TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
VIENNA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

DIPLOMARBEIT

Mathematisch-geometrische Sichtweisen im Wandel der Zeit

satyam eva jayate - Allein die Wahrheit siegt

ausgeführt am

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie

der Technischen Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 8-10
A-1040 Wien

unter Anleitung von

Ao. Univ.Prof. Mag. Dr. Peter Paukowitsch

durch

Thomas Newerkla

Hauptplatz 17
A-3920 Groß Gerungs

Wien, am 20. Jänner 2010

Danksagung

Auf der Suche nach einem Diplomarbeitsthema wandte ich mich an Prof. Peter Paukowitsch. Da die erste Lehrveranstaltung, die ich an der TU besucht habe, von ihm gehalten wurde, fühlte es sich richtig an, ihn aufzusuchen und mein Studium so zu beenden, wie es angefangen hatte.

Obwohl ich vor unserem ersten Gespräch keine Idee hatte, womit ich mich befassen könnte, war mir nach dem Gespräch klar, dass es ein geschichtliches Thema werden würde. Die Einschränkung auf die antike Geometrie folgte nur wenig später. Bei der Gestaltung und dem Aufbau der Diplomarbeit ließ mir Prof. Paukowitsch völlig freie Hand und stand auch für Fragen stets zur Verfügung. Dafür möchte ich ihm großen Dank aussprechen.

Besonderer Dank gilt meinen Eltern Hermine und Josef Newerkla, ohne deren Unterstützung in vielen - nicht zuletzt finanziellen - Belangen ich wohl kein Studium absolvieren hätte können.

Ebenso danken möchte all meinen Freunden, die mich während des Studiums begleitet haben und deren bloße Anwesenheit mein Leben bereichert haben, allen voran Herbert Grulich, der es in unserer gemeinsamen Studentenwohnung sechs Jahre lang mit mir ausgehalten hat und es mit seiner ganz eigenen Art von Humor geschafft hat, mir selbst an schlechten Tagen ein Grinsen abzuringen.

Ganz besonders möchte ich mich auch bei Petra Salzer bedanken, die sich die Mühe gemacht hat, das Korrekturlesen meiner Arbeit zu übernehmen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit wird die Geschichte der Mathematik, insbesondere der Geometrie, von der Antike bis etwa zum 10. Jahrhundert auszugsweise behandelt. Die Betrachtungen beschränken sich dabei auf drei Kulturkreise, die je in einem eigenen Kapitel beschrieben werden, nämlich den griechisch-hellenistischen, den indischen und den chinesischen Bereich.

Das 10. Jahrhundert wurde gewählt, weil sich in dieser Zeit alle drei Kulturen am Ende einer Entwicklungsphase befanden. Die hellenistische Kultur war bereits in die byzantinische aufgegangen, in China und Indien wurden jeweils die herrschenden Dynastien abgelöst.

Jedes der drei Kapitel besteht aus zwei Abschnitten. Im ersten Abschnitt werden die mathematischen Leistungen der jeweiligen Kultur chronologisch dargestellt, jeweils eingeschränkt auf das Gebiet der Geometrie. Diese Einschränkung musste vorgenommen werden, da andernfalls die Arbeit den vorgegebenen Rahmen bei weitem sprengen würde.

Die Beschäftigung mit der Geometrie - und der Mathematik allgemein - wird im zweiten Abschnitt vor dem Hintergrund der Geschichte und der Entwicklung der Kultur behandelt, ebenfalls möglichst chronologisch. Daneben wird die Denkweise der Mathematiker beschrieben und den Fragen nachgegangen, auf welche Art und aus welcher Motivation heraus Mathematik betrieben wurde.

Der bekannte britische Mathematiker G. H. Hardy (1877 - 1947) meinte einst: „The Greeks were the first mathematicians who are still real to us today. Oriental mathematics may be an interesting curiosity, but Greek mathematics is the real thing.“[1] Ein Ziel der Arbeit wird es sein, zu zeigen, dass, im Gegensatz zu diesem Zitat, die indische und chinesische Mathematik nicht nur interessante Kuriositäten sind, sondern einen Platz in der Geschichte der Mathematik verdient haben.

Nichtsdestotrotz hatte Hardy damit Recht, dass uns von den drei hier behandelten mathematischen Sichtweisen die griechische Mathematik am vertrautesten ist. Das liegt daran, dass unsere heutige mathematische Denk- und Arbeitsweise jener der Griechen sehr nahe steht. Meine Arbeit beginnt daher mit der Beschreibung der griechischen Mathematik. Die indische und die chinesische Mathematik werden anschließend zwar für sich betrachtet, jedoch immer wieder mit der griechischen vergleichen.

Aus der Antike sind keine Originaltexte erhalten. Von den griechisch-hellenistischen Schriften sind nur mittelalterliche Kopien und Abschriften von Kommentaren sowie arabische Übersetzungen erhalten. Ähnliches gilt für die indischen und chinesischen Originaltexte. Auch von diesen gibt es nur noch Jahrhunderte später entstandene Kopien. Aus diesem Grund sind Aussagen etwa über die Denkweise der antiken Mathematiker stets mit einem gewissen Unsicherheitsfaktor behaftet.

Hauptquellen meiner Diplomarbeit waren C. J. Scribas und P. Schreibers *5000 Jahre*

[1]Hardy nach [Martzloff 1997, S. 273]

Geometrie ([Scriba und Schreiber 2005]) und H. Wußings *6000 Jahre Mathematik* ([Wussing 2008]). Weitere allgemeine Quellen waren H. Gerickes *Mathematik in Antike, Orient und Abendland* ([Gericke 2004]) und M. Klines *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Volume 1* ([Kline 1990]). Die griechisch-hellenistische Mathematik wird in den oben genannten Werken ausführlich beschrieben, die indische und die chinesische jedoch nur zum Teil. T. A. Sarasvati Ammas *Geometry in Ancient and Medieval India* ([Amma 1979]), A. K. Bags *Mathematics in Ancient and Medieval India* ([Bag 1979]) und C. N. Srinivasiengars *The History of Ancient Indian Mathematics* ([Srinivasiengar 1967]) wurden daher als weitere Literatur für die indische Mathematik hinzugezogen, Y. Lis und S. Dus *Chinese Mathematics. A Concise History* ([Li und Du 1987]) und J.-C. Martzloffs *A History of Chinese Mathematics* ([Martzloff 1997]) für die chinesische.

Historische Informationen und Lebensdaten wurden entweder obigen Büchern entnommen oder im *dtv-Atlas Weltgeschichte* ([Kinder und Hilgemann 2000]) bzw. im *Lexikon der Geschichte* ([LDG 2001]) nachgeschlagen.

Natürlich finden sich im Literaturverzeichnis auch viele einschlägig Internetquellen samt dem Zeitpunkt des jeweiligen letzten Abrufs.

Indische und chinesische Eigennamen wurden in beinahe allen Quellen unterschiedlich geschrieben, speziell was die Setzung von Akzentzeichen betrifft. Ich habe mich daher dafür entschieden, jeweils die am häufigsten vorkommende Schreibweise zu verwenden und, in Anlehnung an [Scriba und Schreiber 2005], keine Akzentzeichen zu setzen.

Zahlreiche Grafiken wurden eingefügt, um meine Arbeit anschaulicher zu machen. Besonders geometrische Aussagen sollten dadurch verdeutlicht werden. Die Grafik am Deckblatt ist entnommen aus [Scriba und Schreiber 2005, S. 152] und zeigt das rekonstruierte Observatorium in der indischen Stadt Jaipur. Sämtliche geometrische Figuren wurden von mir selbst mit der dynamischen 2D-Software EUKLID DynaGeo Version 3.1f erzeugt.

1 Geometrie in Griechenland

Abbildung 1.1: Geburtsorte und Wirkungsstätten ausgewählter griechisch-hellenistischer Mathematiker (rot) (aus [Wussing 2008, S. 145])

1.1 Historischer Überblick über die griechische Geometrie

1.1.1 Die klassische Periode

1.1.1.1 Thales

Am Beginn der Entwicklung der Geometrie und der Mathematik insgesamt stehen im antiken Griechenland die ionischen Naturphilosophen. Die Lage der ionischen Städte an der Mittelmeerküste Kleinasiens, im Einflussbereich der Ägypter und Babylonier, begünstigte diese Entwicklung. So heißt es beispielsweise, dass Thales von Milet viel auf seinen Reisen nach Ägypten und Babylonien gelernt hat. Neben Thales lebten viele weitere Philosophen, darunter Anaxagoras und Anaximander, in Milet.

Thales (etwa 624 - 546 v. Chr.) ist der erste in einer Linie von vielen großen griechischen Mathematikern. Über sein Leben ist kaum etwas bekannt. Auch direkte Überlieferungen gibt es keine. Unsere Informationen über Thales stammen zu einem Großteil von späthellenistischen Mathematikhistorikern wie Proklos oder Eudemos.

Einige geometrische Aussagen werden ihm zugesprochen, die in heutiger Sprache sinngemäß wie folgt lauten:

- Die Basiswinkel im gleichschenkeligen Dreieck sind gleich.
- Die Scheitelwinkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden sind gleich.
- Der Durchmesser halbiert den Kreis.
- Die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich und halbieren einander.
- Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter.
- Ein Dreieck ist durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bestimmt, oder anders: Zwei Dreiecke, die in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen, stimmen in allen Stücken überein.

An der Figur in Abbildung 1.2 lassen beinahe sich alle diese Sätze einfach nachvollziehen.

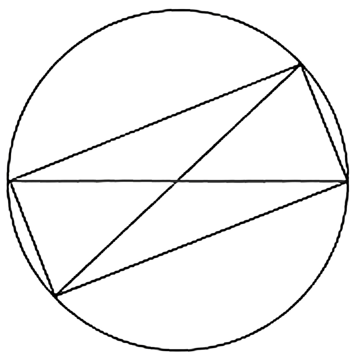

Abbildung 1.2: Rechteck mit Umkreis und Diagonalen

Inwieweit diese Tatsachen schon vor Thales bekannt waren, was anzunehmen ist, ist heute nicht mehr nachvollziehbar, doch war Thales wohl der erste Grieche, der diese Aussagen formulierte. Auch wird ihm zugeschrieben, neben Gerade und Kreis erstmals den Begriff des Winkels verwendet zu haben. Außerdem soll Thales die Höhe der Pyramiden durch Vergleich der Schattenlänge der Pyramiden mit der Länge des Schattens eines Stabes bekannter Länge bestimmt zu haben, ebenso wie die Entfernung von Schiffen von der Küste aus. Dies konnte aber bisher nicht bestätigt werden.

1.1.1.2 Die Pythagoreer

Ebenso wie Thales soll Pythagoras (etwa 570 - 510 v. Chr.) sein großes Wissen auf Reisen erworben haben. Geboren auf Samos wanderte er danach nach Kroton aus, wo er eine religiöse, wissenschaftliche und philosophische Gemeinschaft gründete. Diese Gemeinschaft war ihrem Wesen nach eine elitäre Schule, deren lebenslange Mitgliedschaft streng limitiert war. Sie beschäftigte sich mit dem Wesen der Zahl an sich und glaubte an die Göttlichkeit der Zahlen. Unter dem Wort Zahl sind hier aber nur die ganzen Zahlen, meist sogar nur die natürlichen Zahlen, zu verstehen, denn andere akzeptierten die Pythagoreer nicht. Brüche als solche gab es nicht. Stattdessen wurden die Verhältnisse zweier ganzer Zahlen angegeben, die somit auch als eine Art von Zahlen galten.

Bei der eingehenden Beschäftigung mit mathematischen und geometrischen Fragen mussten die Pythagoreer aber bald erkennen, dass auch irrationale Verhältnisse existieren. Diese Entdeckung soll von Hippasos von Metapont gemacht worden sein. Wie Hippasos zu dieser Entdeckung kam, ist unbekannt, wahrscheinlich jedoch durch sein Studium des Verhältnisses von Seite und Diagonale eines Quadrats.

Rein geometrisch kann die Existenz irrationaler Größen auch anhand eines regelmäßigen Fünfecks nachgewiesen werden. Da das Pentagramm Ordenszeichen der Pythagoreer war, gibt es auch die Theorie, dass die Entdeckung irrationaler Verhältnisse bei der Beschäftigung damit geschehen ist. Ebenso wie beim Quadrat ist das Verhältnis von Seite und Diagonale des Fünfecks irrational.

Um diese Verhältnisse zu unterscheiden, wurden Verhältnisse ganzer Zahlen kommensurabel genannt, das bedeutet, dass beide Zahlen durch dieselbe Einheit beschrieben werden können. War dies nicht der Fall, etwa bei $\sqrt{2}$ und 1, wurden sie inkommensurabel genannt, griechisch ἄλογος (nicht ausdrückbar) oder auch ἄρρητος (ohne Verhältnis). Einen Beweis dafür, dass $\sqrt{2}$ und 1 inkommensurabel sind, sollen die Pythagoreer schon gekannt haben. Laut Aristoteles war es ein indirekter Beweis, und zwar derselbe, der noch heute die Irrationalität von $\sqrt{2}$ zeigt.

Die Pythagoreer waren die ersten griechischen Geometer, die sich mit Flächenumwandlungen beschäftigten, also mit Problemen der Art, ein Polygon zu erzeugen, das die gleiche Fläche besitzt wie ein anderes bekanntes Polygon, oder der Art, ein Polygon einer bestimmten Fläche an eine Strecke gegebener Länge zu konstruieren.

Nun muss noch der Satz des Pythagoras erwähnt werden. Obwohl nach Pythagoras benannt, war der Satz schon lange in vorgriechischen Kulturen bekannt. Frühe Quellen schreiben Pythagoras eine unabhängige Entdeckung und den ersten Beweis zu, doch auch dies ist nicht gesichert. Es besteht also durchaus die Möglichkeit, dass Pythagoras weder etwas mit der Entdeckung, noch dem Beweis des Satzes zu tun hatte. Momentan gilt als wahrscheinlich, dass ein Pythagoreer, ob Pythagoras oder nicht, den Satz allgemein formuliert und bewiesen hat.

1.1.1.3 Die Paradoxa von Zenon

Die Entdeckung der inkommensurablen Größen brachte große Probleme mit sich, für die Bedeutung der Zahl ebenso wie für die Geometrie, denn die Erkenntnis, dass es rationale und irrationale Längen geben kann, hatten die Griechen noch nicht erlangt. Ihnen fehlte ein Verständnis der Unendlichkeit, wie wir es heute haben. Dies wird am besten durch die Paradoxa von Zenon ausgedrückt. Zenon (etwa 490 - 430 v. Chr.) lebte in der süditalienischen Stadt Elea, die dortige Schule ist nach der Stadt benannt worden.

Zu der Zeit gab es unterschiedliche Ansichten von Zeit und Raum: Die eine besagte, dass Zeit und Raum unendlich teilbar sind, wodurch jede Art von Bewegung als kontinuierlich angesehen wird, die andere, dass Zeit und Raum aus unteilbar kleinen Teilen aufgebaut sind und somit jede Art von Bewegung eine Aufeinanderfolge von kleinsten ruckartigen Bewegungen ist. Zenons Paradoxa waren gegen beide Ansichten gerichtet. Zehn Paradoxa sind indirekt überliefert, es sollen jedoch insgesamt vierzig gewesen sein.

Hier sollen nur die vier bekanntesten genannt werden, die ersten beiden richten sich gegen die erste oben genannte Ansicht von Zeit und Raum, die anderen gegen die zweite:

Dichotomie „The first asserts the nonexistence of motion on the ground that that which is in motion must arrive at the half-way stage before it arrives at the goal.“[1] Ausgehend, von der Vermutung, dass der Raum unendlich teilbar ist und die Hälfte der Strecke immer wieder halbiert werden kann, kann also eine endliche Länge nicht in endlicher Zeit hinter sich gebracht werden.

Achill und die Schildkröte „It says that the slowest moving object cannot be overtaken by the fastest since the pursuer must first arrive at the point from which the pursued started so that necessarily the slower one is always ahead.“[2]

Der Pfeil „The third paradox he [Zeno] spoke about, is that a moving arrow is at a standstill. This he concludes from the assumption, that time is made up of instants.“[3]

Stadion „The fourth is the argument about a set of bodies moving on a race-course and passing another set of bodies equal in number and moving in the opposite direction, the one starting from the end, the other from the middle and both moving at equal speed; he [Zeno] concluded that it follows that half the time is equal to double the time.“[4]

1.1.1.4 Die Klassischen Probleme der Mathematik

Zeitlich folgten nun die Sophisten, die sich mit Mathematik beschäftigten, um das Universum als Ganzes zu verstehen, und ebenso der Beginn der Platonischen Schule, die die Vormachtstellung auf dem Gebiet der Mathematik bald von diesen übernahm. In dieser Zeit traten die drei sogenannten Klassischen Probleme der Mathematik zu Tage: die Würfelverdoppelung, die Winkeldreiteilung und die Kreisquadratur, die allein mit Hilfe der Werkzeuge Zirkel und Lineal bewältigt werden sollten. Viele Erkenntnisse der Geometrie waren nur Nebenprodukte der Beschäftigung mit diesen Problemen.

Wo die Ursprünge dieser Probleme lagen, lässt sich heute nicht mehr eindeutig rekonstruieren. Es gibt verschiedene legendenhafte Versionen über deren erstes Auftauchen. Eratosthenes etwa überliefert, dass die Delier während einer Pestseuche deren Orakel befragten, das den Rat gab, die Größe des bestehenden Altars zu verdoppeln, um die Götter wohl zu stimmen. Die Winkeldreiteilung schien nach der Winkelhalbierung der logische nächste Schritt gewesen zu sein. Ebenso war wohl die Beschäftigung damit, einen Kreis in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln (daher der Name Kreisquadratur), nur der nächste Schritt in einer lange Reihe von Flächenumwandlungen (vgl. dazu auch Kap. 1.1.3.2).

Bereits in der Antike gab es Lösungen zu diesen Problemen. Obwohl diese zum Teil erst Jahrhunderte später erfolgten, sollen sie bereits hier in Auszügen dargestellt werden.

Die Würfelverdoppelung wurde Mitte des 5. Jahrhunderts v. Chr. von Hippokrates von Chios (um 430 v. Chr.) bearbeitet. Er führte das Problem auf die Bestimmung zweier

[1] Aristoteles nach [Kline 1990, S. 35]
[2] Aristoteles nach [Kline 1990, S. 36]
[3] Aristoteles nach [Kline 1990, S. 36]
[4] Aristoteles nach [Kline 1990, S. 36]

mittlerer Proportionalen x, y zwischen Seitenlänge a und der doppelten Seitenlänge $2a$ zurück:

$$a : x = x : y = y : 2a \tag{1.1}$$

Auch arbeitete er an dem Problem der Kreisquadratur. Obwohl er keine Lösung des Problems liefern konnte, schaffte er als erster die Quadratur einer durch gekrümmte Linien begrenzten Fläche, nämlich von drei speziellen Kreismonden.

Der Sophist Hippias (5. Jh. v. Chr.) erfand eine neue Kurve, die sogenannte Quadratrix (Abb. 1.3), um das Problem der Winkeldreiteilung zu lösen. Die Quadtratrix als älteste transzendente Kurve ist damit sogar älter als die Kegelschnitte. Sie wird auf folgende Weise erzeugt: Ausgehend von einem Quadrat $ABCD$ lasse man die Strecke AD im Uhrzeigersinn mit konstanter Geschwindigkeit rotieren, während die Strecke DC sich zur selben Zeit mit derselben Geschwindigkeit parallel zu sich selbst nach unten bewegt, bis beide die Strecke AB erreichen. Bewegt sich AD bis nach AB', dann erreicht zur selben Zeit DC die Strecke $D'C'$. Der Schnittpunkt E der beiden Strecken ist dann ein Punkt der Quadratrix.

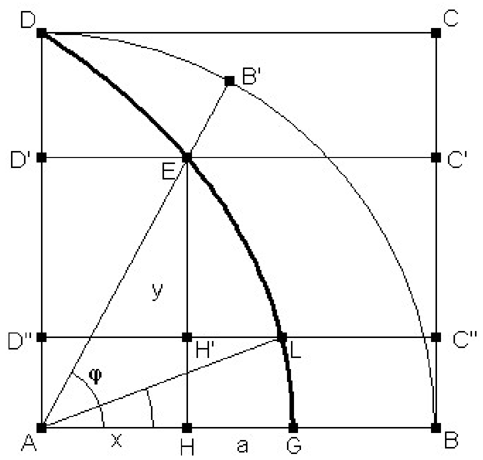

Abbildung 1.3: Die Quadratrix und die Dreiteilung des Winkels

Die Lösung der Winkeldreiteilung soll hier als Beispiel in heutiger Schreibweise erfolgen: Wir betrachten das Dreieck AHE. AB' braucht, um AB zu erreichen, dieselbe Zeit, die $D'C'$ dazu braucht. Sei nun φ der Winkel zwischen AE und AB. Daraus folgt

$$\frac{\varphi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{EH}{AD}. \tag{1.2}$$

Bezeichnen wir AD mit a und EH mit y, so ergibt sich, umgeformt,

$$y = a \cdot \varphi \cdot \frac{2}{\pi}. \tag{1.3}$$

Außerdem gilt $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$, wobei $x = AH$. Damit folgt

$$y = \frac{2a}{\pi} \cdot \arctan \frac{y}{x}.$$

Teilt man y so, dass $EH' = 2H'H$, und lässt $D''C''$ durch H' die Quadratrix im Punkt L schneiden, so ergibt sich $\angle LAB = \frac{\varphi}{3}$, denn analog zu (1.2) gilt

$$\frac{\angle LAB}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{y}{3}}{a}.$$

Setzt man (1.3) ein, folgt

$$\angle LAB = \frac{\varphi}{3}.$$

Menaichmos löste das Problem der Würfelverdoppelung um 360 v. Chr. mit Hilfe einer Parabel und einer gleichseitigen Hyperbel. Darauf wollen wir aber nicht näher eingehen. Ebenso gelang ihm, gemeinsam mit seinem Bruder Deinostratos, die Quadratur des Kreises mit Hilfe der Quadratrix.

Neben diesen gab es noch viele weitere Methoden, um die drei Klassischen Probleme zu lösen, doch wurden diese Lösungen allesamt nicht anerkannt, denn keine Lösung konnte nur mit den Hilfsmitteln Zirkel und Lineal erbracht werden. So wurde immer wieder versucht, die Probleme mit Zirkel und Lineal zu lösen, doch erst in der Neuzeit konnte bewiesen werden, dass dies gar nicht möglich ist: Pierre Laurent Wantzel (1814 - 1848) zeigte dies für die Würfelverdoppelung und die Winkeldreiteilung, Ferdinand von Lindemann (1852 - 1939) bewies mit der Transzendenz von π auch gleichzeitig die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises.

1.1.1.5 Eudoxos und Menaichmos

Eudoxos von Knidos (etwa 410 bis 350 v. Chr.) war ein Zeitgenosse Platons und pflegte auch wissenschaftlichen Kontakt mit diesem, gehörte aber nicht dessen Akademie in Athen an. Eudoxos versuchte, den Verhältnisbegriff neu zu definieren und auch auf irrationale Verhältnisse auszudehnen. Genauer gesagt verzichtete er darauf, Längen, Größen und Verhältnissen Zahlenwerte zuzuordnen. Dadurch konnte er die Geometrie von der pythagoreischen Beschränkung auf rationale Größen befreien.

Die zweite große Leistung des Eudoxos war die Entwicklung der Exhaustionsmethode zur Bestimmung von Flächen sowie von Volumina einiger nicht ebenflächig begrenzter Körper wie des Kegels. Diese wurde in späterer Zeit erfolgreich von vielen Mathematikern angewandt.

Eudoxos' Schüler Menaichmos (4. Jh. v. Chr.) war im Gegensatz zu seinem Lehrer Mitglied der Akademie. Ihm wird die Entdeckung der Kegelschnitte zugeschrieben. Wie bereits erwähnt, verwendete er diese ja zur Lösung des Problems der Würfelverdoppelung. Menaichmos verwendete zu ihrer Bestimmung jedoch drei verschiedene Kegel, einen recht-, einen spitz- und einen stumpfwinkeligen, jeweils geschnitten senkrecht zu einer ihrer Erzeugenden.

1.1.2 Euklid

Euklid (etwa 360 - 280 v. Chr.) lebte genau an der zeitlichen Grenze zwischen der klassischen und der hellenistischen Periode, was auch seine Werke wiederspiegeln. Vermutlich in Athen geboren, erhielt er seine Ausbildung wohl an Platons Akademie und lebte und wirkte anschließend in Alexandria.

1.1.2.1 Die Elemente

Euklids Hauptwerk sind die *Elemente*. Für uns ist das Werk besonders wichtig, da es der älteste größte mathematische Text ist, der aus der Antike überliefert worden ist. Zwar sind keine Texte aus Euklids Zeit erhalten, aber viele spätere Autoren haben kommentierte Versionen hinterlassen, aus denen die Elemente rekonstruiert werden konnten.

Die *Elemente* stellen eine Sammlung beinahe des gesamten mathematischen Wissens der Griechen zu diesem Zeitpunkt dar. Da dies zu einem Großteil Wissen der klassischen

Periode umfasst, kann das Werk auch dazu gerechnet werden. Sie sind in 13 Bücher unterteilt, von denen hier die die Geometrie betreffenden kurz vorgestellt werden sollen, und umfassen insgesamt 467 Propositionen.

Die *Elemente* sind streng deduktiv aufgebaut. So stehen am Beginn von Buch I einige Definitionen, in denen die Begriffe Punkt, Gerade, Kreis usw. behandelt werden. Darauf folgen Euklids 5 Postulate, die die für Konstruktionen erlaubten Schritte einschränken sollen:

1. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
2. Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
3. Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,
4. Daß alle rechten Winkel einander gleich sind.
5. Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.[5]

Besonders das 5. Postulat, das sogenannte Parallelenpostulat, war schon in der Antike umstritten, konnte jedoch nie gegen ein besseres ausgetauscht werden und es dauerte bis in die Neuzeit, bis erkannt wurde, dass auch nichteuklidische Geometrien existieren. Auf die Postulate folgen noch einige Axiome, bevor Euklid die ebene Geometrie Schritt für Schritt in Form von Propositionen aufbaut. Dieser Teil besteht weitgehend aus dem Wissen der Ionier und der Pythagoreer. Jede dieser Propositionen wird bewiesen. Einige Beispiele (in der Übersetzung nach Thaer[6]):

Proposition 1: Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.

Proposition 2: An einem gegebenen Punkte eine einer gegebenen Strecke gleiche Strecke hinzulegen.

Proposition 16: An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.

Proposition 47: Am rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.

Buch II beschreibt im Prinzip geometrische Algebra und ist ebenfalls hauptsächlich pythagoreisches Wissen. Die ersten 10 Propositionen beschäftigen sich mit einfachen algebraischen Beziehungen:

Proposition 1: Hat man zwei Strecken und teilt die eine von ihnen in beliebig viele Abschnitte, so ist das Rechteck aus den beiden Strecken den Rechtecken aus der ungeteilten Strecke und allen einzelnen Abschnitten zusammen gleich.

In heutiger Formelsprache:

$$a(b + c + d + ...) = ab + ac + ad + ... \tag{1.4}$$

[5] [Euklid 2003]

[6] vgl. [Euklid 2003]

Es wurden auch kompliziertere Zusammenhänge ausgedrückt. So sieht Proposition 5 heute so aus:

$$ab + \left(\frac{1}{2}(a+b) - b^2\right) = \left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 \qquad (1.5)$$

Proposition 11: Eine gegebene Strecke so zu teilen, daß das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist. (vgl. Abb. 1.4)

Dies führt auf eine quadratische Gleichung der Form

$$x^2 + ax = a^2. \qquad (1.6)$$

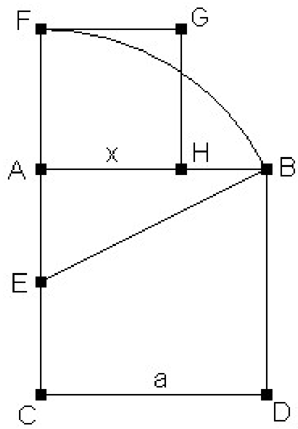

Abbildung 1.4: Proposition 11

Andere quadratische Gleichungen werden ebenfalls behandelt.

Buch III beschäftigt sich mit dem Kreis, Sehnen, Tangenten, Sekanten und so fort. Zu einem großen Teil stellen die Propositionen wohl wieder pythagoreisches Wissen dar. Eine Neuerung ist jedoch Folgendes, denn es war zuvor noch nicht betrachtet worden:

Proposition 16: Eine rechtwinklig zum Kreisdurchmesser vom Endpunkt aus gezogene Linie muß außerhalb des Kreises fallen, und in den Zwischenraum der geraden Linie und des Bogens läßt sich keine weitere gerade Linie nebenhineinziehen; der Winkel des Halbkreises ist größer als jeder spitze geradlinige Winkel, der Restwinkel kleiner.

Buch IV enthält Propositionen zu regelmäßigen Vielecken, eingeschrieben in oder umgeschrieben um einen Kreis.

Buch V beschäftigt sich mit der Proportionentheorie von Eudoxos und gehört aus heutiger Sicht eigentlich nicht mehr zur Geometrie. Erst Buch VI ist für uns wieder von Interesse, denn darin befasst sich Euklid mit ähnlichen Figuren und verwendet dazu die vorher beschriebene Proportionenlehre. Zu Beginn stehen wieder einige Definitionen, etwa die Definition der Höhe einer Figur, gefolgt von 33 Proportionen, die zum Teil auch wieder algebraische Bedeutung haben.

Proposition 4: In winkelgleichen Dreiecken stehen die Seiten um gleiche Winkel in Proportion, und zwar entsprechen einander die, die gleichen Winkeln gegenüberliegen.

Proposition 27: Von allen Parallelogrammen, die man an eine feste Strecke so anlegen kann, daß ein Parallelogramm fehlt, welches einem über ihrer Hälfte gezeichneten ähnlich ist und ähnlich liegt, ist das über der Hälfte angelegte, das selbst dem fehlenden ähnlich ist, das größte.

Algebraisch gedeutet gibt dies eine Bedingung für die Diskriminante einer quadratischen Gleichung, sodass die Gleichung dann eine reelle Lösung besitzt.

Buch VII, VIII und IX enthalten Sätze über natürliche Zahlen und sind im Rahmen dieser Arbeit für uns nicht von Interesse.

Buch X ist eine sehr anspruchsvolle Abhandlung in 115, in manchen Ausgaben 117, Propositionen über mit Zirkel und Lineal konstruierbare Größen, insbesondere denjenigen, die - in moderner Algebra - durch $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, ausgedrückt werden, wobei a und b kommensurable Linien repräsentieren.

Proposition 1: Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher (gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die

Hälfte weg und wiederholt dies immer, dann muß einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist.

Proposition 2: Zu zwei gegebenen kommensurablen Größen ihr größtes gemeinsames Maß zu finden.

Buch XI enthält Definitionen und elementare Sätze der räumlichen Geometrie. So werden zu Beginn Begriffe wie Körper, parallele Ebenen, Winkel im Raum, spezielle Körper usw. definiert. Die Definitionen sind aber oft unklar und nehmen unausgesprochen schon andere Sätze an. Dann folgen Eigenschaften von Linien und Flächen, bevor Euklid sich den Sätzen dreidimensionaler Objekte zuwendet.

Proposition 20: Wird eine Ecke von drei ebenen Winkeln umfaßt, so sind irgend zwei, beliebig zusammengenommen, größer als der letzte.

Proposition 31: Parallelflächen auf gleichen Grundflächen und unter derselben Höhe sind einander gleich.

In Buch XII werden Flächen und Volumina berechnet und zugehörige Sätze bewiesen. Die häufigste dabei vorkommende Beweismethode ist die von Eudoxos eingeführte Exhaustionsmethode.

Proposition 2: Kreise verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern.

Proposition 10: Jeder Kegel ist ein Drittel des Zylinders, der mit ihm dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Proposition 18: Kugeln stehen zueinander dreimal im Verhältnis ihrer Durchmesser.

Das letzte Buch, Buch XIII, beschäftigt sich mit regulären Polygonen und Polyedern und Sätzen in diesem Zusammenhang. So wird zum Abschluss des Buches der Beweis gebracht, dass nur 5 reguläre Polyeder existieren. Dieses Ergebnis ist ein Korollar zur letzten Proposition der Elemente.

In älteren Versionen gibt es noch zwei weitere Bücher, die jedoch nach heutigem Forschungsstand nicht mehr zu den *Elementen* gerechnet, sondern anderen Autoren zugeordnet werden.

Die *Elemente* galten lange als das wichtigste mathematische Werk überhaupt. Ihr Einfluss auf spätere Zeiten ist unbestritten. Dies „hat das Bild der antiken Geometrie insgesamt ein wenig deformiert. Zirkel und Lineal haben dort nicht die dominierende Rolle gespielt, die die 'Elemente' suggerieren. Von Kegelschnitten, anderen speziellen Kurven verschiedenster Art, approximativen Methoden der Inhaltsbestimmung und anderen wesentlichen Inhalten der antiken Geometrie erfährt man in den 'Elementen' nichts.“[7]

1.1.2.2 Weitere geometrische Schriften

Euklid werden einige andere Werke zugeschrieben, die den *Elementen* nur im Umfang nachstehen. Die *Konika* etwa sind eine nicht in die heutige Zeit überlieferte Lehre über die Kegelschnitte. Wahrscheinlich gingen sie gerade deswegen verloren, weil ihr Inhalt einem Teil der Kegelschnittslehre von Apollonios entsprach.

In den *Data*, als Ganzes erhalten, behandelte Euklid Aufgaben über Verhältnisse, thematisch ähnlich den Büchern V und VI. Vielleicht waren sie als Übungsaufgaben gedacht.

[7] [Scriba und Schreiber 2005, S. 56f]

Abbildung 1.5: Seite aus dem Archimedes-Palimpsest (aus [Scriba und Schreiber 2005])

Die Schrift *Über Teilungen* beschäftigt sich, wie der Titel schon erahnen lässt, mit Teilungen von geometrischen Figuren in kleinere, wobei die durchgeführten Schnitte gewissen Nebenbedingungen genügen. So wurden etwa Dreiecke in kleinere Dreiecke geteilt oder auch eine Figur durch einen bestimmten Punkt so geteilt, dass die Flächeninhalte der beiden Teilflächen einem bestimmten Verhältnis genügten. Es liegt die Vermutung nahe, dass einige Aufgaben darin als Übungen zu den *Elementen*, genauer Buch II, gedient haben könnten.

Ein weiteres Werk sind die *Porismen*, die jedoch nicht überliefert worden sind. Es wird vermutet, dass darin bekannte geometrische Objekte konstruiert wurden.

1.1.3 Die Alexandrinische Periode

1.1.3.1 Archimedes

Archimedes (etwa 287 - 212 v. Chr.) wuchs in der sizilianischen Stadt Syrakus auf, erhielt seine Ausbildung jedoch vermutlich in Alexandria, bevor er wieder nach Syrakus zurückkehrte. Nicht nur Mathematiker, sondern auch genialer Erfinder, trugen eben diese Erfindungen dazu bei, dass sich die Stadt im 2. Punischen Krieg zwei Jahre lang gegen die belagernden Römer erwehren konnte. Trotz allem wurde er schließlich bei der Einnahme der Stadt getötet.

Obwohl die Geometrie nicht den Schwerpunkt seiner Überlegungen einnahm, sondern zumeist für Hilfsüberlegungen notwendig war, stellen seine Arbeiten dazu doch den Höhepunkt der Alexandrinischen Periode dar. So sind seine Schriften keine rein geometrischen Werke. Einzig eine verlorene Abhandlung über halbreguläre Polyeder wäre in diese Kategorie gefallen.

Seine Arbeit *Über Kugel und Zylinder* beginnt mit einigen Definitionen und Axiomen, etwa dass von allen Kurven mit demselben Anfangs- und Endpunkt die gerade Linie die kürzeste Verbindung darstellt. In dieser Arbeit werden Eigenschaften von konkave Kurven und Oberflächen behandelt. Beinahe alle Aussagen werden mit Hilfe einer Weiterentwicklung der Exhaustionsmethode von Eudoxos bewiesen. Die im weiteren aufgelisteteten Propositionen sind der Übersetzung von Czwalina-Allenstein[8] entnommen. Einige Beispiele aus Buch I:

Proposition 13: Der Mantel eines jeden geraden Zylinders ist gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius die mittlere Proportionale ist zwischen der Seitenlinie und dem Durchmesser des Zylinders.

Proposition 33: Die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß wie die Fläche ihres größten Kugelkreises.

Buch II enthält weitere Erkenntnisse der geometrischen Algebra, zum Beispiel:

Proposition 4: Eine gegebene Kugel ist so zu schneiden, daß die Segmente zueinander ein gegebenes Verhältnis haben.

Dies entspricht der kubischen Gleichung

$$(a - x) : c = b^2 : x^2, \tag{1.7}$$

die Archimedes durch Schnitt einer Parabel mit einer Hyperbel mit rechtwinkeligen Asymptoten löst.

In *Über Konoide und Sphäroide* (auch unter dem Namen *Über Paraboloide, Hyperboloide und Ellipsoide* bekannt) beschäftigt er sich mit Paraboloiden, Hyperboloiden und Sphäroiden und davon abgeschnittenen Teilen, wie etwa:

Proposition 21: Jedes Paraboloid-Segment mit einer zur Achse des Paraboloids senkrechten Grundfläche ist 1 $^1/_2$mal so gross wie der Kegel, der mit dem Segment die gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Proposition 24: Zwei Segmente desselben Paraboloids mit beliebigen Grundflächen haben zueinander dasselbe Verhältnis wie die Quadrate ihrer Achsen.

In verschiedenen Werken verwendet er eine aus der Mechanik stammende Methode, um mathematische Sätze zu erhalten. Diese Methode ist keine streng geometrische, aber eine äußerst effektive Art, neue Erkenntnisse zu erhalten. In *Die Quadratur der Parabel* gibt Archimedes zwei verschiedene Methoden, die Fläche eines Parabelsegments zu berechnen, eine ähnlich der mechanischen Art von anderen Werken und danach die streng mathematische, aufgebaut auf der Exhaustionsmethode. So kommt Archimedes im Grunde auf eine unendliche geometrische Reihe.

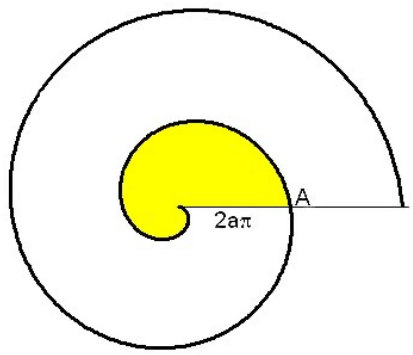

Abbildung 1.6: Die Archimedische Spirale

In seinem Werk *Über Spiralen* definiert Archimedes die heute nach ihm benannte Spirale, die in Polarkoordianten $r = a\vartheta$ lautet, und beschäftigt sich mit deren Eigenschaften sowie Eigenschaften der Tangenten an die Spirale. Das scharfsinnigste Ergebnis, bewiesen wieder durch Exhaustion: „The area bounded by the first turn of the spiral and the initial line is equal to one-third of the ‚first circle'"[9].

[8][Archimedes 1922/1923]
[9][Archimedes 1897, S. 178]

Spätere Mathematiker verwendeten diese spezielle Kurve unter anderem dazu, einen Winkel in beliebig viele gleich große Teile zu teilen.

Zuletzt sei noch angemerkt, dass Archimedes eine recht genaue Abschätzung für π berechnete, indem er die Kreisfläche mit der Fläche eines um- und eines eingeschriebenen 96-Eckes annäherte und die Schranken $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ erhielt.

1.1.3.2 Apollonios von Perge

Apollonios (etwa 262 - 190 v. Chr.) kam jung nach Alexandria und lernte dort von Euklids Nachfolgern. Als Zeitgenosse von Archimedes stand er mit diesem auch in Kontakt. Er schrieb Werke zu verschiedenen Themen, doch sein Hauptwerk sind die *Konika*, eine Kegelschnittslehre, die im Unterschied zu früheren Werken gleichen Themas überaus allgemein formuliert ist. In acht Büchern beweist Apollonios 487 Propositionen, das achte Buch ist leider in keiner Überlieferung erhalten.

Eine wichtige neue Einführung ist die Erzeugung der Kegelschnitte an einem einzigen schiefen Kreiskegel bzw. im Fall der Hyperbel sogar an einem Doppelkegel. Natürlich gibt es, wie bei den Griechen üblich, keine algebraischen Überlegungen, dennoch konnte Apollonios schon Beziehungen herleiten, die wir heute der Scheitelgleichung entnehmen können:

$$y^2 = rx\left(1 \pm \frac{x}{t}\right) \tag{1.8}$$

r (latus rectum) und t (latus transversum) sind Konstanten. An (1.8) lassen sich auch die heute gebräuchlichen Namen leichter erkennen, die von Apollonios erstmals verwendet worden sind: Existiert der zweite Term auf der rechten Seite nicht, strebt also t gegen unendlich, so erhält man die Parabelgleichung $y^2 = rx$, die geometrisch genau dem Problem einer Flächenanlegung entspricht - daher das griechische Wort παραβολή, das Nebeneinanderstellung bedeutet. Ist dieser zweite Term positiv, liegt eine Anlegung mit Überschuss (gr. ὑπερβολή) vor, ist der Term negativ, eine Anlegung mit Mangel (gr. ἔλλειψσις). Gemeinsam mit einigen Definitionen und Sätzen, etwa Fakten zu konjugierten Durchmessern und Tangenten an Kegelschnitten, macht dies den Inhalt des ersten Buches aus.

Buch II enthält Sätze zu den Asymptoten einer Hyperbel sowie einem Paar zueinander konjugierter Hyperbeln. Weitere Themen sind etwa das Auffinden der Achsen und der Durchmesser von Kegelschnitten. In Buch III werden Flächen und Figuren behandelt, die von Tangenten und Durchmessern erzeugt werden, ebenso die harmonischen Eigenschaften von Pol und Polare und Beziehungen der Brennpunkte. Buch IV führt dies weiter und beschäftigt sich dann zum Großteil mit den möglichen Schnitten von Kegelschnitten in verschiedenen Positionen. In diesem Zusammenhang beweist Apollonios auch, dass zwei Kegelschnitte nicht mehr als 4 Schnittpunkte besitzen können. In Buch V untersucht Apollonios die maximal und minimal möglichen Abstände eines beliebigen Punkts von einem Kegelschnitt, eine absolute Neuheit auf diesem Gebiet. Anschließend untersucht er die Eigenschaften von Normalen und beschreibt die Konstruktion von Normalen auf einen Kegelschnitt, ausgehend von einem gegebenen Punkt innerhalb oder außerhalb des Kegelschnitts. Dabei stößt er auch auf das Problem, dass von einem Punkt aus durch mehrere Punkte des Kegelschnitts Normalen gelegt werden können, bis zu vier an der Zahl, je nach Lage des Punktes. Im Zuge dessen studiert er also auf indirekte Weise auch die Evoluten der Kegelschnitte. Buch VI beschäftigt sich mit kongruenten und ähnlichen Kegelschnitten bzw. Teilabschnitten und Buch VII enthält Eigenschaften von konjugierten Durchmessern von Kegelschnitten in Hauptlage. Im verlorenen Buch VIII wurde dies wahrscheinlich fortgesetzt.

Euklids *Elemente* bildeten bis weit in die Neuzeit hinein, in immer wieder abgeänderter Form, die Grundlage des Geometrieunterrichts, während Apollonios' *Konika* in Westeuropa kaum Beachtung fand.

Laut Pappos verfasste Apollonios noch sechs weitere Schriften, nur eine ist aber erhalten. Eine andere konnte rekonstruiert werden und scheint das nach ihm benannte Apollonische Problem enthalten zu haben. Das Problem besteht darin, zu drei gegebenen Kreisen, Geraden oder Punkten oder Kombinationen der drei, diejenigen Kreise mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, die die drei gegebenen Objekte berühren.

1.1.3.3 Heron

Nach den drei großen Mathematikern Euklid, Archimedes und Apollonios war die Mathematik und mit ihr die Geometrie im Niedergang begriffen. Nur vereinzelt wurde noch neues, bedeutsames Wissen hervorgebracht. Zu den nachfolgenden Mathematikern gehört Heron von Alexandria (zwischen 150 v. Chr. und 200 n. Chr.), dessen Schaffen aber eher enzyklopädisch angelegt war. Wenig stammt von ihm selbst. So verfasste er etwa einen Kommentar zu Euklid und bewies einige Sätze der Euklidischen Geometrie. Auch die Sätze zu Flächeninhalten, Oberflächen und Volumina in *Metrika* und *Geometrika*, das nicht sicher von ihm ist, sind nicht neu, sondern nur ein Sammelsurium bereits bekannter Aussagen. Das Werk war augenscheinlich an Praktiker gerichtet und legt großen Wert auf numerische Ergebnisse.

In seinen *Dioptra* findet sich auch die nach ihm benannte Heronsche Flächenformel für den Flächeninhalt eines Dreiecks

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{1.9}$$

wobei die Hilfsgröße s den halben Umfang des Dreiecks darstellt. Viele seiner anderen Formeln gibt er ohne Beweis an, teilweise sind sie auch nur Näherungsformeln, wohl um aus Gründen des praktischen Rechnens etwa auf Wurzelziehen verzichten zu können.

1.1.3.4 Nikomedes und Diokles

In der Alexandrinischen Periode beschränkten sich die Geometer nicht mehr darauf, Probleme nur mit Zirkel und Lineal zu lösen. So wurden neben der Spirale von Archimedes andere neue Kurven definiert, mit denen sich etwa die klassischen Probleme lösen ließen.

Nikomedes (um 200 v. Chr.) entwarf die Konchoide (vgl. Abb. 1.7(a)) in allen vier Typen, die er verwendete, um einen Winkel in drei Teile zu teilen und einen Würfel zu verdoppeln. Auch wird ihm zugeschrieben, einen Mechanismus entwickelt zu haben, mit dem die Konchoide direkt konstruiert werden konnte. Damit ist die Konchoide, abgesehen von Kreis und Gerade, die älteste mechanisch konstruierbare Kurve.

Diokles (etwa 240 - 180 v. Chr.) wiederum löste das Problem der Würfelverdoppelung mit Hilfe der von ihm entwickelten Zissoide (vgl. Abb. 1.7(b)).

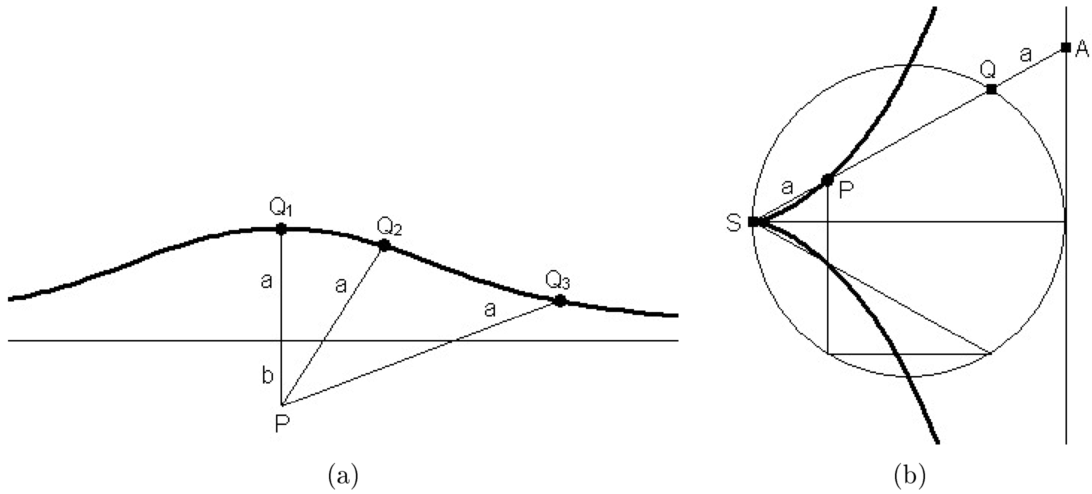

Abbildung 1.7: Spezielle Kurven: (a) Die Konchoide; (b) Die Zissiode

1.1.3.5 Die Entwicklung der Trigonometrie

Als Begründer der Trigonometrie gilt Hipparchos von Nicäa (etwa 190 - 120 v. Chr.) Er lebte in Alexandria und Rhodos und war eigentlich Astronom. Seine Herangehensweise sollte man aber eher als Sehnengeometrie bezeichnen, denn Hipparchos ordnete jedem Kreisbogen AB eines bestimmten Winkels die zugehörige Sehne (lat. chorda) zu (Abb. 1.8). Dies ist äquivalent zur Trigonometrie, wie wir sie heute kennen, denn:

$$s = \mathrm{crd} 2\alpha = 2r \cdot \sin \alpha. \tag{1.10}$$

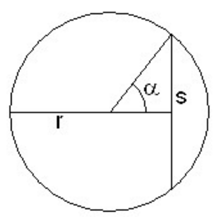

Abbildung 1.8: Sehnengeometrie

Da für die Astronomie aber auch sphärische Trigonometrie gebraucht wird, wurde auch in diese Richtung geforscht. Eine erste Definition eines sphärischen Dreiecks findet sich in Menelaos' (etwa 70 - 140 n. Chr.) *Sphärik*, in der auch zugehörige Sätze dargebracht werden, analog zu Euklids Sätzen über ebene Dreiecke.

Ptolemaios (etwa 100 - 160 n. Chr.) entwickelte dann die ebene Trigonometrie weiter. So findet sich in seinem heute als *Almagest* bekannten Werk die erste überlieferte Sehnentafel, die Längen der Sehnen für Winkel von 0° bis 180° in Schritten von $\frac{1}{2}^\circ$ enthält. Unter anderem enthält es auch einen Satz, der äquivalent zu $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ist.

1.1.3.6 Pappos

Als letzter großer hellenistischer Mathematiker sei Pappos (um 300 n. Chr.) erwähnt, der in Alexandria gelebt und gewirkt hat. Seine Schriften bestehen zum Großteil aus Auszügen von Schriften früherer Mathematiker, erweitert durch kritische Kommentare und eigene Ideen. Zu den von ihm selbst gefundenen Sätzen gehört der sogenannte Guldinsche Schwerpunktsatz an Rotationskörpern.

Nach Pappos finden sich in der Geschichte im Prinzip nur noch Kommentatoren, denen wenige bis gar keine neuen Errungenschaften in der Mathematik zuzuschreiben sind.

1.2 Kulturhistorischer Hintergrund der griechischen Mathematik

1.2.1 Eine erste Rationalisierung der Natur

> „At least these men dared to tackle the universe with their minds and refused to rely upon gods, spirits, ghosts, devils, angels, and other mythical agents.“ [10]

Die frühen Naturphilosophen wie Thales begannen damit, die Natur zu rationalisieren, wegzugehen davon, dass die Welt erfüllt sei von Göttern, mythischen Wesen und anderen übernatürlichen Dingen. Sie wollten die Welt rationell und kritisch erklären, ohne auf Mythologie zurückgreifen zu müssen. Es entstand die Überzeugung, dass die Menschen nicht nur die unergründlich scheinenden Wege der Natur begreifen können, sondern auch Vorhersagen machen können. So hat Thales eine Sonnenfinsternis vorhergesagt. Im Zuge dieser Entwicklung begannen die Griechen auch damit, Mathematik zu betreiben, natürlich nicht bzw. nur in den seltensten Fällen Mathematik um der Mathematik willen, sondern in Verbindung mit anderen Disziplinen, besonders Astronomie, Optik und Musiklehre. Dort entstandene Probleme regten eine mathematische Beschäftigung damit an. Diese Ansicht vertraten jedoch nur wenige Intellektuelle, die Mehrheit der Bevölkerung war tiefreligiös und glaubte daran, dass die Götter alles kontrollierten. Nicht umsonst ist die griechische Mythologie so umfangreich und auch heute noch so bekannt wie keine andere.

Die Vorsokratiker versuchten die Natur mit Hilfe von verschiedenen Theorien zu erklären. Manche behaupteten, dass sämtliche Materie aus einem einzigen Stoff bestehe, etwa Luft oder Feuer. Leukipp und sein Schüler Demokrit vertraten sogar einen Vorläufer der Atomtheorie. Daher war es auch nur eine Frage der Zeit, bis die Mathematik selbst in eine dieser Theorien Einzug erhielt. Die Pythagoreer waren die ersten, die Mathematik in ihre Philosophie der Natur integrierten. Ihnen wird oft zugeschrieben, als erste erkannt zu haben, dass mathematische Größen, Zahlen und geometrische Figuren Abstraktionen sind, Ideen, die nur im Geist der Menschen existieren. Damit geschah eine Trennung all dieser Dinge von physikalischen Objekten.

Dennoch blieben sie der mystischen Seite der griechischen Religion verbunden: Sie glaubten an die Reinigung der Seele vom Gefängnis des Körpers. Die Gemeinschaft hatte auch eher den Charakter einer Sekte als den einer Religion. Die Mitglieder beschäftigten sich mit dem Studium der Philosophie, Wissenschaft und Mathematik und waren zu strengster Geheimhaltung gegenüber Außenstehenden verpflichtet.

Die Pythagoreer glaubten aufgrund ihrer naturwissenschaftlichen Forschungen, dass sie in der Zahl und den Zahlenverhältnissen die Essenz aller in der Natur vorkommenden Phänomene gefunden hatten. Zahlen waren für sie also auch die Elementarteilchen der Natur, und mehr. Selbst die Bewegung der Planeten fassten sie in Zahlenverhältnissen auf. Wie an diesem Beispiel zu sehen ist, strebten sie danach, in allen Dingen Regelmäßigkeit zu finden. Sie verehrten die Zahlen als beinahe göttlich, besonders die Zahl 10, sowie das τετρακτύς („die Vierheit“), die Zahlen 1, 2, 3 und 4, die addiert die 10 ergeben.

Diese eigenwillige Mischung aus naturwissenschaftlichem und mathematischem Gedankengut mit abstrusen und unwissenschaftlichen Doktrinen wurde wohl durch ihre

[10] [Kline 1990, S.147]

Besessenheit mit den Zahlen und Verhältnissen geschaffen, woraus eine Philosophie der Natur entstand, die nur sehr wenig mit der Natur zu tun hatte. Die Entdeckung inkommensurabler Größen muss für sie ein großer Schock gewesen sein, denn es gefährdete ihr gesamtes Weltbild. Daher konnten sie sie auch nicht akzeptieren. Die Legende, dass der Entdecker der inkommensurablen Größen, Hippasos, selbst Pythagoreer, dafür getötet worden sein soll - ob wahr oder nicht - verdeutlicht ihre Einstellung dazu. All ihre Forschungen wurden eingeschränkt auf kommensurable Größen.

1.2.2 Platon und die Entwicklung deduktiven Denkens

> „Plato, one of the most informed men of his day, was not a mathematician; but his enthusiasm for the subject and his belief in its importance for philosophy and for the understanding of the universe encouraged mathematicians to pursue it.“[11]

Die Überlegungen der vorsokratischen Philosophen drehten sich stets darum, Elemente zu finden, aus denen alle Materie zusammengesetzt ist. So kam es auch dazu, dass dieser Gedanke in der Mathematik aufkam. Es begann ein Streben danach, mathematische Sätze aus anderen deduktiv abzuleiten, auf der Grundlage von - wie wir sie heute nennen - Axiomen. Natürlich waren die Pythagoreer, die dies zuerst versuchten, noch nicht versiert darin, strenge Beweise durchzuführen, sondern wiesen die Richtigkeit der Sätze anhand von Spezialfällen nach. Inwieweit auch vereinzelt allgemeine Beweise vorgekommen sein könnten, lässt sich aus heutiger Sicht nicht mehr rekonstruieren. Die Bedeutung aber liegt darin, dass sie es versuchten und den Gedanken in der griechischen Mathematik verankerten.

In der Geometrie suchte und fand man die „Elemente“, aus denen man sich alle Figuren zusammengesetzt vorstellen kann: Gerade und Kreis. Platon vertrat diesen Standpunkt vehement. Nicht nur war Platon vertraut mit den Schriften und Ergebnissen der Pythagoreer, seine eigene Philosophie der Ideenlehre war sehr gut auf die Mathematik anwendbar, die sich nur mit den Ideen mathematischer Objekte beschäftigte. Für ihn war Wissen über die Natur unwichtig, denn die Natur ist stets Veränderungen unterworfen und bleibt nie gleich. Daher konnten auch keine absoluten Aussagen über Dinge in der Natur getroffen werden. Platon war der Meinung, nur über den Weg der Mathematik diese absoluten Aussagen machen zu können, daher war auch die Beobachtung der Natur sinnlos.

Platons Ideenlehre ging davon aus, dass die Welt, die wir sehen, nur eine mangelhafte Kopie, ein Abklatsch, der idealen Welt ist. „He believed that a few penetrating glances at the physical world would supply some basic truths with which reason could then carry on unaided. From that point there would be no nature, just mathematics, which would substitute for physical investigation as it does in geometry.“[12] Geometrische Objekte wie Gerade und Kreis passten geradezu perfekt in diese ideale Welt.

Platon erkannte auch die Notwendigkeit, von exakten Definitionen ausgehen zu müssen. Zwar wandte er diesen Gedanken nicht selbst auf die Mathematik an, doch war er sich der Wichtigkeit für sie bewusst. Daher mussten sämtliche Begriffe, bevor sie ver-

[11] [Kline 1990, S. 43]
[12] [Kline 1990, S. 151]

wendet werden konnten, bestimmt werden. Als Beispiel dafür nimmt Platon selbst den Kreis:

> „Kreis ist zum Beispiel ein sprachlich bezeichnetes Ding, das eben den Namen hat, welchen wir eben laut werden ließen. Das Zweite von jenem Ding würde die sprachlich ausgedrückte Begriffsbestimmung sein, welche aus Nenn- und Aussagewörtern zusammengesetzt ist, zum Beispiel: 'das von seinem Mittelpunkt überall gleich weit Entfernte' [...] Das Dritte ist das in die äußeren Sinne fallende körperliche Bild davon, zum Beispiel vom Zeichner und vom Drechsler angefertigt, was sich wieder auslöschen und vernichten lässt, Zufälle welchen der Begriff des Kreises an sich, mit dem alle jene Meister sich beschäftigen, nicht unterworfen ist, weil er etwas Anderes und ganz davon Verschiedenes ist.“ [13]

Platon führt dies noch weiter aus und gibt in einem anderen Werk auch Regeln zur systematischen Aufstellung von Definitionen. Und obwohl Platon selbst nicht als Mathematiker tätig war, wirkte doch sein Einfluss auf seine Zeitgenossen derart stark, dass diese sich mit der Mathematik und der Geometrie in seinem Sinne beschäftigten. Platon blieb bei der Philosophie, und beeinflusste auf diesem Weg die Mathematik. Die deduktive Ausprägung der griechischen Mathematik, von Definitionen und Axiomen auszugehen und von diesen auf andere Aussagen zu schließen sowie diese zu beweisen, die unter den Pythagoreern hervorgegangen war, wurde forciert und blieb der Mathematik über Jahrhunderte erhalten.

Die Beschränkung auf Konstruktionen und Beweisführung mit Zirkel und Lineal war ein großes Hindernis für die Geometrie und damit beinahe die gesamte Mathematik der Griechen. Platon widerstrebte der Gedanke, neben den Elementen Kreis und Gerade mechanisch konstruierte Kurven wie die Quadratrix zu Hilfe zu nehmen. Der Grund dafür liegt darin, dass sie der realen Welt zu nahe standen und zu weit entfernt waren von der Welt der Ideen. War die Geometrie zuvor gegenüber diesen Konstruktionshilfen noch offener gewesen, begann hier die Zeit der Einschränkung, der sich auch große Mathematiker wie Euklid nicht widersetzen konnten, der in seinen Axiomen alle Konstruktionen auf solche mit Zirkel und Lineal beschränkte.

All die griechischen Philosophen und Mathematiker - in vielen Fällen waren sie beides - hatten eines gemeinsam: Streben nach objektiver Wahrheit. Verallgemeinerungen aus vereinzelten Ereignissen, Naturbeobachtungen oder Experimenten lieferten keine absolut sicheren Aussagen, sondern nur wahrscheinliche. Das Streben nach absoluter Wahrheit führte sie also auf den Weg der Deduktion und auf die Notwendigkeit von bereits als wahr erachteten Axiomen und exakt formulierten Definitionen.

Vielleicht wird der Einfluss von Platon auf die Mathematik auch überschätzt und deduktives Denken entstand aus kulturellen Gründen. Athen war das Zentrum der Philosophie und Mathematik zur Zeit Platons. Während dieser Zeit jedoch wurden handwerkliche Tätigkeiten, zu denen auch die Medizin zählte, nicht von der kleinen Schicht der Gebildeten durchgeführt, sondern hauptsächlich von der Klasse der Sklaven. Platon etwa war der Ansicht, dass Handel nicht von freien Männern durchgeführt, sondern sogar als Verbrechen bestraft werden sollte. Besonders im Handel wurden numerische

[13] [9, §342 a-c]

Berechnungen angestellt, wodurch dies ebenfalls Sache der unteren Schichten war. Aristoteles sagte sogar, dass in einem idealen Staat kein Bürger, im Gegensatz zum Sklaven, irgendeiner Art von körperlicher Arbeit nachgehen sollte. Daher wäre Experimentieren und Beobachten für Denker absolut ausgeschlossen und sämtliche Ergebnisse der Mathematik müssten durch logische Schlussfolgerungen, also deduktiv, erfolgen.

1.2.3 Entwicklungen nach Platon

> „Though Aristotle did not contribute significant new mathematical results [...], his views on the nature of mathematics and its relation to the physical world were highly influential.“[14]

Platons bedeutendster Schüler, Aristoteles, widersprach seinem Lehrer in wesentlichen Punkten. So stimmte er ganz und gar nicht mit Platons Verständnis der Welt überein. Für ihn war die Materie auch die Wirklichkeit. Daher sollten auch die Naturwissenschaften die reale Welt studieren und Wissen nur erhalten werden durch Erfahrung und Abstraktion. Zwar war er auch der Meinung, dass Materie nicht signifikant ist, da sie ja potentiell jede Form annehmen kann, doch sobald sie eine Form angenommen hat, ist sie das, was beobachtet werden soll.

Mathematik sah Aristoteles als Hilfswissenschaft zur Beschreibung der in der Natur beobachteten Gegebenheiten. Auch lieferte er Erklärungen für manche Phänomene. Geometrie erbrachte in diesem Sinne die Gründe für in der Optik und der Astronomie herausgefundenen Tatsachen. Genau wie Platon sah er Mathematik jedoch auch als Abstraktion der Wirklichkeit und nur im Geiste der Menschen existent. Aristoteles unterschied also streng zwischen Mathematik und Physik und sprach der Mathematik dabei die kleinere Rolle zu, wohl auch deshalb, weil er nicht an Vorhersagen interessiert war.

Aristoteles überarbeitete auch den Begriff der Definiton und bezeichnete ihn, beinahe modern, als eine Sammlung von Wörtern. Er erklärte, dass eine Definition nur aus Begriffen bestehen durfte, die selbst nicht den gerade definierten Begriff zur eigenen Definition benötigten. Daher ließ er auch die Notwendigkeit von undefinierten Begriffen zu, da man ja irgendwo beginnen musste. Auch beschäftigte sich Aristoteles mit dem Unterschied von Axiomen als allen Wissenschaften gemeinsamen Wahrheiten und Postulaten als akzeptierten Prinzipien, auf denen jede einzelne Wissenschaft dann aufbauen konnte. Neu für seinen Begriff der Postulate war, dass sie nicht offensichtlich wahr sein, sich dafür aber bei jeder aus ihnen folgenden Schlussfolgerung neu beweisen mussten.

Mit Platons und Aristoteles' Überlegungen war klar, wie die Grundlagen einer deduktiven Wissenschaft auszusehen hatten. Das heißt nicht, dass sich Mathematiker nicht auch schon davor mit Begriffen wie „Kreis“, „Gerade“, „teilbar“ oder „Primzahl“ beschäftigt haben, sondern dass jetzt eine Ordnung und Systematisierung dieser Begriffe stattfand, die zu einem ersten Höhepunkt in Euklids *Elementen* kam.

Eudoxos übte keinen so großen Einfluss auf die Grundlagen der Mathematik aus. In seinen Schriften verwendete er die deduktive Vorgehensweise von Platon. Doch löste er geschickt das innermathematische Problem der inkommensurablen Größen. Die griechischen Mathematiker wussten zu dieser Zeit kaum etwas mit ihnen anzufangen, denn sie

[14][Kline 1990, S. 51]

wussten etwa nicht, ob man Beweise der Geometrie, die für kommensurable Größen galten, auf inkommensurable ausdehnen konnte. Eudoxos umging aber das Problem, dass irrationale Zahlen nicht benannt werden konnten. Er ordnete einfach Strecken, Winkeln, anderen Größen und Verhältnissen keine Zahlenwerte zu, und schaffte es so, dass sich die griechischen Mathematiker mit inkommensurabeln Größen beschäftigen konnten.

Dies hatte jedoch unvorhersehbare Auswirkungen auf die griechische Mathematik. Es führte zu einer starken Trennung von Geometrie und anderen mathematischen Teilgebieten. Arithmetik wurde stark zurückgedrängt und Algebra entwickelte sich nur über den Umweg der Geometrie. Mathematiker wurden zu einem Großteil in die Reihen der Geometer gedrängt und es dauerte beinahe 2000 Jahre, bis sich die heute bekannten Teilgebiete der Mathematik von der Geometrie loslösen und eigenständig entwickeln konnten. Der Einfluss reicht bis in die heutige Zeit: „We still speak of x^2 as x square and x^3 as x cube instead of x second and x third.“[15]

1.2.4 Euklid

> „Since the Elements is the first substantial source of mathematical konwledge and one that was used by all succeeding generations, it influenced the course of mathematics as no other book has. The very concept of mathematics, the notion of proof, and the logical ordering of theorems were learned by studying it, and its contents determined the course of subsequent thinking.“[16]

Euklids *Elemente* zeigen, wie weit die griechische Mathematik in der klassischen Periode gekommen war. Dies bezieht sich nicht nur auf den mathematischen Inhalt des Werkes, sondern auch auf den strengen Aufbau des Werkes. Deutlich ist der Einfluss von Platon und Aristoteles zu merken. Platons Philosophie ist daran zu erkennen, dass auf die reale Welt kein Bezug genommen wird, auch keine Anwendungen der Sätze erklärt werden, sondern die Mathematik nur für sich steht. Auch die Beschränkung auf Zirkel und Lineal bzw. die Objekte Strecke und Kreis geht auf sein Gedankengut zurück.

Aristoteles' Einfluss ist an den verwendeten Methoden zu erkennen, speziell an der Teilung der Voraussetzungen in Axiome und Postulate und dem daraus folgenden, streng deduktiven Aufbau. Auch beginnen die meisten Bücher mit Definitionen, die teilweise auch an heutige moderne Definitionen erinnern, etwa Definition I,17: „Ein Durchmesser des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten vom Kreisumfang begrenzte Strecke.“ [17] Andere, wie Definition I, „Ein Punkt ist, was keine Teile hat“[18], versuchen Grundbegriffe zu erklären, die aber aus moderner Sicht unnötig sind, da mit ihnen keine mathematischen Sätze bewiesen werden können. Auch Euklid verwendete diese Definitionen in weiterer Folge nicht mehr.

Vergleicht man die Postulate Euklids (vgl. Kapitel 1.1.2.1, S. 8) mit seinen Axiomen, so erkennt man auch die Unterscheidung, die er in Aristoteles' Tradition macht. Zwei der Axiome lauten:

> „1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.“[19]

[15] [Kline 1990, S. 49]
[16] [Kline 1990, S. 86]
[17] [Euklid 2003, S. 1]
[18] [Euklid 2003, S. 1]
[19] [Euklid 2003, S. 3]

„7. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.“[20]

Diese Axiome sollen allgemein gelten, die Postulate nur für die Geometrie. Euklids Auswahl an Axiomen und Postulaten ist äußerst bemerkenswert, denn allein auf Grund dieser konnte er hunderte von Propositionen beweisen. Obwohl sie noch in der Antike zum Teil bezweifelt wurden, speziell das Parallelenpostulat, blieben sie bis in die Neuzeit hinein nicht zu hinterfragende Wahrheiten. Das Parallelenpostulat schien selbst Euklid zu widerstreben, denn er versuchte stets Beweise zu finden, die nicht auf das Postulat zurückgreifen mussten.

Euklid folgt auch der Tradition von Eudoxos. In Buch II, das die geometrische Algebra behandelt, werden alle Größen nur geometrisch repräsentiert und somit alle irrationalen Größen von vornherein vermieden. So steht das Produkt zweier Zahlen für den Flächeninhalt eines durch die beiden Zahlen als Werte der Seitenlängen aufgespannten Rechtecks. Dies mag für die Praxis nicht von Vorteil sein, wenn etwa ein solches Rechteck die Seitenlängen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ hatte, doch für die theoretischen Überlegungen Euklids war es ausreichend.

Buch V, die Proportionenlehre, baut direkt auf Eudoxos' Werken auf. Darin wird zwar nicht auf die Geometrie Bezug genommen, doch die nachfolgenden Generationen sahen sie als nur darauf anwendbar. Bei näherer Betrachtung des Buches, wird sogar klar, dass dies stimmt. Die Theorie der Proportionen ist aus heutiger Sicht unvollständig und in manchen Punkten sogar an geometrische Deutungen gebunden. Dies soll aber an dieser Stelle nicht näher erläutert werden, sondern kann etwa bei [Kline 1990] nachgelesen werden.

1.2.5 Hellenistisches Denken

> „One can say, as a broad generalization, that the mathematicians of the Alexandrian period severed their relation with philosophy and allied themselves with engineering.“[21]

Geographische Voraussetzungen begünstigten die Entwicklung logischen Denkens an der kleinasiatischen Küste zur Zeit Thales'. Das enge Zusammenleben verschiedener Kulturen und die darauf folgende Vermischung verschiedener Denkweisen schufen die Grundlage, auf der die frühen griechischen Mathematiker und Philosophen aufbauen konnten. Genauso gravierend war der Einschnitt, der nach den Eroberungen Alexanders des Großen (356 - 323 v. Chr.) folgte. Alexander ließ 332/331 die Stadt Alexandria am Westrand des Nildeltas gründen. Die Stadt entwickelte sich bald zu einer der größten Städte der antiken Welt und begann unter den Ptolemäern, den Nachfolgern Alexanders als Herrscher, aufzublühen. Die Ptolemäer waren Griechen und wussten um die Bedeutung der Schulen von Platon, Aristoteles und anderen. Darum unterstützten sie den Aufbau einer eigenen Schule in Alexandria, des Museion.

Im Museion lebten und arbeiteten Künstler und Gelehrte aus allen großen Kulturzentren, denen mit der dazugehörigen Bibliothek die größte Sammlung antiken Wissens zur Verfügung stand. Diese Sammlung war nicht zuletzt so groß geworden, weil jedes

[20] [Euklid 2003, S. 3]
[21] [Kline 1990, S. 105]

Schiff und jeder Händler, wenn sie nach Alexandria kommen wollten, alle mit sich geführten Schriftstücke abgeben mussten und nur eine Kopie zurückbekamen. Durch die von den Herrschern forcierte Mischung verschiedener Kulturen in Alexandria, Griechen, Perser, Araber, Inder, Ägypter und vieler anderer, wurde nicht nur die Kultur verändert, sondern auch der intellektuelle Horizont der Gelehrten erweitert.

Alexandrias Blütezeit reichte bis etwa zur Mitte des 2. Jahrhunderts v. Chr. Dann begann ein langsamer, jedoch stetiger Niedergang der Stadt und mit ihr auch der Wissenschaften. Nichtsdestotrotz blieb Alexandria der wichtigste Studienort der antiken Welt.

Die Gelehrten im Museion arbeiteten in vier verschiedenen Bereichen: Literatur, Mathematik, Astronomie und Medizin. In Astronomie spielte die Mathematik eine große Rolle und in der Medizin war die Mathematik durch die Astrologie ebenfalls vertreten, denn spezielle „Ärzte“ deuteten astrologische Zeichen, um daraus den richtigen Behandlungsweg erkennen zu können. Dazu benötigten sie mathematische Kenntnisse.

Durch die vielen neuen kulturellen Einflüsse entstand ein neuer Zugang zur Mathematik. Die alexandrinischen Mathematiker - Euklid wieder ausgenommen, dessen *Elemente* eine Sammlung des Wissens der klassischen Periode ist - zeigten immer noch dasselbe Talent für Mathematik, waren aber an anderen Ergebnissen interessiert: der Berechnung von Längen, Flächen und Volumina. Eine weitere Neuerung, die in diesem Zusammenhang wichtig war, war die Verwendung von irrationalen Zahlen in babylonischer Tradition, wohingegen die klassischen Mathematiker eine rein qualitative Geometrie entwickelt hatten. Das liegt wohl besonders daran, dass die alexandrinischen Mathematiker viel praxisbezogener dachten und handelten. Es entstanden neue Gebiete: Mechanik, Optik, Geodäsie, Logistik (gedacht als angewandte Arithmetik). Daneben begannen besonders Arithmetik, aber auch die Algebra, sich wieder zu eigenständigen Disziplinen zu entwickeln.

Mit zu den Voraussetzungen für diesen neuen Zugang zur Mathematik gehörten gesellschaftliche Veränderungen. Wissen um Zahlen und Rechnungen genauso wie handwerkliches Arbeiten waren in den intellektuellen Schichten der voralexandrinischen Zeit verpönt. Handelstätigkeit und Handwerk fielen in den Bereich der Sklaven. Mit der Verschmelzung verschiedener Kulturen in Alexandria begann auch das Ende der Beschränkung dieser Tätigkeiten auf die Sklaven. Da sich nun auch andere damit beschäftigten, konnte sich die Mathematik auch in die oben genannte Richtung entwickeln.

Eine Folge dieser Entwicklung war die schrittweise Verdrängung der Einschränkung auf die Werkzeuge Zirkel und Lineal und die Einführung neuer, mechanisch erzeugter Kurven. Nicht ohne Grund entstanden in dieser Zeit die Spirale, die Konchoide und die Zissoide. Auch die Verwendung von mechanischen Prinzipien zur Herleitung von Sätzen musste nicht lange auf sich warten lassen. Dazu sei ein Beispiel aus der Schrift *Die Methode* des Archimedes näher erläutert, in der die Fläche eines Parabelsegments mit Hilfe des einfachen physikalischen Konzepts des Schwerpunkts berechnet wird (vgl. [Kline 1990, S. 110f]):

Gegeben sei ein Parabelsegment ABC (vgl. Abb. 1.9). D sei der Halbierungspunkt der Strecke AC. Anschließend wird eine Tangente CE an den Punkt C gelegt. B und E sollen dabei so liegen, dass beide auf einem Parabeldurchmesser durch D liegen. Archimedes verweist auf ein Ergebnis Euklids, das zeigt, dass nun $EB = BD$. Nun wird eine Gerade AF parallel zu ED durch A gelegt, welche die Tangente im Punkt F schneidet. CB schneidet AF dann in G. Durch Verwendung von ähnlichen Dreiecken erhält Archimedes $FG = GA$. Als nächstes wird die Strecke CG über G hinaus bis zum Punkt H so verlängert, dass $CG = GH$. Sei nun $KLMN$ ein beliebiger Durchmesser der Parabel. Dann gilt - wieder aufgrund ähnlicher Dreiecke - $KL = LN$.

Archimedes betrachtet nun zunächst den Flächeninhalt des Parabelsegments - er versteht diesen als Summe aller Strecken MN - und vergleicht diesen mit dem Flächeninhalt des Dreiecks ACF, verstanden als Summe aller Strecken KN. Anschließend beweist er, dass $GH \cdot MN = GL \cdot KN$.

Archimedes versteht nun GH und GL als Arme eines Hebels mit Drehpunkt G und MN und KN als Gewichte, die sich, falls MN an H gehängt wird, die Waage halten. Dann führt er diesen Gedanken weiter. Die Summe aller Strecken wie MN, angehängt an H (durch M'N' dargestellt), sollte in diesem Sinne also der Summe aller Strecken KN, angehängt an ihren jeweiligen Halbierungs-, also Schwerpunkten, die Waage halten. Letzteres ist aber gleichbedeutend mit dem Dreieck ACF, konzentriert im Punkt X, dem Schwerpunkt des Dreiecks, dessen Ort Archimedes schon in einem anderen Werk hergeleitet hat. Für X auf der Strecke CG gilt $GX = \frac{1}{3} \cdot CG$. Daraus und aus dem Hebelgesetz folgt

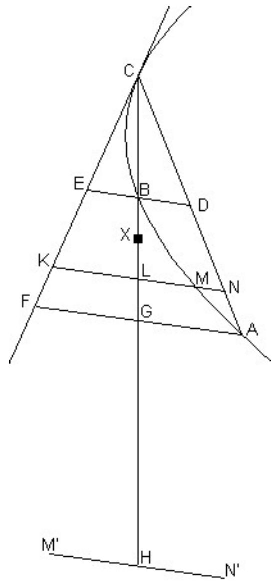

Abbildung 1.9: Parabelsegment

$$\frac{\textit{Fläche des Parabelsegments } ABC}{\textit{Fläche des Dreiecks } ACF} = \frac{GX}{GH} = \frac{1}{3} \tag{1.11}$$

Durch einfache Zusammenhänge setzt Archimedes abschließend das Parabelsegment noch mit dem Dreieck ABC in Beziehung. Da das Dreieck ABC genau ein Viertel des Dreiecks ACF ist, erhält Archimedes abschließend:

$$\textit{Fläche des Parabelsegments } ABC = \frac{4}{3} \textit{Fläche des Dreiecks } ABC \tag{1.12}$$

Diese Methode mag zwar nicht auf einem streng geometrischen Beweise beruhen, dafür ist sie aber äußerst effektiv, wie Archimedes an vielen anderen geometrischen Objekten zeigt.

Völlig neu in der alexandrinischen Mathematik war die Entstehung der Trigonometrie. Sie entstand aus dem Verlangen heraus, eine quantitative Astronomie zu entwickeln, und half in Folge bei Problemen der Zeitbestimmung, der Navigation und der Geographie. Dass sich zunächst eine Sehnengeometrie entwickelt hat, wurde in Kapitel 1.1.3.5 auf S. 16 schon zur Genüge erläutert. Erwähnenswert ist jedoch, dass die Trigonometrie nicht zur indirekten Landvermessung verwendet worden ist. Dies liegt wohl daran, dass sich die Gelehrten mit der Anwendung der Euklidischen Geometrie zufrieden gaben, und die eigentlichen Landvermesser nicht die notwendige Ausbildung dafür hatten.

1.2.6 Der Niedergang der Alexandrinischen Zivilisation

„It has often been said that man proposes and God disposes. It is more accurate to say of the Greeks that God proposed them and man disposed of

> them.“[22]

Die Eroberung Ägyptens durch die Römer war die erste große Katastrophe, die Alexandria treffen sollte. Die Römer hatten in sieben Jahrhunderten nur rudimentäre Mathematik entwickelt. Geometrie benötigten sie im Prinzip nur für Vermessungsfragen und zum Bau von Tempeln und Häusern. Der Begriff „Mathematik“ hatte bei den Römern sogar einen schlechten Beigeschmack, denn als mathematicii bezeichneten sie Astrologen, und diese verurteilten sie. Diocletian verbot die Mathematik sogar. Nur Geometrie durfte gelehrt und gelernt werden.

Als Caesar 47 v. Chr. die ägyptische Flotte niederbrannte, fing auch die Bibliothek Feuer und unzählige Bücher und etwa eine halbe Million Manuskripte wurden zerstört. Zum Glück war aufgrund von Platzproblemen vieles schon ausgelagert worden. Dennoch ging viel Wissen verloren. Als Ägypten schließlich 31 v. Chr. endgültig unter römische Kontrolle fiel, war der weitere Niedergang vorprogrammiert. Die Römer hatten kein Interesse an Mathematik oder den anderen Wissenschaften, ebensowenig an den eigenständig entwickelten Kulturen, die sie unterwarfen.

Das aufstrebende Christentum versetzte der Wissenschaft und der Mathematik einen weiteren schweren Schlag. Viele griechische und orientalische Mythen und Bräuche wurden ins Christentum aufgenommen, jedoch nicht die Wissenschaft. Sie wurde als heidnische Lehre verboten, Mathematik und Astronomie wurden lächerlich gemacht. Unter Kaiser Theodosius erreichte diese Entwicklung im Jahr 392 einen traurigen Höhepunkt: Griechische Tempel wurden zerstört, als „Ungläubige“ bezeichnete Nichtchristen attackiert und getötet, griechische Bücher brannten zu Tausenden, Pergamente wurden gelöscht und neu beschrieben, Schulen wie Platons Akademie wurden geschlossen. Der grausame Tod von Hypatia, einer alexandrinischen Mathematikerin, in Stücke gerissen von einem fanatischen christlichen Mob, symbolisiert das Ende der Ära. 529 wurde das Museion geschlossen, 640 erfolgte mit der Eroberung durch die einfallenden Araber, die sämtliche noch übrig gebliebenen Bücher vernichten ließen, der Todesstoß für Alexandria.

1.2.7 Zusammenfassung

> „Also ist die Geometrie brauchbar, wenn sie zur Schau des Seins zwingt, andernfalls nicht.“[23]

Die griechischen Mathematiker waren die ersten und, soweit wir heute wissen, die einzigen Mathematiker in der Geschichte der Menschheit, die ihre Mathematik streng deduktiv aufbauten, mit Axiomen und Postulaten arbeiteten, von diesen ausgingen und stets danach strebten, die daraus abgeleiteten Sätze möglichst allgemein zu beweisen, was sie auch schafften, wie kein anderes Volk.

Doch so weit die griechische Mathematik auch kam, wie genial ihre allgemeinen Beweise auch waren, so waren ihre Tugenden, die genau dies ermöglichten, auch die Schwachstellen ihrer Mathematik. In wichtigen Fragen blockierten sie sich nämlich beinahe von Beginn an selbst. Ihr Streben danach, die Natur möglichst rational erklären zu können, schoss weit über das Ziel hinaus. Sie wurden von ihrem eigenen Vorhaben geblendet, alles

[22] [Euklid 2003, S. 181]
[23] [Platon 2003, S.344]

logisch, präzise und exakt erklären zu müssen. Hätten sie intuitiver gehandelt, hätten sie vielleicht kreativere Mathematik betreiben können. In der dreidimensionalen Geometrie taten sie dies auch, in der ebenen Geometrie beinahe gar nicht.

Der Einfluss der Pythagoreer für das Verständnis der Zahl verhinderte lange Zeit ein Akzeptieren der irrationalen Zahlen als solche. Dadurch und durch die kulturellen Voraussetzungen konnten sich Arithmetik und Algebra eigenständig kaum entwickeln. Als Archimedes und Ptolemaios schließlich damit zu arbeiten begannen, machte das kaum mehr einen Unterschied. Durch die Arbeiten von Eudoxos konzentrierten sich die Griechen alleinig auf die Geometrie. Selbst hier hemmten sie sich selbst, indem sie sich auf die Untersuchung von Objekten beschränkten, die mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Dies schöpften sie dafür so weit wie möglich aus. Hinzu nahmen sie Objekte, die durch um eine Achse rotierende Linien und Kreise erzeugt werden, wie Zylinder und Kegel. Die einzigen Ausnahmen bildeten die Ebene, das Prisma und die Pyramide.

Die rege Beschäftigung mit den Kegelschnitten scheint auf den ersten Blick nicht in dieses System zu passen, doch als Schnitt einer Ebene mit einem Kegel waren sie schnell akzeptiert. Mechanisch konstruierte Kurven wie die Quadratrix hingegen waren geniale Leistungen einzelner Personen, die aber nie wirkliche Beachtung fanden.

Neben der eigentlich Geometrie beschäftigten sich die Griechen nun auch besonders mit einem Gebiet, das wir heute geometrische Algebra nennen, denn es gab für sie kaum eine andere Möglichkeit, Algebra zu betreiben, ohne mit irrationalen Größen zu hantieren. Besonders hier, aber auch in der Geometrie im Allgemeinen, gestaltete sich die Beweisführung immer komplizierter und schwerfälliger. Dadurch konnten sich auch kaum allgemeine Berechnungsmethoden entwickeln, wie wir sie heute etwa aus der Analysis und der analytischen Geometrie kennen.

Eine großartige Leistung der Griechen ist die Entwicklung der Exhaustionsmethode, doch sieht man daran bereits, dass sie die Verwendung des Unendlichen möglichst zu vermeiden suchten. Das Konzept des Unendlichen konnten die Griechen nie wirklich fassen. Es scheint fast, als wären sie davor zurückgeschreckt. Die Paradoxa von Zenon zeigen deutlich die Grenzen der Vorstellungskraft der griechischen Mathematiker auf. Und wegen des grundlegenden Problems, dass nicht einmal der Zusammenhang zwischen Punkt und Gerade richtig erfasst werden konnte, also die Beziehung zwischen dem Kontinuierlichen und dem Diskreten, konnten sich auch keine Grenzprozesse entwickeln. Andere Kulturen, die intuitiver handelten, ohne Beweise zu verlangen, schafften dies jedoch.

Trotz aller großartigen Leistungen, die die Griechen auf dem Gebiet der Mathematik und Naturwissenschaften hervorbrachten, trotz der großen Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik und des heute noch spürbaren Einflusses darauf, muss gesagt werden, dass sie eine beinahe engstirnige Sicht auf die Mathematik vertraten, die kaum neue Gedanken zuließ. Man könnte hier so weit gehen, zu sagen, dass sie geradezu verdammt war, zugrunde zu gehen, wenn sie nicht in Alexandria neuen Schwung erhalten hätte. Doch auch dieser konnte ihren Untergang nicht aufhalten.

2 Geometrie in Indien

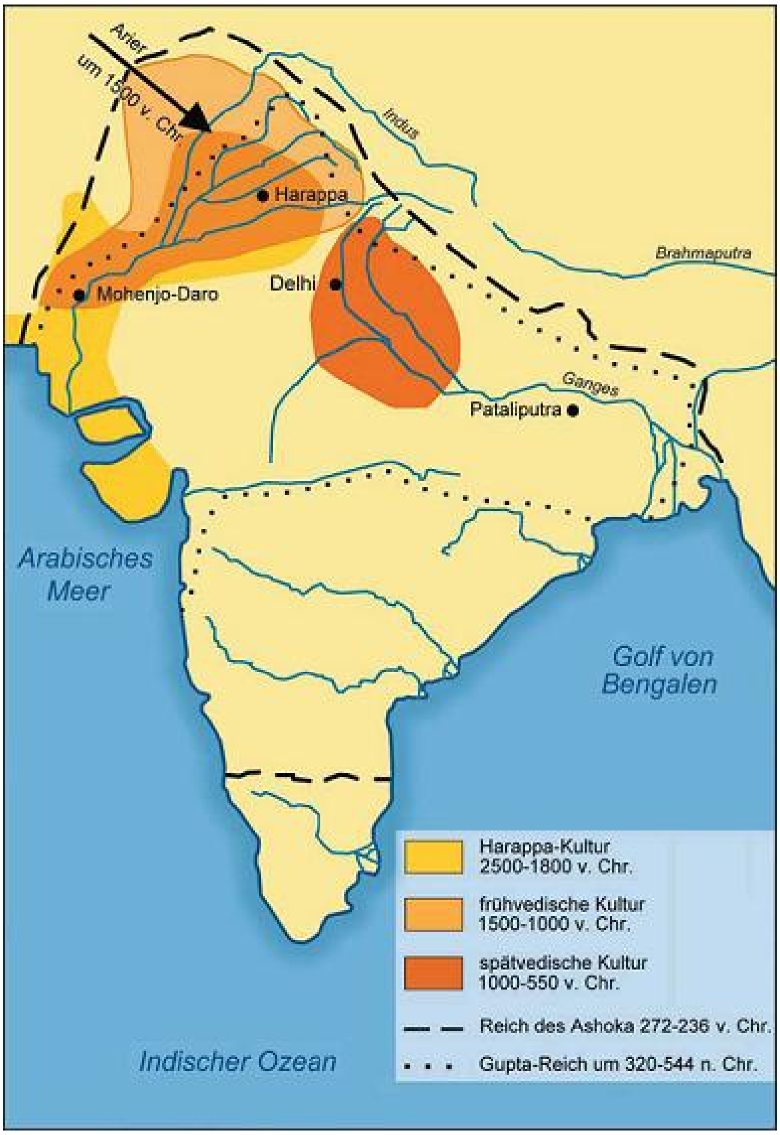

Abbildung 2.1: Antike Kulturen und Reiche Indiens im Altertum und im Mittelalter (aus [Wussing 2008, S. 83])

2.1 Historischer Überblick über die indische Geometrie

2.1.1 Die Vedische Zeit (ca. 1500 - 200 v. Chr.)

2.1.1.1 Sulbasutras

Um 1500 v. Chr. begann in Indien die vedische Periode, das bedeutet, um diese Zeit wurde damit begonnen, unzählige Naturgottheiten zu verehren. Jeder Haushalt musste jeden Tag gewisse sakrale Handlungen durchführen. Dies einmal zu vergessen, wurde als Sünde gesehen. Es war vorgeschrieben, im Haus stets Altäre von verschiedener Form aufgebaut zu haben. Diese mussten mit großer Sorgfalt konstruiert werden, darum gab es dafür die so genannten *Sulbasutras* (auch oft als Sulva Sutras transkribiert), was soviel wie Schnurregeln bedeutet. Die *Sulbasutras*, je nach Interpretation acht oder neun verschiedene Werke, wurden ab etwa dem Jahr 800 v. Chr. verfasst, jedoch sind erst kommentierte Versionen von ca. 300 n. Chr. erhalten.

Die *Sulbasutras* enthalten genaue Anweisungen für die Priester und auch für den Hausgebrauch, um Altäre exakt zu konstruieren. Von außerordentlicher Bedeutung war, die Altäre in Ost-West-Richtung anzulegen und nur aus speziell vorgeformten Ziegelsteinen zu konstruieren. Nun gab es je nach Ritual verschiedene Altarformen: quadratisch, rechteckig, trapezförmig, kreisförmig, halbkreisförmig, usw. Daneben gab es bestimmte Altäre in speziellen Formen, etwa in der Form eines Falken (vgl. Abb.2.2)

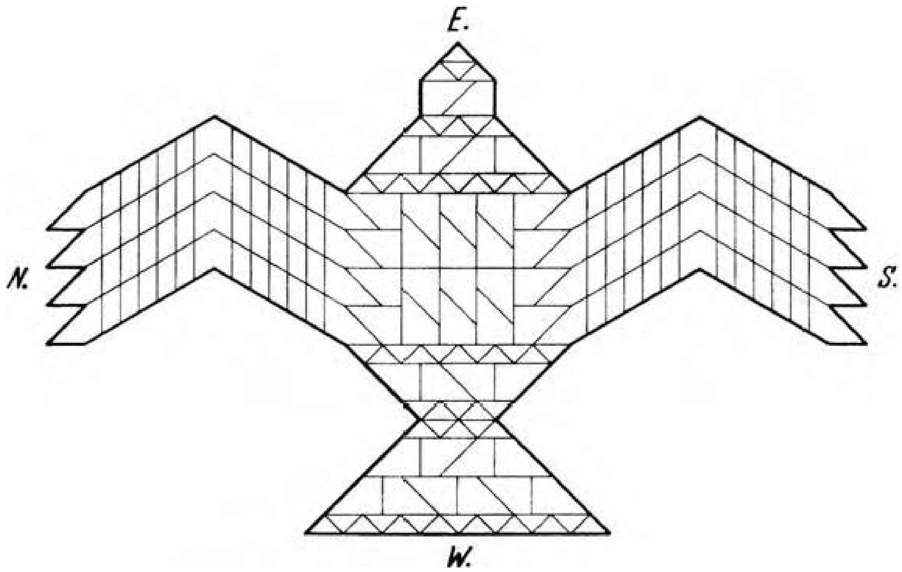

Abbildung 2.2: Falkenförmiger Altar. Eingezeichnet sind die Formen der verwendeten Ziegelsteine. (aus [Scriba und Schreiber 2005, S. 144])

Zunächst wurden Schnüre gespannt, um die richtige Form der Altäre zu erhalten. Diese Vorlagen wurden dann zumeist mit Ziegeln ausgelegt. Verwendet wurden verschiedene Instrumente:

- Mit Hilfe eines speziellen Mastes, genannt Sanku, wurde die Ost-West-Linie bestimmt;

- Der Bambusstab wurde verwendet als Messinstrument;
- Ein Bambusstab mit drei Löchern, eines in der Mitte und eines an jedem Rand, durch die kleine Stäbe gesteckt wurden, wurde als einfacher Zirkel verwendet;
- Das Seil hatte verschiedene Funktionen, zum einen als Messinstrument, zum anderen, um gerade Linien zu spannen.

Neben diesem Konstruieren der Altäre mussten außerdem für weitere sakrale Akte die bereits errichteten Altäre verändert und in eine andere Form verwandelt werden. Daher finden sich in den *Sulbasutras* unter anderem Regeln zu Flächenumwandlungen, Ähnlichkeitsbeziehungen und der Satz des Pythagoras. In den *Sulbasutras* wird jedoch zumeist nicht angegeben, wie diese Regeln entwickelt wurden. Dies war für die Durchführung der Rituale nämlich nicht von Bedeutung. Leider ist es daher aus heutiger Sicht schwer zu rekonstruieren, auf welche Weise die Inder diese Beziehungen erhalten haben.

Schon früh müssen die indischen Geometer den Satz des Pythagoras gekannt haben, denn Hinweise darauf finden sich bereits im ältesten der *Sulbasutras*, dem *Baudhayana*, in Form von verschiedenen rationalen rechtwinkeligen Dreiecken. So finden sich neben dem bekannten Seitenverhältnis $3 : 4 : 5$ auch $12 : 35 : 37$ und $40 : 96 : 104$ sowie das irrationale Verhältnis $1 : 1 : \sqrt{2}$. Die indische Version des Satzes von Pythagoras ist so in den *Sulbasutras* formuliert: „The diagonal cord of a rectangle makes both (the squares) that the vertical side and the horizontal side make separately.“[1]

Folgt man folgender Anweisung der *Sulbasutras*, so erhält man die Seitenlängen eines rechtwinkeligen Dreiecks: „The measure (of the cord) is the length. Adding half of itself to it one makes a mark at the latter third of the cord diminished by one-sixth of that third. Fixing the ends to the ends of the prsthya [in etwa ‚Grundlinie‘] one streches (the cords) to the south by the mark and makes a mark. Similarly to the north. Then changing to the other side. This is the construction.“[2] In heutiger Schreibweise entspricht dies dem Seitenverhältnis $x : \frac{5x}{12} : \frac{13x}{12}$. Spätere Kommentatoren glaubten, dass ein bestimmtes Wortpartikel dafür steht, dass eine Methode als allgemein geltend gedacht war. Dies würde bedeuten, dass in den *Sulbasutras* allgemeine pythagoreische Tripel vorkommen, nämlich in der Form $x : x \cdot \frac{2n+1}{2n(n+1)} : x \cdot \frac{2n^2+2n+1}{2n(n+1)}$, was man durch einfaches Nachrechnen erhält. Natürlich ist dies keinesfalls eine gesicherte Tatsache.

Neben den Konstruktionen von einfachen geometrischen Figuren wie Rechteck, Quadrat, Trapez usw. kommen in den Sulbasutras auch Flächenkombinationen, Flächendifferenzen und Flächenverwandlungen vor. Einige Beispiele:

- Neben einer Regel für die Kombination von n gleich großen Quadraten, findet sich eine Regel für das Kombinieren von zwei verschieden großen Quadraten: „Wünscht man zwei verschieden große Quadrate zu vereinigen, so reißt man mit der Seite des kleineren auf dem größeren einen (Parallel)streifen auf. Die quer über diesen Streifen (gelegte) Schnur ist die Seite der beiden vereinigten Quadrate.“[3] Die einzelnen Schritte können in Abbildung 2.3 nachvollzogen werden. In Schritt 3 ist auch der Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras erkennbar, auf dem die meisten Flächenadditionsverfahren der Inder beruhen.

[1] [Amma 1979, s. 18]
[2] [Amma 1979, S. 27]
[3] [Scriba und Schreiber 2005, S. 147f]

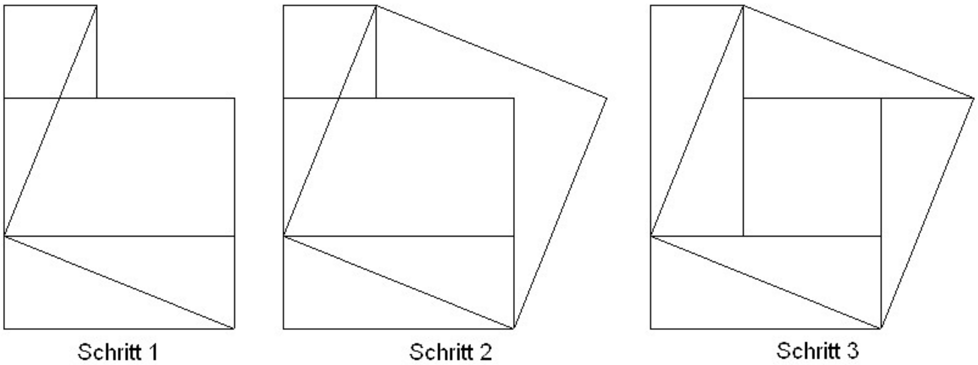

Abbildung 2.3: Addition zweier verschieden großer Quadrate

- Für das Abziehen einer Fläche von einer anderen gibt es auch eine Regel: „Wishing to deduct a square one should cut off a segment by the side of the square to be removed. One of the lateral sides of the segment is drawn diagonally across to touch the other lateral side. The portion of the side beyond this point should be cut off.“[4] Abbildung 2.4 zeigt, wie dies gemeint ist. Der Satz des Pythagoras liefert wiederum die Begründung für die Richtigkeit dieser Konstruktionsmethode.

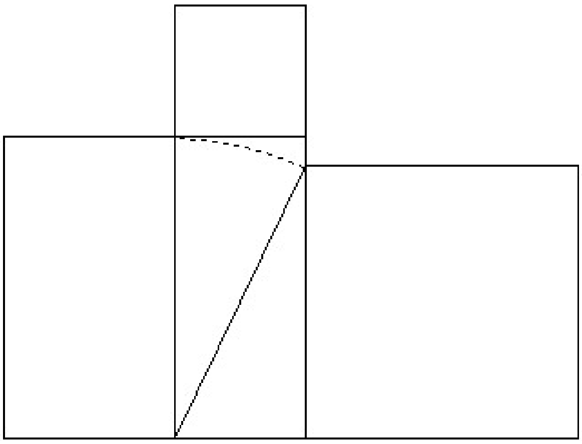

Abbildung 2.4: Differenz zweier verschieden großer Quadrate

- Viele verschiedene Flächenverwandlungen werden ebenso beschrieben, von einem Quadrat zu einem Rechteck und umgekehrt, von einem Trapez zu einem Rechteck und umgekehrt usw. Für uns von besonderem Interesse ist die Verwandlung eines Quadrats in einen Kreis und umgekehrt. Die *Sulbasutras* können hier natürlich auch nur ungenaue Konstruktionsmethoden geben, da die Verwandlung mit herkömmlichen geometrischen Methoden nicht möglich ist, sondern lediglich eine Näherung. In Indien war es eher üblich, ein Quadrat in einen Kreis zu verwandeln. Die dazu angegebene Regel lautet in heutiger Schreibweise $r = \frac{a}{2} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{3}$, wobei r für den Radius des Kreises und a für die Seitenlänge des Ausgangsquadrats steht.

[4][Amma 1979, S. 45]

Das bedeutet, dass implizit für π der gerundete Wert $3,088$ verwendet wurde. Die Autoren waren sich aber darüber im Klaren, dass dies nur eine Näherung ist. Für die Variante, einen Kreis in ein Quadrat zu verwandeln, werden zwei verschiedene Möglichkeiten genannt: $a = \frac{13}{15} \cdot d$ - und damit $\pi = 3,004$ - zum einen und $a = d \cdot (1 - \frac{28}{8 \cdot 29} - \frac{1}{6 \cdot 8 \cdot 29} + \frac{1}{6 \cdot 8 \cdot 29 \cdot 8})$, was gleichbedeutend mit $\pi \approx 3,088$ ist. Darüber, wie diese Formeln zustande gekommen sind, kann heute nur noch spekuliert werden.

Viele geometrische Tatsachen kommen nur implizit vor, etwa dass die Diagonalen eines Rechtecks einander halbieren und das Rechteck in 4 gleich große Teile teilen. Auch dürften grundlegende Eigenschaften ähnlicher Figuren bekannt gewesen sein.

2.1.1.2 Die Geometrie der Jaina

Vardhamana Mahavira (um 599 - 527 v. Chr.), der etwa zur selben Zeit wie Buddha lebte, gilt allgemein als Gründer des Jainismus. Da er aber der letzte der in der *Kalpasutra*, einer heiligen Schrift des Jainismus, erwähnten Tirthamkaras (ein geistiger Führer) war, können die Ursprünge dieser Religion schon einige Jahrhunderte früher angenommen werden. Daher ist es nur wahrscheinlich, dass der Jainismus schon lange Zeit einen Konkurrenten zum vedischen Glauben darstellte. Somit sollte sich auch die Mathematik, die in den jainistischen Schriften vorkommt, parallel zu der der *Sulbasutras* entwickelt haben.

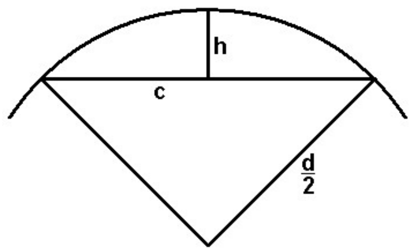

Abbildung 2.5: Das verwendete Kreissegment

Für den Jainismus waren Trapez und Kreis von besonderer Bedeutung, da das Trapez als Bild des Universums und der Kontinente und der Kreis als Bild der Erde und Bahn der Himmelskörper galten. Daher ist die Geometrie der Jaina auch beinahe völlig auf diese beiden Objekte beschränkt. Der Großteil der Mathematik der Jaina ist in den *Ganita* Texten zu finden, worin die Bahnen der Himmelskörper beschrieben werden.

Zunächst sind die Näherungsformeln für verschiedene Elemente des Kreissektors (vgl. Abb. 2.5) zu erwähnen: $c = \sqrt{4h(d-h)} = \sqrt{a^2 - 6h^2}$, $a = \sqrt{6h^2 + c^2}$ und $h = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{6}}$. Daneben finden sich für Umfang u und Fläche A des Kreises: $u = \sqrt{10d^2}$ und $A = \frac{u \cdot d}{4}$. Oft, wie hier, wurde von den Jaina für π der Wert $\sqrt{10}$ verwendet, auch wenn an manchen Stellen der viel ungenauere Wert $\pi = 3$ vorkommt. Die Flächenformel hingegen ist korrekt. Wie genau die Inder auf den Wert $\pi = \sqrt{10}$ gekommen sind, kann wiederum nur noch spekuliert werden.

Dann gibt es noch Erwähnungen von verschiedenen Körpern, darunter die Kugel, die Pyramide mit dreieckiger Grundfläche, der Zylinder und der elliptische Zylinder. Leider sind keine Volumsberechnungen überliefert worden. Wie bereits erwähnt, ist an vielen Stellen in den Texten auf das Trapez eingegangen worden, doch auch hier ist nicht besonders viel bis in unsere Zeit erhalten geblieben.

In den Werken des Jaina Metaphysikers Umasvati (um 150 v. Chr.) wird zum ersten Mal die Kusumpura Schule erwähnt, die in der gleichnamigen Stadt bestand. Die Vermutung geht aber dahin, dass diese Schule bereits lange vor 300 v. Chr. existiert hat.

In dieser Schule wurde das Wissen um die Mathematik und die Astronomie für viele Jahrhunderte in der Tradition der Jaina bewahrt. So ist es nur natürlich, dass auch spätere bedeutende Mathematiker wie Aryabhata I (vgl. Kap. 2.1.3.1) immer wieder namentlich auf gewisse Autoren verweisen, die vermutlich Mathematiker der Jaina waren, denn Aryabhata I lernte ebenfalls in Kusumpura. Auf jeden Fall aber wurde oft aus jainistischen Werken zitiert. Diese sind jedoch zum Großteil verloren gegangen, daher kann nicht mehr zu ihnen gesagt werden.

2.1.2 Die Nachvedische Zeit (ca. 200 v. - 400 n. Chr.)

2.1.2.1 Das Bakhshali-Manuskript

1881 wurden nahe dem Dorf Bakhshali die Überreste des auf Birkenrinde geschriebenen Manuskripts eines mathematischen Werks gefunden. Die Datierung ist unsicher. So werden als mögliche Entstehungszeiten unter anderem das 2. Jahrhundert, das 3., das 4., das 6. und das 12. Jahrhundert angenommen. Der Großteil ist verloren gegangen. Der Teil, der erhalten geblieben ist, beschäftigt sich hauptsächlich mit arithmetischen und algebraischen Problemen und nur wenigen zur Geometrie. So werden die elementaren Rechenoperationen, die Bruchrechnung und das Wurzelziehen behandelt, ebenso Reihen, Zinsrechnung, der einfache falsche Ansatz und der Dreisatz. All dies wird in einem Dezimalsystem durchgeführt. Hauptaugenmerk liegt jedoch auf der Lösung von linearen Gleichungen und Gleichungssystemen sowie quadratischen Gleichungen, wobei auch negative Zahlen zugelassen sind. Darauf soll in dieser Arbeit aber nicht näher eingegangen werden. Ob in dem fehlenden Teil des Manuskripts auch geometrische Probleme vorgekommen sind, lässt sich leider aus heutiger Sicht nicht feststellen.

2.1.2.2 Die Siddhantas

Die *Siddhantas* sind hinduistische Werke aus der Zeit von etwa 200 v. Chr. bis 400 n. Chr. Es gab 18 davon, jeweils benannt nach ihren Autoren, aber nur 5 davon haben die Zeiten überdauert, wobei aber nicht klar ist, was davon aus der eigentlichen Entstehungszeit stammt, was als Kommentar später hinzugefügt wurde und ob etwas korrigiert wurde. Nichtsdestotrotz ist speziell das *Surya Siddhanta* für uns von großer Bedeutung. Der genaue Zeitraum der Verfassung ist unklar, jedoch gilt das späte 4. Jahrhundert als wahrscheinlich.

Das *Surya Siddhanta* ist zunächst einmal ein Werk zum Thema Astronomie in 14 Kapiteln, doch ist es auch von einem mathematischen Standpunkt aus interessant. Die Inder hatten die Sehnengeometrie der Griechen bereits kennen gelernt und entwickelten daraus nun langsam die uns geläufige Trigonometrie. So wird im *Surya Siddhanta* der Sinus für astronomische Berechnungen verwendet und ist in Form einer Sinus-Tabelle gegeben. Die Werte der Sinus-Funktion sind darin für alle Werte von $0°$ bis $90°$ im Abstand von $3\frac{3}{4}°$ angegeben.

2.1.3 Das frühe indische Mittelalter (ca. 400 - 1000)

2.1.3.1 Aryabhata I (ca. 476 - 550)

Da es zwei indische Mathematiker mit dem Namen Aryabhata gab, werden diese in der Literatur durch den Zusatz der römischen Zahlen I und II unterschieden. Dieser Unterscheidung folge ich, sofern aus dem Kontext nicht klar ersichtlich ist, welcher der beiden namensgleichen Mathematiker gemeint ist.

Das Wissen über die Geschichte der indischen Mathematik bis ins 5. Jahrhundert ist nur ein sporadisches, da bis dahin die Überlieferung älterer Texte nur bruchstückhaft erfolgte. Aryabhatas Werk *Aryabhatiya* ist der erste vollständig erhaltene Text zur indischen Mathematik. Es wurde 499 verfasst und besteht aus vier inhaltlichen Abschnitten.

Im Prinzip ist das *Aryabhatiya* eine Zusammenfassung des in den *Siddhantas* vorkommenden mathematischen Wissens. Wie viel davon Aryabhatas eigene Erkenntnisse waren, ist aus heutiger Sicht nicht mehr festzustellen. Das Werk ist sehr knapp und präzise formuliert, daher ist es teilweise auch etwas schwer zu verstehen. Viele Verse sind sogar nur dann zu verstehen, wenn man mit der Thematik schon einigermaßen vertraut ist. Es ist möglich, dass zu dem Werk selbst ein Kommentar mit notwendigen Erläuterungen existiert hat, oder die Verse überhaupt nur als Merkverse gedacht waren, die nur in Verbindung mit mündlichen Erklärungen bzw. Vorwissen Sinn ergeben sollten.

In den vier Teilen werden folgende Themen behandelt:

- Aryabhata erklärt eine ihm eigene alphabetische Darstellung der Zahlen. Diese wurde nur verwendet, um das Versmaß nicht zu stören, und ist in abgeänderter Form auch heute noch in der indischen Lyrik üblich. Außerdem enthält der erste Teil eine Sinustabelle analog zu der aus dem *Surya Siddhanta*.
- Rechenkunst und etwas Geometrie
- Zeitrechnung
- Sphärik

Vieles, was im *Aryabhatiya* zu finden ist, ist schon von den Jaina Werken und den *Siddhantas* bekannt und wurde wahrscheinlich einfach übernommen. Doch gibt es auch neue Erkenntnisse. So taucht bei Aryabhata erstmals in Indien für π die Näherung $3,1416$ auf. Dazu gibt er einen Kreis mit Umfang 62832 und Durchmesser 20000 an.

Lange galt auch die Auffassung, dass Aryabhata das Volumen der Kugel und das Volumen der Pyramide mit dreieckiger Grundfläche falsch berechnet hat, doch 1975 wurde der Text neu übersetzt und im Zuge dessen auch neu interpretiert. Nach dieser neuen Interpretation ist das Volumen der Pyramide korrekt angegeben und für die Kugel wurde nicht das Volumen, sondern die Oberfläche berechnet. Der Vers lautet nun in neuer Übersetzung folgendermaßen: „Die Hälfte des Umfangs mit dem halben Durchmesser multipliziert, ist der Flächeninhalt des Kreises. Dieser (d.h. der Kreisumfang) mit seiner bestimmenden Basis (r) multipliziert, ist die Oberfläche der Halbkugel, und zwar genau.“[5]

[5]Elfering nach [Scriba und Schreiber 2005, S. 154]

2.1.3.2 Varahamihira (ca. 505 - 587)

Varahamihira lebte in Avanti und war, wie sein Vater, Astronom und Mathematiker. Besondere Beachtung geschenkt wird seiner Bearbeitung der *Siddhantas* in der Tradition Aryabhatas und die damit einhergehende Überlieferung von 5 *Siddhantas* (einschließlich des *Surya Siddhanta*), die andernfalls wohl ebenfalls verloren gegangen wären. Seine kommentierte Version dieser *Siddhantas* trägt den Namen *Pancha Siddhantika*.

Auch Varahamihira legte viel Wert auf die Trigonometrie. Er verwendete einige trigonometrische Formeln und arbeitete nicht nur mit dem Sinus, sondern auch dem Cosinus und dem Sinusversus. Er kannte einige trigonometrische Zusammenhänge, unter anderem $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)^2$. Eine einfache, astronomische Anwendung sei als Beispiel hier angegeben. Der geographische Breitengrad soll bestimmt werden (Abb. 2.6):

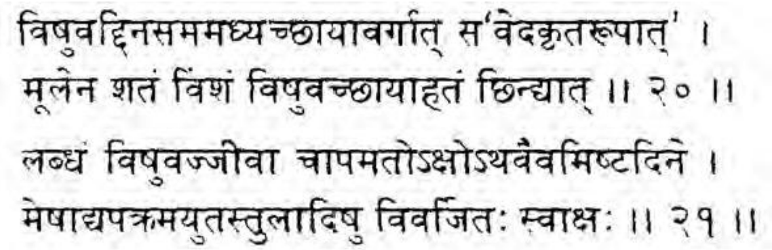
विषुवद्दिनसममध्यच्छायावर्गात् स'वेदकृतरूपात्' ।
मूलेन शतं विंशं विषुवच्छायाहतं छिन्द्यात् ।। २० ।।
लब्धं विषुवज्जीवा चापमतोऽक्षोऽथवैवमिष्टदिने ।
मेषाद्यपक्रमयुतस्तुलादिषु विवर्जितः स्वाक्षः ।। २१ ।।

Abbildung 2.6: Varahmihiras Anweisung zur Bestimmung der geographischen Breite aus der Mittagshöhe der Sonne (aus [Scriba und Schreiber 2005, S. 152])

„Measure the midday shadow on the day when the Sun is at the equinoxes (the equinoctial shadow). Square it, add 144, and find the square root. By this divide the product of the shadow multiplied by 120. The result is the sine of the latitude of the place, called visuvajjya.“[6]

Auf den ersten Blick mag diese Anweisung verwirrend erscheinen, doch ist nur ein wenig Einlesen in die Materie erforderlich, um sie zu verstehen. In heutiger Sprache würde die Anweisung etwa wie folgt lauten: Man bezeichne die Länge des Schattens mit s, die Höhe des Gnomons mit h und die Entfernung der Gnomonspitze zu ihrem Bildpunkt mit l. Sei $h = 12$. Nach der Messung von s kann l mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden. Denkt man sich nun ein diesem rechtwinkeligen Dreieck ähnliches Dreieck als einem Kreis vom Durchmesser 120 eingeschrieben, so muss nur noch $120s$ durch l dividiert werden, um den Sinus des Winkels an der Spitze des Gnomons zu erhalten. Am Äquinoktium entspricht dieser Winkel dem des Breitengrades.

2.1.3.3 Bhaskara I (ca. 600 - 680)

Wie bei Aryabhata gibt es zwei Mathematiker mit dem Namen Bhaskara. Auch diese werden durch den Zusatz der römischen Zahlen I und II auseinandergehalten. Über Bhaskara gibt es leider nicht besonders viele gesicherte Informationen, einzig dass sein Vater selbst Astronom war. Lange wurde vermutet, dass er selbst Schüler von Aryabhata war, doch ist dies inzwischen widerlegt worden. Dennoch war er wohl der bedeutendste Vertreter der astronomischen Schule Aryabhatas. Obwohl er hauptsächlich astronomisch

[6] Varahamihira nach [Scriba und Schreiber 2005, S. 152]

tätig war, lagen seine Entwicklungen nicht auf dem Gebiet der Geometrie oder Trigonometrie, sondern der Algebra. Zu den wenigen für uns interessanten Erkenntnissen zählt eine Näherungsformel für den Sinus von spitzen Winkeln:

$$\sin x = \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)} \tag{2.1}$$

Diese schreibt Bhaskara aber Aryabhata zu. Auch die Zusammenhänge $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ und $\sin(x + \pi) = -\sin x$ waren ihm bekannt.

2.1.3.4 Brahmagupta (ca. 598 - 668)

Wohl der bekannteste der indischen Mathematiker, gehörte Brahmagupta zur Schule von Ujjain. 628 schrieb er sein bekanntestes Werk *Brahmasphutasiddhanta*. Es enthält 24 Kapitel, von denen vier rein der Mathematik gewidmet sind, zwei davon sogar namentlich bezeichnet: *Ganita* ist ein Kapitel über Arithmetik und *Kuttaka* ein Kapitel über unbestimmte Gleichungen. In anderen Kapiteln sind aber auch immer wieder mathematische Inhalte zu finden. 655 verfasste Brahmagupta ein Werk über Astronomie, das *Khandakhadyaka*. Auch in diesem sind Stellen zur Mathematik enthalten. Da auch Brahmaguptas Werke in Versen verfasst wurden, werden seine Ergebnisse in weiterer Folge in heutiger Schreibweise dargestellt.

Brahmaguptas Leistungen auf dem Gebiet der Geometrie waren hauptsächlich auf das rechtwinkelige Dreieck und das Viereck bezogen. So beschäftigte er sich mit der Frage, wie man rationale, rechtwinkelige Dreiecke erhält. Ohne Beweis gibt er folgenden Zusammenhang an:

$$a = 2mn,\ b = m^2 - n^2,\ c = m^2 + n^2, \quad m,\ n \in \mathbb{Q},\ m \neq n$$

Diese Lösung des Problems findet sich in verschiedenen Modifikationen wieder. Ist eine Kathete a gegeben, so sind die Seitenlängen des rechtwinkeligen Dreiecks a, $\frac{1}{2} \cdot (\frac{a^2}{m} - m)$ und $\frac{1}{2} \cdot (\frac{a^2}{m} + m)$ für eine beliebige, rationale Zahl m. Er gibt aber keine Formel für den Fall, dass die Hypotenuse gegeben ist. Damit löst er das Problem, ein Dreieck so zu konstruieren, dass zwei Seiten und die Höhe zu deren Schnittpunkt rationale Zahlen sind. Auch gibt er eine Formel für den Radius des Umkreises eines Dreiecks an, für den Fall, dass zwei Seiten a, b und die Höhe h zu deren Schnittpunkt gegeben sind: $\frac{ab}{h}$.

Viel beschäftigt er sich mit einem in einen Kreis eingeschriebenen Viereck, die Problemstellungen sind jedoch die gleichen. Es sind wieder aus verschiedenen Ausgangssituationen Vierecke mit rationalen Seitenlängen gesucht. Das Problem lässt sich einfach auf dasselbe Problem für Dreiecke zurückführen. Brahmagupta gibt jedoch nur Lösungen für spezielle Fälle an. Er berechnet den Flächeninhalt eines solchen Vierecks mit Seitenlängen a, b, c, d als $A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, wobei s der halbe Umfang ist. Spezielle Aufmerksamkeit erhält das gleichschenkelige Trapez. Jedoch sagt Brahmagupta nirgendwo, dass diese Vierecke, inklusive des gleichschenkeligen

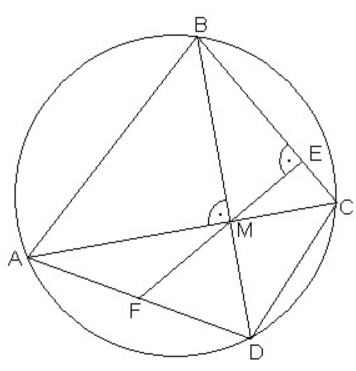

Abbildung 2.7: Brahmaguptas Theorem

Trapezes, in einen Kreis eingeschrieben sind. Für allgemeine Vierecke gelten sie nämlich nicht. Der Spezialfall $d = 0$ für ein Dreieck wird ebenfalls betrachtet.

Auch zu finden sind der Sehnensatz des Ptolemaios (2.2) und ein bis dahin unbekanntes Verhältnis (2.3).

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d \tag{2.2}$$

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd} \tag{2.3}$$

Das nach ihm benannte Theorem ist ein Satz über ein Sehnenviereck mit normal aufeinander stehenden Diagonalen. Betrachtet man Abbildung 2.7, so lautet der Satz, dass aus den Voraussetzungen $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ und $\overline{EF} \perp \overline{BC}$ folgt, dass $|\overline{AF}| = |\overline{FD}|$.

Brahmaguptas größte Leistungen liegen aber allesamt nicht auf dem Gebiet der Geometrie, sondern anderswo. So löste er beispielsweise die unbestimmte Gleichung $Nx^2 + 1 = y^2$. In seinem *Khandakhadyaka* gibt er zusätzlich zu einer Sinustafel eine Interpolationsformel an, um Werte für den Sinus von Winkeln zu ermitteln, die zwischen in der Tabelle angegebenen Winkeln liegen. Diese Formel ist äquivalent zu

$$f(a + xh) = f(a) + x\frac{\Delta f(a) + \Delta(f(a - h))}{2} + \frac{x^2}{2}\Delta^2 f(a - h). \tag{2.4}$$

Damit ist Brahmagupta der erste Mathematiker, der Differenzen zweiter Ordnung verwendet hat.

2.1.3.5 Lalla (ca. 720 - 790)

Lalla war ein indischer Astronom und Mathematiker. Von seinen Werken ist jedoch nur das *Sisyadhivraddhida* erhalten, das sich nur mit Astronomie beschäftigt. Einiges an Information findet sich dennoch zur Trigonometrie, die aber von Lalla jeweils schon früheren Autoren zugeschrieben wird. So sagt er selbst, dass seine Arbeit auf den Werken Aryabhatas beruht. Leider sind seine verlorenen Werke die, die für uns am interessantesten gewesen wären. Gerade diese sollen sich nämlich mit Mathematik beschäftigt haben. Spätere Autoren verweisen oft auf Lalla, woraus man schließen kann, dass seine Werke auch einigen Einfluss auf seine Nachfolger hatten.

2.1.3.6 Mahavira (9. Jh.)

Mahavira lebte im Süden Indiens im 9. Jahrhundert. Seine genauen Lebensdaten sind leider nicht bekannt, jedoch entstand sein bekanntestes Werk *Ganitasarasamgraha* im Jahre 850. Mahavira ist der erste wirkliche indische Mathematiker in dem Sinne, dass er sich wirklich nur mit Mathematik und nicht auch mit Astronomie beschäftigte. Seine Leistungen auf dem Gebiet der Mathematik bestehen in der Verbesserung und Korrektur der Ergebnisse seiner Vorgänger. Er beschäftigte sich jedoch hauptsächlich mit Arithmetik und Algebra.

Wie seine Vorgänger, speziell Brahmagupta, beschäftigte er sich mit dem Sehnenviereck. Auch gibt Mahavira die Flächenformel für ein Kreissegment wieder, die bereits in altchinesischen Texten zu finden ist: $A = \frac{(s+h)h}{2}$ (s ist die Länge der Sehne, h die Höhe des Segments). Seine Regel für die Kugel lautet wie folgt: „Nine multiplied by half of the cube of the radius is the working formula for the volume of a sphere. Its tenth part multiplied by 9 is the exact volume."[7] Da Mahavira für praktische Rechnungen mit der sehr groben Näherung $\pi = 3$ arbeitete, lauten die beiden angegebenen Formeln modern $V_a = \frac{3}{2}\pi r^3$ und $V_e = \frac{27}{20}\pi r^3$.

Als einziger indischer Mathematiker überhaupt beschäftigte sich Mahavira, wenn auch nur sehr kurz, mit der Ellipse. Er gab zum Beispiel den Flächeninhalt der Ellipse als die Hälfte des Produkts von Umfang und kleiner Halbachse an. Dies ist natürlich nicht korrekt. Ebenso inkorrekt ist seine Formel für den Umfang.

2.1.3.7 Aryabhata II (um 950)

Neben Aryabhata I gibt es noch einen weiteren indischen Mathematiker desselben Namens. Lange Zeit wurden die beiden namensgleichen Wissenschaftler verwechselt, doch inzwischen konnten ihre Erkenntnisse und Arbeiten voneinander getrennt werden. Das *Mahasiddhanta* ist eigentlich wieder eine Werk zum Thema Astronomie, das aber auch Mathematik enthält. Wie schon so viele Autoren vor ihm richtete Aryabhata II sein Hauptaugenmerk auf die Algebra und die Arithmetik. Darin korrigierte er auch einige Erkenntnisse seiner Vorgänger.

Auf dem Gebiet der Trigonometrie liefert Aryabhata einige Zusammenhänge, die er unter anderem früheren Mathematikern zuschreibt sowie auch die folgende, wohl von ihm selbst stammende:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 \pm \sin x}{2}}. \tag{2.5}$$

Mahavira dürfte einer der ersten gewesen sein, die an der Richtigkeit von Brahmaguptas Flächenformel für das allgemeine Viereck gezweifelt haben, doch Aryabhata spricht diese Zweifel erstmals auch aus. Er kann aber selbst keine bessere Formel angeben.

Auch Aryabhata verbessert die Berechnung des Volumens einer Kugel und formuliert dies folgendermaßen: „Half the cube of the thickness of a ball combined with its own eighteenth part is its volume."[8] Dies bedeutet in heutiger Formelsprache $V = \frac{d^3}{2} + \frac{d^3}{2 \cdot 18} = \frac{38}{9} r^3$.

2.1.3.8 Vacaspati (ca. 900 - 980)

Zu guter Letzt ist noch Vacaspati zu nennen. Dieser war kein Mathematiker, sondern ein Philosoph. Dennoch könnte man ihm die Begründung der dreidimensionalen Koordinatengeometrie zuschreiben. In seinem Werk *Tatparyatika* schreibt Vacaspati unter anderem über seine Theorie der Atome. Um deren Position im Raum zu beschreiben, verwendet er drei Achsen. Er nimmt dabei eine Achse als Ost-West-Linie und eine weitere normal dazu, also die Nord-Süd-Linie. Die dritte Achse zeigt von dem Schnittpunkt der ersten beiden zur Sonne zur Mittagszeit, gemeint ist also wieder, dass diese Achse normal auf die anderen steht. Die Position jedes Atoms wird dann angegeben als Abstand von jeder der drei Achsen.

[7] [Amma 1979, S. 209f]
[8] [Amma 1979, S. 210]

2.2 Kulturhistorischer Hintergrund der indischen Mathematik

2.2.1 Der Einfluss der Religionen auf die Entstehung der Mathematik

2.2.1.1 Der Einfluss der Vedischen Religion

> „In many of the ancient countries, the development of mathematics was necessitated on account of religious practices and observances.“[9]

Das geometrische Wissen, das die *Sulbasutras* enthalten, dürfte schon viel älter sein als die *Sulbasutras* selbst. Da aus der Zeit vor 800 v. Chr. keine mathematischen Schriften überliefert worden sind, nahmen viele Historiker an, dass die indische Mathematik viel von anderen Kulturen übernommen hat. Natürlich wird dieser Wissensaustausch auch stattgefunden haben, nur nicht in dem Ausmaß, wie lange angenommen worden ist. Funde in der antiken Stadt Harappa, inklusive eines einfachen Zirkels, von etwa 2500 v. Chr. deuten darauf hin, dass die indische Mathematik sich allmählich, aber doch eigenständig entwickelt hat.

Dagegen spricht aber folgende Tatsache: Während die Städte im Indus-Gebiet, wie Harappa, im frühen 2. Jahrtausend zugrunde gingen, drangen aus dem Nordwesten indoarische Stämme dorthin vor. In der ersten Hälfte des 1. Jahrtausends wurden diese dort und um den Ganges sesshaft. Die Gesellschaft, die sich nun entwickelte, bestand aus 4 Ständen: den Brahmanen (Priestern), den Kriegern, den Händlern und Bauern sowie den Handwerkern und anderen niederen Dienstleistern. Die davor in dem Gebiet lebende Urbevölkerung war von den einwandernden Stämme unterworfen worden und war nun nur mehr im 4. und niedrigsten Stand zu finden. Ob das mathematische Wissen der älteren Kultur tradiert worden ist, lässt sich aus heutiger Sicht nicht mehr nachvollziehen.

Die Vedische Periode ist ein früher Abschnitt in der Geschichte des Hinduismus, der benannt ist nach den *Veden*, den ältesten heiligen Schriften. Diese *Veden* geben einen Einblick in das frühe Leben in Indien, speziell in die religiösen Bereiche des Lebens. So werden rituelle Opfer und Waschungen beschrieben, aber auch an Götter gerichtete Hymnen überliefert.

Mathematik entstand nun genau in diesem Zusammenhang aus der Notwendigkeit heraus, gewisse Altäre für die verschiedenen Götter zu verschiedenen Anlässen zu konstruieren. Außerdem mussten die Zeitpunkte für gewisse Feste im Vorhinein bestimmt und die Tage der Tag- und Nachtgleiche berechnet werden. Vieles davon war Aufgabe der Priester, die sich also mit Astronomie und damit auch mit Geometrie beschäftigen mussten, doch das Zusammenstellen eines Altars musste jeder gläubige Hindu der damaligen Zeit beherrschen. Damit die Götter zufrieden waren, musste das rituelle Vermessen der Opferplätze und Altäre mit höchster mathematischer Genauigkeit durchgeführt werden.

Für die korrekte Konstruktion eines Altars musste, wie bereits erwähnt, ein bestimmter Handlungsablauf befolgt werden. Zunächst musste eine ebene Fläche vorbereitet werden, auf dem dann in Ost-West-Richtung der Altar errichtet wurde. Anschließend mussten

[9] [Srinivasiengar 1967, S. 6]

Ziegel in bestimmten Formen hergestellt werden. Auf der ebenen Fläche wurde dann der Altar vorgezeichnet, bevor die Ziegel die nun vorgegebenen Plätze einnahmen.

Die *Sulbasutras* waren eigentlich Anhänge der *Veden*. Daher kann zwar gesagt werden, dass Geometrie im antiken Indien als Wissenschaft der Altarkonstruktionen entstand, aber nicht ob die Inder sich auch mit Mathematik beschäftigten, ohne damit Probleme religiöser Natur lösen zu wollen. Parallel dazu entwickelte sich die Astronomie - wiederum aus religiösen Gründen - und die für sie notwendige Mathematik. Die Religion nahm also auch hier indirekt Einfluss auf die Mathematik, wenn auch der Schwerpunkt weniger bei der Geometrie als bei Arithmetik und Algebra lag.

Lange Zeit wurden die Regeln für die Altarkonstruktionen mündlich weitergegeben, bis sie schließlich in stark elliptischen Sanskritsätzen formuliert wurden, um das Gedächtnis zu unterstützen. Ab etwa dem 8. Jahrhundert v. Chr. wurden diese in den *Sulbasutras* gesammelt. Schon allein auf Grund dieser sehr kurz gehaltenen Merksätze ist wohl einzusehen, warum in den *Sulbasutras* keine Beweise vorkommen. Dieses Wissen war einfach nicht nötig, um einen Altar zu konstruieren, und musste daher auch nicht weitergegeben werden - sofern es überhaupt bekannt war. Beweise waren für Laien einfach nicht von Interesse.

Die Mathematik der Inder konzentrierte sich zu Beginn also auf die Geometrie, jedoch verschob sich das Interesse immer weiter in Richtung Arithmetik und Algebra. Schon früh verwendeten die Inder außergewöhnlich große Zahlen bis hin zu 10^{62}. Dies ist auch schon in den *Sulbasutras* zu bemerken, denn die irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{10}$ wurden mit ungewöhnlicher Genauigkeit für die Zeit berechnet. So ist in den ältesten *Sulbasutras* der Wert $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = 1,4142156...$ zu finden. Dies ist auf 5 Dezimalstellen genau.

Wie die indischen Mathematiker zu diesem Wert gekommen sind, ist nicht in den *Sulbasutras* überliefert. Es gibt verschiedene Vermutungen, die meisten sind arithmetischer Natur. Bibhutibhushan Datta, ein indischer Mathematiker und Mathematikhistoriker der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts, zeigte, dass man diesen Wert auch mit Hilfe von geometrischen Überlegungen herleiten kann (vgl. [Bag 1979, S. 130]). Seine Idee beruht auf der in den *Sulbasutras* vorkommenden Methode, ein Quadrat zu konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich der Summe der Flächen zweier Quadrate mit Seitenlänge 1 ist. Anschließend folgt Datta den genauen Anweisungen der *Sulbasutras* und erhält so auch wirklich die oben genannte Formel. Welchem Gedankengang die Inder gefolgt sind, ob sie einen anderen, eigenen Weg gegangen sind, um diese Näherung zu erhalten, oder ob sie den Wert vielleicht sogar von den Babyloniern übernommen haben, kann aus heutiger Sicht jedoch nicht festgestellt werden.

Der Einfluss der *Sulbasutras* auf die spätere indische Mathematik ist lange Zeit umstritten gewesen, dies jedoch in weiten Teilen unbegründet. Zwei große mathematische Leistungen sind in den *Sulbasutras* zu finden: das Formulieren des Satzes von Pythagoras und das Erkennen der Eigenschaften von ähnlichen Figuren. Auf diesen beiden Erkenntnissen beruht im Grunde die gesamte indische Geometrie, selbst die Trigonometrie in weiten Teilen.

Natürlich hatten die *Sulbasutras* großen Einfluss auf die indische Architektur und lebten wohl auch in dieser weiter, ebenso wie in der Mathematik. So werden Konstruktionsvorschriften bis weit ins 17. Jahrhundert hinein noch verwendet, doch wird der Exaktheit der Konstruktion nicht mehr so viel Wichtigkeit beigemessen wie in früherer Zeit.

Während beinahe alle in den *Sulbasutras* verwendeten Fachbegriffe auch später weiterverwendet wurden, wird die gute Näherung für $\sqrt{2}$ nicht mehr verwendet, da eine andere Approximation einfacher für das praktische Rechnen war.

Es kann also nicht mit Sicherheit gesagt werden, wie die *Sulbasutras* die Mathematiker späterer Zeit beeinflusst haben, doch dass sie sie beeinflusst haben, kann als sicher gelten.

2.2.1.2 Die Mathematik der Jaina

> „Whereas the practical necessity of building the altars turned the sacrificing Vedic tribes to mathematics, to geometrical constructions, the Jainas were impelled to indulge mathematical calculations by an abstract love of precision.“[10]

In der Mitte des 1. Jahrtausends v. Chr. entstanden nun drei große Religionen: Buddhismus, Hinduismus und Jainismus. Wenn auch Hinduismus und Jainismus ältere Wurzeln haben, so ist hier gemeint, dass sie sich nahe zu einer auch heute noch üblichen Form entwickelt haben. Buddhismus und Jainismus waren die bedeutendsten Religionen im Gebiet des heutigen Indien bis etwa 800 n. Chr. Im Hinduismus verschoben sich allmählich die Prioritäten. So wurde weniger Wert auf die Konstruktion von Altären und die rituellen Opfer im eigenen Haus gelegt. An deren Stelle traten Bilderverehrungen in Tempeln. So schrumpfte mit der Bedeutung der *Sulbasutras* für den Glauben auch die Bedeutung der Mathematik.

Parallel zu und nach den *Sulbasutras* entstanden die mathematischen Schriften der Jaina. Die Jaina benötigten die Mathematik nicht zur Konstruktion von Altären. Dennoch gibt es Gemeinsamkeiten mit den *Sulbasutras*. Das Trapez, dem bereits in den Schriften der Brahmanen eine besondere Bedeutung im Kosmos zugeordnet worden ist, taucht bei den Jaina als Gestalt des Universums wieder auf, ebenso als Gestalt der Berge und der Kontinente. Weitere wichtige Figuren waren der Kreis und verschiedene Kreisteile, da die Form der Erde und die Bahnen der Himmelskörper jeweils durch einen Kreis beschrieben wurden.

Aus der Zeit zwischen der Entstehung der *Sulbasutras* und dem 5. Jh gibt es nur wenige, nicht vollständig erhaltene Texte, die lange Zeit von der Forschung keine Beachtung fanden. Informationen über diese Zeit konnten also zu weiten Teilen nur aus Kommentaren späterer Autoren gewonnen werden. Die wenigen erhaltenen Texte geben nur einen unzureichenden Einblick in die Mathematik.

Die Mathematik der Jaina war hauptsächlich durch ihre Vorstellungen und Überlegungen auf dem Gebiet der Kosmologie geprägt. Die Religion hatte also auch hier einen großen Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik. So hatten die Jaina spezielle Vorstellungen des Kosmos, von Raum und Zeit. Zeit wurde als ewig angesehen, der Raum als unendlich. Vielleicht kommt daher auch das Interesse an großen Zahlen. So trägt die Zahl 10^{140} den Namen „Asankhyeya“, was unzählbar bedeutet. Auch kommt in der Kosmologie eine zeitliche Periode von 2^{588} Jahren vor.

Die Jaina waren von großen Zahlen und der Vorstellung der Unendlichkeit fasziniert. Sie teilten Zahlen ein in drei Kategorien: zählbar, unzählbar und unendlich. Zählbare Zahlen waren alle Zahlen, die nach der Reihe bis zur größten Zahl aufgeschrieben werden können. Wie genau die größte Zahl erreicht werden sollte, ist nicht ganz klar. „Consider

[10] [Amma 1979, S. 61]

a trough whose diameter is of the size of the earth (100,000 yojanas). Fill it up with white mustard seeds counting them one after another. Similarly fill up with mustard seeds other troughs of the sizes of the various lands and seas. Still it is difficult to reach the highest number enumerable.“[11] Es ist auch eine Anleitung angegeben, wie man von dieser größten Zahl aus die Unendlichkeit erreichen kann. Unendlichkeit selbst wurde in fünf Kategorien unterteilt: unendlich in eine Richtung, unendlich in zwei Richtungen, unendlich in der gesamten Ebene, unendlich überall und unendlich fortwährend.

Laut dem *Sthananga Sutra*, das etwa 300 v. Chr. entstanden ist, beschäftigte sich die Mathematik dieser Zeit mit zehn Gebieten. Die Übersetzung und Zuordnung einiger der Sanskrit-Begriffe für diese zehn Themenbereiche ist nicht völlig gesichert. Es ist aber wahrscheinlich, dass die zehn Begriffe für folgende Themen standen:

parikarma Die vier Grundrechnungsarten;

vyavahara Angewandte Arithmetik;

kalasa varma Bruchrechnung;

rajju Geometrie;

rasi Wörtlich Haufen, wahrscheinlich die Vermessung von ebenen und räumlichen Figuren;

varga, ghana, varga-varga Wörtlich Quadrat, Kubus und Quadrat-Quadrat, also Quadrieren, Kubieren und Berechnung höherer Potenzen, wahrscheinlich inklusive des zugehörigen Wurzelziehens, sowie quadratische, kubische etc. Gleichungen;

yavat-tawat Algebra;

vikalpa Kombinatorik;

Man sieht also, dass die Geometrie bis dahin nur mehr einen kleinen Teil der damaligen Mathematik ausmachte. Stattdessen verlagerte sich das Interesse nun endgültig in Richtung Arithmetik und Algebra. Selbst auf dem Gebiet der Kombinatorik brachten die Inder nun außergewöhnliche Leistungen hervor. So findet sich im *Chandas-Sutra* von Pingala, einem Schriftsteller und Mathematiker des 3. Jahrhunderts v. Chr., eine Methode, um herauszufinden, wie viele Möglichkeiten es gibt, eine gewisse Anzahl von Buchstaben anzuordnen. Die Regel ist nicht einfach zu verstehen, doch im 10. Jh. wurde sie schließlich von dem Kommentator Halayudha auf eine Weise interpretiert, die unserem Pascalschen Dreieck entspricht.

2.2.1.3 Hinduismus und Mathematik

> „Ihnen blieb es vorbehalten, die Unbequemlichkeiten der Sehnenrechnung zu überwinden - kein hellenistischer Astronom hatte versucht, dieses Werkzeug grundsätzlich zu verbessern.“[12]

[11] Zitat nach [Srinivasiengar 1967, S.24] (Originalquelle unbekannt)
[12] [Scriba und Schreiber 2005, S. 151]

Nach einer langsamen Entwicklung der Mathematik über mehrere Jahrhunderte hatte sie sich von der Religion immer noch nicht lösen können. Dies dauerte noch bis in die Zeit von Aryabhata I. Davor entstanden jedoch noch die hinduistischen *Siddhantas*. Noch immer war die Astronomie und die Beschreibung der Himmelskörper ein großer Bestandteil der Religion und somit die mathematischen Themengebiete der *Siddhantas* in weiten Teilen vorgegeben. Doch ist zu merken, dass die Religion nicht mehr den großen Einfluss hatte wie noch zu Zeiten der *Sulbasutras*.

Im Gegensatz zu den mathematischen Hilfsmitteln der jainistischen Astronomie kommen in den *Siddhantas* zum ersten Mal die trigonometrischen Funktionen Sinus (jiva), Cosiuns (kojiva) und Sinus versus (utkram jiva) explizit vor. Indirekt sind auch bereits Tangens und Secans zu erkennen.

Die Inder kannten damals schon die Sehnengeometrie der Griechen, speziell die Arbeiten von Ptolemaios zu dem Thema. Dieser war für sie natürlich besonders wegen seiner astronomischen Arbeiten interessant. Die Inder hatten jedoch die entscheidende Idee, anstatt mit der Länge der Sehne mit dem Sinus zu rechnen (vgl. Abb. 1.8). Ob sie dies aber eigenständig entwickelten, oder auf Ptolemaios' Arbeiten aufbauend, ist eine der ungeklärten und wohl meist diskutierten Fragen der Geschichte der indischen Mathematik. Wie dem auch sei, arbeiteten sie lange Zeit an der Trigonometrie und beeinflussten ihrerseits dann die arabische Mathematik.

Obwohl die *Siddhantas* hinduistische Schriften sind, haben praktische alle indischen Mathematiker, die sich mit der Trigonometrie beschäftigt haben, auf die *Siddhantas* verwiesen oder diese zitiert. Das gilt auch für Mathematiker, die eigentlich in der Tradition der Jaina standen, doch an den Errungenschaften der *Siddhantas*, speziell des *Surya Siddhanta*, gab es kein Vorbei.

2.2.2 Die Schulen Indiens

> „The young person who wished to embark on a commercial venture was inevitably required to first gain some grounding in astronomy. This led to a proliferation of teachers of astronomy, who in turn received training at universities such as at Kusumpura (Bihar) or Ujjain (Central India) or at smaller local colleges or Gurukuls.“[13]

In der späten Vedischen Periode war der indische Subkontinent in eine Reihe von kleineren Königreichen geteilt, 16 an der Zahl. Neben diesen Reichen existierten viele kleinere unabhängige Gebiete. Die Reiche schlossen sich bis zum 5. Jahrhundert v. Chr. langsam - oft auch unfreiwillig - zu 4 größeren Reichen zusammen. Bis zum Ende des 4. Jahrhunderts hatte sich das Magadha Reich gegen die anderen 3 schließlich durchgesetzt und erreichte 256 v. Chr. seine größte Ausdehnung. Damals standen die Gebiete des heutigen Indien, Pakistan und Afghanistan also unter einer Herrschaft.

In den Jahrhunderten, die der Vereinigung vorangingen, erlebte der Handel in Indien einen großen Aufschwung. Die rege Gewerbetätigkeit förderte auch die Astronomie und die Mathematik. Um diese nun allen Leuten zugänglich machen zu können, benötigte man Lehrer, für deren Ausbildung Schulen gegründet wurden. Der große Stellenwert der Religion in der damaligen Gesellschaft war aber auch an den Schulen sichtbar und so arbeiteten besonders viele Jaina Priester an den Schulen.

[13] [4]

In der Zeit bis zum 5. Jahrhundert existierten in Indien im Prinzip nur drei für die Geschichte der Mathematik bedeutende Schulen für Mathematik und Astronomie:

- Schule von Kusumpura
- Schule von Ujjain
- Schule von Mysore

Von größter Bedeutung ist die Schule von Kusumpura (der Name Pataliputra ist ebenso gebräuchlich) nahe dem heutigen Patna im Nordosten des heutigen Indien, denn sie ist die erste namentlich erwähnte indische Schule, nicht nur für Mathematik und Astronomie. Gleichzeitig ist sie aber auch eine der einflussreichsten, denn spätere Autoren standen entweder in der Tradition der Schule von Kusumpura oder sprachen sich öffentlich gegen diese aus. Der Jaina-Heilige Bhadrabahu (ca. 433 - 357 v. Chr.) soll dieser Schule angehört haben, ebenso der Metaphysiker Umasvati (um 150 v. Chr.). Aryabhata I hat ebenfalls an dieser Schule gelernt und gearbeitet.

Der Schule von Kusumpura ist es wohl hauptsächlich zu verdanken, dass das mathematische Wissen der frühen vedischen und jainistischen Zeit überliefert worden ist, denn diese Schule hatte von allen die größte Beständigkeit in den Jahrhunderten bis zu Aryabhata. Dennoch übernahmen die Schulen von Ujjain (in Zentralindien) und Mysore (im südlichen Indien) diese Rolle langsam, während die Bedeutung von Kusumpura zurückging. Dieser Wechsel dauerte aber einige Jahrhunderte und fand erst nach Aryabhata endgültig statt. Varahamihira und Brahmagupta gehörten der Ujjain Schule an, während etwa Mahavira die Schule von Mysore gut repräsentiert.

Diese drei Schulen stehen in einer sehr interessanten Beziehung zueinander. In Indien soll zu Bhadrabahus Zeit eine 12 Jahre dauernde Hungersnot geherrscht haben, die der Jaina-Heilige der Legende nach auch vorhergesagt hat. Diese Hungersnot muss verheerende Auswirkungen auf das Königreich Maghada gehabt haben, das zu dieser Zeit auf den Norden Indiens beschränkt war. Als direkte Folge dessen wanderte ein Teil der dort ansässigen jainistischen Priester unter Führung Bhadrabahus in den Süden nach Mysore aus. Auf seinem Weg soll er lange Zeit in Ujjain geblieben sein. Diese Legende soll auf die schon früh bestehende Verbundenheit der drei Schulen hinweisen.

Aryabhata I, zunächst Angehöriger der Schule von Kusumpura, soll nach seinem Studium wieder in seine Heimatstadt Kerala, etwas südlich von Mysore, zurückgekehrt sein und dort eine eigene Schule gegründet haben. Die Schule von Kerala übernahm aber erst viel später, ab etwa der Wende zum 2. Jahrtausend, die Vorreiterrolle unter all diesen Schulen.

2.2.3 Die Mathematiker des frühen Mittelalters

> „The Sulbasutra writers were primarily interested in geometrical constructions, the implied algebraical truths coming in by the side door. But with the later mathematicians the algebraical results are the most important, the geometrical figures being merely an aid to make the algebraical results the more immediately convincing or to prove the reuslts.“[14]

[14][Amma 1979, S. 220]

Das Maghada Reich konnte das große Gebiet nicht halten. Die Ablöse der herrschenden Dynastie 185 v. Chr. war sicherlich auch nicht von Vorteil für das Bestehen des riesigen Königreiches. Etwa zur selben Zeit entstanden aus dem Nordwesten als späte Folge der Eroberungen Alexanders des Großen einige neue Reiche, deren Kulturen Mischungen darstellten, wie das hellenistische Gräko-baktrische Reich und das indisch-skythische Reich. Förderte diese Aufspaltung in mehrere Reiche zwar die Streitigkeiten und Kämpfe untereinander, so förderte sie andererseits auch den Handel und den Austausch von Wissen und Kultur. Dies hatte Auswirkungen auf die indische Astronomie und damit auch die Mathematik. Der hellenistische Einfluss ist speziell in der Astronomie, für die die Inder ja ein großes Interesse aufbrachten, zu merken.

„In den ersten Jahrhunderten unserer Zeitrechnung blühte die städtische Kultur auf und führte zu einer reichhaltigen Literatur auf vielen Gebieten: Rechtswissenschaft, Staatslehre, Liebeskunst (Kamasutra), Dichtung, Philosophie. Der Höhepunkt dieser Entwicklung war die Zeit des Gupta-Reiches (320 bis 544), die als Goldenes Zeitalter Indiens gilt. In dieser Zeit beginnt die mathematische Literatur mit dem Aryabhatiya [...]“[15]

Das Gupta-Reich ist die letzte Ausprägung des Maghada Reiches. Während dieser Zeit florierten auch die Wissenschaften, Astronomie und Mathematik. Es ist kein Zufall, dass Aryabhata I mit großer Wahrscheinlichkeit in der Hauptstadt des Reiches Kusumpura gelebt hat. In Nalanda wurden im 5. Jahrhundert eine große Universität und eine Bibliothek gegründet, zu denen Studenten aus ganz Indien, aber auch aus China, der Mongolei, Japan und Korea kamen, um dort zu lernen. Die Bibliothek soll mit rund 9 Millionen Büchern die größte weltweit gewesen sein.

Das Gupta-Reich endete jedoch recht abrupt mit dem Einfall der Hunnen aus dem Norden. Während nun das Reich wieder zerfiel und die Hunnen ein eigenes Reich im Gebiet des heutigen Afghanistan aufbauten, blieb der Süden Indiens, der nicht zum Gupta-Reich gehört hatte, von den Wirren im Norden weitgehend unberührt. Auch an der Mathematik ist das zu spüren, denn die großen Mathematiker nach Aryabhata I lebten beinahe alle im Süden Indiens.

Bis ins 13. Jahrhundert wurde der Norden immer wieder von verschiedenen eindringenden Völkern bedroht. Auch wurden immer wieder neue Königreiche gegründet, die nur wenige Jahrzehnte Bestand hatten, nur um von einem anderen verdrängt oder erobert zu werden. Auch im Süden gab es wechselnde Herrscherhäuser und Gebietsverluste und -gewinne gegen Norden hin, doch im Großen und Ganzen war der Süden Indiens viel stabiler als der Norden. So ist der kulturelle Einfluss des Südens in ganz Indien immer wieder spürbar.

Aryabhata I, der im Goldenen Zeitalter Indiens lebte, übte als erster bekannter Mathematiker einen großen Einfluss auf die gesamte nachfolgende Mathematik aus. Das *Aryabhatiya*, obwohl extrem kurz und oft auch nicht korrekt, beginnt eine große Tradition von Beschäftigung mit darin vorkommenden Themen. Bhaskara und Lalla gehörten zu den Anhängern seiner Arbeit. Die von ihm gegründete Schule in Kerala stand wohl der jainistischen Mathematik nahe. Bhaskara macht derartige Andeutungen in seinem Kommentar zum *Aryabhatiya*. Außerdem wurden vergleichsweise viele jainistische Manuskripte in Kerala gefunden. Aryabhata scheint also am Ende einer mathematischen Entwicklungsperiode zu stehen - das Wissen der Jaina wurde von ihm gesammelt - und

[15] [Wussing 2008, S. 91]

gleichzeitig am Beginn einer anderen, geprägt von wenigen Einzelpersonen.

Brahmagupta kannte die Mathematik Aryabhatas gut, doch attackiert er ihn in seinen Schriften. Er scheint lange Zeit ein erbitterter Gegner gewesen zu sein, doch in seinem *Khandakhadyaka*, das er in bereits höherem Alter verfasst hat, ist zu erkennen, dass er Aryabhatas Leistungen schließlich anerkannt hat. In der Astronomie übernahm er schließlich sogar einige Ansichten Aryabhatas. Selbstständig erarbeitete Brahmagupta viele neue Erkenntnisse, sowohl in der Geometrie als auch in der Algebra. Neben Aryabhata ist er der einflussreichste und meist kommentierte Mathematiker des frühen indischen Mittelalters.

Zu dieser Zeit begann die Mathematik in Indien sich in zwei große Bereiche aufzuteilen: Algebra und Arithmetik. Geometrie kam in beiden Bereichen vor. Diese Entwicklung in der indischen Mathematik hatte sich bereits lange vorher abgezeichnet. Wie bereits erwähnt, verschob sich das Interesse der Mathematiker über die Jahrhunderte immer weiter von der Geometrie weg. Das ist auch daran zu merken, dass einige Mathematiker sich gar nicht mehr damit beschäftigten.

Bis zum nächsten großen indischen Mathematiker Bhaskara II (ca. 1114 - 1185) gab es zwar immer wieder Mathematiker, doch diese beschäftigten sich hauptsächlich damit, ihre Vorgänger zu korrigieren und zu verbessern. In manchen Bereichen konnten sie die Arbeit früherer Autoren weiterführen und neue Erkenntnisse schaffen, doch bedurfte es eines genialen Geistes wie Bhaskara II, um die indische Mathematik wieder einen entscheidenden Schritt vorwärts zu bringen. Die Elemente Euklids waren mit Sicherheit ab dem 14. Jh. zugänglich. Danach drang die westliche Mathematik immer mehr in den indischen Raum vor. Doch eine Beschreibung dieser Zeit ist nicht Bestandteil dieser Arbeit.

Die Entwicklung der Mathematik nach Brahmagupta ging also wieder langsam voran, ähnlich wie in der Zeit vor Aryabhata. Wissen wurde langsam und schrittweise angehäuft. Es gab zwar erwähnenswerte Leistungen von Einzelpersonen, doch keine wirklich herausragenden Errungenschaften, zumindest nicht auf dem Gebiet der Geometrie.

2.2.4 Äußere Einflüsse

> „The geometry of the Hindus was certainly Greek, but they did have a special gift for arithmetic. As to algebra, they may have borrowed from Alexandria and possibly directly form Babylonia; but here, too, they went far on their own. India was also somewhat indebted to China.“[16]

Der indische Subkontinent nahm seit jeher eine zentrale Stelle für den Handel ein. Die indischen Reiche waren etwa gleich weit von China entfernt wie von Griechenland. Somit konnten kulturelle wie wissenschaftliche Einflüsse von beiden Seiten ins Land eindringen. Die Mathematik wurde wohl hauptsächlich durch astronomische Handbücher nach Indien gebracht, denn dort lag ja das Hauptinteresse der Inder. Einige konkrete Beispiele:

- In Indien soll das Dezimalsystem erfunden worden sein, doch eigentlich kommt es in China schon viel früher vor. In Indien erhielt es erst eine praktisch anwendbare Form.

[16] [Kline 1990, S.184]

- Die Art und Weise, Kubik- und Quadratwurzeln zu berechnen, stammt aus China.
- Die indische Trigonometrie wurde stark von der hellenistischen beeinflusst.
- Die indische Trigonometrie war aber vorher bereits von der babylonischen beeinflusst worden.
- Einige praktische geometrische Probleme werden, aus China kommend, beinahe wortwörtlich wiedergegeben (vgl. Kap. 3.2.5).

Die indische Mathematik wiederum übte großen Einfluss auf die arabische Mathematik aus. So wurden von diesen indische wie griechische Werke ins Arabische übersetzt und überliefert. Besonders in der Trigonometrie und der Algebra sind die Einflüsse der indischen Mathematik auf die arabische spürbar. Uns wohl am deutlichsten bewusst ist der indische Einfluss im Wort Sinus, obwohl dies ja ein Übersetzungsfehler des Wortes jiva über das Arabische ins Lateinische ist.

2.2.5 Eine abschließende Charakterisierung der indischen Mathematik

> „Ihre größten Leistungen liegen nicht in der Geometrie, sondern in der Algebra, der Zahlentheorie [...] sowie in der Entstehung zahlreicher unendlicher Reihen und in Überlegungen, die in Richtung infinitesimaler Methoden gehen.“[17]

Die indische Mathematik ist viel umfangreicher und viel höher entwickelt als sie in dieser Arbeit auf den ersten Blick scheint. Dies hängt damit zusammen, dass sich diese Arbeit auf die Entwicklungen auf dem Gebiet der Geometrie beschränkt hat. Die Inder waren aber nicht besonders an der Geometrie interessiert. Die Mathematik der Inder beginnt zwar mit den *Sulbasutras* sehr geometrielastig, doch verschob sich das Interesse schon bald hin zur Algebra und Arithmetik.

Die Entstehung der Mathematik hatte im Prinzip zwei Beweggründe, zum einen praktische Probleme der Landwirtschaft oder des Handels, zum anderen die Religion. Die praktischen Themen waren in beinahe allen Kulturen einer der Auslöser für die Entwicklung mathematischer Anfänge. Auch religiöse Gründe kamen in anderen Kulturen vor, doch nirgends waren sie so präsent wie in Indien.

Die Religion nahm in der indischen Gesellschaft einen so hohen Stellenwert ein, dass sie die Thematik der Mathematik über Jahrhunderte prägte wie nirgendwo sonst. Die *Sulbasutras* waren religiöse Texte der Veden. Die *Ganita* und andere Werke waren Schriften der Jaina. Die meisten Werke, die den Namen *Siddhanta* enthalten, sind hinduistischer Natur. Hinzu kommt, dass viele Mathematiker selbst gläubige Jaina waren oder einer anderen Religion angehörten. Selbst wenn ein Mathematiker keinem Glauben allzu nahe stand, so blieb ihm dennoch keine andere Wahl, als sich mit den Problemen zu beschäftigen, die von den Vorgängern bereits bearbeitet worden waren.

Es ist daher auch klar, warum sowohl die Mathematik der Veden als auch die der Jaina keine Beweise enthalten. Aus religiösen Gründen waren Beweise im euklidischen Sinne

[17] [Scriba und Schreiber 2005, S. 158]

einfach nicht notwendig, denn sie waren nicht von Interesse für die Riten der *Sulbasutras* und die kosmologischen Überlegungen der Jaina.

Beweise stehen aber auch nach der teilweisen Loslösung der Wissenschaften von der Religion ab Aryabhata nicht an der Tagesordnung der indischen Mathematiker. In den mathematischen Texten Indiens, egal welchen Autors, gibt es gar keine Beweise, ganz selten Andeutungen einer Erklärung oder Begründung eines gewissen Ergebnisses. Traditionell waren in den Schriften nur alte und neue Erkenntnisse zu finden, ohne dass der Weg genannt wurde, wie diese zustande gekommen waren.

Mit ein Grund für das Fehlen von Beweisen in mathematischen Abhandlungen ist die lyrische Form dieser Texte, die sogar zu einer neuen Schreibweise der Zahlen geführt hat: „The Hindu method of expressing everything (even mathematics) in poetic form must be noted in order to appreciate this exceedingly queer, if original, method of numeration.“[18] Dieses Schreiben in Versen machte es den Mathematikern nicht leicht, ihr Wissen darzustellen. So waren ihre Schriften immer in sehr kurzer, prägnanter und oft auch schwer verständlicher Form gehalten. Nun noch Beweise, Erklärungen oder Herleitungen einzufügen, scheint vielen Autoren ein zu großer Aufwand gewesen zu sein.

Doch ist es nicht so, als hätten die indischen Mathematiker kein Interesse an Beweisen gehabt. Diese finden sich aber nicht in ihren Hauptwerken, sondern in einer anderen, weit verbreiteten Textform: den Kommentaren. Diese wurden teilweise von den Autoren selbst als Erklärungen zu ihren eigenen Schriften verfasst, teilweise von späteren Autoren, um die Texte ihrer Vorgänger verständlicher zu machen. Dennoch fehlen viele Begründungen und Herleitungen auch in den Kommentaren, weshalb es nahe liegt anzunehmen, dass ein großer Teil von diesen trotz aller schriftlichen Erläuterungen mündlich weitergegeben wurde.

Indische Beweise entsprechen jedoch nicht den Beweisen im euklidischen Sinn. „The Indian's aim was not to build up an edifice of geometry on a few self-evident axioms, but to convince the intelligent student of the validity of the theorem, so that visual demonstration was quite an accepted form of proof.“[19]

In den mathematischen Werken finden sich auch Beispiele zu gewissen Problemen, die wohl pädagogischen Charakter haben sollen. Unter der Verwendung der Bezeichnungen von Abbildung 2.8 will Bhaskara I etwa anschaulich zeigen, dass $CD = r \cdot \sin\alpha$: „A hawk is sitting on the top of a pole whose height is 18 (cubits). A rat who has gone out of his dwelling (at the foot of the pole) to a distance of 81 (cubits), while returning towards his dwelling, afraid of the hawk, is killed by the cruel (bird) on the way. Say how far has he gone towards his hole, and also the (horizontal) motion of the hawk (the speeds of the rat and the hawk being the same“[20]. Vergleicht man diese Anweisungen mit Abbildung 2.8, so befindet sich der Falke im Punkt

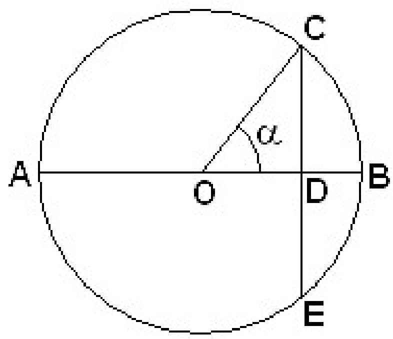

Abbildung 2.8: Zu Bhaskaras Beispiel

[18][Srinivasiengar 1967, S. 43]
[19][Amma 1979, S. 3]
[20]Bhaskara I nach [Bag 1979, S. 156f]

C, die Ratte im Punkt A. Nun sind die Strecken $CD = 18$ und $AD = 81$ gegeben. Aus diesen Angaben berechnet Bhaskara die Strecken $r = AO$ und OD. Damit kann er zeigen, dass sein angenommener Zusammenhang korrekt ist.

Ein Grundsatz der indischen Mathematik war, dass jede wissenschaftliche Disziplin, so auch die Mathematik, einen Zweck erfüllen musste. Selbstverwirklichung und Erlösung waren die wichtigsten Ziele im damaligen Indien. Der Weg dorthin führte vielfach über die Religion, daher wurden die Wissenschaften, die mit ihr in engem Zusammenhang standen, wie die Astronomie, mehr gefördert als andere.

Die Mathematik musste also einen Zweck erfüllen und tat dies lange Zeit bei religiösen Themen, wie bereits erwähnt wurde. Erst als sich die Mathematik langsam von der Religion zu lösen begann, wurden auch Probleme der alltäglichen Praxis behandelt. Doch immer noch war man darauf bedacht, einen Nutzen aus der Mathematik zu ziehen, nicht Mathematik nur um der Mathematik selbst willen zu betreiben, wie es die Griechen getan haben.

Während nun die Geometrie und die Beschäftigung mit geometrischen Objekten eher aus Gründen der Tradition gepflegt wurden, so entstanden Algebra und Arithmetik eben aus der Beschäftigung mit praktischen Problemen heraus. Auf diesen Gebieten liegen auch die wahren Stärken der indischen Mathematik. Brahmagupta etwa beschrieb allgemeine Lösungen für lineare quadratische Gleichungen und gab einen Lösungsweg an, um Gleichungen der Form $Nx^2 + 1 = y^2$ zu lösen, nachdem schon andere Mathematiker vor ihm die Lösungen zu speziellen N erhalten hatten. Er berechnete verschiedene unendliche Reihen und arbeitete sowohl mit positiven als auch negativen Zahlen und der Null in einer ähnlichen Weise wie wir heute. Er verwendet zur Interpolation gar Differenzen zweiter Ordnung (vgl. Kapitel 2.1.3.4, S. 35). All dies sowie die bei Pingala beginnende Kombinatorik findet bei Bhaskara II seinen Höhepunkt, der auf allen Gebieten überragende Leistungen hervorbrachte, dies jedoch erst im späten 12. Jahrhundert.

3 Geometrie in China

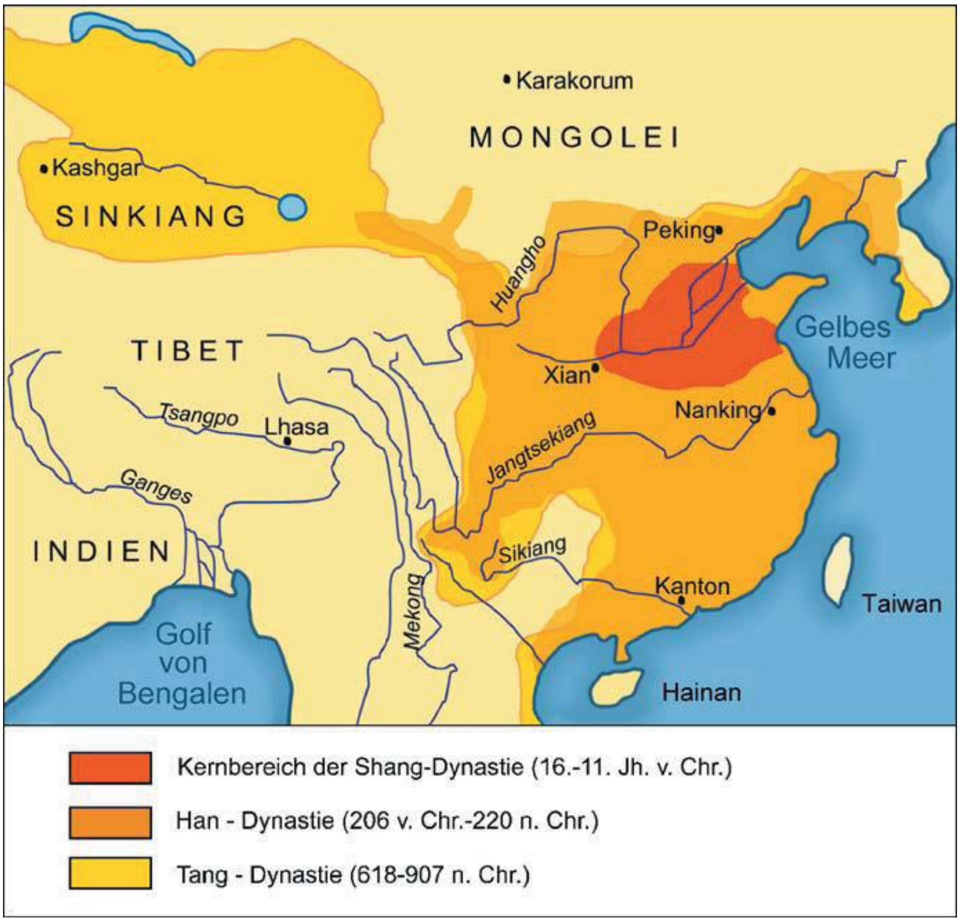

Abbildung 3.1: China im Altertum und Mittelalter (aus [Wussing 2008, S. 43])

3.1 Historischer Überblick über die chinesische Geometrie

3.1.1 Von den Anfängen bis zur Teilung Chinas in drei Reiche (220 n. Chr.)

3.1.1.1 Legenden und kurze Erwähnungen

Der Beginn der chinesischen Mathematik ist als Legende im *Shi Ben* (*The Book on Ancestries*), einem alten Buch über das prähistorische China, enthalten. Das Buch selbst ist nicht erhalten, doch wurde es in vielen anderen Werken zitiert. So wurde überliefert, dass der legendäre Gelbe Kaiser, der von 2698 - 2598 v. Chr. regiert haben soll, einigen seiner Untertanen unter anderem befohlen habe, die Gestirne zu beobachten, musikalische Stimmungen festzulegen, die Zeit zu ordnen und die Arithmetik zu schaffen. Letztere Aufgabe wurde Li Shou zuteil. Daneben gibt es einige weitere Legenden, in denen etwa die Erfindung des Gnomon und des Zirkels verschiedenen Einzelpersonen zugeschrieben wird.

All diese Legenden wurden erst in späterer Zeit geschaffen, doch ist in vielen Legenden wohl auch immer ein Körnchen Wahrheit zu finden. So lässt sich beispielsweise herauslesen, dass einfache Instrumente wie der Zirkel schon sehr früh verwendet wurden und somit in China ebenso wie in den anderen Kulturen des Altertums, etwa der ägyptischen, einfache Konzepte von Zahlen und geometrischen Figuren verstanden wurden.

Eines der ersten Werke, das für uns von Interesse ist, ist das *Kao Gong Ji* (*The Book of Crafts*), ein Teil der *Record of Rites of the Zhou Dynasty* - der Titel wird oft unterschiedlich übersetzt. Es wurde zur Zeit des Qi-Reiches während der Zeit der Streitenden Reiche (475 - 221 v. Chr.) verfasst und beinhaltet einfache Konstruktionstechniken sowie Informationen zu Winkeln und einfachen Messungen. Es finden sich etwa folgende verwendete Einheiten bei der Winkelmessung:

ju		$90°$
xuan	$\frac{1}{2}$ ju	$45°$
zhu	$\frac{3}{2}$ xuan	$67°\ 30'$
ke	$\frac{3}{2}$ zhu	$101°\ 15'$
qingzhe	$\frac{3}{2}$ke	$151°\ 52,5'$

Daneben wurden auch Bogenlängen benutzt, um Größen von Winkeln anzugeben.

Auch soll an dieser Stelle das *Book of Master Mo*, ein Teil des *Mozi*, Erwähnung finden. Darin werden unter anderem einige Definitionen für geometrische Konzepte angegeben, zum Beispiel:

„Flat: same height
Straight: three points collinear
Same length: match up exactly
Centre: point of the same length
Circle: one centre with same length“[1]

Meister Mo (ca. 470 - 390 v. Chr.) begründete den Mohismus, eine Schule der chinesischen Philosophie. Wie auch im antiken Griechenland stehen also die Anfänge der Mathematik und der Geometrie eng mit der Philosophie in Verbindung. Die Schule beschäftigte sich hauptsächlich mit sozialethischen Fragen, doch wurden später auch logische und erkenntnistheoretische Fragen behandelt. So stammen die oben genannten Definitionen wahrscheinlich von einem Schüler von Mo.

Es gibt in der chinesischen Literatur, soweit heute bekannt ist, keine vergleichbaren Erklärungen. Kein Mathematiker hat sich dieser Definitionen angenommen oder auf diese aufgebaut. Es hat sich keine deduktive Geometrie daraus entwickelt. Wahrscheinlich ist, dass Meister Mo und seine Schüler nur das Verlangen hatten, Begriffe festzulegen. In die-

[1] [Li und Du 1987]

sem Zusammenhang wurden auch diese mathematischen Begriffe abgehandelt, vielleicht auch nur, um als Beispiele für einfache Definitionen zu dienen.

3.1.1.2 Zhoubi suanjing

Nach der Zeit der Streitenden Reiche wurde das Reich 220 v. Chr. durch die Qin-Dynastie geeint, um bereits kurz darauf durch die Han-Dynastie (206 v. - 220 n. Chr.) ersetzt zu werden. Während dieser Zeit entstand das *Zhoubi suanjing* (*Klassische Arithmetik des Gnomon und die Kreisbahnen des Himmels*). Von der Grundintention her ein Buch über Astronomie und Kalenderrechnung, stellt es auch eine einfache Sammlung des mathematischen Wissens der damaligen Zeit dar. Die darin enthaltenen Texte stammen mit großer Sicherheit spätestens aus dem 4. Jahrhundert v. Chr., einige sollen sogar aus dem 11. Jahrhundert v. Chr. stammen. Dennoch sind sie erst später zu einem einzigen Werk zusammengesetzt worden.

Das *Zhoubi suanjing* setzt sich zusammen aus zwei Teilen, die jeweils in Dialogform gehalten sind. Im ersten Teil wird darauf eingegangen, wie die Gestirne, speziell die Sonne, mit Hilfe eines Gnomon beobachtet werden können. Dazu notwendige mathematische Hilfsmittel, wie der Satz von Pythagoras, werden hier behandelt. Der zweite Teil beschäftigt sich mit derselben Thematik, jedoch sind die Gesprächspartner andere.

Der Satz von Pythagoras wird in China auch Gougu-Theorem genannt, da der Satz dort wie folgt lautet:

$$Gou^2 + Gu^2 = Xian^2 \tag{3.1}$$

„Gu“ bedeutet in etwa Maß oder Skala und bezeichnet die Länge des vertikalen Stabes, der den Schatten wirft. Der geworfene Schatten bzw. dessen Länge wird „Gou“ genannt. Die Hypotenuse trägt den Namen „Xian“, das wörtlich Bogensehne bedeutet.

Im *Zhoubi suanjing* wird dies durch ein Verfahren bewiesen, das „Zusammenlegen von Rechtecken“ genannt wird. Es handelt sich hierbei jedoch nicht um einen deduktiven Beweis, wie wir das heute verstehen würden, doch es gilt als sicher, dass dies dennoch als allgemeingültig gedacht wurde. Zunächst wird ein Dreieck mit Seitenlängen 3, 4, 5 gezeichnet und darüber das Hypotenusenquadrat. Dann werden kongruente Dreiecke so an die Seiten des Quadrats angelegt, dass ein Quadrat der Seitenlänge 7 entsteht. Anschließend wird das äußere Quadrat in 7x7 Einheitsquadrate zerlegt (vgl. Abb. 3.2). Das innere Quadrat besteht aus 5x5 Einheitsquadraten, das äußere aus 7x7, bestehend aus 4 Rechtecken der Größe 3x4 und einem zentralen Einheitsquadrat. Allgemein gesprochen entspricht dies (3.2) und somit dem Pythagoreischen Lehrsatz.

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (b-a)^2 = a^2 + b^2 \tag{3.2}$$

Dieser wird in weiterer Folge in vielen Beispielen zur Vermessung von Höhen, Tiefen und Entfernungen in der Landschaft verwendet.

Daneben finden sich im *Zhoubi suanjing* hauptsächlich Beispiele zu Berechnungen im Zusammenhang mit der Astronomie und komplexe Bruchrechnungen. Diese wurden mit Hilfe von Rechenstäbchen durchgeführt. Es soll aber im Rahmen dieser Arbeit nicht näher darauf eingegangen werden.

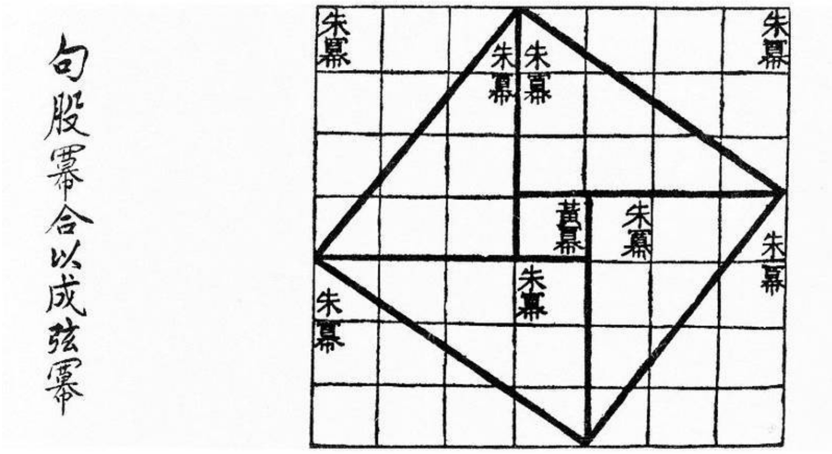

Abbildung 3.2: Der Satz von Pythagoras im *Zhoubi suanjing*. Der Satz zur Linken bedeutet: „The sum of the squares of lengths of altitude and base is the hypotenuse's length squared.“ (aus [Needham 1986, S. 22])

3.1.1.3 Jiuzhang suanshu

Das *Jiuzhang suanshu* (*Neun Bücher arithmetischer Technik*) ist womöglich eines der bekanntesten mathematischen Bücher der chinesischen Literatur überhaupt. Die älteste erhaltene Fassung ist diejenige von Liu Hui (ca. 220 - 280 n. Chr.). Es wurde mit hoher Wahrscheinlichkeit in der Frühzeit der Han-Dynastie (202 v. - 9 n. Chr.) verfasst und stellt ebenfalls eine Sammlung des mathematischen Wissens dar. Es gilt als sicher, dass viele Autoren über mehrere Jahrhunderte daran gearbeitet, es immer wieder überarbeitet und verändert haben. Erst nach Liu Hui wurde das Werk nicht mehr abgeändert. Im Gegensatz zum *Zhoubi suanjing* ist das *Jiuzhang suanshu* jedoch ein rein mathematischer Text und damit ist auch die Mathematik tiefgehender. Dennoch ist eine Verwandtschaft der beiden Bücher zu bemerken, speziell in Buch IX. Insgesamt finden sich 246 Aufgaben in den neun Büchern, teils zusammengefasst zu Gruppen des selben Aufgabentyps, gemeinsam mit einem allgemeinen Lösungsweg für jede dieser Gruppen.

Das *Jiuzhang suanshu* ist eines der einflussreichsten Werke der chinesischen Mathematik, vergleichbar mit Euklids *Elementen* für die hellenistische Mathematik. Das Werk besteht aus verschiedenen Dialogen, Probleme werden in Fragen des einen Gesprächspartners vorgestellt, der andere gibt die Lösungswege. Man sieht, dass die Lösung von Problemen induktiv erarbeitet wird und nicht deduktiv wie in der griechischen Mathematik. Dieser Stil wurde von beinahe allen späteren Autoren verwendet.

Wie der Titel schon sagt, ist das *Jiuzhang suanshu* in neun Bücher unterteilt. Buch I behandelt die Ausmessung von Feldern. Neben der Bruchrechnung geht es hier natürlich um die Berechnung von Flächeninhalten von ebenen geometrischen Figuren wie Rechteck, Dreieck, Trapez, Kreis, Kreissegment etc. So wird zum Beispiel der Flächeninhalt des Kreises richtig angegeben als $A = \frac{ud}{2}$, aber auch falsch als $A = \frac{3d^2}{4}$ und $A = \frac{u^2}{12}$.

In Buch II und Buch III werden Aufgaben der Praxis erörtert, die allesamt mit Hilfe von Proportionen gelöst werden können. Buch IV erklärt die Berechnung von Quadrat- und Kubikwurzeln an Hand von Beispielen aus der Geometrie. So ist beispielsweise die Fläche eines Quadrats gegeben und die Seite gesucht. In diesem Zusammenhang finden sich auch einfache Flächenverwandlungen.

Buch V, das sich im Grunde mit der Errichtung verschiedener Bauten beschäftigt, beinhaltet die Berechnung der Volumina einiger geometrischer Grundkörper, wie Quader, Zylinder, Kegel, Kugel und Pyramiden verschiedener Grundfläche sowie komplizierterer Objekte.

In Buch VI werden Probleme zur gerechten Steuereinschätzung behandelt. Buch VII enthält Probleme zu linearen Gleichungen bzw. Gleichungssystemen und zur linearen Interpolation. In Buch VIII wird eine Art Vorläufer der Matrizenrechnung zur Lösung von Systemen linearer Gleichungen verwendet, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll. Für nähere Information hierzu siehe [Li und Du 1987, S. 46ff].

In Buch IX wird der Satz des Pythagoras für die Lösung verschiedener Aufgaben verwendet und eine Methode zur Lösung der quadratischen Gleichung angegeben. Bekannt ist das Problem des geknickten Bambus. Ein Bambusrohr bekannter Höhe ist so geknickt, dass die Spitze den Boden in einer gegebenen Entfernung vom Stamm berührt. Gesucht ist die Höhe der Bruchstelle.

Sämtliche Aufgaben sind der Praxis entnommen, zumeist Probleme, denen Verwaltungsbeamte in der Praxis begegnen können, oder witzige Beispiele, womöglich um die Lehre der Werke amüsanter zu machen. Eine dieser Aufgaben soll an dieser Stelle in heutiger Sprache vorgestellt werden:

Eine Stadt mit quadratischer Grundfläche (vgl. Abb. 3.3) ist von einer Stadtmauer umgeben und hat auf jeder Seite genau in der Mitte ein Tor. 20 bu („Schritt“, $\approx 1,7m$) genau nördlich des nördlichen Tores steht ein Baum. Wenn man nun vom südlichen Tor aus 14 bu nach Süden und anschließend 1775 bu nach Westen geht, dann kommt der Baum bei der nordöstlichen Ecke der Stadt gerade ins Blickfeld. Nun soll die Länge der Stadtmauer berechnet werden. Dies wird zurückgeführt auf die Lösung einer quadratischen Gleichung. Es wird aber nur eine Regel zur Berechnung der Lösung angegeben, jedoch nicht, wie man zu dieser Regel kommt.

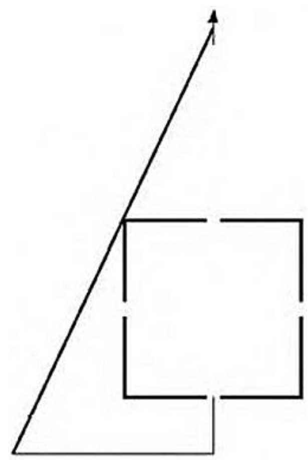

Abbildung 3.3: Beispiel aus Buch IX

3.1.2 Geometrie während der Zeit der Drei Reiche, der Jin und den Nördlichen und Südlichen Dynastien (221 - 589)

3.1.2.1 Zhao Shuang

Die Mathematik in China erlebte in den Jahrhunderten nach der Zeit der Streitenden Reiche eine Blütezeit. Der erste erwähnenswerte Mathematiker ist Zhao Shuang, der vermutlich im 3. Jahrhundert gelebt und einen Kommentar zum *Zhoubi suanjing*, das *Gougu yuan fang tu zhu* (*The Illustrated Commentary on the Right Triangle, Circle and Square*), verfasst hat. Viel ist über Zhao Shuang leider nicht bekannt.

Der Kommentar selbst ist mit 500 Zeichen sehr kurz gehalten und beinhaltet 21 Theoreme zum rechtwinkeligen Dreieck, dem Satz des Pythagoras und weiteren Zusammenhängen zwischen den Dreiecksseiten. Dabei kommen auch quadratische Gleichungen in den Formen

$$x^2 + px = q \tag{3.3}$$
$$-x^2 + px = q \tag{3.4}$$

vor, die auf ähnliche Art und Weise gelöst werden, wie es arabische Mathematiker im Mittelalter getan haben (Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat). Neu in der chinesischen Mathematik ist die direkte Darstellung der Gleichungen durch geometrische Figuren. Leider sind keine Illustrationen erhalten geblieben. Wir wissen von ihnen nur aufgrund von Verweisen anderer Autoren.

3.1.2.2 Liu Hui

Liu Hui ist einer der bekanntesten chinesischen Mathematiker überhaupt. Über sein Leben ist so gut wie nichts bekannt, nur dass er im Wei-Reich, einem der drei großen Reiche der Zeit von 221 - 280, lebte. Seine bekanntesten Werke sind der Kommentar zum *Jiuzhang suanshu* und das *Haidao suanjing*. Das *Jiuzhang suanshu* wurde nach seiner Kommentierung verständlicher und nicht mehr verändert, während das *Haidao suanjing* eine Weiterführung einiger Gebiete des *Jiuzhang suanshu* ist, selbst aber nicht dazugehört.

Liu Hui gab in seinem Kommentar einige Herleitungen bzw. die Herkunft einiger Formeln an und berichtigt einige falsche Annahmen, etwa diejenige, dass das Volumen einer Kugel gleich drei Viertel des Volumens des umschriebenen Zylinders ist. Er selbst zeigte, dass das Volumen einer Kugel nämlich gleich drei Viertel des diese umgebenden Durchdringungskörpers (vgl. Abb. 3.4) zweier aufeinander senkrechter Zylinder ist. Der chinesische Fachbegriff für diesen Körper bedeutet in etwa „Deckel mit quadratischer Grundfläche“ (vgl. [Gericke 2004, S. 174]) und ist wohl deswegen entstanden, weil diese Figur bei chinesischen Gefäßen oft vorkommt.

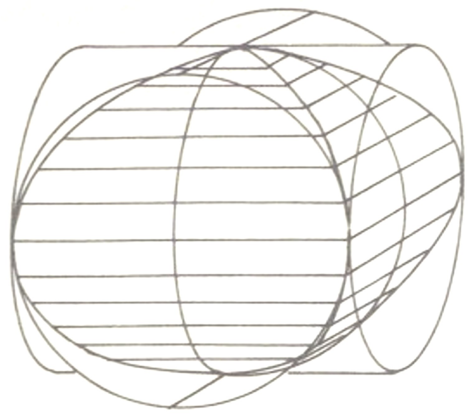

Abbildung 3.4: „Deckel mit quadratischer Grundfläche“ (aus [Gericke 2004, S.175])

Liu Hui benutzte dazu die erst viel später von Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647) begründete Argumentation: In jeder Ebene parallel zu den Zylinderachsen wird der Durchdringungskörper nach einem dem Kugelkreis umschriebenen Quadrat geschnitten. Unter der Annahme $\pi = 3$ ergibt sich daher der Wert des Verhältnisses der Volumina der Kugel und des Durchdringungskörpers zu 3 : 4.

Für viele Berechnungen im *Jiuzhang suanshu* gab Liu Hui anschauliche graphische Erklärungen. Ein schönes Beispiel dafür ist das Problem, ein Quadrat in ein gegebenes rechtwinkeliges Dreieck einzuschreiben, für das Liu Hui eine Graphik in der Art von Abbildung 3.5 gegeben hat. Auf ähnliche Weise geht er zur Berechnung der Volumina von einigen Körpern vor und listet auf, aus welchen und wie vielen Grundobjekten diese zusammengesetzt werden. Ein Beispiel einer derartigen Zerlegung ist in Abbildung 3.6 zu sehen.

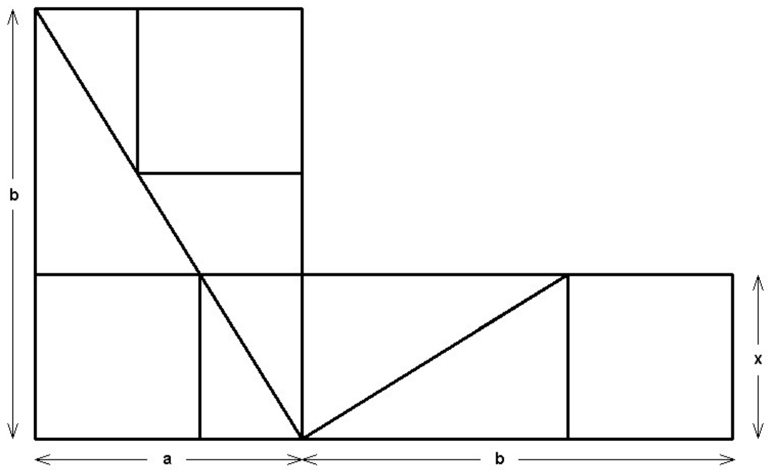

Abbildung 3.5: Patchwork Lösung Liu Huis

Der Kommentar enthält eine Berechnung von π auf bis dahin weltweit unbekannte Genauigkeit durch Einschreiben von regelmäßigen Polygonen bis hin zum 3072-Eck. Er erkannte, dass die Fläche des eingeschriebenen Polygons sich immer mehr der Fläche des Kreises nähert. Außerdem zeigte er, dass man die Fläche eines regelmäßigen 4n-Polygons berechnen kann, wenn man nur die Fläche des regelmäßigen 2n-Polygons kennt, wie man leicht an Abbildung 3.7 erkennen kann. Bereits im *Jiuzhang suanshu* ist zu finden, dass die Fläche eines regelmäßigen Polygons durch die Multiplikation der Hälfte des Umfangs mit der Hälfte des Durchmessers gewonnen werden kann. Damit ergibt sich $A_{4n} = r \cdot \frac{2nl_{2n}}{2} = 2n \cdot \frac{rl_{2n}}{2}$, wobei $\frac{rl_{2n}}{2}$ die Fläche des Vierecks ACBM ist. Außerdem folgt aus dem Satz des Pythagoras auch sofort l_{4n}.

Damit berechnete Liu Hui folgende Schranken für die Kreisfläche und damit für π:

$$A_{2n} < A < A_{2n} + (A_{2n} - A_n) \tag{3.5}$$

Damit erhielt er für ein 192-Eck die Schranken

$$3,14\frac{64}{62500} < \pi < 3,14\frac{169}{62500} \tag{3.6}$$

und danach mittels eines 3072-Ecks die Näherung $\pi = \frac{3927}{1250} = 3,1416$, den zur damaligen Zeit weltweit besten Näherungswert für π. Die Methode ähnelt der Methode von Archimedes, ist jedoch einfacher, da es genügt, ein regelmäßiges Polygon einzuschreiben. Archimedes arbeitete mit einem eingeschriebenen und einem umgeschriebenen regelmäßigen Polygon. An dieser Stelle sei erwähnt, dass Liu Hui erkannt hatte, dass dieses Verfahren, unendlich oft angewendet, zum richtigen Ergebnis führen würde. Somit vollzog er gedanklich einen Grenzübergang. Mit einem ähnlichen Gedankengang berechnete Liu Hui den Flächeninhalt eines Kreissegments. Die im *Jiuzhang suanshu* angegebene Formel erkannte er als nur auf den Spezialfall eines Halbkreises anwendbar, und selbst dann nur als Näherung.

Liu Hui verfasste auch das *Haidao suanjing* (*Sea Island Mathematical Manual*). Dies stellt im Prinzip eine Weiterführung seines eigenen Kommentars zum Kapitel über den Satz des Pythagoras dar und beschäftigt sich mit Vermessungsaufgaben. Da es nur als Ergänzung gedacht war, ist die Zahl der Aufgaben mit neun recht gering. Jede von diesen wird mit der Methode der doppelten Messungen gelöst.

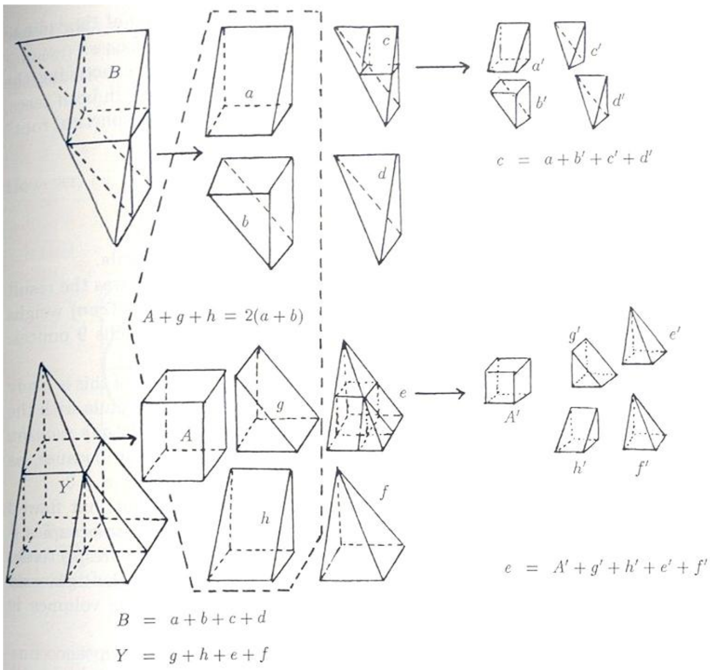

Abbildung 3.6: Liu Huis Methode zur Berechnung des Volumens einer yangma Pyramide. (aus [MARTZLOFF 1997, S. 285])

Bei der ersten Aufgabe im *Haidao suanjing* sollen die Höhe x und Entfernung y einer Insel von der Küste aus bestimmt werden (vgl. Abb. 3.8 auf S. 57). Nach Liu Hui geht man folgendermaßen vor: Zunächst werden zwei Stangen in einer Linie zur Insel errichtet, eine weiter entfernt als die andere. Länge h der Stangen und Entfernung d der beiden voneinander seien bekannt. Anschließend geht man von den beiden Stangen so weit weg, bis der höchste Punkt der Insel und die Spitze der Stange in einer Linie liegen, und misst die Entfernungen a_1, a_2 von dort zur jeweiligen Stange. Durch einfache Zusammenhänge (ähnliche Dreiecke) ergibt sich:

$$x = \frac{d}{a_2 - a_1} \cdot h + h \tag{3.7}$$

$$y = \frac{d}{a_2 - a_1} \cdot a_1. \tag{3.8}$$

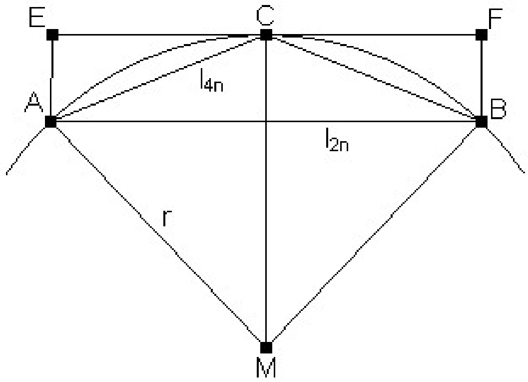

Abbildung 3.7: Zur Methode der Kreisteilung

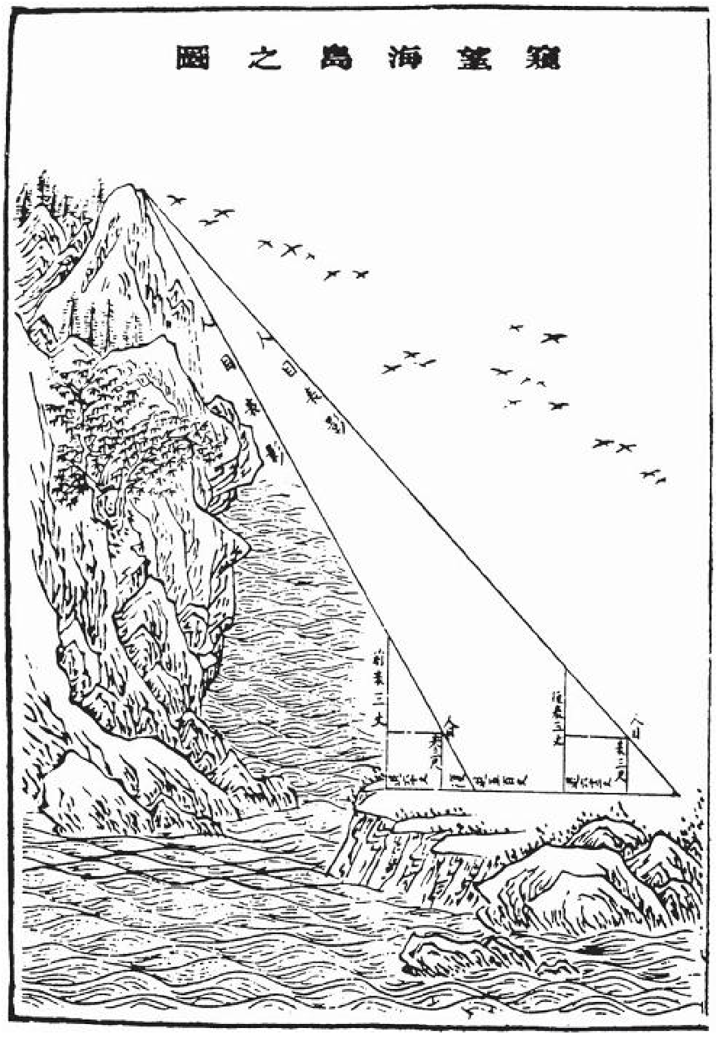

Abbildung 3.8: Zur Methode der doppelten Messungen. Blockdruck aus der Enzyklopädie *Tu Shu Ji Chen* (1726) (aus [Wussing 2008, S. 61])

Die anderen Aufgaben verwenden dasselbe Prinzip.

Oft wurde das *Haidao suanjing* als Beginn der Trigonometrie in China genannt, was jedoch nicht korrekt ist, da weder Winkelfunktionen noch Eigenschaften von Winkeln zur Lösung von Problemen verwendet werden.

3.1.2.3 Zu Chongzhi

Zu Chongzhi (429 - 500) war Mathematiker während der Periode der Nördlichen und Südlichen Dynastien. Da sowohl sein Vater als auch sein Großvater Beamter im Dienste der südlichen Dynastie waren, wird angenommen, dass auch er im Süden gearbeitet hat. Manchmal wird er auch unter dem Namen Wenyuan genannt.

Zu Chongzhi war ein Universalgelehrter. Einen Großteil seiner Jugendzeit verbrachte er damit, ältere mathematische Schriften zu studieren und Fehler darin zu korrigieren. Er überarbeitete den damaligen Kalender und erstellte schließlich einen ganz neuen. Daneben war er geschickter Erfinder, Schriftsteller und interessierte sich für Politik. Von seinen 51 Werken ist leider kein einziges erhalten. Von größter Bedeutung für die Geschichte der Geometrie ist mit Sicherheit das *Zhui shu* (*Methoden der Interpolation*), aber auch sein Kommentar zum *Jiuzhang suanshu* und andere Bücher sind erwähnenswert. Wie man späteren Autoren entnehmen kann, zählten seine Werke zu den am schwierigsten zu verstehenden. Sie waren ihrer Zeit weit voraus, und damit für seine Zeitgenossen zum Teil sehr verwirrend. Leider kann dies aus heutiger Sicht kaum mehr beurteilt werden. Einzig Fragmente zur Berechnung von π und zur Berechnung des Volumens einer Kugel sind überliefert worden.

Es ist nicht klar, wie Zu Chongzhi zu seiner genauen Berechnung von π gekommen ist, aber es wird vermutet, dass er dieselbe Methode verwendet hat wie Liu Hui, nur weiter gerechnet bis zu einem regelmäßigen 24756-Eck. Jedenfalls erhielt er die Schranken

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927 \tag{3.9}$$

und gab für praktische Berechnungen die Näherungswerte $\pi = \frac{22}{7}$ und den viel besseren Wert $\pi = \frac{355}{113} = 3,1415929$ an. Damit übertraf er den Wert von Liu Hui um weitere drei korrekte Dezimalstellen. Eine derartige Genauigkeit wurde in Europa erst über 1000 Jahre später von dem deutschen Mathematiker Otho (etwa 1548 - 1603) erreicht.

Für das Volumen der Kugel erhielt Zu Chongzhi gemeinsam mit seinem Sohn Zu Geng als erster Mathematiker im antiken China die korrekte Formel $V = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} d^3$. Dazu entwickelten sie die Methode Liu Huis, die dem Cavalierischen Prinzip entspricht, weiter (vgl. Kap. 3.1.2.2). Die genaue Herleitung ist unter anderem in [Li und Du 1987, S. 85ff] zu finden.

3.1.3 Entwicklung während der Sui und Tang Dynastien (581 - 901)

Während China unter der Sui Dynastie wiedervereinigt wurde und in weiterer Folge eine kurze Blütezeit erlebte, stagnierte die Entwicklung der Mathematik in weiten Bereichen zu dieser Zeit. Es entstanden erste Kontakte zu indischen Mathematikern, die im astronomischen Büro der chinesischen Hauptstadt tätig waren. Durch deren Einfluss begann wahrscheinlich die Entwicklung einer frühen Form der Trigonometrie in China.

Nach Jahrhunderten stetiger mathematischer Entwicklung waren viele Werke entstanden, von denen heute nur noch wenige erhalten sind. Von ihrer Existenz wissen wir nur durch die Aufzählung ihrer Titel in historischen Werken der jeweiligen Zeit, die überliefert worden sind. Das wohl bekannteste ist das *Shi bu suanjing* (Die Zehn Mathematischen Klassiker). Es besteht aus 12 einzelnen Werken, gesammelt, zugelassen durch den Kaiser als Lehrbuch und kommentiert durch den Mathematiker Li Chunfeng (602 - 670). Einige dieser 12 Werke sind bereits hier erwähnt worden. Tabelle 3.1 auf S. 59 zeigt die vollständige Liste.

Die Inhalte der meisten dieser Werke haben nichts mit Geometrie zu tun, sondern sind Aussagen zu Arithmetik, Algebra, Numerik und Zahlentheorie. Die Bücher, die die Entwicklung der Geometrie in China vorangetrieben haben, wurden bereits näher beschrieben.

Damit endet der Überblick über die Erkenntnisse auf dem Gebiet der Geometrie im antiken China. Die Entwicklung ging in China zwar noch einige Jahrhunderte beinahe ohne Einfluss der westlichen Mathematik voran, jedoch soll dies im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr behandelt werden.

Titel	**Autor**	**Kommentator**	**Zeit der Verfassung**
Zhoubi suanjing	Unknown	Zhao Shuang, Zhen Luan, Li Chunfeng	1. Jh. v. Chr. - 1. Jh. n. Chr.
Jiuzhang suanshu	Unknown	Liu Hui, Xu Yue, Li Chunfeng	202 v. Chr. - 9 n. Chr.
Haidao suanjing	Liu Hui		Ende 3. Jh.
Sunzi suanjing(*Master Sun's Mathematical Manual*)	Unknown	Li Chunfeng	etwa 5. Jh.
Wucao suanjing (*Mathematical Manual of the Five Government Departments*)	Unknown	Li Chunfeng	etwa 5. Jh.
Xiaohou Yang suanjing (*Xiaohou Yang's Mathematical Manual*)	Unknown		Unknown
Zhang Qiujian suanjing (*Zhang Qiujian's Mathematical Manual*)	Unknown	Zhen Luan, Li Chunfeng, Liu Xiaosun	um 466 - 485
Wujing suanshu (*Arithmetic Methods in the Five Classics*)	Unknown	Li Chunfeng, Zhen Luan	etwa 566
Jigu suanjing (*Continuation of Ancient Mathematics*)	Wang Xiaotong	Li Chunfeng	7. Jh.
Shushu jiyi (*Notes on Traditions of Arithmetic Methods*)	Xu Yue	Zhen Luan	3. Jh.
Zhui shu	Zu Chongzhi	Li Chunfeng	5. Jh.
Sandeng shu (*Art of the Three Degrees; Notations of Large Numbers*)	Dong Quan	Zhen Luan	6. - 7. Jh.

Tabelle 3.1: Die Zehn Mathematischen Klassiker

3.2 Kulturhistorischer Hintergrund der chinesischen Mathematik

3.2.1 Der Einfluss der Philosophie auf die Entstehung der Mathematik

> „Die chinesische Philosophie unterschied sich von der hellenischen dadurch, dass sie sich von Anfang an vorzugsweise mit dem praktischen Leben und erst in zweiter Linie mit Wissenschaft und Metaphysik beschäftigte.“[2]

Bereits sehr früh entstand im Raum des heutigen China eine hoch entwickelte Kultur, die bereits im 2. Jahrtausend v. Chr. für die damalige Zeit bedeutende Leistungen in Astronomie und damit zusammenhängender Arithmetik erbrachte. Nicht ohne Grund setzt die Legende über die Erfindung der Arithmetik diese zeitlich in der Mitte des 3. vorchristlichen Jahrtausends an. Die Entwicklung der Mathematik ging im 1. Jahrtausend v. Chr. zwar langsam, aber doch stetig voran.

Die Zhou Dynastie (1045 - 256 v. Chr.) herrschte zu dieser Zeit über China bzw. über einen großen Teil des heutigen Gebietes. Ihre Vormachtstellung konnten sie jedoch nicht halten, denn ihr Reich zerfiel mit der Zeit in eine große Anzahl kleinerer Feudalstaaten, die sich untereinander bekriegten, nur um schließlich wieder unter einer Macht vereinigt zu werden.

Während dieser Zeit traten einige große Philosophen in Erscheinung, wie Konfuzius (551-479 v. Chr.), Laotse (6./5. Jh. v. Chr.) und Meister Mo (ca. 470 - 390 v. Chr.), um nur einige zu nennen. Wie das Zitat am Beginn des Kapitels schon sagt, waren die Philosophen aber eher mit praktischen Problemen des alltäglichen Lebens beschäftigt, als mit Wissenschaften. Diese übten somit indirekt auch Einfluss auf die Wissenschaften aus, denn sämtliche Dinge wurden zunächst und hauptsächlich von einem praktischen Standpunkt aus betrachtet, im Gegensatz zu den Wissenschaften in der Tradition der Griechen.

Einzige Ausnahme ist der Kanon der Mohisten, der, wie bereits in Kapitel 3.1.1.1 auf S. 49 erwähnt, einige Definitionen enthält, sowohl zu geometrischen, als auch zu anderen, nicht mathematischen Begriffen. Der Ansatz wurde aber in der chinesischen Mathematik nicht weiter verfolgt, es findet sich kein einziger Verweis auf diese Definitionen in erhaltenen mathematischen Werken.

In den Werken der chinesischen Logiker wie Gongsun Long (ca. 325 - 250 v. Chr.) finden sich andere Aussagen, die denen der Griechen sehr ähneln. Ein Beispiel: „A one foot-long stick, though half of it is taken away each day, cannot be exhausted in ten thousand generations.“[3] Das bedeutet nichts anderes, als dass eine endliche Strecke dargestellt werden kann als Summe von unendlich vielen endlichen Teilstrecken. Dies ist ähnlich formuliert auch bei den Paradoxa von Zenon zu finden.

Interessant ist die Tatsache, dass die Astrologie, die in China traditionell einen hohen Stellenwert eingenommen hat und immer wieder Blütezeiten erlebte, in astronomischen und mathematischen Werken nicht einmal erwähnt wird. Es ist beinahe auffällig, dass die Bücher zur Astronomie keine Astrologie enthalten. Man muss daher annehmen, dass die

[2] Toynbee nach [Gericke 2004, S. 171]
[3] [Li und Du 1987, S. 21]

Autoren darauf bedacht waren, ihre Beobachtungen und Berechnungen ohne zusätzliche astrologische Interpretationen und ohne jeden Aberglauben sachlich aufzubereiten. Dazu gibt es nur eine einzige Ausnahme: Das *Jiuzhang suanshu* besteht aus neun Büchern, das *Haidao suanjing* aus neun Aufgaben. Neun ist eine wichtige Zahl der alten chinesischen Kosmographie. Hier ist noch der Einfluss der astrologischen Tradition spürbar.

3.2.2 Der Einfluss des Jiuzhang suanshu

> „So one can say that the Nine Chapters on the Mathematical Art was formed by the colletive effort and wisdom of mathematicians of several centuries“[4].

221 v. Chr vereinigte die Qin Dynastie China, konnte dies aber nur bis 206 v. Chr. regieren. Dennoch fällt gerade in diese Zeit die wohl berühmteste Bücherverbrennung Chinas. Diese fand 213 v. Chr. statt. Der Kaiser wollte damit jegliche Kritik an seiner Regierungsform unterbinden. Besonders traf es die Schriften philosophischer Schulen, aber nicht Aufzeichnungen zur Medizin, Landwirtschaft, Weissagung und Alchemie. Doch nur Schriften und Bücher in Privatbesitz waren von der Verbrennung betroffen, die am Kaiserhof vorhandene Bibliothek blieb als ganzes verschont. Leider brannte die Staatsbibliothek nur wenige Jahre später nieder, was den Verlust an Schriften aus früherer Zeit noch vergrößerte.

Während der Han Dynastie, die 206 v. Chr. an die Macht kam, kam es dann zu einem großen Anstieg der Produktionskapazität. So benötigte etwa eine verbesserte Landwirtschaft bessere Vorhersagen der Jahreszeiten und damit vermehrte und genauere Studien der Kalenderrechnung und der Astronomie. Dies förderte auch die mathematische Forschung. So stammt auch die heute erhaltene Form des *Zhoubi suanjing* aus dieser Periode.

Große Teile wurden noch vor der Zeit der Streitenden Reiche (475 - 221 v. Chr.) verfasst und sind somit Zeugnisse der frühesten mathematischen Kenntnisse im antiken China. Darin lässt sich sehr schön die Bedeutung der Mathematik in dieser Zeit erkennen. Das Werk ist im Grunde ein Buch über Astronomie und Kalenderrechnung. Die gesamte darin vorkommende Mathematik stellt nur ein dafür notwendiges Hilfsmittel dar. Es gibt keine deduktiven Beweise der Art, wie man sie von den Griechen kennt, keine theoretischen Konzepte, sondern nur Mathematik als praktisches Mittel zum Zweck.

Zwar ist im *Zhoubi suanjing* der älteste chinesische Beweis enthalten - zum Satz von Pythagoras - doch ist dieser, wie viele andere, die folgen sollten, eher eine anschauliche Konstruktion mit einigen Überlegungen, die implizit algebraische Umformungen beinhalten. Damit ist auch bereits ein Vorgeschmack auf die Richtung gegeben, in die sich speziell die Geometrie in China entwickelte: stets an praktischen Problemen orientiert und möglichst unter algebraischen Blickwinkeln betrachtet. Die chinesische Geometrie ging damit also gerade den umgekehrten Weg, den die griechische bestritt. Bei den Griechen wurde stets versucht, algebraische Probleme mit geometrischen Mitteln zu lösen, nicht umgekehrt.

Wie nahe sich Mathematik und Astronomie standen, ist unter anderem auch daran zu erkennen, dass sowohl für Mathematiker als auch für Astronomen derselbe Begriff „chouren“ in China verwendet wurde. „chou“ selbst bedeutet nichts Anderes als „das Land vermessen“.

[4][Li und Du 1987, S. 35]

Wie auch beim *Zhoubi suanjing* ist der Autor des *Jiuzhang suanshu* nicht bekannt. Liu Hui beschreibt jedoch, dass bei der Bücherverbrennung von 213 v. Chr. auch das *Jiuzhang suanshu* zum Teil verloren ging. Marquis Zhang Cang (? - 152 v. Chr.) von den Han und andere sollen dann die fehlenden Teile wieder ergänzt und zu dem Buch umgeformt haben, das Liu Hui kommentiert hat.

Im Gegensatz zum *Zhoubi suanjing* ist das *Jiuzhang suanshu* ein rein mathematisches Werk und stellt im Prinzip das gesamte mathematische Wissen dar, das in den Jahrhunderten davor zusammengetragen worden ist. Nicht nur in dieser Beziehung ist das *Jiuzhang suanshu* eine Besonderheit, sondern auch in dem immensen Einfluss, den es auf die gesamte folgende chinesische Mathematik ausgeübt hat, vergleichbar mit dem Einfluss von Euklids *Elementen* auf die griechische Mathematik.

Zum einen wurde der Aufbau der *Neun Bücher* stets als Vorbild für spätere Werke genommen: Erst wird das Problem vorgestellt, dann folgt die Lösung des Problems. Zum anderen ist an den Problemlösungen zu erkennen, dass nicht deduktiv - wie bei den Griechen - sondern induktiv vorgegangen wird. Auch diese Herangehensweise blieb späteren Mathematikern erhalten.

Die Problemstellungen im *Jiuzhang suanshu* sind stets praktischer Natur. „On reading it, one has the impression that the readers for whom it was intended had very specific interests, since the theme of surveying fields, trading in grain, taxes and excavation works crop up time and again.“[5] Nicht nur in der Aufgabenthematik zeigt sich der Praxisbezug der chinesischen Mathematik, es finden sich auch immer wieder neben genauen, dafür etwas komplizierten Berechnungen von Flächen einfacher zu berechnende Näherungen, die für den Alltag der Landvermesser von großer Bedeutung waren.

3.2.3 Liu Hui

> „For the first time, it seems importance was attached to proofs in their own right, to the extent that trouble was taken to record these in writing.“[6]

Mit dem *Zhoubi suanjing* und dem *Jiuzhang suanshu* hatte die Mathematik eine Grundlage, auf die die späteren Mathematiker aufbauen konnten. Mit dem 3. Jahrhundert n. Chr. begann die chinesische Mathematik in eine theoretische Phase zu treten. Doch diese beiden grundlegenden Werke wurden so sehr verehrt, dass sie nicht mehr verändert, sondern nur noch kommentiert wurden. Sie wurden sogar zum mathematischen Kanon in der Ausbildung erhoben.

Zhao Shuangs Kommentar bewegt sich nur im Bereich der im *Zhoubi suanjing* vorkommenden Mathematik und ist auch nur der erste von vielen Kommentaren zu den großen Werken der chinesischen Mathematik. Relevant für uns ist er besonders deswegen, weil Zhao Shuang der erste Autor ist, der namentlich bekannt ist.

Von großer Bedeutung ist Liu Huis Kommentar zum *Jiuzhang suanshu* und seine Fortführung *Haidao suanjing*. Leider sind andere seiner eigenen Werke nicht erhalten geblieben, doch schon diese beiden Werke zeigen ihre Wichtigkeit für die chinesische Mathematik und geben einen guten Einblick in die Vorgehensweise der Mathematiker.

Waren im *Jiuzhang suanshu* Methoden zur Lösung von Problemen gegeben, so waren die Erklärungen und Lösungswege zumeist sehr kurz. Liu Hui gab in seinem Kommentar

[5] [Martzloff 1997, S. 14]
[6] [Martzloff 1997, S. 14]

nun genau diese fehlenden Erklärungen und auch einige kurze Beweise und Beweisideen, um die Richtigkeit der Berechnungsmethoden darzulegen.

Er war seiner Zeit weit voraus. Seine Berechnungsmethoden, etwa von π und des Volumens der Kugel mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips waren sehr einfallsreich, auch wenn Letzteres erst von Zu Chongzhi endgültig zustande gebracht wurde. Zudem verwendete er einen Vorläufer des Grenzwertbegriffs und konnte damit auch auf ähnliche Art und Weise umgehen wie Archimedes.

Seine Beweise waren aufschlussreich, auch wenn sie nicht deduktiver, sondern induktiver Natur waren. Nichtsdestotrotz waren sie anschaulich, einfach und klar. Man betrachte die Aufgabe, den Radius eines in ein rechtwinkeliges Dreieck eingeschriebenen Kreises zu finden, von dem die Seiten a und b gegeben sind. Liu Hui zeigt anhand von Abbildung 3.9, dass der korrekte Durchmesser $d = \frac{2ab}{a+b+c}$ ist. Dazu werden einfach sämtliche vorkommenden Teildreiecke neu angeordnet, die gemeinsam die Fläche $a \cdot b$ haben, um auf ein Rechteck zu kommen, dessen Flächeninhalt $d \cdot (a + b + c)$ ist. Auf Grund der Gleichheit der beiden Flächen erhält man den oben genannten Durchmesser.

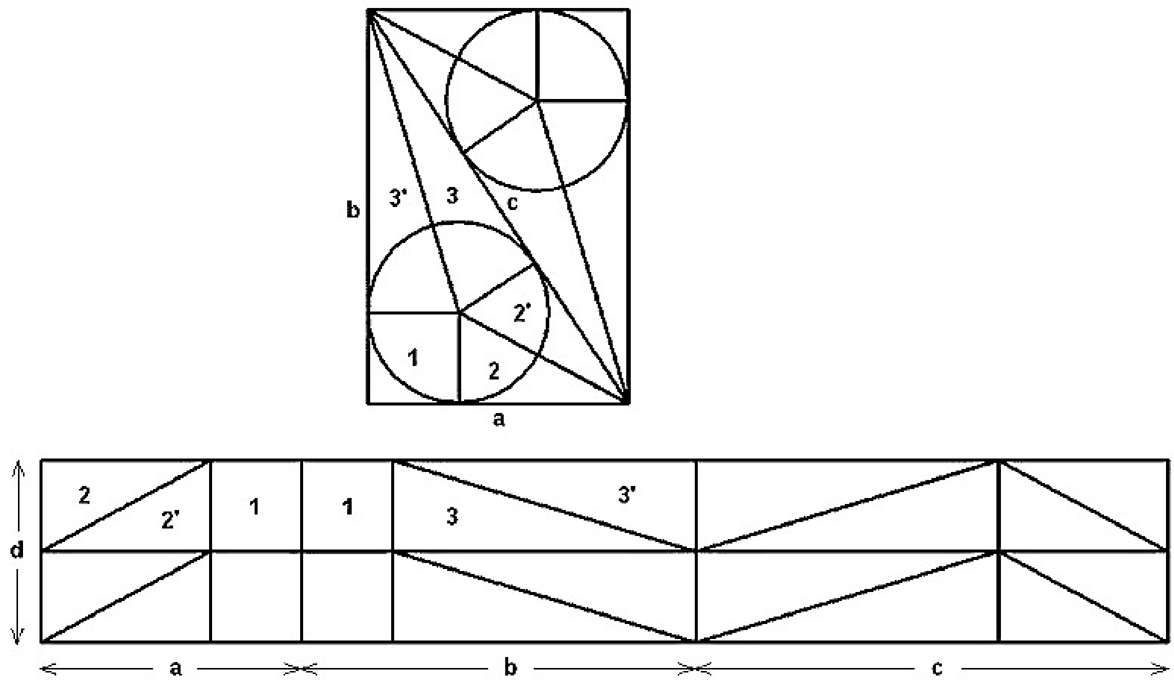

Abbildung 3.9: Patchwork Lösung Liu Huis 2

Daneben findet sich bei Liu Hui ein stetes Bestreben nach Anschaulichkeit und praktischem Nutzen. Immer wieder finden sich einfache Modelle und geometrisch nachvollziehbare Schlüsse zum besseren Verständnis der verschiedenen Probleme. Auch scheint er sich dessen bewusst gewesen zu sein, dass näherungsweise Berechnungen für die Praxis oft besser geeignet sind, da es einfacher war, sie etwa Vermessern oder Baumeistern beizubringen, die sich nicht viel mit Mathematik beschäftigten. Zu Chongzhi, der π dann etwa zweihundert Jahre später noch genauer berechnet hat, folgte ebenfalls diesem Bestreben, als er neben seiner genauen Berechnung von π noch die ungenauere Näherung $\pi = \frac{22}{7}$ angab, die ihm für alltägliche Berechnungen besser geeignet schien.

Gerade dieser Praxisbezug und diese Erklärungen zeugen auch von dem pädagogischen Charakter, der den meisten wissenschaftlichen Werken in China gemeinsam ist. Da das

Jiuzhang suanshu als Lehrbuch verwendet wurde und als schwer verständlich galt, ist es nur zu leicht zu verstehen, warum bessere Erklärungen in Kommentaren hinzugefügt wurden. Liu Hui formuliert dies selbst im Vorwort zu seinem Kommentar am besten: „[...] Liu Hui says that his commentary ‚is to analyze by words, to explain by diagrams, to give concise but complete principles and should be easily understood but not repetitous‘."[7]

Die mathematischen Leistungen von Liu Hui sind gerade im Hinblick auf den historischen Hintergrund interessant. In Griechenland konnten die großen Mathematiker Euklid, Apollonios und Archimedes ihre Werke während einer politisch im Prinzip stabilen Zeit verfassen. Gerade die Alexandrinischen Mathematiker hatten dadurch einen bedeutenden Vorteil gegenüber anderen. Doch in Liu Huis Lebenszeit fällt einer der wohl blutigsten Abschnitte der chinesischen Geschichte, die Zeit der Drei Reiche (220 - 280). Geprägt durch ständige Kriege und immer wieder neu auftretende Kriegsfürsten, gab es stets nur kurze, einige Jahre dauernde, friedliche Phasen. Nach einer Volkszählung in der Han-Zeit lebten in deren Gebiet etwa 50 Millionen Menschen, eine weitere Volkszählung in der Jin-Zeit, extrapoliert auf das gesamte damalige Gebiet der Han, ergab hingegen nur noch geschätzte 20 Millionen Einwohner.

Dass Liu Hui in einer so unsicheren Zeit auf einem so hohen Niveau mathematisch tätig sein konnte, ist an sich schon erstaunlich. Doch beinahe noch überraschender ist die Tatsache, dass die Zeit danach auch nicht ruhiger war. Bis zur Lebenszeit von Zu Chongzhi gab es die Jin Dynastie (265 - 420), geteilt in eine Östliche und eine Westliche, parallel dazu die Sechzehn Reiche (304 - 439) und anschließend die Südlichen und Nördlichen Dynastien, jeweils unterteilt in namentlich verschiedene Dynastien. Unzählige Herrscher wechselten einander ab, führten untereinander Kriege, besiegten ein Reich, nur um von einem anderen selbst besiegt zu werden. Die meisten Herrscher waren daher immer nur für wenige Jahre an der Macht. Trotz allem oder eher gerade deswegen entwickelte sich die Mathematik stetig weiter und erreichte mit Zu Chongzhi einen ersten Höhepunkt. Da besonders der Norden Chinas von den andauernden Kriegen betroffen war, wanderten viele Menschen in den Süden, was dort die Weiterentwicklung der Wirtschaft, Landwirtschaft und damit der Wissenschaft notwendig machte.

3.2.4 Die Kanonisierung der Mathematik in China

> „Kennzeichnend für beide Epochen der Mathematik in China, die antike und die mittelalterliche [...] ist eine Beonderheit: eine gewisse Anzahl von mathematischen Werken wurde zum Kanon erhoben, woran sich spätere Mathematiker zu halten hatten."[8]

Zu Chongzhi erarbeitete mit 33 Jahren einen neuen Kalender, der aber großes Interesse von einflussreichen Personen am örtlichen Herrscherhof der Da Ming Herrscher der Liu-Song Dynastie erregte, besonders von Dai Faxing, dem damaligen faktischen Regenten. „Dai Faxing and others contended that what had passed down through history was the product of Sages and therefore could not be amended but must remain unchanged through thousands of generations. They thought that astronomy and the making of calendars could not be altered by ordinary humans."[9] Zu Chongzhi widersprach dieser

[7] Liu Hui nach [Li und Du 1987, S. 70]
[8] [Li und Du 1987, S. 105]
[9] [Li und Du 1987, S. 81]

Meinung vehement und löste damit eine öffentliche Debatte über das Thema aus. Gerade deswegen wurde der neue Kalender nicht angenommen bis zum Jahre 510, 10 Jahre nach Zu Chongzhis Tod, dank der Beharrlichkeit seines Sohnes Zu Geng.

Trotz aller Bemühungen von Vater und Sohn Zu und auch trotz des frühen Todes von Dai Faxing setzte sich die Meinung Dai Faxings im Laufe des nächsten Jahrhunderts durch. Die bekannte Mathematik wurde in Form des *Shi bu suanjing* (*Die Zehn Mathematischen Klassiker*) zusammengefasst. Diese Bücher wurden als Lehrbücher an der kaiserlichen Akademie verwendet und es wurde sogar verboten, sie zu ändern, auch wenn immer wieder Kommentare verfasst wurden. Heute ist dies für uns von Vorteil, da die Werke wohl gerade deswegen überliefert wurden, wohingegen so viele andere verloren gingen.

Im antiken Griechenland wurden ebenso die Texte etwa von Euklid nicht mehr verändert, doch trafen diese Entscheidung die Autoren selbst aus Ehrfurcht vor ihren Vorgängern. In China wurde dies den Mathematikern mehr oder weniger aufgezwungen, da die Ausbildung staatlich kontrolliert wurde im Zuge des Unterrichts für Beamte.

Die *Zehn Mathematischen Klassiker* stellten bei ihrer Zusammenstellung einen Höhepunkt der Mathematik in China dar. Die nächsten knapp 400 Jahre geriet die bisher immer stetig voranschreitende Entwicklung ins Stocken und es wurde kaum Neues hervorgebracht, ähnlich wie die hellenistische Mathematik in der Zeit nach Christus. Dazu kamen politisch motivierte Entscheidungen während der Tang Dynastie, die dazu führten, dass Mathematik immer wieder abgeschafft und wieder eingeführt wurde, von einer Schule bzw. einer Akademie zur nächsten geschoben und überhaupt das System des Unterrichts und der Schulen immer wieder stark verändert wurde. So wurde zum Beispiel unter der Herrschaft von Xian Qing (658) die Mathematik aus folgendem Grund, zwei Jahre nach ihrer Einführung, wieder abgeschafft: „Since mathematics [...] only leads to trivial matters and everyone spezializes in their own way, it distorts the facts and it is therefore decreed that it shall be abolished.“[10] Doch die chinesische Mathematik konnte sich danach, etwa um das Jahr 1000, wieder erholen und bis ins 17. Jahrhundert großartige eigenständige Leistungen hervorbringen, bis schließlich die Jesuiten, allen voran Matteo Ricci, die griechische und europäische Mathematik nach China brachten. Doch auf die Entwicklung nach dem Jahr 1000 soll in dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden.

3.2.5 Äußere Einflüsse

> „In works on the Chinese sciences, no question has been touched on more often than that of the circulation of ideas.“[11]

Natürlich lässt sich die Frage nicht vermeiden, inwieweit andere Kulturen die chinesische Mathematik beeinflusst haben, doch die vielleicht überraschend scheinende Antwort ist, dass auf die chinesische Mathematik lange Zeit beinahe gar keine äußeren Einflüsse wirkten. Im Gegenteil sind viele heute gebräuchliche Ideen und Denkweisen von China nach Indien und Europa gekommen. Andere wurden in Europa erst Jahrhunderte später von Neuem hervorgebracht. Einige Beispiele (vgl. [Martzloff 1997, S. 89f]):

[10] [Li und Du 1987, S. 104]
[11] [Martzloff 1997, S. 89]

- Das Dezimalsystem kam erstmals im 14. Jh. v. Chr. in China vor, mit einer Leerstelle als 0 ab dem 4. Jh. v. Chr.

- Eine Vorgängerversion des Chinesischen Restsatzes[12] kommt im *Sunzi suanjing* (etwa 5. Jh.) vor (vgl. [Li und Du 1987, S. 93]) und stammt daher wohl aus dem 3. / 4. Jh.

- Der Dreisatz, also das Verfahren, aus drei gegebenen Werten eines Verhältnisses den vierten zu berechnen, kommt in Indien in genau derselben Form vor wie im *Jiuzhang suanshu*.

- Das Ziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln taucht in ähnlicher Form wie in China (1. Jh. v. Chr.) 700 Jahre später in Indien auf.

- Einige praktische geometrische Probleme, wie das Problem des geknickten Bambus (vgl. Kap. 3.1.1.3), tauchen identisch in Indien, etwa bei Bhaskara, und in Europa wieder auf.

Nach China kamen nur wenige Ideen, wie die Trigonometrie, aus Indien und später aus dem arabischen Raum. Erst im 16. Jahrhundert, mit den europäischen Missionaren, drang die euklidische Geometrie nach China vor, bis schließlich die eigenständige chinesische Mathematik einen Niedergang erlebte und von europäischen Einflüssen verdrängt wurde. Die gegenseitigen Einflüsse können heute natürlich nicht mehr mit hundertprozentiger Sicherheit nachvollzogen werden, daher sind alle diese Annahmen von Beeinflussungen etwas mit Vorsicht zu genießen.

3.2.6 Eine abschließende Charakterisierung der chinesischen Mathematik

> „For all that, it is impossible to stick to the traditional judgement according to which the whole of Chinese geometry is simply a conglomerate of empirical procedures and practices.“[13]

Es scheint auf den ersten Blick so, als würde sich die chinesische Mathematik immer nur mit denselben Problemen beschäftigen, nämlich solchen, ähnlich denen aus den Neun Büchern. Das ist aber nicht der Fall, denn man muss immer im Auge behalten, dass die Werke über viele Jahre hinweg entwickelt und die Inhalte nur langsam zusammengetragen wurden. Aufgrund der Unrichtigkeit vieler dieser Ergebnisse, mussten diese auch von späteren Autoren überarbeitet, korrigiert und so verbessert und übertroffen werden. Außerdem gab es immer wieder Zeiten, in denen die Überlieferung älterer Texte problematisch war. Daher mussten Autoren erst vieles von Neuem erlernen, bevor sie selbst neue Fragestellungen erarbeiten konnten.

Ein Merkmal, das fast allen mathematischen Werken eigen ist, ist der pädagogische Charakter, der auch zum Teil die Kanonisierung bedingt hat. Auch wird in den meisten

[12] Die heutige Version (entnommen [5]) lautet:
Seien $m_1, m_2, ..., m_r \in \mathbb{N}$ paarweise teilerfremd und $a_1, a_2, ..., a_r \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es eine Lösung des Kongrunenzensystems $x \equiv a_j \; mod \; m_j, 1 \leq j \leq r$, die $modulo \; m = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_r$ eindeutig ist.

[13] [Martzloff 1997, S. 276]

Vorwörtern explizit von den Autoren der praktische Nutzen hervorgehoben, den sie aus der Mathematik ziehen wollen. Außerdem finden sich in Werken, die sich nur mit einem bestimmten Anwendungsgebiet beschäftigen, kaum Verweise zu anderen Arbeiten, in denen die im Grunde dafür nötigen theoretischen Grundlagen vorkommen. Diese waren für das eine spezielle Gebiet einfach nicht von Interesse.

Doch dies bezieht sich nur auf die äußere Form der Werke. Die chinesische Mathematik lässt sich nicht einfach charakterisieren. In China wurde nie eine Unterscheidung in verschiedene Kategorien, wie Arithmetik und Algebra, vorgenommen, auch nicht in Theorie und Praxis. Aus heutiger Sicht zwar anwendbar, machen sie für die chinesische Mathematik keinen Sinn, da zur Problemlösung einfach alles herangezogen wurde, was nur irgendwie brauchbar erschien. Damit hat die chinesische Mathematik eine ähnliche äußere Form wie die Mathematik der Babylonier, der Inder oder auch des europäischen Mittelalters. Dies lässt sich natürlich nicht auf die Inhalte bzw. deren theoretische Tiefe umlegen.

Um den Charakter der chinesischen Mathematik ansatzweise erkennen zu können, müssen die Kommentare betrachtet werden, denn diese liefern den besten Einblick in die Denkweise der Mathematiker. Liu Hui etwa erklärt Folgendes: „Analyse the principles by virtue of verbal formulations, explain the substance of things using figures in the hope of achieving simplicity while remaining complete and general but not obscure, so that the reader will be able to grasp more than half.“[14] Man sieht, dass für Liu Hui das einfache Erklären und das Verständnis der Leser im Vordergrund stand, im Gegensatz zu Euklid, für den die formale Exaktheit und Korrektheit am wichtigsten waren. Das bedeutet auch, dass nicht immer vollständige Lösungen angegeben wurden, sondern oft nur der Verweis auf analoge Beispiele, um den Leser dazu zu bringen, die genaue Lösung selbstständig zu erarbeiten. Hauptaugenmerk Liu Huis liegt also nicht darin, auf alle möglichen und formal auch nötigen Details bei der Lösung von Problemen einzugehen, sondern den Studenten der Texte die Möglichkeit zu geben, das notwendige Wissen selbst zu erlangen bzw. im Unterricht mündlich erklärt zu bekommen.

Daher gibt es auch nicht so etwas wie eine allgemeine Methode wie bei den Griechen, die versuchten, ihre Mathematik möglichst deduktiv aufzubauen. Liu Hui erklärt etwa einmal, dass er die Lösung eines Problemtyps lieber anhand eines Beispiels mit konkreten Zahlen darstellt anstatt allgemein, weil er denkt, dass es so leichter zu verstehen ist. Verschiedene Methoden werden angewandt, um Probleme zu lösen: Vergleiche werden getätigt, Analogien hervorgehoben, oft werden Erklärungen empirisch oder heuristisch motiviert. Beweise kommen in der Art und Weise, wie wir sie gewohnt sind, kaum vor. Stattdessen bestehen sie zu einem großen Teil aus visuellen Elementen, ähnlich den ersten überlieferten Beweisen überhaupt.

Zwar verwendeten auch die Griechen geometrische Figuren, doch in einer anderen Art und Weise. Die Griechen benannten alle Elemente einer Figur nach den Buchstaben ihres Alphabets und konnten so auch die kompliziertesten Figuren abstrakt beschreiben, ohne konkrete Angaben machen zu müssen. „In the Chinese tradition [...] the figures essentially refer not to idealities but to material objects which, when manipulated in an appropriate manner, [...] may be used to make certain mathematical properties visible.“[15] Bei den Griechen waren geometrische Figuren manchmal sogar hinderlich für die Erklä-

[14] Liu Hui nach [Martzloff 1997, S. 70]
[15] [Martzloff 1997, S. 275]

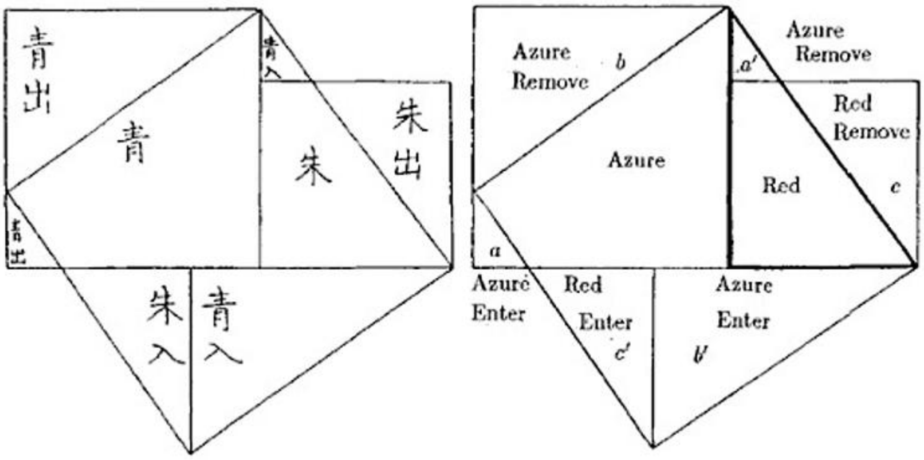

Abbildung 3.10: Der Satz von Pythagoras (aus [MARTZLOFF 1997, S. 297])

rungen. Teilweise wurden sie absichtlich verkompliziert, um zu einem bestimmten Satz zu gelangen. Die Figuren selbst wurden dadurch jedoch schwer zu erkennen. In China ist es genau umgekehrt. Die Figuren wurden absichtlich genau so geschickt konstruiert, dass eine bestimmte Eigenschaft daran möglichst offensichtlich war. Ein Beispiel dafür ist Liu Huis Figur zum Satz von Pythagoras (vgl. Abb. 3.10).

Die chinesische Mathematik ist auf den ersten Blick mit der vorgriechischen Mathematik vergleichbar, der babylonischen und der ägyptischen, zumindest der äußeren Form nach. Inhalt und Denkweise sind aber von völlig eigenständiger Natur und können nur bis zu einem gewissen Grad mit der anderer Kulturen verglichen werden. Oft wurde die chinesische Mathematik als oberflächlich und vordergründig bezeichnet, doch war sie ganz im Gegenteil außergewöhnlich erfindungsreich, einfallsreich und einflussreich.

Literaturverzeichnis

Verzeichnis der Bücher

[Amma 1979] Amma, T. A. Sarasvati (1979). *Geometry in Ancient and Medieval India*. Motilal Banarsidass Publishers Private Limited, Delhi. Reprint 2007.

[Archimedes 1897] Archimedes (1897). *The Works of Archimedes with the Method of Archimedes Edited by T. L. Heath*. Dover Publications, Inc., New York.

[Archimedes 1922/1923] Archimedes (1922/1923). *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 202/210. Kugel und Zylinder. Über Paraboloide, Hyperboloide und Ellipsoide. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Dr. Arthur Czwalina-Allenstein*. Akademische Verlasgesellschaft m. b. H. Reprint.

[Bag 1979] Bag, A. K. (1979). *Mathematics in Ancient and Medieval India*. Chakhambha Orientalia. First Edition.

[Euklid 2003] Euklid (2003). *Die Elemente, aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Cl. Thaer. Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften, Band 235*. Verlag Harri Deutsch, 4. Aufl.

[Gericke 2004] Gericke, Helmuth (2004). *Mathematik in Antike, Orient und Abendland*. Fourier Verlag GmbH, 8. Aufl.

[Kanghsen et al. 1999] Kanghsen, Shen, J. N. Crossley und A. W.-C. Lun (1999). *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*. Oxford University Press Inc., New York.

[Kinder und Hilgemann 2000] Kinder, Hermann und W. Hilgemann (2000). *dtv-Atlas Weltgeschichte*. Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH &Co. KG, München, 2. Aufl.

[Kline 1990] Kline, Morris (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Volume 1*. Oxford University Press.

[LDG 2001] LDG (2001). *Lexikon der Geschichte*. Orbis Verlag, Niedernhausen/Ts.

[Li und Du 1987] Li, Yan und S. Du (1987). *Chinese Mathematics. A Concise History*. The Commercial Press Limited, Hong Kong.

[Martzloff 1997] Martzloff, Jean-Claude (1997). *A History of Chinese Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[NEEDHAM 1986] NEEDHAM, JOSEPH (1986). *Science and Civilization in China: Volume 3, Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*. Cave Books Ltd., Taipei.

[PLATON 2003] PLATON (2003). *Der Staat (Politeia). Übersetzt und herausgegeben von Karl Vretska*. Reclam Verlag.

[SCRIBA und SCHREIBER 2005] SCRIBA, CHRISTOPH J. und P. SCHREIBER (2005). *5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kulturen, Menschen*. Springer-Verlag, 3. Aufl.

[SRINIVASIENGAR 1967] SRINIVASIENGAR, C. N. (1967). *The History of Ancient Indian Mathematics*. The World Press Private Limited. Reprint 1988.

[WUSSING 2008] WUSSING, HANS (2008). *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise - 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton*. Springer-Verlag.

Verzeichnis der Internetquellen

[1] Development of mathematics & jainism. `http://jainsamaj.org/literature/role_development.htm` (Abruf am 20.12.2009).

[2] Euclid's elements. `http://www.physics.ntua.gr/~mourmouras/euclid/index.html` (Abruf am 25.10.2009).

[3] Science and mathematics in india. `http://www.indohistory.com/science_and_mathematics.html` (Abruf am 22.12.2009).

[4] Science in india: History of mathematics: Indian mathematics and astronomers. `http://india_resource.tripod.com/mathematics.htm` (Abruf am 22.12.2009).

[5] Michael Drmota. Zahlentheorie, 2006. `http://www.dmg.tuwien.ac.at/drmota/zahlentheorieskriptum.pdf` (Abruf am 14.01.2009).

[6] Fabrice Duvinage. Geometrie im alten china, 2007. `http://www.fabriceduvinage.de/chinesische_mathematik.pdf` (Abruf am 14.12.2009).

[7] J. J. O'Connor and E. F. Robertson. History topics: Index of ancient indian mathematics. `http://www.gap-system.org/~history/Indexes/Indians.html` (Abruf am 23.12.2009).

[8] Ian G. Pearce. Indian mathematics: Redressing the balance. `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Projects/Pearce/index.html` (Abruf am 18.12.2009).

[9] Platon. Siebenter brief in der Übersetzung von rudolf haller. `www.opera-paltonis.de/Brief7.html` (Abruf am 08.09.2009).

Abbildungsverzeichnis