

Die approbierte Originalversion dieser Dissertation ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (<http://www.ub.tuwien.ac.at>).

The approved original version of this thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (<http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/>).

# Dissertation



# DISSERTATION

## Wärmeübertragung in Fußböden mit waagrechten Luftspalten

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktors der technischen Wissenschaften

eingereicht an der Technischen Universität Wien  
Fakultät für Maschinenbau

von

Dipl.-Ing. Anton Engelmann  
Weigelsdorf 31  
A-4115 Kleinzell  
geb. am 19. Mai 1966 in Linz.

2. Auflage. Wien 19. August 1997

# Kurzfassung

Die Wärmeübertragung in einem beheizten Fußboden, der aus konstruktiven Gründen einen waagrechten Luftspalt enthält, wird numerisch und experimentell untersucht.

Die theoretischen Grundlagen der Wärmeübertragung durch waagrechte Spalten werden kurz vorgestellt und weiterführende Literatur angegeben.

Mittels des Finite-Elemente-Programmes FIDAP (FDI Fluid Dynamics Inc.) werden Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung im Fußboden berechnet.

Die erzielten Ergebnisse werden mit Experimenten, die an einem industriell gefertigten Modellfußboden durchgeführt wurden, verglichen.

Zur weiteren Absicherung der Ergebnisse werden Abschätzungen der Meßunsicherheiten gemäß DIN 1319 durchgeführt.

Die numerischen Ergebnisse decken sich gut mit den Messwerten und mit den Ergebnissen einer einfachen Visualisierung der Strömung mittels Rauch.

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Numerische Untersuchungen</b>	<b>9</b>
2.1	Zur Verfügung stehende Rechner . . . . .	9
2.2	Modellbildung . . . . .	10
2.2.1	Geometrie . . . . .	10
2.2.2	Physikalisches Modell . . . . .	12
2.2.3	Dimensionslose Formulierung . . . . .	15
2.2.4	Strömungsmodellierung . . . . .	19
2.2.5	Phänomenologie der Rayleigh-Benard-Konvektion . . . . .	22
2.2.6	Finite-Elemente-Modell des waagrechten Luftspaltes . . . . .	26
2.2.7	... und des Schwingfußbodens . . . . .	27
2.3	Ergebnisse und Vergleich mit Literatur . . . . .	31
2.3.1	Rayleigh-Benard-Konvektion . . . . .	31
2.3.2	Schwingfußboden . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen</b>	<b>44</b>
3.1	Ziel der Messungen und Beschreibung des Versuchsaufbaues . . . . .	44
3.2	Visualisierung der Strömung . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Vergleich der numerischen Ergebnisse mit dem Experiment</b>	<b>52</b>

<b>A Abschätzung der Meßunsicherheiten der eingesetzten Meßverfahren</b>	<b>58</b>
A.1 Heizleistung . . . . .	58
A.2 Temperaturmessung . . . . .	60
A.2.1 Übertragungsfunktion des Pt100-Interface . . . . .	61
A.2.2 Eigenerwärmung des Temperaturfühlers durch Ohmsche Verluste . . . . .	64
<b>B Einfluß von Stoff- oder Geometriewerten auf die ermittelten Temperaturen</b>	<b>68</b>
B.1 Lamellentemperatur . . . . .	69
B.2 Bodentemperatur . . . . .	70

# Verzeichnis der Bilder

1.1	Querschnitt durch den betrachteten Schwingfußboden . . . . .	4
1.2	Temperaturverlauf in einer Wärmetauscherfläche . . . . .	5
2.1	$Nu$ über $Ra$ in der Umgebung von $Ra_{krit}$ . . . . .	22
2.2	Stabilitätskarte der Rayleigh-Benard-Konvektion . . . . .	23
2.3	Verschiedene Nußeltkorrelationen . . . . .	24
2.4	Netze zur Berechnung der Rayleigh-Benard-Konvektion . . . . .	26
2.5	Finite-Elemente-Modell des Fußbodens . . . . .	28
2.6	Details des Fußboden-Modelles . . . . .	29
2.7	Netz in der Umgebung des Heizrohres . . . . .	30
2.8	Vereinfachtes Netz zur Varianten-Berechnung . . . . .	31
2.9	Wärmeübertragung in der Nähe von $Ra_c$ . . . . .	32
2.10	Vergleich verschiedener Strömungsmodelle . . . . .	34
2.11	Einfluß der Relaxationsfaktoren . . . . .	37
2.12	Konvergenzverlauf . . . . .	37
2.13	Konvergenzverläufe bei der Berechnung des Fußbodens . . . . .	39
2.14	Berechnete Stromlinien bei 30 Watt und eingebauter Gipskartonplatte . . . . .	40
2.15	Visualisierung der Strömung im Spalt bei 15 Watt Heizleistung . . . . .	40
2.16	Vektorplot der Strömung in der Umgebung des Heizrohres . . . . .	41
2.17	Änderung des berechneten Strömungsfeldes bei Veränderung der Strahlungszahl der Rohroberfläche	42

2.18	Berechneter Verlauf der Isothermen im Schwingfußboden . . . . .	43
2.19	Berechnete Fußbodenoberflächentemperaturen . . . . .	43
3.1	Ansicht des Fußbodenprüfstandes . . . . .	45
3.2	Modell der Kühlwanne . . . . .	47
3.3	Zeitlicher Verlauf der Strömung im Luftspalt . . . . .	50
3.4	Zeitlicher Verlauf der Strömung im Luftspalt (Fortsetzung) . . . . .	51
4.1	Wärmeübertragungsverhalten verschiedener Konstruktionsvarianten . . . . .	54
4.2	Änderung der Temperatur der Alulamelle bei Veränderung der Strahlungseigenschaften des Rohres	55
4.3	Temperaturverlauf der Alulamelle bei verschiedenen Heizleistungen . . . . .	56
A.1	Meßabweichung zufolge Eigenerwärmung . . . . .	65
A.2	Zeitlicher Verlauf der Temperaturmeßwerte . . . . .	67
B.1	Abschätzung der Welligkeit der Bodenoberflächentemperatur . . . . .	71

# Liste der verwendeten Formelzeichen

Symbol	Bedeutung	Dimension
Lateinische Symbole:		
$A$	Fläche	$[\text{m}^2]$
$a$	Wellenzahl der Rayleigh-Benard-Konvektion $\lambda = 2 \pi/a$	$[1/\text{m}]$
$a$	Temperaturleitzahl $a = \lambda/(\rho c_p)$	$[\text{m}^2/\text{s}]$
$a_B$	Fußbodenbelagfaktor nach DIN 4725	—
$a_K$	Korrekturfaktor für den Kontakt zwischen Heizrohr und Wärmeleitmaterial nach DIN 4725	—
$a_T$	Teilungsfaktor nach DIN 4725	—
$a_{\ddot{U}}$	Überdeckungsfaktor nach DIN 4725	—
$a_{WL}$	Wärmeleitfaktor nach DIN 4725	—
$a_Z$	Faktor für Sonderkonstruktionen nach DIN 4725	—
$a_0, a_2, a_3$	Konstanten der Widerstandskennlinie des Pt100	$[\text{°C}, \text{°C}^2, \frac{\text{°C}^2}{\Omega}]$
$c$	spezifische Wärmekapazität	$[\text{J}/\text{kg K}]$
$c_H$	spezifische Wärmekapazität des Heizmittels	$[\text{J}/(\text{kg K})]$
$c_\eta$	Schließungskoeffizient	—
$c_p$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck	$[\text{J}/(\text{kg K})]$
$c_1, c_2, c_3$	Schließungskoeffizienten	—

$DT$	Verhältnis aus der treibenden Temperaturdifferenz und dem absoluten Temperaturniveau	—
$\mathbf{F}$	Spaltenmatrix der Modellgleichungen	
$F_{ij}$	Winkelverhältnis zwischen der $i$ -ten und der $j$ -ten Wand	—
$\vec{g}$	Vektor der Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}$	$[\text{m/s}^2]$
$H$	Referenzlänge; Höhe des Luftspaltes	$[\text{m}]$
$I$	elektrischer Strom	$[\text{A}]$
$k$	Wärmedurchgangskoeffizient	$[\text{W}/(\text{m}^2 \text{K})]$
$k$	spezifische turbulente kinetische Energie	$[\text{m}^2/\text{s}^2]$
$l_{mix}$	Mischungsweglänge	$[\text{m}]$
$m_{KW}$	in der Kühlwanne befindliche Masse	$[\text{kg}]$
$\dot{m}_H$	Heizmittelmassenstrom	$[\text{kg/s}]$
$\dot{m}_{ein}$	in die Kühlwanne zuströmender Kühlwassermassenstrom	$[\text{kg/s}]$
$Nu$	Nußeltzahl	—
$Nu_{B-U}$	Nußeltzahl an der Fußbodenoberfläche	—
$Nu_{R-B}$	Nußeltzahl der Rayleigh-Benard-Konvektion	—
$n$	bezeichnet die Ortskoordinate in Normalenrichtung	$[\text{m}]$
$P_H$	elektrische Heizleistung	$[\text{W}]$
$Pr$	Prandtl-Zahl $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$	—
$Pr_T$	Schließungskoeffizient, turbulente Prandtlzahl	—
$p$	der vom hydrostatischen Druck abweichende Druck	$[\text{N}/\text{m}^2]$

$p_g$	Druck der thermodynamischen Zustandsgleichung	$[\text{N}/\text{m}^2]$
$\dot{Q}$	Wärmestrom	$[\text{W}]$
$\dot{Q}_{FB-KW}$	vom Fußboden zur Kühlwanne fließender Wärmestrom	$[\text{W}]$
$\dot{Q}_{Verlust}$	Verlustwärmestrom	$[\text{W}]$
$\dot{q}$	Wärmestromdichte	$[\text{W}/\text{m}^2]$
$\dot{q}_{R,j}$	der Netto-Wärmestrom über die $j$ -te Wand zufolge Strahlungsaustausch	$[\text{W}/\text{m}^2]$
$\vec{q}_T$	Reynoldsscher Wärmestromvektor $\vec{q}_T = \rho c_p \overline{u'_i T'}$	$[\text{W}/\text{m}^2]$
$R$	elektrischer Widerstand	$[\Omega]$
$Ra$	Rayleigh-Zahl $Ra = \frac{g\beta H^3 \Delta T}{\nu \alpha}$	—
$Ra_c$	kritische Rayleigh-Zahl $Ra_c = 1708$ für Rayleigh-Benard-Konvektion	—
$Rad$	Rad-Zahl $Rad = \frac{T_{ref}^3 \sigma H}{\lambda}$	—
$R_H$	Widerstand der Heizkabel	$[\Omega]$
$R_{\lambda,B}$	Wärmeleitwiderstand des Bodenbelages	$[\text{m}^2 \text{K}/\text{W}]$
$R_{Pt100}$	Widerstand des Pt100-Meßwiderstandes	$[\Omega]$
$R_{SH}$	Widerstand des Shunts zur Leistungsmessung	$[\Omega]$
$r_0, r_1, r_2$	Konstanten der Widerstandskennlinie des Pt100	$[\Omega, \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}, \frac{\Omega}{^\circ\text{C}^2}]$
$\mathbf{S}_x$	Matrix der empirischen Kovarianzen der Daten $\mathbf{x}$	
$s$	Dicke einer wärmeleitenden Schicht	$[\text{m}]$
$s_x$	empirische Standardabweichung der Größe $x$	
$T$	Temperatur	$[\text{K}]$
$T_{m,Lamelle}$	mittlere Temperatur der Aluminiumlamelle	$[\text{°C}]$
$T_{ref}$	Referenztemperatur	$[\text{K}]$
$t$	Zeit	$[\text{s}]$

$U$	elektrische Spannung	[V]
$U$	Referenzgeschwindigkeit $U = \frac{a}{H} \sqrt{RaPr}$	[m/s]
$U_{OUT}$	Ausgangsspannung des Pt100-Interface	[V]
$U_H$	Spannungsabfall am Heizrohr des mittleren Segmentes	[V]
$u_x$	Unsicherheit des Meßergebnisses $x$	
$\vec{u}$	Geschwindigkeitsvektor mit den Komponenten $u, v, w$	[m/s]
$u, v, w$	Geschwindigkeitskomponenten	$[\frac{m}{s}]$
<b>X</b>	Spaltenmatrix der Meßgrößen	
$\ddot{x}$	Beschleunigung eines Massenpunktes	[m/s <sup>2</sup> ]
$\dot{x}$	Geschwindigkeit eines Massenpunktes	[m/s]
<b>x</b>	Spaltenmatrix der Meßdaten	
$x, y, z$	Ortskoordinaten	[m]
<b>y</b>	Spaltenmatrix der Daten für die Ausgangsgrößen	
Griechische Symbole:		
$\alpha$	Wärmeübergangskoeffizient	[W/(m <sup>2</sup> K)]
$\bar{\alpha}$	mittlerer Wärmeübergangskoeffizient	[W/(m <sup>2</sup> K)]
$\alpha_{B-U}$	Wärmeübergangskoeffizient an der Fußbodenoberfläche	[W/(m <sup>2</sup> K)]
$\alpha_{R-B}$	Wärmedurchgangskoeffizient durch den Luftspalt	$[\frac{W}{m^2 K}]$
$\beta$	isobarer Volumenausdehnungs-Koeffizient $\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$	[1/K]
$\Delta\vartheta$	lokale Temperaturdifferenz Heizmittel-Umgebung	[°C]
$\Delta T$	charakteristische Temperaturdifferenz, z.B. $\Delta T = T_{unten} - T_{oben}$	[K]
$\Delta\vartheta_{gro\beta}$	größere Temperaturdifferenz am Beginn oder Ende einer Wärme-tauscherfläche	[°C]

$\Delta\vartheta_{klein}$	kleinere Temperaturdifferenz am Beginn oder Ende einer Wärme-tauscherfläche	[°C]
$\delta_{ij}$	Kronecker-Symbol $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ , $\delta_{ij} = 0$ sonst	
$\varepsilon$	spezifische turbulente Dissipationsrate	[m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup> ]
$\varepsilon$	Emissionsvermögen; Index $j$ : der $j$ -ten Wand	—
$\eta$	dynamische Viskosität	[kg/(m s)]
$\eta_T$	turbulente Wirbelviskosität	[kg/(m s)]
$\vartheta_{F,m}$	mittlere Fußbodenoberflächentemperatur	[°C]
$\vartheta_H$	Heizmitteltemperatur	[°C]
$\vartheta_{KW}$	Temperatur der Kühlwanne	[°C]
$\vartheta_{Pt100}$	Temperatur des Pt100-Meßfühlers	[°C]
$\vartheta_R$	Rücklauftemperatur	[°C]
$\vartheta_V$	Vorlauftemperatur	[°C]
$\vartheta_{ein}$	Temperatur des in die Kühlwanne zuströmenden Kühlwassers	[°C]
$\vartheta_i$	Norm-Innentemperatur	[°C]
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	[W/(m K)]
$\lambda$	Wellenlänge der Rayleigh-Benard-Konvektion (Abstand zweier Geschwindigkeitsmaxima)	[m]
$\lambda_T$	turbulente Wärmeleitfähigkeit	[W/(m K)]
$\nu_{\mathbf{x}}$	Anzahl der Spalten der Spaltenmatrix $\mathbf{X}$	
$\rho$	Dichte	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	Stefan-Boltzmann-Konstante $5.67 \cdot 10^{-8}$ [W/(m <sup>2</sup> K <sup>4</sup> )]	[W/(m <sup>2</sup> K <sup>4</sup> )]
$\sigma_k, \sigma_\omega$	Schließungskoeffizienten	—

$\tau_{Tij}$	Reynoldsscher Schubspannungstensor $\tau_{Tij} = -\overline{\rho u'_i u'_j}$	[N/m <sup>2</sup> ]
$\Psi$	Volumenanteil des Holzes im Blindboden	—
$\omega$	turbulente Frequenz	[1/s]
$\nabla$	Nabla-Operator $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^T$	[1/m]

Subscripts und Superscripts:

$( )_{Param}$	bei konstantem <i>Parameter</i>
*	dimensionslose Größe
Index 0	bezeichnet jeweils den Referenz-Zustand
Index <i>s</i>	bezeichnet den Stoff <i>s</i>

# Vorwort

Anregung und wissenschaftliche Begleitung für die vorliegende Arbeit danke ich Herrn o. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. W. Linzer, Vorstand des Institutes für technische Wärmelehre an der Technischen Universität Wien.

Professor Linzer war während meiner inzwischen vierjährigen Assistententätigkeit mehr Vorbild als Vorgesetzter. Ihm verdanke ich neben meinen Eltern in hohem Maße, daß Freiheit der Forschung und der Lehre für mich keine leeren Schlagworte geblieben sind.

Herr o. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. W. Schneider war Koreferent der vorliegenden Arbeit. Seine fundierte fachliche Begleitung war immer wieder Ansporn, bei auftretenden Fragen nach neuen Problemlösungen zu suchen. Ich danke Herrn Professor Schneider für die wohlwollende und kritische Begleitung der werdenden Arbeit.

Der Firma Tour & Andersson und ihrem technischen Leiter, Herrn Dipl.-Ing. N. Ramser danke ich für die freundliche Unterstützung bei der Konzeption des Prüfstandes.

Zu danken habe ich freilich (und nicht zuletzt) auch für das hervorragende Arbeitsklima und die Zusammenarbeit am Institut. Ich danke dem gesamten Team des Institutes, dem Sekretariat, den Mitarbeitern im Labor des Instituts, den Diplomanden, die für diese Dissertation ihre Beiträge leisteten, sowie allen Verfassern von Studienarbeiten.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Frau Marianne, die mich während der Erstellung dieser Arbeit in vielerlei Hinsicht unterstützt hat.

In der zweiten Auflage wurden einige Tippfehler im Kapitel „Übertragungsfunktion des Pt100-Interface“ korrigiert sowie einige Diplomarbeiten in das Literaturverzeichnis aufgenommen, die erst nach Fertigstellung der Dissertation beendet wurden.

# Kapitel 1

## Einleitung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist:

- Überprüfung der Anwendbarkeit des Finite-Elemente-Programmes FIDAP: Berechnung der laminaren und turbulenten Konvektionsströmung in einem von unten beheizten waagrechten Luftspalt. (Kapitel 2.2.5, Kapitel 2.2.6, Kapitel 2.3.1)
- Erstellung eines Finite-Elemente-Modelles des betrachteten Fußbodens.
- Berechnung des Wärmedurchganges durch den in Bild 1.1 dargestellten Fußboden unter Berücksichtigung der wesentlichen Wärmeübertragungsmechanismen Leitung, Strahlung, Konvektion. (Kapitel 2.2.7, Kapitel 2.3.2 und Kapitel 4)
- Messungen an einem industriell gefertigten Fussboden und Vergleich der Berechnungen mit den Messungen.
- Abschätzung der Meßunsicherheiten.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist:

- Aufarbeiten der im Zusammenhang mit der Wärmeübertragung im Schwingfußboden relevanten Fachliteratur,
- Vergleich der experimentellen und der numerischen Verfahren hinsichtlich Anwendbarkeit und Aufwand,
- Untersuchung des Einflusses ausgewählter Parameter auf die Wärmeübertragung im Fußboden.

Die Fußbodenheizung hat eine Reihe von Vorteilen:

- Wegen der großen Fläche des Bodens kann diese Heizfläche mit einer niedrigen Oberflächentemperatur betrieben werden. Es kommt zu keiner Staubschwelung, Atemwegsreizungen werden vermieden. Es kommt zu keinen Staubaufwirbelungen durch an Heizkörpern aufsteigende Luft.
- Niedertemperaturheizflächen eignen sich besonders für den Einsatz fortschrittlicher und umweltfreundlicher Heizsysteme wie Brennwertkessel (Heizkessel mit Rauchgaskondensation), Wärmepumpen oder Solaranlagen. Die große Speichermasse des Bodens kann gezielt zur Pufferspeicherung eingesetzt werden.
- Es gibt keine Beschränkung der Raumgröße.
- Die Innenarchitektur des Raumes wird nicht durch Heizkörper gestört.
- Die Heizfläche Fußboden ist leicht zu reinigen. Dies kann z.B. in Spitälern ein wichtiger Vorteil im Vergleich mit Heizkörpern sein.

Üblicherweise werden Fußbodenheizungen entweder naß verlegt (die Heizrohre werden dabei in den Estrich eingebettet) oder trocken verlegt (die Heizrohre werden in einer Halte- und Wärmeverteiler-Konstruktion verlegt, der Estrich überdeckt diese Konstruktion).

An die Bodenkonstruktion eines Gymnastikraumes oder einer Turnhalle werden besondere Anforderungen gestellt: Zur Schonung der Gelenke wird die Unterkonstruktion schwingend gelagert (siehe Bild 1.1). Dabei entsteht ein Luftspalt, der nur mit beträchtlichem Aufwand vermieden werden könnte.

Im folgenden werden die wärmetechnischen Grundlagen und die Normung (in der Norm DIN 4725 wird die Randbedingung für den Wärmeübergang an der Bodenoberkante festgelegt, weiters wird eine Berechnungsvorschrift für Fußbodenheizungen festgelegt) kurz dargestellt.

Eine Fußbodenheizfläche kann als Wärmetauscher betrachtet werden, bei dem im stationären Betrieb die Temperatur des wärmeaufnehmenden Mediums konstant bleibt (ähnlich den Verhältnissen in einem Verdampfer). Bild 1.2 zeigt schematisch den Temperaturverlauf aufgetragen über der Wärmetauscherfläche. Die übertragene Wärme vom Boden zur Umgebung ist  $d\dot{Q} = k\Delta\vartheta dA$ . Dabei kühlt sich das Medium gemäß  $-d\dot{Q} = \dot{m}_H c_H d\vartheta_H$  ab.

Für die gesamte Wärmetauscherfläche definiert man die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz  $\Delta\vartheta_H$  durch  $\dot{Q} = kA\Delta\vartheta_H$ ,  $k = konst$  bei geringen Temperaturdifferenzen oder als Näherung.

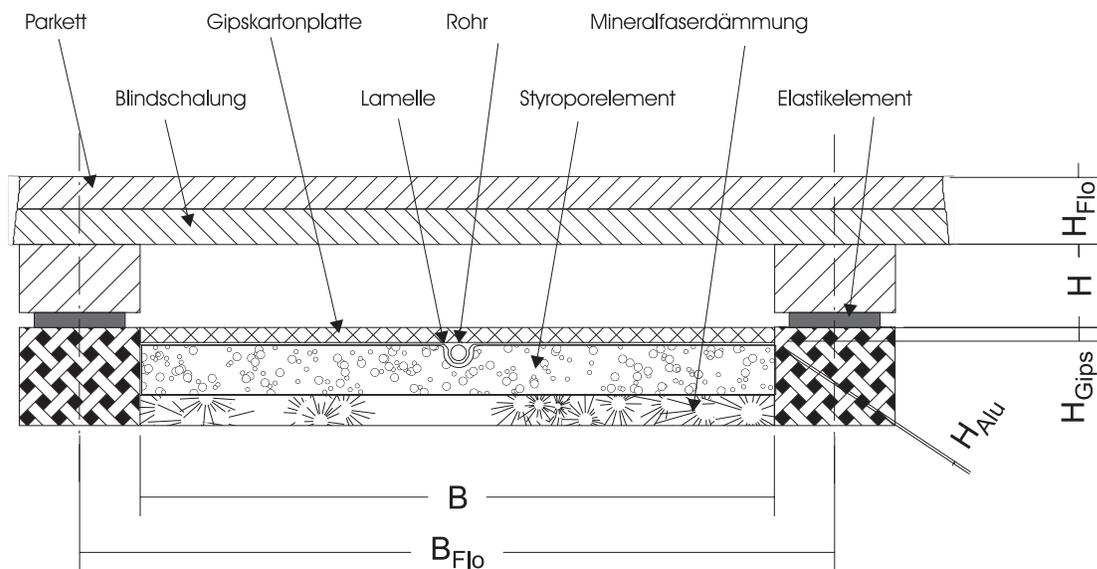


Bild 1.1: **Querschnitt durch den betrachteten Schwingfußboden.** Der Schwingfußboden zeichnet sich durch eine elastisch gelagerte Oberkonstruktion aus. Dadurch wird ein Luftspalt zwischen Wärmeverteiler-Konstruktion und Blindboden nahezu unvermeidlich. Zur besseren Wärmeverteilung ist das Heizrohr von einer Aluminium-Lamelle umschlossen. Je nach Konstruktion liegt das Alublech frei oder wird von einer Gipskartonplatte abgedeckt. Die Blindschalung ist nicht Stoß an Stoß verlegt. In einer zweidimensionalen Berechnung kann dies durch eine gewichtete Mittelung der Stoffwerte für Luft und Blindboden berücksichtigt werden.

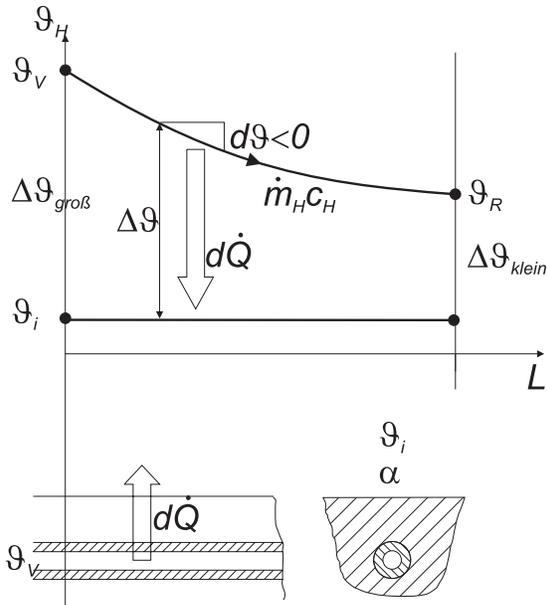


Bild 1.2: **Temperaturverlauf in einer Wärmetauscherfläche.** Die lokale treibende Temperaturdifferenz ist  $\Delta\vartheta$ . Zuzufolge dieser Temperaturdifferenz wird ein Wärmestrom  $d\dot{Q}$  an den zu beheizenden Raum abgegeben. Die Temperatur des Heizmittel nimmt dabei um  $d\vartheta$  ab. Die gesamte ausgetauschte Wärme wird mit der mittleren logarithmischen Temperaturdifferenz berechnet.

Für reinen Gleich- oder Gegenstrom kann die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz explizit angegeben werden:

$$\Delta\vartheta_H = \frac{\Delta\vartheta_{gro\beta} - \Delta\vartheta_{klein}}{\ln \frac{\Delta\vartheta_{gro\beta}}{\Delta\vartheta_{klein}}} = \frac{\vartheta_V - \vartheta_R}{\ln \frac{\vartheta_V - \vartheta_i}{\vartheta_R - \vartheta_i}}.$$

Darin ist  $\dot{Q}$  der vom Fußboden an die Umgebung abgegebene Wärmestrom [W],  $k$  der Wärmedurchgangskoeffizient [ $W/(m^2 K)$ ],  $A$  die Fußbodenfläche [ $m^2$ ],  $\dot{m}_H$  der Heizmittelmassenstrom [kg/s],  $c_H$  die spezifische Wärmekapazität des Heizmittels [ $J/(kg K)$ ],  $\Delta\vartheta$  die lokale Temperaturdifferenz zwischen Heizmittel und Umgebung,  $\vartheta_H$  die Heizmitteltemperatur,  $\vartheta_V$  die Vorlauftemperatur,  $\vartheta_R$  die Rücklauftemperatur,  $\vartheta_i$  die Norm-Innentemperatur,  $\Delta\vartheta_{gro\beta}$  und  $\Delta\vartheta_{klein}$  die größere beziehungsweise die kleinere Temperaturdifferenz am Beginn und Ende der Wärmetauscherfläche, jeweils [ $^{\circ}C$ ]. Für kleine Differenzen zwischen Vorlauf- und Rücklauftemperatur schreibt man  $\Delta\vartheta_H = (\vartheta_R - \vartheta_i) \frac{\frac{\vartheta_V - \vartheta_R}{\vartheta_R - \vartheta_i}}{\ln \frac{\vartheta_V - \vartheta_R}{\vartheta_R - \vartheta_i} + 1}$ . Der Term  $\frac{x}{\ln(1+x)}$  kann in die Reihe  $1 + (1/2)x + (1/12)x^2 + \dots$  entwickelt werden. Man erhält

$$\Delta\vartheta_H = \frac{\vartheta_V + \vartheta_R}{2} - \vartheta_i$$

als treibende Temperaturdifferenz für den Wärmeaustausch.

Die Norm DIN 4725 macht für den Wärmedurchgang bei Trockenverlegesystemen (die Rohre sind nicht in einem Estrich eingebettet) einen Produktansatz der Form

$$\dot{q} = B a_B a_T a_{\ddot{u}} a_{WL} a_K \Delta\vartheta$$

Hierin bedeuten: Faktor  $B = B_0 = 6.7 [\text{W}/(\text{m}^2\text{K})]$  (bei einer Wärmeleitfähigkeit des Rohres  $\lambda_{R,0} = 0.35 [\text{W}/(\text{mK})]$  und einer Wandstärke des Rohres  $s_{R,0} = 2 [\text{mm}]$ ),  $a_B$  der Fußbodenbelagfaktor,  $a_T$  der Teilungsfaktor,  $a_{\ddot{U}}$  der Überdeckungsfaktor,  $a_{WL}$  der Wärmeleitfaktor und  $a_K$  der Korrekturfaktor für den Kontakt zwischen Heizrohr und Wärmeleitmaterial.

Für Sonderkonstruktionen wird ein weiterer Faktor  $a_Z$  bestimmt: Zwei Bodenaufbauten, die sich nur durch die Sonderkonstruktion unterscheiden, werden am Prüfstand auf gleiche mittlere Oberflächentemperatur gebracht. Die Heizmitteltemperatur der Standardkonstruktion  $\vartheta_H$  und der Sonderkonstruktion  $\vartheta'_H$  werden gemessen und damit

$$a_Z = \left( \frac{\vartheta_H - \vartheta_i}{\vartheta'_H - \vartheta_i} \right) \text{ bei gleichem } \vartheta_{F,m}$$

berechnet.

In der Norm DIN 4725 wird als gemessener Zusammenhang zwischen Wärmestromdichte und mittlerer Fußbodenübertemperatur die Zahlenwertgleichung

$$\dot{q} = 8.29(\vartheta_{F,m} - \vartheta_i)^{1.1}$$

angegeben. Es folgt daraus für den mittleren Wärmeübergangskoeffizienten zwischen Fußbodenoberfläche und Umgebung

$$\bar{\alpha} = 8.29 \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^{0.1}} \right] (\vartheta_{F,m} - \vartheta_i)^{0.1}$$

Es bedeutet  $\dot{q}$  die Wärmestromdichte  $[\text{W}/\text{m}^2]$ ,  $\vartheta_{F,m}$  die mittlere Fußbodenoberflächentemperatur und  $\vartheta_i$  die Norm-Innentemperatur  $[\text{°C}]$ ,  $\bar{\alpha}$  den mittleren Wärmeübergangskoeffizienten  $[\text{W}/(\text{m}^2 \text{K})]$ .

Für  $\vartheta_{F,m} = 25 [\text{°C}]$  und  $\vartheta_i = 16 [\text{°C}]$  (gemäß ÖNORM M7500, Teil 4) ergibt sich  $\bar{\alpha} = 11, 11 [\text{W}/(\text{m}^2 \text{K})]$ .

Für die experimentelle Untersuchung von Fußbodenheizungen schreibt DIN 4725, Teil 2, Abschnitt 6 als Wärmeübergangswiderstand eine Platte mit

$$\frac{s}{\lambda} = 0.0926 \left[ \frac{\text{m}^2 \text{K}}{\text{W}} \right] = \frac{1}{\bar{\alpha}}$$

vor. Damit ergibt sich  $\bar{\alpha} = 10.8 [\text{W}/\text{m}^2 \text{K}]$ .

Zur Auslegung einer Warmwasser-Fußbodenheizung nach DIN 4725 benötigt man das Kennlinienfeld  $\dot{q}(\Delta\vartheta_H)|_{R_{\lambda,B}=\text{konst.}}$  für die Wärmeleitwiderstände des Bodenbelages

$$R_{\lambda,B} = [0; 0.05; 0.1; 0.15]$$

als Parameter gemeinsam mit den Grenzkurven. Die Grenzkurve ist die Menge aller Heizwärmeströme  $\dot{q}(\Delta\vartheta_H)$  für die sich ein bestimmter Grenzwert für die Oberflächentemperatur einstellt. Experimentelle Untersuchungen an einem Fußboden sind zeitaufwendig (vom Beginn einer Messung bis zum stationären Betrieb vergehen viele Stunden), teuer und kaum zur Durchführung von Parameterstudien geeignet. Aus diesem Grund wurden z.B. von KAST, KLAN & BOHLE [57] erfolgreich die genormten Heizsysteme mit Finiten Elementen berechnet. Dabei wurde die Wärmeleitung berechnet und bei den trocken verlegten Systemen ein Kontaktwiderstand abgeschätzt. In der vorliegenden Arbeit soll geklärt werden, ob der Wärmedurchgang durch einen Fußboden mit Luftspalt (siehe Bild 1.1) ebenfalls mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden kann.

Eine einfache Abschätzung des Wärmedurchganges mit

$$\dot{q}_n = \frac{\lambda_n}{s_n}(T_{n-1} - T_n) \quad n = \text{Alu, Gipskarton, Blindboden, Parkett}$$

und

$$\dot{q}_{\text{Luftspalt}} = \alpha_{R-B}(T_{\text{Gips}} - T_{\text{Luftspalt}}) + \frac{\sigma(T_{\text{Gips}}^4 - T_{\text{Luftspalt}}^4)}{\frac{1}{\varepsilon_{\text{Gips}}} + \frac{1}{\varepsilon_{\text{Luft}}} - 1}$$

(das Gleichungssystem ist nicht explizit lösbar, kann aber näherungsweise iterativ gelöst werden) zeigt die große Bedeutung der Strahlungswärmeübertragung: Für eine Wärmestromdichte von  $18.8 \text{ [W/m}^2\text{]}$  ergibt sich im Luftspalt eine konvektive Wärmestromdichte von  $4.9 \text{ [W/m}^2\text{]}$  und eine Strahlungswärmestromdichte von  $13.9 \text{ [W/m}^2\text{]}$ .

Bei der Berechnung der Wärmeübertragung im Schwingfußboden ist somit die Wärmeleitung in der gesamten Konstruktion, die natürliche Konvektion im Luftspalt und der Strahlungswärmeaustausch im Luftspalt zu berücksichtigen.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst grundlegende Berechnungen (Strömungsgeschwindigkeiten, Temperaturen, Wärmeströme, ...) am Modellfall des waagrechten Luftspalts mit konstanter Temperatur am oberen und unteren Rand durchgeführt. (Seite 31 ff.) Dieser Modellfall ist in der Literatur eingehendst untersucht und daher bestens geeignet, um die mit dem Strömungs-Berechnungs-Programm erhaltenen Werte zu beurteilen. (Ein kurzer Überblick über die wichtigsten Eigenschaften der Strömung im waagrechten Spalt ist Seite 22 ff. dargestellt.)

In weiterer Folge wird jene Schwingfußbodenkonstruktion, die experimentell untersucht wird, nachgerechnet. Das Finite-Elemente-Modell wird Seite 27 ff. beschrieben, die Ergebnisse ab Seite 38. Weiters werden die Meßwerte mit den numerischen Ergebnissen verglichen (Seite 52 ff.). Anschließend werden Parameterstudien durchgeführt, um festzustellen, welche Konstruktionsdetails den größten Einfluß auf die übertragene Wärme haben.

Geometriedaten		
Höhe der Luftschicht	$H$	53 [mm]
Breite der Luftschicht	$B$	420 [mm]
Breite eines Bodensegmentes	$B_{Seg}$	500 [mm]
Dicke der Alu-Lamelle	$H_{Alu}$	0.45 [mm]
Höhe der Gipsplatte	$H_{Gips}$	10 [mm]
Höhe der Blindschalung	$H_{BB}$	20 [mm]
Höhe der Trittschicht	$H_{Parkett}$	22 [mm]
Randbedingungen		
Wärmeübergangszahl Boden-Luft	$\alpha_{B-U}$	11.11 [W/(m <sup>2</sup> K)]
Umgebungstemperatur	$T_U$	16 [°C]
Stoffwerte		
Stoffwerte der Luft bei 40 [°C]		
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda_{Luft}$	0.027 [W/(m K)]
Dichte	$\rho_{Luft}$	1.12 [kg/m <sup>3</sup> ]
spezifische Wärmekapazität isobarer Volumenausdehnungs- koeffizient	$c_{pLuft}$	1007 [J/(kg K)]
dynamische Zähigkeit	$\beta_{Luft}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$ [1/K]
	$\eta_{Luft}$	$1.92 \cdot 10^{-5}$ [kg/(m s)]
Stoffwerte der Alulamelle		
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda_{Alu}$	208 [W/(m K)]
Dichte	$\rho_{Alu}$	2700 [kg/m <sup>3</sup> ]
spezifische Wärmekapazität	$c_{pAlu}$	$9.4 \cdot 10^3$ [J/(kg K)]
Stoffwerte der Gipskartonplatte		
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda_{Gips}$	0.31 [W/(m K)]
Dichte	$\rho_{Gips}$	800 [kg/m <sup>3</sup> ]
spezifische Wärmekapazität	$c_{pGips}$	$1.09 \cdot 10^3$ [J/(kg K)]
Stoffwerte des Blindbodens und der Polsterhölzer		
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda_{BB}$	(0.06 ÷ 0.16) 0.14 [W/(m K)]
Dichte	$\rho_{BB}$	(200 ÷ 620) 500 [kg/m <sup>3</sup> ]
spezifische Wärmekapazität	$c_{pBB}$	$2.7 \cdot 10^3$ [J/(kg K)]
Stoffwerte des Parkettbodens		
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda_{Parkett}$	(0.16 ÷ 0.21) 0.18 [W/(m K)]
Dichte	$\rho_{Parkett}$	(600 ÷ 1000) 800 [kg/m <sup>3</sup> ]
spezifische Wärmekapazität	$c_{pParkett}$	$2.4 \cdot 10^3$ [J/(kg K)]

Tabelle 1.1: **Daten des betrachteten Fußbodens.** Die Stoffwerte wurden aus folgenden Handbüchern und Tabellenwerken entnommen: VDI-WÄRMEATLAS, DUBBEL, HANDBOOK OF HEAT TRANSFER, HÜTTE, RECKNAGEL-SPRENGER [1, 2, 3, 4, 5].

# Kapitel 2

## Numerische Untersuchungen

### 2.1 Zur Verfügung stehende Rechner

Die numerischen Berechnungen wurden auf Rechnern des EDV-Zentrums der Technischen Universität Wien durchgeführt. Bis Anfang 1996 stand der Fachbereichsrechner Maschinenbau zur Verfügung: Je eine IBM RS/6000-950 und eine IBM RS/6000-550 (Leistungsdaten 119 SPECfp92, 34 SPECint92) waren über einen optischen Link verbunden. Als Betriebssystem wurde IBM AIX Vers.3.2.5 verwendet.

Hardwarekomponenten IBM RS/6000-950: RISC-CPU mit 41 MHz Taktrate; 256 MB Hauptspeicher; 3 SCSI-Bus Controller; 7 GB Plattenspeicher; 1 VIDEO-Tape 8mm (2.3 GB); 1 DAT-Tape 4mm (8 GB); 1 CD-ROM Laufwerk; 1 Floppy-Laufwerk (3.5 Zoll); 2 serielle und eine parallele Schnittstelle; Optischer Link (Verbindung zur 550, 100 Mbit/s); Token Ring (Verbindung zur 550, 16 Mbit/s); FDDI-Adapter (Verbindung zum TUNET, 100 Mbit/s); Ethernet-Controller (Verbindung zum TUNET, 10 Mbit/s);

Die IBM RS/6000-550: RISC-CPU mit 41 MHz Taktrate; 192 MB Hauptspeicher; sonst ähnlich der RS/6000-950. [53]

Ab Beginn des Jahres 1996 wurde vom Konzept der Fachbereichsrechner abgegangen und auf zentrale Applikationsserver übergegangen. Das System DEC 8200 5/300 ist mit 4 Prozessoren (DECchip 21164) mit einer Taktrate von 300 MHz und einer Rechenleistung von 507 SPECfp92 ausgestattet, wobei jeder Prozessor über 4 MB Cache verfügt. Über ein schnelles und leistungsfähiges Bussystem (Systembus mit 2.6 GByte/s) greifen die Prozessoren auf ein Shared Memory von 4 Gbyte zu. Das I/O-System besteht aus einem I/O-Board, an dem 4 SCSI-Controller angeschlossen sind. An diesen Controllern sind 9 Stück 2 GB Platten

(für System, Swap, Scratch, Temp und für die Applikationen) sowie ein CD-ROM Laufwerk angeschlossen. Weiters ist über eine 166 MB/s Verbindung ein PCI/EISA-Bussystem installiert (mit 8 Steckplätzen für PCI- und 2 Eisa-Karten), das mit einem PCI-SCSI Disc-Controller ausgestattet ist. Auf diesem Controller, der als RAID-Controller verwendet werden kann, sind 16 GByte netto (5 x 4 GB Platten bei RAID 5) als Home-Bereich (für die Daten der Benutzer) vorgesehen. Ein schnelles Tape (TZ87, DLT-Technologie) mit 20 GB Speicherkapazität ist für die Datensicherung vorhanden. Über je einen Ethernet- und FDDI-Controller ist die Verbindung zum TUNET realisiert. Als Betriebssystem ist Digital UNIX (OSF/1) Version 3.2C im Einsatz. Das Batch-System ist Connect:Queue (Sterling NQS) Version 2.5 mit den Jobklassen **short** (CPU-Limit 3000 Sekunden), **long** (CPU-Limit 20000 Sekunden) und **xlong** (CPU-Limit 100000 Sekunden).[46]

Auf diese Rechner wurde über Personal-Computer mit WindowsNT 3.51 als Betriebssystem und HCLeXceed als X-Server zugegriffen.

## 2.2 Modellbildung

### 2.2.1 Geometrie

Die in Bild 1.1 dargestellte Konstruktion wird auf ein Modell abgebildet, das der Berechnung mit einem Finite-Elemente-Programm zugänglich ist.

Aus dem Fußbodenverband wird ein Segment herausgelöst. Aufgrund der Symmetrie wird über dessen seitlichen Rand keine Wärme ausgetauscht. Eine etwas problematischere Vereinfachung stellt die Vernachlässigung der Feinstrukturen im Bereich des Blindbodens dar. Dieser ist üblicherweise nicht Stoß an Stoß verlegt. Die obere Berandung des Spaltes ist dann quer gerippt. Dies beeinflusst das Strömungsfeld im Spalt. In dieser Arbeit wird die grundsätzliche Möglichkeit der Berechnung eines Schwingfußbodens untersucht. Die Feinstruktur der Geometrie wird deshalb hier vernachlässigt und durch eine fiktive Wärmeleitfähigkeit des Blindbodens berücksichtigt. Mit dem Volumenanteil  $\Psi$  des Holzes im Blindboden gilt  $\lambda_{Blindboden} = \Psi\lambda_{Holz} + (1 - \Psi)\lambda_{Luft}$ . Die Korrelation nach HOLLANDS ET. AL. (Glg. 2.8, Seite 25) zeigt, daß für  $Ra > 5830$  die unterschiedliche Luftspalthöhe keinen großen Einfluß auf den Wärmedurchgang hat.

Eine Berechnung des Schwingfußbodens gemeinsam mit den lokalen Wärmetransportvorgängen in der Nähe des Heizrohres (siehe Bild 1.1, Seite 4) ist rechenzeit- und hauptspeicheraufwendig. Für die Nachrechnung der Meßergebnisse wurde der gesamte Boden einschließlich Heizrohr berechnet. (Bild 2.5, Seite 28 zeigt das

Finite-Elemente-Netz.) Für die Untersuchung des Einflusses der verschiedenen Parameter auf den Wärmedurchgang wurde das Rohr vernachlässigt: Die lokalen Wärmeübertragungsvorgänge in der Umgebung des Rohres beeinflussen den globalen Wärmedurchgang nicht. Die Berechnung kann in eine lokale Studie des Wärmeüberganges am Rohr und in eine globale Betrachtung der gesamten Fußbodenkonstruktion aufgeteilt werden. Dabei geht man davon aus, daß es einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der mittleren Wassertemperatur im Rohr und der Temperatur der Blechlamellenkante knapp neben dem Rohr gibt. Dieser Zusammenhang soll nur von der lokalen Geometrie abhängen, nicht jedoch von der gesamten Konstruktion. Es ist also möglich, die Temperatur der Lamellenkante bei der Modellierung des gesamten Bodenverbundes als Randbedingung vorzugeben. Die zugehörige Wassertemperatur kann in einer lokalen Berechnung ermittelt werden.

Ein Problem in der Modellbildung sind die Kontaktzonen zwischen den einzelnen Schichten. Es liegt das Aluminiumblech weder zur Gänze auf dem darunter befindlichen Styropor noch an der darüberliegenden Gipskartonplatte an. In der Norm werden diese Wärmeleitwiderstände durch den Faktor  $a_T$  berücksichtigt. Damit wird die übertragene Wärme im Extremfall bis auf die Hälfte abgemindert. In dieser Arbeit werden diese Wärmeleitwiderstände durch dünne Luftspalte modelliert. (Es ist mit dem verwendeten Programmpaket nicht möglich, im Inneren des Berechnungsgebietes Kontaktzonen mittels spezieller finiter Elemente zu modellieren. Es werden zwar GAP-Elemente angeboten, die aber, wie in der Diplomarbeit von FEISCHL[41] gezeigt wird, nicht anwendbar sind. Damit vergrößern sich die Rechenzeit und der Speicherbedarf: Weil die Elemente ein Seitenverhältnis von 1/10 nicht unterschreiten sollen, muß auch quer zur Kontaktlinie sehr fein diskretisiert werden.)

Das vorliegende Problem ist im Grunde dreidimensional. Bei reiner Rayleigh-Benard-Konvektion in begrenzten Hohlräumen weiß man aus den in der Literatur beschriebenen Experimenten, daß sich Konvektionswalzen quer zur Längsachse einstellen. ([15], p 69) An den Schmalseiten können noch zusätzlich kurze Walzenstücke (*grain boundaries*) ausgebildet sein. ([15], p 147ff) Bei höheren Temperaturdifferenzen wird die Strömung zunächst dreidimensional und instationär, um schließlich turbulent zu werden. Ob es gerechtfertigt ist, bei zentraler Beheizung der Längsachse ein zur Längsachse paralleles Strömungsmuster anzunehmen, kann nur eine dreidimensionale Simulation und das Experiment zeigen. Eine dreidimensionale Berechnung der Strömung soll wegen des unverhältnismäßig hohen Aufwandes vermieden werden. Daher wird zunächst untersucht, ob von einer zweidimensionalen Beschreibung des Problems ausgegangen werden kann.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Symmetrie des betrachteten Hohlraumes nicht zu einer weiteren Vereinfachung ausgenützt werden kann. Es kann näm-

lich, vor allem bei zeitabhängiger Strömung, nicht vorausgesetzt werden, daß nur symmetrische Strömungsformen im Spalt möglich sind.

Sämtliche Stoffe werden als homogen und isotrop mit konstanten Stoffwerten angesehen. Die Stoffwerte wurden im Rahmen der Diplomarbeit von FEISCHL [41] aus den in Tabelle 1.1 angegebenen Werken ermittelt.

## 2.2.2 Physikalisches Modell

Die Wärmeübertragung erfolgt durch Konvektion im Luftspalt, Wärmeleitung in der Bodenkonstruktion und Strahlungsaustausch zwischen den Rändern des Luftspaltes.

Unter Konvektion versteht man den Energietransport mittels eines bewegten, fluiden Mediums. Es sind daher die Differentialgleichungen für die Massenbilanz, die Bewegungsgleichung und die Energiebilanz für das Fluid zu lösen.

Die Grundgleichungen, die die Fluidbewegung bei natürlicher Konvektion beschreiben, sind zum Beispiel in [7, 10, 11] angegeben. Die Massenbilanz lautet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0. \quad (2.1)$$

Die Bewegungsgleichung lautet

$$\rho \left( (\vec{u} \nabla) \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = -\nabla p_g + \rho \vec{g} + \nabla \tau_{ij}. \quad (2.2)$$

Die Energiebilanz liefert unter Vernachlässigung der Dissipation unter der Annahme, daß die Enthalpie nur von der Temperatur abhängig ist sowie mit dem Fourierschen Wärmeleitgesetz  $\vec{q} = -\lambda \nabla T$

$$\rho c_p \left( (\vec{u} \nabla) T + \frac{\partial T}{\partial t} \right) = -\nabla \vec{q}. \quad (2.3)$$

Dieses Differentialgleichungssystem wird diskretisiert und numerisch integriert.

Wenn das Definitionsgebiet der Differentialgleichung aus Gebieten mit unterschiedlichen aber gebietsweise konstanten Stoffwerten zusammengesetzt ist, kann man *für jedes Teilgebiet* die Differentialgleichungen weiter vereinfachen.

$$\nabla \vec{u} = 0,$$

$$\rho_0 \left( (\vec{u} \nabla) \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = -\nabla p - \rho_0 \beta_0 \vec{g} (T - T_{ref}) + \eta_0 \nabla^2 \vec{u},$$

$$\rho_0 c_{p0} \left( (\vec{u} \nabla) T + \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \lambda_0 \nabla^2 T.$$

Darin ist  $\nabla$  der Nabla-Operator  $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^T$  [1/m],  $\vec{u}$  der Geschwindigkeitsvektor [m/s],  $\rho_0$  die Dichte des Fluides im Referenz-Zustand [kg/m<sup>3</sup>],  $t$  die Zeit [s],  $p$  der vom hydrostatischen Druck abweichende Druck [N/m<sup>2</sup>] – dieser ist nicht ident mit dem Druck der thermodynamischen Zustandsgleichung, es gilt  $\nabla p_g = \nabla p + \rho \vec{g}$ ,  $\beta_0 = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$  der isobare Volumsausdehnungs-Koeffizient [1/K],  $\vec{g}$  der Erdbeschleunigungsvektor [m/s<sup>2</sup>],  $T_{ref}$  die Referenztemperatur und  $T$  die Temperatur [K],  $\eta_0$  die dynamische Viskosität [kg/(m s)],  $c_{p0}$  die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck [J/(kg K)],  $\lambda_0$  die Wärmeleitfähigkeit [W/(m K)]. Der Index 0 bezeichnet jeweils den Referenz-Zustand. Bei stationärer Strömung ist  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ .

Diese Gleichungen beinhalten folgende Vereinfachungen:

- Das Fluid wird als inkompressibel vorausgesetzt. Dies gilt, solange das Quadrat der Machzahl  $Ma^2/2$  wesentlich kleiner als Eins ist.
- Das Fluid sei isotrop und es gelte für den Zusammenhang zwischen den Schubspannungen  $\tau_{ij}$  und den Deformationsgeschwindigkeiten der Stokes-sche Schubspannungsansatz für ein inkompressibles Fluid  $\tau_{ij} = \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ , mit  $i = 1..3$ .
- Es gelte die Oberbeck-Boussinesq-Approximation (die Grenzen dieser Näherung sind beispielsweise in der Dissertation von JÄGER [38] ausführlich diskutiert):
  - Die Dichte ist keine Funktion des Druckes und wird außer im Auftriebsterm konstant gehalten. Im Auftriebssystem wird eine lineare Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur angenommen:  
 $\rho - \rho_0 = -\rho_0 \beta_0 (T - T_{ref})$ .
  - Die Energiedissipation wird vernachlässigt.

Im Festkörper gilt  $\vec{u} \equiv 0$ . Damit reduziert sich die Energiebilanz auf die Wärmeleitgleichung.

Die einzelnen Teilgebiete mit konstanten Stoffwerten sind über Koppelbedingungen (z.B. kein Temperatursprung, Erhaltung des Wärmestromes) verknüpft. Die-

ser Standpunkt wird bei der analytischen Behandlung (zum Beispiel des Wärmedurchganges durch eine Verbundplatte) oder bei der Anwendung der Dimensionsanalyse eingenommen.

Zur Berechnung der durch Strahlung übertragenen Wärme werden folgende vereinfachende Annahmen getroffen:

- Die Luft im Spalt nimmt am Strahlungsaustausch nicht teil.
- Die Berandungen seien graue Strahler.
- Die Berandung wird in Teilstücke zerlegt, die jeweils konstante Temperaturen aufweisen.

Die daraus resultierende algebraische Gleichung für den Strahlungsaustausch lautet (SIEGEL & HOWELL, S. 263 ff [18])

$$\sum_{j=1}^J \left( \frac{\delta_{ij}}{\varepsilon_j} - F_{ij} \frac{1 - \varepsilon_j}{\varepsilon_j} \right) \dot{q}_{R,j} = \sum_{j=1}^J (\delta_{ij} - F_{ij}) \sigma T_j^4.$$

Darin ist  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol (1 für  $i = j$ , 0 sonst.),  $\varepsilon_j$  das Emissionsvermögen der  $j$ -ten Wand,  $F_{ij}$  das Winkelverhältnis zwischen der  $i$ -ten und der  $j$ -ten Wand,  $\dot{q}_{R,j}$  der Netto-Wärmestrom über die  $j$ -te Wand zufolge Strahlungsaustausch [ $\text{W}/\text{m}^2$ ],  $\sigma$  die Stefan-Boltzmann-Konstante  $5.67 \cdot 10^{-8}$  [ $\text{W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$ ] und  $T_j$  die absolute Temperatur der  $j$ -ten Wand.

Zur vollständigen Formulierung des Problems kommen noch die Randbedingungen hinzu:

An den Begrenzungen des Luftspaltes durch Blindschalung, Polsterholz, Elastik-element und Gipskartonplatte (beziehungsweise Aluminiumlamelle bei den Varianten ohne Gipskartonplatte; siehe Bild 1.1) gilt die Haftbedingung für die Luft:

$$\vec{u}|_{\text{Wand}} \equiv 0. \quad (2.4)$$

Für die Temperaturen werden an diesen Begrenzungen keine Randbedingungen vorgeschrieben. Sie ergeben sich aus den Lösungen der Wärmeleitgleichung in den oben genannten Bauteilen.

Die Symmetriebedingung entlang der Symmetrieebenen (in Bild 1.1 strichpunktiert gekennzeichnet) liefert

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\text{Symmetrieebene}} \equiv 0. \quad (2.5)$$

Die Wärmedämmung durch das Styroporelement und die Mineralfaserdämmung sowie entlang der Unterkante der Polsterhölzer wird durch

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\text{unten}} \equiv 0, \quad (2.6)$$

idealisiert.

An der Parkett-Oberseite wird eine Konvektionsrandbedingung der Form

$$-\lambda_{\text{Parkett}} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\text{Parkett}} \equiv \alpha_{B-U} (T_{\text{Parkett}} - T_{\text{Umgebung}}), \quad (2.7)$$

(die Variable  $n$  bedeutet jeweils die Ortskoordinate in Normalenrichtung) vorge-schrieben.

Die Beheizung durch das Wärmeträgermedium im VPE-Rohr wird durch eine konstante Temperatur oder eine konstante Wärmestromdichte an der Rohr-innenseite

$$T|_{\text{VPE-Rohr}} \equiv \textit{konstant} \quad \text{oder} \quad \dot{q}|_{\text{VPE-Rohr}} \equiv \textit{konstant}.$$

modelliert.

### 2.2.3 Dimensionslose Formulierung

Um Rechenzeit zu sparen (die Rechenzeit halbiert sich im Vergleich zur dimensions-behafteten Rechnung), die Ergebnisse einer Rechnung zu verallgemeinern und um die Anzahl der freien Parameter zu verringern, wird auf eine dimensionslose Darstellung übergegangen. Man betrachtet nun das System von Differentialglei-chungen mit konstanten Koeffizienten für jeden Teilbereich des Definitionsgebietes, den ein Material einnimmt. Die Stoffwerte ohne Index bezeichnen im weiteren die Stoffwerte der Luft. Die mit einem hochgestellten Stern gekennzeichneten Größen sind dimensionslos.

Aus der formalen Anwendung der Dimensionsanalyse auf den funktionalen Zu-sammenhang

$$F_n(u, p, T, T - T_{ref}, x, \rho_{s1} \dots \rho_{sN}, \beta_{s1} \dots \beta_{sN}, \eta_{sn}, \lambda_{sn}, c_{p_{sn}}, H, \alpha, \dot{q}, g, \sigma, \varepsilon) = 0$$

kann ein Satz von dimensionslosen Parametern gewonnen werden, der das unter-suchte Problem vollständig beschreibt [19, 21, 14, 9]. (Es bedeutet  $u$  die erste Komponente des Geschwindigkeitsvektors [m/s] und  $x$  die erste Komponente eines Ortsvektors [m]. Index  $s$  den Stoff  $s$ ,  $N$  die Anzahl der Stoffe.  $n$  ist der Lau-findex.  $H$  ist die Referenzlänge, im betrachteten Fall die Höhe des Luftspaltes.)

Es bedarf nun gewisser Erfahrung, daraus durch Produktbildung jene Kombinationen zu finden, die dem betrachteten Problem gut angepasst sind. Die Numerik kann auf unterschiedliche Wahl dimensionsloser Variabler mit erheblichen Änderungen der Rechenzeit reagieren. In der Diplomarbeit von PACLOVEC [45] wurden verschiedene Möglichkeiten der dimensionslosen Darstellung untersucht. Eine geeignete Wahl stellt der folgende Satz von Kennzahlen dar:

Die Nußeltzahl

$$Nu_{B-U} = \frac{\alpha_{B-U} H}{\lambda}$$

beschreibt den Wärmeübergang vom Fußboden zur Umgebung. Auch der Wärmeübergang durch den Luftspalt wird mit einer Nußeltzahl beschrieben:

$$Nu_{R-B} = \frac{\dot{Q}_{Konvektion}}{\dot{Q}_{Wärmeleitung}} = \frac{\alpha_{R-B} H}{\lambda}$$

Diese Beziehung stellt auch die Definitionsgleichung für den Wärmeübergangskoeffizienten bei Rayleigh-Benard-Konvektion  $\alpha_{R-B}$  dar.

Die *Rad*-Zahl [54]

$$Rad = \frac{T_{ref}^3 \sigma H}{\lambda}$$

und das Verhältnis aus der treibenden Temperaturdifferenz und dem absoluten Temperaturniveau

$$DT = \frac{\Delta T}{T_{ref}}$$

folgen aus der Einbeziehung der Strahlung. Die Rayleigh-Zahl

$$Ra = \frac{c_p \rho^2 g \beta H^3 \Delta T}{\eta \lambda} = \frac{g \beta H^3 \Delta T}{\nu a},$$

beschreibt die Temperaturbelastung.

Die Prandtl-Zahl

$$Pr = \frac{c_p \eta}{\lambda} = \frac{\nu}{a} \quad \text{mit} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

ist eine reine Stoffwertefunktion.

Aus dem  $\Pi$ -Theorien (siehe zum Beispiel SPURK [19]) folgt, daß die Wärmeübertragung einem Gesetz der Form  $Nu(Ra, Rad, DT, Pr)$  gehorcht. Für die Transformation der Differentialgleichungen benötigt man eine Reihe weiterer dimensionsloser Variablen:

Zweckmäßigerweise wählt man als Referenzgeschwindigkeit die fiktive Geschwindigkeit, die sich einstellen würde, wenn ein Fluidteilchen über die Höhe des Spaltes mit der Auftriebsbeschleunigung  $g\beta\Delta T$  beschleunigt wird. Aus der Bewegungsgleichung *Beschleunigung*  $d(\text{Weg}) = \text{Geschwindigkeit } d(\text{Geschwindigkeit})$  für einen Massenpunkt folgt nach Integration  $\dot{x} = \sqrt{2}\sqrt{\ddot{x}H}$  und damit für die Referenzgeschwindigkeit

$$U = \sqrt{g\beta\Delta TH} = \frac{a}{H}\sqrt{RaPr}.$$

Der Term  $a/H$  wäre schon von der Dimension einer Geschwindigkeit. Der Faktor  $\sqrt{RaPr}$  ergibt sich, wenn man in der transformierten Bewegungsgleichung ähnliche Koeffizienten vor den Beschleunigungs- und den Auftriebstermen erzielen will. Identische Koeffizienten lassen sich erzielen, wenn die Strahlung nicht berücksichtigt zu werden braucht. Dann tritt die dimensionslose Temperaturdifferenz  $DT$  nicht auf.

Mit dieser Referenzgeschwindigkeit ergeben sich weiters die dimensionslosen Variablen

$$\vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{H}, t^* = t\frac{U}{H}, \vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{U}, T^* = \frac{T}{T_{ref}}, p^* = p\frac{H}{\eta U}.$$

Die Geschwindigkeiten werden mit der charakteristischen Geschwindigkeit  $U$ , die Längen mit der charakteristischen Länge  $H$ , die Zeit mit der charakteristischen Zeit  $\frac{H}{U}$  und der Druck mit der Wandschubspannung  $\frac{\eta U}{H}$  dimensionslos gemacht. (In der Diplomarbeit von PAVLOVEC [45] wurden Vergleichsrechnungen mit einem durch den Staudruck  $\rho U^2$  dimensionslos gemachten Druck durchgeführt. Der Gewinn an Rechenzeit fiel damit nur halb so groß aus.) Die Temperatur kann wegen der Berücksichtigung der Strahlung nicht, wie sonst bei der Rayleigh-Benard-Konvektion üblich, mittels  $T^* = (T - T_{oben}) / (T_{unten} - T_{oben})$  dimensionslos gemacht werden. Die Strahlung ist von der absoluten Temperatur abhängig und nicht von Temperaturdifferenzen, wie dies bei Wärmeleitung und Konvektion der Fall ist. Eine Skalierung mit einer Temperaturdifferenz ist ungünstig, weil für  $\Delta T = T_{unten} - T_{oben} \rightarrow 0$  die Temperatur  $T^*$  gegen unendlich ginge.

Weiters ergeben sich die dimensionslosen Stoffwerte für jeden Stoff  $s$

$$\lambda_s^* = \frac{\lambda_s}{\lambda}, \rho_s^* = \frac{\rho_s}{\rho}, c_{p,s}^* = \frac{c_{p,s}}{c_p}, \beta_s^* = \frac{\beta_s}{\beta}, \eta_s^* = \frac{\eta_s}{\eta}.$$

Nach Transformation des Differentialgleichungssystems auf die dimensionslosen Variablen ergibt sich für das transformierte Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \nabla^* \vec{u}^* &= 0, \\ \rho_s^* \sqrt{\frac{Ra}{Pr}} (\vec{u}^* \nabla^* \vec{u}^* + \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*}) &= -\nabla^* p^* - \rho_s^* \sqrt{\frac{Ra}{Pr}} \frac{1}{DT} \beta_s^* \vec{g}^* (T^* - T_0^*) + \eta_s^* \nabla^{*2} \vec{u}^*, \end{aligned}$$

$$\rho_s^* c_{p,s}^* \sqrt{\frac{Ra}{Pr}} Pr \left( (\vec{u}^* \nabla^*) T^* + \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \right) = \lambda_s^* \nabla^{*2} T^* .$$

Das Fouriersche Wärmeleitgesetz liefert wegen

$$\dot{q} = -\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda_s^* \lambda \frac{T_{ref}}{H} \frac{\partial T^*}{\partial x^*}$$

nach einem Koeffizientenvergleich mit  $\dot{q}^* = -\lambda_s^* (\partial T^* / \partial x^*)$  die Beziehung für den dimensionslosen Wärmestrom

$$\dot{q}^* = \frac{H}{\lambda T_{ref}} \dot{\vec{q}} .$$

Für die Konvektionsrandbedingung 2.7 ergibt sich nach Variablentransformation und Umformen auf  $-\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial n^*} = Nu_{B-U} (T_{Boden}^* - T_{Umgebung}^*)$  die dimensionslose Wärmeübergangszahl

$$Nu_{B-U} = \frac{\alpha_{B-U} H}{\lambda} .$$

Die Nußeltzahl für die Rayleigh-Benard-Konvektion kann aus der Wärmestromdichte, die vom *postprocessor* des Finite-Elemente-Programmes berechnet wird, mittels

$$Nu_{R-B} = \bar{\dot{q}}^* \frac{1}{DT}$$

mit der mittleren Wärmestromdichte  $\bar{\dot{q}} = \frac{\dot{Q}_{Konvektion}}{Bodenfläche}$  berechnet werden.

Die transformierte Beziehung für den Strahlungswärmeaustausch lautet

$$\sum_{j=1}^J \left( \frac{\delta_{ij}}{\varepsilon_j} - F_{ij} \frac{1 - \varepsilon_j}{\varepsilon_j} \right) \dot{q}_{R,j}^* = \sum_{j=1}^J (\delta_{ij} - F_{ij}) \frac{\sigma H T_{ref}^3}{\lambda} T_j^{*4} .$$

Aus einem Koeffizientenvergleich zwischen dem dimensionsbehafteten System und der dimensionslosen Form ergeben sich die Werte für die von FIDAP benötigten Stoffwerte. Man erhält damit

$\rho_{FIDAP}$	$\eta_{FIDAP}$	$\lambda_{FIDAP}$	$c_{p,FIDAP}$	$g_{FIDAP}$	$\beta_{FIDAP}$	$\sigma_{FIDAP}$	$\alpha_{B-U,FIDAP}$
$\rho_s^* \sqrt{\frac{Ra}{Pr}}$	$\eta_s^*$	$\lambda_s^*$	$c_{p,s}^* Pr$	1	$\beta_s^* \frac{1}{Dt}$	<i>Rad</i>	$Nu_{B-U}$

## 2.2.4 Strömungsmodellierung

Grundsätzlich beschreiben die Navier-Stokes-Gleichungen 2.1, 2.2 und 2.3 sowohl die laminare als auch die turbulente Strömung. Bei turbulenter Strömung ist jedoch die Strömung nicht nur instationär sondern auch sehr fein strukturiert. Der Versuch, die Turbulenz direkt zu simulieren, ginge über den Rahmen dieser Arbeit weit hinaus. Daher werden bekannte Näherungsmodelle eingesetzt. Der übliche Ansatz zur Berechnung turbulenter Strömungen ist die Aufspaltung der Feldgrößen in Mittelwert und Schwankungsanteil, zum Beispiel  $\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{U}(\vec{x}, t) + \vec{u}'(\vec{x}, t)$  und  $T(\vec{x}, t) = \tilde{T}(\vec{x}, t) + T'(\vec{x}, t)$ . Die Differentialgleichungen für die Mittelwerte behalten die Form der Navier-Stokes-Gleichungen, erweitert um den Reynoldsschen Schubspannungstensor  $\tau_{Tij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$  und den Reynoldsschen Wärmestromvektor  $\vec{q}_T = \rho c_p \overline{u'_i T'}$ . Diese beiden Größen müssen als Funktion der zeitlich gemittelten Feldgrößen dargestellt werden, um das Gleichungssystem schließen zu können.

In den vorliegenden Berechnungen kamen ein adaptives Mischungsweglängen-Modell [34] und das  $k, \omega$ -Modell von WILCOX [20] zur Anwendung. Beides sind Schließungsmodelle erster Ordnung: Basierend auf dem Wirbelviskositätsprinzip von BOUSSINESQ wird der Reynoldssche Schubspannungstensor in Analogie zur molekularen Viskosität bei der laminaren Strömung berechnet, der turbulente Wärmestromvektor gemäß der klassischen Analogie von REYNOLDS:

$$\tau_{Tij} = \eta_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho_s k \delta_{ij}, \quad q_{Tj} = -\lambda_T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}.$$

Der Term  $-(2/3)\rho k \delta_{ij}$  stellt sicher, daß bei einer inkompressiblen Strömung für die Spur des Reynoldsschen Schubspannungstensors  $\tau_{Tii} = -2\rho k$  gilt (siehe zum Beispiel [20], Seite 15, 75 und 182.) Dieser Term wird bei algebraischen Schließungsmodellen vernachlässigt (dort wird kein  $k$  berechnet) beziehungsweise im Druck absorbiert ([13], Seite 189 ff). In Analogie zur laminaren Strömung wird eine turbulente Viskosität, die sogenannte Wirbelviskosität  $\eta_T$  einführt. Im Gegensatz zur molekularen Viskosität  $\eta_m$  ist die Wirbelviskosität  $\eta_T$  keine Stoffeigenschaft, sondern eine orts- und zeitabhängige Eigenschaft des Strömungsfeldes. Die Gesamtviskosität wird aus  $\eta = \eta_m + \eta_T$  beziehungsweise die effektive Wärmeleitfähigkeit aus  $\lambda = \lambda_m + \lambda_T$  gebildet.

Die turbulente Wärmeleitfähigkeit ist bei beiden Modellen

$$\lambda_T = \frac{\eta_T c_p}{Pr_T}$$

mit der turbulenten Prandtl-Zahl  $Pr_T = 0.9$ .

Die Unterschiede zwischen den verschiedenen in FIDAP implementierten Turbulenzmodellen erster Ordnung liegen in der Berechnung der turbulenten Scheinviskosität:

Das selbstadaptive Mischungsweglängenmodell berechnet die turbulente Viskosität mittels der Gleichung

$$\eta_T = \rho l_{mix}^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}.$$

Die Mischungsweglänge  $l_{mix}$  wird für jeden Knoten des Finite-Elemente-Gitters aus

$$l_{mix} = \min[\kappa l_n, 0.09 l_c]$$

berechnet. Es bedeuten  $l_n$  der Normalabstand von der nächsten festen Wand und  $l_c$  eine charakteristische Abmessung. Wird  $l_c$  vom Benutzer nicht definiert, so gilt  $l_c = \max[l_n]$ . Die Karmansche Konstante  $\kappa$  hat den Wert 0.41.

Der Vorteil dieses Modells ist, daß zur Berechnung der turbulenten Strömung dieselben Differentialgleichungen wie bei laminaren Berechnungen zu lösen sind.

Das  $k, \omega$ -Modell von WILCOX ist eine modifizierte und verbesserte Form des  $k, \omega$ -Modelles von KOLMOGOROV. Ein entscheidender Nachteil des Kolmogorovschen Turbulenzmodelles war das Fehlen eines molekularen Diffusionstermes in der Transportgleichung für die turbulente Frequenz  $\omega$ , sodaß dieses Modell nur für sehr hohe Reynoldszahlen geeignet war. Wilcox behob diesen Nachteil, sein Modell ist auch für niedrige Reynoldszahlen verwendbar. Weiters wird die viskose Unterschicht direkt mitmodelliert. Das im FIDAP implementierte  $k, \omega$ -Modell (bei WILCOX ist  $\varepsilon = \beta^* \omega k$ , bei FIDAP  $\varepsilon = \omega k$ .) ist im folgenden kurz dargestellt.

Zur Berechnung der turbulenten Scheinviskosität werden zwei neue Feldgrößen eingeführt, deren Differentialgleichungen sich aus den Navier-Stokes-Gleichungen herleiten lassen (siehe ROTTA[17], Seiten 28 ff, 42 ff und 57 ff, und WILCOX[20], Seiten 15 ff und 180, sowie FIDAP-Handbücher [34]), wobei

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad \varepsilon = \nu_s \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \quad \omega = \frac{\varepsilon}{k}.$$

Es bedeutet  $k$  die spezifische turbulente kinetische Energie [ $\text{m}^2/\text{s}^2$ ],  $\varepsilon$  die spezifische turbulente Dissipationsrate [ $\text{m}^2/\text{s}^3$ ] und  $\omega$  die turbulente Frequenz [ $1/\text{s}$ ].

Die turbulente Scheinviskosität berechnet sich aus

$$\eta_T = c_\eta \rho_s \frac{k}{\omega}.$$

Die Transportgleichungen lauten für  $k$

$$\rho_s \left( \frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \eta_s + \frac{\eta_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \tau_{Tij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + g_i \frac{\eta_T}{Pr_T} \beta_s \frac{\partial T}{\partial x_i} - \rho_s \omega k$$

und für  $\omega$

$$\rho_s \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \eta_s + \frac{\eta_T}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + c_1 \frac{\omega}{k} \tau_{Tij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + c_1 (1 - c_3) \frac{\omega}{k} g_i \frac{\eta_T}{Pr_T} \beta_s \frac{\partial T}{\partial x_i} - c_2 \rho_s \omega^2.$$

Die Schließungskoeffizienten lauten:

$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_\eta$	$\sigma_k$	$\sigma_\omega$	$Pr_T$
0.555	0.8333	0.8	0.09	2	2	0.9

Diese Gleichungen werden ebenfalls in dimensionsloser Form behandelt. Damit in der Differentialgleichung für  $k$  der Schließungskoeffizient  $\sigma_k$  seinen Wert auch in der dimensionslosen Variante beibehält, wird die Differentialgleichung nicht für  $\omega^*$ , sondern für  $\hat{\omega}^*$  gelöst. Die Transformation auf dimensionslose Variablen (siehe auch 2.2.3) ergibt für die neuen Feldgrößen

$$k = U^2 \frac{1}{2} \overline{u_i^* u_i^*} = U^2 k^*, \quad \varepsilon = \frac{\eta U^2}{\rho H^2} \frac{\eta^* \overline{\partial u_i^*} \overline{\partial u_i^*}}{\rho^* \partial x_k^* \partial x_k^*} = \frac{\eta U^2}{\rho H^2} \varepsilon^*,$$

$$\omega = \frac{\nu}{H^2} \frac{\varepsilon^*}{k^*}, \quad \omega = \frac{U}{H} \hat{\omega}^*,$$

für den Zusammenhang zwischen den Feldgrößen und der turbulenten Schein-schubspannung

$$\eta_T = \eta \eta^* = \eta c_\eta \rho_F \frac{k^*}{\omega^*}, \quad \tau_{Tij} = \frac{\eta U}{H} \tau_{Tij}^* = \frac{\eta U}{H} \left[ \eta_T^* \left( \frac{\partial U_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial U_j^*}{\partial x_i^*} \right) - \frac{2}{3} \rho_F k^* \delta_{ij} \right]$$

mit

$$\rho_F = \rho_s^* \sqrt{\frac{Ra}{Pr}}$$

und für die Differentialgleichungen

$$\rho_F \left( \frac{\partial k^*}{\partial t^*} + U_j^* \frac{\partial k^*}{\partial x_j^*} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[ \left( \eta_s^* + \frac{\eta_T^*}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k^*}{\partial x_j^*} \right] + \tau_{Tij}^* \frac{\partial U_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\eta_T^*}{Pr_T} \beta_s^* \frac{T_{ref}}{\Delta T} g_i^* \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} - \rho_F \hat{\omega}^* k^*$$

$$\rho_F \left( \frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + U_j^* \frac{\partial \omega^*}{\partial x_j^*} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[ \left( \eta_s^* + \frac{\eta_T^*}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega^*}{\partial x_j^*} \right] + c_1 \frac{\hat{\omega}^*}{k^*} \tau_{Tij}^* \frac{\partial U_i^*}{\partial x_j^*} + c_1 (1 - c_3) \frac{\hat{\omega}^*}{k^*} \frac{\eta_T^*}{Pr_T} \beta_s^* \frac{T_{ref}}{\Delta T} g_i^* \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} - c_2 \rho_F \omega^{*2}.$$

Wie man erkennt, sind diese Gleichungen konsistent mit der Wahl der Stoffwerte durch Koeffizientenvergleich zwischen den Navier-Stokes-Gleichungen in dimensionsloser und dimensionsbehafteter Form (Seite 18).

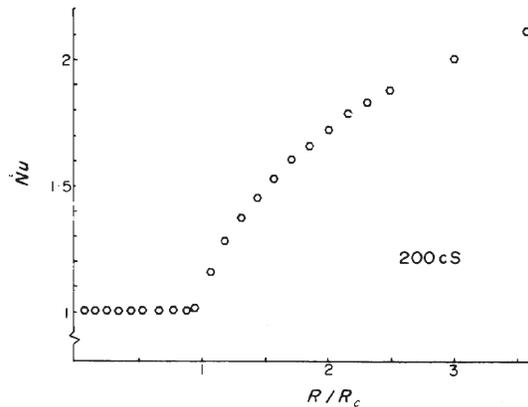


Bild 2.1:  $Nu$  über  $Ra$  in der Umgebung von  $Ra_{krit}$ . Die Nußelt-Zahl ist das Verhältnis aus tatsächlichem Wärmestrom und dem Wärmestrom zufolge Wärmeleitung durch ruhende Luft bei gleicher Temperaturdifferenz. Ohne zusätzlichen Wärmetransport durch Konvektion ist  $Nu = 1$ . Experimente, beispielsweise jene von KOSCHMIEDER & PALLAS [51], bestätigen die lineare Theorie der Rayleigh-Benard-Konvektion: Bei  $Ra = 1708$  setzt spontan Konvektion ein.

### 2.2.5 Phänomenologie der Rayleigh-Benard-Konvektion

Von unten beheizte waagrechte Fluidschichten treten in den Naturwissenschaften häufig auf: Strömungen in Sternen, Magmaströmungen im Erdinneren, Störfälle in speziellen Kernreaktoren [48], Strömungen der Erdatmosphäre, Wärmeverluste in Sonnenkollektoren.

Das Verhalten derartiger Fluidschichten ist zum Beispiel vom Standpunkt der Chaostheorie (eine vom Rayleigh-Benard-Problem abgeleitete Modellgleichung wird zur Untersuchung des Verhaltens nichtlinearer dynamischer Systeme herangezogen [16]) oder der Turbulenzforschung auch von theoretischem Interesse.

Die Strömung in einer waagrecht, von unten beheizten Luftschicht, bei der Oberflächenspannungs-Effekte keine Rolle spielen, nennt man Rayleigh-Benard-Konvektion. Die Rayleigh-Benard-Konvektion ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Es liegen zu diesem Problem zahlreiche Forschungsergebnisse vor. Diese Ergebnisse werden herangezogen, um die Verwendbarkeit des Finite-Elemente-Programmes FIDAP bei der Berechnung des Schwingfußbodens zu untersuchen. Im folgenden werden die für das vorliegende Problem wesentlichsten Ergebnisse der Grundlagenforschung zur Rayleigh-Benard-Konvektion angedeutet. Zur weiteren Information sei zum Beispiel auf das Kapitel „Wärmeübergang durch Konvektion“ in PRANDTL's „Führer durch die Strömungslehre“ [11] sowie auf die Monographie von KOSCHMIEDER [15] und auf die zitierte Zeitschriftenliteratur verwiesen.

Man betrachtet eine dünne, im Grenzfall unendlich breite, Fluidschicht der Höhe  $H$ , deren oberer und unterer Rand auf konstanter Temperatur gehalten werden. Wenn  $T_{unten} = T_{oben}$ , ist das Fluid in Ruhe. Wird  $T_{unten}$  etwas angehoben, wird

aufgrund der Temperaturdifferenz  $\Delta T = T_{unten} - T_{oben}$  durch die Fluidschicht ein Wärmestrom  $\dot{q} = (\lambda/H) \Delta T$  fließen. Das Fluid bleibt weiterhin in Ruhe. Ab einer kritischen Rayleighzahl  $Ra_c = 1708$  (entspricht für den Spalt im Fußboden etwa einer Temperaturdifferenz  $\Delta T = 0.15$  [K]) wird die in Ruhe befindliche Fluidschicht instabil. (Seitliche Berandungen stabilisieren die Strömung,  $Ra_c$  nimmt damit etwas zu.) Es setzt eine aus Konvektionswalzen gebildete Strömung ein. Die Breite eines Walzenpaares bezogen auf die Spalthöhe nennt man Wellenlänge  $\lambda$ . Der Wärmestrom, gekennzeichnet durch die Nußeltzahl  $Nu = \dot{Q}/\dot{Q}_{Wärmeleitung}$ , nimmt zu. In einem Diagramm  $Nu$  über  $Ra$  zeigt sich ein deutlicher Knick bei der kritischen Rayleigh-Zahl (Bild 2.1).

Wird die Temperatur weiter erhöht, wird die Strömung zunächst zeitabhängig ( $Ra \sim 5.7 \cdot 10^3$ , entspricht hier  $\Delta T = 0.51$  [K]), anschließend turbulent ( $Ra \sim 5 \cdot 10^4$  bis  $Ra \sim 5 \cdot 10^5$ , entspricht hier  $\Delta T = 4.4$  [K] bis  $\Delta T = 44.8$  [K]) (Bild 2.2). Manche Autoren (z.B. CASTAING ET. AL.[47], siehe auch [15], p 106 ff) unterscheiden dabei noch zwischen weicher Turbulenz (*soft turbulence*) und harter Turbulenz (*hard turbulence*).

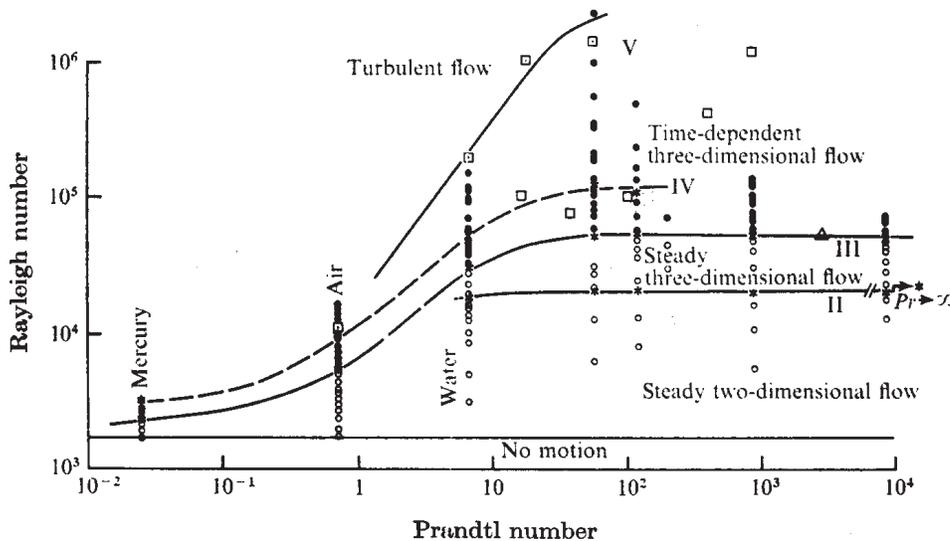


Bild 2.2: **Stabilitätskarte der Rayleigh-Benard-Konvektion.** KRISHNAMURTI [52] hat eine Karte der verschiedenen Strömungstypen in Abhängigkeit von Rayleigh- und Prandtl-Zahl aufgestellt. Für Luft setzt die zeitabhängige Strömung bei  $Ra \sim 5700$  ( $\Delta T \sim 0.5$  [K]) und die turbulente Strömung bei  $Ra \sim 5 \cdot 10^4$  ( $\Delta T \sim 4.5$  [K]) ein.

Es finden sich in der Literatur mehrere empirische Formeln, die den Wärmeübergang bei Rayleigh-Benard-Konvektion beschreiben (siehe auch Bild 2.3).



Bild 2.3: **Verschiedene Nußeltkorrelationen.** ① HOLLANDS ET. AL. für Luft und ② für Wasser, ③ CHU & GOLDSTEIN und ④ TANAKA, jeweils für Wasser, ⑤ CASTAING ET AL. für flüssiges Helium (die Balken repräsentieren die Fehlergrenzen). Die einzelnen Korrelationen streuen für große Rayleigh-Zahlen teilweise stark. (Für die Meßwerte von CASTAING ET. AL. sind die dort angegebenen Schranken für die Meßabweichung mit eingetragen.) Dies ist zum Teil auf die Meßabweichungen (zwischen 5 und 20 Prozent) und zum Teil auf die Unsicherheiten bei den Stoffwerten zurückzuführen. Im Schwingfußboden treten Temperaturdifferenzen bis ungefähr 18 [K] ( $Ra = 2 \cdot 10^5$ ) auf.

CASTAING ET AL. [47] geben für flüssiges Helium

$$Nu = 0.23 \pm 0.03 Ra^{0.282 \pm 0.006}, \quad 4 \cdot 10^7 \leq Ra \leq 6 \cdot 10^{12}, \quad 0.65 \leq Pr \leq 1.5$$

an. In flüssigem Helium können wegen des geringen thermischen Rauschens Temperaturen sehr genau gemessen werden. Weiters ist der Strahlungswärmestrom zufolge der niedrigen absoluten Temperaturen klein. Unsicherheiten in der Messung resultieren vor allem aus den ungenauen Stoffwerten.

TANAKA [55] hat in Wasser

$$Nu = 0.145 Ra^{0.29}, \quad 3 \cdot 10^7 \leq Ra \leq 4 \cdot 10^9, \quad Pr \approx 7$$

gemessen.

CHU & GOLDSTEIN [49] fanden, ebenfalls mit Wasser,

$$Nu = 0.183 Ra^{0.278}, \quad 2.76 \cdot 10^5 \leq Ra \leq 1.05 \cdot 10^8.$$

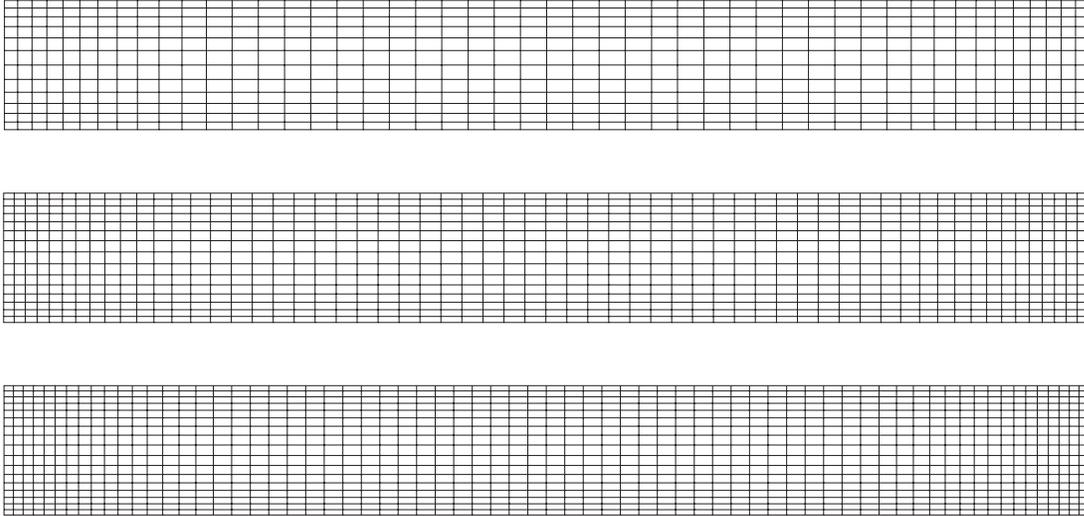
HOLLANDS ET. AL. [50] haben eigene empirische Daten und Daten mehrerer anderer Autoren korreliert und um asymptotische Überlegungen ergänzt. Sie finden für Luft

$$Nu = 1 + 1.44 \left[ 1 - \frac{1708}{Ra} \right]^{\bullet} + \left[ \left( \frac{Ra}{5830} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right]^{\bullet}, \quad 0 \leq Ra \leq \infty. \quad (2.8)$$

Die gepunkteten Klammern  $[ ]^{\bullet}$  bedeuten, daß der Term nullgesetzt wird wenn der Inhalt der Klammer kleiner als null wird. Für  $Ra > 5830$  ist  $Nu \sim \sqrt[3]{Ra}$ . Damit ändert sich  $Nu$  ungefähr linear mit der Spalthöhe. Die mittlere Wärmedurchgangszahl  $\alpha_{R-B} = Nu \lambda / H$  ist daher nur schwach von der Spalthöhe abhängig.

Die Wärmeübergangszahl ist eine schwache Funktion der Prandtl-Zahl. Die im Vergleich etwas höhere Nußeltzahl für Wasser beruht auf der Ausbildung von *thermals*, Ballen warmen Wassers, die die kühleren Schichten durchdringen und Energie zur oberen Berandung transportieren. Die Meßwerte streuen teilweise stark. Neben den Meßunsicherheiten bei Stoffwerten, Temperatur, Heizleistung und Spalthöhe ( $Ra \sim H^3!$ ) spielt die Geometrie des Behälters eine große Rolle. Wenn der Behälter genügend flach ist, wird der globale Wärmedurchgang von dessen Form nicht mehr stark beeinflusst. Das lokale Strömungsgeschehen wird jedoch wesentlich vom Verlauf der seitlichen Berandung bestimmt. In einem kreis-scheibenförmigen Behälter sind die Konvektionswalzen konzentrische Torusse, in einem rechteckigen Behälter orientieren sich die Walzen parallel zur kürzeren Berandung. Auch durch gezielte Wahl von Rand- und Anfangsbedingungen kann eine Vielzahl von Strömungsmustern erzielt werden.

## 2.2.6 Finite-Elemente-Modell des waagrechten Luftspaltes



**Bild 2.4: Netze zur Berechnung der Rayleigh-Benard-Konvektion.** *Jedes Rechteck entspricht einem neunknotigen Element. Die Netze enthalten (von oben nach unten) 2425 Knoten, 3751 Knoten und 4795 Knoten. Dies entspricht einem Hauptspeicherbedarf von 13 MB, 20 MB und 27 MB.*

Für eine waagrechte Luftschicht zwischen festen Berandungen existieren viele experimentelle und theoretische Ergebnisse. Daher wird zunächst die Wärmeübertragung im Luftspalt berechnet und mit Ergebnissen aus der Literatur verglichen. Bild 2.4 zeigt die verwendeten Modelle. Die Ergebnisse der Berechnungen werden im Kapitel 2.3.1 dargestellt.

Sämtliche Berechnungen wurden an zweidimensionalen Modellen durchgeführt. Schon bei diesen Modellen waren für eine bestimmte Rayleigh-Zahl CPU-Zeiten im Bereich von 10 bis 30 Stunden an der IBM RS 6000/950 nötig, um die zugehörige Nußelt-Zahl zu bestimmen. Damit war mit den vorhandenen Rechnern eine dreidimensionale Berechnung unrealistisch.

Zur Methode der finiten Elemente existiert ausführliche Literatur. Neben den Programmhandbüchern zu FIDAP seien, stellvertretend für die vielen erschienenen Bücher, das Grundlagenwerk von BATHE [22] und ein spezielleres Werk über Anwendungen in der Strömungsmechanik von CHUNG [23] genannt.

Zur Berechnung wurden neunknotige Elemente eingesetzt. Die seitlichen Berandungen sind wärmeisoliert. Oberer und unterer Rand werden auf konstanter Temperatur gehalten. Die Geschwindigkeiten an allen Rändern sind null. Bei turbulenten Berechnungen mit dem  $k, \omega$ -Modell werden zusätzlich durch Verwendung

von WALL-Elementen die passenden Randbedingungen gesetzt:

$$k = 0, \quad \omega = \frac{6 \mu}{c_2 \Delta^2}.$$

( $\Delta$  ist die Höhe des ersten Knoten über der Wand.) Bei niedrigen Temperaturdifferenzen sind die Anfangsbedingungen für die Temperaturen der Mittelwert zwischen oberer und unterer Randtemperatur, jene für die Geschwindigkeiten null. Für höhere Rayleigh-Zahlen wurden Ergebnisse der nächstniedrigen Rayleigh-Zahl als Anfangsbedingungen eingelesen.

## 2.2.7 Finite-Elemente-Modell des Schwingfußbodens

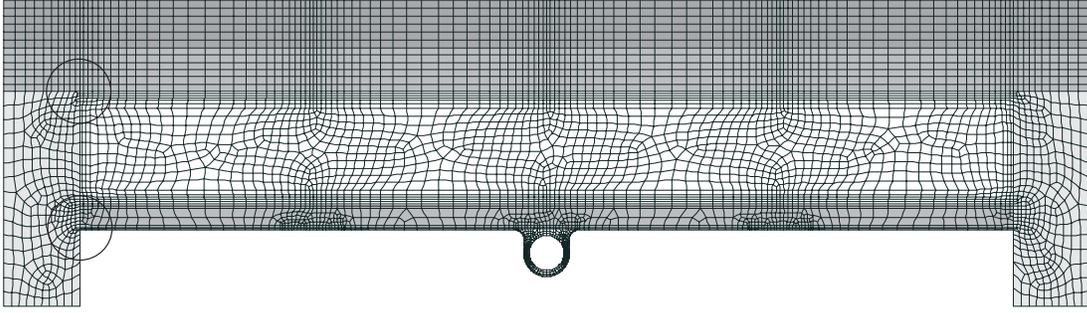
Mit den in den vorangegangenen Kapiteln dargestellten Modellvorstellungen kann man den Schwingfußboden auf die in Bild 2.5 und 2.8 gezeigten diskreten Modelle abbilden.

Aus dem dreidimensionalen Segment des Bodens wird ein zweidimensionaler Schnitt herausgegriffen. Die Bilder zeigen die Netze aus Elementen, mit denen das kontinuierliche Gebiet überzogen wurde. An den Stellen, an denen Rohre modelliert werden, ist das Netz verfeinert. (Um Vergleichsrechnungen mit zwei und drei Rohren durchführen zu können, ist das Gitter an drei Stellen im Inneren verfeinert.) Um die Geschwindigkeit an der Wand genau genug modellieren zu können, wird das Gitter auch an den Rändern des Luftspaltes so verfeinert, daß mindestens ein Element innerhalb der erwarteten Grenzschichten liegt.

Zur Berechnung der Wärmeübertragung im Boden werden zwei verschiedene Netze eingesetzt:

- Zur Nachrechnung des Prüfstandes wird die gesamte Geometrie einschließlich des Heizrohres modelliert. Wie am Prüfstand, wo der Wärmestrom durch die elektrische Heizung aufgeprägt wird, wird in diesem Fall auch am FE-Modell an der Innenseite des Rohres ein konstanter Wärmestrom als Randbedingung vorgegeben. (Bild 2.5)
- Zur Untersuchung des Einflusses der verschiedenen Konstruktionsparameter auf den übertragenen Wärmestrom wird ein vereinfachtes Modell herangezogen. Die Rohre werden als lokale Störung betrachtet. Als Randbedingung wird am Ort der Rohre die Temperatur der Lamellenunterkante auf einen konstanten Wert gesetzt. (Bild 2.8)

Das Modell zur Nachrechnung der Messungen zeigt Bild 2.5. Das Netz besteht aus mehreren Teilgebieten: Zuunterst liegt die Aluminiumlamelle zur Wärmever-



**Bild 2.5: Finite-Elemente-Modell des Fußbodens.** *Um die numerischen Ergebnisse mit den Messungen vergleichen zu können, wird der gesamte Boden mit Heizrohr modelliert. Dieses Netz enthält 7888 Elemente bzw. 23768 Knoten. Der Hauptspeicherbedarf während der Berechnung ist 27 836 697 Word. Details des Netzes werden in den Bildern 2.6 und 2.7 vergrößert dargestellt.*

teilung. Daran anschließend folgt ein schmaler Luftspalt. (In Bild 2.6 ist rechts die linke untere Ecke des Bodens vergrößert dargestellt.) Darüber befindet sich die Gipskartonplatte (zur weiteren Vergleichmäßigung der Temperatur und um die Strahlungszahl zu erhöhen), links und rechts davon die Polsterhölzer. Darauf liegt der Blindboden und darüber das Parkett.

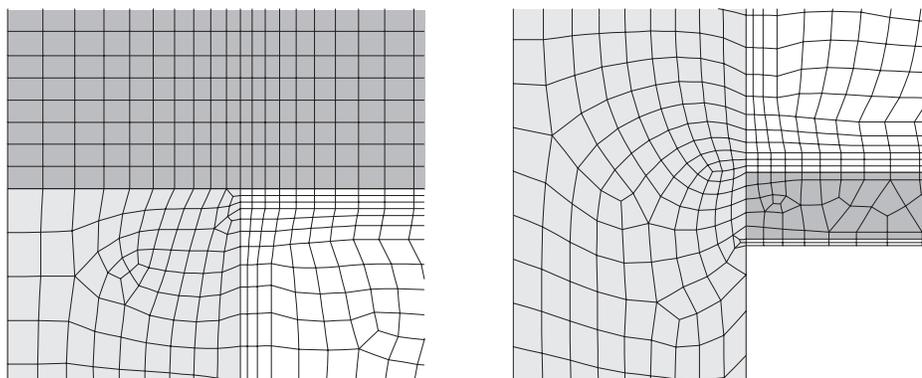
Der Luftraum ist in drei Schichten geteilt. Oben und unten zwei schmale Rand-schichten, dazwischen das zur Mitte vergrößerte Netz.

Die Stoffwerte und die Geometriedaten, die den Berechnungen zugrunde gelegt wurden, können der Tabelle 1.1 (Seite 8) entnommen werden.

Die Unterteilung in Elemente erfolgt teilweise durch regelmäßige Rasterung zwischen vier gegenüberliegenden Seiten mit passender Unterteilung (MAP) oder durch automatische, unregelmäßige Netzgenerierung (PAVE).

Von der Bodenoberkante zur Umgebung wird ein Wärmeübergangskoeffizient von  $\alpha_{B-U} = 12.66 \text{ [W/(m}^2 \text{ K)]}$  (entspricht einer Plexiglasplatte mit einer Dicke von  $15 \text{ [mm]}$ ) bei einer Umgebungstemperatur von  $289.15 \text{ [K]} = 16 \text{ [}^\circ\text{C]}$  vorgegeben. An der Grenzlinie zwischen Luft und Bodenkonstruktion sind beide Geschwindigkeitskomponenten null gesetzt. Alle äußeren Ränder ohne explizite Randbedingungen sind adiabat.

Bild 2.7 zeigt das Netz in der Nähe des Rohres. Festkörper sind grau hinterlegt, die weißen Flächen sind luftgefüllte Hohlräume. In diesen Hohlräumen werden die Geschwindigkeits-Freiheitsgrade gesperrt, um die Rechenzeit nicht unnötig zu vergrößern.

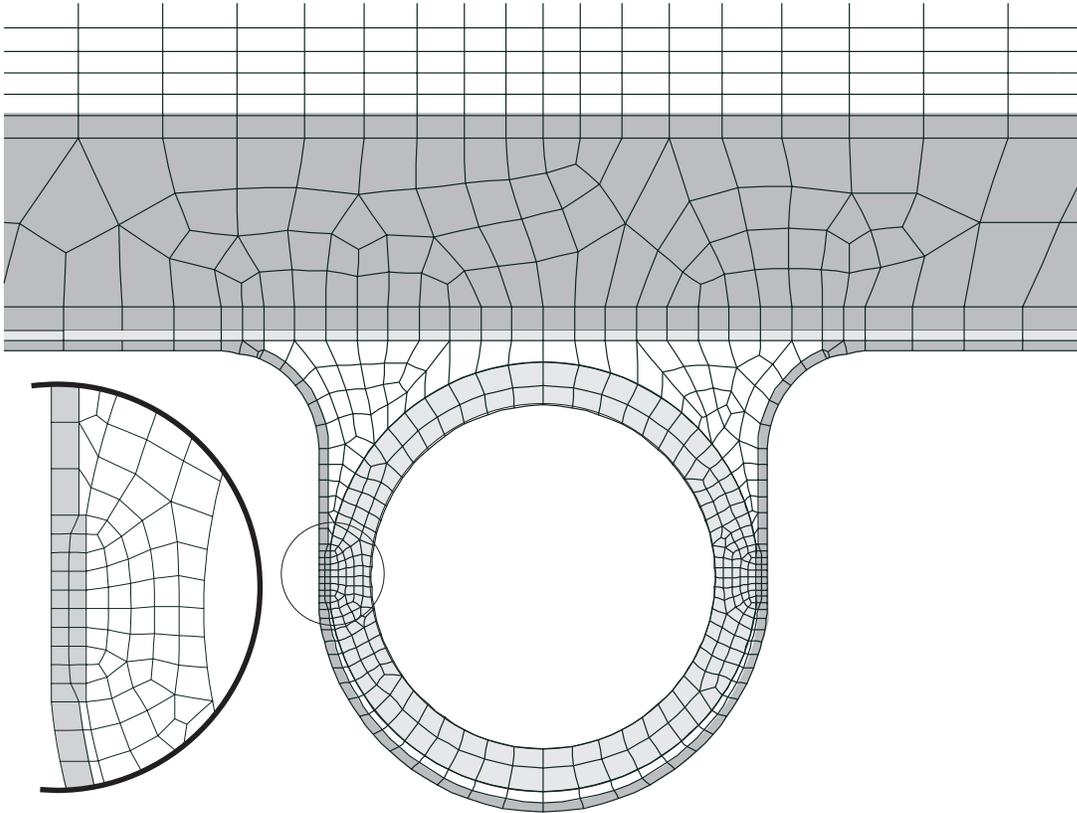


**Bild 2.6: Details des Fußboden-Modelles.** *Das linke Bild zeigt die Ecke, an der Polsterholz (hellgrau), Blindboden (dunkelgrau) und Luft aneinander grenzen. Rechts eine Darstellung der unteren Ecke des Luftspaltes. Man erkennt (von unten nach oben) die Alulamelle, einen schmalen Spalt zur Berücksichtigung des Kontaktwiderstandes, die Gipskartonplatte (dunkelgrau) und links das Polsterholz (hellgrau). Durch geeignete Steuerung des Vernetzungsalgorithmus können gleichmäßige Übergänge vom gröberen auf ein feineres Netz erzielt werden.*

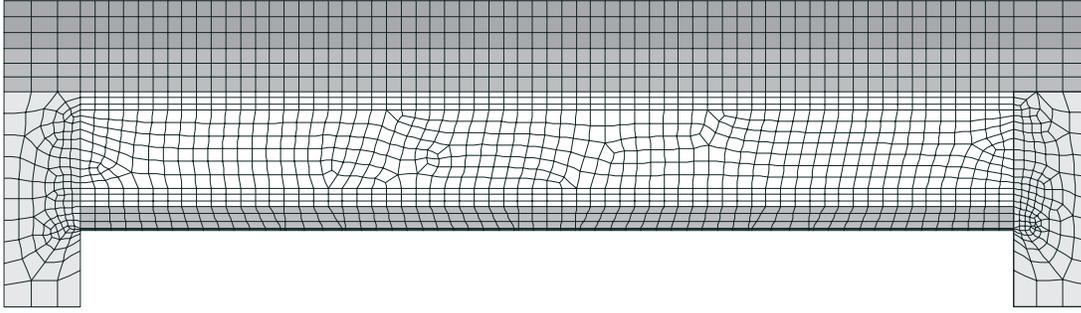
Das Kunststoffrohr wird von einer Aluminiumlamelle umschlossen. Am Innenrand des Rohres kann wahlweise eine konstante Wärmestromdichte, eine konstante Temperatur oder ein Wärmeübergangskoeffizient und eine konstante Heizmitteltemperatur vorgegeben werden.

Zwischen Alulamelle und Gipskartonplatte befindet sich ein schmaler Spalt (hellgrau hinterlegt). Dieser Spalt entsteht durch den eingepprägten Herstellerschriftzug sowie die leichte Wellung der Bleche. Wie aus den Ergebnissen ersichtlich ist, trägt dieser Spalt wesentlich zum Wärmeleitwiderstand bei.

Ein beachtenswertes Detail der Netzgeometrie sind die sichelförmigen Berührstellen zwischen Rohr und Lamelle. Das Element des Hohlraumes, das in dieser Spitze zu liegen käme, wiche zwangsweise so stark von der Form eines gleichseitigen Dreiecks oder eines Quadrates ab, daß es degenerieren würde (das bedeutet, die Funktionaldeterminante, die die lokale Verzerrung der Geometrie bei der Transformation von den lokalen normierten Elementkoordinaten auf die globalen Koordinaten beschreibt, würde an mindestens einer Stelle des Elementes singulär). Eine Verfeinerung des Gitters würde dieses Problem nicht lösen. Daher sind an den kritischen Stellen des Gitters Absätze eingefügt, an denen sich das letzte Element abstützen kann. Die Kleinheit dieser Absätze ist nur durch die gewünschte Anzahl der Elemente begrenzt. Da die Rechenzeit ungefähr quadratisch mit der Knotenanzahl steigt, wird man dieses Rohrdetail so grob wie möglich gestalten.



**Bild 2.7: Netz in der Umgebung des Heizrohres.** *Besondere Beachtung verdienen die sichelförmigen Kontaktstellen zwischen Rohr und Alulamelle. Ohne Stützkante würde es bei noch so feinem Netz zu degenerierten Elementen kommen. In den beiden luftgefüllten Hohlräumen um das Rohr sind die Strömungsfreiheitsgrade gesperrt, um nicht unnötig Rechenzeit und Hauptpeicher zu verbrauchen.*



**Bild 2.8: Vereinfachtes Netz zur Varianten-Berechnung.** *Um Hauptspeicher und Rechenzeit zu sparen, wird bei den Parameterstudien das Rohr nicht mitmodelliert. Dieses Modell enthält 2902 Elemente bzw. 7431 Knoten. Der Hauptspeicherbedarf während der Berechnung ist 2 872 711 Word. [41]*

Die Variantenstudien werden an einem vereinfachten Modell durchgeführt. Bild 2.8 zeigt das Netz ohne das Detail Heizrohr. Die Rechenzeit-Ersparnis dabei ist beachtlich. Als Randbedingung wird nun der untere Rand der Alulamelle im Bereich des Heizrohres auf konstante Temperatur gesetzt. Zur Umgebung wird ein Wärmeübergangskoeffizient von  $\alpha_{B-U} = 11.11 \text{ [W/(m}^2 \text{ K)]}$  bei einer Umgebungstemperatur von  $289.15 \text{ [K]} = 16 \text{ [}^\circ\text{C]}$  vorgegeben. Alle anderen Randbedingungen entsprechen jenen des vollständigen Modelles.

Alle Eingaben sind vollständig parametrisiert. Referenztemperatur ist die Umgebungstemperatur, Referenzhöhe die Höhe des Luftspaltes. Die Rayleigh-Zahl wird mit der Temperaturdifferenz zwischen Heizmitteltemperatur und Umgebungstemperatur gebildet. Alle Stoffwerte werden auf die Stoffwerte der Luft bezogen.

## 2.3 Ergebnisse und Vergleich mit Literatur

### 2.3.1 Rayleigh-Benard-Konvektion

Die Berechnungen zur Rayleigh-Benard-Konvektion sollen zeigen, ob mit dem verwendeten Finite-Elemente-Programm eine Berechnung der Wärmeübertragung durch waagrechte Luftschichten mit technischer Genauigkeit möglich ist. Es darf keinesfalls erwartet werden, daß die berechneten zweidimensionalen Strömungsmuster die Realität wiedergeben. Wie in der Habilitation von KIRCHARTZ [37] gezeigt wird, sind bei höheren Rayleighzahlen dreidimensionale Berechnungen er-

forderlich. Im Gegensatz zur reinen Rayleigh-Benard-Konvektion ist jedoch die Strömung im Spalt des Schwingfußbodens in guter Näherung zweidimensional (Siehe Bildserie 3.3).

In der Nähe der kritischen Rayleigh-Zahl ist die Konvektionsströmung laminar und stationär. Es sollten sich also die durch FIDAP erzielten Ergebnisse sehr genau mit den Ergebnissen aus Theorie und Experiment decken. Dies ist in der Tat der Fall. Allerdings bleibt bei der Rechnung im Gegensatz zum Experiment die reine Wärmeleitung bis  $Ra \approx 10^4$  stabil in folgendem Sinn:

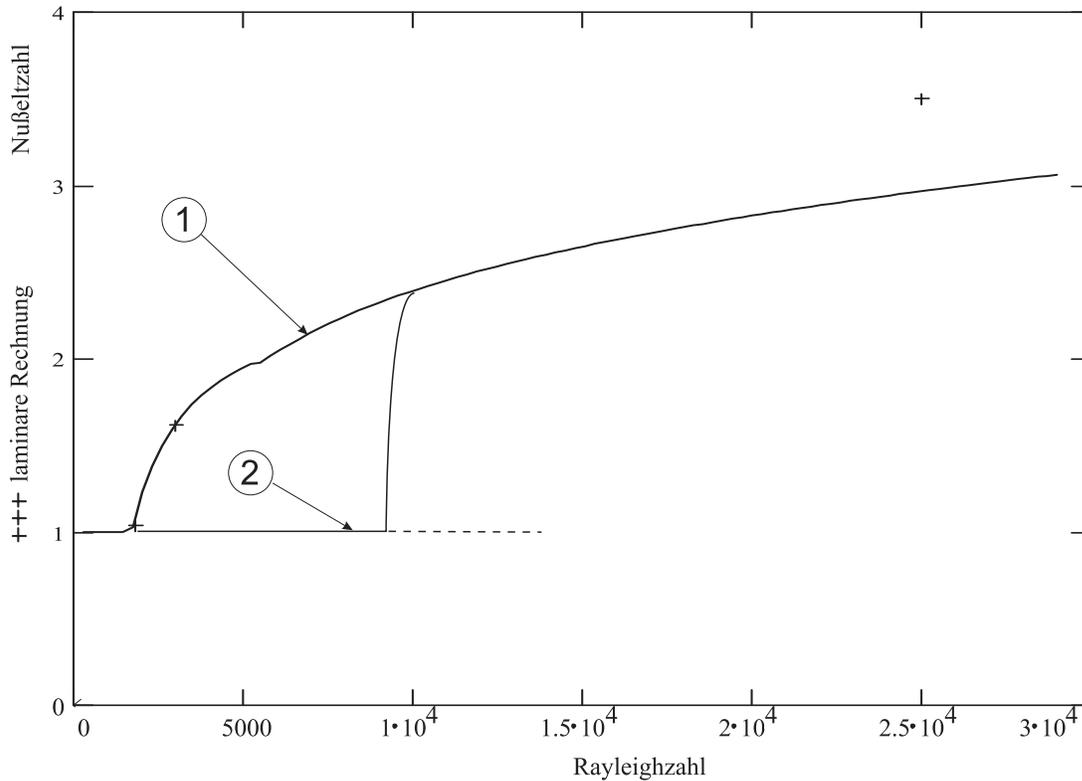


Bild 2.9: **Wärmeübertragung in der Nähe von  $Ra_c$ .** Im Bereich laminarer Strömung passen die numerisch ermittelten Nußeltzahlen hervorragend zur Korrelation nach HOLLANDS ET. AL ①. Für höhere Rayleighzahlen weichen laminare Rechnungen schon etwas stärker ab. FIDAP findet bis  $Ra \approx 10^4$  stationäre Lösungen für reine Wärmeleitung ②. Erst dann wird dieser Pfad instabil.

Wird ein stationärer Rechenlauf mit den Anfangsbedingungen  $\vec{u} \equiv 0$  im ganzen Strömungsfeld gestartet, so ergibt sich bis  $Ra \approx 10^4$  reine Wärmeleitung ohne Konvektion. Das Geschwindigkeitsfeld zeigt zwar Tendenzen zur Walzenbildung, die Strömung setzt aber nicht ein. Dies ist keine Folge einer zu groben Diskretisierung: Wird das Gitter verfeinert, so werden die Werte für die Geschwindigkeiten immer kleiner, der Gleichungslöser kann die Lösung für Energietransport durch

reine Wärmeleitung immer besser annähern. Auch die im Experiment nicht realisierbare konstante Temperatur an den Rändern scheint nicht die Ursache zu sein: Mitmodellerte Kupferplatten an Ober- und Unterseite des Spaltes haben die Strömung stabilisiert und den Umschlagpunkt zu höheren Rayleigh-Zahlen verschoben.

Erst wenn in das Strömungsfeld gezielt passende Störungen eingebracht werden, stellt sich eine Strömung ein: Wenn die Rundungsfehler als neue Anfangsbedingung für einen nächsten stationären Rechenlauf verwendet werden, so wachsen diese an. Das Anwachsen der Rundungsfehler kann durch geeignete Wahl von Gitterfeinheit und Konvergenzkriterium gesteuert werden. Zu kleine Schranken für den Abbruchfehler bewirken z. B., daß der Gleichungslöser die Wärmeleitlösung genauer annähert. Die Rundungsfehler wachsen wesentlich langsamer. Nach mehreren Neustarts setzt schlagartig die Konvektion ein.

Identische Lösungen lassen sich auch erzielen, wenn von einer höheren Rayleigh-Zahl mit ausgebildeter Konvektionsströmung transient zu niedrigeren Rayleigh-Zahlen gerechnet wird. Sehr große Zeitschritte sind ein Indiz dafür, daß der stationäre Zustand fast erreicht ist, das Strömungs- und Temperaturfeld eignet sich dann als Anfangsbedingung für eine stationäre Rechnung.

Es ist nicht möglich, das Strömungs- und Temperaturfeld einer höheren Rayleighzahl direkt als Anfangsbedingung für einen stationären Rechenlauf bei  $Ra < 10^4$  zu verwenden. Der Löser findet wieder die reine Wärmeleitung als Ergebnis.

Es drängt sich die Vermutung auf, daß die diskretisierten Differentialgleichungen im Nußelt-über-Rayleigh-Diagramm einen stabilen Pfad bis Rayleigh ungefähr  $10^4$  aufweisen, der dann verzweigt. Der Zweig für reine Wärmeleitung wird instabil, der andere Zweig mündet in die bekannte Nußeltkurve ein.

Eine genauere Untersuchung des Verlaufes der einzelnen Zweige mittels FIDAP wäre allerdings sehr aufwendig (je ein Rechenlauf mit mehreren Restarts für einen Punkt im Bifurkationsdiagramm).

Die Lage von Verzweigungspunkten soll daher nur geschätzt werden. Verzweigungspunkte zu oszillatorischen Lösungen (Hopf-Bifurkationen) können mit stationären Rechenläufen nicht gefunden werden. Instabile Zweige können ebenfalls nicht gefunden werden.

Weil die Erstellung eines Bifurkationsdiagrammes nicht Gegenstand dieser Arbeit ist, muß die obige Vermutung unbestätigt bleiben.

Trotz zahlreich vorhandener Literatur wurden im Rahmen von Diplomarbeiten einige grundlegende Untersuchungen durchgeführt, um die nötigen Grundkenntnisse zu erwerben, die es ermöglichen, das komplexe Strömungsproblem im Luftspalt des Schwingfußbodens zu behandeln. In den Diplomarbeiten von PAVLOVEC, LECHNER und AHAMER wurden die Fähigkeiten des Finite-Elemente-

Programmes FIDAP bei der Berechnung der natürlichen Konvektion im waagrecht Luftspalt untersucht.

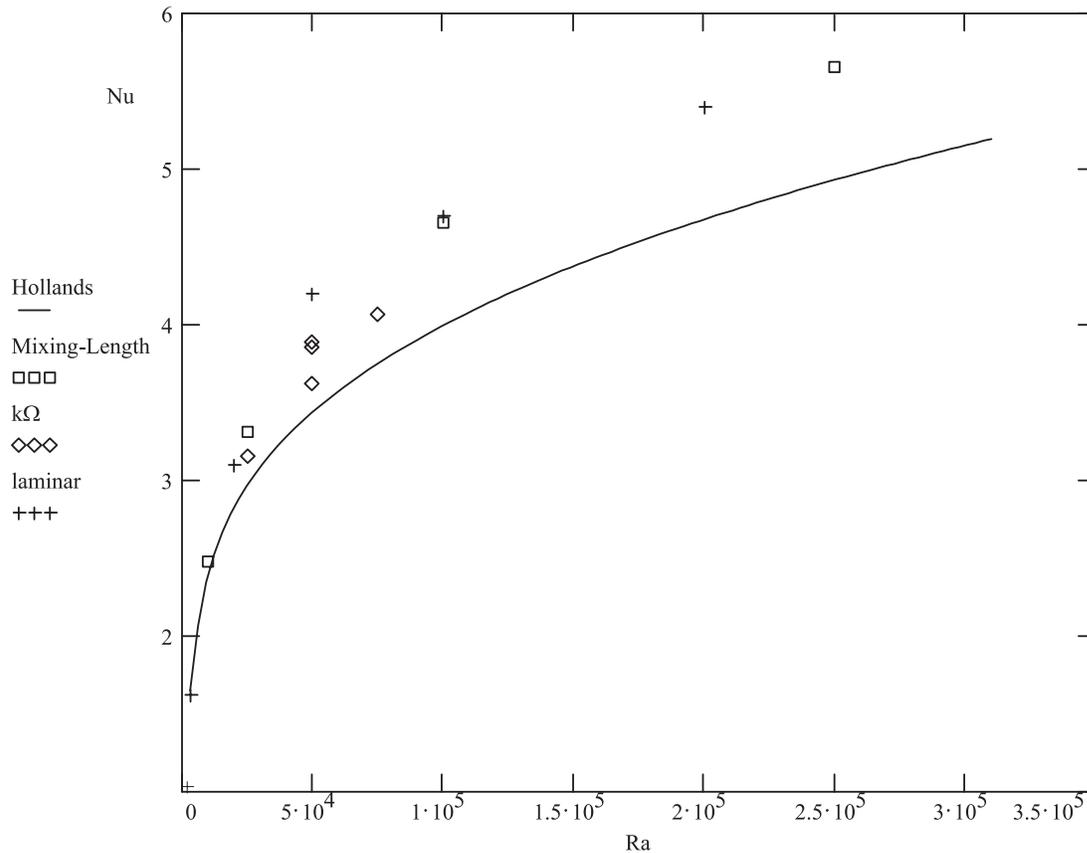


Bild 2.10: Vergleich verschiedener Strömungsmodelle. Die beste Übereinstimmung mit der Korrelation nach HOLLANDS ET. AL. liefert das Turbulenzmodell von WILCOX. Die relativ große Abweichung bei  $Ra = 10^5$  ( $\Delta T = 8.9$  [K]) ist auf eine zu hohe Anzahl von Konvektionswalzen zurückzuführen. Erst bei  $Ra = 5 \cdot 10^5$  wird  $\lambda$  größer als 2. Es soll jedoch auch an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen werden, daß generell Turbulenzmodelle erster Ordnung nicht besonders gut zur Berechnung der Erscheinungen bei der turbulenten natürlichen Konvektion geeignet sind. Es hat sich gezeigt, daß im hier interessierenden Bereich eine laminare (ev. instationäre) Berechnung ausreichend ist.

PAVLOVEC hat Testrechnungen für natürliche Konvektion zwischen grau strahlenden Berandungen durchgeführt.

Wie schon erwähnt wurde die in Abschnitt 2.2.3 vorgestellte Dimensionsbefreiung als effizienteste Variante ausgewiesen. Bei dimensionsbehafteter Berechnung vergrößern sich die Rechenzeiten nahezu um die Hälfte. So waren beim zu FIDAP mitgelieferten *example no. 33* die Rechenzeit der dimensionsbehafteten Variante 72 [s], die der dimensionslosen Variante nach 2.2.3 50 [s].

LECHNER untersuchte die Eignung des selbstadaptiven Mischungsweglängenmodelles zur Turbulenzmodellierung bei Rayleigh–Benard–Konvektion. Sogar bei diesem einfachen algebraischen Modell wurden Konvektionswalzen berechnet. Die Anzahl der Konvektionswalzen änderte sich im betrachteten Rayleigh–Zahlenbereich ( $10^4 \leq Ra \leq 5 \cdot 10^5$ ) nicht. Deshalb wird die Abweichung der errechneten Nußelt–Zahlen von der Korrelation nach HOLLANDS ET. AL. mit steigender Rayleigh–Zahl immer größer. Dennoch ist die Übereinstimmung in Relation zur Einfachheit des Turbulenzmodelles beachtlich.

AHAMER setzt in seiner Diplomarbeit das Turbulenzmodell von WILCOX ein. Bei diesem Modell verändert sich die Anzahl der Walzen. Das Strömungsgeschehen kann nur ungenau reproduziert werden. Bis zu einer Rayleigh–Zahl von  $2.5 \cdot 10^5$  bleibt die Wellenlänge  $\lambda$  wesentlich unter zwei (Die Wellenlänge ist die Breite eines Walzenpaares bezogen auf die Spalthöhe.  $\lambda = 2$  bedeutet ein Walzenmuster mit zwei gegeneinander drehenden, quadratischen Walzen.). Die Walzen sind also wesentlich schlanker als bei  $Ra_c$ . Die kritische Wellenlänge  $\lambda_c$  beträgt 2.016. Die Konvektionszellen haben also bei Beginn der Konvektionsströmung in der Realität einen nahezu quadratischen Umriss.

Entgegen theoretischen Voraussagen zeigen alle Experimente ein Anwachsen der Wellenlänge mit steigender Rayleigh–Zahl. Die Übereinstimmung mit der Korrelation nach HOLLANDS ET. AL. ist sehr gut. Aufgrund des komplexen Turbulenzmodelles steigen allerdings die Rechenzeiten stark an.

Die Berechnungen mit dem Turbulenzmodell von WILCOX sind von numerischen Problemen geprägt:

Gleichungslöser nach dem Newton-Verfahren haben einen zu kleinen Konvergenzradius und konvergieren nicht.

Gleichungslöser nach dem Fixpunkt-Iterations-Prinzip konvergieren zwar langsamer als solche vom Newton-Typ, haben dafür einen wesentlich größeren Konvergenzradius. Ohne gezielte Relaxation des Verfahrens konvergieren aber auch diese Gleichungslöser nicht. Die gefundenen Lösungen sind von der Wahl der Relaxationsfaktoren abhängig.

Das zu lösende Gleichungssystem ist von der Bauart

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}(\mathbf{U}, t) \mathbf{V} = \mathbf{F}(\mathbf{U}, t)$$

Es ist  $\mathbf{M}$  die Massenmatrix,  $\mathbf{V}$  der Vektor der gesuchten Feldgrößen,  $\mathbf{F}$  der Kraftvektor aus Volumskräften (z.B. Schwerkraft), Oberflächenkräften (z.B. Spannungen und Wärmeströme) und Dissipation,  $\mathbf{U}$  der gesuchte Lösungsvektor,  $t$  die Zeit.

Bei stationären Problemen ist  $\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{0}$ . Die Fixpunktiteration lautet dann

$$\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{U}_i) \mathbf{F}$$

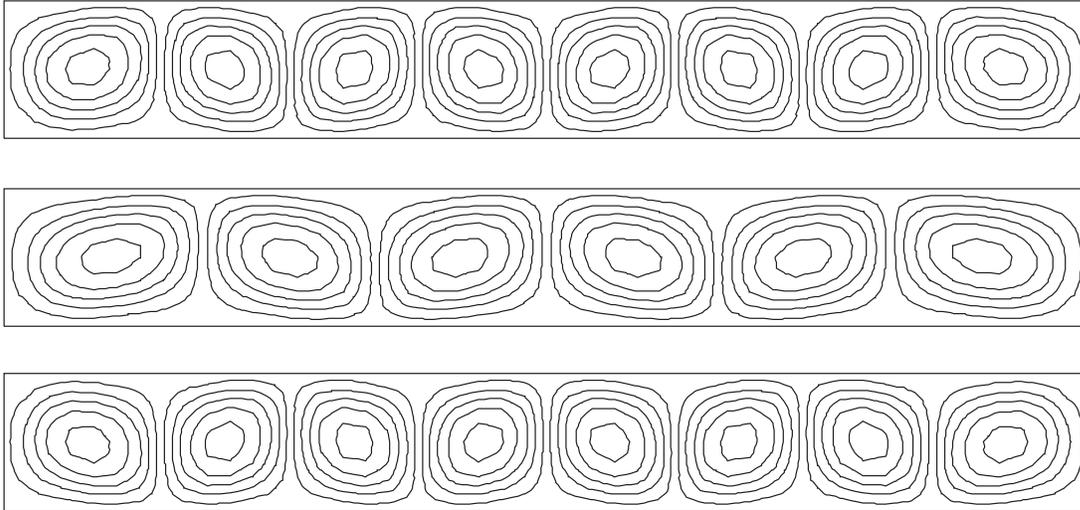
Die Matrix  $\mathbf{K}$  wird invertiert. Aus der bekannten Lösung  $\mathbf{U}_i$  wird die neue Lösung  $\mathbf{U}_{i+1}$  berechnet. Wenn das Verfahren monoton konvergiert, ist dies eine bessere Näherungs-Lösung für das Gleichungssystem. Wenn während der Iterationen die Konvergenz nicht monoton ist, kann das Verfahren durch Relaxation gedämpft werden:

$$\bar{\mathbf{U}}_{i+1} = \alpha \mathbf{U}_i + (1 - \alpha) \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{U}_i) \mathbf{F} .$$

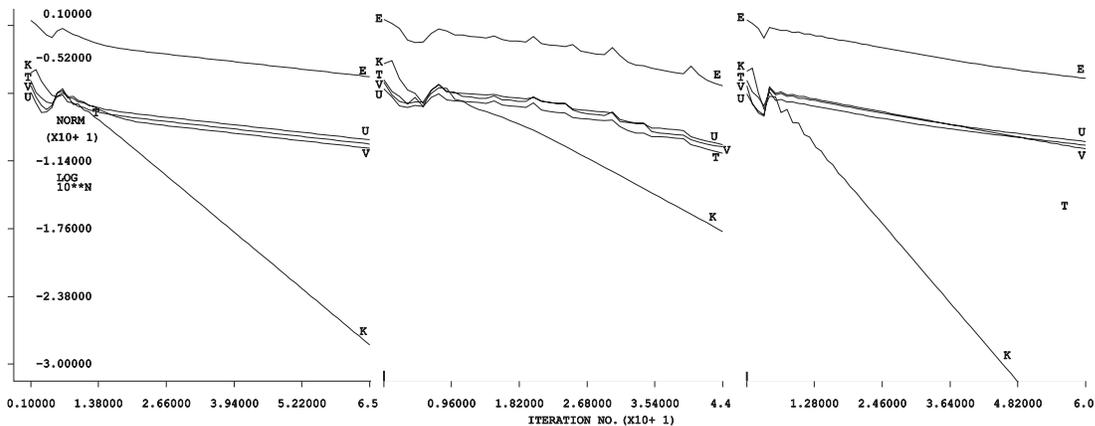
Als Näherungswert  $\bar{\mathbf{U}}_{i+1}$  für die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems wird ein Zwischenwert zwischen der alten Lösung  $\mathbf{U}_i$  und der neuen Lösung  $\mathbf{U}_{i+1}$  verwendet. Der Relaxationsfaktor  $\alpha$  bestimmt, wie groß der Anteil der alten Lösung am neuen Näherungswert ist.

Bild 2.11 zeigt unterschiedliche Ergebnisse bei gleicher Rayleigh-Zahl und gleichen Anfangsbedingungen. Mit der Nußelt-Korrelation nach HOLLANDS ET. AL. stimmt die Lösung, bei der sich breitere Walzen eingestellt haben, besser überein.

Es zeigt sich, daß zur Berechnung des Wärmedurchganges das  $k, \omega$ -Modell von WILCOX brauchbare Ergebnisse liefert. Eine Beurteilung der berechneten lokalen Strömungsvorgänge ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Es scheint jedoch auch für das  $k, \omega$ -Modell ähnliches zu gelten, wie für das in der Dissertation von JÄGER ([38], Seite 39) untersuchte  $k, \varepsilon$ -Modell.



**Bild 2.11: Einfluß der Relaxationsfaktoren.** Das Bild zeigt berechnete Stromlinien (Turbulenzmodell nach WILCOX, stationäre Lösungen). Bei gleichen Anfangsbedingungen und gleicher Rayleigh-Zahl werden bei kleinen Änderungen der Relaxationsfaktoren verschiedene Lösungen gefunden. Nach HOLLANDS ET. AL. ist  $Nu(Ra = 5 \cdot 10^4) = 3.438$ . Die Relaxationsfaktoren sind von oben nach unten:  
 $\vec{u} = 0.1 \quad k = 0.2 \quad \varepsilon = 0.1 \quad Nu = 3.89, 65 \text{ Iterationen.}$   
 $\vec{u} = 0.05 \quad k = 0.05 \quad \varepsilon = 0.05 \quad Nu = 3.62, 44 \text{ Iterationen.}$   
 $\vec{u} = 0.0 \quad k = 0.0 \quad \varepsilon = 0.0 \quad Nu = 3.86, 60 \text{ Iterationen.}$   
 Nach der angegebenen Anzahl von Iterationen wurde die Rechnung automatisch als konvergiert beendet. Die Konvergenzverläufe zeigt Bild 2.12



**Bild 2.12: Konvergenzverlauf zu Bild 2.11.** Das Bild zeigt den Verlauf der euklidischen Norm des Residuums während der Iteration.

### 2.3.2 Ergebnisse der Berechnung des Schwingfußbodens

Folgende Varianten wurden gerechnet:

- Aluminiumlamelle mit Gipskartonplatte abgedeckt. Nenn-Heizleistungen 10, 20, 30, 40 [W/m<sup>2</sup>].
- freie Aluminiumlamelle mit Kunststoff-Heizrohr (Emissionszahl der Kunststoffoberfläche 0.7). Emissionszahl der Lamelle 0.04 (poliert) 0.08 (leicht oxidiert) 0.2 (mittel oxidiert) und 0.9 (geschwärzt). Nenn-Heizleistungen 10 und 20 [W/m<sup>2</sup>]
- freie Aluminiumlamelle und Metall-Heizrohr. Emissionszahlen von Lamelle sowie Rohr 0.04 und 0.08 für 10 [W] Heizleistung.
- Hohlraum zur Gänze mit Gips gefüllt.

Die komplexe Physik der Strömung im von unten beheizten Spalt in Kombination mit dem hoch nichtlinearen Strahlungswärmestrom-Austausch schlägt sich auch in numerischen Problemen nieder: Ohne gezielte Maßnahmen konvergieren die Gleichungslöser nicht. Die Strahlungsrandbedingung bewirkt, daß die Temperaturen auf Werte der Größenordnung  $10^{70}$  anwachsen, wenn keine besonderen Maßnahmen ergriffen werden. Eine Verbesserung bringt die Beschränkung des Wertebereiches, den die Feldgrößen annehmen können (CLIPPING). Als Maximalwert der dimensionslosen Temperatur wurde  $400 [K]/T_{ref}$  zugelassen, als Minimum ein Wert von 0.1. Damit verbessert sich die Situation, es kann jedoch immer noch keine Konvergenz erzielt werden: Während der Iteration entstehen Temperaturfelder mit Extremstellen im Inneren (Die Energieerhaltung wird verletzt).

Wenn das Strömungsfeld nicht zu sensitiv auf die Temperaturrandbedingung ist, kann man als Anfangsbedingung ein Rechenergebnis ohne Berücksichtigung der Strahlung verwenden. Beim hier betrachteten Problem ist diese Vorgangsweise nicht immer möglich. Es kann bei Berücksichtigung des Strahlungswärmeaustausches zu einer Veränderung der Walzenzahl kommen.

Sowohl laminare als auch turbulente Rechnungen müssen relaxiert werden. Bei laminaren Berechnungen haben sich Relaxationsfaktoren von 0.4 bis 0.5 für das Geschwindigkeitsfeld und 0.7 bis 0.9 für die Strahlung als passend herausgestellt. Die Temperatur wurde nicht relaxiert. Zu starke Relaxation verlangsamt die Konvergenz. Es kann sogar zur völligen Unterdrückung der Strömung kommen. Wegen der langen Rechenzeiten ist es relativ zeitaufwendig, passende Relaxationsfaktoren zu ermitteln. Die großen Relaxationsfaktoren sind ein Indiz dafür, daß

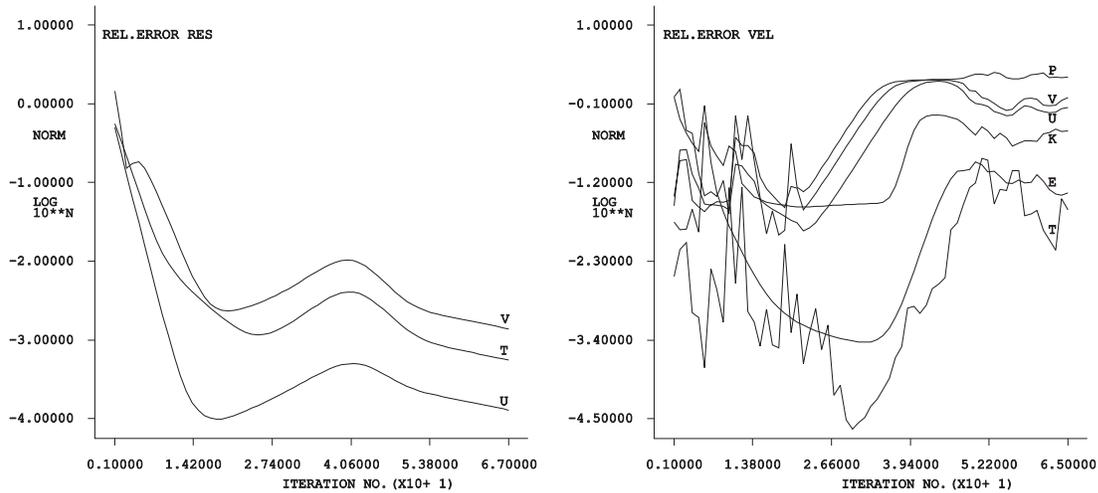


Bild 2.13: **Konvergenzverläufe.** Links im Bild ein Konvergenzverlauf bei einer Berechnung mit dem successive substitution solver. Der Verlauf der euklidischen Norm des Residualvektors ist über der Anzahl der Iterationen aufgetragen. Er ist selten monoton fallend, der Buckel vor dem Erreichen der Konvergenz ist typisch. Rechts eine divergente Berechnung unter Verwendung des segregated solver. Hier ist die Norm des relativen Fehlers des Lösungsvektors über der Anzahl der Iterationen aufgetragen. Typisch für diesen Löser ist die hohe Anzahl der benötigten Iterationen und der stark gezackte Verlauf.

möglicherweise die stationäre Strömung nicht mehr stabil ist. Von transienten Rechnungen wurde wegen des hohen Aufwandes an Rechenzeit Abstand genommen. Die stationäre Berechnung gibt die Wärmeübertragungsverhältnisse mit ausreichender Genauigkeit wieder.

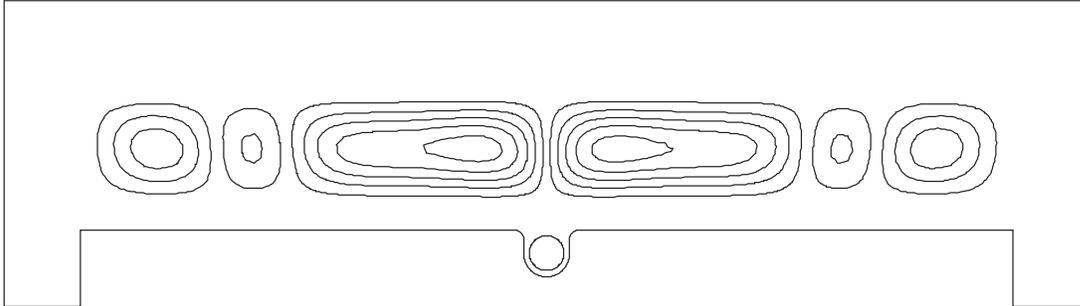
Bild 2.13 zeigt links einen typischen Konvergenzverlauf für eine ausreichend relaxierte laminare Berechnung unter Verwendung einer Fixpunkt-Iteration als Gleichungslöser. (Variante 40 [W] Nennheizleistung mit eingebauter Gipskartonplatte.) Die Konvergenz verläuft in den seltensten Fällen monoton. Bei zu kleinen Relaxationsfaktoren beginnen die Verläufe zu zacken.

Turbulente Rechnungen dürfen nicht zu stark relaxiert werden, die Konvergenz ist auch bei moderater Relaxation sehr schlecht. Vor allem die spezifische turbulente kinetische Energie verursacht Konvergenzprobleme. Im Extremfall kann auch hier das Strömungsfeld zum Erliegen kommen. Passende Relaxationsfaktoren waren 0.1 für die Geschwindigkeiten, 0.3 für  $k$  und 0.4 für  $\omega$ .

Bei Verwendung des *segregated solver* ergeben sich andere typische Konvergenzverläufe als bei der Fixpunktiteration. Bild 2.13 zeigt rechts einen turbulenten Rechenlauf, der die ersten 20 Iterationen zu konvergieren scheint. Plötzlich be-

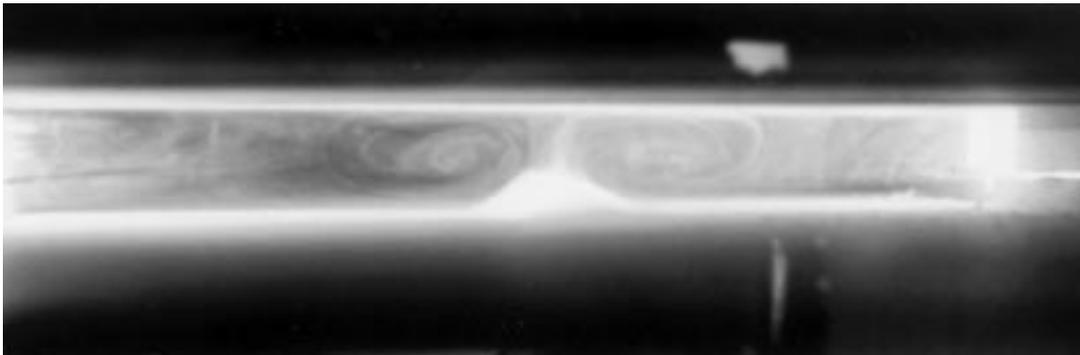
ginnt die Berechnung zu divergieren und wird nach Erreichen der maximalen Anzahl von Iterationsschritten abgebrochen.

Die Berechnungen geben Eigenschaften des Strömungsfeldes, die bei der Visualisierung der Strömung durch Rauch sichtbar gemacht werden konnten, gut wieder.



**Bild 2.14: Stromlinien bei 30 Watt Nennleistung und eingebauter Gipskartonplatte.** *Der Zellularkonvektion ist eine Strömung zufolge der Druckdifferenz zwischen der warmen Luftsäule in der Mitte und der kalten Luftsäule am Rand überlagert. Die entgegen dieser Strömung drehenden Walzen sind nur schwach ausgeprägt.*

Bild 2.14 zeigt die Stromlinien bei einer Nennheizleistung von 30 [W] und eingebauter Gipskartonplatte. Wegen der zum Rand abfallenden Temperatur der Alulamelle ist der Zellstruktur der Rayleigh-Benard-Konvektion eine Strömung zufolge der Dichteunterschiede zwischen Zentrum und Rand überlagert. Die entgegen der Dichteströmung drehenden Walzen sind schwächer ausgebildet.



**Bild 2.15: Visualisierung der Strömung im Spalt bei 15 Watt Heizleistung.** *Bei niedrigen Heizleistungen ist die Strömung nahezu stationär. Die beiden mittleren Walzen sind sehr gut zu erkennen, ebenso die stagnierende Strömung über den Heizrohr. Die Strömung ist in sehr guter Näherung zweidimensional. Der Rauch verbreitet sich fast nicht in Blickrichtung.*

Im Bild 2.15 ist das Strömungsfeld mit Rauch sichtbar gemacht. Die Walzenstruktur ist gut erkennbar. Die Strömung ist leicht instationär: Die Trennlinie im Zentrum der breiten Walzen bricht auf, die Walze teilt sich und dreht sich ein. Die Strömung ist ganz schwach turbulent, der Rauch hält sich mehrere Minuten, bevor er zufolge Diffusion und Turbulenz gleichmäßig im Spalt verteilt ist.

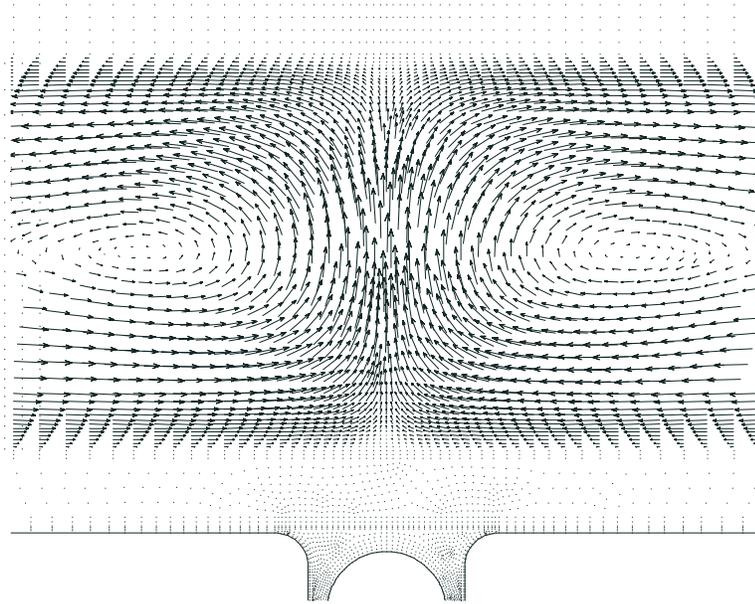


Bild 2.16: **Strömung in der Umgebung des Heizrohres.**

Besonders augenfällig ist die stagnierende Strömung über dem Heizrohr. Bei der Visualisierung bleibt der Rauch zwei Minuten und länger an dieser Stelle stehen. Von den drehenden Walzen werden dünne Fäden nach oben gesaugt. Der Vektor-Plot (Bild 2.16) zeigt deutlich die ruhende Luft über dem Heizrohr und die aufwärtsdrehenden Walzen.

Die Wechselwirkungen zwischen Strahlung und Konvektion dominieren die Wärmeübertragung. Die Strahlungsrandbedingung wirkt sich stark auf das Strömungsfeld aus.

Bild 2.17 zeigt die Änderungen des Stromlinienverlaufs zufolge verschiedener Strahlungszahlen der Rohroberflächen. Oben eine Berechnung für ein Metallrohr mit  $\varepsilon = 0.08$ . Es bilden sich zwei Walzen aus: Wegen des geringen Wärmetransports zufolge Strahlung ist der Temperaturgradient in der Aluminiumlamelle groß. Die entgegen der Dichteströmung drehenden Walzen lösen sich auf. Unten eine Berechnung für ein Kunststoffrohr mit  $\varepsilon = 0.7$ . Das Rohr gibt viel Wärme durch Strahlung ab. Die Maximaltemperatur sinkt deshalb von  $33.2\text{ [}^\circ\text{C]}$  auf  $32.3\text{ [}^\circ\text{C]}$  ab. Der Temperaturverlauf in der Lamelle ist flacher, das Temperaturni-

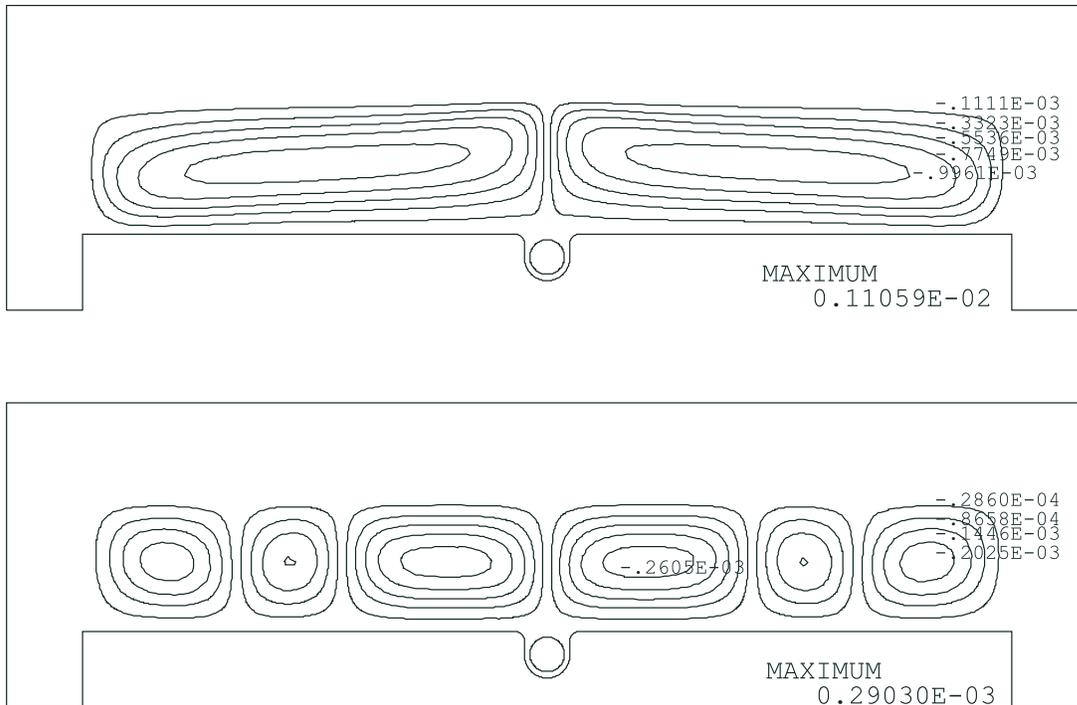


Bild 2.17: **Änderung des berechneten Strömungsfeldes bei Veränderung der Strahlungszahl der Rohroberfläche.** Die Strahlungsrandbedingung hat einen wesentlichen Einfluß auf das Strömungsfeld. Im oberen Bild strahlt das Rohr nur schwach ( $\epsilon = 0.04$ ), im unteren Bild wesentlich stärker ( $\epsilon = 0.7$ ).

veau geht jedoch hoch, weil die Walzen nun viel langsamer drehen und weniger Wärme durch Konvektion transportiert wird (siehe Bild 4.2). Daher bildet sich ein Strömungsmuster mit 6 Walzen aus. Die Heizleistung ist jeweils 10 [W].

Der Temperaturverlauf in der Luft wird natürlich durch die Anzahl der Walzen stark verändert. Bild 2.18 zeigt die Temperaturverläufe zu den Bildern 2.17.

Die Maximaltemperatur der Fußbodenoberfläche ändert sich jedoch kaum. Bild 2.19 zeigt die Temperaturverläufe der Fußbodenoberfläche. Die beiden Höcker im rechten Temperaturverlauf werden von der aufsteigenden warmen Luft der Randwalzen erzeugt. Diese geringen Temperaturdifferenzen sind jedoch in der Praxis meßtechnisch kaum erfaßbar.

Wie die Messungen zeigen, wird ohne Gips die Wärmeübertragung schlechter. Dieser Effekt wird von der Rechnung belegt. Bei Berechnungen ohne Gipskartonplatte zeigt sich, daß die Strahlungszahl des Aluminiums von wesentlicher Bedeutung ist. Eine zur Erhöhung der Strahlungszahl oberflächenbehandelte Alulamelle bewirkt den niedrigsten Wärmedurchgangswiderstand. (Siehe Seite 53 ff.)

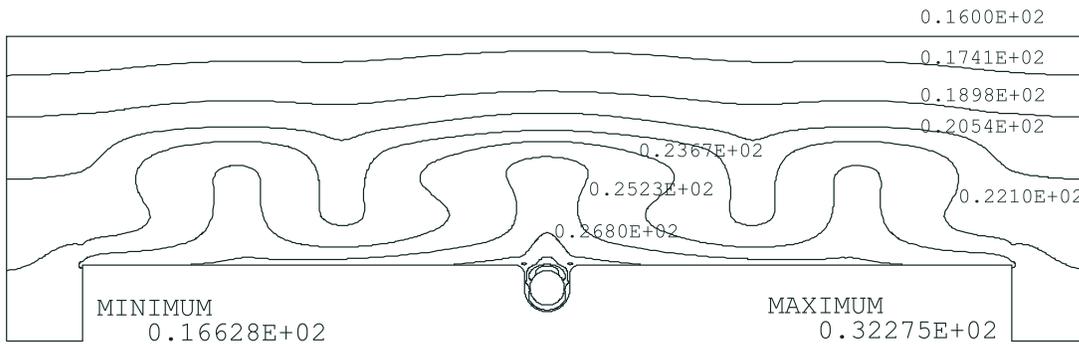
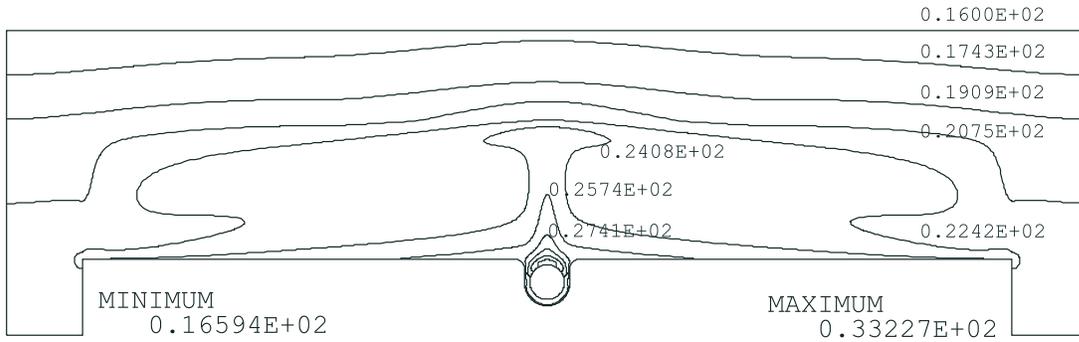


Bild 2.18: Verlauf der Isothermen Temperaturen in °C; (zu Bild 2.17)

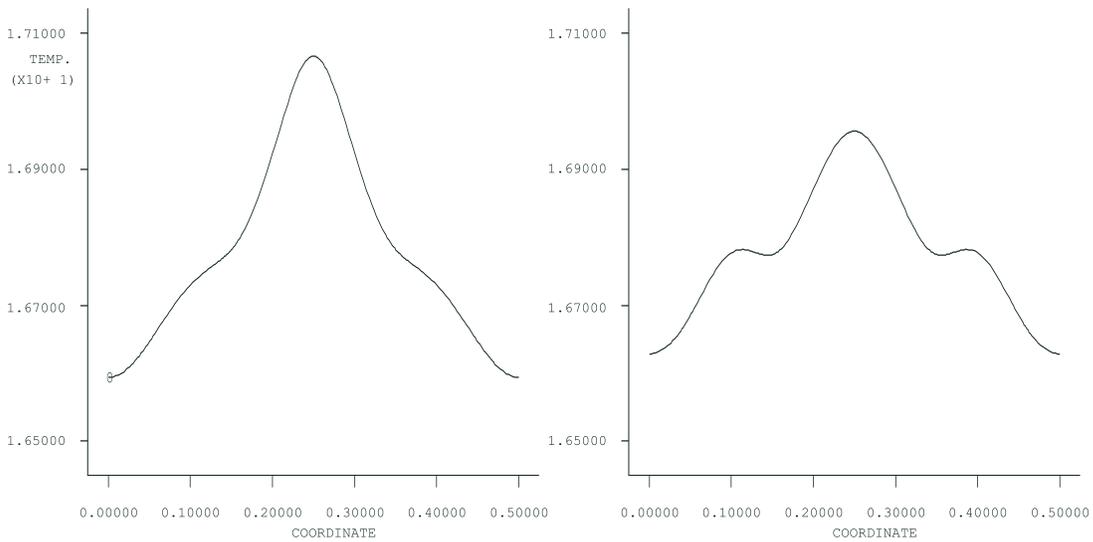


Bild 2.19: Verlauf der Fußbodenoberflächentemperaturen. [°C]

# Kapitel 3

## Experimentelle Untersuchungen

### 3.1 Ziel der Messungen und Beschreibung des Versuchsaufbaues

Mit den im folgenden beschriebenen Experimenten wird die Berechtigung der Modellannahmen, insbesondere die der zweidimensionalen Berechnung und die der Beschränkung auf stationäre Strömungsformen, untersucht. Von besonderem Interesse für die Praxis ist die Auswirkung der Gipskartonplatte auf den Wärmedurchgang. Daher wurden Messungen mit und ohne Gipskartonplatte durchgeführt.

Zur Verifikation der numerischen Ergebnisse und zur Bestimmung des Heizlastdiagrammes wurde ein Fußbodenprüfstand aufgebaut.

In der Realität wird ein Fußboden mittels Heißwasser beheizt, das z. B. ein Kunststoffrohr aus vernetztem Polyethylen durchströmt. Am Prüfstand wurden elektrische Heizkabel der Firma Pyrothenax in die Kunststoffrohre eingelegt und in eine keramische Stampfmasse eingebettet. Die elektrische Heizleistung kann wesentlich genauer gemessen werden, als das mit Heißwasser möglich wäre. Die Heizleistung wird von einer Gleichstromquelle (Philips PE 1646 DC Power Supply 74V-6A) zur Verfügung gestellt und aus den Meßgrößen Strom und Spannung ermittelt. Der Strom wird über einen Shunt der Firma Norma Goertz, Genauigkeitsklasse 0.2 [%], mit einem 5 1/2-stelligen Multimeter gemessen. Der Spannungsabfall am Heizleiter des mittleren Bodensegmentes wird ebenfalls mit einem Multimeter gemessen.

Zur Wärmeabfuhr an der Fußbodenoberkante wird eine Kühlwanne aus Plexiglas

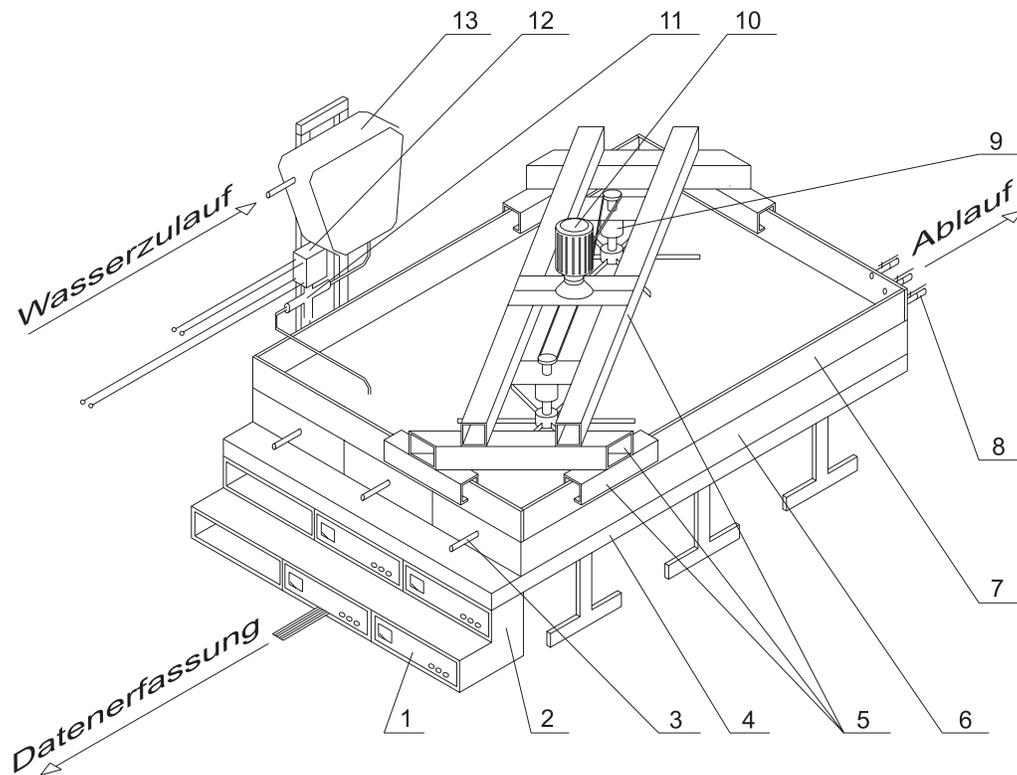


Bild 3.1: **Ansicht des Fußbodenprüfstandes.** Der Prüfstand besteht aus drei Segmenten. Das mittlere ist das Meßsegment. Die Randsegmente halten von den Rändern ausgehende Störungen ab. Die Wärmeabfuhr erfolgt durch eine Kühlwanne, die aus einem Pufferbehälter mit konstantem Wasserstand gespeist wird. Am Stellventil liegt somit unabhängig vom Leitungsdruck ein konstanter Druck an. Die beiden, mittels Keilriemen angetriebenen, Rührer durchmischen das Kühlwasser in der Wanne. Das erwärmte Wasser fließt über einen Überlauf ab. Der Wasserstand in der Wanne beträgt ca. 10 [cm]. ① Pt100-Interface, ② Meßgeräte-Rack, ③ Heizleiter, ④ Unterkonstruktion, ⑤ Rührwerk, ⑥ Fussboden, ⑦ Kühlwanne, ⑧ Wasserablauf, ⑨ Rührer, ⑩ Rührerantrieb, ⑪ Stellventil, ⑫ Ventilantrieb, ⑬ Wasserbehälter.

mit Rührwerk eingesetzt. Die Dicke des Wannenbodens ist so gewählt, daß der Wärmeleitwiderstand des Bodens  $s/\lambda$  dem in DIN 4725 genormten  $1/\bar{\alpha}$  möglichst genau entspricht. Um einen guten thermischen Kontakt zwischen dem unebenen Parkettboden und der Kühlwanne zu gewährleisten, wird die Wanne in eine ca 2 [mm] dicke Schicht aus Bronzepulver eingerüttelt. Durch den durchsichtigen Wannenboden hindurch kann die Kontaktfläche kontrolliert werden. In die Wanne wird kaltes Wasser eingespeist, das erwärmte Wasser fließt über einen Überlauf ab. Die Kühlwassermenge beträgt wenige Liter pro Minute und soll sehr genau regelbar sein. Das Stellventil (Fa. Tour & Andersson) wird deshalb nicht direkt aus der Wasserleitung gespeist, sondern über einen Behälter mit Niveauregelung. In diesen Behälter können zusätzlich Eiswürfel gegeben werden, um die benötigte Kühlwassermenge zu verringern oder um schwankende bzw. zu hohe Leitungswassertemperaturen auszugleichen.

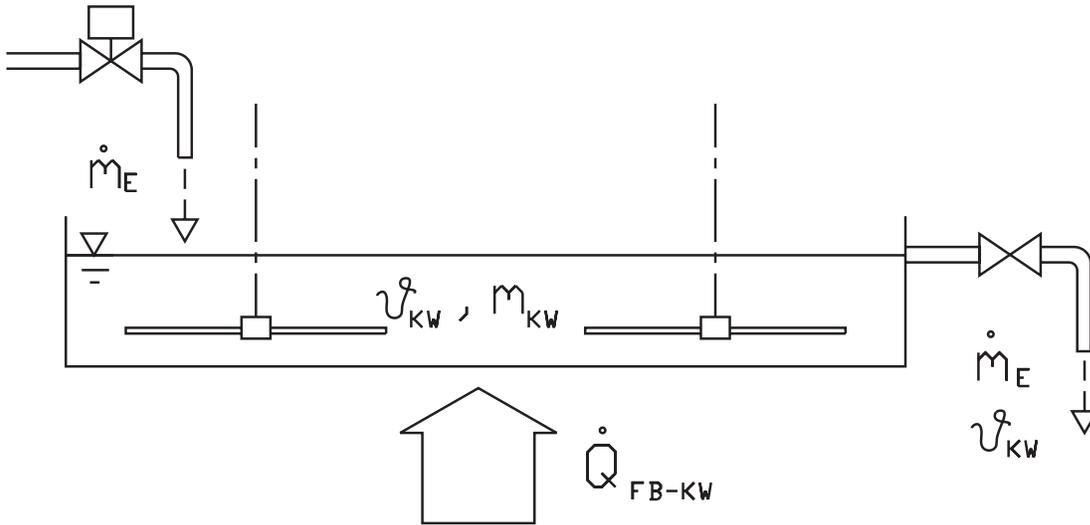
Zwei von einer Aluminiumkonstruktion getragene Rührer durchmischen das Wasser in der Kühlwanne. Die Drehzahl der Rührer beträgt 25 [U/min]. Die Durchmischung des Kühlwassers ist so gut, daß sich eingeträufelte Farbe innerhalb von wenigen Sekunden in der gesamten Wanne verteilt. Im Rahmen der Diplomarbeit von LJUBAS [43] wurden die am Rührwerk einstellbaren Parameter (Lage der Rührer, Drehzahl, gleich- oder gegensinnige Rotation, Abstand der Rührerblätter vom Wannenboden, Rotorblattwinkel) auf ihre Auswirkung untersucht und die passende Einstellung gefunden. Mit Sägespänen im Wasser wurde die Strömung in der Wanne auf Totwassergebiete untersucht.

Die Regelung wird mittels Personal Computer realisiert. Das verwendete Meßdatenerfassungsprogramm bietet einen frei einstellbaren PID-Regler an. Als Stellsignal wird ein analoger Ausgangskanal der Meßdatenerfassungskarte mit einem Spannungsbereich von  $0 \div 10$  [V] eingesetzt. Dieses Signal wird direkt auf die Stellantriebseinheit des Ventiles aufgegeben (Tour & Andersson EM 52L actuator for small valves; Steuerspannung  $2 \div 10$  [V] oder Steuerstrom  $4 \div 20$  [mA]; Versorgungsspannung 24 [V] Wechselspannung; Leistungsaufnahme 3 [W]; Ventilhub 8.5 [mm] mit einer Genauigkeit von 1 [%]; Zeitdauer für einen Ventilhub 300 [s]).

Die Kühlwanne wurde mit dem Simulationsprogramm MathLab-Simulink [36] simuliert, um eine möglichst gute Voreinstellung der Reglerparameter zu ermöglichen (Den Regler direkt an der Kühlwanne einzustellen wäre sehr zeitaufwendig: Um die Sprungantwort der Kühlwanne bei einem Führungsgrößensprung von 20 [°C] auf 16 [°C] zu ermitteln, sind ca. 25 Stunden erforderlich.). Die in der Simulation ermittelten Einstellparameter bedurften keiner nachträglichen Korrektur. Die Temperatur der Kühlwanne kann auf  $\pm 0.2$  [°C] genau geregelt werden.

Im Reglerbetrieb werden alle Temperaturmeßkanäle einmal pro Minute abgeta-

stet und in einer Datei abgelegt. Für die Temperatur der Kühlwanne wird ein gleitender Mittelwert der letzten fünf Messungen gebildet und dem Regelalgorithmus als Istwert der Kühlwanne übergeben.



**Bild 3.2: Modell der Kühlwanne.** Die Kühlwanne wird als idealer Rührkessel modelliert. Diese Annahme trifft die Realität sehr genau: Einige Tropfen Tinte verteilen sich innerhalb von Sekunden in der Wanne. Speicherung von Masse wird vernachlässigt: Aus dem Überlauf fließt genau jene Wassermenge ab, die an Kühlwasser eingebracht wird.

Wenn die Kühlwanne als idealer Rührkessel modelliert wird, ergibt die instationäre Energiebilanz für die Wanne eine gewöhnliche Differentialgleichung. Speicherung von Masse im System kann vernachlässigt werden, weil der Wasserstand durch den Überlauf konstant bleibt.

$$m_{KW} c \frac{d\vartheta_{KW}(t)}{dt} = \dot{m}_{ein}(t) c [\vartheta_{ein} - \vartheta_{KW}(t)] + \dot{Q}_{FB-KW} .$$

Es bedeutet:  $m_{KW}$  die in der Kühlwanne befindliche Masse [kg],  $c$  die spezifische Wärmekapazität des Kühlwassers [J/kg K],  $\vartheta_{KW}$  die Temperatur der Kühlwanne [°C],  $\dot{m}_{ein}$  den zuströmenden Kühlwassermassenstrom [kg/s],  $\vartheta_{ein}$  die Temperatur des zuströmenden Kühlwassers [°C],  $\dot{Q}_{FB-KW}$  den vom Fußboden zur Kühlwanne fließende Wärmestrom [W].

Durch Transformation auf eine dimensionslose Form mit den Variablen  $\vartheta^* = \vartheta / \vartheta_{ein}$ ,  $\dot{m}_{ein}^* = \dot{m}_{ein} / \frac{\dot{Q}_{FB-KW}}{c \vartheta_{ein}}$ ,  $t^* = t / \frac{c m_{KW} \vartheta_{ein}}{\dot{Q}_{FB-KW}}$  vereinfacht sich zu

$$\frac{d\vartheta_{KW}^*}{dt^*} + \dot{m}_{ein}^* \vartheta_{KW}^* - \dot{m}_{ein}^* - 1 = 0 .$$

Vom Standpunkt der Regelungstechnik ist  $\dot{m}_{ein}^*$  die Eingangsgröße und  $\vartheta_{KW}^*$  die Ausgangsgröße des Systems Kühlwanne. Um das Regelverhalten der Kühlwanne simulieren zu können, wurde in der Diplomarbeit von LJUBAS [43] die Kennlinie des Stellventiles gemessen. Es ergab sich nach Kurvenanpassung durch die Meßdaten

$$\frac{\dot{m}_{ein}}{[\text{kg/s}]} = 0.0738 + 0.0543 * \arctan \left( \frac{U_{Stellantrieb}}{[\text{V}]} - 7.692 \right); \quad 2 < \frac{U_{Stellantrieb}}{[\text{V}]} < 10.$$

Die Temperaturmessung wurde mit Platin-Widerstands-Temperaturfühlern realisiert. (Pt-100 Miniatur-Keramik-Schicht-Meßwiderstände MFK-220 Klasse A nach DIN 43 760 der Firma Heraeus; Länge 2.3 [mm], Breite 1.9 [mm]; Selbsterwärmung in mit 1 [m/s] bewegter Luft ist 1 [K/mW]; Ansprechzeit in bewegter Luft: 1/2-Zeit 3 [s], 9/10-Zeit 9 [s]) Gemessen wird die Kühlwammentemperatur, die Temperatur der Heizrohr-Oberfläche, der Temperaturverlauf in der Blechlamelle und an der Fußbodenoberfläche. Als Widerstandsmeßgerät wird ein am Institut für Maschinendynamik und Meßtechnik der TU Wien gebautes Gerät eingesetzt. Die Meßwiderstände werden mit einem konstanten Strom von 1 [mA] versorgt. Der Widerstand des Pt100 wird in Drei-Leiter-Technik gemessen. Von einem Operationsverstärker wird die Spannung am Pt100-Widerstand so verstärkt, daß am Ausgang des Temperaturmeßgerätes 0 [V] bei 0 [°C] und 5 [V] bei 100 [°C] anliegen. Die Spannungssignale werden über abgeschirmte Flachbandkabel zum Rechner geführt. Aufgrund der Verwendung einer direkt im PC eingebauten Datenerfassungskarte ist das Meßsignal für eine Einzelmessung zu verrauscht. Zur Erfassung eines Meßdatensatzes werden 1024 Messungen mit einer Meßfrequenz von 100 [Hz] aufgenommen und in einer Datei abgelegt. Diese Daten werden nach DIN 1319 weiterverarbeitet.

Zur Meßdatenverarbeitung wird ein Personal Computer (PC mit Intel 80486-Prozessor und 66 Megahertz Taktrate) eingesetzt. Eine Multi-Funktions-AT-Bus-Einsteckkarte ACL 812 PG der Firma ADCclone dient zur Datenerfassung. Diese Karte ist ein Nachbau der PCL-812PG der Firma Advantech Co, Ltd mit folgenden Daten (auszugsweise):

- 16 *single ended* Eingangskanäle (Auflösung 12 [bit]=4096 Schritte; Meßbereich von  $\pm 10$  [V] bis  $\pm 0.3125$  [V] konfigurierbar; Genauigkeit 0.015 [%] vom gelesenen Wert  $\pm 1$  [bit]),
- 2 analoge Ausgangskanäle (Auflösung 12 [bit]; Ausgangsbereich  $0 \div 5$  [V] oder  $0 \div 10$  [V] konfigurierbar; Referenzspannung intern  $-5 \pm 0.1$  [V],  $-10 \pm 0.2$  [V] oder extern.),
- jeweils 16 Kanäle digitaler Eingang und Ausgang, 3 Zähler.

## 3.2 Visualisierung der Strömung

Um einen qualitativen Vergleich zwischen den numerischen Ergebnissen und der Strömung im Spalt des Modellfußbodens zu ermöglichen, wurde die Strömung mit einfachen Mitteln visualisiert.

Mittels einer Handpumpe wurde Tabakrauch in ein seitliches Segment des Bodens eingblasen. Der Rauch wurde in einem Pfeifenkopf aus Metall diskontinuierlich erzeugt. Der Rauch wurde mit einer 1000 [W] Halogen-Lampe durch einen Spalt beleuchtet.

Mit einer motorbetriebenen Spiegelreflex-Kamera (Minolta X700 mit Motor Drive 1, Objektiv Brennweite 50 Millimeter, Blende 1:1.4) wurde in regelmäßigen Abständen (meist 5 [s], bei höheren Leistungen auch 2.5 [s]) fotografiert. Als Film wurde ein schwarz-weiß-Film (Ilford HP5 plus 400. DX 135/36) eingesetzt.

Die Visualisierung bestätigt, wie schon auf Seite 40 vorweggenommen, die Annahme einer zweidimensionalen Strömung. Die Strömung ist schwach turbulent und leicht instationär. Die Strömungsgeschwindigkeiten liegen im [cm/s]-Bereich. Im folgenden wird eine knappe Auswahl von Bildern gezeigt. Die beiden hellen Streifen stellen den beleuchteten Teil der Gipskartonplatte beziehungsweise des Blindbodens dar. Der Rauch wurde von rechts eingblasen. Der Lichteinfall ist ebenfalls von rechts.

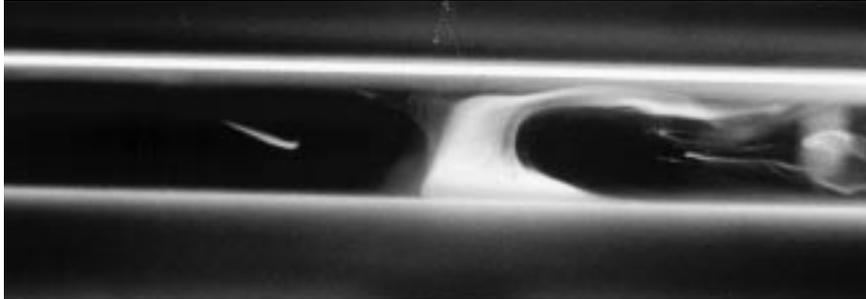
Etwa 125 Sekunden nach dem Einblasen des Rauches in den Spalt zieht die linke der beiden mittleren Walzen einen Rauchfaden in einem leichten Bogen von hinten in die beleuchtete Zone. Man erkennt die Spitze des Rauchfadens als hellen lanzettförmigen Punkt. Die rechte Walze ist durch den Einblasevorgang noch etwas gestört.

Fünf Sekunden später hat die mittlere Rauchsäule die Seite gewechselt. Der Rauchfaden hat Rauch ins Zentrum der linken Walze nachgeliefert.

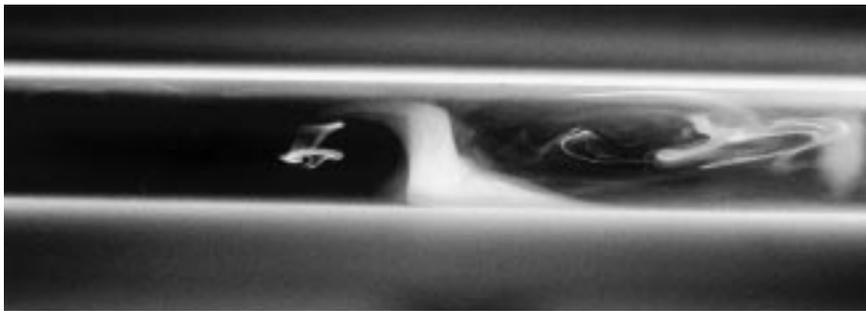
Bei  $\Delta t = 135$  [s] beginnt sich der Rauchfaden mehr und mehr einzudrehen.

Weitere fünf Sekunden später kann man die mittlere Walze schon sehr gut erkennen. Nun hat sich auch die Störung in der rechten Walze etwas beruhigt.

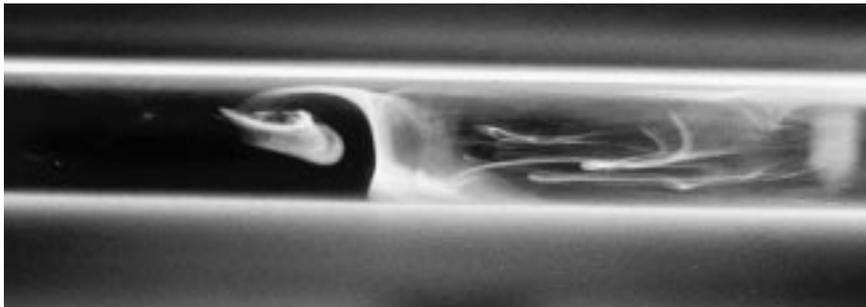
Die letzten beiden Bilder zeigen die weitere Entwicklung. Bei  $\Delta t = 160$  [s] kann man die Walzen sehr gut erkennen. Der Rauchfaden hat sich immer noch nicht aus der beleuchteten Zone hinausbewegt. Die Strömung ist offenbar in guter Näherung zweidimensional. Im letzten Bild ist der Spalt schon relativ stark verrauchet. Der über dem Heizrohr ruhende Rauchkegel ist fast zur gänze aufgezehrt.



$\Delta t = 125[s]$

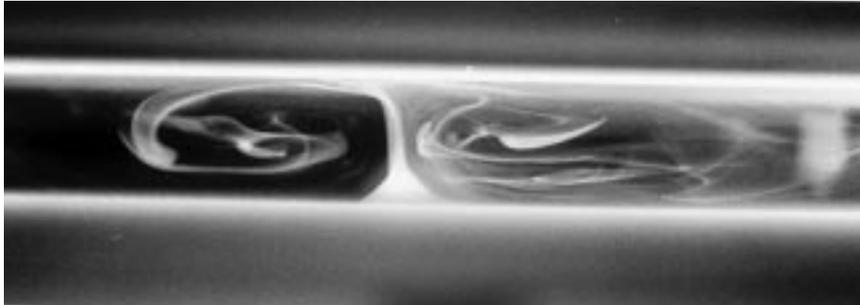


$\Delta t = 130[s]$

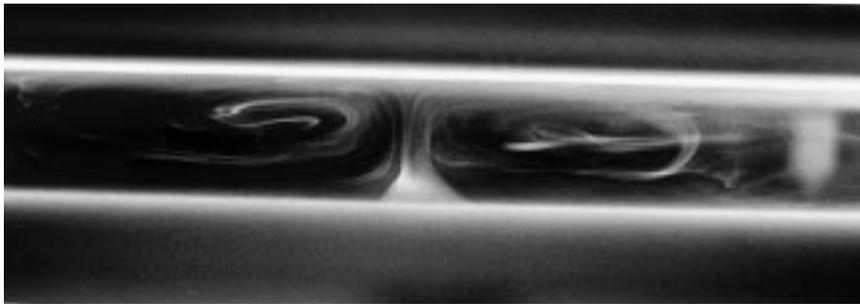


$\Delta t = 135[s]$

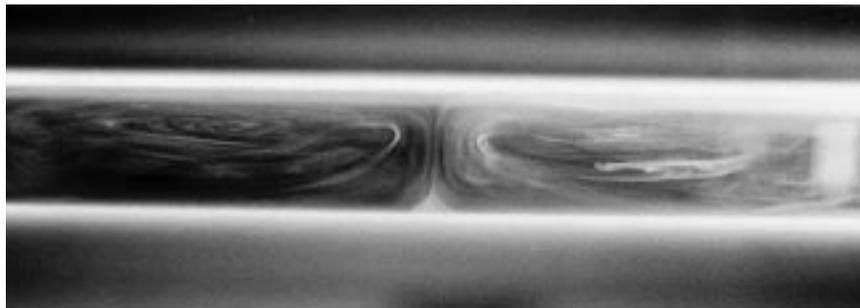
**Bild 3.3: Zeitlicher Verlauf der Strömung im Luftspalt**



$\Delta t = 140$ [s]



$\Delta t = 160$ [s]



$\Delta t = 190$ [s]

Bild 3.4: Zeitlicher Verlauf der Strömung im Luftspalt (Fortsetzung)

# Kapitel 4

## Vergleich der numerischen Ergebnisse mit dem Experiment

Ziel der Berechnung des Fußbodens mit numerischen Methoden ist die zeit- und kostengünstige Möglichkeit, verschiedene Konstruktionsvarianten zu untersuchen.

Bei der schon in Tabelle 1.1 (Seite 8) angedeuteten Varianz der Stoffwerte kann man nicht davon ausgehen, daß Messung und Rechnung exakt übereinstimmen werden. Wollte man die Genauigkeit der Rechnung überprüfen, müsste man über ein Versuchsmodell mit exakt bestimmbareren Stoffwerten verfügen. In der vorliegenden Arbeit wird ein industriell gefertigter Boden untersucht. Durch den Vergleich zwischen Rechnung und Experiment soll nachgewiesen werden, daß das numerische Modell für Parameterstudien geeignet ist. Wie sich zeigt, ist diese Forderung erfüllt (siehe Bild 4.1). Mit Hilfe des Berechnungsmodelles kann daher der Einfluß konstruktiver Verbesserungen oder Vereinfachungen untersucht werden.

Von besonderem Interesse ist die Auswirkung der Gipskartonplatte auf die Wärmeübertragung. Es beeinflussen sich die folgenden Mechanismen:

- Gips hat ungefähr die 10-fache Wärmeleitfähigkeit der Luft (siehe Tabelle 1.1, Seite 8).
- Gips ist für die Strahlungswärme undurchlässig.
- Durch die Konvektionsströmung erhöht sich der Wärmetransport; bei einer Temperaturdifferenz von 10 [K] zwischen den Berandungen der Luft ungefähr um das 3 bis 4-fache (siehe Bild 2.3, Seite 24).

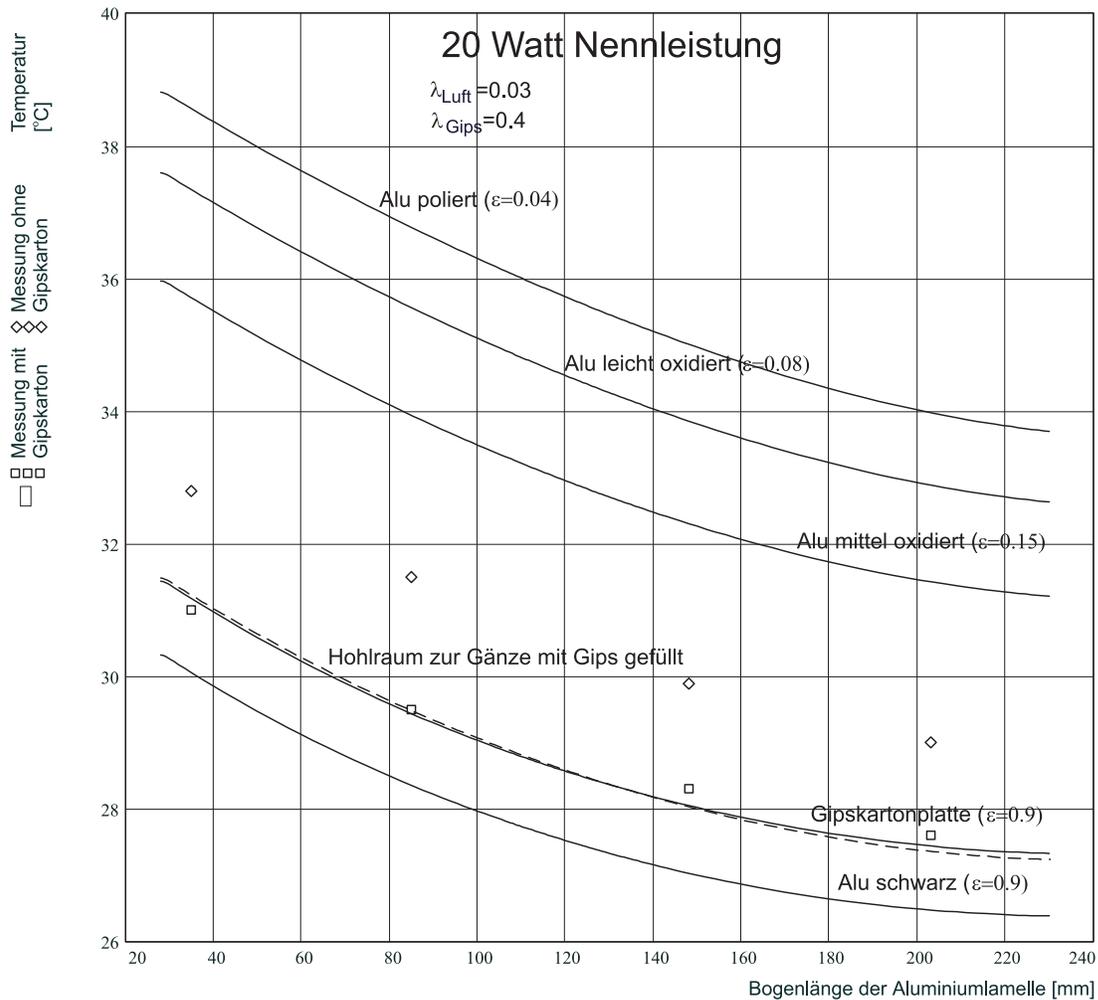
- Höhere Oberflächentemperaturen des Luftspaltes erhöhen den Strahlungswärmestrom mit der Differenz der vierten Potenzen der Randtemperaturen.

Daraus erklären sich die folgenden Ergebnisse (siehe Bild 4.1)

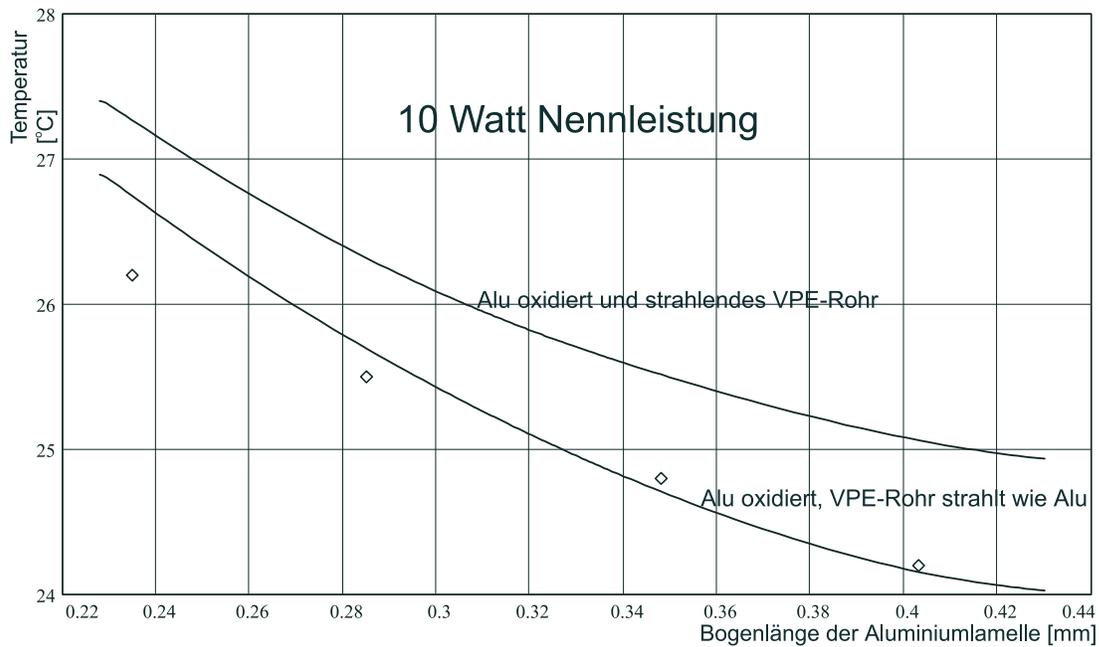
- Die niedrigste Wärmeübertragungsrate ergibt sich bei blankem Alu ohne Gipskartonplatte: die Wärme wird nahezu ausschließlich durch Konvektion im Spalt transportiert.
- Die Gipskartonplatte hat eine relativ hohe Emissionszahl von ungefähr 0.9. Die Höhe des Luftspaltes verringert sich. (Diese Änderung geht zwar in die Rayleigh-Zahl als Kennzahl des Antriebes der Wärmeübertragung mit der dritten Potenz ein, bei turbulenter Strömung ist aber die Nußeltzahl proportional der dritten Wurzel aus der Rayleigh-Zahl. Daher hat die Änderung der Höhe keinen wesentlichen Einfluß auf den transportierten Wärmestrom.) Aufgrund des hohen Strahlungsanteiles ist die Wärmeübertragung wesentlich besser als mit blankem Alu.
- Ohne Gipskartonplatte, mit geschwärztem Alu, wird ein hoher Anteil der Wärme durch Strahlung transportiert. Dieser Anteil muß nun nicht mehr mittels Wärmeleitung durch die Gipsschicht transportiert werden. Die Wärmeübertragung ist noch besser geworden.

Die Strahlungszahl der Aluminiumlamelle kann in Abhängigkeit von der Oxidschichtdicke zwischen 0.02 (blank poliert), 0.2 bei 1  $[\mu\text{m}]$  Dicke und 0.5 bei 2  $[\mu\text{m}]$  Dicke schwanken. Von 3  $[\mu\text{m}]$  ( $\varepsilon = 0.6$ ) verläuft der Anstieg der Strahlungszahl flacher bis auf  $\varepsilon = 0.75$  bei 10  $[\mu\text{m}]$  Dicke der Oxidschicht. (SIEGEL, HOWELL Seite 162.) Wie Bild 4.1 zeigt, ist eine genaue Kenntnis der Strahlungszahl der Aluminiumlamelle für die Berechnung des Wärmetransportes durch den Luftspalt von großer Bedeutung.

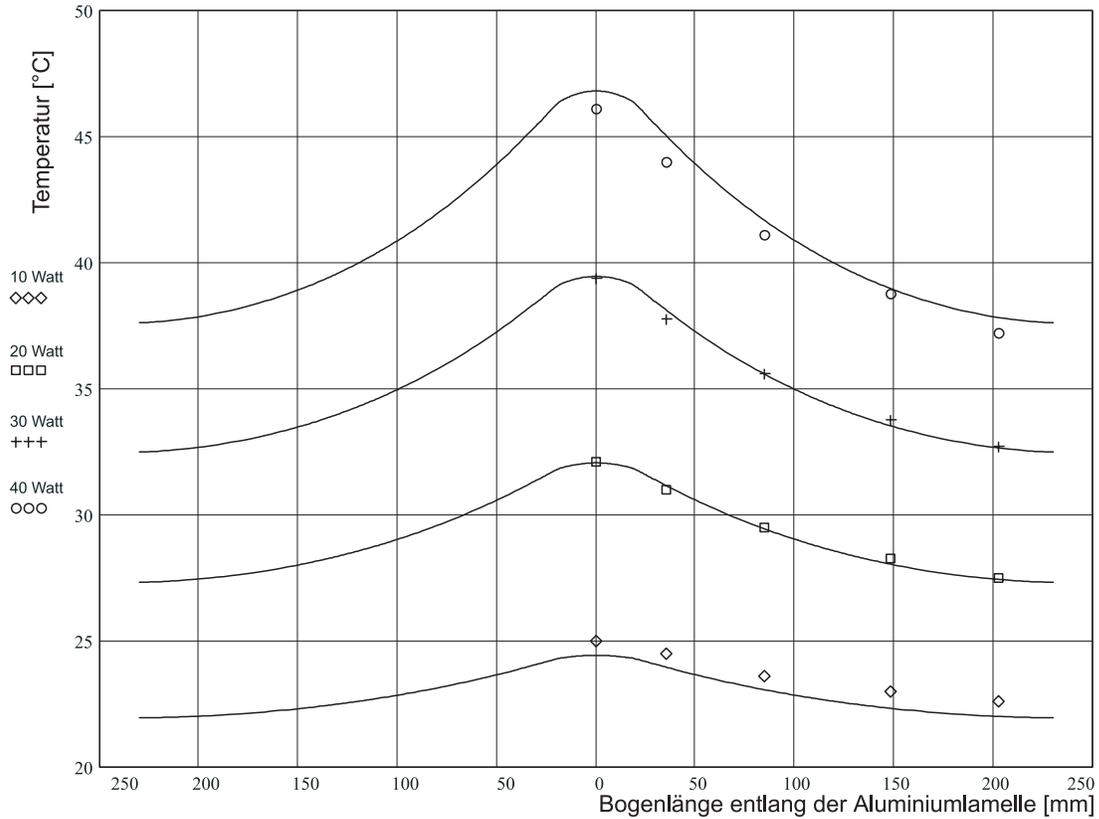
Bild 4.2 zeigt den starken Einfluß der Strahlungseigenschaften des Rohres auf den Temperaturverlauf der Aluminiumlamelle. Bei einer Berechnung mit schwach strahlender Rohroberfläche gibt die Alulamelle im Bereich des Rohres wenig Wärme ab. Auf den ersten Blick scheinen die Meßwerte gut getroffen. Die Krümmung der Rechenergebnisse paßt jedoch schlecht zu den Meßwerten. Bei einer Berechnung mit Kunststoffrohr steigt die Lamellentemperatur an, weil sich das Strömungsfeld völlig verändert. Der Verlauf der Temperatur paßt nun sehr gut zu den Meßwerten. Die etwas zu hohe Lamellentemperatur sinkt bei höheren Strahlungszahlen für das Aluminium oder einer Erhöhung der Wärmeleitfähigkeit des Bodenbelages schnell ab.



**Bild 4.1: Wärmeübertragungsverhalten verschiedener Konstruktionsvarianten.** Das Bild zeigt gemessene und berechnete Temperaturverläufe der Aluminiumlamelle bei verschiedenen Konstruktionsvarianten und Strahlungszahlen der Lamelle. Die numerische Berechnung erlaubt zahlreiche Variantenrechnungen. Es zeigt sich, daß die Gipskartonplatte die Wärmeübertragung gegenüber einer blanken Alulamelle verbessert. Noch besser ist jedoch eine geschwärzte Alulamelle. Die Karos sind Meßwerte ohne eingebauter Gipskartonplatte, die Quadrate Messwerte mit Gipsplatte.



**Bild 4.2: Änderung der Temperatur der Alulamelle bei Veränderung der Strahlungseigenschaften des Rohres.** *Der Temperaturverlauf in der Aluminiumlamelle wird wesentlich von den Strahlungseigenschaften des Heizrohres beeinflusst.*



**Bild 4.3: Temperaturverlauf der Alulamelle bei verschiedenen Heizleistungen.** Die Krümmung der gerechneten und der gemessenen Temperaturprofile stimmt gut überein. Die Wärmeabgabe von der Alulamelle an den Luftspalt wird von der numerischen Berechnung ausreichend genau wiedergegeben.

Bild 4.3 zeigt den Verlauf der Temperaturen über der Aluminiumlamelle. Es sind die Meßwerte für eine elektrische Heizleistung von 10, 20, 30 und 40 Watt eingetragen. Diese Werte wurden um den systematischen Meßfehler zufolge Wärmeableitung nach unten korrigiert. Die durchgezogenen Kurven entsprechen einer Fußbodenheizleistung von 9.7, 18.7, 27.7, 36.9 [W/m<sup>2</sup>]. Die Messungen passen erstaunlich gut zu den numerischen Ergebnissen. Daß der Temperaturverlauf etwas zu hoch ist, liegt in den unsicheren Annahmen der Stoffwerte des Naturproduktes Holz gemeinsam mit der Unsicherheit im Wärmeübergangskoeffizienten an der Bodenoberfläche. Demgegenüber stimmt Steigung und Krümmung zwischen Meßwerten und Rechnung sehr gut überein. Das bedeutet, daß die Abgabe der Wärme von der Alulamelle an die Luft gut getroffen wird.

Die Auswertung der Meßwerte für die Fußbodentemperatur zeigt, daß die Übereinstimmung zwischen Berechnung und Messung bei der Fußbodentemperatur nicht so gut ist wie bei der Lamellentemperatur. Es hat sich herausgestellt, daß es trotz größter Sorgfalt nicht gelungen ist, Lufteinschlüsse zwischen Kühlwanne und Bodenoberfläche zu vermeiden. An einem verbesserten Verfahren wird zur Zeit gearbeitet. Die Wärmeleitfähigkeit des Holzes ist in der Realität besser als für die Berechnung angenommen wurde. Der Wärmedurchgangswiderstand insgesamt ist jedoch in der Rechnung und im Experiment ungefähr gleich.

# Appendix A

## Abschätzung der Meßunsicherheiten der eingesetzten Meßverfahren

Die Inbetriebnahme der Meßanordnung und die Erfassung der Meßwerte waren Gegenstand der Diplomarbeit von HOLZE. Dort findet sich auch eine tabellarische Zusammenstellung der gemessenen Werte sowie eine detaillierte Beschreibung des Meßaufbaues.

RABINOVICH [30] unterscheidet zwischen Meßunsicherheits-Abschätzung *a priori* zur Planung einer Messung, zur Wahl des passenden Meßverfahrens, der geeigneten Geräte etc. und einer Abschätzung *a posteriori*, bei der die Unsicherheiten eines bestimmten Meßergebnisses abgeschätzt werden sollen. Zur Planung von Messungen existiert ausführliche Literatur, zum Beispiel die Bücher von HOLMAN [27] oder LICHTEN [29]. Es erscheint daher nicht von Interesse, den Planungsablauf des Messaufbaues zu beschreiben. Die folgenden Abschätzungen stellen *a posteriori*-Abschätzungen dar.

### A.1 Messung der Heizleistung

Der Schwingfußbodenprüfstand wird elektrisch beheizt. Elektrische Größen sind bei ähnlichem experimentellen Aufwand mit wesentlich höherer Genauigkeit bestimmbar als thermische Größen.

Die drei Heizrohre mit dem Widerstand  $R_H$  sind in Serie geschaltet. Der Spannungsabfall  $U_H$  am Heizrohr des mittleren Segmentes wird gemessen. Der Strom wird aus dem Spannungsabfall an einem Shunt  $R_{SH}$  mit 0.2 [%] Grundgenauigkeit ermittelt. Beide Messungen werden als Einzelmessungen mit Multimetern

durchgeführt. Besonderes Augenmerk wurde beim gesamten Meßaufbau auf sternförmige Schaltung der Nullpotential-Leiter gelegt, um induzierte Signale in Maschenschleifen zu vermeiden.

Für die elektrische Heizleistung gilt die Modellgleichung

$$P_H = U_H \frac{U_{SH}}{R_{SH}}. \quad (\text{A.1})$$

Komponenten des Vektors der Eingangsgrößen  $\mathbf{X}$  sind  $U_H, U_{SH}$  und  $R_{SH}$ . Als Eingangsdaten  $\mathbf{x}$  für eine einmalig gemessene Größe kann gemäß DIN 1319 Teil 4 unter Annahme einer Rechteckverteilung für den geschätzten Erwartungswert der Meßwert angesetzt werden. Als Schätzwert für die Standardabweichung der Grundgesamtheit  $\sigma$  kann die Standardabweichung der Stichprobe ( $G$  ist die Grenzabweichung des Meßgerätes)  $s = \sqrt{(1/12)(2G)^2}$  verwendet werden.

Wenn die Messung der Spannungen und der Wert des Shuntwiderstandes voneinander unabhängig sind, gilt für die empirische Standardabweichung der Heizleistung das GAUSSsche Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$s_{P_H} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial P_H}{\partial U_H}\right|_{\mathbf{x}} s_{U_H}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial P_H}{\partial U_{SH}}\right|_{\mathbf{x}} s_{U_{SH}}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial P_H}{\partial R_{SH}}\right|_{\mathbf{x}} s_{R_{SH}}\right)^2} \quad (\text{A.2})$$

Der Fall einer einzelnen Messung kann nicht *ad hoc* mit statistischen Methoden behandelt werden. Zur Ermittlung der Unsicherheit einer direkten Einzelmessung gibt RABINOVICH ein Verfahren an: Die Meßunsicherheit wird auf elementare Fehler zurückgeführt. Elementare Fehler sind innerhalb der Toleranzgrenzen gleichverteilt. Die Auswirkung der elementaren Fehler auf das Meßergebnis wird mit statistischen Methoden untersucht. Die Summe von vier bis fünf elementaren Fehlern ist schon nahezu gleichverteilt. Damit ist die Verwendung des GAUSSschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes gerechtfertigt. Über die Standardabweichung des Mittelwertes, die in der Norm als Maß der Meßunsicherheit verwendet wird, kann allerdings nichts ausgesagt werden, da es unzulässig ist, statistische Auswertungen für  $N = 1$  durchzuführen. Die Standardabweichung nach Gleichung A.2 wird als Maß für die Meßunsicherheit angesehen.

Das unberichtigte Meßergebnis der indirekten Messung der Heizleistung gemäß Gleichung A.1 muß um die systematische Meßabweichung zufolge eines Wärmeverlustes nach unten berichtigt werden. Der Wärmestrom über die Frontflächen wird vernachlässigt. Der Wärmestrom nach unten wird abgeschätzt gemäß

$$\dot{Q}_{\text{Verlust}} = \frac{A_{\text{Segment}}(T_{m,\text{Lamelle}} - T_U)}{\frac{1}{\alpha} + \frac{H_{\text{Dämmung}}}{\lambda_{\text{Dämmung}}} + \frac{H_{\text{Holz}}}{\lambda_{\text{Holz}}}}. \quad (\text{A.3})$$

Analog zu Gleichung A.2 kann auch für die Korrektur A.3 eine Unsicherheit  $u_{\dot{Q}_{Verlust}}$  berechnet werden. Die Unsicherheit des Meßergebnisses ist dann

$$u_{\dot{Q}} = \sqrt{u_{P_H}^2 + u_{\dot{Q}_{Verlust}}^2}.$$

Für die gemessenen Heizleistungen ergeben sich (beispielhaft für die Messungen mit Gipskartonplatte) folgende Werte:

Nennleistung $\dot{q}_N \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$	10	20	30	40
Leistung $\dot{q} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$	9.8	18.9	27.9	37.0
Unsicherheit $u_{\dot{q}} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$	0.09	0.13	0.17	0.21

Tabelle A.1: **Leistungsmessung**

## A.2 Temperaturmessung

Um die systematische Meßabweichung zufolge der Drei-Leiter-Schaltung sowie Abweichungen des Offset und der Verstärkung der Meßverstärkerschaltung zu verringern, wurden alle Temperaturmeßkanäle kalibriert.

Die Temperatur des Meßfühlers  $\vartheta_{Pt100}$  und die Ausgangsspannung des Pt100-Interface  $U_{OUT}$  sind die Eingangsgrößen zur Berechnung der unbekannt Parameter der Übertragungsfunktion des Pt100:  $d_0, d_1$ .

Bei der Kalibrierung kommt es zu unvermeidlichen Unsicherheiten der Meßgeber-temperatur  $u_{\vartheta}$  und der Ausgangsspannung  $u_{U_{OUT}}$ .

Die Unsicherheiten der Temperatur sind zum Teil im Kalibriergerät selbst begründet. Ein Teil der Unsicherheit wird durch induzierte Spannungen verursacht, die die Widerstandsmessung verfälschen. (Da die Änderung des Spannungsabfalles bei Temperaturänderung  $\partial U / \partial \vartheta |_{I=1 [\text{mA}]} = 0.39 [\text{mV}/^\circ\text{C}]$  ist, müssen derartige Störungen sorgfältig vermieden werden. Bei Betrieb großer Elektromaschinen oder Thyristorsteuerungen in der Nähe des Meßaufbaues streuen die Temperaturmessungen sehr stark: Im regulären Betrieb war die Standardabweichung für

1024 Datenpunkte der Kurzzeitmessung ungefähr 0.05 [K]. Bei Betrieb des Rippenrohrprüfstandes des ITW – Leistung des Gebläse-Antriebes ca. 90 [kW] – stieg die Standardabweichung um das 10-fache auf ca. 0,5 [K] an.)

Zur Unsicherheit bei der Ermittlung der Ausgangsspannung tragen sowohl die Geräteabweichung des Multimeters als auch störende Einflüsse durch die in die Meßkabel induzierten Spannungen bei, die sich allerdings hier nicht mehr so gravierend auswirken.

Als Temperatursensoren werden Platin-Temperatur-Meßwiderstände mit 100 Ohm Nennwiderstand eingesetzt. Die Aufnehmer werden in Drei-Leiter-Schaltung mit konstantem Meßstrom von ein Milliampere betrieben. Ein Meßverstärker verstärkt den Spannungsabfall am Meßwiderstand. Konstantstromquelle und Verstärker sind zu einem Gerät, dem Pt100-Interface, zusammengefaßt.

Meßprinzip und Meßverfahren werden zum Beispiel in den Büchern von BONFIG ET. AL., ECKERT & GOLDSTEIN oder HOLMAN [24, 26, 27] dargestellt.

Im Rahmen der Beschreibung der Temperaturmessung werden drei Bereiche behandelt:

- Kalibrierung des Pt100-Interface,
- Langzeitmessung mit einer Messung pro Minute zur Regelung und zur Kontrolle, ob der stationäre Betriebszustand erreicht ist,
- Kurzzeitmessung mit 100 Hertz Datenerfassungsrate und Auswertung der 1024 Datenpunkte pro Kanal nach DIN 1319 Teil 3.

### A.2.1 Übertragungsfunktion des Pt100-Interface

Nach DIN läßt sich der Zusammenhang zwischen Temperatur und Widerstand des Pt100-Meßwiderstandes durch

$$R_{Pt100} = r_0 + r_1\vartheta - r_2\vartheta^2 = r_0 \left( 1 + 3.9 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \right] \vartheta - 0.58 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{1}{^{\circ}\text{C}^2} \right] \vartheta^2 \right)$$

Nach Inversion und Einsetzen des Ohmschen Gesetzes  $R = U/I$  ergibt sich

$$\vartheta_{Pt100} = \frac{1}{2} \frac{r_1}{r_2} - \sqrt{\left( \frac{1}{2} \frac{r_1}{r_2} \right)^2 + \frac{r_0}{r_2} - \frac{1}{r_2} \frac{U_{Pt100}}{I_{Pt100}}} = a_0 - \sqrt{a_1 - a_2 \frac{U}{I}}$$

als Formel für die Berechnung der Temperatur des Meßfühlers aus den elektrischen Größen Strom und Spannungsabfall.

Die Empfindlichkeit eines Meßfühlers ist die Änderung seines Ausgangs bei Änderung der Meßgröße:

$$\frac{\partial U_{Pt100}}{\partial \vartheta_{Pt100}} = r_1 - r_2 \vartheta_{Pt100} \doteq 0.391 \left[ \frac{\Omega}{^\circ\text{C}} \right] I_{Pt100}$$

Die Empfindlichkeit ist linear abhängig vom gewählten Versorgungsstrom. Die Größe des Versorgungsstromes ist durch die systematische Meßabweichung zufolge Eigenerwärmung begrenzt. Nach einer Meßfehlerabschätzung (siehe Seite 64) wurde ein Versorgungsstrom von 1 [mA] gewählt. Dies entspricht einer Empfindlichkeit von 0.39 [mV/°C]. (Die Empfindlichkeit eines Thermoelementes liegt zum Vergleich dazu in der Größenordnung von 0,05 [mV/°C]). Die am Pt100 gemessene Spannung  $U_{Pt100}$  wird von einer Verstärkerschaltung näherungsweise linear verstärkt:

$$U_{OUT} = b_0 + b_1 U_{Pt100} .$$

Mit

$$c_0 = a_1 + \frac{a_2 b_0}{b_1 I_{Pt100}} \quad \text{und} \quad c_1 = \frac{a_2}{b_1 I_{Pt100}}$$

ergibt sich für die Ausgangsspannung am Pt100-Interface

$$U_{OUT} = \frac{c_0 - (a_0 - \vartheta_{Pt100})^2}{c_1} . \quad (\text{A.4})$$

Offset und Verstärkung wurden so voreingestellt, daß bei

$$\vartheta = 0 [^\circ\text{C}] \quad U_{OUT} = 0 [\text{V}] \quad \text{und bei} \quad \vartheta = 100 [^\circ\text{C}] \quad U_{OUT} = 5 [\text{V}] . \quad (\text{A.5})$$

Einsetzen der Kalibrierwerte (Glg. A.5) in die Übertragungsfunktion A.4 liefert

$$c_0 = 1.34 \cdot 10^7 [^\circ\text{C}^2] \quad c_1 = 1.32 \cdot 10^5 \left[ \frac{^\circ\text{C}^2}{\text{V}} \right] .$$

Diese großen Zahlenwerte sind für die Berechnung der Fehlerfortpflanzung schlecht geeignet, da von einigen Matrizen die Determinante nahezu null wird. Fehler zufolge der endlichen Dezimalbruchdarstellung der Zahlen im Rechner sind in diesem Fall bei der Matrizeninversion nahezu unvermeidbar. Mit

$$d_0 = \frac{c_0}{c_1} = 85.8 [\text{V}] \quad \text{und} \quad d_1 = \sqrt{c_1} = 363.44 \left[ \frac{^\circ\text{C}}{\sqrt{\text{V}}} \right]$$

ergibt sich

$$- \left( \frac{\vartheta_{Pt100}}{d_1} + \frac{a_0}{d_1} \right)^2 - U_{OUT} + d_0 = 0 \quad (\text{A.6})$$

als Modellgleichung für die Übertragungsfunktion des Pt100-Interface.

Die Unsicherheit bei der Ermittlung der Verstärkungskonstanten  $d_0$  und  $d_1$  soll im folgenden ermittelt werden. Die Berechnung der Fehlerfortpflanzung erfolgt gemäß DIN 1319 Teil 4. Die Nomenklatur wird an diese Norm angelehnt.

Es wurden für jeden Temperaturkanal  $\nu_{\mathbf{F}} = 5$  Kalibrierdatensätze ermittelt. Eingangsgröße in das Modell ist die Spaltenmatrix der Kalibrierdaten

$$\mathbf{X} = (\vartheta_0, U_0, \vartheta_1, U_1, \dots, \vartheta_{\nu_{\mathbf{F}}-1}, U_{\nu_{\mathbf{F}}-1})^T, \quad \nu_{\mathbf{X}} = 2\nu_{\mathbf{F}} = 10.$$

Die Daten  $\mathbf{x}$  der Eingangsgrößen wurden in der Diplomarbeit von HOLZE ermittelt. Die Ausgangsgröße ist die Matrix der gesuchten Konstanten der Übertragungsfunktion des Pt100-Interface.

$$\mathbf{Y} = (d_0, d_1)^T, \quad \nu_{\mathbf{Y}} = 2.$$

Das Modell für die Auswertung ist die Spaltenmatrix der Gleichungen zur Berechnung für  $d_0$  und  $d_1$  (Gleichung A.6, angeschrieben für jeden Kalibrierdatensatz), in Matritzenschreibweise

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0.$$

Die Daten für die Ausgangsgrößen  $\mathbf{y}$  wurden mittels Kurvenanpassung unter Verwendung der mathematischen Software Mathcad [35] ermittelt.

Die Matrix der empirischen Kovarianzen der Eingangsdaten wurde mit

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_{i,i}} = \frac{1}{12} \cdot (0.1 [\text{°C}])^2 \quad i = 0, 2..10 \quad \mathbf{S}_{\mathbf{x}_{i,i}} = \frac{1}{12} \cdot (0.01 [\text{V}])^2 \quad i = 1, 3..11$$

für die Temperaturen beziehungsweise die Ausgangsspannungen angenommen. Die Kovarianzen werden gemäß DIN 1319 gleich null gesetzt. Damit ergibt sich für die Kovarianzmatrix (Zahlenwerte für die Temperatur der Alulamelle)

$$\mathbf{S}_{\mathbf{y}} = [\mathbf{F}_{\mathbf{Y}}^T (\mathbf{F}_{\mathbf{X}} \mathbf{S}_{\mathbf{X}} \mathbf{F}_{\mathbf{X}}^T)^{-1} \mathbf{F}_{\mathbf{Y}}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.017 & -0.036 \\ -0.036 & 0.077 \end{bmatrix}.$$

Die Standardabweichungen von  $d_0$  und  $d_1$  sind die Wurzeln der Diagonalelemente von  $\mathbf{S}_{\mathbf{Y}}$ . Damit ergibt sich für die Konstanten des Pt100-Interface:

$$d_0 = 85.87 \pm 0.13 [\text{V}] \quad d_1 = 363.44 \pm 0.28 \left[ \frac{\text{°C}}{\sqrt{\text{V}}} \right].$$

## A.2.2 Eigenerwärmung durch Ohmsche Verluste

Die wichtigste systematische Meßabweichung bei der Temperaturmessung mit Meßwiderständen ist die Eigenerwärmung durch Ohmsche Verluste. Aus einem Kompromiß zwischen Eigenerwärmung und Empfindlichkeit ergibt sich für eine spezielle Meßaufgabe der Meßstrom durch den Meßwiderstand.

Die Meßabweichung zufolge Eigenerwärmung des Pt100 bei der Messung einer Blechtemperatur kann wie folgt abgeschätzt werden:

Der Meßwiderstand sei ein Keramikplättchen mit einer Breite von 2 [mm] und einer beheizten Länge von 2.5 [mm]. Dies ergibt den Radius eines flächengleichen Kreises von  $r_{Pt100} = 1.3$  [mm]. Der Keramik-Werkstoff nach DIN VDE 0335 Teil 3, Werkstoff-Typ 799, hat eine Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{Pt100} = 19 \dots 20$  [W/(m K)]. Die Dicke des Plättchen ist  $H_{Pt100} = 0,35 \dots 0,4$  [mm]. Die Widerstandsdrähte des Meßfühlers liegen auf der dem Blech abgewandten Seite. Die Temperatur im Zentrum einer kreisförmigen Rippe aus Aluminiumblech mit  $\lambda_{Alu} = 208$  [W/(m K)] soll gemessen werden. Die Blechrippe sei auf der Seite, die mit dem Temperaturaufnehmer bestückt ist, adiabat, auf der anderen Seite durch natürliche Konvektion gekühlt. Der Meßwiderstand hat eine Heizleistung  $\dot{Q} = UI = R(\vartheta) I^2$ .

Diese Anordnung wird durch eine, in zwei Gebiete geteilte, Rippe modelliert: Unter dem Meßwiderstand liegt ein Bereich konstanter Wärmequellendichte  $W_V = \dot{Q}/(H_{Pt100}\pi r_{Pt100}^2)$  mit dem Radius  $r_{Pt100}$ . Daran schließt sich eine kreisförmige Rippe an. An der Rippenoberfläche sei der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  konstant. (Wie die Nußeltkorrelation für die turbulente natürliche Konvektion an einer waagrechten beheizten Platte [1]

$$Nu_{turb} = 0.15 (Ra f_2(Pr))^{1/5}$$

mit

$$f_2(Pr) = \left[ 1 + \left( \frac{0.322}{Pr} \right)^{1/4} \right]^{-4}, \quad Ra f_2(Pr) > 7 \cdot 10^4$$

zeigt, ist dies in guter Näherung erfüllt.) Die Rippe habe den Aussenradius  $r_{Rippe}$ . Die Rippenstirnseite kann wegen der geringen Rippendicke als adiabat angesehen werden.

Die allgemeine Lösung der eindimensionalen Wärmeleitgleichung in Polarkoordinaten durch Besselfunktionen ist allgemein bekannt. (siehe zum Beispiel AN ATLAS OF FUNCTIONS [6], Seite 489 ff.)

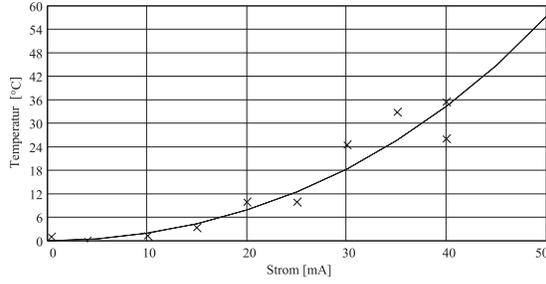


Bild A.1: **Meßabweichung zufolge Eigenerwärmung.** Die durchgezogene Kurve ist die theoretische Abschätzung der Meßunsicherheit zufolge Eigenerwärmung, die Kreuze markieren die gemessenen Abweichungen.

Im vorliegenden Fall ergibt sich mit

$$m = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda H}} \quad \text{und} \quad u = m r \quad \text{sowie} \quad F = \frac{I_1(u)}{K_1(u)} \Bigg|_{r=r_{Rippe}}$$

für die Temperaturdifferenzen zur Umgebungstemperatur im Bereich der Rippe

$$\vartheta_{Rippe} = C_{Rippe,1} I_0(u) + C_{Rippe,2} K_0(u) \quad r_{Pt100} < r < r_{Rippe}$$

mit

$$C_{Rippe,1} = - \frac{\frac{r}{2m} \frac{W_V}{\lambda_{Alu}}}{I_1(u) - F K_1(u)} \Bigg|_{r=r_{Pt100}} \quad C_{Rippe,2} = F C_{Rippe,1}$$

und im Bereich des Meßwiderstandes

$$\vartheta_{beheizteRippe} = C_{beheizteRippe} - \frac{r^2}{4} \frac{W_V}{\lambda_{Alu}}$$

mit

$$C_{beheizteRippe} = \frac{r^2}{4} \frac{W_V}{\lambda_{Alu}} + \vartheta_{Rippe} \Bigg|_{r=r_{Pt100}}$$

Die Temperatur der Platindrähte muß nun um den Betrag größer sein als die mittlere Temperatur des Bereiches unter dem Meßwiderstand, der erforderlich ist, um die Wärme über das Keramikplättchen zur Rippe zu transportieren. Aus der bekannten Beziehung für den Wärmedurchgang folgt

$$\vartheta_{Pt100} = \frac{\dot{Q}}{\frac{\lambda_{Pt100}}{H_{Pt100}} A_{Pt100}} + \bar{\vartheta}_{beheizteRippe}(\dot{Q}(\vartheta_{Pt100})).$$

mit  $\bar{\vartheta}$  als Mittelwert der Temperatur unter dem Meßwiderstand. Daraus kann die Temperatur der Widerstandsdrähte iterativ bestimmt werden. Wegen der geringen Änderung des Widerstandes (und damit der Heizleistung) mit der Temperatur konvergiert eine Iteration sehr rasch.

Die Meßunsicherheits-Abschätzung wurde in einem einfachen Experiment kontrolliert. Der Meßstrom wurde mit einer Konstantstrom-Quelle aufgeprägt, der

Spannungsabfall mit einem Multimeter gemessen. Die Alullamelle wurde mit einer großen Schachtel abgedeckt, um grobe Fehler durch Sonnenbestrahlung zu vermeiden. Trotz dieser einfachen Anordnung mit relativ großer Unsicherheit im Wert des Wärmeübergangskoeffizienten stimmen die Meßwerte sehr gut mit dem berechneten Verlauf überein.

Der systematische Meßfehler zufolge der Rückleitung über den Schirm wird durch kalibrieren jedes Kanales korrigiert. (Ohne Kalibrierung müßte, bei einem spezifischen Widerstand des Kupfers von  $0.0179 [\Omega \text{ mm}^2/\text{m}]$  und einer Querschnittsfläche des Schirms von  $0.75 [\text{mm}^2]$  sowie einer Leitungslänge von  $3 [\text{m}]$ , mit einer Meßabweichung von  $0.15 [\text{K}]$  gerechnet werden.) Die Meßabweichung zufolge Widerstandsänderung bei einer Änderung der Temperatur des Schirms ist mit  $\alpha_{Kupfer} = 0.0039 [1/^\circ\text{C}]$  von der Größenordnung  $0.01 [\text{K}]$  und kann vernachlässigt werden.

Zufolge der relativ niedrigen Auflösung des ADC von 12 Bit und einer nicht unbedeutlichen Einstreuung von Störsignalen wird ein Datensatz von Temperaturen zu einer bestimmten Heizleistung nicht in einer Einzelmessung bestimmt.

Nach der Ermittlung von 1024 Datenpunkten mit einer Meßfrequenz von 100 Hertz erfolgt zunächst die Kontrolle, ob die Meßdaten normalverteilt sind. Dies ist bei den meisten Messungen der Fall. Messungen mit starker Abweichung von der Normalverteilung wurden ausgeschieden. Anschließend werden die Kenndaten gemäß DIN 1319 ermittelt:

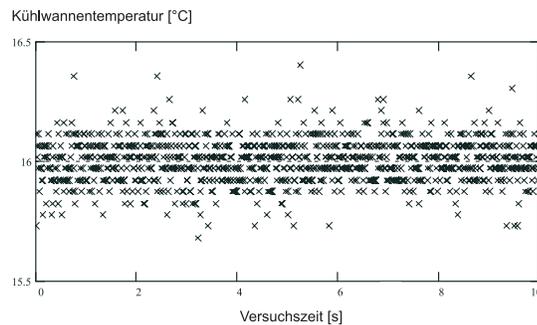
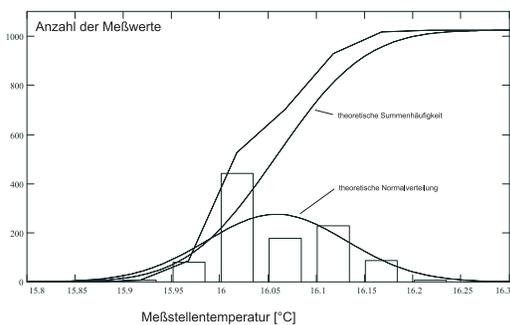
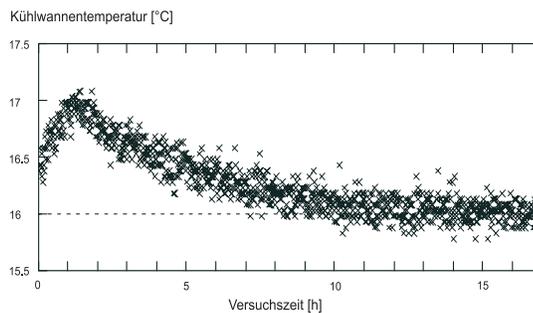
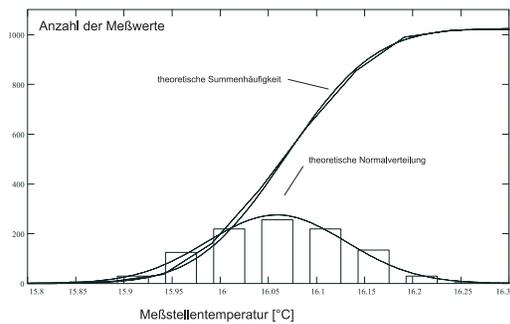
Der Mittelwert  $\bar{x} = 1/N \sum_{n=1}^N x_n$  als Schätzwert für den Erwartungswert ist gleichzeitig der Meßwert.

Die empirische Standardabweichung  $s = \sqrt{1/(N-1) \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2}$  ist ein Maß für die Streuung der Meßdaten: Im Intervall  $[\bar{x} - s, \bar{x} + s]$  liegen ungefähr 68 Prozent der Meßwerte, im Intervall  $[\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s]$  liegen ungefähr 95 Prozent der Meßwerte.

Die Unsicherheit der Messung wird durch die empirische Standardabweichung des Mittelwertes

$$u = s(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

quantifiziert.



**Bild A.2: Verteilung der Temperaturmeßwerte.** *Oben links: Die Verteilung der 1024 Meßpunkte einer Kurzzeitmessung der Temperaturen ist nahezu eine Normalverteilung. Damit ist die Anwendung der Auswerteverfahren nach DIN 1319 gerechtfertigt. Unten links: Messungen mit ungewöhnlicher Verteilung wurden zur weiteren Auswertung nicht herangezogen. Oben rechts: typischer Verlauf der Kühlwassertemperatur während des Einregelvorgangs der Kühlwanne. Unten rechts: typischer Verlauf der Temperatur (hier der Kühlwassertemperatur) bei der Kurzzeitmessung.*

# Appendix B

## Einfluß von Stoff- oder Geometriewerten auf die ermittelten Temperaturen

Zwischen dem Experiment und einer numerischen Berechnung existieren viele Analogien:

Der Frage nach der Existenz eines systematischen Meßfehlers (dieser ist durch statistische Methoden, also durch mehrmalige Durchführung des Experimentes unter Wiederholbedingungen nicht detektierbar) steht die Frage nach der korrekten Modellierung aller relevanten physikalischen Phänomene gegenüber.

Meßergebnisse sind ebenso wie numerische Ergebnisse mit Unsicherheiten behaftet. In der Meßtechnik nehmen Fragen der Abschätzung von Unsicherheiten der Meßergebnisse und der Fehlerfortpflanzung während der Auswertung breiten Raum ein. Auch bei der Anwendung numerischer Verfahren sind derartige Überlegungen sinnvoll.

Besonders bei nichtlinearen Problemen, wo kleine Änderungen von Eingangsgrößen große Auswirkungen haben können, sind solche Fragen relevant. In der Praxis sind beispielsweise die eingegebenen Stoffwerte mit Unsicherheiten behaftet. Auch Eingangsdaten, wie die Heizmitteltemperatur, haben einen gewissen Toleranzbereich. Besonders unsicher sind die realen Verhältnisse der Wärmeabgabe an der Fußbodenoberfläche. Auch die Veränderlichkeit der Stoffwerte mit Druck und Temperatur kann großen Einfluß haben. Diesbezüglich sei z. B. auf das Buch von GERSTEN UND HERWIG, Seite 81 ff. [14] verwiesen.

Um die Fortpflanzung der Unsicherheiten quantifizieren zu können, müssen die

partiellen Ableitungen des Wärmestromes nach den Eingangsgrößen näherungsweise bestimmt werden.

Aufgrund der Vielzahl der Parameter, die zu variieren wären, ist dies mit den zur Verfügung stehenden Ressourcen nur in sehr beschränktem Rahmen möglich. Aus diesem Grund ist eine Vorauswahl der variierten Parameter anhand einfacher Abschätzungen erforderlich.

## B.1 Einfluß verschiedener Parameter auf die Lamellentemperatur

Eine erste Abschätzung der Empfindlichkeit kann aus der Formel für den Wärmedurchgang unter Annahme einer konstanten Lamellentemperatur ohne Berücksichtigung der Strahlung gefunden werden.

$$T_{Alu} = \dot{q} \sum_n^N \left( \frac{s_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_{R-B}} + \frac{1}{\alpha_{B-U}} \right) + T_U$$

Für die betrachtete Konfiguration ergibt sich bei einer Unsicherheit von 0.5 Prozent bei der gemessenen Heizleistung, 1 Prozent bei den Geometriedaten und 10 Prozent bei den Stoffwerten eine Unsicherheit von

$$u_{T_{Alu}} = \sqrt{\sum_n^N \left[ \left( \frac{\partial T_{Alu}}{\partial x_n} u_{x_n} \right)^2 \right]} = 0.8 \text{ [K]}.$$

Besonderen Einfluß hat dabei die Wärmeleitfähigkeit des Holzes und die Höhe der Holzbretter

$$\frac{\partial T_{Alu}}{\partial \lambda_{BB}} = -19 \left[ \frac{\text{K}}{\frac{\text{W}}{\text{mK}}} \right] \quad \frac{\partial T_{Alu}}{\partial H_{BB}} = 0.15 \left[ \frac{\text{K}}{\text{mm}} \right].$$

Schon aus dieser einfachen Abschätzung erkennt man, daß bei der Nachrechnung eines industriell gefertigten Holzfußbodens die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung in einem etwas breiteren Toleranzband liegen wird.

## B.2 Einfluß verschiedener Parameter auf die Bodentemperatur

Der Zusammenhang zwischen Wärmestrom und Temperaturdifferenz  $\dot{q}_{KW} = k_{KW}(T_{Boden} - T_{KW})$  dient als Grundlage für die Abschätzung der Einflüsse von Störgrößen auf die Meß- und Rechenergebnisse bei der Ermittlung der Fußboden-Oberflächentemperatur. Mögliche Fehler sind (die groben Fehler wie „falsche Temperaturmessung“ sind nur der Vollständigkeit halber angeführt):

- Wärmestrom
  - Eindringen von Wärme über die Stirnfläche des Bodenbelages
  - örtlich unterschiedlicher Wärmestrom zufolge unterschiedlicher Wärmedurchgangswiderstände
  - Einstrahlung von Wärme durch die Kühlwanne und deren Plexiglasboden auf das Bronzepulver
  - falsche Messung der Heizleistung
  - falsche Wärmestrom-Korrektur

Wärmedurchgangskoeffizient

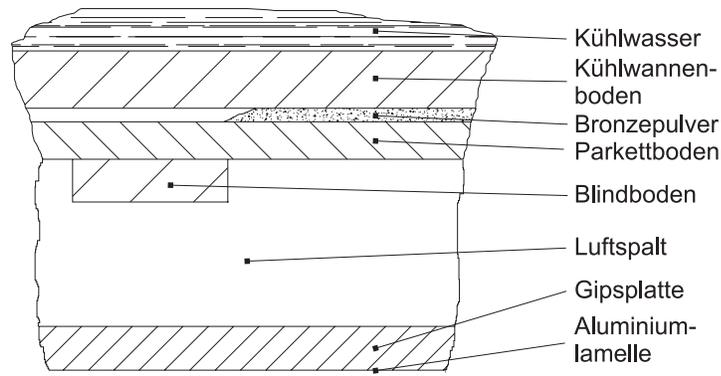
- Dicke oder Wärmeleitfähigkeit des Plexiglas-Bodens außerhalb der normten Werte
  - Lufteinschlüsse zwischen Bronzepulver und Plexiglas
  - zu kleine Wärmeübergangszahl in der Kühlwanne
- Kühlwannentemperatur oder Bodentemperatur falsch gemessen.

Im folgenden soll die Größenordnung der einzelnen Unsicherheiten abgeschätzt werden. (Alle Zahlenwerte wurden für 20 Watt elektrische Heizleistung ausgewertet)

Eine einfache Abschätzung (Eindimensionale Wärmeleitung mit konstantem Wärmeübergangskoeffizienten an der Oberseite und konstanter Stirnflächentemperatur) zeigt, daß die über die Stirnfläche eindringende Wärme sehr klein ist und nicht sehr weit in den Boden eindringt.

Die örtliche Veränderung der Wärmestromdichte zufolge des nicht Stoß an Stoß verlegten Blindbodens sowie zufolge von Lufteinschlüssen in der Bronzepulverschicht läßt sich mit folgendem einfachen Modell abschätzen: (siehe Bild B.1)

**Bild B.1: Abschätzung der Welligkeit der Bodenoberflächentemperatur.** *Zufolge des nicht Stoß an Stoß verlegten Blindbodens stellen sich verschiedene Bodentemperaturen ein.*



Dabei werden zwei Extremfälle verglichen: Über dem Zwischenraum zwischen zwei Blindbodenbrettern liegt die Kühlwanne satt auf der Bronze auf, über dem Blindbodenbrett ergibt sich eine Luftblase zwischen Kühlwannenboden und Parkettoberfläche. Die Wärmeübertragung im Luftspalt kann mittels der Korrelation nach HOLLANDS ET. AL. abgeschätzt werden.

Es ergibt sich eine Temperaturdifferenz der beiden Oberflächentemperaturen von 0.4 [K]

Eine Einstrahlung von Wärme kann vernachlässigt werden, da dem Strömungs- und Temperaturfeld während der Nacht Zeit gegeben wurde, auf die Einstellung einer neuen Heizleistung zu reagieren. Am frühen Morgen wurden dann die Meßwerte der Kurzzeitmessung (siehe Anhang A.2) aufgenommen.

Großflächige Lufteinschlüsse wirken sich auf die Wärmedurchgangszahl relativ stark aus. Bei einem Luftspalt von 1 [mm] sinkt der Wärmedurchgangskoeffizient von 12 [(W/m<sup>2</sup> K)] auf 8 [(W/m<sup>2</sup> K)] ab. Durch die Beheizung verzieht sich der Parkettboden. Eine gewisse Anzahl von Lufteinschlüssen ist somit kaum vermeidbar.

# Literaturverzeichnis

## [BU] Bücher

### **Nachschlagewerke und Tabellen**

- [1] *Verein Deutscher Ingenieure* (Herausgeber): VDI-Wärmeatlas. 7. Aufl. Düsseldorf: VDI Verlag 1994.
- [2] *Beitz, W und Küttner, K.-H.* (Herausgeber): Dubbel — Taschenbuch für den Maschinenbau. 15. Aufl. Berlin: Springer 1983.
- [3] *Rohsenow, Warren M., Hartnett, James P. und Ganic, Ejup N.* (Herausgeber): Handbook of Heat Transfer Fundamentals. 2. Aufl. New York: Mc GrawHill Book Company 1985.
- [4] *Czichos, Horst* (Herausgeber): Hütte. Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften. 29. Aufl. Berlin: Springer 1990.
- [5] *Recknagel, Hermann, Sprenger, Eberhard und Hörmann, Winfried.* Taschenbuch für Heizung und Klimatechnik. 65. Aufl. München: Oldenburg 1990.
- [6] *Spanier, Jerome und Oldham, Keith B.*: An Atlas of Functions. 1. Aufl. Washington: Hemisphere Publishing Corporation 1987.
- [7] *Hoffmann, Klaus A., Chiang, Steve T., Siddiqui, Shamoun und Papadakis, Michael.* Fundamental Equations of Fluid Mechanics. 1. Aufl. Wichita: Engineering Education System 1996.

### **Lehrbücher und Grundlagenwerke**

- [8] *Baehr, Hans Dieter und Stephan, Karl.* Wärme- und Stoffübertragung. 1. Aufl. Berlin: Springer-Verlag 1994.
- [9] *Linzer, W. und Engelmann, A.*: Angewandte Thermodynamik. 2. Aufl. Wien: Eigenverlag 1995.
- [10] *Merker, Günther P.*: Konvektive Wärmeübertragung. 1. Aufl. Berlin: Springer-Verlag 1978.
- [11] *Prandtl, L., Oswatitsch, K. und Wieghart, K.*: Führer durch die Strömungslehre. Unter Mitarbeit von W. Dettmering, D. Küchemann, H. Ludwig, J. Rotta, W. Schneider, J. Sündermann und F. Wippermann. 9. Aufl. Braunschweig: Vieweg 1990.

### **Spezialliteratur**

- [12] *Carlslaw, H.S. und Jäger, J.C.*: Conduction of Heat in Solids. 2. Aufl. Oxford: Clarendon Press 1959.
- [13] *Gatski, Thomas B., Hussaini, Youssuf M. und Lumley, John L.* (Herausgeber): Simulation and Modelling of Turbulent Flows. 1. Aufl. New York: Oxford University Press 1996.
- [14] *Gersten, Klaus und Herwig, Heinz.* Strömungsmechanik. 1. Aufl. Braunschweig: Vieweg 1992.

- [15] *Koschmieder, E.L.*: Benard Cells and Taylor Vortices. 1.Aufl. Cambridge: Cambridge University Press 1993.
- [16] *Leven, Ronald W., Koch, Bernd-Peter und Pompe, Bernd*: Chaos in dissipativen Systemen. 1.Aufl. Braunschweig: Vieweg 1989.
- [17] *Rotta, Julius C.*: Turbulente Strömungen. 1.Aufl. Stuttgart: Teubner 1972.
- [18] *Siegel, Robert und Howell, John R.*: Thermal Radiation Heat Transfer. 3.Aufl. Washington: Hemisphere 1992.
- [19] *Spurk, Joseph H.*: Dimensionsanalyse in der Strömungslehre. 1.Aufl. Berlin: Springer-Verlag 1992.
- [20] *Wilcox, David C.*: Turbulence Modelling for CFD. 1.Aufl. Palm Drive: DCW Industries 1994.
- [21] *Zierep, Jürgen*: Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre. 3.Aufl. Karlsruhe: G.Braun 1991.
- Numerische Methoden**
- [22] *Bathe, Klaus-Jürgen*: Finite-Elemente-Methoden. 1.Aufl. Berlin: Springer-Verlag 1986.
- [23] *Chung, T. J.*: Finite Elemente in der Strömungsmechanik. 1.Aufl. München: Carl Hanser Verlag 1982.
- Experimentelle Methoden**
- [24] *Bonfig, Karl Walter* (und 8 Mitautoren): Temperatursensoren. Bd. 6: Sensorik. 1.Aufl. Renningen: expert verlag 1995.
- [25] *Cramer, Harald*: Mathematical Methods of Statistics. 18.Aufl. Princeton: Princeton University Press 1991.
- [26] *Eckert, Ernst R. G. und Goldstein, Richard J.* (Herausgeber): Measurements in Heat Transfer. 2.Aufl. Washington: Hemisphere Publishing Corporation 1976.
- [27] *Holman, Jack Philip*: Experimental Methods for Engineers. 5.Aufl. New York: McGraw-Hill 1989.
- [28] *Kreyszig, Erwin*: Statistische Methoden und ihre Anwendungen. 7.Aufl. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1985.
- [29] *Lichten, William*: Skriptum Fehlerrechnung. 1.Aufl. Berlin: Springer Verlag 1988.
- [30] *Rabinovich, Seymon*: Measurement Errors: Theory and Practice. 1.Aufl. New York: American Institute of Physics 1993.
- [31] *van der Waerden, B. L.*: Mathematical Statistics. 1.Aufl. Berlin: Springer Verlag 1969.
- [PR] **Programmhandbücher, Normen und Tagungsbände**
- [32] DIN 1319: Grundlagen der Meßtechnik. Teil 1 bis 4. Hrsg. Deutsches Institut für Normung e.V. Berlin: Beuth Verlag.
- [33] DIN 4725: Warmwasser-Fußbodenheizungen. Teil 1 bis 4. Hrsg. Deutsches Institut für Normung e.V. Berlin: Beuth Verlag.
- [34] *FDI Fluid Dynamics International, Inc*: FIDAP 7.0 Manuals. 1.Aufl. 1993.
- [35] *MathSoft Inc.*: Mathcad User's Guide for Mathcad PLUS 6.0. 1.Aufl. 101 Main Street, Cambridge, Massachusetts: 1995.

- [36] *The Math Works, Inc.*: SIMULINK Dynamic System Simulation Software, Users Guide. 1.Aufl. 24 Prime Park Way, Natick, Massachusetts: 1993.

[DA] **Habilitationen, Dissertationen und Diplomarbeiten**

- [37] *Kirchartz, Karl-Reiner*: Dreidimensionale Konvektion in quaderförmigen Behältern. Habilitationsschrift Universität Karlsruhe (TH) 1988.
- [38] *Jäger, Walter*: Oszillatorische und turbulente Konvektion. Dissertation Universität Karlsruhe (TH) 1982.
- [39] *Ahamer, Andreas Stefan*: Anwendung des Turbulenzmodelles von Wilcox bei turbulenter Rayleigh-Benard-Konvektion. Diplomarbeit TU Wien 1996.
- [40] *Büeck, Haimo Georg*: Variantenstudien zur Berechnung des Wärmedurchganges bei Schwingfußböden verschiedener Bauart mittels Finite-Elemente-Methode. Diplomarbeit TU Wien 1996.
- [41] *Feischl, Alexander*: Berechnung des Wärmedurchganges durch einen Schwingfußboden mit Finite-Elemente-Methoden. Diplomarbeit TU Wien 1996.
- [42] *Holze, Carsten*: Wärmeübergangsmessungen an Fußbodenheizungen spezieller Bauart — Schwingfußböden. Diplomarbeit TU Wien 1996.
- [43] *Ljubas, Davor*: Messung der Wärmeübertragung an Fußbodenheizungen spezieller Bauart - Schwingfußboden. Diplomarbeit TU Wien 1996.
- [44] *Lechner, Klaus Dieter*: Finite-Elemente-Methode als Mittel zur Berechnung von turbulenter Rayleigh-Benard-Konvektion. Diplomarbeit TU Wien 1996.
- [45] *Pavlovec, Vaclav*: Finite-Elemente-Methode als Mittel zur Berechnung des Wärmedurchganges durch einen beheizten Fußboden mit Luftspalt (Rayleigh-Benard-Konvektion). Diplomarbeit TU Wien 1996.

[ZS] **Zeitschriften**

- [46] *Berger, P.*: Der neue Applikationsserver für Finite Elemente Software-Pakete (FE-Server). PIPELINE (1996) Nr. 18, S. 7/8.
- [47] *Castaing, B., Gunaratne, G., Heslot, F., Kadanoff, L., Libchaber, A., Thomae, S., Wu, X.-Z., Zaleski, S. und Zanetti, G.*: Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh-Benard-Convection. J. Fluid. Mech. (1989) Bd. 204, S. 1/30.
- [48] *Cheung, F.B., Shiah, S. W. Cho, D.H. und Baker, Jr., L.*: Turbulent Natural Convection in a Horizontal Layer of Small-Prandtl-Number Fluid. Journal of Heat Transfer. (1991) Bd. 113, S. 919/925.
- [49] *Chu, T.Y. und Goldstein, R.J.*: Turbulent convection in a horizontal layer of water. J. Fluid. Mech. (1973) Bd. 60, Teil 1, S. 141/159.
- [50] *Hollands, K.G.T., Raithby, G.D. und Konicek, L.*: Correlation equations for free convection heat transfer in horizontal layers of air and water. Int. J. Heat Mass Transfer. Bd. 18 (1975) S. 879/884.
- [51] *Koschmieder, E.L. und Pallas, S.G.*: Heat transfer through a shallow, horizontal convecting fluid layer. Int. J. Heat Mass Transfer. Bd. 17 (1974) S. 991-1002.
- [52] *Krishnamurti, R.*: Some further studies on the transition to turbulent convection. J. Fluid. Mech. (1973) Bd. 60, S. 285/303.

- [53] *Mastal, H.*: Das neue Gesicht des Fachbereichsrechners Maschinenbau. PIPELINE (1994) Nr. 13, S. 23/24.
- [54] *Niederdrenk, P.*: Thermokonvektive Instabilität einer strahlenden und wärmeleitenden Flüssigkeitsschicht. ZAMM. (1972) Nr. 52, S. 85/92.
- [55] *Tanaka, H. und Miyata, H.*: Turbulent Natural Convection in a horizontal water layer heated from below. Int. J. Heat Mass Transfer. Bd. 23 (1980) S. 1273-1281.
- [56] *Kast und W., Klan, H.*: Temperaturverteilung einer Warmwasserfußbodenheizung. Haustechnik - Bauphysik - Umwelttechnik - Gesundheits-Ingenieur. 102 (1981) Nr. 5, S. 218/226.
- [57] *Kast, W., Klan, H. und Bohle, J.*: Wärmeleistung von Fußbodenheizungen. Teil 1: HLH 37(1986) Nr. 4, S. 175/182. Teil 2: HLH 37(1986) Nr. 10, S. 497/502.

# Lebenslauf

Anton Engelmann, Dipl.-Ing.,  
geboren am 19. Mai 1966 in Linz  
als Sohn des Angestellten Dr. Friedrich Engelmann und seiner Gattin Hilde.  
Zwei Brüder.  
Österreichischer Staatsbürger.  
Verheiratet seit 1990 mit Marianne Engelmann, geb. Leitner.  
Drei Kinder: Magdalena, Berhard und Katharina.

## **Beruflicher Werdegang:**

1972 - 1976	Besuch der Volksschule in Linz
1976 - 1985	Besuch des Akademischen Gymnasiums in Linz
Mai 1985	Matura
1987	Lehrabschlußprüfung im Lehrberuf Schmied
Okt. 1985 - Feb. 1992	Studium des Maschinenbaues an der Technischen Universität Wien, Studienzweig Allgemeiner Maschinenbau
1992	Diplomarbeit: <i>Aufbau und Inbetriebnahme eines Meßdatenerfassungssystems für eine zirkulierende Wirbelschicht-Anlage</i>
seit Mai 1992	Assistent am Institut für Technische Wärmelehre

## **Präsenzdienst :**

Okt. 1994 - Apr. 1995 of SteKo MilKdo Wien