_R = E_0 (\varepsilon_R - \varepsilon_R^{\text{ve}}) \quad (\text{A.11})$$

und berücksichtigt Gl. (A.6), so folgt

$$\sigma_R^{\text{Feder}} + \sigma_R^{\text{Dämpfer}} = E_0 (\varepsilon_R - \varepsilon_R^{\text{ve}}). \quad (\text{A.12})$$

Einsetzen der Gleichungen (A.8) und (A.9) in (A.12) ergibt:

$$E_1 \varepsilon_R^{\text{ve}} + \tau E_1 \dot{\varepsilon}_R^{\text{ve}} = E_0 \varepsilon_R - E_0 \varepsilon_R^{\text{ve}}. \quad (\text{A.13})$$

Durch Umformen

$$\tau E_1 \dot{\varepsilon}_R^{\text{ve}} + (E_0 + E_1) \varepsilon_R^{\text{ve}} = E_0 \varepsilon_R \quad (\text{A.14})$$

erhält man die gesuchte Differentialgleichung zu

$$\dot{\varepsilon}_R^{\text{ve}} + \frac{E_0 + E_1}{\tau E_1} \varepsilon_R^{\text{ve}} = \frac{E_0}{\tau E_1} \varepsilon_R. \quad (\text{A.15})$$

Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung erfolgte mit dem Softwarepaket *MATHEMATICA* ( $\rightarrow \varepsilon_R^{\text{ve}} = f(t)$ ).

Als Ausgangspunkt zur Identifikation von  $E_0$ ,  $E_1$  und  $\tau$  diene die Energiebilanz eines geschlossenen Beanspruchungszyklus. In einem solchen Zyklus entstehen keine zusätzlichen plastischen Verzerrungen. Folglich kann die Dissipationsleistung eines derartigen Zyklus ausschließlich dem viskosen Materialverhalten zugeschrieben werden. Die Dissipationsleistung  $\mathcal{D}$  erhält man aus dem *zweiten Hauptsatz der Wärmelehre* zu:

$$\mathcal{D} = \mathcal{P} - \dot{\psi} = \sigma_R \dot{\varepsilon}_R - \dot{\psi} = \sigma_R \dot{\varepsilon}_R^p + q \dot{\alpha} + \sigma_R^{\text{ve}} \dot{\varepsilon}_R^{\text{ve}} \geq 0. \quad (\text{A.16})$$

Für einen geschlossenen Zyklus vereinfacht sich  $\mathcal{D}$  mit  $\dot{\gamma} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_R^p = 0$ ,  $\dot{\alpha} = 0$  zu

$$\mathcal{D} = \sigma_R^{\text{ve}} \dot{\varepsilon}_R^{\text{ve}}. \quad (\text{A.17})$$

Die Bestimmung von  $\tau$  erfolgt durch Gleichsetzen der aus dem Versuch ermittelten und der aus dem Modell errechneten dissipierten mechanischen Energie. Unter der Annahme, dass die im System gespeicherte Energie  $\psi$  zu Beginn eines geschlossenen Zyklus (Zeitpunkt  $t_0$ ) näherungsweise gleich groß ist wie am Ende des betrachteten Zyklus (Zeitpunkt  $t_1$ )

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi} dt = \psi|_{t_1} - \psi|_{t_0} \approx 0, \quad (\text{A.18})$$

ergibt sich die dissipierte mechanische Energie aus den Experimenten zu

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{D} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sigma_R \dot{\varepsilon}_R dt - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi} dt \approx \int_{t_0}^{t_1} \sigma_R \dot{\varepsilon}_R dt. \quad (\text{A.19})$$

Mit Hilfe des angenommenen Kriechgesetzes

$$\dot{\varepsilon}_R^{ve} = \frac{\sigma_R^{ve}}{\eta} \quad (\text{A.20})$$

errechnet sich die dissipierte mechanische Energie des Modells zu

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{D} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sigma_R^{ve} \dot{\varepsilon}_R^{ve} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sigma_R^{ve2}}{\eta} dt \approx \frac{1}{\eta} \int_{t_0}^{t_1} \sigma_R^2 dt. \quad (\text{A.21})$$

Durch einen Vergleich von Gl. (A.19) mit Gl. (A.21) lässt sich der Viskositätsparameter  $\eta$  zu

$$\eta = \frac{\int_{t_0}^{t_1} \sigma_R^2 dt}{\int_{t_0}^{t_1} \sigma_R \dot{\varepsilon}_R dt} \quad (\text{A.22})$$

bestimmen. Aus der Abb. A.8 wurde der Parameter zu  $\eta = 11000 \text{ Ns/mm}^2$  bestimmt. Die höheren Werte von  $\eta$  im Bereich kleiner Verzerrungen deuten auf elastische Einflüsse hin, im Bereich sehr großer  $\varepsilon_R$  waren die Probekörper bereits stark deformiert. Aus diesen Gründen wurde diese beiden Bereiche für die Ermittlung von  $\eta$  vernachlässigt.

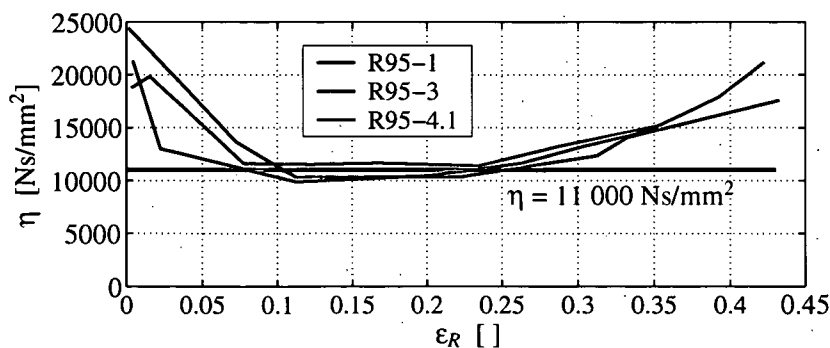


Abbildung A.8: Bestimmung des Viskositätsparameters  $\eta$  aus den Experimenten

Die Bestimmung von  $E_0$ ,  $E_1$  und  $\tau$  erfolgte iterativ mit Hilfe der folgenden Beziehungen

$$\eta = \tau \cdot E_1, \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{1}{E_\infty} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1}, \quad (\text{A.24})$$

wobei  $E_\infty$  aus der Extrapolation von Kraft-Relaxationskurven ermittelt wurde:

$$E_\infty = \frac{\sigma_\infty}{\varepsilon} = \frac{F_\infty}{A_0 \varepsilon} = 17 \text{ N/mm}^2. \quad (\text{A.25})$$

$A_0$  bezeichnet die Probenquerschnittsfläche,  $F_\infty$  die extrapolierte Kraft zum Zeitpunkt  $t = \infty$ . Die Iteration begründet sich aus der Tatsache, dass in den zwei Gl. (A.23) und Gl. (A.24) drei Unbekannte  $\tau$ ,  $E$ ,  $E_0$  vorkommen. Das Ergebnis der Viskositätsmaterialparameterbestimmung ist in Kap. A.3 angeführt.

Eine Beschreibung des viskosen Materialverhaltens mit einem *5-Parameter-Modell* brachte keine verbesserte Übereinstimmung der Simulationsergebnisse (siehe Kap. A.3) an die experimentell erhaltene Spannungs-Dehnungsbeziehung (Abb. A.5).

### c) Serienschaltung des *Radial Compression Models* mit dem *3-Parameter-Modell*

Durch Kopplung des Plastizitätsmodells (Punkt a) mit dem Viskositätsmodell (Punkt b) erhält man, wie in Abb. A.6 dargestellt, ein rheologisches Modell für Fichtenholz bei Druckbeanspruchung in  $R$ -Richtung. Die Spannung  $\sigma_R$  im Modell ergibt sich zu

$$\sigma_R = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_R} = E_0 (\varepsilon_R - \varepsilon_R^{ve} - \varepsilon_R^p) = E_0 \varepsilon_R^e. \quad (\text{A.26})$$

Darin bezeichnen  $\varepsilon_R$  die totale Verzerrung,  $\varepsilon_R^{ve}$  den viskoelastischen und  $\varepsilon_R^p$  den irreversiblen (plastischen) Anteil der Verzerrungen.



### A.3 Simulationsbeispiel

Mit dem in Anhang A.2 vorgestellten viskoelastischen-plastischen Modell wird ein Belastungs-Entlastungs- -Wiederbelastungszyklus simuliert. Die Wahl der Materialparameter erfolgte unter der Bedingung der energetischen Äquivalenz. Das bedeutet, dass die während einer Hysterese im Spannungs-Dehnungsdiagramm entstehende „eingeschlossene“ Fläche des Modells gleich groß ist, wie die aus den Experimenten berechnete. Die Form der Hysteresezyklen kann jedoch nur eingeschränkt beschrieben werden. Bei der Erstbelastung erkennt man deutlich den Übergang vom viskoelastischen Bereich zum plastischen Bereich bei einer Spannung von  $\sigma_R = Y_0 = 3.1 \text{ N/mm}^2$ .

Materialparameter	
$E_0$	= 100 N/mm <sup>2</sup>
$E_1$	= 20 N/mm <sup>2</sup>
$\tau$	= 550 s
$Y_0$	= 3.1 N/mm <sup>2</sup>
$Y_1$	= 1.1 N/mm <sup>2</sup>
$k$	= 30

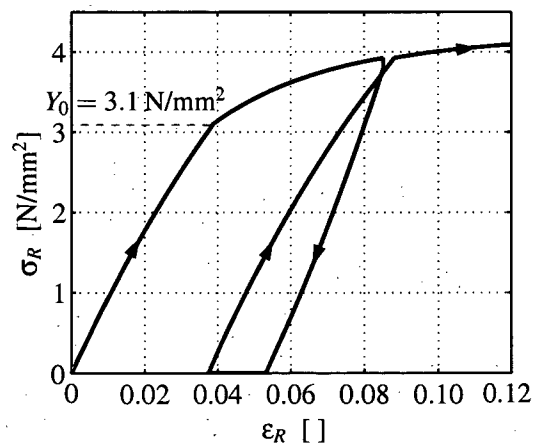


Abbildung A.9: Simulation eines Zyklus (Belastung – Entlastung – Wiederbelastung)

# Anhang **B**

---

## Versuchsprogramm, Versuchsparemeter

### B.1 Biaxiale Bruchversuche mit fehlerfreiem Fichtenholz in der $LT$ -Ebene

#### Legende:

$\varphi$	...	Winkel $x$ -Richtung - Faserlängsrichtung $L$ (siehe Abb. 3.10)
$\kappa$	...	biaxiales Beanspruchungsverhältnis
Vers.-Nr.	...	fortlaufende Versuchsnummer
PK-Typ	...	Probekörpertyp
PK.-Nr.	...	Probekörperbezeichnung (Klebedatum + Klebeposition)
Datum	...	Datum der Versuchsdurchführung
PK-Dicke	...	Dicke des Probekörpers im Messbereich [mm]
Rohdichte	...	Rohdichte des Probekörpers im Messbereich [g/cm <sup>3</sup> ]

Die in der nachfolgenden Tabelle in blauer Farbe angeführten Versuche wurden für die Auswertung nicht herangezogen. Der verhältnismäßig große Anteil an unbrauchbaren Experimenten resultiert aus einem längere Zeit nicht identifizierbaren und zu nicht vorhersagbaren Zeitpunkten auftretenden Defekt in der Elektronik der Biaxialprüfmaschine.

**Tabelle B.1:** Versuchsprogramm der durchgeführten biaxialen Bruchversuche mit fehlerfreiem Fichtenholz in der *LT*-Ebene

$\varphi$	$\kappa$	Vers.-Nr.	PK-Typ	PK-Nr.	Datum	PK-Dicke	Rohdichte
0.0	+0 : -1	LT01	A1	0303201	2003-04-16	7.85	0.383
0.0	+0 : -1	LT02 <sup>z)</sup>	A1	0303202	2003-04-22	7.75	0.497
0.0	+0 : -1	LT03	A1	0303203	2003-04-17	7.82	0.454
0.0	+0 : -1	LT04 <sup>z)</sup>	A1	0303204	2003-06-11	7.68	0.484
0.0	+0 : +1	LT05	A1	0303261	2003-04-22	4.50	0.393
0.0	+0 : +1	LT06	A1	0303262	2003-06-03	4.78	0.389
0.0	+0 : +1	LT07	A1	0303263	2003-06-03	4.80	0.419
0.0	+2 : +5	LT08 <sup>*)</sup>	A1	0307021	2003-07-28	4.52	0.417
15.0	+2 : +5	LT09 <sup>*)</sup>	A1	0307022	2003-07-28	4.49	0.427
15.0	+2 : +5	LT10 <sup>*)</sup>	A1	0307023	2003-07-28	4.51	0.473
15.0	+0 : +1	LT11 <sup>*)</sup>	A1	0307024	2003-07-28	4.51	0.420
15.0	+0 : +1	LT12 <sup>*)</sup>	A1	0307072	2003-07-29	4.50	0.414
15.0	+0 : +1	LT13 <sup>*)</sup>	A1	0307073	2003-07-29	4.52	0.409
15.0	+0 : +1	LT14 <sup>*)</sup>	A1	0307074	2003-07-29	4.47	0.413
15.0	-3 : -5	LT15 <sup>*)</sup>	A1	0307071	2003-08-17	7.48	0.452
15.0	-3 : -5	LT16 <sup>*)</sup>	A1	0307251	2003-08-17	7.51	0.420
15.0	-3 : -5	LT17 <sup>*)</sup>	A1	0307252	2003-08-18	7.49	0.409
15.0	-1 : -5	LT18 <sup>*)</sup>	A1	0307253	2003-08-18	7.50	0.407
15.0	-1 : -5	LT19 <sup>*)</sup>	A1	0307254	2003-08-21	7.50	0.405
15.0		LT20 <sup>**)</sup>	A1	0310203			
0.0	+0 : -1	LT21 <sup>z)</sup>	A1	0312181	2003-12-18	7.98	0.447
0.0	+0 : -1	LT22 <sup>z)</sup>	A1	0312182	2003-12-19	7.85	0.451
0.0	+0 : -1	LT23	A1	0312183	2004-01-19	8.23	
0.0	+0 : -1	LT24	A1	0312184	2004-02-11	8.13	0.454
0.0		LT25 <sup>***)</sup>	A1				
0.0	+0 : +1	LT26	A1	0312222	2004-01-15	5.17	
0.0	+0 : +1	LT27	A1	0312223	2004-01-15	5.40	0.416
0.0	+0 : +1	LT28	A1	0312231	2004-01-15	5.16	0.428
0.0	+0 : +1	LT29	A1	0312232	2004-01-16	4.80	
0.0	+0 : +1	LT30	A1	0312233	2004-01-16	4.93	0.420

<sup>z)</sup> zyklische Versuche (jeweils zwei Entlastungen und Wiederbelastungen im plastischen Bereich)

<sup>\*)</sup> Diese Versuche wurden für Erstellung des Materialmodells nicht berücksichtigt.

<sup>\*\*)</sup> Probekörper nicht geprüft.

<sup>\*\*\*)</sup> Probekörper beim Klebevorgang zerstört.

## B.2 Bruchversuche mit ausgewählten Ästen

### Legende:

$\varphi$	...	Winkel $x$ -Richtung - Faserlängsrichtung $L$ (siehe Abb. 3.10)
$\kappa$ bzw. $\bar{\kappa}$	...	(biaxiales) Beanspruchungsverhältnis
Vers.-Nr.	...	fortlaufende Versuchsnummer
PK-Typ	...	Probekörpertyp
PK.-Nr.	...	Probekörperbezeichnung (Klebedatum + Klebeposition)
Datum	...	Datum der Versuchsdurchführung
PK-Dicke	...	Dicke des Probekörpers im Messbereich [mm]
$ksa$	...	Astparameter [ ]
Rohdichte	...	Rohdichte des Probekörpers im von Ästen unbeeinflussten Messbereich [g/cm <sup>3</sup> ]

Die in der nachfolgenden Tabelle in blauer Farbe angeführten Versuche wurden für die Auswertung nicht herangezogen. Die verhältnismäßig große Anzahl an unbrauchbaren Experimenten resultiert einerseits aus einem längere Zeit nicht identifizierbaren Defekt in der Elektronik der Biaxialprüfmaschine und andererseits aus der Tatsache, dass bei Druckversuchen mit dem Probekörpertyp B ein Stabilitätsproblem auftrat und diese Versuche daher für die Bestimmung von Materialkennwerten nicht herangezogen werden können. Daher wurde für diese Druckversuche im Weiteren der Typ A verwendet.

Der Astparameter  $ksa$  wurde entsprechend Gleichung (6.1) ermittelt. Probekörper mit grün aufgelisteten  $ksa$ -Werten enthalten Kantenäste.

**Tabelle B.3:** Versuchsprogramm der durchgeführten Bruchversuche mit ausgewählten Ästen in der  $LRT$ -Ebene

$\varphi$	$\kappa$ bzw. $\bar{\kappa}$	Vers.-Nr.	PK-Typ	PK-Nr.	Datum	PK-Dicke	$ksa$	Rohdichte
90.0	+1	K01	B1	0212051	2002-12-06	7.45	0.30	0.497
90.0	+1	K02	B1	0212052	2002-12-09	7.26	0.30	0.392
90.0	+1	K03	B1	0212053	2003-01-10	7.28	0.51	0.455
90.0	+1	K04	B1	0212054	2003-01-15	7.67	0.37	0.455
90.0	+1	K05	B1	0212061	2003-01-16	7.70	0.32	0.452
90.0	+1	K06	B1	0212062	2003-01-16	7.83		0.393
90.0	+1	K07	B1	0212063	2003-01-16	9.77	0.33	0.489
90.0	+1	K08	B1	0212091	2003-01-17	9.61	0.46	0.418
90.0	+1	K09	B1	0212092	2003-01-17	9.77	0.38	0.496
90.0	+1	K10	B1	0212093	2003-01-17	9.85	0.44	0.421
90.0	+1	K11	B1	0212101	2003-01-20	9.53	0.36	0.465
90.0	+1	K12	B1	0212102	2003-01-20	9.68	0.47	0.391
90.0	+1	K13	B1	0212103	2003-01-20	9.51	0.11	0.345
90.0	+1	K14	B1	0304081	2003-04-22	8.45	0.13	0.481

$\varphi$	$\kappa$ bzw. $\bar{\kappa}$	Vers.-Nr.	PK-Typ	PK-Nr.	Datum	PK-Dicke	$k_{sa}$	Rohdichte
90.0	+1	K15	B1	0304082	2003-04-24	8.45	0.18	0.498
90.0	+1	K16	B1	0304083	2003-04-24	8.30	0.06	0.485
90.0	+1	K17	B1	0304084	2003-04-24	8.30	0.13	0.484
90.0	+1	K18	B1	0304101	2003-04-24	8.43	0.11	0.455
90.0	+1	K19	B1	0304102	2003-06-24	8.40	0.13	0.439
90.0	+1	K20	B1	0304103	2003-06-25	8.46	0.22	0.465
90.0	+1	K21	B1	0304104	2003-06-25	8.05	0.16	0.445
0.0	+1	K22	B1	0304161	2003-06-04	13.56	0.06	0.376
0.0	+1	K23	B1	0304162	2003-06-04	13.21	0.13	0.411
0.0	+1	K24	B1	0304163	2003-06-06	13.53	0.14	0.470
0.0	+1	K25	B1	0304164	2003-06-06	13.86	0.12	0.436
0.0	+1	K26	B1	0304171	2003-06-06	13.61	0.22	0.433
0.0	+1	K27	B1	0304172	2003-06-10	13.83	0.24	0.455
0.0	+1	K28	B1	0304173	2003-06-10	13.69	0.13	0.463
0.0	-1	K29	B1	0304174	2003-06-10	15.75	0.14	0.448
0.0	-1	K30	B1	0304251	2003-06-12	15.72	0.08	0.451
0.0	-1	K31	B1	0304252	2003-06-12	15.81	0.10	0.458
0.0	-1	K32	B1	0304253	2003-06-25	15.45	0.27	0.443
0.0	-1	K33	B1	0304301	2003-06-11	15.60	0.28	0.404
0.0	-1	K34	B1	0304302	2003-06-26	15.65	0.14	0.441
0.0	-1	K35	B1	0304303	2003-06-26	15.68	0.15	0.529
0.0	+1	K36	B2	0310011	2003-10-02	9.94	0.11	0.472
0.0	+1	K37	B2	0310012	2003-10-02	10.45	0.11	0.480
0.0	+1	K38	B2	0310013	2003-10-03	8.40	0.20	0.481
0.0	+1	K39	B2	0310031	2003-10-07	7.20	0.07	0.481
0.0	+1	K40	B2	0310032	2003-10-23	9.90	0.11	0.484
0.0	+1	K41	B2	0310033	2003-10-27	9.80	0.14	0.489
0.0	+1	K42	B2	0310034	2003-10-28	9.75	0.08	0.461
0.0	+0 : -1	K43	A2	0310161	2003-10-29	10.45	0.18	0.460
0.0	+0 : -1	K44	A2	0310162	2003-10-30	10.40	0.14	0.487
0.0	+0 : -1	K45	A2	0310163	2003-11-04	10.20	0.11	0.480
0.0	+0 : -1	K46	A2	0310201	2003-11-05	10.35	0.09	0.505
90.0	+0 : -1	K47	A2	0310202	2003-10-31	10.10	0.15	0.426
0.0	+1	K48	B2	0312031	2003-12-03	10.44	0.23	0.470
0.0	+1	K49	B2	0312032	2003-12-03	10.37	0.08	0.425
0.0	+1	K50	B2	0312033	2003-12-03	9.95	0.16	0.491
0.0	+1	K51	B2	0312034	2003-12-04	10.30	0.05	0.482
0.0	+1	K52	B2	0312041	2003-12-04	10.02	0.28	0.437
0.0	+1	K53	B2	0312042	2003-12-04	9.90	0.24	0.448
0.0	+1	K54	B2	0312043	2003-12-04	8.95	0.08	0.421
0.0	+0 : -1	K55	A2	0401271	2004-03-17	10.75	0.14	0.477
0.0	+0 : -1	K56	A2	0401272	2004-03-23	10.47	0.20	0.467
0.0	+0 : -1	K57	A2	0401273	2004-03-30	10.27	0.20	0.414

$\varphi$	$\kappa$ bzw. $\bar{\kappa}$	Vers.-Nr.	PK-Typ	PK-Nr.	Datum	PK-Dicke	$k_{sa}$	Rohdichte
0.0	+0 : -1	K58	A2	0401274	2004-04-01	10.60	0.21	0.407
0.0	+0 : -1	K59	A2	0402051	2004-04-01	10.34	0.19	0.487
90.0	+0 : -1	K60	A2	0402052	2004-02-25	10.45	0.14	0.507
90.0	+0 : -1	K61	A2	0402053	2004-03-10	10.46	0.09	0.435
90.0	+0 : -1	K62	A2	0402054	2004-03-09	10.41	0.11	0.434
90.0	+0 : -1	K63	A2	0402111	2004-03-08	10.35	0.15	0.451
90.0	+0 : -1	K64	A2	0402112	2004-03-04	10.37	0.24	0.428
90.0	+0 : -1	K65	A2	0402113	2004-03-03	10.41	0.29	0.438
90.0	+0 : -1	K66	A2	0402114	2004-02-26	10.63	0.23	0.457
90.0	+0 : -1	K67	A2	0404081	2004-04-14	10.58	0.13	0.459
90.0	+0 : -1	K68	A2	0404082	2004-04-14	10.64	0.08	0.405
90.0	+0 : -1	K69	A2	0404083	2004-04-16	10.65	0.31	0.357
90.0	+0 : -1	K70	A2	0404161	2004-04-20	10.69	0.16	0.449
90.0	+0 : -1	K71	A2	0404162	2004-04-22	10.65	0.15	0.435
0.0	+0 : -1	K72	A2	0404163	2004-04-23	10.43	0.15	0.441
0.0	+0 : -1	K73	A2	0404211	2004-04-27	10.67	0.09	0.404
0.0	+0 : -1	K74	A2	0404212	2004-04-28	10.60	0.16	0.444
0.0	+0 : -1	K75	A2	0404213	2004-04-28	10.56	0.21	0.428

# Anhang C

## Koeffizientenfunktionen der Matrix $\mathbf{K}$

$\mathbf{K}$  ist die Matrix der Ableitungen der sechs, im Vektor  $\mathbf{R}_p$  (5.93) zusammengefassten, Gleichungen nach den sechs, im Vektor  $\mathbf{p}$  (5.91) zusammengefassten, Parametern des Ellipsoids. Die Zuordnung der jeweiligen Koeffizientenfunktionen  $\partial R_{p,i}/\partial p_j$ , mit  $i, j \in \{1, \dots, 6\}$  zur Matrix  $\mathbf{K}$  erfolgt gemäß (5.96). Aufgrund der formalen Gleichheit der ersten und zweiten bzw. dritten und vierten Einträge des Vektors  $\mathbf{R}_p$  gemäß (5.93), mit Ausnahme jeweils eines Vorzeichenunterschiedes, sind die entsprechenden Koeffizientenfunktionen  $\partial R_{p,i}/\partial p_j$ , mit  $i \in \{1, 2\}$  bzw.  $\{3, 4\}$  zu einem Block von Gleichungen zusammengefasst. Die Abkürzungen  $X$  und  $Z$  sind in (5.57) und (5.56) festgelegt.

$$\begin{aligned}
 \frac{dR_{p,1/2}}{da_{LL}} &= \frac{1}{2Z} \left( b_{LLRTRT} \pm \frac{\sqrt{b_{LLLL}} (-a_{RTRT} b_{LLRTRT} + a_{LL} b_{RTRTRTRT})}{X} \right) \\
 \frac{dR_{p,1/2}}{da_{RTRT}} &= \frac{1}{2Z} \left( -b_{LLLL} \mp \frac{\sqrt{b_{LLLL}} (-a_{RTRT} b_{LLLL} + a_{LL} b_{LLRTRT})}{X} \right) \\
 \frac{dR_{p,1/2}}{db_{LLLL}} &= \frac{1}{2Z} \left( -a_{RTRT} \pm \frac{(a_{RTRT}^2 + 4b_{RTRTRTRT}) \sqrt{b_{LLLL}}}{2X} \pm \frac{X}{2\sqrt{b_{LLLL}}} \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{2Z^2} \left( b_{RTRTRTRT} (a_{RTRT} b_{LLLL} - a_{LL} b_{LLRTRT} \mp \sqrt{b_{LLLL}} X) \right) \\
 \frac{dR_{p,1/2}}{db_{RTRTRTRT}} &= \pm \frac{1}{4XZ} (a_{LL}^2 + 4b_{LLLL}) \sqrt{b_{LLLL}} + \\
 &\quad + \frac{1}{2Z^2} \left( b_{LLLL} (a_{RTRT} b_{LLLL} - a_{LL} b_{LLRTRT} \mp \sqrt{b_{LLLL}} X) \right) \\
 \frac{dR_{p,1/2}}{db_{LLRTRT}} &= \frac{1}{2Z} \left( a_{LL} \mp \frac{(a_{LL} a_{RTRT} + 4b_{LLRTRT}) \sqrt{b_{LLLL}}}{X} \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{Z^2} \left( b_{LLRTRT} (a_{RTRT} b_{LLLL} - a_{LL} b_{LLRTRT} \mp \sqrt{b_{LLLL}} X) \right) \\
 \frac{dR_{p,1/2}}{db_{LRTLRT}} &= 0
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dR_{p,3/4}}{da_{LL}} &= \frac{1}{2Z} \left( -b_{\overline{RTRTRTRT}} \pm \frac{\sqrt{b_{\overline{RTRTRTRT}}} (-a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLRTRT}} + a_{LL} b_{\overline{RTRTRTRT}})}{X} \right) \\
\frac{dR_{p,3/4}}{da_{\overline{RTRT}}} &= \frac{1}{2Z} \left( b_{\overline{LLRTRT}} \mp \frac{\sqrt{b_{\overline{RTRTRTRT}}} (-a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLLL}} + a_{LL} b_{\overline{LLRTRT}})}{X} \right) \\
\frac{dR_{p,3/4}}{db_{\overline{LLLL}}} &= \pm \frac{1}{4XZ} (a_{\overline{RTRT}}^2 + 4b_{\overline{RTRTRTRT}}) \sqrt{b_{\overline{RTRTRTRT}}} - \\
&\quad - \frac{1}{2Z^2} \left( b_{\overline{RTRTRTRT}} (a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLRTRT}} - a_{LL} b_{\overline{RTRTRTRT}} \pm \sqrt{b_{\overline{RTRTRTRT}}} X) \right) \\
\frac{dR_{p,3/4}}{db_{\overline{RTRTRTRT}}} &= \frac{1}{2Z} \left( -a_{LL} \pm \frac{(a_{LL}^2 + 4b_{\overline{LLLL}}) \sqrt{b_{\overline{RTRTRTRT}}}}{2X} \pm \frac{X}{2\sqrt{b_{\overline{RTRTRTRT}}}} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{2Z^2} \left( b_{\overline{LLLL}} (a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLRTRT}} - a_{LL} b_{\overline{RTRTRTRT}} \pm \sqrt{b_{\overline{RTRTRTRT}}} X) \right) \\
\frac{dR_{p,3/4}}{db_{\overline{LLRTRT}}} &= \frac{1}{2Z} \left( a_{\overline{RTRT}} \mp \frac{(a_{LL} a_{\overline{RTRT}} + 4b_{\overline{LLRTRT}}) \sqrt{b_{\overline{RTRTRTRT}}}}{X} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{Z^2} \left( b_{\overline{LLRTRT}} (a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLRTRT}} - a_{LL} b_{\overline{RTRTRTRT}} \pm \sqrt{b_{\overline{RTRTRTRT}}} X) \right) \\
\frac{dR_{p,3/4}}{db_{\overline{LRTLRT}}} &= 0
\end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dR_{p,5}}{da_{LL}} &= 0 \\
\frac{dR_{p,5}}{da_{\overline{RTRT}}} &= 0 \\
\frac{dR_{p,5}}{db_{\overline{LLLL}}} &= 0 \\
\frac{dR_{p,5}}{db_{\overline{RTRTRTRT}}} &= \frac{b_{\overline{LLRTRT}}}{b_{\overline{RTRTRTRT}}^2} \\
\frac{dR_{p,5}}{db_{\overline{LLRTRT}}} &= -\frac{1}{b_{\overline{RTRTRTRT}}} \\
\frac{dR_{p,5}}{db_{\overline{LRTLRT}}} &= 0
\end{aligned} \tag{C.3}$$



$$\begin{aligned}
\frac{dR_{p,6}}{da_{LL}} &= -\frac{a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLRTRT}} - a_{LL} b_{\overline{RTRTRTRT}}}{4X \sqrt{Z} b_{\overline{LRTLRT}}} \\
\frac{dR_{p,6}}{da_{\overline{RTRT}}} &= \frac{a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLLL}} - a_{LL} b_{\overline{LLRTRT}}}{4X \sqrt{Z} b_{\overline{LRTLRT}}} \\
\frac{dR_{p,6}}{db_{\overline{LLLL}}} &= -\frac{(a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLRTRT}} - a_{LL} b_{\overline{RTRTRTRT}})^2}{8X \sqrt{Z^3} b_{\overline{LRTLRT}}} \\
\frac{dR_{p,6}}{db_{\overline{RTRTRTRT}}} &= -\frac{(a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLLL}} - a_{LL} b_{\overline{LLRTRT}})^2}{8X \sqrt{Z^3} b_{\overline{LRTLRT}}} \\
\frac{dR_{p,6}}{db_{\overline{LLRTRT}}} &= \frac{(a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLLL}} - a_{LL} b_{\overline{LLRTRT}}) (a_{\overline{RTRT}} b_{\overline{LLRTRT}} - a_{LL} b_{\overline{RTRTRTRT}})}{4X \sqrt{Z^3} b_{\overline{LRTLRT}}} \\
\frac{dR_{p,6}}{db_{\overline{LRTLRT}}} &= -\frac{X}{8 \sqrt{Z} b_{\overline{LRTLRT}}^3}
\end{aligned} \tag{C.4}$$

# Anhang **D**

## Koeffizientenfunktionen der Matrix **L**

**L** ist die Matrix der Ableitungen der sechs Komponenten des Vektors  $\mathbf{R}^*$  gemäß Gleichung (5.89) nach den sechs Komponenten des Vektors der primären Variablen  $\alpha$  gemäß Gleichung (5.34). Es ist somit eine  $6 \times 6$ -Matrix, die folgendermaßen definiert ist:

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^*}{\partial \alpha_{n+1}} := \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_5 & 0 \\ L_7 & L_8 & 0 & 0 & 0 & L_6 \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

Die verschiedenen Koeffizienten  $L_1$  bis  $L_8$  erhält man aus (5.89) zu

$$L_1 = -k_{t_{RT}} R_1^* \quad (\text{D.2a})$$

$$L_2 = +k_{c_{RT}} Y_{1_{RT}} e^{-k_{c_{RT}} \alpha_{c_{RT}}} \quad (\text{D.2b})$$

$$L_3 = -k_{t_L} R_3^* \quad (\text{D.2c})$$

$$L_4 = -k_{c_L} Y_{1_L} e^{-k_{c_L} \alpha_{c_L}} \quad (\text{D.2d})$$

$$L_5 = -k_{t_{RT}} R_5^* \quad (\text{D.2e})$$

$$L_6 = -k_{shr} \frac{R_1^* + R_2^*}{2} [1 + \tan(\phi_\infty + (\phi_0 - \phi_\infty) e^{-k_{shr} \alpha_{shr}})^2] \cdot (\phi_0 - \phi_\infty) e^{-k_{shr} \alpha_{shr}} \quad (\text{D.2f})$$

$$L_7 = +\frac{L_1}{2} \tan(\phi_\infty + (\phi_0 - \phi_\infty) e^{-k_{shr} \alpha_{shr}}) \quad (\text{D.2g})$$

$$L_8 = -\frac{L_2}{2} \tan(\phi_\infty + (\phi_0 - \phi_\infty) e^{-k_{shr} \alpha_{shr}}) \quad (\text{D.2h})$$

# Anhang **E**

---

## Messdaten der Leimbinderlamellen

Die nachfolgenden drei Tabellen enthalten für jede einzelne Lamelle die folgenden Kennwerte:

- Abmessungen,
- Gewicht,
- Rohdichte  $\rho$ ,
- Holzfeuchtigkeit  $u$ ,
- Schalllaufzeit
- dynamischer E-Modul  $E_{dyn}$ ,
- $k_{sa}$  -Wert,
- Volumen und die
- Schallgeschwindigkeit

Zusätzlich sind jeweils im rechten, oberen Bereich der Tabellen die Aufbauten der einzelnen Träger dargestellt. Die Sortierung bzw. Einteilung erfolgte anhand des dynamischen E-Moduls  $E_{dyn}$  in Faserlängsrichtung. Der Wert  $E_{mean,stat}$  stellt den um den Faktor  $1/1.2 = 0.83$  reduzierten Mittelwert von  $E_{dyn}$  dar. Dieser Wert wird für die FE-Simulationen als E-Modul in Faserlängsrichtung ( $E_L$ ) herangezogen. Die Reduktion resultiert aus Erfahrungswerten aus der Holzbaupraxis.

Tabelle E.1: Lamellenparameter der Versuchserie  $d = 0.2 h$

Nr.		<i>b</i>	<i>h</i>	<i>l</i>	<i>G</i>	$\rho$	<i>u</i>	<i>t</i>	$E_{dyn}$	<i>ksa</i>	Volumen	<i>v</i>
Lamelle	Träger	[mm]	[mm]	[mm]	[kg]	[kg/m³]	[%]	s	[N/mm²]	-	[mm³]	[m/s]
105	7	135.6	38.1	4016	9.050	436	10.6	678	15300	0.23	20748102	5923
125	8	137.2	37.7	4022	9.190	442	9.9	682	15360	0.37	20803554	5897
66	9	137.2	37.4	4022	9.668	468	10.7	702	15380	0.39	20638008	5729
81	7	138.2	37.7	4024	8.980	428	10.1	671	15400	0.33	20965603	5997
30	8	136.4	38.0	4020	9.370	450	12.9	687	15400	0.23	20836464	5852
106	9	137.7	38.1	4024	10.652	505	13.3	725	15540	0.28	21111393	5550
72	7	134.6	38.0	4024	9.284	451	9.9	685	15570	0.31	20581955	5874
98	8	136.7	38.4	4023	9.990	473	10.9	695	15850	0.45	21117853	5788
86	9	136.8	37.5	4017	9.540	463	8.9	681	16110	0.25	20607210	5899
99	7	135.4	38.6	4021	9.738	463	9.9	678	16300	0.28	21015515	5931
109	8	136.4	37.8	4015	9.264	448	10.3	661	16510	0.29	20701019	6074
114	9	137.3	37.2	4022	9.526	464	9.1	674	16510	0.37	20542606	5967
95	9	134.2	37.1	4023	9.304	465	10.8	672	16650	0.27	20029793	5987
32	8	137.2	38.4	4026	10.176	480	13.6	680	16820	0.33	21210900	5921
80	7	136.5	37.5	4021	9.572	465	9.4	668	16850	0.32	20582494	6019
8	9	137.4	38.3	4021	11.338	536	11.1	713	17040	0.31	21160191	5640
122	8	137.4	37.5	4021	9.728	470	10.1	667	17060	0.28	20718203	6028
124	7	136.5	37.7	4022	10.152	490	10.8	681	17110	0.31	20697413	5906
6	9	137.5	38.5	4020	11.338	533	11.8	707	17230	0.26	21280875	5686
129	8	136.9	38.1	4017	10.130	483	11.2	671	17330	0.21	20952230	5987
18	7	137.8	37.8	4024	10.438	498	13.7	681	17390	0.30	20960372	5909
21	9	135.3	38.0	4023	10.558	510	13.8	687	17500	0.27	20683852	5856
87	8	137.3	37.7	4026	10.040	482	9.8	666	17610	0.30	20839421	6045
7	7	137.3	37.3	4026	11.338	550	13.0	707	17830	0.35	20618314	5694
103	9	135.0	37.6	4021	10.004	490	8.6	666	17870	0.23	20410596	6038
90	8	134.6	37.5	4024	9.446	465	9.2	648	17930	0.27	20311140	6210
128	7	136.8	37.6	4012	10.906	528	11.1	688	17970	0.24	20636444	5831
117	9	135.7	37.9	4022	9.690	468	10.7	648	18050	0.28	20685267	6207
65	8	134.7	36.8	4021	9.752	489	9.4	660	18160	0.28	19931936	6092
77	7	135.1	38.2	4024	9.714	468	9.8	644	18260	0.38	20767140	6248
14	9	137.6	37.1	4023	10.528	513	12.7	669	18540	0.22	20537254	6013
115	8	134.1	37.5	4022	10.224	505	10.5	663	18600	0.39	20225633	6066
76	7	135.2	38.0	4021	10.108	489	10.0	648	18840	0.27	20658290	6205
93	9	133.1	38.0	4018	9.970	491	10.2	648	18860	0.18	20322240	6201
92	8	134.5	36.5	4025	9.854	499	10.5	654	18890	0.21	19759731	6154
75	7	134.4	38.0	4018	9.820	479	9.6	638	18980	0.29	20520730	6298
64	9	136.2	37.3	4025	10.274	502	9.3	650	19270	0.27	20448047	6192
127	8	134.6	37.6	4023	10.172	500	10.9	647	19320	0.27	20360242	6218
130	7	135.4	37.5	4018	10.052	493	10.4	637	19600	0.13	20401395	6308
3	9	136.6	38.1	4024	11.586	553	12.4	668	20080	0.18	20942747	6024
119	8	134.8	38.1	4012	11.180	543	10.7	656	20290	0.19	20605151	6116
123	7	134.8	36.8	4013	11.308	568	11.1	650	21650	0.21	19907048	6174

Lam. Nr.	Träger Nr.		
	02.1	02.2	02.3
91	1	76	115
92	2	77	65
93	3	128	90
94	4	124	122
95	5	80	32
96	6	72	98
97	7	105	125
98	8	81	30
99	9	99	109
100	10	18	129
101	11	7	87
102	12	75	92
103	13	130	127
104	14	123	119
105			
106			
107			
108			
109			
110			
111			
112			
113			
114			
115			
116			
117			
118			
119			
120			
121			
122			
123			
124			
125			
126			
127			
128			
129			
130			
131			
132			

Minimum	133.1	36.5	4012	8.980	428	8.6	637	15300	0.13	19759731	5550
Maximum	138.2	38.6	4026	11.586	568	13.8	725	21650	0.45	21280875	6308
Mittelwert	136.0	37.7	4021	10.070	488	10.8	671	17543	0.28	20638914	5994
Std. abw.	1.3	0.5	4	0.682	33	1.4	20.9	1523	0.07	348585	183

$E_{mean,stat}$   
**14600**

Tabelle E.2: Lamellenparameter der Versuchserie  $d = 0.3 h$

Nr.		$b$	$h$	$l$	$G$	$\rho$	$u$	$t$	$E_{dyn}$	$ksa$	Volumen	$v$	Lam. Nr.	Träger Nr.			
Lamelle	Träger	[mm]	[mm]	[mm]	[kg]	[kg/m³]	[%]	s	[N/mm²]	-	[mm³]	[m/s]		03.1	03.2	03.3	
13	6	136.5	38.2	4024	9.018	430	12.6	735	12880	0.30	20982343	5475	49	1	16	84	97
22	5	137.3	38.1	4024	9.070	431	12.3	736	12880	0.32	21050067	5467	50	2	74	88	108
26	4	138.6	38.0	4021	9.174	433	12.7	734	13000	0.33	21177803	5478	51	3	47	27	56
20	6	137.1	38.2	4022	8.920	423	13.5	725	13030	0.17	21064099	5548	52	4	23	101	102
110	5	135.5	38.0	4023	9.144	441	10.6	733	13300	0.42	20714427	5488	53	5	28	83	57
67	4	136.3	38.5	4025	9.896	469	9.3	755	13320	0.33	21121389	5331	54	6	60	63	73
73	6	136.6	37.8	4004	8.814	426	10.2	715	13370	0.26	20674574	5600	55	7	67	110	20
63	5	136.8	37.8	4025	9.312	447	9.5	736	13380	0.46	20813436	5469	56	8	26	22	13
60	4	137.5	38.3	4022	10.250	484	11.7	760	13550	0.22	21180858	5292	57	9	89	61	100
100	6	136.2	38.2	4022	8.672	414	10.3	703	13560	0.27	20925822	5721	58	10	96	58	54
61	5	136.7	37.7	4021	8.686	419	10.0	707	13560	0.27	20722585	5687	59	11	46	107	70
89	4	136.2	38.4	4023	8.552	406	9.1	695	13620	0.31	21040612	5788	60	12	42	82	118
57	6	137.4	38.1	4022	9.326	443	9.9	725	13630	0.25	21054929	5548	61	13	94	59	49
83	5	137.2	38.3	4021	9.622	455	10.0	735	13630	0.23	21129390	5471	62	14	104	19	91
28	4	138.0	38.2	4022	9.764	461	11.9	739	13640	0.33	21202375	5442	63				
54	6	138.0	38.8	4024	8.802	409	11.8	695	13690	0.50	21546106	5790	64				
58	5	137.1	38.1	4017	9.022	430	11.9	711	13720	0.33	20982840	5650	65				
96	4	135.9	38.7	4023	9.102	430	10.6	712	13730	0.31	21158285	5650	66				
102	6	137.1	38.0	4020	9.486	453	9.4	730	13740	0.33	20943396	5507	67				
101	5	136.9	37.9	4026	8.658	414	11.0	695	13910	0.42	20888941	5793	68				
23	4	136.7	38.3	4022	9.246	439	12.7	714	13930	0.30	21057623	5633	69				
70	6	136.8	37.6	4024	9.300	449	9.7	720	14030	0.50	20698168	5589	70				
107	5	137.6	38.2	4016	9.864	467	9.2	731	14100	0.31	21109381	5494	71				
46	4	138.4	37.4	4026	8.936	429	11.6	701	14140	0.27	20839220	5743	72				
56	6	136.1	38.1	4023	9.232	443	10.4	711	14170	0.27	20860904	5658	73				
27	5	137.1	38.7	4024	8.914	418	13.9	690	14200	0.38	21350418	5832	74				
47	4	136.9	39.0	4024	9.314	434	11.8	703	14200	0.25	21484538	5724	75				
108	6	136.2	38.5	4019	9.836	467	9.1	724	14380	0.27	21074430	5551	76				
88	5	137.0	37.8	4024	9.376	450	9.1	710	14450	0.33	20838686	5668	77				
74	4	136.5	37.9	4025	8.792	422	10.5	687	14490	0.20	20822734	5859	78				
97	6	137.5	38.8	4023	9.420	439	9.6	700	14500	0.31	21462705	5747	79				
84	5	137.5	37.8	4022	9.156	438	9.4	698	14540	0.23	20904345	5762	80				
16	4	137.1	37.8	4017	10.680	513	12.9	753	14600	0.33	20817620	5335	81				
118	6	135.2	37.6	4023	8.760	428	9.7	688	14650	0.30	20451001	5847	82				
82	5	135.5	37.7	4025	10.124	492	9.6	733	14850	0.25	20561109	5491	83				
42	4	136.1	38.1	4022	9.248	443	14.0	693	14940	0.38	20855719	5804	84				
49	6	136.8	38.2	4025	9.454	449	11.6	697	14990	0.47	21033684	5775	85				
59	5	137.2	38.3	4022	9.840	466	10.9	708	15030	0.33	21134645	5681	86				
94	4	137.0	38.2	4023	9.374	445	10.2	692	15050	0.33	21053968	5814	87				
91	6	135.4	37.9	4026	8.594	416	10.2	669	15060	0.42	20660063	6018	88				
19	5	138.2	37.9	4021	9.734	462	13.7	704	15080	0.29	21061113	5712	89				
104	4	136.1	37.9	4020	9.668	466	10.9	702	15290	0.50	20735924	5726	90				

Minimum	135.2	37.4	4004	8.552	406	9.1	669	12880	0.17	20451001	5292
Maximum	138.6	39.0	4026	10.680	513	14.0	760	15290	0.50	21546106	6018
Mittelwert	136.9	38.1	4022	9.289	443	10.9	714	14043	0.32	20981959	5635
Std. abw.	0.8	0.4	4	0.481	23	1.5	21	669	0.08	238553	163

$E_{mean,stat}$	
11700	

Tabelle E.3: Lamellenparameter der Versuchserie  $d = 0.4 h$

Nr.		<i>b</i>	<i>h</i>	<i>l</i>	<i>G</i>	$\rho$	<i>u</i>	<i>t</i>	$E_{dyn}$	<i>ksa</i>	Volumen	<i>v</i>
Lamelle	Träger	[mm]	[mm]	[mm]	[kg]	[kg/m <sup>3</sup> ]	[%]	s	[N/mm <sup>2</sup> ]	-	[mm <sup>3</sup> ]	[m/s]
41	3	138.2	38.1	4024	8.276	391	13.7	791	101 10	0.25	21188050	5087
2	2	138.2	38.3	4025	8.156	383	10.3	781	10170	0.23	21304567	5154
53	1	137.6	38.6	4020	8.254	387	12.1	783	10190	0.48	21351667	5134
34	3	138.3	38.4	4023	7.956	372	13.1	757	10520	0.41	21365027	5314
48	2	137.8	38.1	4021	8.758	415	12.2	790	10750	0.33	211 10974	5090
44	1	138.6	38.1	4023	8.120	382	10.7	757	10800	0.30	21244095	5314
45	3	135.5	37.3	4023	7.824	385	11.5	757	10870	0.47	20332845	5314
116	2	137.3	37.9	4019	7.990	382	9.5	750	10970	0.39	20913550	5359
29	1	138.2	38.7	4021	8.836	411	11.8	771	11180	0.27	21505675	5215
52	3	138.5	37.8	4023	8.198	389	11.7	746	11320	0.18	21061612	5393
37	2	137.2	38.8	4022	8.260	386	13.4	737	11490	0.43	21410554	5457
35	1	138.1	38.0	4021	8.664	411	13.7	760	11490	0.31	21101404	5291
36	3	138.5	38.5	4022	8.890	415	13.4	762	11550	0.32	21446310	5278
132	2	136.7	38.3	4020	8.724	414	10.3	761	11570	0.27	21047152	5283
33	1	137.3	38.3	4023	8.642	409	13.4	755	11600	0.40	21155308	5328
15	3	136.0	38.4	4021	8.254	393	11.4	739	11640	0.29	20999270	5441
69	2	136.8	37.8	4025	8.354	401	9.6	746	11680	0.37	20813436	5395
50	1	137.9	38.0	4020	8.522	405	12.2	748	11680	0.29	21065604	5374
9	3	137.1	38.3	4021	8.114	384	13.8	729	11690	0.39	211 13990	5516
113	2	138.3	37.9	4024	8.620	409	9.3	751	11730	0.35	21092078	5358
1	1	137.5	38.5	4023	9.132	429	10.1	769	11740	0.18	21296756	5231
51	3	135.6	38.4	4022	7.688	367	11.1	711	11750	0.38	20942715	5657
40	2	137.6	38.0	4020	8.096	385	12.5	721	11970	0.34	21019776	5576
12	1	135.5	38.1	4022	8.006	386	11.9	721	12000	0.33	20763776	5578
38	3	137.4	38.8	4021	8.378	391	13.0	724	12060	0.29	21436434	5554
43	2	137.0	38.7	4022	8.764	411	13.0	742	12080	0.46	21324242	5420
85	1	138.0	38.0	4023	8.420	399	8.9	731	12090	0.33	21096612	5503
5	3	138.4	37.6	4023	8.800	420	12.7	750	12090	0.24	20935048	5364
55	2	137.6	38.6	4022	8.072	378	10.6	709	12160	0.36	21362290	5673
68	1	138.1	38.2	4022	8.838	417	10.1	744	12170	0.20	21217739	5406
126	3	138.3	38.1	4025	8.988	424	9.4	750	12210	0.46	21208651	5367
121	2	136.2	37.9	4022	8.370	403	9.4	728	12310	0.28	20761484	5525
71	1	137.0	38.2	4021	8.636	410	10.0	733	12350	0.20	21043501	5486
120	3	137.2	38.3	4015	8.550	405	9.3	726	12390	0.15	21097861	5530
24	2	138.2	38.2	4019	9.070	427	12.8	746	12410	0.29	21217266	5387
4	1	136.9	37.8	4023	8.338	401	12.5	722	12430	0.28	20818301	5572
62	3	135.5	38.1	4022	8.333	401	9.4	719	12560	0.39	20763776	5594
111	2	136.3	38.2	4025	8.766	418	10.1	734	12580	0.29	20956807	5484
131	1	138.0	38.3	4023	8.394	395	10.5	710	12670	0.30	21263164	5666
112	3	137.1	38.2	4023	8.444	401	9.2	715	12690	0.32	21069336	5627
79	2	137.3	38.5	4024	9.527	448	8.4	751	12860	0.32	21271065	5358
78	1	136.7	37.4	4024	7.498	364	9.2	677	12880	0.25	20573022	5944

Lam. Nr.	Träger Nr.		
	04.1	04.2	04.3
7	1	71	121
8	2	68	55
9	3	85	43
10	4	1	113
11	5	33	132
12	6	29	116
13	7	53	2
14	8	44	48
15	9	35	37
16	10	50	69
17	11	12	40
18	12	4	24
19	13	131	111
20	14	78	79
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			
31			
32			
33			
34			
35			
36			
37			
38			
39			
40			
41			
42			
43			
44			
45			
46			
47			
48			

Minimum	135.5	37.3	4015	7.498	364	8.4	677	101 10	0.15	20332845	5087
Maximum	138.6	38.8	4025	9.527	448	13.8	791	12880	0.48	21505675	5944
Mittelwert	137.4	38.2	4022	8.441	400	11.2	743	11749	0.32	21096733	5419
Std. abw.	0.9	0.3	2	0.407	18	1.6	24	730	0.08	244747	174

$E_{mean,stat}$   
**9800**

# Lebenslauf

*Dipl.-Ing. Martin FLEISCHMANN*

Geburtsdatum: 13. Juli 1974 in Mödling, Niederösterreich  
Staatsbürgerschaft: Österreich  
Familienstand: ledig  
Wohnadresse: Ozeanstraße 12/C/11, A-2353 Guntramsdorf  
e-mail: [Martin.Fleischmann@tuwien.ac.at](mailto:Martin.Fleischmann@tuwien.ac.at)

## **Bildung:**

Sept. 1980 - Juni 1984 Besuch der Volksschule in Neu-Guntramsdorf  
Sept. 1984 - Juni 1988 Besuch des Bundesrealgymnasiums Mödling,  
Franz-Keim-Gasse  
Sept. 1988 - Juni 1993 Besuch der Höheren Technischen Bundeslehr- und  
Versuchsanstalt Mödling,  
Höhere Abteilung für Bautechnik - Tiefbau  
Okt. 1993 - Mai 1994 Ableistung des Präsenzdienstes beim  
österreichischen Bundesheer  
Okt. 1994 - Nov. 2000 Studium an der Technischen Universität Wien,  
Studienrichtung Bauingenieurwesen,  
Studienzweig Konstruktiver Ingenieurbau  
Nov. 2000 Sponion zum Diplom-Ingenieur  
Nov. 2000 - März 2005 Doktoratsstudium am Institut für Mechanik der  
Werkstoffe und Strukturender Technischen Universität Wien

## **Berufslaufbahn:**

Jän. 2001 - Dez. 2004 Universitätsassistent am Institut für Mechanik der  
Werkstoffe und Strukturen der Technischen Universität Wien

# Nachwort

Ein wesentlicher Unterschied des Bauingenieurwesens im Vergleich zum Maschinenbau liegt darin, dass im Bauwesen die Einzelfertigung und im Maschinenbau die Serienfertigung dominiert. Dies hat zur Folge, dass die Planungsleistungen für die Errichtung von Bauwerken schneller erfolgen müssen als im Maschinenbau, wo ein Produkt in der Planungsphase wesentlich detaillierter entwickelt wird. Dadurch können zeitaufwendige Berechnungsverfahren, wie nichtlineare Finite-Elemente-Simulationen nur im begrenzten Umfang eingesetzt werden.

Das Normungswesen im konstruktiven Holzbau sieht im Wesentlichen eine physikalisch linear elastische Berechnung vor. Weiters überwiegt als eingesetztes Berechnungsverfahren die Technische Biegelehre (Stabtheorie). Durch die eindimensionale Idealisierung der Tragwerke können mehraxiale Spannungszustände nicht erfasst werden. Die Nachweise erfolgen getrennt in die Beanspruchungsrichtungen (längs und quer zur Faser), wobei keine Interaktion für den Tragsicherheitsnachweis zwischen den Spannungskomponenten berücksichtigt wird. Gerade der Werkstoff Holz weist durch sein stark ausgeprägtes orthotropes Verhalten unterschiedliche Festigkeitskennwerte längs und quer zur Faserrichtung auf. Wie in dieser Arbeit gezeigt wurde, existieren für einen ebenen Spannungszustand Interaktionen zwischen den beiden Normalspannungskomponenten und der Schubspannung. Es wäre wünschenswert, wenn das Normungswesen diese Interaktionen in die Regelwerke der Technik einfließen lassen würde, z. B. mit einer (eventuell vereinfachten) Fließfläche nach TSAI & WU. Das vollständige Materialmodell kann aus Zeitgründen (siehe erster Absatz) in der Praxis nur in Ausnahmefällen Anwendung finden.

Eine weitere Anregung für die Ergänzung der Angaben der Materialparameter in den Normen ist die Angabe einer Querdehnungszahl. Diese ist für die Durchführung von biaxialen Berechnungen unbedingt erforderlich.

Martin Fleischmann