

DISSERTATION

**Fließzonentheorie
für offene Profile am Einzelstab**

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der technischen Wissenschaften

begutachtet von

O. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr.-techn. Helmut Rubin

Technische Universität Wien

Institut für Baustatik

Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Josef Fink

Technische Universität Wien

Institut für Tragkonstruktionen

eingereicht an der Technischen Universität Wien

Fakultät für Bauingenieurwesen

von

Dominic Rowohl

Matrikelnummer: 0027806

Wien, im April 2005

Vorwort

An dieser Stelle möchte ich Herrn O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Helmut Rubin, dem Vorstand des Instituts für Baustatik, für die freundliche Betreuung dieser Arbeit danken.

Herrn Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Josef Fink, dem Vorstand des Instituts für Stahlbau, gilt mein Dank für die Übernahme des Koreferats.

Desweiteren möchte ich allen danken, die zum Gelingen der vorliegenden Arbeit beigetragen haben.

Kurzfassung

Überschreiten aufgebrauchte Lasten die elastische Grenzlast bzw. Dehnungen die elastische Grenzdehnung, müssen wegen physikalischer Nichtlinearitäten nichtlineare Materialgleichungen verwendet werden, um plastische Eigenschaften widerzuspiegeln. Die zur Beschreibung nichtlinearen Materialverhaltens erforderliche Theorie wird im Rahmen dieser Arbeit als Erweiterung der Elastizitätstheorie entwickelt. Dazu werden die 14 gekoppelten Differentialgleichungen für Biegetorsion (gemischte Torsion) am geraden Stab unter Berücksichtigung des Fließverhaltens hergeleitet. Diese Herleitung des Biegetorsionsproblems für Elastizität und Plastizität stellt eine genaue Beschreibung der als Modell idealisierten Wirklichkeit dar.

Die Arbeit befasst sich mit der statischen Untersuchung von Einzelstäben, denen ein linear-elastisches ideal-plastisches Stoffgesetz zugrunde liegt. Es wird eine Theorie entwickelt, mit der die Tragfähigkeitsreserven eines Systems qualitativ und quantitativ zu bestimmen sind und aus der folglich die Möglichkeit resultiert, Tragfähigkeitsreserven für eine einerseits sichere und andererseits wirtschaftliche Bemessung zu nutzen. Da diese Theorie im Gegensatz zur Fließgelenktheorie jede plastizierte Zone eines Systems genau beschreibt, heißt sie Fließzonentheorie.

Die zur Erweiterung der Elastizitätstheorie auf die Fließzonentheorie erforderlichen Terme werden anschaulich hergeleitet. Mit Hilfe eines Programms werden ausgesuchte Systeme berechnet und die in Fließzonen auftretenden Phänomene beschrieben und analysiert. Aus der Erklärung dieser Phänomene werden allgemeingültige Aussagen über plastisches Tragverhalten abgeleitet. Zuletzt leistet diese Arbeit einen Beitrag zur aktuellen Diskussion hinsichtlich Traglastbestimmung und ist in diesem Zusammenhang als Lösungskonzept einzuordnen.

Abstract

If the load on a system exceeds the elastic limit, the assumptions for the theory of elasticity are no longer valid and the effects of the physical nonlinearities of the material have to be taken into account. In order to describe the behaviour of a system at any level of loading up to the ultimate load, the so called yield-zone theory has to be applied. This theory bases on fourteen differential equations and implies the plastic material behaviour in every zone of the system (in contrary to the plastic hinge theory) and thus is a much more accurate image of reality.

In this paper the statically determined and undetermined single beam with open thin-walled plate-cross-section is investigated. The effects of warping torsion are considered. The thin-walled plate-cross-section is a typical cross-section for steel constructions. Hence, the material behaviour is defined by a linear elastic – ideal plastic material law (structural steel).

In the first part of the paper the equilibrium is formulated for the undeformed system (consequently the first order yield-zone theory). On the basis of this theory the second order yield-zone theory is derived. In the case of the second order yield-zone theory the equilibrium is formulated for the deflected system, which is necessary for the calculation of stability sensitive systems. Within the second order yield-zone theory the first order yield-zone theory is embedded as a special case. The application of the presented theory is achieved by a computer program. The results of the calculations are verified by examples from literature and experiments. Selected examples for first and second order theory are given. The obtained results and the appearing phenomenon are analyzed.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis.....	v
1 Einleitung.....	1
1.1 Ausgangslage und Problemstellung.....	1
1.2 Einordnung und Zielsetzung der Arbeit.....	3
1.3 Aufbau der Arbeit.....	4
2 Bezeichnungen und Annahmen.....	6
2.1 Bezeichnungen.....	6
2.2 Annahmen.....	10
3 Herleitung der Fließzonentheorie I. Ordnung.....	11
3.1 Allgemeines.....	11
3.2 Beschreibung der Elastizitätstheorie für Biegetorsion.....	12
3.2.1 Allgemeines.....	12
3.2.2 Koordinatensysteme.....	13
3.2.3 Kinematische Beziehungen.....	13
3.2.3.1 Kinematische Beziehungen am Stab.....	14
3.2.3.2 Kinematische Beziehungen im Querschnitt.....	16
3.2.4 Gleichgewichtsbedingungen.....	18
3.2.4.1 Kräftegleichgewicht.....	19
3.2.4.2 Momentengleichgewicht.....	19
3.2.5 Konstitutive Beziehungen.....	21
3.2.6 (Wölbkraft-)Torsion.....	22
3.3 Erweiterung der Elastizitätstheorie zur Fließzonentheorie.....	24
3.3.1 Allgemeines.....	24
3.3.1.1 Plastizität und Stoffgesetz.....	24
3.3.1.2 Fließzonentheorie und ihre Zielsetzung.....	27
3.3.2 Veränderung der konstitutiven Beziehungen.....	28
3.3.3 Berechnung der Δ -Schnittgrößen.....	31

3.4	Zusammenfassung.....	34
4	Herleitung der Fließzonentheorie II. Ordnung	36
4.1	Allgemeines.....	36
4.2	Beschreibung der Elastizitätstheorie für Biegetorsion	37
4.2.1	Allgemeines	37
4.2.2	Koordinatensysteme.....	37
4.2.3	Gleichgewichtsbedingungen.....	38
4.2.4	Umrechnungsbeziehungen.....	40
4.3	Erweiterung der Elastizitätstheorie zur Fließzonentheorie	43
4.3.1	Erweiterung der Differentialgleichungen und Umrechnungsbeziehungen.....	43
4.3.2	Berechnung von ΔK	44
4.4	Zusammenfassung.....	47
5	Berücksichtigung von Schubspannungen.....	49
5.1	Allgemeines.....	49
5.2	Schubspannungen nach Elastizitätstheorie.....	50
5.2.1	Schub infolge Querkraft.....	50
5.2.2	Schub infolge primärem Torsionsmoment	50
5.2.3	Schub infolge sekundärem Torsionsmoment.....	51
5.3	Vergleichsspannung	52
5.4	Berücksichtigung von Schubspannungen nach Fließzonentheorie	54
5.5	Zusammenfassung.....	59
6	Computergestützte Lösung der Differentialgleichungen und Systemberechnung.....	60
6.1	Übertragungsbeziehung als Lösung der Differentialgleichungen	60
6.2	Aufbau des Computerprogramms	62
6.2.1	Allgemeines	62
6.2.2	Systemeingabe und Berechnung der Querschnittswerte.....	63
6.2.3	Einwirkungen.....	67
6.2.4	Alternativen der Berechnungsart	68

6.2.5	Berechnungsergebnisse und Ausgabe.....	69
6.3	Zusammenfassung.....	70
7	Untersuchungen zur Fließzonentheorie bei Betrachtung bestimmter Querschnitte.....	71
7.1	Allgemeines.....	71
7.2	Biegebeanspruchte Systeme.....	74
7.2.1	Einführung.....	74
7.2.2	Bedeutung von Spannungsnulllinie, Schubmittelpunkt und Trägheitshauptachsen.....	75
7.2.3	Durchbiegung.....	80
7.3	Traglast und Versagensmechanismus nach Theorie I. Ordnung.....	85
7.4	Berücksichtigung von Schubspannungen.....	91
7.4.1	Schubspannungen aus Querkraft.....	91
7.4.2	Schubspannungen aus Torsion.....	95
7.5	Theorie II. Ordnung.....	102
7.5.1	Untersuchungen mit Systembelastung durch Normalkraft.....	102
7.5.2	Untersuchungen ohne Systembelastung durch Normalkraft.....	108
7.6	Verschiebungsgrößen unter Laststeigerung und Traglastbestimmung bei ausmittiger Querbelastung.....	114
7.7	Zusammenfassung.....	118
8	Zusammenfassung und Ausblick.....	121
	Anhang A: Berechnung von Querschnittswerten.....	123
	Anhang B: Berechnung von Querschnittsstrecken.....	125
	Anhang C: Berechnung von Δ-Schnittgrößen.....	126
	Anhang D: Berechnung von ΔK.....	127
	Anhang E: Bedeutung der Stützstellenwahl.....	128
	Anhang F: Ausgabe der Ergebnisse.....	129

Anhang G: Analytische Darstellung der Querschnittswerte.....	137
Literaturverzeichnis.....	138
Abbildungsverzeichnis	141
Tabellenverzeichnis	144

1 Einleitung

1.1 Ausgangslage und Problemstellung

„Die baustatische Berechnung dient dem Zweck, die Standsicherheit und Gebrauchsfähigkeit eines Bauwerks für dessen veranschlagte Nutzungsdauer unter dem Gesichtspunkt der Verhältnismäßigkeit der Mittel hinreichend genau nachzuweisen“ [26, S.1]. Zum Erreichen dieser hinreichenden Genauigkeit besteht die Aufgabe eines Bauingenieurs zunächst darin, die Wirklichkeit mit Hilfe von Modellen, denen mechanische und mathematische Aussagen zugrunde liegen, zu beschreiben. Die Lösung liegt dabei in der Idealisierung beobachteter Zusammenhänge der Realität. Erst dadurch bietet sich die Möglichkeit einer statischen Berechnung, die von praktischem Nutzen ist. Jedem System müssen das Materialverhalten beschreibende Gleichungen zugeordnet werden. Durch den Einsatz dieser Materialgleichungen entstehen Gleichungssysteme (mathematische Modelle), aus denen man qualitative und quantitative Folgerungen ziehen kann (vgl. [10]).

Die einfachsten dieser Gleichungen ergeben sich aus der Definition des elastischen Körpers, also aus der Annahme, „daß der gegenwärtige Deformationszustand die Spannungen eindeutig bestimmt“ [10, S.III]. Für kleine Lasten und Deformationen folgt daraus das nach Hooke (1635-1703) benannte Gesetz, welches besagt, daß Spannungen linear von Verzerrungen abhängen. Hooke postuliert „ut tensio sic vis“ (lat., „wie die Dehnung so die Kraft“) [41]. Die bei Betrachtung eines elastischen Körpers lineare Theorie wird unter anderem in [19], [23] oder [28] hergeleitet.

Überschreiten aufgebrauchte Lasten die elastische Grenzlast bzw. Dehnungen die elastische Grenzdehnung, müssen wegen physikalischer Nichtlinearitäten nichtlineare Materialgleichungen verwendet werden, um plastische Eigenschaften widerzuspiegeln. Die zur Beschreibung nichtlinearen Verhaltens erforderliche Theorie wird im Rahmen dieser Arbeit entwickelt. Da sie im Gegensatz zur Fließgelenktheorie (sh. [22]) jede plastizierte Zone eines Systems genau beschreibt, heißt sie Fließzonentheorie.

Nichtlineares Verhalten ist im allgemeinsten Sinne von vielen Faktoren abhängig, insbesondere vom Material, aber auch von Temperatur, Zeit, Belastungsgeschwindigkeit etc. Da „nur stark vereinfachende Näherungen bei der Abbildung der physikalischen Realität zur sinnvoll-

len Erweiterung der linearen Elastizitätstheorie führen“ [26, S.159] und da allein statische Beanspruchungen Betrachtung finden sollen, befasst sich diese Arbeit unter alleiniger Berücksichtigung des Faktors Material ausschließlich mit isothermen, nicht zeit- oder geschwindigkeitsabhängigen Deformationen. Phänomene der Relaxation und des Kriechens sind folglich von der Untersuchung ausgeschlossen.

Wie die Elastizitätstheorie, „die zur Ermittlung von Zustandsgrößen lineares Materialverhalten voraussetzt“ [30, S.9], ist auch die Plastizitätstheorie, die „nichtlineares Materialverhalten berücksichtigt“ [30, S.23] und die der Fließzonentheorie zugrunde liegt, von phänomenologischer Natur, da die makroskopisch beobachteten Zusammenhänge zwischen Spannungen und Verformungen durch ein mathematisches Modell beschrieben werden, das in keinem direkten Bezug zu den mikrophysikalischen Ursachen des Werkstoffverhaltens liegt (vgl. [4]). Demnach wird die Kristall- und Atomstruktur der Materie (sh. [38]) nicht berücksichtigt, stattdessen wird ein Körper als „zusammenhängende kompakte Menge materieller Punkte“ [4] betrachtet.

Die Elastizitätstheorie beschreibt ein System nur bis zum Erreichen der Fließspannung in der höchst beanspruchten Materialfaser. Aufgrund von teilweise erheblichen Tragfähigkeitsreserven, die unter anderem auf Verlagerung der Beanspruchungen auf bisher nicht ausgenutzte System- und Querschnittsteile beruhen, ist die Tragfähigkeit des Systems jedoch noch nicht erschöpft. Infolgedessen kann bei Berechnungen nach Elastizitätstheorie keine Aussage über eine mögliche Laststeigerung bis zum Versagen, also bis zur Erschöpfung der Tragfähigkeit, getroffen werden. Mit Hilfe der in dieser Arbeit entwickelten Fließzonentheorie, die die Tragfähigkeitsreserven rechnerisch erfasst, wird man hingegen den Forderungen nach Querschnitts- und Systemausnutzung zwecks Wirtschaftlichkeit gerecht.

Im Gegensatz zu Berechnungsmöglichkeiten mittels der Finiten-Element-Methode und den statischen Verhalten vereinfachenden Theorien (z.B. der Fließgelenktheorie) ist eine Theorie gesucht, deren Anwendung die exakte Bestimmung aller Zustandsgrößen in plastizierten Systemzonen ermöglicht. Die vorliegende Arbeit leitet diese Theorie her.

1.2 Einordnung und Zielsetzung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen einer Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Technischen Universität Wien. Inhaltlich ist sie dem Gebiet der Stabstatik zuzuordnen und bildet die Erweiterung der Elastizitätstheorie auf die Fließzonen-theorie, wodurch die Linearität des Materialmodells, die zur linearen Abhängigkeit und Proportionalität sämtlicher physikalischer Größen, die den Beanspruchungszustand eines Tragwerks beschreiben (vgl. [12]), beiträgt, aufgegeben und durch Bi-Linearität ersetzt wird. Diese Erweiterung der bekannten Theorie dient dem Zweck, sicher und wirtschaftlich bemessen zu können. Einer Betrachtung der aktuell diskutierten Wölbkrafttorsion kommt dabei besondere Bedeutung zu (sh. beispielsweise [14], [33]).

Die Arbeit befasst sich mit der statischen Untersuchung von Einzelstäben, denen ein linear-elastisches ideal-plastisches Stoffgesetz zugrunde liegt. Die elastische Grenze bzw. Fließgrenze ist in den Berechnungen zwar variabel bestimmbar, das zugrundegelegte Materialverhalten spiegelt jedoch allein jenes von Baustahl idealisiert wider (sh. [5], [13], [22], [26]).

Die Arbeit baut auf [23] auf und erweitert die dort beschriebene Elastizitätstheorie sowie deren Anwendungsmöglichkeit mittels eines Programms. Die zur Erweiterung auf die Fließzonen-theorie erforderlichen Terme werden anschaulich hergeleitet und finden teilweise Anlehnung an [34]. Mit Hilfe des Programms werden ausgesuchte Systeme berechnet und aus den Ergebnissen werden allgemeingültige Aussagen über plastisches Tragverhalten abgeleitet. Die Ergebnisse sind mit denen von [9] verglichen, ihre Richtigkeit wird dadurch bestätigt.

Ziel dieser Arbeit ist es, eine Theorie zu entwickeln, mit der die Tragfähigkeitsreserven eines Systems qualitativ und quantitativ zu bestimmen sind und aus der die Möglichkeit resultiert, diese für eine einerseits sichere und andererseits wirtschaftliche Bemessung zu nutzen. Dazu werden Grundlagen und fachlicher Zusammenhang der Theorie beschrieben und diese mit Hilfe von erforderlichen Annahmen und Idealisierungen hergeleitet. Ein weiteres Ziel dieser Arbeit besteht darin, durch Beschreibung und Analyse der bei einer Fließzonenberechnung auftretenden Phänomene die Besonderheiten plastischen Tragverhaltens zu erklären. Die erzielten Ergebnisse werden mit denen in der Literatur zu findenden Lösungen verglichen. Zuletzt soll diese Arbeit einen Beitrag zur aktuellen Diskussion hinsichtlich Traglastbestimmung leisten (sh. [13], [14], [15], [20], [33], [34], [35]) und ist in diesem Zusammenhang als Lösungskonzept einzuordnen.

1.3 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist in acht Kapitel untergliedert (sh. Abbildung 1). Nach dieser Einleitung, in der die Problemstellung und die Zielsetzung erläutert werden, folgt in Kapitel 2 eine Übersicht über die verwendeten Bezeichnungen bzw. Abkürzungen sowie über die getroffenen Annahmen, die der anschließenden Theorie und den baupraktischen Untersuchungen zugrunde liegen. Im Anschluß daran wird die Fließzonentheorie hergeleitet, wobei zunächst nur das Wirken von Normalspannungen mit Gleichgewicht am unverformten System (Theorie I. Ordnung) betrachtet wird (Kapitel 3). Dazu wird in Kapitel 3.2 die lineares Materialverhalten beschreibende Elastizitätstheorie vorgestellt und in Kapitel 3.3 zur Fließzonentheorie, welche nichtlineares Materialverhalten erfasst, erweitert.

Zur Berücksichtigung stabilitätsgefährdender Effekte sind in Kapitel 4 die Gleichgewichtsbedingungen nicht am unverformten, sondern am verformten System (Theorie II. Ordnung) unter Einbeziehung von Vorverformungen aufgestellt. Wiederum steht der Herleitung der Fließzonentheorie (Kapitel 4.3) die Beschreibung der Elastizitätstheorie (Kapitel 4.2) voran. Im anschließenden Kapitel 5 wird das Auftreten von Schubspannungen betrachtet. Ihre qualitative und quantitative Bestimmung ist in Kapitel 5.2 erklärt, ihre Berücksichtigung bei gleichzeitiger Wirkung von Normalspannungen mittels einer Vergleichsspannung ist in Kapitel 5.3 erläutert. Kapitel 5.4 umfasst die Theorie, nach der in plastizierten Zonen auftretende Schubspannungen die maximal vom Material aufnehmbaren Normalspannungen reduzieren und somit einen Einfluß auf Traglasten haben können.

Sinn und Ziel theoretischer Herleitungen ist ihre Anwendung in der Praxis. Die Möglichkeit, die in den Kapiteln 3 und 4 hergeleiteten Differentialgleichungen der Fließzonentheorie auf baupraktische Aufgaben anzuwenden, wird in Kapitel 6 durch deren Umsetzung (Lösung der Differentialgleichungen und Systemberechnung mittels Reduktionsverfahren) in ein Programm beschrieben. Auf die dazu unter anderem erforderliche Berechnung von Querschnittswerten, deren analytische Beschreibung in Anhang G angegeben ist, wird eingegangen.

Die sich in Kapitel 7 anschließenden Berechnungen führen zu baustatisch relevanten Aussagen über Fließzonen, mit deren Hilfe die auftretenden Phänomene analysiert und bei Bemessungen berücksichtigt werden können. Es werden zunächst die Besonderheiten plastischen Tragverhaltens vor allem biegebeanspruchter Systeme untersucht (Kapitel 7.2). Der sich bei einer Laststeigerung bis zur Traglast nach Theorie I. Ordnung bildende Versagensmechanismus ist in Kapitel 7.3 erklärt. Die Wirkung von Schubspannungen kann zu einer Reduzierung dieser Traglast führen. Auf die Notwendigkeit, Schubspannungen zu berücksichtigen, wird in

Kapitel 7.4 eingegangen. Die darauf folgenden Berechnungen dienen dem Zweck, die Stabilitätsgefährdung plastizierter Stäbe zu untersuchen (Kapitel 7.5).

In Kapitel 8 werden die hergeleitete Fließzonentheorie, die Möglichkeit ihrer Anwendung auf baupraktische Aufgaben sowie die Ergebnisse der geführten Berechnungen zusammengefasst.

Ein Ausblick auf weitere Forschungsfelder bildet den Abschluß der Arbeit.

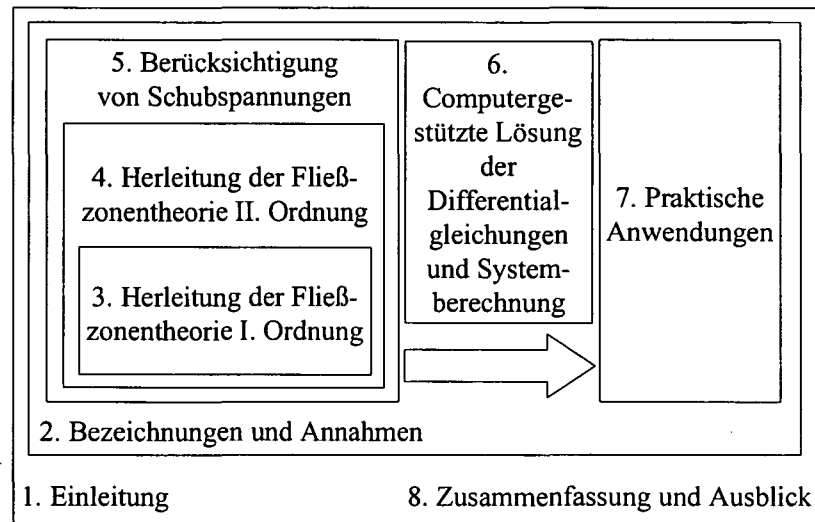


Abbildung 1: Aufbau der Arbeit

2 Bezeichnungen und Annahmen

2.1 Bezeichnungen

Aus Gründen der Übersichtlichkeit und Vereinfachung werden folgende Bezeichnungen bzw. Abkürzungen verwendet:

- Geometrie, Querschnitt, Material, Spannungen:

x, y, z Koordinatensystem bezogen auf die Achsen in unverformter Lage

ξ, η, ζ Koordinatensystem bezogen auf die Achsen des Schwerpunkts S in verformter Lage

ξ_M, η_M, ζ_M Koordinatensystem bezogen auf die Achsen des Schubmittelpunkts M in verformter Lage

bei Theorie I. Ordnung gilt: $\xi \equiv x, \eta \equiv y, \zeta \equiv z$

S Schwerpunkt

M Schubmittelpunkt

ω Wölbordinate bezogen auf den Schubmittelpunkt M

ω_S Wölbordinate bezogen auf den Schwerpunkt S

y_M y-Koordinate des Schubmittelpunkts M

z_M z-Koordinate des Schubmittelpunkts M

b Blechdicke

h Blechhöhe

E Elastizitätsmodul

G Schubmodul

A Querschnittsfläche

A_{yy} Trägheitsmoment um die z-Achse

A_{zz} Trägheitsmoment um die y-Achse

$A_{\omega\omega}$ Wölbträgheitsmoment

EA Dehnsteifigkeit

EA_{yy} Biegesteifigkeit um die z-Achse

EA_{zz} Biegesteifigkeit um die y-Achse

$EA_{\omega\omega}$ Wölbsteifigkeit

I_T	Torsionsträgheitsmoment
GI_T	St.Venant'sche Torsionssteifigkeit
i_p	polarer Trägheitsradius
r_y, r_z	Querschnittsstrecken
r_ω	dimensionsloser Querschnittswert
σ_x	Normalspannung in x -Richtung
σ_ξ	Normalspannung in ξ -Richtung
τ	Schubspannung in Blechrichtung
σ_{el}	der Dehnung entsprechende Normalspannung in ξ -Richtung
$\sigma_{fließ}$	Fließspannung in ξ -Richtung (entspricht der Streckgrenze f_y nach [5])
σ_{vergl}	Vergleichsspannung

- Verschiebungsgrößen:

Verschiebungsgrößen aus Einwirkungen:

u	Verschiebung des Schwerpunkts in x -Richtung
$u_{bel.}$	Verschiebung eines beliebigen Querschnittspunkts in x -Richtung
v	Verschiebung des Schwerpunkts in y -Richtung
w	Verschiebung des Schwerpunkts in z -Richtung
φ_x	Querschnittsdrehwinkel um die x -Achse
φ_y	Querschnittsdrehwinkel des Schwerpunkts um die y -Achse
$\varphi_{y,M}$	Querschnittsdrehwinkel des Schubmittelpunkts um die y -Achse
φ_z	Querschnittsdrehwinkel des Schwerpunkts um die z -Achse
$\varphi_{z,M}$	Querschnittsdrehwinkel des Schubmittelpunkts um die z -Achse
Γ_x	Verdrillung um die x -Achse unter Vernachlässigung sekundärer Schubverformungen
ε	Längsdehnung
ε_S	Längsdehnung des Schwerpunkts S
$\varepsilon_{fließ}$	Fließdehnung
κ_y	Verkrümmung des Schwerpunkts um die y -Achse
κ_z	Verkrümmung des Schwerpunkts um die z -Achse
κ_ω	Änderung der Verdrillung Γ_x pro Längeneinheit ($=\Gamma'_x$)

Verschiebungsgrößen der Gesamtverformung, die sich aus Vorverformung und Lastverformung zusammensetzt, werden mit einem Querstrich versehen (z.B. \bar{w}).

- Schnittgrößen:

Schnittgrößen auf die Achsen in unverformter Lage bezogen:

S_x	Längskraft in x -Richtung
R_y	Transversalkraft in y -Richtung
R_z	Transversalkraft in z -Richtung
M_x	Moment um x -Achse (Torsionsmoment)
$M_{x,M}$	Moment um eine zur x -Achse parallelen Achse durch den Schubmittelpunkt (Torsionsmoment)
M_y	Moment um y -Achse (Biegemoment)
M_z	Moment um z -Achse (Biegemoment)
M_x^P	primäres (St.Venant'sches) Torsionsmoment
M_x^S	sekundäres Torsionsmoment um eine zur x -Achse parallelen Achse durch den Schubmittelpunkt (Wölb-torsionsmoment)

Schnittgrößen auf die Achsen in verformter Lage (Gesamtverformung) bezogen:

N_{Res}	Resultierende Normalkraft in ξ -Richtung
$Q_{\eta,Res}$	Resultierende Querkraft in η_M -Richtung
$Q_{\zeta,Res}$	Resultierende Querkraft in ζ_M -Richtung
$M_{\xi,Res}$	Resultierendes Moment um eine zur ξ_M -Achse parallelen Achse durch den Schwerpunkt
$M_{\eta,Res}$	Resultierendes Moment um die η -Achse
$M_{\zeta,Res}$	Resultierendes Moment um die ζ -Achse

Schnittgrößen auf die Achsen in verformter Lage (Gesamtverformung) bezogen ohne Effekte der Theorie II. Ordnung:

N	Normalkraft aus Normalspannungen – in ξ -Richtung wirkend
Q_η	Querkraft aus Schubspannungen – in η_M -Richtung wirkend
Q_ζ	Querkraft aus Schubspannungen – in ζ_M -Richtung wirkend
M_ξ	Moment aus Schubspannungen – um eine zur ξ_M -Achse parallelen Achse durch den Schwerpunkt
$M_{\xi,M}$	Moment aus Schubspannungen – um die ξ_M -Achse
M_ξ^P	primäres (St.Venant'sches) Torsionsmoment aus Schubspannungen
M_ξ^S	sekundäres Torsionsmoment um die ξ_M -Achse (Wölb-torsionsmoment) aus Schubspannungen

M_η	Moment aus Normalspannungen um die η -Achse (Biegemoment)
M_ζ	Moment aus Normalspannungen um die ζ -Achse (Biegemoment)
M_ω	Wölb(bi)moment oder Bimoment aus Normalspannungen – bezogen auf den Schubmittelpunkt M
K	Wagner-Koeffizient

Die in jedem Iterationsschritt als bekannte Größen eingehenden Werte werden mit dem Index „II“ versehen (z.B. N^{II}).

Größen der Fließzonentheorie:

$\Delta\sigma$	Differenz zwischen σ_{el} und $\sigma_{fließ}$
ΔN	Normalkraft aus $\Delta\sigma$ resultierend
ΔM_η	Moment um die η -Achse aus $\Delta\sigma$ resultierend
ΔM_ζ	Moment um die ζ -Achse aus $\Delta\sigma$ resultierend
ΔM_ω	Wölbbimoment aus $\Delta\sigma$ resultierend
ΔK	Wagner-Koeffizient aus $\Delta\sigma$ resultierend

• Einwirkungen:

q_x	Längsstreckenlast in x -Richtung (richtungstreu)
q_y	Querstreckenlast in y -Richtung (richtungstreu)
q_z	Querstreckenlast in z -Richtung (richtungstreu)
m_x	Streckenmoment um x -Achse (Torsionsmoment)
m_y	Streckenmoment um y -Achse (Biegemoment)
m_z	Streckenmoment um z -Achse (Biegemoment)
m_ω	Streckenwölbmoment
e_y, e_z	Ausmitten der Lastangriffspunkte

v^V	Vorverformung in y -Richtung
w^V	Vorverformung in z -Richtung
φ_x^V	Vorverdrehung um die x -Achse
φ_y^V	Querschnittsdrehwinkel um die y -Achse aus Vorverformung
φ_z^V	Querschnittsdrehwinkel um die z -Achse aus Vorverformung
Γ_x^V	Vorverdrillung um die x -Achse

f	allgemeiner Last(steigerungs)faktor
Z_i	Zustandsvektor bezogen auf die lokalen Achsen in unverformter Lage
F_{ki}	Übertragungsmatrix bezogen auf die lokalen Achsen in unverformter Lage

2.2 Annahmen

Im folgenden findet sich eine Aufstellung der im Rahmen dieser Arbeit getroffenen Annahmen, die – neben einigen Erweiterungen zur Berücksichtigung von Wölbkrafttorsion und Fließzonentheorie – den üblichen Annahmen der technischen Biegelehre entsprechen:

- Dünnwandige, offene Querschnitte werden betrachtet (sh. beispielhaft Abbildung 2).
- Die Wagner-Hypothese wird zugrunde gelegt: Blechquerschnitte bleiben eben.
- Der Querschnitt bleibt formtreu und beult nicht.
- Kleine Verformungen treten auf.
- Sekundäre Schubverformungen (hervorgerufen aus Querkraft und sekundärem Torsionsmoment) werden vernachlässigt.
- Der Einfluß von Normalspannungen in η - oder ζ -Richtung wird vernachlässigt.
- Fließen tritt nur in σ_ξ -Richtung auf.
- St.Venant'sche Torsionssteifigkeit GI_T bleibt beim Plastizieren des Querschnitts konstant.
- Strukturelle Imperfektionen werden nicht erfasst.
- Linear-elastisches ideal-plastisches Stoffgesetz wird zugrunde gelegt.

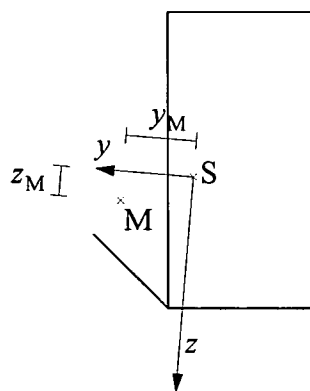


Abbildung 2: Beispiel eines betrachteten Querschnitts

Weiterhin gilt für die Anwendungsbeispiele (soweit nicht anders angegeben):

- Baustahl mit den Materialkennwerten $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$, $G = 8100 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_{\text{fließ}} = 24 \text{ kN/cm}^2$ wird verwendet.
- Lasteinleitungsprobleme, die zu Teilversagen des Querschnitts führen können, werden nicht betrachtet.
- Sekundäre Schubspannungen verlaufen blechparallel und sind über die Blechdicke konstant verteilt.

3 Herleitung der Fließzonentheorie I. Ordnung

3.1 Allgemeines

Diesem Kapitel liegt die Theorie I. Ordnung zugrunde. Demnach werden hier im Gegensatz zur Berechnung nach Theorie II. Ordnung die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System formuliert. Die Entscheidung, ein unverformtes System zu betrachten, bedeutet eine Vereinfachung der Gleichgewichtsfindung und somit des zu lösenden Gleichungssystems, die nur bei Betrachtung nicht stabilitätsgefährdender Systeme getroffen werden darf.

Bevor die Theorie zur Berechnung einer Fließzone hergeleitet wird, muß jene zur Berechnung eines elastischen Stabes bekannt sein, da letztere die Grundlage der weiteren Überlegungen bildet. Aus diesem Grund wird für Biegetorsion zunächst die Elastizitätstheorie vorgestellt und diese anschließend zur Fließzonentheorie erweitert.

3.2 Beschreibung der Elastizitätstheorie für Biegetorsion

3.2.1 Allgemeines

Alle Gleichungen dieses Kapitels basieren auf der Definition des elastischen Körpers. Ihr entsprechend heißt ein materieller Körper „elastisch“, wenn die Spannungen durch die momentanen Verzerrungen eindeutig bestimmt sind (sh. [10]).

Eine weitere Definition bezieht sich auf die Deformationen eines Körpers und setzt voraus, daß diese gegenüber den Stababmessungen klein sind und nach Wegnahme der Belastung verschwinden, wodurch der Stab seine ursprüngliche Gestalt wieder annimmt. Elastizität wird charakterisiert durch die zulässige Spannung $\sigma_{\text{fließ}}$. Das nach Hooke benannte Deformations- oder auch Stoffgesetz ist linear; ebenso ist die Last-Verformungs-Kurve des Stabes linear, solange das Gleichgewicht am unverformten System – also gemäß der Theorie I. Ordnung – aufgestellt wird. Die Elastizität eines Stabes sagt nichts über dessen tatsächliche Tragfähigkeit und dessen Grenzdeformationen aus. [6]

Als Elastizitätstheorie bezeichnet man die Theorie zur Ermittlung von Zustandsgrößen, die elastisches, also lineares Materialverhalten voraussetzt (sh. [30]). Bei gemischter Torsion (Wölbkrafttorsion) gibt es 14 unbekannte Zustandsgrößen, zu deren Bestimmung ebenso viele Differentialgleichungen vorhanden sind. Diese 14 Gleichungen setzen sich – wie in [23] beschrieben – aus drei kinematischen und vier konstitutiven Beziehungen sowie aus sieben Gleichgewichtsbedingungen zusammen. Bei letzteren unterscheidet man sechs „echte“ Gleichgewichtsbedingungen für sechs Freiheitsgrade im Raum und eine „unechte“ Gleichgewichtsbedingung für die gemischte Torsion. Betrachtet man St.Venant-Torsion, benannt nach De Saint Venant (1797-1886), und vernachlässigt Wölbkrafttorsion, entfällt eine konstitutive Beziehung sowie eine Gleichgewichtsbedingung. Zur Bestimmung der nun 12 unbekanntenen Zustandsgrößen bleiben 12 Differentialbeziehungen.

Beim Aufstellen der Beziehungen wird anfangs die Stabachse als Referenzachse gewählt. Da man als Stabachse die Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Querschnittsflächen bezeichnet, beziehen sich alle Schnitt- und Verschiebungsgrößen auf den Schwerpunkt S. Im weiteren wird der Schubmittelpunkt M als Bezugspunkt der Verschiebungsgrößen eingeführt, um für Theorie I. Ordnung die Beziehungen für Torsion um die x -Achse und die Biegungen um die y - bzw. z -Achse zu entkoppeln. Für reine Torsionsbeanspruchung stellt die Schubmittelpunktsachse die Drillruheachse dar. [23]

Die Differentialgleichungen sind als 14 Differentialbeziehungen erster Ordnung aufgestellt. Sie können durch gegenseitiges Einsetzen auch zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und drei Differentialgleichungen vierter Ordnung zusammengefasst werden.

3.2.2 Koordinatensysteme

Zur allgemeinen Beschreibung der Zustandsgrößen (Schnitt- und Verschiebungsgrößen) eines beliebigen Systempunkts werden drei Koordinatensysteme unterschieden: ein globales und zwei lokale Koordinatensysteme, wobei letztere sich einerseits auf die (Stab-) Achsen in unverformter Lage, andererseits auf die (Stab-)Achsen in verformter Lage beziehen. Alle Koordinatensysteme sind rechtsdrehend.

Für eine statische Berechnung nach Theorie I. Ordnung ist allein die Betrachtung von Achsen in unverformter Lage und der sie beschreibenden Koordinatensysteme erforderlich. Während der Ursprung des globalen Koordinatensystems, das die Lage eines Stabes im Raum definiert, frei zu bestimmen ist, hat das lokale Koordinatensystem seinen Ursprung im Schwerpunkt S des Querschnitts. Die Achsen in unverformter Lage x , y und z des lokalen Koordinatensystems bilden ein rechtwinkliges System, bei dem die x - Achse in Richtung der Stabachse, die y - und die z - Achse in Richtung der Trägheitshauptachsen zeigen. Letztere liegen in der Querschnittsebene.

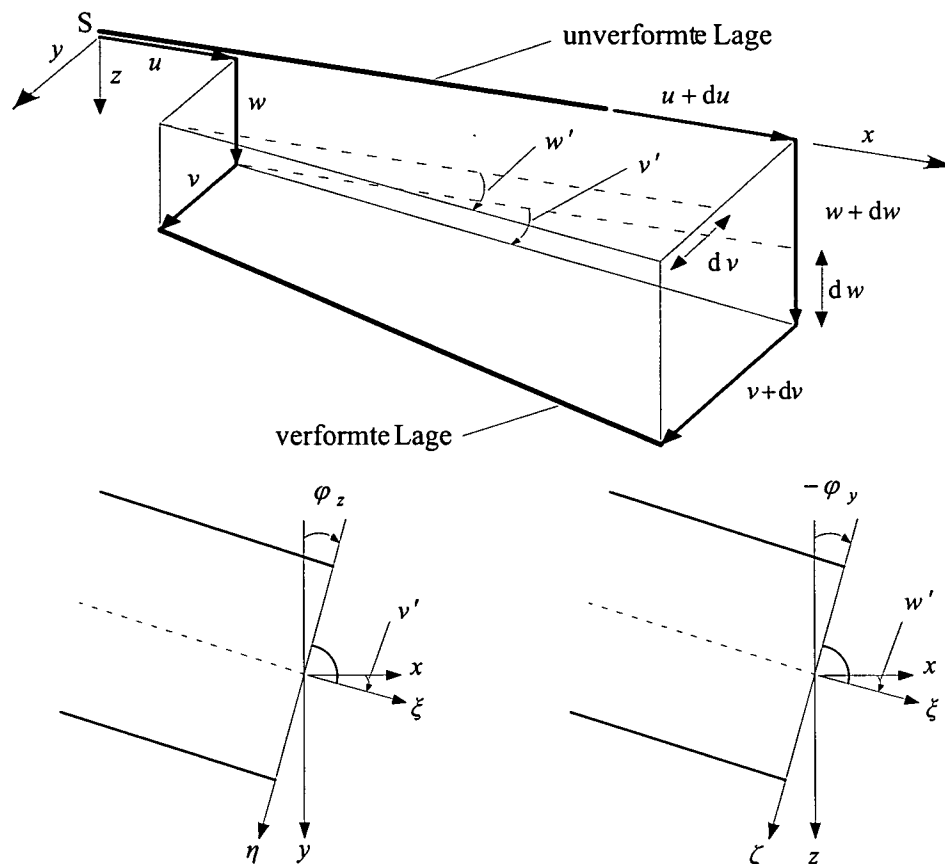
Da allein ein Stab betrachtet wird, dessen globale Lage unerheblich ist, wird im folgenden auf das globale Koordinatensystem nicht weiter eingegangen, weswegen auch das Adjektiv „lokal“ entbehrlich ist.

3.2.3 Kinematische Beziehungen

„Die kinematischen Beziehungen beschreiben den Zusammenhang zwischen den äußeren und den inneren Weggrößen, d.h. zwischen den Verschiebungsgrößen und den Verzerrungen“ [19, S.28]. Man unterscheidet kinematische Beziehungen am Stab und solche im Querschnitt.

3.2.3.1 Kinematische Beziehungen am Stab

Die Verschiebungsgrößen werden unterteilt in Verschiebungen, Verdrehungen und Verdrillung. Für diese verdeutlichen sich die kinematischen Zusammenhänge anhand der Abbildungen 3 und 4.



Quelle: nach [23]

Abbildung 3: Kinematische Beziehungen für die Verschiebungen

Es ergeben sich für die Verschiebungen

in x - Richtung:

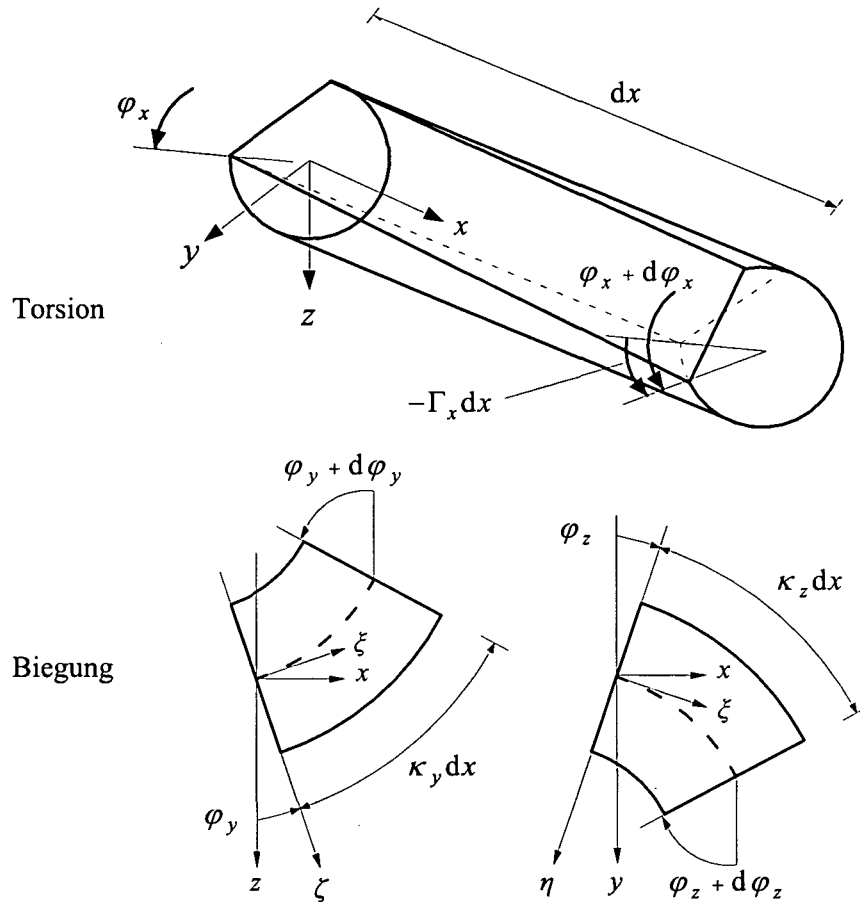
$$u' = \varepsilon_s \quad (3-1)$$

in y - Richtung:

$$v' = \varphi_z \quad (3-2)$$

in z - Richtung:

$$w' = -\varphi_y \quad (3-3)$$



Quelle: nach [23]

Abbildung 4: Kinematische Beziehungen für die Verdrehungen

Die kinematischen Beziehungen der Verdrehungen ergeben

um die x - Achse:

$$\varphi'_x = -\Gamma_x \quad (3-4)$$

um die y - Achse:

$$\varphi'_y = \kappa_y \quad (3-5)$$

um die z - Achse:

$$\varphi'_z = \kappa_z \quad (3-6)$$

Für Verdrillung um die x - Achse bei gemischter Torsion ergibt sich

$$\Gamma'_x = \kappa_\omega \quad (3-7)$$

3.2.3.2 Kinematische Beziehungen im Querschnitt

Nach der von Jacob Bernoulli (1667-1748) aufgestellten Normalenhypothese, die für die technische Biegelehre von zentraler Bedeutung ist, bleiben die zur Stabachse senkrechten ebenen Querschnitte bei der Verformung eben, stehen senkrecht zur Stabachse und führen unter Zugrundelegung eines linear-elastischen Materialgesetzes zu einem ebenen Spannungszustand.

Die Normalenhypothese wird bei der Untersuchung von dünnwandigen Querschnitten unter Torsionsbeanspruchung durch die von Wagner aufgestellte Hypothese ersetzt bzw. ergänzt, bei der vier unabhängige Zustände in Linearkombination den Verformungszustand eines Querschnitts beschreiben. Die Zustände sind:

- Längsverschiebung des Schwerpunkts
- zwei Verdrehungen um die Querschnittshauptachsen
- Verwölbung

Demnach ergibt sich die Verschiebung eines beliebigen Querschnittspunkts in Längsrichtung aus diesen, in den Abbildungen 5 und 6 dargestellten Zuständen zu:

$$u_{bel.} = u - z \cdot w' - y \cdot v' - \omega_S \cdot \varphi'_x \quad (3-8)$$

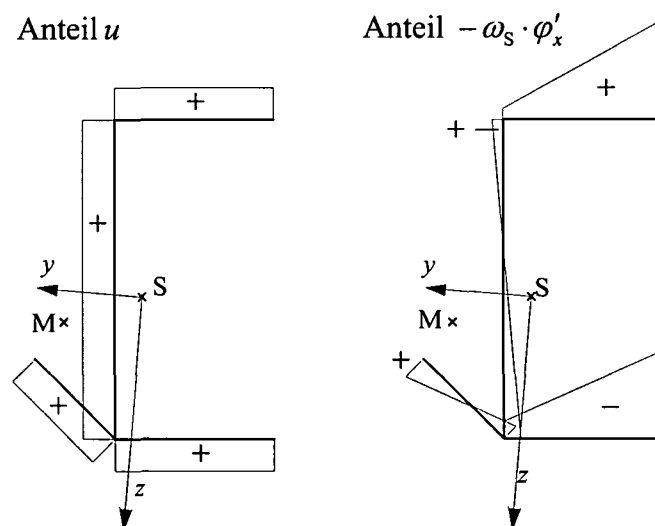


Abbildung 5: $u_{bel.}$ aufgrund von Längsverschiebung von S und Verwölbung

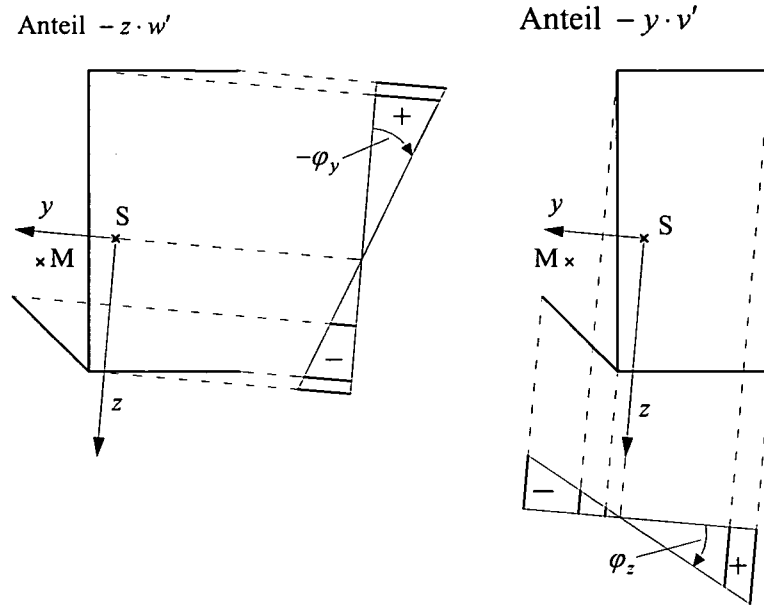


Abbildung 6: $u_{bel.}$ aufgrund von Verdrehungen um die Querschnittshauptachsen

Wenn die Wölbordinate nicht auf den Schwerpunkt S (ω_s), sondern auf den Schubmittelpunkt M (Einheitsverwölbung ω) bezogen wird, kann Gleichung (3-8) mit

$$\omega_s = \omega + z \cdot y_M - y \cdot z_M \tag{3-9}$$

umgeformt werden zu

$$u_{bel.} = u - z(w' + y_M \varphi_x') - y(v' - z_M \varphi_x') - \omega \varphi_x' \tag{3-10}$$

Beispielhaft sind in Abbildung 7 am bereits bekannten Querschnitt sowie an einem U-Querschnitt Wölbordinaten sowohl auf M als auch auf S bezogen skizziert.

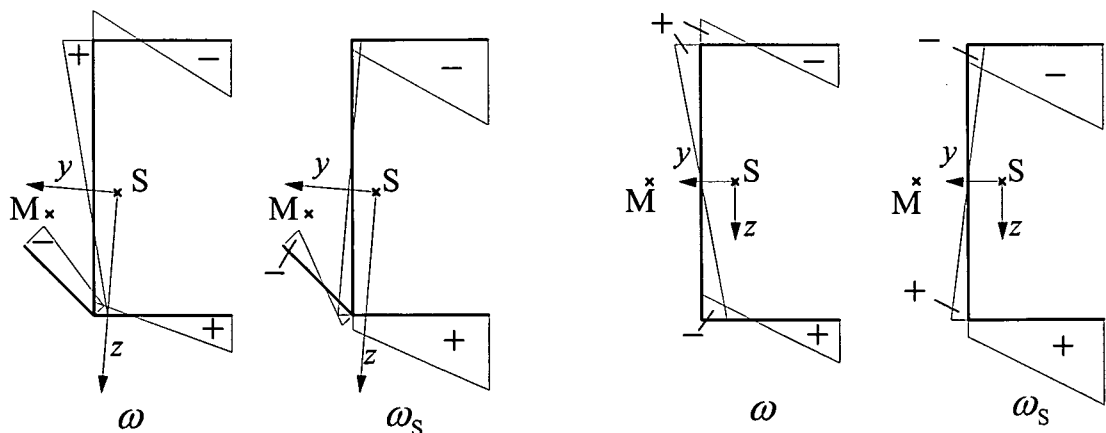


Abbildung 7: Vergleich von Wölbordinaten

Die Verschiebungen des Schubmittelpunkts in Querrichtung lassen sich in Abhängigkeit der Verschiebungen des Schwerpunkts (v, w) und der Querschnittsverdrehung berechnen (sh. unter anderem [25] und [23]). Als Ableitung der Verschiebungen werden die Querschnittsdrehwinkel des Schubmittelpunkts folgendermaßen beschrieben:

$$\varphi_{y,M} = \varphi_y + y_M \Gamma_x \quad (3-11)$$

$$\varphi_{z,M} = \varphi_z + z_M \Gamma_x \quad (3-12)$$

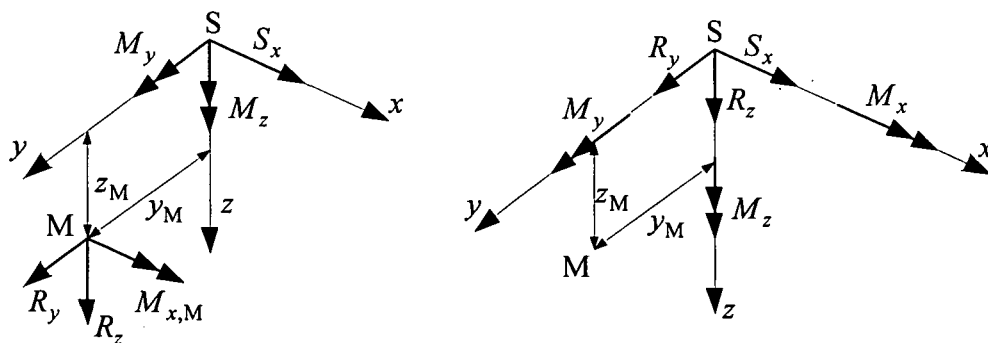
3.2.4 Gleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsbedingungen stellen die Kopplung zwischen den inneren und äußeren Kraftgrößen dar. Gleichgewicht herrscht, wenn die Summe aller Kräfte und die Summe aller Momente verschwinden. Diese Forderung wird sowohl für das Gesamtsystem als auch für jeden Teil dieses Systems in voneinander unabhängigen Gleichgewichtsbedingungen ausgedrückt. [19]

Gemäß Theorie I. Ordnung wird das Gleichgewicht am unverformten Tragsystem formuliert. Als Referenzachse für die Gleichgewichtsbeziehungen wird die Schwerachse als Verbindungslinie der Schwerpunkte S gewählt. Durch sie verlaufen die Wirkungslinien der Längskraft S_x (bei Theorie II. Ordnung die Longitudinalkraft) und – da nun alle Schnittgrößen im Schwerpunkt konzentriert angenommen werden – die der Transversalkräfte R_y und R_z , die bei Theorie I. Ordnung den Querkräften entsprechen. Die Schwerachse ist weiterhin Bezugsachse für das Torsionsmoment M_x , welches gemäß der Umrechnung (sh. [23, S.44])

$$M_x = M_{x,M} - z_M \cdot R_y + y_M \cdot R_z \quad (3-13)$$

auch auf den Schubmittelpunkt M bezogen werden kann. Die Biegemomente M_y und M_z beziehen sich ebenfalls auf Achsen durch den Schwerpunkt S. (sh. Abbildung 8)



Quelle: nach [23]

Abbildung 8: Angriffspunkt der Schnittgrößen im Querschnitt

3.2.4.1 Kräftegleichgewicht

Abbildung 9 zeigt das Kräftegleichgewicht am unverformten System. Aus der Gleichgewichtsbedingung $\sum F_{x,y,z} = 0$ folgt

in x - Richtung:

$$S'_x + q_x = 0 \quad (3-14)$$

in y - Richtung:

$$R'_y + q_y = 0 \quad (3-15)$$

in z - Richtung:

$$R'_z + q_z = 0 \quad (3-16)$$

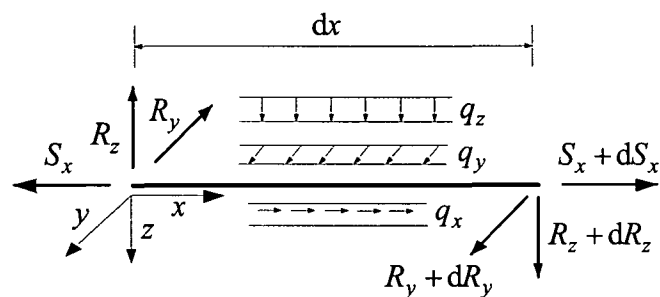


Abbildung 9: Kräftegleichgewicht am unverformten System

3.2.4.2 Momentengleichgewicht

Abbildung 10 zeigt das Momentengleichgewicht am unverformten System. Aus der Gleichgewichtsbedingung $\sum M_{x,y,z} = 0$ folgt

um die x - Achse:

$$M'_x + m_x = 0 \quad (3-17)$$

um die y - Achse:

$$M'_y - R_z + m_y = 0 \quad (3-18)$$

um die z - Achse:

$$M'_z + R_y + m_z = 0 \quad (3-19)$$

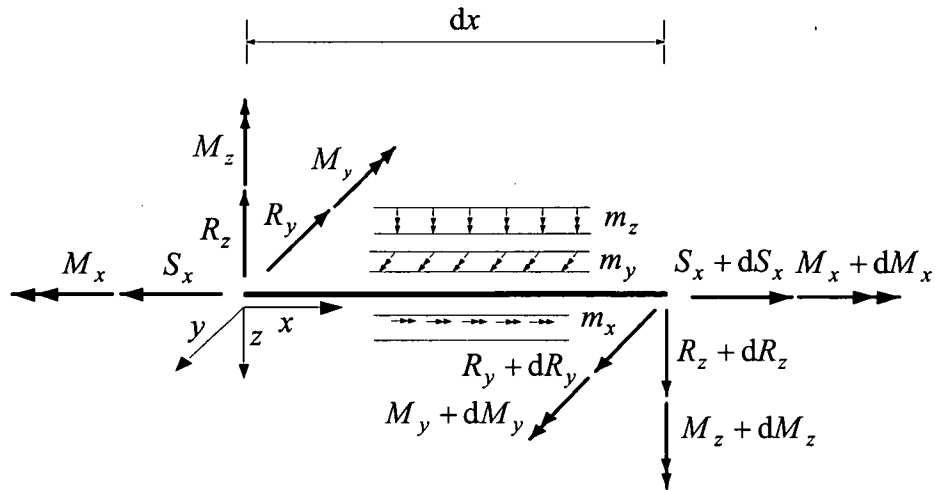


Abbildung 10: Momentengleichgewicht am unverformten System

Um eine zur x -Achse parallelen Achse durch den Schubmittelpunkt M (hier x_M genannt) wird die Gleichgewichtsbedingung in analoger Form zum Biegemomentengleichgewicht formuliert:

$$M'_\omega - M_x^S + m_\omega = 0 \quad (3-20)$$

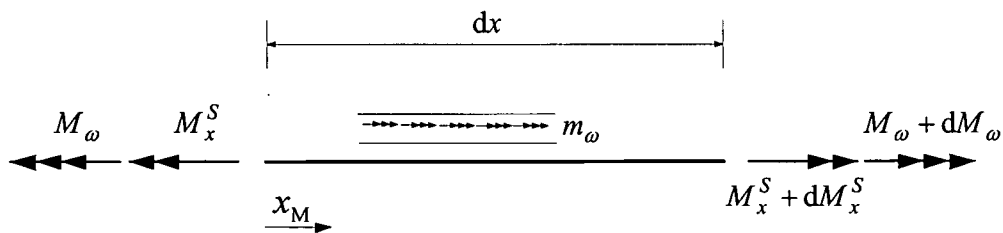


Abbildung 11: Wölbkrafttorsion am unverformten System

3.2.5 Konstitutive Beziehungen

Die konstitutiven Beziehungen beschreiben den Zusammenhang zwischen inneren Kraftgrößen (Schnittgrößen) und inneren Weggrößen (Verzerrungen). Ihnen liegt das Hooke'sche Gesetz zugrunde, welches Spannungen mit Verzerrungen verknüpft. Es lautet:

$$\sigma_x = E\varepsilon \quad (3-21)$$

Die Längsdehnung ε wird aus der Längsverschiebung nach Gleichung (3-10) berechnet und ergibt sich zu

$$\varepsilon = u' + z(\varphi'_y + y_M \Gamma'_x) - y(\varphi'_z + z_M \Gamma'_x) + \omega \Gamma'_x \quad (3-22)$$

Durch Integration über den Querschnitt lassen sich aus den Normalspannungen die Schnittgrößen bestimmen. Es ergeben sich mit der kinematischen Beziehung

(3-1)

$$N = \int_A \sigma_x dA = \int_A E\varepsilon dA = EA\varepsilon_s \quad (3-23)$$

mit (3-5) und (3-7)

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = \int_A E\varepsilon z dA = \int_A E(\varphi'_y + y_M \Gamma'_x) z^2 dA = EA_{zz}(\kappa_y + y_M \kappa_\omega) \quad (3-24)$$

mit (3-6) und (3-7)

$$M_z = -\int_A \sigma_x y dA = -\int_A E\varepsilon y dA = \int_A E(\varphi'_z + z_M \Gamma'_x) y^2 dA = EA_{yy}(\kappa_z + z_M \kappa_\omega) \quad (3-25)$$

und mit (3-7)

$$M_\omega = \int_A \sigma_x \omega dA = \int_A E\varepsilon \omega dA = \int_A E\Gamma'_x \omega^2 dA = EA_{\omega\omega} \kappa_\omega \quad (3-26)$$

Die konstitutive Beziehung für das St.Venant'sche Torsionsmoment lautet

$$M_x^P = -GI_T \Gamma'_x \quad (3-27)$$

Auf die Berechnung der Querschnittswerte sowie die Bestimmung von Schwer- und Schubmittelpunktskoordinaten wird in Kapitel 6.2.1 eingegangen. Anhang A enthält eine Beispielrechnung.

3.2.6 (Wölbkraft-)Torsion

Stäbe, die durch Torsion beansprucht werden, verdrehen sich längs einer Achse, die senkrecht zur Querschnittsebene steht. Diese Achse heißt Drillachse. Das Torsionsmoment $M_{x,M}$ wird im Allgemeinen durch das primäre Torsionsmoment M_x^P und das sekundäre Torsionsmoment M_x^S aufgenommen (vgl [30]). Es gilt

$$M_{x,M} = M_x^P + M_x^S \quad (3-29)$$

Tritt allein ein primäres Torsionsmoment M_x^P auf, das nur Schubspannungen und keine Normalspannungen hervorruft, spricht man von St.Venant'scher Torsion oder auch von reiner oder zwangsfreier Torsion. Für diesen Fall gilt

$$M_{x,M} = M_x^P \quad (3-30)$$

Tritt zusätzlich zu M_x^P auch M_x^S auf, liegt Wölbkrafttorsion vor. In diesem Fall treten in Stablängsrichtung zusätzlich (und in Überlagerung zu den Biegenormalspannungen) veränderliche Normalspannungen auf, die für den Querschnitt eine Gleichgewichtsgruppe darstellen, wodurch also weder eine Kraft noch ein Moment resultiert. Diese Normalspannungen werden durch die Größe eines Wölbmoments oder Wölbbimoments M_ω zusammengefasst. M_ω beschreibt keine Schnittgröße, „sondern stellt vielmehr einen Eigenspannungszustand des Querschnitts dar“ [23, S.53]. Die Beziehung zwischen Wölbmoment und sekundärem Torsionsmoment ist

$$M'_\omega = M_x^S \quad (3-31)$$

Abbildung 12 stellt den Zusammenhang zwischen M_x^P , M_x^S und M_ω dar.

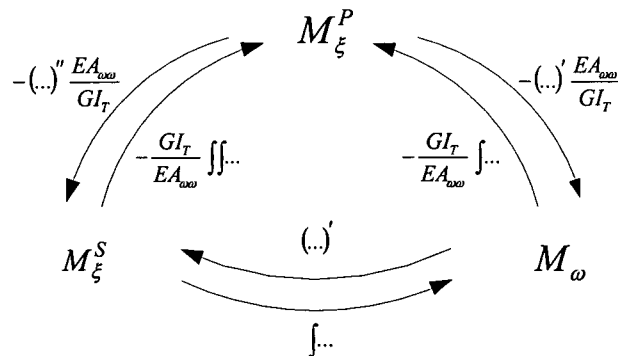


Abbildung 12: (Wölbkraft-)Torsion

Während bei Torsionsbeanspruchung St.Venant'sche Torsion stets vorhanden ist, tritt Wölbkrafttorsion nur auf, wenn die Verdrillung des Stabes mit einer Verwölbung des Querschnitts verbunden ist und wenn diese Verdrillung längs des Stabes nicht konstant ist (sh. [28]). Folglich kann es möglicherweise zu konstanten Verdrillungen und Verwölbungen kommen, ohne daß Wölbkrafttorsion oder Wölbspannungen auftreten. Letztere entstehen dann, wenn die Verwölbung des Querschnitts z.B. durch Einspannung der Endquerschnitte, durch Stirnplatten oder durch Änderung des Torsionsmoments in Stablängsrichtung behindert wird.

Ob es zu einer Verwölbung kommt, ist vom Querschnitt selbst abhängig, da dieser wölbfrei oder nicht wölbfrei sein kann. Zu den wölbfreien Querschnitten zählen:

- Kreis- und Kreisring-Querschnitte
- aus nur zwei Blechen zusammengesetzte Querschnitte
- quadratische Hohlquerschnitte mit konstanter Wanddicke
- rechteckige Hohlquerschnitte, deren Verhältnisse von Blechbreite zu Blechdicke für Stege und Gurte gleich sind

Während für wölbfreie Querschnitte, bei denen wie oben beschrieben nur St.Venant'sche Torsion vorliegt, eine Analogie zur Längsbeanspruchung eines Stabes existiert (sh. [28, S. 325]), besteht zwischen der Wölbkrafttorsion (mit Vernachlässigung der Torsionsschubverformungen aus sekundärem Torsionsmoment) und der Biegetheorie II. Ordnung (mit Vernachlässigung der Querkraftverformungen) eine Analogie. Diese Analogie ermöglicht die Anwendung bekannter Formeln und Verfahren der Biegetheorie II. Ordnung eines Stabes mit Zugbeanspruchung für die Theorie der Wölbkrafttorsion nach I. Ordnung (sh. [28, S. 326]).

3.3 Erweiterung der Elastizitätstheorie zur Fließzonentheorie

3.3.1 Allgemeines

3.3.1.1 Plastizität und Stoffgesetz

Bei Steigerung der ein System beanspruchenden Belastung über den elastischen Grenzzustand hinaus bis zum Versagen muß das tatsächliche nichtlineare Materialverhalten durch Verwendung eines Stoffgesetzes möglichst zutreffend erfasst werden. Das Materialverhalten wird mit Hilfe von Versuchen identifiziert. Diese geben unter anderem Aufschluß über die Last-Verformungs-Linie, die Momenten-Krümmungs-Beziehung oder die Spannungs-Dehnungs-Beziehung. Um auf allgemeine und vollständige Materialeigenschaften schließen zu können, muß bei der Versuchsdurchführung die Belastung sowohl im Wechselspiel (Zug – Druck bzw. positiv – negativ) als auch frequentiert, also mit wiederholter Be- und Entlastung erfolgen. Erst dadurch läßt sich das in [10] beschriebene „Erinnerungsvermögen“ eines Materials erkennen. Haupt spricht zur Beschreibung der Viskoelastizität, die sich beispielsweise durch Kriechen, Relaxation und Dämpfungseigenschaften zeigt, von einem „nachlassenden Gedächtnis“ des Materials, zur Beschreibung der Plastizität von einem „perfekten Gedächtnis“. Plastisches Verhalten ist demnach gekennzeichnet durch

- bleibende Verformungen, die zeitunabhängig auch nach Wegnahme der äußeren Belastung vorhanden sind
- Verfestigungseffekte, die bei erneuter Belastung eine Erhöhung der Fließgrenze, also des Übergangs von elastischem in plastisches Verhalten, mit sich bringen
- Querverfestigungseffekte, bei erneuter Belastung aber unterschiedlicher Beanspruchungsart
- Hystereseeffekte, die nicht von der Deformationsgeschwindigkeit abhängen.

Es liegt nahe, daß unter Zugrundelegung plastischen Materialverhaltens eine genaue Berechnung von Deformationen im Gegensatz zu einer Berechnung nach Elastizitätstheorie schwieriger ist, da nun „Vergangenheit“ und „Belastungsgeschichte“ eine Rolle spielen. Im Rahmen einer statischen Berechnung und infolgedessen auch im Rahmen dieser Arbeit sind derartiges Werkstoffverhalten und somit die eben genannten Effekte und Phänomene von der Untersuchung ausgeschlossen. Allein eine einmalige statische Belastung, die zu isothermen und nicht zeit- oder geschwindigkeitsabhängigen plastischen Deformationen führt, findet Betrachtung.

Da Baustahl aufgrund isotroper Eigenschaft nahezu gleiches Zug- und Druckverhalten hat, dient zur Bestimmung eines allgemeinen Stoffgesetzes der einachsige Zugversuch. In Abbildung 13 ist die experimentell beobachtete Spannungs-Dehnungs-Beziehung dargestellt. Folgende wichtige Kennwerte sind durch diese Beziehung bestimmt: Streckgrenze (R_{eH} und R_{eL}), wobei R_{eH} $\sigma_{fließ}$ entspricht, Zugfestigkeit (R_m), Bruch- (Brd.) und Gleichmaßdehnung (Glmd.), elastische (el. D.), bleibende (bl. D.) und Gesamtdehnung (Gesd.) sowie der Elastizitätsmodul (E).

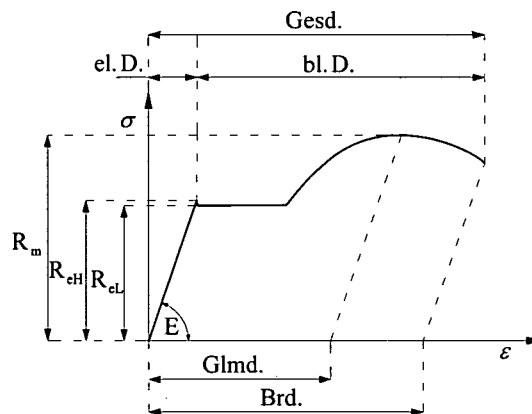


Abbildung 13: Spannungs-Dehnungs-Kurve

Die Streckgrenze ist ein Materialkennwert für elastisch-plastisches Verhalten, die Bruchdehnung ist hingegen lediglich eine technologische Maßzahl für die Zähigkeit (Duktilität) des Stahls. Baustähle weisen bei niedriger Belastungsgeschwindigkeit eine große Duktilität auf. Aus diesem Grund treten vor dem Bruch große Dehnungen auf, welche eine wichtige Voraussetzung für die Anwendung der Plastizitätstheorie sind.

An dem bis zur Streckgrenze linearen Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kurve (sh. Abbildung 13) erkennt man, daß für Spannungen unterhalb der Fließspannung das Hooke'sche Gesetz in guter Näherung gilt. In diesem Bereich sind alle Zustandsänderungen reversibel. Nach Wegnahme der äußeren Last ergibt sich folglich wieder die spannungsfreie Ausgangskonfiguration ohne bleibende Formänderung; der Stahl verhält sich elastisch (sh. Kapitel 3.2). Nach Überschreiten der Fließspannung ist eine Entlastung stets mit plastischen, also bleibenden Formänderungen verbunden, der Formänderungsprozeß ist also irreversibel. Bei Laststeigerung im plastischen Bereich ist die relative Zunahme der Deformationen (Verformungen und Krümmungen) größer als die der Belastung; dadurch kommt es zu einer nichtlinearen Last-Verformungs-Linie sowie zu einer nichtlinearen Momenten-Krümmungs-Beziehung.

Mit Hilfe eines Stoffgesetzes wird im folgenden das experimentell beobachtete Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Stahl durch einfache mathematische Funktionen erfasst. Das Materialverhalten wird gemäß [5] durch eine linear-elastisch ideal-plastische Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen idealisiert, welche in Abbildung 14 skizziert ist. Weitere Approximationen des tatsächlichen Werkstoffverhaltens (tri- und multilineare, hyperbolische sowie Potenzapproximationen) werden unter anderem in [4] mit weiteren Literaturverweisen diskutiert.

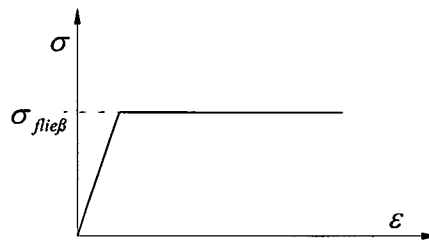


Abbildung 14: Bi-lineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung

Treten wie im einachsigen Zugversuch ausschließlich Normalspannungen auf, gilt für den Grenzzustand des Fließens einer Faser die Bedingung

$$\sigma_x \leq \sigma_{\text{fließ}} \quad (3-32)$$

Sollen weitere Spannungskomponenten, also mehrachsige Spannungszustände Berücksichtigung finden, ist eine Festigkeitshypothese für die Fließbedingung erforderlich. Verschiedene Hypothesen sind zur Berechnung einer Vergleichsspannung σ_{vergl} , mittels der der mehrachsige Spannungszustand mit dem einachsigen „verglichen“ wird und die mit

$$\sigma_{\text{vergl}} \leq \sigma_{\text{fließ}} \quad (3-33)$$

die Fließbedingung bildet, gebräuchlich. Unter Verwendung der Gestaltänderungsenergiehypothese nach von Mises (sh. [18], [22]) ergibt sich die Vergleichsspannung in reduzierter Form zu

$$\sigma_{\text{vergl}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} \quad (3-34)$$

3.3.1.2 Fließzonentheorie und ihre Zielsetzung

Die Fließzonentheorie ist eine Ergänzung bzw. Erweiterung der Elastizitätstheorie. Sie findet Anwendung, wenn Konstruktionen derart belastet werden, daß die auftretenden Spannungen ihren elastischen Grenzwert, die Fließgrenze, erreichen. Die Erweiterung der Elastizitätstheorie zur Fließzonentheorie liegt darin, zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens anstelle des linearen Stoffgesetzes ein bi-lineares zu verwenden, um plastische Effekte bei der Berechnung zu berücksichtigen. Die Fließzonentheorie ermöglicht folglich, plastische Verformbarkeit quantitativ zu erfassen.

Die Elastizitätstheorie eignet sich zur Beschreibung eines Systems bei Laststeigerung nur solange, bis in einer Querschnittsfaser die Fließspannung erreicht ist. Da die Tragfähigkeit von Querschnitt und System hierdurch im Allgemeinen jedoch noch nicht erschöpft ist, kann keine Aussage über die tatsächliche Sicherheit gegenüber dem Versagen, also der Erschöpfung der Tragfähigkeit, getroffen werden. Bei weiterer Laststeigerung ermöglicht die Plastizität eine Mobilisierung von zum Teil erheblichen Tragfähigkeitsreserven des Querschnitts und – in Abhängigkeit vom Grad der statischen Unbestimmtheit – des Systems. Die Mobilisierung beruht dabei auf der Verlagerung der Beanspruchungen auf bisher nicht ausgenutzte System- und Querschnittsteile und lässt sich mit Hilfe der Fließzonentheorie rechnerisch erfassen.

Das Ziel der Fließzonentheorie liegt in der Bestimmung derjenigen Tragfähigkeitsreserven eines Systems, die jenseits der elastischen Grenze als Sicherheit gegenüber einem Versagen zu verstehen sind, und der daraus resultierenden Möglichkeit, diese für eine optimale und dadurch wirtschaftliche Bemessung zu nutzen.

Da bei Berechnungen das Zugrundelegen der Fließzonentheorie zu einer genaueren Untersuchung aller plastizierten Systemstellen führt, kann diese als Verbesserung der Fließgelenktheorie gesehen werden, die wiederum nur eine „Näherungsplastizitätstheorie“ [30, S.12] darstellt.

3.3.2 Veränderung der konstitutiven Beziehungen

Die Erweiterung der Elastizitätstheorie auf die Fließzonentheorie besteht darin, als Grundlage aller Berechnungen anstelle des linearen Stoffgesetzes ein bi-lineares Stoffgesetz zu verwenden (sh. Kapitel 3.3.1.1). In die 14 Differentialgleichungen (vgl. Kapitel 3.2), auf denen das zu lösende Gleichungssystem basiert, geht das Stoffgesetz durch die konstitutiven Beziehungen ein. Der Zusammenhang zwischen den Größen der konstitutiven Beziehungen (Schnittgrößen und Verzerrungen) und dem Stoffgesetz wird anhand der folgenden Betrachtung zunächst für die Elastizitätstheorie beschrieben und dann für die Fließzonentheorie erklärt.

Gegeben ist ein Blech mit Fläche A_{Blech} und den Endpunkten E1 und E2, die durch Koordinaten bezogen auf das Hauptachsensystem des Gesamtquerschnitts beschrieben sind. Dem Blech wird ein linearer Dehnungsverlauf mit der Randdehnung ε^e eingeprägt. Für den Fall $\varepsilon^e \leq \varepsilon_{fließ}$, wonach gemäß Elastizitätstheorie das lineare Hooke'sche Stoffgesetz verwendet wird, zeigt Abbildung 15 den resultierenden Normalspannungsverlauf.

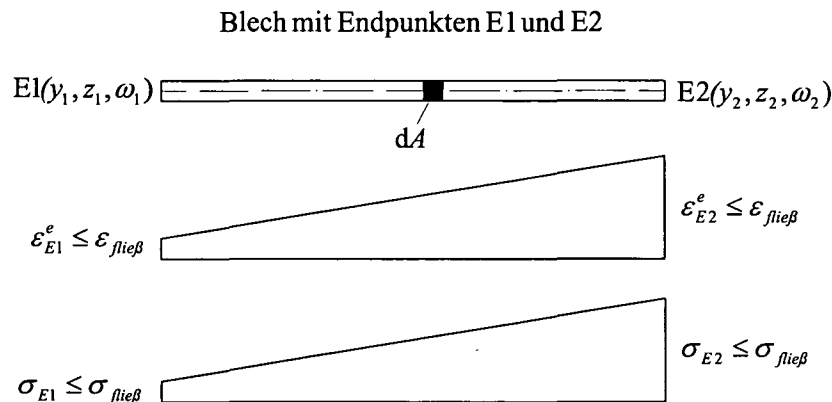


Abbildung 15: Dehnungs- und Spannungsverlauf (elastisch)

Die konstitutiven Beziehungen für Normalkraft und Moment ergeben für das Blech

$$N_{Blech} = \int_{A_{Blech}} \sigma_x dA = \int_{A_{Blech}} E \varepsilon dA \quad (3-35)$$

$$M_{y,Blech} = \int_{A_{Blech}} \sigma_x z dA = \int_{A_{Blech}} E \varepsilon z dA \quad (3-36)$$

$$M_{z,Blech} = \int_{A_{Blech}} \sigma_x y dA = \int_{A_{Blech}} E \varepsilon y dA \quad (3-37)$$

$$M_{\omega,Blech} = \int_{A_{Blech}} \sigma_x \omega dA = \int_{A_{Blech}} E \varepsilon \omega dA \quad (3-38)$$

Erhöht sich die eingeprägte Dehnung abschnittsweise auf $\varepsilon^e > \varepsilon_{fließ}$, so resultiert aus dem bi-linearen Stoffgesetz ein bi-linearer Spannungsverlauf (Abbildung 16).

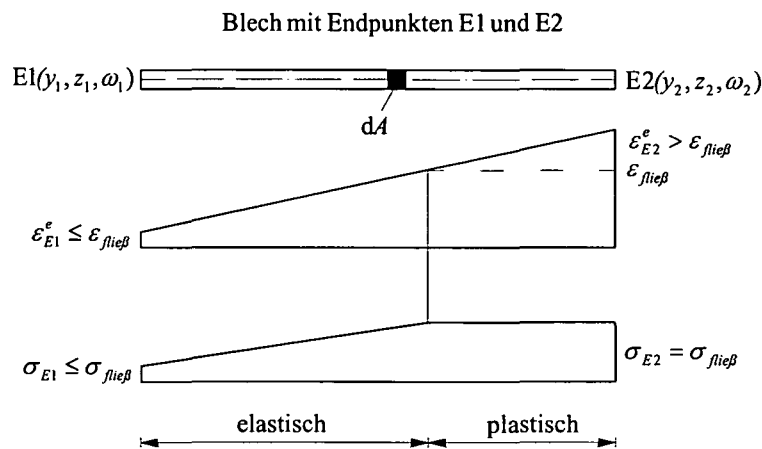


Abbildung 16: Dehnungs- und Spannungsverlauf (teilplastisch)

Da im plastischen Bereich $\sigma_x \neq \varepsilon \cdot E$, gelten die Gleichungen (3-35) bis (3-38) nun nicht mehr!

Ein linearer Zusammenhang zwischen Schnittgröße und Verzerrung bzw. zwischen Spannung und Verzerrung ist nicht unmittelbar gegeben, das Kriterium der Elastizität ist folglich nicht erfüllt. Die Beziehung zwischen Schnittgröße und Verzerrung ergibt sich erst aus der in Abbildung 17 skizzierten Überlegung, von einer elastisch berechneten Schnittgröße einen aufgrund plastischen Verhaltens nicht existierenden Anteil zu subtrahieren, um die real aufgenommene Schnittgröße zu ermitteln. Dieser plastische Anteil, der aus allen (elastisch berechneten) Spannungen oberhalb der Fließspannung resultiert, wird mit einem Δ versehen; die aus ihm berechnete Schnittgröße heißt Δ -Schnittgröße.

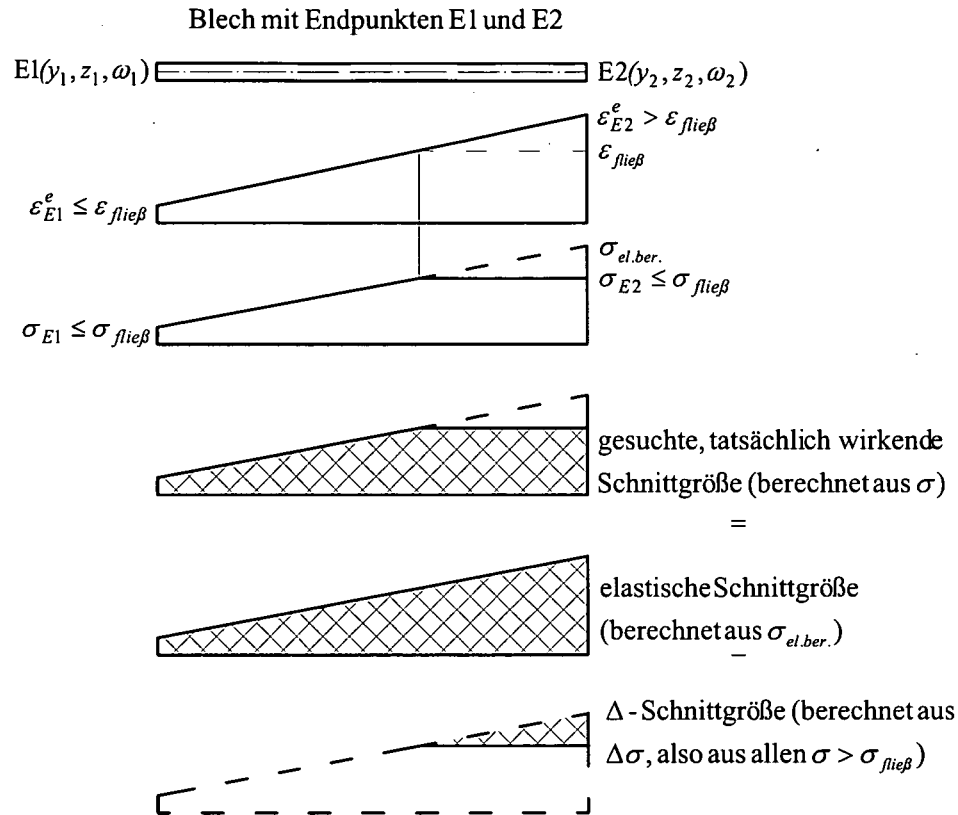
Die Berechnung von Normalkraft und Momenten erfolgt demnach gemäß den folgenden Gleichungen, wobei im elastischen Bereich die Δ -Schnittgröße null wird.

$$N_{Blech} = \int_{A_{Blech}} (\sigma_{x,el} - \Delta\sigma) dA \quad (3-39)$$

$$M_{y,Blech} = \int_{A_{Blech}} (\sigma_{x,el} - \Delta\sigma) z dA \quad (3-40)$$

$$M_{z,Blech} = \int_{A_{Blech}} (\sigma_{x,el} - \Delta\sigma) y dA \quad (3-41)$$

$$M_{\omega,Blech} = \int_{A_{Blech}} (\sigma_{x,el} - \Delta\sigma) \omega dA \quad (3-42)$$



Wie oben beschrieben wird bei einer Berechnung von Schnittgrößen nach Fließzonentheorie zunächst der sich nach Elastizitätstheorie ergebende Wert (im folgenden mit Index „el“ versehen) ermittelt und dieser anschließend um einen Δ -Wert vermindert, der sich durch Plastizierungen im Bereich $\varepsilon > \varepsilon_{\text{fließ}}$ ergibt. Da dies nicht nur für ein Blech, sondern nach Addition der Bleche auch für den Gesamtquerschnitt gilt, erweitern sich die konstitutiven Beziehungen der Elastizitätstheorie (3-24) bis (3-28) mit

$$N = N_{el} - \Delta N \quad (3-43)$$

$$M_y = M_{y,el} - \Delta M_y \quad (3-44)$$

$$M_z = M_{z,el} - \Delta M_z \quad (3-45)$$

$$M_\omega = M_{\omega,el} - \Delta M_\omega \quad (3-46)$$

zu denen der Fließzonentheorie

$$N = EA\varepsilon_s - \Delta N \quad (3-47)$$

$$M_y = EA_{zz}(\kappa_y + y_M \kappa_\omega) - \Delta M_y \quad (3-48)$$

$$M_z = EA_{yy}(\kappa_z + z_M \kappa_\omega) - \Delta M_z \quad (3-49)$$

$$M_\omega = EA_{\omega\omega} \kappa_\omega - \Delta M_\omega \quad (3-50)$$

Da sich Δ -Werte (abgesehen von ΔM_ω) stets auf den Schwerpunkt beziehen, darf auf den Index „S“ verzichtet werden.

3.3.3 Berechnung der Δ -Schnittgrößen

Zur rechnerischen Berücksichtigung von Plastizierungen werden im Bereich mit $\varepsilon > \varepsilon_{\text{fließ}}$ von den elastisch berechneten Schnittgrößen N_{el} , $M_{y,el}$, $M_{z,el}$ und $M_{\omega,el}$ sogenannte Δ -Schnittgrößen ΔN , ΔM_y , ΔM_z und ΔM_ω subtrahiert. In Analogie zu den elastischen Schnittgrößen beziehen sich auch die Δ -Schnittgrößen auf den Gesamtquerschnitt mit seinem zugrundegelegten Koordinatensystem und setzen sich aus den Δ -Schnittgrößen der einzelnen Bleche durch Addition zusammen. Es gilt:

$$\Delta N_{\text{gesamt}} = \Delta N = \sum \Delta N_{\text{Blech}} \quad (3-51)$$

$$\Delta M_{y,\text{gesamt}} = \Delta M_y = \sum \Delta M_{y,\text{Blech}} \quad (3-52)$$

$$\Delta M_{z,\text{gesamt}} = \Delta M_z = \sum \Delta M_{z,\text{Blech}} \quad (3-53)$$

$$\Delta M_{\omega,\text{gesamt}} = \Delta M_\omega = \sum \Delta M_{\omega,\text{Blech}} \quad (3-54)$$

Die Berechnung der Δ -Schnittgrößen von Einzelblechen kann sowohl ohne als auch mit Unterteilung des Blechs erfolgen. Erstere Variante erfordert zur Berücksichtigung aller möglichen Dehnungsverläufe eine Fallunterscheidung. Tabelle 1 zeigt das zu untersuchende, allgemeine Blech, die gemäß Hooke'schem Gesetz aus den Dehnungen berechneten Blechrandspannungen σ_A und σ_E sowie die zur Berechnung der Δ -Schnittgrößen benötigten Formeln. Im Falle von $\sigma_A > \sigma_E$ gelten die Formeln analog; hinsichtlich der Fallunterscheidung ist dann darauf zu achten, an welchem Randpunkt der größere Spannungsbetrag auftritt. Die Spannungen verlaufen stets linear.

Als alternative Berechnungsart wird das Blech in beliebig viele Abschnitte unterteilt, die jeweilige Abschnittsfläche $A_{\text{Abschnitt}}$ ermittelt und für den Mittelpunkt jedes Abschnitts die Koordinaten $y_{\text{Abschnitt}}$, $z_{\text{Abschnitt}}$, $\omega_{\text{Abschnitt}}$ sowie der $\Delta\sigma_{\text{Abschnitt}}$ -Wert (falls vorhanden) als Differenz zwischen der elastisch berechneten Normalspannung $\sigma_{x,el}$ und der Fließspannung $\sigma_{\text{fließ}}$ bestimmt. Die Δ -Schnittgrößen des Blechs ergeben sich nach folgenden Formeln

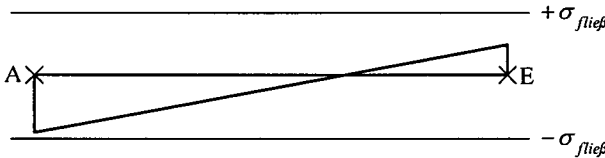
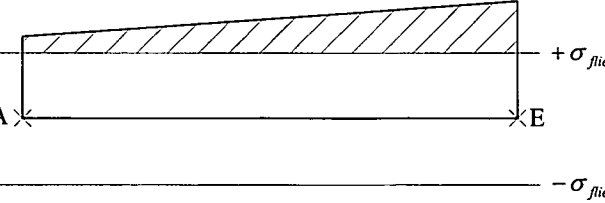
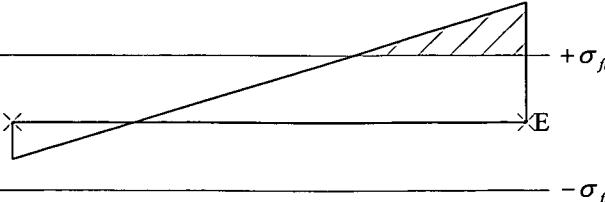
$$\Delta N_{\text{Blech}} = \sum_{\text{Abschnitte}} \Delta \sigma_{\text{Abschnitt}} \cdot A_{\text{Abschnitt}} \quad (3-55)$$

$$\Delta M_{y, \text{Blech}} = \sum_{\text{Abschnitte}} \Delta \sigma_{\text{Abschnitt}} \cdot z_{\text{Abschnitt}} \cdot A_{\text{Abschnitt}} \quad (3-56)$$

$$\Delta M_{z, \text{Blech}} = - \sum_{\text{Abschnitte}} \Delta \sigma_{\text{Abschnitt}} \cdot y_{\text{Abschnitt}} \cdot A_{\text{Abschnitt}} \quad (3-57)$$

$$\Delta M_{\omega, \text{Blech}} = \sum_{\text{Abschnitte}} \Delta \sigma_{\text{Abschnitt}} \cdot \omega_{\text{Abschnitt}} \cdot A_{\text{Abschnitt}} \quad (3-58)$$

Bei genügend großer Anzahl an Unterteilungen bzw. Abschnitten führen die Berechnungen mit und ohne Blechunterteilung zu dem gleichen Ergebnis.

<p>Gegeben ist ein Blech mit den Randpunkten A und E, die durch die Koordinaten $y_A, z_A, \omega_A, y_E, z_E, \omega_E$ gekennzeichnet sind, sowie mit der Höhe h, der Dicke b und den Randspannungen σ_A, σ_E</p> <p>für $-\sigma_{\text{fließ}} \leq \sigma \leq \sigma_{\text{fließ}}$ gilt $\Delta \sigma = 0$</p> <p>für $\sigma > \sigma_{\text{fließ}}$ gilt $\Delta \sigma = \sigma - \sigma_{\text{fließ}}$; für $\sigma < -\sigma_{\text{fließ}}$ gilt $\Delta \sigma = \sigma + \sigma_{\text{fließ}}$</p> <p>desweiteren: $y_m = (y_A + y_E)/2, z_m = (z_A + z_E)/2, \omega_m = (\omega_A + \omega_E)/2$</p>	
	$\Delta N = 0, \Delta M_y = 0$ $\Delta M_z = 0, \Delta M_\omega = 0$
	$\Delta N = (\Delta \sigma_A + \Delta \sigma_E) \cdot h \cdot b / 2$ $\Delta M_y = [\Delta \sigma_A z_m + (\Delta \sigma_E - \Delta \sigma_A) / 2 \cdot (z_A + (z_E - z_A) 2/3)] hb$ $\Delta M_z = -[\Delta \sigma_A y_m + (\Delta \sigma_E - \Delta \sigma_A) / 2 \cdot (y_A + (y_E - y_A) 2/3)] hb$ $\Delta M_\omega = [\Delta \sigma_A \omega_m + (\Delta \sigma_E - \Delta \sigma_A) / 2 \cdot (\omega_A + (\omega_E - \omega_A) 2/3)] hb$
	$t = (\sigma_E - \sigma_{\text{fließ}}) \cdot h / (\sigma_E - \sigma_A)$ $\Delta N = \Delta \sigma_E t b / 2$ $\Delta M_y = \Delta \sigma_E t b (z_E - (z_E - z_A) t / (3h)) / 2$ $\Delta M_z = -\Delta \sigma_E t b (y_E - (y_E - y_A) t / (3h)) / 2$ $\Delta M_\omega = \Delta \sigma_E t b (\omega_E - (\omega_E - \omega_A) t / (3h)) / 2$

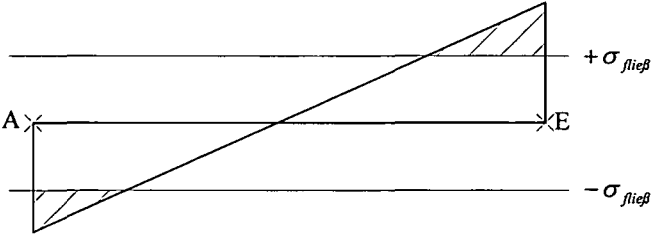
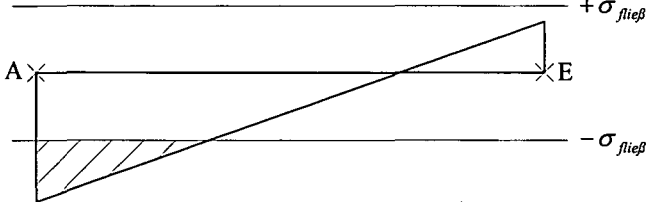
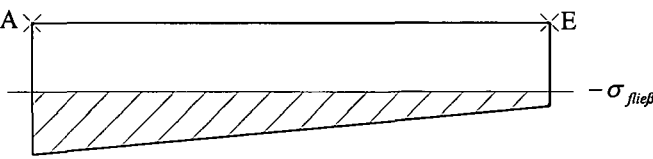
	$s = (\sigma_A - \sigma_{\text{fließ}}) \cdot h / (\sigma_A + \sigma_E)$ $t = (\sigma_E - \sigma_{\text{fließ}}) \cdot h / (\sigma_E + \sigma_A)$ $\Delta N = \Delta \sigma_A sb / 2 + \Delta \sigma_E tb / 2$ $\Delta M_y = \Delta \sigma_A sb (z_A - (z_A - z_E)s / (3h)) / 2 + \Delta \sigma_E tb (z_E - (z_E - z_A)t / (3h)) / 2$ $\Delta M_z = -\Delta \sigma_A sb (y_A - (y_A - y_E)s / (3h)) / 2 - \Delta \sigma_E tb (y_E - (y_E - y_A)t / (3h)) / 2$ $\Delta M_\omega = \Delta \sigma_A sb (\omega_A - (\omega_A - \omega_E)s / (3h)) / 2 + \Delta \sigma_E tb (\omega_E - (\omega_E - \omega_A)t / (3h)) / 2$
	$s = (\sigma_A - \sigma_{\text{fließ}}) \cdot h / (\sigma_A - \sigma_E)$ $\Delta N = \Delta \sigma_A sb / 2$ $\Delta M_y = \Delta \sigma_A sb (z_A - (z_A - z_E)s / (3h)) / 2$ $\Delta M_z = -\Delta \sigma_A sb (y_A - (y_A - y_E)s / (3h)) / 2$ $\Delta M_\omega = \Delta \sigma_A sb (\omega_A - (\omega_A - \omega_E)s / (3h)) / 2$
	$\Delta N = (\Delta \sigma_A + \Delta \sigma_E) \cdot h \cdot b / 2$ $\Delta M_y = [\Delta \sigma_E z_m + (\Delta \sigma_A - \Delta \sigma_E) / 2 \cdot (z_E + (z_A - z_E)2/3)] hb$ $\Delta M_z = -[\Delta \sigma_E y_m + (\Delta \sigma_A - \Delta \sigma_E) / 2 \cdot (y_E + (y_A - y_E)2/3)] hb$ $\Delta M_\omega = [\Delta \sigma_E \omega_m + (\Delta \sigma_A - \Delta \sigma_E) / 2 \cdot (\omega_E + (\omega_A - \omega_E)2/3)] hb$

Tabelle 1: Berechnung der Δ -Schnittgrößen eines Blechs

3.4 Zusammenfassung

In Kapitel 3 wird die Theorie I. Ordnung beschrieben, wonach Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System zu formulieren sind. Da die Fließzonentheorie eine Erweiterung der Elastizitätstheorie ist, wird zunächst auf letztere eingegangen und diese anschließend um die das bi-lineare Materialverhalten beschreibenden Terme ergänzt.

Als Elastizitätstheorie, der das Hooke'sche Gesetz zugrunde liegt, bezeichnet man die Theorie zur Ermittlung von Zustandsgrößen, die elastisches, also lineares Materialverhalten voraussetzt. Die Fließzonentheorie findet Beachtung, wenn Konstruktionen derart belastet werden, daß die auftretenden Spannungen ihren elastischen Grenzwert, die Fließgrenze, erreichen und ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen nicht mehr unmittelbar anzugeben ist.

Bei Betrachtung von gemischter Torsion (Wölbkrafttorsion) umfasst das im Zuge der Berechnungen zu lösende Gleichungssystem 14 unbekannte Zustandsgrößen, zu deren Bestimmung ebenso viele Differentialgleichungen erster Ordnung vorhanden sind. Die Erweiterung der Elastizitätstheorie zur Fließzonentheorie liegt darin, zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens anstelle des linearen Stoffgesetzes ein bi-lineares zu verwenden, um plastische Effekte bei der Berechnung zu berücksichtigen. Umgesetzt wird dies durch die Überlegung, von einer in den konstitutiven Beziehungen elastisch berechneten Schnittgröße einen aufgrund plastischen Verhaltens nicht existierenden Anteil zu subtrahieren, um die real aufgenommene Schnittgröße zu ermitteln. Dieser plastische Anteil, der aus allen (elastisch berechneten) Spannungen oberhalb der Fließspannung resultiert, wird mit einem Δ versehen; die aus ihm berechnete Schnittgröße heißt Δ -Schnittgröße. Es gilt

$$SG_{\text{tatsächlich wirkend}} = SG_{\text{elastisch berechnet}} - \Delta SG \quad (3-59)$$

Die Δ -Schnittgröße des Querschnitts setzt sich aus der Summe derer der Einzelbleche zusammen.

Im folgenden sind für gemischte Torsion die 14 Differentialbeziehungen, welche die Zustandsgrößen beschreiben, zusammengefasst, wobei die Erweiterungen der Elastizitätstheorie zur Fließzonentheorie auf der rechten Seite der jeweiligen Gleichung zu finden sind.

$$v' - \varphi_z = 0 \quad (3-60)$$

$$w' + \varphi_y = 0 \quad (3-61)$$

$$\varphi'_x + \Gamma_x = 0 \quad (3-62)$$

$$EAu' - N = \Delta N \quad (3-63)$$

$$EA_{zz}(\varphi'_y + y_M \Gamma'_x) - M_y = \Delta M_y \quad (3-64)$$

$$EA_{yy}(\varphi'_z + z_M \Gamma'_x) - M_z = \Delta M_z \quad (3-65)$$

$$EA_{\omega\omega} \Gamma'_x - M_\omega = \Delta M_\omega \quad (3-66)$$

$$S'_x + q_x = 0 \quad (3-67)$$

$$R'_y + q_y = 0 \quad (3-68)$$

$$R'_z + q_z = 0 \quad (3-69)$$

$$M'_x + m_x = 0 \quad (3-70)$$

$$-R_z + M'_y + m_y = 0 \quad (3-71)$$

$$R_y + M'_z + m_z = 0 \quad (3-72)$$

$$GI_T \varphi'_x - z_M Q_y + y_M Q_z - M_x + M'_\omega + m_\omega = 0 \quad (3-73)$$

Gleichung (3-73) ergibt sich dabei aus

$$M_{x,M} = M_x^P + M_x^S \quad \rightarrow \quad M_x^P - M_{x,M} + M_x^S = 0$$

wobei die folgenden Gleichungen eingesetzt werden

$$M_x^P = -GI_T \Gamma_x \quad \text{mit} \quad \varphi'_x = -\Gamma_x$$

$$M_{x,M} = M_x + z_M \cdot Q_y - y_M \cdot Q_z \quad \text{aus} \quad M_x = M_{x,M} - z_M \cdot R_y + y_M \cdot R_z$$

$$M_x^S = M'_\omega + m_\omega \quad \text{aus} \quad M'_\omega - M_x^S + m_\omega = 0$$

Auf die Lösung der 14 Differentialgleichungen wird in Kapitel 6 eingegangen, der Einfluß von Schubspannungen ist in Kapitel 5 beschrieben.

4 Herleitung der Fließzonentheorie II. Ordnung

4.1 Allgemeines

Dieses Kapitel behandelt die Theorie II. Ordnung, nach der im Gegensatz zur Berechnung nach Theorie I. Ordnung (Kapitel 3) die Gleichgewichtsbedingungen am verformten System unter Einbeziehung von Vorverformungen formuliert werden. Mit diesem statischen Modell wird die Wirklichkeit genauer beschrieben bzw. abgebildet. Die Notwendigkeit, Stabilitätsnachweise zu führen, ist in [5, Teil 2] beschrieben; Stabilitätsnachweise sind gemäß Elastizitätstheorie erforderlich, wenn die maßgebenden Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung größer sind als die 1,1fachen maßgebenden Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung (sh. beispielsweise [36, Kapitel 8]). Wie Theorie I. Ordnung basiert auch Theorie II. Ordnung auf der Annahme kleiner Verformungen.

Die Theorie zur Berechnung eines elastischen Stabes am verformten System bildet die Grundlage der Herleitung einer Theorie zur Berechnung von plastizierten Zonen. Aus diesem Grund wird zunächst in Kapitel 4.2 die Elastizitätstheorie beschrieben und anschließend in Kapitel 4.3 zur Fließzonentheorie nach II. Ordnung erweitert.

4.2 Beschreibung der Elastizitätstheorie für Biegetorsion

4.2.1 Allgemeines

Alle Gleichungen dieses Kapitels basieren auf der in Kapitel 3 angeführten Definition des elastischen Körpers, die dort getroffenen Annahmen gelten auch hier.

Das zugrunde liegende Hooke'sche Gesetz ist linear; wird Gleichgewicht am verformten System – also gemäß der Theorie II. Ordnung – aufgestellt, verläuft die Last-Verformungskurve des Stabes hingegen im allgemeinen nicht linear.

Von den 14 Differentialgleichungen zur Bestimmung der 14 unbekanntenen Zustandsgrößen werden zur Berücksichtigung der Theorie II. Ordnung allein die Momentengleichgewichtsbedingungen neu aufgestellt. Der Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen bezogen auf die Achsen in verformter Lage (ξ , η , ζ) und den Schnittgrößen bezogen auf die Achsen in unverformter Lage (x , y , z) wird mit Hilfe der Umrechnungsbeziehungen aufgezeigt. Während die kinematischen Beziehungen unverändert bleiben, sind bei den konstitutiven Beziehungen die Indizes x , y und z der Schnittgrößen nun durch ξ , η und ζ zu ersetzen.

4.2.2 Koordinatensysteme

Zur Herleitung und Beschreibung der Theorie II. Ordnung ist neben dem in Kapitel 3.2.2 genannten (lokalen) Koordinatensystem ein weiteres, „mitbewegtes“ Koordinatensystem erforderlich, welches sich auf die Achsen in verformter Lage bezieht.

Dieses Koordinatensystem hat – wie auch das auf die Achsen in unverformter Lage bezogene Koordinatensystem – seinen Ursprung im Schwerpunkt S des Querschnitts. Die Achsen ξ , η und ζ bilden ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Dabei weist die ξ -Achse in Richtung der verformten Stabachse und beschreibt somit eine Tangente an die Biegelinie. Die η - und ζ -Achsen zeigen in Richtung der Trägheitshauptachsen und liegen in der verformten Querschnittsebene.

Den Zusammenhang zwischen den einzelnen Koordinatensystemen bilden Umrechnungs- und Transformationsbeziehungen. Während sich Verschiebungsgrößen stets auf die Achsen in unverformter Lage beziehen, ist dies bei Schnittgrößen nicht der Fall.

4.2.3 Gleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsbedingungen stellen die Kopplung zwischen den inneren und äußeren Kraftgrößen dar (sh. Kapitel 3.2.4). Es herrscht Gleichgewicht, wenn die Summe aller Kräfte und die Summe aller Momente verschwinden.

Im Gegensatz zur Theorie I. Ordnung wird nach Theorie II. Ordnung das Gleichgewicht am gesamtverformten Tragsystem formuliert, wobei sich die Gesamtverformungen (mit einem Querstrich versehen) aus Lastverformungen, die über die konstitutiven Beziehungen (Kapitel 3.2.5) mit den Schnittgrößen verbunden sind, und den am unbelasteten spannungslosen System vorhandenen Vorverformungen (Index ν) zusammensetzen. Die Vorverformungen werden als Vorverschiebungen in y- und z-Richtung (ν^y, ν^z) sowie als Vorverdrehung um die x-Achse (φ_x^ν) berücksichtigt; ihre Ableitungen führen zu $\varphi_y^\nu, \varphi_z^\nu, \Gamma_x^\nu$.

$$\begin{aligned} \bar{v} &= v + \nu^y, \quad \bar{w} = w + \nu^z, \quad \bar{\varphi}_x = \varphi_x + \varphi_x^\nu \quad \text{und} \\ \bar{\varphi}_y &= \varphi_y + \varphi_y^\nu, \quad \bar{\varphi}_z = \varphi_z + \varphi_z^\nu, \quad \bar{\Gamma}_x = \Gamma_x + \Gamma_x^\nu \end{aligned} \quad (4-1)$$

Die Referenzachse für Gleichgewichtsbeziehungen und die Bezugsachsen für Momente sowie die Wirkungslinien für Kräfte gelten weiterhin gemäß Abbildung 8 (Kapitel 3.2.4), wobei die Umrechnung zwischen den Torsionsmomenten am gesamtverformten System nun

$$M_x = M_{x,M} - (z_M + y_M \cdot \bar{\varphi}_x) R_y + (y_M - z_M \cdot \bar{\varphi}_x) R_z \quad (4-2)$$

lautet. Diese Umrechnung wird durch Abbildung 18 beispielhaft an einem Drei-Blech-Querschnitt verdeutlicht, wobei dort vereinfachend nur R_z wirkt.

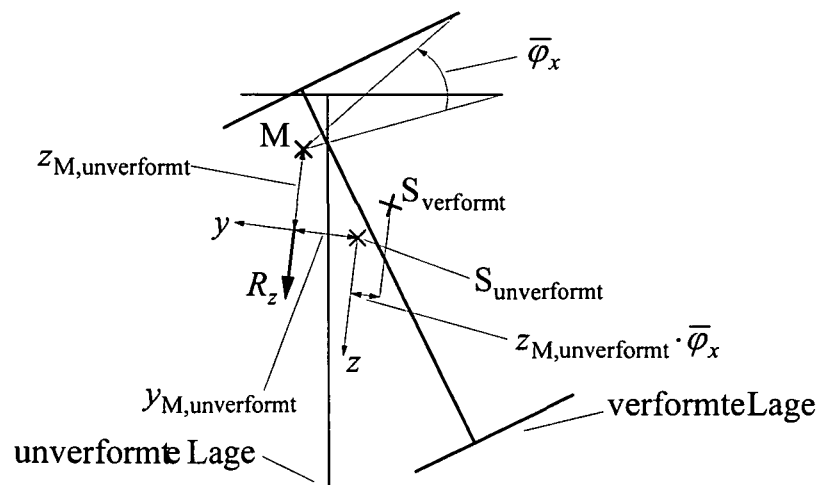
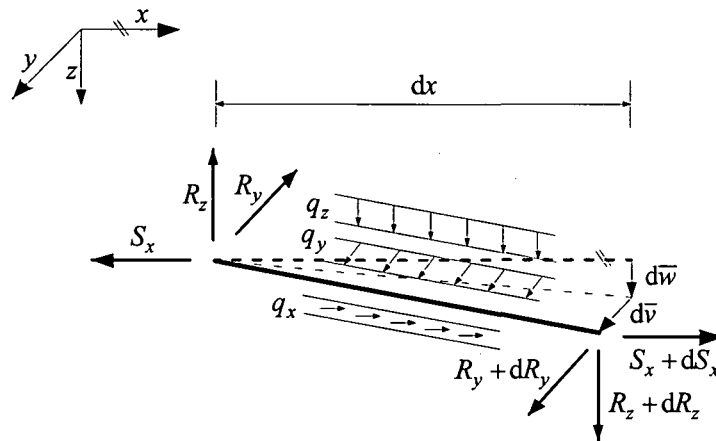


Abbildung 18: Umrechnungshilfe zwischen Torsionsmomenten

Die Einfluß der Theorie II. Ordnung zeigt sich beim Aufstellen der Momentengleichgewichtsbedingungen. Das Kräftegleichgewicht (sh. Abbildung 19) und analog das Gleichgewicht bezüglich Wölbkrafttorsion ist von den Verformungsgrößen ($d\bar{w}$ und $d\bar{v}$) des Stabelements unabhängig.



Quelle: nach [23]

Abbildung 19: Kräftegleichgewicht in Achsen der unverformten Lage

Abbildung 20 zeigt das Momentengleichgewicht am verformten System. Aus der Gleichgewichtsbedingung $\sum M_{x,y,z} = 0$ folgt

um die x - Achse:

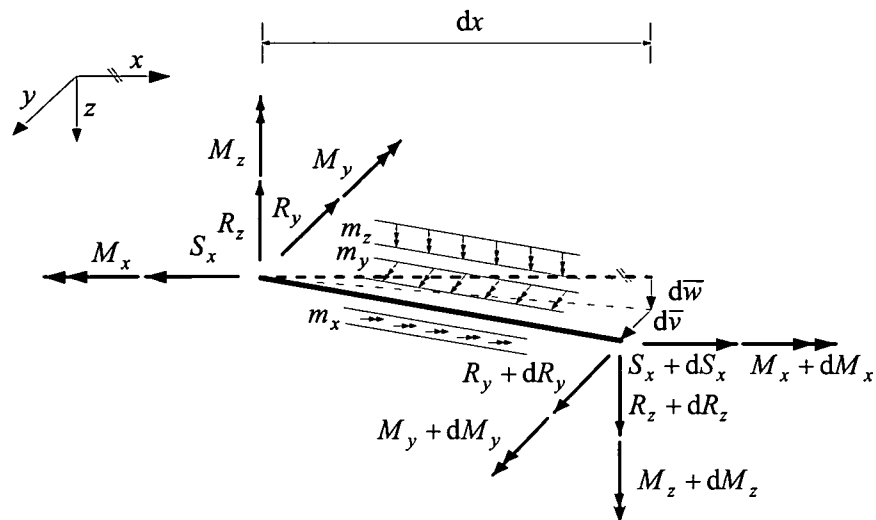
$$M'_x + R_z \bar{v}' - R_y \bar{w}' + m_x = 0 \quad (4-3)$$

um die y - Achse:

$$M'_y - R_z + S_x \bar{w}' + m_y = 0 \quad (4-4)$$

um die z - Achse:

$$M'_z + R_y - S_x \bar{v}' + m_z = 0 \quad (4-5)$$



Quelle: nach [23]

Abbildung 20: Momentengleichgewicht in Achsen der unverformten Lage

4.2.4 Umrechnungsbeziehungen

Mit Hilfe der Umrechnungsbeziehungen, zu deren näherer Erläuterung auf [25] und [23] verwiesen sei, wird der Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen bezogen auf die Achsen in verformter Lage und den Schnittgrößen bezogen auf die Achsen in unverformter Lage beschrieben. Für erstere zeigt Abbildung 21 beispielhaft die Bezugsachsen der Momente sowie die Wirkungslinien der Kräfte. Im Falle einer Querschnittsverdrillung ist dabei zu beachten, daß die Verschiebungsrichtungen von Schwer- und Schubmittelpunkt verschieden sein können. Normalkraft und Biegemomente sind mit den Verschiebungsgrößen des Schwerpunkts, Querkräfte und Torsionsmoment mit denen des Schubmittelpunkts verbunden.

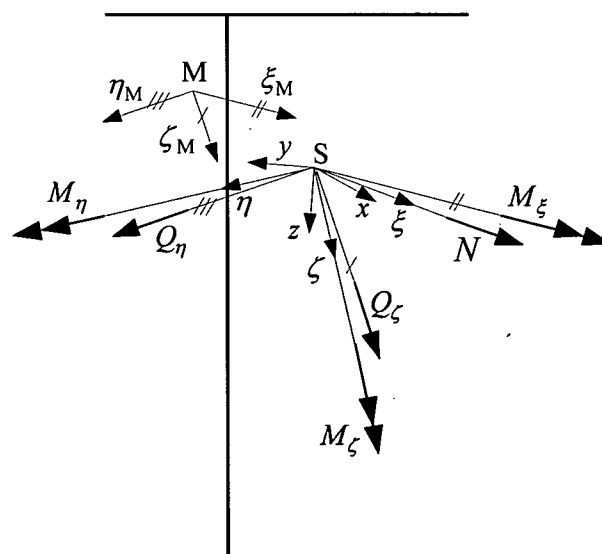


Abbildung 21: Verformte Bezugsachsen und Wirkungslinien

Da die in Abbildung 21 dargestellten Schnittgrößen und die resultierenden Schnittgrößen bezogen auf die Achsen in verformter Lage dieselbe Wirkungsrichtung haben, ergibt sich zur Umrechnung dieser resultierenden Schnittgrößen in die Schnittgrößen bezogen auf die Achsen in unverformter Lage Beziehung (4-6). Für das Wölbmoment M_ω existiert keine Umrechnungsbeziehung, da es nicht als Vektor darstellbar ist.

$$\begin{bmatrix} S_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\bar{\varphi}_{z,M} & \bar{\varphi}_{y,M} \\ \bar{v}' & 1 & -\bar{\varphi}_x \\ \bar{w}' & \bar{\varphi}_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_{\text{Res}} \\ Q_{\eta,\text{Res}} \\ Q_{\zeta,\text{Res}} \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\bar{v}' & -\bar{w}' \\ \bar{\varphi}_{z,M} & 1 & -\bar{\varphi}_x \\ -\bar{\varphi}_{y,M} & \bar{\varphi}_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{\xi,\text{Res}} \\ M_{\eta,\text{Res}} \\ M_{\zeta,\text{Res}} \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

Unter den darin enthaltenen resultierenden Kräften N_{Res} , $Q_{\eta,\text{Res}}$, $Q_{\zeta,\text{Res}}$ versteht man Kräfte in Richtung der jeweiligen Achsen in verformter Lage, die den Schnittkräften S_x , R_y , R_z am unverformten System statisch gleichwertig sind. Entsprechend sind die resultierenden Momente $M_{\xi,\text{Res}}$, $M_{\eta,\text{Res}}$, $M_{\zeta,\text{Res}}$ um Achsen in verformter Lage den Schnittmomenten M_x , M_y , M_z statisch gleichwertig.

Die resultierenden Schnittgrößen ergeben sich aus Integration der Spannungen über die Querschnittsfläche. Im Gegensatz zur Theorie I. Ordnung ist bei Theorie II. Ordnung am verformten System zu berücksichtigen, daß die Querschnittsfasern und folglich auch die Spannungen aufgrund von Verdrillung unterschiedliche Richtungen aufweisen können. Die zur Erfassung dieser Richtungsabweichungen erforderlichen Zusatzterme, die verdrillungsabhängig aus einer Querschnittsbetrachtung entstehen, sind unter anderem in [25, S.44-45], [24, S.171-172] und [23, S.54] hergeleitet.

$$N_{\text{Res}} = N + \bar{\Gamma}_x \int_A ((y - y_M) \tau_{\zeta\xi} - (z - z_M) \tau_{\eta\xi}) dA = N + \bar{\Gamma}_x M_{\xi,M} \quad (4-8)$$

$$Q_{\eta,\text{Res}} = Q_\eta - \bar{\varphi}'_x \int_A z \sigma_\xi dA = Q_\eta - \bar{\varphi}'_x M_\eta \quad (4-9)$$

$$Q_{\zeta,\text{Res}} = Q_\zeta + \bar{\varphi}'_x \int_A y \sigma_\xi dA = Q_\zeta - \bar{\varphi}'_x M_\zeta \quad (4-10)$$

$$M_{\eta,\text{Res}} = M_\eta + \bar{\Gamma}_x \int_A ((y - y_M) \tau_{\zeta\xi} - (z - z_M) \tau_{\eta\xi}) z dA \quad \text{Zusatzanteil vernachlässigbar} \quad (4-11)$$

$$M_{\zeta, \text{Res}} = M_{\zeta} + \bar{\Gamma}_x \int_A \left((y - y_M) r_{\zeta\xi} - (z - z_M) r_{\eta\xi} \right) y dA \quad \text{Zusatzanteil vernachlässigbar} \quad (4-12)$$

$$M_{\xi, \text{Res}} = M_{\xi} + \bar{\varphi}'_x \int_A (y^2 + z^2) \sigma_{\xi} dA = M_{\xi} + \bar{\varphi}'_x K \quad (4-13)$$

In Gleichung (4-13) ist K der auf den Schwerpunkt bezogene Wagner-Koeffizient (sh. [24]). Er setzt sich unter Verwendung der Spannungsformel

$$\sigma_{\xi} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\eta}}{A_{zz}} z - \frac{M_{\zeta}}{A_{yy}} y + \frac{M_{\omega}}{A_{\omega\omega}} \omega \quad (4-14)$$

und mit Hilfe der Querschnittswerte i_p , r_y , r_z und r_{ω} folgendermaßen zusammen

$$K = \int_A (y^2 + z^2) \sigma_{\xi} dA = N i_p^2 - M_{\zeta} r_y + M_{\eta} r_z + M_{\omega} r_{\omega} \quad (4-15)$$

Dabei sind y , z , dA sowie alle Querschnittswerte und Querschnittsstrecken in unverformten Koordinaten beschrieben. Die Verwendung von Querschnittsabmessungen des unverformten Zustands begründet sich in der Annahme der Formtreue, derzufolge sie sich im verformten Zustand nicht ändern.

Abschließend werden die ausformulierten Umrechnungsbeziehungen zusammengefasst, wobei die unterstrichenen Anteile üblicherweise zu vernachlässigen sind.

$$S_x = N - \underline{\bar{\varphi}_z Q_{\eta}} + \bar{\varphi}_y Q_{\zeta} + \bar{\Gamma}_x M_{\xi} \quad (4-16)$$

$$R_y = \bar{v}' N + Q_{\eta} - \bar{\varphi}_x Q_{\zeta} - \underline{\bar{\varphi}'_x M_{\eta}} \quad (4-17)$$

$$R_z = \bar{w}' N + \bar{\varphi}_x Q_{\eta} + Q_{\zeta} - \underline{\bar{\varphi}'_x M_{\zeta}} \quad (4-18)$$

$$M_x = M_{\xi} - \bar{v}' M_{\eta} - \bar{w}' M_{\zeta} + \bar{\varphi}'_x K \quad (4-19)$$

$$M_y = \underline{(\bar{\varphi}_z + z_M \bar{\Gamma}_x) M_{\xi}} + M_{\eta} - \bar{\varphi}_x M_{\zeta} \quad (4-20)$$

$$M_z = \underline{-(\bar{\varphi}_y + y_M \bar{\Gamma}_x) M_{\xi}} + \bar{\varphi}_x M_{\eta} + M_{\zeta} \quad (4-21)$$

4.3 Erweiterung der Elastizitätstheorie zur Fließzonentheorie

4.3.1 Erweiterung der Differentialgleichungen und Umrechnungsbeziehungen

Zur Herleitung der erforderlichen Erweiterung bzw. Veränderung der Differentialgleichungen und der Umrechnungsbeziehungen werden zunächst die Ziele von Fließzonentheorie und Theorie II. Ordnung beschrieben.

Die Fließzonentheorie verfolgt den Grundgedanken, der statischen Berechnung ein bi-lineares Materialverhalten zugrunde zu legen. Dies unterscheidet sie von der Elastizitätstheorie, deren konstitutive Beziehungen infolgedessen mit Zusatztermen erweitert werden. Die Theorie II. Ordnung beinhaltet eine Gleichgewichtsfindung am verformten System, zu deren Erreichen die Gleichgewichtsbedingungen auf bestimmte Weise zu formulieren sind.

Da die Fließzonentheorie und die Theorie II. Ordnung an verschiedenen Gleichungen (konstitutive Beziehungen und Gleichgewichtsbedingungen) ansetzen, ist ersichtlich, für eine Fließzonenberechnung nach Theorie II. Ordnung die Differentialgleichungen allein in bereits bekannter Art und Weise verändern zu müssen. Bi-lineares Materialverhalten wird gemäß Kapitel 3.3.3 (Erweiterung der konstitutiven Beziehungen) und die Theorie II. Ordnung gemäß Kapitel 4.2.3 (Gleichgewicht am verformten System) berücksichtigt. Desweiteren ist eine Erweiterung der Gleichung (4-13)

$$M_{\xi, \text{Res}} = M_{\xi} + \bar{\varphi}'_x \int_A (y^2 + z^2) \sigma_{\xi} dA = M_{\xi} + \bar{\varphi}'_x K$$

erforderlich, da sich bei der resultierenden Schnittgröße der Wagner-Koeffizient

$$K = \int_A (y^2 + z^2) \sigma_{\xi} dA$$

aus Integration der Normalspannung σ_{ξ} über die Querschnittsfläche ergibt, σ_{ξ} in Fließzonen wegen Zugrundelegung eines bi-linearen σ - ε -Diagramms jedoch nicht mehr kontinuierlich linear, sondern bi-linear verläuft. Der Wagner-Koeffizient K wird deswegen gemäß Vorgangsweise aus Kapitel 3.3.3 ermittelt, indem von der elastisch berechneten Größe ein (nicht existierender) Anteil subtrahiert wird, der – wie bereits bekannt – mit einem Δ versehen wird. Es gilt

$$K = K_{el} - \Delta K \tag{4-22}$$

und infolgedessen gilt für (4-13) nun

$$M_{\xi, \text{Res}} = M_{\xi} + \bar{\varphi}'_x (K_{el} - \Delta K) \quad (4-23)$$

und für (4-19)

$$M_x = M_{\xi} - \bar{v}' M_{\eta} - \bar{w}' M_{\zeta} + \bar{\varphi}'_x (K_{el} - \Delta K) \quad (4-24)$$

4.3.2 Berechnung von ΔK

Gemäß Elastizitätstheorie wird der Wagner-Koeffizient K nach (4-15) berechnet. Es gilt

$$\sigma_{\xi} = E\varepsilon \quad (4-25)$$

Da in einer plastizierten Faser (bei $\varepsilon > \varepsilon_{\text{fließ}}$)

$$\sigma_{\xi} < E\varepsilon \quad (4-26)$$

(nämlich $\sigma_{\xi} = \sigma_{\text{fließ}}$) ergibt der gemäß (4-27) oder (4-28) elastisch berechnete Wagner-Koeffizient K_{el} nun einen zu großen Wert.

$$K_{el} = \int_A (y^2 + z^2) E \varepsilon dA \quad (4-27)$$

$$K_{el} = N_{el} i_p^2 - M_{\zeta, el} r_y + M_{\eta, el} r_z + M_{\omega, el} r_{\omega} \quad (4-28)$$

Zur rechnerischen Berücksichtigung von Plastizierungen wird deswegen im Bereich mit $\varepsilon > \varepsilon_{\text{fließ}}$ von dem elastisch berechneten Wagner-Koeffizienten K_{el} ein sogenannter ΔK -Wert subtrahiert. ΔK ist der Anteil, der aus allen (elastisch ermittelten) Spannungen oberhalb der Fließspannung resultiert.

Wie in Anhang B anhand eines Beispiels gezeigt wird, ist es in Fließzonen nicht möglich, $K (= K_{el} - \Delta K)$ direkt aus den Schnittgrößen $N (= N_{el} - \Delta N)$, $M_{\eta} (= M_{\eta, el} - \Delta M_{\eta})$, $M_{\zeta} (= M_{\zeta, el} - \Delta M_{\zeta})$, $M_{\omega} (= M_{\omega, el} - \Delta M_{\omega})$ zu berechnen, da zwar einerseits (4-28) gilt, andererseits aber

$$\Delta K \neq \Delta N i_p^2 - \Delta M_{\zeta} r_y + \Delta M_{\eta} r_z + \Delta M_{\omega} r_{\omega} \quad (4-29)$$

In Analogie zum elastischen K_{el} bezieht sich auch ΔK auf den Gesamtquerschnitt sowie das zugrundeliegende Koordinatensystem und setzt sich – als deren Summe – aus den ΔK_{Blech} der einzelnen Bleche zusammen. Es gilt:

$$\Delta K = \sum \Delta K_{Blech} \quad (4-30)$$

Die Berechnung von ΔK_{Blech} kann sowohl ohne als auch mit Unterteilung des Blechs erfolgen. Erstere Variante erfordert zur Berücksichtigung der möglichen Dehnungsverläufe eine Fallunterscheidung. Tabelle 2 zeigt das zu untersuchende Blech, die gemäß Hooke'schem Gesetz aus den Dehnungen berechneten Blechrandspannungen σ_A und σ_E sowie die zur Berechnung von ΔK_{Blech} benötigten Formeln. Im Falle von $\sigma_A > \sigma_E$ gelten die Formeln analog; hinsichtlich der Fallunterscheidung ist dann darauf zu achten, an welchem Randpunkt der größere Spannungsbetrag auftritt. Die Spannungen verlaufen stets linear.

Als alternative Berechnung wird das Blech in beliebig viele Abschnitte unterteilt, die jeweilige Abschnittsfläche $A_{Abschnitt}$ ermittelt und für den Mittelpunkt jedes Abschnitts die Koordinaten $y_{Abschnitt}$ und $z_{Abschnitt}$ sowie der $\Delta\sigma_{Abschnitt}$ -Wert (falls vorhanden) als Differenz zwischen elastisch berechneter Normalspannung $\sigma_{\xi,el}$ und $\sigma_{fließ}$ bestimmt. ΔK_{Blech} ergibt sich gemäß

$$\Delta K_{Blech} = \sum_{Abschnitte} \Delta\sigma_{Abschnitt} \cdot (y_{Abschnitt}^2 + z_{Abschnitt}^2) \cdot A_{Abschnitt} \quad (4-31)$$

Bei genügend großer Anzahl an Unterteilungen bzw. Abschnitten führen Berechnungen mit und ohne Blechunterteilung zu dem gleichen Ergebnis.

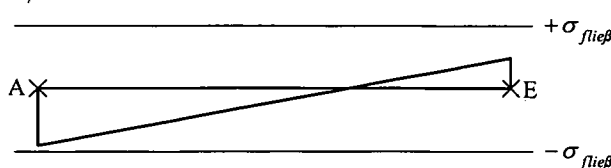
Gegeben ist ein Blech mit den Randpunkten A und E, die durch die Koordinaten y_A, z_A, y_E, z_E , gekennzeichnet sind, der Höhe h , der Dicke b und den Randspannungen σ_A, σ_E

für $-\sigma_{fließ} \leq \sigma \leq \sigma_{fließ}$ gilt $\Delta\sigma = 0$

für $\sigma > \sigma_{fließ}$ gilt $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_{fließ}$; für $\sigma < -\sigma_{fließ}$ gilt $\Delta\sigma = \sigma + \sigma_{fließ}$

$$y_1 = y_E + t(y_A - y_E)/h, \quad y_2 = y_A + s(y_E - y_A)/h$$

$$z_1 = z_E + t(z_A - z_E)/h, \quad z_2 = z_A + s(z_E - z_A)/h$$



$$\Delta K_{Blech} = 0$$

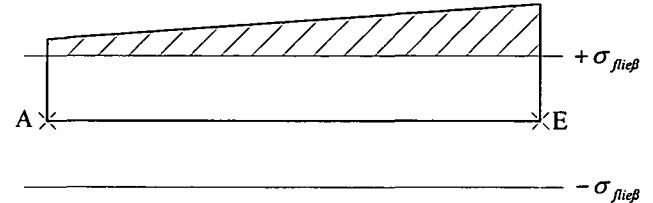
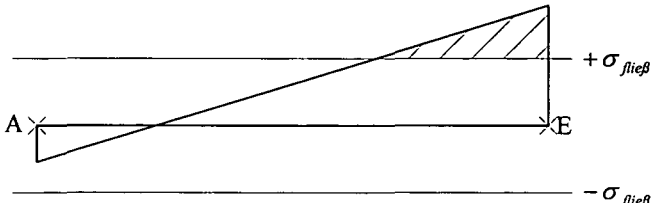
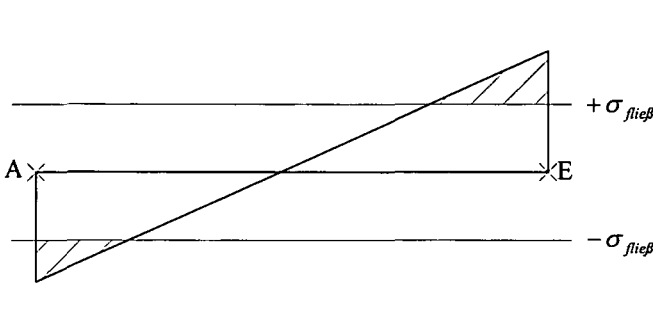
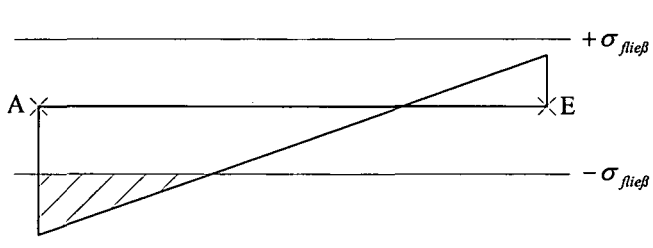
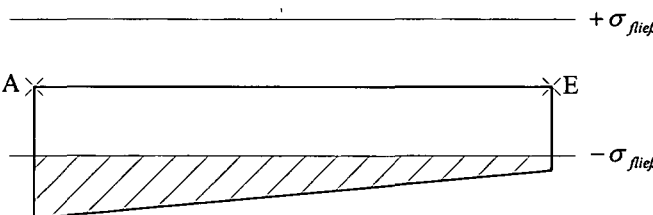
	$\Delta K_{Blech} = hb[\Delta\sigma_A(3y_A^2 + 2y_A y_E + y_E^2 + 3z_A^2 + 2z_A z_E + z_E^2) + \Delta\sigma_E(y_A^2 + 2y_A y_E + 3y_E^2 + z_A^2 + 2z_A z_E + 3z_E^2)]/12$
	$t = (\sigma_E - \sigma_{fließ}) \cdot h / \sigma_E - \sigma_A $ $\Delta K_{Blech} = tb[\Delta\sigma_E(y_A^2 + 2y_A y_E + 3y_E^2 + z_A^2 + 2z_A z_E + 3z_E^2)]/12$
	$s = (\sigma_A - \sigma_{fließ}) \cdot h / (\sigma_A + \sigma_E)$ $t = (\sigma_E - \sigma_{fließ}) \cdot h / (\sigma_A + \sigma_E)$ $\Delta K_{Blech} = sb\Delta\sigma_A(3y_A^2 + 2y_A y_2 + y_2^2 + 3z_A^2 + 2z_A z_2 + z_2^2)/12 + tb\Delta\sigma_E(y_1^2 + 2y_1 y_E + 3y_E^2 + z_1^2 + 2z_1 z_E + 3z_E^2)/12$
	$s = (\sigma_A - \sigma_{fließ}) \cdot h / \sigma_A - \sigma_E $ $\Delta K_{Blech} = sb[\Delta\sigma_A(3y_A^2 + 2y_A y_2 + y_2^2 + 3z_A^2 + 2z_A z_2 + z_2^2)]/12$
	$\Delta K_{Blech} = hb[\Delta\sigma_A(3y_A^2 + 2y_A y_E + y_E^2 + 3z_A^2 + 2z_A z_E + z_E^2) + \Delta\sigma_E(y_A^2 + 2y_A y_E + 3y_E^2 + z_A^2 + 2z_A z_E + 3z_E^2)]/12$

Tabelle 2: Berechnung von ΔK_{Blech}

4.4 Zusammenfassung

In Kapitel 4 wird die Theorie II. Ordnung behandelt, nach der im Gegensatz zur Berechnung nach Theorie I. Ordnung (Kapitel 3) die Gleichgewichtsbedingungen am verformten System zu formulieren sind. Es wird zunächst auf die Elastizitätstheorie eingegangen und diese anschließend zur Fließzonentheorie erweitert (sh. Kapitel 4.2 und 4.3).

Zur Herleitung und Beschreibung der Theorie II. Ordnung ist neben dem in Kapitel 3.2.2 genannten lokalen Koordinatensystem ein weiteres lokales Koordinatensystem erforderlich, welches sich auf die (Stab-)Achsen in verformter Lage bezieht. Den Zusammenhang zwischen den einzelnen Koordinatensystemen bilden Transformationsbeziehungen.

Von den 14 Differentialgleichungen zur Bestimmung der 14 unbekannte Zustandsgrößen werden zur Berücksichtigung der Theorie II. Ordnung lediglich die Momentengleichgewichtsbedingungen neu aufgestellt. Diese werden am gesamtverformten Tragsystem formuliert, wobei sich die Gesamtverformungen aus Lastverformungen und Vorverformungen zusammensetzen.

Bei einer Fließzonenberechnung nach Theorie II. Ordnung wird das bi-lineare Materialverhalten gemäß Kapitel 3.3.3 (Erweiterung der konstitutiven Beziehungen) und die Theorie II. Ordnung gemäß Kapitel 4.2.3 (Gleichgewicht am verformten System) berücksichtigt. Auch die oben erwähnten Umrechnungsbeziehungen sind zu erweitern. Der in ihnen enthaltene Wagner-Koeffizient K wird in Analogie zu den Schnittgrößen dadurch berechnet, daß von dem elastisch berechneten Wagner-Koeffizienten K_{el} derjenige Anteil subtrahiert wird, der aus allen Spannungen oberhalb der Fließspannung resultiert. Dieser Anteil ist mit einem Δ versehen. Der ΔK -Wert des Querschnitts setzt sich aus der Summe aller ΔK der Einzelbleche zusammen.

Im folgenden sind für gemischte Torsion die 14 Differentialbeziehungen, welche die Zustandsgrößen beschreiben, sowie die Umrechnungsbeziehungen gemäß Theorie II. Ordnung zusammengefasst, wobei die Erweiterungen der Elastizitätstheorie zur Fließzonentheorie auf der rechten Seite der jeweiligen Gleichung zu finden sind.;

Um alternativ zu einem Iterationsverfahren eine einfache Berechnung des nichtlinearen Problems (es treten Produkte von unbekanntem Verschiebungsgrößen mit unbekanntem Schnittgrößen auf) zu ermöglichen, werden die Differentialbeziehungen dahingehend linearisiert, daß unbekanntem Schnittgrößen vorab durch Abschätzung oder durch eine Berechnung nach Theorie I. Ordnung bestimmt werden und dann in die Berechnung nach Theorie II. Ordnung als

bekannte Größen eingehen. Für diese „eingepprägten“ Schnittgrößen S wird die Bezeichnung S'' verwendet. Infolgedessen sind alle eingepprägten Zustandsgrößen und Einwirkungen nach Theorie II. Ordnung mit dem oberen Index II versehen.

$$v' - \varphi_z = 0 \quad (4-32)$$

$$w' + \varphi_y = 0 \quad (4-33)$$

$$\varphi'_x + \Gamma_x = 0 \quad (4-34)$$

$$EAu' - N = \Delta N \quad (4-35)$$

$$EA_{zz}(\varphi'_y + y_M \Gamma'_x) - M_\eta = \Delta M_\eta \quad (4-36)$$

$$EA_{yy}(\varphi'_z + z_M \Gamma'_x) - M_\zeta = \Delta M_\zeta \quad (4-37)$$

$$EA_{\omega\omega} \Gamma'_x - M_\omega = \Delta M_\omega \quad (4-38)$$

$$S'_x + q_x = 0 \quad (4-39)$$

$$R'_y + q_y = 0 \quad (4-40)$$

$$R'_z + q_z = 0 \quad (4-41)$$

$$R''_z \bar{v}' - R''_y \bar{w}' + M'_x + m_x = 0 \quad (4-42)$$

$$S''_x \bar{w}' - R_z + M'_y + m_y = 0 \quad (4-43)$$

$$-S''_x \bar{v}' + R_y + M'_z + m_z = 0 \quad (4-44)$$

$$GI_T \varphi'_x - z_M Q_\eta + y_M Q_\zeta - M'_\xi + M'_\omega + m_\omega = 0 \quad (4-45)$$

$$N = S_x + \bar{\varphi}_z Q''_\eta - \bar{\varphi}_y Q''_\zeta - \bar{\Gamma}_x M''_\xi \quad (4-46)$$

$$Q_\eta = -\bar{v}' N'' + R_y + \bar{\varphi}_x Q''_\zeta + \bar{\varphi}'_x M''_\eta \quad (4-47)$$

$$Q_\zeta = -\bar{w}' N'' - \bar{\varphi}_x Q''_\eta + R_z + \bar{\varphi}'_x M''_\zeta \quad (4-48)$$

$$M'_\xi = M_x + \bar{v}' M''_\eta + \bar{w}' M''_\zeta - \bar{\varphi}'_x (K''_{el} - \Delta K) \quad (4-49)$$

$$M_\eta = -(\bar{\varphi}_z + z_M \bar{\Gamma}_x) M''_\xi + M_y + \bar{\varphi}_x M''_\zeta \quad (4-50)$$

$$M_\zeta = (\bar{\varphi}_y + y_M \bar{\Gamma}_x) M''_\xi - \bar{\varphi}_x M''_\eta + M_z \quad (4-51)$$

5 Berücksichtigung von Schubspannungen

5.1 Allgemeines

Ziel dieses Kapitels ist es, mit Hilfe einfacher Formeln die Größe auftretender Schubspannungen abschätzen zu können und ihren Einfluß auf das Tragverhalten vornehmlich biegebeanspruchter Stäbe berücksichtigen zu können. Aufgrund der Annahmen, daß Fließen nur in Richtung der Normalspannung σ_ξ auftritt und GI_T auch in Fließzonen konstant bleibt, ist keine exakte Untersuchung des Schubspannungsverlaufs notwendig. Ebenso ist keine Berechnung einer Querschnittstragfähigkeit, die allein aus Schubspannungen erreicht wird, erforderlich. Untersuchungen hierzu sind unter anderem in [1] und [39] zu finden.

Unter Berücksichtigung der Aufteilung des Torsionsmoments M_ξ in ein primäres Torsionsmoment M_ξ^P und ein sekundäres Torsionsmoment M_ξ^S können im allgemeinen Fall acht Größen einen Querschnitt beanspruchen und Spannungen erzeugen. Diese Größen sind in zwei Kategorien einzuteilen; die der ersten Kategorie erzeugen Normalspannungen (N , M_η , M_ζ , M_ω), die der zweiten erzeugen Schubspannungen (Q_η , Q_ζ , M_ξ^P , M_ξ^S). Mit letzterer Kategorie befasst sich dieses Kapitel. Grundlagen nach Elastizitätstheorie (sh. auch [13], [18] und [37]) werden angeführt und der Einfluß auf die Fließzonentheorie beschrieben.

Die in einem Querschnitt wirkenden Schubspannungen setzen sich aus den sie erzeugenden Größen durch Superposition zusammen. Ihre Anteile können unterschiedlich groß und über den Querschnitt unterschiedlich verteilt sein und in verschiedene Richtungen wirken (sh. Abbildung 22). Im folgenden wird deswegen getrennt auf sie eingegangen.

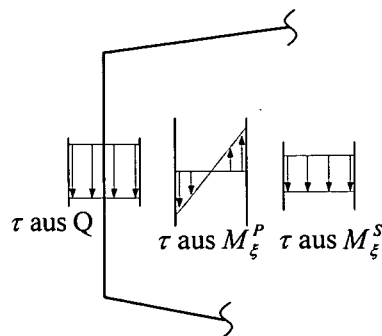


Abbildung 22: Beispielhafter Verlauf der Schubspannungsanteile

5.2 Schubspannungen nach Elastizitätstheorie

5.2.1 Schub infolge Querkraft

Wie in [19] beschrieben, verursachen Querkräfte Schubverzerrungen (auch Gleitungen genannt), was bedeutet, daß sich zwei benachbarte Querschnitte gegeneinander verschieben. Solche Schubverformungen finden im Rahmen dieser Arbeit keine weitere Beachtung.

Schubspannungen treten stets paarweise als Quer- und Längsschubspannungen auf; sie wirken gleichzeitig im Querschnitt und in der dazu senkrecht stehenden Ebene des Längsschnittes (sh. Abbildung 23). Quer- und Längsschubspannungen sind aus Gleichgewichtsgründen gleich groß. Es wird angenommen, daß die Schubspannungen τ gleichmäßig über die Blechdicke b verteilt sind. Auf die im Rahmen dieser Arbeit vereinfachte Bestimmung der Schubspannungen aus Querkraft wird in Kapitel 5.4 für bestimmte Querschnitte eingegangen.

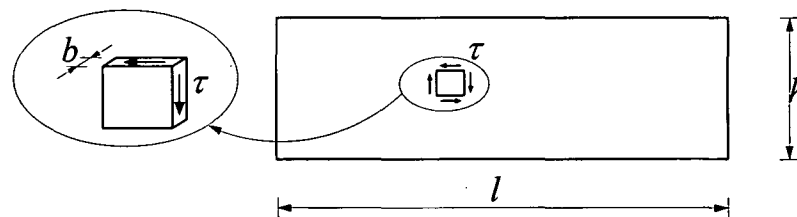


Abbildung 23: Schubspannungen an einem Blech

5.2.2 Schub infolge primärem Torsionsmoment

Die Berechnung von Schubspannungen aus primärem Torsionsmoment M_{ξ}^P wird für offene Querschnitte (für weitere Querschnitte sei auf [37] verwiesen) angegeben und ergibt sich zu

$$\tau = M_{\xi}^P \cdot b / I_T \quad (5-1)$$

(vgl. [17]). Folglich entstehen an den Stellen mit größter Blechdicke b maximale Schubspannungen. Es handelt sich hierbei allein um Tangentialspannungen, die in der Querschnittsfläche wirken. Größe und Richtung der Schubspannungen werden bei einfach berandeten Querschnitten anschaulich durch den in [2] und [40] geschilderten „Seifenhautügel“ geliefert.

Bei Profilen mit offenen dünnwandigen Querschnitten kann das Torsionsträgheitsmoment I_T durch Addition von Torsionsträgheitsmomenten der Teilquerschnitte bzw. Bleche berechnet werden. Es gilt

$$I_T = \sum I_{T, \text{Blech}} \quad (5-2)$$

wobei

$$I_{T,Blech} = h_{Blech} \cdot b^3 / 3 \quad (5-3)$$

Aus der Annahme, daß zur Erhaltung der Querschnittsform die Verdrillung Γ_x jedes Teilquerschnitts gleich der Verdrillung des Gesamtquerschnitts sein muß, folgt wegen

$$M_{\xi,Blech}^P = -GI_{T,Blech} \Gamma_x \quad (5-4)$$

eine Verteilung des primären Torsionsmomentes M_{ξ}^P auf die Bleche in Abhängigkeit ihrer Torsionsträgheitsmomente

$$M_{\xi,Blech}^P = M_{\xi}^P \cdot I_{T,Blech} / I_T \quad (5-5)$$

5.2.3 Schub infolge sekundärem Torsionsmoment

Die Bestimmung der Schubspannungen aus sekundärem Torsionsmoment wird im Rahmen dieser Arbeit dahingehend vereinfacht, daß die Schubspannungen über die Blechfläche (Höhe·Breite) als konstant angenommen werden und für die hier betrachteten Querschnitte gemäß der in Kapitel 5.4 gegebenen Formel zu ermitteln sind. Für eine genaue Bestimmung der Schubspannungen sei auf [13, S.62-63] (hier wird die Schubspannung rückwärts, also sekundär aus der Normalspannung hergeleitet) und auf [37, S.265] verwiesen.

Betrachtet man – wie es in den Untersuchungen des Kapitels 7 geschieht – dünnwandige Querschnitte, die sich aus zwei horizontalen Blechen (Flanschen) und einem vertikalen Blech (Steg) zusammensetzen (sh. Abbildung 24), so erzeugt ein sekundäres Torsionsmoment Schubspannungen, die über die einzelnen Blechflächen integriert in den Flanschen entgegengesetzt wirkende Querkräfte ergeben und im Steg eine Resultierende vom Wert null bilden.



Abbildung 24: Drei-Blech-Querschnitte

Bezeichnet man die Abstände der Gurte zum Schubmittelpunkt M mit z^* , gilt für Drei-Blech-Querschnitte

$$M_{\xi}^S = Q_{Obergurt}^S \cdot z_{Obergurt}^* + Q_{Untergurt}^S \cdot z_{Untergurt}^* \quad (5-6)$$

5.3 Vergleichsspannung

Treten wie im einachsigen Zugversuch ausschließlich Normalspannungen auf, gilt die Bedingung (vgl. Kapitel 3.3.1.1)

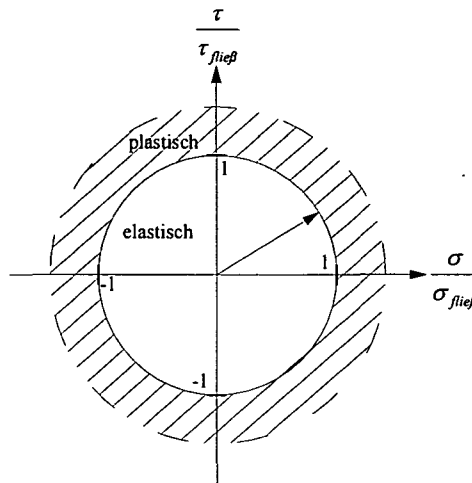
$$\sigma_{\xi} \leq \sigma_{\text{fließ}} \quad (5-7)$$

Bei Festigkeitsnachweisen sind in der Regel weitere Spannungskomponenten, also kombinierte bzw. mehrachsige Spannungszustände zu berücksichtigen. Ziel ist es, zweiachsige (ebene) und dreiachsige (räumliche) Spannungszustände auf den aus Experimenten bekannten, einachsigen Spannungszustand zurückzuführen. Dies gelingt mit Hilfe einer Vergleichsspannung, mittels der der allgemeine Spannungszustand mit dem einachsigen „verglichen“ wird. Aus der im einachsigen Zug-Druck-Versuch bestimmten Fließgrenze kann somit ein Kriterium für Fließen bei allgemeinem Spannungszustand erstellt werden. [22]

Legt man den Vergleichsspannungen verschiedene Festigkeitshypothesen oder auch Anstrengungskriterien zugrunde, ergeben sich zu ihrer Berechnung verschiedene Definitionen. Genannt seien hier die

- Normalspannungshypothese, die auf Lamé (1831) und Rankine (1888) zurückgeht
- Hauptdehnungshypothese, die auf Navier (1826), St.Venant (1864) und Bach (1908) zurückgeht
- Schubspannungshypothese nach Tresca (1864 nach [22] oder 1868 nach [18])
- Gestaltänderungsenergiehypothese nach von Mises (1913), aber auch nach Huber (1904) und Hencky (1923)

Die Gestaltänderungsenergiehypothese nach von Mises ist den vorgestellten vorzuziehen, da sie sich allgemein auf die Formänderungsarbeit im Grenzzustand bezieht und sich nicht – wie die anderen drei – an einem einzigen Kriterium orientiert. Sie erfasst das reale Werkstoffverhalten von isotropen Materialien wie Baustahl am besten; für Beton, Stein, Erde etc. gelten hingegen andere Stofftheorien und andere Festigkeitshypothesen. Im folgenden soll auf die Fließhypothese nach von Mises eingegangen und diese mit Hilfe von Abbildung 25 veranschaulicht werden.



Quelle: [22, S.226]

Abbildung 25: Interaktionskreis elastisch und plastisch

Es ist ersichtlich, daß unter alleiniger Einwirkung von τ bei Erreichen der Schubfließgrenze Fließen eintritt und somit gilt

$$\tau \leq \tau_{\text{fließ}} \quad (5-8)$$

Da Metallkristalle einer scheren Beanspruchung einen geringeren Widerstand als einer Normalbeanspruchung entgegensetzen, ist die Schubfließgrenze von kleinerer Größe als die Zugfließgrenze. Die Schubfließgrenze wird festgesetzt mit

$$\tau_{\text{fließ}} = \sigma_{\text{fließ}} / \sqrt{3} \quad (5-9)$$

Aus einer angenommenen Kreislinie für die Interaktion bei kombiniertem $\tau - \sigma_{\xi}$ -Zustand folgt

$$\left(\frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_{\text{fließ}}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{\text{fließ}}} \right)^2 = 1 \quad (5-10)$$

und daraus

$$\sqrt{\sigma_{\xi}^2 + 3\tau^2} = \sigma_{\text{Vergl}} \leq \sigma_{\text{fließ}} \quad (5-11)$$

Der Wurzelausdruck bezeichnet nun die Vergleichsspannung. Erreicht diese die Fließgrenze, wird der elastische Bereich verlassen.

5.4 Berücksichtigung von Schubspannungen nach Fließzonentheorie

Kapitel 5.3 beschreibt mit Gleichung (5-11) die Berechnung einer Vergleichsspannung. Erreicht diese Vergleichsspannung bei Belastungssteigerung in eine Querschnittsfaser die Fließgrenze, wird der elastische Bereich verlassen und es kommt zu Spannungsumlagerungen im Querschnitt. Für jede Querschnittsfaser gilt

$$\sigma_{Vergl} \leq \sigma_{fließ} \quad (5-12)$$

Da in dieser Arbeit nur Fließdehnungen in Stablängsrichtung betrachtet werden, wird (5-11) umgeformt zu

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{\sigma_{Vergl}^2 - 3\tau^2} \quad (5-13)$$

Mit (5-12) gilt als Fließkriterium im folgenden stets

$$\sigma_{\xi} \leq \sqrt{\sigma_{fließ}^2 - 3\tau^2} \quad (5-14)$$

Da die so berechnete Normalspannung σ_{ξ} gegenüber $\sigma_{fließ}$ um einen bestimmten Anteil verringert ist, heißt sie σ_{red} .

Die Vorgehensweise bei der Berücksichtigung von Schubspannungen ist folgende: Die sich aus Querkraft- und Torsionsbelastung ergebenden Schubspannungen werden für jedes Blech berechnet. Die Schubspannungen werden näherungsweise als konstant über die Blechfläche (über die Dicke b und die Höhe h) angenommen. Unter Anwendung von (5-14) vermindert sich die maximal aufnehmbare Normalspannung σ_{ξ} wiederum konstant über die Blechfläche zu σ_{red} . Der Querschnitt setzt sich somit aus Blechen mit unterschiedlicher maximaler Normalspannung zusammen. Dies findet seine Beachtung in der blechweisen Bestimmung der Δ -Werte.

Wie in Kapitel 5.1 beschrieben, können sich Schubspannungen an einem Blech aus drei Anteilen zusammensetzen, die im folgenden mit einem Index versehen werden:

- Schubspannungen aus primärem Torsionsmoment $\tau_{M_{\xi}^p}$
- Schubspannungen aus sekundärem Torsionsmoment $\tau_{M_{\xi}^s}$
- Schubspannungen aus Querkraft τ_Q

Das primäre Torsionsmoment wird den Blechen gemäß (5-5) zugeordnet. Es wird angenommen, daß sich $\tau_{M_\xi^P}$ über ein Blech nach dem Hohlkastenmodell konstant verteilt (Abbildung 26). Mit Hilfe der Bredtschen Formel kann $\tau_{M_\xi^P}$ bestimmt werden gemäß

$$\tau_{M_\xi^P} = \frac{M_{\xi, \text{Blech}}^P}{2 \cdot (b/2)^2 \cdot (h-b/2)} = \frac{4 \cdot M_{\xi, \text{Blech}}^P}{b^2 \cdot (2h-b)} \quad (5-15)$$

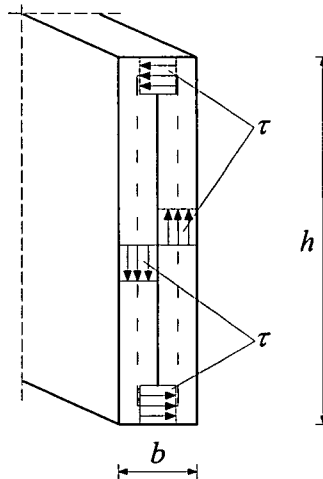


Abbildung 26: Hohlkastenmodell für τ aus M_ξ^P

Die Grenzschnittgröße wird berechnet mit

$$M_{\xi, \text{Blech}, pl}^P = \tau_{fließ} \cdot b^2 \cdot (2h-b) / 4 \quad (5-16)$$

Dies stellt zwar nicht die theoretisch exakte Lösung dar, die man unter Zugrundelegung des Walmdachmodells erhält, ist aber für die Interaktion mit einer Querkraft von Vorteil. Das Hohlkastenmodell liegt bei der Bestimmung der Grenzschnittgröße auf der sicheren Seite und weicht bei großen h/b -Verhältnissen nur wenige Prozent von der exakten Lösung ab (vgl. auch [13]).

Schubspannungen, die aus sekundärem Torsionsmoment hervorgerufen werden, können über die Blechfläche zu einer resultierenden Querkraft Q_{Blech}^S aufintegriert werden. Bei Betrachtung eines Drei-Blech-Querschnitts (sh. Abbildung 24), worauf sich im Rahmen dieser Arbeit beschränkt wird, kann man Q_{Blech}^S auch gemäß

$$Q_{\text{Obergurt}}^S = Q_{\text{Untergurt}}^S = M_\xi^S / h \quad (5-17)$$

bestimmen.

Es wird vereinfachend angenommen, daß Q_{Blech}^S eine über das Blech konstante Schubspannung $\tau_{M_\xi^S}$ erzeugt (Abbildung 27). Es gilt

$$\tau_{M_\xi^S} = \frac{Q_{Blech}^S}{h \cdot b} \quad (5-18)$$

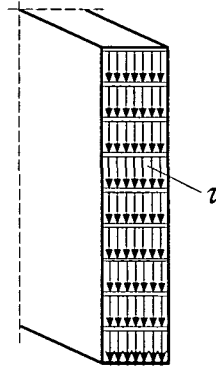


Abbildung 27: Schubverlauf infolge M_ξ^S

Die Grenzschnittgröße berechnet sich nach

$$Q_{Blech,pl}^S = \tau_{fließ} \cdot h \cdot b \quad (5-19)$$

Die in einem Querschnitt wirkende Querkraft wird im Rahmen dieser Arbeit den einzelnen Blechen zu vorab bestimmten Teilen zugewiesen. Es wird vereinfachend angenommen, daß diese Blech-Querkräfte Q_{Blech}^Q eine über das Blech konstante Schubspannung τ_Q erzeugen. Es gilt

$$\tau_Q = \frac{Q_{Blech}^Q}{h \cdot b} \quad (5-20)$$

Die Grenzschnittgröße berechnet sich nach

$$Q_{Blech,pl}^Q = \tau_{fließ} \cdot h \cdot b \quad (5-21)$$

Da unter den getroffenen Annahmen Q_{Blech}^S und Q_{Blech}^Q Schubspannungen gleicher Wirkungsart erzeugen, kann man die beiden Schnittgrößen zu einer resultierenden Querkraft Q_{Blech} überlagern

$$Q_{Blech} = Q_{Blech}^S + Q_{Blech}^Q \quad (5-22)$$

Die gemeinsame Wirkung von Torsionsmomenten und Querkraft wird durch ein Hohlkastenmodell beschrieben (sh. Abbildung 28). Der Rechteckquerschnitt teilt sich in einen äußeren Hohlkasten, der $M_{\xi, Blech}^P$ aufnimmt, und in ein inneres Rechteck, das zur Aufnahme von Q_{Blech} dient. Als Bedingung für diese Modellierung gilt

$$|\tau| = |\tau_{M_{\xi}^P}| = |\tau_{Q, M_{\xi}^S}| = \text{konst} \quad (5-23)$$

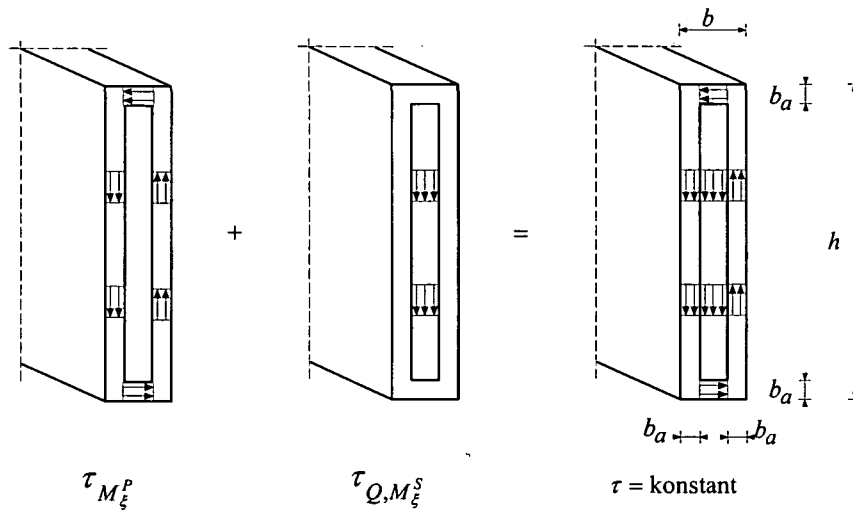


Abbildung 28: Hohlkastenmodell

Unter Zugrundelegung dieses Hohlkastenmodells ergibt sich nach Ersetzen des Terms $(h - b_a)$ durch $(h - b)$, was bei den betrachteten h/b -Verhältnissen gerechtfertigt ist, $\tau_{M_{\xi}^P}$ zu

$$\tau_{M_{\xi}^P} = \frac{M_{\xi, Blech}^P}{b_a \cdot (b - b_a) \cdot (2h - b)} \quad (5-24)$$

τ_{Q, M_{ξ}^S} erhält man aus

$$\tau_{Q, M_{\xi}^S} = \frac{Q_{Blech}}{(b - 2b_a) \cdot (h - 2b_a)} \quad (5-25)$$

Durch Umformen der Gleichung (5-25) und Überschätzung der Rechteckfläche durch Ersetzen des Terms $(h - 2b_a)$ durch h läßt sich die Wandstärke des Hohlkastens bestimmen

$$b_a = b/2 - \frac{Q_{Blech}}{2h \cdot \tau_{Q, M_{\xi}^S}} \quad (5-26)$$

Nach Einsetzen der Gleichung (5-26) in (5-24) und Berücksichtigung der Gleichung (5-23) ergibt sich eine quadratische Gleichung für τ , deren Lösung zu der gesuchten, über den Blechquerschnitt konstanten Schubspannung führt:

$$\tau = \frac{2|M_{\xi, \text{Blech}}^P|}{b^2(2h-b)} + \sqrt{\left(\frac{2M_{\xi, \text{Blech}}^P}{b^2(2h-b)}\right)^2 + \left(\frac{Q_{\text{Blech}}}{hb}\right)^2} \quad (5-27)$$

Die Grenztragfähigkeit des Blechs ist erreicht, wenn $\tau = \tau_{\text{fließ}}$ erfüllt ist.

Die von einem Blech maximal aufnehmbare Normalspannung reduziert sich konstant über die Blechfläche nach Gleichung (5-14) zu σ_{red} . Die Annahme, den Hohlkasten über die gesamte Blechhöhe zu modellieren, begründet sich in der Betrachtung einer Interaktion von Biegemoment M und Querkraft Q , die ebenso das Zusammenwirken von Normal- und Schubspannungen untersucht. In [13] sind verschiedene Lösungen für die M - Q -Interaktion aufgeführt. Da die mit der Annahme einer über die gesamte Blechfläche konstanten Schubspannungsverteilung berechneten Tragfähigkeiten in Versuchsergebnissen hinreichende Bestätigung fanden, liegt diese Annahme bei der Ermittlung der Querschnittstragfähigkeit auch verschiedenen Normen, wie z.B. [5], zugrunde und wird für diese Arbeit gewählt.

5.5 Zusammenfassung

Ziel von Kapitel 5 ist es, die Größe auftretender Schubspannungen abschätzen und ihren Einfluß auf das Tragverhalten vornehmlich biegebeanspruchter Stäbe berücksichtigen zu können.

Querkräfte und Torsionsmomente (sowohl primäre als auch sekundäre) erzeugen Schubspannungen, deren Verteilung über die Blechfläche (über die Dicke b und die Höhe h) stets konstant angenommen wird. Dies hat den Vorteil, das Zusammenwirken von Normal- und Schubspannungen leicht erfassen zu können. Für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten, offenen Querschnitte gilt, daß Schubspannungen parallel zu den Blechrändern verlaufen und senkrecht zu ihnen verschwinden.

Bei Festigkeitsnachweisen sind in der Regel kombinierte bzw. mehrachsige Spannungszustände zu berücksichtigen. Dies gelingt mit Hilfe einer Vergleichsspannung, mittels der der allgemeine Spannungszustand mit dem einachsigen „verglichen“ wird. Da die Gestaltänderungsenergiehypothese nach von Mises das reale Werkstoffverhalten von isotropen Materialien wie Baustahl am besten widerspiegelt, legt man sie der Herleitung einer Vergleichsspannung zugrunde. Unter der Voraussetzung, daß die vorliegende Arbeit nur Fließdehnungen in Stablängsrichtung betrachtet, ergibt sich das Fließkriterium zu $\sigma_{\xi} \leq \sqrt{\sigma_{\text{fließ}}^2 - 3\tau^2}$.

Die Vorgehensweise bei der Berücksichtigung von Schubspannungen in Fließzonen ist folgende: Die sich aus Querkraft- und Torsionsbelastung ergebenden Schubspannungen werden für jedes Blech berechnet. Die gemeinsame Wirkung von M_{ξ}^P , M_{ξ}^S und Q wird durch ein Hohlkastenmodell beschrieben (sh. Abbildung 28). Der Rechteckquerschnitt teilt sich dabei in einen äußeren Hohlkasten, der das primäre Torsionsmoment aufnimmt, und in ein inneres Rechteck, das zur Aufnahme von sekundärem Torsionsmoment und Querkraft dient. Gemäß dem Fließkriterium vermindert sich die maximal aufnehmbare Normalspannung σ_{ξ} wiederum konstant über die Blechfläche zu σ_{red} . Der Querschnitt setzt sich somit aus Blechen mit unterschiedlicher maximaler Normalspannung zusammen. Dies findet seine Beachtung in der blechweisen Bestimmung der Δ -Werte.

6 Computergestützte Lösung der Differentialgleichungen und Systemberechnung

6.1 Übertragungsbeziehung als Lösung der Differentialgleichungen

In den Kapiteln 3 und 4 werden 14 Differentialgleichungen hergeleitet, die sich aus kinematischen und konstitutiven Beziehungen sowie aus Gleichgewichtsbedingungen zusammensetzen. Diese gekoppelten Differentialgleichungen, die ein lineares Differentialgleichungssystem bilden, werden nach dem in [23] vorgestellten Konzept gelöst, welches auf einem analytischen Reihenansatz beruht. Als Ansatz für die Lösungen des partikulären Integrals wird dabei eine unendliche Potenzreihe gewählt. Die Lösungsfunktionen des homogenen Differentialgleichungssystems werden dann aus den partikulären Lösungsfunktionen berechnet.

Die Lösung der Differentialgleichungen erfolgt simultan und ist nur möglich, wenn der Grad der maximalen Ableitungen einzelner Zustandsgrößen in den Gleichungen jeweils identisch ist. Da deren (höchste) Ableitung stets erster Ordnung ist, liegt ein solcher Fall vor. [23]

Das Lösungskonzept führt auf die Übertragungsbeziehung des Reduktions- oder Übertragungsmatrizenverfahrens (sh. [29, S.187ff]). Die Übertragungsbeziehung F_{ki} , die den Zustandsvektor Z_i eines Anfangspunktes i auf eine allgemeine Stelle k überträgt, beinhaltet eine vollständige Beschreibung sämtlicher Zustandsgrößen des Stabes und beschreibt dessen Tragverhalten auf einfachste Weise. Für den in Abbildung 29 links dargestellten Stab gilt

$$Z_k = F_{ki} \cdot Z_i \quad (6-1)$$



Abbildung 29: Zustandsvektoren an Stabpunkten

Der erforderliche Rechengang gliedert sich in zwei Schritte:

- Bestimmung der unbekanntenen Komponenten des Zustandsvektors Z_i
- Berechnung des Zustandsvektors am Stabendpunkt

Um die Genauigkeit einer Berechnung zu erhöhen, kann ein Stab in Längsrichtung in beliebig viele Felder unterteilt werden (sh. Abbildung 29 rechts), die wiederum durch eine Übertragungsmatrix beschrieben werden. Es gilt nun folgender Zusammenhang zwischen den Zustandsvektoren der Stabendpunkte

$$Z_m = F_{mi} \cdot Z_i = F_{ml} \cdot F_{lk} \cdot F_{ki} \cdot Z_i \quad (6-2)$$

Die Genauigkeit der Ergebnisse steigt mit der Anzahl der Felder, die beliebig über den Stab verteilt sein können. Dabei scheint es sinnvoll, diese in Bereichen höchster Querschnittsbeanspruchung, also vor allem in Fließzonen zu setzen. Anhang E zeigt dieses anhand eines Beispiels.

Das im folgenden vorgestellte Computerprogramm berechnet an jedem zu untersuchenden Stabpunkt die unbekannt Komponenten des Zustandsvektors. Zwischen diesen Punkten wird ihr Verlauf entweder mittels einer Spline-Funktion (sh. [3]), als Polynom x -ter Ordnung (abhängig von der Anzahl der Stützstellen) oder trapezförmig bzw. linear verlaufend angenommen.

6.2 Aufbau des Computerprogramms

6.2.1 Allgemeines

Die Anwendung der in den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen Theorie auf baupraktische Aufgaben erfolgt mit Hilfe eines Computerprogramms, das nach Eingabe eines Systems sowie dessen Belastung zur Ausführung folgender Schritte dient:

- Berechnung aller Querschnittswerte
- Aufstellen und Lösen der Differentialgleichungen
- Bestimmung der unbekanntenen Komponenten des Zustandsvektors am Stabanfangspunkt
- Berechnung der Zustandsvektors an den zu untersuchenden Stabpunkten
- Ausgabe aller gesuchten Zustandsgrößen

Wegen der großen Anzahl an durchzuführenden Rechenoperationen ist eine Lösung mittels Handrechnung im allgemeinen Fall nicht mehr möglich.

Die verwendete Programmiersprache ist C++. Das Programm besteht aus einem Hauptprogramm, welches das jeweils zu berechnende System und alle zu erfolgenden Berechnungsmodi definiert, sowie aus sogenannten Klassen, mittels derer einzelne Teilaufgaben gelöst bzw. Unterberechnungen durchgeführt werden. Eine Klasse ist eine „Struktur, in der nicht nur Daten abgelegt werden, sondern gleichzeitig auch die Funktionen, die auf diese Daten zugreifen“ [7, S.101]. Tabelle 3 zeigt eine Aufstellung der wichtigsten Klassen in alphabetischer Reihenfolge.

Auflager	Einzellast	Mathematik	Streckenmoment
Biegestab	Einzelmoment	Matrix	System
Blech	Ergebnis	Polynom	Vektor
Bogen	Funktion	Querschnitt	Verschiebung
Dehnstab	Geometrie	Randbedingung	Verzerrung
DGL System	Koordinatensystem	Spline	Vorverformung
Einwirkung	Lastfall	Streckenlast	ZG Stab

Tabelle 3: Klassen

Das verwendete Programm basiert auf dem von Pilgram [23] geschriebenen Programm über Elastizitätstheorie sowie dessen Lösung von Differentialgleichungen und wurde unter ande-

rem zur Berechnung von Fließzonen, zur Eingabe und Berechnung allgemeiner offener Querschnitte mit dünnwandigen Blechen sowie zur Berücksichtigung von Schubspannungen erweitert. Das Programm ermöglicht die Betrachtung von Einzelstäben.

Im folgenden wird auf den Programmaufbau, die Bedeutung einiger Klassen, auf die Möglichkeit verschiedener Ein- und Ausgaben sowie auf einige Berechnungsalternativen (z.B. Berechnungen mit oder ohne Blechunterteilung) genauer eingegangen.

6.2.2 Systemeingabe und Berechnung der Querschnittswerte

Die Systemeingabe im Hauptprogramm beginnt mit der Eingabe der Systemlänge und der Festlegung der Randbedingungen des zu untersuchenden Stabes. An den Stabenden können Verschiebungen in der x -, y - und z -Achse, Verdrehungen um dieselben Achsen und Verwölbung als „frei“ oder „fest“ angenommen werden.

Nach der Bestimmung von Elastizitäts- und Schubmodul bestehen zwei Möglichkeiten, den Querschnitt zu definieren. Dabei teilt man dem Programm entweder direkt alle Querschnittswerte mit oder benennt beliebig viele dünnwandige Bleche, die zusammengesetzt ein offenes Profil ergeben und aus denen das Programm mit Hilfe der Klassen „Querschnitt“ und „Blech“ die Querschnittswerte berechnet. In der ersten Variante sind die Querschnittswerte im Hauptachsensystem anzugeben. Da man in plastizierten Zonen die Δ -Werte jedoch blechweise bestimmt, muß bei Berechnungen gemäß Fließzonentheorie nach zweiter Variante mit blechweiser Eingabe des Querschnitts vorgegangen werden. Für jedes Blech ist die Angabe der Anfangs- und Endkoordinaten (y_{GS} - und z_{GS} -Koordinate sowie Wölbordinate ω_{GS}) erforderlich, wobei sich diese auf ein beliebiges Koordinatensystem bzw. Grundsystem (GS) und einen beliebigen Wölb-Anfangspunkt beziehen dürfen. Desweiteren sind die Blechdicke b und gegebenenfalls die zu wählende Blechunterteilung anzugeben.

Die Tabellen 4 und 5 zeigen die Vorgehensweise zur Bestimmung der Querschnittswerte (vgl. [13]). Unterschieden wird dabei zwischen den Klassen „Querschnitt“ und „Blech“ sowie zwischen der Betrachtung eines Blechs mit und ohne Unterteilungen. Zur Veranschaulichung enthält Anhang A ein Beispiel.

Klasse: Querschnitt	Klasse: Blech
<p>Gegeben ist eine beliebige Anzahl an Blechen, die durch ihre Randkoordinaten $y_{A,GS}$, $z_{A,GS}$, $\omega_{A,GS}$, $y_{E,GS}$, $z_{E,GS}$, $\omega_{E,GS}$ im frei zu wählenden Grundsystem (GS) sowie die Blechdicke b gekennzeichnet sind; Blechhöhe h ergibt sich zu $h = \sqrt{(y_{E,GS} - y_{A,GS})^2 + (z_{E,GS} - z_{A,GS})^2}$</p> <p>Bestimmung der Querschnittswerte des GS:</p> <p>Querschnittswert = $\sum_{\text{Blech}} \text{Querschnittswert}_{\text{Blech}}$</p> <p>Bestimmung der Schwerpunktskoordinaten des GS: $y_{S,GS} = A_{y,GS} / A$, $z_{S,GS} = A_{z,GS} / A$, $\omega_{S,GS} = A_{\omega,GS} / A$</p> <p>Bestimmung der Querschnittswerte des Einheitssystems (ES):</p> <p>$A_{yy,ES} = A_{yy,GS} - y_{S,GS}^2 A$</p> <p>$A_{yz,ES} = A_{yz,GS} - y_{S,GS} z_{S,GS} A$</p> <p>$A_{y\omega,ES} = A_{y\omega,GS} - y_{S,GS} \omega_{S,GS} A$</p> <p>$A_{zz,ES} = A_{zz,GS} - z_{S,GS}^2 A$</p> <p>$A_{z\omega,ES} = A_{z\omega,GS} - z_{S,GS} \omega_{S,GS} A$</p> <p>$A_{\omega\omega,ES} = A_{\omega\omega,GS} - \omega_{S,GS}^2 A$</p> <p>Berechnung der Trägheitshauptachsen und der Schubmittelpunktskoordinaten im GS:</p> <p>$\beta = \arctan(2A_{yz,ES} / (A_{yy,ES} - A_{zz,ES})) / 2$</p> <p>$y_{M,GS} = \frac{A_{yy,ES} A_{z\omega,ES} - A_{yz,ES} A_{y\omega,ES}}{A_{yy,ES} A_{zz,ES} - A_{yz,ES} A_{yz,ES}}$</p> <p>$z_{M,GS} = \frac{-A_{zz,ES} A_{y\omega,ES} + A_{yz,ES} A_{z\omega,ES}}{A_{yy,ES} A_{zz,ES} - A_{yz,ES} A_{yz,ES}}$</p> <p>Berechnung der Querschnittswerte im Hauptsystem (HS):</p> <p>$A_{yy,HS} = A_{yy,ES} \cos^2 \beta + A_{yz,ES} \sin(2\beta) + A_{zz,ES} \sin^2 \beta$</p> <p>$A_{zz,HS} = A_{yy,ES} \sin^2 \beta - A_{yz,ES} \sin(2\beta) + A_{zz,ES} \cos^2 \beta$</p> <p>$A_{\omega\omega,HS} = A_{\omega\omega,ES} - A_{z\omega,ES} y_{M,GS} + A_{y\omega,ES} z_{M,GS}$</p>	<p>$A = hb$</p> <p>$A_{y,GS} = A \cdot (y_{A,GS} + y_{E,GS}) / 2$</p> <p>$A_{z,GS} = A \cdot (z_{A,GS} + z_{E,GS}) / 2$</p> <p>$A_{\omega,GS} = A \cdot (\omega_{A,GS} + \omega_{E,GS}) / 2$</p> <p>$A_{yy,GS} = A \cdot (y_{A,GS}^2 + y_{A,GS} y_{E,GS} + y_{E,GS}^2) / 3$</p> <p>$A_{yz,GS} = A \cdot (y_{A,GS} z_{A,GS} / 3 + y_{E,GS} z_{E,GS} / 3 + y_{A,GS} z_{E,GS} / 6 + y_{E,GS} z_{A,GS} / 6)$</p> <p>$A_{y\omega,GS} = A \cdot (y_{A,GS} \omega_{A,GS} / 3 + y_{E,GS} \omega_{E,GS} / 3 + y_{A,GS} \omega_{E,GS} / 6 + y_{E,GS} \omega_{A,GS} / 6)$</p> <p>$A_{zz,GS} = A \cdot (z_{A,GS}^2 + z_{A,GS} z_{E,GS} + z_{E,GS}^2) / 3$</p> <p>$A_{z\omega,GS} = A \cdot (z_{A,GS} \omega_{A,GS} / 3 + z_{E,GS} \omega_{E,GS} / 3 + z_{A,GS} \omega_{E,GS} / 6 + z_{E,GS} \omega_{A,GS} / 6)$</p> <p>$A_{\omega\omega,GS} = A \cdot (\omega_{A,GS}^2 + \omega_{A,GS} \omega_{E,GS} + \omega_{E,GS}^2) / 3$</p>

Tabelle 4: Berechnung der Querschnittswerte

<p>Gegeben ist eine beliebige Anzahl an Blechen, die durch ihre Randkoordinaten $y_{A,GS}$, $z_{A,GS}$, $\omega_{A,GS}$, $y_{E,GS}$, $z_{E,GS}$, $\omega_{E,GS}$ im frei zu wählenden Grundsystem (GS) sowie die Blechdicke b gekennzeichnet sind; Blechhöhe h ergibt sich zu $h = \sqrt{(y_{E,GS} - y_{A,GS})^2 + (z_{E,GS} - z_{A,GS})^2}$</p>	
<p>Klasse: Querschnitt</p>	<p>Klasse: Blech</p>
<p>Bestimmung der Querschnittswerte des GS: Querschnittswert = $\sum_{Blech} \text{Querschnittswert}_{Blech}$ Bestimmung der Schwerpunktskoordinaten des GS: $y_{S,GS} = A_{y,GS} / A$, $z_{S,GS} = A_{z,GS} / A$, $\omega_{S,GS} = A_{\omega,GS} / A$ Bestimmung der Querschnittswerte des Einheitssystems (ES): $A_{yy,ES} = A_{yy,GS} - y_{S,GS}^2 A$ $A_{yz,ES} = A_{yz,GS} - y_{S,GS} z_{S,GS} A$ $A_{y\omega,ES} = A_{y\omega,GS} - y_{S,GS} \omega_{S,GS} A$ $A_{zz,ES} = A_{zz,GS} - z_{S,GS}^2 A$ $A_{z\omega,ES} = A_{z\omega,GS} - z_{S,GS} \omega_{S,GS} A$ $A_{\omega\omega,ES} = A_{\omega\omega,GS} - \omega_{S,GS}^2 A$ Berechnung der Trägheitshauptachsen und der Schubmittelpunktskoordinaten im GS: $\beta = \arctan(2A_{yz,ES} / (A_{yy,ES} - A_{zz,ES})) / 2$ $y_{M,GS} = \frac{A_{yy,ES} A_{z\omega,ES} - A_{yz,ES} A_{y\omega,ES}}{A_{yy,ES} A_{zz,ES} - A_{yz,ES} A_{yz,ES}}$ $z_{M,GS} = \frac{-A_{zz,ES} A_{y\omega,ES} + A_{yz,ES} A_{z\omega,ES}}{A_{yy,ES} A_{zz,ES} - A_{yz,ES} A_{yz,ES}}$ Berechnung der Querschnittswerte im Hauptsystem (HS): $A_{yy,HS} = A_{yy,ES} \cos^2 \beta + A_{yz,ES} \sin(2\beta) + A_{zz,ES} \sin^2 \beta$ $A_{zz,HS} = A_{yy,ES} \sin^2 \beta - A_{yz,ES} \sin(2\beta) + A_{zz,ES} \cos^2 \beta$ $A_{\omega\omega,HS} = A_{\omega\omega,ES} - A_{z\omega,ES} y_{M,GS} + A_{y\omega,ES} z_{M,GS}$</p>	<p>Das Blech wird in beliebig viele Abschnitte unterteilt und die jeweilige Abschnittsfläche $A_{Abschnitt}$ gemäß $A_{Abschnitt} = h_{Abschnitt} b$ sowie für den Mittelpunkt jedes Abschnitts die Koordinaten $y_{Abschnitt,GS}$, $z_{Abschnitt,GS}$, $\omega_{Abschnitt,GS}$ ermittelt $A = \sum_{Abschnitte} A_{Abschnitt}$ $A_{y,GS} = \sum_{Abschnitte} A_{Abschnitt} y_{Abschnitt,GS}$ $A_{z,GS} = \sum_{Abschnitte} A_{Abschnitt} z_{Abschnitt,GS}$ $A_{\omega,GS} = \sum_{Abschnitte} A_{Abschnitt} \omega_{Abschnitt,GS}$ $A_{yy,GS} = \sum_{Abschnitte} A_{Abschnitt} y_{Abschnitt,GS}^2$ $A_{yz,GS} = \sum_{Abschnitte} A_{Abschnitt} y_{Abschnitt,GS} z_{Abschnitt,GS}$ $A_{y\omega,GS} = \sum_{Abschnitte} A_{Abschnitt} y_{Abschnitt,GS} \omega_{Abschnitt,GS}$ $A_{zz,GS} = \sum_{Abschnitte} A_{Abschnitt} z_{Abschnitt,GS}^2$ $A_{z\omega,GS} = \sum_{Abschnitte} A_{Abschnitt} z_{Abschnitt,GS} \omega_{Abschnitt,GS}$ $A_{\omega\omega,GS} = \sum_{Abschnitte} A_{Abschnitt} \omega_{Abschnitt,GS}^2$</p>

Tabelle 5: Berechnung der Querschnittswerte mit Unterteilung der Bleche

Nach Durchführung der in den vorstehenden Tabellen aufgeführten Berechnungen erhält man alle Querschnittswerte im Hauptachsensystem, welches den Differentialgleichungen zugrunde liegt.

Analog können die querschnittsabhängigen Querschnittsstrecken, die zur Berechnung nach Theorie II. Ordnung erforderlich sind, unter Betrachtung eines Blechs mit und ohne Unterteilungen bestimmt werden. Die Tabellen 6 und 7 zeigen die zu ihrer Ermittlung erforderlichen Gleichungen. Hierzu enthält Anhang B ein Beispiel.

<p>Gegeben ist eine beliebige Anzahl an Blechen, die durch ihre Randkoordinaten $y_A, z_A, \omega_A, y_E, z_E, \omega_E$ im Hauptsystem (HS) sowie die Blechdicke b gekennzeichnet sind; Blechhöhe h ergibt sich zu $h = \sqrt{(y_E - y_A)^2 + (z_E - z_A)^2}$</p>	
Klasse: Querschnitt	Klasse: Blech
<p>aus bereits geführten Berechnungen sind die Querschnittswerte $A, A_{yy,HS}, A_{zz,HS}, A_{\omega\omega,HS}$ bekannt Die Querschnittsstrecken ergeben sich zu:</p> $i_p = \sqrt{\left(\sum_{Blech} i_{p,Blech}\right) / A}$ $r_y = \left(\sum_{Blech} r_{y,Blech}\right) / A_{yy,HS}$ $r_z = \left(\sum_{Blech} r_{z,Blech}\right) / A_{zz,HS}$ $r_\omega = \left(\sum_{Blech} r_{\omega,Blech}\right) / A_{\omega\omega,HS}$	$A = hb$ $i_p = A \cdot (y_A^2 + y_A y_E + y_E^2 + z_A^2 + z_A z_E + z_E^2) / 3$ $r_y = A \cdot (3y_A^3 + 3y_A^2 y_E + y_A(3y_E^2 + 3z_A^2 + 2z_A z_E + z_E^2) + y_E(3y_E^2 + z_A^2 + 2z_A z_E + 3z_E^2)) / 12$ $r_z = A \cdot (3z_A^3 + 3z_A^2 z_E + z_A(3z_E^2 + 3y_A^2 + 2y_A y_E + y_E^2) + z_E(3z_E^2 + y_A^2 + 2y_A y_E + 3y_E^2)) / 12$ $r_\omega = A \cdot (\omega_A(3y_A^2 + 2y_A y_E + y_E^2 + 3z_A^2 + 2z_A z_E + z_E^2) + \omega_E(y_A^2 + 2y_A y_E + 3y_E^2 + z_A^2 + 2z_A z_E + 3z_E^2)) / 12$

Tabelle 6: Berechnung der Querschnittsstrecken

<p>Gegeben ist eine beliebige Anzahl an Blechen, die durch ihre Randkoordinaten $y_A, z_A, \omega_A, y_E, z_E, \omega_E$ im Hauptsystem (HS) sowie die Blechdicke b gekennzeichnet sind;</p> <p>Blechhöhe h ergibt sich zu $h = \sqrt{(y_E - y_A)^2 + (z_E - z_A)^2}$</p>	
<p>Klasse: Querschnitt</p> <p>aus bereits geführten Berechnungen sind die Querschnittswerte</p> $A, A_{yy,HS}, A_{zz,HS}, A_{\omega\omega,HS}$ <p>bekannt</p> <p>Die Querschnittsstrecken ergeben sich zu:</p> $i_p = \sqrt{\left(\sum_{Blech} i_{p,Blech}\right) / A}$ $r_y = \left(\sum_{Blech} r_{y,Blech}\right) / A_{yy,HS}$ $r_z = \left(\sum_{Blech} r_{z,Blech}\right) / A_{zz,HS}$ $r_\omega = \left(\sum_{Blech} r_{\omega,Blech}\right) / A_{\omega\omega,HS}$	<p>Klasse: Blech</p> <p>Das Blech wird in beliebig viele Abschnitte unterteilt und die jeweilige Abschnittsfläche $A_{Abschnitt}$ gemäß</p> $A_{Abschnitt} = h_{Abschnitt} b$ <p>sowie für den Mittelpunkt jedes Abschnitts die Koordinaten $y_{Abschnitt}, z_{Abschnitt}, \omega_{Abschnitt}$ ermittelt</p> $i_p = \sum_{Abschnitte} A_{Abschnitt} (y_{Abschnitt}^2 + z_{Abschnitt}^2)$ $r_y = \sum_{Abschnitte} A_{Abschnitt} y_{Abschnitt} (y_{Abschnitt}^2 + z_{Abschnitt}^2)$ $r_z = \sum_{Abschnitte} A_{Abschnitt} z_{Abschnitt} (y_{Abschnitt}^2 + z_{Abschnitt}^2)$ $r_\omega = \sum_{Abschnitte} A_{Abschnitt} \omega_{Abschnitt} (y_{Abschnitt}^2 + z_{Abschnitt}^2)$

Tabelle 7: Berechnung der Querschnittsstrecken mit Unterteilung der Bleche

6.2.3 Einwirkungen

Es besteht die Möglichkeit, den Stab auf unterschiedliche Weise zu belasten. Die verschiedenen Belastungen werden dabei einem oder mehreren zu superponierenden Lastfällen zugeteilt. Mittels eines allgemeinen Lastfaktors f kann die Belastung als ganzes erhöht oder vermindert werden. Der Stab kann durch folgende Belastungen beansprucht werden, die hier zur besseren Übersicht in Gruppen eingeteilt sind:

- Einzellasten in Richtung der x -, y - und z -Achse
- Streckenlasten in Richtung der x -, y - und z -Achse
- Einzelmomente um die x -, y - und z -Achse
- Streckenmomente um die x -, y - und z -Achse
- Vorverformungen

Mit Ausnahme von Vorverformungen können alle Belastungen der ersten vier Gruppen eine beliebige Ausmitte besitzen.

6.2.4 Alternativen der Berechnungsart

Vor dem Start einer Systemberechnung müssen Berechnungsmodi hinsichtlich der anzuwendenden Theorie und der Berechnungsverfahren sowie hinsichtlich der Berechnungsgenauigkeit angegeben werden. Dafür ist zunächst zu bestimmen, ob nach Theorie I. oder II. Ordnung gerechnet werden soll und ob der Berechnung Elastizitätstheorie oder Fließzonentheorie zugrunde liegen soll.

Die Berechnung der Δ -Werte erfolgt zunächst blechweise in der Klasse „Blech“ und dann für den Querschnitt durch Addition aller Bleche in der Klasse „Querschnitt“. Die zur Bestimmung der Δ -Werte erforderlichen Gleichungen sind in Kapitel 3.3.3 angegeben, eine Berechnung mit oder ohne Unterteilung der Bleche ist zu wählen. Anhang C enthält ein Beispiel der Berechnung von Δ -Werten.

Analog zur Bestimmung der Δ -Schnittgrößen kann unter Verwendung derselben Eingangsgrößen für eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung der ΔK -Wert ermittelt werden. Wie in Kapitel 4.3.2 beschrieben ist dies wiederum durch Blechuntersuchungen mit oder ohne Unterteilung der Bleche möglich. Anhang D gibt ein Beispiel für die Berechnung eines ΔK -Werts.

Bei Betrachtung eines Querschnitts ist die Bestimmung der Δ -Werte aufgrund dessen Zusammensetzung aus mehreren Blechen und deren gegenseitiger Beeinflussung durch Spannungsumlagerungen nicht direkt – also in einem Schritt – möglich. Die Bestimmung der Δ -Werte erfolgt deswegen iterativ gemäß folgendem Schema:

Gegeben sind die vom Querschnitt aufzunehmenden Schnittgrößen

- elastische Berechnung des zugehörigen Spannungsverlaufs
- blechweise Berechnung der Δ -Werte und Addition derselben zu den Δ -Werten des Querschnitts
- Addition der vom Querschnitt aufzunehmenden Schnittgrößen und der Δ -Werte des Querschnitts
- mit dieser Summe erneute elastische Berechnung des zugehörigen Spannungsverlaufs
- ...

Da es bei der Untersuchung von Wölbkrafttorsion in plastizierten Zonen, bei der Berechnung von statisch unbestimmten Systemen nach Fließzonentheorie und bei der Zugrundelegung von Theorie II. Ordnung jeweils zu Nichtlinearitäten im zu lösenden Gleichungssystem kommt, ist in diesen Fällen eine über die Stablänge iterative Berechnung unumgänglich. Wie im Beispiel

in Anhang E erkennbar ist, kommt der Anzahl an „Stabiterationen“ für die Exaktheit der Ergebnisse eine große Bedeutung zu. Um die Approximation der Δ -Werte zu beschleunigen und dadurch die Anzahl erforderlicher Stabiterationen verringern zu können, ist die Bestimmung ihres Grenzwertes an eine Variation der Aitkenschen- Δ^2 -Methode (sh. [8]) gekoppelt.

6.2.5 Berechnungsergebnisse und Ausgabe

Als Ergebnisse einer Berechnung werden ausgegeben:

- alle Querschnittswerte und Querschnittsstrecken
- Verschiebungsgrößen $u, v, w, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$
- Verschiebungsgrößen u, v, w der einzelnen Blechschwerpunkte
- Schnittgrößen in Achsen der unverformten Lage $S_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$
- Schnittgrößen in Achsen der verformten Lage $N, Q_\eta, Q_\zeta, M_\xi, M_\eta, M_\zeta$
- Schnittgrößen der Wölbkrafttorsion $\Gamma_x, M_\xi^P, M_\xi^S, M_\omega$
- Größen der Fließzonentheorie $\Delta N, \Delta M_\eta, \Delta M_\zeta, \Delta M_\omega, \Delta K$
- Verzerrung ε und Verkrümmungen κ_y und κ_z des Querschnitts
- Verzerrungen der Blechendfasern und die nach Hooke'schem Gesetz zugehörigen elastischen Spannungen

Soweit im jeweiligen Index nicht anders angegeben, beziehen sich die Ergebnisse auf die Hauptträgheitsachsen. Die oben genannten Größen können nach beliebigem Iterationsschritt (Iteration über den Stab) als Teilergebnis oder nach letztem Iterationsschritt als Endergebnis in eine Datei geschrieben und ausgegeben werden.

Zur besseren Analyse bzw. Auswertung stark beanspruchter und deswegen interessanter Stababschnitte ist die Anzahl an Ausgabepunkten in Stablängsrichtung frei wählbar; somit besteht die Möglichkeit, den Stab variabel, also abschnittsweise unterschiedlich oft zu unterteilen. In Anhang F ist exemplarisch die Ausgabe der Ergebnisse einer Beispielaufgabe angeführt.

6.3 Zusammenfassung

Die in den Kapiteln 3 und 4 hergeleiteten Differentialgleichungen werden simultan nach einem Konzept gelöst, welches auf einem analytischen Reihenansatz beruht und auf die Übertragungsbeziehung des Reduktionsverfahrens führt. Darin können alle Zustandsgrößen als Unbekannte auftreten. Die Übertragungsbeziehung beinhaltet somit eine vollständige Beschreibung sämtlicher Zustandsgrößen des Stabes und beschreibt dessen Tragverhalten auf einfachste Weise.

Da das Lösen der Differentialgleichungen mittels Handrechnung im allgemeinen Fall nicht möglich ist, erfolgt dies mit Hilfe eines Computerprogramms, welches auf dem von Pilgram [23] geschriebenen Programm aufbaut. Das Programm besteht aus einem Hauptprogramm, in dem das zu berechnende System und alle zu erfolgenden Berechnungsarten definiert sind, sowie aus Unterprogrammen, sogenannten Klassen, mittels derer Teilaufgaben, also Unterberechnungen ausgeführt werden.

Die Systemeingabe im Hauptprogramm beginnt mit der Eingabe der Systemlänge und der Festlegung der Randbedingungen des zu untersuchenden Stabes. Nach der Bestimmung von Elastizitäts- und Schubmodul wird der Querschnitt durch Eingabe beliebig vieler dünnwandiger Bleche, die zusammengesetzt ein offenes Profil ergeben und aus denen das Programm die Querschnittswerte berechnet, definiert.

Die Berechnung aller Δ -Werte in plastizierten Zonen bzw. an plastizierten Stützstellen erfolgt zunächst blechweise und dann für den Querschnitt durch Addition der Bleche.

Vor dem Start einer Berechnung ist zu wählen, ob ihr Theorie I. oder II. Ordnung sowie Elastizitätstheorie oder Fließzonentheorie zugrunde liegt. Um die Genauigkeit der Ergebnisse zu steigern, wird der Stab in Längsrichtung in beliebig viele Elemente unterteilt, deren Anfangs- und Endpunkte Stützstellen der Berechnung bilden.

Kommt es bei einer Berechnung zu Nichtlinearitäten im zu lösenden Gleichungssystem, ist eine über die Stablänge iterative Berechnung unumgänglich, wobei die Anzahl an „Stabiterationen“ für die Exaktheit der Ergebnisse eine große Bedeutung hat.

7 Untersuchungen zur Fließzonentheorie bei Betrachtung bestimmter Querschnitte

7.1 Allgemeines

Sinn und Ziel theoretischer Herleitungen ist ihre Umsetzung und Anwendung in der Praxis. Dieses Kapitel dient dem Zweck, die Anwendung der Fließzonentheorie anhand von Untersuchungen an Stäben, die über ihre elastische Grenzlast und bis zur Traglast belastet bzw. beansprucht sind, beispielhaft zu zeigen und baustatisch relevante Aussagen über Fließzonen und deren Phänomene zu treffen. Den Berechnungen liegt die in den vorangegangenen Kapiteln dargestellte Theorie und als Berechnungsmedium das in Kapitel 6 vorgestellte Programm zugrunde. Es gelten die in Kapitel 2 getroffenen Annahmen. Die untersuchten Stäbe sind vorwiegend biegebeansprucht.

Zur Einführung in die Anwendung der Fließzonentheorie werden die Systeme in Kapitel 7.2 dahingehend untersucht, auftretende Phänomene wie z.B. Nichtlinearität oder Querschnittsverdrillung trotz fehlender äußerer Torsionsbeanspruchung zu erklären. Allen Berechnungen dieses Kapitels liegt die Theorie I. Ordnung zugrunde; Schubspannungen werden stets vernachlässigt. Anhand von System- und Querschnittsuntersuchungen wird die Bedeutung der Spannungsnulllinie, der Trägheitshauptachsen und die des Schubmittelpunkts in plastizierten Zonen gezeigt. Da dem Thema Durchbiegung wegen der Nichtlinearität des Last-Verformungs-Diagramms in Fließzonen große Bedeutung zukommt, wird es in Kapitel 7.2.3 gesondert betrachtet.

Kapitel 7.3 geht auf den Versagensmechanismus ein, der sich bei Berechnung nach Theorie I. Ordnung unter Traglast bildet.

Die Berücksichtigung von Schubspannungen in Kapitel 7.4 dient dem Zweck, den Einfluß von Querkraften und Torsionsmomenten auf die Traglast zu untersuchen. Dabei werden in Kapitel 7.4.1 zunächst Stäbe betrachtet, bei denen Schubspannungen aus Querkraften herrühren (durch vertikale und/oder horizontale Einzel- oder Streckenlast). In Kapitel 7.4.2 folgen Untersuchungen, bei denen überwiegend Torsion, die planmäßig oder aufgrund von Plastizierung auftritt, Schubspannungen erzeugt. Aufgrund der Annahmen, daß Fließen nur in Normalspannungsrichtung auftritt und daß GI_T in Fließzonen konstant bleibt, ist keine Berech-

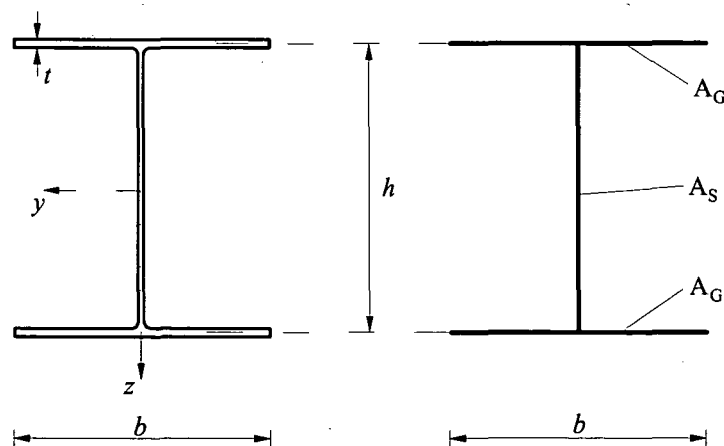
nung einer Querschnittstragfähigkeit, die vor allem aus Schubspannungen erreicht wird, erforderlich oder sinnvoll.

In weiterer Folge werden Ergebnisse von Berechnungen nach Theorie II. Ordnung erörtert (Kapitel 7.5). Entsprechend der jeweiligen Überschrift werden dabei Systeme mit oder ohne Normalkraftbeanspruchung untersucht. Ziel ist es, Erkenntnisse über die Stabilitätsgefährdung durch Biegeknicken und Biegedrillknicken in Fließzonen zu gewinnen.

In Kapitel 7.6 wird ein beidseitig gabelgelagerter Stab betrachtet, dessen Verschiebungsgrößen unter Steigerung der ausmittig angreifenden Querlast in besonderer Weise und somit als Phänomen der Fließzonentheorie anwachsen. Die Bestimmung und Analyse der dem System zugrundeliegenden Traglast schließen die Untersuchungen ab.

Die Bezeichnung einer Untersuchung setzt sich aus der zugehörigen Kapitelnummer und einer fortlaufenden Zahl zusammen (z.B. 7.3-1 oder 7.3-2). Der Index „el“ einer Belastung bezeichnet die elastische Grenzlast, der Index „T“ verweist auf die Traglast.

Um baustatisch relevante Aussagen über Fließzonen treffen zu können, ist die Betrachtung von Querschnitten und Systemen der Baupraxis zweckdienlich. Infolgedessen haben alle untersuchten Systeme einen der vier in Tabelle 8 vorgestellten Querschnitte (doppelsymmetrischer HEB-, einfach symmetrischer I-, U- und allgemeiner bzw. unsymmetrischer Querschnitt). Die realen Querschnitte sind idealisiert (sh. Abbildung 30), die Blechachsen erhalten dabei die Eigenschaft einer Dicke.



Quelle: [34]

Abbildung 30: Querschnittsidealisierung

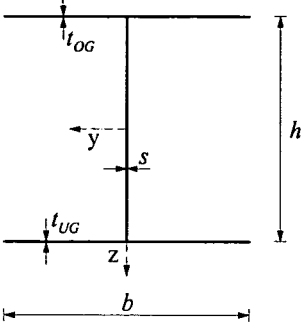
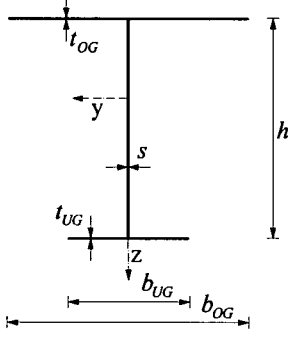
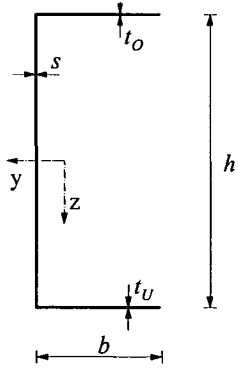
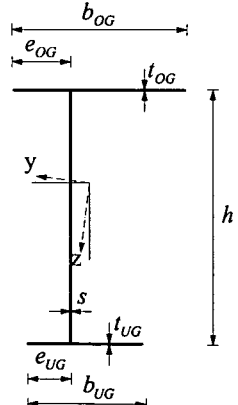
Profil	Abmessungen	Querschnittswerte
<p>Profil 1: HEB 200</p> 	<p> $h = 18,5\text{cm}$ $b = 20\text{cm}$ $t_{OG} = 1,53625\text{cm}$ $t_{UG} = 1,53625\text{cm}$ $s = 0,9\text{cm}$ </p>	<p> $A = 78,1\text{cm}^2$ $A_{yy} = 2048\text{cm}^4$ $A_{zz} = 5733\text{cm}^4$ $A_{\omega\omega} = 175261\text{cm}^6$ </p>
<p>Profil 2: I-Profil(einf. sym.)</p> 	<p> $h = 18,5\text{cm}$ $b_{OG} = 20\text{cm}$ $b_{UG} = 10\text{cm}$ $t_{OG} = 1,53625\text{cm}$ $t_{UG} = 1,53625\text{cm}$ $s = 0,9\text{cm}$ </p>	<p> $A = 62,74\text{cm}^2$ $A_{yy} = 1152\text{cm}^4$ $A_{zz} = 4096\text{cm}^4$ $A_{\omega\omega} = 38947\text{cm}^6$ </p>
<p>Profil 3: U-Profil</p> 	<p> $h = 24\text{cm}$ $b = 10\text{cm}$ $t_{OG} = 1\text{cm}$ $t_{UG} = 1\text{cm}$ $s = 1\text{cm}$ </p>	<p> $A = 44\text{cm}^2$ $A_{yy} = 439\text{cm}^4$ $A_{zz} = 4032\text{cm}^4$ $A_{\omega\omega} = 44571\text{cm}^6$ </p>
<p>Profil 4: Allgemeines Profil</p> 	<p> $h = 90\text{cm}$ $b_{OG} = 60\text{cm}$ $b_{UG} = 40\text{cm}$ $e_{OG} = 20\text{cm}$ $e_{UG} = 15\text{cm}$ $t_{OG} = 4\text{cm}$ $t_{UG} = 3\text{cm}$ $s = 2\text{cm}$ </p>	<p> $A = 540\text{cm}^2$ $A_{yy} = 94628\text{cm}^4$ $A_{zz} = 800206\text{cm}^4$ $A_{\omega\omega} = 110491567\text{cm}^6$ </p>

Tabelle 8: Untersuchte Querschnitte

7.2 Biegebeanspruchte Systeme

7.2.1 Einführung

In Untersuchung 7.2.1-1 wird der einfache Fall eines gabelgelagerten Stabes mit doppelsymmetrischem Querschnitt unter vertikaler Streckenlast, die im Schubmittelpunkt angreift, betrachtet. In Abbildung 31 sind System und Belastung ($q_z = 0,985q_{z,T}$), das resultierende Biegemoment, die elastischen und plastischen Stababschnitte und die Normalspannungsverteilung des Querschnitts an drei ausgesuchten Stellen sowie die dortigen ΔM_y -Werte (gemäß Kapitel 3.3.3 berechnet) skizziert bzw. aufgeführt. Untersuchung 7.2.1-1 belegt, daß sich in plastizierten Zonen nichtlineare Spannungsverläufe einstellen.

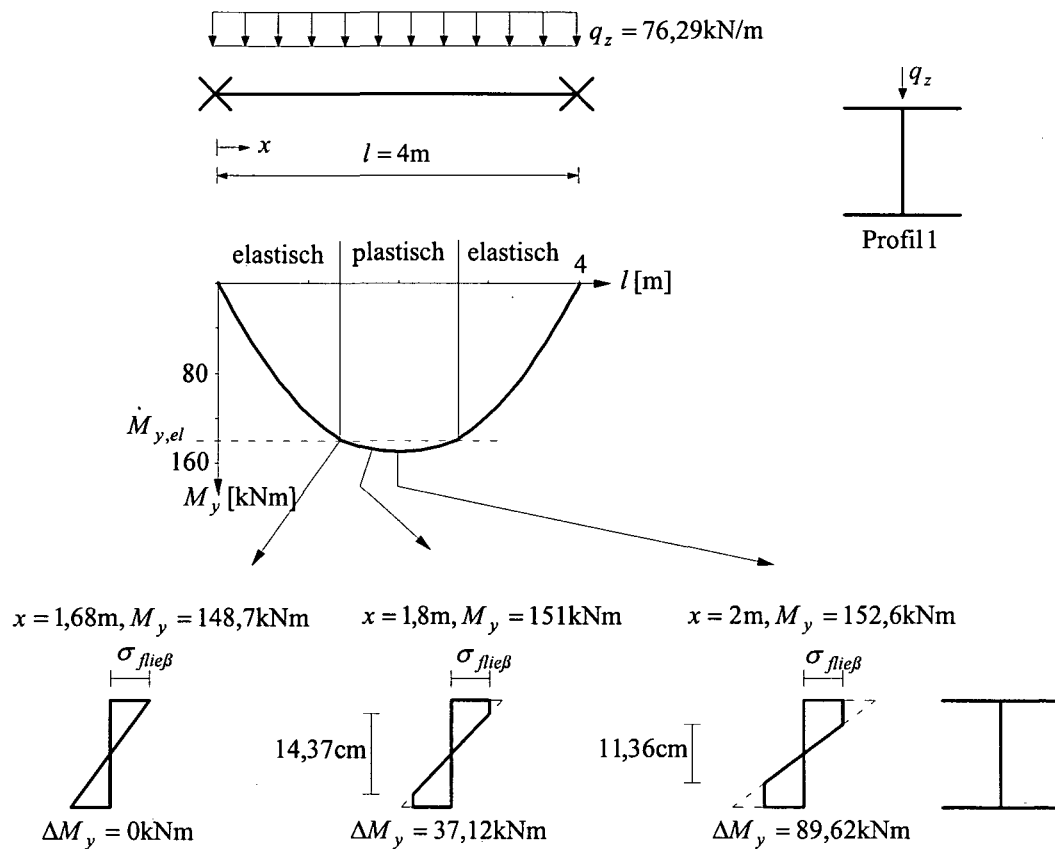


Abbildung 31: System, Belastung, M_y -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.2.1-1

7.2.2 Bedeutung von Spannungsnulllinie, Schubmittelpunkt und Trägheitshauptachsen

Zunächst wird ein auf gleiche Weise wie in Untersuchung 7.2.1-1 belastetes System betrachtet. Der Unterschied zur letzten Untersuchung besteht darin, daß nun durch Wahl eines einfach symmetrischen Querschnitts (Profil 2 in Tabelle 8) die horizontale Symmetrieachse entfällt und daß eine geringere Streckenlast angreift. Abbildung 32 zeigt Untersuchung 7.2.2-1.

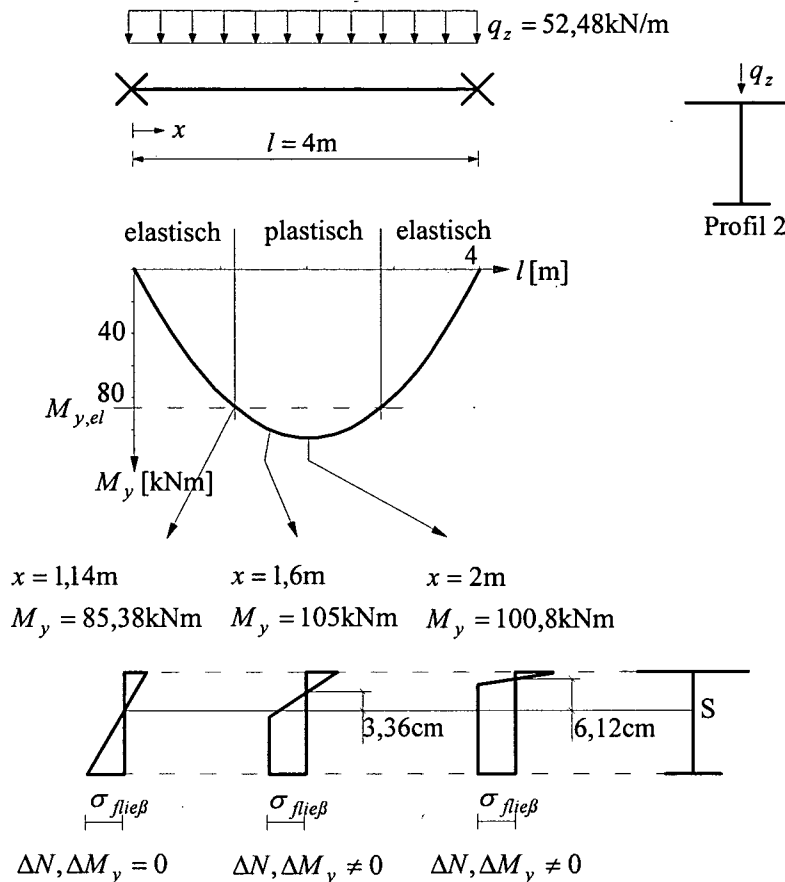


Abbildung 32: System, Belastung, M_y -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.2.2-1

Man erkennt, daß im elastischen Bereich die Spannungsnulllinie durch den Schwerpunkt des Querschnitts verläuft. Um die Gleichgewichtsbedingung für Normalkraft zu erfüllen, liegt die Spannungsnulllinie so, daß die Spannungen oberhalb derselben integriert über ihre Angriffsfläche gleich denen unterhalb der Linie sind. Die Einhaltung dieser Bedingung bringt mit sich, daß sich in der Fließzone die Spannungsnulllinie wegen der nichtlinearen Spannungsverteilung in Abhängigkeit vom Grad der Plastizierung verschiebt. Selbst bei reiner Biegung fallen die Schwerachse und die Spannungsnulllinie i.a. nicht zusammen (vgl. [26])!

Die im plastizierten Bereich in der Schwerpunktsfaser auftretende Normalspannung ist über die kinematischen Beziehung mit einer Dehnung verbunden. Integriert man diese Dehnung in Stablängsrichtung, erhält man trotz alleiniger Wirkung einer reinen Biegebelastung eine Ver-

schiebung u des Schwerpunkts. Rechnerisch ermittelt sich die Längsverschiebung durch folgende Intergrations über die Stablänge:

$$u = \int u' dx = \int \frac{\Delta N}{EA} dx$$

Im folgenden wird Untersuchung 7.2.2-1 dahingehend verändert, daß anstelle der vertikalen eine horizontale Streckenlast im Schubmittelpunkt angreift. Dadurch kommt es im Falle von Plastizierung zu einer Verdrillung des Stabes. Als Untersuchung 7.2.2-2 wird in Abbildung 33 das System, die Belastung, das resultierende Biegemoment, die elastischen und plastischen Stababschnitte und die Normalspannungsverteilung des Querschnitts an drei ausgewählten Stellen gezeigt. Die Streckenlast ($q_y = 0,96q_{y,r}$) greift im Schubmittelpunkt an, um keine planmäßige Torsion im elastischen Zustand zu erzeugen.

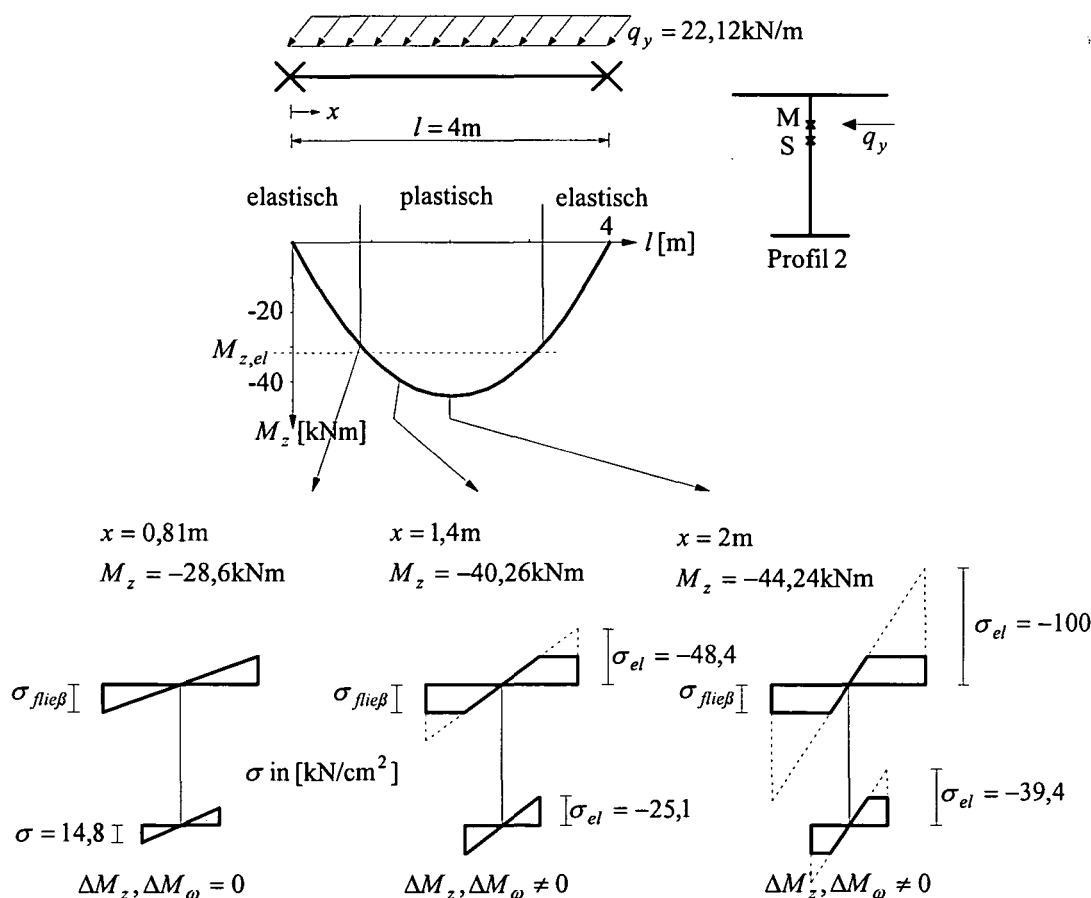


Abbildung 33: System, Belastung, M_z -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.2.2-2

Während sich bei einer Berechnung nach Elastizitätstheorie die Normalspannungen über die Wölbfläche integriert zu null ergeben ($M_\omega = 0$), ist dies nach Fließzonentheorie nicht der Fall, da sich beim Auftreten von Plastizität die Spannungen von Ober- und Untergurt nicht

mehr proportional steigern. Gemäß $M_\omega = \int_A \sigma_x \omega dA$ und Tabelle 1 (Berechnung der Δ -Werte) treten die Größen M_ω und ΔM_ω auf. Wegen $M'_\omega - M_x^S + m_\omega = 0$ kommt es zu einem sekundären Torsionsmoment M_x^S und mit $M_{x,M} = 0$ folgt aus Torsionsgleichgewicht $M_x^P = M_x^S$. Aufgrund der durch M_ω zusätzlich hervorgerufenen Normalspannungen verringert sich die elastische Grenzlast und Fließen tritt nicht bei $M_{z,el} = -31,95 \text{ kNm}$, sondern bei $M_z = -28,6 \text{ kNm}$ auf.

Das Auftreten von Verdrillung trotz alleiniger Querbelastung im Schubmittelpunkt (berechnet mit Querschnittswerten) erklärt sich dadurch, daß sich der Schubmittelpunkt eines Querschnitts als der Punkt, an dem eine Querbelastung keine Torsion erzeugt, in einer Fließzone verschieben kann (sh. [20]). In diesem Fall greift die Querkraft im plastizierten Bereich an einem torsionserzeugenden Punkt an.

Der Schubmittelpunkt ist derjenige Punkt eines Stabquerschnitts, in dem die resultierende Kraft aus den Querkraftschubspannungen liegt (vgl. [30, S.27]). Die Schubspannungen sind über Gleichgewichtsbedingungen an einem Element mit den Normalspannungen verbunden. Verändert sich in Fließzonen der lineare Verlauf von Normalspannungen zu einem bilinearen, so verändert sich gleichzeitig die Lage des Schubmittelpunkts im Querschnitt. Die Koordinaten des elastisch berechneten Schubmittelpunkts behalten zwar ihre statische Bedeutung als Koordinaten eines Referenzpunkts für das Aufstellen und Lösen der Differentialgleichungen, nicht jedoch ihre Bedeutung, den Ort der resultierenden Kraft aus Schubspannungen auszumachen.

In der Literatur sind Formeln zur Berechnung der Schubmittelpunktskoordinaten vielfach nur unter der Annahme eines konstanten Elastizitätsmoduls zu finden, der bei Quotientenbildung durch Kürzen verschwindet. Dieses Kürzen ist bei veränderlichem Elastizitätsmodul in Fließzonen nicht ohne weiteres möglich und zeigt wiederum, daß die Lage des Schubmittelpunkts nicht konstant sein muß.

Um die Bedeutung von Trägheitshauptachsen in plastizierten Zonen zu untersuchen, wird erneut ein gabelgelagerter Stab unter Streckenlast berechnet, wobei die Last ($q_z = 0,98 q_{z,T}$) in Richtung der Trägheitshauptachse z wirkt (Untersuchung 7.2.2-3). Zur Vermeidung von Querschnittssymmetrie ist als Stabquerschnitt das allgemeine Profil 4 aus Tabelle 8 gewählt.

System und Belastung, resultierendes Biegemoment und Normalspannungsverteilung an zwei Stabpunkten sind in Abbildung 34 dargestellt.

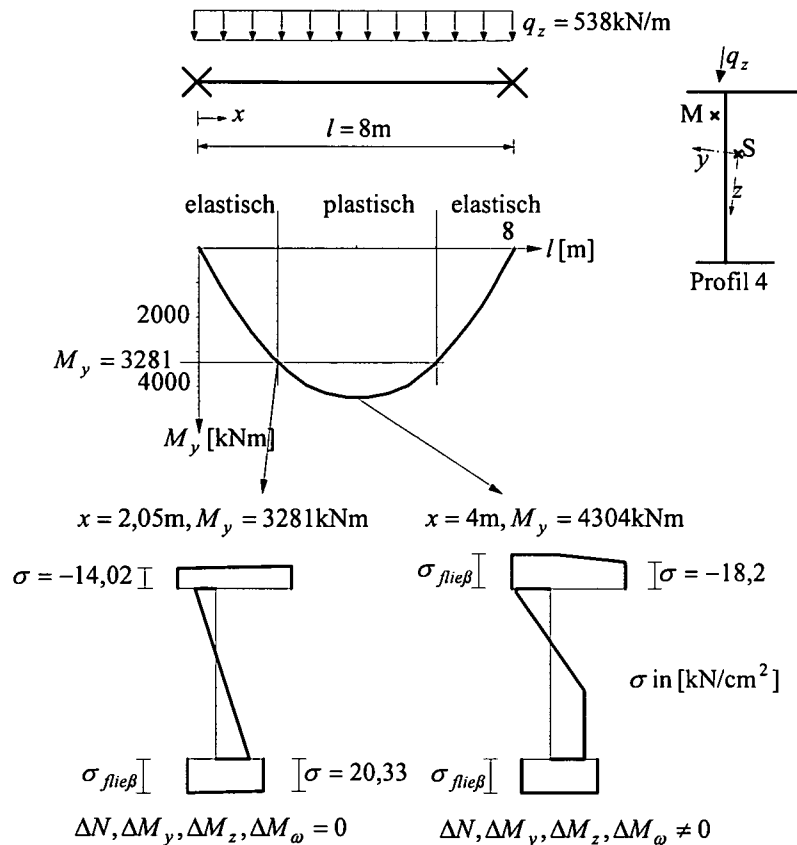


Abbildung 34: System, Belastung, M_y -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.2.2-3

Aus oberen Untersuchungen ist bekannt, daß in der Fließzone neben ΔM_y auch ΔN und ΔM_ω auftreten können, woraus neben der Biegung zusätzlich eine Längsverschiebung und eine Stabverdrillung resultieren. In diesem Fall erzeugt die nichtlineare Spannungsverteilung auch die Größe ΔM_z , durch die gemäß (3-65) eine Verkrümmung um die y -Achse hervorgerufen wird. Der Stab biegt sich infolgedessen in Richtung der y -Achse durch. Dies überrascht, da gemäß Elastizitätstheorie Belastungen in Trägheitshauptachsenrichtung nur Verformungen in dieselbe bewirken. Die Bedeutung der Trägheitshauptachsen, Spannungsnulllinien bei alleiniger Belastung quer zu denselben darzustellen, geht in plastizierten Zonen folglich verloren, da sich die Spannungsnulllinien – sofern es sie in Fließzonen noch gibt – nicht nur verschieben, sondern auch verdrehen können.

Ähnlich zum Schubmittelpunkt behalten die querschnittsabhängigen Trägheitshauptachsen ihre Bedeutung als Referenzachsen für das Aufstellen und Lösen der Differentialgleichungen.

Untersuchungen zur Fließzonentheorie bei Biege-
 Die bisher beschriebenen Phänomene der
 Schnittbetrachtungen ableiten. Beispielsweise
 M_y und/oder M_z oberhalb der elastischen
 Spannungslinie, aus dem wiederum die
 solche Querschnittsuntersuchungen ist es
 zu ziehen oder Streckenlasten etc. hervorzuheben
 ein direkter Zusammenhang zwischen Schnitt-
 kann mittels Integration letzterer über die
 geschlossen werden. Die Durchführung von
 9.1 zeigt das Ergebnis. Darin sind in Abhängigkeit
 diejenigen Größen, die sich zusätzlich zu den
 wissensmäßig als Phänomene der Fließzonentheorie

M_y

M_z

7.2.3 Durchbiegung

Dieses Kapitel ist allein dem Thema Durchbiegung gewidmet. Die Last-Verformungs-Diagramme werden durchbiegende Beanspruchungen aufgetragen. Anstelle der Lastfaktor f , der aus dem Quotienten $\frac{w}{w_0}$ gebildet wird, die Nichtlinearität bewirkt eine Überbeanspruchung und zum Verweis auf die Aufg. 1 von Baustahl ist ein Vergleich der Durchbiegbarkeit (z. B. $f/200$) gezeigt.

Zunächst gilt es zu klären, wie es zur Durchbiegung kommt und welchen Einfluß sie auf den Biegemomentenverlauf hat. Die Abbildung 35 stellt die Durchbiegung, den Biegemomentenverlauf und die Durchbiegungslinie dar.

Durch Auftreten von ΔM_z in plastizierten Zonen wird der parabelförmige Verlauf von κ_z unterbrochen und die Beziehung zwischen angreifender Kraft und resultierender Verschiebung nichtlinear. Das bei Laststeigerung jenseits der elastischen Grenze starke Ansteigen von ΔM_z bedeutet wegen der konstitutiven Beziehung $M_z = EA_{yy}(\kappa_z + z_M \kappa_\omega) - \Delta M_z$ einen ähnlich starken Zuwachs an Krümmung, woraus nach doppelter Integration in Stablängsrichtung die Durchbiegung resultiert. Das zu Untersuchung 7.2.3-1 zugehörige Last-Verformungs-Diagramm ist in Abbildung 36 dargestellt. Man erkennt, daß die elastische Grenzlast bei recht geringem Lastfaktor erreicht wird und sich unterhalb ein linearer sowie oberhalb ein nichtlinearer Bereich mit Grenzwert unendlich ausbildet.

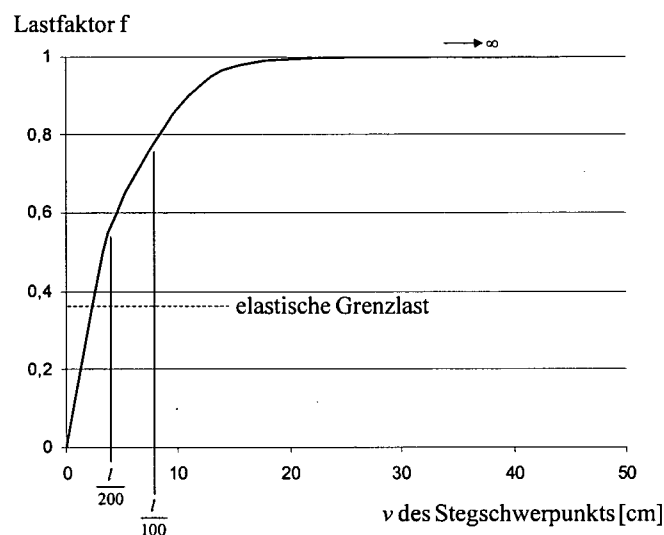


Abbildung 36: Last-Verformungs-Diagramm zu Untersuchung 7.2.3-1

Der Grenzwert, der sich bei Erreichen der Traglast einstellt, ist für die auftretenden Δ -Werte und infolgedessen für Krümmung und Durchbiegung unendlich. Eine Ausnahme dazu bildet der Fall, daß auf den Stab eine Einzellast einwirkt. Die Begründung liegt in diesem Fall in der unterschiedlichen Funktion der Momentenlinie, die bei einer Einzellast linear ist und bei einer Streckenbelastung als quadratische Parabel vorliegt. Während die Integration über die mit der Momentenlinie beschriebenen Krümmung im Fall einer Streckenbelastung auf einen unendlichen Wert führt, ergibt sich bei einer Einzellast ein endlicher Wert (sh. [9]).

Als Beispiel dafür, daß Belastung durch Streckenlast grenzwertig zu unendlicher und Belastung durch Einzellast grenzwertig zu endlicher Durchbiegung führt, wird die bereits bekannte Untersuchung 7.2.1-1 nun unter der Bezeichnung 7.2.3-2 erneut betrachtet und die zugehörige Last-Verformungs-Kurve in Abbildung 37 gezeigt. Da die elastische Grenze sehr hoch ($f \approx 0,96$) liegt, ist zur besseren Anschauung der obere Lastbereich dargestellt.

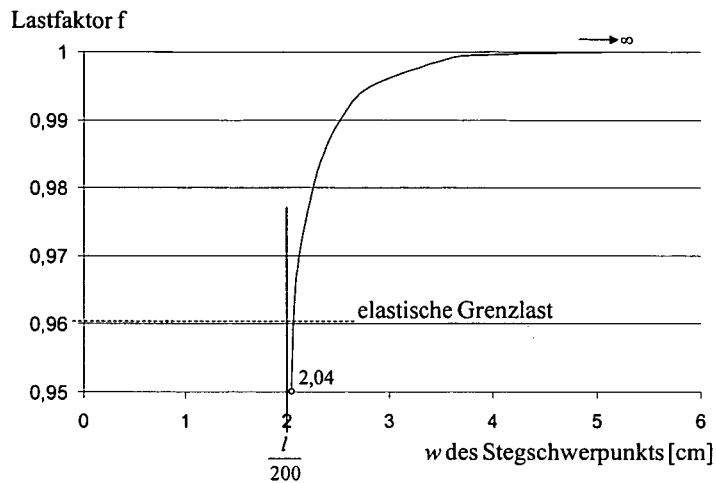


Abbildung 37: Last-Verformungs-Diagramm zu Untersuchung 7.2.3-2

Die Verformung strebt bei Erreichen der Traglast gegen unendlich. Dem entgegengestellt ist Untersuchung 7.2.3-3, bei der anstelle der Streckenlast eine Einzellast angreift und keine unendliche Durchbiegung erreicht wird. Während Abbildung 38 System und Belastung skizziert, zeigt Abbildung 39 die zugehörige Beziehung zwischen Belastung und Verschiebung. Wiederum ist nur der obere Lastbereich dargestellt.

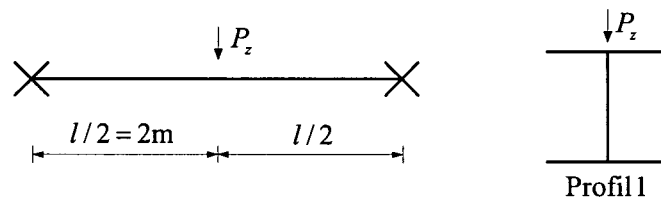


Abbildung 38: Untersuchung 7.2.3-3

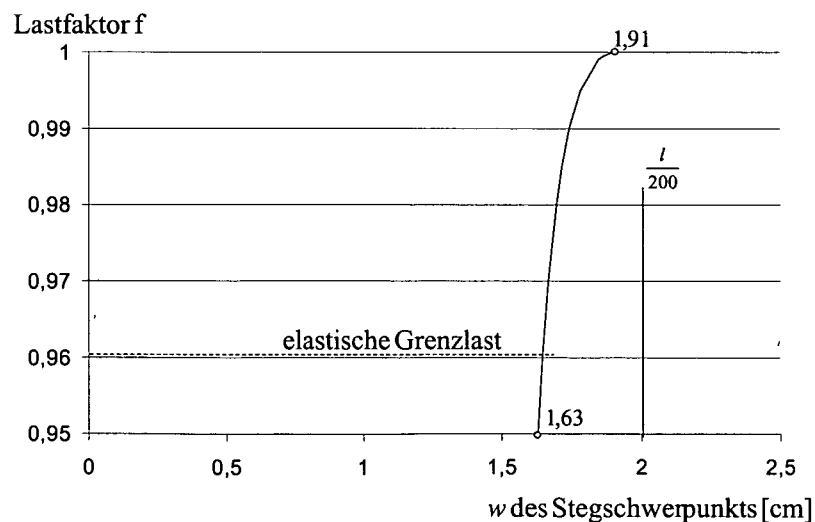


Abbildung 39: Last-Verformungs-Diagramm zu Untersuchung 7.2.3-3

In Untersuchung 7.2.3-4 belasten neben der Beanspruchung durch Einzellast auch Streckenlasten, die über Teilbereiche der Stablänge oder über die ganze Stablänge wirken, das System (sh. Abbildung 40). Anhand der zugehörigen Last-Verformungs-Kurven, dargestellt in Abbildung 41, ist erneut zu erkennen, daß bei Stabbeanspruchung durch eine Einzellast die Durchbiegung einen endlichen Grenzwert hat, während schon bei kurzer Streckenbelastung derselbe gegen unendlich läuft. Die Unabhängigkeit dieses Phänomens vom Querschnitt wird durch die Wahl eines zur vorherigen Untersuchung unterschiedlichen Profils verdeutlicht.

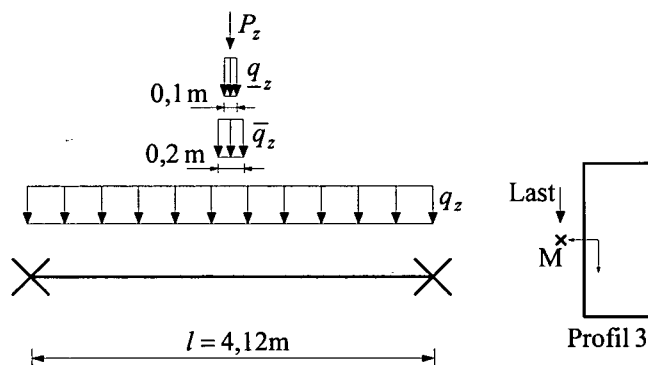


Abbildung 40: System und Belastung von Untersuchung 7.2.3-4

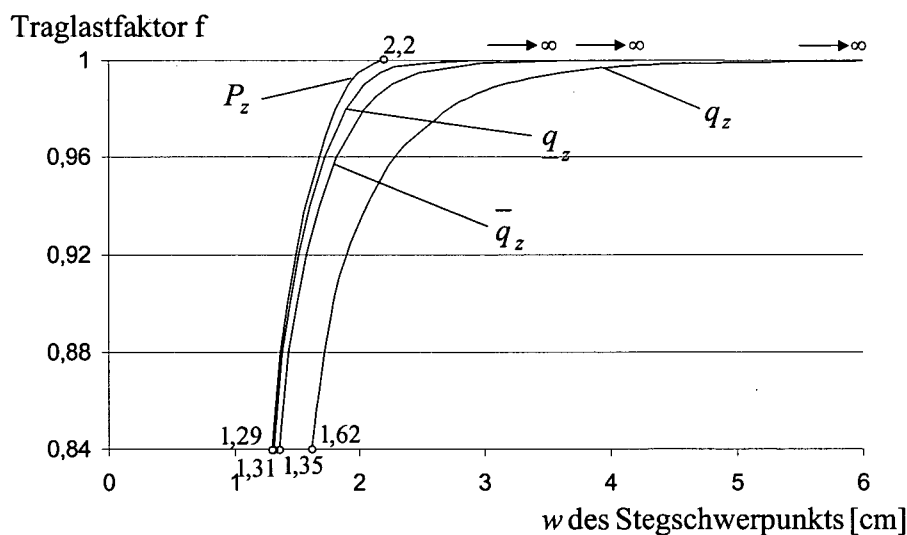


Abbildung 41: Last-Verformungs-Diagramm zu Untersuchung 7.2.3-4

Daß es bei Belastung in Richtung einer Trägheitshauptachse auch zu Durchbiegung in Richtung der anderen kommen kann, wurde in Kapitel 7.2.2 (mit Untersuchung 7.2.2-3) erklärt. Den Abbildungen 42 und 43, welche Untersuchung 7.2.3-5 (System und Belastung bereits bekannt) und das zugehörige Last-Verformungs-Diagramm zeigen, ist dies zu entnehmen. Die Durchbiegung v in Richtung der y -Achse tritt erst bei Belastung oberhalb der elastischen Grenzlast auf und steigert sich analog zur Durchbiegung w in Richtung der z -Achse nichtlinear zum Grenzwert unendlich.

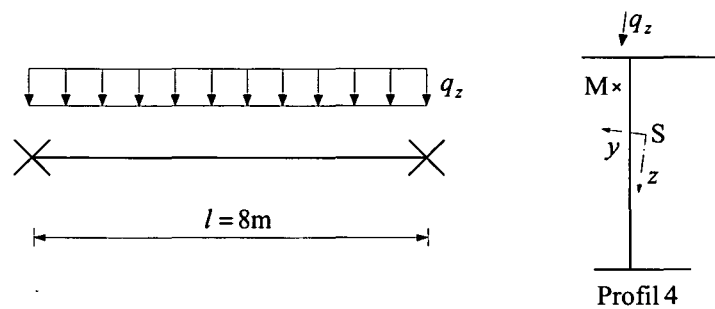


Abbildung 42: System und Belastung von Untersuchung 7.2.3-5

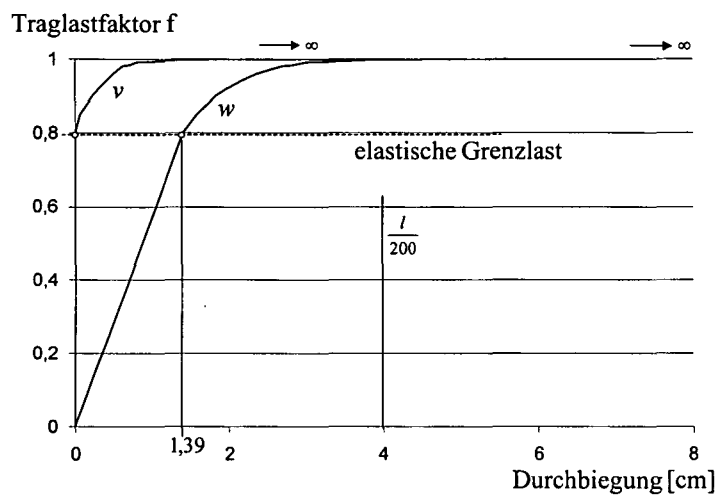


Abbildung 43: Last-Verformungs-Diagramm zu Untersuchung 7.2.3-5

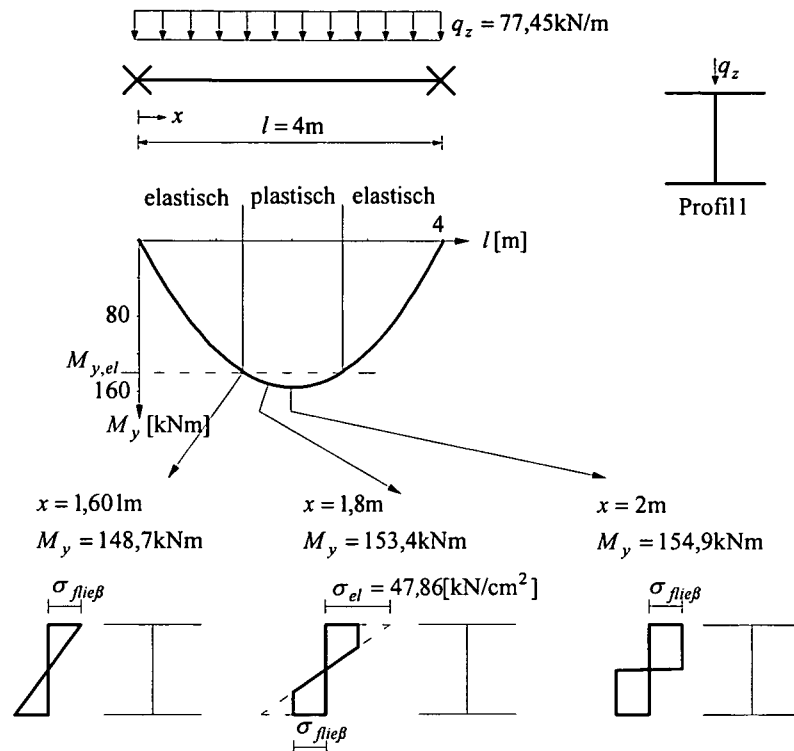
7.3 Traglast und Versagensmechanismus nach Theorie I. Ordnung

Wird die ein System beanspruchende Belastung gesteigert, so erreicht man grenzwertig gemäß [30] die Traglast als die von einem System maximal aufnehmbare Last. Bei Erreichen dieser Last nehmen die plastischen Verzerrungen ohne weitere Laststeigerung zu und bilden einen Versagensmechanismus. Im Folgenden wird nur der Beginn des Versagensmechanismus und somit das Erreichen der Traglast betrachtet.

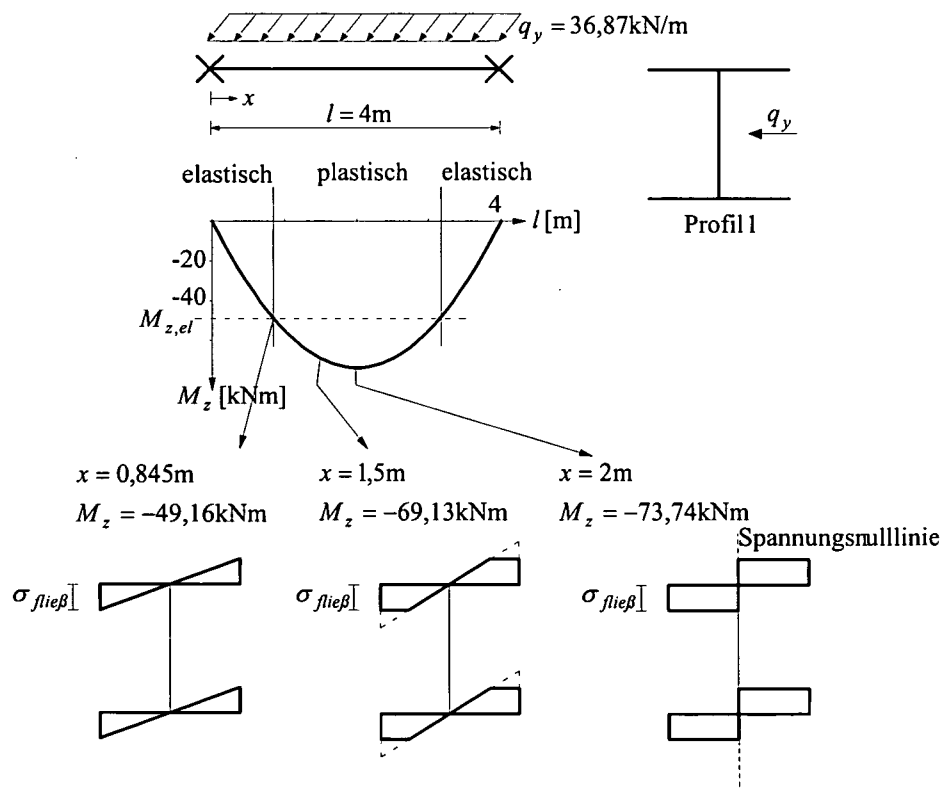
Für die Trag- oder auch Kollapslast lassen sich mit Hilfe der Traglastsätze der Plastizitätstheorie bei linear-elastischem ideal-plastischem Materialverhalten untere und obere Schranken angeben. Man unterscheidet statischen und kinematischen Traglastsatz der Plastizitätstheorie. Ersterer besagt, „daß die gegebene Belastung eines Körpers höchstens gleich groß wie die Traglast ist, wenn ein mit dieser Belastung im Gleichgewicht stehender Spannungszustand angegeben werden kann, der die Fließbedingung an keiner Stelle verletzt“ [18, S.389]. Ein solcher Spannungszustand, der mit dem tatsächlichen nicht übereinstimmen muß, wird als statisch zulässig bezeichnet. Der kinematische Traglastsatz besagt, „daß die gegebene Belastung eines Körpers mindestens gleichgroß wie die Traglast ist, wenn ein dieser Belastung entsprechender Kollapsmechanismus angegeben werden kann, der den Randbedingungen für die Verschiebungsraten genügt“ [18, S.390] und der positive Dissipationsarbeit leistet. Ein solcher Mechanismus, der mit dem tatsächlichen nicht übereinstimmen muß, wird als kinematisch zulässig bezeichnet.

Wie zuvor werden auch bei allen Untersuchungen dieses Kapitels vorwiegend biegebeanspruchte Stäbe betrachtet und Schubspannungen vernachlässigt.

Der einfachste Fall einer Traglastuntersuchung (Untersuchung 7.3-1) ist in Abbildung 44 dargestellt und besteht aus einem gabelgelagerten Stab mit doppelsymmetrischem Querschnitt unter im Schubmittelpunkt angreifender Streckenlast. Diese Untersuchung gleicht Untersuchung 7.2.1-1, wobei die Streckenlast nun denjenigen Wert erreicht, der in Stabmitte zu $M_{y,vorh} = M_{y,pl}$ führt. Man erkennt, daß der Querschnitt dort vollplastiziert ist und die eingezeichnete, gerade, in diesem Fall horizontale Spannungsnulllinie vorliegt. Diese Spannungsnulllinie bildet ein „Scharnier“ und somit eine Drehachse, dessen Drehwirkung der Versagensmechanismus ist. Dieser Versagensmechanismus besteht aus einer ebenen Relativbewegung im Querschnitt und stellt sich nur unter Vollplastizität ein.

Abbildung 44: System, Belastung, M_y -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.3-1

Greift anstelle der vertikalen eine horizontale Streckenlast (Untersuchung 7.3-2) an, so ergeben sich die in Abbildung 45 eingezeichneten Spannungsverläufe.

Abbildung 45: System, Belastung, M_z -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.3-2

Wiederum bildet sich unter Traglast eine Spannungsnulllinie aus, die dadurch den Versagensmechanismus vorgibt, daß sich der Querschnitt um dieses „Scharnier“ verdreht. Aus Gründen der Symmetrie liegt diese im betrachteten Fall in der Stegachse. In allen Querschnittsfasern, die nicht auf der Spannungsnulllinie liegen, wirkt plastische Grenzspannung, weswegen von Vollplastizität gesprochen werden darf.

Zwei weitere Untersuchungen an bis zur Traglast belasteten Systemen belegen, daß im maximal beanspruchten Querschnitt stets Vollplastizität herrscht, selbst wenn diese nicht direkt zu erkennen ist. Wie die Detailskizzierung in Abbildung 46 zeigt, verläuft in Untersuchung 7.3-3 die Spannungsnulllinie horizontal durch den Obergurt. Da bei idealisierten Querschnitten die Blechflächen als auf ihren Achsen konzentriert angenommen werden, gibt das Berechnungsergebnis für den Obergurt eine gemittelte Spannung von $\sigma_x = 11,28 \text{ kN/cm}^2$ an.

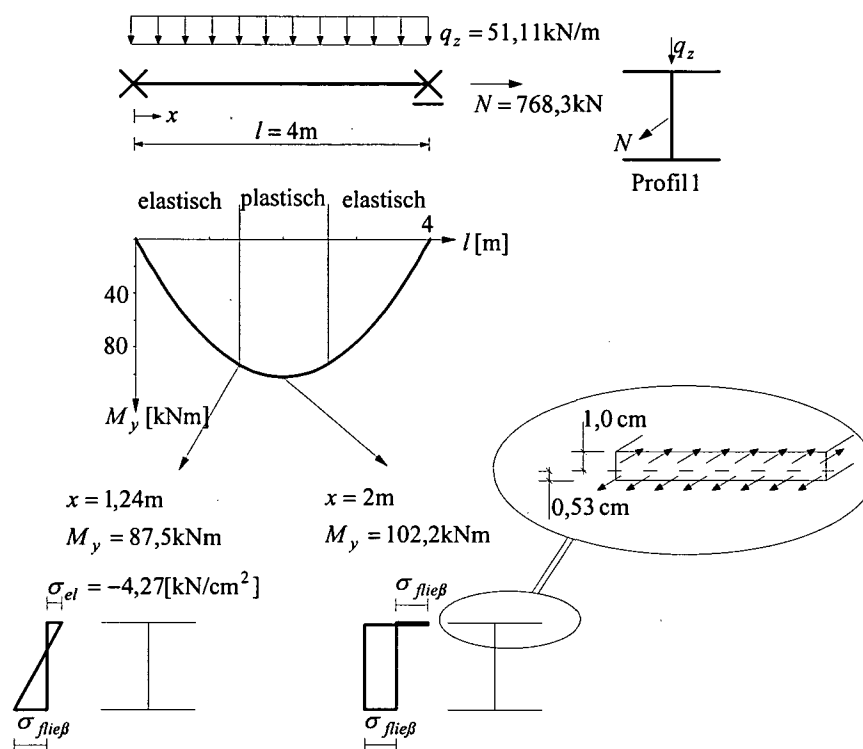
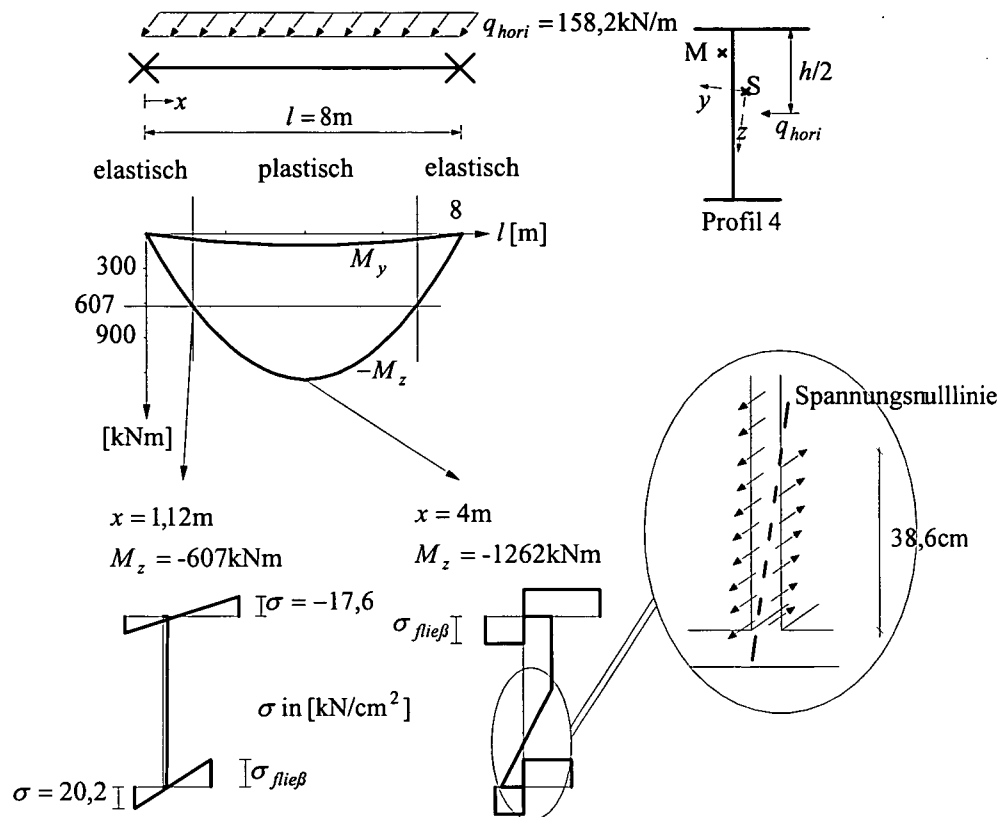


Abbildung 46: System, Belastung, M_y -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.3-3

Ähnlich verhält es sich bei der in Abbildung 47 dargestellten Untersuchung 7.3-4. Wiederum verläuft die Spannungsnulllinie durch ein Blech (den Steg), wobei wegen der Blechidealisierung ein Spannungsmittelwert ausgegeben wird. Erst eine Detailzeichnung beweist die vollständige Plastizierung des Querschnitts (abgesehen von den Fasern der Spannungsnulllinie). Diese Untersuchung entspricht dem Zahlenbeispiel eines allgemeinen Drei-Blech-Querschnitts aus [35, Kapitel 6.3] und ergibt dasselbe Ergebnis.

Abbildung 47: System, Belastung, M_z -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.3-4

Belastet man das zuletzt betrachtete System durch ein aus Streckenlast hervorgerufenenes Biegemoment um die starke Achse, ergeben sich an den ausgesuchten Stellen die folgenden, in Abbildung 48 dargestellten Spannungsverläufe. Die in elastischen Bereichen bekannte Spannungsnulllinie, die der Trägheitshauptachse entspricht, existiert nicht mehr, sobald der Querschnitt zu plastizieren beginnt. Erst unter Laststeigerung bildet sich im maximal beanspruchten Querschnitt erneut eine Spannungsnulllinie, die gegenüber der elastischen stark verdreht ist und die den Mechanismus des Versagens beschreibt. Die Untersuchung 7.3-5 führt im vollplastischen Querschnitt auf Ergebnisse, die sich ebenso mit in den in [35] angegebenen Formeln ermitteln lassen und mit diesen übereinstimmen.

Allein aus Querschnittsbetrachtungen lassen sich Traglastschnittgrößen und Lage der Spannungsnulllinie bestimmen. Sind bei statisch bestimmten Systemen die auftretenden Schnittgrößen N , M_y und M_z aus Gleichgewichtsbedingungen bekannt, kann folglich ohne Systemberechnung auf den zugehörigen, maximalen Laststeigerungsfaktor geschlossen werden. In [35] wird derartige Traglastuntersuchung hergeleitet und anhand von Beispielen erläutert. Das Zahlenbeispiel eines doppelsymmetrischen I-Querschnitts [35, Kapitel 5] wird mit Hilfe

des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Programms nachgerechnet, die Ergebnisse werden bestätigt.

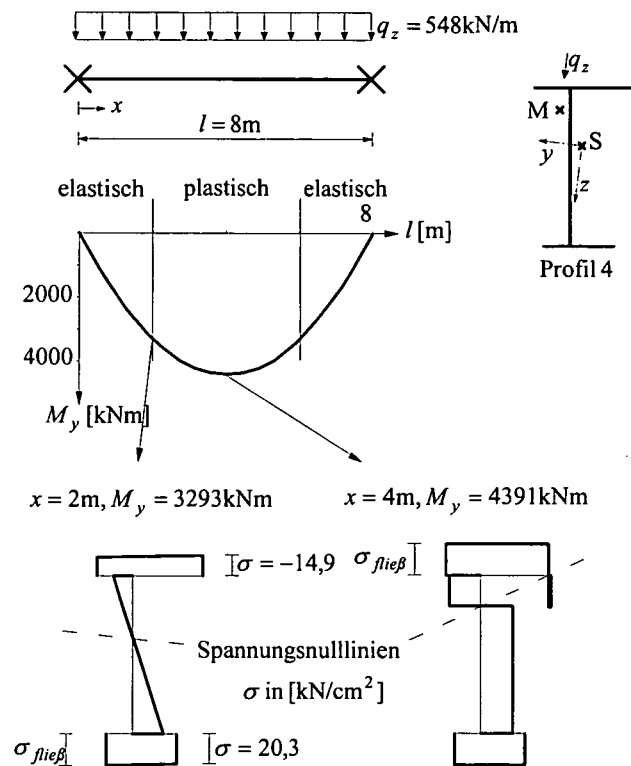


Abbildung 48: System, Belastung, M_y -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.3-5

Die Schnittgrößen-Interaktion in Traglastzuständen ist in [31] hergeleitet und als Diagramm veranschaulicht. Sie stimmt mit den Interaktionen der in dieser Arbeit untersuchten Traglasten überein. Wegen der ebenen Relativbewegung des versagenden Querschnitts darf bei der Ermittlung des vollplastischen Spannungsverlaufs kein Wölbmoment vorgegeben werden. Die Größe des Wölbmoments, das einen Eigenspannungszustand darstellt, ist im vollplastischen Querschnitt aus Betrachtung desselben eindeutig bestimmbar. Rubin [33] bezeichnet das Wölbmoment als „keine Schnittgröße, sondern eine innere, statisch unbestimmte Kraftgröße, die sich aus der Bedingung ebenbleibender Querschnitte ergibt...“ [33, S.301]. Osterrieder, dessen Ergebnisse der in [20] beschriebenen Beispielaufgaben (z.B. beim Vergleich der Querschnittsverdrehungen) den im Rahmen dieser Arbeit bestimmten Ergebnisse ähnlich sind, behauptet zu recht, „daß auch in diesem Fall im Traglastzustand das Wölbmoment als eine abhängige Querschnittsgröße und die Torsionsverdrehung in Feldmitte konstant sind“ [20, S. 6-8]. Die Annahme eines Wölbgelenks ($M_\omega = 0$) im versagenden Querschnitt – wie in [13], [14], [15] postuliert bzw. getroffen – läßt sich als Gleichgewichtsbedingung nicht herleiten und bleibt unbegründet.

Der vollplastische Querschnitt ist durch die Schnittgrößen N , M_y und M_z bestimmt, wobei aus dem sich ergebenden Spannungsverlauf ein Wölbmoment resultieren kann. Unter der Annahme, daß aufgrund vorwiegender Biegebeanspruchung Schubspannungen vernachlässigt werden, haben die Schnittgrößen M_x , M_x^P , M_x^S keinen Einfluß auf den vollplastischen Querschnitt und folglich auch nicht auf die Traglast. Dies wird mit Hilfe der in Abbildung 49 dargestellten Untersuchung 7.3-6 gezeigt.

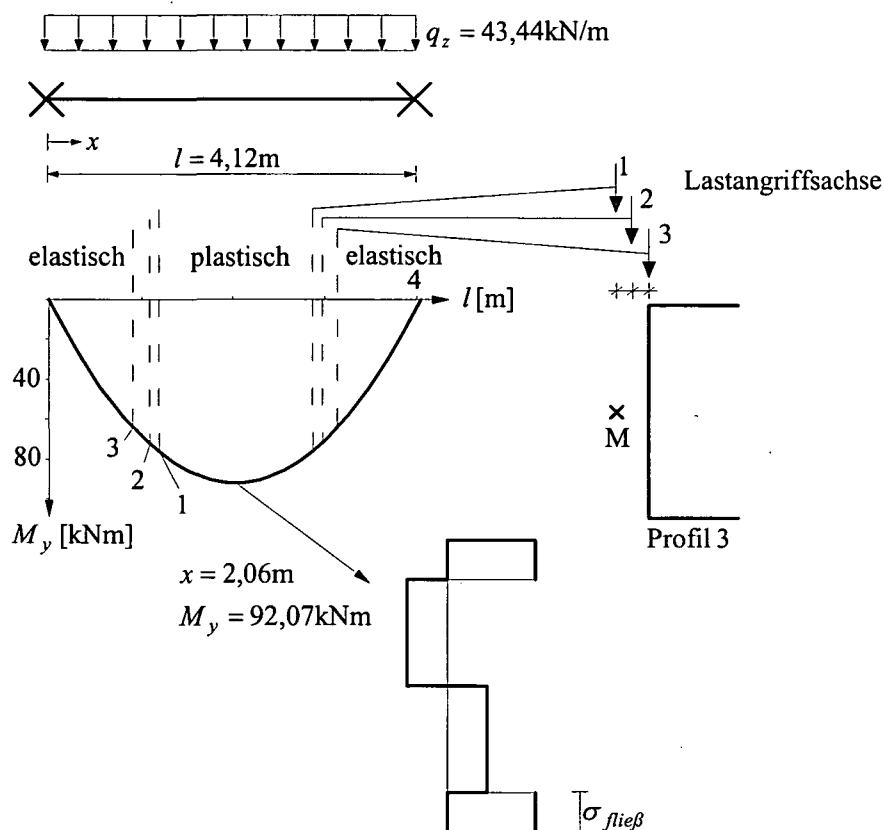


Abbildung 49: System, Belastung, M_y -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.3-6

Die Streckenlasten greifen in Erweiterung von Untersuchung 7.2.3-4 (Abbildung 40) mit verschiedenen Ausmitten an, wodurch neben den Torsionseffekten, die durch das Plastizieren hervorgerufen werden, auch planmäßige Torsion entsteht. Während naheliegenderweise die Verläufe der Querschnittsverdrehung φ_x über die Stablänge für verschiedene Lastausmitten unterschiedlich ausfallen (sh. [27, Bild 7]) und während die elastische Grenzlast mit zunehmender Lastausmitte abnimmt, sind sowohl die plastische Grenzlast bzw. die Traglast als auch der dazugehörige Spannungsverlauf stets dieselben. Die Grenzwerte der Querschnittsverdrehung φ_x in Stabmitte können mit Hilfe von [35, Gleichung (57)] auch direkt bestimmt werden.

7.4 Berücksichtigung von Schubspannungen

Ziel dieses Kapitels ist es zu zeigen, ob und wann Schubspannungen bei der Berechnung vor allem der in den Kapiteln 7.2 und 7.3 gezeigten Untersuchungen zu berücksichtigen sind und wie groß ihr Einfluß auf die Traglast ist. Auftretende Phänomene der Fließzonentheorie werden dabei analysiert. Es gilt weiterhin zu untersuchen, ob bekannte Grenzen für die notwendige Beachtung von Schubspannungen auch bei Belastungen jenseits der elastischen Grenzlast gelten.

Aufgrund der Annahmen, daß Fließen nur in Normalspannungsrichtung auftritt und daß GI_T in Fließzonen konstant bleibt, liegt die Betrachtung hauptsächlich beigebeanspruchter Stäbe nahe und die Berechnung einer Querschnittstragfähigkeit, die vor allem aus Schubspannungen erreicht wird, ist folglich nicht erforderlich.

7.4.1 Schubspannungen aus Querkraft

Untersuchung 7.4.1-1 greift die bereits bekannte Untersuchung 7.3-1 auf. Abbildung 50 zeigt System, Belastung ($q_z = 0,999q_{z,T}$) und Schnittkraftverläufe von Biegemoment und Querkraft.

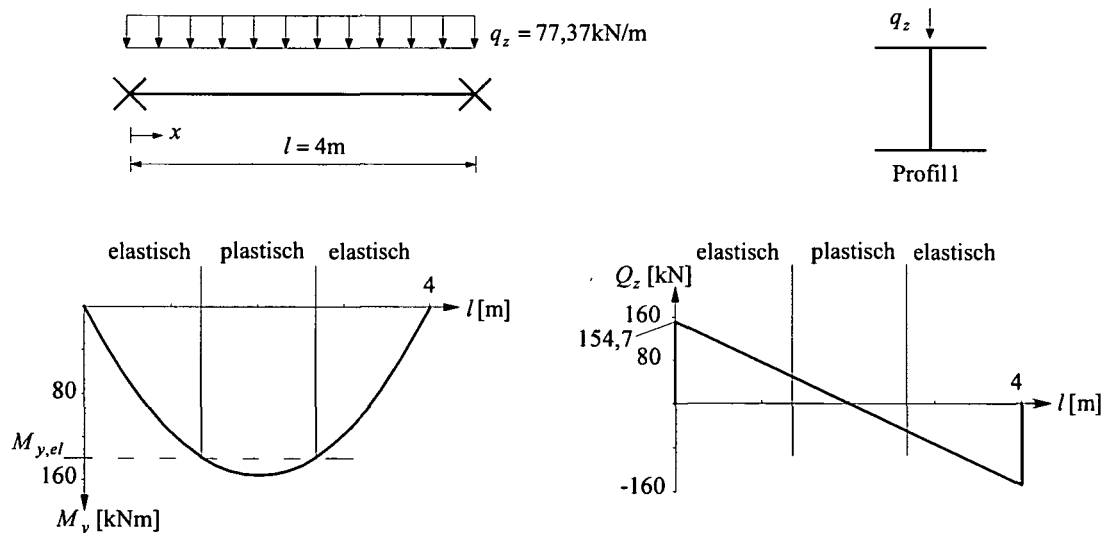


Abbildung 50: System, Belastung, M_y - und Q_z -Verlauf von Untersuchung 7.4.1-1

Es ist ersichtlich, daß die Traglast auch bei Berücksichtigung der auftretenden Schubspannungen unverändert bleibt, da der am stärksten belastete Querschnitt in Systemmitte keine Querkraft aufzunehmen hat und es infolgedessen zu keiner Abminderung der maximal aufnehmbaren Normalspannung kommt. Die elastische Grenzlast vermindert sich um nur 0,075% auf $M_{y,el} = 148,6 \text{ kNm}$. Es tritt ein – wenn auch geringes – Anwachsen der Durchbiegung w auf, da in den Bereichen neben der Systemmitte die maximale Normalspannung reduziert wird, wodurch ein größerer ΔM_y -Wert entsteht, der wiederum gemäß Gleichung $M_y = EA_{zz}(\kappa_y + y_M \kappa_\omega) - \Delta M_y$ die Krümmung κ_y beeinflusst.

In der folgenden Untersuchung 7.4.1-2 greift neben der Vertikallast auch eine horizontale Streckenlast an, die Biegung um die schwache Achse bewirkt (Abbildung 51). Die Interaktion ist gemäß [32] bestimmt und ergibt sich zu $M_{y,vorh} / M_{y,pl} = 0,5$ und $M_{z,vorh} / M_{z,pl} = 0,813$, wobei die Belastung in dieser Untersuchung ein Prozent unterhalb der Traglast liegt. Auch hier hat die Berücksichtigung der Schubspannungen zwecks Abminderung der maximalen Normalspannung keinen nennenswerten Einfluß.

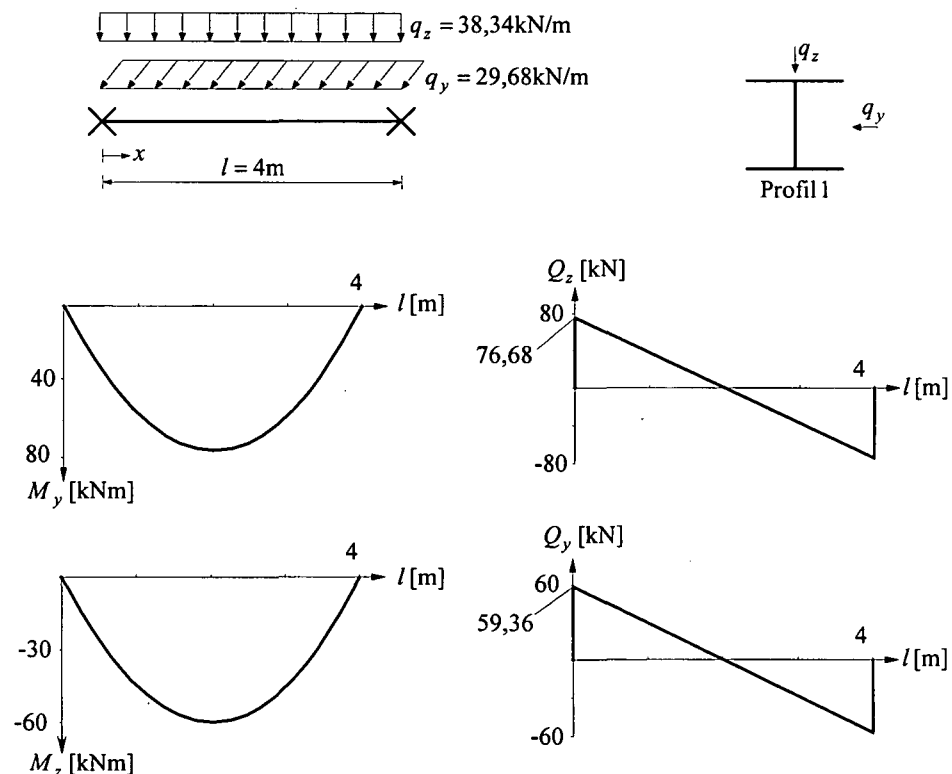


Abbildung 51: System, Belastung und Schnittgrößenverlauf von Untersuchung 7.4.1-2

Werden die bisher angreifenden Streckenlasten durch Einzellasten ersetzt, ergeben sich die in Abbildungen 52 und 53 dargestellten Untersuchungen 7.4.1-3 und 7.4.1-4, in denen der am stärksten belastete Querschnitt in Systemmitte nun auch eine Querkraft aufzunehmen hat. Jedoch verringert in keinem der zwei Fälle die Berücksichtigung der auftretenden Schubspannungen die Traglast um mehr als ein Prozent ihres Wertes. Dies liegt an der Schlankheit der untersuchten Systeme, an dem geringen Quotienten aus Stegfläche zu Querschnittsfläche und weiterhin daran, daß die Belastung hauptsächlich Biegung um die „starke Achse“ hervorruft, bei der das Moment hauptsächlich von den Gurten aufgenommen wird, während die Querkraft Schubspannungen im Steg erzeugt.

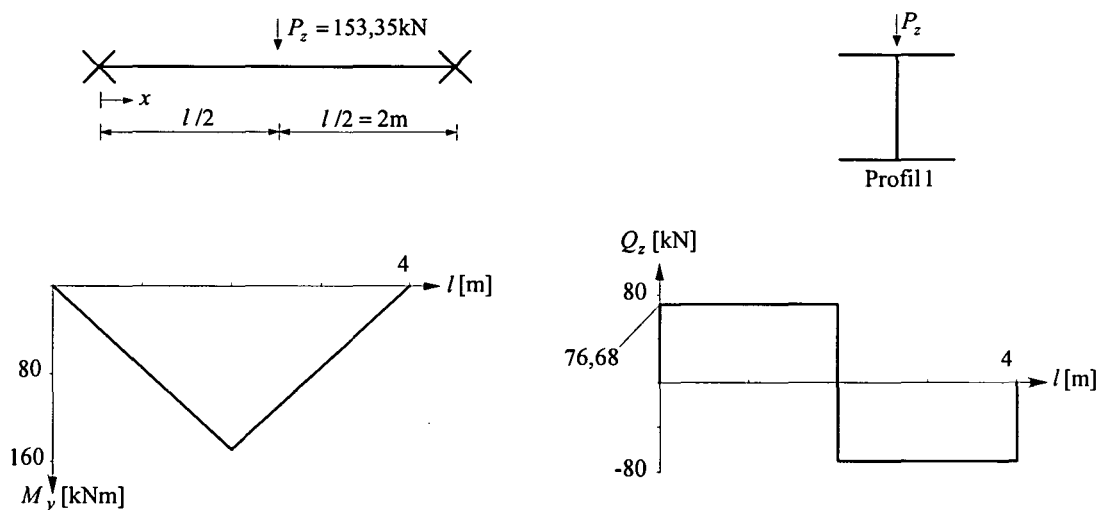


Abbildung 52: System, Belastung, M_y - und Q_z -Verlauf von Untersuchung 7.4.1-3

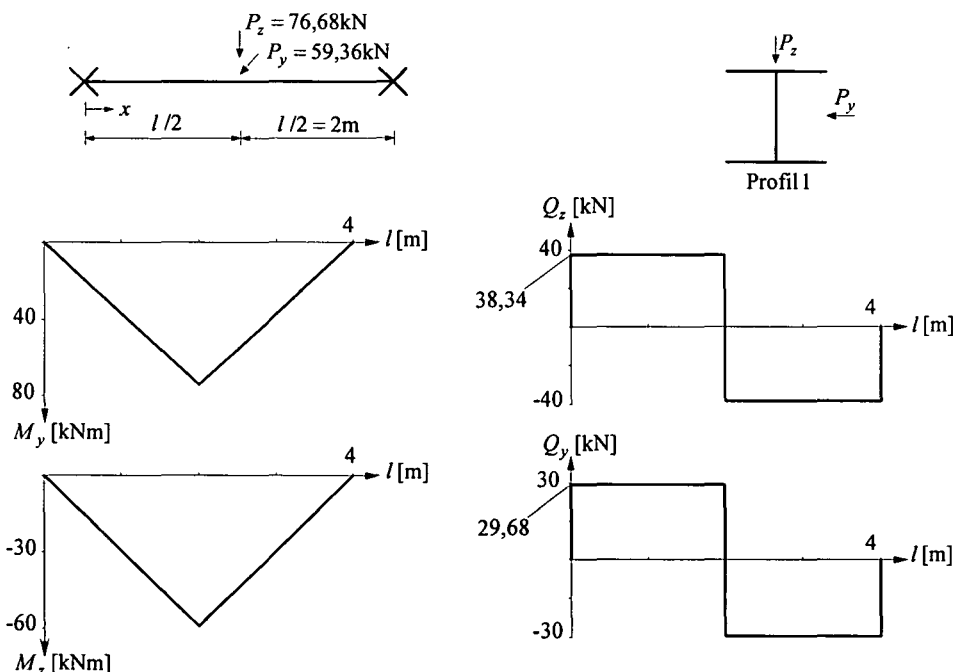


Abbildung 53: System, Belastung und Schnittgrößenverlauf von Untersuchung 7.4.1-4

Die Veränderung von System (an der Einspannstelle wirken maximales Moment und maximale Querkraft an derselben Stelle) und Belastung (allein horizontale Streckenlast, die stets ein Prozent unterhalb der Traglast liegt) führt zu Untersuchung 7.4.1-5. Abbildung 54 zeigt den zu berechnenden Stab sowie die qualitativen Verläufe von Biegemoment und Querkraft. Bei Betrachtung verschiedener Stablängen, die verschiedene Schlankheiten mit sich bringen, macht sich der Einfluß von Schubspannungen bemerkbar (sh. Tabelle 10). Neben der Systemlänge und der Traglast ohne Berücksichtigung von Schubspannungen sind in Tabelle 10 weiterhin die sich ergebende Abminderung der Traglast, das Verhältnis von $\tau_{vorh} / \tau_{fließ}$ und die reduzierte maximale Normalspannung aufgeführt.

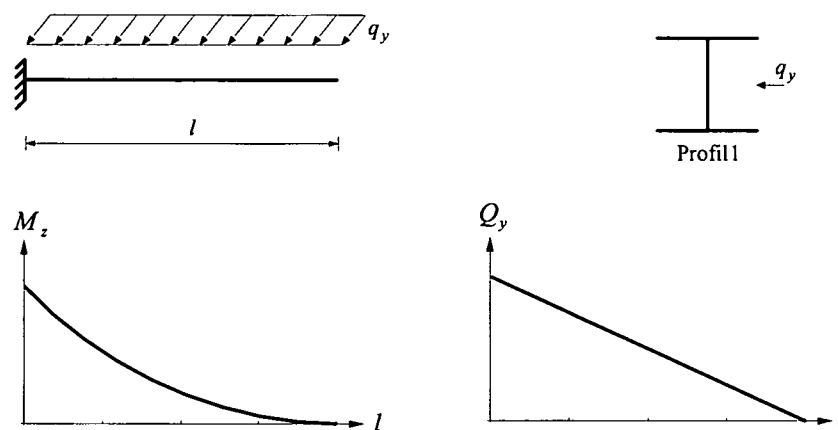


Abbildung 54: System, Belastung, qualitativ M_z -, Q_y -Verlauf von Untersuchung 7.4.1-5

Stablänge l [m]	q_T [kN/m] ohne Schubberücks.	Reduzierung der Traglast [%]	$\tau_{vorh} / \tau_{fließ}$	$\sigma_{red.}$ [kN/m ²]
2,0	36,87	0,38	0,086	23,91
1,0	147,48	1,47	0,171	23,65
0,75	262,19	2,57	0,225	23,38
0,5	589,92	5,51	0,327	22,68

Tabelle 10: Ergebnisse von Untersuchung 7.4-5

Die Bestimmung der Norm [5], nach der Schubspannungen wegen ihrer ansonsten vernachlässigbaren Auswirkung nur bei einem Schubspannungsverhältnis von $\tau_{vorh} / \tau_{fließ} \geq 1/2$ zu berücksichtigen sind, ist auch für Berechnungen von Fließzonen anwendbar.

7.4.2 Schubspannungen aus Torsion

Hier soll untersucht werden, inwieweit Schubspannungen, die überwiegend aus Torsionsmomenten resultieren, plastische Grenzlasten beeinflussen und deswegen zu berücksichtigen oder zu vernachlässigen sind. Primäre und sekundäre Torsionsmomente können entweder ohne Vorhandensein von $M_{x,M}$ allein durch Plastizieren auftreten (sh. Kapitel 7.2.2) oder durch Torsionsbeanspruchung mit Einzeltorsionsmoment und/oder Streckentorsionsmoment hervorgerufen werden. Auf die erste Möglichkeit soll zunächst eingegangen werden. Dazu wird das in [34, Kapitel 9] beschriebene und in Abbildung 55 dargestellte Beispiel eines HEB200 betrachtet. Die Belastung liegt ein Prozent unterhalb der Traglast. Die Untersuchung ergibt, daß das Auftreten einer plastizierten Zone die Torsionsmomente M_x^P und M_x^S erzeugt, deren Verläufe Abbildung 55 zeigt. Die Festlegung des Systemparameters λ , der ein Maß für die Stabslankheit ist, auf den Wert 30 erfordert eine Stablänge von $l = 4,73\text{m}$. Bei Vernachlässigung auftretender Schubspannungen werden die in [34] aufgeführten Ergebnisse bestätigt. Da sowohl die Querkräfte als auch die Torsionsmomente im maximal biegebeanspruchten Querschnitt in Systemmitte die Größe null haben und im übrigen Stabverlauf keine nennenswerte Verringerung der aufnehmbaren Normalspannung mit sich bringen, behält die ohne Schubspannungseinfluß ermittelte Traglast auch bei Berücksichtigung von Schubspannungen ihren Wert bei.

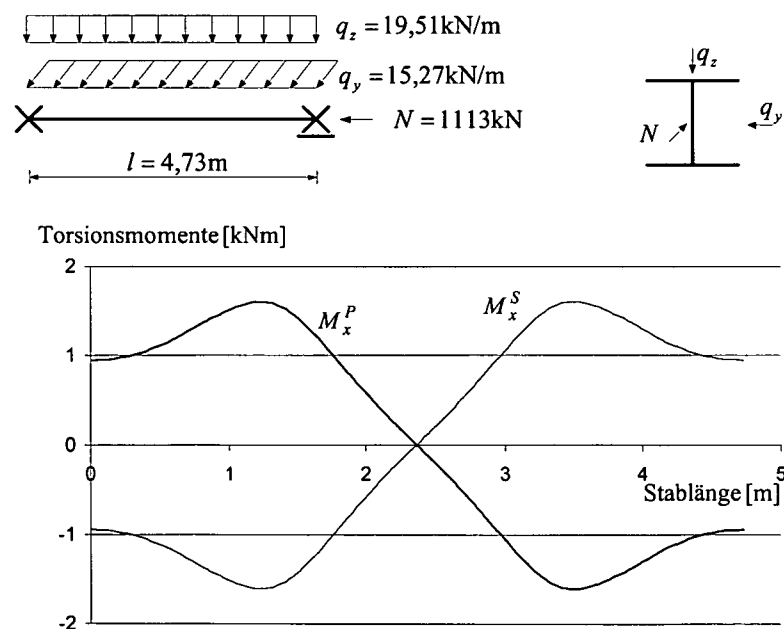


Abbildung 55: Beispiel aus [34, Kapitel 9] mit Torsionsmomentenverlauf

Aus denselben Gründen verringert die Berücksichtigung auftretender Schubspannungen die Traglast des als Untersuchung 7.2.2-3 berechneten Systems (sh. Abbildung 32) nicht. Abbildung 56 stellt die durch Plastizierung hervorgerufenen Torsionsmomentenverläufe des halben Systems (aus Symmetriegründen ausreichend) dar.

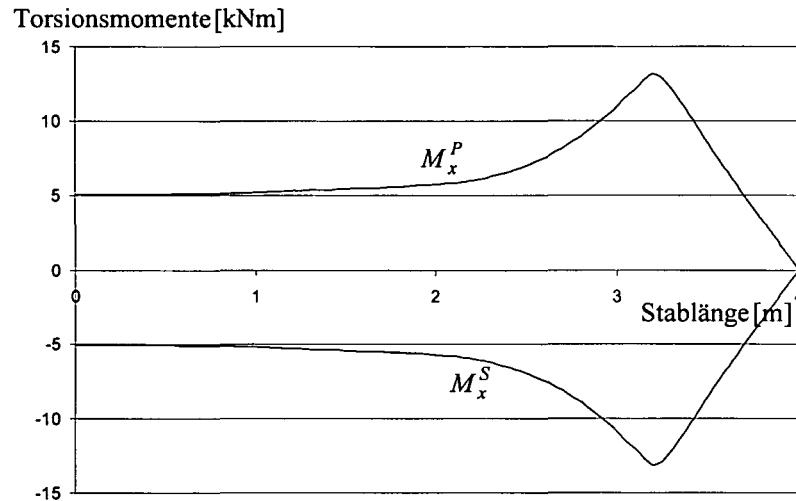


Abbildung 56: Torsionsmomentenverläufe von Untersuchung 7.2.2-3

In der folgenden Untersuchung 7.4.2-1, die auch planmäßige Torsion behandelt, wird das von Untersuchung 7.2.3-4 bereits bekannte System betrachtet, an dem eine Streckenlast von $q = 0,9975q_T$ mit variabler Ausmitte angreift (sh. Abbildung 57). Es werden drei Fälle unterschieden, wobei die Belastung einmal im Schubmittelpunkt (Ausmitte $e = e_M$), einmal im Steg (Ausmitte $e = 0$) und einmal dazwischen (Ausmitte $e = e_M/2$) wirkt. Bei den beiden letzten Laststellungen erhöhen sich die auftretenden Torsionsmomente aufgrund der planmäßigen Torsion. Da jedoch erneut Querkräfte wie Torsionsmomente im maximal biegebeanspruchten Querschnitt in Systemmitte den Wert null haben und im übrigen Stabverlauf zu keiner nennenswerten Verringerung der aufnehmbaren Normalspannung führen, behält die ohne Schubspannungseinfluß ermittelte Traglast auch bei Berücksichtigung von Schubspannungen ihren Wert bei.

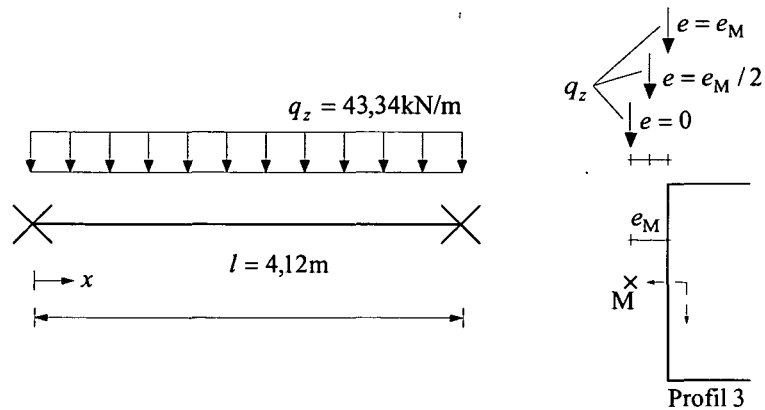


Abbildung 57: System und Belastung von Untersuchung 7.4.2-1

Beanspruchen anstelle der Streckenlasten Einzellasten bei $x = 0,4l = 1,648\text{m}$ (Symmetrie in Stablängsrichtung ist dadurch aufgehoben) den Stab, tritt bei Berechnungen unter Vernachlässigung der auftretenden Schubspannungen folgendes Phänomen auf (Untersuchung 7.4.2-2 mit $P = 0,999P_T$, sh. Abbildung 58).

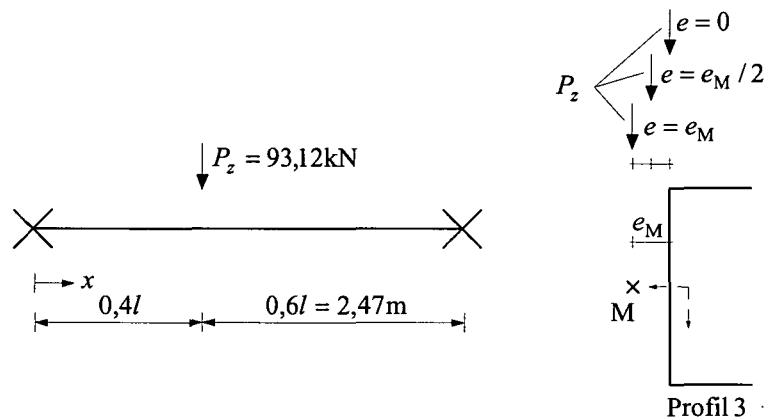


Abbildung 58: System und Belastung von Untersuchung 7.4.2-2

Während sich unabhängig von der Ausmitte der angreifenden Einzellast stets qualitativ und quantitativ derselbe Verlauf des sekundären Torsionsmoments einstellt, der mit einem ebenfalls gleichbleibenden Wölbmomentenverlauf einhergeht, ergibt sich beim primären Torsionsmoment abgesehen vom Lastangriffspunkt für jegliche Lastausmitte ein qualitativ gleicher Verlauf. Dies bedeutet, daß $(M_x^P)'$ und damit auch Γ'_x stets identisch sind. Die Abbildungen 59, 60 und 61 stellen die jeweiligen (Torsions-) Momentenverläufe dar.

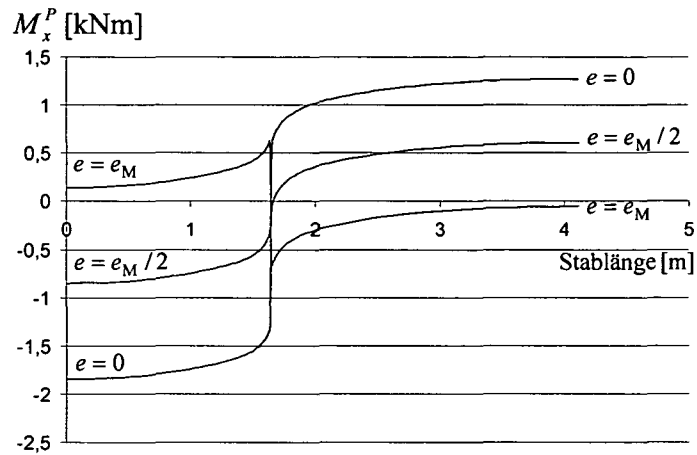


Abbildung 59: Verläufe des primären Torsionsmoments von Untersuchung 7.4.2-2

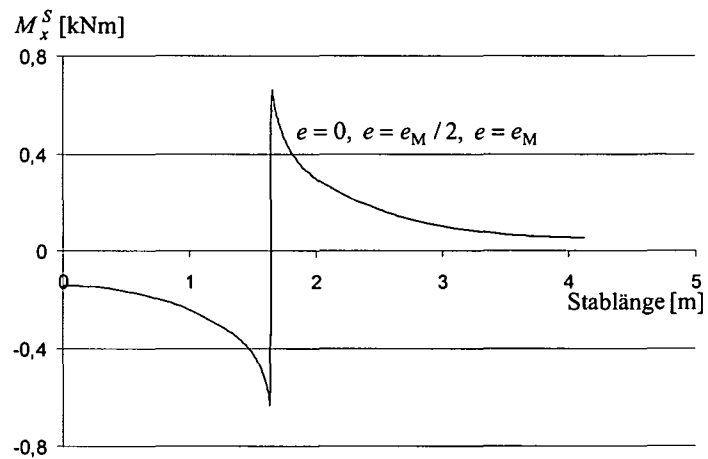


Abbildung 60: Verläufe des sekundären Torsionsmoments von Untersuchung 7.4.2-2

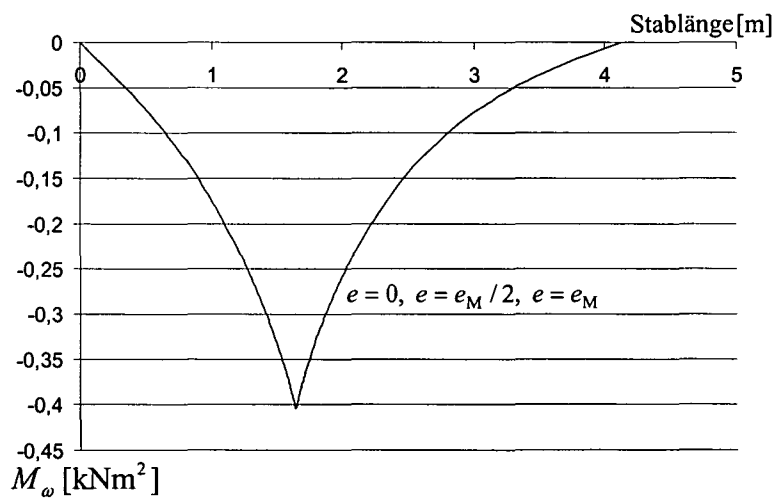


Abbildung 61: Verläufe des Wölbmoments von Untersuchung 7.4.2-2

Bei Vernachlässigung auftretender Schubspannungen ist die Traglast des untersuchten Systems unabhängig von der Lastausmitte (sh. Kapitel 7.3). Der sich unter Traglast bildende Normalspannungsverlauf in Stablängsrichtung führt für jede Ausmitte zu demselben Wölbmomentenverlauf; der Traglastzustand prägt dem System gewissermaßen einen Wölbmomentenverlauf ein, aus dem stets dieselben sekundären Torsionsmomente resultieren. Das zur Lastausmitte proportional wachsende und abgesehen vom Lastangriffspunkt konstante Gesamttorsionsmoment bringt infolgedessen ein qualitativ gleich verlaufendes primäres Torsionsmoment mit sich. Wie das Gesamttorsionsmoment besitzt auch das primäre Torsionsmoment (abgesehen von einer bestimmten Lastausmitte) an der Stelle des Lastangriffspunkts einen Sprung und im Gegensatz zu den bisherigen Untersuchungen keinen Nulldurchgang mit stetigem Verlauf. Dies bedeutet einerseits einen Knick im φ_x -Verlauf und führt andererseits dazu, daß es an der Stelle maximaler Normalspannungsbeanspruchung ein primäres Torsionsmoment zu berücksichtigen gilt, wodurch die Traglast reduziert wird. Verläuft beispielhaft die Wirkungslinie der Einzellast durch den Steg, führt dies zu einer um drei Prozent verminderten Traglast. Die Notwendigkeit, Schubspannungen bei einer Berechnung zu berücksichtigen, nimmt mit steigender Ausmitte und mit Verschieben des Lastangriffspunkts zum Auflager hin zu.

Die folgende Untersuchung 7.4.2-3 verdeutlicht ein weiteres Phänomen einer Berechnung nach Fließzonentheorie, welches bei der Entscheidung, ob Schubspannungen zu berücksichtigen sind, zu beachten ist. Betrachtet wird ein beidseitig gabelgelagerter Stab, an dem eine vertikale Streckenlast mit kleiner Ausmitte angreift (Abbildung 62).

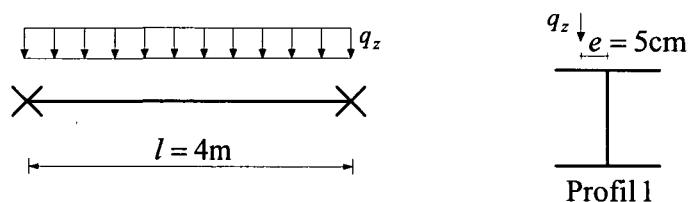


Abbildung 62: System und Belastung von Untersuchung 7.4.2-3

Unter Laststeigerung im elastischen Bereich wachsen das Torsionsmoment $M_{x,M}$ (hier: $M_{x,M} = M_x$) und gleichfalls dessen Komponenten M_x^P und M_x^S in stets gleicher Ver- bzw. Aufteilung an. Beginnt der Stab unter weiterer Laststeigerung zu plastizieren, steigt nur M_x

proportional zur Belastung an, die Aufteilung in M_x^P und M_x^S hingegen verändert sich. Die Abbildungen 63, 64 und 65 stellen die Torsionsmomentenverläufe in Abhängigkeit des Lastfaktors (bei $q = 0,62q_T$ trägt der Stab noch elastisch) dar.

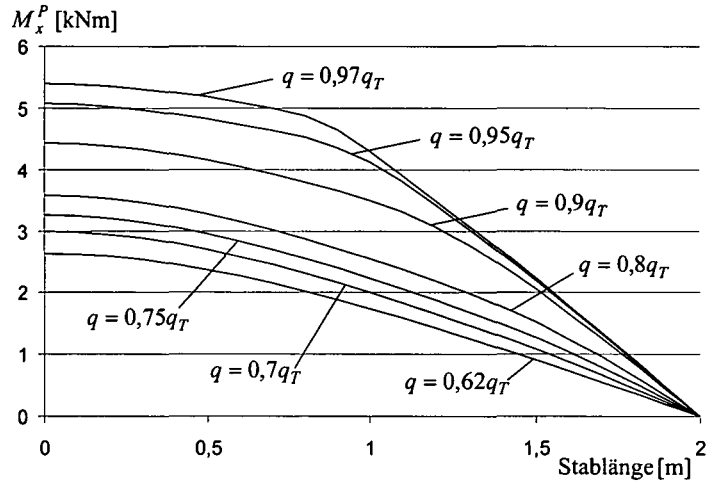


Abbildung 63: M_x^P -Verlauf von Untersuchung 7.4.2-3

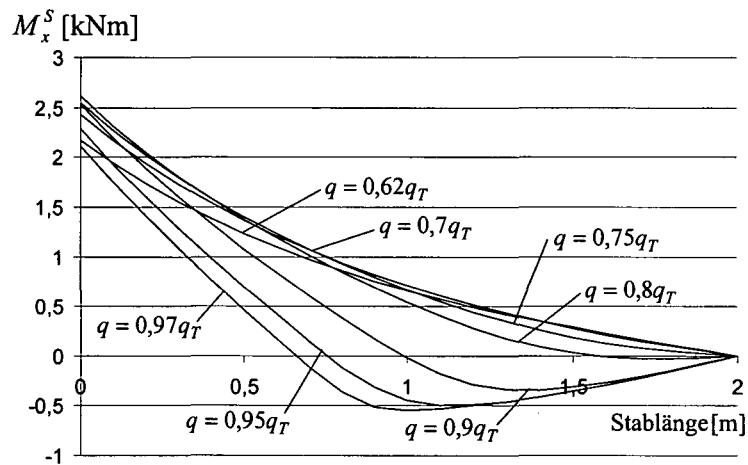
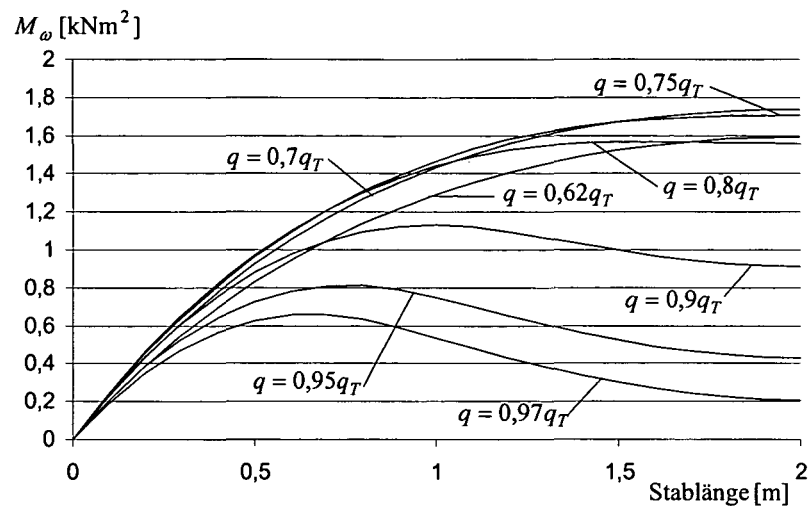


Abbildung 64: M_x^S -Verlauf von Untersuchung 7.4.2-3

Abbildung 65: M_ω -Verlauf von Untersuchung 7.4.2-3

Man erkennt, daß die einzelnen Werte des M_x^S -Verlaufs ab einer bestimmten Laststufe trotz weiterer Laststeigerung abnehmen und sogar negative Werte annehmen (dies erklärt sich dadurch, daß sich M_ω in Stabmitte dem Wert null annähert), wodurch M_x^P überproportional anwächst und einen stets anderen Kurvenverlauf erhält. Diese Erkenntnis gewinnt bei einer Bemessung vor allem deswegen an Bedeutung, da offene Profile vergleichsweise geringe Torsionssteifigkeit besitzen und infolgedessen nur ein kleines primäres Torsionsmoment aufnehmen können. Wählt man anstelle einer Ausmitte von 5cm eine von 10cm (die Streckenlast greift am Flanschende an), wird bei einer Laststufe von $q = 0,69q_T$ bereits das nach Addition aller Bleche gemäß $M_{\xi, \text{Blech}, pl}^P = \tau_{\text{fließ}} \cdot b^2 \cdot (2h - b) / 4$ ermittelte maximale M_x^P des Querschnitts an den Auflagern erreicht und eine Berücksichtigung auftretender Schubspannungen wird somit aus Sicherheitsgründen erforderlich. Daß das in Abbildung 65 dargestellte Wölbmoment unter Laststeigerung in Stabmitte gegen null strebt und unter Traglast diesen Wert auch erreicht, leitet sich aus dem vollplastischen Spannungsverlauf her und ist nicht auf eine in [14] geforderte Gleichgewichtsbedingung zurückzuführen.

7.5 Theorie II. Ordnung

7.5.1 Untersuchungen mit Systembelastung durch Normalkraft

Gemäß der Überschrift werden in diesem Kapitel Systeme untersucht, die unter anderem durch eine Normalkraft belastet sind, wodurch der in der Praxis verwendeten Bezeichnung „Theorie großer Normalkräfte“ jedoch nur teilweise nachgekommen wird. Ziel der Untersuchungen ist es, Erkenntnisse über die Stabilitätsgefährdung durch Biegeknicken und Biegedrillknicken in Fließzonen zu gewinnen. Der Lastfaktor $f = 1$ bezieht sich stets auf die nach Theorie I. Ordnung ohne Berücksichtigung auftretender Schubspannungen ermittelte Traglast. Diese Annahme ermöglicht, die Reduzierung der maximalen Belastung bei Gleichgewichtsfindung am verformten System gegenüber der am unverformten System direkt zu erkennen.

Zunächst wird die aus Kapitel 7.4.2 bekannte und in [34] zu findende Untersuchung eines gabelgelagerten und durch horizontale und vertikale Streckenlast sowie durch Normalkraft beanspruchte HEB 200-Profils (sh. Abbildung 55) nach Theorie II. Ordnung berechnet. Als anzusetzende Vorverformungen (geometrische Ersatzimperfektionen) werden Vorkrümmungen in Form von quadratischen Parabeln mit dem Stich w^0 und v^0 gewählt, wodurch die zugehörigen Ersatzlasten Gleichlasten darstellen. Da konstante Streckenlasten das System beanspruchen, lassen sich die Vorverformungen durch die Annahme erfassen, daß die angesetzte Belastung die Anteile der Ersatzlasten bereits enthält. Im Last-Verformungs-Diagramm (Abbildung 66) sind die Ergebnisse nach Theorie I. und II. Ordnung gegenübergestellt.

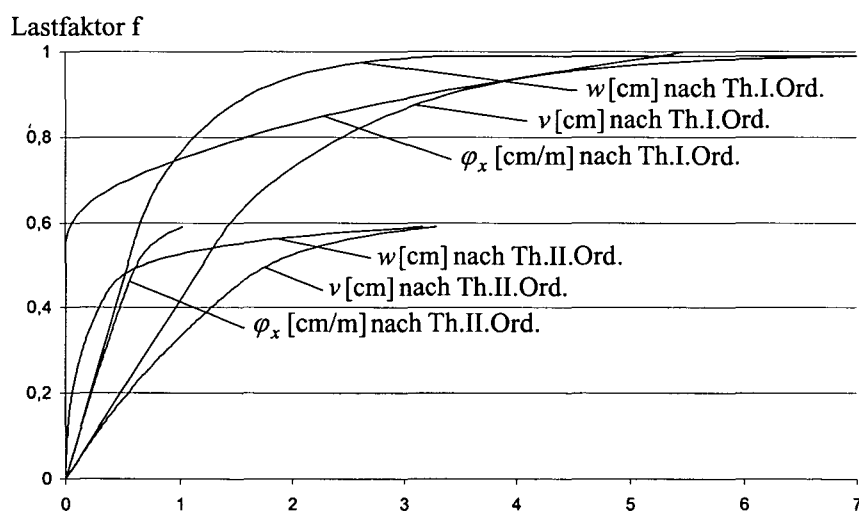


Abbildung 66: Last-Verformungs-Diagramm von Untersuchung 7.5.1-1

Abgesehen von geringfügigen Abweichungen ergeben sich die in [34] aufgeführten und dort in den Bildern 9 und 10 dargestellten Ergebnisse. An den gemäß Theorie I. Ordnung berechneten Verformungen erkennt man, daß sich

- eine Verdrehung erst bei Überschreiten der elastischen Grenzlast einstellt (sh. Kapitel 7.2.2)
- die Verdrehung unter Traglast einen bestimmten, endlichen Wert annimmt (vgl. [20], [35])
- die Durchbiegungen w und v zunächst linear, jenseits der elastischen Grenzlast nicht-linear ansteigen und den Grenzwert unendlich anstreben (sh. Kapitel 7.2.3).

Unter Anwendung der Theorie II. Ordnung versagt das System bei einer Laststufe von $f = 0,594$; im Gegensatz zur Theorie I. Ordnung tritt unter Laststeigerung kein allmähliches Durchplastizieren des maximal beanspruchten Querschnitts auf. Die relativ geringe Kollapslast erklärt sich unter anderem in dem nichtlinearen Ansteigen der Verformungen im plastischen Bereich, welches direkten Einfluß auf die Gleichgewichtsfindung am verformten System hat.

Aufgrund von Gleichung (4-42) tritt wiederum im Unterschied zu Theorie I. Ordnung schon im elastischen Bereich eine Verdrehung φ_x auf. Eine Berechnung unter Berücksichtigung auftretender Schubspannungen verringert den Traglastfaktor nicht. Dies ist in Analogie zur Untersuchung nach Theorie I. Ordnung (sh. Kapitel 7.4) darin begründet, daß sowohl Querkräfte als auch Torsionsmomente im maximal biegebeanspruchten Querschnitt in Systemmitte die Größe null haben und im übrigen Stabverlauf keine nennenswerte Abminderung von σ_ξ mit sich bringen.

Da es sich bei der folgenden Untersuchung 7.5.1-2 erneut um ein gabelgelagertes, doppel-symmetrisches Profil unter horizontaler und vertikaler Streckenlast sowie Normalkraftbeanspruchung handelt, ist sie der zuvor betrachteten Aufgabe sehr ähnlich. Allein die Auf- bzw. Verteilung der Belastungskomponenten hat sich dahingehend verändert, daß sich der Normal-kraftanteil verringert. Abbildung 67 zeigt System und Belastung, wobei die Belastung der nach Theorie I. Ordnung ermittelten Traglast entspricht; die $M_y/M_z/N$ -Interaktion wurde nach [32] ermittelt.

Demnach ergeben sich in Systemmitte:

$$n = N_{vorh} / N_{pl} = 187,44\text{kN} / 1874,4\text{kN} = 0,1$$

$$m_y = M_{y,vorh} / M_{y,pl} = 61,96\text{kNm} / 154,9\text{kNm} = 0,4$$

$$m_z = M_{z,vorh} / M_{z,pl} = 65,603\text{kNm} / 73,74\text{kNm} = 0,8897$$

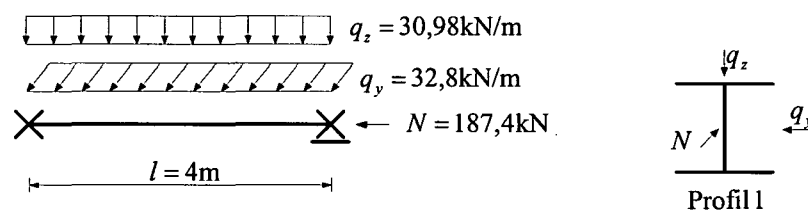


Abbildung 67: System und Belastung von Untersuchung 7.5.1-2

Werden die Gleichgewichtsbedingungen am verformten System formuliert, tritt bei einem auf die Traglast gemäß Theorie I. Ordnung bezogenen Faktor von $f = 0,85$ Systemversagen auf. Dieser im Vergleich zu Untersuchung 7.5.1-1 größere maximale Lastfaktor begründet sich in der kürzeren Stablänge, die zu geringerer Systemschlankheit führt, sowie in der kleineren Normalkraftbeanspruchung, die einen vergleichsweise geringen Zuwachs der Verformungen zu denen nach Theorie I. Ordnung mit sich bringt.

In Abbildung 68 sind die Last-Verformungs-Kurven nach Theorie I. und II. Ordnung dargestellt. Erst bei einer Beanspruchung des Systems oberhalb der elastischen Grenzlast ($f = 0,51$) wachsen die Durchbiegungen merklich nichtlinear an. Eine Untersuchung der auftretenden Spannungsverteilungen im Querschnitt ergibt, daß kurz vor Erreichen der maximalen Belastung nach Theorie II. Ordnung die Flansche des meistbeanspruchten Querschnitts (in Systemmitte) nahezu vollplastisch sind.

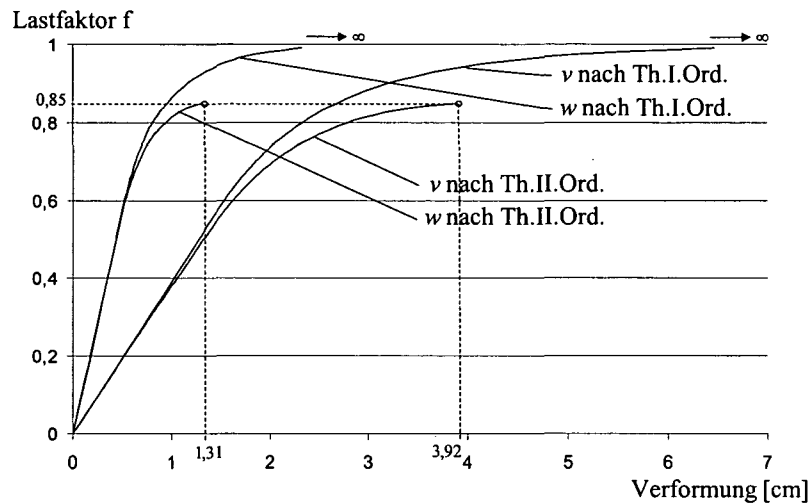


Abbildung 68: Last-Verformungs-Diagramm von Untersuchung 7.5.1-2

Ein Vergleich der bei Berechnung der Laststufe $f = 0,85$ gemäß Theorie I. und II. Ordnung auftretenden Verdrehung φ_x zeigt große Unterschiede (sh. Abbildung 69) und weist auf die Biegedrillknickgefährdung hin.

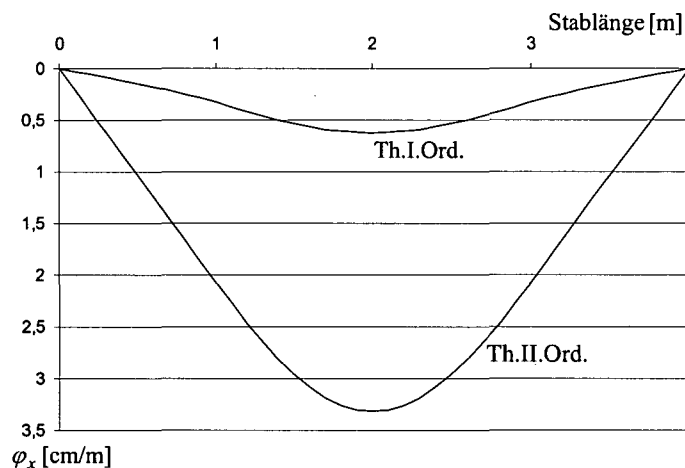


Abbildung 69: Verdrehungen φ_x von Untersuchung 7.5.1-2

Daß sich bei Berechnung nach Theorie II. Ordnung eine über viermal größere Verdrehung des Stabes als bei Berechnung nach Theorie I. Ordnung einstellt, führt dazu, im folgenden Kapitel das Stabilitätsverhalten bzw. die Biegedrillknickgefährdung von Profilen mit geringer Torsionssteifigkeit zu untersuchen.

Die Differenz der maximalen Belastung von 15% bei Zugrundelegung von Theorie I. und Theorie II. Ordnung legt nahe, daß ein Stab auch bei geringer Normalkraftbeanspruchung nach letztgenannter Theorie zu untersuchen ist. Analog zur Untersuchung 7.5.1-1 verringert die Berücksichtigung auftretender Schubspannungen den Traglastfaktor nicht.

Die folgende Untersuchung 7.5.1-3 ist der vorangegangenen wiederum ähnlich und dient dem Zweck einer Traglastbestimmung. Weiteres Ziel der Untersuchung ist ein Vergleich der Ergebnisse mit denjenigen, die einerseits einem praktischen Versuch und andererseits einer Berechnung mit dem Finiten-Element-Programm ABAQUS zu entnehmen sind. Abbildung 70 skizziert System und exzentrische Normalkraftbelastung, Tabelle 11 zeigt die in [16] aufgeführten Eingangswerte der Berechnung.

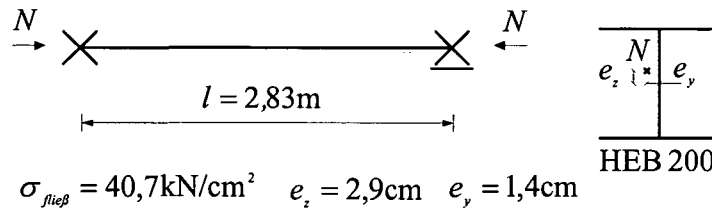


Abbildung 70: System und Belastung von Untersuchung 7.5.1-3

Um trotz der Querschnittsidealisierung die St. Venant'sche Torsionssteifigkeit relativ genau zu erfassen, wird der angegebene Ersatz-Schubmodul verwendet. Als Vorverformung wird eine parabelförmige Vorkrümmung mit den Stichen $w^0 = -l/18867$ und $v^0 = l/47167$ (sh. [16]) angesetzt.

	h [cm]	b [cm]	t_{OG}, t_{UG} [cm]	s [cm]	G_{Ersatz} [kN/cm ²]
UPE 200	18,816	20,027	1,508	0,875	9498

Tabelle 11: Eingangswerte der Untersuchung 7.5.1-3

Die Berechnung des Systems führt zu den in Tabelle 12 angegebenen Größen. Aufgeführt sind desweiteren die Ergebnisse, die sich experimentell im Rahmen eines Forschungsvorhabens sowie durch Rechnung mit dem Programmsystem ABAQUS ergaben [16].

	Versuch	ABAQUS	Programm dieser Arbeit
$\max P_z$ [kN]	1706	1671	1702
M_y [kNm]	-	61,91	59,61
M_z [kNm]	-	60,04	57,07
φ_x [rad]	-0,035	-0,046	-0,047

Quelle: vgl. [16, Tabelle 4]

Tabelle 12: Zusammenstellung der Ergebnisse für Untersuchung 7.5.1-3

Abbildung 71 stellt die Spannungsverteilung des Querschnitts in Feldmitte (dieser Querschnitt ist aus Gründen der Symmetrie nicht verwölbt) kurz vor Erreichen der Traglast dar. Zum Vergleich sind zusätzlich die mit ABAQUS ermittelten Größen aufgeführt. Die Traglast wird bei teilplastischem Querschnitt erreicht.

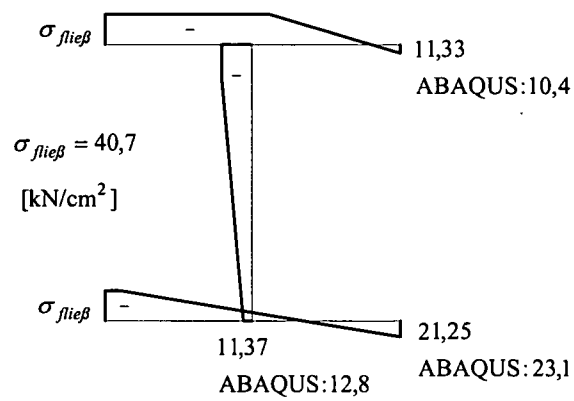


Abbildung 71: Spannungsverteilung des Querschnitts in Systemmitte

7.5.2 Untersuchungen ohne Systembelastung durch Normalkraft

In diesem Kapitel werden Systeme untersucht, die durch teilweise ausmittig angreifende Querlasten und nicht durch Normalkraft beansprucht sind. Ziel ist es, mit Hilfe von drei Untersuchungen (U- und I-Profil, Einzel- und Streckenlast) Erkenntnisse über die Stabilitätsgefährdung quer- und torsionsbelasteter Stäbe in Fließzonen zu gewinnen.

Zu diesem Zweck wird das in Abbildung 72 dargestellte System berechnet, wobei die Wirkungslinie der vertikalen Einzellast durch den Steg verläuft (vgl. Untersuchung 7.4.2-2). Nach Theorie I. Ordnung ergibt sich eine Traglast von 93,217 kN, die sich bei Berücksichtigung der wirkenden Schubspannungen um rund 3% reduziert.

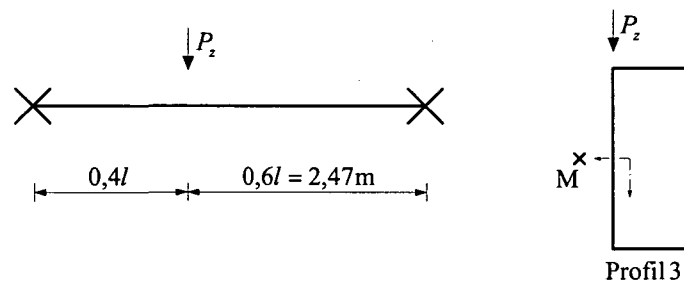


Abbildung 72: System und Belastung von Untersuchung 7.5.2-1

Als Vorverformungen werden Vorkrümmungen mit einem Stich von $w^0 = l/200$ und $v^0 = -l/200$ angesetzt. Die Berechnung gemäß Theorie II. Ordnung hat zum Ergebnis, daß sich die maximale Belastung gegenüber der bei Gleichgewichtsfindung am unverformten System um fast 28 % verringert, wodurch sich die Notwendigkeit einer Biegedrillknickuntersuchung bestätigt. Greift die Einzellast nicht im Steg, sondern im Schubmittelpunkt an und bewirkt infolgedessen ein kleineres Torsionsmoment, reduziert sich die Traglast nur um einen etwa halb so großen Betrag, nämlich um 15%.

Im folgenden soll untersucht werden, inwiefern die Torsionssteifigkeit Einfluß auf die Traglast hat. Dazu wird die Torsionssteifigkeit von Profil 3 der Untersuchung 7.5.2-1 dahingehend erhöht, daß die Blechdicken anstelle von 1cm nun 2cm aufweisen. Während sich dadurch die Biegesteifigkeit verdoppelt, wodurch sich auch die Traglast nach Theorie I. Ordnung verzweifacht, wächst die Torsionssteifigkeit um das achtfache. Die Wahl größerer Blechdicken bewirkt, daß sich die maximal aufnehmbare Last nach Theorie II. Ordnung gegenüber einer Berechnung nach Theorie I. Ordnung nun nicht mehr um rund 28%, sondern um 11% reduziert. Bei weiterer Vergrößerung der Blechdicke auf 4cm (Biegesteifigkeit und Traglast gemäß Theorie I. Ordnung nehmen den vierfachen Wert an, die Torsionssteifigkeit den 64-fachen),

versagt das System bei Berechnung gemäß Theorie II. Ordnung erst bei einem Traglastfaktor von $f = 0,97$, die maximale Belastung reduziert sich aufgrund Gleichgewichtsfindung am verformten System um nur 3%. Tabelle 13 zeigt die Ergebnisse der Blechdickenvariation von Untersuchung 7.5.2-1.

Blechdicke [cm]	Traglast nach Th. I. Ord. [kN]	Traglast nach Th. II. Ord. [kN]	Reduzierung um [%]
1	93,217	67	28
2	186,43	166	11
4	372,87	362	3

Tabelle 13: Traglasten nach Th. I. und II. Ordnung von Untersuchung 7.5.2-1

Die naheliegende Erklärung dieser großen Differenzen hinsichtlich Traglastreduzierung aufgrund von Biegedrillknicken ist, daß die erhöhte Torsionssteifigkeit einer Stabverdrehung derart entgegenwirkt bzw. sie derart behindert, daß sich der Einfluß einer Gleichgewichtsfindung am verformten System gegenüber einer am unverformten System immer weniger auswirkt. Erkennbar ist dies in Abbildung 73, welche diejenigen Verdrehungen φ_x darstellt, die sich unter der jeweiligen Traglast nach Theorie II. Ordnung ergeben.

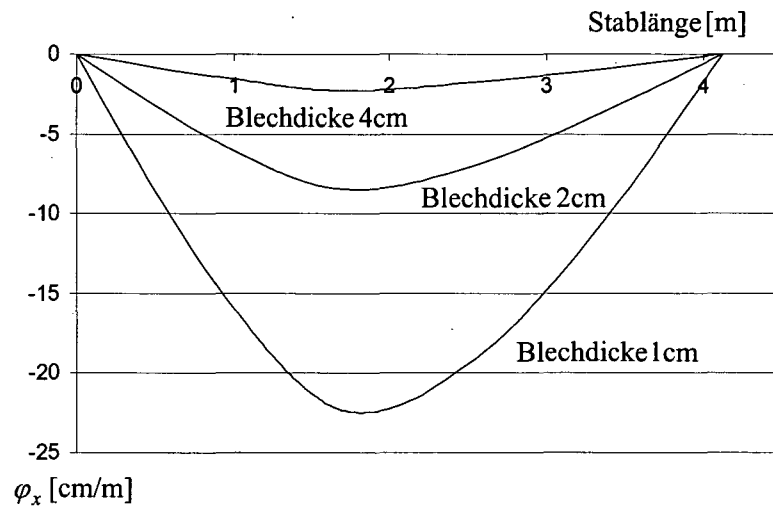


Abbildung 73: Verdrehungen φ_x bei unterschiedlichen Blechdicken unter Traglast

Die folgende Untersuchung 7.5.2-2 ist der vorangegangenen sehr ähnlich und dient dem Zweck einer Traglastbestimmung unter dem Einfluß der Theorie II. Ordnung. Weiteres Ziel der Untersuchung ist ein Vergleich der Ergebnisse mit denjenigen, die einerseits einem praktischen Versuch und andererseits einer Berechnung mit dem Finiten-Element-Programm ABAQUS zu entnehmen sind. Abbildung 74 skizziert System und Belastung, Tabelle 14 zeigt die Eingangswerte der Berechnung (übernommen aus [16]). Um trotz der Querschnittsidealisierung die St.Venant'sche Torsionssteifigkeit relativ genau zu erfassen, wird der angegebene Ersatz-Schubmodul verwendet. Als Vorverformung wird eine parabelförmige Vorkrümmung mit einem Stich von $v^0 = -l/300$ gewählt.

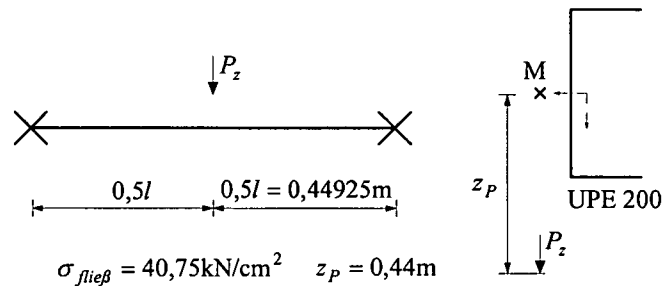


Abbildung 74: System und Belastung von Untersuchung 7.5.2-2

	h [cm]	b [cm]	t_{OG}, t_{UG} [cm]	s [cm]	G_{Ersatz} [kN/cm ²]
UPE 200	18,978	8,105	1,052	0,602	8583

Tabelle 14: Eingangswerte der Untersuchung 7.5.2-2

Die Berechnung des Systems führt zu den in Tabelle 15 angegebenen Größen. Aufgeführt sind desweiteren die Ergebnisse, die sich experimentell im Rahmen eines Forschungsvorhabens sowie durch Rechnung mit dem Programmsystem ABAQUS ergaben [16]. Der in der letzten Spalte dargestellte Vergleich zeigt, wie wenig die theoretisch ermittelten Traglasten und die auftretenden Momente von einander abweichen. Die im Versuch bestimmte Traglast liegt unter anderem aufgrund von Verfestigungseffekten über den theoretisch erzielten Werten. Da der Einfluß des Biegedrillknickens sehr gering ist, kommt es unter Traglast zu Vollplastizität in Systemmitte.

	Versuch	ABAQUS	Programm dieser Arbeit	Differenz zw. ABAQUS und Programm dieser Arbeit [%]
$\max P_z$ [kN]	407,9	393,4	389	1,118
M_y [kNm]	-	87,93	87,38	0,625
M_ω [kNm ²]	-	-0,2291	-0,2204	3,797

Quelle: vgl. [16, Tabelle 5]

Tabelle 15: Zusammenstellung der Ergebnisse für Untersuchung 7.5.2-2

Wird Untersuchung 7.5.2-2 dahingehend verändert, daß die Systemlänge und somit die Schlankheit erhöht und der Lastangriffspunkt über den Steg geschoben wird, wirkt sich der Einfluß der Theorie II. Ordnung auf die Traglast deutlich aus (Untersuchung 7.5.2-3). Abbildung 75 stellt System und Belastung dar, in Tabelle 16 sind die zur vorherigen Untersuchung minimal veränderten Eingangswerte (aus [16] übernommen) aufgeführt.

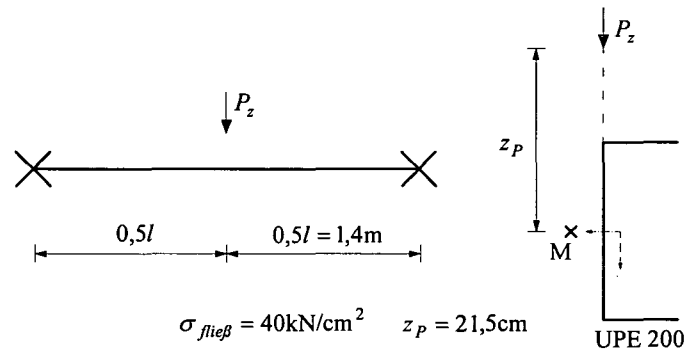


Abbildung 75: System und Belastung von Untersuchung 7.5.2-3

	h [cm]	b [cm]	t_{OG}, t_{UG} [cm]	s [cm]	G_{Ersatz} [kN/cm ²]
UPE 200	18,999	7,944	1,131	0,618	8477

Tabelle 16: Eingangswerte der Untersuchung 7.5.2-3

Die Berechnung des Systems gemäß Theorie II. Ordnung unter Ansatz einer parabelförmigen Vorverkrümmung von $v^0 = l/784$ ergibt eine Traglast von 53,2kN. Tabelle 17 zeigt verschiedene Ergebnisgrößen, die einerseits theoretisch und andererseits praktisch ermittelt wurden (sh. [16]). Unter Traglast ist der meistbeanspruchte Querschnitt in Systemmitte nicht voll-, sondern teilplastisch, Stabilitätsversagen ist maßgebend.

	Versuch	ABAQUS	Programm dieser Arbeit
$\max P_z$ [kN]	51,2	53,54	53,2
M_y [kNm]	-	36,05	34,05
M_z [kNm]	-	9,49	10,43
φ_x [rad]	-0,32	-0,27	-0,31

Quelle: vgl. [16, Tabelle 6]

Tabelle 17: Zusammenstellung der Ergebnisse für Untersuchung 7.5.2-3

In Untersuchung 7.5.2-3 wird die Traglast eines aus Kapitel 7.2 bereits bekannten Systems (sh. Untersuchungen 7.2.1-1, 7.2.3-2) nach Theorie II. Ordnung ermittelt. In Anlehnung an den in [21, Bild 1] berechneten Einfeldträger wirkt die Streckenlast nun nicht im Schwer- bzw. Schubmittelpunkt, sondern greift am Obergurt an, wodurch die Untersuchung einen größeren baupraktischen Bezug erhält (sh. Abbildung 76). Dies bewirkt, daß die sich bei einer Stabverdrehung infolge Vorverformung und Plastizität einstellende Lastausmitte zu erhöhter Torsionsbeanspruchung sowie weiterer Verdrehung führt und sich deswegen negativ auf das Tragverhalten auswirkt.

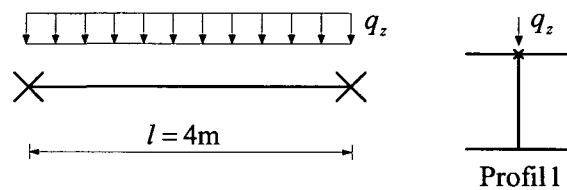


Abbildung 76: System und Belastung von Untersuchung 7.5.2-3

Als Vorverformungen werden wiederum Vorkrümmungen mit einem Stich von $w^0 = l/200$ und $v^0 = l/200$ angesetzt. Die Berechnung nach Theorie II. Ordnung ergibt, daß das System bei einem Traglastfaktor von $f = 0,89$ ($f = 1$ entspricht der nach Theorie I. Ordnung ermittelten Traglast von $q = 77,45 \text{ kN/m}$) versagt. Abbildung 77 stellt das Last-Verformungs-Diagramm dar. Abbildung 78 zeigt, daß der maximal beanspruchte Querschnitt in Systemmitte bei $f = 0,89$ noch teilplastisch ist.

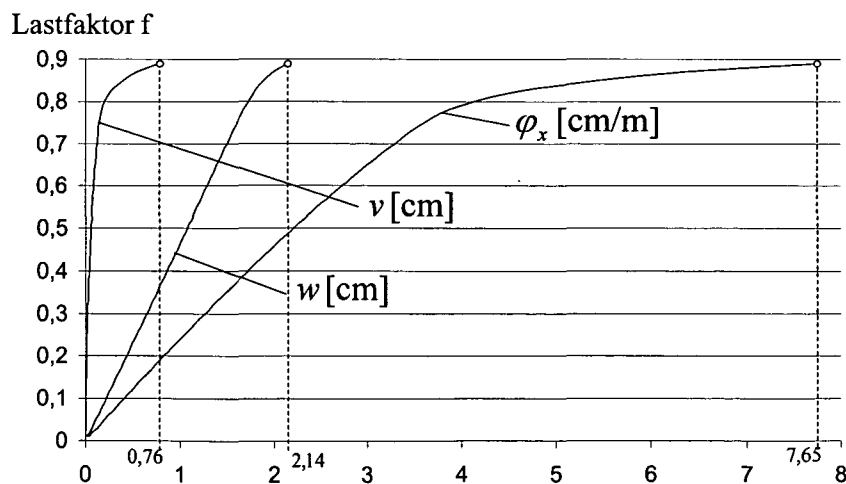


Abbildung 77: Last-Verformungs-Diagramm von Untersuchung 7.5.2-3

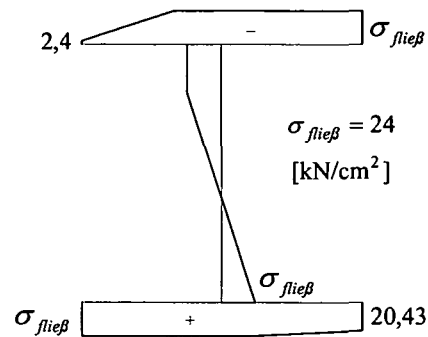


Abbildung 78: Spannungsverteilung des Querschnitts in Systemmitte bei $f = 0,89$

Bei zusätzlicher Berücksichtigung auftretender Schubspannungen reduziert sich der Traglastfaktor geringfügig (um weniger als 2%). Die Gleichgewichtsfindung am verformten System macht die Berücksichtigung auftretender Schubspannungen vielfach vernachlässigbar, da diese bei der maximal erreichbaren Laststufe noch relativ geringe Beträge aufweisen.

7.6 Verschiebungsgrößen unter Laststeigerung und Traglastbestimmung bei ausmittiger Querbelastung

In diesem Kapitel wird ein beidseitig gabelgelagertes allgemeines Profil (Profil 4) untersucht, an dem eine horizontale Einzellast in Stegmitte nach einem Drittel der Systemlänge angreift (sh. Abbildung 79). Mehrere Phänomene der Fließzonentheorie verdeutlichen sich an dieser Untersuchung 7.6.

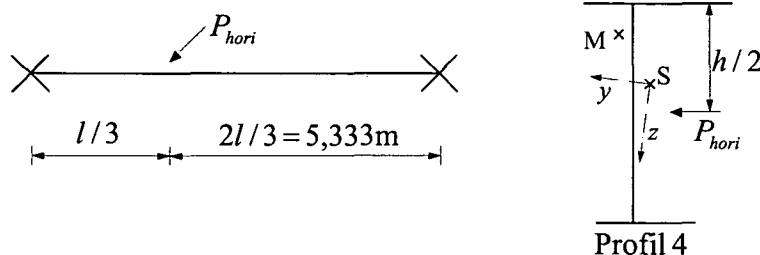


Abbildung 79: System und Belastung von Untersuchung 7.6

Bei Betrachtung des zugehörigen Last-Verformungs-Diagramms (Abbildung 80 und als Details davon Abbildung 81 und Abbildung 82), das die Berechnungen nach Theorie I. Ordnung ohne Berücksichtigung auftretender Schubspannungen ergeben, fällt auf, daß

- sich bei recht kleiner Laststufe ein nichtlinearer Bereich einstellt
- die Durchbiegung unter Laststeigerung jedoch wieder nahezu proportional anwächst
- sich ab einer bestimmten Belastung erneut ein nichtlinearer Verlauf ergibt
- unter Traglast die Verformung einen endlichen (Grenz-)Wert annimmt

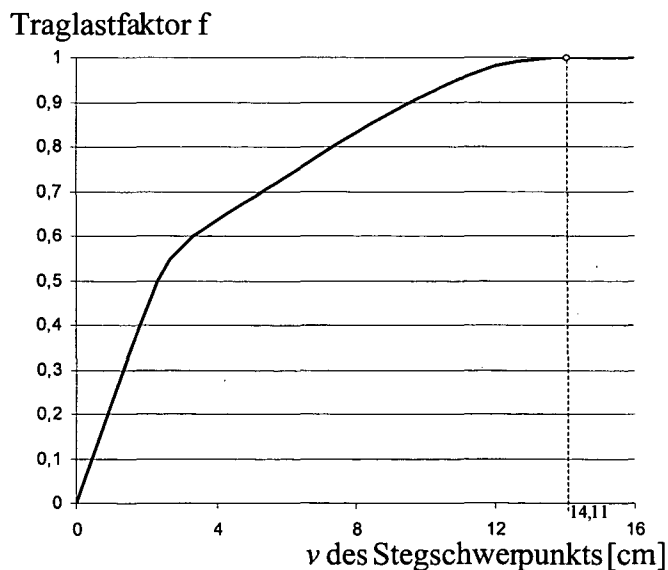


Abbildung 80: Last-Verformungs-Diagramm von Untersuchung 7.6

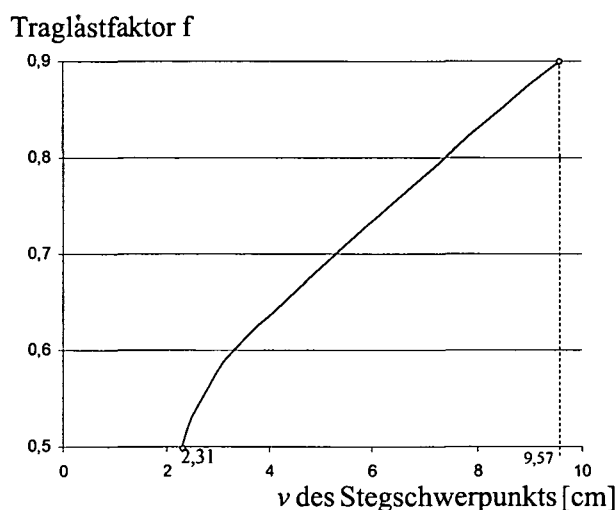


Abbildung 81: Ausschnitt des Last-Verformungs-Diagramms von Untersuchung 7.6

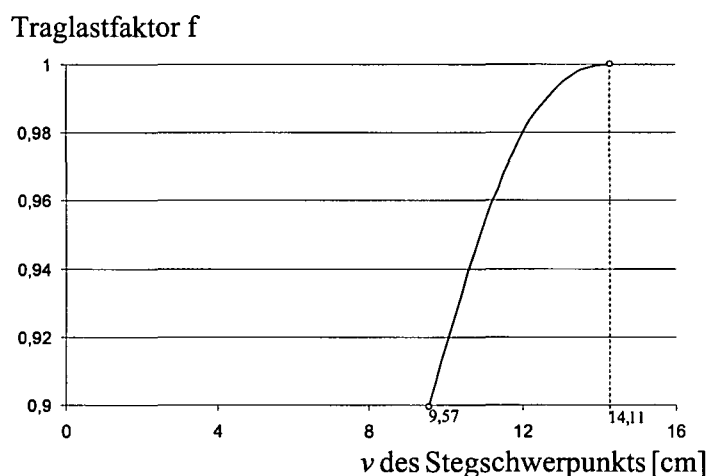


Abbildung 82: Ausschnitt des Last-Verformungs-Diagramms von Untersuchung 7.6

Die Begründung dafür, daß sich im Bereich $f \approx 0,62$ bis $f \approx 0,85$ erneut ein fast elastisches Last-Verformungs-Verhalten einstellt, liegt in der Art und Weise der Querschnittsplastizierung. Der Untergurt (und nur dieser!) beginnt bei recht niedrigem Lastniveau, d.h. bei $f \approx 0,35$, zu fließen, wodurch es zu einer nichtlinearen Last-Verformungs-Beziehung kommt, die zuerst bloß wenig, dann ab $f \approx 0,55$ deutlich erkennbar wird. Unter Laststeigerung plastiziert der Untergurt immer weiter, während die beiden anderen Bleche noch elastisch sind. Bei einer Laststufe von $f \approx 0,62$ ist der Untergurt durchplastiziert, also vollplastisch und zusätzliche Belastung kann nur durch Steg und Obergurt aufgenommen werden. Da die Spannungen von Steg und Obergurt den Wert der Fließspannung noch nicht erreicht haben, verhält sich der Stab bei weiterer Laststeigerung erneut elastisch. Erst wenn der Obergurt zu fließen beginnt, stellt sich wiederum Nichtlinearität ein.

Der unter Traglast versagende Querschnitt ist wie immer vollplastisch. Die Durchbiegung strebt bei Stabbelastung durch eine Einzellast einem endlichen Grenzwert zu (vgl. Kapitel 7.2.2).

Anhand der unüblichen Querschnittsplastizierung, bei der ein Blech durchplastiziert bevor die anderen zu fließen beginnen, läßt sich auch das Last-Verdrehungs-Diagramm (Abbildung 83) erklären. Wie immer verhalten sich im elastischen Bereich Last und Verdrehung proportional zu einander. Beginnt der Querschnitt zu plastizieren (hier der Untergurt), entsteht eine nichtlineare Beziehung. Erreicht die Einzellast jedoch diejenige Laststufe, bei der der Untergurt bereits vollplastisch ist, Steg und Obergurt hingegen noch elastisch, bedeutet dies, daß zusätzlicher Belastung nur noch ein Zwei-Blech-Querschnitt, der wölbfrei ist und Torsion gemäß St.Venant'scher Torsion aufnimmt, zur Verfügung steht. Bis zum Erreichen der Traglast ergibt sich folglich wieder ein linearer Last-Verformungs-Verlauf, also ein proportionales Anwachsen der zu vergleichenden Größen.

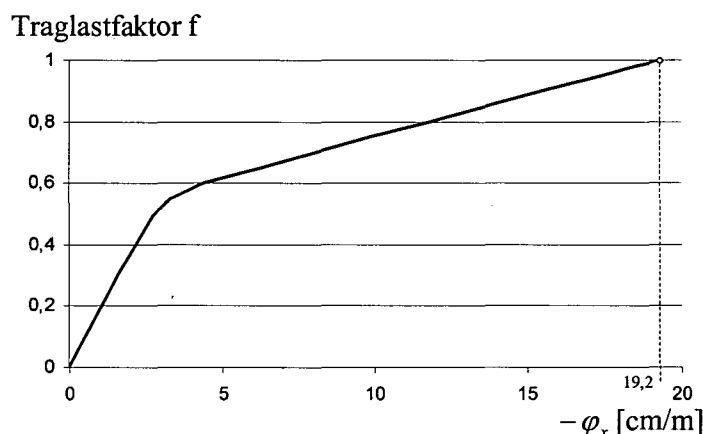


Abbildung 83: Last-Verdrehungs-Diagramm von Untersuchung 7.6

Die Untersuchung der Durchbiegungen zeigt, daß im plastizierten Zustand die Stelle des maximalen Betrages von w und v in Stablängsrichtung von der Laststufe abhängt. Während sich diese Stelle unter elastischer Belastung stets bei $x \approx 3,63$ m befindet, verschiebt sie sich jenseits der elastischen Grenzlasterlast und unter Laststeigerung zum Angriffspunkt der Einzellast bei $x = 2,667$ m. Die Begründung dafür liegt darin, daß das System aufgrund des Plastizierens vor allem an dem Ort der Belastung weicher wird und sich dort unter Traglast der Versagensmechanismus mittels eines „Scharniers“ im Querschnitt ausbildet (sh. Kapitel 7.3).

Die Ausmitte der Einzellast ($e_{\text{vertikal}} \approx 28$ cm) führt zu großen Torsionsmomenten, die eine Berücksichtigung der wirkenden Schubspannungen erfordern. Eine Untersuchung der auftreten-

den Momente zeigt, daß das primäre Torsionsmoment an der Stelle des Lastangriffspunkts einen Sprung (sh. Abbildung 84) und keinen Nulldurchgang mit stetigem Verlauf besitzt. Folglich darf an der Stelle maximaler Normalspannungsbeanspruchung das primäre Torsionsmoment nicht vernachlässigt werden. Eine Systemberechnung unter Berücksichtigung auftretender Schubspannungen gemäß Kapitel 5.4 ergibt eine Reduzierung der Traglast um fast 20%. Bei dieser Laststufe hat sich der Sprung des primären Torsionsmoments zwar noch nicht voll ausgebildet, bei $x \approx 2,2\text{m}$ führen aber die Normal- und Schubspannungsbeanspruchung zur Vollplastizität des Querschnitts.

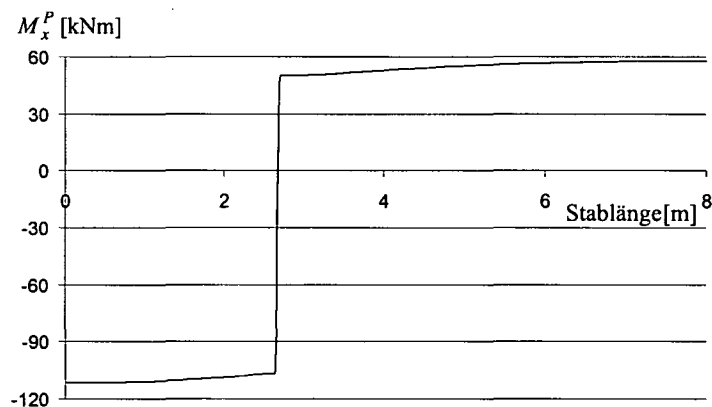


Abbildung 84: M_x^P -Verlauf von Untersuchung 7.6

Da das System nicht normalkraftbelastet ist, wirkt sich eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung nur auf das Torsionsgleichgewicht aus. Entfällt die Berücksichtigung auftretender Schubspannungen, so reduziert sich wegen der relativ großen Torsionssteifigkeit des Querschnitts die nach Theorie I. Ordnung ermittelte Traglast unter Ansatz einer Vorkrümmung mit einem Stich von $v^0 = l/200$ nur minimal (um rund 1%). Wie Tabelle 18 zeigt, reicht eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung nicht aus, um bei Vernachlässigung von Schubeinflüssen auf der sicheren Seite zu liegen.

Berechnung	Versagen bei einem Traglastfaktor von
nach Theorie I. Ordnung ohne Berücksichtigung auftretender Schubspannungen	$f = 1$, das entspricht $P_{hori} = 712,125 \text{ kN}$
nach Theorie I. Ordnung mit Berücksichtigung auftretender Schubspannungen	$f \approx 0,8$
nach Theorie II. Ordnung ohne Berücksichtigung auftretender Schubspannungen	$f \approx 0,99$
nach Theorie II. Ordnung mit Berücksichtigung auftretender Schubspannungen	$f \approx 0,79$

Tabelle 18: Vergleichende Traglastberechnungen bei Untersuchung 7.6

7.7 Zusammenfassung

In Kapitel 7 werden Querschnitte und Systeme der Baupraxis untersucht und diese über ihre elastische Grenzlast und bis zur Traglast belastet bzw. beansprucht.

Bei Berechnungen nach Theorie I. Ordnung treten die im folgenden genannten Phänomene auf.

Grundlegend ist, daß ab Beginn des Plastizierens der Querschnitt eine nichtlineare Spannungsverteilung aufweist. Demzufolge kann sich eine elastische Spannungsnulllinie verschieben, verdrehen oder ganz verschwinden; erst bei Erreichen der Traglast nach Theorie I. Ordnung muß sie sich wieder in bestimmter Richtung bilden, um den Versagensmechanismus zu beschreiben. Weiterhin bringt die nichtlineare Spannungsverteilung im allgemeinen Fall mit sich, daß im Gegensatz zur Elastizität Belastungen in Trägheitshauptachsenrichtung auch Verformungen quer zu dieser Richtung bewirken. Desweiteren können Stabschwerpunkte Längsverschiebungen erfahren, ohne daß das System durch Normalkraft beansprucht wird. In Tabelle 9 sind in Abhängigkeit vom Querschnitt und von der Beanspruchung diejenigen Größen dargestellt, die sich *zusätzlich* zu den Größen einer elastischen Betrachtung, also gewissermaßen als Phänomene der Fließzonentheorie ergeben.

Mögliches Auftreten von Verdrillung trotz alleiniger Querbelastung im Schubmittelpunkt erklärt sich darin, daß sich der Schubmittelpunkt eines Querschnitts als der Punkt, an dem angreifend eine Querbelastung keine Torsion erzeugt, in einer Fließzone verschieben kann. Die Koordinaten des elastisch berechneten Schubmittelpunkts behalten jedoch ihre statische Bedeutung als Koordinaten eines Referenzpunkts für das Aufstellen und Lösen der Differentialgleichungen, nicht jedoch ihre Bedeutung, den Ort der resultierenden Kraft aus Querkraftschubspannungen für jede Laststufe auszumachen.

In Analogie zum Schubmittelpunkt behalten die querschnittsabhängigen Trägheitshauptachsen ihre statische Bedeutung als Referenzachsen für das Aufstellen und Lösen der Differentialgleichungen.

Entsteht eine Fließzone, kommt es zu einer Nichtlinearität des Last-Verformungs-Diagramms. Diese Nichtlinearität bewirkt ein überproportionales Ansteigen der Durchbiegung gegenüber einer Belastungssteigerung. Sie liegt darin begründet, daß die sehr rasch anwachsenden Δ -Schnittgrößen über die konstitutiven Beziehungen mit Verzerrungen und Krümmungen gekoppelt sind. Bei Erreichen der Traglast streben im versagenden Querschnitt Δ -Schnittgrößen, Verzerrungen und Krümmungen im Allgemeinen gegen unendlich.

Wird die auf ein System einwirkende Belastung gesteigert, so erreicht man grenzwertig die Traglast als die von einem System maximal aufnehmbare Last. Es bildet sich unter Traglast eine Spannungsnulllinie aus, die dadurch einen Versagensmechanismus vorgibt, daß sich der Querschnitt um dieses „Scharnier“ verdreht. In allen Fasern des versagenden Querschnitts, die nicht auf der Spannungsnulllinie liegen, wirkt plastische Grenzspannung; der Querschnitt ist vollplastisch und bleibt eben.

Allein aus Querschnittsbetrachtungen lassen sich Traglastschnittgrößen und Lage der Spannungsnulllinie bestimmen. Sind (z.B. bei statisch bestimmten Systemen) die auftretenden Schnittgrößen N , M_y und M_z aus Gleichgewichtsbedingungen bekannt, kann folglich ohne Systemberechnung auf den zugehörigen, maximalen Laststeigerungsfaktor geschlossen werden. Wegen der ebenen Relativbewegung des versagenden Querschnitts darf bei der Ermittlung des vollplastischen Spannungsverlaufs kein Wölbmoment vorgegeben werden. Die Größe des Wölbmoments, das keine resultierende Schnittgröße wiedergibt, sondern eine innere Kraftgröße darstellt, ist im vollplastischen Querschnitt aus Betrachtung desselben eindeutig bestimmbar. Die Annahme eines Wölbgelenks ($M_\omega = 0$) im versagenden Querschnitt läßt sich als Gleichgewichtsbedingung nicht herleiten und bleibt unbegründet.

Die Berücksichtigung auftretender Schubspannungen liegt im Rahmen dieser Arbeit darin, die maximal wirkenden Normalspannungen zu reduzieren. Folglich ist das Erreichen der Traglast weiterhin mit der Vollplastizität des versagenden Querschnitts verbunden. Da die Interaktion zwischen Normal- und Schubspannungen recht gering ist, gilt auch bei Berechnungen von Fließzonen, daß Schubspannungen wegen ihrer ansonsten vernachlässigbaren Auswirkung nur bei einem Schubspannungsverhältnis von $\tau_{\text{vorh}} / \tau_{\text{fließ}} \geq 1/2$ zu berücksichtigen sind.

Untersuchungen ergeben, daß im Falle einer Stabquerbeanspruchung durch Einzellast (in Höhe der Traglast) mit verschiedenen Ausmitten sich unabhängig von den Ausmitten stets qualitativ und quantitativ derselbe Verlauf des sekundären Torsionsmoments einstellt, der mit einem ebenfalls gleichbleibenden Wölbmomentenverlauf einhergeht. Dies ergibt beim primären Torsionsmoment abgesehen von einer unsteten Stelle einen unabhängig vom Betrag der Lastausmitte qualitativ gleichen Verlauf. Das primäre Torsionsmoment hat am Lastangriffspunkt der Einzellast eine Unstetigkeit in Form eines Sprungs.

Im Falle einer Stabquerbeanspruchung mit planmäßig auftretender Torsion wachsen unter Laststeigerung im elastischen Bereich das Torsionsmoment M_x und gleichfalls dessen Komponenten (das primäre und das sekundäre Torsionsmoment) in stets gleicher Ver- bzw. Aufteilung an. Beginnt der Stab unter weiterer Laststeigerung zu plastizieren, steigt nur M_x

teilung an. Beginnt der Stab unter weiterer Laststeigerung zu plastizieren, steigt nur M_x proportional zur Belastung an, die Aufteilung in primäre und sekundäre Torsion hingegen verändert sich. Dabei kann das sekundäre Torsionsmoment ab einer bestimmten Laststufe trotz weiterer Laststeigerung ab- und sogar negative Werte annehmen, wodurch das primäre Torsionsmoment überproportional anwächst.

Bei Berechnungen nach Theorie II. Ordnung wird die Traglast vor Auftreten eines Versagensmechanismus erreicht. Dieses Versagen aufgrund von Instabilität wird dem System steht im Gegensatz zum unter Laststeigerung allmählichen Durchplastizieren des maximal beanspruchten Querschnitts bei Theorie I. Ordnung.

Unabhängig von Notwendigkeitskriterien der Elastizitätstheorie ist bei Plastizität stets eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung zu führen, da schon kleine Normalkraft- oder Torsionsbeanspruchungen Instabilität mit sich bringen können. Die Erklärung hierzu ist unter anderem in dem starken, nichtlinearen Ansteigen der Verformungen in plastischen Bereichen zu finden, welches direkten Einfluß auf die Gleichgewichtsfindung am verformten System hat. Da in Fließzonen ohne Vorhandensein planmäßiger Torsion eine Verdrehung φ_x auftreten kann, kommt der Torsionssteifigkeit eines Stabes besondere Bedeutung zu.

8 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird ein Konzept zur Berechnung von Stäben, die über ihre elastische Grenzlast hinaus beansprucht sind, entwickelt, um deren Tragfähigkeitsreserven qualitativ und quantitativ bestimmen zu können. Dazu werden die 14 gekoppelten Differentialgleichungen für Biegetorsion (gemischte Torsion) am geraden Stab unter Berücksichtigung des in Fließzonen nichtlinearen Materialverhaltens hergeleitet. Die maßgebenden Gleichungen setzen sich aus Gleichgewichtsbedingungen (nach Theorie I. Ordnung am unverformten, nach Theorie II. Ordnung am verformten System), den kinematischen Beziehungen, den konstitutiven Beziehungen und den Umrechnungsbeziehungen zusammen. Da das Stoffgesetz über die konstitutiven Beziehungen in das zu lösende Gleichungssystem eingeht, wird in ihnen mittels Zusatztermen, sogenannten Δ -Werten, die Elastizitäts- zur Fließzonentheorie erweitert.

Bei den Schnittgrößen des behandelten Biegeproblems unterscheidet man deren Wirkung auf Achsen in verformter und unverformter Lage. Schnittgrößenanteile, die sich auf die Achsen in verformter Lage beziehen, sind für Spannungsnachweise im Querschnitt maßgebend, während Schnittgrößen bezogen auf Achsen in unverformter Lage für die Aufstellung eines Gleichgewichts erforderlich sind. Da die Differentialgleichungen mit den Schnitt- und Verschiebungsgrößen bezogen auf die Achsen in unverformter Lage formuliert sind, müssen die für die Spannungsnachweise erforderlichen Schnittgrößen mit Hilfe der Umrechnungsbeziehungen ermittelt werden.

Alle Formeln der Fließzonentheorie gelten auch für Elastizitätstheorie, wobei sich für letztere die Δ -Werte zu null ergeben.

Die Umsetzung der Theorie zur Anwendung auf praktische Aufgaben basiert auf einem von Pilgram [23] entwickelten Programm zur Lösung elastischer Biegetorsionsprobleme. Demnach werden alle 14 Differentialgleichungen auf einem analytischen Reihenansatz beruhend simultan gelöst, was auf die Übertragungsbeziehung des Reduktionsverfahrens führt. Durch Wahl der auszuführenden Anzahl an Iterationen, die sowohl über den Querschnitt als auch über den Stab erforderlich sind, kann eine beliebige Genauigkeit der Ergebnisse erzielt werden.

Den theoretischen Herleitungen sowie der Beschreibung des Computerprogramms schließen sich Untersuchungen vor allem biegebeanspruchter Stäbe, die jenseits ihrer elastischen Grenze belastet sind, an. Die Ergebnisse werden mit denen in der Literatur zu findenden Lösungen

verglichen. Durch Analyse der bei einer Fließzonenberechnung auftretenden Phänomene lassen sich Besonderheiten plastischen Tragverhaltens erklären.

Es wird unter anderem beschrieben, warum und inwiefern sich bei Auftreten einer nichtlinearen Spannungsverteilung die Bedeutung von Spannungsnulllinien, Schubmittelpunkt und Trägheitshauptachsen verändert. Die Untersuchungen ergeben, daß sich bei Berechnung nach Theorie I. Ordnung unter Traglast im maximal beanspruchten, stets vollplastischen Querschnitt ein „Scharnier“ ausbildet, das den Versagensmechanismus vorgibt. Die Größe des Wölbmoments ist dabei allein aus Querschnittsbetrachtung eindeutig bestimmbar.

Die Annahme, daß Fließen nur in Stablängsrichtung auftritt, bedeutet eine Berücksichtigung auftretender Schubspannungen nur dahingehend, daß gemäß einer Fließhypothese die maximalen Normalspannungen reduziert werden. Folglich ist diese Annahme nicht zur Lösung von Schubproblemen gedacht und nur im Falle überwiegender Biegebeanspruchung haltbar. Da in Fließzonen ohne planmäßige Torsionsbeanspruchung primäre und sekundäre Torsionsmomente und infolgedessen stabilitätsgefährdende Verdrehungen auftreten und sich desweiteren elastisch bekannte Aufteilungen zwischen primärer und sekundärer Torsion verändern können, ist auch bei überwiegender Biegebeanspruchung eine Schubuntersuchung nicht generell zu vernachlässigen.

In plastizierten Bereichen kommt es zur Nichtlinearität des Last-Verformungs-Diagramms, wobei die Nichtlinearität ein überproportionales Ansteigen der Verformung gegenüber der Belastungssteigerung bewirkt, was für eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung von Bedeutung ist. Da schon kleine Normalkraft- oder Torsionsbeanspruchung Instabilität mit sich bringen kann, ist in Fließzonen die Anwendung der Theorie II. Ordnung stets erforderlich.

Ziel weiterer Forschung ist es, die Berechnung offener Querschnitte auf die geschlossener auszubauen und Phänomene der Fließzonentheorie an Hohlprofilen und Querschnitten mit Hohlzellen (z.B. für Anwendungen im Brückenbau) zu untersuchen. Um den Anwendungsbereich der Fließzonentheorie auf allgemeine baupraktische Aufgaben zu erweitern, ist es erforderlich, nicht allein Stäbe, sondern auch Systeme (z.B. Rahmen) berechnen zu können. Solche Erweiterung ist mit Hilfe des allgemeinen Verschiebungsgrößenverfahrens möglich.

Anhang A: Berechnung von Querschnittswerten

Dieser Anhang enthält die Ausführung einer Berechnung von Querschnittswerten des Trägheitshauptsystems. Beispielhaft wird Profil 4 (sh. Tabelle 8) untersucht. Gegeben sind die drei Bleche, die durch ihre Randkoordinaten $y_A, z_A, \omega_A, y_E, z_E, \omega_E$ im frei gewählten Grundsystem, dessen Koordinatenursprung im rechten Obergurtende liegt, sowie durch die Blechdicke b gekennzeichnet sind. Abbildung 85 zeigt den Querschnitt und die Achsen des Grundsystems, Tabelle 19 die Eingangswerte.

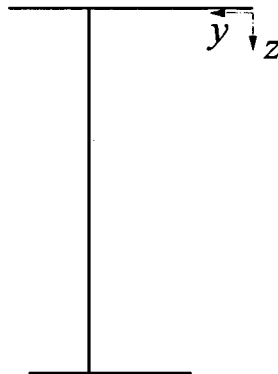


Abbildung 85: Querschnitt und Achsen des Grundsystems

Blech	y_A [cm]	z_A [cm]	ω_A [cm ²]	y_E [cm]	z_E [cm]	ω_E [cm ²]	b [cm]
Obergurt	0	0	0	60	0	0	4
Steg	40	0	0	40	90	3600	2
Untergurt	55	90	2250	15	90	5850	3

Tabelle 19: Eingangswerte zur Querschnittswertsberechnung

Gemäß den in Tabelle 4 angegebenen Formeln werden die Flächenwerte der einzelnen Bleche und durch deren Addition die Querschnittswerte im Grundsystem ermittelt. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle 20 dargestellt.

Blech	Obergurt	Steg	Untergurt	Querschnitt
A [cm ²]	240	180	120	540
A_y [cm ³]	7200	7200	4200	18600
A_z [cm ³]	0	8100	10800	18900
A_ω [cm ⁴]	0	324000	486000	810000

Blech	Obergurt	Steg	Untergurt	Querschnitt
$A_{yy}[\text{cm}^4]$	288000	288000	163000	739000
$A_{yz}[\text{cm}^4]$	0	324000	378000	702000
$A_{y\omega}[\text{cm}^5]$	0	$1296 \cdot 10^4$	$1557 \cdot 10^4$	$2853 \cdot 10^4$
$A_{zz}[\text{cm}^4]$	0	486000	972000	1458000
$A_{z\omega}[\text{cm}^5]$	0	$1944 \cdot 10^4$	$4374 \cdot 10^4$	$6318 \cdot 10^4$
$A_{\omega\omega}[\text{cm}^6]$	0	$77760 \cdot 10^4$	$209790 \cdot 10^4$	$287550 \cdot 10^4$

Tabelle 20: Querschnittswerte im Grundsystem

Die Schwerpunktskoordinaten des Grundsystems ergeben sich zu

$$y_{S,GS} = A_y / A = 34,44 \text{ cm}, \quad z_{S,GS} = A_z / A = 35 \text{ cm}, \quad \omega_{S,GS} = A_\omega / A = 1500 \text{ cm}^2$$

während die Querschnittswerte des Einheitssystems lauten

$$A_{yy,ES} = A_{yy} - y_{S,GS}^2 A = 98333 \text{ cm}^4, \quad A_{yz,ES} = A_{yz} - y_{S,GS} z_{S,GS} A = 51000 \text{ cm}^4$$

$$A_{y\omega,ES} = A_{y\omega} - y_{S,GS} \omega_{S,GS} A = 630000 \text{ cm}^5, \quad A_{zz,ES} = A_{zz} - z_{S,GS}^2 A = 796500 \text{ cm}^4$$

$$A_{z\omega,ES} = A_{z\omega} - z_{S,GS} \omega_{S,GS} A = 3483 \cdot 10^4 \text{ cm}^5, \quad A_{\omega\omega,ES} = A_{\omega\omega} - \omega_{S,GS}^2 A = 16605 \cdot 10^5 \text{ cm}^6$$

Die Einheitsachsen drehen sich um $\beta = \arctan(2A_{yz,ES} / (A_{yy,ES} - A_{zz,ES})) / 2 = 4,156^\circ$ in die der Trägheitshauptachsen, die Querschnittswerte im Hauptsystem sowie die Schubmittelpunktskoordinaten berechnen sich zu

$$A = 540 \text{ cm}^2$$

$$A_{yy,HS} = A_{yy,ES} \cos^2 \beta + A_{yz,ES} \sin(2\beta) + A_{zz,ES} \sin^2 \beta = 94627,5 \text{ cm}^4$$

$$A_{zz,HS} = A_{yy,ES} \sin^2 \beta - A_{yz,ES} \sin(2\beta) + A_{zz,ES} \cos^2 \beta = 800206 \text{ cm}^4$$

$$A_{\omega\omega,HS} = A_{\omega\omega,ES} - A_{z\omega,ES} y_{M,GS} + A_{y\omega,ES} z_{M,GS} = 110492 \cdot 10^3 \text{ cm}^6$$

Bei genügend großer Anzahl an Blechunterteilungen bzw. Abschnitten führt eine Berechnung der Querschnittswerte mit Unterteilung der Bleche gemäß den in Tabelle 5 angegebenen Formeln zu demselben Ergebnis.

Anhang B: Berechnung von Querschnittsstrecken

Dieser Anhang enthält die Ausführung einer Berechnung von Querschnittsstrecken. Beispielhaft wird Profil 4 (sh. Tabelle 8) untersucht. Gegeben sind die drei Bleche, die durch ihre Randkoordinaten $y_A, z_A, \omega_A, y_E, z_E, \omega_E$ im Hauptachsensystem sowie durch die Blechdicke b gekennzeichnet sind. Tabelle 21 zeigt die Eingangswerte.

Blech	y_A [cm]	z_A [cm]	ω_A [cm ²]	y_E [cm]	z_E [cm]	ω_E [cm ²]	b [cm]
Obergurt	-31,82	-37,4	-511,5	28,02	-33,06	498,4	4
Steg	8,08	-34,51	161,7	1,56	55,26	-270,9	2
Untergurt	16,52	56,35	-1369	-23,38	53,45	1558	3

Tabelle 21: Eingangswerte zur Querschnittsstreckenberechnung

Die Querschnittswerte des Hauptsystems seien bekannt (eine Berechnung ist Anhang A zu entnehmen). Gemäß den in Tabelle 6 angegebenen Formeln ergeben sich für jedes Blech die folgenden Werte:

Blech	$i_{p,Blech}$ [cm ⁴]	$r_{y,Blech}$ [cm ⁵]	$r_{z,Blech}$ [cm ⁵]	$r_{\omega,Blech}$ [cm ⁶]
Obergurt	370741	$-134,13 \cdot 10^4$	$-1310,76 \cdot 10^4$	$-1321,14 \cdot 10^4$
Steg	145056	$5225,15 \cdot 10^4$	3928750	$1959,35 \cdot 10^4$
Untergurt	379037	$-128,31 \cdot 10^4$	$2080,9 \cdot 10^4$	$3,4704 \cdot 10^4$

Tabelle 22: Vorwerte der Bleche zur Querschnittsstreckenberechnung

Der polare Trägheitsradius sowie die Querschnittsstrecken dieses allgemeinen Profils berechnen sich zu

$$i_p = \sqrt{\left(\sum_{Blech} i_{p,Blech}\right) / A} = 40,7075 \text{ cm}$$

$$r_y = \left(\sum_{Blech} r_{y,Blech}\right) / A_{yy,HS} = -22,2122 \text{ cm}$$

$$r_z = \left(\sum_{Blech} r_{z,Blech}\right) / A_{zz,HS} = 14,5337 \text{ cm}$$

$$r_\omega = \left(\sum_{Blech} r_{\omega,Blech}\right) / A_{\omega\omega,HS} = 0,01719$$

Anhang C: Berechnung von Δ -Schnittgrößen

Dieser Anhang zeigt die Ermittlung von Δ -Schnittgrößen aus vorgegebenen Spannungsverläufen. Wie in Kapitel 3.3.3 beschrieben, berechnen sich Δ -Schnittgrößen aus denjenigen Spannungsblöcken, die sich nach elastischer Rechnung ergeben und oberhalb der Grenzspannung liegen. Beispielhaft wird das aus Kapitel 7.4.2 sowie aus [34] bekannte System untersucht (sh. Abbildung 86). Als Systemlänge ist nun ein Wert von $l = 4\text{ m}$ und als Laststufe ein Faktor von $f = 0,9$ der nach Theorie I. Ordnung ermittelten Traglast gewählt. Tabelle 23 gibt die sich nach Hooke'schem Gesetz aus den Dehnungen berechneten Spannungen in Systemmitte wieder, wobei alle Spannungen in $[\text{kN}/\text{cm}^2]$ angegeben sind.

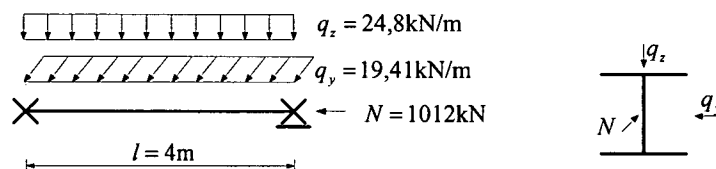


Abbildung 86: System und Belastung

Blech	Blechanfangspunkt A			Blechendpunkt B		
	$\sigma_{\text{elast.ber.}}$	$= \sigma_{\text{vorh.}}$	$+ \Delta\sigma$	$\sigma_{\text{elast.ber.}}$	$= \sigma_{\text{vorh.}}$	$+ \Delta\sigma$
Obergurt	-85,39	-24	-61,39	5,63	5,63	0
Steg	-39,88	-24	-15,88	-4,21	-4,21	0
Untergurt	-34,01	-24	-10,01	25,58	24	1,58

Tabelle 23: Spannungsver- und Spannungsaufteilung

Gemäß den in Tabelle 1 aufgeführten Formeln lassen sich für die einzelnen Bleche folgende Δ -Schnittgrößen berechnen, deren Summe die Δ -Schnittgrößen des Querschnitts ergeben. Die spannungsbedingte Fallunterscheidung ist dabei zu beachten.

	s [cm]	t [cm]	ΔN [kN]	ΔM_y [kNm]	ΔM_z [kNm]	ΔM_ω [kNm ²]
Obergurt	13,49	-	-621,1	57,45	-34,18	3,162
Steg	8,237	-	-63,99	4,162	-	-
Untergurt	3,359	0,531	-24,58	-2,274	-2,301	-0,212
Querschnitt	-	-	-709,7	59,34	-36,48	2,949

Tabelle 24: Berechnung der Δ -Werte

Anhang D: Berechnung von ΔK

Analog zur Berechnung der Δ -Schnittgrößen in Anhang C wird für einen vorgegebenen Spannungsverlauf die Größe ΔK bestimmt. Der Spannungsverlauf (sh. Tabelle 23) ergibt sich aus dem im vorherigen Anhang beschriebenen Beispiel und wird hier nicht wiederholt. Gemäß den in Tabelle 2 aufgeführten Formeln lassen sich für die einzelnen Bleche folgende ΔK -Werte berechnen, die durch Addition die ΔK -Größe des Querschnitts ergeben. Die spannungsbedingte Fallunterscheidung ist dabei zu beachten.

	y_1 [cm]	y_2 [cm]	z_1 [cm]	z_2 [cm]	ΔK [kNm ²]
Obergurt	-	3,49	-	-9,25	-7,824
Steg	-	-	-	-1,013	-0,295
Untergurt	9,469	-6,641	9,25	9,25	-0,405
Querschnitt	-	-	-	-	-8,523

Tabelle 25: Berechnung von ΔK

Desweiteren soll gezeigt werden, daß

$$\Delta K \neq \Delta N i_p^2 - \Delta M_\zeta r_y + \Delta M_\eta r_z + \Delta M_\omega r_\omega$$

Da wegen der Doppelsymmetrie des Querschnitts alle Querschnittsstrecken zu null werden, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\Delta K \neq \Delta N i_p^2$$

Berechnet man i_p und setzt dazu einerseits die aus oberer Tabelle bekannte ΔK -Größe und andererseits den in Anhang C ermittelten Wert für ΔN ein, so stellt sich die Richtigkeit der Ungleichung heraus

$$\Delta K = -8,523 \text{ kNm}^2 \neq \Delta N i_p^2 = -709,68 \text{ kN} \cdot (0,0989702 \text{ m})^2 = -6,951 \text{ kNm}^2$$

Die Ungleichheit beider Seiten kommt dadurch zustande, daß sich nicht (wie bei der Herleitung nach Elastizität postuliert) beide Größen der Multiplikation auf den gesamten Querschnitt beziehen bzw. über ihn verteilt sind, sondern nun der polare Trägheitsradius mit einer Normalspannungsgröße gekoppelt ist, welche nur in Teilbereichen des Querschnitts (nämlich den geflossenen) auftritt.

Anhang E: Bedeutung der Stützstellenwahl

Kommt es bei Berechnungen zu Nichtlinearitäten im zu lösenden Gleichungssystem, ist eine über die Stablänge iterative Berechnung unumgänglich. Anhand eines Beispiels wird gezeigt, daß der Anzahl an „Stabiterationen“ für die Exaktheit der Ergebnisse eine große Bedeutung zukommt. Untersucht wird das aus Anhang C bekannte System mit der dort angeführten Belastung. Zur Berechnung wird der Stab in Längsrichtung gemäß Abbildung 87 in 90 Elemente bzw. Abschnitte unterteilt, deren Anfangs- und Endpunkte Stützstellen der Berechnung bilden, um die Genauigkeit der Ergebnisse zu steigern.

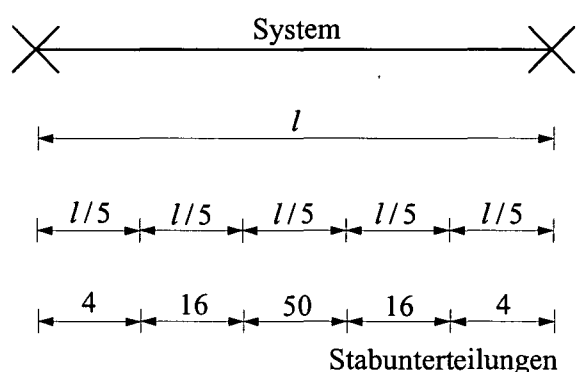


Abbildung 87: Stabunterteilungen

Naheliegenderweise ist es sinnvoll, die meisten Stabunterteilungen in Bereichen höchster Querschnittsbeanspruchung, also vor allem in der in Systemmitte auftretenden Fließzone zu setzen.

Das folgende Diagramm (Abbildung 88) stellt dar, wie sich das Berechnungsergebnis (als Vergleichsgröße ist ΔN gewählt) mit steigender Anzahl an Stabiterationen dem exakten Endwert von $\Delta N = -709,68 \text{ kN}$ annähert.



Abbildung 88: Bedeutung der Stabiterationen

Anhang F: Ausgabe der Ergebnisse

Ein Beispiel der Ausgabemöglichkeit von Berechnungsergebnissen wird hier gezeigt. Die angeführten Werte bilden die Lösung der in Anhang C vorgestellten Beispielaufgabe (sh. Abbildung 86). Es sei darauf hingewiesen, daß zur besseren Analyse bzw. Auswertung des stark beanspruchten Stababschnitts in Stabmitte die Anzahl an Ausgabepunkten erhöht wurde und diese sich dort nicht im Abstand von 15 cm, sondern von 5 cm befinden.

Berechnung	nach	Woelbkrafttorsion				
Berechnung	nach	Theorie	I,Ordnung			
ZG	werden	120-fach	iteriert			
Berechnung	nach	Fliezzonentheorie				
Verschiebungsgrößen	in	[cm]	und	[cm/m]		
x	u_S	v_M	w_M	phi_x	phi_y_M	phi_z_M
0	0	0	0	0	-0,8783	1,83288
0,15	-0,00926	0,27442	0,13151	0,20701	-0,87372	1,82274
0,3	-0,01851	0,54586	0,26168	0,42029	-0,86043	1,79337
0,45	-0,02778	0,81155	0,38924	0,64625	-0,8391	1,74617
0,6	-0,0371	1,06879	0,513	0,89013	-0,80966	1,6808
0,75	-0,04651	1,31493	0,63176	1,15523	-0,77258	1,59824
0,9	-0,05607	1,54742	0,7444	1,44463	-0,72769	1,49815
1,05	-0,06613	1,76312	0,84949	1,75297	-0,67136	1,37332
1,2	-0,07691	1,95807	0,94516	2,06606	-0,60209	1,22152
1,35	-0,08856	2,12823	1,02942	2,36816	-0,51899	1,04272
1,5	-0,10126	2,26953	1,1001	2,6414	-0,42073	0,8369
1,55	-0,10574	2,30953	1,12024	2,72266	-0,38456	0,76254
1,6	-0,11036	2,34574	1,13852	2,79779	-0,34673	0,68549
1,65	-0,11509	2,37803	1,15488	2,86606	-0,30732	0,60593
1,7	-0,11994	2,40629	1,16923	2,92677	-0,26645	0,52406
1,75	-0,12489	2,4304	1,18151	2,97931	-0,22425	0,44012
1,8	-0,12994	2,45027	1,19164	3,0231	-0,18088	0,35438
1,85	-0,13506	2,46582	1,19958	3,05768	-0,13655	0,26715
1,9	-0,14024	2,47697	1,20528	3,08265	-0,09146	0,17876
1,95	-0,14547	2,48368	1,20871	3,09775	-0,04586	0,08958
2	-0,15071	2,48592	1,20986	3,1028	0	0
2,05	-0,15596	2,48368	1,20871	3,09775	0,04586	-0,08958
2,1	-0,16118	2,47697	1,20528	3,08265	0,09146	-0,17876
2,15	-0,16637	2,46582	1,19958	3,05768	0,13655	-0,26715
2,2	-0,17149	2,45027	1,19164	3,0231	0,18088	-0,35438
2,25	-0,17654	2,4304	1,18151	2,97931	0,22425	-0,44012
2,3	-0,18149	2,40629	1,16923	2,92677	0,26645	-0,52406
2,35	-0,18634	2,37803	1,15488	2,86606	0,30732	-0,60593
2,4	-0,19107	2,34574	1,13852	2,79779	0,34673	-0,68549
2,45	-0,19568	2,30953	1,12024	2,72266	0,38456	-0,76254
2,5	-0,20017	2,26953	1,1001	2,6414	0,42073	-0,8369
2,55	-0,21287	2,12823	1,02942	2,36816	0,51899	-1,04272
2,8	-0,22452	1,95807	0,94516	2,06606	0,60209	-1,22152
2,95	-0,23529	1,76312	0,84949	1,75297	0,67136	-1,37332
3,1	-0,24536	1,54742	0,7444	1,44463	0,72769	-1,49815
3,25	-0,25492	1,31493	0,63176	1,15523	0,77258	-1,59824
3,4	-0,26433	1,06879	0,513	0,89013	0,80966	-1,6808
3,55	-0,27365	0,81155	0,38924	0,64625	0,8391	-1,74617
3,7	-0,28291	0,54586	0,26168	0,42029	0,86043	-1,79337
3,85	-0,29217	0,27442	0,13151	0,20701	0,87372	-1,82274
4	-0,30143	0	0	0	0,8783	-1,83288

Schnittgrossen	in	den	unverformten	Achsen	in	[kN] und [kNm]
Schnittgrossen	sind	auf	den	Schwerpunkt	S	bezogen,
x	Sx	Ry	Rz	Mx	My	Mz
0	-1012,176	38,82208	49,59229	0	0	0
0,15	-1012,176	35,91042	45,87287	0	7,15989	-5,60494
0,3	-1012,176	32,99876	42,15345	0	13,76186	-10,77313
0,45	-1012,176	30,08711	38,43403	0	19,80592	-15,50457
0,6	-1012,176	27,17545	34,7146	0	25,29207	-19,79926
0,75	-1012,176	24,2638	30,99518	0	30,2203	-23,6572
0,9	-1012,176	21,35214	27,27576	0	34,59062	-27,0784
1,05	-1012,176	18,44049	23,55634	0	38,40303	-30,06285
1,2	-1012,176	15,52883	19,83692	0	41,65752	-32,61054
1,35	-1012,176	12,61717	16,11749	0	44,35411	-34,72149
1,5	-1012,176	9,70552	12,39807	0	46,49277	-36,3957
1,55	-1012,176	8,73497	11,15827	0	47,08168	-36,85671
1,6	-1012,176	7,76442	9,91846	0	47,6086	-37,26919
1,65	-1012,176	6,79386	8,67865	0	48,07353	-37,63315
1,7	-1012,176	5,82331	7,43884	0	48,47646	-37,94858
1,75	-1012,176	4,85276	6,19904	0	48,81741	-38,21548
1,8	-1012,176	3,88221	4,95923	0	49,09637	-38,43386
1,85	-1012,176	2,91166	3,71942	0	49,31333	-38,6037
1,9	-1012,176	1,9411	2,47961	0	49,46831	-38,72502
1,95	-1012,176	0,97055	1,23981	0	49,5613	-38,79781
2	-1012,176	0	0	0	49,59229	-38,82208
2,05	-1012,176	-0,97055	-1,23981	0	49,5613	-38,79781
2,1	-1012,176	-1,9411	-2,47961	0	49,46831	-38,72502
2,15	-1012,176	-2,91166	-3,71942	0	49,31333	-38,6037
2,2	-1012,176	-3,88221	-4,95923	0	49,09637	-38,43386
2,25	-1012,176	-4,85276	-6,19904	0	48,81741	-38,21548
2,3	-1012,176	-5,82331	-7,43884	0	48,47646	-37,94858
2,35	-1012,176	-6,79386	-8,67865	0	48,07353	-37,63315
2,4	-1012,176	-7,76442	-9,91846	0	47,6086	-37,26919
2,45	-1012,176	-8,73497	-11,15827	0	47,08168	-36,85671
2,5	-1012,176	-9,70552	-12,39807	0	46,49277	-36,3957
2,65	-1012,176	-12,61717	-16,11749	0	44,35411	-34,72149
2,8	-1012,176	-15,52883	-19,83692	0	41,65752	-32,61054
2,95	-1012,176	-18,44049	-23,55634	0	38,40303	-30,06285
3,1	-1012,176	-21,35214	-27,27576	0	34,59062	-27,0784
3,25	-1012,176	-24,2638	-30,99518	0	30,2203	-23,6572
3,4	-1012,176	-27,17545	-34,7146	0	25,29207	-19,79926
3,55	-1012,176	-30,08711	-38,43403	0	19,80592	-15,50457
3,7	-1012,176	-32,99876	-42,15345	0	13,76186	-10,77313
3,85	-1012,176	-35,91042	-45,87287	0	7,15989	-5,60494
4	-1012,176	-38,82208	-49,59229	0	0	0

Schnittgrossen	in	den	verformten	Achsen	in	[kN] und [kNm]
Schnittgrossen	sind	auf	den	Schwerpunkt	S	bezogen,
x	N	Q_eta	Q_zeta	M_xsi	M_eta	M_zeta
0	-1012,176	38,82208	49,59229	0	0	0
0,15	-1012,176	35,91042	45,87287	0	7,15989	-5,60494
0,3	-1012,176	32,99876	42,15345	0	13,76186	-10,77313
0,45	-1012,176	30,08711	38,43403	0	19,80592	-15,50457
0,6	-1012,176	27,17545	34,7146	0	25,29207	-19,79926
0,75	-1012,176	24,2638	30,99518	0	30,2203	-23,6572
0,9	-1012,176	21,35214	27,27576	0	34,59062	-27,0784
1,05	-1012,176	18,44049	23,55634	0	38,40303	-30,06285
1,2	-1012,176	15,52883	19,83692	0	41,65752	-32,61054
1,35	-1012,176	12,61717	16,11749	0	44,35411	-34,72149
1,5	-1012,176	9,70552	12,39807	0	46,49277	-36,3957
1,55	-1012,176	8,73497	11,15827	0	47,08168	-36,85671
1,6	-1012,176	7,76442	9,91846	0	47,6086	-37,26919
1,65	-1012,176	6,79386	8,67865	0	48,07353	-37,63315
1,7	-1012,176	5,82331	7,43884	0	48,47646	-37,94858
1,75	-1012,176	4,85276	6,19904	0	48,81741	-38,21548
1,8	-1012,176	3,88221	4,95923	0	49,09637	-38,43386
1,85	-1012,176	2,91166	3,71942	0	49,31333	-38,6037
1,9	-1012,176	1,9411	2,47961	0	49,46831	-38,72502
1,95	-1012,176	0,97055	1,23981	0	49,5613	-38,79781
2	-1012,176	0	0	0	49,59229	-38,82208
2,05	-1012,176	-0,97055	-1,23981	0	49,5613	-38,79781
2,1	-1012,176	-1,9411	-2,47961	0	49,46831	-38,72502
2,15	-1012,176	-2,91166	-3,71942	0	49,31333	-38,6037
2,2	-1012,176	-3,88221	-4,95923	0	49,09637	-38,43386
2,25	-1012,176	-4,85276	-6,19904	0	48,81741	-38,21548
2,3	-1012,176	-5,82331	-7,43884	0	48,47646	-37,94858
2,35	-1012,176	-6,79386	-8,67865	0	48,07353	-37,63315
2,4	-1012,176	-7,76442	-9,91846	0	47,6086	-37,26919
2,45	-1012,176	-8,73497	-11,15827	0	47,08168	-36,85671
2,5	-1012,176	-9,70552	-12,39807	0	46,49277	-36,3957
2,65	-1012,176	-12,61717	-16,11749	0	44,35411	-34,72149
2,8	-1012,176	-15,52883	-19,83692	0	41,65752	-32,61054
2,95	-1012,176	-18,44049	-23,55634	0	38,40303	-30,06285
3,1	-1012,176	-21,35214	-27,27576	0	34,59062	-27,0784
3,25	-1012,176	-24,2638	-30,99518	0	30,2203	-23,6572
3,4	-1012,176	-27,17545	-34,7146	0	25,29207	-19,79926
3,55	-1012,176	-30,08711	-38,43403	0	19,80592	-15,50457
3,7	-1012,176	-32,99876	-42,15345	0	13,76186	-10,77313
3,85	-1012,176	-35,91042	-45,87287	0	7,15989	-5,60494
4	-1012,176	-38,82208	-49,59229	0	0	0

Zustandsgrößen	der	Woeibkrafttorsion				
VG	in	[cm/m ²],	SG	in	[kNm]	und [kNm ²]
Momente	sind	auf	den	Schubmittelpunkt	M	bezogen,
x	Gamma_x	M_xsi_P	M_xsi_S	M_w		
0	-1,37318	0,6618	-0,6618	0		
0,15	-1,39395	0,67181	-0,67181	-0,09977		
0,3	-1,45688	0,70215	-0,70215	-0,20256		
0,45	-1,56231	0,75296	-0,75296	-0,31146		
0,6	-1,69281	0,81585	-0,81585	-0,429		
0,75	-1,84597	0,88967	-0,88967	-0,55676		
0,9	-2,006	0,96679	-0,96679	-0,69624		
1,05	-2,08859	1,0066	-1,0066	-0,84484		
1,2	-2,06896	0,99714	-0,99714	-0,99574		
1,35	-1,93908	0,93454	-0,93454	-1,14133		
1,5	-1,68187	0,81058	-0,81058	-1,27302		
1,55	-1,5664	0,75493	-0,75493	-1,31219		
1,6	-1,43629	0,69222	-0,69222	-1,3484		
1,65	-1,29202	0,62269	-0,62269	-1,3813		
1,7	-1,13453	0,54678	-0,54678	-1,41056		
1,75	-0,96502	0,46509	-0,46509	-1,43588		
1,8	-0,78509	0,37838	-0,37838	-1,45698		
1,85	-0,59658	0,28752	-0,28752	-1,47365		
1,9	-0,40146	0,19348	-0,19348	-1,48568		
1,95	-0,20186	0,09729	-0,09729	-1,49296		
2	0	0	0	-1,49539		
2,05	0,20186	-0,09729	0,09729	-1,49296		
2,1	0,40146	-0,19348	0,19348	-1,48568		
2,15	0,59658	-0,28752	0,28752	-1,47365		
2,2	0,78509	-0,37838	0,37838	-1,45698		
2,25	0,96502	-0,46509	0,46509	-1,43588		
2,3	1,13453	-0,54678	0,54678	-1,41056		
2,35	1,29202	-0,62269	0,62269	-1,3813		
2,4	1,43629	-0,69222	0,69222	-1,3484		
2,45	1,5664	-0,75493	0,75493	-1,31219		
2,5	1,68187	-0,81058	0,81058	-1,27302		
2,65	1,93908	-0,93454	0,93454	-1,14133		
2,8	2,06896	-0,99714	0,99714	-0,99574		
2,95	2,08859	-1,0066	1,0066	-0,84484		
3,1	2,006	-0,96679	0,96679	-0,69624		
3,25	1,84597	-0,88967	0,88967	-0,55676		
3,4	1,69281	-0,81585	0,81585	-0,429		
3,55	1,56231	-0,75296	0,75296	-0,31146		
3,7	1,45688	-0,70215	0,70215	-0,20256		
3,85	1,39395	-0,67181	0,67181	-0,09977		
4	1,37318	-0,6618	0,6618	0		

Delta	Schnittgrößen	bei	Fliesszonentheorie	in	[kN]	und [kNm]
x	D_N	D_M_eta	D_M_zeta	D_M_w	D_K	
0	0	0	0	0	0	
0,15	0	0	0	0	0	
0,3	0	0	0	0	0	
0,45	0	0	0	0	0	
0,6	-1,52751	0,14129	-0,1447	0,01338	-0,0268	
0,75	-16,13583	1,49256	-1,36852	0,12659	-0,25599	
0,9	-54,78857	5,04913	-4,15969	0,38291	-0,80056	
1,05	-125,01456	11,22009	-8,67406	0,76926	-1,73213	
1,2	-209,54889	18,37131	-13,63813	1,16686	-2,81572	
1,35	-316,02455	27,25191	-19,15772	1,59946	-4,11226	
1,5	-438,54332	37,34595	-24,90485	2,04985	-5,5343	
1,55	-480,20379	40,75043	-26,7601	2,1957	-6,00553	
1,6	-520,95276	44,06782	-28,53662	2,3356	-6,46163	
1,65	-559,87807	47,22549	-30,20249	2,46701	-6,89338	
1,7	-596,0583	50,15122	-31,72644	2,58739	-7,2916	
1,75	-628,57849	52,77908	-33,08749	2,69364	-7,64696	
1,8	-656,56934	55,04269	-34,25913	2,78328	-7,95085	
1,85	-679,25046	56,87783	-35,20876	2,85474	-8,19586	
1,9	-695,96432	58,23064	-35,90873	2,90676	-8,37574	
1,95	-706,21221	59,06037	-36,33798	2,93841	-8,48577	
2	-709,68232	59,34158	-36,48328	2,9491	-8,52298	
2,05	-706,21221	59,06037	-36,33798	2,93841	-8,48577	
2,1	-695,96432	58,23064	-35,90873	2,90676	-8,37574	
2,15	-679,25046	56,87783	-35,20876	2,85474	-8,19586	
2,2	-656,56934	55,04269	-34,25913	2,78328	-7,95085	
2,25	-628,57849	52,77908	-33,08749	2,69364	-7,64696	
2,3	-596,0583	50,15122	-31,72644	2,58739	-7,2916	
2,35	-559,87807	47,22549	-30,20249	2,46701	-6,89338	
2,4	-520,95276	44,06782	-28,53662	2,3356	-6,46163	
2,45	-480,20379	40,75043	-26,7601	2,1957	-6,00553	
2,5	-438,54332	37,34595	-24,90485	2,04985	-5,5343	
2,65	-316,02455	27,25191	-19,15772	1,59946	-4,11226	
2,8	-209,54889	18,37131	-13,63813	1,16686	-2,81572	
2,95	-125,01456	11,22009	-8,67406	0,76926	-1,73213	
3,1	-54,78857	5,04913	-4,15969	0,38291	-0,80056	
3,25	-16,13583	1,49256	-1,36852	0,12659	-0,25599	
3,4	-1,52751	0,14129	-0,1447	0,01338	-0,0268	
3,55	0	0	0	0	0	
3,7	0	0	0	0	0	
3,85	0	0	0	0	0	
4	0	0	0	0	0	

Verkrümmungen	in	[mm/m ²]	und	[mm/m ³]
x	N/EA	M _y /E _y	M _z /E _z	M _w /EA _w
0	-0,61714	0	0	0
0,15	-0,61714	0,60345	-1,33451	-2,77631
0,3	-0,61714	1,15987	-2,56503	-5,63661
0,45	-0,61714	1,66928	-3,69156	-8,66707
0,6	-0,61807	2,14357	-4,74856	-11,56531
0,75	-0,62698	2,67282	-5,9585	-11,97049
0,9	-0,65055	3,34091	-7,43764	-8,71905
1,05	-0,69337	4,18233	-9,22307	-2,10327
1,2	-0,74491	5,05934	-11,01159	4,76192
1,35	-0,80983	6,03509	-12,82838	12,74825
1,5	-0,88453	7,06608	-14,59537	21,61682
1,55	-0,90993	7,40265	-15,14686	24,58543
1,6	-0,93478	7,72666	-15,66805	27,47112
1,65	-0,95851	8,03198	-16,15134	30,21217
1,7	-0,98057	8,31252	-16,58929	32,74785
1,75	-1,0004	8,56274	-16,9769	34,99985
1,8	-1,01747	8,77703	-17,30785	36,90685
1,85	-1,03129	8,94999	-17,5744	38,4318
1,9	-1,04149	9,07707	-17,76994	39,54449
1,95	-1,04773	9,15483	-17,88947	40,2226
2	-1,04985	9,18115	-17,92985	40,4524
2,05	-1,04773	9,15483	-17,88947	40,2226
2,1	-1,04149	9,07707	-17,76994	39,54449
2,15	-1,03129	8,94999	-17,5744	38,4318
2,2	-1,01747	8,77703	-17,30785	36,90685
2,25	-1,0004	8,56274	-16,9769	34,99985
2,3	-0,98057	8,31252	-16,58929	32,74785
2,35	-0,95851	8,03198	-16,15134	30,21217
2,4	-0,93478	7,72666	-15,66805	27,47112
2,45	-0,90993	7,40265	-15,14686	24,58543
2,5	-0,88453	7,06608	-14,59537	21,61682
2,65	-0,80983	6,03509	-12,82838	12,74825
2,8	-0,74491	5,05934	-11,01159	4,76192
2,95	-0,69337	4,18233	-9,22307	-2,10327
3,1	-0,65055	3,34091	-7,43764	-8,71905
3,25	-0,62698	2,67282	-5,9585	-11,97049
3,4	-0,61807	2,14357	-4,74856	-11,56531
3,55	-0,61714	1,66928	-3,69156	-8,66707
3,7	-0,61714	1,15987	-2,56503	-5,63661
3,85	-0,61714	0,60345	-1,33451	-2,77631
4	-0,61714	0	0	0

Verkrümmungen	in [mm/m ²]	und	Verschiebung	des	Blechscherpunktes	in [cm]
x	epsilon	kappa _y	kappa _z	u	v	w
0	-0,61714	0	0	0,08124	0	0
0,15	-0,67296	0,60345	-1,0777	0,07156	0,29357	0,13151
0,3	-0,72443	1,15987	-2,04364	0,06108	0,58474	0,26168
0,45	-0,77155	1,66928	-2,88986	0,04984	0,87132	0,38924
0,6	-0,81635	2,14357	-3,67877	0,03779	1,15113	0,513
0,75	-0,87422	2,67282	-4,85123	0,02495	1,42178	0,63176
0,9	-0,95958	3,34091	-6,63113	0,01124	1,68105	0,7444
1,05	-1,08023	4,18233	-9,02852	-0,00403	1,92527	0,84949
1,2	-1,2129	5,05934	-11,45207	-0,02122	2,14918	0,94516
1,35	-1,36807	6,03509	-14,0076	-0,04055	2,34728	1,02942
1,5	-1,53814	7,06608	-16,59492	-0,06234	2,51386	1,1001
1,55	-1,59468	7,40265	-17,42101	-0,07017	2,56137	1,12024
1,6	-1,64949	7,72666	-18,20913	-0,07828	2,60453	1,13852
1,65	-1,70147	8,03198	-18,94597	-0,08666	2,64314	1,15488
1,7	-1,74948	8,31252	-19,61847	-0,09529	2,67702	1,16923
1,75	-1,79245	8,56274	-20,21438	-0,10415	2,70599	1,18151
1,8	-1,82934	8,77703	-20,72174	-0,11321	2,72991	1,19164
1,85	-1,85917	8,94999	-21,12934	-0,12243	2,74865	1,19958
1,9	-1,88111	9,07707	-21,42781	-0,13178	2,76211	1,20528
1,95	-1,89456	9,15483	-21,61006	-0,14123	2,77022	1,20871
2	-1,89911	9,18115	-21,67169	-0,15071	2,77293	1,20986
2,05	-1,89456	9,15483	-21,61006	-0,1602	2,77022	1,20871
2,1	-1,88111	9,07707	-21,42781	-0,16964	2,76211	1,20528
2,15	-1,85917	8,94999	-21,12934	-0,179	2,74865	1,19958
2,2	-1,82934	8,77703	-20,72174	-0,18822	2,72991	1,19164
2,25	-1,79245	8,56274	-20,21438	-0,19728	2,70599	1,18151
2,3	-1,74948	8,31252	-19,61847	-0,20614	2,67702	1,16923
2,35	-1,70147	8,03198	-18,94597	-0,21477	2,64314	1,15488
2,4	-1,64949	7,72666	-18,20913	-0,22315	2,60453	1,13852
2,45	-1,59468	7,40265	-17,42101	-0,23126	2,56137	1,12024
2,5	-1,53814	7,06608	-16,59492	-0,23909	2,51386	1,1001
2,65	-1,36807	6,03509	-14,0076	-0,26088	2,34728	1,02942
2,8	-1,2129	5,05934	-11,45207	-0,28021	2,14918	0,94516
2,95	-1,08023	4,18233	-9,02852	-0,2974	1,92527	0,84949
3,1	-0,95958	3,34091	-6,63113	-0,31267	1,68105	0,7444
3,25	-0,87422	2,67282	-4,85123	-0,32638	1,42178	0,63176
3,4	-0,81635	2,14357	-3,67877	-0,33922	1,15113	0,513
3,55	-0,77155	1,66928	-2,88986	-0,35127	0,87132	0,38924
3,7	-0,72443	1,15987	-2,04364	-0,3625	0,58474	0,26168
3,85	-0,67296	0,60345	-1,0777	-0,37299	0,29357	0,13151
4	-0,61714	0	0	-0,38267	0	0

Verkrümmungen	in [mm/m ²]	und	Verschlebung	des	Blechscherpunktes	in [cm]
x	epsilon	kappa_y	kappa_z	u	v	w
0	-0,61714	0	0	0	0	0
0,15	-0,61714	0,60345	-1,33451	-0,00926	0,27442	0,13151
0,3	-0,61714	1,15987	-2,56503	-0,01851	0,54586	0,26168
0,45	-0,61714	1,66928	-3,69156	-0,02778	0,81155	0,38924
0,6	-0,61807	2,14357	-4,74856	-0,0371	1,06879	0,513
0,75	-0,62698	2,67282	-5,9585	-0,04651	1,31493	0,63176
0,9	-0,65055	3,34091	-7,43764	-0,05607	1,54742	0,7444
1,05	-0,69337	4,18233	-9,22307	-0,06613	1,76312	0,84949
1,2	-0,74491	5,05934	-11,01159	-0,07691	1,95807	0,94516
1,35	-0,80983	6,03509	-12,82838	-0,08856	2,12823	1,02942
1,5	-0,88453	7,06608	-14,59537	-0,10126	2,26953	1,1001
1,55	-0,90993	7,40265	-15,14686	-0,10574	2,30953	1,12024
1,6	-0,93478	7,72666	-15,66805	-0,11036	2,34574	1,13852
1,65	-0,95851	8,03198	-16,15134	-0,11509	2,37803	1,15488
1,7	-0,98057	8,31252	-16,58929	-0,11994	2,40629	1,16923
1,75	-1,0004	8,56274	-16,9769	-0,12489	2,4304	1,18151
1,8	-1,01747	8,77703	-17,30785	-0,12994	2,45027	1,19164
1,85	-1,03129	8,94999	-17,5744	-0,13506	2,46582	1,19958
1,9	-1,04149	9,07707	-17,76994	-0,14024	2,47697	1,20528
1,95	-1,04773	9,15483	-17,88947	-0,14547	2,48368	1,20871
2	-1,04985	9,18115	-17,92985	-0,15071	2,48592	1,20986
2,05	-1,04773	9,15483	-17,88947	-0,15596	2,48368	1,20871
2,1	-1,04149	9,07707	-17,76994	-0,16118	2,47697	1,20528
2,15	-1,03129	8,94999	-17,5744	-0,16637	2,46582	1,19958
2,2	-1,01747	8,77703	-17,30785	-0,17149	2,45027	1,19164
2,25	-1,0004	8,56274	-16,9769	-0,17654	2,4304	1,18151
2,3	-0,98057	8,31252	-16,58929	-0,18149	2,40629	1,16923
2,35	-0,95851	8,03198	-16,15134	-0,18634	2,37803	1,15488
2,4	-0,93478	7,72666	-15,66805	-0,19107	2,34574	1,13852
2,45	-0,90993	7,40265	-15,14686	-0,19568	2,30953	1,12024
2,5	-0,88453	7,06608	-14,59537	-0,20017	2,26953	1,1001
2,65	-0,80983	6,03509	-12,82838	-0,21287	2,12823	1,02942
2,8	-0,74491	5,05934	-11,01159	-0,22452	1,95807	0,94516
2,95	-0,69337	4,18233	-9,22307	-0,23529	1,76312	0,84949
3,1	-0,65055	3,34091	-7,43764	-0,24536	1,54742	0,7444
3,25	-0,62698	2,67282	-5,9585	-0,25492	1,31493	0,63176
3,4	-0,61807	2,14357	-4,74856	-0,26433	1,06879	0,513
3,55	-0,61714	1,66928	-3,69156	-0,27365	0,81155	0,38924
3,7	-0,61714	1,15987	-2,56503	-0,28291	0,54586	0,26168
3,85	-0,61714	0,60345	-1,33451	-0,29217	0,27442	0,13151
4	-0,61714	0	0	-0,30143	0	0

Verkrümmungen	in [mm/m ²]	und	Verschlebung	des	Blechscherpunktes	in [cm]
x	epsilon	kappa_y	kappa_z	u	v	w
0	-0,61714	0	0	-0,08124	0	0
0,15	-0,56132	0,60345	-1,59132	-0,09008	0,25527	0,13151
0,3	-0,50985	1,15987	-3,08642	-0,0981	0,50698	0,26168
0,45	-0,46273	1,66928	-4,49327	-0,10539	0,75177	0,38924
0,6	-0,41979	2,14357	-5,81835	-0,11199	0,98646	0,513
0,75	-0,37975	2,67282	-7,06577	-0,11797	1,20807	0,63176
0,9	-0,34151	3,34091	-8,24415	-0,12338	1,41379	0,7444
1,05	-0,3065	4,18233	-9,41763	-0,12823	1,60097	0,84949
1,2	-0,27692	5,05934	-10,57111	-0,1326	1,76696	0,94516
1,35	-0,25158	6,03509	-11,64917	-0,13656	1,90917	1,02942
1,5	-0,23092	7,06608	-12,59581	-0,14017	2,0252	1,1001
1,55	-0,22519	7,40265	-12,87271	-0,14131	2,05768	1,12024
1,6	-0,22006	7,72666	-13,12697	-0,14243	2,08694	1,13852
1,65	-0,21555	8,03198	-13,35672	-0,14352	2,11292	1,15488
1,7	-0,21166	8,31252	-13,56012	-0,14458	2,13557	1,16923
1,75	-0,20835	8,56274	-13,73941	-0,14563	2,15482	1,18151
1,8	-0,20559	8,77703	-13,89397	-0,14667	2,17064	1,19164
1,85	-0,20342	8,94999	-14,01945	-0,14769	2,18298	1,19958
1,9	-0,20186	9,07707	-14,11208	-0,1487	2,19182	1,20528
1,95	-0,20091	9,15483	-14,16888	-0,14971	2,19714	1,20871
2	-0,20059	9,18115	-14,188	-0,15071	2,19891	1,20986
2,05	-0,20091	9,15483	-14,16888	-0,15172	2,19714	1,20871
2,1	-0,20186	9,07707	-14,11208	-0,15272	2,19182	1,20528
2,15	-0,20342	8,94999	-14,01945	-0,15374	2,18298	1,19958
2,2	-0,20559	8,77703	-13,89397	-0,15476	2,17064	1,19164
2,25	-0,20835	8,56274	-13,73941	-0,15579	2,15482	1,18151
2,3	-0,21166	8,31252	-13,56012	-0,15684	2,13557	1,16923
2,35	-0,21555	8,03198	-13,35672	-0,15791	2,11292	1,15488
2,4	-0,22006	7,72666	-13,12697	-0,159	2,08694	1,13852
2,45	-0,22519	7,40265	-12,87271	-0,16011	2,05768	1,12024
2,5	-0,23092	7,06608	-12,59581	-0,16125	2,0252	1,1001
2,65	-0,25158	6,03509	-11,64917	-0,16487	1,90917	1,02942
2,8	-0,27692	5,05934	-10,57111	-0,16882	1,76696	0,94516
2,95	-0,3065	4,18233	-9,41763	-0,17319	1,60097	0,84949
3,1	-0,34151	3,34091	-8,24415	-0,17805	1,41379	0,7444
3,25	-0,37975	2,67282	-7,06577	-0,18346	1,20807	0,63176
3,4	-0,41979	2,14357	-5,81835	-0,18943	0,98646	0,513
3,55	-0,46273	1,66928	-4,49327	-0,19604	0,75177	0,38924
3,7	-0,50985	1,15987	-3,08642	-0,20332	0,50698	0,26168
3,85	-0,56132	0,60345	-1,59132	-0,21135	0,25527	0,13151
4	-0,61714	0	0	-0,22019	0	0

Dehnungen	in	[mm/m]	und	Sigma_el	in	[kN/cm ²]
x	epsilon_A	epsilon_E	sigma_el_A	sigma_el_E		
0	-0,61714	-0,61714	-12,96	-12,96		
0,15	-0,78073	-0,56519	-16,39537	-11,86903		
0,3	-0,9288	-0,52007	-19,50471	-10,92141		
0,45	-1,06054	-0,48257	-22,27128	-10,13387		
0,6	-1,18423	-0,44848	-24,86886	-9,41803		
0,75	-1,35934	-0,38909	-28,54615	-8,17096		
0,9	-1,6227	-0,29647	-34,0766	-6,22587		
1,05	-1,98308	-0,17738	-41,64476	-3,72498		
1,2	-2,3581	-0,06769	-49,5202	-1,42151		
1,35	-2,76883	0,03269	-58,14552	0,68639		
1,5	-3,19764	0,12135	-67,15036	2,54833		
1,55	-3,33678	0,14742	-70,07235	3,09589		
1,6	-3,47041	0,17142	-72,87853	3,59981		
1,65	-3,59607	0,19313	-75,51738	4,05569		
1,7	-3,71133	0,21237	-77,93784	4,45972		
1,75	-3,81389	0,22899	-80,09171	4,80871		
1,8	-3,90151	0,24283	-81,93181	5,09949		
1,85	-3,9721	0,25377	-83,41415	5,32907		
1,9	-4,02389	0,26167	-84,50179	5,495		
1,95	-4,05556	0,26645	-85,16681	5,59546		
2	-4,06628	0,26806	-85,39178	5,62934		
2,05	-4,05556	0,26645	-85,16681	5,59546		
2,1	-4,02389	0,26167	-84,50179	5,495		
2,15	-3,9721	0,25377	-83,41415	5,32907		
2,2	-3,90151	0,24283	-81,93181	5,09949		
2,25	-3,81389	0,22899	-80,09171	4,80871		
2,3	-3,71133	0,21237	-77,93784	4,45972		
2,35	-3,59607	0,19313	-75,51738	4,05569		
2,4	-3,47041	0,17142	-72,87853	3,59981		
2,45	-3,33678	0,14742	-70,07235	3,09589		
2,5	-3,19764	0,12135	-67,15036	2,54833		
2,65	-2,76883	0,03269	-58,14552	0,68639		
2,8	-2,3581	-0,06769	-49,5202	-1,42151		
2,95	-1,98308	-0,17738	-41,64476	-3,72498		
3,1	-1,6227	-0,29647	-34,0766	-6,22587		
3,25	-1,35934	-0,38909	-28,54615	-8,17096		
3,4	-1,18423	-0,44848	-24,86886	-9,41803		
3,55	-1,06054	-0,48257	-22,27128	-10,13387		
3,7	-0,9288	-0,52007	-19,50471	-10,92141		
3,85	-0,78073	-0,56519	-16,39537	-11,86903		
4	-0,61714	-0,61714	-12,96	-12,96		

Dehnungen	in	[mm/m]	und	Sigma_el	in	[kN/cm ²]
x	epsilon_A	epsilon_E	sigma_el_A	sigma_el_E		
0	-0,61714	-0,61714	-12,96	-12,96		
0,15	-0,67296	-0,56132	-14,1322	-11,7878		
0,3	-0,72443	-0,50985	-15,21306	-10,70694		
0,45	-0,77155	-0,46273	-16,20258	-9,71742		
0,6	-0,81635	-0,41979	-17,14344	-8,81567		
0,75	-0,87422	-0,37975	-18,35856	-7,97465		
0,9	-0,95958	-0,34151	-20,15124	-7,1718		
1,05	-1,08023	-0,3065	-22,68487	-6,43653		
1,2	-1,2129	-0,27692	-25,47085	-5,81532		
1,35	-1,36807	-0,25158	-28,72957	-5,28325		
1,5	-1,53814	-0,23092	-32,30102	-4,84929		
1,55	-1,59468	-0,22519	-33,48823	-4,72892		
1,6	-1,64949	-0,22006	-34,63936	-4,6213		
1,65	-1,70147	-0,21555	-35,73085	-4,52662		
1,7	-1,74948	-0,21166	-36,73906	-4,44491		
1,75	-1,79245	-0,20835	-37,6415	-4,37526		
1,8	-1,82934	-0,20559	-38,41616	-4,31739		
1,85	-1,85917	-0,20342	-39,04254	-4,27184		
1,9	-1,88111	-0,20186	-39,5034	-4,23899		
1,95	-1,89456	-0,20091	-39,78568	-4,21914		
2	-1,89911	-0,20059	-39,88122	-4,21246		
2,05	-1,89456	-0,20091	-39,78568	-4,21914		
2,1	-1,88111	-0,20186	-39,5034	-4,23899		
2,15	-1,85917	-0,20342	-39,04254	-4,27184		
2,2	-1,82934	-0,20559	-38,41616	-4,31739		
2,25	-1,79245	-0,20835	-37,6415	-4,37526		
2,3	-1,74948	-0,21166	-36,73906	-4,44491		
2,35	-1,70147	-0,21555	-35,73085	-4,52662		
2,4	-1,64949	-0,22006	-34,63936	-4,6213		
2,45	-1,59468	-0,22519	-33,48823	-4,72892		
2,5	-1,53814	-0,23092	-32,30102	-4,84929		
2,65	-1,36807	-0,25158	-28,72957	-5,28325		
2,8	-1,2129	-0,27692	-25,47085	-5,81532		
2,95	-1,08023	-0,3065	-22,68487	-6,43653		
3,1	-0,95958	-0,34151	-20,15124	-7,1718		
3,25	-0,87422	-0,37975	-18,35856	-7,97465		
3,4	-0,81635	-0,41979	-17,14344	-8,81567		
3,55	-0,77155	-0,46273	-16,20258	-9,71742		
3,7	-0,72443	-0,50985	-15,21306	-10,70694		
3,85	-0,67296	-0,56132	-14,1322	-11,7878		
4	-0,61714	-0,61714	-12,96	-12,96		

Dehnungen	in	[mm/m]	und	Sigma_el	in	[kN/cm2]
x	epsilon_A	epsilon_E	sigma_el_A	sigma_el_E		
0	-0,61714	-0,61714	-12,96	-12,96		
0,15	-0,72046	-0,40219	-15,12957	-8,44603		
0,3	-0,8185	-0,20121	-17,18842	-4,22547		
0,45	-0,91206	-0,01341	-19,15329	-0,28156		
0,6	-1,00163	0,16204	-21,03421	3,40287		
0,75	-1,08632	0,32683	-22,81278	6,86347		
0,9	-1,16593	0,4829	-24,48452	10,14092		
1,05	-1,24826	0,63526	-26,21354	13,34049		
1,2	-1,33403	0,78019	-28,01465	16,38402		
1,35	-1,4165	0,91333	-29,74651	19,18001		
1,5	-1,4905	1,02866	-31,30049	21,60192		
1,55	-1,51246	1,06208	-31,76161	22,30376		
1,6	-1,53276	1,09264	-32,18794	22,94534		
1,65	-1,55122	1,12012	-32,57572	23,52249		
1,7	-1,56767	1,14435	-32,92115	24,03133		
1,75	-1,58229	1,1656	-33,22802	24,47751		
1,8	-1,59499	1,18381	-33,49473	24,85994		
1,85	-1,60537	1,19852	-33,71269	25,16901		
1,9	-1,61306	1,20935	-33,87435	25,39636		
1,95	-1,6178	1,21598	-33,9738	25,53551		
2	-1,61939	1,21821	-34,00726	25,58234		
2,05	-1,6178	1,21598	-33,9738	25,53551		
2,1	-1,61306	1,20935	-33,87435	25,39636		
2,15	-1,60537	1,19852	-33,71269	25,16901		
2,2	-1,59499	1,18381	-33,49473	24,85994		
2,25	-1,58229	1,1656	-33,22802	24,47751		
2,3	-1,56767	1,14435	-32,92115	24,03133		
2,35	-1,55122	1,12012	-32,57572	23,52249		
2,4	-1,53276	1,09264	-32,18794	22,94534		
2,45	-1,51246	1,06208	-31,76161	22,30376		
2,5	-1,4905	1,02866	-31,30049	21,60192		
2,65	-1,4165	0,91333	-29,74651	19,18001		
2,8	-1,33403	0,78019	-28,01465	16,38402		
2,95	-1,24826	0,63526	-26,21354	13,34049		
3,1	-1,16593	0,4829	-24,48452	10,14092		
3,25	-1,08632	0,32683	-22,81278	6,86347		
3,4	-1,00163	0,16204	-21,03421	3,40287		
3,55	-0,91206	-0,01341	-19,15329	-0,28156		
3,7	-0,8185	-0,20121	-17,18842	-4,22547		
3,85	-0,72046	-0,40219	-15,12957	-8,44603		
4	-0,61714	-0,61714	-12,96	-12,96		

Q_Blech	in	[kN]	tau und	SigmaFliess	in	[kN/cm2]
x	Q_Blech	tau	SigmaFliess			
0	0	13541,7608	238851,1297			
0,15	0	13746,5885	238816,0252			
0,3	0	14367,2679	238706,3988			
0,45	0	15406,9783	238511,7923			
0,6	0	16693,8346	238251,8576			
0,75	0	18204,3252	237919,7504			
0,9	0	19782,4243	237541,506			
1,05	0	20596,9357	237333,7286			
1,2	0	20403,3498	237383,8873			
1,35	0	19122,4952	237703,577			
1,5	0	16586,0255	238274,4453			
1,55	0	15447,2689	238503,9741			
1,6	0	14164,22	238742,8001			
1,65	0	12741,4501	238983,1926			
1,7	0	11188,2801	239216,3606			
1,75	0	9516,6696	239433,2872			
1,8	0	7742,3242	239625,0597			
1,85	0	5883,2233	239783,5754			
1,9	0	3959,0177	239902,0186			
1,95	0	1990,6614	239975,2316			
2	0	0	240000			
2,05	0	1990,6614	239975,2316			
2,1	0	3959,0177	239902,0186			
2,15	0	5883,2233	239783,5754			
2,2	0	7742,3242	239625,0597			
2,25	0	9516,6696	239433,2872			
2,3	0	11188,2801	239216,3606			
2,35	0	12741,4501	238983,1926			
2,4	0	14164,22	238742,8001			
2,45	0	15447,2689	238503,9741			
2,5	0	16586,0255	238274,4453			
2,65	0	19122,4952	237703,577			
2,8	0	20403,3498	237383,8873			
2,95	0	20596,9357	237333,7286			
3,1	0	19782,4243	237541,506			
3,25	0	18204,3252	237919,7504			
3,4	0	16693,8346	238251,8576			
3,55	0	15406,9783	238511,7923			
3,7	0	14367,2679	238706,3988			
3,85	0	13746,5885	238816,0252			
4	0	13541,7608	238851,1297			

Q_Blech	in	[kN]	tau und	SigmaFliess	in	[kN/cm2]
x	Q_Blech	tau	SigmaFliess			
0	0	8732,3258	239522,9414			
0,15	0	8864,4077	239508,3857			
0,3	0	9264,6492	239462,9383			
0,45	0	9935,1004	239382,2912			
0,6	0	10764,9222	239274,6316			
0,75	0	11738,9533	239137,1801			
0,9	0	12756,5813	238980,771			
1,05	0	13281,8142	238894,9146			
1,2	0	13156,9815	238915,6368			
1,35	0	12331,0299	239047,7716			
1,5	0	10695,4021	239283,9843			
1,55	0	9961,0815	239379,0521			
1,6	0	9133,7149	239478,0277			
1,65	0	8216,25	239577,7112			
1,7	0	7214,6974	239674,4551			
1,75	0	6136,7691	239764,5099			
1,8	0	4992,5928	239844,162			
1,85	0	3793,7623	239910,0292			
1,9	0	2552,9495	239959,2618			
1,95	0	1283,6664	239989,701			
2	0	0	240000			
2,05	0	1283,6664	239989,701			
2,1	0	2552,9495	239959,2618			
2,15	0	3793,7623	239910,0292			
2,2	0	4992,5928	239844,162			
2,25	0	6136,7691	239764,5099			
2,3	0	7214,6974	239674,4551			
2,35	0	8216,25	239577,7112			
2,4	0	9133,7149	239478,0277			
2,45	0	9961,0815	239379,0521			
2,5	0	10695,4021	239283,9843			
2,65	0	12331,0299	239047,7716			
2,8	0	13156,9815	238915,6368			
2,95	0	13281,8142	238894,9146			
3,1	0	12756,5813	238980,771			
3,25	0	11738,9533	239137,1801			
3,4	0	10764,9222	239274,6316			
3,55	0	9935,1004	239382,2912			
3,7	0	9264,6492	239462,9383			
3,85	0	8864,4077	239508,3857			
4	0	8732,3258	239522,9414			

Q_Blech	in	[kN]	tau und	SigmaFliess	in	[kN/cm2]
x	Q_Blech	tau	SigmaFliess			
0	0	13541,7608	238851,1297			
0,15	0	13746,5885	238816,0252			
0,3	0	14367,2679	238706,3988			
0,45	0	15406,9783	238511,7923			
0,6	0	16693,8346	238251,8576			
0,75	0	18204,3252	237919,7504			
0,9	0	19782,4243	237541,506			
1,05	0	20596,9357	237333,7286			
1,2	0	20403,3498	237383,8873			
1,35	0	19122,4952	237703,577			
1,5	0	16586,0255	238274,4453			
1,55	0	15447,2689	238503,9741			
1,6	0	14164,22	238742,8001			
1,65	0	12741,4501	238983,1926			
1,7	0	11188,2801	239216,3606			
1,75	0	9516,6696	239433,2872			
1,8	0	7742,3242	239625,0597			
1,85	0	5883,2233	239783,5754			
1,9	0	3959,0177	239902,0186			
1,95	0	1990,6614	239975,2316			
2	0	0	240000			
2,05	0	1990,6614	239975,2316			
2,1	0	3959,0177	239902,0186			
2,15	0	5883,2233	239783,5754			
2,2	0	7742,3242	239625,0597			
2,25	0	9516,6696	239433,2872			
2,3	0	11188,2801	239216,3606			
2,35	0	12741,4501	238983,1926			
2,4	0	14164,22	238742,8001			
2,45	0	15447,2689	238503,9741			
2,5	0	16586,0255	238274,4453			
2,65	0	19122,4952	237703,577			
2,8	0	20403,3498	237383,8873			
2,95	0	20596,9357	237333,7286			
3,1	0	19782,4243	237541,506			
3,25	0	18204,3252	237919,7504			
3,4	0	16693,8346	238251,8576			
3,55	0	15406,9783	238511,7923			
3,7	0	14367,2679	238706,3988			
3,85	0	13746,5885	238816,0252			
4	0	13541,7608	238851,1297			

Anhang G: Analytische Darstellung der Querschnittswerte

$$A = \int_A dA$$

$$A_y = \int_A y dA$$

$$A_z = \int_A z dA$$

$$A_\omega = \int_A \omega dA$$

$$A_{yz} = \int_A yz dA$$

$$A_{y\omega} = \int_A y\omega dA$$

$$A_{z\omega} = \int_A z\omega dA$$

$$A_{yy} = \int_A y^2 dA$$

$$A_{zz} = \int_A z^2 dA$$

$$A_{\omega\omega} = \int_A \omega^2 dA$$

$$A_y(s) = \int_0^s y dA$$

$$A_z(s) = \int_0^s z dA$$

$$A_\omega(s) = \int_0^s \omega dA$$

$$i_p^2 = 1/A \cdot \int_A (y^2 + z^2) dA$$

$$r_y = 1/A_{yy} \cdot \int_A y(y^2 + z^2) dA$$

$$r_z = 1/A_{zz} \cdot \int_A z(y^2 + z^2) dA$$

$$r_\omega = 1/A_{\omega\omega} \cdot \int_A \omega(y^2 + z^2) dA$$

Literaturverzeichnis

- [1] BÄCKLUND, J., AKESSN, B.: Plastisches Saint-Venantsches Torsionswiderstandsmoment offener Walzprofile; *Der Stahlbau* 10 (1972), S. 302-306; Ernst&Sohn Verlag, Berlin
- [2] BOCHMANN, Fritz: Statik im Bauwesen, Band 2: Festigkeitslehre; 16., stark bearbeitete Auflage; Verlag für Bauwesen, Berlin, 1995
- [3] BULIRSCH, Roland, RUTISHAUSER, Heinz: Interpolation und genäherte Quadratur, Mathematisches Hilfsmittel des Ingenieurs, Teil III; Springer-Verlag, Berlin u.a., 1968
- [4] BURTH, Knut, BROCKS, Wolfgang: Plastizität, Grundlagen und Anwendungen für Ingenieure; Vieweg-Verlag, 1992
- [5] DIN 18800 (11.90): Stahlbauten; Teil 1: Bemessung und Konstruktion, Teil 2: Stabilitätsfälle, Knicken von Stäben und Stabwerken, Teil 3: Stabilitätsfälle, Plattenbeulen
- [6] DIMITROV, Nikola: Festigkeitslehre, Band 1: Elastizität, Plastizität und Stabilität der Stabwerke; Walter deGruyter-Verlag, Berlin, 1971
- [7] ERLenkÖTTER, Helmut, REHER, Volker: Objektorientiertes Programmieren in C++, Eine strukturierte Einführung; rororo-Verlag
- [8] FAIRES, J. Douglas, BURDEN, Richard L.: Numerische Methoden, Näherungsverfahren und ihre praktische Anwendung, S.48ff.; Spektrum Akademischer Verlag
- [9] HAGEL, Christoph: Fließzonentheorie I. und II. Ordnung am Einzelstab mit offenem Dreiblechquerschnitt, Institut für Baustatik, TU Wien, erscheint 2004/05
- [10] HAUPT, Peter: Viskoelastizität und Plastizität, Thermomechanisch konsistente Materialgleichungen; Springer-Verlag, Berlin u.a., 1977
- [11] HEYMANN, J., DUTTON, V. L.: Plastic Design of Plate Griders with Unstiffened Webs; *Welding&Metal Fabrication*, July 1954, S. 265-272
- [12] HORST, Heinz: Vorlesungen über lineare Stabstatik, Teil 1; 4. Auflage; Seeliger Sofort-Druck, Hannover, 1994
- [13] KINDMANN, Rolf, FRICKEL, Jörg: Elastische und plastische Querschnittstragfähigkeit, Grundlagen, Methoden, Berechnungsverfahren, Beispiele; Ernst&Sohn Verlag, Berlin 2002
- [14] KINDMANN, Rolf, FRICKEL, Jörg: Grenztragfähigkeit von I-Querschnitten für beliebige Schnittgrößen; *Der Stahlbau* 68 (1999), Heft 4, S. 290-301; Ernst&Sohn Verlag, Berlin
- [15] KINDMANN, Rolf, FRICKEL, Jörg: Zweite Zuschrift zu „Grenztragfähigkeit von I-Querschnitten für beliebige Schnittgrößen“; *Der Stahlbau* 69 (2000), Heft 3, S. 206-310; Ernst&Sohn Verlag, Berlin
- [16] KINDMANN, Rolf, WOLF, Christian: Ausgewählte Versuchsergebnisse und Erkenntnisse zum Tragverhalten von Stäben aus I- und U-Profilen; *Der Stahlbau* 73 (2004), Heft 9, S. 683-692; Ernst&Sohn Verlag, Berlin

- [17] LOHMEYER, Gottfried: Baustatik, Teil 2, Festigkeitslehre; B.G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1996
- [18] MANG, Herbert, HOFSTETTER, Günter: Festigkeitslehre; Springer-Verlag, Wien u.a., 2000
- [19] MESKOURIS, Konstantin, HAKE, Erwin: Statik der Stabtragwerke, Einführung in die Tragwerkslehre, Springer-Verlag, Berlin u.a., 1999
- [20] OSTERIEDER, Peter: Tragfähigkeit von Stahlquerschnitten mit Schnittkraftinteraktion; Brandenburgische Technische Universität Cottbus
- [21] OSTERIEDER, Peter, WERNER, Frank, KRETZSCHMAR, Joachim: Biegedrillknicknachweis Elastisch-Plastisch für gewalzte I-Querschnitte; Der Stahlbau 67 (1998), Heft 10, S. 794-801; Ernst&Sohn Verlag, Berlin
- [22] PETERSEN, Christian: Stahlbau, Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten; Vieweg-Verlag, 1988
- [23] PILGRAM, Wilhelm: Elastizitätstheorie II. Ordnung für den räumlich beanspruchten Stab nach dem Reduktionsverfahren; Dissertation am Institut für Baustatik, TU Wien, 2002
- [24] RAMM, Ekkehard, HOFMANN, Thomas: Stabtragwerke, Der Ingenieurbau, Baustatik, Baudynamik; Ernst&Sohn Verlag, Berlin 1995
- [25] ROIK, K., CARL, J., LINDNER, J.: Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe; Ernst&Sohn Verlag, Berlin, 1972
- [26] ROTHERT, Heinrich, GENSICHEN, Volker: Nichtlineare Stabstatik, Baustatische Methoden, Grundlagen und Anwendungen; Springer-Verlag, Berlin u.a., 1987
- [27] ROWOHL, Dominic, HAGEL, Christoph: Fließzonentheorie unter Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung; in Aktuelle Beiträge aus Baustatik um Comp. Mechanics; ISSN 1431-5122, 2003
- [28] RUBIN, Helmut, SCHNEIDER, Klaus-Jürgen: Baustatik Theorie I. und II. Ordnung; 4., neu bearbeitete und erweiterte Auflage; Werner-Verlag; Düsseldorf 2002
- [29] RUBIN, Helmut: Baustatik ebener Stabwerke, Stahlbau Handbuch; Band 1, Teil A; Stahlbau-Verlagsgesellschaft mbH, Köln, 1993
- [30] RUBIN, Helmut: Stichwörter für Fachgebiet „Baustatik“; Institut für Baustatik, TU Wien
- [31] RUBIN, Helmut: Interaktionsbeziehungen zwischen Biegemoment, Querkraft und Normalkraft für einfachsymmetrische I- und Kasten-Querschnitte bei Biegung um die starke und für doppelsymmetrische I-Querschnitte bei Biegung um die schwache Achse; Der Stahlbau 47 (1978), Heft 3, S. 76-85; Ernst&Sohn Verlag, Berlin
- [32] RUBIN, Helmut: Interaktionsbeziehungen für doppelsymmetrische I- und Kasten-Querschnitte bei zweiachsiger Biegung und Normalkraft; Der Stahlbau 5 und 6 (1978), S. 145-151 und S. 174-181; Ernst&Sohn Verlag, Berlin
- [33] RUBIN, Helmut: Stellungnahme zu Rubin: Grundlage für die N -, M_y - und M_z -Interaktionsbeziehungen von I-Querschnitten; Der Stahlbau 70 (2001), Heft 4, S. 300-302; Ernst&Sohn Verlag, Berlin

- [34] RUBIN, Helmut: Das Tragverhalten von I-Trägern unter N -, M_y - und M_z -Beanspruchung nach Fließzonentheorie I. und II. Ordnung unter Berücksichtigung der Torsionseinflüsse; Der Stahlbau 70 (2001), Heft 11, S. 846-856; Ernst&Sohn Verlag, Berlin
- [35] RUBIN, Helmut: Zur plastischen Tragfähigkeit von 3-Blech-Querschnitten unter Normalkraft, doppelter Biegung und Wölbkrafttorsion; Der Stahlbau 74 (2005), Heft 1, S. 47-62; Ernst&Sohn Verlag, Berlin
- [36] SCHNEIDER, Klaus-Jürgen: Bautabellen für Ingenieure; 11. Auflage; Werner-Verlag, Düsseldorf, 1994
- [37] SEDLACEK, G.: Zweiachsige Biegung und Torsion; in Stahlbau Handbuch, für Studium und Praxis, Band 1, zweite, neu bearbeitete Auflage; Stahlbau-Verlags-GmbH, Köln, 1982
- [38] VLADIMIROV, Vladimir: Einführung in die physikalische Theorie der Plastizität und Festigkeit; 1. Auflage; Dt. Verlag für Grundstoffindustrie; Leipzig, 1976
- [39] WEBER, Michail: Traglasten von torsionsbeanspruchten dünnwandigen Stäben; Der Stahlbau 72 (2003), Heft 4, S. 254-261; Ernst&Sohn Verlag, Berlin
- [40] WITTENBURG, J.: Mechanik fester Körper, in Hütte: Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften; 31., neu bearbeitete und erweiterte Auflage; Springer-Verlag, Berlin u.a. 2000

desweiteren

- [41] HOOKE, Robert: De potentia restitutiva, 1678

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Aufbau der Arbeit.....	5
Abbildung 2: Beispiel eines betrachteten Querschnitts.....	10
Abbildung 3: Kinematische Beziehungen für die Verschiebungen	14
Abbildung 4: Kinematische Beziehungen für die Verdrehungen.....	15
Abbildung 5: $u_{bel.}$ aufgrund von Längsverschiebung von S und Verwölbung	16
Abbildung 6: $u_{bel.}$ aufgrund von Verdrehungen um die Querschnittshauptachsen.....	17
Abbildung 7: Vergleich von Wölbordinaten	17
Abbildung 8: Angriffspunkt der Schnittgrößen im Querschnitt.....	18
Abbildung 9: Kräftegleichgewicht am unverformten System.....	19
Abbildung 10: Momentengleichgewicht am unverformten System.....	20
Abbildung 11: Wölbkrafttorsion am unverformten System	20
Abbildung 12: (Wölbkraft-)Torsion	22
Abbildung 13: Spannungs-Dehnungs-Kurve	25
Abbildung 14: Bi-lineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung	26
Abbildung 15: Dehnungs- und Spannungsverlauf (elastisch).....	28
Abbildung 16: Dehnungs- und Spannungsverlauf (teilplastisch)	29
Abbildung 17: Erklärung einer Δ -Schnittgröße.....	30
Abbildung 18: Umrechnungshilfe zwischen Torsionsmomenten	38
Abbildung 19: Kräftegleichgewicht in Achsen der unverformten Lage	39
Abbildung 20: Momentengleichgewicht in Achsen der unverformten Lage	40
Abbildung 21: Verformte Bezugsachsen und Wirkungslinien.....	40
Abbildung 22: Beispielhafter Verlauf der Schubspannungsanteile.....	49
Abbildung 23: Schubspannungen an einem Blech.....	50
Abbildung 24: Drei-Blech-Querschnitte	51
Abbildung 25: Interaktionskreis elastisch und plastisch	53
Abbildung 26: Hohlkastenmodell für τ aus M_{ξ}^P	55
Abbildung 27: Schubverlauf infolge M_{ξ}^S	56
Abbildung 28: Hohlkastenmodell.....	57
Abbildung 29: Zustandsvektoren an Stabpunkten.....	60
Abbildung 30: Querschnittsidealisierung.....	72
Abbildung 31: System, Belastung, M_y -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.2.1-1	74

Abbildung 32: System, Belastung, M_y -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.2.2-1	75
Abbildung 33: System, Belastung, M_z -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.2.2-2.....	76
Abbildung 34: System, Belastung, M_y -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.2.2-3	78
Abbildung 35: System, Belastung und Zustandslinien von Untersuchung 7.2.3-1	80
Abbildung 36: Last-Verformungs-Diagramm zu Untersuchung 7.2.3-1	81
Abbildung 37: Last-Verformungs-Diagramm zu Untersuchung 7.2.3-2	82
Abbildung 38: Untersuchung 7.2.3-3	82
Abbildung 39: Last-Verformungs-Diagramm zu Untersuchung 7.2.3-3	82
Abbildung 40: System und Belastung von Untersuchung 7.2.3-4	83
Abbildung 41: Last-Verformungs-Diagramm zu Untersuchung 7.2.3-4	83
Abbildung 42: System und Belastung von Untersuchung 7.2.3-5	84
Abbildung 43: Last-Verformungs-Diagramm zu Untersuchung 7.2.3-5	84
Abbildung 44: System, Belastung, M_y -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.3-1	86
Abbildung 45: System, Belastung, M_z -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.3-2.....	86
Abbildung 46: System, Belastung, M_y -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.3-3	87
Abbildung 47: System, Belastung, M_z -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.3-4.....	88
Abbildung 48: System, Belastung, M_y -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.3-5	89
Abbildung 49: System, Belastung, M_y -Verlauf, σ -Verteilung von Untersuchung 7.3-6	90
Abbildung 50: System, Belastung, M_y - und Q_z -Verlauf von Untersuchung 7.4.1-1	91
Abbildung 51: System, Belastung und Schnittgrößenverlauf von Untersuchung 7.4.1-2.....	92
Abbildung 52: System, Belastung, M_y - und Q_z -Verlauf von Untersuchung 7.4.1-3	93
Abbildung 53: System, Belastung und Schnittgrößenverlauf von Untersuchung 7.4.1-4.....	93
Abbildung 54: System, Belastung, qualitativ M_z -, Q_y -Verlauf von Untersuchung 7.4.1-5.....	94
Abbildung 55: Beispiel aus [34, Kapitel 9] mit Torsionsmomentenverlauf	95
Abbildung 56: Torsionsmomentenverläufe von Untersuchung 7.2.2-3	96
Abbildung 57: System und Belastung von Untersuchung 7.4.2-1	97
Abbildung 58: System und Belastung von Untersuchung 7.4.2-2	97
Abbildung 59: Verläufe des primären Torsionsmoments von Untersuchung 7.4.2-2.....	98
Abbildung 60: Verläufe des sekundären Torsionsmoments von Untersuchung 7.4.2-2.....	98
Abbildung 61: Verläufe des Wölbmoments von Untersuchung 7.4.2-2	98
Abbildung 62: System und Belastung von Untersuchung 7.4.2-3	99
Abbildung 63: M_x^P -Verlauf von Untersuchung 7.4.2-3.....	100
Abbildung 64: M_x^S -Verlauf von Untersuchung 7.4.2-3.....	100

Abbildung 65: M_{ω} -Verlauf von Untersuchung 7.4.2-3.....	101
Abbildung 66: Last-Verformungs-Diagramm von Untersuchung 7.5.1-1	102
Abbildung 67: System und Belastung von Untersuchung 7.5.1-2	104
Abbildung 68: Last-Verformungs-Diagramm von Untersuchung 7.5.1-2	105
Abbildung 69: Verdrehungen φ_x von Untersuchung 7.5.1-2	105
Abbildung 70: System und Belastung von Untersuchung 7.5.1-3	106
Abbildung 71: Spannungsverteilung des Querschnitts in Systemmitte	107
Abbildung 72: System und Belastung von Untersuchung 7.5.2-1	108
Abbildung 73: Verdrehungen φ_x bei unterschiedlichen Blechdicken unter Traglast.....	109
Abbildung 74: System und Belastung von Untersuchung 7.5.2-2	110
Abbildung 75: System und Belastung von Untersuchung 7.5.2-3	111
Abbildung 76: System und Belastung von Untersuchung 7.5.2-3	112
Abbildung 77: Last-Verformungs-Diagramm von Untersuchung 7.5.2-3	112
Abbildung 78: Spannungsverteilung des Querschnitts in Systemmitte bei $f = 0,89$	113
Abbildung 79: System und Belastung von Untersuchung 7.6.....	114
Abbildung 80: Last-Verformungs-Diagramm von Untersuchung 7.6	114
Abbildung 81: Ausschnitt des Last-Verformungs-Diagramms von Untersuchung 7.6	115
Abbildung 82: Ausschnitt des Last-Verformungs-Diagramms von Untersuchung 7.6	115
Abbildung 83: Last-Verdrehungs-Diagramm von Untersuchung 7.6	116
Abbildung 84: M_x^p -Verlauf von Untersuchung 7.6.....	117
Abbildung 85: Querschnitt und Achsen des Grundsystems	123
Abbildung 86: System und Belastung	126
Abbildung 87: Stabunterteilungen.....	128
Abbildung 88: Bedeutung der Stabiterationen	128

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Berechnung der Δ -Schnittgrößen eines Blechs	33
Tabelle 2: Berechnung von ΔK_{Blech}	46
Tabelle 3: Klassen	62
Tabelle 4: Berechnung der Querschnittswerte	64
Tabelle 5: Berechnung der Querschnittswerte mit Unterteilung der Bleche.....	65
Tabelle 6: Berechnung der Querschnittsstrecken	66
Tabelle 7: Berechnung der Querschnittsstrecken mit Unterteilung der Bleche	67
Tabelle 8: Untersuchte Querschnitte	73
Tabelle 9: Querschnittsuntersuchungen nach Fließzonentheorie	79
Tabelle 10: Ergebnisse von Untersuchung 7.4-5.....	94
Tabelle 11: Eingangswerte der Untersuchung 7.5.1-3	106
Tabelle 12: Zusammenstellung der Ergebnisse für Untersuchung 7.5.1-3	106
Tabelle 13: Traglasten nach Th. I. und II. Ordnung von Untersuchung 7.5.2-1	109
Tabelle 14: Eingangswerte der Untersuchung 7.5.2-2	110
Tabelle 15: Zusammenstellung der Ergebnisse für Untersuchung 7.5.2-2	110
Tabelle 16: Eingangswerte der Untersuchung 7.5.2-3	111
Tabelle 17: Zusammenstellung der Ergebnisse für Untersuchung 7.5.2-3	111
Tabelle 18: Vergleichende Traglastberechnungen bei Untersuchung 7.6.....	117
Tabelle 19: Eingangswerte zur Querschnittswertsberechnung.....	123
Tabelle 20: Querschnittswerte im Grundsystem	124
Tabelle 21: Eingangswerte zur Querschnittsstreckenberechnung.....	125
Tabelle 22: Vorwerte der Bleche zur Querschnittsstreckenberechnung	125
Tabelle 23: Spannungsver- und Spannungsaufteilung	126
Tabelle 24: Berechnung der Δ -Werte	126
Tabelle 25: Berechnung von ΔK	127