



DIPLOMARBEIT

„Ein Beitrag zur Polyedergeometrie - Krümmung und Abwicklung“

ausgeführt am

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

O.Univ.Prof. Mag.rer.nat. Dr.phil. Hellmuth Stachel

durch

Alexander Solar

1100 Wien, Rosiwalgasse 20 / 35

Wien, Dezember 2008

Danksagung

Ich möchte mich in dieser Arbeit herzlich bei meinem Mentor, Herrn Prof. Hellmuth Stachel, für die umsichtige Betreuung und die detaillierten Hilfestellungen bedanken, aber auch für die vielen Freiheiten, die er mit eingeräumt hat. Ich kann ihn in jeglicher Hinsicht nur als Vorbild betrachten.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern, Josef und Gabriele, die zu jeder Zeit des Studiums hinter mir gestanden sind und mich bedingungslos unterstützt haben.

Vielen Dank an Herrn Josef Mühlbauer, der mir das Studium in einigen Bereichen wesentlich erleichtert hat.

Abschließend ist es mir eine Freude, mich bei Claudia Mühlbauer zu bedanken, mit der ich Seite an Seite durch das Studium schreiten und herausfordernde sowie freudige Momente durchleben durfte. Ich darf sie zweifellos als das tragende Element dieses Lebensabschnittes bezeichnen.

Inhaltsangabe:

<u>1. Einleitung</u>	1
1.1 Inhaltsbeschreibung	1
1.2 Anwendungen polyedrischer Netze	2
<u>2. Konvexe Polyeder und deren Krümmung</u>	4
2.1 Flächen, Polyeder, insbesondere konvexe Polyeder	4
2.1.1 Definitionen	4
2.1.2 Eigenschaften konvexer Polyeder	9
2.2 Die Krümmung eines Polyeders	15
2.2.1 Aus der Differentialgeometrie	16
2.2.2 Die Krümmung polyedrischer Flächenpunkte	20
2.2.3 Innergeometrische Eigenschaften konvexer Polyeder	22
<u>3. Abwicklung von Polyedern zu Netzen</u>	29
3.1 Historisches und Definition eines Netzes	29
3.2 Aus der Graphentheorie	30
3.3 Unabwickelbare Polyeder	36
3.3.1 Polyeder mit nicht konvexen Seitenflächen	36
3.3.2 Nicht konvexe Polyeder mit konvexen Seitenflächen	37
3.4 Spezielle Klassen von über die Kanten abwickelbaren Polyedern	45
3.4.1 Prismoide	46
3.4.2 Dome	49
3.5 Abwicklung konvexer Polyeder über die Kanten	55
3.5.1 Argumente für Kantenabwicklungen aller konvexer Polyeder zu Netzen	56
3.5.2 Argumente gegen Kantenabwicklungen aller konvexer Polyeder zu Netzen	57
<u>Literaturverzeichnis</u>	63

1. Einleitung

1.1 Inhaltsbeschreibung

Dass man Polyeder in die Ebene abwickeln und somit durch ihr Netz darstellen kann, ist schon seit Jahrhunderten bekannt und praktiziert worden. Wenn man einen Polyeder basteln möchte, so entwirft man gewöhnlicher Weise zunächst sein Netz, schneidet dieses aus und faltet es anschließend. Betrachtet man diese Thematik jedoch etwas genauer, so muss man sich anfangs die Frage stellen, was ein „Netz“ eigentlich ist, woraus es besteht und welche Eigenschaften es hat. Dies wird am Beginn des dritten Kapitels angeführt. Naheliegend ist die Forderung, dass ein Netz aus ganzen Seitenflächen des Polyeders besteht, d.h. diese nicht in zerschnittener Form vorliegen dürfen. Viel interessanter ist danach die Frage, ob es zu jedem Polyeder ein zusammenhängendes und überlappungsfreies Netz gibt. Dem gehen wir ebenfalls im dritten Kapitel nach, indem wir Polyeder verebnen. Die Antwort sei jedoch gleich hier verraten, sie lautet „nein“.

Für die Begründung, wie ein Polyeder beschaffen sein muss, damit er ein Netz besitzt, benötigen wir zur Vorbereitung das zweite Kapitel. In diesem klären wir zu Beginn, was ein Polyeder überhaupt ist, welche Strukturen erlaubt und welche verboten sind. In einem Teilabschnitt fokussieren wir insbesondere Eigenschaften konvexer Polyeder, wobei topologische und metrische Aspekte einfließen. Eine wesentliche Rolle beim Abwickeln spielt die „Krümmung“ von polyedrischen Flächenpunkten und des Polyeders insgesamt, was am Ende des zweiten Kapitels zu finden ist. Dazu benötigen wir Grundkenntnisse aus der Differentialgeometrie, die wir jedoch nur streifen werden.

Im 3. Kapitel werden Polyeder vorgestellt, die nicht zu Netzen im oben angegebenen engeren Sinn verebnet werden können, und andererseits solche, bei denen dies möglich ist. Dabei wird der Polyeder immer entlang einer Reihe von Kanten aufgetrennt und abgewickelt. Die durch die Schnittkanten gebildete Struktur aus Knoten und Kanten kann als Graph aufgefasst werden, weshalb auch Erläuterungen aus der Graphentheorie eingebracht werden. Bei der Abwicklung über die Kanten spielen die konvexen Polyeder eine besondere Rolle. Bei der Frage, ob all diese ausnahmslos verebnet werden

können, stoßen wir am Ende des dritten Kapitels an die Grenzen der heutigen Wissenschaft in diesem Bereich.

Die Abbildungen wurden zum Großteil selbst hergestellt, und zwar mit Hilfe der Programme „MicroStation“, „CorelDRAW“ und „EUKLID - DynaGeo“. Bei allen anderen Figuren ist die Quelle angegeben. Literaturverweise erfolgen in römischen Zahlen, Verweise auf Internet – Links in arabischen Zahlen. Alle Referenzen sind am Ende der Arbeit gesammelt.

1.2 Anwendungen polyedrischer Netze

In der industriellen Produktion spielen Netze von Polyedern eine wichtige Rolle, wenn es beispielsweise um die Herstellung von Objektteilen aus Blechplatten (oder ähnlichen Materialien) geht. Ein dreidimensionales Flächenmodell wird dabei durch polyedrische Flächen approximiert und in einem oder mehreren Stücken in die Ebene abgebildet, sprich abgewickelt. Die verebneten Teile werden anschließend in der Produktion aus einer Blechplatte ausgeschnitten und durch Biegemaschinen in die gewünschte Form gebracht. Die daraus resultierenden Teile werden schließlich zum Endstück montiert. Zwei Punkte sind beim Abwickeln von besonderem Interesse: Zum Ersten dürfen keine Überlappungen auftreten, da sonst kein korrektes Ausschneiden mehr möglich ist, und zum Zweiten soll der Materialverschleiß bei den Platten möglichst gering ausfallen, sodass der Gewinn bei der Produktion optimiert werden kann. Aus diesen Gründen sind Anwender solcher Praktiken eifrig daran interessiert, ob eine gegebene dreidimensionale Form überlappungsfrei abwickelbar ist oder nicht.



Abb. 1. *Papierwespe von Kamiya Satoshi (Quelle: [1]).*

Eine weitere Anwendung dieser Thematik bezieht sich auf Origami. Auch hier wird in manchen Kreisen eine Vielzahl von Objekten durch polyedrische Flächen angenähert, auf Papier gezeichnet und gefaltet. Wiederum sind Überlappungen der verebneten Figur verboten, da das räumliche Objekt ansonsten nicht hergestellt werden kann. Im Unterschied zum

vorigen Anwendungsbeispiel besteht die Verebnung zumeist aus einem Stück. Allerdings gibt es auch Origami mit krummen Flächen, welche deshalb nicht vollständig in diesen Bereich eingeordnet werden können.

2. Konvexe Polyeder und deren Krümmung

2.1 Flächen, Polyeder, insbesondere konvexe Polyeder

2.1.1 Definitionen

Bei unseren Betrachtungen zu Polyedern und Netzen werden wir uns zur Gänze auf den dreidimensionalen, euklidischen Raum (\mathbb{R}^3) beschränken. Es gibt im Grunde zwei verschiedene Anschauungsmöglichkeiten eines Polyeders, nämlich als Körper (Volumensmodell) oder als ein, nach bestimmten Vorschriften, von Flächen begrenztes Gebilde (Flächenmodell). In dieser Arbeit beziehen wir uns ausschließlich auf letztere Betrachtungsweise, da sie für unsere Zwecke hier dienlicher ist. Dazu folgen zunächst einige grundlegende Definitionen:

Definition 2.1 (Strecke). Sei $P_i \neq P_{i+1}$ für $i \in \mathbb{N}$:

$P_i P_{i+1} := \{P_i, P_{i+1}\} \cup \{X \mid X \text{ "zwischen" } P_i \text{ und } P_{i+1}\}$ heißt **Strecke** mit den Endpunkten P_i und P_{i+1} .

Für die Definition der „Zwischen“-Beziehung und weiterer zum Verständnis beitragender, jedoch hier nicht extra angeführter Definitionen sei hier auf [I., S. 7 ff] verwiesen.

Definition 2.2 (Streckenzug). Ein Streckenzug ist ein System von Strecken $P_1 P_2, P_2 P_3, \dots, P_{n-1} P_n$.

- Ist $P_1 = P_n$, so nennt man den Streckenzug **geschlossen**.
- Ein Streckenzug heißt **eben**, wenn alle seine Punkte P_i ($i=1, 2, \dots, n$) in einer Ebene liegen, ansonsten **windschief**.

Definition 2.3 (Flächen bzw. n -Ecke). Eine Fläche bzw. ein n -Eck wird durch einen geschlossenen und ebenen Streckenzug begrenzt.

- Die einzelnen Teilstrecken heißen die **Seiten** der Fläche.
- Jeweils zwei benachbarte Seiten treffen sich in einem Punkt, der **Ecke** genannt wird.

Definition 2.4 (Einfache Flächen). Eine Fläche heißt **einfach**, wenn jeder innere Punkt einer Seite zu genau einer Seite und jede Ecke zu höchstens zwei Seiten gehört. Dann gibt es ein Inneres dieser Fläche.

- Ein **Winkel** ist die aus jeweils zwei benachbarten Seiten gebildete, im Inneren der Fläche liegende Figur.

Nicht einfache Flächen werden gegliedert in überschlagene Flächen, bei denen zwei nicht aufeinander folgende Seiten einen Punkt gemeinsam haben, und nicht überschlagene Flächen, bei denen eine Ecke mehr als zwei Seiten angehört.

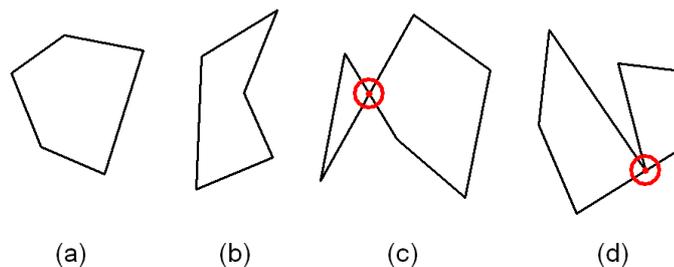


Abb. 2. In (a) und (b) liegen einfache Flächen vor, in (c) eine überschlagene Fläche und in (d) eine nicht überschlagene Fläche.

Wir wollen im weiteren Verlauf Ecken mit P_i , Seiten mit P_iP_{i+1} bzw. die Längen dieser Seiten mit s_i , Winkel bzw. Winkelmaße mit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ und Flächen mit F_i bezeichnen, wobei $i \in \mathbb{N}$.

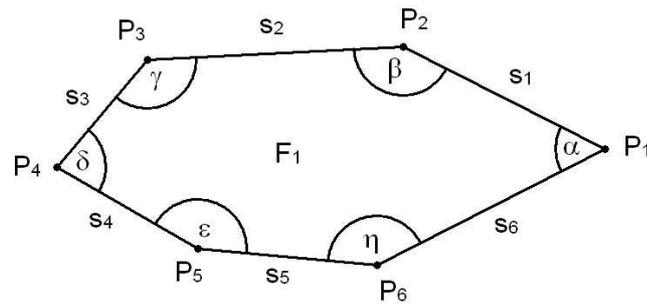


Abb. 3. Fläche (6-Eck) samt markierten Winkeln.

Im weiteren Verlauf wollen wir nicht einfache Flächen gänzlich außer Acht lassen. Spezielle Arten einfacher Flächen heißen gleichseitig (alle Seiten sind zueinander kongruent), gleichwinkelig (alle Winkel sind zueinander kongruent) oder regulär, falls sie beide vorangehenden Eigenschaften haben.

Definition 2.5 (Polyeder). Ein Polyeder ist eine einfache¹ Struktur aus endlich vielen Flächen, wobei alle Flächen zusammenhängend sind.

- Die den Polyeder bildenden Flächen werden **Seitenflächen** genannt.
- Eine **Kante** besteht entweder aus zwei zusammenfallenden Seiten zweier Flächen, die nicht in einer Ebene liegen, oder entspricht der Seite einer Fläche, wenn die Fläche an dieser Seite nicht an eine andere Fläche grenzt.
- Jeweils n Kanten treffen in einem Punkt E zusammen. Als **Körperecke** wird eine Figur bezeichnet, die aus den von E ausgehenden Halbgeraden (als Teile der Kanten) und aus den in E zusammentreffenden Flächenwinkeln, die aus jeweils zwei benachbarten Kanten (als Teile der Flächen) gebildet werden, besteht.
- Der im Inneren des Polyeders liegende Winkel zwischen zwei benachbarten Flächen heißt **Keilwinkel**.

¹ Einfach bedeutet in diesem Zusammenhang, wenn der Schnitt mit der in der Körperecke zentrierten Einheitskugel eine einfache, von Großkreisbögen berandete Fläche ist. Dadurch sind Strukturen ausgeschlossen, bei denen mehrere Körperecken in einem Punkt zusammentreffen.

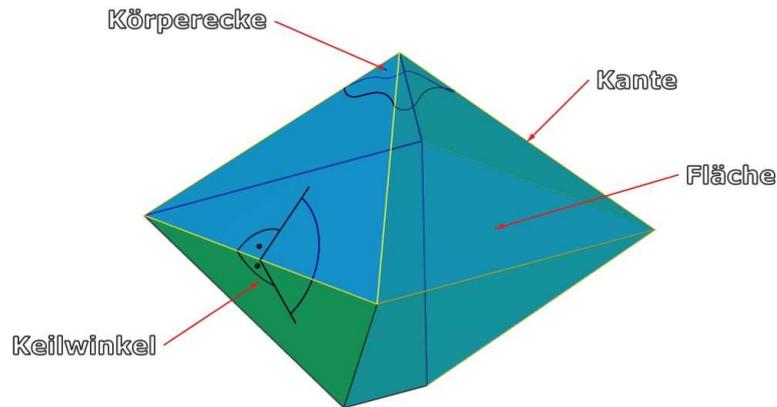


Abb. 4. Polyeder mit Kennzeichnung der in obiger Definition eingeführten Begriffe.

An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass der Begriff der „Körperecke“ grundsätzlich vom Begriff der „Ecke“ zu unterscheiden ist (siehe Def. 1.5 und Def. 1.3). Ersterer ist nämlich auf polyedrische Kontexte bezogen und letzterer tritt im Zusammenhang mit Polygonen auf. Jedoch findet hierfür in der Literatur keine konsequente Trennung statt. In der englischen Sprache fallen diese Unterscheidungen günstiger aus, da die Ecke als „Corner“ und die Körperecke als „Vertex“ bezeichnet wird. Weiters ist auch auf die verschiedene Bedeutung der „Seite“, welcher von polygonaler Natur ist, und der „Kante“, die auf Polyeder bezogen ist, zu achten.

Da aufgrund der Definition bei einem Polyeder endlich viele Seitenflächen gefordert werden und jede Seitenfläche endlich viele Seiten und Ecken besitzt, sind Polyeder mit unendlich vielen Seitenflächen, Kanten oder Körperecken ausgeschlossen.

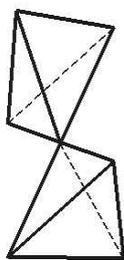


Abb. 6. „Doppel-Tetraeder“ mit gemeinsamer Ecke.

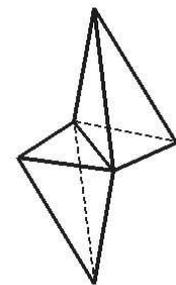


Abb. 5. „Doppel-Tetraeder“ mit gemeinsamer Kante.

In weiterer Folge sind auch Figuren wie beispielsweise das „Doppel-Tetraeder“, in Abb. 5, bei welchem die beiden Tetraeder lediglich entlang einer Kante zusammenhängen, nicht erlaubt. Unter

dem Begriff „zusammenhängend“ versteht man, dass es zwischen zwei beliebigen Flächen F_1 und F_2 stets eine mit F_1 beginnende und mit F_2 endende Kette von Flächen gibt, bei der

benachbarte Seitenflächen jeweils eine Seite gemeinsam haben. Dadurch ist unter anderem ein Objekt wie das „Doppel-Tetraeder“ in Abb. 6 unzulässig, bei dem die beiden Tetraeder nur einen Punkt gemeinsam haben.

Wir bezeichnen einen Polyeder als „geschlossen“, wenn jede Kante genau zwei Seitenflächen angehört. Dem gegenüber steht der „offene“ Polyeder, bei dem der Rand von denjenigen Kanten gebildet wird, die nur einer Seitenfläche angehören.

Neben „endlichen Polyedern“, die sich aus lauter endlichen Seitenflächen zusammensetzen, existieren noch „unendliche Polyeder“, mit Fernpunkten als Körperecken. Der Vollständigkeit wegen sei noch darauf hingewiesen, dass man auch Polyeder ohne Körperecken betrachten kann, nämlich so genannte unendliche Prismen. Wir wollen uns in dieser Arbeit aber nur auf endliche geschlossene und offene Polyeder konzentrieren.

Kommen wir nun zur Definition konvexer Polyeder, beginnend beim Begriff der „Konvexität“ für einen n -dimensionalen Vektorraum:

Definition 2.6 (Konvexe Mengen). Ist A ein n -dimensionaler, reeller affiner Raum, so lässt sich die Verbindungsstrecke zweier Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ (d.h. zweier Vektoren) als die Menge

$$\overline{\mathbf{ab}} := \{\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b} \mid \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

beschreiben. Eine Teilmenge M von A heißt **konvex**, wenn für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ stets auch $\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b} \in M$ gilt.

Wenn die Menge M konvex ist, so ist mit zwei beliebigen Punkten aus M , auch ihre Verbindungsstrecke ganz in M enthalten.

Nun wollen wir die Konvexität auf Flächen, Körperecken und letztendlich Polyeder im \mathbb{R}^3 beziehen.

Definition 2.7 (Konvexe Flächen). Eine Fläche heißt konvex, wenn sie ganz auf einer Seite jeder Trägergeraden einer Seite der Fläche liegt.

Bei einer konvexen Fläche, bzw. bei einem konvexen Polygon, sind alle Winkel kleiner als 180° .

Definition 2.8 (Konvexe Körperecken). Eine Körperecke heißt konvex, wenn sie ganz auf einer Seite jeder Trägerebene einer Seitenfläche liegt.

Bei einer konvexen Körperecke ist jeder Keilwinkel kleiner als 180° .

Definition 2.9 (Konvexe Polyeder). Ein Polyeder heißt konvex, wenn er ganz auf einer Seite jeder Trägerebene einer Seitenfläche des Polyeders liegt.

Dies ist gleichbedeutend damit, dass jeder Flächenwinkel, d. h. jeder Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten auf einer Seitenfläche und jeder Keilwinkel eines konvexen Polyeders kleiner als 180° ist.

Für eine Klassifikation konvexer Polyeder gibt es vielseitige Ansätze, basierend auf verschiedenen Eigenschaften und Betrachtungsweisen dieser. Ein Beitrag diesbezüglich ist in [II., S. 99 ff] nachzulesen.

Einen allgemeineren, weiterführenderen Zugang zur Polyedergeometrie, welcher für n -dimensionale Vektorräume gilt, bietet Walter Nef in [III.] an. Hier werden Polyeder als Mengenfunktionen (Durchschnitt oder Vereinigung) von offenen Halbräumen beschrieben.

2.1.2 Eigenschaften konvexer Polyeder

Man kann bei Polyedern grundsätzlich zwischen metrischen und topologischen Eigenschaften unterscheiden. Zu den metrischen Eigenschaften gehören beispielsweise Längen von Kanten, Größen von ebenen Winkeln, Flächenwinkeln und räumlichen Winkeln und ähnliches. Diesen wollen wir uns später zuwenden. Beim topologischen

Aspekt geht es um Eigenschaften, die erhalten bleiben, wenn man einen Polyeder durch einen zu ihm isomorphen Polyeder ersetzt. Dazu eine Definition, die aus [IV., S. 12] stammt:

Definition 2.10. Zwei Polyeder heißen isomorph, wenn sich zwischen ihren Seitenflächen, Kanten und Körperecken eine eindeutige Zuordnung² herstellen lässt derart, dass

- einander entsprechende Seitenflächen dieselbe Eckenanzahl besitzen;
- zwei Seitenflächen mit einer gemeinsamen Kante Seitenflächen entsprechen, die ebenfalls eine Kante gemeinsam haben;
- zwei Kanten mit einer gemeinsamen Körperecke Kanten entsprechen, die ebenfalls eine Körperecke gemeinsam haben.

Als Beispiel sei hier angeführt, dass alle Tetraeder zueinander isomorph sind. Den topologischen Eigenschaften ordnet man die Anzahl der Körperecken, Kanten, Seitenflächen usw. zu. Eine weitere topologische Eigenschaft ist das „Geschlecht“ eines Polyeders, wie auch in [IV., S. 13] nachzulesen ist:

Definition 2.11 (Geschlecht eines Polyeders). Ein Polyeder ist vom Geschlecht Null, wenn jeder auf der Oberfläche des Polyeders gezeichnete, geschlossene Streckenzug diese Oberfläche in zwei getrennte Flächenstücke zerlegt. Trennt man eine Fläche eines solchen Polyeders ab, so erhält man eine Polyederfläche, die einfach zusammenhängend genannt wird.

Ein Polyeder ist vom Geschlecht g , wenn g die Maximalanzahl der geschlossenen einander nicht überschneidenden Streckenzüge ist, die sich auf der Oberfläche des Polyeders einzeichnen lassen und diese dabei nicht in getrennte einfach zusammenhängende Flächenstücke zerlegen.

² Das bedeutet, jedem Element (Fläche, Kante, Körperecke) des ersten Polyeders wird genau ein entsprechendes Element des zweiten Polyeders zugeordnet und umgekehrt.

Betrachtet man etwa eine polyedrische Figur, die einem Torus angenähert ist, so ist diese vom Geschlecht Eins (siehe Abb. 7, links). Die für uns in diesem Kapitel interessanten, konvexen Polyeder sind alle vom Geschlecht Null.

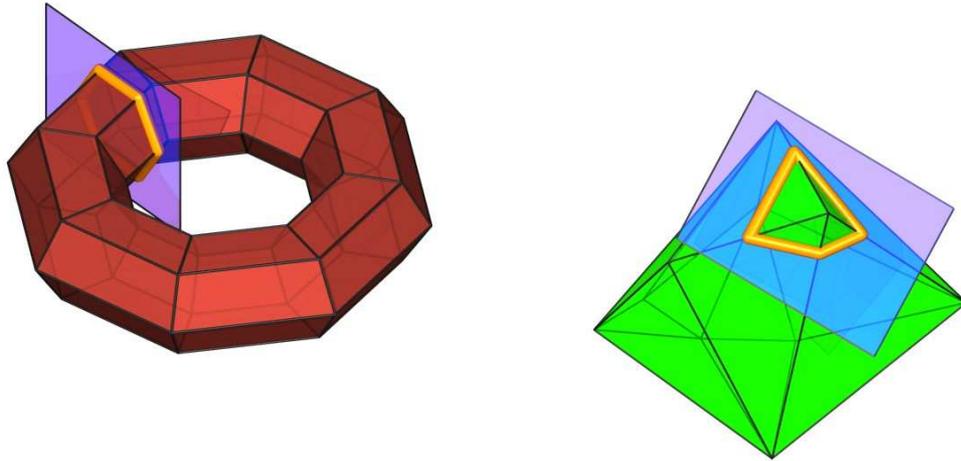


Abb. 7. Im Bild links liegt ein Polyeder vom Geschlecht Eins vor. Der Polyeder zerfällt durch die geschlossene Kurve nicht. Auf der rechten Seite ist ein konvexes Polyeder abgebildet, das immer vom Geschlecht Null ist und in zwei Teile zerfällt, sobald es von einem geschlossenen Streckenzug durchtrennt wird.

Bezeichnen wir nun für folgenden, sehr bekannten Satz, der auf Leonhard Euler (1707 - 1783) zurück geht und von topologischem Charakter ist, die Anzahl der Körperkanten eines (geschlossenen) Polyeders mit e , die der Kanten mit k und die der Seitenflächen mit f .

Satz 2.12 (Eulerscher Polyedersatz)³. Für jeden Polyeder vom Geschlecht Null, also insbesondere für jeden konvexen Polyeder, gilt die Eulersche Beziehung

$$e - k + f = 2. \quad (1)$$

Beweis: Wenn wir eine Seitenfläche des Polyeders entfernen, entsteht eine einfach zusammenhängende Polyederfläche. Die Zahlen e und k haben sich nicht verändert, während die Anzahl der Seitenflächen jetzt $f' = f - 1$ beträgt. Daher ist nun die Beziehung

$$e - k + f' = 1 \quad (2)$$

³ Im Wesentlichen entnommen aus [IV., S. 14 ff].

zu beweisen. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Seitenflächen f . Für $f' = 1$ ist die Bedingung offensichtlich erfüllt, denn in einem Polygon gilt $e = k$. Wir nehmen an, die Beziehung (2) sei für alle Polyederflächen mit weniger als f' Seitenflächen bewiesen. Nun betrachten wir eine Polyederfläche mit f' Seitenflächen und legen einen Schnitt, welcher längs m Kanten der Oberfläche zwei Eckpunkte auf dem Rand der Oberfläche verbindet, d.h. also $m + 1$ Körperecken. Die Polyederfläche zerfällt dabei in zwei Flächenstücke⁴, die aus f_1 bzw. f_2 Seitenflächen, k_1 bzw. k_2 Kanten und e_1 bzw. e_2 Körperecken bestehen. Da f_1 und f_2 kleiner als f' sind, ist die Beziehung (2) erfüllt:

$$e_1 - k_1 + f_1 = 1,$$

$$e_2 - k_2 + f_2 = 1.$$

Addition der beiden Gleichungen führt zu

$$(e_1 + e_2) - (k_1 + k_2) + (f_1 + f_2) = 2. \quad (3)$$

Nun lassen sich aber die Beziehungen zwischen der Anzahl der Elemente der gegebenen Oberfläche und denen der bei der Zerlegung entstehenden Flächenstücke ganz einfach bestimmen:

$$e_1 + e_2 = e + m + 1;$$

$$k_1 + k_2 = k + m;$$

$$f_1 + f_2 = f'.$$

Setzt man diese Beziehungen in (3) ein, so erhalten wir (2).

□

⁴ Man kann zeigen, dass diese Flächenstücke einfach zusammenhängend sind.

Allgemein nennt man die Beziehung $e - k + f =: \chi$ die Euler'sche Charakteristik. Dabei gilt für einen Polyeder vom Geschlecht g : $\chi = 2 - 2g$.

Für einen weiteren Satz, den wir einbringen wollen, der mit der Topologie in Zusammenhang steht, aber in den auch schon metrische Eigenschaften einfließen, benötigen wir noch ein paar elementare Definitionen, die aus [V.] entstammen und uns zum Homöomorphismus hinführen sollen:

Definition 2.13. Sei X eine Menge und $\mathbb{R}^+ := \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$. Eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ heißt eine Metrik auf X , wenn für alle $x, y, z \in X$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(M3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Das Paar $(X, d) =: \mathfrak{R}$ heißt ein metrischer Raum. Für $x, y \in X$ heißt $d(x, y)$ der Abstand von x und y . X heißt die Trägermenge von (X, d) . Die Bedingung (M3) nennt man auch die Dreiecksungleichung. Die Elemente von X heißen Punkte.

Definition 2.14. Seien $A, B \subset X$. Der Abstand von A und B ist definiert durch

$$\text{dist}(A, B) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } A = \emptyset \text{ oder } B = \emptyset \\ \inf \{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}, & \text{falls } A \neq \emptyset \neq B. \end{cases}$$

Offensichtlich gilt $\text{dist}(\{x\}, \{y\}) = d(x, y)$. Der Abstand zwischen einem Punkt x und einer Menge $A \subset X$ wird eingeführt durch:

$$\text{dist}(x, A) := \text{dist}(\{x\}, A).$$

Definition 2.15 (Berührungspunkt). Sei $A \subset X$. Ein Punkt x heißt Berührungspunkt von A , wenn $\text{dist}(x, A) = 0$ gilt.

Definition 2.16 (topologische Stetigkeit). Die Abbildung $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}'$ heißt stetig in x , wenn für jede Teilmenge A von \mathfrak{R} , die x als Berührungspunkt hat, $f(x)$ Berührungspunkt von $f(A)$ in \mathfrak{R}' ist.

Die Abbildung $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}'$ heißt stetig, wenn f in jedem $x \in X$ stetig ist.

Definition 2.17 (Homöomorphismus). Eine bijektive Abbildung $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}'$ heißt ein Homöomorphismus oder topologischer Isomorphismus, wenn sowohl f , als auch $f^{-1} : \mathfrak{R}' \rightarrow \mathfrak{R}$ stetig sind.

Nach diesem Exkurs in die Topologie kehren wir wieder zu den konvexen Polyedern zurück und möchten nun den vorhin angekündigten Satz einbringen, für welchen diese Definitionen notwendig waren. Siehe dazu auch [VI., S. 51].

Satz 2.18. Ein geschlossener konvexer Polyeder ist zu einer Sphäre homöomorph.

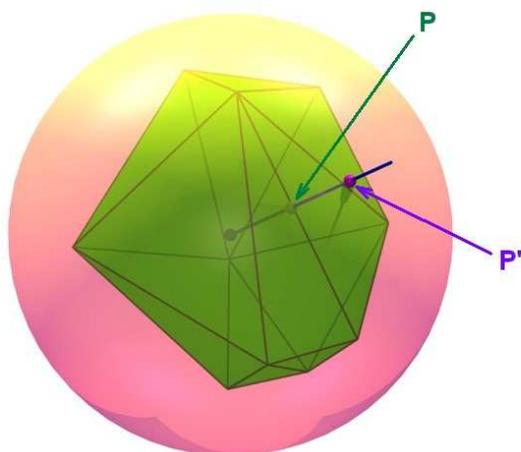


Abb. 8. Einander zugeordnete Punkte eines konvexen Polyeders und einer Sphäre um O , die auf von O ausgehenden Strahlen liegen.

Beweis: Sei O ein Punkt im Inneren eines geschlossenen konvexen Polyeders und zugleich Mittelpunkt einer Sphäre. Von O aus legen wir Strahlen in alle Richtungen und ordnen jeweils einen Punkt P des Polyeders und einen Punkt P' der Sphäre einander zu, wenn sie auf demselben Strahl liegen. Jeder Strahl schneidet die Sphäre und den Polyeder, aufgrund seiner Konvexität, in genau einem Punkt, weswegen die festgelegte Zuordnung umkehrbar eindeutig ist.

Bewegt man einen Punkt auf dem

Polyeder stetig, so dreht sich der durch diesen Punkt gehende Strahl stetig um O und somit bewegt sich gleichzeitig der entsprechende Punkt auf der Sphäre stetig auf ihr. Wird umgekehrt ein Punkt auf der Sphäre stetig bewegt, dreht sich der durch ihn gehende Strahl wieder stetig, weshalb sich der zugehörige Schnittpunkt des Strahls mit dem Polyeder stetig auf diesem bewegt. Genau so wie die direkte Zuordnung zwischen den Polyederpunkten und den Punkten auf der Sphäre stetig ist, gilt dies auch für die Umkehrung, was insgesamt eine beiderseits stetige Zuordnung ergibt.

□

Ergänzend möchten wir noch folgende Aussage anführen, die sich auf unendliche konvexe Polyeder bezieht. Den Beweis wollen wir hier jedoch nicht erbringen. Für diesen möchten wir auf [VI., S. 51 ff] verwiesen.

Satz 2.19. Ein unendlicher konvexer Polyeder ist zu einer Ebene homöomorph.

2.2 Die Krümmung eines Polyeders

Ein wichtiger Bestandteil dieser Arbeit ist das Konzept der „Krümmung“, auf polyedrische Flächen bezogen. Ihre Ursprünge sind in der Differentialgeometrie glatter Kurven und Flächen zu finden. Zunächst möchten wir aus Gründen der Übersicht die Krümmung in diesen Kontexten grob, also ohne detaillierte Angaben umreißen, um so die Krümmung von Polyedern zu motivieren. Eine umfassende Einführung würde unseres Erachtens den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Als ausführliche Nachschlagewerke möchten wir dafür [VII.], [VIII.] bzw. [IX.] empfehlen. Wir greifen hier eine Einleitung im Sinne von [X., S. 301 ff] auf.

2.2.1 Aus der Differentialgeometrie

Sei $c(t)$ eine C^2 -Kurve⁵ in der Ebene, die nach der Bogenlänge mit dem Parameter t parametrisiert⁶ ist. Die Krümmung von $c(t)$ in einem Kurvenpunkt P wird durch die Größe des „Beschleunigungsvektors“ $\|\ddot{c}(t)\|$ in diesem Punkt angegeben, wenn diese Kurve mit Geschwindigkeit 1 durchlaufen wird. Weiters ist die Beschleunigung gleich dem Kehrwert des Krümmungskreisradius⁷ in P , welcher den eindeutigen Kreis festlegt, der in P zum Geschwindigkeitsvektor (der auf der Kurventangente liegt) und zum Beschleunigungsvektor (normal zur Kurve) passt, in zweierlei Hinsicht, nämlich in der Größe und entsprechend der Richtungen der beiden Vektoren. Falls $c(t)$ in P gerade ist, hat der Krümmungskreis einen unendlich großen Radius und die Krümmung ist gleich Null.

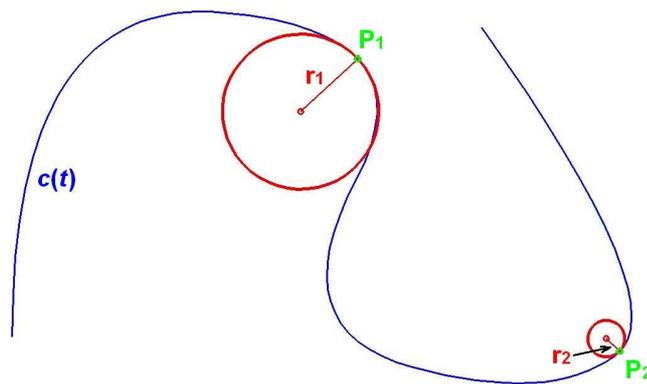


Abb. 9. Die Krümmung in einem Kurvenpunkt P ist $1/r$, wenn r der Radius des oskulierenden⁷ Kreises an $c(t)$ in P ist (konstruiert in MicroStation, bearbeitet in Euklid).

Wir wollen nun eine glatte Ebene $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ betrachten. Die Krümmung von Φ in einem Punkt P kann hier nicht durch eine oskulierende Sphäre erfasst werden, da eine solche nicht zwischen einer sphärischen und einer zylindrischen Fläche unterscheidet, die

⁵ Das bedeutet, dass die Kurve zweimal stetig differenzierbar ist.

⁶ Siehe [VII., S. 31]: „Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve ist eine reguläre parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\|\dot{c}(t)\| = 1$ für alle $t \in I$ “.

⁷ Unter „Oskulation“ versteht man eine Berührung höherer Ordnung. Bei einem Krümmungskreis an einen Kurvenpunkt in der Ebene entspricht die Oskulation einer Berührung dritter Ordnung, mit drei zusammenfallenden Schnittpunkten. (Quelle: <http://www.zeno.org/Lueger-1904/A/Oskulation>)

klarerweise ein unterschiedliches Krümmungsverhalten haben (ein bedeutender Unterschied liegt etwa im Abwicklungsverhalten dieser Flächentypen). Anstatt eines Wertes für die Krümmung einer Fläche in einem Punkt, benötigen wir nun zwei Werte, welche als **Hauptkrümmungen** bekannt sind und anschaulich wie folgt beschrieben werden können⁸:

Sei \vec{n} der Einheitsnormalenvektor einer orientierten Fläche Φ im Punkt P und η eine Ebene durch P , welche \vec{n} enthält. Dann ist $\eta \cap \Phi$ eine Kurve deren Krümmung in P wie oben definiert werden kann. Weiters versehen wir sie mit einem Vorzeichen je nachdem, ob der Berührungskreis lokal innen $\Phi(+)$ oder außen $\Phi(-)$ ist, wobei „außen“ durch die Richtung definiert ist, in die der Einheitsnormalenvektor \vec{n} zeigt. Drehen wir η um \vec{n} , dann sind die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 in P die minimale und die maximale vorzeichenbehaftete Krümmung aller resultierender Schnittkurven (siehe Abb. 9). So lauten etwa die Hauptkrümmungen einer Kugel mit dem Radius r : $\kappa_1 = \kappa_2 = 1/r$, wohingegen diese bei einem Zylinder mit demselben Radius $\kappa_1 = 0$ bzw. $\kappa_2 = 1/r$ betragen.

Wir möchten hier noch erwähnen, dass die Hauptkrümmungen nicht zur inneren Geometrie einer Fläche gehören, also unter lokalen Isometrien⁹ nicht invariant sind. So haben beispielsweise ein flaches Blatt Papier und dasselbe Papier zu einem Zylinder zusammengerollt die gleichen innergeometrischen Proportionen, aber unterschiedlichen Hauptkrümmungen.

⁸ Für eine genaue Definition siehe [VII., S. 126]. Hierzu sind eine Reihe von Vorkenntnissen erforderlich, wie etwa die **Weingarten-Abbildung** W_P , welche ein Endomorphismus auf Tangentialebenen von regulären Flächen ist. Da diese selbstadjungiert ist, kann man eine Orthonormalbasis \vec{x}_1, \vec{x}_2 der Tangentialebene von Φ in P finden, die aus Eigenvektoren von W_P besteht. Diese Eigenwerte, als κ_1 und κ_2 bezeichnet, heißen Hauptkrümmungen von Φ im Punkt P . Die zugehörigen Eigenvektoren $\pm \vec{x}_1$ und $\pm \vec{x}_2$ heißen Hauptkrümmungsrichtungen.

⁹ Siehe Definition in [VII., S. 163]. Alle geometrischen Größen, die sich unter lokalen Isometrien nicht verändern, nennt man Größen der inneren Geometrie.

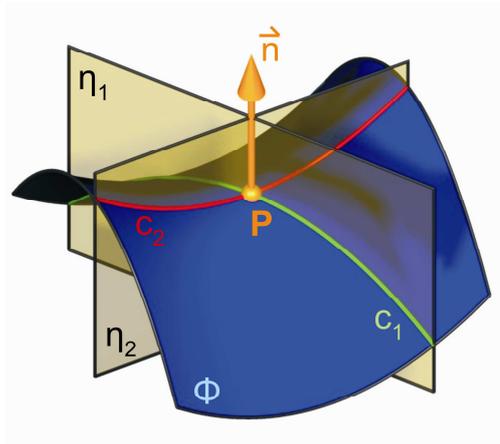


Abb. 10. Eine um den Einheitsnormalenvektor \vec{n} in P gedrehte Ebene, die mit der Fläche Φ (hier eine Sattelfläche) geschnitten wird. Die Schnittkurve c_1 hat positive, die Schnittkurve c_2 negative Krümmung in P .

Interessanterweise ist jedoch das Produkt $K = \kappa_1 \kappa_2$ innergeometrisch, was 1827 Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) entdeckte und als **Gauß'sche Krümmung**¹⁰ bekannt ist. Er selbst bezeichnete dieses Ergebnis als „Theorema Egregium“, eines der elegantesten Theoreme in der Theorie der gekrümmten Flächen. Um auf das eben erwähnte Papierbeispiel zurück zu kommen, haben beide, das flache Papier und der Zylinder dieselbe Gauß'sche Krümmung, nämlich $\kappa_1 \kappa_2 = 0 \cdot 1 = 0$.

Kommen wir nun zu einer äquivalenten Definition der Gauß'schen Krümmung, welche auf den Umkreis oder Flächeninhalt einer kleinen Kreisscheibe um einen Punkt $P \in \Phi$ bezogen ist und der „inneren“ geometrischen Deutung von K gleichkommt. Wir definieren eine geodätische Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt P und Radius r als Ort jener Punkte auf Φ , die von P den Abstand r haben, wobei die Distanz zu einem Punkt X anhand des kürzesten Weges¹¹ auf Φ von P zu X gemessen wird. Zu einer derartigen Kreisscheibe sagt man gelegentlich auch, dass sie den „inneren Radius“ r hat. Bezeichnen wir weiters den Umkreis der Kreisscheibe mit $C(r)$. Bertrand (1822 - 1900) und Puiseux (1820 - 1883) haben 1848 bewiesen, dass die Gauß'sche Krümmung auch der Grenzwert von

¹⁰ Diese entspricht der Determinante $\det(W_p)$, der in Fußnote 8 erwähnten Weingarten-Abbildung. Man beachte, dass die Gauß'sche Krümmung das Quadrat des geometrischen Mittels der Hauptkrümmungen ist.

¹¹ Der kürzeste Weg auf einer Fläche, der auch Geodätische genannt wird, ist dadurch gekennzeichnet, dass die geodätische Krümmung κ_g in jedem ihrer Punkte Null ist. Anschaulich kann man auch sagen, wenn man eine solche Kurve in die Tangentialebene jedes ihrer Punkte projiziert, ist sie eine Gerade. Vergleiche dazu [VIII., S. 223 ff].

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3(2r\pi - C(r))}{\pi r^3}$$

ist, was wir hier jedoch nicht näher ausführen möchten. Ein umfassender Beitrag diesbezüglich ist in [IX., S. 99] zu finden. Anhand dieser Gleichung können wir sehr gut erkennen, dass bei Punkten mit positiver Gauß'scher Krümmung der Umkreis mit dem inneren Radius r kleiner ist, als bei einer flachen Kreisscheibe mit dem selben Radius (und Umfang $2r\pi$). Flächenpunkte, die diese Eigenschaft aufweisen, werden als „elliptisch“ bezeichnet. Zu ihnen zählen zum Beispiel alle Punkte einer Sphäre (vergleiche [VII., S. 129]). Jene Punkte, die eine negative Gauß'sche Krümmung haben, besitzen einen Umkreis auf der Fläche, welcher den der ebenen Kreisscheibe vom gleichen Radius übertrifft. Diese nennt man „hyperbolische“ Flächenpunkte. Als Beispiel dazu, möchten wir ohne nähere Begründung aus Abb. 9 den Punkt P anführen (eine nähere Erläuterung dazu ist in [VII., S. 129 ff] nachzulesen). Ergibt die Gauß'sche Krümmung den Wert Null, so spricht man von einem „parabolischen“ Flächenpunkt. So sind etwa alle Punkte eines Zylinders parabolisch (genauso, wie alle Punkte einer Ebene).

Berechnen wir durch Integration den Flächeninhalt $A(r)$ eines geodätischen Kreises vom Radius r , erhalten wir als Resultat eine ähnliche Gleichung für K bezogen auf flächendefizitäre Ausdrücke, wie Diquet 1848 herausfand:

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12(r^2\pi - A(r))}{\pi r^4},$$

wobei mit $A(r)$ die Fläche der Kreisscheibe gemeint ist (genauere Erläuterungen siehe [IX., S. 99]). Es liegt prinzipiell der gleiche Sachverhalt wie oben vor, nämlich Flächendefizit bei Punkten mit positiver Krümmung, Flächenüberschuss bei Punkten mit negativer Krümmung und Gleichheit bei parabolischen Flächenpunkten.

2.2.2 Die Krümmung polyedrischer Flächenpunkte

Der flächendefizitäre Gesichtspunkt der Gauß'schen Krümmung macht die Definition dieser auf einer polyedrischen Fläche Φ plausibel:

Definition 2.20 (Krümmung polyedrischer Flächenpunkte). Die Gauß'sche Krümmung eines Punktes P auf einer polyedrischen Fläche Φ , die wir fortan nur mehr als „Krümmung“ in $P \in \Phi$ bezeichnen wollen, ist das Winkeldefizit bei P , also 2π minus der Summe der in P zusammentreffenden Flächenwinkel.

Folglich hat ein Punkt im Inneren einer Seitenfläche von Φ die Krümmung Null. Selbiges gilt auch für einen Punkt innerhalb einer polyedrischen Kante, da jeder der beiden Flächenwinkel, die in P zusammentreffen den Wert π haben. Die gesamte Krümmung eines (geschlossenen) Polyeders muss sich daher auf die Körperecken konzentrieren.

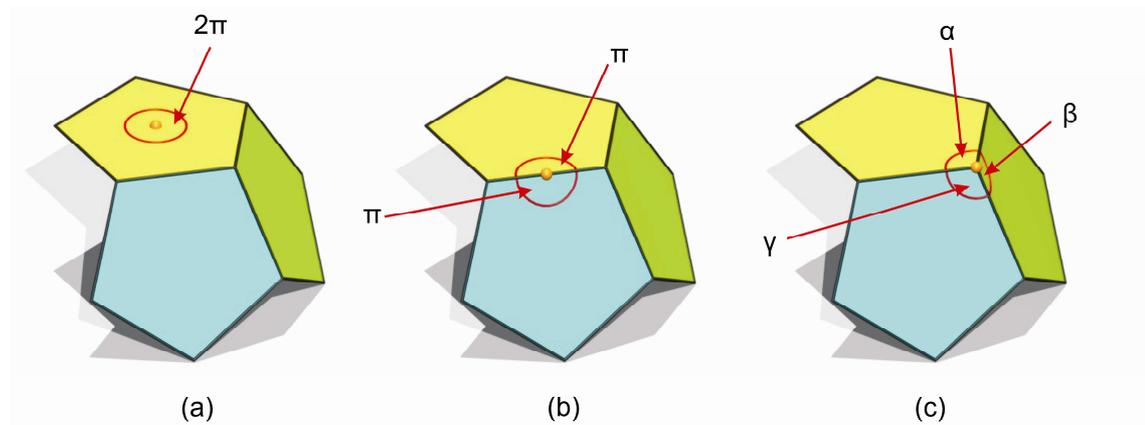


Abb. 11. Illustration der Flächenwinkel um einen Punkt im Inneren einer Seitenfläche (a), innerhalb einer Kante (b) und einer konvexen Körperecke (c).

Würde man eine polyedrische Fläche in der Umgebung einer konvexen Körperecke aufschneiden und verebnen, so entstünde ein keilförmiger Spalt, dessen Öffnungswinkel genau der Krümmung der Körperecke entspricht (siehe Abb. 12; man vergleiche derartige Punkte mit den oben erwähnten elliptischen Flächenpunkten). Derartige Punkte bezeichnet man folglich als positiv gekrümmt. Diese Eigenschaft spielt bei der

Abwicklung¹² konvexer Polyeder über die Kanten eine bedeutende Rolle, auf was noch in Kapitel 3 eingegangen wird. Verebnet man die Umgebung um Punkte im Inneren einer Seitenfläche oder innerhalb einer Kante, entstehen keine Spalten (man beachte, dass die Krümmung in diesen Punkten Null ist). Fasst man nicht konvexe Körperecken ins Auge, so ist die Summe der Flächenwinkel, die in diesen zusammenkommen größer als 2π , weshalb wir eine negative Krümmung erhalten. Umgebungen um solche Punkte können nicht überlappungsfrei verebnet werden, falls die in ihnen zusammentreffenden Kanten im Ganzen erhalten bleiben und die angrenzenden Seitenflächen nicht zerschnitten werden sollen.

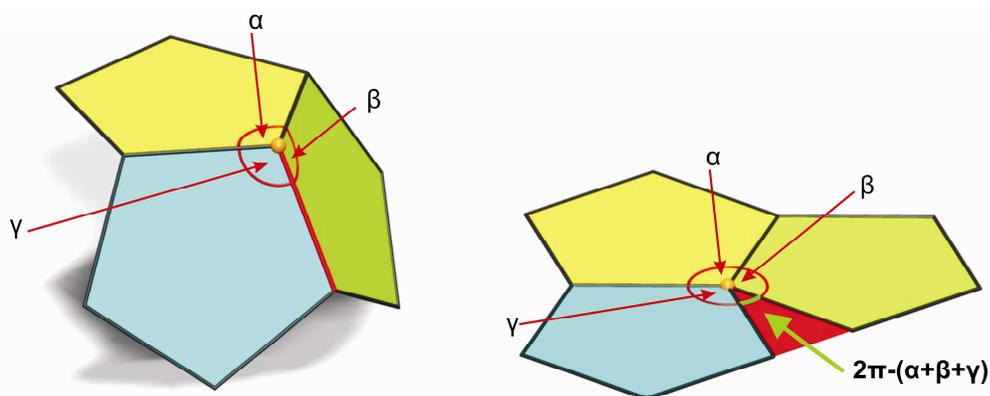


Abb. 12. Winkeldefizit (Krümmung) einer konvexen Körperecke, das beim Verebneten „sichtbar“ wird. Dabei wird die polyedrische Fläche entlang der rot eingefärbten Kante aufgeschnitten.

Beispiele für Krümmungen von Körperecken:

- Alle Körperecken eines Würfels: $\pi/2 = 90^\circ = 360^\circ - 3(90^\circ)$
- Alle Körperecken eines Dodekaeders: $\pi/5 = 36^\circ = 360^\circ - 3(108^\circ)$

Wie schon kurz erwähnt, ist die Krümmung polyedrischer Flächenpunkte das entscheidende Kriterium, ob und wie Polyeder verebnet werden können. Ein Teilbereich dieser Problematik wird in Kapitel 3 behandelt, nämlich die Abwicklung von Polyedern zu Netzen.

¹² Unter der Abwicklung in die Ebene verstehen wir eine isometrische Abbildung.

2.2.3 Innergeometrische Eigenschaften konvexer Polyeder

In diesem Abschnitt wollen wir ausgehend von kürzesten Pfaden auf Polyedern, die oft auch nur „Kürzeste“ genannt werden, und geodätischen Polygonen hin zur Gesamtkrümmung eines konvexen Polyeders gelangen. Für eine umfassende Abhandlung zu dieser Thematik möchten wir auf [VI., S. 64 ff], ein Werk von Alexandrow verweisen. Was wir für Polyeder beschreiben, macht er für Netze¹³, was jedoch meistens gleichwertig ist. An dieser Stelle sei nochmals vermerkt, dass wir anstelle polyedrischer Flächen nun etwas einschränkender nur mehr geschlossene, konvexe Polyeder in Betracht ziehen.

Definition 2.21 (Kürzeste). Eine Kurve auf einem Polyeder, die von allen Kurven auf diesem mit denselben Endpunkten die kleinste Länge besitzt, heißt Kürzeste.

Aus dieser Definition und der Beschaffenheit einer polyedrischen Fläche bzw. eines Polyeders können wir sofort folgern:

Satz 2.22. Eine Kürzeste setzt sich aus geradlinigen Strecken in den Polygonen (Seitenflächen) des Polyeders zusammen. Sie geht durch einen inneren Punkt einer Kante hindurch, ohne „gebrochen“ zu werden, d.h. die Winkel, die sie auf beiden Seiten mit der Kante einschließt, sind gleich (siehe dazu Abb. 13 (a)). Eine Kürzeste kann durch keinen Punkt gehen, dessen gesamter Flächenwinkel kleiner als 2π ist¹⁴.

Beweis: Ist A ein Punkt einer Kürzesten, so reduziert sich auf einem genügend kleinen Abschnitt AB diese Kürzeste auf eine geradlinige Strecke in einem Polygon des Polyeders. Das ist deswegen so, da die Umgebung eines Punktes des Polyeders sich aus Polygonwinkeln zusammensetzt, oder einen Teil des Inneren eines Polygons darstellt.

Wäre der gesamte Flächenwinkel um den Punkt A kleiner 2π , so würden die in A zusammentreffenden Strecken AX und AY einer Kürzesten mindestens auf einer Seite

¹³ Seine Definition eines Netzes siehe [VI., S. 44 ff]. Bereits dadurch wird der enge Zusammenhang zwischen der Krümmung von Polyedern und ihren Abwicklungen deutlich.

¹⁴ Eine Kürzeste kann jedoch stets durch einen negativ gekrümmten Punkt gehen, was wir nicht näher ausführen werden.

einen Winkel einschließen, der kleiner als π wäre (siehe Abb. 13 (c); dies wird besonders beim Verebnen sichtbar, wenn wir nur entlang von Kanten aufschneiden, wie abgebildet ist). Dann könnte man in der Nähe von A gelegene Punkte X_1 und Y_1 auf diesen Strecken auf dieser Seite durch eine Strecke verbinden und damit die Länge der Kürzesten reduzieren, was nach Definition jedoch ausgeschlossen ist.

Würde eine Kürzeste beim Passieren eines inneren Punktes B einer Kante gebrochen, so bildeten ihre in B zusammentreffenden Abschnitte auf einer Seite der Kürzesten einen Winkel, der kleiner als π wäre. Man könnte nach demselben Prinzip wie bei einem positiv gekrümmten Punkt die Kürzeste wieder verkürzen, was unmöglich ist (siehe Abb. 13 (b)).

□

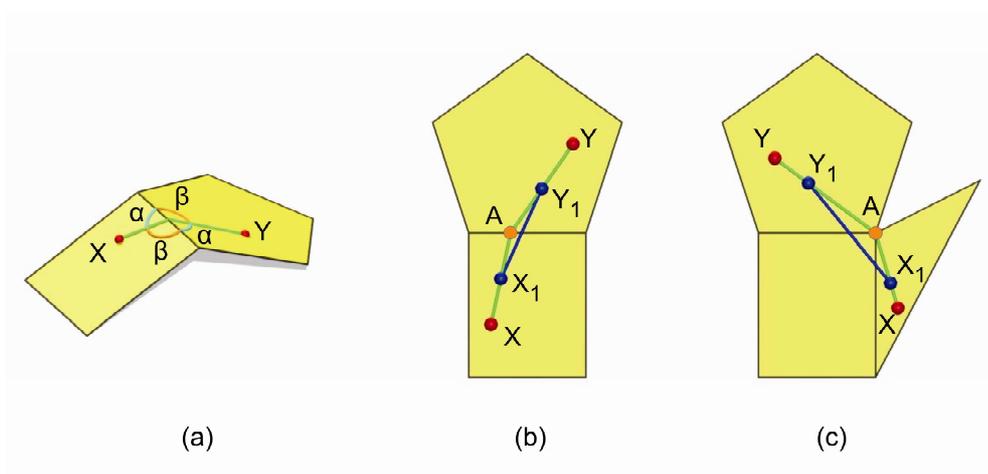


Abb. 13. Eine Kürzeste, die eine Kante passiert wird nicht gebrochen (a). Würde sie gebrochen, wäre eine „Abkürzung“ möglich, was ausgeschlossen ist (b, visualisiert als Verebnung). Eine Kürzeste kann keine Körperecke positiver Krümmung passieren, da sonst auch eine Verkürzung möglich wäre (c, in verebneter Form dargestellt).

Haben alle Körperecken eines Polyeders, auf die sich bekanntlich die ganze Krümmung konzentriert eine positive Krümmung, so spricht man von einem Polyeder positiver Krümmung. Dies sind genau die konvexen Polyeder.

Kommen wir nun zu einem Satz, der bei der Abwicklung von Polyedern eine wichtige Rolle spielt:

Satz 2.23. Auf einem Polyeder positiver Krümmung besitzt jede Kürzeste eine Umgebung, die man in die Ebene abwickeln kann. Dabei geht die Kürzeste in eine geradlinige Strecke über.

Beweis: Liegt ein Endpunkt der Kürzesten in einem Punkt A, der positiv gekrümmt ist, so kann man seine Umgebung längs einer von A ausgehenden Strecke aufschneiden und die Kürzeste in die Ebene abwickeln (der dabei entstehende keilförmige Spalt hat einen Öffnungswinkel, der der Krümmung in A entspricht).

Dieser Satz folgt aus Satz 2.22, nachdem eine Kürzeste nicht durch einen Punkt verlaufen kann, der einen gesamten Flächenwinkel kleiner als 2π hat. Daher hat auf einem positiv gekrümmten Polyeder jeder innere Punkt einer Kürzesten eine Umgebung, die sich in die Ebene abwickeln lässt. Gemäß Satz 2.22 erscheint eine Kürzeste in jeder solchen Umgebung als Strecke. Wählen wir endlich viele solcher Umgebungen, welche gemeinsam die ganze Kürzeste beinhalten, so erhält man eine Umgebung der Kürzesten, die man in die Ebene abwickeln kann, wobei sich die Kürzeste als Ganzes in eine Strecke verwandelt.

□

Ohne Beweis, der Ergänzung halber, wollen wir folgende Aussage einbringen (vergleiche [VI., S. 66 ff]):

Satz 2.24. Auf einem beliebigen Polyeder lassen sich je zwei Punkte durch eine Kürzeste verbinden.

Fügt man mehrere Kürzeste aneinander, so dass sie einen geschlossenen Streckenzug bilden, ohne dass sich Teile von diesem schneiden, erhält man ein so genanntes geodätisches Polygon, welches einen Teil des Polyeders einschließt bzw. abtrennt (da alle konvexen Polyeder vom Geschlecht Null sind).

Definition 2.25 (geodätisches Polygon). Einen beliebigen Teil eines konvexen Polyeders, der durch eine geschlossene, aus Kürzesten bestehende Linie begrenzt wird und zu einem Kreis homöomorph ist, heißt geodätisches Polygon.

Der ausschlaggebende Unterschied zu einem gewöhnlichen (ebenen) Polygon besteht darin, dass ein geodätisches Polygon in seinem Inneren Körperecken des Polyeders enthalten kann (siehe Abb. 14).

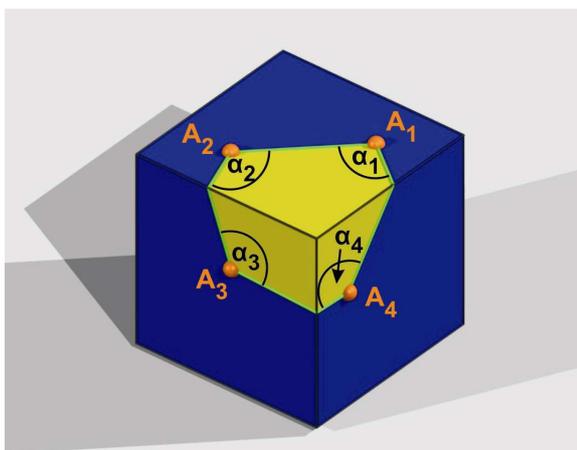


Abb. 14. Geodätisches Viereck mit Beschriftung der Innenwinkel auf einem Kubus, das eine Körperecke einschließt.

Der folgende Satz gibt den Unterschied zwischen der Winkelsumme eines ebenen und eines geodätischen Polygons an und stellt somit eine wichtige Vorbereitung für die gesamte Krümmung eines konvexen Polyeders dar, welche unmittelbar auf diese Aussage folgt.

Satz 2.26. Die Differenz zwischen der Winkelsumme eines geodätischen n -Ecks und derjenigen eines ebenen n -Ecks ist gleich seiner Krümmung, d.h. wenn $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Winkel eines geodätischen n -Ecks sind und $\omega_1, \dots, \omega_m$ die Krümmungen der Körperecken in seinem Inneren, so ist

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi = \sum_{j=1}^m \omega_j \quad (1)$$

Beweis: Wir zerlegen ein gegebenes geodätisches Polygon P derart in Dreiecke T_i , dass jedes von ihnen in einer Seitenfläche (einem Polygon) des Polyeders enthalten ist. Es ist dabei möglich, dass einige Ecken dieser Dreiecke, die auf dem Rand des Polygons liegen, keine Ecken von P sind. Wir betrachten sie jedoch auch als Ecken des Polygons P , was die linke Seite von (1) nicht ändert, da der Winkel an einer solchen Ecke gleich π ist.

Auf diese Weise kann es einige Ecken der Dreiecke T_i geben, die innerhalb von P liegen, aber keine Körperecken sind. Mittels „Zerlegung“ des geodätischen Polygons P in die Dreiecke T_i , fassen wir jedoch diese Ecken auch als Körperecken auf. Auch das ändert die Summen der Krümmungen nicht, da der gesamte Flächenwinkel um eine solche neue Körperecke 2π entspricht und ihre Krümmung daher Null ist.

Da jedes Dreieck T_i in einem Polygon des Polyeders enthalten und darum ein gewöhnliches ebenes Dreieck ist, beträgt seine Winkelsumme π . Ist f die Anzahl aller Dreiecke T_i , so ist die Summe aller ihrer Winkel gleich $f \cdot \pi$. Andererseits ist diese

Summe gleich der Summe der Winkel an allen Ecken auf dem Rand und im Inneren von P . Daher ist

$$f\pi = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^m \Theta_j, \quad (2)$$

Wobei Θ_j der gesamte Flächenwinkel um die entsprechende Ecke im Inneren von P ist. Bezeichnen wir mit k die Seitenzahl der Dreiecke T_i und mit e die Anzahl ihrer Ecken, so ist nach dem Euler'schen Satz $f - k + e = 1$ (vergleiche [VI., S. 58 ff] bzw. Satz 2.12). Zugleich ist die Anzahl aller Ecken gleich der Summe der Anzahlen der Ecken im Inneren und auf dem Rand, d.h. $e = m + n$. Folglich ist

$$f - k + m + n = 1. \quad (3)$$

Schließlich hat jedes Dreieck drei Seiten und nur die n auf dem Rand liegenden Seiten gehören zu einem Dreieck, jede innere Seite aber gehört zwei Dreiecken an. Daher ist

$$3f = 2k - n. \quad (4)$$

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (3) mit dem Faktor 2 und berücksichtigt, dass aufgrund der Gleichung (4) $2k = 3f + n$ ist, so erhält man

$$f = 2m + n - 2. \quad (5)$$

Setzen wir diesen Ausdruck für f in (2) ein, so ergibt sich

$$2\pi m + (n-2)\pi = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^m \Theta_j$$

oder

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi = \sum_{j=1}^m (2\pi - \Theta_j) = \sum_{j=1}^m \omega_j,$$

denn nach Definition der Krümmung gilt $\omega_j = 2\pi - \Theta_j$. □

Somit können wir zur abschließenden Bemerkung dieses Kapitels kommen, die sich auf die gesamte Krümmung eines konvexen Polyeders bezieht:

Satz 2.27. Die Gesamtkrümmung eines Polyeders, der zu einer Sphäre homöomorph ist, beträgt 4π .

Beweis: Bezeichnen wir den konvexen Polyeder mit R . Wir schneiden aus dem Inneren eines der Polygone (Seitenflächen), aus dem R besteht ein Polygon P aus. Wenn $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ seine Winkel sind, dann ist

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi. \quad (6)$$

Ist der Polyeder zu einer Sphäre homöomorph, so ist das Komplement $P' = R - P$ ein geodätisches Polygon. Nach Konstruktion enthält dieses Polygon alle Korperecken und seine Gesamtkrümmung ist daher gleich der Gesamtkrümmung des Polyeders. Ist Ω die Gesamtkrümmung und sind $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ die Winkel des geodätischen Polygons P' , so ist nach Satz 2.26

$$\sum_{i=1}^n \alpha'_i - (n-2)\pi = \Omega. \quad (7)$$

Aber jede Ecke des Polygons P' ist gleichzeitig eine Ecke des Polygons P und ihr gesamter Flächenwinkel beträgt 2π , weil sie innerhalb eines Polygons von R liegt. Folglich gilt

$$\alpha_i + \alpha'_i = 2\pi.$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^n \alpha'_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi n,$$

oder nach (6)

$$\sum_{i=1}^n \alpha'_i = (n+2)\pi.$$

Setzen wir dies in (7) ein, so erhalten wir schließlich

$$\Omega = 4\pi.$$

□

Das Wissen um das Krümmungsverhalten von Polyedern kann beim Verebnen dieser eindrucksvoll eingebracht werden. Besonders von Interesse sind die keilförmigen Spalten, die beim Verebnen von Umgebungen positiv gekrümmter Flächenpunkten (also konvexer Körperecken) auftreten, wenn diese entlang einer von diesem Punkt ausgehenden Kante aufgeschnitten werden. Dadurch können auch Überlappungen, ein wesentliches „Qualitätskriterium“ beim Abwickeln, der in einer konvexen Körperecke zusammentreffenden Seitenflächen vermieden werden, wenn man entlang einer Kante einen Schnitt tätigt. Wer jedoch glaubt, dass das überlappungsfreie Verebnen eines konvexen Polyeders aufgrund der auftretenden Spalten bei jeder Körperecke eine triviale und nicht nennenswerte Angelegenheit ist, der irrt, worauf im folgenden Kapitel eingegangen wird.

3. Abwicklung von Polyedern zu Netzen

3.1 Historisches und Definition eines Netzes

In diesem Kapitel wollen wir uns mit einer speziellen Abwicklungs- bzw. Verebnungsweise von konvexen Polyedern befassen, nämlich der Abwicklung zu Netzen. Dabei dürfen weder die Seitenflächen, noch die Kanten des Polyeders durchtrennt werden. Welche Regeln beim Aufschneiden erlaubt sind, folgt in Kürze. Davor kommt noch ein kurz gehaltener historischer Umriss.

Eine Vorreiterrolle zur Thematik der Netze wird Albrecht Dürer (1471 - 1528) zugeschrieben. Im Jahr 1525 präsentierte er in seinem Buch „Underweysung der Messung“ eine Beschreibung von zahlreichen Polyedern, die er in entfalteter, verebneter Form darstellte und die heutzutage als Netze bezeichnet werden¹⁵. Er gab in der Beschaffenheit seiner Polyederabwicklungen stets darauf Acht, dass keine Überlappungen auftraten, selbst wenn es sich um komplexere Beispiele handelte. Allerdings gibt es keinen Beleg dafür, dass Dürer diese Eigenschaften in einer präzisen Form formulierte. Grundsätzlich geht es darum, eine **Kantenabwicklung** als Entfaltung (oder Abwicklung¹⁶) der Oberfläche eines Polyeders in die Ebene so zu definieren, dass die Oberfläche zu einem ebenen Polygon wird, abgegrenzt durch Segmente, welche von den Kanten des Polyeders stammen. Anders ausgedrückt, kann eine derartige Abwicklung als das Ergebnis nach dem Aufschneiden entlang einer Reihe von Kanten und geeigneten Achsen um Kanten betrachtet werden. Wir möchten, dass hierbei drei charakteristische Merkmale erfüllt werden, die alle durch Dürers Zeichnungen motiviert sind und in folgender Definition zusammengefasst sind.

Definition 3.1 (Netz eines Polyeders). Wir nennen eine Abwicklung und Verebnung eines Polyeders ein Netz des selbigen, wenn gilt:

1. Die Abwicklung ist ein einziges, einfach zusammenhängendes Stück in der Ebene.

¹⁵ Die Original – Druckstöcke zu diesen Zeichnungen sind übrigens im Besitz der Albertina in Wien und waren kürzlich bei einer Ausstellung im Mumok zu sehen.

¹⁶ Wir wollen die Begriffe „Entfaltung“, „Abwicklung“ und „Verebnung“ als gleichwertig erachten.

2. Der Rand der Abwicklung besteht aus (ganzen) Kanten des Polyeders. Die Abwicklung ist also eine Vereinigung der polyedrischen Seitenflächen.
3. Die Abwicklung hat keine Selbstüberlappungen, d.h. der Rand stellt ein „einfaches Polygon“ dar (Definition 2.4).

Wir wollen nun der Frage nachgehen, unter welchen Bedingungen Polyeder zu Netzen abgewickelt können und unter welchen dies nicht funktioniert. Wir verlangen also eine Abwicklungsform, sodass sie die Auflagen aus Definition 3.1 erfüllt. Der schwierigste Punkt bei dieser Problematik betrifft die geforderte Überlappungsfreiheit. Bevor wir uns Typen von Polyedern zuwenden, die nicht über die Kanten zu Netzen abgewickelt werden können und später die Kantenabwicklung konvexer Polyeder betrachten, folgen zunächst einige, für diese Passage wichtige Bgriffe aus der Graphentheorie.

3.2 Aus der Graphentheorie

Beim Abwickeln und Verebnen über die Kanten ist es zu aller erst notwendig, den Polyeder entlang einer Reihe von Kanten aufzuschneiden, um ihn öffnen zu können. Diese Schnittfolge kann man als Graph auffassen, der je nach Polyedertyp und Art des Aufschneidens eine gewisse Beschaffenheit aufweist. Die folgenden elementaren Aussagen stammen aus [XI.] bzw. [4], in denen auch weiterführende Informationen nachzulesen sind.

Definition 3.2 (Graph). Ein Graph G besteht aus einer endlichen Menge V von Knoten (oder auch Ecken genannt), einer endlichen Menge E von Kanten und einer Vorschrift, welche jeder Kante genau zwei (verschiedene oder gleiche) Knoten zuordnet.

Falls die Enden einer Kante in einem Knoten zusammenfallen, bezeichnet man diese als „Schlinge“. Der „Grad“ eines Knoten V ist die Anzahl der Kanten, die ihn als Endpunkt haben, wobei Schlingen bei V doppelt gezählt werden.

Man kann weiters eine Unterscheidung zwischen gerichteten und ungerichteten Graphen durchführen. Bei gerichteten Graphen spielt die Reihenfolge der verbundenen

Knoten eine Rolle, bei ungerichteten Graphen nicht. Eine gerichtete Kante im erstgenannten Graphentypus wird auch als „Pfeil“ bezeichnet.

Beim Visualisieren eines Graphen hat man viele Freiheiten. So müssen etwa die Kanten nicht zwingend als geradlinige Strecken dargestellt werden, weshalb sie dann manchmal auch als „Bögen“ bezeichnet werden. Auch Überkreuzungen von Kanten sind nicht verboten. Es müssen lediglich die in der Definition angegebenen Vorschriften

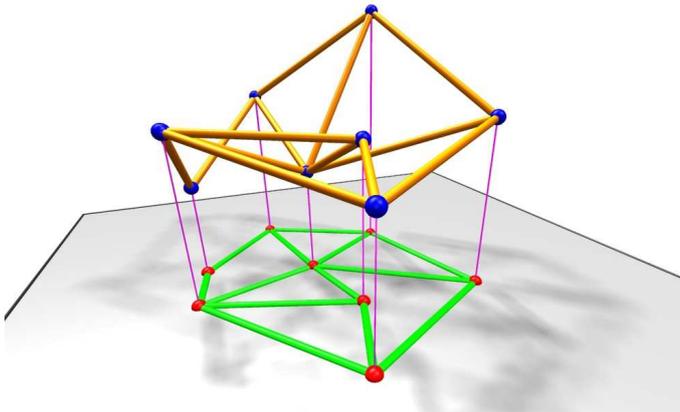


Abb. 15. *Plättbarer Graph im dreidimensionalen Raum und seine Einbettung in die Ebene zu einem planaren Graphen.*

eingehalten werden. Ist jedoch eine Darstellung möglich, bei der sich alle Kanten von G nur in den Ecken treffen und niemals überschneiden, so bezeichnet man G als „plättbar“ und wir nennen den in die Ebene eingebetteten Graphen einen „planaren“ oder „ebenen“ Graphen. Dabei wird die Ebene durch die Einbettung in zusammenhängende Gebiete

getrennt, die von den Kanten des Graphen begrenzt werden. Existiert eine Darstellung eines planaren Graphen, bei der alle Knoten auf dem Rand ein und desselben Gebiets liegen, so bezeichnet man diesen Graph als „kreisartig planar“. In äquivalenter Weise kann man einen Graph als kreisartig planar bezeichnen, wenn man alle seine Knoten auf einem Kreis anordnen kann und alle seine Kanten im Inneren der durch den Kreis festgelegten Kreisscheibe liegen.

Eine Kante eines beliebigen zusammenhängenden Graphen G heißt „Brücke“, falls G nach Entfernen dieser in zwei Komponenten zerfällt.

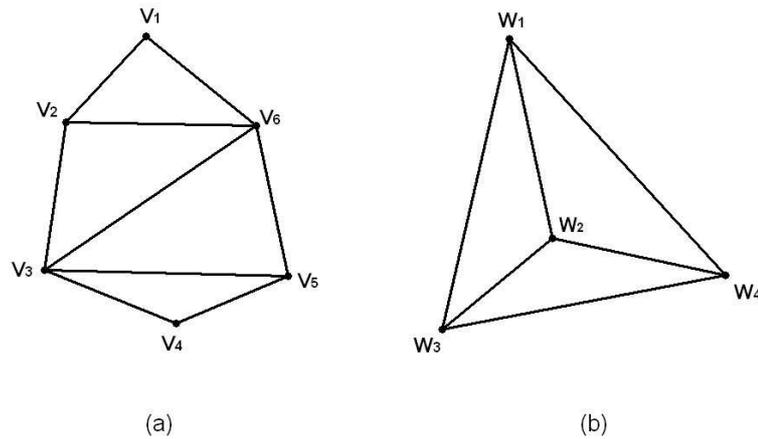


Abb. 16. Kreisartig planarer Graph (a) und kleinstmöglicher planarer Graph, der nicht kreisartig planar ist (b).

Definition 3.3 (Weg). Ein Weg ist ein nichtleerer Graph $P = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ der Form

$$\mathbf{V} = \{X_0, \dots, X_k\}, \quad \mathbf{E} = \{X_0X_1, \dots, X_{k-1}X_k\},$$

wobei alle X_i paarweise verschieden sind. Die Knoten X_0 und X_k bezeichnet man als Endknoten von P ; sie sind durch P verbunden. Die Knoten X_1, \dots, X_{k-1} sind die inneren Knoten von P .

Definition 3.4 (Zyklus). Ein Weg in einem Graphen, der mit dem gleichen Knoten beginnt und endet, heißt ein Zyklus.

Eine Kante kann nur dann ein Teil eines Zyklus sein, wenn sie keine Brücke ist. Nun kommen wir zu einem Graphentyp, der eine besondere Rolle beim Aufschneiden von Polyedern innehat.

Definition 3.5 (Baum, Blatt und Wald). Ein zusammenhängender Graph ohne Zyklen heißt ein Baum. Die Knoten vom Grad 1 eines Baumes heißen seine Blätter. Einen nicht zusammenhängenden Graphen, der aus Bäumen besteht nennt man Wald.

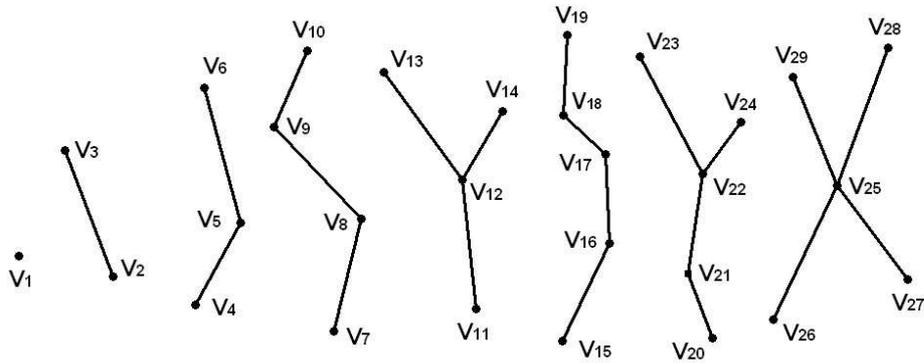


Abb. 17. Alle möglichen Bäume mit höchstens 5 Knoten. Die Endknoten der Bäume bezeichnet man als Blätter. Die abgebildeten Bäume zusammen bilden einen Wald.

Ohne Beweis, zur besseren Übersicht, seien hier noch ein paar Eigenschaften eines Baumes genannt:

Satz 3.6. Die folgenden Aussagen sind äquivalent für einen Graphen T :

- i. T ist ein Baum;
- ii. Zwischen je zwei Knoten enthält T genau einen Weg;
- iii. T ist minimal zusammenhängend, d.h. T ist zusammenhängend, aber für jede Kante e von T ist $T - e$ nicht zusammenhängend;
- iv. T ist maximal zyklensfrei, d.h. T hat keine Zyklen, aber für je zwei nicht benachbarte Knoten X, Y enthält $T + XY$ einen Zyklus.

Die nächste Definition in diesem Unterkapitel handelt von Spannbaum. Das ist eine Graphenform, welche die Schnittfolge auf einem Polyeder letztendlich darstellen sollte, auf was im Folgenden näher eingegangen wird.

Definition 3.7 (Spannbaum). Ein Baum $T \subseteq G$ heißt spannender Baum, oder kurz Spannbaum von G , wenn er ganz G aufspannt, d.h. wenn T und G dieselbe Knotenmenge haben.

Ein Spannbaum wird in der Literatur manchmal auch (eindimensionales¹⁷) „Gerüst“ genannt. Wenn G ein zusammenhängender Graph ist, so könnte man einen Spannbaum

¹⁷ Mit eindimensional ist gemeint, dass das Gerüst aus Knoten und Kanten besteht.

nach [5] auch als einen maximal in G enthaltenen Baum betrachten, der alle Knoten von G umfasst und eine minimale Kantenanzahl aufweist, was sich wiederum mit Satz 3.6 deckt. Insbesondere besitzt also jeder zusammenhängende Graph einen Spannbaum.

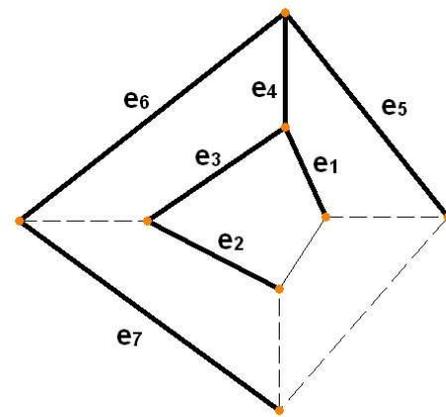


Abb. 18. Die fett markierten Kanten bilden einen möglichen Spannbaum bzw. ein mögliches Gerüst des Graphen.

Kommen wir nun zur Verknüpfung der Graphentheorie mit der Kantenabwicklung von Polyedern. Die Kantenfolge, entlang der Polyeder aufgeschnitten wird, muss alle Körperecken derart umfassen, dass jede von ihnen zumindest von einer Schnittkante erreicht wird. Ansonsten würde eine Körperecke ihre 3D-Struktur beibehalten und könnte nicht verebnet werden. Wir verlangen dazu, dass die Körperecken „real“ vorhanden sind, worunter gemeint ist, dass sie eine von Null verschiedene Krümmung haben, da Nullkrümmungspunkte keine einfallenden Schnittkanten benötigen würden, um verebnet zu werden. Folglich bilden die Schnittkanten einen Graphen, den wir als „Spann-Graphen“ des Polyeders bezeichnen und der durch seine Kanten und Körperecken gebildet wird. Um ein einzelnes Stück zu erhalten, können die Kanten des Graphen keinen Zyklus enthalten, da ein solcher die Abwicklung zerteilen würde. Daher bilden die Schnittkanten zumindest einen Wald. Um schließlich ein einfaches Polygon zu erhalten, muss die Menge der Schnittkanten zusammenhängen, da diese den Rand des verebneten Polygons bilden und der Rand zusammenhängt. Aus diesem Grund bilden die Schnittkanten einen Spannbaum. Dieses einfache Ergebnis halten wir in einem Satz fest:

Satz 3.8. Die Schnittkanten einer Abwicklung über die Kanten eines konvexen Polyeders zu einem einfachen Polygon bilden einen Spannbaum des Polyeders¹⁸.

Verlangen wir ein einzelnes, zusammenhängendes Stück und bestehen nicht darauf, dass es einfach zusammenhängend ist, dann ist es denkbar, dass dies durch einen umspannenden Wald erreichbar ist. Tatsächlich kann diese Möglichkeit für nicht

¹⁸ Anstatt Spannbaum des Polyeders könnte man wie kurz erwähnt, auch eindimensionales Gerüst des Polyeders sagen.

konvexe Polyeder realisiert werden. In Abb. 19 ist ein derartiges Beispiel angeführt, welches von Andrea Mantler stammt (siehe dazu [XII.]). Die Verebnung in Abb. 19 (d) entsteht mittels zweier disjunkter Bäume, die in diesem Zusammenhang auch „Schnittbäume“ genannt werden. Einer der beiden Wege, entlang dessen aufgeschnitten wird, besteht aus zwei Kanten, die die „Gipfel“ verbinden. Der andere Weg formt ein „H“, damit die Basis aufgeschnitten werden kann.

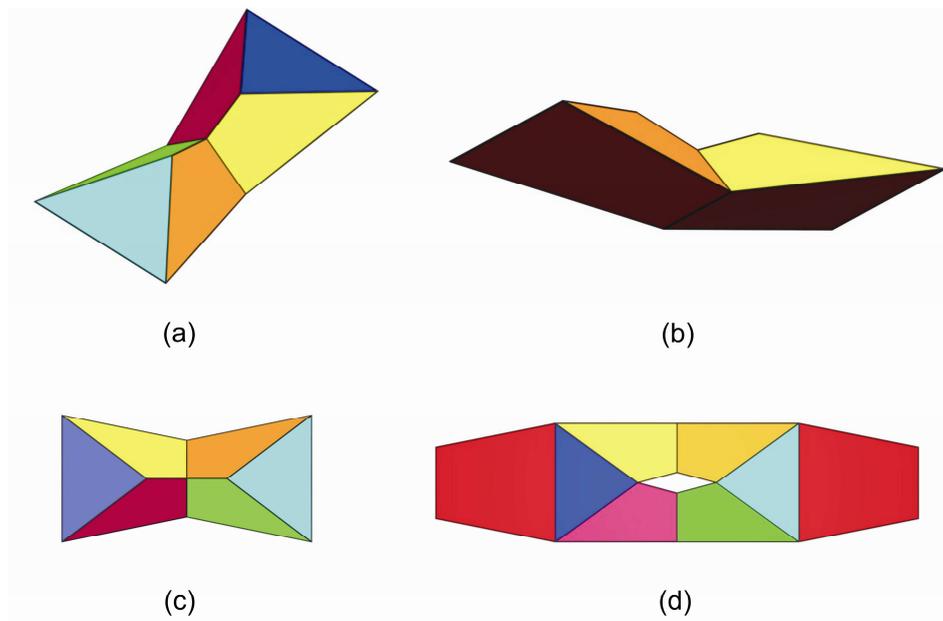


Abb. 19. Zwei verschiedene Ansichten eines nicht konvexen Polyeders in (a) und (b), Grundriss des Polyeders (c) und Abwicklung in (d), die die Schnittkanten ersichtlich macht.

Aufgrund dieses Beispiels könnte die Frage aufkommen, ob ein ähnliches Phänomen für konvexe Polyeder in Erscheinung treten kann. Doch das ist nicht möglich, wie folgender Satz besagt:

Satz 3.9. Die Schnittkanten einer Kantenabwicklung eines konvexen Polyeders zu einem einzelnen, zusammenhängenden Stück bilden einen Spannbaum des Polyeders.

Auf den Beweis wollen wir hier verzichten und anstatt dessen auf [X., S. 312] verweisen, weil dafür noch zusätzliche Kenntnisse aus der Differentialgeometrie von Nöten sind, auf die wir nicht eingegangen sind, wie etwa das Theorem von Gauß-Bonnet. Dieses ist zum Beispiel in [X., S. 304 ff] nachzulesen. Kommen wir zum Schluss dieses Teilkapitels noch zu einer Aussage über das Aufschneiden von nicht konvexen Polyedern, die wir für den Beweis von Satz 3.13 auf Seite 38 benötigen:

Lemma 3.10. Ist V eine Körperecke eines Polyeders \mathbf{P} mit negativer Krümmung, dann muss jede Schnittfolge von \mathbf{P} mehr als eine Schnittkante hin zu V haben.

Beweis: Nehmen wir an, eine Schnittfolge \mathcal{C} beinhaltet nur einen Schnitt hin zu V . Sei $N := \mathbf{P} \cap \mathbf{K}$, wobei \mathbf{K} eine kleine Kugel um V ist. Die Umgebung N von V wird dann zu einer kleinen Scheibe abgewickelt, die sich gemäß der Krümmung in V selbst überlappt.

□

3.3 Unabwickelbare Polyeder

3.3.1 Polyeder mit nicht konvexen Seitenflächen

Nicht alle Polyeder können entlang den Kanten aufgeschnitten und zu Netzen entfaltet werden. Dafür gibt es einfache, aber auch schwieriger einsehbare Typen von Polyedern. Leicht einsehbare Beispiele, die nicht wie gefordert zu Netzen abwickelbar sind, stellen Exemplare mit teilweise nicht konvexen Seitenflächen dar. Ein triviales Fallbeispiel, ein so genannter orthogonaler Polyeder, ist in Abb. 20 (a) zu sehen. Die kleinere, aufgesetzte Schachtel müsste so abgewickelt werden, dass sie ins Innere des Loches auf der oberen Seitenfläche der unteren Schachtel passt, was jedoch unmöglich ist, da dafür zu wenig Platz vorliegt. Dabei fällt auf, dass der Polyeder eine nicht einfach zusammenhängende Seitenfläche besitzt.

Abb. 20 (b), ebenfalls ein orthogonaler Polyeder, zeigt ein noch enger eingeschränktes Exemplar, dessen Seitenflächen homöomorph zu einer Kreisscheibe sind, d.h. es gibt keine Löcher mehr. Jedoch kann man auch hier keine Kantenabwicklung durchführen, was nicht mehr ganz so leicht verständlich wie beim ersten Beispiel erscheint. Es sind aber wiederum die notwendigen Platzverhältnisse beim Abwickeln nicht gegeben.

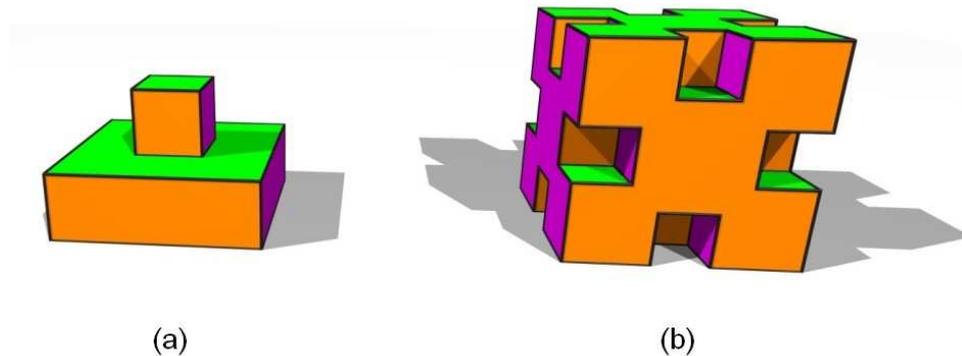


Abb. 20. Zwei orthogonale Polyeder, die keine Kantenabwicklung zu einem Netz besitzen. Der Polyeder in (a) weist eine nicht einfach zusammenhängende Seitenfläche auf. Das Exemplar in (b) besteht aus lauter Seitenflächen, die homöomorph zu einer Kreisscheibe sind und dennoch nicht abwickelbar ist.

Deutlich komplizierter wird die Problemstellung, wenn man Polyeder heranzieht, die gänzlich aus konvexen Seitenflächen zusammengesetzt sind. Dass es auch unter diesen Vertreter gibt, die nicht ohne Überlappung abgewickelt werden können, wurde erst 1999 gezeigt und wird im nachfolgenden Punkt beschrieben.

3.3.2 Nicht konvexe Polyeder mit konvexen Seitenflächen

Wie schon in Kapitel 3.3.1 erwähnt, führt das Weglassen der Konvexitätsbedingung bei Polyedern zu Beispielen, die keine überlappungsfreie Kantenabwicklung zu einem einzelnen Stück besitzen, wie etwa in Abb. 20 zu sehen ist. Auffallend ist, dass hierbei unter anderem auch nicht konvexe Seitenflächen verwendet werden. Die Frage ist nun, ob es einen Polyeder vom Geschlecht Null gibt, der zur Gänze aus konvexen polygonalen Seitenflächen besteht, welcher nicht zu einem Netz entfaltet werden kann. Die Antwort dafür lautet „ja“. Als Beispiel möchten wir hier das unabwickelbare „stachelige Tetraeder“ von Bern und anderen vorstellen, welches auch in [XII.] beschrieben wird. Dabei handelt es sich um sternförmige Polyeder mit aufgesetzten Stacheln, welche ausschließlich durch Dreiecke begrenzt werden.

Im Mittelpunkt dieses Beispiels steht eine offene polyedrische Oberfläche, die nicht über die Kanten verebnet werden kann. Diese bezeichnen wir als „Hut“ und kann als verwandt zum „Schachtel auf der Schachtel“ – Beispiel (Abb. 20 (a)) betrachtet werden.

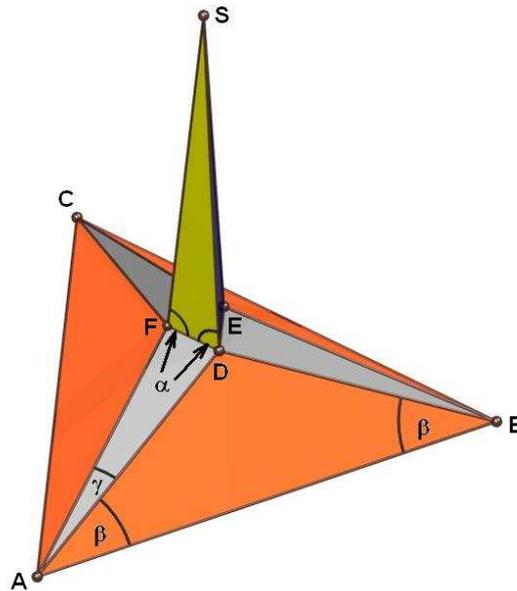


Abb. 21. Offener, aus Dreiecken bestehender „Hut“, der nicht über die Kanten abgewickelt werden kann.

Der Punkt S, die Spitze Hutes, weist eine positive Krümmung auf, wohingegen die Körperecken D, E, F mit einer negativen Krümmung behaftet sind. Am Rand des Hutes befinden sich die so genannten „Hutecken“ A, B, C. Die Figur setzt sich aus neun gleichschenkeligen Dreiecken zusammen, davon drei mit dem Basiswinkel α , die den Stachel bilden, drei mit dem Basiswinkel β und drei weitere mit dem Öffnungswinkel γ (siehe Abb. 21). Das Dreieck ABC ist aufgrund der Offenheit des Polyeders nicht vorhanden, ebenso wie das Dreieck DEF.

Aufgrund dieser Beschaffenheit bezeichnen wir diese Figur auch als „triangulierten Hut“. Man kann ihn durch drei Parameter (den Winkeln) α , β und γ angeben, wobei die genaue Größe des Huts unerheblich ist, d.h. durch diese Parameterform erfolgt lediglich eine Einteilung in Klassen. Zudem müssen die Winkel α , β und γ den folgenden Bedingungen genügen:

- $30^\circ \leq \alpha < 90^\circ$, da sonst die Hutspitze S nicht konstruierbar ist bzw. der Stachel des Hutes „eingestülpt“ wäre,
- $30^\circ \leq \beta + \gamma/2 < 90^\circ$, da sonst die Basis des Hutes kleiner oder gleich der Basis des aufgesetzten Stachels ist, was wir ausschließen wollen,
- $\gamma < 60^\circ$, aus denselben Gründen wie im zweiten Punkt.

Aus diesen Einschränkungen und der damit verbundenen Form des Hutes können wir folgende Aussagen treffen, die auch in [3, S. 6 ff] nachzulesen sind:

Lemma 3.11. Die Körperecken D, E, F haben negative Krümmung genau dann, wenn $\alpha > \beta + \gamma/2$ ist. Insbesondere existiert für jede zulässige Wahl von β und γ (laut obigen Beschränkungen) eine zulässige Auswahl von α , die dieser Eigenschaft genügt.

Beweis: Die erste Behauptung folgt einfach durch jeweilige Aufsummierung der Flächenwinkel bei D, E bzw. F und der Überprüfung, wann diese Summe 2π übersteigt. Es gilt

$$2\alpha + (\pi - 2\beta) + \frac{2(\pi - \gamma)}{2} = 2\pi + 2 \left[\alpha - \left(\beta + \frac{\gamma}{2} \right) \right] > 2\pi.$$

Nun wird α lediglich durch die geforderte Bedingung $30^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ und durch die Ungleichung $\alpha > \beta + \gamma/2$ für eine negative Krümmung beschränkt. Da $30^\circ \leq \beta + \gamma/2$ vorausgesetzt wird, sind diese beiden Konditionen genau dann erfüllt, wenn $\beta + \gamma/2 < \alpha < 90^\circ$, was möglich ist, da $\beta + \gamma/2 < 90^\circ$. Der Parameterwert α kann sozusagen in die letztgenannte Ungleichung „dazwischen geschoben“ werden.

□

Eine weitere Eigenschaft von Hüten ist, dass die Körperecken D, E, F auch negative Krümmung haben können, wenn sogar eines der Dreiecke, aus dem der Stachel besteht, weggenommen wird.

Lemma 3.12. Die Körperecken D, E, F eines Huts haben jeweils auch negative Krümmung, wenn ein an die jeweilige Körperecke einfallendes Dreieck des Stachels entfernt wird, vorausgesetzt $\alpha > 2\beta + \gamma$. Insbesondere für jedes β und γ mit $30^\circ \leq \beta + \gamma/2 < 45^\circ$ und $\gamma < 60^\circ$ gibt es eine gültige Auswahl von α , welche diesen Eigenschaften genügt.

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus Lemma 3.11 durch Halbierung der Variable α , da nur ein einzelnes α in der Summe der Winkel inkludiert ist. Die Einschränkungen

verändern sich nun zu $30^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ und $\alpha > 2\beta + \gamma$. Da $30^\circ \leq \beta + \gamma/2$ vorausgesetzt wird, sind diese äquivalent zu $2\beta + \gamma < \alpha < 90^\circ$, was erreichbar ist, da wir $\beta + \gamma/2 < 45^\circ$ verlangen.

□

Beispiel: Gegeben ist ein Hut mit den Winkeln $\alpha = 81^\circ$, $\beta = 30^\circ$ und $\gamma = 20^\circ$. Entfernen wir nun ein Dreieck des Stachels, etwa das Dreieck DSF, dann gilt für die Körperecke D bzw. F

$$\alpha + (\pi - 2\beta) + 2 \frac{\pi - \gamma}{2} = 361^\circ.$$

Es liegt bei diesen beiden Körperecken, wie in Lemma 3.12 beschrieben, immer noch negative Krümmung vor.

Satz 3.13. Hüte, welche den Bedingungen aus Lemma 3.12 genügen, sind offene, von konvexen Seitenflächen begrenzte Polyeder, die nicht über die Kanten zu einem einzelnen nicht überlappenden Stück abgewickelt werden können.

Beweis: Wir erhalten durch das Aufschneiden entlang der Kanten, die nicht zum Rand gehören, stets einen Wald, der die Körperecken D, E, F durchläuft sowie die Spitze S enthält. Jede verbundene Komponente des Schnitts ist ein Baum, der mindestens zwei Blätter haben muss, was den Enden des Baums entspricht. Da die Körperecken D, E, F nach Lemma 3.11 negative Krümmung haben, können sie nach Lemma 3.10 keine Blätter des Baumes sein. Wenn der Baum zwei Hutecken (aus der Menge $\{A, B, C\}$) als Blätter hätte, würde er die Oberfläche in mehr als ein Stück zerteilen. Daher kann höchstens eine Hutecke ein Blatt jeder verbundenen Komponente der Schnittfigur sein. Folglich muss der Schnitt ein einzelner Pfad (ohne Verzweigungen) von einer Hutecke zur Spitze S sein, der die Körperecken D, E, F passiert.

Für diesen Pfad gibt es nur zwei mögliche Variationen, welche in Abb. 22 gezeigt werden.

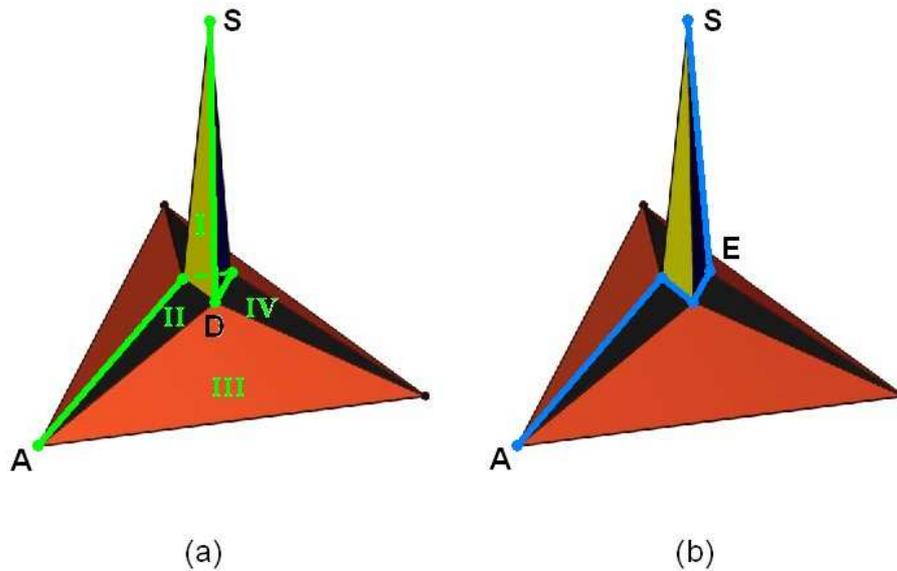


Abb. 22. Zwei mögliche Schnittbäume ausgehend von einer Hutecke, hier A , zur Spitze S .

Da nun der Stachel mit dem restlichen Polyeder in Zusammenhang bleibt, muss es ein Stacheldreieck I geben, welches mit einem Dreieck II des Hutrandes in Verbindung bleibt (siehe Abb. 22 (a)). Da es nur eine Schnittlinie zu einer Hutecke gibt, kann diese mit einer der beiden Körperecken zwischen I und II nicht verbunden sein, beispielsweise mit der Körperecke D (linkes Bild). Aus diesem Grund bleiben die Dreiecke II, III und IV des Hutrandes, die bei D zusammentreffen, sowie das Stacheldreieck I bei der Abwicklung entlang den eintreffenden Kanten bei D zusammen. Summieren wir genau die Flächenwinkel dieser in D zusammentreffenden Seitenflächen auf, so erhalten wir nach Lemma 3.12 einen Gesamtwinkel von mehr als 2π , was eine Überlappung verursacht. □

Da der Rand eines Huts ein gleichseitiges Dreieck bildet, können wir vier identische Hüte mit Hilfe dieser Dreiecke zu einem geschlossenen Polyeder zusammenfügen, welches wir dann als „stacheliges Tetraeder“ bezeichnen. Dabei kann das von den Dreiecken gebildete regelmäßige Tetraeder als Grundgerüst für diese Figur gesehen werden. Von dem stacheligen Tetraeder

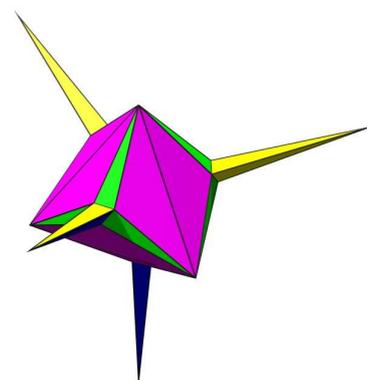


Abb. 23. Stacheliges Tetraeder, zusammengesetzt aus vier Hüten.

behaupten wir, dass es über keine Kantenabwicklung verfügt.

Satz 3.14. Stachelige Tetraeder sind von konvexen Seitenflächen begrenzte, geschlossene Polyeder, die unter Beachtung der Vorgaben und Einschränkungen aus Lemma 3.12 für die beteiligten Hüte, keine Kantenabwicklung besitzen.

Beweis: Betrachten wir einen Schnittbaum T für diese Figur, welcher keine Überlappungen verursacht. Schränkt man T auf einen der Hüte ein, kann er nicht wie die Pfade aus Abb. 22 aussehen (da wir dann keinen Schnittbaum mehr für die Gesamtfigur haben). Betrachten wir nun die Möglichkeiten innerhalb eines Hutes unter Verwendung der Schnittbäume aus Abb. 24, um zur Schlussfolgerung zu kommen, dass es einen Pfad für T innerhalb des Hutes gibt, der zwei Hutecken verbindet. Für die Hutspitze S muss es mittels T eine Verbindung geben, die aus dem Hut hinaus führt. Daher muss es einen Pfad von T geben, der ausgehend von S durch eine Hutecke geht, zum Beispiel durch B . Passiert dieser Pfad alle drei Stachelbasisecken (das sind die vorher bezeichneten Körperecken D, E, F), verbindet jede zusätzliche Kante von T zwei Hutecken, wobei es mindestens eine solche geben muss, um die Figur in Abb. 22 zu vermeiden. Nehmen wir an, dass der Pfad von S nach B lediglich durch eine Stachelbasisecke geht, etwa E (siehe Abb. 24 (a)), oder durch zwei Stachelbasisecken D und E verläuft (siehe Abb. 24 (b)).

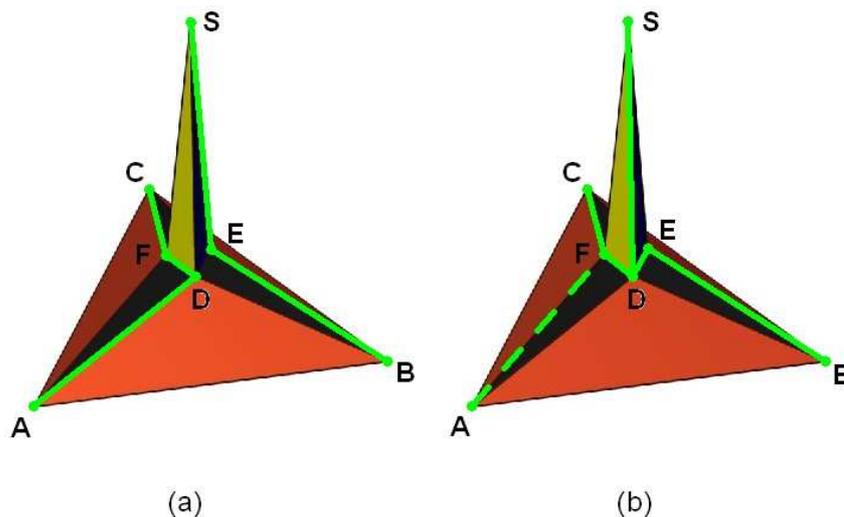


Abb. 24. Mögliche Einschränkungen eines Schnittbaumes auf einen Hut bei einem stacheligen Tetraeder.

Im ersten der beiden Fälle müssen D und F mittels T verbunden werden, jedoch kann keiner der beiden ein Blatt sein, da sie negative Krümmung aufweisen. Folglich muss es einen Pfad von A nach C geben, wie in Abb. 24 (a) gezeigt wird. Im zweiten Fall muss noch die Stachelbasisecke F, die wieder kein Blatt sein kann, in T eingebunden werden. Der Pfad durch F kann entweder zu C oder zu A (oder zu beiden) führen. Wir haben aber in jedem Fall einen Pfad zwischen zwei Hutecken.

Werfen wir wieder den Blick auf die gesamte Figur, also das stachelige Tetraeder. Die vier Hutecken bilden, wie bereits erwähnt, die Körperecken des zugrunde liegenden regelmäßigen Tetraeders. Sie sind durch vier Pfade verbunden, die innerhalb der Hüte, wie eben beschrieben, jeweils von einer Hutecke zu einer anderen verlaufen, und haben deswegen keine gemeinsamen Schnittkanten. Betrachtet man einen jeden dieser vier Pfade als Bogen, erkennen wir, dass unmöglich ein Zyklus vermieden werden kann, denn ein Baum mit n Knoten, kann nur $n-1$ Bögen¹⁹ haben. Dies verletzt Satz 3.9 und zeigt, dass ein stacheliges Tetraeder keine Kantenabwicklung zu einem Netz besitzt.

□

Lässt man die Einschränkung fallen, das stachelige Tetraeder entlang der Kanten aufzuschneiden, existieren überlagerungsfreie Verebnungen. In Abb. 25 ist ein Beispiel einer derartigen Abwicklung zu sehen. Dabei wurden die vier Stacheln nach außen befördert. Man sieht, dass dafür vier Dreiecke zerschnitten und von jedem dieser noch zusätzlich ein Streifen abgetrennt wurde (von jeder Farbe eines). Bei weitem vier Dreiecken wurde eine Spitze abgeschnitten, so dass die Abwicklung zusammenhängend ist.

¹⁹ Einen Beweis zu dieser Aussage siehe in [XI., S. 16].

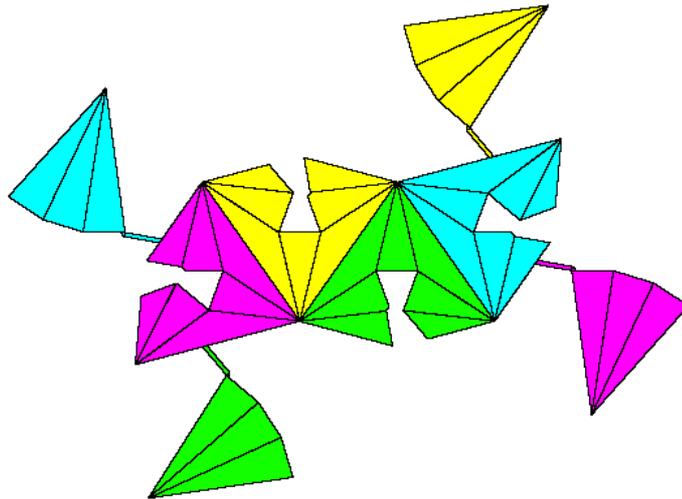


Abb. 25. Allgemeine Abwicklung eines stacheligen Tetraeders (Quelle: [3, S. 11]).

Eine interessante, bis heute ungeklärte Frage ist, ob jeder geschlossene Polyeder eine allgemeine Abwicklung zu einem nicht überlappenden Polygon hat. Tatsächlich ist kein Beispiel bekannt, dass nur mit Überlappung abgewickelt werden kann.

Hingegen ist es einfach, offene polyedrische Flächen zu konstruieren, die kein Netz haben.

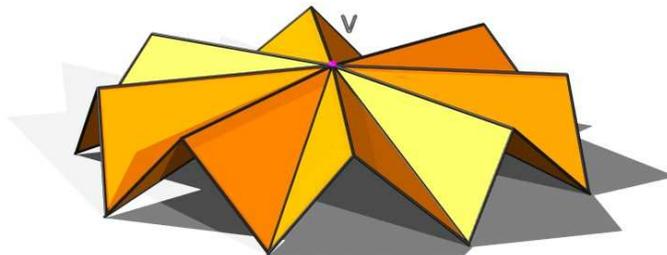


Abb. 26. Offene polyedrische Fläche, die keine allgemeine Verebnung zu einem Netz hat.

Satz. 3.15. Das offene Polyeder aus Abb. 26 hat keine allgemeine Verebnung, wenn V negative Krümmung aufweist.

Beweis: Bei einem Schnitt können die Blätter des Schnittbaums nur am Rand liegen, da die einzige innere Körperecke V negativ gekrümmt ist. Weil ein Baum mindestens zwei Blätter hat, wird die Fläche deshalb durch die Schnitte getrennt.

□

3.4 Spezielle Klassen von über die Kanten abwickelbaren Polyedern

Es gibt Klassen von Polyedern, deren Abwicklung zu einem Netz stets funktioniert und gleichzeitig trivial ist. Prismen mit einer konvexen Grund- und Deckfläche, die zueinander parallel sowie kongruent sind und deren restliche Seitenflächen aus Vierecken bestehen, stellen ein treffendes Beispiel dafür dar. Die Abwicklung erfolgt durch



Abb. 27. Vulkanabwicklung eines Prismas.

Aufschneiden entlang aller Kanten der Vierecke, die von der Grund- zur Deckfläche verlaufen und entlang aller Kanten, bis auf eine, entlang der Deckfläche. Wir bezeichnen diese Art der Verebnung als „Vulkanabwicklung“. Die viereckigen Seitenflächen werden bei ihr um die Grundfläche nach außen geklappt. Eine dieser Seitenflächen bleibt mit der Deckfläche über eine Kante in Verbindung.

Eine sinngemäße Verallgemeinerung zu Prismatoiden bezüglich Abwickelbarkeit ist allerdings noch nicht gelungen.

Definition 3.16 (Prismatoid). Ein Polyeder, dessen Grund- und Deckfläche aus konvexen Polygonen besteht, die zueinander parallel sind und dessen übrige Seitenflächen Dreiecke oder Trapeze sind, nennen wir ein Prismatoid. Die Eckenanzahl der Grund- und Deckfläche muss nicht gleich sein.

Bisher hat man es allerdings zustande gebracht, sich Kenntnis darüber zu verschaffen, dass eine Unterklasse der Prismatoiden, die Prismoiden, stets zu einem Netz verebnet werden können. Wir wollen im folgenden Punkt darauf eingehen, warum dies funktioniert und andeuten, woran die Verallgemeinerung zu

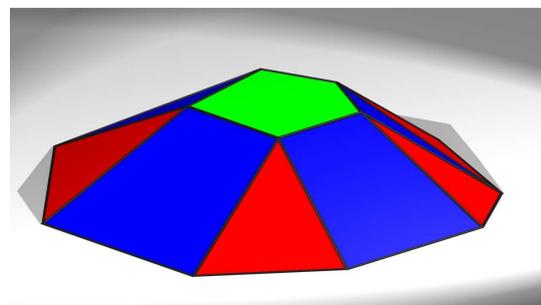


Abb. 28. Prismatoid im Scheinwerfer = licht.

Prismatoiden scheidet. Im darauf folgenden Punkt möchten wir eine weitere abwickelbare Klasse von Polyedern betrachten, die so genannten Dompolyeder.

3.4.1 Prismoide

Definition 3.17 (Prismoid). Ein Prismatoid, dessen Grund- und Deckfläche aus gleichwinkligen konvexen Polygonen besteht, bei denen zudem entsprechende Kanten parallel sind und dessen übrige Seitenflächen ausschließlich Trapeze bilden, bezeichnen wir als Prismoid.

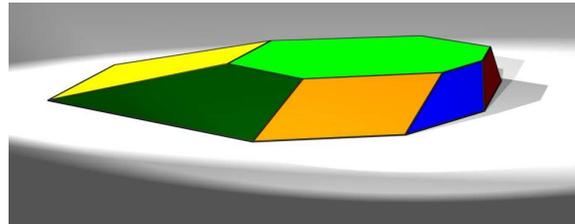
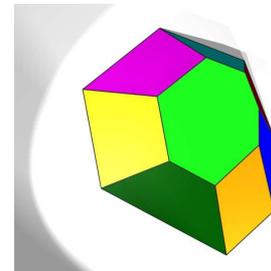


Abb. 29. *Flaches Prismoid in einem Schrägriss und im Grundriss unter Scheinwerfer= Beleuchtung.*



Es genügt also, dass Grund- und Deckfläche gleichwinklig und damit nicht zwingend ähnlich sind.

Benennen wir die Ecken der Deckfläche \mathbf{D} mit A_0, A_1, \dots, A_{n-1} und die entsprechenden Ecken der Grundfläche \mathbf{G} mit B_0, B_1, \dots, B_{n-1} . Die Trapeze, die wir fortan als „Klappen“²⁰ bezeichnen wollen, bestehen aus den Ecken $(A_i, A_{i+1}, B_{i+1}, B_i)$.

Es gibt nun mindestens zwei mögliche Kantenabwicklungen eines Prismoids. Bei der Ersten werden jeweils alle Kanten bis auf eine, der Grund und der Deckfläche aufgeschnitten sowie nur eine Seitenkante $A_i B_i$. Anschließend kann man die Klappen zu einem Streifen entfalten, bei dem Grund- und Deckfläche an gegenüberliegenden Seiten angeheftet sind (siehe (a) in Abb. 30). Ob diese Methode für alle Prismoide Überlappungsfreiheit garantiert, ist jedoch nach wie vor unklar. Die zweite Möglichkeit ist die oben erwähnte Vulkanabwicklung. Bei dieser wird jede Seitenkante $A_i B_i$ und mit einer Ausnahme, alle Kanten $A_j A_{j+1}$ der Deckfläche aufgetrennt. Entlang der Kanten $B_i B_{i+1}$ der Grundfläche wird kein Schnitt getätigt. Folglich heften alle Klappen

²⁰ In der englischen Literatur wird dafür der Begriff „Flap“ gebraucht.

an der Grundfläche. Die Deckfläche ist nur über eine Kante mit einer Klappe verbunden (siehe (b) in Abb. 30).

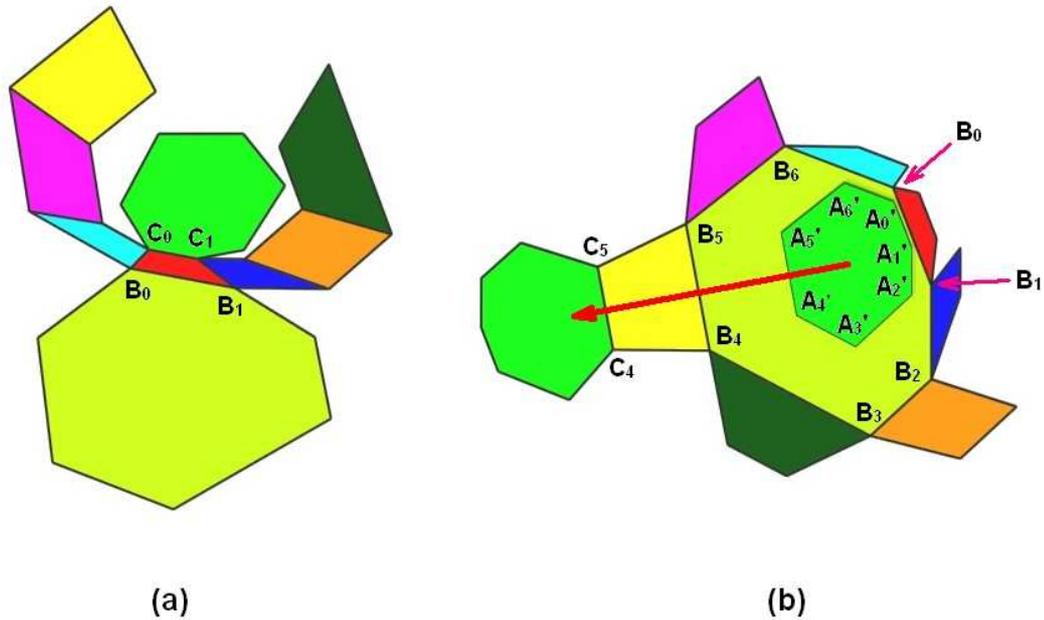


Abb. 30. Zwei mögliche Abwicklungen des oben abgebildeten Prismoids zu einem Netz. In (a) bleiben die Klappen aneinandergeheftet, Grund- und Deckfläche liegen auf gegenüberliegenden Seiten des durch die Klappen gebildeten Streifens. In (b) ist die Vulkanabwicklung zu sehen. Die Deckfläche wird dabei beim Abwickeln möglichst weit von der Grundfläche entfernt.

Die Problemstellung bei der Vulkanabwicklung liegt nun darin, an welche Klappe die Deckfläche angehängt bleiben soll, was gleichbedeutend ist mit der Frage, welche Deckflächenkante $A_j A_{j+1}$ nicht aufgeschnitten wird. Hier darf keineswegs eine willkürliche Wahl getroffen werden, da sonst mit Überlappungen zu rechnen ist (siehe Abb. 31). Die Gefahr ist vor allem dann sehr groß, wenn die Deckfläche an einer Klappe mit niedriger Höhe angeheftet bleibt. Folglich ist eine Klappe zu wählen, die **D** weit entfernt von **G**. Daraus lässt sich auf eine Regel schließen, die wir nun beschreiben möchten.

Sei C_i die abgewickelte Position von A_i in jener Ebene, in der **G** liegt und A'_i die Normalprojektion von A_i auf diese Ebene. Diese Regel besagt nun, dass **D** an die Kante $C_j C_{j+1}$ jener Klappe angeheftet bleiben soll, deren Abstand zu $A'_j A'_{j+1}$ unter allen Klappen maximal ist (siehe Abb. 30 (b)). Man kann beweisen, dass deshalb $C_j C_{j+1}$ auf der (zweidimensionalen) konvexen Hülle aller abgewickelten Eckpunkte der

Außenkanten²¹ der Klappen liegen muss, damit **D** mit Garantie überlappungsfrei platziert wird²². Wir benötigen aber noch eine weitere Tatsache, um den Beweis der Überlappungsfreiheit zu vervollständigen:

Lemma 3.18. Bei jeder Vulkanabwicklung eines Prismoids gibt es keine überlappenden Seitenklappen.

Es ist offensichtlich, dass sich angrenzende Klappen nicht überlagern, wegen der positiven Krümmung entsprechender Körperecken, die der Grundfläche angehören. Man benötigt allerdings ein Argument, dass dies auch für nicht angrenzende Klappen gilt. Diese Problemstellung möchten wir an dieser Stelle aber nicht weiter ausführen, sondern auf den Beweis für die Abwickelbarkeit der Dome verweisen, welche von allgemeinerer Natur sind.

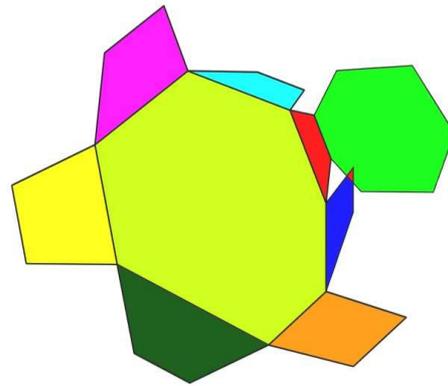


Abb. 31. Überlappende Vulkanabwicklung des Prismoids.

Die Verebnung von Prismatoiden ohne Überlagerung auf gleiche oder ähnliche Weise wie eben beschrieben funktioniert jedoch nicht. Grund dafür ist die allgemeinere Form der Seitenflächen, welche derartige Abwicklungen unregelmäßiger machen. In Abb. 32 ist ein Beispiel eines fehlgeschlagenen Versuchs einer Verebnung eines Prismatoids zu einem Netz zu sehen. Das Aufschneiden erfolgte entlang aller Kanten der Deckfläche **D**, bis auf A_0A_2 , sowie der Kanten B_0A_2 , B_1A_0 und B_2A_1 der Seitenflächen. So einfach eine Überlappung in diesem Beispiel vermieden werden hätte können (man bräuchte bei der Deckfläche lediglich die Kante A_0A_1 nicht aufschneiden, anstatt der oben gewählten), so schwierig erscheint es, eine allgemein gültige Regel dafür zu finden.

²¹ Gemeint sind die Eckpunkte aller abgewickelten Klappen, die nicht gleichzeitig Eckpunkte der Grundfläche sind.

²² Joseph O'Rourke. „Unfolding prismoids without overlap“, nicht publiziertes Manuskript.

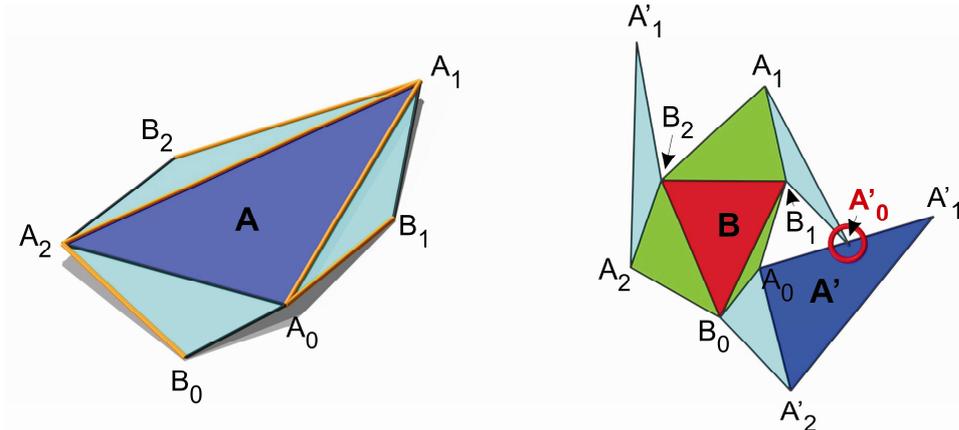


Abb. 32. Flaches Prismaoid mit überlappender Abwicklung.

3.4.2 Dome

Eine andere Klasse von Polyedern, von denen bekannt ist, dass sie zu einem Netz entfaltet werden können, sind die so genannten „Dome“.

Definition 3.19 (Dom). Ein konvexer Polyeder mit einer ausgezeichneten Seitenfläche, die wir als Basis oder Grundfläche G bezeichnen und der Eigenschaft, dass jede übrige Seitenfläche eine Kante mit G gemeinsam hat, nennen wir Dom.

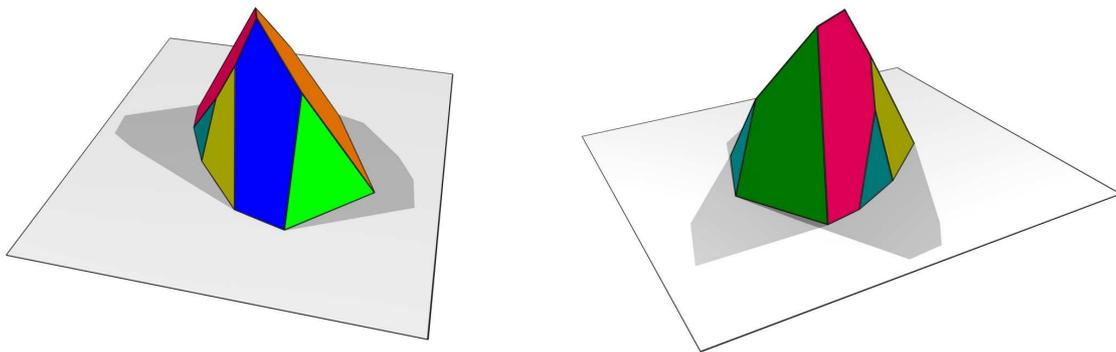


Abb. 33. Dom von verschiedenen Ansichten.

Das Verfahren, dessen wir uns für die Abwicklung eines Domes zu einem Netz bedienen, ist prinzipiell das Selbe wie für Prismoiden, nämlich wieder eine Vulkanabwicklung. Im Unterschied zu vorher gibt es diesmal keine Deckfläche, weiters sind die Seitenflächen komplexer. Der Beweis für die Abwickelbarkeit aller Dome zu

einem Netz ist von induktiver Natur. Wir möchten uns hier lediglich auf die wesentlichen Ideen dieses Beweises beschränken:

Wir betrachten einen beliebigen Dom \mathcal{P} und jene Ebene, in der die Grundfläche \mathbf{G} liegt. Anschließend wählen wir eine Kante von \mathbf{G} und entfernen diese. Mit der Kante wird auch die daran angrenzende und von der Grundfläche verschiedene Seitenfläche weggenommen. Die wiederum an die gelöschte Seitenfläche angrenzenden Seitenflächen (inklusive \mathbf{G}) des Domes \mathcal{P} werden so erweitert, dass wir einen neuen Dom \mathcal{P}' erhalten, der aus weniger Seitenflächen als \mathcal{P} besteht. Danach wenden wir zuerst auf \mathcal{P}' und anschließend auf \mathcal{P} eine induktive Hypothese an.

Kommen wir zunächst zum Kriterium für die Auswahl jener Kante und der damit verbundenen Seitenfläche, die entfernt wird:

Lemma 3.20. Mindestens zwei der von der Grundfläche verschiedenen Seitenflächen eines Domes sind Dreiecke.

Beweis: Betrachten wir einen Graphen, der pro Seitenfläche einen Knoten aufweist²³. Die Grundfläche wird dabei außer Acht gelassen. Zwei Knoten von Seitenflächen, die eine Kante gemeinsam haben, werden durch einen Bogen verbunden (siehe Abb. 34 (a)). Dieser Graph ist planar und aufgrund der Tatsache, dass alle Seitenflächen an die Grundfläche grenzen, sogar kreisartig planar. Das bedeutet, dass alle Knoten auf dem Rand ein und desselben Gebiets liegen. Aus der Graphentheorie ist bekannt, dass kreisartig planare Graphen mindestens zwei Knoten vom Grad 2 haben müssen. Um das zu zeigen, trianguliert man den Graphen, bildet den dazu dualen Graphen und erhält einen Baum, der mindestens zwei Blätter haben muss, die den Knoten vom Grad 2 entsprechen. Ein Knoten vom Grad 2 stellt wiederum ein Dreieck dar, deren Existenz behauptet wurde. □

²³ Dieser Graph wird auch dualer Graph genannt, da Seitenflächen in Punkte übergehen.

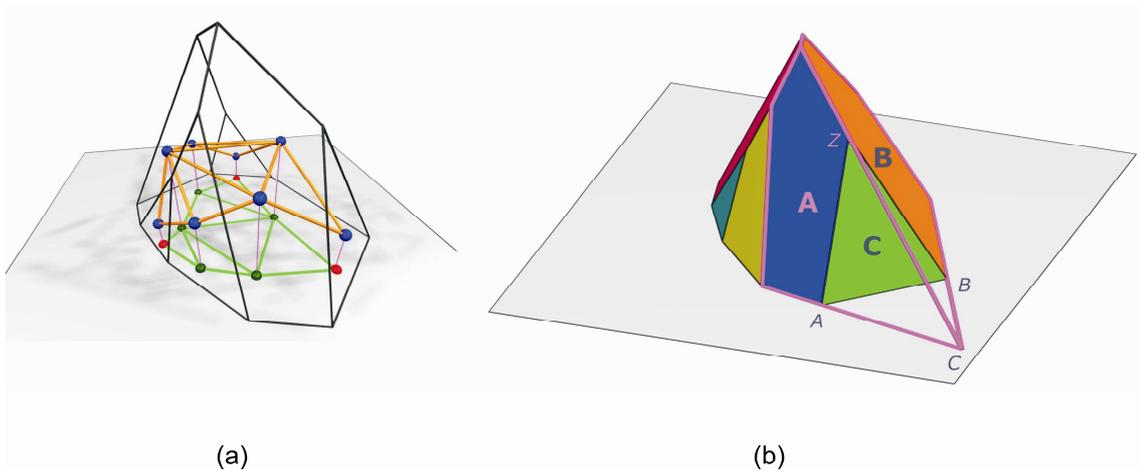


Abb. 34. Gittermodell des Domes mit dem dazugehörigen dualen, kreisartig planaren Graphen bei dem die Knoten vom Grad 2 in roter Farbe markiert sind (a). Entfernung einer dreieckigen Seitenfläche des Domes \mathcal{P} und Vergrößerung der umliegenden Seitenflächen, so dass ein neuer Dom \mathcal{P}' entsteht (b).

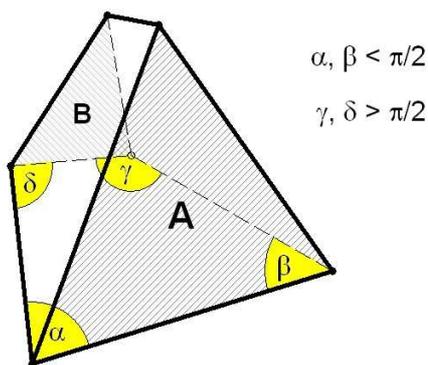


Abb. 35. Dom, bei dem sich nach Wegnahme des Dreiecks A kein neuer Dom ergeben würde. In solchen Fällen wählt man das zweite, sicher vorhandene Dreieck, um es zu löschen.

In Abb. 34 (a) ist ein Dom zu sehen, der mehrere Dreiecke beinhaltet, weshalb der dazugehörige duale Graph mehrere Knoten vom Grad 2 aufweist.

Der Dom \mathcal{P} habe n Seitenflächen. Wir wollen nun ein Dreieck auswählen, das garantiert vorhanden ist und dieses durch Vergrößern der angrenzenden Seitenflächen entfernen. Natürlich könnte der Fall eintreten, dass sich die Erweiterung der angrenzenden Seitenflächen nicht trifft in dem Sinn, dass wir keinen Dom (dessen Seitenflächen laut Definition alle eine Kante mit \mathbf{G} gemeinsam haben sollen) mehr erhalten.

Sieht man von speziellen Domen, wie beispielsweise einem Tetraeder oder einer Pyramide²⁴ mit einer rechteckigen Grundfläche ab, garantiert das Lemma 3.20 zwei Knoten vom Grad 2, sprich zwei Dreiecke, von denen im allgemeinen Fall höchstens eines angrenzende Seitenflächen haben kann, die sich nicht zu einem neuen Dom erweitern lassen (ein derartiger Dom ist in Abb. 35 illustriert).

²⁴ Derartige Sonderfälle wollen wir im weiteren Verlauf außer Acht lassen, da sich nach Entfernung eines beliebigen Dreiecks kein neuer Dom mehr formen lässt.

Sei C die dreieckige Seitenfläche, deren angrenzende Seitenflächen A und B sich wie verlangt treffen (siehe Abb. 34 (b)). Unsere Induktionshypothese muss den Nachweis erbringen, dass sich die Abwicklung nicht überlappt. Dabei ist bereits im Voraus klar, dass sich benachbarte Seitenflächen beim Verebnen nicht überlagern, da alle Körperecken eine positive Krümmung haben. Wir müssen uns jedoch vergewissern, dass dies stets auch für nicht angrenzende Seitenflächen gilt, was keineswegs trivial ist.

Wir möchten hier eine Hypothese vorstellen, die einer Idee von Aronov und O'Rourke aus dem Jahr 1992 folgt. Bezeichnen wir dazu die Ecken des Basispolygons G mit $(V_0, V_1, \dots, V_{n-1})$. Bei der Vulkanabwicklung ist V_i der Mittelpunkt eines Kreissektors, dessen Form durch die eintreffende Schnittkante bestimmt ist, welche beim Abwickeln in zwei Kanten gespalten wird und wie bekannt in V_i einen Öffnungswinkel gleich der Krümmung dieser Körperecke aufweist. Die Induktionshypothese lautet nun, dass alle diese Sektoren leer sind, d.h. keine anderen Teile der Abwicklung des Domes in die Kreissektoren fallen.

Satz 3.21. Die Vulkanabwicklung eines Domes hat die Eigenschaft, dass jeder Sektor, der durch eine Basisecke V_i bestimmt ist, keine Teile der Abwicklung des Domes beinhaltet, diese somit leer sind.

Wie schon erwähnt, ist das Kernproblem zu zeigen, dass sich nicht benachbarte Seitenflächen nie überlappen. Dabei kann man folgendermaßen vorgehen: Wir entfernen eine dreieckige Seitenfläche des gegebenen Domes mit n Seitenflächen, den wir fortan als n -Dom bezeichnen. Der daraus resultierende $(n-1)$ -Dom muss gemäß Lemma 3.20 wieder mindestens zwei Dreiecke beinhalten, von denen wir abermals eines wegnehmen. Führen wir diesen Prozess fort, gelangt man irgendwann zu einem Tetraeder, von dem wir wissen, dass es überlappungsfrei verebnet werden kann²⁵. Nun gehen wir den umgekehrten Weg indem wir Stück für Stück die vorher entfernten Seitenflächen wieder einfügen und dabei immer überprüfen, ob die Vulkanabwicklung zu Überlappungen führt. Angenommen, wir konnten bereits nachweisen, dass der

²⁵ Man muss jedoch beachten, dass nicht jede Abwicklung bei jedem Tetraeder überlappungsfrei ist, wie in Abb. 39 in Kapitel 3.5.2 zu sehen ist! Dies gilt allerdings nicht für die Vulkanabwicklung, bei der jedes Tetraeder aufgrund der positiv gekrümmten Körperecken überlagerungsfrei über die Kanten verebnet werden kann.

$(n-1)$ -Dom keine überlappenden Elemente besitzt. Bei der Überprüfung, ob dieser Zustand auch so bleibt, nachdem die n -te Seitenfläche eingefügt wird, verwenden wir folgendes Lemma (zur Notation siehe Abb. 36 (a)):

Lemma 3.22. Die beiden Kreissektoren des n -Domes mit Mitten in den Punkten A und B , sind innerhalb des $(n-1)$ -Domsektors, der in C zentriert ist, verschachtelt.

Beweisskizze: In Abb. 36 (a) sind die Abwicklungssituationen ohne und mit der Seitenfläche C illustriert. Aufgrund unserer Induktionshypothese nehmen wir an, dass der Sektor (C, A_2, B_2) des $(n-1)$ -Domes mit Mittelpunkt in C frei von jeglichen abgewickelten Teilen ist. Wir möchten nun beweisen, dass die Sektoren des n -Domes, zentriert in $A \in \mathbf{A}$ und $B \in \mathbf{B}$, im Inneren des Sektors (C, A_2, B_2) liegen.

Bezeichnen wir die Spitze des Dreiecks C mit Z . Wir behaupten nun, im Gegensatz zu unserer Hypothese, dass Z auf dem Kreisbogen des Sektors um C liegt, wie in Abb. 36 (b) zu sehen ist (oder außerhalb davon). Da C an \mathbf{A} und \mathbf{B} angrenzt, müssen die Punkte X und Y , die Endpunkte der Kreisbögen um A und B sind, auf den Strecken CA_2 und CB_2 liegen. Fokussieren wir X und den zugehörigen Sektor, der sich von X bis Z erstreckt. Betrachten wir nun die Punkte X und Z , so erkennen wir, dass die zugehörige Streckensymmetrale²⁶ der beiden Punkte die „falsche Seite“ von C passiert, da A auf der Strecke A_1C liegen muss. Erst im Grenzfall $X = A_2$ würde der Bisektor durch C gehen. Folglich muss Z im Sektor des $(n-1)$ -Doms mit Mitte C liegen. Nun müssen wir zeigen, dass sich der ganze Kreisbogen XZ innerhalb dieses Sektors befindet. Dazu wiederholen wir einfach das obere Argument für jeden beliebigen Punkt Z' dieses Kreisbogens, der auf dem Bogen A_2B_2 oder außerhalb davon liegt. Das Argument mit dem Bisektor hält für alle Punkte des Kreisbogens XZ .

²⁶ Das englische Wort für Streckensymmetrale lautet „bisektor“ und hat eine allgemeinere Bedeutung. Die Streckensymmetrale ist „bisektor“ hinsichtlich der euklidischen Norm. Die Definition dafür lautet:

$$B(p_1, p_2) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \text{dist}_2(x, p_1) = \text{dist}_2(x, p_2)\}, \text{ wobei } \text{dist}_2(a, b) = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}.$$

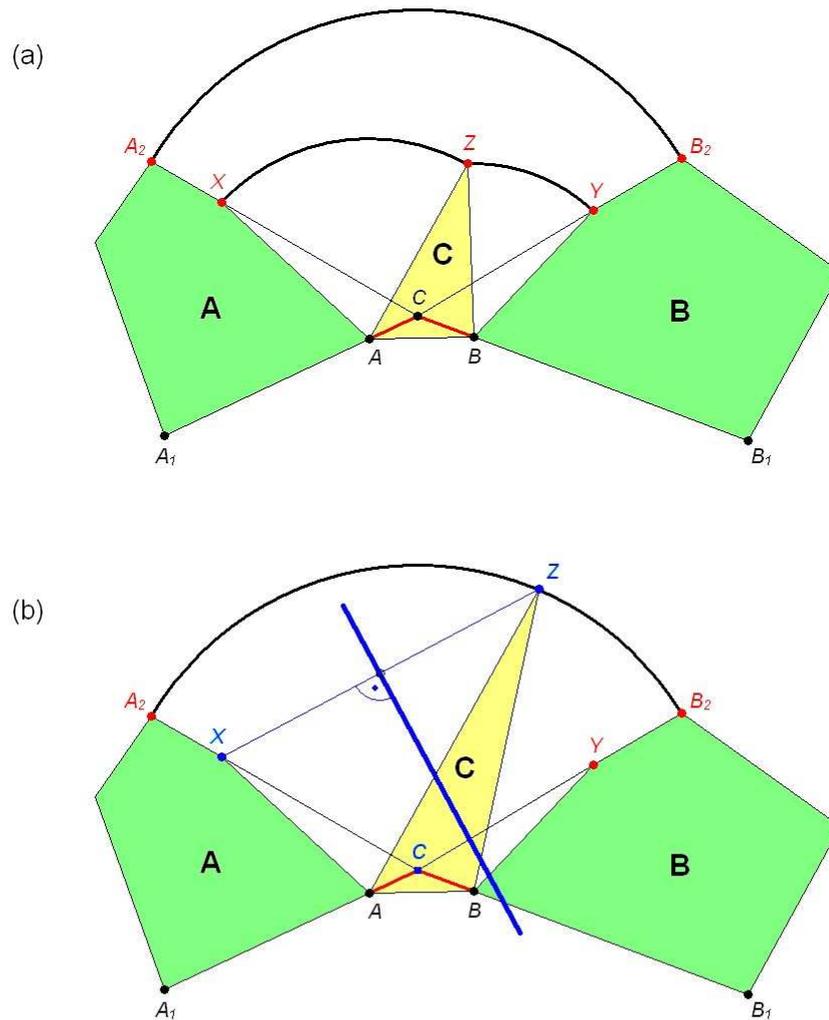


Abb. 36. Abwicklungssituation benachbarter Seitenflächen mit und ohne der dreieckigen Seitenfläche C (a). Streckensymmetrale von X und Z nach der indirekten Annahme, der auf der „falschen Seite“ von C vorbeigeht (b).

Um diese Beweisskizze in einen vollwertigen Beweis zu verwandeln, wäre eine umfangreichere Beschreibung von exakten geometrischen Begriffen von Nöten, auf was wir verzichten möchten. Dieses „Verschachtelungslemma“ belegt schließlich, was wir zeigen wollten: Die Vulkanabwicklung eines Domes ist überlappungsfrei. Eine vollständige „Sektor-Verschachtelung“ ist in nachfolgender Abbildung zu sehen:

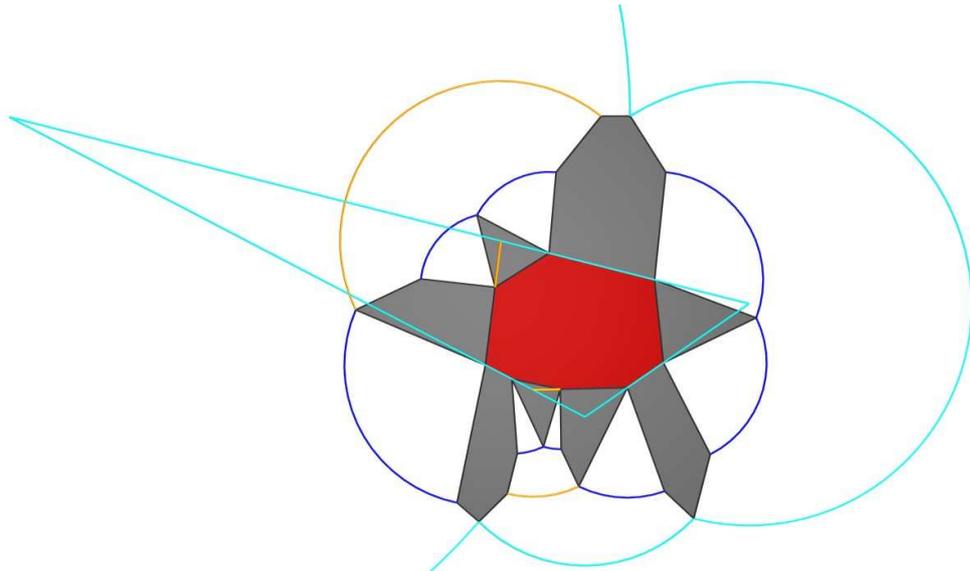


Abb. 37. „Sektor-Verschachtelung“ des abgewickelten Domes aus Abb. 32 und 33 nach Lemma 3.22.

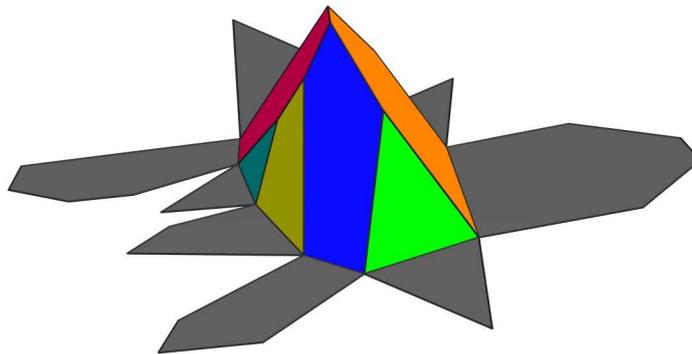


Abb. 38. Weiteres Bild der Abwicklung des Domes aus Abb. 32 und 33.

3.5 Abwicklung konvexer Polyeder über die Kanten

Seit Albrecht Dürer sich vor über 475 Jahren das erste Mal nachweislich mit Netzen befasste, ist die Frage, ob jedes konvexe Polyeder eine Kantenabwicklung zu einem einfachen, nicht überlappenden Polygon hat, ob also jedes konvexe Polyeder ein Netz besitzt, bis heute offen. Es gibt lediglich Hinweise bzw. Vermutungen für aber auch gegen eine Bejahung dieser Frage. Einen Auszug dieser Argumente wollen in dieser Arbeit präsentieren.

3.5.1 Argumente für Kantenabwicklungen aller konvexer Polyeder zu Netzen

Eines der stärksten Anzeichen, das für die Existenz eines Netzes zu jedem konvexen Polyeder spricht, liegt darin, dass bis dato niemand in der Lage war, einen derartigen Polyeder zu finden, der nur mit Überlappungen über die Kanten in die Ebene abgewickelt werden kann. Das Netz wurde in den Jahrhunderten seit Dürers Zeichnungen zu einer Standardmethode, die Form eines Polyeders zu beschreiben. Netze wurden für alle interessanteren regulären polyedrischen Flächen konstruiert, früher per Hand und heutzutage oftmals durch diverse Computerprogramme. Die folgende Abbildung zeigt beispielsweise die archimedischen Körper mit ihren Netzen:

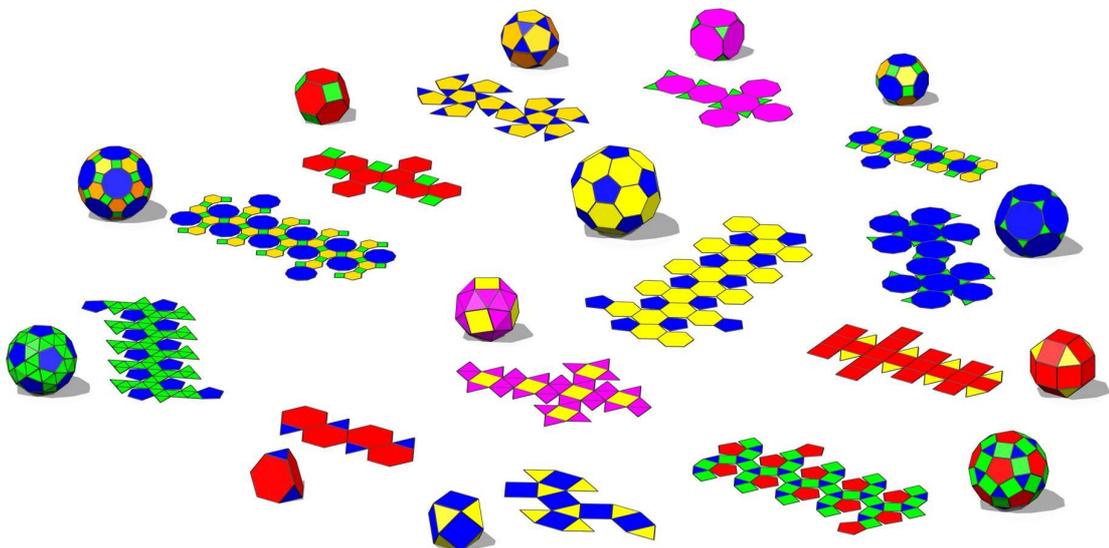


Abb. 39. Die 13 archimedischen Körper und deren Netze.

Es gibt sogar Programme, wie „HyperGami“ und das Nachfolgemodell „JavaGami“, die es ermöglicht haben, beliebige Polyeder abzuwickeln. Dabei ist anscheinend noch niemand einem „unabwickelbaren“ konvexen Polyeder begegnet.

Leider liefern all diese Anzeichen keine stichhaltigen Belege für eine zufriedenstellende Antwort unserer Frage, da keine ausreichend tiefgängige und systematische Erforschung dahinter steckt. Zudem besteht im Allgemeinen überwiegend Interesse an der speziellen Klasse der höheren regulären Polyeder, welche scheinbar relativ einfach ohne Überlappung abgewickelt werden kann. Eine weitere spezielle Klasse von Polyedern, die Prismoiden, die ohne Überlappungen abgewickelt werden kann, wurde schon in Kapitel 3.4.1 beschrieben. Brauchbarer für unsere Problematik wären jedoch

breitere Klassen von Polyedern, die dafür bekannt sind, ohne Überlappung über die Kanten in die Ebene abgewickelt werden zu können, wobei hier die Erkenntnisse noch relativ rar sind. Viele Leute, die sich mit der Erstellung von Netzen befassen, neigen schnell dazu, sich dem Glauben hinzugeben, dass es immer ein solches für beliebige konvexe Polyeder gibt. Allerdings gibt es bedeutende Gründe, dieser Annahme zu misstrauen.

3.5.2 Argumente gegen Kantenabwicklungen aller konvexer Polyeder zu Netzen

Durch bloßes Probieren per Hand kann einem durchaus die Frage in den Sinn kommen, ob vielleicht sogar jede Kantenabwicklung überlappungsfrei von statten geht, da es gar nicht so einfach ist, Überlappungen zu erzielen. Allerdings kann man sogar ein Tetraeder, also ein Simplex²⁷ im \mathbb{R}^3 , derart über die Kanten abwickeln, dass sich verebnete Seitenflächen teilweise überdecken. Die folgende Abbildung zeigt ein derartiges Beispiel eines sehr flachen Tetraeders, welches einmal mit und einmal ohne Überlappung verebnet wurde.

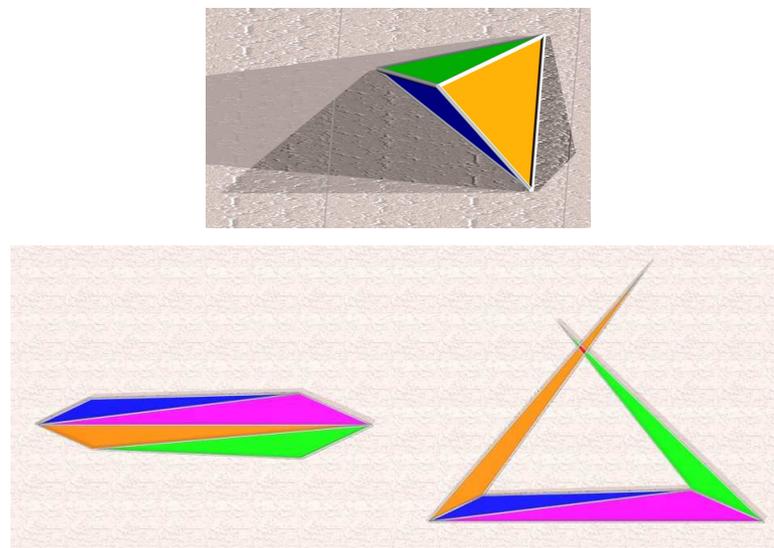


Abb. 40. Überlappungsfreie, sowie überlappende Abwicklung eines „flachen“ Tetraeders, welches im oberen Bild in einem Parallelriss dargestellt ist.

²⁷ Im n -dimensionalen Raum ist ein Simplex ein Polytop (n -dimensionaler Polyeder) mit $n+1$ Körpererecken, wobei keine der Körpererecken in der Hyperebene ($n-1$ -dimensional) liegt, die von den restlichen Punkten aufgespannt wird. Beispielsweise ist ein nulldimensionales Simplex ein Punkt, ein eindimensionales eine Strecke, ein zweidimensionales ein Dreieck usw. Man könnte ein Simplex auch als kleinste konvexe, abgeschlossene Menge definieren, die die eben beschriebenen $n+1$ Punkte als Eckpunkte besitzt. Siehe dazu auch [XIII., S. 7 ff].

Zur Ergänzung wird hier noch ein weiteres Beispiel angeführt, eine Abwicklung eines Würfels mit einer abgestumpften Ecke.

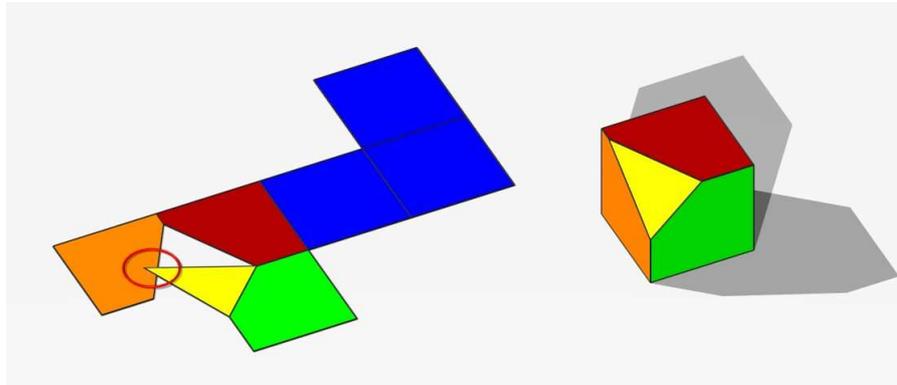


Abb. 41. Überlappende Kantenabwicklung eines Würfels mit einer abgestumpften Ecke.

Folglich existieren mit Sicherheit überlappende Abwicklungen, auch wenn sie vielleicht gar nicht so einfach durch händisches Probieren zu finden sein mögen. Forscher wie Schevon und O'Rourke kamen auf die Idee, alle Abwicklungen von willkürlich gewählten Polyedern zu untersuchen. Diese können durch methodisches Generieren von Spannbäumen des polyedrischen Graphs, Abwicklung und durch anschließende Überprüfung bzgl. Überlappung getestet werden. Dabei gibt es eine exponentielle Zahl von Spannbäumen für jeden Graphen, welche in unserem Fall exakt 2^k mit $k = \left\lceil \frac{1}{2} \left[\sqrt{8(F-2)+1} - 1 \right] \right\rceil$ für ein Polyeder mit F Seitenflächen beträgt. Genauere Hintergründe für diesen Wert kann man in [XIV., S. 237-252] nachlesen. Deshalb ist es bis heute leider unmöglich sie alle auszutesten. Man kann jedoch zufällige Stichproben herausnehmen und eine Überprüfung durchführen. Typische Daten für Polyeder, welche von zufällig gewählten Punkten einer Sphäre stammen, sind aus Abb. 42 abzulesen. Aus dieser kann man entnehmen, dass für eine ausreichend große Anzahl von Ecken n , Überlappungen üblicherweise auftreten. Weiters ist zu erkennen, dass 99% der Abwicklungen von Polyedern mit $n \geq 70$ Ecken zu Überlappungen führen. Dies ließ die Vermutung aufkommen, dass wenn $n \rightarrow \infty$ geht, die Wahrscheinlichkeit für Überlappungen in einer zufälligen Abwicklung eines wahllosen Polyeders mit n Ecken 100% annähert.

Allerdings erfordert ein eindeutiger Beleg gegen die Existenz von einer Kantenabwicklung aller konvexer Polyeder zu Netzen ein Exemplar, bei dem sich exakt alle seine Abwicklungen überlappen. Ein solches wurde jedoch bisher nicht gefunden.

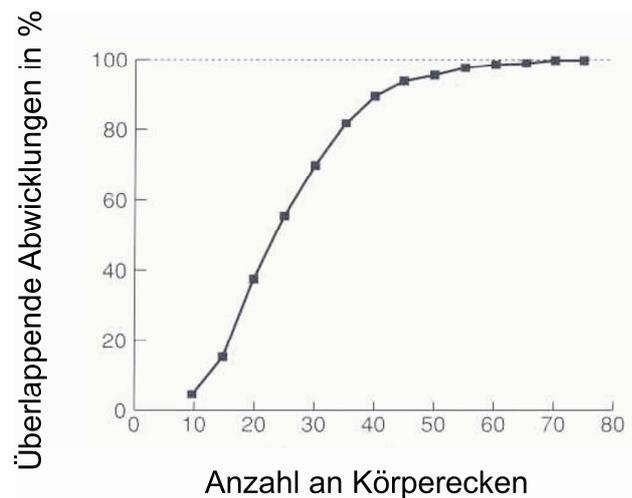


Abb. 42. Jeder Punkt des Graphen repräsentiert den Durchschnitt von fünf zufällig generierten Polyedern, deren Körpererecken auf einer Sphäre liegen und den Prozentsatz von 1000 zufällig gewählten Abwicklungen eines jeden, das Überlappungen verursachte (Quelle: [X., S. 315, Fig. 22.10]).

Ein Anzeichen, welches in diese Richtung weist, lieferte Wolfram Schlickerieder 1997. Er teste in [XV.] einige Abwicklungsalgorithmen, indem er sie an einer Serie von zehntausenden von Polyedern anwendete. Bei jedem dieser Algorithmen, die er implementierte, stieß er auf Polyeder, die vom jeweiligen nicht zu einem Netz entfaltbar waren.

Die nachstehende Abbildung zeigt exemplarisch eine solche überlappungsfreie Abwicklung unter Anwendung eines seiner Algorithmen, auf den hier aber nicht näher eingegangen wird.

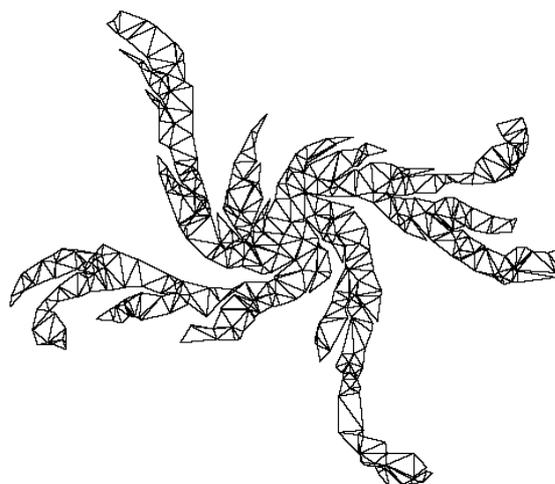


Abb. 43. Rightmost-Ascending-Edge-Unfold eines sphärischen Polyeders mit 300 Körpererecken (Quelle: [XV., S. 64, Fig. 40c]).

Ein gescheiterter Kantenabwicklungsversuch eines so genannten „Schildkrötenpolyeders“ wird im nächsten Bild gezeigt. Diese Klasse von sehr flachen Polyedern galt als besonders schwierig abwickelbar für die Algorithmen.

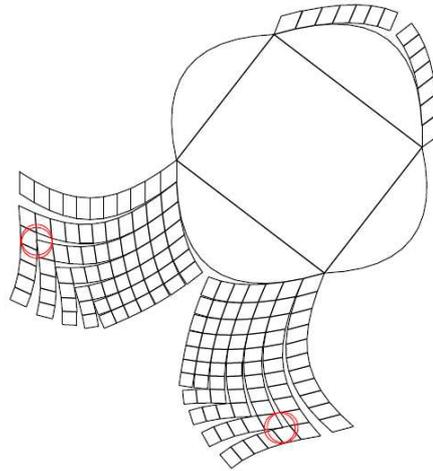


Abb. 44. Normal-Order-Unfold eines Schildkrötenpolyeders mit Überlappungen innerhalb der roten Kreise (Quelle: [XV., S. 67, Fig. 42b]).

Der effizienteste Algorithmus, den Schlickerrieder entwickelte, ist der „Steepest-Edge-Unfold“ (zu Deutsch etwa „Abwicklung durch steilste Kanten“), den wir hier beschreiben möchten.

Zuerst wird ein Einheitsvektor c als Lotrichtung so ausgewählt, dass es genau eine höchste Körperecke V_+ und genau eine niedrigste Körperecke V_- gibt. Dann wird für jede Körperecke V , außer V_+ , die am steilsten aufsteigende Kante, mit der Körperecke W am anderen Ende dieser Strecke, als jene Kante $e = (V, W)$ ausgewählt, die den Winkel θ zwischen c und $W - V$ minimiert. Setzen wir $u := (W - V) / |W - V|$ bedeutet

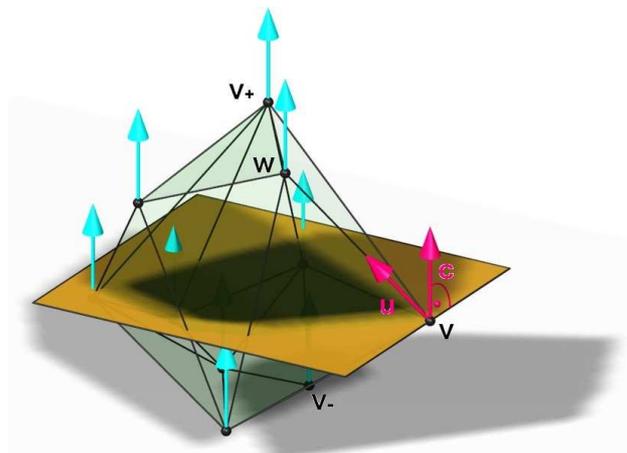


Abb. 45. Sphärischer Polyeder mit transparenten Seitenflächen und der an jeder Körperecke abgetragenen Zielfunktion c . In v ist zusätzlich der Einheitsvektor u entlang der „steilsten“ Kante und die Normalebene zu c eingezeichnet, um zu illustrieren, dass sich in der „Höhe“ von v keine weitere Körperecke befindet.

dies gleichzeitig, dass das Skalarprodukt $c \cdot u$ der beiden normierten Vektoren maximiert wird. Die Zielfunktion, das ist der Vektor c , wird so gewählt, dass wir eine allgemeine Lage haben, was bedeutet, dass keine zwei Körperecken in der gleichen Höhe sind und es keine zwei Möglichkeiten für die steilste Kante von einer Körpercke V aus gibt. Der Schnittbaum besteht dann aus allen am steilsten aufsteigenden Kanten und ist ein Spannbaum. Der Grund dafür liegt darin, dass von jeder Körpercke außer von V_+ eine steilste Kante weggeht. Daher gibt es $n - 1$ Kanten für n Körperecken. Der Graph kann keinen Zyklus beinhalten, weil es dann eine einzelne niedrigste Körpercke gibt, mit zwei in Frage kommenden weggehenden steilsten Kanten. Dies verstößt gegen die geforderte allgemeine Lage von c . Ein nichtzyklischer Graph mit n Ecken und $n - 1$ Kanten muss also ein Baum sein.

Die Stärke des Algorithmus liegt darin, dass er relativ gerade Pfade erzeugen sollte, welche die Abwicklung ausbreiten. In Abb. 46 ist ein Netz zu sehen, welches mit Hilfe dieses Algorithmus' für ein sphärisches Polyeder mit 400 Körperecken erzeugt wurde.

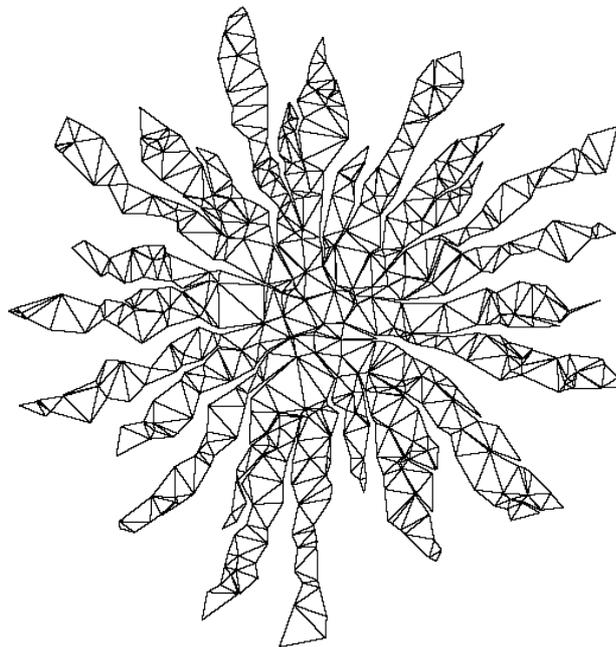


Abb. 46. *Steepest-Edge-Unfold eines sphärischen Polyeders mit 400 Körperecken und 796 Seitenflächen (Quelle: [XV., S. 55, Fig. 35]).*

Interessanterweise stellte sich das Aufschneiden entlang den flachsten anstelle der steilsten Kanten, was man als prinzipiell gleichwertig erachten könnte, als weniger effektiv heraus. In der nachstehenden Abbildung wird solch ein typisches Abwicklungsbeispiel gezeigt, in dem es zu mehreren Überlappungen gekommen ist.

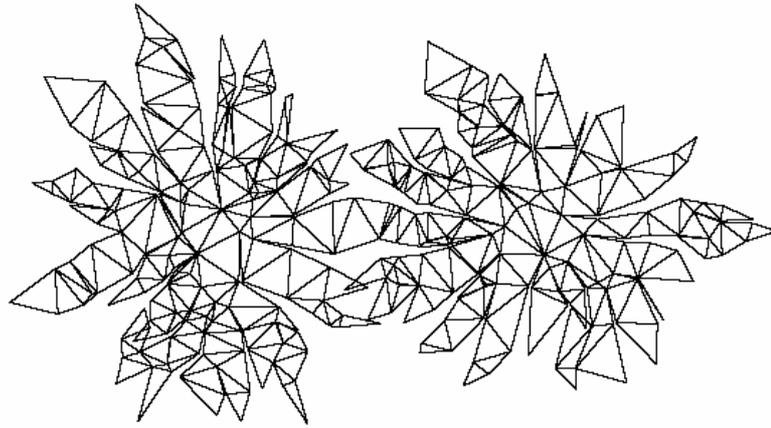


Abb. 47. *Flat-Spanning-Tree-Unfold eines sphärischen Polyeders mit Überlappungen (Quelle: [XV., S. 61, Fig. 38]).*

Trotz seiner hohen Effektivität gelang es auch beim Steepest-Edge-Unfold nicht, Überlappungen zu vermeiden. Allerdings, und das ist viel interessanter, wurde noch kein Polyeder gefunden, dass diesem Abwicklungsalgorithmus gänzlich widerstand. Jedes der 60 000 Polyeder in der Testserie konnte für manche Auswahl der Zielfunktion c überlagerungsfrei entfaltet werden. Erstaunlicher Weise war die simple Strategie, c zufällig auszuwählen und das Verfahren zu wiederholen, falls Überlappungen auftreten, immer erfolgreich. Dazu waren jeweils nie mehr als sechs Versuche erforderlich.

Leider reichen auch diese Fakten nicht aus, um die offene Frage der Kantenabwicklung aller konvexer Polyeder zu Netzen befriedigend beantworten zu können. Trotz mehrerer bekannter Verfahren, eine nicht überlappende Kantenabwicklung eines konvexen Polyeders zu finden, gibt es noch keinen Algorithmus, der nachweislich mit Garantie in allen Fällen erfolgreich ist.

Literaturverzeichnis

[I.] H. Stachel: Skriptum zur Vorlesung über Nichteuklidische Geometrie
TU Wien, Institut für Geometrie, 2003

[II.] P. H. Maier: Körper und Raum – Die dritte Dimension: Ein Lehrbuch der Polyedergeometrie und eine Klassifikation konvexer Polyeder
Verlag Franzbecker, 2003

[III.] Walter Nef: Beiträge zur Theorie der Polyeder
Herbert Lang & Cie AG, 1978

[IV.] Roman Tiberiu: Reguläre und halbreguläre Polyeder
Verlag Harri Deutsch, 1987

[V.] Horst Herrlich: Einführung in die Topologie
Heldermann Verlag, 1986

[VI.] A. D. Alexandrow: Konvexe Polyeder
Akademie-Verlag Berlin, 1958

[VII.] Christian Bär: Elementare Differentialgeometrie
Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2000

[VIII.] H. Brauner: Differentialgeometrie
Universität Stuttgart, Mathematisches Institut B, 1968/69

[IX.] Wilhelm Blaschke: Differentialgeometrie I
Verlag von Julius Springer, 1924

[X.] Erik D. Demaine & Joseph O' Rourke: Geometric Folding Algorithms
Cambridge University Press, 2007

[XI.] M. Aigner: Graphentheorie – Eine Entwicklung aus dem 4-Farben Problem
B. G. Teubner, 1984

[XII.] Marshall Bern, Erik D. Demaine, David Eppstein, Eric Kuo, Andrea Mantler und Jack Snoeyink: Ununfoldable polyhedra with convex faces
Comput. Geom. Theory Appl., 2003

[XIII.] **Paul Alexandroff: Einfachste Grundbegriffe der Topologie**
Verlag von Julius Springer, 1932

[XIV.] **Robert C. Read und Robert E. Tarjan: Bounds on backtrack algorithms
for listing cycles, paths and spanning trees**
Networks, 1975

[XV.] **Wolfram Schlickerieder: Nets of Polyhedra, Diplomarbeit**
Technische Universität Berlin, 1997

Verwendete Internet-links:

[1] [<http://www.origami.as/home.html>]
Datum: 11. Nov. 2008, 00:15 Uhr

[2] [http://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_Menge]
Datum: 19. Aug. 2008, 17:00 Uhr

[3] [<http://erikdemaine.org/papers/Ununfoldable/paper.pdf>]
Datum: 02. Sept. 2008, 09:00 Uhr

[4] [<http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graphentheorie/>]
Datum: 17. Okt. 2008, 09:00 Uhr

[5] [<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebis/cafes/graphentheorie.html>]
Datum: 23. Okt. 2008, 14:20 Uhr