

Die approbierte Originalversion dieser Dissertation ist an der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt (<http://www.ub.tuwien.ac.at>).

The approved original version of this thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology (<http://www.ub.tuwien.ac.at/englweb/>).

DISSERTATION

Instationäre nichtadiabate Strömung in Rohrsystemen

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der technischen Wissenschaften

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Maschinenbau

von

Dipl.-Ing. Karl Ponweiser
Heinrich-Pichler-Gasse 2
A-2700 Wr.Neustadt
geb. am 30. Oktober 1959 in Thernberg/NÖ

Wien, im Mai 1992

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand auf Anregung von Herrn o. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Wladimir Linzer, Vorstand des Institutes für Technische Wärmelehre, dem ich für seine umfassende Betreuung recht herzlich danke.

Besonders herzlich danke ich Frau Univ.Doiz. Ass.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Ewa Weinmüller für die Übernahme des Koreferates, die kritische Durchsicht dieser Arbeit und vor allem für die zahlreichen Hilfestellungen auf dem Gebiet der numerischen Mathematik. In diesem Zusammenhang gilt auch Herrn Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Szmolyan mein herzlicher Dank für seine fruchtbaren Anregungen, die maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Allen Mitarbeitern des Institutes für Technische Wärmelehre, welche mich durch ihre Gesprächs- und Hilfsbereitschaft stets unterstützt haben, und den Freunden, die mir beim Korrekturlesen und beim Umbruch dieses Werkes behilflich waren, gilt mein spezieller Dank.

Schließlich möchte ich auch meiner Gattin Elfriede herzlich danken, die mir, in allen Phasen der Entwicklung dieser Arbeit, stets verständnisvoll beigestanden ist.

Kurzfassung

Im Rahmen dieser Dissertation wird ein numerisches Verfahren zur Berechnung der instationären Strömung in beheizten Rohrsystemen vorgestellt, welches geeignet ist, Anfahrvorgänge an einem einfachen Modell eines Naturumlauf-Dampferzeugers zu simulieren.

Ein einfaches Modell eines Naturumlauf-Dampferzeugers besteht aus zwei senkrechten Rohren, dem Fall- und dem Steigrohr, die am unteren Ende in einen Sammler münden und am oberen Ende mit der Trommel verbunden sind. Die Beschreibung der instationären Zustandsänderungen im Rohrsystem, im Sammler sowie in der Dampferzeugertrommel werden aus den Erhaltungssätzen hergeleitet. Dies führt auf ein System partieller Differentialgleichungen von hyperbolischem Typ zur Beschreibung der Rohrströmung. Dieses System partieller Differentialgleichungen ist mit einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen, welches den Sammler und die Trommel beschreibt, gekoppelt.

Grundsätzlich hat man zur näherungsweisen Lösung von partiellen Differentialgleichungen die Wahl zwischen expliziten und impliziten Verfahren. Die impliziten Methoden führen im allgemeinen auf große algebraische Nullstellenprobleme, deren Lösung sehr rechenaufwendig ist. Deshalb werden in dieser Arbeit zur Lösung der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, welche die instationäre nichtadiabate Zustandsänderung einer Rohrströmung unter Gravitationseinfluß beschreiben, zwei explizite Differenzenverfahren herangezogen. Das Lax-Friedrichs-Verfahren wird der Charakteristikenmethode gegenübergestellt, wobei als Testmodell ein aufgestellter Torus gewählt wird, der mit idealem Gas gefüllt ist. Für die Lösung von Strömungsproblemen in geraden Rohrstücken erweist sich nur die Charakteristikenmethode als geeignet.

Zur eindeutigen Beschreibung der Lösung sind, außer den oben erwähnten Differentialgleichungen, die Zustandsgleichungen des Strömungsmediums erforderlich. Für die numerische Bereitstellung der Stoffwerte für Wasser werden die aktuellen Wasserdampfatafeln verwendet.

Die Funktionstüchtigkeit des Rechenprogrammes wird an zwei Beispielen demonstriert. Zunächst wird in einem einfacheren Modell, bestehend aus zwei senkrechten Rohren, welche am unteren Ende mit einem Sammler verbunden sind, als Strömungsmedium das ideale Gas verwendet. Es werden Versuchsrechnungen sowohl mit zeitlicher Änderung der Randwerte als auch mit Beheizung eines Rohrschenkels bei konstant gehaltenen Randwerten durchgeführt. Als zweites Beispiel wird das instationäre Verhalten des gesamten Naturumlauf-Dampferzeuger-Modells während der Anfahrphase untersucht.

Die Ergebnisse beider Anwendungsbeispiele werden in dieser Arbeit ausführlich diskutiert.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	2
2.1	Problemstellung	2
2.2	Das mathematische Modell	3
3	Lösungsverfahren	9
3.1	Analytischer und numerischer Abhängigkeitsbereich	9
3.2	Lax-Friedrichs-Verfahren	14
3.3	Charakteristikenmethode	16
4	Numerische Bereitstellung der Stoffwerte	19
5	Ideales Gas als Strömungsmedium	22
5.1	Lax-Friedrichs-Verfahren	22
5.2	Charakteristikenmethode	24
5.3	Untersuchungen am Torus	26
6	Modellierung eines einfachen Naturumlauf-Dampferzeugers	32
6.1	Modellierung der Rohre	32
6.2	Modellierung des Sammlers	33
6.3	Kesseltrommel	36
7	Berechnungen des offenen Rohr-Sammler-Modells	46
7.1	Ideales Gas als Strömungsmedium	47
7.2	Vorgabe der Randwerte als Funktion der Zeit	48
7.3	Beheiztes Rohr-Sammler-Modell	52
8	Berechnungen des Dampferzeugermodells	56
8.1	Interpretation der Rechenergebnisse	58
9	Zusammenfassung	69
10	Literaturverzeichnis	71

Abbildungsverzeichnis

1	Schema eines Naturumlaufkessels	2
2	Bilanzvolumen	5
3	Analytisches Abhängigkeitsgebiet	12
4	Numerisches Abhängigkeitsgebiet	14
5	Charakteristiken durch den Punkt Q'	16
6	Lax-Friedrichs-Verfahren am Torus	26
7	Torusabschnitt – diskretisiert	26
8	Geschwindigkeitsverlauf: 25 Abschnitte, Lax-Friedrichs-Verfahren	27
9	Geschwindigkeitsmaxima: 25 Abschnitte, Lax-Friedrichs-Verfahren	28
10	Geschwindigkeitsverlauf: 25 Abschnitte, Charakteristikenmethode	29
11	Geschwindigkeitsmaxima: 25 Abschnitte, Charakteristikenmethode	30
12	Geschwindigkeitsmaxima: 100 Abschnitte, Lax-Friedrichs-Verfahren	31
13	Schema eines Sammlers	34
14	Kesseltrommel	37
15	Modell einer Kesseltrommel	41
16	Offenes Rohr-Sammler-Modell	46
17	Rohr-Sammler-Modell, Änderung der Randwerte, zeitlicher Geschwindigkeitsverlauf	48
18	Rohr-Sammler-Modell, Änderung der Randwerte, Druckverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten	49
19	Rohr-Sammler-Modell, Änderung der Randwerte, Dichteverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten	50
20	Rohr-Sammler-Modell, Änderung der Randwerte, Temperaturver- lauf zu ausgewählten Zeitpunkten	51
21	Rohr-Sammler-Modell, beheizt, Geschwindigkeitsverlauf	52
22	Rohr-Sammler-Modell, beheizt, Geschwindigkeitsverlauf zu aus- gewählten Zeitpunkten	53
23	Rohr-Sammler-Modell, beheizt, Druckverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten	54
24	Rohr-Sammler-Modell, beheizt, Dichteverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten	55

25	Rohr-Sammler-Modell, beheizt, Temperaturverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten	55
26	Dampferzeugermodell	56
27	Dampferzeugermodell, zeitlicher Geschwindigkeitsverlauf	59
28	Dampferzeugermodell, Dichteverlauf in den Punkten 19 und 25 . .	60
29	Dampferzeugermodell, Geschwindigkeitsverlauf	61
30	Dampferzeugermodell, Druckverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten	62
31	Dampferzeugermodell, Temperaturverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten	63
32	Dampferzeugermodell, Dichteverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten	64
33	Dampferzeugermodell, Geschwindigkeitsverläufe von Speisewasser und Dampf	65
34	Dampferzeugermodell, Zeitliche Änderung des Dichteverlaufs . . .	67
35	Dampferzeugermodell, Zeitliche Änderung des Temperaturverlaufs	68

Notation

Bezeichnung	Maßeinheit	Physikalische Größe
A	[J/kg]	Helmholtz-Funktion
A_{sM}	[m ²]	Querschnittsfläche des strömenden Mediums
A_{St}	[m ²]	Querschnittsfläche des Stahlrohres
c	[m/s]	Schallgeschwindigkeit
c_p	[J/kgK]	spezifische Wärmekapazität des Fluides bei konstantem Druck
c_v	[J/kgK]	spezifische Wärmekapazität des Fluides bei konstantem Volumen
c_{pSt}	[J/kgK]	spezifische Wärmekapazität des Stahles
c_{RA}	[-]	Austrittsdruckverlust-Faktor
c_{RE}	[-]	Eintrittsdruckverlust-Faktor
\vec{g}	[m/s ²]	Erdbeschleunigung
h	[J/kg]	spezifische Enthalpie
H	[m]	geodätische Höhe
L	[m]	Rohrlänge
p	[N/m ²]	Druck
Δp_R	[N/m ³]	Druckänderung je Längeneinheit infolge Reibung
Δt	[s]	Zeitschrittweite
Δx	[m]	Ortsschrittweite
\dot{q}	[W/m ²]	Wärmestrom pro Flächeneinheit
$\Delta \dot{q}$	[W/m ³]	Wärmestrom pro Volumeneinheit des Fluides
\dot{Q}	[W]	Wärmestrom
R	[J/kgK]	spezielle Gaskonstante
t	[s]	Zeit
T	[K]	absolute Temperatur
u	[J/kg]	spezifische innere Energie
U_{sM}	[m]	Umfang des Strömungsquerschnittes des Mediums
v	[m ³ /kg]	spezifisches Volumen
\vec{v}	[m/s]	Geschwindigkeitsvektor
w	[m/s]	Geschwindigkeit in Rohrrichtung
x	[m]	Ortskoordinate
x_{WD}	[-]	Dampfgehalt des Wasser-Dampf-Gemisches
α	[rad]	Winkel zwischen der Rohrachse und der Horizontalen
κ	[-]	Isentropenexponent
ρ	[kg/m ³]	Dichte
\mathcal{T}	[N/m ²]	Tensor der Scherspannungen

Index	Bedeutung
A	Austritt
akt	aktuell
D	Dampf
E	Eintritt
F	Fallrohr
G	Gaszustand
H	Hilfsgröße
kr	im kritischen Punkt
L	Flüssigkeitszustand
S	Sammler
S	Sättigungszustand
S	Speisewasser
0	Zustand zum Zeitpunkt $t = 0$
t	Zeitableitung
T	Trommel
U	Überströmrohr
W	Wasser
x	Ortsableitung
ρ	Ableitung nach der Dichte
p	Ableitung nach dem Druck

1 Einleitung

Im Bereich der Energieverwertung werden sehr häufig Naturumlauf-Dampferzeuger eingesetzt, da diese sehr wartungsarm und wenig störungsanfällig sind. Auch bei Satttdampferzeugern zur Heizung oder Bereitstellung von Prozeßdampf werden fast immer Naturumlaufsysteme verwendet, da ihre Speicherfähigkeit erlaubt, durch kurzfristige Druckabsenkung die Dampfleistung zu erhöhen und so dem erforderlichen Energiebedarf sehr gut anzupassen.

In beiden Anwendungsfällen führen rasche An- und Abfahrvorgänge, sowie große, schnelle Laständerungen zu thermischen Beanspruchungen, welche viel höher sind als im stationären Betrieb und sich auf die Betriebssicherheit negativ auswirken können. Zu schnelle Laständerungen können auch Störungen im Umlauf bewirken. Um die maximal zulässigen Laständerungsgradienten feststellen zu können, ist es erforderlich, das dynamische Verhalten zu studieren. Dies sollte sinnvollerweise nicht erst im Betrieb, sondern schon im Planungsstadium erfolgen.

Ein ideales Instrument für die Untersuchung des instationären Verhaltens solcher Systeme ist die numerische Simulation. Mithilfe geeigneter Rechenalgorithmen ist es möglich, das instationäre Betriebsverhalten vorherzusagen, wodurch man schon während der Konstruktion etwaige Schwachstellen im System orten und entsprechende Gegenmaßnahmen setzen kann.

Trotz der hohen Rechenleistung der heutigen Computer ist es schwer möglich, den Dampferzeuger in allen Details numerisch zu erfassen. Es ist daher notwendig, ein Modell zu entwickeln, welches genügend einfach ist, daß es numerisch behandelt werden kann, aber trotzdem das gleiche physikalische Verhalten wie die großtechnisch ausgeführte Anlage aufweist. Dabei muß man einerseits die Geometrie vereinfachen und andererseits einen geeigneten Weg finden, das physikalische Verhalten der Strömung im Verdampfungssystem sowie das Zusammenspiel der einzelnen Dampferzeugerkomponenten in eine berechenbare Form zu bringen.

In der vorliegenden Arbeit wird die komplexe Geometrie des Naturumlauf-dampferzeugers zunächst auf die einfachste Form, bestehend aus zwei senkrechten Rohren, einem Sammler und einer Trommel, reduziert. Bei der Modellierung des nichtadiabaten instationären Strömungsproblems werden möglichst wenige vereinfachende Annahmen getroffen und ein auf die Erhaltungssätze von Masse, Impuls und Energie aufbauender Rechenalgorithmus entwickelt. Auch die Stoffeigenschaften des Wassers wurden, um numerischen Schwierigkeiten vorzubeugen, dem heutigen Wissensstand entsprechend genau berücksichtigt.

Ziel dieser Arbeit ist die Bereitstellung geeigneter Rechenalgorithmen zur Lösung von nichtadiabaten instationären Strömungsproblemen in Rohrsystemen. Mit diesen Algorithmen wird das Verhalten von einfachen Modellen simuliert.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Problemstellung

Bild 1 zeigt einen Naturumlauf-Dampferzeuger auf seine einfachste Form reduziert. Er besteht aus einem unbeheizten Fallrohr, einem Sammler, einem teilweise beheizten Steigrohr und der Trommel, welche neben den Anschlüssen an das Umlaufsystem noch den Anschluß für das Speisewasser, sowie jenen für die Dampfentnahme enthält.

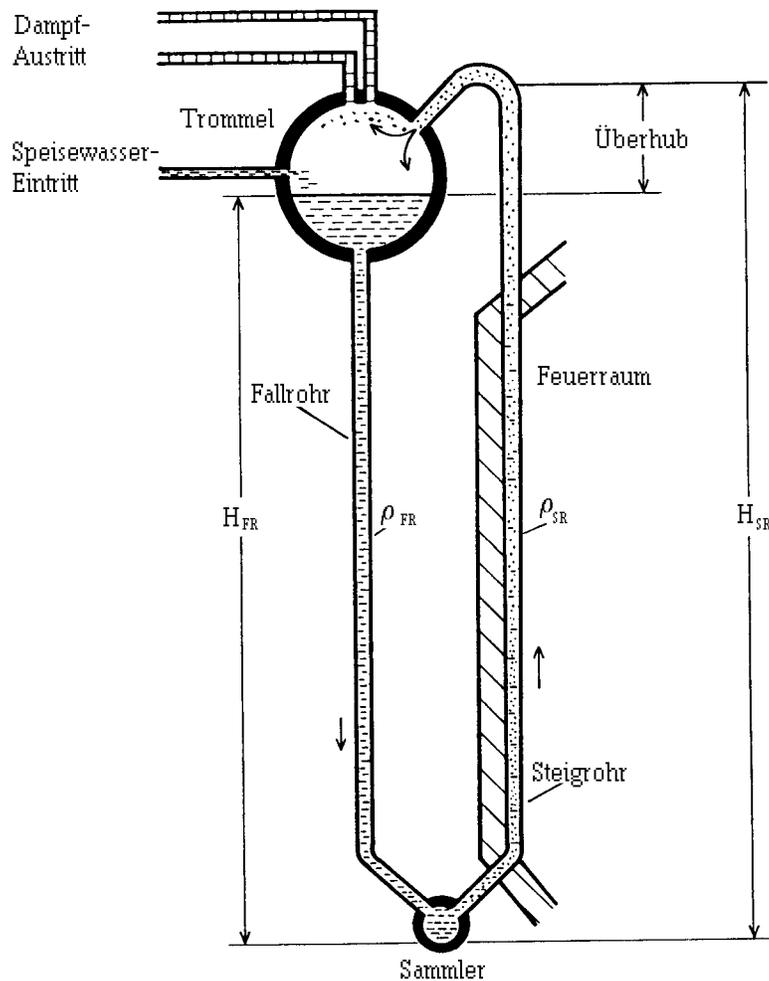


Bild 1: Schema eines Naturumlaufkessels [1]

Im stationären Betriebszustand strömt Wasser, welches sich nahe an der Siedegrenze befindet, im Fallrohr nach unten, gelangt über den Sammler in das Steigrohr, wird dort erwärmt und teilweise verdampft und gelangt schließlich als Wasser-Dampf-Gemisch zurück in die Trommel. Dort wird der Dampf vom

Wasser abgeschieden und im oberen Bereich der Trommel abgezogen. Die abgezogene Dampfmasse muß durch eine entsprechende Masse an Speisewasser ersetzt werden, damit der Wasserspiegel in der Trommel konstant bleibt.

Die treibende Kraft für diesen Umlauf resultiert aus der Tatsache, daß das strömende Medium im beheizten Zweig des Systems einen höheren Energieinhalt und damit eine geringere Dichte als im Fallrohr besitzt. Im stationären Fall herrscht zwischen der treibenden Kraft aus dem Unterschied der hydrostatischen Drücke einerseits und zwischen den Reibungs- sowie Beschleunigungskräften andererseits ein Gleichgewicht. Die Strömung erhöht infolge der Dichteänderung im Steigrohr ihre mittlere Geschwindigkeit, muß also beschleunigt werden.

Für die Berechnung des Umlaufmassenstromes im stationären Betriebszustand unterteilt man das System in Rohrabschnitte, in welchen sich die Zustände näherungsweise linear ändern, und stellt in diesen die Massen-, die Energie- und die Impulsbilanzen auf. An den Verbindungsstellen der Rohrabschnitte formuliert man zusätzlich Übergangsbedingungen für die Masse, die Energie und den Druck, woraus sich insgesamt ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem ergibt, welches ausgehend von einem zu definierenden Startzustand iterativ gelöst werden kann. Mit diesem Verfahren kann das stationäre Verhalten, selbst von sehr komplexen Rohrsystemen untersucht werden [2].

Für die Auslegung von Dampferzeugern, welche vorwiegend in stationären Betriebszuständen arbeiten, zum Beispiel bei Dampferzeugern für Grundlastkraftwerke, ist dieses Berechnungsverfahren ein sehr effizientes Hilfsmittel. Bei Dampferzeugern, die im Spitzenlastbereich arbeiten, wie zum Beispiel Dampferzeuger in Kombikraftwerken oder Abhitzeessel zur Rückgewinnung von Wärme aus exothermen Prozessen in der Verfahrenstechnik, ist es jedoch besonders wichtig, das Systemverhalten bei schnellen Laständerungen, sowie raschen Anfahrvorgängen vorhersagen zu können. Auch für die Störfallanalyse, zum Beispiel beim plötzlichen Ausfall der Beheizung oder bei Druckabfall durch eine Leckage, muß transientes Systemverhalten simuliert werden. Dazu ist es notwendig, ein Rechenverfahren für die näherungsweise Lösung des *zeitabhängigen* Problems bereitzustellen.

2.2 Das mathematische Modell

Bei der Betrachtung des instationären Verhaltens von Strömungen geht man von einer allgemeinen Darstellung der Erhaltungssätze [3] von Masse, Impuls und Energie aus,

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{zeitliche \u00c4nderung der Dichte}} = \underbrace{-\left(\nabla \cdot \rho \vec{v}\right)}_{\text{\u00f6rtliche \u00c4nderung der Massenstromdichte}}, \quad (1a)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v})}_{\text{zeitliche \u00c4nderung der Massenstromdichte}} = \underbrace{-\left(\left(\nabla \cdot \rho \vec{v}\right) \vec{v}\right)}_{\text{\u00f6rtliche \u00c4nderung des Impulsstroms}} \underbrace{-\nabla p}_{\text{\u00f6rtliche \u00c4nderung des Drucks}} - \underbrace{\left(\nabla^T \cdot \mathcal{T}\right)^T}_{\text{Reibungskraft}} + \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{Gravitationskraft}}, \quad (1b)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(u + \frac{1}{2}v^2\right)\right)}_{\text{zeitliche \u00c4nderung der Energie}} = \underbrace{-\left(\nabla \cdot \rho \vec{v}\left(u + \frac{1}{2}v^2\right)\right)}_{\text{\u00f6rtliche \u00c4nderung des Energiestroms}} \underbrace{-\left(\nabla \cdot \dot{q}\right)}_{\text{\u00f6rtlich zugef\u00fchrter W\u00e4rmestrom}} + \underbrace{\rho\left(\vec{v} \cdot \vec{g}\right)}_{\text{Leistung der Gravitationskraft}} - \underbrace{\left(\nabla \cdot p \vec{v}\right)}_{\text{Leistung durch Volumsver\u00e4nderung}} - \underbrace{\left(\nabla \cdot \left(\mathcal{T} \vec{v}\right)\right)}_{\text{Leistung der Reibungskr\u00e4fte}}. \quad (1c)$$

Bei einer Rohrstr\u00f6mung, wie sie in Naturumlauf-Dampferzeugern auftritt, kann man das obige Differentialgleichungssystem auf eine eindimensionale Str\u00f6mung mit konstantem Querschnitt reduzieren. Als Kontrollvolumen wird ein Rohrabschnitt betrachtet, der neben dem str\u00f6menden Medium auch das Rohr enth\u00e4lt, damit man das Speicherverhalten der Stahlmasse ber\u00fccksichtigen kann. [Bild 2](#) zeigt einen solchen Rohrabschnitt samt relevanten Gr\u00f6\u00dfen.

Die folgenden Annahmen erlauben die Erhaltungsgesetze (1a) – (1c) einfacher zu fassen.

Die W\u00e4rmeleitf\u00e4higkeit des Stahles und des str\u00f6menden Mediums sei in der zur Str\u00f6mung normalen Richtung unendlich gro\u00df und in axialer Richtung gleich Null. Die W\u00e4rme\u00fcbergangszahl zwischen Stahlwand und Fluid sei ebenfalls unendlich gro\u00df. Unter diesen Annahmen ist die Temperatur in jedem Querschnitt des gesamten Kontrollvolumens (sowohl im Fluid als auch im Stahl) konstant als Funktion des Ortes. Weiters wird im folgenden angenommen, da\u00df die Str\u00f6mungsgeschwindigkeit in jedem Querschnitt konstant und gleich einer mittleren Str\u00f6mungsgeschwindigkeit ist. Da die Reibungsarbeit der Schubspannun-

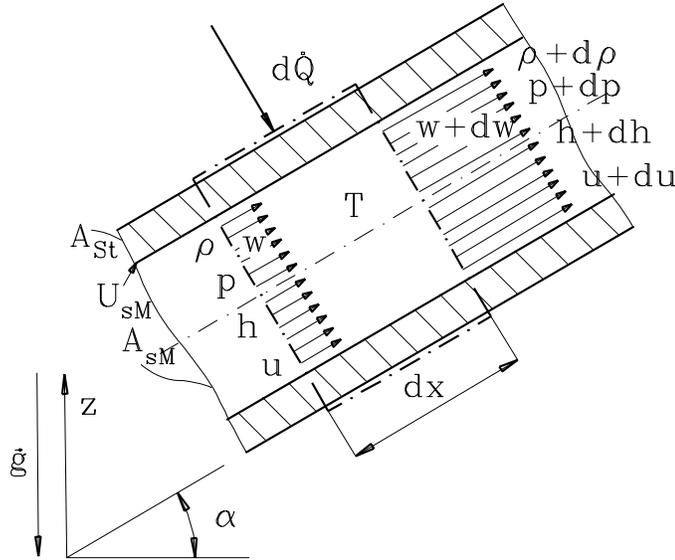


Bild 2: Bilanzvolumen

gen die kinetische Energie verringert, jedoch die innere Energie in gleichem Maße erhöht, kann der Schubspannungsterm in der Energiebilanz entfallen. Die gesamte Reibungsarbeit wird dem Fluid als Wärme zugeführt [4].

Unter diesen Voraussetzungen nehmen die Erhaltungssätze die folgende Form an:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho w), \quad (2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho w^2 + p) - \rho g \sin \alpha - \Delta p_R, \quad (2b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(u + \frac{1}{2} w^2 \right) + \frac{A_{St}}{A_{sM}} (\rho_{St} c_{pSt} T) \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho w \left(h + \frac{1}{2} w^2 \right) \right) - \rho w g \sin \alpha + \dot{q} \frac{U_{sM}}{A_{sM}}, \quad (2c)$$

mit den unbekanntenen Funktionen $\rho(t, x)$, $w(t, x)$, $p(t, x)$, $T(t, x)$, $u(t, x)$ und $h(t, x)$. Wählt man die Funktionen ρ , w und p als die Komponenten des Lösungsvektors von (2), so hat dieses System die folgende Struktur:

$$(A(U))_t + (B(U))_x - \tilde{f}(U) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0, \quad (3)$$

mit

$$U = U(t, x) = \begin{pmatrix} \rho(t, x) \\ w(t, x) \\ p(t, x) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

wobei A , B und \tilde{f} in nichtlinearer Weise von U abhängen. In Hinblick auf das numerische Verfahren, welches zur näherungsweisen Lösung von (2) verwendet wird, ist es notwendig, das obige System auf eine quasilineare Form zu bringen.

Man erhält

$$\tilde{A}(U)U_t + \tilde{B}(U)U_x - \tilde{f}(U) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0, \quad (5)$$

mit

$$\tilde{A}(U) = \frac{\partial A(U)}{\partial U}, \quad \tilde{B}(U) = \frac{\partial B(U)}{\partial U}, \quad (6)$$

wobei die Wahl von ρ , w und p als Komponenten des Lösungsvektors des Systems (5) noch später begründet wird.

Die Matrizen \tilde{A} , \tilde{B} und der Vektor \tilde{f} haben die Form

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & \rho w & h_p \rho - 1 + FT_p \end{pmatrix}, \quad (7a)$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} w & \rho & 0 \\ 0 & \rho w & 1 \\ -FT_\rho w & \rho w^2 - h_p \rho^2 - FT_\rho \rho & h_p \rho w \end{pmatrix}, \quad (7b)$$

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho g \sin \alpha - \Delta p_R \\ -\rho w g \sin \alpha + \Delta \dot{q} \end{pmatrix}, \quad (7c)$$

mit

$$F = \frac{A_{St}}{A_{sM}} \rho_{St} c_p St. \quad (8)$$

Unter der Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit von U bezüglich x und t ist der Übergang vom System (2) zur quasilinearen Form (5) gerechtfertigt. Ist die Matrix $\tilde{A}(U)$ regulär für alle U , so erhält man aus (5) das System

$$U_t + B(U)U_x - f(U) = 0, \quad (9)$$

mit

$$B = \tilde{A}^{-1} \tilde{B}, \quad f = \tilde{A}^{-1} \tilde{f}.$$

Zur vollständigen Beschreibung der Rohrströmung sind neben den Erhaltungssätzen noch drei Gleichungen erforderlich. Diese gewinnt man aus der Kenntnis der thermodynamischen Eigenschaften des Fluids. Es sind hier die thermische Zustandsgleichung,

$$F(p, v, T) = 0, \quad (10)$$

die mit $v = 1/\rho$ den Zusammenhang von Druck, Dichte und Temperatur angibt, sowie die kalorischen Zustandsgleichungen,

$$u = u(p, T), \quad h = h(p, T). \quad (11)$$

In älteren Formulierungen der Zusammenhänge zwischen den Zustandsgrößen von Wasser und Wasserdampf [5] werden alle relevanten thermodynamischen Zustandsgrößen als Funktion von Druck und Temperatur angegeben. Diese Darstellungsform hat zwar für die Praxis den Vorteil, daß man mit Druck und Temperatur zwei leicht meßbare Größen zur Verfügung hat, der Nachteil liegt jedoch darin, daß im Zwei-Phasen-Gebiet Druck und Temperatur gekoppelt sind und dadurch in diesem Bereich eine neue Variable, etwa der Dampfgehalt x_{WD} , eingeführt werden muß, um das spezifische Volumen und die Enthalpie ausrechnen zu können, zum Beispiel

$$h = h(T_S, x_{WD}) \quad \text{oder} \quad h = h(p_S, x_{WD}).$$

Diese Darstellung hat zur Folge, daß bei einem Phasenwechsel die abhängigen Veränderlichen im Differentialgleichungssystem (2) geändert werden müssen. Damit ist die Wahl von T und p als unabhängige Variablen in den Zustandsgleichungen (10) und (11) für die Untersuchung der zeitabhängigen Rohrströmung ungeeignet.

In den neueren Formulierungen der Wasserdampfatafeln werden die erforderlichen thermodynamischen Zustandsgrößen aus der Helmholtz-Funktion abgeleitet.

In den NBS/NRC Wasserdampfatafeln [6] ist die Helmholtz-Funktion als Funktion von Dichte und Temperatur angegeben,

$$A = A(\rho, T). \quad (12)$$

Der Druck, die spezifische innere Energie und die spezifische Enthalpie lassen sich dann aus den folgenden Beziehungen berechnen:

$$p = \rho^2 \frac{\partial A}{\partial \rho}, \quad (13a)$$

$$u = A - T \frac{\partial A}{\partial T}, \quad (13b)$$

$$h = u + \frac{p}{\rho}. \quad (13c)$$

In dieser Formulierung lassen sich der Druck, die spezifische innere Energie, die spezifische Enthalpie und auch deren partielle Ableitungen als Funktionen von Dichte und Temperatur angeben.

Die Gleichungen (12) und (13a) – (13c) gelten nur im einphasigen Bereich. Im Zwei-Phasen-Gebiet ergeben sich die Zustandsgrößen u und h aus der linearen

Interpolation der entsprechenden Werte auf den beiden Grenzkurven, Siedelinie und Taulinie, zum Beispiel

$$h_{(\rho, T_S)} = h_{(\rho_L, T_S)} + x_{WD}(h_{(\rho_G, T_S)} - h_{(\rho_L, T_S)}).$$

Da auch der Dampfgehalt, x_{WD} , als Funktion der Dichte und der Sättigungstemperatur dargestellt werden kann,

$$x_{WD} = \frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_L(T_S)}}{\frac{1}{\rho_G(T_S)} - \frac{1}{\rho_L(T_S)}},$$

ist es möglich, alle thermodynamischen Zustandsgrößen im *gesamten* Zustandsbereich *einheitlich*, als Funktionen der Dichte und Temperatur, auszudrücken.

Aufgrund der Form der thermodynamischen Zustandsfläche von Wasser darf man, will man sich einen Koordinatenwechsel beim Übergang vom einphasigen ins zweiphasige Gebiet ersparen, die abhängigen Veränderlichen des Differentialgleichungssystems nicht frei wählen. Bei deren Auswahl müssen die Gestalt der Erhaltungssätze, sowie die verschiedenen Möglichkeiten der Spezifizierung der Randbedingungen berücksichtigt werden.

Die Geschwindigkeit ist auf jeden Fall als eine abhängige Veränderliche erforderlich. Die Dichte bietet sich an, da sie in allen Erhaltungssätzen explizit vorkommt. Als dritte abhängige Variable stünden also noch Druck und Temperatur zur Auswahl. Da der Druck ein wichtiger Systemparameter ist und eine leicht zu messende physikalische Größe darstellt, wurde ihm gegenüber der Temperatur der Vorzug gegeben.

Als Komponenten der Lösung des nichtadiabaten instationären Strömungsproblems im Rohr wurden daher Dichte, Geschwindigkeit und Druck, siehe (4), gewählt.

Wir fassen zusammen:

Das mathematische Problem besteht aus drei partiellen Differentialgleichungen (2) und drei Zustandsgleichungen (10) und (11). Zu seiner eindeutigen Lösbarkeit im Bereich $x \in [0, L]$ und $t \in [0, T]$ ist es notwendig entsprechende Anfangs- und Randwerte vorzuschreiben.

3 Lösungsverfahren

Zur Lösung von partiellen Differentialgleichungssystemen gibt es unterschiedliche Strategien [7]. Die Wahl der numerischen Methode hängt vom Typ des Systems (2) ab, der durch Spektraleigenschaften der Matrix $B(U)$ in (9) bestimmt wird. Hier wird angenommen, daß die Eigenwerte von $B(U)$ reell und einfach sind und damit das System (9) hyperbolisch ist [9]. Aus der großen Klasse der Differenzenverfahren werden in der vorliegenden Arbeit zwei Verfahren, nämlich das Lax-Friedrichs-Verfahren und das Charakteristikenverfahren, miteinander verglichen. Zur Beurteilung der Rechenverfahren wird zuerst ein Modell verwendet, welches die Aufgabenstellung auf ein Anfangswertproblem mit periodischen Randbedingungen reduziert. Der Dampferzeuger wird dabei als ein geschlossener Torus angesehen, wodurch die Zustandsgrößen am Rohreintritt identisch mit jenen am Rohraustritt sind.

3.1 Analytischer und numerischer Abhängigkeitsbereich

Wir beginnen mit der Diskussion der analytischen Lösung einfacher hyperbolischer Differentialgleichungen und beschreiben danach die erwähnten Verfahren zur numerischen Behandlung der komplexen Rohrströmung (2). Eine besonders einfache Differentialgleichung erhält man aus der Massenbilanz in differentieller Form (2a), wenn die Geschwindigkeit w konstant ist. In diesem Fall lautet (2a)

$$\rho_t + w\rho_x = 0. \quad (14)$$

Diese partielle Differentialgleichung wird als lineare Advektionsgleichung bezeichnet und kann mit einem vorgegebenen Anfangszustand $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, analytisch gelöst werden. Betrachtet man das Problem

$$u_t + \lambda u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (15a)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (15b)$$

so kann gezeigt werden, daß die Lösung $u(x, t)$ der Differentialgleichung (15a) nur von dem Anfangszustand $u_0(x)$ abhängt. Dazu betrachte man die Lösung von

$$x'_c(t) = \lambda, \quad (16a)$$

$$x_c(0) = x_0, \quad (16b)$$

x_0 ist beliebig in \mathbb{R} , aber fest. Die Lösung von (16) ist eine Gerade in der (x, t) -Ebene,

$$x_c(t) = \lambda t + x_0, \quad (17)$$

die im Punkt $(x_0, 0)$ “beginnt”. Betrachtet man nun die Lösung $u(x, t)$ von (15a) entlang der obigen Geraden, so gilt

$$\frac{du(x_c(t), t)}{dt} = \frac{\partial u(x_c(t), t)}{\partial x_c} \underbrace{\frac{\partial x_c(t)}{\partial t}}_{\lambda} + \frac{\partial u(x_c(t), t)}{\partial t} = 0, \quad (18)$$

das heißt

$$u(x_c(t), t) = u(x_0, t) = u_0(x_0) = u_0(x - \lambda t). \quad (19)$$

Die Lösung $u(x, t)$ bleibt entlang der Geraden $x = \lambda t + x_0$ konstant. Diese Linie wird als Charakteristik der Differentialgleichung bezeichnet. Man erkennt weiters, daß sich die Anfangsverteilung $u_0(x)$ mit der Geschwindigkeit $|\lambda|$ für $\lambda > 0$ nach rechts und für $\lambda < 0$ nach links verschiebt. Tritt im Erhaltungssatz (2a) ein Quellterm auf, so lautet das Anfangswertproblem (15)

$$u_t + \lambda u_x = \Psi(u), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (20a)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (20b)$$

Es gibt auch bei dieser Differentialgleichung charakteristische Geraden der Form $x_c(t) = \lambda t + x_0$. Betrachtet man die Lösung entlang einer Charakteristik, $u = u(x_c(t), t)$, so liefert das totale Differential

$$\frac{du(x_c, t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_c} \underbrace{\frac{\partial x_c(t)}{\partial t}}_{\lambda} + \frac{\partial u(x_c, t)}{\partial t} = \Psi(u). \quad (21)$$

Hier ist die Lösung u entlang der Charakteristik nicht mehr konstant, sondern erfüllt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u'(t) = \Psi(u(t)), \quad (22a)$$

$$u(0) = u_0(x_0). \quad (22b)$$

Wenn in der Erhaltungsgleichung (2a) neben einem Quellterm auch noch die Geschwindigkeit eine Funktion des Ortes ist, so gilt

$$u_t + \lambda(x)u_x = \Psi(u), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (23a)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (23b)$$

Auch in diesem Fall kann man die Gleichung für die charakteristischen Linien aufstellen

$$x'_c(t) = \lambda(x_c(t)), \quad (24a)$$

$$x_c(0) = x_0. \quad (24b)$$

Im allgemeinen sind diese Linien keine Geraden. Die Überlegung (21) gilt aber weiterhin, die Lösung $u(t)$ entlang $x_c(t)$ wird durch das Anfangswertproblem (22) beschrieben. Ob man in der Lage ist (24) und (22) exakt zu lösen, hängt von der Form der Funktionen $\lambda(x_c)$ und $\Psi(u)$ ab.

Da bei der Rohrströmung ein System von partiellen Differentialgleichungen auftritt, wird hier auch die analytische Lösung eines einfachen Differentialgleichungssystems diskutiert.

Betrachtet wird ein Differentialgleichungssystem der Form

$$u_t + Au_x = 0, \quad (25a)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (25b)$$

mit dem Lösungsvektor u der Dimension m und einer $m \times m$ -Matrix A , deren Elemente konstante reelle Zahlen sind.

Dieses Differentialgleichungssystem ist hyperbolisch, wenn die Koeffizientenmatrix A nur reelle und einfache Eigenwerte besitzt. In diesem Fall kann man A mit Hilfe einer regulären Matrix R diagonalisieren,

$$A = R\Lambda R^{-1}, \quad (26)$$

wobei $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte und $R = [r_1, r_2, \dots, r_m]$ die Matrix der rechten Eigenvektoren ist.

Durch folgende Variablentransformation,

$$v = R^{-1}u, \quad (27)$$

ergibt sich aus (25)

$$R^{-1}u_t + \Lambda R^{-1}u_x = 0 \Leftrightarrow v_t + \Lambda v_x = 0. \quad (28)$$

Da Λ nur in der Diagonale besetzt ist, stellt (28) ein entkoppeltes System von linearen partiellen Differentialgleichungen dar. Komponentenweise gilt wie bei der linearen Advektionsgleichung (15),

$$v_p(x, t) = v_{0p}(x - \lambda_p t) \quad \text{für } p = 1, 2, \dots, m. \quad (29)$$

Die Rücktransformation erfolgt mit

$$u(x, t) = Rv(x, t), \quad (30)$$

wobei die rechte Seite von (30) eine Linearkombination der Spaltenvektoren von R ist,

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^m v_p(x, t)r_p. \quad (31)$$

Schließlich ergibt sich mit (29)

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^m v_{0p}(x - \lambda_p t) r_p. \quad (32)$$

Man erkennt, daß die Lösung $u(x, t)$ ausschließlich von den Anfangswerten in den Punkten $(x - \lambda_p t, 0)$, $p = 1, 2, \dots, m$, abhängt. Die Komponente v_p ist konstant entlang der p -ten Charakteristik, die eine Gerade ist.

Bei hyperbolischen Differentialgleichungen wird jener Bereich in der (x, t) -Ebene, der die Werte der Lösung $u(x, t)$ beeinflusst, als Abhängigkeitsgebiet des Punktes (x, t) bezeichnet. Man erkennt aus (32), daß für ein hyperbolisches Differentialgleichungssystem das Abhängigkeitsgebiet für den Punkt (x, t) jener Abschnitt der Geraden $(x, 0)$ ist, der durch die Charakteristiken mit der kleinsten und der größten Steigung, das heißt $\lambda^+ = \max_{1 \leq p \leq m} \{\lambda_p; \lambda_p > 0\}$ und $\lambda^- = \min_{1 \leq p \leq m} \{\lambda_p; \lambda_p < 0\}$, herausgeschnitten wird.

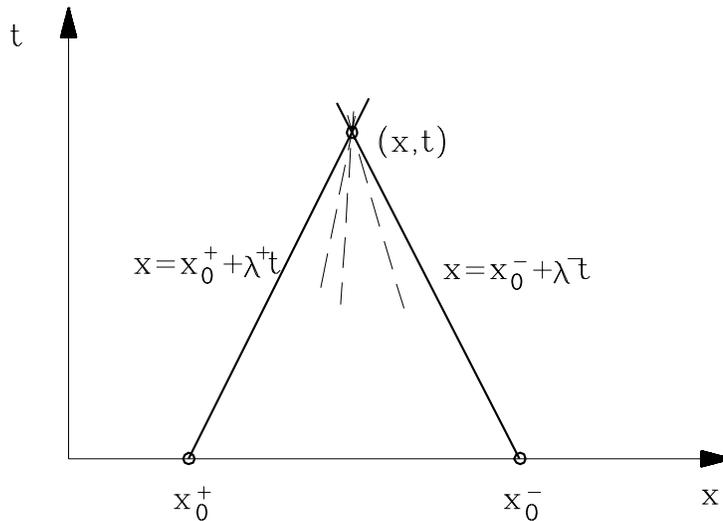


Bild 3: Abhängigkeitsgebiet des Punktes (x, t)

Bild 3 zeigt das Abhängigkeitsgebiet der Lösung im Punkt (x, t) , welches durch die Geraden $x = x_0^+ + \lambda^+ t$ und $x = x_0^- + \lambda^- t$ begrenzt wird. Im dargestellten Punkt kann die Lösung nur von Anfangswerten, welche zwischen x_0^+ und x_0^- liegen, beeinflusst werden.

Will man ein partielles Differentialgleichungssystem numerisch lösen, so ist eine Diskretisierung des Problems erforderlich. Dazu legt man über die (x, t) -Ebene ein Netz mit der Schrittweite in x -Richtung $h := \Delta x$ und in t -Richtung $k := \Delta t$. Die Schrittweite muß nicht notwendigerweise über die gesamte (x, t) -Ebene

konstant sein. Dies wird jedoch zur Vereinfachung angenommen. Das numerische Verfahren liefert die Näherungswerte

$$u_i^n \approx u(x_i, t_n), \quad (33)$$

in den diskreten Punkten der (x, t) -Ebene,

$$\begin{aligned} x_i &= ih, & i &= 1, 2, \dots, imax, \\ t_n &= nk, & n &= 1, 2, \dots, nmax. \end{aligned}$$

Grundsätzlich unterscheidet man zwischen impliziten und expliziten Verfahren zur numerischen Behandlung von partiellen Differentialgleichungen. Bei den impliziten Verfahren ist der Wert der Lösung an der Stelle (x_i, t_{n+1}) , u_i^{n+1} , mit den Werten in allen weiteren Punkten der $t = (n+1)k$ -Linie gekoppelt. Bei einem expliziten Verfahren hingegen hängt der Wert u_i^{n+1} nur von Werten auf dem darunterliegenden Zeitniveau, $t = nk$, ab und kann deshalb sofort berechnet werden. Die Koppelung der Lösungswerte auf dem $(n+1)$ -ten Zeitniveau hat zur Folge, daß man im nichtlinearen Fall ein großes nichtlineares algebraisches Nullstellenproblem lösen muß, was im allgemeinen einen hohen Aufwand bedeutet. Deswegen werden in der vorliegenden Arbeit zwei explizite Verfahren in Betracht gezogen. Auf die impliziten Methoden wird nicht weiter eingegangen.

Ähnlich wie das analytische Abhängigkeitsgebiet kann auch ein numerisches Abhängigkeitsgebiet definiert werden. Es ist die Gesamtheit jener Gitterpunkte (x_j, t_0) , die in die Berechnung des Lösungswertes an der Stelle (x_i, t_n) eingehen. Um bei Gitterverfeinerung die Konvergenz der numerischen Lösung u_i^n gegen die analytische Lösung $u(x_i, t_n)$ sichern zu können, muß der numerische Abhängigkeitsbereich das analytische Abhängigkeitsgebiet umfassen. Dies ist eine notwendige Bedingung für die numerische Stabilität und wird als Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung (CFL-Bedingung) bezeichnet.

Bild 4 zeigt das numerische Abhängigkeitsgebiet von einem Verfahren, bei dem die drei Punkte (x_{i-1}, t_{n-1}) , (x_i, t_{n-1}) und (x_{i+1}, t_{n-1}) in die Berechnung der Lösung im Punkt (x_i, t_n) eingehen.

Anders ausgedrückt fordert die CFL-Bedingung, daß sämtliche Charakteristiken innerhalb des numerischen Abhängigkeitsgebietes liegen. Dies liefert bei gegebener Ortsschrittweite eine Einschränkung für die maximal zulässige Zeitschrittweite, nämlich

$$\max_{1 \leq p \leq m} \left\{ \left| \frac{\lambda_p k}{h} \right| \right\} \leq 1. \quad (35)$$

Vor allem bei flachen Charakteristiken, wie sie bei hohen Schallgeschwindigkeiten auftreten, stellt diese Bedingung eine empfindliche Einschränkung dar, da man nur mit extrem kleinen Schritten in der Zeit vorwärtsrechnen kann. Dies relativiert den Vorteil der Explizitheit der Rechnung einem impliziten Verfahren gegenüber.

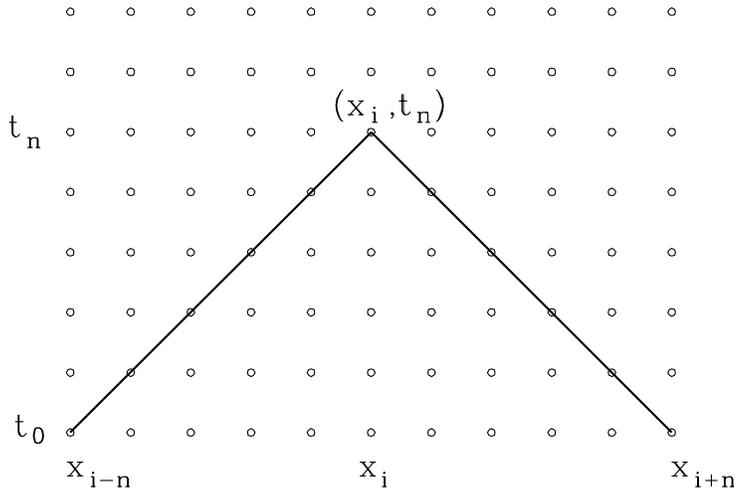


Bild 4: Numerisches Abhängigkeitsgebiet

3.2 Lax-Friedrichs-Verfahren

Betrachtet man das System (2) in der Gestalt

$$(A(U))_t + (B(U))_x = f(U), \quad U = (\rho, w, p)^T, \quad (36)$$

so beruht ein Differenzenverfahren auf der Annäherung der Ableitungen bezüglich t und x durch Differenzenquotienten, die auf verschiedene Art möglich ist. Setzt man voraus, daß sowohl die Näherungslösung $\{U_i^n\}$ auf dem n -ten Zeitniveau als auch die Randwerte U_1^{n+1} und U_{imax}^{n+1} gegeben sind, so ergibt die naheliegende explizite Diskretisierung von (36),

$$\frac{A(U_i^{n+1}) - A(U_i^n)}{\Delta t} + \frac{B(U_{i+1}^n) - B(U_{i-1}^n)}{2\Delta x} = f(U_i^n), \quad i = 2, \dots, imax - 1. \quad (37)$$

Leider ist dieses Schema *instabil*. Man modifiziert es zum *stabilen* Verfahren (Beweis im linearen Fall möglich, vergleiche [10]) durch folgende Mittelbildung:

$$A(U_i^n) = \frac{1}{2}[A(U_{i+1}^n) + A(U_{i-1}^n)]. \quad (38)$$

Man erhält das sogenannte Lax-Friedrichs-Verfahren

$$\frac{A(U_i^{n+1}) - \frac{1}{2}[A(U_{i+1}^n) + A(U_{i-1}^n)]}{\Delta t} + \frac{1}{2\Delta x}[B(U_{i+1}^n) - B(U_{i-1}^n)] = f(U_i^n), \quad (39)$$

oder äquivalenterweise

$$A(U_i^{n+1}) = \frac{1}{2}[A(U_{i+1}^n) + A(U_{i-1}^n)] - \frac{\Delta t}{2\Delta x}[B(U_{i+1}^n) - B(U_{i-1}^n)] + \Delta t f(U_i^n),$$

$$i = 2, \dots, imax - 1. \quad (40)$$

Für das System (2) gilt

$$A(U) = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho w \\ \rho(u + \frac{1}{2}w^2) + FT \end{pmatrix}, \quad (41a)$$

$$B(U) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + p \\ \rho w(h + \frac{1}{2}w^2) \end{pmatrix}, \quad (41b)$$

$$f(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho g \sin \alpha - \Delta p_R \\ -\rho w g \sin \alpha + \Delta \dot{q} \end{pmatrix}, \quad (41c)$$

und deshalb ergibt sich aus (40)

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} &= \frac{1}{2}(\rho_{i+1}^n + \rho_{i-1}^n) - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\rho_{i+1}^n w_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n w_{i-1}^n), \end{aligned} \quad (42a)$$

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} w_i^{n+1} &= \frac{1}{2}(\rho_{i+1}^n w_{i+1}^n + \rho_{i-1}^n w_{i-1}^n) - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\rho_{i+1}^n (w_{i+1}^n)^2 - \rho_{i-1}^n (w_{i-1}^n)^2 + p_{i+1}^n - p_{i-1}^n) - \\ &\quad - \Delta t(\rho_i^n g \sin \alpha_i + \Delta p_{Ri}^n), \end{aligned} \quad (42b)$$

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} (u_i^{n+1} + \frac{1}{2}(w_i^{n+1})^2) + \\ + FT_i^{n+1} &= \frac{1}{2}(\rho_{i+1}^n u_{i+1}^n + \rho_{i-1}^n u_{i-1}^n) + \\ &\quad + \frac{1}{4}(\rho_{i+1}^n (w_{i+1}^n)^2 + \rho_{i-1}^n (w_{i-1}^n)^2) + \frac{1}{2}F(T_{i+1}^n + T_{i-1}^n) - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x}[\rho_{i+1}^n w_{i+1}^n h_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n w_{i-1}^n h_{i-1}^n + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\rho_{i+1}^n (w_{i+1}^n)^3 - (\rho_{i-1}^n (w_{i-1}^n)^3)] + \\ &\quad + \Delta t \Delta \dot{q}_i^n - \Delta t \rho_i^n w_i^n g \sin \alpha_i, \end{aligned} \quad (42c)$$

mit F aus (8).

Mit Hilfe der Beziehungen

$$h = h(p, T), \quad u = u(p, T), \quad h = u + \frac{p}{\rho} \quad (43)$$

kann man sich *formal* u_i^{n+1} und T_i^{n+1} als Funktionen von p_i^{n+1} und ρ_i^{n+1} dargestellt denken, wodurch (42) zu einem nichtlinearen Gleichungssystem für ρ_i^{n+1} , w_i^{n+1} , p_i^{n+1} , $i = 2, \dots, imax - 1$ wird, das mit gegebenen Randwerten ρ_i^{n+1} , w_i^{n+1} , p_i^{n+1} , $i = 1, imax$ wohldefiniert ist.

3.3 Charakteristikenmethode

Ausgehend von einem quasilinearen System, vergleiche (9),

$$U_t + B(U)U_x + f(U) = 0, \quad (44)$$

wobei $U = (u_1, \dots, u_m)^T$ ist, bestimmt man die m Eigenwerte $\lambda^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, m$, der Matrix $B(U)$. Diese müssen alle reell und einfach sein. Zu den Eigenwerten werden die m linken Eigenvektoren $l^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, m$, ermittelt, mit deren Hilfe man aus (44) m Gleichungen der Form

$$l^{(j)}(U_t + \lambda^{(j)}U_x) + l^{(j)}f(U) = 0 \quad (45)$$

erhält.

Vom beliebigen Punkt Q' der (x, t) -Ebene zweigen m Charakteristiken ab, die im allgemeinen Kurven sind, da $B(U)$ nicht konstant ist.

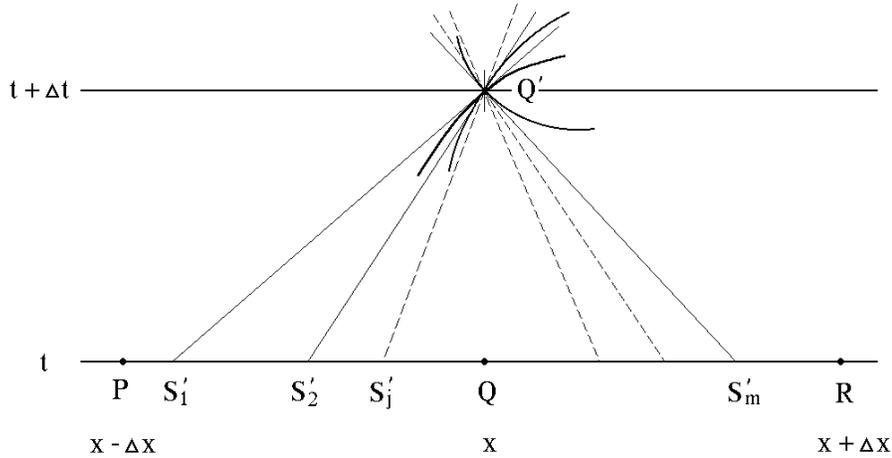


Bild 5: Charakteristiken durch den Punkt Q'

Bild 5 zeigt die (x, t) -Ebene des diskretisierten Differentialgleichungssystems mit den Tangenten, der Charakteristiken im Punkt Q' . Nimmt man den Zeitschritt als klein an, so kann der tatsächliche Verlauf der Charakteristiken durch ihre Tangenten approximiert werden. Die CFL-Bedingung ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß sämtliche Tangenten die zum Zeitpunkt t_{n+1} durch den Punkt Q' gehen, von den Linien $Q'P$ und $Q'R$ begrenzt werden. Folglich muß

$$\max_{1 \leq j \leq m} \{ |\lambda^{(j)}(Q')| \} \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (46)$$

erfüllt werden.

Man nimmt näherungsweise an, daß $U_t + \lambda^{(j)}U_x$ der Richtungsableitung dU/dt entlang der Geraden S'_jQ' entspricht und diskretisiert (44) demgemäß:

$$l^{(j)}(Q') \left[\frac{U(Q') - U(S'_j)}{\Delta t} \right] + l^{(j)}(Q')f(Q') = 0.$$

Die Funktionswerte $U(S'_j)$ sind nicht bekannt, da S'_j nicht Gitterpunkte sind. Für jene Stellen S'_j , die zwischen P und Q liegen, gewinnt man den Vektor $U(S'_j)$ durch komponentenweise lineare Interpolation der Werte $U(P)$ und $U(Q)$ und erhält aus der obigen Gleichung

$$l^{(j)}(Q') \left[\frac{U(Q') - U(Q)}{\Delta t} + \lambda^{(j)}(Q') \frac{U(Q) - U(P)}{\Delta x} \right] + l^{(j)}(Q')f(Q') = 0.$$

Dies ergibt eine implizite Berechnungsmethode – die noch nicht bekannte Lösung $U(Q')$ geht in die Bestimmung der Eigenwerte $\lambda^{(j)}(Q')$ und der Eigenvektoren $l^{(j)}(Q')$ der Matrix $B(U(Q'))$ ein. Um ein explizites Berechnungsverfahren zu erhalten trifft man die Annahme, daß sich die Eigenwerte und Eigenvektoren von $B(U)$ und die Werte der rechten Seite f vom Punkt Q zum Punkt Q' so wenig ändern, daß man die Auswertungen an der Stelle Q' durch jene an der Stelle Q ersetzen kann. Durch diese Vereinfachung erhält man schließlich ein explizites System von m Gleichungen zur Bestimmung von $U(Q')$,

$$l^{(j)}(Q) \left[\frac{U(Q') - U(Q)}{\Delta t} + \lambda^{(j)}(Q) \frac{U(Q) - U(P)}{\Delta x} \right] + l^{(j)}(Q)f(Q) = 0. \quad (47)$$

Für das System (9) mit den Daten aus (7) gilt $m = 3$. Identifiziert man P mit (x_{i-1}, t_n) , Q mit (x_i, t_n) , R mit (x_{i+1}, t_n) und Q' mit (x_i, t_{n+1}) , so gilt im Gleichungssystem (47) die Zuordnung

$$U(P) = \begin{pmatrix} \rho_{i-1}^n \\ w_{i-1}^n \\ p_{i-1}^n \end{pmatrix}, \quad U(Q) = \begin{pmatrix} \rho_i^n \\ w_i^n \\ p_i^n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U(R) = \begin{pmatrix} \rho_{i+1}^n \\ w_{i+1}^n \\ p_{i+1}^n \end{pmatrix}.$$

Führt man noch die folgenden Abkürzungen ein,

$$RS^{(j)} = l^{(j)}(Q) \left[U(Q) - \lambda^{(j)}(Q) \frac{\Delta t}{\Delta x} (U(Q) - U(P)) \right] \quad \text{für} \quad \lambda^{(j)}(Q) > 0,$$

$$RS^{(j)} = l^{(j)}(Q) \left[U(Q) - \lambda^{(j)}(Q) \frac{\Delta t}{\Delta x} (U(R) - U(Q)) \right] \quad \text{für} \quad \lambda^{(j)}(Q) < 0,$$

so ergibt sich das System

$$\begin{bmatrix} l^{(1)} \\ l^{(2)} \\ l^{(3)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \rho_i^{n+1} \\ w_i^{n+1} \\ p_i^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RS^{(1)} \\ RS^{(2)} \\ RS^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Mit (48) wird eine Berechnungsvorschrift bereitgestellt, mit welcher man

$$\rho_i^{n+1}, w_i^{n+1}, p_i^{n+1}, \quad i = 2, \dots, imax - 1,$$

ermitteln kann.

Die Berechnung der Randwerte hängt von der Strömungsrichtung in den Randpunkten ab. Am linken Rand, $i = 1$, wird für $w_1^n \geq 0$ Dichte ρ_1^{n+1} und Druck p_1^{n+1} vorgegeben; die Beziehung

$$l^{(3)} \begin{pmatrix} \rho_1^{n+1} \\ w_1^{n+1} \\ p_1^{n+1} \end{pmatrix} = RS^{(3)}$$

liefert eine Gleichung für w_1^{n+1} .

Für $w_1^n < 0$ wird nur p_1^{n+1} vorgegeben und

$$\begin{bmatrix} l^{(2)} \\ l^{(3)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1^{n+1} \\ w_1^{n+1} \\ p_1^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RS^{(2)} \\ RS^{(3)} \end{pmatrix}$$

liefert ein Gleichungssystem für ρ_1^{n+1} und w_1^{n+1} . Analog am rechten Rand, $i = imax$.

4 Numerische Bereitstellung der Stoffwerte

Wie bereits im Abschnitt 2.2 angeführt, wurden in dieser Arbeit die thermodynamischen Zustandsgrößen nach den in den NBS/NRC Wasserdampf Tafeln [6] angegebenen Beziehungen berechnet.

In dieser Formulierung wird die Helmholtzfunktion additiv aus der Basisfunktion, der Residualfunktion und der Idealgasfunktion zusammengesetzt,

$$A(\rho, T) = A_{Basis}(\rho, T) + A_{Residual}(\rho, T) + A_{id.Gas}(T). \quad (49)$$

Die Basisfunktion wurde aus der Virialtheorie für die Zustandsgleichung eines Fluides nach Ursell-Mayer abgeleitet. Mittels der Residualfunktion, welche aus 40 Termen zusammengesetzt ist, wurde eine globale Anpassung an die experimentellen Daten realisiert. Die Idealgasfunktion ging aus einer eingehenden Analyse der Rotations-Vibrations-Struktur des Wassermoleküls hervor und stellt die Helmholtzfunktion für Wasser im Zustand des idealen Gases dar.

Da in [6] die Helmholtzfunktion als Funktion von Dichte und Temperatur angegeben ist, als Komponenten der Lösung des Differentialgleichungssystems (2) jedoch Dichte und Druck gewählt wurden, war es erforderlich aus der Gleichung (10) die Temperatur als Funktion der Dichte und des Druckes,

$$T = T(\rho, p),$$

zu bestimmen.

Die numerische Berechnung der Temperatur (und der anderen thermodynamischen Zustandsgrößen) als Funktion von Dichte und Druck wurde folgendermaßen realisiert:

Gegeben sind die aktuellen Werte der Dichte ρ_{akt} und des Druckes p_{akt} . Die entsprechenden Werte im kritischen Punkt sind mit ρ_{kr} und p_{kr} bezeichnet.

Vergleich von p_{akt} und p_{kr} :

- $p_{akt} > p_{kr}$; Vergleich von ρ_{akt} und ρ_{kr} :
 - $\rho_{akt} > \rho_{kr}$:
Ausgehend vom Wert im kritischen Punkt wird die Temperatur schrittweise gesenkt, bis erstmals

$$p(\rho_{akt}, T) < p_{akt}$$

gilt. Daraufhin wird aus der Temperatur im letzten Schritt und der Temperatur im vorletzten Schritt der arithmetische Mittelwert gebildet und mit diesem die erforderlichen thermodynamischen Zustandsgrößen ermittelt.

- $\rho_{akt} \leq \rho_{kr}$:
Analoges Vorgehen mit schrittweiser Erhöhung der Temperatur.
- $p_{akt} \leq p_{kr}$; Vergleich von ρ_{akt} mit den beiden Dichtewerten an den Randkurven des Zwei-Phasen-Gebiets:
 - Liegt die aktuelle Dichte im Zwei-Phasen-Gebiet, das bedeutet

$$\rho_L(p_{akt}) > \rho_{akt} > \rho_G(p_{akt}),$$

so ist die aktuelle Temperatur identisch mit der Sättigungstemperatur,

$$T_{akt} = T_S(p_{akt}).$$

Der Dampfgehalt im gesuchten Zustandspunkt ergibt sich dann aus

$$x_{akt} = \frac{\frac{1}{\rho_{akt}} - \frac{1}{\rho_L(T_S)}}{\frac{1}{\rho_G(T_S)} - \frac{1}{\rho_L(T_S)}}.$$

Die spezifische Enthalpie und auch die spezifische innere Energie erhält man aus dem linearen Zusammenhang dieser Zustandsgrößen entlang einer Isobare, aus den jeweiligen Werten an der Siede- beziehungsweise Taulinie.

- Wenn der gesuchte Zustandspunkt im Gebiet des überhitzten Dampfes liegt,

$$\rho_{akt} < \rho_G(p_{akt}),$$

wird ausgehend von der Sättigungstemperatur $T_s(p_{akt})$ die Temperatur so lange schrittweise erhöht, bis erstmals der errechnete Druck größer als der aktuelle Druck,

$$p(\rho_{akt}, T) > p_{akt},$$

ist. Es wird daraufhin wieder der arithmetische Mittelwert aus dem letzten und dem vorletzten Rechenschritt gebildet und mit diesem Temperaturwert die restlichen erforderlichen Zustandsgrößen ermittelt.

- Liegt der gesuchte Zustandspunkt im Wassergebiet,

$$\rho_{akt} > \rho_L(p_{akt}),$$

so wird analog vorgegangen, nur daß nun von der Sättigungstemperatur ausgehend die Temperatur schrittweise gesenkt werden muß.

Wie man aus der Gleichung (5) mit den Daten (7) ersehen kann, benötigt man zur Lösung des Differentialgleichungssystems (2) neben den thermischen und kalorischen Zustandsgrößen auch die Ableitung der inneren Energie, der Enthalpie und der Temperatur nach der Dichte und dem Druck. Diese Ableitungen werden als Funktion von Dichte und Druck durch symmetrische Differenzenquotienten angenähert.

Eine Fallunterscheidung zwischen den einzelnen Gebieten der Zustandsfläche ist hier nur bei der Ableitung nach der Dichte erforderlich. Im Zwei-Phasen-Gebiet ist die Ableitung der Temperatur nach der Dichte gleich Null.

Die Ableitung der inneren Energie nach der Dichte erhält man aus

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \bar{x}(u_G - u_L)$$

und die Ableitung der spezifischen Enthalpie analogerweise aus

$$\frac{\partial h}{\partial \rho} = \bar{x}(h_G - h_L)$$

mit dem Koeffizienten

$$\bar{x} = \frac{\rho_G \rho_L}{(\rho_G - \rho_L) \rho_{akt}^2}.$$

Die für die Berechnung des Schrittweitenverhältnisses (Ortsschrittweite zu Zeitschrittweite) gemäß der CFL-Bedingung benötigte Schallgeschwindigkeit im Wasser wird nach

$$c = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} \frac{\partial p}{\partial \rho}} \quad (50)$$

ermittelt, wobei c_v die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen,

$$c_v = -T \frac{\partial^2 A}{\partial T^2}, \quad (51)$$

und c_p die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck,

$$c_p = c_v + \frac{T}{\rho^2} \frac{(\partial p / \partial T)^2}{\partial p / \partial \rho}, \quad (52)$$

ist. Für die Berechnung des Schrittweitenverhältnisses wird nur die Schallgeschwindigkeit im Wasser herangezogen, da sie dort gegenüber der im Dampf, sowie der im Zwei-Phasen-Gebiet, höher ist und somit das strengste Kriterium darstellt.

5 Ideales Gas als Strömungsmedium

Wie in Kapitel 3 bereits angedeutet, wurde im Zuge dieser Arbeit das Problem der instationären Strömung in beheizten Rohrsystemen mit zwei unterschiedlichen Lösungsverfahren untersucht. Es sollten dabei jeweils die Vor- und Nachteile des Charakteristikenverfahrens und des Lax-Friedrichs-Verfahrens bei der Lösung des nichtlinearen partiellen Differentialgleichungssystems herausgearbeitet werden.

Um die Komplexität der Zusammenhänge in Wasser-Dampf-Systemen ausklammern zu können, wurde für die ersten Strömungsuntersuchungen ein ideales Gas als Strömungsmedium angenommen. Die kalorische und die thermische Zustandsgleichung nehmen hier folgende besonders einfache Form an:

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad h = c_p T \quad \text{bzw.} \quad u = c_v T.$$

Für das ideale Gas sind die spezielle Gaskonstante R sowie der Isentropenexponent κ konstante Größen, sodaß sowohl die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck,

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R, \tag{53}$$

als auch die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen,

$$c_v = \frac{1}{\kappa - 1} R, \tag{54}$$

konstant sind.

Durch die Angabe der speziellen Gaskonstante, des Isentropenexponenten und des frei wählbaren Enthalpie-Nullpunktes ist das thermodynamische Verhalten des Gases eindeutig bestimmt.

5.1 Lax-Friedrichs-Verfahren

Für das ideale Gas als Arbeitsmedium ergibt sich aus (42) ein einfaches entkoppeltes Gleichungssystem. Im Gitterpunkt (x_i, t_{n+1}) errechnet man die Dichte direkt aus der Massenbilanz, die Geschwindigkeit aus der Impulsbilanz und den Druck aus der Energiebilanz.

Die guten Approximationseigenschaften von Differenzenverfahren beruhen auf der Annahme, daß die Lösung glatt, das heißt stetig samt den Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung, ist. Ist die Lösung in einem Punkt unstetig, so ist in diesem Punkt die Bildung eines Differenzenquotienten ein fragwürdiges Vorgehen. In der

Simulation beobachtet man, daß die numerische Viskosität des Lax-Friedrichs-Verfahrens die Unstetigkeiten in der Lösung glättet [10]. Dieses Verhalten konnte durch einen einfachen Versuch recht eindrucksvoll nachvollzogen werden. Es wurde dabei ein langes, fein diskretisiertes Rohr angenommen, welches durch eine Trennwand in der Mitte des Rohres in zwei gleiche Stücke geteilt ist. In beiden Teilen befindet sich ideales Gas unterschiedlicher Dichte und unterschiedlichen Druckes, jedoch gleicher Temperatur. Entfernt man die Trennwand zum Zeitpunkt $t = 0$, so wird eine Schockwelle in jenen Teil des Rohres laufen in welchem das Gas den geringeren Druck und die kleinere Dichte aufweist. In dem anderen Teil des Rohres wird sich eine Verdünnungswelle ausbreiten. Das Lax-Friedrichs-Verfahren "flacht" diese Unstetigkeiten in Druck, Dichte und Geschwindigkeit mit fortschreitender Zeit ab.

Dieses Phänomen spielt im hier untersuchten Anwendungsfall eine untergeordnete Rolle, da bei normalen Betriebsbedingungen in einem Dampferzeuger nur moderate Änderungen von Beheizung und Druck vorkommen und deshalb glatte Lösungen zu erwarten sind. Der Nachteil beim Lax-Friedrichs-Verfahren liegt jedoch darin, daß bei diesem Algorithmus die Werte der Lösung an beiden Rändern für jeden Zeitpunkt vorgegeben werden müssen. Da man diese Werte nicht exakt kennt, kann man sie nur näherungsweise vorschreiben. Dies hat zur Folge, daß von jedem Rand ständig eine Störung ausgeht. Diese breitet sich dann mit jedem Zeitschritt um einen Ortsschritt in das Innere des Rohres aus und führt beim Zusammentreffen dieser beiden Störungswellen zur numerischen Instabilität. Diese Ungenauigkeit pflanzt sich mit nahezu Schallgeschwindigkeit fort.

Aus physikalischen Überlegungen muß man bei einer Unterschallströmung im Rohr, den Zustand des Mediums am Rohreintritt durch zwei Größen festlegen, zum Beispiel Druck und Dichte, während am Rohraustritt nur eine Zustandsgröße (zum Beispiel der Druck) vorgegeben werden darf. Die zur Realisierung des Lax-Friedrichs-Verfahrens noch fehlenden drei Randwerte wurden im folgenden Versuch durch Bildung einseitiger Differenzenquotienten bereitgestellt. Diese Vorgangsweise war nicht erfolgreich.

Ein weiterer Versuch, die fehlenden Größen am Rand durch Extrapolation aus den benachbarten Punkten zu gewinnen, führte ebenfalls nicht zum Ziel. Es gingen auch hier Störungen von den Rändern aus, die beim Aufeinandertreffen Instabilität herbeiführten.

5.2 Charakteristikenmethode

Mit der Einführung eines idealen Gases sowie der Vernachlässigung des Stahl-speicherterms vereinfachen sich die Matrizen \hat{A}, \hat{B} in der Gleichung (5) zu

$$\hat{A}(U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & \rho w & \frac{1}{\kappa-1} \end{pmatrix}, \quad (55a)$$

$$\hat{B}(U) = \begin{pmatrix} w & \rho & 0 \\ 0 & \rho w & 1 \\ 0 & \frac{\kappa}{\kappa-1}p + \rho w^2 & \frac{\kappa}{\kappa-1}w \end{pmatrix}. \quad (55b)$$

In diesem Fall ist die Umformung auf die Gestalt (44) möglich, da $\hat{A}(U)$ für alle U regulär ist. Die Systemmatrix $B(U)$ ergibt sich als

$$B(U) = \begin{pmatrix} w & \rho & 0 \\ 0 & w & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \kappa p & w \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix lassen sich analytisch bestimmen und lauten

$$\lambda_1 = w + c, \quad \lambda_2 = w, \quad \lambda_3 = w - c,$$

wobei die Schallgeschwindigkeit c für das ideale Gas aus der einfachen Formel

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}$$

berechnet werden kann.

Bezeichnet man die Matrix der linken Eigenvektoren von $B(U)$ mit L ,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & c & \frac{1}{\rho} \\ 1 & 0 & -\frac{p}{\kappa p} \\ 0 & -\kappa p & c \end{pmatrix},$$

und multipliziert die Gleichung (48) von links mit L^{-1} , so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \rho_i^{n+1} \\ w_i^{n+1} \\ p_i^{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2c^2} \begin{pmatrix} \rho_i^n & 1 & \frac{1}{c} \\ c & 0 & -\frac{1}{\rho_i^n} \\ c^2 \rho_i^n & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} RS^{(1)} \\ RS^{(2)} \\ RS^{(3)} \end{pmatrix} \quad (56)$$

für die inneren Punkte des Rohres, $i = 2, \dots, imax - 1$,

$$w_1^{n+1} = -\frac{1}{\kappa p_1^n} (RS^{(3)} - c p_1^{n+1}),$$

für den linken Rand (Strömungsrichtung ins Rohr), beziehungsweise

$$\begin{aligned}\rho_{imax}^{n+1} &= RS^{(2)} + \frac{p_{imax}^{n+1}}{c^2}, \\ w_{imax}^{n+1} &= \frac{RS^{(1)}}{c} - \frac{p_{imax}^{n+1}}{c\rho_{imax}^n},\end{aligned}$$

für den rechten Rand (Strömungsrichtung aus dem Rohr).

Bei diesem Rechenverfahren kann man, den physikalischen Erfordernissen entsprechend, am linken Rand, an welchem der Geschwindigkeitsvektor ins Rohr weist, Druck und Dichte vorgeben; die Geschwindigkeit wird berechnet. Am rechten Rand, an welchem der Geschwindigkeitsvektor aus dem Rohr weist, wird nur der Druck vorgegeben. Die Geschwindigkeit und die Dichte ergeben sich aus der Rechnung. Somit ist das System zur Berechnung der numerischen Lösung $\{U_i^{n+1}\}$ wohldefiniert.

Gibt man die drei Randwerte als Funktion der Zeit vor, so kann man zum Beispiel das Verhalten der Strömung in Abhängigkeit einseitiger Druckänderung simulieren.

Bei der Verwendung des Charakteristikenverfahrens ist zu beachten, daß auch diesem Verfahren die Approximation der Ableitungen in den Erhaltungssätzen zugrunde liegt. Dies hat zur Folge, daß das physikalische Verhalten nur dann gut wiedergegeben wird, wenn die Lösung einen glatten Verlauf zeigt [10]. Man beobachtet deshalb, daß das Verfahren versagt, wenn man die an den Rändern vorzugebenden Werte zeitlich so schnell ändert, daß man dadurch eine Schockwelle erzeugt.

5.3 Untersuchungen am Torus

Da die Randbedingungen für das Lax-Friedrichs-Verfahren nicht in geeigneter Weise gestellt werden konnten, war diese Methode für ein gerades Rohrstück *endlicher* Länge nicht anwendbar.

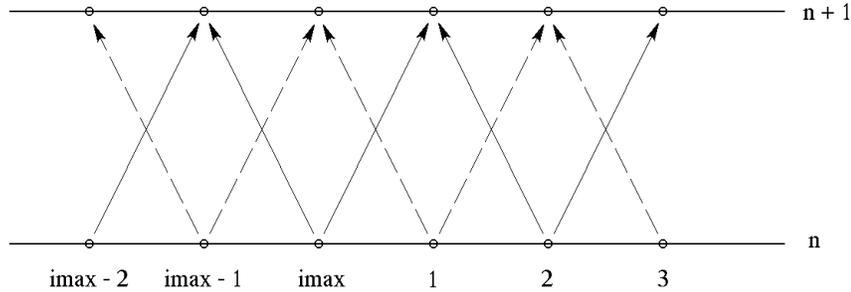


Bild 6: Lax-Friedrichs-Verfahren am Torus

Um trotzdem einen Vergleich mit dem Charakteristikenverfahren durchführen zu können, wurden die beiden Rechenmethoden an einem zu einem Torus geformten Rohr getestet. In diesem Fall sind der Rohranfang und das Rohrende identisch und Bild 6 zeigt schematisch, daß sich die Diskretisierung in den Punkten (x_{imax}, t_{n+1}) und (x_1, t_{n+1}) von der Diskretisierung in den übrigen Punkten nicht unterscheidet.

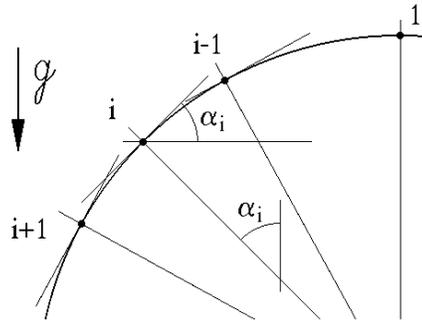


Bild 7: Torusabschnitt – diskretisiert

Untersucht wurde ein aufgestellter Torus mit einem Radius von 80 [m], dabei liegt der Vektor der Gravitation in der Hauptebene des Torus. Bei der Diskretisierung wurde, wie in Bild 7 gezeigt, jeweils der geodätisch am höchsten liegende Punkt mit 1 bezeichnet. Als Medium im Torus wurde ein ideales Gas angenommen; Gaskonstante $R = 461,5$ [J/kgJ], spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck $c_p = 2828$ [J/kgJ]. Der Radius wurde deshalb so groß gewählt, damit

der Einfluß der Gravitation, trotz der relativ geringen Dichte des Mediums, bemerkbar wird. Dieser Einfluß äußert sich darin, daß sich Druck und Dichte als Funktionen der geodätischen Höhe ändern. Die Gaskonstante und die spezifische Wärmekapazität wurden ähnlich den Werten von überhitztem Dampf bei 10 [bar] nahe der Siedelinie angenommen, um dem Medium im Torus ein dampfähnliches Verhalten zu geben.

Als Anfangsverteilung für den Druck wurde

$$p_i^0 = p_1^0 e^{\frac{g}{RT} r(1 - \cos \alpha_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, imax, \quad (58)$$

gewählt.

Bei konstanter innerer Energie in allen Rohrabschnitten bedeutet das jenen Druckverlauf, welcher sich unter der Schwerkrafteinwirkung auf das ruhende Gas ergibt. Konstante Energie bedeutet beim idealen Gas konstante Temperatur. Damit ist mit der idealen Gasgleichung auch die Dichte in jedem Punkt bestimmt. Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ wurde Null gesetzt.

Von diesen Startwerten ausgehend wurde das Problem numerisch gelöst und die zeitliche Evolution der Lösung beobachtet. Da am Anfang die Geschwindigkeit in jedem Punkt des Torus Null ist, und sowohl die Dichte als auch der Druck eine Schwerkraftverteilung aufweisen, befindet sich das System im Zustand eines lokalen Energieminimums. In diesem Fall erwartet man, daß die physikalische Lösung stationär bleibt.

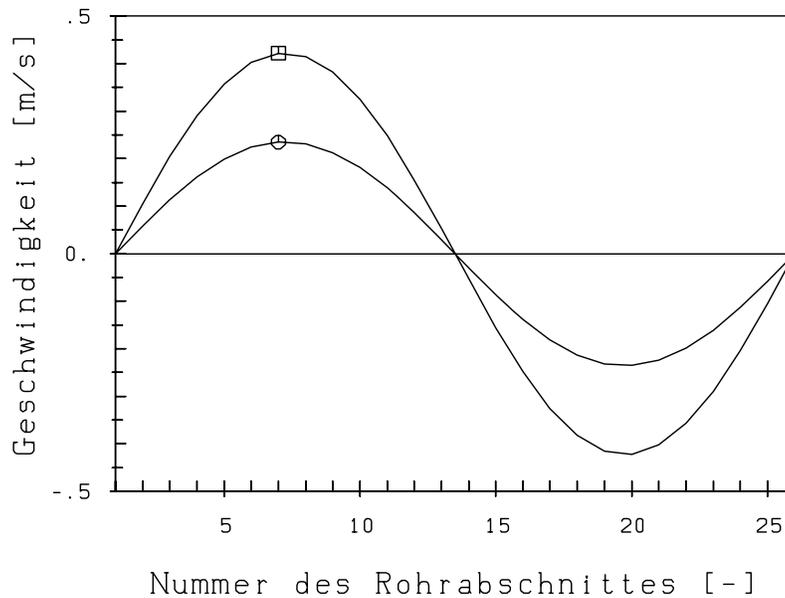


Bild 8: Geschwindigkeitsverlauf: 25 Abschnitte, Lax-Friedrichs-Verfahren

Durch die Diskretisierungsfehler ist die numerische Lösung zunächst nicht stationär, sondern nähert sich erst allmählich diesem Zustand an.

Der beste Indikator zur Beobachtung dieser Annäherung an den stationären Zustand ist die Geschwindigkeit. Der Geschwindigkeitsverlauf über die gestreckte Rohrlänge eines Torus, welcher mit 25 Abschnitten diskretisiert und mit dem Lax-Friedrichs-Verfahren gerechnet wurde, ist in [Bild 8](#) dargestellt. Die mit \square bezeichnete Kurve stellt den Geschwindigkeitsverlauf bei $t = 4.5$ [s] dar. Zu diesem Zeitpunkt weist die numerische Lösung die größte Abweichung von der physikalischen Lösung, $w = 0$ [m/s] in jedem Rohrabschnitt, auf. Im geodätisch am höchsten gelegenen Punkt (Punkt 1) ist die Geschwindigkeit gleich Null. In der ersten Hälfte des Torus ist die Geschwindigkeit positiv, also nach unten gerichtet. In der zweiten Hälfte ist sie negativ und damit auch nach unten gerichtet. In beiden Torushälften weist die Geschwindigkeit in jenem Bereich, in welchem das Rohr "senkrecht" verläuft, das ist an den Stellen $\alpha = 90^\circ$ beziehungsweise $\alpha = 270^\circ$, ein Maximum auf. Es bildet sich vom Startwert ausgehend ein sinusförmiger Geschwindigkeitsverlauf aus, der seine maximale Amplitude nach $t = 4.5$ [s] erreicht. Danach flacht das Geschwindigkeitsprofil ab, um erneut einen lokalen Extremwert, welcher jedoch nicht mehr so groß ist, zu erreichen. So schwingt sich das System auf einen Endzustand ein, dessen Geschwindigkeitsverlauf in [Bild 8](#) mit \circ bezeichnet ist. In [Bild 9](#), welches den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeitsmaxima zeigt, sieht man, daß dieser eingeschwungene Zustand bereits nach ungefähr 10 [s] erreicht wird.

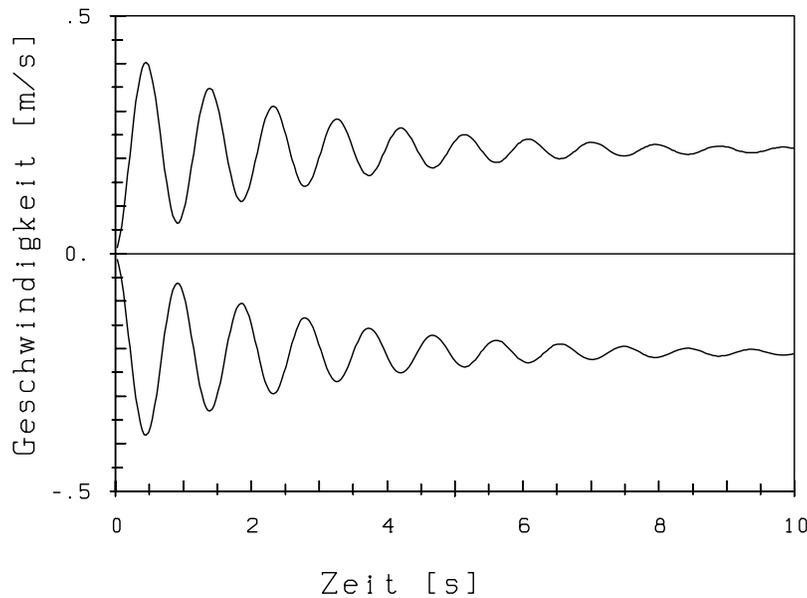


Bild 9: Geschwindigkeitsmaxima: 25 Abschnitte, Lax-Friedrichs-Verfahren

Führt man eine Berechnung nach der Charakteristikenmethode mit demsel-

ben Anfangszustand durch, so zeigt sich ein ähnliches Bild. Wie beim Lax-Friedrichs-Verfahren stimmt auch hier die numerisch stationäre Lösung nicht mit der physikalischen überein. Bild 10 zeigt den Geschwindigkeitsverlauf bei gleicher Diskretisierung und gleichem Schrittweitenverhältnis von Zeitschrittweite zu Ortsschrittweite. Die größte Abweichung der numerischen Lösung von der physikalischen tritt hier bei $t = 4.3$ [s] auf und ist in Bild 10 mit \square bezeichnet.

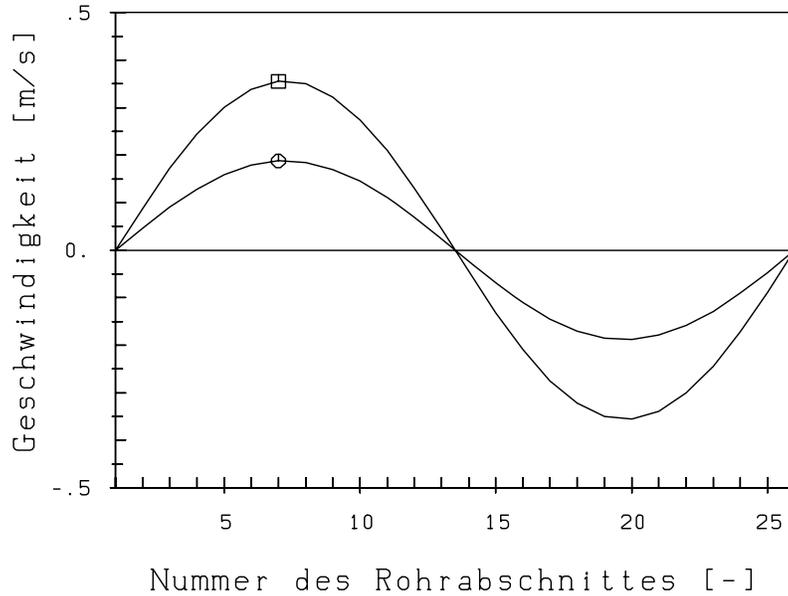


Bild 10: Geschwindigkeitsverlauf: 25 Abschnitte, Charakteristikenmethode

Da das Dämpfungsverhalten der Charakteristikenmethode wesentlich schwächer ausgeprägt ist als jenes des Lax-Friedrichs-Verfahrens, wird der stationäre Zustand erst nach ungefähr 100 [s] erreicht. Der Geschwindigkeitsverlauf im eingeschwungenen Zustand ist in Bild 10 mit \circ bezeichnet.

Der Vergleich der Bilder 8 und 10 zeigt deutlich, daß sowohl die Maximalabweichung als auch die stationäre Abweichung vom physikalischen Zustand bei der Charakteristikenmethode weniger stark ausgeprägt sind als beim Lax-Friedrichs-Verfahren. Der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeitsmaxima der Berechnung mit dem Charakteristikenverfahren ist in Bild 11 dargestellt. Der Vergleich mit Bild 9 zeigt die wesentlich schwächere Dämpfung der Charakteristikenmethode.

Die Tatsache, daß die numerisch stationäre Lösung nicht mit der physikalisch stationären übereinstimmt, ist durch die Diskretisierungsfehler bedingt. Man ersetzt jeden der 25 Teilbögen des Torus durch ein gerades Stück, hält auf einer Länge von ungefähr 20 [m] den Winkel α konstant und verfälscht dadurch den Einfluß der Gravitation, der sich mit α kontinuierlich ändert.

Setzt man die auf das System wirkende Gravitation $g = 0$ [m/s²], so gibt die

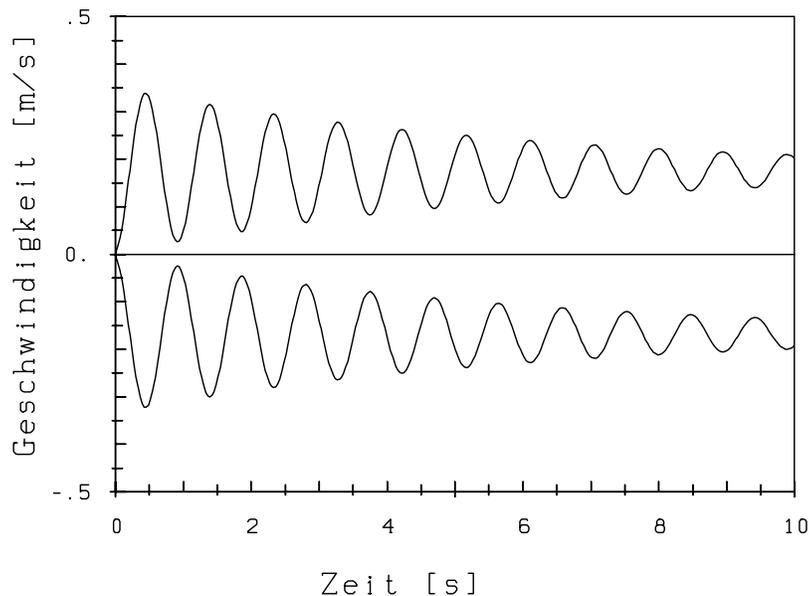


Bild 11: Geschwindigkeitsmaxima: 25 Abschnitte, Charakteristikenmethode

Näherungslösung exakt den physikalischen Zustand wieder.

Die Amplitude der Geschwindigkeitskurve hängt stark von der Feinheit der Diskretisierung ab. Erfolgt eine feinere Diskretisierung, so sind sowohl die Maximalabweichung als auch der Fehler der Approximation im stationären Zustand geringer. Die Dämpfung des Einschwingvorganges wird vom Verhältnis der Zeitschrittweite zur Ortsschrittweite bestimmt. Je kleiner dieser Quotient, desto schneller stabilisiert sich der Zustand des Systems.

Bild 12 zeigt den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeitsmaxima eines Torus gleicher Geometrie, jedoch mit 100 Abschnitten diskretisiert. Die Berechnung wurde mit dem Lax-Friedrichs-Verfahren durchgeführt, wobei das Verhältnis von der Zeitschrittweite zur Ortsschrittweite, im Vergleich zu der dem Bild 9 zugrundeliegenden Berechnung, halbiert wurde.

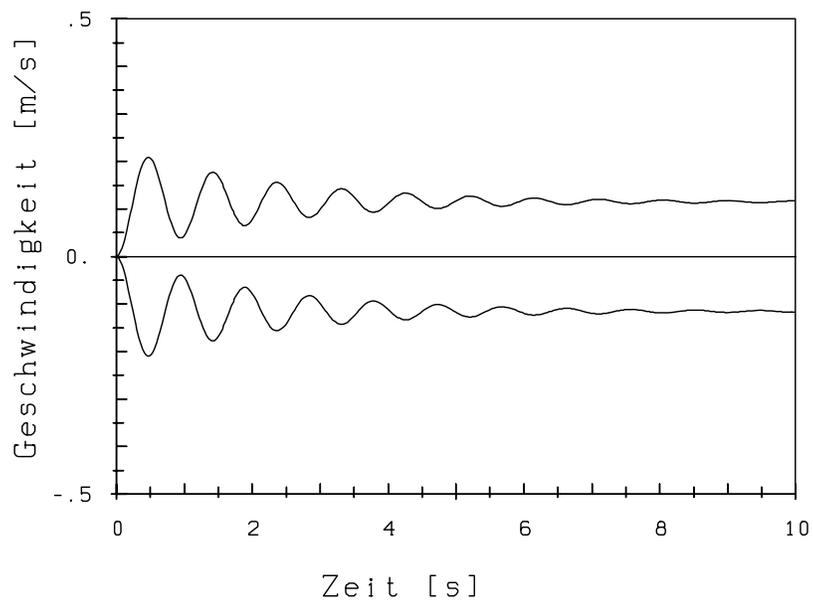


Bild 12: Geschwindigkeitsmaxima: 100 Abschnitte, Lax-Friedrichs-Verfahren

6 Modellierung eines einfachen Naturumlauf-Dampferzeugers

Um das instationäre Verhalten eines einfachen Naturumlauf-Dampferzeugers einer numerischen Behandlung zugänglich zu machen, ist eine Modellierung der einzelnen Systemkomponenten erforderlich. Der auf seine einfachste Form reduzierte Naturumlauf-Dampferzeuger, welcher in Bild 1 dargestellt ist, besteht aus der Trommel, einem Fallrohr, einem Sammler und einem Steigrohr.

6.1 Modellierung der Rohre

Die instationäre Rohrströmung wird durch das im Abschnitt 2.1 angegebene Differentialgleichungssystem (2) und die Zustandsgleichungen des Fluids (10) und (11) beschrieben. Da dieses Gleichungssystem nur für *gerade* Rohrstücke das physikalische Verhalten einer Strömung unter Gravitationseinfluß zufriedenstellend wiedergibt, werden sowohl das unbeheizte Fallrohr als auch das Steigrohr, welches teilweise beheizt ist, für die numerische Behandlung als gerade Rohre angenommen. Bei gekrümmten Rohren sind hier Probleme zu erwarten. Es sei auf die Schwierigkeiten bei der Approximation der Lösung im Torus verwiesen.

Die Geometrie der Rohre wird durch die Angabe der Rohrlänge, des Außendurchmessers und der Wandstärke bestimmt. Von den physikalischen Eigenschaften des Rohrwerkstoffes sind die Dichte und die spezifische Wärmekapazität erforderlich.

Für die numerische Behandlung werden die Rohre als eindimensional angesehen; es gibt eine Ortsvariable $x \in [0, L]$. Im allgemeinen wählt man zur Diskretisierung des Intervalls $0 \leq x \leq L$ ein nichtäquidistantes Gitter. Eine variable Schrittweite Δx_i ermöglicht, das Gitter dem Verlauf der Lösung anzupassen. Ändert sich die Lösung stark, so muß man feiner diskretisieren, um dies zu erfassen. Solche kritischen Bereiche sind bei den Übergängen von dem beheizten Rohrstück auf die unbeheizten Teile des Steigrohres zu erwarten.

Bei der Ortsdiskretisierung der Rohre muß man jedoch beachten, daß die maximal zulässige Zeitschrittweite der Berechnung von der kleinsten Ortsschrittweite über die CFL-Bedingung (35) bestimmt wird. Es erscheint also nicht sinnvoll, im Ort zu fein zu diskretisieren, da dies im allgemeinen die Zeitschrittweite verkürzt. Andererseits wird man Δx_i aus Genauigkeitsgründen nicht zu groß wählen dürfen. Deshalb kann man durch gröbere Diskretisierung von Abschnitten, in welchen sich die Zustandsgrößen wenig ändern, zum Beispiel im Fallrohr, Rechenzeit sparen. Die Rechenzeit, welche für die Berechnung der Lösung in einem Zeitintervall erforderlich ist, hängt nicht nur von der Zeitschrittweite, sondern auch von der Anzahl der erforderlichen Berechnungen während eines Zeitschrittes ab. Eine

Reduktion der Anzahl der Diskretisierungsabschnitte bewirkt eine Verringerung der Rechenzeit und damit eine Effizienzsteigerung. Aus diesem Grund wird die dem Problem sinnvoll angepaßte Diskretisierung der Rohre für die erforderliche Rechenzeit zum bestimmenden Faktor.

Die Implementierung der numerischen Methoden auf nichtäquidistanten Gittern ist im allgemeinen sehr aufwendig und wurde deshalb nicht realisiert. In den dieser Arbeit zugrundeliegenden Berechnungen wurde sowohl das Fallrohr als auch das Steigrohr in gleich viele äquidistante Abschnitte unterteilt. Es muß aber festgehalten werden, daß in einer optimalen Diskretisierung sicher noch ein erhebliches Einsparungspotential an Rechenzeit liegt.

Als Lösungsverfahren für das partielle Differentialgleichungssystem (9), welches die Zustandsänderungen in den Rohren beschreibt, kommt ausschließlich die Charakteristikenmethode in Frage, da es beim Lax-Friedrichs-Verfahren nicht möglich ist, die Randbedingungen geeignet zu definieren.

6.2 Modellierung des Sammlers

Die Sammler dienen im Dampferzeugerbau zur Verbindung einiger dicker Zu beziehungsweise Abströmrohre mit einer großen Anzahl von dünnen Heizflächenrohren. Der Innendurchmesser der Sammler ergibt sich aus der maximal zulässigen Quergeschwindigkeit zwischen den Verbindungs- und den Heizflächenrohren. Aufgrund des relativ großen Durchmessers, der Erhöhung der Anstrengung des Wandwerkstoffes infolge der zahlreichen Rohranschlüsse und dem hohen Innendruck ergeben sich für diese Bauteile beachtliche Wandstärken. Als dickwandige Bauteile sind die Sammler empfindlich für Wärmespannungen und daher ist die Kenntnis ihrer Temperaturgradienten im instationären Betrieb eines Dampferzeugers besonders wichtig. Weiters stellen sie durch ihre große Masse einen beachtlichen Energiespeicher dar. Der Energieaustausch zwischen dem Sammler und dem Umlaufwasser ist daher im instationären Betrieb eine Größe, an deren Beobachtung man interessiert ist. Da sich die Sammler eines Dampferzeugers nicht im beheizten Bereich befinden, ist es erforderlich, diese zu isolieren, um Wärmeverluste möglichst klein zu halten.

Auf die einfachste Form reduziert, besteht ein Sammler, wie in [Bild 13](#) dargestellt, aus einem dickwandigen zylindrischen Körper, in welchen radial ein Einström- und ein Ausströmrohr münden. Dieser zylindrische Körper wird durch sein Volumen V_S und durch seine Stahlmasse m_{St} charakterisiert. Die Interaktion des Sammlers mit dem Rohrsystem erfolgt durch die Einströmöffnung mit dem Querschnitt A_E und die Ausströmöffnung mit dem Querschnitt A_A .

Für die Berechnung der Zustandsänderungen im Sammler wurden folgende vereinfachenden Annahmen getroffen:

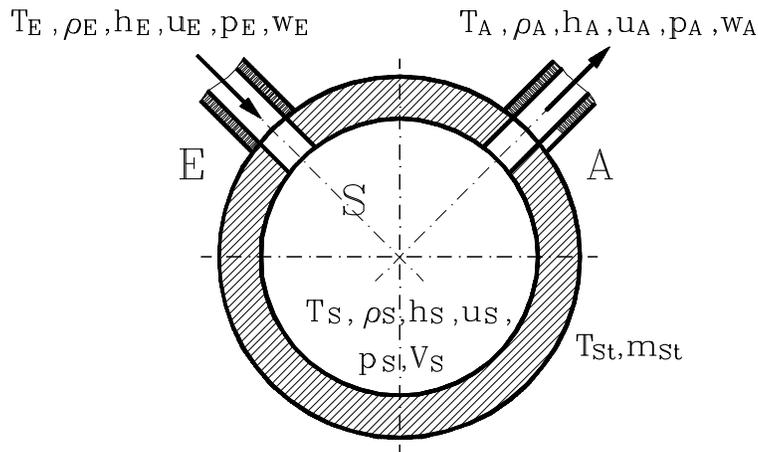


Bild 13: Schema eines Sammlers

- Keine Schwerkraftverteilung von Dichte und Druck. Diese Annahme ist zulässig, da die geodätische Höhe des Sammlers gegenüber der des Rohrsystems klein ist.
- Konstante Dichte im ganzen Sammler. Dies ist ebenfalls eine zulässige Annahme, da aufgrund der Ein- und Ausströmvorgänge heftige Turbulenzen für eine gute Durchmischung des Fluids im Sammler sorgen.
- Die Temperatur des Sammlerwerkstoffes ist zu jedem Zeitpunkt gleich der Temperatur des strömenden Mediums. Diese Vereinfachung wurde getroffen, um bei vertretbarem Rechenaufwand zumindest das Wärmespeicherverhalten des Sammlerwerkstoffes berücksichtigen zu können. Die zur Berechnung der Wärmespannungen erforderlichen örtlichen Temperaturgradienten sollen in dieser Arbeit nicht untersucht werden. Die exakten Beziehungen für das Problem der instationären Wärmeleitung zwischen einem Fluid und einer Wand sind in [11] und weiterführend in [12] angegeben.

Aufgrund obiger Annahmen stellt der Sammler für die numerische Berechnung ein punktförmiges Gebilde dar. Seine Geometrie wird, wie bereits erwähnt, durch sein Volumen, seine Stahlmasse und seine Ein- und Ausströmquerschnitte definiert. Der thermodynamische Zustand wird durch den Druck und die Dichte des Fluids im Sammlerinneren charakterisiert. Die Temperatur sowie die spezifische Enthalpie und die spezifische innere Energie sind mit diesen Zustandsgrößen über die thermische beziehungsweise kalorische Zustandsgleichung gekoppelt.

Das Gleichungssystem, welches den Sammler beschreibt, muß für jeden Rohranschluß, je nachdem, ob der Geschwindigkeitsvektor in den Sammler oder in das Rohr weist, eine beziehungsweise zwei Randbedingungen liefern. Dieses Gleichungssystem besteht, wie jenes zur Beschreibung der Rohrabschnitte, aus

Massenbilanz, Energiebilanz und Impulsbilanz. Da der Sammler punktförmig, das heißt ohne räumliche Ausdehnung, modelliert wird, nehmen die Erhaltungssätze die Form gewöhnlicher Differentialgleichungen bezüglich t an.

Für den instationären Fall mit mehreren Anschlüssen lauten sie

$$\frac{d}{dt}\rho_S V_S = \sum_i \rho_i w_i A_i - \sum_j \rho_j w_j A_j, \quad (59a)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_S u_S V_S + m_{St} c_{pSt} T_{St}) = \sum_i \rho_i w_i h_i A_i - \sum_j \rho_j w_j h_j A_j, \quad (59b)$$

$$p_S = p_i - \frac{c_{RA}}{2} \rho_i w_i^2 \quad \text{bzw.} \quad p_j = p_S - \frac{c_{RE}}{2} \rho_j w_j^2. \quad (59c)$$

Mit dem Index S werden hier die Größen im Sammler bezeichnet; i steht für die Größen am Sammlereintritt und j für jene am Sammleraustritt. Der Index St kennzeichnet die Daten des Sammlerwerkstoffes.

Die Impulsbilanz (59c) ist bei diesem Problem auf eine Druckbilanz reduziert, welche den Zusammenhang zwischen dem Druck im Sammler und jenem in den Rohranschlußpunkten herstellt. Sie nimmt für die Eintritts- und die Austrittsrohre unterschiedliche Gestalt an. Mit dem Faktor c_{RA} wird der Druckverlust an den Eintrittsrohren und mit dem Faktor c_{RE} jener an den Austrittsrohren berücksichtigt. Bei positivem w_i , was bedeutet, daß die Masse vom Eintrittsrohr in den Sammler strömt, nimmt c_{RA} den Wert 1 an und stellt damit einen Austrittsdruckverlust dar. Bei negativem w_i erhält c_{RA} den Wert $-0,5$, was dann den Rohreintrittsdruckverlust quantifiziert. Umgekehrt erhält c_{RE} bei positivem w_j den Wert $0,5$ und bei negativem w_j den Wert -1 .

Massen- und Energiebilanz, zusammen mit der kalorischen und der thermischen Zustandsgleichung, bilden ein Gleichungssystem zur Berechnung von Druck und Dichte im Sammler. Die Impulsbilanz liefert den Druck als Randbedingung sowohl für Rohre, welche Masse in den Sammler einbringen, als auch für jene, welche Masse aus dem Sammler abziehen. Für jene Rohre, in welche Masse eintritt, muß noch eine zusätzliche Randbedingung angegeben werden.

Da der Sammler nach außen hin wärmeisoliert ist, kann der mit Druckverlust behaftete Einstromvorgang vom Sammler in das Rohr als adiabate Drosselung angesehen werden. Bei dieser Zustandsänderung bleibt, nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik für Fließprozesse, die Totalenthalpie konstant. Damit liefern die Gleichungen

$$h_s = h_i + \frac{w_i^2}{2} \quad \text{für} \quad w_i < 0, \quad (60a)$$

$$h_s = h_j + \frac{w_j^2}{2} \quad \text{für} \quad w_j < 0, \quad (60b)$$

die zweite Randbedingung für Rohre, welche Masse aus dem Sammler abziehen.

Ersetzt man die Zeitableitung in der Massenbilanz (59a) und in der Energiebilanz (59b) für einen einfachen Sammler mit zwei Rohranschlüssen, wie er in Bild 13 dargestellt ist, durch Differenzenquotienten, so erhält man

$$\rho_S^{n+1} = \rho_S^n + \frac{\Delta t}{V_S}(\rho_E^n w_E^n A_E - \rho_A^n w_A^n A_A), \quad (61a)$$

$$\begin{aligned} V_S \rho_S^{n+1} u_S^{n+1} + m_{St} c_{pSt} T_S^{n+1} &= \Delta t (\rho_E^n w_E^n h_E^n A_E - \rho_A^n w_A^n h_A^n A_A) + \\ &+ V_S \rho_S^n u_S^n + m_{St} c_{pSt} T_S^n. \end{aligned} \quad (61b)$$

In Übereinstimmung mit Bild 13 wurde der Index i durch E und j durch A ersetzt. Aus der diskreten Form der Massenbilanz (61a) rechnet man die Dichte im Sammler zum Zeitpunkt t_{n+1} aus. Die diskrete Form der Energiebilanz (61b) stellt, zusammen mit der thermischen Zustandsgleichung (10) und den kalorischen Zustandsgleichungen (11), ein nichtlineares Gleichungssystem für Druck, spezifische innere Energie, spezifische Enthalpie und Temperatur des Mediums im Sammler für den Zeitpunkt t_{n+1} dar.

Der Druck ist der erste Randwert für die Anschlußpunkte der Rohre. Man erhält ihn aus der Impulsbilanz (59c) als

$$p_A^{n+1} = p_S^{n+1} - \frac{\rho_A^n (w_A^n)^2}{4} \quad \text{für} \quad w_A^n \geq 0, \quad (62a)$$

$$p_A^{n+1} = p_S^{n+1} + \frac{\rho_A^n (w_A^n)^2}{2} \quad \text{für} \quad w_A^n < 0, \quad (62b)$$

$$p_E^{n+1} = p_S^{n+1} + \frac{\rho_E^n (w_E^n)^2}{2} \quad \text{für} \quad w_E^n > 0, \quad (62c)$$

$$p_E^{n+1} = p_S^{n+1} - \frac{\rho_E^n (w_E^n)^2}{4} \quad \text{für} \quad w_E^n \leq 0. \quad (62d)$$

Die zweite Randbedingung für Rohre, welche Masse aus dem Sammler abziehen, liefert die Forderung $h = \text{konstant}$ bei adiabater Drosselung.

Man erhält also mit

$$h_S^{n+1} - h(p_E^{n+1}, \rho_E^{n+1}) = 0 \quad \text{für} \quad w_E^n < 0, \quad (63a)$$

$$h_S^{n+1} - h(p_A^{n+1}, \rho_A^{n+1}) = 0 \quad \text{für} \quad w_A^n \geq 0, \quad (63b)$$

jeweils eine Beziehung für die Dichte zum Zeitpunkt t_{n+1} für die Rohranschlußpunkte, falls der Geschwindigkeitsvektor ins jeweilige Rohr weist.

6.3 Kesseltrommel

Die Trommel ist ein zylinderförmiger Behälter, welcher bei Naturumlauf-Dampferzeugern (Dampfkesseln) das Fall- und das Steigrohrsystem verbindet. Sie

dient dazu, das in den beheizten Steigrohren erzeugte Wasser-Dampf-Gemisch möglichst vollständig zu trennen. Um das Mitreißen von Wassertropfen mit dem Sattdampfstrom zu vermeiden, sind bestimmte Trommeleinbauten erforderlich, die sich je nach Betriebsdruck unterscheiden. Bild 14 zeigt eine Trommel samt Inneneinbauten für einen Betriebsdruck von 130 [bar]. Sie hat einen Durchmesser von 2 [m] und eine Länge von ungefähr 9 [m]. Die Wandstärke beträgt 80 [mm].

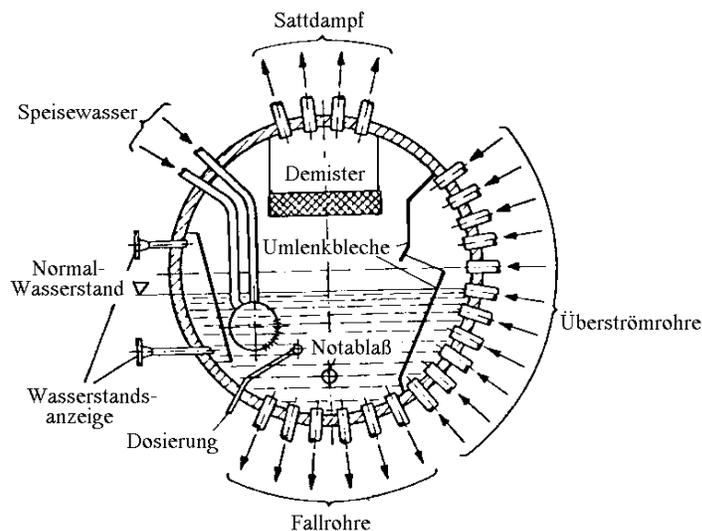


Bild 14: Kesseltrommel (Mannesmann), Trommeleinbauten(Lentjes) [1]

Bei dieser Bauart erfolgt die Trennung von Wasser und Dampf vorwiegend infolge der Schwerkraft. Der spezifisch leichtere Dampf sammelt sich im oberen Bereich der Trommel, dem sogenannten Dampfraum. Das Wasser, welches spezifisch schwerer ist, verbleibt im unteren Bereich der Trommel. Dieser Teil wird als Wasserraum bezeichnet. Die Trennlinie zwischen Wasser und Dampf nennt man Wasserstand.

Das in den Steigrohren erzeugte Wasser-Dampf-Gemisch gelangt durch die Überströmröhre in die Trommel. Die Umlenkbleche zwingen den Wasser-Dampf-Strom dazu, ins Trommelwasser einzudringen und dort eine heftige Durchmischung mit dem Speisewasser herbeizuführen. Es erfolgt dabei ein Energieaustausch zwischen dem Speisewasser und dem Wasser-Dampf-Gemisch, bei dem ein gewisser Teil des Dampfes kondensiert, und hilft das Speisewasser auf Siedezustand zu bringen. Der restliche Teil des Dampfes tritt durch die Wasseroberfläche in den Dampfraum, wird im Demister getrocknet und verläßt über die Sattdampfrohre die Trommel. Der aus dem Wasser austretende Sattdampfstrom sollte eine Geschwindigkeit von 3 [m/s] nicht überschreiten, um ein Mitreißen von Wassertropfen zu verhindern. Diese Forderung führt zu einem relativ großen Trommeldurchmesser.

Der kondensierte Dampf strömt zusammen mit dem Speisewasser in die Fallrohre. Das Speisewasser wird in Rohren in den Wasserraum geführt und strömt dort über einen Verteilerzylinder gleichmäßig ins Trommelwasser. Diese Einrichtung dient ebenfalls dazu, das Speisewasser mit dem Trommelwasser zu durchmischen und soll verhindern, daß Strähnen kalten Speisewassers direkt in die Fallrohre gelangen. Die Wasserstandsanzeiger dienen zur Feststellung des höchsten und des niedrigsten Wasserstandes.

Wird ein Dampferzeuger bei höheren Drücken betrieben, so reicht die Schwerkraft allein nicht aus, um den Dampf vom Wasser zu trennen, da mit steigendem Druck die Differenz zwischen Sattdampfdichte und Sattwasserdichte sinkt. Bei dieser Dampferzeugerbauart werden anstelle der Umlenkleche Abscheidezyklone eingebaut. In diese Zyklone tritt das Dampf-Wasser-Gemisch tangential ein und wird von den Zyklonwänden auf kreisförmige Bahnen abgelenkt. Durch die großen Zentrifugalkräfte wird das Wasser nach außen gepreßt und fließt durch den sich nach unten hin erweiternden Teil der Zyklone in den Wasserraum, während der Dampf im Innern der Zyklone axial nach oben strömt. Durch die Prallbleche, welche oberhalb der Zyklone angeordnet sind und zur Dampftrocknung dienen, gelangt der Dampf schließlich in den Dampfraum.

Wegen der großen Abmessungen sowie der Verschwächung durch die zahlreichen Rohranschlüsse ist die Trommel das dickwandigste Element des Dampferzeugers. Die Wandstärken erreichen, abhängig von Betriebsdruck und Trommeldurchmesser, bis zu 150 [mm]. Um in diesem dickwandigen Bauteil die Thermospannungen in zulässigen Grenzen halten zu können, dürfen die örtlichen Temperaturgradienten in der Trommel gewisse Größen nicht überschreiten. Da im Siedezustand Druck und Temperatur des Wassers gekoppelt sind, werden die für den Betrieb zulässigen Druckgradienten durch die thermischen Spannungen in der Trommelwand bestimmt.

Für die Einbindung der Trommel in das mathematische Modell eines einfachen Naturumlauf-Dampferzeugers werden die folgenden vereinfachenden Annahmen getroffen.

- Teilung der Trommel in einen Wasserraum und einen Dampfraum, welche stets konstantes Volumen aufweisen.

Energie- und Massenaustausch zwischen diesen beiden Räumen ist zwar möglich, eine Änderung des Wasserstandes in der Trommel ist jedoch nicht zugelassen. Entsteht also während eines Zeitschrittes ein Überschuß an Wasser in der Trommel, so muß dieser durch das Speisewasserrohr abgeführt werden.

- Der Wert des Druckes in der Trommel als Funktion der Zeit wird vorgegeben und ist in der gesamten Trommel konstant.

Die Annahme konstanten Druckes in der gesamten Trommel ist keine gravierende Abweichung von der praktischen Situation, da die Höhenausdehnung der Trommel gegenüber der des Rohrsystems vernachlässigbar ist. Den Trommeldruck zwingend vorzuschreiben schränkt die praktische Anwendbarkeit des Modelles ebenfalls nicht ein. Tatsächlich hängt der Trommeldruck vom Druckverlust der Dampfverbraucher ab. Dieser Druckverlust ist wiederum vom Dampfmassenstrom abhängig, woraus folgt, daß der Trommeldruck und der Dampfmassenstrom gekoppelt sind. Bei bekannter Geometrie und bekannten Strömungsverhältnissen im Dampfverbraucher kann man den Trommeldruck für den nächsten Zeitschritt explizit berechnen. Diese Möglichkeit erlaubt, die peripheren Anlagenteile unberücksichtigt zu lassen und für die Modellbetrachtung den zeitlichen Verlauf des Trommeldruckes vorzugeben.

- Es findet ein idealer Energieaustausch in der Trommel statt, sodaß zu jedem Zeitpunkt im Innern sowie im Stahlkörper der Trommel eine konstante Temperaturverteilung herrscht.

Diese Annahme setzt eine gute Durchmischung des meist etwas kälteren Speisewassers mit dem Trommelinhalt und einen guten Energieaustausch zwischen der gasförmigen und der flüssigen Phase des Wassers in der Trommel voraus. Es wird angenommen, daß in der Trommel Siedezustand herrscht, wenn Dampf produziert wird. Sorgt man durch entsprechende Einbauten dafür, daß das Speisewasser gut verteilt in die Trommel eingebracht wird, und zwingt man das Wasser-Dampf-Gemisch durch Umlenkleche, eine intensive Durchmischung des Wassers in der Trommel herbeizuführen, so ist diese Annahme gerechtfertigt. Will man trotzdem eine etwaige Unterkühlung des in die Fallrohre eintretenden Wassers infolge schlechter Vermischung im Wasserraum berücksichtigen, so kann dies, wie beispielsweise im Programm *NOWA* [2] zur Strömungsberechnung in beheizten Rohrnetzwerken, durch einen Unterkühlungsfaktor geschehen. Diese Option wäre auch im vorliegenden Fall relativ leicht zu implementieren. Es wurde aber darauf verzichtet, da dies keinen wesentlichen Beitrag zum Studium der Phänomene im instationären Betrieb eines Naturumlauf-Dampferzeugers liefert.

Die Voraussetzung, daß die Stahlmanteltemperatur gleich der Temperatur des Trommelinhaltes ist, bedeutet, daß sowohl der Wärmeübergang vom Trommelinhalt auf die Trommelwand als auch die Wärmeleitfähigkeit des Stahlwerkstoffes unendlich groß sein müßten. Dies trifft in Wirklichkeit, trotz der heftigen Turbulenzen relativ hohen Wärmeübergangskoeffizienten im Trommelinneren, nicht zu. Diese Vereinfachung wird jedoch gemacht, um den an sich schon komplexen Vorgang des instationären Verhaltens nicht unüberschaubar zu komplizieren.

- Das Überströmrohr weist keinen Überhub auf.

Diese Annahme, die Geometrie betreffend, bedeutet, daß das Überströmrohr in den Wasserraum mündet. Dies kommt bei realen Dampferzeugern ebenfalls vor und hat hier den Sinn, daß sowohl für das Fall- als auch für das Steigrohr dieselben Randbedingungen gelten. In beiden Fällen soll, wenn der Geschwindigkeitsvektor ins Rohr weist, die Dichte im Rohranschlußpunkt über die Beziehung der adiabaten Drossel angegeben werden.

Da mit dem hier definierten Trommelmodell auch Anfahrvorgänge vom kalten Zustand des Dampferzeugers simuliert werden sollen, ist noch eine Annahme für den Übergang vom einphasigen zum zweiphasigen Zustand in der Trommel zu treffen.

- Befindet sich die Enthalpie des Trommelwassers bei gegebenem Trommeldruck unter der Sattwasserenthalpie, so ist der Dampfraum leer und die Dampfgeschwindigkeit w_D gleich Null. Wird die Sattwasserenthalpie erreicht, so herrscht in der Trommel Siedezustand und der gesamte Dampfraum ist mit trocken gesättigtem Dampf gefüllt.

Diese Annahme bewirkt zwar beim erstmaligen Erreichen des Siedezustandes eine große Unstetigkeit im Energiezustand der Trommel, welche jedoch nur während weniger Zeitschritte beobachtet wird. Die genauen Ursachen und Folgen dieser Erscheinung werden später erläutert.

Mit den eben getroffenen Annahmen läßt sich die Trommel wie in Bild 15 dargestellt modellieren.

Die Geometrie der Trommel wird durch die Angabe des Wasserraumvolumens V_W und des Dampfraumvolumens V_D , sowie durch die Angabe der Querschnitte der Rohranschlüsse des Speisewassers A_S , des Fallrohres A_F , des Überströmrohres A_U und des Dampfentnahmerohres A_D bestimmt. Um das thermodynamische Verhalten des Trommelwerkstoffes berücksichtigen zu können, muß die Stahlmasse m_{St} sowie die spezifische Wärmekapazität des Stahles c_{pSt} angegeben werden.

Für die Berechnung des Zustandes in der Trommel sind grundsätzlich zwei Fälle zu unterscheiden, welche auch durch unterschiedliche Gleichungen beschrieben werden.

1. Bei gegebenem Trommeldruck liegt der energetische Zustand des Trommelinhaltes unterhalb des Siedezustandes.

In diesem Fall ist der Wasserraum mit unterkühltem Wasser gefüllt, der Dampfraum ist leer. Der Zustand des Wassers ist neben dem Trommeldruck p_T durch die Dichte ρ_W festgelegt. Diesem Zustand sind über die thermische beziehungsweise die kalorische Zustandsgleichung die Wassertemperatur T_W sowie die spezifische Enthalpie h_W und die spezifische innere Energie u_W des Wassers zugeordnet.

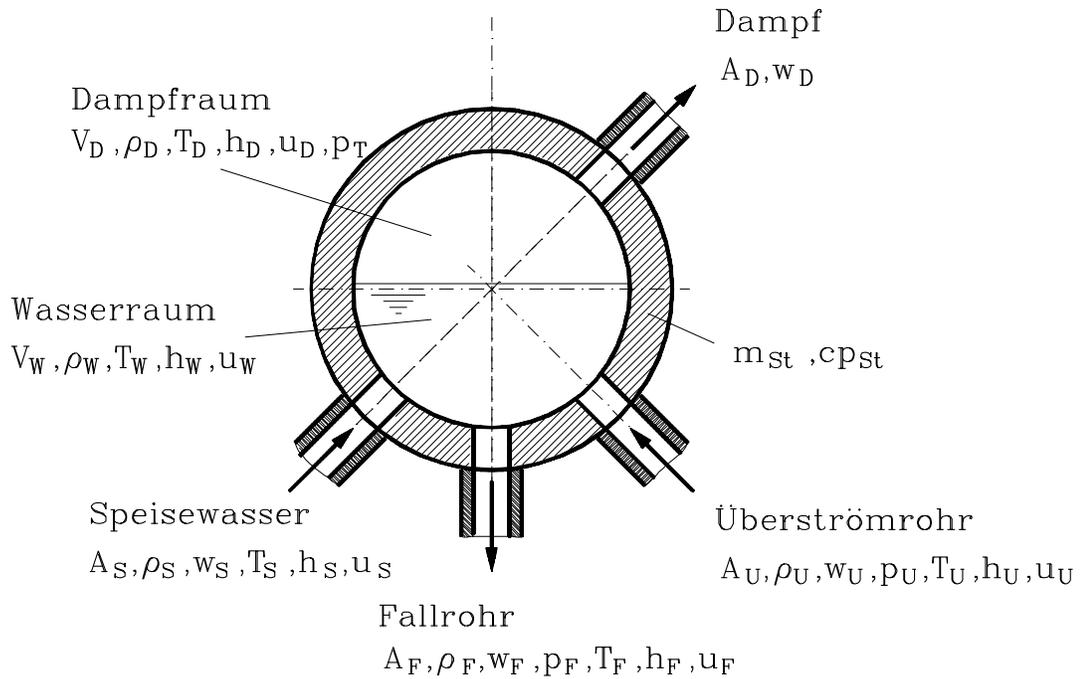


Bild 15: Modell einer Kesseltrommel

2. Bei gegebenem Trommeldruck befindet sich der Trommelinhalt im Siedezustand.

In diesem Fall ist der Wasserraum mit Sattwasser gefüllt und im Dampfraum befindet sich trocken gesättigter Dampf. Hier ist durch die Angabe des Trommeldruckes p_T allein sowohl der Zustand der flüssigen als auch jener der gasförmigen Phase des Wassers fixiert. Für den Siedezustand ergibt sich die Temperatur des Wassers T_W , gleich der des Dampfes T_D , aus der Dampfdruckkurve,

$$T_W = T_D = T_{Satt}(p_T). \quad (64)$$

Weiters hat das Wasser die gleiche Dichte, spezifische Enthalpie und spezifische innere Energie wie das Siedewasser, während der Dampf die analogen Zustandsgrößen von Sattdampf annimmt,

$$\rho_W = \rho_L(p_T), \quad h_W = h_L(p_T) \quad \text{und} \quad u_W = u_L(p_T), \quad (65a)$$

$$\rho_D = \rho_G(p_T), \quad h_D = h_G(p_T) \quad \text{und} \quad u_D = u_G(p_T). \quad (65b)$$

Der Zustand des Speisewassers wird in beiden Fällen durch den Druck, welcher identisch dem Trommeldruck angenommen wird, und durch die Speisewasserdichte ρ_S fixiert. Temperatur T_S , spezifische Enthalpie h_S und spezifische

innere Energie u_S sind wieder über die thermische beziehungsweise die kalorische Zustandsgleichung gekoppelt.

Für die mathematische Modellierung stellt die Trommel, ähnlich wie der Sammler, ein punktförmiges Gebilde dar, dessen instationäres Verhalten durch einen Satz von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben wird. In beiden angeführten Fällen sind dies die Massenbilanz, die Energiebilanz und die auf eine Druckbilanz reduzierte Impulsbilanz.

Zu 1.: Befindet sich im Wasserraum der Trommel Wasser mit einer geringeren spezifischen Enthalpie als die Sättigungsenthalpie für den gegebenen Trommel-
druck,

$$h_W < h_L(p_T), \quad (66)$$

so gelten folgende Erhaltungsbeziehungen:

$$\frac{d}{dt}(\rho_W V_W) = \rho_S w_S A_S - \rho_F w_F A_F + \rho_U w_U A_U, \quad (67a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho_W u_W V_W + m_{St} c_{pSt} T_W) &= \rho_S w_S h_H A_S - \rho_F w_F h_F A_F + \\ &+ \rho_U w_U h_U A_U. \end{aligned} \quad (67b)$$

In der Energiebilanz (67b) muß berücksichtigt werden, daß das Speisewasser, wenn $w_S > 0$ ist, zwar mit der Enthalpie h_S in die Trommel strömt, daß jedoch, wenn in der Trommel ein Massenüberschuß entsteht und deshalb Masse mit $w_S < 0$ durch die Speisewasserleitung abgezogen werden muß, um den Wasserstand konstant zu halten, Trommelwasser mit der Enthalpie h_W durch die Speisewasserleitung austritt. Dies wird durch folgende Bedingung gesichert:

$$h_H = h_S \quad \text{für } w_S \geq 0, \quad (68a)$$

$$h_H = h_W \quad \text{für } w_S < 0. \quad (68b)$$

Ersetzt man die Zeitableitung in den Erhaltungssätzen (67) durch Differenzenquotienten, so erhält man

$$\begin{aligned} V_W(\rho_W^{n+1} - \rho_W^n) &= \Delta t(\rho_S^{n+1} w_S^{n+1} A_S - \rho_F^n w_F^n A_F + \\ &+ \rho_U^n w_U^n A_U), \end{aligned} \quad (69a)$$

$$\begin{aligned} V_W(\rho_W^{n+1} u_W^{n+1} - \rho_W^n u_W^n) + \\ + m_{St} c_{pSt}(T_W^{n+1} - T_W^n) &= \Delta t(\rho_S^{n+1} w_S^{n+1} h_H^n A_S - \rho_F^n w_F^n h_F^n A_F + \\ &+ \rho_U^n w_U^n h_U^n A_U). \end{aligned} \quad (69b)$$

Zusammen mit den Zustandsgleichungen der Form

$$T_W^{n+1} = T_W^{n+1}(\rho_W^{n+1}, p_T^{n+1}), \quad (70a)$$

$$u_W^{n+1} = u_W^{n+1}(\rho_W^{n+1}, p_T^{n+1}), \quad (70b)$$

$$h_W^{n+1} = h_W^{n+1}(\rho_W^{n+1}, p_T^{n+1}), \quad (70c)$$

stellen die diskretisierten Erhaltungssätze (69) ein nichtlineares Gleichungssystem für ρ_W^{n+1} , T_W^{n+1} , u_W^{n+1} , h_W^{n+1} und w_S^{n+1} dar.

Man beachte, daß im System (69) in den Rohranschlußpunkten des Umlaufsystemes die thermodynamischen Größen zum Zeitpunkt t_n verwendet werden, während beim Speisewasseranschluß alle Werte zum Zeitpunkt t_{n+1} eingesetzt sind. Dieser Ansatz ist deshalb so gewählt, weil die Gleichungen (69) und (70) zur Berechnung des Zustandes in der Trommel dienen und den Einspeisestrom bei Massendefizit oder den Ausspeisestrom bei Massenüberschuß innerhalb eines Zeitschrittes liefern sollen. Die Beziehungen für die Interaktion der Trommel mit dem Umlaufsystem werden noch später hergeleitet.

Die Randbedingungen für das partielle Differentialgleichungssystem von Fall- und Überströmrohr erhält man, analog zum Sammlermodell, aus einer auf die Druckbilanz reduzierten Impulsbilanz und aus der Beziehung für die adiabate Drosselung, falls Wasser in das betrachtete Rohr einströmt. Für den Druck im Rohranschlußpunkt ergibt sich unter Berücksichtigung etwaiger Einbeziehungsweise Ausströmverluste

$$p_F^{n+1} = p_T^{n+1} - \frac{\rho_F^n (w_F^n)^2}{4} \quad \text{für} \quad w_F^n \geq 0, \quad (71a)$$

$$p_F^{n+1} = p_T^{n+1} + \frac{\rho_F^n (w_F^n)^2}{2} \quad \text{für} \quad w_F^n < 0, \quad (71b)$$

$$p_U^{n+1} = p_T^{n+1} + \frac{\rho_U^n (w_U^n)^2}{2} \quad \text{für} \quad w_U^n \geq 0, \quad (71c)$$

$$p_U^{n+1} = p_T^{n+1} - \frac{\rho_U^n (w_U^n)^2}{4} \quad \text{für} \quad w_U^n < 0. \quad (71d)$$

Für den Fall, daß Wasser in das betrachtete Rohr eintritt, lautet die Beziehung für die adiabate Drossel

$$h_T^{n+1} - h(p_U^{n+1}, \rho_U^{n+1}) = 0 \quad \text{für} \quad w_U^n < 0, \quad (72a)$$

$$h_T^{n+1} - h(p_F^{n+1}, \rho_F^{n+1}) = 0 \quad \text{für} \quad w_F^n > 0, \quad (72b)$$

und liefert jeweils mit (71) und der kalorischen Zustandsgleichung eine Beziehung für ρ_F^{n+1} und für ρ_U^{n+1} .

An dieser Stelle muß betont werden, daß für $w_F^n < 0$ und $w_U^n > 0$ die Werte ρ_F^{n+1} und ρ_U^{n+1} aus den Diskretisierungen der Gleichungen für die entsprechenden Rohre berechnet werden und deshalb keinesfalls als Randbedingung vorgeschrieben werden dürfen, da man sonst ein falsches Ergebnis erhält.

Zu 2.: Wenn sich der Trommelinhalt bei gegebenem Trommeldruck p_T im Siedezustand befindet,

$$h_W \geq h_L(p_T), \quad (73)$$

so muß auch der Dampfraum berücksichtigt werden, und die Erhaltungsbeziehungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho_W V_W + \rho_D V_D) &= \rho_S w_S A_S - \rho_F w_F A_F + \\ &+ \rho_U w_U A_U - \rho_D w_D A_D, \end{aligned} \quad (74a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho_W u_W V_W + \rho_D u_D A_D + \\ + m_{St} c_{pSt} T_W) &= \rho_S w_S h_H A_S - \rho_F w_F h_F A_F + \\ &+ \rho_U w_U h_U A_U - \rho_D w_D h_D A_D. \end{aligned} \quad (74b)$$

Die Berücksichtigung der Strömungsrichtung für die Wahl der Enthalpie im Speisewasserterm der Energiebilanz (74b) geschieht wie in Fall 1, siehe Gleichung (68). Da in der Trommel Siedezustand herrscht, sind die thermodynamischen Zustandsgrößen nach (64) und (65) ausschließlich Funktionen des Trommeldruckes p_T .

Durch Diskretisieren der Erhaltungsbeziehungen (74) erhält man

$$\begin{aligned} V_W(\rho_W^{n+1} - \rho_W^n) + \\ + V_D(\rho_D^{n+1} - \rho_D^n) &= \Delta t(\rho_S^{n+1} w_S^{n+1} A_S - \rho_F^n w_F^n A_F + \\ &+ \rho_U^n w_U^n A_U - \rho_D^{n+1} w_D^{n+1} A_D), \end{aligned} \quad (75a)$$

$$\begin{aligned} V_W(\rho_W^{n+1} u_W^{n+1} - \rho_W^n u_W^n) + \\ + V_D(\rho_D^{n+1} u_D^{n+1} - \rho_D^n u_D^n) + \\ + m_{St} c_{pSt}(T_W^{n+1} - T_W^n) &= \Delta t(\rho_S^{n+1} w_S^{n+1} h_H^n A_S - \\ &- \rho_F^n w_F^n h_F^n A_F + \rho_U^n w_U^n h_U^n A_U - \\ &- \rho_D^{n+1} w_D^{n+1} h_D^{n+1} A_D). \end{aligned} \quad (75b)$$

Da in diesem Fall die thermodynamischen Zustandsgrößen zum Zeitpunkt t_{n+1} mit p_T^{n+1} sofort feststehen, stellen die diskretisierten Erhaltungssätze (75) ein lineares Gleichungssystem für w_S^{n+1} und w_D^{n+1} dar.

Zur Berechnung der Randwerte in den Rohranschlußpunkten von Fall- und Überströmrohr gelten analog zum Fall 1 die Gleichungssysteme (71) und (72).

Auf die Schwierigkeiten, welche beim Übergang von den Gleichungen für den Fall 1 zu jenen für den Fall 2 auftreten, sei an dieser Stelle noch besonders hingewiesen:

Das Gleichungssystem (69), (70) ist für den Fall hergeleitet, daß sich unterkühltes Wasser im Wasserraum der Trommel befindet. Es kann daher nur Lösungen liefern, deren Werte durch die Siedelinie der Zustandsfläche von Wasser begrenzt ist. Das bedeutet, daß es unmöglich ist, aus (69) und (70) Werte h_W^{n+1} zu erhalten, die größer als $h'(p_T)$ sind. Da man sich der Siedelinie nur in diskreten Schritten

nähert, stellt (73) kein geeignetes Umschaltkriterium von den Gleichungen (69), (70) auf das Gleichungssystem (75), (64) und (65) dar. Es war daher notwendig eine ε -Umgebung der Siedelinie zu definieren und mit der Abfrage

$$h_W \geq h_L(p_T) - \varepsilon \quad (76)$$

eine für die numerische Realisierung geeignete Umschaltbedingung zu erhalten.

Wird beim Übergang zum nächsten Zeitschritt die Bedingung (76) erfüllt, so wird im neuen Zeitschritt mit der Gleichung für Sättigungszustand in der Trommel gerechnet, welche voraussetzt, daß der Dampfraum zur Gänze mit trocken gesättigtem Dampf gefüllt ist. Da meist im Zeitschritt, in welchem das Umschalten erfolgt, eine zu geringe Nettodampfmenge übrigbleibt, um den Dampfraum zu füllen, reagiert das System so, daß es von der Dampfleitung die erforderliche Dampfmenge "holt", um den Dampfraum auszufüllen. Dies hat zur Folge, daß sich im ersten Zeitpunkt nach dem Umschalten eine große negative Dampfgeschwindigkeit einstellt, was physikalisch nicht sinnvoll ist. Eine mögliche Abhilfe wäre, zu kontrollieren, ob der produzierte Dampf bereits das Dampfraumvolumen vollständig gefüllt hat, und erst wenn dies geschehen ist, den Überschußdampf aus der Trommel abzuziehen.

Da die eben erwähnte "Unstetigkeit" in der Dampfgeschwindigkeit keinen Einfluß auf die Phänome im System hat, wurde auf die Implementierung dieser Gegenmaßnahme verzichtet.

Für das Abfahren eines Naturumlauf-Dampferzeugers wurde noch kein Modell für die Umschaltbedingung vom zweiphasigen in den einphasigen Zustand des Trommelinhaltes entwickelt. Bei der derzeitigen Implementierung des Rechenprogrammes hat ein Energietransfer aus der Trommel in das Umlaufsystem zur Folge, daß aus der Dampfleitung gerade soviel Dampf in die Trommel rückströmt und dort kondensiert, daß das Energiedefizit gedeckt wird. Das dabei entstandene Kondensat wird durch die Speisewasserleitung abgeführt.

Ein möglicher Ansatz zur Modellierung einer Umschaltbedingung für den Abfahrvorgang wäre, keine Satttdampfgeschwindigkeiten $w_D < 0$ zuzulassen und sofort, wenn dies erforderlich ist, auf das einphasige System zu wechseln. Tatsächlich müßte jedoch beim Abfahren zuerst der Dampf im Dampfraum der Trommel kondensieren und durch irgendein Inertgas ersetzt werden, um den Druck in der Trommel konstant halten zu können.

Auf jeden Fall sind bei der Modellierung einer Bedingung für den Abfahrvorgang eines Naturumlauf-Dampferzeugers aufgrund der Tatsache, daß die Gleichungssysteme für Sättigungszustand und Unterkühlung nur auf einem bestimmten Definitionsgebiet gelten, ähnliche Schwierigkeiten wie beim Umschalten während der Anfahrphase zu erwarten.

7 Berechnungen des offenen Rohr-Sammler-Modells

Zum Test der gewählten Rechenverfahren und zum Studium der Interaktion der einzelnen Dampferzeugerkomponenten wurde vorerst ein einfaches Rohr-Sammler-Modell untersucht. Es besteht, wie in Bild 16 dargestellt, aus zwei senkrechten Röhren, welche am unteren Ende mit einem Sammler verbunden sind.

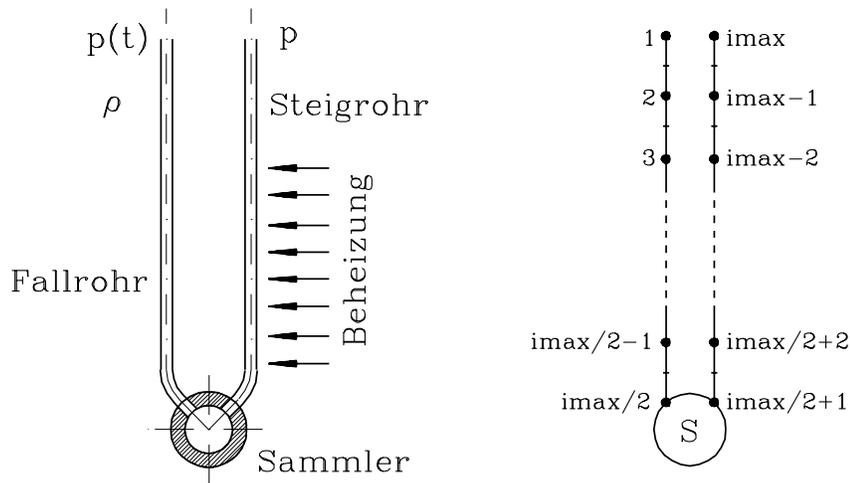


Bild 16: Offenes Rohr-Sammler-Modell

Um dieses Modell einer numerischen Behandlung zugänglich machen zu können, muß es “diskretisiert” werden. Dabei werden die Röhre in Abschnitte unterteilt. Der Zustand in diesen Rohrabschnitten wird durch die Angabe des Integralmittelwertes über einen Ortsschritt der einzelnen Zustandsgrößen in den Knotenpunkten beschrieben. Um die Ergebnisse besser darstellen zu können, wurden die Rohrabschnitte, wie Bild 16 zeigt, bei einem Rohr von oben nach unten, von 1 bis $imax/2$, und beim anderen von unten ausgehend nach oben hin, von $imax/2 + 1$ bis $imax$, bezeichnet.

Der Sammler stellt einen besonderen Knotenpunkt dar, welcher die Integralmittelwerte der Zustandsgrößen des Sammlers repräsentiert.

Zur Untersuchung des instationären Verhaltens des Strömungsmediums in den Röhren wurde die Charakteristikenmethode gewählt, wobei die Randwerte an den Stellen $imax/2$ und $imax/2 + 1$ von den Gleichungen (62), (63) geliefert werden. An den Knotenpunkten 1 und $imax$ muß der zeitliche Verlauf der Randwerte extern vorgegeben werden. Dabei ist zu beachten, daß der Druck zu jedem Zeitpunkt an beiden Rohrschenkeln (1 und $imax$) vorzugeben ist, während die Dichte nur dann vorgegeben werden darf, wenn Masse in das betrachtete Rohr einströmt.

Die Geometrie des Rohr-Sammler-Modells umfaßt folgende Daten:

Rohr:

Abmessung:	D	=	21.3	[mm]
	s	=	2.0	[mm]
	L	=	60.0	[m]
Werkstoff: St45.8	ρ_{St}	=	7840.0	[kg/m ³]
	c_p	=	580.0	[J/kgK]

Sammler:

Abmessung:	V_S	=	4.23110 ⁻³	[m ³]
Werkstoff: St45.8	m_{St}	=	12.3	[kg]
	c_p	=	580.0	[J/kgK]

Die Rohrlänge wurde deshalb so groß angenommen, um auch für leichte Medien noch nennenswerte Druckgradienten (als Folge der Gravitation) beobachten zu können.

7.1 Ideales Gas als Strömungsmedium

Für die erste Versuchsreihe wurde ein ideales Gas als Strömungsmedium angenommen. Die thermodynamischen Eigenschaften des Gases wurden durch die Angabe der Gaskonstanten, $R = 461.522$ [J/kgK], und der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck, $c_p = 2828$ [J/kgK], fixiert.

Als Startwerte wurde an den oberen Enden der Schenkel ein Druck von $p_1 = p_{imax} = 40$ [bar] und eine Dichte von $\rho_1 = \rho_{imax} = 17$ [kg/m³] vorgegeben. Die Gravitation bewirkt, vom Punkt 1 ausgehend, einen Druckverlauf der Form

$$p_i^0 = p_{imax+1-i}^0 = p_1^0 e^{\frac{g}{RT}ih}, \quad i = 2, 3, \dots, imax/2. \quad (77)$$

Die Dichteverteilung ergibt sich, nach der idealen Gasgleichung bei $T = \text{konstant}$, in analoger Weise.

Als Startwerte für die Zustandsgrößen im Sammler wurden die Werte in den Rohranschlußpunkten $imax/2$ beziehungsweise $imax/2 + 1$ herangezogen.

Für die Simulation mit idealem Gas wurde zur Berücksichtigung der Reibungsverluste eine konstante Rohrreibungszahl, $\xi = 0.035$ [–], angenommen.

Das Rohrsystem wurde nach Bild 16 mit 42 Knotenpunkten diskretisiert. Dies ergibt eine Ortsschrittweite von $h = 3$ [m]. Um die maximal zulässige Zeitschrittweite nach der CFL-Bedingung berechnen zu können, ist die Kenntnis der Schallgeschwindigkeit erforderlich. Für ideales Gas errechnet man sie aus

$$c_{iG} = \sqrt{\kappa RT}. \quad (78)$$

Für das oben definierte Gas ergibt sich mit (78) und der CFL-Bedingung (35) für kleine Gasgeschwindigkeiten eine maximal zulässige Zeitschrittweite von $k_{max} = 5.6610^{-3}$ [s]. Um auch bei etwas höheren Gasgeschwindigkeiten die CFL-Bedingung nicht zu verletzen wurde, die tatsächliche Zeitschrittweite $k = 0.8k_{max}$ gewählt.

7.2 Vorgabe der Randwerte als Funktion der Zeit

Um die Reaktion des Systemes auf eine zeitliche Änderung der Randwerte zu testen, wurde, von dem oben definierten Anfangszustand ausgehend, am Knotenpunkt 1 der Druck zeitlich gemäß einer Rampenfunktion erhöht. Dabei ging man von der Vorstellung aus, daß an diesem Rohrende ein sehr großer Behälter angeschlossen ist, dessen Gasinhalt über eine gewisse Zeit konstant beheizt wird, sodaß der Druck im Inneren des Behälters linear ansteigt. Ist das Behältervolumen so groß, daß der in das Rohr eintretende Massenstrom vernachlässigbar ist, so erfährt das Gas eine isochore Zustandsänderung und die Temperatur des Gases steigt ebenfalls linear mit der Zeit.

Der Druck im Knoten 1 wurde, vom Ausgangsdruck von 40 [bar] zum Zeitpunkt $t = 0$, fünf Sekunden lang mit einer Drucksteigerungsrate von 1000 [Pa/s] erhöht und anschließend konstant gehalten. Der Druck im Knoten 42 und die Dichte im Knoten 1 wurden von Anfang an konstant gehalten.

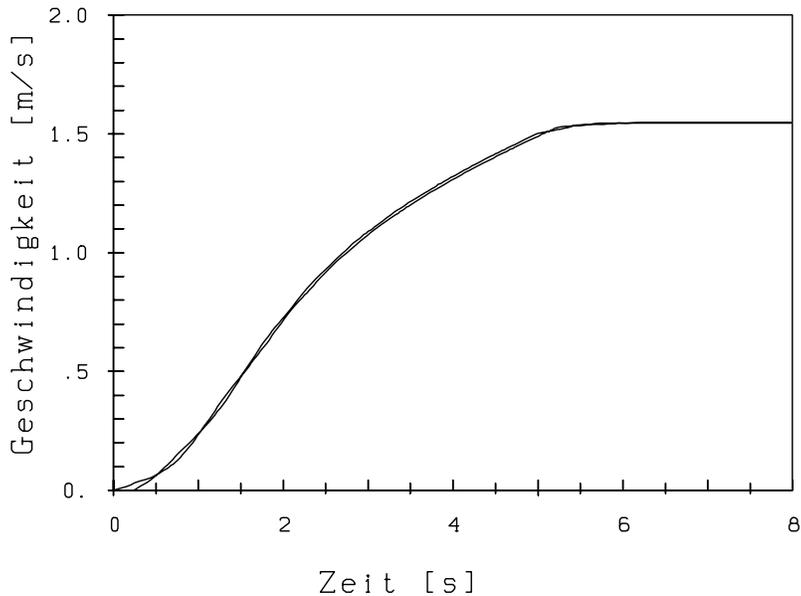


Bild 17: Geschwindigkeitsverlauf

Die Druckerhöhung in Knotenpunkt 1 hat zur Folge, daß in den Rohren das

Medium zu strömen beginnt und sich ein Geschwindigkeitsprofil ausbildet. Der Geschwindigkeitsverlauf in den Knotenpunkten 1 und 42 ist in [Bild 17](#) dargestellt. Man erkennt aus der Tatsache, daß die Geschwindigkeitsverläufe in den Punkten 1 und 42 sehr nahe beieinander liegen, daß die Information über den Druckanstieg in 1, welche sich mit Schallgeschwindigkeit im Rohr fortpflanzt, eine nahezu gleichzeitige Beschleunigung des Gases in den einzelnen Diskretisierungsabschnitten bewirkt.

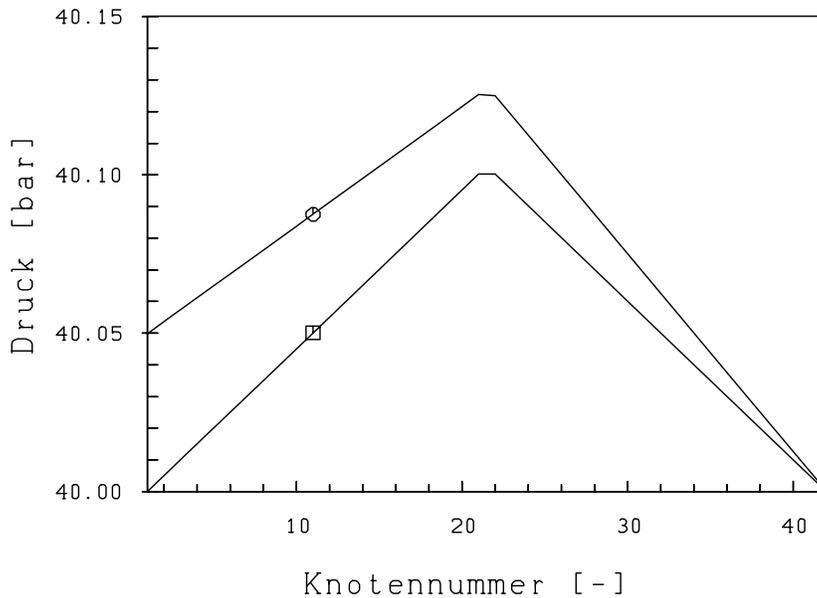


Bild 18: Druckverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten

In [Bild 18](#) ist der Druckverlauf im Rohr aufgetragen. Mit \square ist die Schwerkraftverteilung des Druckes zum Zeitpunkt $t = 0$, ($w_i = 0$, für $i = 1, 2, \dots, 42$) bezeichnet. Nach 5 [s] hat der Druckverlauf die mit \circ gekennzeichnete Form. Dieser Druckverlauf bleibt für alle weiteren Zeitschritte gleich. Aus den beiden Druckverläufen erkennt man, daß bei diesem Modell die Druckverluste, die durch die Reibung im Rohr hervorgerufen werden, gegenüber den Rohrein- und -ausströmverlusten dominieren. Eine Druckänderung infolge der Ein- und Ausströmverluste müßte sich durch einen Sprung im Druckverlauf an den Rohrenden bemerkbar machen. Hier ist jedoch die Druckänderung im Rohr gegenüber dem Anfangszustand nahezu linear.

In [Bild 19](#) sind einige Dichteverläufe im Rohr zu ausgewählten Zeitpunkten dargestellt. Die mit \square bezeichnete Linie kennzeichnet die symmetrische Schwerkraftverteilung des Anfangszustandes. Um die Dichteverläufe besser interpretieren zu können, ist es vorteilhaft, diese zusammen mit den Temperaturverläufen im [Bild 20](#) zu betrachten. Dort ist die Temperaturverteilung am Anfang der Berechnungen ebenfalls mit \square gekennzeichnet. Die Verläufe von Dichte und

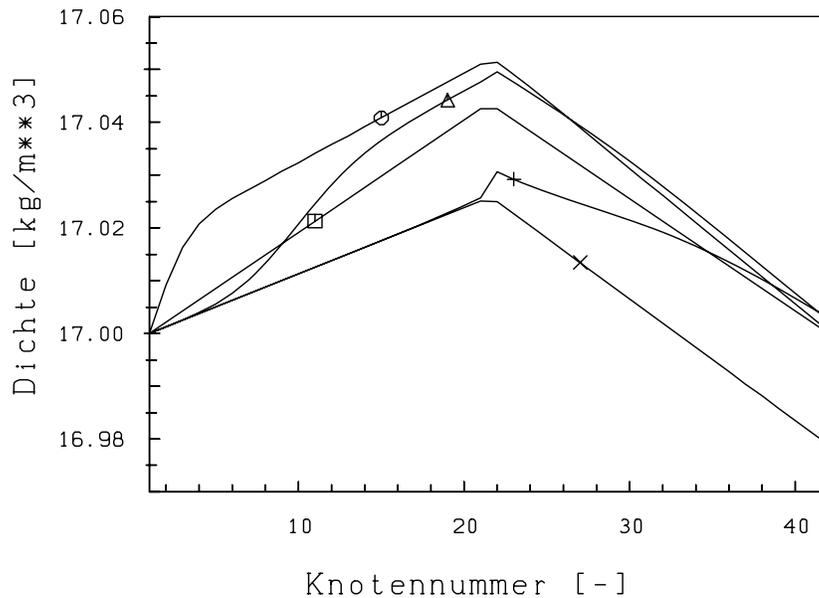


Bild 19: Dichteverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten

Temperatur nach 5 [s] – dies entspricht dem Übergangspunkt von der Druckerhöhung in Knotenpunkt 1 gemäß einer Rampenfunktion zu einem konstanten Wert – sind mit ○ markiert.

Hier sieht man, daß sich im Inneren des Rohres, etwa ab Knotenpunkt 8, ein, dem zu diesem Zeitpunkt bereits voll ausgeprägten Druckverlauf (siehe Bild 18 Symbol ○) entsprechender, erhöhter Dichteverlauf ausgebildet hat, während die Temperatur in diesem Bereich nur leicht angestiegen ist. Wie man aus der Geschwindigkeitskurve erkennen kann, hat der Teil des Gases, welcher zur Startzeit dem Knoten 1 zugeordnet waren, einen Weg von ungefähr 3.8 [m] zurückgelegt. Die Temperatur des nachfolgenden Gases, welches den Knotenpunkt 1 passiert, hat ebenfalls einen rampenförmigen Verlauf, da man in diesem Punkt eine isochore Druckerhöhung annimmt. Infolge dieser Temperaturerhöhung ist in diesem Abschnitt ein starker Abfall der Dichte zu verzeichnen.

Das Gas strömt nun ständig mit einer Temperatur von 510.45 [K] in das Rohr ein. Dies hat zur Folge, daß sich die Front mit der erhöhten Temperatur im Rohr fortpflanzt. Die Dichte sinkt im Bereich der hohen Temperatur ab. Der Verlauf von Dichte und Temperatur nach 20 [s] ist in den Bildern 19 und 20 mit △ gekennzeichnet. Der im Verhältnis zum Rohrvolumen relativ große Sammler stellt für die Ausbreitung der Temperaturfront ein Hindernis dar, da er durch seine Speicherfähigkeit nur langsam die Temperatur des einströmenden Gases annimmt. Dies zeigt der Temperaturabfall zwischen den Knotenpunkten 21 und 22 im Temperaturverlauf nach 60 [s], mit + bezeichnet, sehr eindrucksvoll. Auch

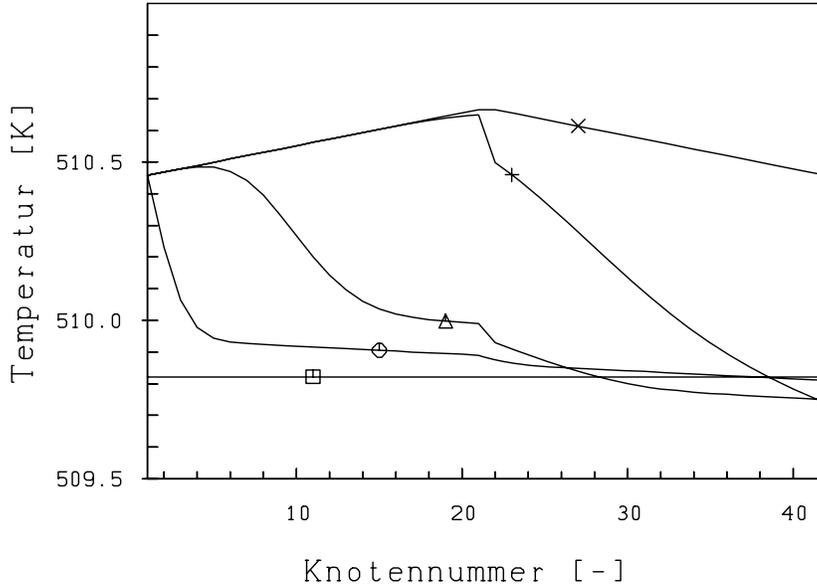


Bild 20: Temperaturverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten

die Dichte weist hier einen sprunghaften Zuwachs auf.

Nach 180 [s] ist der stationäre Zustand erreicht. Die Verläufe von Dichte und Temperatur zu diesem Zeitpunkt sind mit \times bezeichnet.

Die Temperaturerhöhung im unteren Bereich der Rohre begründet sich aus dem 1. Hauptsatz für stationäre Fließprozesse. Bei adiabaten Systemen, welchen keine technische Arbeit zugeführt wird, reduziert sich dieser unter Vernachlässigung des Geschwindigkeitstermes auf

$$c_p \Delta T + g \Delta H = 0. \quad (79)$$

Unter der Annahme einer geodätischen Höhendifferenz von 60 [m] führt der Schwerkraftterm bei dem gewählten Strömungsmedium zu einer Temperaturerhöhung von 0.208 [K]. Diese wird im aufwärts führenden Rohrschenkel wieder nahezu vollständig reversibel abgebaut.

Eine bleibende Temperaturerhöhung infolge der durch Reibung dissipierten Energie liegt in der Größenordnung von 10^{-4} [K].

Der Verlauf der Dichte ist über die ideale Gasgleichung mit den Verläufen von Druck und Temperatur gekoppelt und daher nahezu proportional dem Druckverlauf.

7.3 Beheiztes Rohr-Sammler-Modell

In diesem Abschnitt wird der Einfluß der Beheizung, die dem zweiten Quellterm in Gleichung (2c) entspricht, untersucht. Die Geometrie des Modelles sowie die Gaseigenschaften wurden wie in der vorangegangenen Berechnung angenommen. Auch die Wahl der Startwerte der Zustandsgrößen in den Rohren und im Sammler blieb gleich. Die Randwerte wurden bei den Untersuchungen mit Beheizung zeitlich konstant gehalten.

Die Beheizung erfolgte an den Knotenpunkten 26 bis 35, gemäß einer Rampenfunktion wie bei der vorangegangenen Berechnung von $t = 0$ bis $t = 5$ [s] und wurde ab diesem Zeitpunkt konstant gehalten. Die zeitliche Steigerung der auf das Fluidvolumen bezogenen Heizleistung wurde so gewählt, daß sie nach 5 [s] 40 [kW/m³] erreicht.

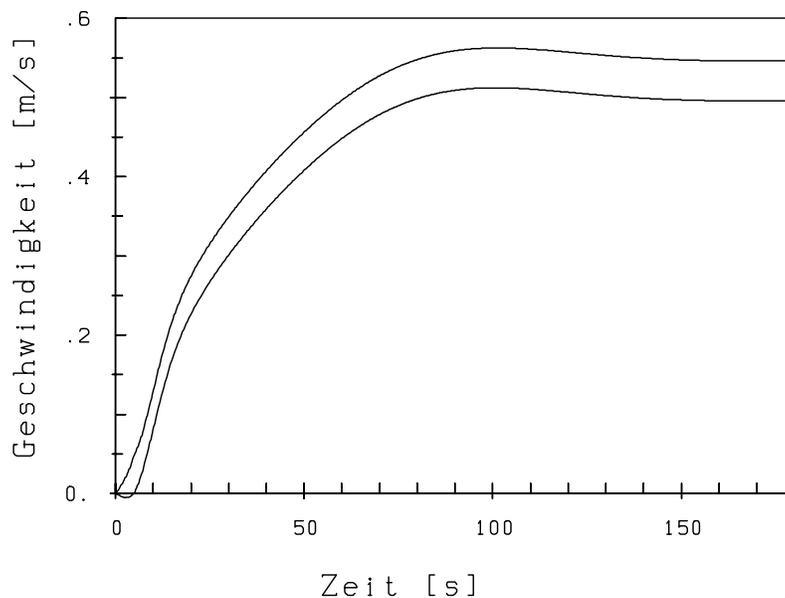


Bild 21: Geschwindigkeitsverlauf

Die Beheizung im rechten Rohrschenkel bewirkt, daß sich im beheizten Bereich die Dichte verkleinert. Dadurch verringert sich dort der statische Druck. Die Resultierende der unterschiedlichen Druckkräfte in den beiden Rohrschenkeln bewirkt eine Beschleunigung des Strömungsmediums. Dieses wird solange beschleunigt, bis die Reibungskräfte gleich den treibenden Kräften aus dem Dichteunterschied in den Rohrschenkeln sind. Ist diese Gleichheit erreicht, so hat sich ein stationärer Zustand eingestellt.

Bild 21 zeigt die Geschwindigkeiten an den oberen Rohrenden des beheizten Rohr-Sammler-Modells als Funktion der Zeit; die untere Linie im Punkt 1, die obere

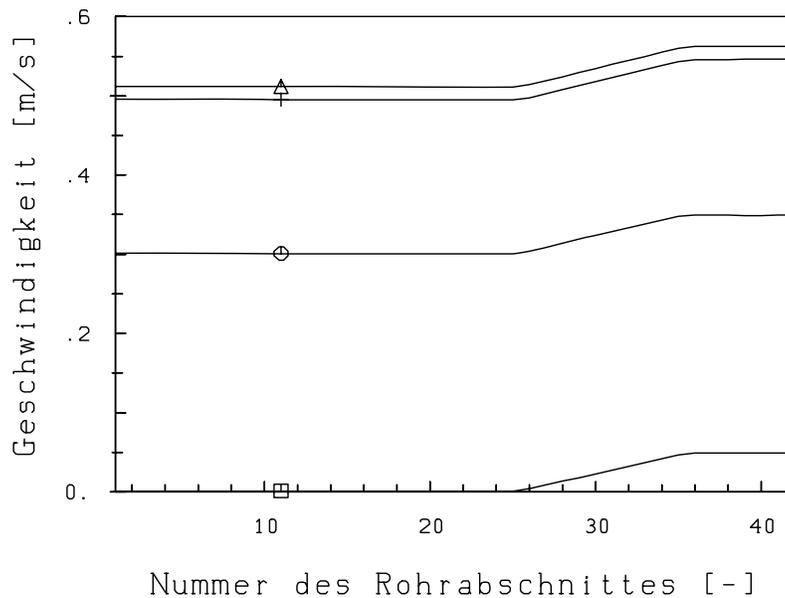


Bild 22: Geschwindigkeitsverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten

im Punkt 42.

Man erkennt, daß die Strömung so stark beschleunigt, daß es zum Überschwingen der Gasgeschwindigkeit kommt. Nach ungefähr 100 [s] wird der Maximalwert der Geschwindigkeit und nach 160 [s] der stationäre Zustand erreicht. Die Tatsache, daß die Geschwindigkeit im Knotenpunkt 42 stets höher als jene im Punkt 1 ist, wird durch die Dichteverringerung im Bereich der Beheizung begründet. Den Ort dieser Beschleunigung sieht man am besten im Bild 22, wo einige Geschwindigkeitsverläufe über die Rohrlänge zu verschiedenen Zeitpunkten aufgetragen sind. Mit □ ist der Geschwindigkeitsverlauf nach 5 [s], mit ○ jener nach 30 [s], mit △ jener nach 100 [s] und mit + jener nach 180 [s] gekennzeichnet.

Der Druckverlauf, welcher in Bild 23 dargestellt ist, ändert sich unter der vorgegebenen Beheizung nur unwesentlich. Von der Schwerkraftverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$, welche mit □ gekennzeichnet ist ausgehend, verformt sich das Druckprofil zu dem mit ○ gekennzeichneten Verlauf zum Zeitpunkt $t = 5$ [s] und bleibt dann zeitlich unverändert. Die mit △ bezeichnete Linie zeigt den Druckverlauf nach 180 [s].

Trotz der nahe beisammen liegenden Druckprofile erkennt man, daß beim bewegten Fluid kleinere Drücke auftreten. Weiters zeigt ein Vergleich zweier Knotenpunkte gleicher geodätischer Höhe, daß beim abwärts strömenden Fluid größere Drücke als im aufwärts strömenden herrschen. Diese stellen die treibende Kraft für die Beschleunigung der Strömung dar. Durch die Reibung im Rohr wird diese Kraft jedoch kompensiert, sodaß eine stationäre Strömung möglich wird.

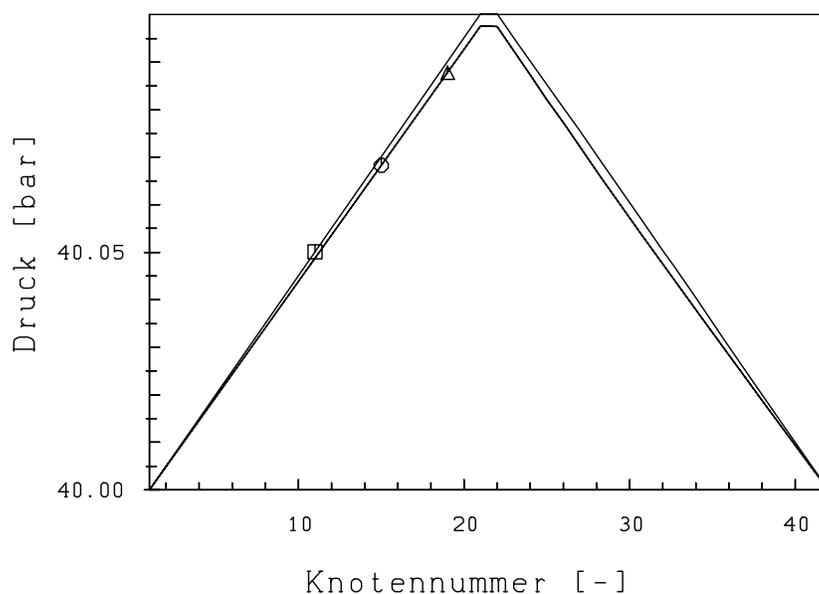


Bild 23: Druckverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten

Die Dichte und die Temperatur im Rohr, die im [Bild 24](#) beziehungsweise im [Bild 25](#) dargestellt sind, zeigen eine gegenläufige Tendenz. Diese resultiert aus der idealen Gasgleichung bei nahezu konstantem Druck. Die dargestellten Linien sind den verschiedenen Zeitpunkten wie folgt zugeordnet:

Symbol	Zeit [s]
□	5
○	30
△	60
+	90
×	180

Es ist klar, daß zu jedem Zeitpunkt die höchsten Temperaturen im Punkt 35 auftreten, da dieser der letzte beheizte Punkt in Strömungsrichtung ist und ein von den darunterliegenden Punkten bereits vorgeheiztes Strömungsmedium übernimmt. Den steilen Temperaturabfall in den folgenden Knotenpunkten (bei $t = 60$ [s]) kann man damit begründen, daß sich die Temperaturfront anfangs nur mit einer kleinen Geschwindigkeit fortbewegt, während gleichzeitig das Medium in den beheizten Punkten kräftig erwärmt wird.

Diese anfangs kleinen Geschwindigkeiten des Strömungsmediums bewirken auch, daß die Temperaturgradienten im ersten beheizten Knotenpunkt 23 anfangs größer sind als bei der stationären Strömung \times . Auch die Überhöhung der Temperatur bei $t = 90$ [s] ist darauf zurückzuführen.

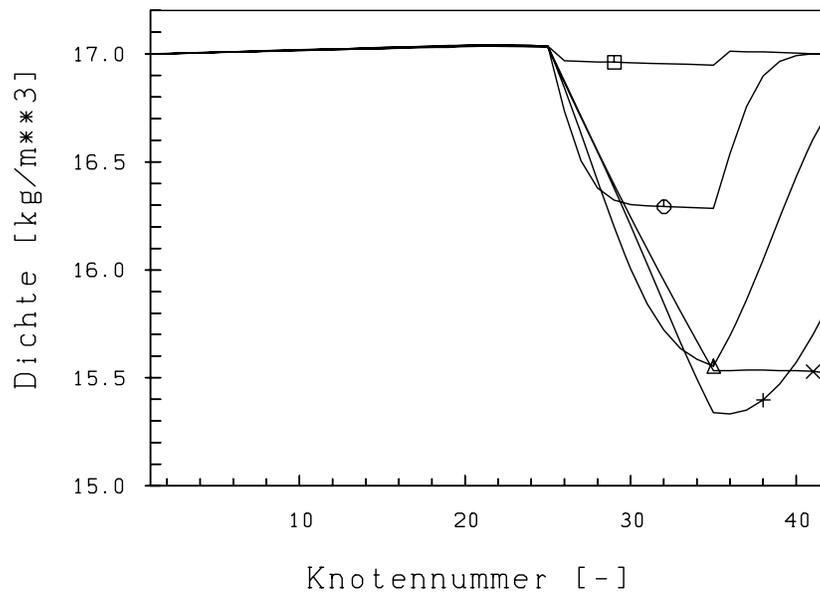


Bild 24: Dichteverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten

Ist die Strömung stationär geworden, so bleibt die Temperatur ab Knotenpunkt 35 nahezu konstant.

Bild 25: Temperaturverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten

8 Berechnungen des Dampferzeugermodells

Nachdem das gewählte Rechenverfahren am offenen Rohr-Sammler-Modell erfolgreich getestet worden war, konnten die Rechenversuche an einem vollständigen Naturumlauf-Dampferzeuger-Modell durchgeführt werden. Dieses ist ähnlich dem im Bild 1 dargestellten aufgebaut und besteht aus zwei senkrechten Rohren, welche am unteren Ende mit einem Sammler und am oberen Ende mit der Trommel verbunden sind. Beide Rohre münden in den unteren Bereich der Trommel, also in den Wasserraum. Ein Überströmrohr ist bei diesem einfachen Modell nicht ausgeführt. Das Steigrohr mündet direkt in die, bei der Beschreibung der Trommel im Abschnitt 6.3 mit U bezeichnete, Öffnung. Das Speisewasser wird dem Wasserraum zugeführt, während der Dampf aus dem oberen Bereich der Trommel abgezogen wird.

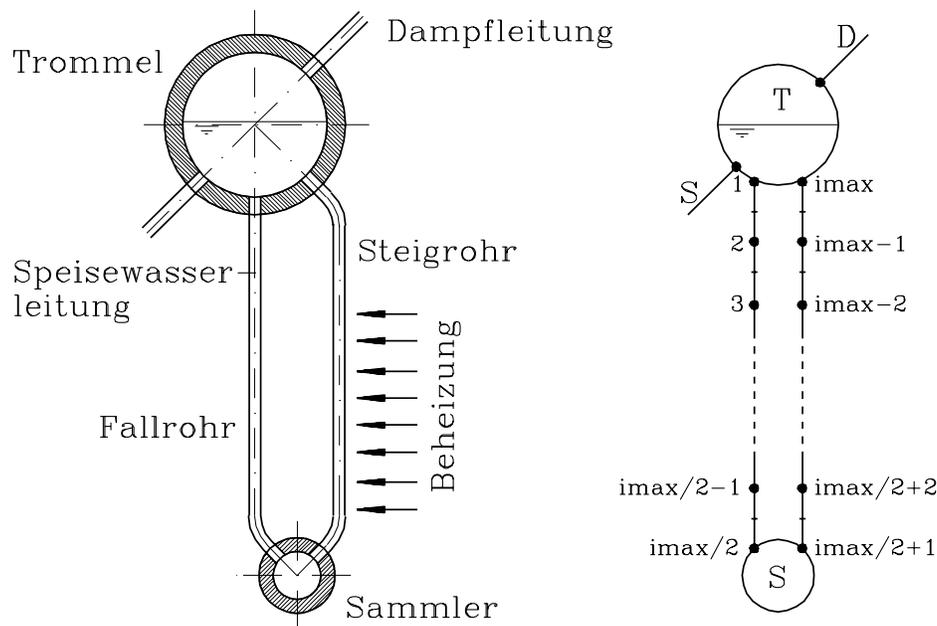


Bild 26: Dampferzeugermodell

Im Bild 26 links sieht man das, gegenüber dem in Bild 1 dargestellten, noch etwas vereinfachte Modell. Bild 26 rechts zeigt das diskretisierte Modell. Für die numerische Behandlung wird der untere Teil des Systems gleich wie das offene Rohr-Sammler-Modell diskretisiert. Die Diskretisierung dieses Teils ist im Abschnitt 7 beschrieben. Im Unterschied zum offenen Rohr-Sammler-Modell werden nun die Randbedingungen an den Punkten 1 und $imax$ nicht von außen vorgegeben, sondern durch die Gleichungen (71) und (72), siehe Abschnitt 6.3, bereitgestellt.

Für dieses Modell sind die zeitlichen Verläufe des Trommeldruckes, der Beheizung

oder Kühlung der Rohrabschnitte sowie der Speisewasserenthalpie vorzugeben.

Als Ergebnis der Berechnung erhält man zu diskreten Zeitpunkten die Werte der Zustandsgrößen in den Knotenpunkten der Rohre sowie jene im Sammler und in der Trommel. Weiters erhält man zu diesen Zeitpunkten die Dampfgeschwindigkeit sowie die Geschwindigkeit des Speisewassers.

Die Geometrie des Dampferzeugermodelles umfaßt folgende Daten:

Rohr:

Abmessung:	D	=	21.3	[mm]
	s	=	2.0	[mm]
Werkstoff: St45.8	L	=	60.0	[m]
	ρ_{St}	=	7840.0	[kg/m ³]
	c_p	=	580.0	[J/kgK]

Sammler:

Abmessung:	V_S	=	42.31	10 ⁻³	[m ³]
Werkstoff: St45.8	m_{St}	=	25.0	[kg]	
	c_p	=	580.0	[J/kgK]	

Trommel:

Abmessung:	$V_W + V_D$	=	0.1	[m ³]
	A_F	=	235.0	[mm ²]
	A_U	=	235.0	[mm ²]
	A_S	=	235.0	[mm ²]
	A_D	=	470.0	[mm ²]
Werkstoff: 20MnMo45	m_{St}	=	500.0	[kg]
	c_p	=	580.0	[J/kgK]

Die Geometrie dieses Modelles weicht ziemlich stark von den Abmessungen ausgeführter Naturumlauf-Dampferzeuger ab. Sie wurde deshalb so gewählt, um den Einfluß einzelner Effekte deutlicher sichtbar zu machen. Der Rohrdurchmesser wurde dünner angenommen als bei Naturumlauf-Dampferzeugern üblich, um der Reibung im Rohr mehr Gewicht zu verleihen. Die Rohrlänge wurde sehr groß angenommen, um den Gravitationseinfluß zu verstärken. Der Sammler wurde in diesem Berechnungsbeispiel besonders groß ausgeführt, um den Einfluß der Speicherfähigkeit dieses Bauteiles besser sichtbar zu machen.

Ziel dieser Untersuchung war das Studium des dynamischen Überganges des Wassers vom einphasigen in den zweiphasigen Zustand bei konstantem Trommeldruck und Beheizung des Steigrohres. Weiters sollte beobachtet werden, wie sich die Zustandsgrößen in der Trommel zeitlich ändern. Dabei sind die Untersuchungen auf die folgenden drei Phasen zu erstrecken:

1. Der Wasserraum der Trommel ist mit Wasser gefüllt, der Dampfraum ist

leer. Aus dem Steigrohr strömt Wasser anfangs mit gleicher, später jedoch mit einer höheren Temperatur als jene, die in der Trommel herrscht. In das Fallrohr strömt Wasser, das denselben Zustand wie jenes in der Trommel aufweist. Da das Wasserraumvolumen nach der Modellannahme in Abschnitt 6.3 konstant ist, muß der aus der Massenbilanz über das Fall- und das Steigrohr resultierende Wasserüberschuß durch die Speisewasserleitung abgezogen werden.

2. Zustand im Wasser- und Dampfraum der Trommel wie oben, aus dem Steigrohr strömt bereits Naßdampf in die Trommel ein.
3. In der Trommel ist der Siedezustand erreicht, der Dampfraum wird mit trockengesättigtem Dampf gefüllt, Dampfmasse strömt in die Dampfleitung und wird durch einströmendes Speisewasser ersetzt. Der Dampferzeuger nähert sich seinem stationären Betriebszustand.

Um diesen Phasenwechsel in der Trommel möglichst bald zu erreichen, wurde ein Anfangszustand des Wassers nahe an der Siedelinie gewählt. Zu Beginn der Rechnung wurde der Zustand des Wassers in der Trommel mit einem Druck $p_T = 150$ [bar] und einer Temperatur $T_W = 613$ [K] festgelegt. In den Rohren wurde, wie im Abschnitt 7.1, eine Schwerkraftverteilung, mit der Forderung konstanter innerer Energie im ganzen System, angenommen.

Zur Berücksichtigung der Rohrreibung wurde, wie schon in den vorangegangenen Berechnungen, eine konstante Rohrreibungszahl mit $\xi = 0.035$ [-] gewählt.

Sowohl das Fall- als auch das Steigrohr, siehe Bild 26, wurden für diese Berechnung mit 17 Knotenpunkten diskretisiert. Dies ergibt eine Ortsschrittweite von $h = 3.75$ [m]. Für den oben definierten Zustand des Wassers ergibt sich nach (50) eine Schallgeschwindigkeit $c_W = 664.5$ [m/s]. Mit der Annahme einer maximal möglichen Mediumsgeschwindigkeit von 20 % der Schallgeschwindigkeit ergibt die CFL-Bedingung eine Zeitschrittweite von $k = 4.5 \cdot 10^{-3}$ [s].

Um eine möglichst große treibende Kraft für den Umlauf zu simulieren, wurde nur der untere Bereich des Steigrohres beheizt, konkret die Knoten 19 bis 25. Dort wurde die auf das Fluidvolumen bezogene Wärmezufuhr ab dem Zeitpunkt $t = 10$ [s] nach einer Rampenfunktion mit 215 [kW/m³s] erhöht und ab $t = 20$ [s] mit 2150 [kW/m³] konstant gehalten. Der Rechenlauf wurde nach 180 [s] aus Rechenzeitgründen abgebrochen, obwohl sich zu diesem Zeitpunkt noch kein stationärer Betriebszustand einstellte.

8.1 Interpretation der Rechenergebnisse

Da die Beheizung erst 10 [s] nach dem Start einsetzt, müssen bis zu diesem Zeitpunkt alle Zustandsgrößen im System konstant bleiben.

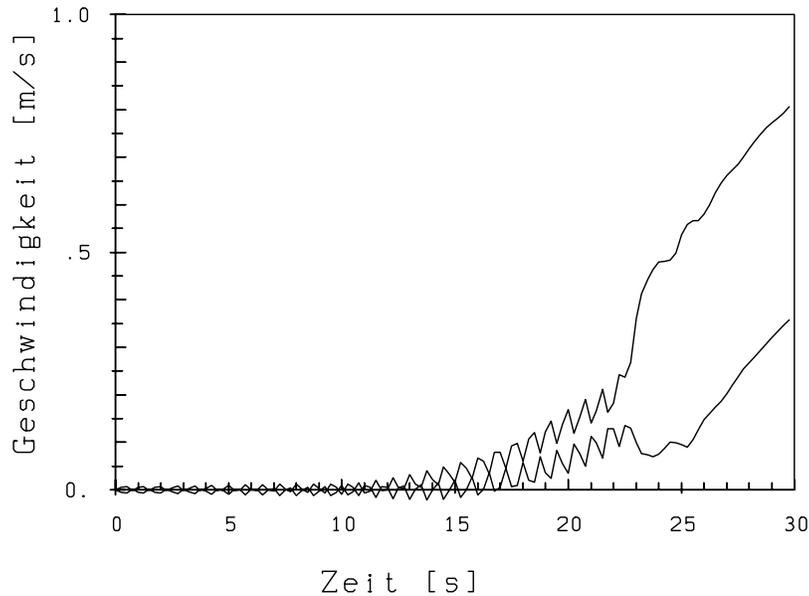


Bild 27: Geschwindigkeitsverlauf

In [Bild 27](#) sind die Geschwindigkeitsverläufe in den Trommelanschlußpunkten 1 und 34 in den ersten 30 [s] dargestellt. Hier sieht man, daß auch in den ersten 10 [s] die Geschwindigkeiten nicht genau Null sind. Derartige Schwankungen, welche auch im Druck an den Anschlußpunkten des Sammlers beobachtet wurden, sind auf die numerischen Fehler zurückzuführen und müßten bei feinerer örtlicher Diskretisierung bedeutend kleinere Amplituden aufweisen. Auch die Dichte des Strömungsmediums hat einen wesentlichen Einfluß auf derartige Erscheinungen. In diesem Zeitraum liegt das Wasser im gesamten System ausschließlich in der flüssigen Phase vor, welche ein fast gänzlich inkompressibles Verhalten aufweist. Die Druckwellen, die durch geringste Störungen hervorgerufen werden, können sich nahezu ungedämpft ausbreiten.

Nach 10 [s] setzt die rampenförmige Beheizung ein. Durch diesen Störeinfluß vergrößert sich die Amplitude der Geschwindigkeitsverläufe, wie Bild 27 zeigt. Daß die Geschwindigkeitsverläufe derart zackig aussehen, ist auf die unvollständige Ausgabe der Daten zurückzuführen; $k = 4.5 \cdot 10^{-3}$ [s], Ausgabe in Zeitintervallen $2.5 \cdot 10^{-1}$ [s]. Der Plot aller Rechenergebnisse würde das schwingende Verhalten der Geschwindigkeit nicht verändern, die Kurve im Bild 27 jedoch besser auflösen. Trotz der unzureichenden Ausgabe in diesem Bereich kann man erkennen, daß die Geschwindigkeit sowohl im Knotenpunkt 1 als auch im Knotenpunkt 34 wächst, was bedeutet, daß das Wasser im Fallrohr nach unten und im Steigrohr nach oben beschleunigt wird.

Dabei nimmt die Geschwindigkeit im Knotenpunkt 34 stärker zu als im Knoten-

punkt 1, was darauf zurückzuführen ist, daß die Dichte im beheizten Bereich des Steigrohres sinkt, wodurch aus dem Steigrohr ein Massenstrom ausgeschoben werden muß, der größer ist als jener, der ins Fallrohr nachfließt.

Auch wenn nach $t = 20$ [s] die Beheizungsrampe in eine konstante Beheizung übergeht, ändert sich diese Tendenz nicht. Es sind nach wie vor Schwankungen in der Geschwindigkeit festzustellen, weil das Wasser weiterhin im gesamten System in der flüssigen Phase vorliegt. Die Geschwindigkeitsverläufe glätten sich erst dann, wenn irgendwo im Steigrohr Wasser in Naßdampf übergeht.

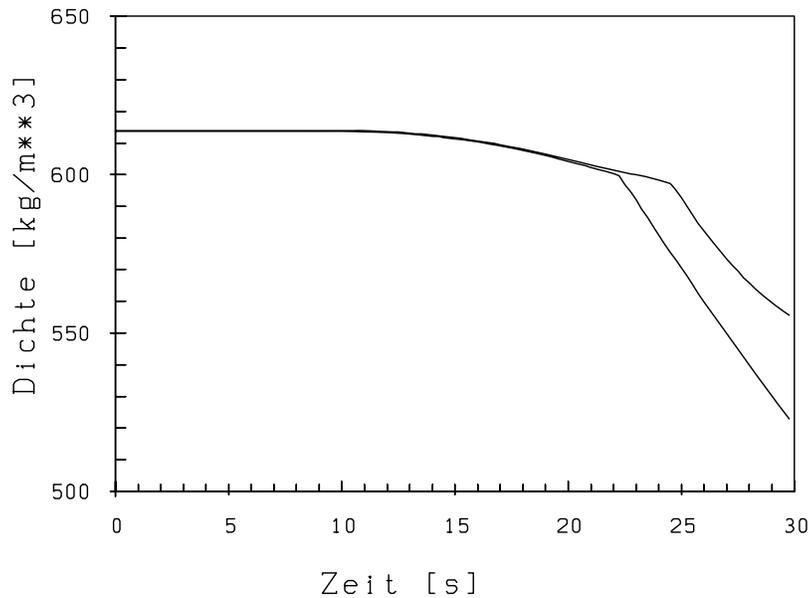


Bild 28: Dichteverlauf in den Punkten 19 und 25

Diesen Punkt kann man sehr gut in [Bild 28](#) ausmachen. Dort ist der zeitliche Verlauf der Dichte im Knotenpunkt 19 und im Knotenpunkt 25 dargestellt. Bis zum Zeitpunkt $t = 10$ [s] bleibt die Dichte in beiden Punkten konstant. Ab dem Zeitpunkt, in dem die Beheizung einsetzt, ist in beiden Punkten eine Verringerung der Dichte feststellbar. Diese ist im flüssigen Bereich des Wassers gering. Wird jedoch die Zwei-Phasen-Grenze überschritten – diese liegt, dem Druck im Knotenpunkt 25 entsprechend, bei 600 [kg/m³] – so entsteht in diesem Punkt erstmals Dampf und die mittlere Dichte in dem zu diesem Knotenpunkt gehörenden Abschnitt sinkt sehr stark ab. Aus dem Diagramm in Bild 28 kann man ablesen, daß zum Zeitpunkt $t = 22$ [s] im Knotenpunkt 25 erstmals Dampf entsteht. Die erstmalige Dampfbildung im Punkt 19, welcher der unterste beheizte Punkt im Steigrohr ist, setzt erst später ein, da in diesem Rohrabschnitt von unten her ständig kühleres Wasser nachströmt. Weiters kann man erkennen, daß im Punkt 19, in welchem wegen der hydrostatischen Einflüsse ein etwas

höherer Druck herrscht als im Punkt 25, die Zwei-Phasen-Grenzkurve der Dichte zu kleineren Werten verschoben ist, also unter $600 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ liegt.

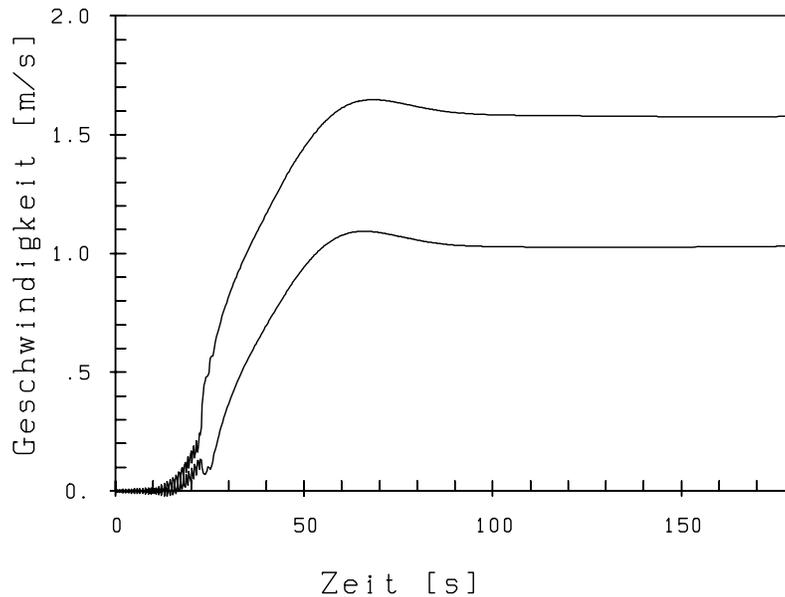


Bild 29: Geschwindigkeitsverlauf

Der weitere Geschwindigkeitsverlauf in den Trommelanschlußpunkten 1 und 34 ist im Bild 29 zu sehen. Beide Geschwindigkeiten steigen ab dem Zeitpunkt der ersten Dampfbildung rasch an, schwingen infolge der großen Beschleunigung über und erreichen ab $t = 100 \text{ [s]}$ einen nahezu stationären Wert. Daß die Geschwindigkeit bei gleichem Rohrdurchmesser am Steigrohrende um einiges höher ist als am Fallrohreintritt, liegt an der kleineren Dichte in diesem Bereich. Im stationären Fall muß laut Massenbilanz das Produkt ρw konstant sein. Da die mittlere Dichte des aus dem Steigrohr austretenden Wasser-Dampf-Gemisches wesentlich geringer ist als die des Wassers, welches in das Fallrohr eintritt, muß die Geschwindigkeit am Steigrohrende entsprechend höher sein.

In Bild 30 ist der Druckverlauf im Fall- und im Steigrohr des Dampferzeugermodells zu zwei verschiedenen Zeitpunkten dargestellt. Die Schwerkraftverteilung des Druckes vor dem Einsetzen der Beheizung ist mit \square bezeichnet, jene nach 150 [s] mit \circ .

Die beiden Druckverläufe weisen eine große Ähnlichkeit mit jenen des beheizten Rohr-Sammler-Modells mit idealem Gas als Strömungsmedium, siehe Abschnitt 7.2, auf.

Auch hier treten beim bewegten Fluid die kleineren Drücke auf. Die Drücke an den oberen Anschlußpunkten der Rohre werden bei diesem Modell ebenfalls von der Trommel diktiert und bleiben den zeitlichen Randbedingungen entsprechend

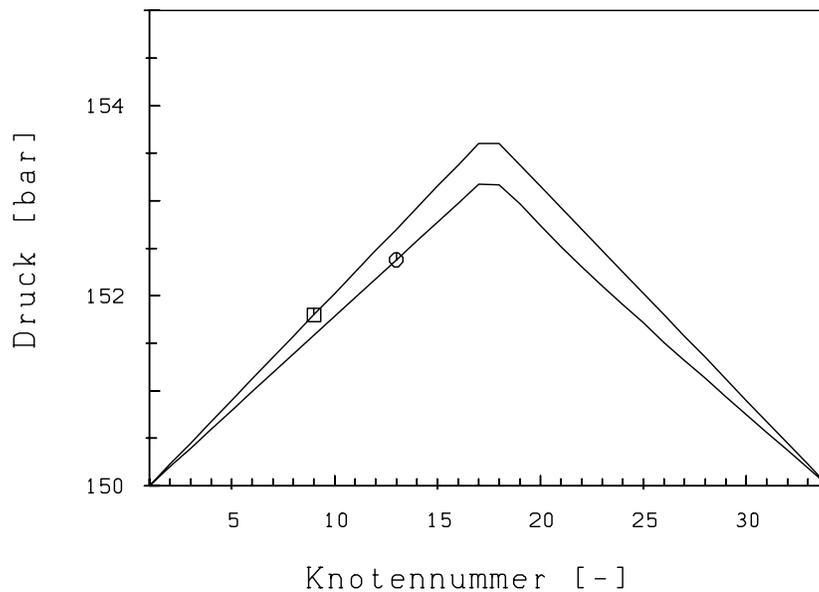


Bild 30: Druckverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten

konstant. Eine weitere Parallele zum Ergebnis der Untersuchung des beheizten Rohr-Sammler-Modells ist die Verschiebung des Druckprofils beim bewegten Fluid, sodaß beim Vergleich der Drücke in zwei Punkten gleicher geodätischer Höhe der Druck im Steigrohr kleiner ist als jener im Fallrohr. Auch im vorliegenden Fall resultiert aus dieser Tatsache die treibende Kraft für den Naturumlauf.

In [Bild 31](#) ist der Temperaturverlauf und in [Bild 32](#) der Dichteverlauf zu einigen ausgewählten Zeitpunkten dargestellt. Dabei gilt folgende Zuordnung der die Linien kennzeichnenden Symbole zu den gewählten Zeitpunkten:

Symbol	Zeit [s]
□	10
○	20
△	42
+	120
×	180

Bereits nach 20 [s], wenn also die konstante Beheizung beginnt, kann man im beheizten Bereich, welcher sich von Knotenpunkt 19 bis Knotenpunkt 25 erstreckt, einen deutlichen Temperaturanstieg verzeichnen. Die Dichte sinkt hier kaum ab, da noch keine Verdampfung eingesetzt hat. Nach 42 [s] hat bereits im gesamten beheizten Bereich Verdampfung eingesetzt. Dies kann man in [Bild 32](#) sehr gut beobachten. Man sieht dort, daß der Dampfgehalt im beheizten Bereich nach oben hin zunimmt, was ein Absinken der Dichte zur Folge hat. Weiters kann man

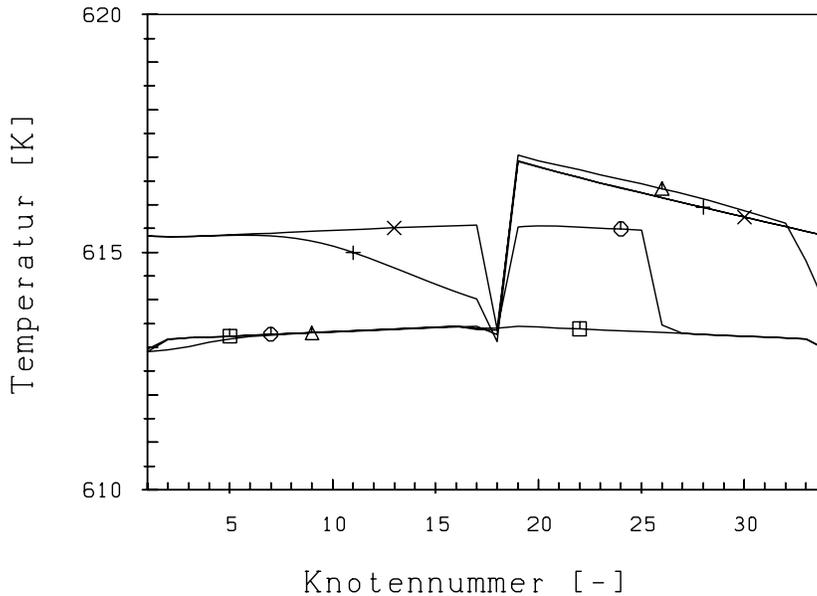


Bild 31: Temperaturverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten

erkennen, daß die Dichte in diesem Bereich sogar kleinere Werte aufweist als im quasistationären Zustand, welcher mit \times bezeichnet ist. Dies ist darauf zurückzuführen, daß zu diesem Zeitpunkt die Strömungsgeschwindigkeit noch klein ist und die konstante Beheizung zu höheren Dampfgehalten führt. Aus dem Dichteverlauf in den Punkten 25 bis 32 sieht man, daß zu diesem Zeitpunkt noch kein Dampf in die Trommel gelangt.

Die Dichte im Fallrohr hat sich bis zu diesem Zeitpunkt noch nicht verändert, da aus der Trommel nur Wasser nachströmt, das noch nahezu im Anfangszustand ist.

Der Temperaturverlauf im Steigrohr zeigt, daß sich die Dampffront nach 42 [s] erst bis zum Knotenpunkt 32 ausgebreitet hat. Die Temperatur weist vom Knotenpunkt 20 bis zum Knotenpunkt 32 einen der Dampfdruckkurve entsprechenden Verlauf auf und sinkt dann stark ab. Daß die Temperatur im Naßdampfbereich zu diesem Zeitpunkt höher ist als nach 180 [s], ist durch einen gegenüber dem quasistationären Zustand erhöhten Druck zu erklären. Ein höherer Druck herrscht deshalb, weil sich das System zu diesem Zeitpunkt in der Beschleunigungsphase befindet und den Pfropfen dichteren Wassers im oberen Steigrohrbereich auszuschieben muß.

Die Temperatur im Fallrohr hat sich nach 42 [s] noch nicht verändert, da von der Trommel noch immer Wasser mit Anfangstemperatur nachfließt. Zum Zeitpunkt $t = 120$ [s], welcher mit $+$ gekennzeichnet ist, strömt bereits Naßdampf in die Trommel. Dies erkennt man einerseits durch die annähernd konstante Dichte,

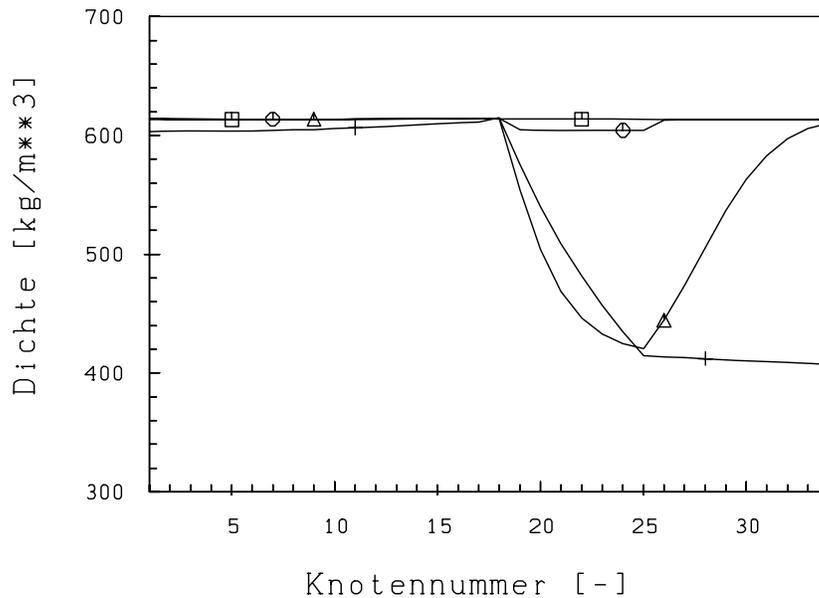


Bild 32: Dichteverlauf zu ausgewählten Zeitpunkten

im Bild 32 im oberen Bereich des Steigrohres, und andererseits durch den der Dampfdruckkurve entsprechenden Verlauf der Temperatur in diesem Abschnitt, siehe Bild 31. Die Dichte im Fallrohr ist bereits leicht abgesunken, da sich nun die Dichte des Wassers in der Trommel ebenfalls gesenkt hat. Da in der Trommel Siedezustand herrscht, strömt Speisewasser mit einer höheren Temperatur in das Fallrohr, was zur Ausbildung einer Temperaturfront führt. Diese ist im Bild 31 sehr gut zu erkennen.

Der Temperatursprung vom Knotenpunkt 17 zum Knotenpunkt 18 rührt daher, daß sich die große Wassermasse des Sammlers nur allmählich erwärmt und deshalb noch relativ kaltes Wasser in das Steigrohr strömt. Nach 180 [s] hat sich ein fast stationärer Zustand eingestellt. Die Geschwindigkeit in den Rohranschlußpunkten ist nun, wie man in Bild 29 sieht, konstant. Daß der Zustand noch nicht endgültig stationär ist, kann man aus dem Temperaturverlauf in Bild 31 erkennen. Die Temperaturfront im Fallrohr ist, wie die mit \times gekennzeichnete Linie zeigt, bis zum Sammler vorgedrungen, die Temperatur des Wassers im Sammler ist aber kaum höher geworden. In das Steigrohr fließt daher Wasser, welches noch nahezu Anfangstemperatur aufweist. Aufgrund der großen Wassermasse im Sammler werden noch ungefähr weitere 100 [s] verstreichen, bis dort die Temperatur des Wassers im Fallrohr erreicht ist, und damit ein endgültig stationärer Zustand vorliegt.

In Bild 33 sind die Geschwindigkeiten des Speisewassers und des Sattdampfes als Funktion der Zeit dargestellt. Diese repräsentieren in Verbindung mit der

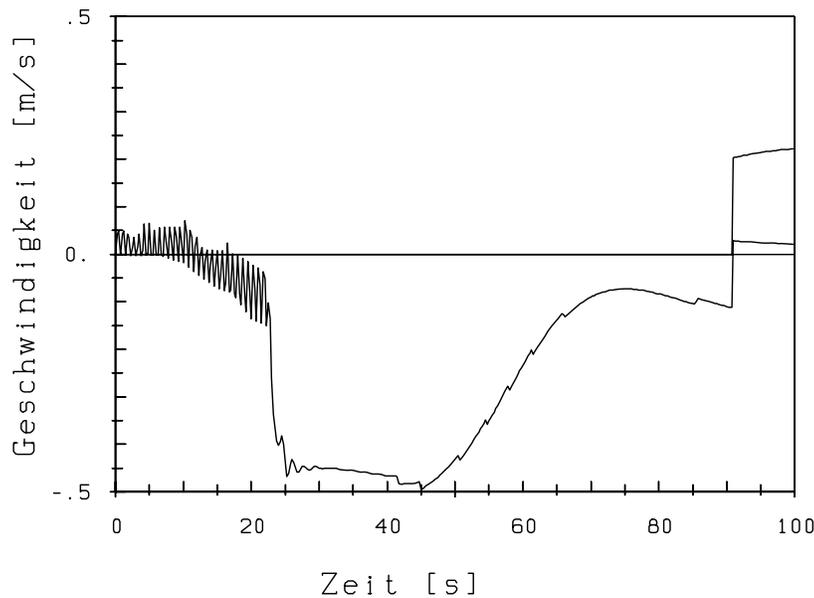


Bild 33: Geschwindigkeitsverläufe von Speisewasser und Dampf

Dichte und dem Strömungsquerschnitt den jeweiligen Massenstrom. Auch hier zeigen sich, wie beim Geschwindigkeitsverlauf im Bild 29, bis zur ersten Dampfbildung starke Schwankungen in der Speisewassergeschwindigkeit. Ab dem Heizungsbeginn bis zum Erreichen des Siedezustandes in der Trommel, nach 90 [s], ist die Speisewassergeschwindigkeit negativ, was bedeutet, daß überschüssiges Wasser aus der Trommel abgeführt werden muß. Zu diesem Zeitpunkt steigt die Dampfgeschwindigkeit sprunghaft an und die Speisewassergeschwindigkeit wird positiv. Nach geringen Schwankungen in den beiden Geschwindigkeiten wird schließlich ein stationärer Zustand erreicht.

Zum Abschluß der Arbeit werden noch zwei dreidimensionale Darstellungen von Zustandsverläufen gezeigt. Auf der mit "Knotennummer" bezeichneten Achse sind, wie bei den Diagrammen vorher, Fallrohr und Steigrohr aneinandergereiht dargestellt. Die Zustandsgrößen im Sammler sind auch in diesen Bildern nicht enthalten. Im folgenden werden gewisse Phänomene in der Anfahrphase eines Naturumlauf-Dampferzeugers anhand der dreidimensionalen Abbildungen diskutiert.

In Bild 34 ist die zeitliche Änderung des Dichteverlaufes dargestellt. Man sieht hier sehr eindrucksvoll das plötzliche Absinken der Dichte im Steigrohr, während sich der Dichteverlauf im Fallrohr zeitlich kaum ändert. Bei genauer Betrachtung kann man auch in dieser Darstellung erkennen, daß die Dampfbildung und damit das Sinken der Dichte im oberen Teil des beheizten Bereiches (Knoten 19 bis 25) beginnt. Sehr deutlich sieht man den Einschwingvorgang der Dichte im obersten

beheizten Knotenpunkt. Es werden in diesem Zeitintervall höhere Dampfgehalte als im Stationärzustand erreicht. Dies ist auf die, zu dieser Zeit noch geringe, Strömungsgeschwindigkeit zurückzuführen. Mit einiger Verzögerung wird auch im Trommelanschlußpunkt (Knoten 34) der Minimalwert der Dichte erreicht.

Die mit der Ausbreitung der Temperaturfront im Fallrohr einhergehende Dichteabsenkung kann in dieser Darstellung kaum wahrgenommen werden. Den Dichtesprung vom letzten Knotenpunkt des Fallrohres zum ersten Knotenpunkt des Steigrohres (Knoten 17), welcher auf das Beharrungsvermögen des übergroßen Sammlers zurückzuführen ist, kann man recht gut ausmachen.

Bild 35 zeigt die zeitliche Änderung des Temperaturverlaufes. Es wird von der tiefen Furche, die das kalte Wasser vom Sammler beim Einströmen in das Steigrohr hervorruft, geprägt. Im vorderen Teil des Bildes sieht man das starke Ansteigen der Temperatur im beheizten Bereich des Steigrohres. Daß im obersten beheizten Knotenpunkt die Verdampfung zuerst einsetzt, erkennt man ganz gut. Auch das Ausbreiten der Temperaturfront im oberen unbeheizten Teil des Steigrohres kann man deutlich sehen. Das Überschwingen der Temperatur im beheizten Bereich in dieser Phase ist kaum zu erkennen. Wesentlich besser hingegen zeigt sich das langsame Ausbreiten der Temperaturfront im Fallrohr.

Um einen raschen Gesamtüberblick über das Systemverhalten zu gewinnen, eignet sich die Form der dreidimensionalen Darstellung sehr gut. Eine genaue Aussage über den Verlauf einer Zustandsgröße zu einem bestimmten Zeitpunkt ist schwieriger.

Das beschriebene Rechenprogramm wurde in FORTRAN 77 in doppelter Genauigkeit ausgeführt und ist sowohl auf Personal Computern als auch auf größeren Rechenanlagen lauffähig. Die in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Berechnungsbeispiele wurden an einer Sun SPARCstation IPX und einem IBM RS 6000/950 RISC-Rechner durchgeführt.

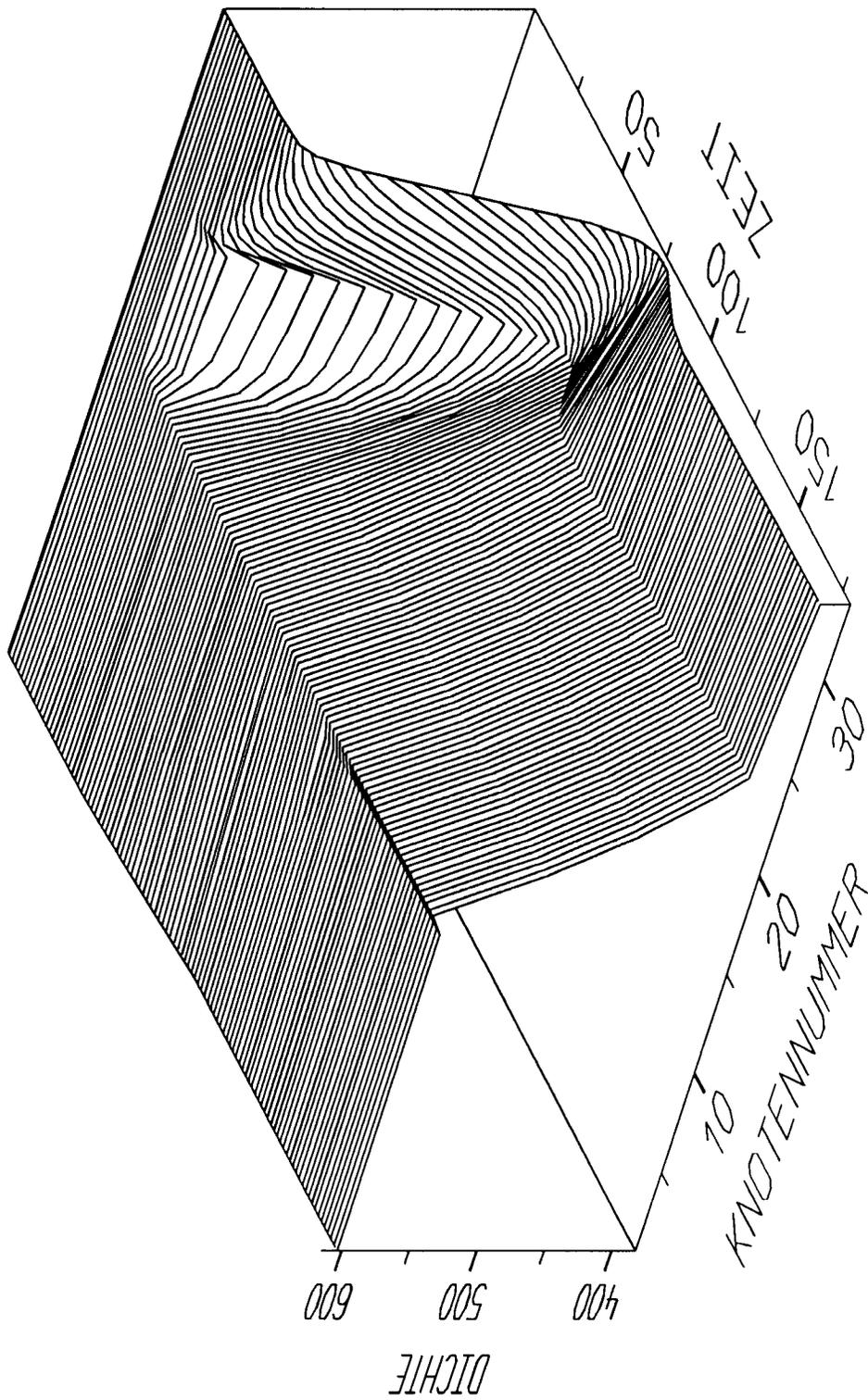


Bild 34: Zeitliche Änderung des Dichteverlaufs

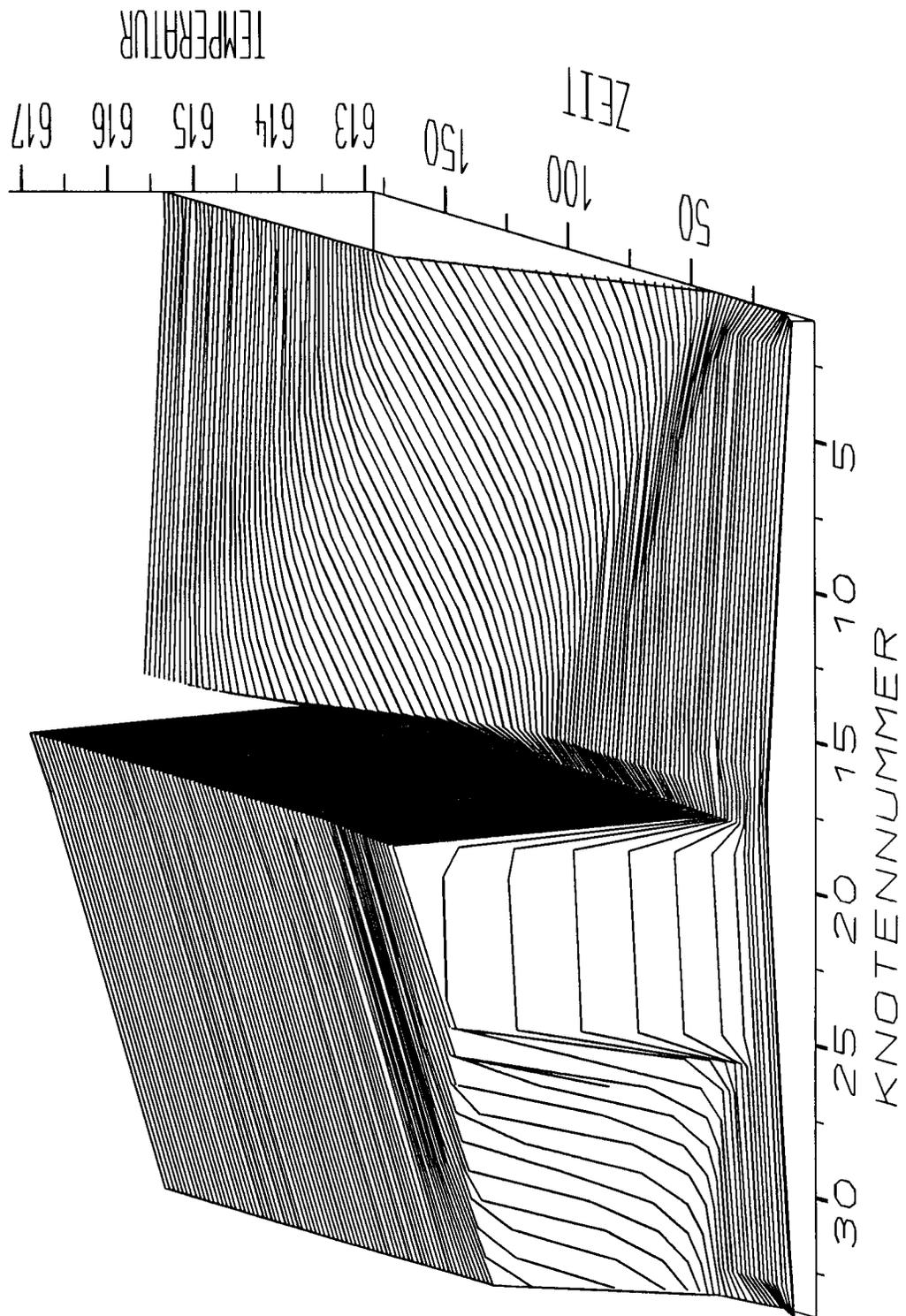


Bild 35: Zeitliche Änderung des Temperaturverlaufs

9 Zusammenfassung

Um die komplexen Vorgänge beim Anfahren eines Naturumlauf-Dampferzeugers studieren zu können, war es erforderlich, ein Modell zu entwickeln, welches einerseits so einfach ist, daß es numerisch behandelt werden kann, und andererseits dasselbe physikalische Verhalten wie großtechnisch ausgeführte Anlagen hat. Der Dampferzeuger wurde daher auf ein System reduziert, das aus zwei senkrechten Rohren, welche am unteren Ende mit einem Sammler verbunden sind und mit ihren oberen Enden in die Trommel münden, besteht.

Um das dynamische Verhalten dieses Systems simulieren zu können, mußten sowohl für die Rohrströmung als auch für die Zustandsänderungen im Sammler und in der Trommel geeignete Modelle aufgestellt werden. Die instationäre Strömung in diesem System wird durch ein System hyperbolischer Differentialgleichungen mit Quelltermen beschrieben, das mit gewöhnlichen Differentialgleichungen, die den Sammler und die Trommel beschreiben, gekoppelt ist. Für die numerische Lösung des partiellen Differentialgleichungssystems, welches die instationäre Rohrströmung beschreibt, wurden zwei explizite Differenzenverfahren ausgewählt und auf die Verwendbarkeit im vorliegenden Fall untersucht. Bei diesem Vergleich hat sich herausgestellt, daß man beim Lax-Friedrichs-Verfahren keine geeigneten Randbedingungen findet, um die im Modell erforderlichen Randwerte bereitstellen zu können. Beim Charakteristikenverfahren hingegen ist es sehr wohl möglich solche Randbedingungen zu formulieren, weshalb nur dieses der beiden Verfahren zur Simulation der Rohrströmung geeignet ist.

Um die Interaktion von Rohr und Sammler testen zu können, wurden Simulationen am Rohr-Sammler-Modell durchgeführt. Dabei wurde sowohl die Reaktion des Systems auf die Änderung der Randwerte untersucht als auch das Systemverhalten bei Beheizung eines Rohrschenkels und konstant gehaltenen Randwerten simuliert.

Am einfachen Dampferzeugermodell wurde schließlich der Verlauf der Zustandsgrößen in den ersten 180 [s] nach dem rampenförmigen Aufbringen der Beheizung am unteren Teil des Steigrohres ermittelt.

Obwohl die Charakteristikenmethode in ihrer derzeitigen Implementierung erfolgreich zu Untersuchungen der vorliegenden Modelle eingesetzt wurde, ist man von der Echtzeitsimulation der Großanlagen weit entfernt. Dies ist durch lange Rechenzeiten infolge kleiner Zeitschritte, die für die Stabilität der expliziten Rechenmethode notwendig sind, begründet. Weiters ist die numerische Auswertung der Wasserdampf tafel, die mit strenger Genauigkeitsforderung vorgenommen wird, sehr zeitaufwendig. Eine gewisse Effizienzsteigerung des Programmes kann man durch Vereinfachung der Modellierung der Wasserdampf tafel, Optimierung der Gitterwahl und andere organisatorische Maßnahmen erreichen. Eine andere Möglichkeit in der Weiterentwicklung des numerischen Verfahrens besteht

darin, eine implizite Differenzenmethode als Basis zur Lösung des partiellen Differentialgleichungssystemes zu wählen, da man dabei viel längere Zeitschritte zulassen kann.

10 Literaturverzeichnis

- [1] *Lehmann, Heinz:*
Dampferzeugerpraxis: Grundlagen und Betrieb.
2. Aufl: München: Resch Verlag, 1990
- [2] *Nowotny, Peter:*
Ein Beitrag zur Strömungsberechnung in Rohrnetzwerken.
Fortschr.-Ber. VDI-Z.(1982)
- [3] *Bird, Byron R.; Stewart, Warren E.; Lightfoot, Edwin N.:*
Transport Phenomena.
Department of Chemical Engineering; University of Wisconsin;
John Wiley & Sons
- [4] *Leithner, Reinhard:*
Vorlesung Wärme und Stoffübertragung.
Technische Universität Braunschweig, 1984, 85, 86
- [5] *Grigull, Ulrich:*
Zustandsgrößen von Wasser und Wasserdampf in SI-Einheiten.
3. erw. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 1953
- [6] *Haar, Lester; Gallagher, John S.; Kell, George S.:*
NBS/NRC Wasserdampf Tafeln.
Herausgegeben und übersetzt von Ulrich Grigull
Berlin: Springer-Verlag, 1988
- [7] *Marsal, Dietrich:*
Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen.
Zürich: Bibliographisches Institut AG, 1976
- [8] *Sod, Gary A.:*
Numerical Methods in Fluid Dynamics.
Cambridge: University Press, 1985
- [9] *Taniuti, Jeffrey:*
Nonlinear Wave Propagation.
New York, London: Academic Press, 1964
- [10] *LeVeque, Randal J.:*
Numerical Methods for Conservation Laws.
Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 1990

- [11] *Linzer, Wladimir:*
Instationäre Temperaturverteilung in einer Platte bei sprunghafter
und linearer Änderung der Temperatur des berührenden Mediums.
Brennst.-Wärme-Kraft 25 (1973) Nr. 11, S. 414-418
- [12] *Carshaw, H.S.; Jaeger, J.C.:*
Conduction of Heat in Solids.
Oxford: Clarendon Press (1959)