



DIPLOMARBEIT

Seifenhäute und Minimalflächen

Ausgeführt am Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
o. Univ. Prof. Mag. rer. nat. Dr. phil. Hellmuth Stachel

durch

Teresa Matiasek

Zeillergasse 39-43/1/15
1170 Wien

8. August 2007

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich mich für die Unterstützung, die ich im Laufe meines Studiums und insbesondere bei der Entstehung dieser Arbeit erfahren habe, bedanken. Besonderer Dank gebührt dabei natürlich meiner Familie, speziell meinen Eltern, die mir dieses Studium ermöglicht haben und mir auch beim Schreiben meiner Diplomarbeit wichtige Ansprechpartner waren - mein Vater Johannes Matiasek ganz besonders bei unzähligen LaTeX Problemen.

Herrn Prof. Hellmuth Stachel möchte ich für die Betreuung dieser Arbeit danken und dafür, dass er mir bei der Bearbeitung des von ihm vorgeschlagenen Themas alle Freiheiten gelassen hat.

Mein Dank gilt auch meiner Schwester Stefanie, für gute Ideen und die Unterstützung beim Bauen der Modelle. Ilka Peyrer-Heimstätt möchte ich für die wunderschönen Fotos danken und auch dem HTU Fotoreferat, dessen Einrichtung wir beim Fotografieren benutzen durften. Bedanken möchte ich mich auch bei Clemens Horak, der mir bei vielen kleinen und großen Problemen immer zur Seite steht.

Danke

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Entstehung von Seifenhäuten	6
2.1	Oberflächenspannung	6
2.2	Potentielle Energie und minimale Oberfläche	8
2.3	Plateausche Regeln	11
2.4	Laplace-Young-Gleichung	13
3	Minimalflächen	16
3.1	Die Minimalflächengleichung	16
3.2	Erste Scherksche Minimalfläche	18
3.3	Katenoid	20
3.4	Helikoid	26
3.5	Isotherme Parametrisierung	29
3.6	Weierstraßsche Darstellungsformeln	35
3.7	Björlingsches Problem	38
4	Minimalflächen in der Architektur	42
4.1	Seifenhautformen	42
4.2	Minimalflächen im Zeltbau	47
4.3	Beispiele aus der Baukunst	51
	Literaturverzeichnis	56
	Abbildungsverzeichnis	58
A	Begriffe aus der Mathematik	61
B	Begriffe aus der Geometrie	63

Kapitel 1

Einleitung

Seifenblasen haben die Menschen schon in frühen Jahrhunderten fasziniert. Nicht nur auf alten Gemälden, sondern sogar auf einer etruskischen Vase im Louvre sind Kinder zu sehen, die mit Schilfrohren Blasen erzeugen. Taucht man einen geschlossenen Rahmen in Seifenlösung, so bildet sich eine dünne Haut. Will man einfach nur eine Blase erzeugen, so reicht ein ebener Rahmen aus. Taucht man hingegen eine räumlich gekrümmte Form in die Lösung, so bildet sich eine schöne sattelförmige Fläche.

Die Fähigkeit von Flüssigkeiten, Häute zu bilden oder in dünnen Rohren anzusteigen, hat bereits Leonardo Da Vinci beeindruckt. Viele Physiker und Mathematiker haben sich seither mit dem Phänomenen Oberflächenspannung, Kapillarität und dem Problemkreis minimaler Oberflächen befasst. Seifenhäute sind aber nicht allein wegen ihrer Schönheit oder ihrer physikalischen Besonderheiten spannend, sondern auch, weil sie Entsprechungen in der Geometrie haben – die Minimalflächen, Flächen von wenn auch nicht global so wenigstens lokal kleinster Oberfläche und verschwindender mittlerer Krümmung.

Das erste Kapitel dieser Arbeit soll das Konzept Seifenhaut mit der mathematischen Definition einer Minimalfläche in Einklang bringen. Es wird erklärt, warum Flüssigkeitsfilme minimale Strukturen bilden und gezeigt, dass sie die Minimalflächenbedingung der verschwindenden mittleren Krümmung erfüllen. Extremalität gehört zu den Themen, die Mathematiker und Geometer über die Jahrhunderte hinweg fasziniert haben, so wie auch die minimale Oberfläche und somit die Minimalflächen. Erforscht wurden sie von Lagrange, Meusnier, Weierstraß, Plateau – nach dem auch das berühmte Problem, eine Minimalfläche aus ihrer Randkurve heraus zu bestimmen, benannt ist – und sehr vielen anderen. Eine kleine Auswahl der Besonderheiten und Eigenschaften dieser Flächen wird im Kapitel 2 vorgestellt, das sich aber in erster Linie mit der Findung und Darstellung von Minimalflächen befasst. Ausge-

hend von der Lösung der Minimalflächengleichung über die Weierstraßschen Darstellungsformeln bis hin zur Bestimmung einer Minimalfläche aus ihrer Randkonfiguration heraus wird hier der Bogen gespannt.

Um zu verdeutlichen, dass Seifenhäute und die von ihnen gebildeten Formen nicht nur von rein akademischer Relevanz sind, handelt das dritte Kapitel dieser Arbeit von der Architektur mit Minimalflächen. Es wird beleuchtet, warum Strukturen mit verschwindender mittlerer Krümmung bautechnische Vorteile haben können, und auf die Wichtigkeit der Seifenfilme als Architekturmodell eingegangen. Den Schlusspunkt der vorliegenden Arbeit bildet ein kleiner Ausschnitt der tatsächlich verwirklichten Architektur aus Minimalflächen in Form eines Bilderbogens.

Kapitel 2

Entstehung von Seifenhäuten

Dieses Kapitel befasst sich mit der Entstehung und einigen Eigenschaften von Seifenhäuten. Es wird erläutert, welche Faktoren ihre Entstehung begünstigen, und mit Hilfe von Gauß' Theorie der Kapillarität gezeigt, dass sie immer bestrebt sind, die kleinstmögliche Oberfläche zu besitzen. Hierzu wird das Prinzip der virtuellen Arbeit aus der Mechanik herangezogen. Des Weiteren werden die drei Plateauschen Regeln beleuchtet, die das Verhalten von Seifenhäuten an der Grenze zu festen Flächen beziehungsweise zueinander beschreiben. Schlussendlich wird mit Hilfe der Laplace-Young-Gleichung gezeigt, dass auf nicht geschlossenen Seifenhäuten die mittlere Krümmung verschwindet und diese daher Minimalflächen darstellen.

2.1 Oberflächenspannung

Der Begriff der Oberflächenspannung wurde zum ersten Mal vom Physiker und Mathematiker von Segner¹ im Jahre 1751 gebraucht, aber bereits Leonardo da Vinci² betrachtete dieses Phänomen. Er beobachtete das Ansteigen von Flüssigkeiten in dünnen Röhren, den Kapillargefäßen, woher sich auch der Name Kapillaritätstheorie ableitet. Das Wirken der Oberflächenspannung ist einfach zu begreifen, wenn man sich eine Flüssigkeit als Ansammlung von Molekülen vorstellt, die gegenseitig eine gewisse Anziehungskraft ausüben. Innerhalb dieser Flüssigkeit wirken auf ein einzelnes Molekül von allen Seiten die gleichen Kräfte, in der Nähe der Oberfläche allerdings liegen weit mehr Teilchen unterhalb dieses einen Moleküls als zwischen ihm und der Oberfläche, daher ist leicht einzusehen, dass die Anziehung in die Flüssigkeit hinein stärker ist. Diese Anziehungskraft, von der bisher die Rede war, ist

¹Johann Andreas von Segner, *1704 in Preßburg, †1777 in Halle

²Leonardo da Vinci, *1452 Vinci bei Florenz, †1519 Château de Cloux

natürlich elektrischer Natur, es werden also negativ geladene Moleküle von positiv geladenen Molekülen angezogen und umgekehrt. Nun gibt es gewisse Flüssigkeiten wie zum Beispiel Wasser, die eine hohe Polarität aufweisen. Das bedeutet, ihre Moleküle haben eine Struktur, bei der die negativ geladenen Teile (bei Wasser das Sauerstoffatom) sich auf der einen Seite des Moleküls befinden, die positiv geladenen Teile (bei Wasser die Wasserstoffatome) auf der anderen. Ein solcher Art polares Molekül wird sich im Inneren der Flüssigkeit derart mit anderen Molekülen umgeben, dass die entgegengesetzten Ladungen zueinander orientiert sind. An der Grenzfläche dieser Flüssigkeit mit Luft ist das nicht möglich.

Die Teilchen in einer Flüssigkeit können sich bewegen. Sie trennen sich aus einer Bindung und gehen eine neue Bindung ein. Dieser Vorgang ist energetisch neutral, da sie zuerst Energie benötigen, aber durch die Neubindung diese wieder freisetzen. Für die Moleküle an der Oberfläche gilt das Gleiche. Wenn sie in die Flüssigkeit hineingezogen werden und eine Bindung eingehen, löst sich gleichzeitig ein anderes Molekül ab und verbraucht die freigesetzte Energie wieder. Moleküle, die weniger Bindungsnachbarn haben, streben danach, volle Bindungen einzugehen. Bietet sich also die Gelegenheit dazu, werden sie sie wahrnehmen. Dadurch verringert sich die Oberfläche und Energie wird frei. Dieser Energiegewinn ist die Ursache der Oberflächenspannung.

$$\text{Oberflächenspannung} = \sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{\text{verrichtete Arbeit}}{\text{gewonnene Oberfläche}}$$

Die Oberflächenspannung von Wasser ist zu hoch, um die Bildung von freien Flüssigkeitshäuten zu erlauben, die von Seifenlösung dagegen nicht. Dies liegt an der speziellen Oberflächenstruktur einer Seifenlösung. Denn an der Grenzfläche der Flüssigkeit befindet sich eine Schicht von amphipathischen Molekülen, das bedeutet, von Molekülen, die aus einem hydrophilen und einem hydrophoben Teil bestehen. Der hydrophile Teil wird von den Wassermolekülen in der Flüssigkeit angezogen, der hydrophobe dagegen abgestoßen. Substanzen mit dieser Eigenschaft nennt man auch grenzflächenaktiv, da sie sich an der Oberfläche verteilen.

Normale Seife ist ein Alkalisalz der Fettsäure. Ihre Moleküle dissoziieren im Wasser in Alkalimetallkationen und Seifenanionen, bestehend aus einer negativ geladenen Carboxylatgruppe, dem hydrophilen „Kopf“, und einem unpolaren Kohlenwasserstoffrest, dem hydrophoben „Schweif“. Der „Kopf“ des Teilchens verbindet sich mit den Wassermolekülen nahe der Oberfläche, während der „Schweif“ aus der Seifenlösung herausragt. Dadurch sinkt die Oberflächenspannung der Flüssigkeit ab, sodass sie, abhängig von der Seifenkonzentration und der Temperatur, nur mehr etwa ein Drittel der von Wasser beträgt. Wird eine Seifenhaut durch Rütteln gestört und aus dem

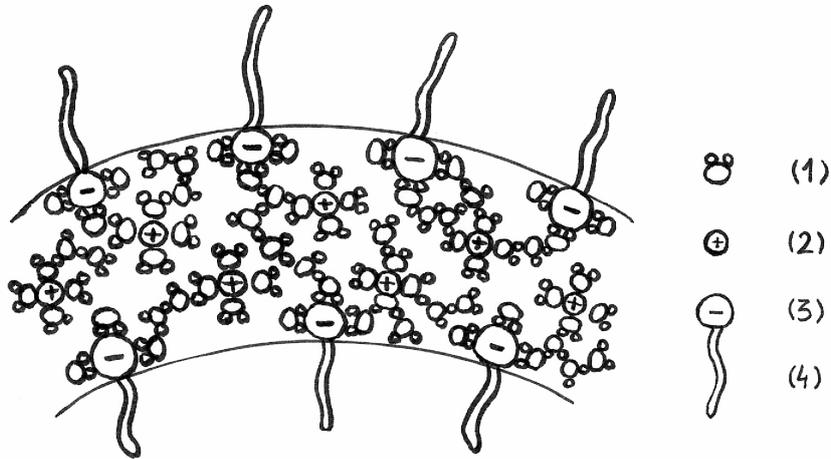


Abbildung 2.1: Darstellung der Struktur einer Seifenlösung

- (1) Wassermolekül
- (2) Metallkation
- (3) Carboxylat-Kopf
- (4) Kohlenwasserstoff-Schweif

Gleichgewicht gebracht, „fallen“ einige der Seifenmoleküle um. Ihre hydrophoben Enden ragen nicht mehr aus der Flüssigkeit und die Oberfläche wird vergrößert, wodurch die Spannung sinkt. Da der Flüssigkeitsfilm sich aber nun eher wie Wasser verhält, steigt die Oberflächenspannung wieder und die Seifenhaut findet entweder in ihre Gleichgewichtslage zurück, oder sie zerreißt.

2.2 Potentielle Energie und minimale Oberfläche

Dem Mathematiker Laplace³ gelang es, aus den oberhalb beschriebenen Anziehungskräften zwischen Molekülen seine Theorie der Kapillarität zu entwickeln, mit der er versuchte, das Verhalten von Flüssigkeitshäuten zu erklären.

³Pierre Simon Marquis de Laplace, *1749 in Beaumont-en-Auge, †1827 in Paris

Doch erst durch die Ergänzungen von Gauß⁴, der von Bernoullis⁵ Prinzip der virtuellen Arbeit ausging, konnte der extremale Charakter ihres Verhaltens vollständig erklärt werden. Dieses Prinzip besagt in einer einfachen Formulierung, die auch als Dirichletsches⁶ Prinzip bekannt ist, das folgende:

1. Die stabilen Gleichgewichtszustände eines physikalischen Systems sind dadurch charakterisiert, dass in einem solchen Zustand die potentielle Energie des Systems kleiner ausfällt als in jedem anderen möglichen (oder „virtuellen“) benachbarten Zustand.
2. Die Gleichgewichtslagen eines Systems sind die stationären Zustände seiner potentiellen Energie.

Um diese Regeln zu verdeutlichen, ist ein geometrisches Bild hilfreich. Stellen wir uns alle möglichen Zustände eines Systems als eine Ebene vor, wobei jedem Zustand ein Punkt entspricht; die zugehörige potentielle Energie denken wir uns in jedem Punkt als Höhe aufgetragen. Würde in dieser „bergigen Landschaft“ eine Kugel rollen, so entsprächen die „Täler“ ihren stabilen, die Sattelpunkte und „Berggipfel“ ihren instabilen Ruhelagen. Diese Punkte mit horizontalen Tangentialebenen entsprechen den stationären Zuständen der potentiellen Energie.

Die potentielle Energie eines Systems, das aus zwei Medien - hier Seifenlösung und Luft - mit einer gemeinsamen Grenzfläche, und fester Umrandung besteht, setzt sich aus vier Komponenten zusammen.

- *Energie der freien Fläche*: Die Moleküle an der Oberfläche eines Mediums müssen, wie bereits erwähnt, stärker von diesem als vom zweiten Medium angezogen werden, da sich die beiden Substanzen ansonsten mischen würden. Die mit der resultierenden Verkleinerung der Oberfläche assoziierte Energie ist proportional zur Größe A der Fläche. Sie wird Oberflächenenergie genannt und hat dieselbe Einheit und denselben Zahlenwert wie die Oberflächenspannung.

$$E_{\sigma} = \sigma A$$

- *Benässungsenergie*: Sie entspricht der Adhäsion zwischen Flüssigkeitsmolekülen und der festen Umrandung und berechnet sich analog zur Oberflächenenergie aus Oberflächenspannung und Fläche.

$$E_b = -\sigma\beta A^*$$

⁴Carl Friedrich Gauß, *1777 in Braunschweig, †1855 in Göttingen

⁵Johann Bernoulli, *1667 in Basel, †1748 ebd.

⁶Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, *1805 in Düren, †1859 in Göttingen

Hierbei ist A^* die benässte Fläche des Randes und β der sogenannte *relative Adhäsionskoeffizient*, für den $|\beta| \leq 1$ gilt.

- *Gravitationsenergie*: Die Schwerkraft ist eine Volumenskraft, die auf jedes Massenelement wirkt und, um die Flüssigkeit in Ruhe zu halten, durch Druckunterschiede kompensiert werden muss. Daher nehmen wir eine potentielle Energie Υ pro Volumeneinheit an, die von ihrer Position innerhalb der Flüssigkeit abhängig ist.

$$E_g = \int \Upsilon \rho dx$$

Integriert wird hier über den gesamten Volumensbereich des Mediums und ρ steht für die lokale Dichte.

- *Konstantes Volumen*: Da sich das Volumen V einer Flüssigkeit bei der Variation ihrer Oberfläche nicht verändern darf, müssen wir seine Konstanz als Nebenbedingung miteinbeziehen. Dazu führen wir bei der Berechnung der Minimalbedingung den Lagrangeschen Multiplikator λ ein.

$$E_V = (\sigma\lambda)V$$

Für die gesamte potentielle Energie ergibt sich somit:

$$E = \sigma \left(A - \beta A^* + \frac{1}{\sigma} \int \Upsilon \rho dx + \lambda V \right). \quad (2.1)$$

Betrachten wir nun statt einer eingefassten Flüssigkeit mit einer Grenzfläche eine freie Seifenhaut, ändert sich die Formel (2.1). Da wir den Rand nun nicht betrachten wollen, können wir die Benässungsenergie außer Acht lassen. Außerdem können wir auf Grund der geringen Dicke des Seifenfilmes davon ausgehen, dass bei virtuellen Verrückungen dieser Haut der Normalabstand der beiden Oberflächen voneinander gleich bleibt. Wenn wir die Dicke der Haut nun auch noch als verschwindend gering annehmen, können wir auch die Terme, die vom Volumen der Flüssigkeit abhängen, vernachlässigen. Allerdings muss die Energie der freien Fläche zweimal auftreten, da wir jetzt zwei Oberflächen haben. Die Fläche A auf der oberen und die Fläche \bar{A} auf der unteren Seite der Seifenhaut. Es ergibt sich also als zu minimierender Ausdruck nur mehr

$$E = \sigma(A + \bar{A}) = \sigma A_{ges} \longrightarrow \min,$$

wobei A_{ges} für die beiden Oberflächen des Seifenfilmes zusammen steht. Nun ist ganz klar zu erkennen, dass sich ein Minimum der potentiellen Energie genau dann einstellen wird, wenn die Oberfläche minimal ist.

Satz 2.2.1 (Erstes Prinzip der Seifenhäute) *Eine Seifenhaut nimmt eine Form minimaler Oberfläche an.*

2.3 Plateausche Regeln

Neben Satz 2.2.1 gibt es noch andere Regeln, denen sich Seifenhäute unterwerfen. Der belgische Physiker Plateau⁷ fand auf empirische Art drei wichtige Regeln für das Verhalten von Seifenhäuten in einem Rahmen:

Satz 2.3.1 (Plateaus Regeln) 1. **Die 120° Regel:** *Nur genau drei ebene Seifenflächen können sich entlang einer Geraden treffen, wobei der Winkel zwischen je zweien 120° beträgt.*

2. **Die 109° 28' 16'' Regel:** *Nur genau vier Geraden, die je von drei zusammenstoßenden Seifenhäuten gebildet werden, können sich in einem Punkt treffen, wobei der Winkel zwischen jedem Paar benachbarter Geraden 109° 28' 16'' ($\arccos(-\frac{1}{3})$) beträgt.*

3. **Die 90° Regel:** *Ein Seifenfilm, der sich entlang einer festen Fläche frei bewegen kann, trifft diese unter 90°.*

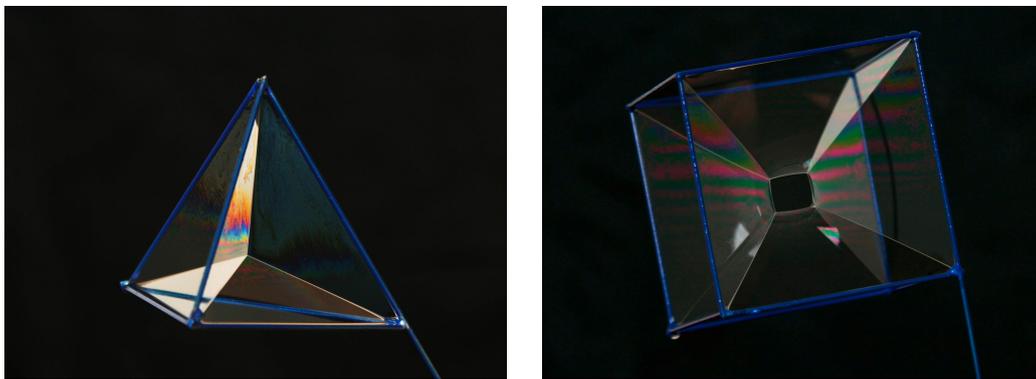


Abbildung 2.2: Seifenhautgebilde in Tetraeder und Würfel

Beweisskizze für 1 und 2:⁸ Angenommen wir wüssten bereits, dass die betrachteten Minimalflächen und ihre Schnittkanten glatte Objekte sind.

⁷Joseph Antoine Ferdinand Plateau, *1801 in Brüssel; †1883 in Gent

⁸Der Beweis des dritten Satzteiltes folgt in Kapitel 3.7

Dann wählen wir einen Punkt P irgendwo auf dem Flächensystem und betrachten seine Umgebung. Wenn wir diese Nachbarschaft immer kleiner werden lassen, streben die Flächenstücke gegen ein Grenzsysteem ebener Flächenstücke, deren Konfiguration weiterhin den Flächeninhalt minimiert.

Nun wählen wir eine Sphäre mit P als Mittelpunkt, die alle Flächen in der Nachbarschaft von P schneidet. Die Schnittkurven sind Großkreise, für die auf Grund der Minimaleigenschaft des Systems ebener Flächen gilt, dass höchstens drei in einem Punkt zusammentreffen können und dort Winkel von 120° miteinander einschließen⁹. Um die resultierende Frage nach den verschiedenen Konfigurationen von Großkreisen, von denen höchstens drei in einem Punkt der Sphäre zusammentreffen, zu lösen, müssen wir das Steiner'sche Problem¹⁰ auf der Sphäre lösen. Mit Hilfe der sphärischen Geometrie zeigt sich, dass es genau zehn geodätische Netze dieser Art gibt.

Als nächstes wählen wir Kegel, die ihre Spitzen im Mittelpunkt der Sphäre haben und die Oberfläche entlang der Großkreise schneiden. Die Frage ist nun, ob Seifenhäute mit minimaler Oberfläche existieren, die dieselbe Flächenkonfiguration aufweisen wie die Kegel.

Es ist nun zu überlegen, welche Deformationen die Gesamtfläche verkleinern könnten. (Natürlich kommen nur solche Veränderungen in Betracht, die die Großkreise unverändert lassen.)

Es stellt sich heraus, dass in nur drei dieser zehn Möglichkeiten die Kegelflächen bereits flächenminimierend sind.

Die erste Lösung ist ein einzelner Großkreis, der eingespannte Seifenfilm daher eben (siehe Abbildung 2.3 links). Dieser Fall ergibt sich, wenn der betrachtete Punkt P im Inneren eines glatten Flächenstückes liegt.

Die zweite Konfiguration besteht aus drei halben Großkreisen, die symmetrisch angeordnet sind. Die resultierende Fläche setzt sich also aus drei Ebenen zusammen, die entlang einer gemeinsamen Geraden je einen Winkel von 120° miteinander einschließen (siehe Abbildung 2.3 rechts). In diesem Fall wurde P im Inneren einer Schnittlinie gewählt.

Die letzte Möglichkeit ergibt sich, wenn die Kreisbögen ein reguläres sphärisches Tetraeder bilden (siehe Abbildung 2.3). Ein solches sphärisches Tetraeder lässt sich erzeugen indem man einer Kugel einen Würfel einschreibt, dessen Ecken die Hüllfläche berühren. Betrachtet man den Körper zu dem sich die Flächendiagonalen des Würfels verbinden lassen so hat man einen Tetraeder. Durch Projektion aus dem Mittelpunkt der Kugel auf die Oberfläche ebendieser erhält man ein sphärisches Tetraeder.

⁹siehe hierzu [7] oder [12]

¹⁰Das Steiner'sche Problem besteht darin, zwischen drei Punkten in der Ebene das, über einen weiteren Punkt laufende, Verbindungssystem kürzester Gesamtlänge zu finden.

Daher treffen sich die Seifenhäute die sich bei dieser Randkonfiguration bilden wiederum entlang von Geraden in 120° -Winkeln. Die vier Geraden treffen einander in einem Punkt und schließen jeweils Winkel von $109^\circ 28'16''$ miteinander ein. Dieser letzte Fall kommt zustande, wenn P der Punkt ist, in dem die Schnittlinien zusammenlaufen.

□

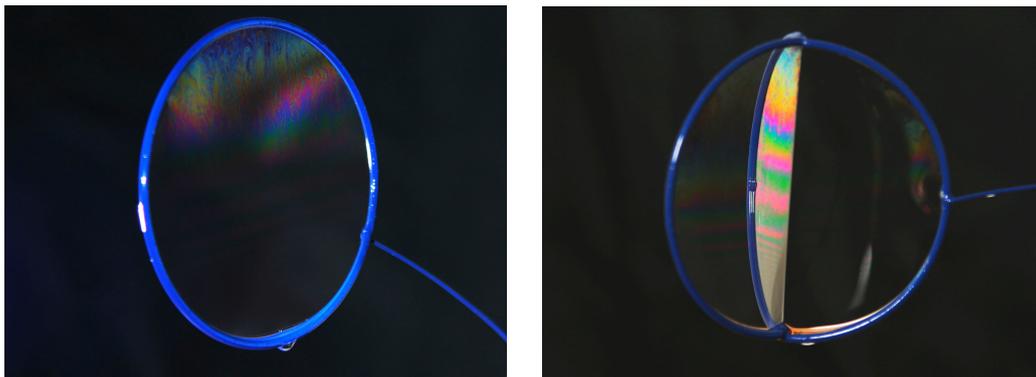


Abbildung 2.3: Seifenfilm in erster und zweiter Lösungskonfiguration



Abbildung 2.4: Seifenfilm in sphärischem Tetraeder

2.4 Laplace-Young-Gleichung

Wir haben uns bereits mit der Frage befasst, warum Seifenhäute Strukturen kleinsten Inhalts bilden, und haben damit eine erste Brücke zu den Mini-

malflächen geschlagen. Womit wir uns noch nicht beschäftigt haben, ist das Verschwinden der mittleren Krümmung.

Denken wir uns ein kleines Stück Fläche, das entlang der Hauptkrümmungslinien¹¹ rechteckig aus einer Seifenoberfläche herausgeschnitten ist. Da das Stück sehr klein ist, ersetzen wir die seitlichen Begrenzungen (mit Längen x und y) durch ihre Krümmungskreise mit den Hauptkrümmungsradien r_1 und r_2 . Wird die Fläche nun durch Druckerhöhung im Inneren (Aufbringen einer Kraft F) nach außen gewölbt, vergrößert sich das betrachtete Flächenstück um einen Wert δu . Damit sich die Oberfläche (die wir ab jetzt A nennen wollen) vergrößern kann, muss - wie in Kapitel 2.1 erwähnt - eine Arbeit W verrichtet werden.¹²

$$W = F \delta u = p A \delta u = p x y \delta u \quad (2.2)$$

Die verrichtete Arbeit können wir auch durch Multiplizieren der Oberflächenspannung σ mit der Änderung der Oberfläche $\Delta A = (x + \delta x)(y + \delta y) - xy$ berechnen.

$$W = \sigma \cdot \Delta A \quad (2.3)$$

Überlegen wir uns nun: Wenn x Länge eines Kreisbogens mit Radius r_1 ist und $x + \delta x$ Länge eines Kreisbogens mit Radius $r_1 + \delta u$, wobei der Öffnungswinkel der Kreissegmente sich nicht ändert, so gilt die Gleichung

$$\frac{x + \delta x}{r_1 + \delta u} = \frac{x}{r_1}$$

Da für y eine äquivalente Gleichung gilt, erhalten wir:

$$\begin{aligned} x + \delta x &= x \left(1 + \frac{\delta u}{r_1} \right) \\ y + \delta y &= y \left(1 + \frac{\delta u}{r_2} \right) \end{aligned}$$

Diese Formeln können wir in ΔA einsetzen, um

$$\begin{aligned} \Delta A &= x \left(1 + \frac{\delta u}{r_1} \right) y \left(1 + \frac{\delta u}{r_2} \right) - xy \\ &= x y \delta u \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + x y \frac{(\delta u)^2}{r_1 r_2} \end{aligned}$$

¹¹Siehe dazu Anhang B

¹²Arbeit = Kraft · Weg ; Druck = Kraft / Flächeneinheit

zu erhalten. Wenn δu infinitesimal klein ist, können wir den letzten Term außer Acht lassen und den verbleibenden Ausdruck in die Formel (2.3) einsetzen. Durch Gleichsetzen mit (2.2) erhalten wir

$$p \, x \, y \, \delta u = \sigma x \, y \, \delta u \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

was uns durch Kürzen auf die *Laplace-Young-Gleichung*¹³ führt:

$$p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = 2 \, \sigma H \tag{2.4}$$

Die mittlere Krümmung wird, wie der Name schon sagt, als Mittelwert der größten und kleinsten Krümmungen der Fläche berechnet. Diese extremalen Krümmungswerte treten in den Hauptkrümmungsrichtungen auf, die wir gewählt haben um das Flächestück herauszuschneiden. Daher können wir $\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$ mit $2H$ ersetzen. Die Formel (2.4) sagt aus, dass der Druckunterschied zwischen den beiden Seiten einer Flüssigkeitshaut abhängig ist von der Oberflächenspannung und der mittleren Krümmung. Betrachten wir nun einen Seifenfilm, der von einem Drahtrahmen begrenzt wird, so haben wir, da kein Volumen eingeschlossen wird, auf beiden Seiten den gleichen Druck. Der Druckunterschied p ist also gleich Null, und da die Oberflächenspannung eine von Null verschiedene Konstante ist, folgt $H = 0$. Somit haben wir gezeigt:

Satz 2.4.1 (Zweites Prinzip der Seifenhäute) *Jeder Seifenfilm bildet eine Minimalfläche.*

¹³Diese Gleichung wurde von Thomas Young (*1773 in Milverton, †1829 in London) und Pierre - Simon Laplace unabhängig von einander um etwa 1800 hergeleitet.

Kapitel 3

Minimalflächen

Dieses Kapitel beschäftigt sich von einem rein mathematischen, bzw. geometrischen Standpunkt aus mit Minimalflächen. Hierzu definieren wir eine Minimalfläche:

Def. 3.0.1 *Eine Fläche der Klasse C^2 heißt Minimalfläche genau dann, wenn die mittlere Krümmung H auf ihr identisch verschwindet.*

3.1 Die Minimalflächengleichung

Aus der Vorlesung über Differentialgeometrie ist bekannt, dass die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 genau die Eigenwerte der Weingartenabbildung¹ $\omega_p : T_p f \rightarrow T_p f$ sind. Die Koordinatenmatrix der Weingartenabbildung wird durch $h_i^k = h_{il} g^{lj}$ berechnet, wobei g^{lj} die inverse Matrix zur Matrix g_{lj} der ersten Fundamentalform ist. Daher lässt sich die mittlere Krümmung mit Hilfe dieser Abbildung einfach aus der Spur von h_i^k als $H = \frac{1}{2} \text{tr}(h g^{-1})$ ermitteln.

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \frac{1}{\det(g_{ij})} \right) \\ &= \frac{(h_{11} g_{22} - 2 h_{12} g_{12} + h_{22} g_{11})}{2 \det(g_{ij})} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die mittlere Krümmung lässt sich auch direkt aus den Hauptkrümmungen durch $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ berechnen. Für die Gaußsche Krümmung ergibt sich $K = \kappa_1 \kappa_2$, woraus klar ersichtlich ist, dass für eine Minimalfläche immer

¹Julius Weingarten, *1836 in Berlin, †1910 in Freiburg

$K \leq 0$ ist. Diese Ungleichung zeigt, eine Minimalfläche ist entweder eben oder sattelförmig.

Betrachten wir nun eine Minimalfläche im \mathbb{R}^3 als Graph einer Funktion $z = \phi(x, y)$ über einem Teil der xy -Ebene in einer sogenannten Mongeschen² Parametrisierung. Die Fläche hat also den Positionsvektor

$$f(u, v) = (u, v, \phi(u, v))$$

wobei u und v auf dem Parametergebiet laufen. Wir berechnen nun die Ableitungen von f nach dem ersten Parameter u und dem zweiten v :

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \phi_u \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \phi_v \end{pmatrix}$$

$$f_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_{uu} \end{pmatrix}, f_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_{uv} \end{pmatrix}, f_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_{vv} \end{pmatrix}.$$

Daher folgt für die erste und zweite Fundamentalform:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \phi_u^2 & \phi_u \phi_v \\ \phi_u \phi_v & 1 + \phi_v^2 \end{pmatrix}, \quad h_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\phi_u^2 + \phi_v^2 + 1}} \begin{pmatrix} \phi_{uu} & \phi_{uv} \\ \phi_{uv} & \phi_{vv} \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in Formel (3.1) ergibt das

$$H = \frac{(1 + \phi_v^2)\phi_{uu} - 2\phi_u\phi_v\phi_{uv} + (1 + \phi_u^2)\phi_{vv}}{2(1 + \phi_u^2 + \phi_v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da eine Minimalfläche durch das Verschwinden der mittleren Krümmung charakterisiert ist erhalten wir:

Satz 3.1.1 *Der Graph einer Funktion $\phi \in \mathbb{R}^2$ ist genau dann minimal, wenn ϕ die Minimalflächengleichung*

$$(1 + \phi_v^2) \phi_{uu} - 2 \phi_u \phi_v \phi_{uv} + (1 + \phi_u^2) \phi_{vv} = 0 \quad (3.2)$$

erfüllt.

Mit Hilfe der partiellen Differentialgleichung (3.2) werden wir in den nächsten Unterkapiteln versuchen, uns einige berühmte Beispiele von Minimalflächen zu erarbeiten.

²Gaspard Monge, *1746 in Beaune, +1818 in Paris

3.2 Erste Scherksche Minimalfläche

In den Jahren 1831 - 1835 fand H. F. Scherk³ explizite Gleichungen für fünf verschiedene Minimalflächen durch Lösen der Gleichung (3.2). Bis zu diesem Zeitpunkt waren nur das Katenoid und das Helikoid (Wendelfläche) bekannt.

Die Minimalflächengleichung ist im Allgemeinen nur schwer lösbar, aber durch zusätzliche algebraische oder geometrische Forderungen, die den Typ der gesuchten Fläche im Voraus festlegen, lässt sie sich vereinfachen.

Scherk bediente sich eines Standardtricks zum Lösen partieller Differentialgleichungen - er stellte die Forderung auf, eine Funktion f sei in zwei Teile geteilt, wobei der eine nur von x , der andere nur von y abhängt. Die Fläche ist also eine Schiebfläche mit $f = g(x) + h(y)$. Die Minimalflächengleichung hat nun die Form:

$$(1 + h'^2(y))g''(x) + (1 + g'^2(x))h''(y) = 0$$

Wir haben es jetzt mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung zu tun, die sich durch Trennen der Variablen lösen lässt. Daher schreiben wir die von x bzw. von y abhängigen Teile auf verschiedene Seiten der Gleichung. Falls wir nun die Variablen unabhängig von einander variieren würden, wäre die Gleichheit nicht mehr gegeben; daher kann die Gleichung nur dann wahr sein, wenn ihre beiden Seiten gleich der selben Konstanten sind.

$$-\frac{1 + g'^2(x)}{g''(x)} = c = \frac{1 + h'^2(y)}{h''(y)}$$

Betrachten wir nun nur die von x abhängenden Teile

$$1 + g'^2 = -cg''(x)$$

und substituieren g' mit ϕ , um $1 + \phi^2 = -c\phi'$ zu erhalten, und integrieren:

$$\int \frac{-c\phi'}{1 + \phi^2} \frac{d\phi}{\phi'} = \int 1 dx$$
$$\int \frac{-c}{1 + \phi^2} d\phi = \int dx$$

Wir substituieren erneut $\phi = \tan \theta$ und erhalten wegen $d\theta = \frac{d\phi}{1 + \tan^2 \theta}$

$$\int -cd\theta = \int dx.$$

³Heinrich Ferdinand Scherk, *1798 in Posen (Poznan), †1885 in Bremen

Für x haben wir nun die Gleichung $x = -c \theta = -c \arctan \phi$ und erhalten damit $\phi = -\tan\left(\frac{x}{c}\right)$. Durch Substituieren von $\phi = g'$ und erneutem Integrieren erhalten wir

$$\begin{aligned}\int g' dx &= \int -\tan\left(\frac{x}{c}\right) dx \\ \int g' dx &= -c \int \tan \tau d\tau\end{aligned}$$

und schlussendlich

$$g(x) = -c(-\ln(\cos \tau)) = c \ln\left(\cos \frac{x}{c}\right).$$

Führt man dieselbe Berechnung für die von y abhängige Seite aus, so erhält man

$$h(y) = -c \ln\left(\cos \frac{y}{c}\right).$$

Der Ausdruck für die Funktion f lautet nun:

$$f(x, y) = c \ln\left(\frac{\cos\left(\frac{x}{c}\right)}{\cos\left(\frac{y}{c}\right)}\right).$$

Die Fläche $x(u, v) = (u, v, f(x, y))$ heißt *erste Scherksche Minimalfläche* und ist definiert für $0 < \frac{\cos\left(\frac{x}{c}\right)}{\cos\left(\frac{y}{c}\right)} < +\infty$. Wählen wir z.B. $c = 1$, so ist die Scherksche Minimalfläche über dem Quadrat $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ definiert, da sie aber doppelt periodisch ist, ist dieses nicht ihr gesamter Definitionsbereich. Sie ist vielmehr auf den schwarzen Feldern eines unendlich großen Schachbretts definiert und nach dem *Schwarzschen⁴ Spiegelungsprinzip⁵* fügen sich die Einzelteile an den Rändern der Quadrate zu einer glatten Fläche zusammen.

⁴Karl Hermann Amandus Schwarz, *1843 in Hermsdorf, †1921 in Berlin

⁵Eine Minimalfläche ist spiegelsymmetrisch bezüglich jeder geraden Linie auf ihr und bezüglich jeder ebenen Fläche, an die sie orthogonal angrenzt.

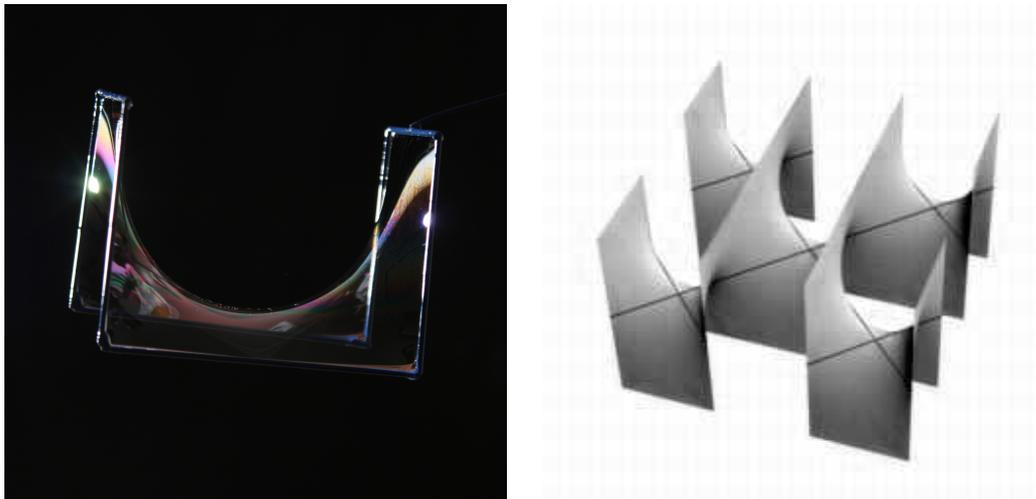


Abbildung 3.1: Erste Scherksche Minimalfläche aus Seifenhaut und als periodische Fläche

3.3 Katenoid

Die Kettenfläche oder auch Katenoid entsteht durch die Rotation einer Kettenlinie um eine feste Achse und wurde bereits 1744 von Leonhard Euler⁶ entdeckt. Dass es sich bei dieser Fläche um eine Minimalfläche handelt, wurde erst etwa 30 Jahre später von Meusnier⁷ gezeigt.

Wir werden uns dieser besonderen Fläche wieder durch Lösen der Minimalflächengleichung nähern. Dazu werden wir als Nebenbedingung verlangen, dass es sich bei der zu erwartenden Lösungsfläche um eine Drehfläche handeln muss. Eine Drehfläche mit der z -Achse als Drehachse besitzt eine Darstellung der Art $x(u, v) = (h(u) \cos(v), h(u) \sin(v), g(u))$, wobei h und g je zwei mal stetig differenzierbar sind. Der Einfachheit halber werden wir hier aber $g(u) = u$ wählen.

⁶Leonhard Euler, *1707 in Basel, †1783 in Petersburg

⁷Jean Baptiste Marie Charles Meusnier de la Place, *1754 in Tours, †1793 in Mainz-Kastel



Abbildung 3.2: Katenoid aus Seifenhaut

Zuallererst müssen wir die erste und zweite Fundamentalform berechnen:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= (h'(u) \cos(v), h'(u) \sin(v), 1), \\
 x_2 &= (-h(u) \sin(v), h(u) \cos(v), 0), \\
 x_{11} &= (h''(u) \cos(v), h''(u) \sin(v), 0), \\
 x_{12} &= (-h'(u) \sin(v), h'(u) \cos(v), 0), \\
 x_{22} &= (-h(u) \cos(v), -h(u) \sin(v), 0), \\
 n &= \frac{(-\cos(v), -\sin(v), h'(u))}{\sqrt{h'^2(u) + 1}}
 \end{aligned}$$

Daher ergibt sich für g_{ij} und h_{ij} (von nun an schreiben wir nur noch h statt $h(u)$):

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + h'^2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}, \quad h_{ij} = \frac{1}{\sqrt{h'^2 + 1}} \begin{pmatrix} -h'' & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

Setzen wir die gewonnenen Terme in die Gleichung (3.1) ein, so erhalten wir

$$H = \frac{h^2 \frac{-h''}{\sqrt{h'^2+1}} + (1+h'^2) \frac{h}{\sqrt{h'^2+1}}}{2 h^2 (1+h'^2)} = \frac{1}{2} \frac{-hh'' + h'^2 + 1}{h(1+h'^2)^{\frac{2}{3}}} = 0.$$

Was wir eigentlich wollen, ist eine Funktion h , die die Minimalflächen-gleichung unter der verlangten Nebenbedingung löst. Daher betrachten wir

von nun an nur mehr den Zähler des oben stehenden Bruchs und bekommen als zu lösende Gleichung den Term $hh'' = 1 + h'^2$. Substituieren wir h' mit w , so ergibt sich $h'' = w' = \frac{dw}{du} = \frac{dw}{dh} \frac{dh}{du} = \frac{dw}{dh} w$. Die Funktion w sei hier von h abhängig und auf einem Intervall mit $h' \neq 0$ definiert. Dies dürfen wir verlangen, da in einem solchen Intervall eine Umkehrfunktion $f = h^{-1}$ mit $u = f(h)$ für h existiert. Bei Integration ergibt sich für diese Funktion $1 = \frac{df}{dh} \frac{dh}{du} = \frac{df}{dh} w$, und wir sehen, w ist eine Funktion von h , da sowohl f , als auch $\frac{df}{dh}$ von h abhängen.

Statt $hh'' = 1 + h'^2$ können wir nun also $hw \frac{dw}{dh} = 1 + w^2$ schreiben, oder auch

$$\frac{w}{1+w^2} dw = \frac{1}{h} dh.$$

Indem wir $1+w^2 = x$ substituieren, können wir beide Seiten dieser Gleichung integrieren und erhalten aus

$$\int \frac{1}{2x} dx = \int \frac{1}{h} dh$$

durch Rücksubstitution

$$\ln \sqrt{1+w^2} = \ln h + c.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\sqrt{1+w^2} = hc, \quad w = \sqrt{h^2 c^2 - 1}.$$

Nun können wir wieder $w = \frac{dh}{du}$ setzen und bekommen $\frac{1}{\sqrt{h^2 c^2 - 1}} dh = du$. Um diese Gleichung integrieren zu können, müssen wir $ch = \cosh s$ substituieren, wobei $dh = \frac{\sinh s}{c} ds$ ist.

$$\int \frac{1}{\sqrt{h^2 c^2 - 1}} dh = \int \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(s) - 1}} \frac{\sinh(s)}{c} ds = \int \frac{1}{c} ds$$

Wir erhalten also $\frac{1}{c}s = u + C$ und Rücksubstitution von s ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \cosh^{-1}(ch) &= u + C \\ ch &= \cosh(cu + Cc), \end{aligned}$$

$$h(u) = c_1 \cosh\left(\frac{u+k}{c_1}\right) \tag{3.3}$$

$$\text{mit } Cc = k = \text{konst.}, \quad \frac{1}{c} = c_1 \tag{3.4}$$

Die gesuchte Fläche hat demnach die Parametrisierung

$$x(u, v) = \left(c_1 \cosh\left(\frac{u+k}{c_1}\right) \cos(v), c_1 \cosh\left(\frac{u+k}{c_1}\right) \sin(v), u \right) \quad (3.5)$$

und ist daher ein Teil eines Katenoids. Damit haben wir gezeigt

Satz 3.3.1 *Ist eine Drehfläche Minimalfläche, so ist sie entweder eine Ebene oder ein Katenoid.*

Der Zusatz über die Ebene ist klar, da eine Ebene minimale Fläche besitzt und gleichzeitig als Drehfläche interpretiert werden kann. Mathematisch tritt der Fall einer Ebene nur dann auf, wenn $h' = \infty$ ist.

Obwohl eine minimale Drehfläche, wie wir gerade gesehen haben, nur eben oder katenoidal sein kann, muss eine Seifenhaut, die zwischen zwei parallelen Kreisringen mit gleichem Radius und Mittelpunkten auf einer gemeinsamen Achse entsteht, sich nicht notwendig an diesen Satz halten. Sie kann auch ein System aus drei Minimalflächen bilden. Neben dieser sehr speziellen Lösung



Abbildung 3.3: drei Minimalflächen im Katenoid

können auch verschiedene Katenoide auftreten, da die Parametrisierung (3.5) keine eindeutige Lösung vorgibt. Nicht alle diese Lösungen können als Seifenhäute auftreten, da auch die instabilen stationäre Zustände der potentiellen Energie⁸ Lösungen der Minimalflächengleichung sind. Diese bilden kein System minimaler Oberfläche und treten nur dann als Seifenhaut in Erscheinung, wenn der Seifenfilm aus einer stabilen Position in eine andere stabile Position

⁸siehe Kapitel 2.2

umspringt, sie sind also sehr flüchtig.

Es ist noch nicht vollständig geklärt, wie viele Minimalflächen sich tatsächlich in eine gegebene Kontur einspannen lassen. Es ist nicht einmal sicher, ob es endlich viele sind. Beschränken wir unsere Betrachtungen kurzzeitig auf Minimalflächen vom Typ der Kreisscheibe, also auf Flächen, die den selben topologischen Typ haben wie eine Kreisscheibe. Flächen solcher Art haben Geschlecht 0, also sind sie von der selben Art wie eine Sphäre, und die Anzahl ihrer Löcher ist 1, daher lassen sie sich zu einer Kreisscheibe verzerren. Zwar ist auch von Minimalflächen vom Typ der Kreisscheibe nicht bekannt, wie viele von ihnen von einer gegebenen Kontur berandet werden, aber es wurde gezeigt, dass aus der Existenz von n stabilen Minimalflächen dieses Typs die Existenz von $n - 1$ instabilen Minimalflächen desselben Typs mit derselben Berandung folgt⁹.

Welche Lösung sich im Fall der zwei Kreisringe als Berandung als Seifenhaut zeigt, hängt ganz entschieden vom Verhältnis zwischen dem Radius der Ringe und deren Abstand ab. Die Konstanten c_1 und k in Gleichung (3.3) tragen Informationen über die Randbedingungen, den Radius r der Kreisringe, in sich; daher wollen wir sie etwas näher betrachten.

Der Ursprung soll nun auf der Drehachse des Katenoids liegen und zwar genau in der Mitte zwischen den beiden Randkurven. Wir verwenden nun die bekannte Gleichung einer Kettenlinie $y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$, die zwischen zwei Punkten gleicher Höhe über der Achse entsteht. (Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde hier das Koordinatensystem gedreht.) Für $x = 0$ ist nun also $y = c$ und wir erhalten aus $r = c \cosh\left(\frac{a}{c}\right)$ die Werte von c , wobei $2a$ die Entfernung der Kreisringe von einander ist.

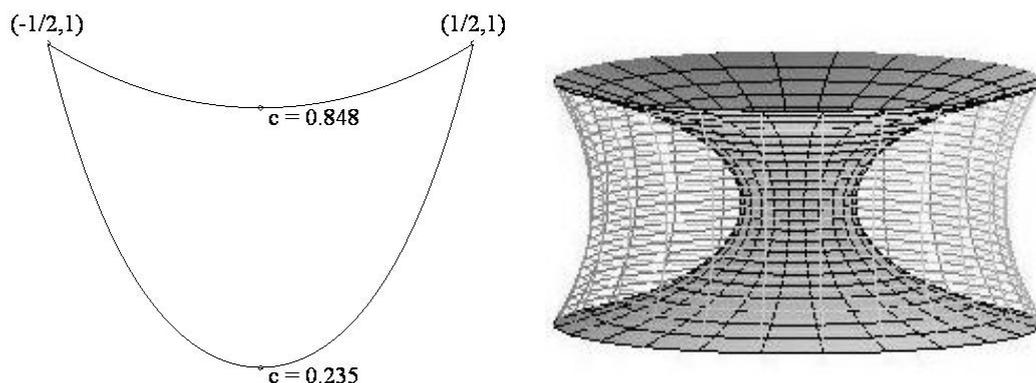


Abbildung 3.4: Kettenlinien durch zwei Punkte und zugehörige Katenoide

⁹siehe dazu auch [7].

Falls $2a = r$ ist, muss die Kettenlinie durch die Punkte $(-\frac{1}{2}, 1)$ und $(\frac{1}{2}, 1)$ verlaufen und besitzt daher die Gleichung $1 = c \cosh(\frac{1}{2c})$. Es gibt zwei Lösungen $c_1 = 0,235$ und $c_2 = 0,848$ für c , was bedeutet, dass zwei verschiedene Kettenlinien durch die beiden Punkte verlaufen (siehe Abbildung 3.4). Welche der beiden führt nun auf das absolute Minimum der Oberfläche des Katenoids? Die Kettenlinie die zum Wert c_2 gehört verläuft sehr viel flacher als die zum Wert c_1 gehörige und führt daher auch zu einem kleineren Ergebnis für die Oberfläche.

Eine dritte Möglichkeit gilt es nun noch zu berücksichtigen, die sogenannte Goldschmidtsche¹⁰ unterbrochene Lösung, denn das absolute Minimum der Oberfläche könnten auch die beiden Kreisscheiben selbst darstellen. Bei der Klärung dieser Frage hilft uns die Graphik 3.5, die die Oberfläche abhängig vom Verhältnis zwischen Radius und Abstand der beiden erzeugenden Kreisinge darstellt. Aus dieser Graphik lässt sich ablesen, dass die flache Kettenlinie immer das kleinere Katenoid erzeugt. Außerdem erkennen wir, ab welchem Zeitpunkt die Goldschmidtsche Lösung auftritt.

Ist der Abstand der beiden Kreisinge von einander kleiner als $1,056 \cdot r$, so stellt das flachere Katenoid das absolute Minimum dar. Liegt die Entfernung zwischen $1,056 \cdot r$ und $1,325 \cdot r$, ist die katenoidale Lösung nur mehr ein relatives Minimum, und die beiden Kreisscheiben bilden das absolute Minimum der Oberfläche. Goldschmidt zeigte im Jahr 1831, dass die Seifenhaut für Abstände größer als $1,325 \cdot r$ in diese unterbrochene Lösung überspringt und sich daher kein Katenoid mehr bilden kann.

¹⁰Carl Wolfgang Benjamin Goldschmidt, *1807,+1851

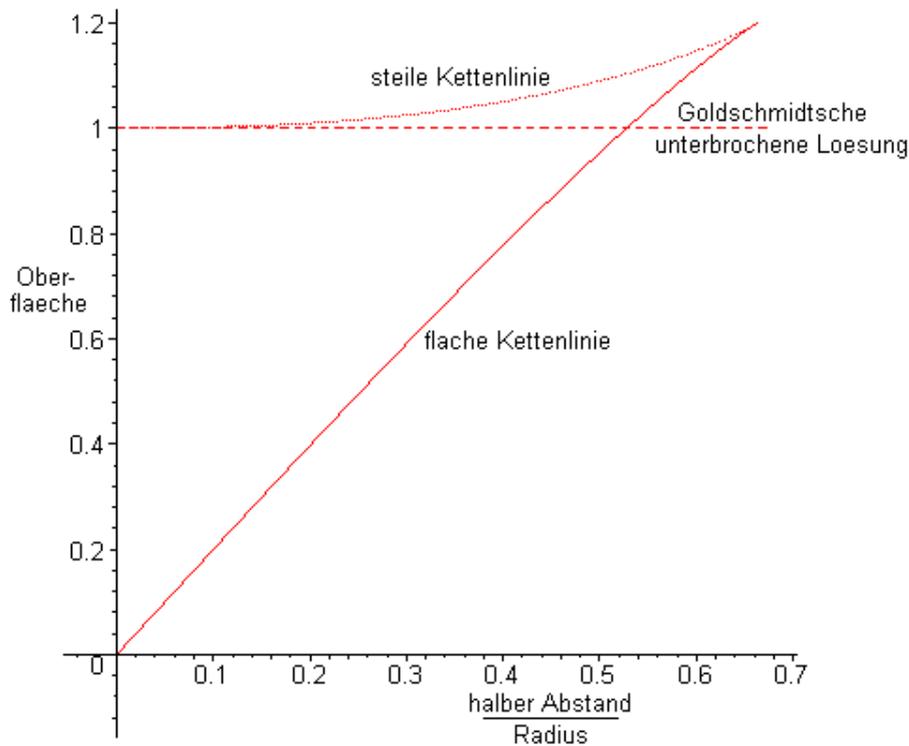


Abbildung 3.5: Oberflächen verschiedener Lösungsmöglichkeiten

3.4 Helikoid

Genau wie das Katenoid ist die Wendelfläche (oder auch Helikoid) bereits seit der Mitte des achzehnten Jahrhunderts bekannt. Genaugenommen ist seine Form noch bedeutend länger bekannt, aber der Nachweis, dass es sich um eine Fläche mit verschwindender mittlerer Krümmung, also um eine Minimalfläche handelt, wurde erst 1776 von Meusnier erbracht.

Die Wendelfläche ist eine Regelfläche, die einzige dieser Art unter den Minimalflächen, wie wir hier zeigen wollen.

Doch zunächst soll das Verschwinden der mittleren Krümmung gezeigt werden. Ein Helikoid lässt sich durch

$$x(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), u)$$

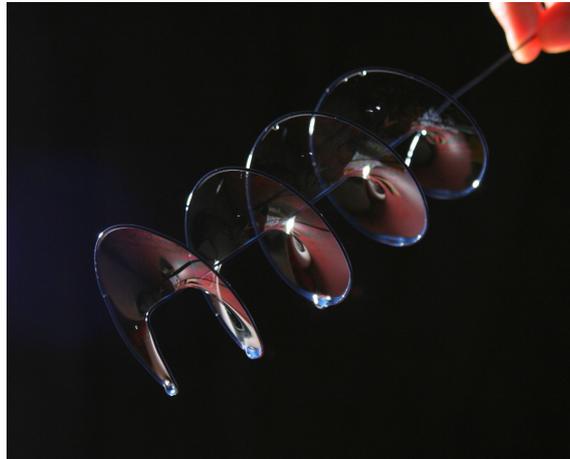


Abbildung 3.6: Helikoid aus Seifenhaut

parametrisieren. Demnach erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= (-v \sin(u), v \cos(u), 1), \\
 x_2 &= (\cos(u), \sin(u), 0), \\
 x_{11} &= (-v \cos(u), -v \sin(u), 0), \\
 x_{12} &= (-\sin(u), \cos(u), 0), \\
 x_{22} &= 0, \\
 n &= \frac{(-\sin(u), \cos(u), -v)}{\sqrt{1+v^2}}
 \end{aligned}$$

Und für die erste und zweite Fundamentalform ergibt sich:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} v^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Setzen wir die Ergebnisse in die Gleichung

$$H = \frac{(h_{11} g_{22} - 2 h_{12} g_{12} + h_{22} g_{11})}{2 \det(g_{ij})}$$

ein, sehen wir die Richtigkeit von $H = 0$ und wissen nun, bei der Wendelfläche handelt es sich tatsächlich um eine Minimalfläche. Wenden wir uns jetzt dem Satz von Catalan¹¹ zu.

Satz 3.4.1 *Ist eine Regelfläche Minimalfläche, so ist sie entweder eine Ebene oder ein Helikoid.*

¹¹Eugène Charles Catalan, *1814 in Brugge, †1894

Beweis: Eine Regelfläche sei gegeben durch $x(u, v) = \beta(v) + u\delta(v)$ mit $-\infty < u < \infty, v_1 < v < v_2$. Die Einheitsvektoren $\beta(v)$ und $\delta(v)$ seien zwei Mal stetig differenzierbar, des weiteren gelte $|\delta(v)'| = 1$. Benutzen wir eine Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden als Leitlinie, so gilt $\langle \beta'(v), \delta(v) \rangle = 0$. Lassen wir den Fall der Ebene außer acht und betrachten wir nur windschiefe Regelflächen, so gilt $\det(\delta', \delta, \beta') \neq 0$. Die Minimalflächenbedingung $H = 0$ können wir auch in der Form

$$H = \frac{\langle x_v, x_v \rangle \langle (x_u \times x_v), x_{uu} \rangle + \langle x_u, x_u \rangle \langle (x_u \times x_v), x_{vv} \rangle - 2 \langle x_u, x_v \rangle \langle (x_u \times x_v), x_{uv} \rangle}{2 \langle (x_u \times x_v), (x_u \times x_v) \rangle^{\frac{2}{3}}}$$

schreiben, wobei wir, wenn wir nur den Zähler betrachten und diesen umformen,

$$\det(\beta', \delta, \beta'') + u[\det(\delta, \delta', \beta'') + \det(\delta, \beta', \delta'')] + u^2 \det(\delta, \delta', \delta'')$$

erhalten. Für das Verschwinden der mittleren Krümmung ergeben sich somit drei Bedingungen.

1. $\det(\beta', \delta, \beta'') = 0$
2. $\det(\delta, \delta', \beta'') + \det(\delta, \beta', \delta'') = 0$
3. $\det(\delta, \delta', \delta'') = 0$

Denken wir uns $\delta(v)$ als Tangentenvektor einer nach der Bogenlänge v parametrisierten Raumkurve mit Positionsvektor $\Delta(v)$, mit Krümmung $\kappa(v)$ und Torsion $\tau(v)$, so folgt $\kappa = |\delta'| = 1$ und mit Gleichung 3 $\det(\delta, \delta', \delta'') = \kappa^2 \tau = 0$. Da $\kappa \neq 0$ ist, folgt daraus $\tau = 0$ und die Kurve Δ ist ein Kreis mit Radius 1. Es gilt also: $\delta(v) = a \cos(v) + b \sin(v)$ mit orthogonalen Einheitsvektoren a und b . Wegen $\delta''(v) = -a \cos(v) - b \sin(v)$ schreiben wir $\delta'' = -\delta$, und Gleichung 2 reduziert sich von $\det(\delta, \delta', \beta'') + \det(\delta, \beta', -\delta) = 0$ auf $\langle c, \beta'' \rangle = 0$, wobei $c = a \times b$ ist. Daher folgt $\langle c, \beta' \rangle = k = \text{konst.}$ und wegen $\det(\delta', \delta, \beta') \neq 0$ ist diese Konstante k verschieden von Null und die Leitlinie ist eine Böschungslinie. Wir schreiben nun $\beta'(v) = kc + d(v)\delta'(v)$, wodurch $\langle \beta', \delta \rangle = 0$ gewahrt bleibt und setzen in Gleichung 1 ein.

$$\det(kc + d(v)\delta', \delta, \beta'') = \langle kc, (\delta \times \beta'') \rangle + \langle d(v)\delta', (\delta \times \beta'') \rangle = 0$$

Wegen $\beta''c = 0$ fällt der erste Teil weg, und damit die Gleichung stimmt, muss $d(v)$ konstant sein. Daher ergibt sich $\beta(v) = \beta_0 + kcv + d\delta(v)$, und die Regelfläche hat die Darstellung

$$x(u, v) = (\beta_0 + kcv) + (d + u)(a \cos(v) + b \sin(v))$$

und ist demnach eine Wendelfläche.

□

3.5 Isotherme Parametrisierung

Alle Minimalflächen, die hier bisher vorgestellt wurden, hat man durch Lösen der Minimalflächengleichung entdeckt. Wie in Kapitel 3.2 besprochen, ist das Lösen dieser partiellen Differentialgleichung aber nicht so einfach möglich. Bisher haben wir sehr spezielle zusätzliche Forderungen an die Funktionen gestellt, welche die Gleichung (3.2) lösen sollen. Um diese Einschränkungen abzumildern, nehmen wir nun die Funktionentheorie zu Hilfe, denn es besteht ein günstiger Zusammenhang zwischen dem Verschwinden der mittleren Krümmung und harmonischen¹² Funktionen.

Satz 3.5.1 *Eine Fläche M mit der isothermen Parametrisierung $x(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$ ist genau dann eine Minimalfläche, wenn x^1, x^2 und x^3 harmonische Funktionen sind.*

Bevor wir uns dem Beweis dieses Satzes widmen können, müssen noch einige Dinge geklärt werden. Rufen wir uns aus der Differentialgeometrie die Definition isothermer Parameter ins Gedächtnis.

Def. 3.5.1 *Eine Parametrisierung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eines Flächenstückes heißt isotherm oder auch konform, wenn für die erste Fundamentalform*

$$g_{11} = g_{22}, \quad g_{12} = 0 \tag{3.6}$$

in U gilt.

Die Ausdrücke (3.6) sind gleichbedeutend mit $g_{ij} = \lambda^2(x)\delta_{ij}$, wobei δ_{ij} das Kroneckersymbol ist.

Existenz isothermer Parameter auf Minimalflächen

Durch $x(u, v)$ sei ein Flächenstück gegeben, dass wir mit $\psi : V \rightarrow U$ umparametrisieren wollen, sodass eine isotherme Parametrisierung vorliegt. Es sei $\psi(u, v) = (s, t)$ und $\tilde{x} = x \circ \psi^{-1}$. Daher gilt für $\langle \tilde{x}_s, \tilde{x}_s \rangle = \langle x_u u_s + x_v v_s, x_u u_s + x_v v_s \rangle$ und die Koeffizienten der ersten Fundamentalform von \tilde{x} lauten daher:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{11} &= g_{11}u_s^2 + 2g_{12}u_s v_s + g_{22}v_s^2 \\ \tilde{g}_{12} &= g_{11}u_s u_t + g_{12}(u_s v_t + u_t v_s) + g_{22}v_s v_t \\ \tilde{g}_{22} &= g_{11}u_t^2 + 2g_{12}u_t v_t + g_{22}v_t^2 \end{aligned}$$

¹²siehe Anhang A

Da es sich um eine isotherme Parametrisierung handeln soll, gelten die Gleichungen

$$g_{11}u_s^2 + 2g_{12}u_s v_s + g_{22}v_s^2 = g_{11}u_t^2 + 2g_{12}u_t v_t + g_{22}v_t^2$$

$$g_{11}u_s u_t + g_{12}(u_s v_t + u_t v_s) + g_{22}v_s v_t = 0,$$

welche genau dann erfüllt sind, wenn gilt

$$v_s = -\frac{g_{12}}{g_{22}}u_s - \frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{g_{22}}u_t$$

$$v_t = \frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{g_{22}}u_s - \frac{g_{12}}{g_{22}}u_t$$

Diese beiden Ausdrücke lassen sich invertieren, sodass wir Differentialgleichungen für s und t in Abhängigkeit von u und v erhalten.

$$t_u = \frac{g_{12}}{g_{22}}t_v - \frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{g_{22}}s_v$$

$$s_u = \frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{g_{22}}t_v + \frac{g_{12}}{g_{22}}s_v$$

Und durch Umformen entsteht

$$t_u = \frac{g_{12}}{\sqrt{\det g_{ij}}}s_u - \frac{g_{11}}{\sqrt{\det g_{ij}}}s_v$$

$$t_v = \frac{g_{22}}{\sqrt{\det g_{ij}}}s_u - \frac{g_{12}}{\sqrt{\det g_{ij}}}s_v.$$

Würde $g_{ij} = \delta_{ij}$ gelten, so könnten wir die obigen Gleichungen zu

$$\frac{dt}{du} = -\frac{ds}{dv}, \quad \frac{dt}{dv} = \frac{ds}{du}$$

umformen, und dies sind genau die Cauchy-Riemannschen¹³ Differentialgleichungen. Deshalb werden wir, um die Differentialgleichungen zu lösen, harmonische Funktionen und ihre konjugierten harmonischen Funktionen suchen. Hierzu benötigen wir folgenden Hilfssatz:

Satz 3.5.2 *Auf einem Flächenstück $f : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ mit erster Fundamentalform g_{ij} gilt*

$$\Delta_g f = 2Hn,$$

wobei Δ_g der Laplace-Beltrami¹⁴-Operator bezüglich g_{ij} ist.

¹³Augustin Louis Cauchy, *1789 in Paris, +1857 in Sceaux
Bernhard Riemann, *1826 in Dannenberg, +1866 in Selasca

¹⁴Eugenio Beltrami, *1835 in Cremona, +1900 in Rom

Beweis Der Laplace-Beltrami-Operator lautet ausgeschrieben, wobei G für $\det(g_{ij})$ steht,

$$\begin{aligned} \Delta_g f &= \frac{g_{22}}{G} f_{,11} - \frac{2g_{12}}{G} f_{,12} + \frac{g_{11}}{G} f_{,22} + \\ &+ \left[\left(\frac{g_{22}}{\sqrt{G}} \right)_{,1} f_{,1} - \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{G}} \right)_{,1} f_{,2} - \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{G}} \right)_{,2} f_{,1} + \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{G}} \right)_{,2} f_{,2} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{G}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Wir schreiben $f(x, y) = (x, y, z(x, y))$ in nichtparametrischer Form an und erhalten:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + z_x^2 & z_x z_y \\ z_x z_y & 1 + z_y^2 \end{pmatrix}, \quad G = 1 + z_x^2 + z_y^2$$

Die Quotienten und die Kettenregel führen zu

$$\begin{aligned} \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{G}} \right)_{,1} &= \left(\frac{1 + z_y^2}{\sqrt{G}} \right)_{,x} = \frac{z_y z_{xy} - z_x z_{xx} + z_y^3 z_{xy} - z_x z_y^2 z_{xx} + 2z_y z_x^2 z_{xy}}{G\sqrt{G}} \\ \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{G}} \right)_{,2} &= \left(\frac{z_x z_y}{\sqrt{G}} \right)_{,y} = \frac{z_y z_{xy} + z_x z_{yy} + z_x^3 z_{yy} + z_y^3 z_{xy}}{G\sqrt{G}} \end{aligned}$$

und daher ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{G}} \right)_{,x} - \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{G}} \right)_{,y} &= \frac{-z_x(1 + z_y^2)z_{xx} + 2z_x^2 z_y z_{xy} - z_x(1 + z_x^2)z_{yy}}{G\sqrt{G}} \\ &= -z_x 2H. \end{aligned}$$

Durch den analogen Rechenvorgang erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{G}} \right)_{,y} - \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{G}} \right)_{,x} &= \frac{-z_y(1 + z_x^2)z_{xx} + 2z_x z_y^2 z_{xy} - z_y(1 + z_x^2)z_{yy}}{G\sqrt{G}} \\ &= -z_y 2H. \end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung (3.7) liefert demnach den Nachweis des Hilfssatzes:

$$\begin{aligned} \Delta_g f &= \frac{1}{G} [(1 + z_y^2)f_{,xx} - 2z_x z_y f_{,xy} + (1 + z_x^2)f_{,yy}] + \frac{1}{\sqrt{G}} 2H(-z_x f_{,x} - z_y f_{,y}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} 2H[G(0, 0, 1) - (z_x, 0, z_x^2) - (0, z_y, z_y^2)] \\ &= \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\sqrt{G}} 2H = 2Hn. \end{aligned}$$

□

Dieser Hilfsatzes sagt aus, dass man auf einer Minimalfläche immer harmonische Funktionen finden kann, also Funktionen, für die $\Delta_{g_{ij}}f = 0$ gilt, wie zum Beispiel die Komponenten (x^1, x^2, x^3) des Ortsvektors. Es sei nun

$$t(u, v) := x^1(u, v).$$

Wir nehmen an, $s(u, v)$ sei eine harmonische Funktion mit in der Umgebung eines Punktes nicht verschwindendem Gradienten. Betrachten wir das Differential

$$\begin{aligned}\omega &:= \omega^1 du + \omega^2 dv \\ &:= \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{\det g_{ij}}} s_u - \frac{g_{11}}{\sqrt{\det g_{ij}}} s_v \right) du + \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{\det g_{ij}}} s_u - \frac{g_{12}}{\sqrt{\det g_{ij}}} s_v \right) dv\end{aligned}$$

und formen es zu

$$\omega = -\sqrt{\det g_{ij}}(g^{12}s_u + g^{22}s_v)du + \sqrt{\det g_{ij}}(g^{11}s_u + g^{12}s_v)dv$$

um. Da s harmonisch ist und der Laplace–Beltrami–Operator in Summenschreibweise $\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\sqrt{\det g_{ij}} g^{lk} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)$ lautet, gilt

$$d\omega = -\frac{d\omega^1}{dv} du \wedge dv + \frac{d\omega^2}{du} du \wedge dv = 0$$

und das Differential ist vollständig.

Unter der Annahme, die Umgebung U des gewählten Punktes $z_0 = (u_0, v_0)$ wäre einfach zusammenhängend, gilt für $z \in U$

$$t(u, v) := \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} \omega.$$

Das Integral über eine beliebige z_0 und z verbindende Strecke ist wegen der Vollständigkeit von ω von der Wahl dieser Verbindung unabhängig. Daher gilt

$$\begin{aligned}t_u &= \omega^1 = \frac{g_{12}}{\sqrt{\det g_{ij}}} s_u - \frac{g_{11}}{\sqrt{\det g_{ij}}} s_v \\ t_v &= \omega^2 = \frac{g_{22}}{\sqrt{\det g_{ij}}} s_u - \frac{g_{12}}{\sqrt{\det g_{ij}}} s_v\end{aligned}$$

Die Abbildung $\psi : V \rightarrow U$ mit

$$\psi : (u, v) \in V \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} s(u, v) = x^1(u, v) \\ t(u, v) = \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} \omega \end{array} \right\} \in U$$

beschreibt also einen Parameterwechsel zu isothermen Parametern, und es ist gezeigt, dass jeder Punkte einer Minimalfläche eine Umgebung hat, in der isotherme Parameter existieren.

Nun können wir uns dem Beweis von Satz 3.5.1 zuwenden.

Beweis von Satz 3.5.1: Ist M eine Minimalfläche, so gilt $H = 0$ und wegen Hilfsatz 3.5.2 gilt $\Delta_g x = 0$. Demnach sind die Koordinatenfunktionen von x harmonisch.

Gehen wir davon aus, dass die Funktionen x^1, x^2 und x^3 harmonisch sind, gilt $\Delta_g x = 2Hn = 0$, und da n der Einheitsvektor der Flächennormale ist, folgt $H = 0$ und M ist minimal.

□

Bemerkung: Für isotherme Parameter stimmt der Laplace–Beltrami–Operator mit dem bekannten euklidischen Laplace–Operator

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = f_{,11} + f_{,22}$$

überein.

Um weitere Darstellungsmöglichkeiten für Minimalflächen zu gewinnen, nehmen wir an $f : U \rightarrow \mathbb{E}^3$, $f = f(u, v)$ sei ein isotherm parametrisiertes Minimalflächenstück, dessen Parameter u und v Real- und Imaginärteil der komplexen Variablen $z = u + iv$ sind. Nun gelten die Wirtingerableitungen¹⁵

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Da $u = \frac{z+\bar{z}}{2}$ und $v = \frac{-i(z-\bar{z})}{2}$ ist können wir ansetzen:

$$f(u, v) = (f^1(z, \bar{z}), f^2(z, \bar{z}), f^3(z, \bar{z})),$$

wobei f^i komplexe Funktionen sind, die reelle Werte annehmen. Wegen der Wirtingerableitungen gilt $\frac{\partial f^i}{\partial z} = \frac{1}{2}(f^i_{,u} - if^i_{,v})$ und wir definieren die komplexwertige Funktion

$$\Phi = \frac{\partial f}{\partial z} = (f^1_z, f^2_z, f^3_z).$$

¹⁵Wilhelm Wirtinger, *1865 in Ybbs an der Donau, †1945 ebd.

Für diese Funktion gilt

$$\Phi \cdot \Phi = \frac{(f_u^1 - if_v^1)^2 + (f_u^2 - if_v^2)^2 + (f_u^3 - if_v^3)^2}{4} = \frac{g_{11} - g_{22} - 2ig_{12}}{4} = 0$$

da die Fläche als isotherm parametrisiert vorausgesetzt war. Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} |\Phi|^2 &= \left(\frac{f_{,u} - if_{,v}}{2} \right) \left(\frac{f_{,u} + if_{,v}}{2} \right) = \frac{1}{4} (\langle f_{,u}, f_{,u} \rangle + \langle f_{,v}, f_{,v} \rangle) \\ &= \frac{g_{11} + g_{22}}{4} = \frac{g_{11}}{2} \end{aligned}$$

und das ist gleichbedeutend mit $(\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3) \neq (0, 0, 0)$.

Weil f konform parametrisiert und minimal ist gilt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (f_{,u} - if_{,v}) = \frac{1}{4} (f_{,uu} + f_{,vv}) = \Delta f = 0.$$

Daraus folgt, jedes f_z^i ist holomorph und umgekehrt ist bei holomorphe f_z^i jedes f^i harmonisch und die Fläche f daher minimal. Daher gilt

Satz 3.5.3 $f : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ sei eine isotherm parametrisierte Minimalfläche. Dann ist die Abbildung Φ mit $\Phi^i := \frac{1}{2}(f_{,u} - if_{,v})$ holomorph und es gilt $\Phi \cdot \Phi = 0$.

Ist umgekehrt $U \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sind Φ^i holomorphe Funktionen mit $|\Phi|^2 > 0$ und $\Phi \cdot \Phi = 0$ in U , so definiert

$$f(z, \bar{z}) = \Re \int_{z_0}^z \Phi^i dz \quad (z_0 \in U \text{ beliebig})$$

eine Minimalfläche.

Beweis: Der erste Teil des Satzes folgt aus der oben stehenden Herleitung. Die Umkehrung folgt größtenteils aus Satz 3.5.1, denn durch die Voraussetzung $|\Phi|^2 > 0$ hat df überall maximalen Rang und definiert demnach ein Flächenstück. Des weiteren ist $dz = du + idv$, $z = u + iv$ und es folgt wegen der Definition der Funktion $\Phi = \frac{\partial f}{\partial z}$ und der Wirtingerableitungen

$$\Phi^i dz = \frac{1}{2} [(f_u^i - if_v^i)(du + idv)] = \frac{1}{2} [f_u^i du + f_v^i dv + i(f_u^i dv - f_v^i du)],$$

$$\bar{\Phi}^i d\bar{z} = \frac{1}{2} [(f_u^i + if_v^i)(du - idv)] = \frac{1}{2} [f_u^i du + f_v^i dv - i(f_u^i dv - f_v^i du)].$$

Daher ist

$$df^i = \frac{\partial f^i}{\partial z} dz + \frac{\partial f^i}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = \Phi^i dz + \bar{\Phi}^i d\bar{z} = \Phi^i dz + \overline{\Phi^i dz} = 2\Re \Phi^i dz,$$

und f^i erhält man durch Integration. Da das Gebiet einfach zusammenhängend vorausgesetzt war, ist dieses Integral nach dem Cauchyschen Integralsatz von der Wahl von $z_0 \in U$ unabhängig.

□

3.6 Weierstraßsche Darstellungsformeln

Im vorhergehenden Abschnitt wurde die Suche nach Minimalflächen auf das Finden holomorpher Funktionen zurückgeführt, die gewisse Voraussetzungen erfüllen. Eine Möglichkeit, eine solche Funktion zu konstruieren, besteht darin, eine holomorphe Funktion h und eine meromorphe¹⁶ Funktion g zu suchen, für die hg^2 holomorph ist. Denn es gilt:

Satz 3.6.1 *Sei h eine holomorphe Funktion und g eine meromorphe Funktion auf einem Gebiet $U \in \mathbb{C}$ mit $h \neq 0$. Außerdem habe h an jeder Stelle, an der g einen Pol der Ordnung n hat, eine Nullstelle der Ordnung $\geq 2n$. Dann sind die Funktionen*

$$\Phi^1 = \frac{1}{2}h(1 - g^2), \quad \Phi^2 = \frac{i}{2}h(1 + g^2), \quad \Phi^3 = hg \quad (3.8)$$

holomorph in U und erfüllen $\Phi \cdot \Phi = 0$ und $(\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3) \neq 0$. Umgekehrt kann jedes Tripel $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3)$ holomorpher Funktionen mit $\Phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ und $\Phi \cdot \Phi = 0$ in der Form (3.8) geschrieben werden, sofern $\Phi^1 - i\Phi^2 \neq 0$ und $\Phi^3 \neq 0$ ist.

Beweis: Der erste Teil des Satzes folgt durch direktes Nachrechnen von $\Phi \cdot \Phi = 0$, wobei die Bedingungen an Pol- bzw. Nullstellen sicherstellen, dass Φ holomorph und nicht nur meromorph ist. Um die Umkehrung zu zeigen, bemerken wir, dass die Voraussetzung $\Phi^1 - i\Phi^2 \neq 0$ und $\Phi^3 \neq 0$ nötig ist, da ansonsten wegen $\Phi^3 = hg$ $h = 0$ oder $g = 0$ wäre. $h = 0$ würde zu $\Phi = 0$ führen, weswegen nur noch $g = 0$ in Frage kommt, woraus aber wegen $\Phi^1 = \frac{h}{2}$ und $\Phi^2 = i\frac{h}{2}$, $\Phi^1 + i\Phi^2 = 0$ folgt. Daraus folgt aber ein Widerspruch zu $\Phi \neq 0$, da $\Phi^1 = \Phi^2 = \Phi^3 = 0$ ist.

Wir können also davon ausgehen, dass $\Phi^1 - i\Phi^2 \neq 0$ ist, und können mit

$$h := \Phi^1 - i\Phi^2, \quad g := \frac{\Phi^3}{\Phi^1 - i\Phi^2}$$

¹⁶siehe Anhang A

die holomorphe bzw. meromorphen Funktionen h und g definieren. Da $(\Phi^1 - i\Phi^2)(\Phi^1 + i\Phi^2) = (\Phi^1)^2 + (\Phi^2)^2 + (\Phi^3)^2 = 0$ ist, gilt

$$\Phi^1 + i\Phi^2 = -\frac{(\Phi^3)^2}{\Phi^1 - i\Phi^2} = -hg^2.$$

Woraus wegen $h = \Phi^1 - i\Phi^2$ (3.8) folgt. Aus der Relation $hg^2 = -(\Phi^1 + i\Phi^2)$ folgt, dass hg^2 holomorph ist. Deshalb gilt für einen Pol $z_0 \in U$ von g der Ordnung n , dass z_0 für h eine mindestens $2n$ -fache Nullstelle ist.

□

Satz 3.6.2 (Weierstraß–Enneper¹⁷ Darstellung 1) *Jede isotherm parametrisierte, nicht ebene, einfach zusammenhängende Minimalfläche f lässt sich lokal durch*

$$\begin{aligned} f^1(z, \bar{z}) &= \Re \int_{z_0}^z \frac{1}{2} h(1 - g^2) dz \\ f^2(z, \bar{z}) &= \Re \int_{z_0}^z \frac{i}{2} h(1 + g^2) dz \\ f^3(z, \bar{z}) &= \Re \int_{z_0}^z h g dz \end{aligned}$$

darstellen, wobei h und g wie in Satz 3.6.1 definiert sind und h nur in den Polstellen von g verschwindet, wobei h in jedem n -fachen Pol von g eine genau $2n$ -fache Nullstelle besitzt.

Beweis: Sei $f : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine isotherm parametrisierte Minimalfläche und wie zuvor $\Phi := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right)$, dann folgt die Darstellung aus den Sätzen 3.5.3 und 3.6.1. Die Fläche ist genau dort nicht regulär, wo $|\Phi|^2 = 0$ ist. Das passiert genau dann, wenn h eine Nullstelle von größerer Ordnung als zweifach die Ordnung der zugehörigen Polstelle von g hat, wie man aus (3.8) erkennen kann.

□

Es ist möglich die oben stehende Darstellung insoweit zu vereinfachen, dass man nur mehr eine einzige Funktion benötigt. Nehmen wir an, die Funktion g aus Satz 3.6.2 ist holomorph und invertierbar. Demnach existiert also eine Funktion g^{-1} in einer Umgebung U , die ebenfalls holomorph ist. Verwenden wir g nun als neue komplexe Variable $\tau = g$, für die $d\tau = g' dz$ gilt, und definieren wir eine Funktion $F(\tau) = \frac{h}{g'}$, so erhalten wir $F(\tau) d\tau = \frac{h}{g'} d\tau = h dz$. Wenn wir g mit τ und $h dz$ mit $F(\tau) d\tau$ ersetzen erhalten wir:

Satz 3.6.3 (Weierstraß–Enneper Darstellung 2) *Jede nichtverschwindende holomorphe Funktion $F(\tau)$ definiert durch*

$$\begin{aligned} f^1(z, \bar{z}) &= \Re \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(1 - \tau^2)F(\tau)d\tau \\ f^2(z, \bar{z}) &= \Re \int_{z_0}^z \frac{i}{2}(1 + \tau^2)F(\tau)d\tau \\ f^3(z, \bar{z}) &= \Re \int_{z_0}^z \tau F(\tau)d\tau \end{aligned}$$

eine Minimalfläche $f(z, \bar{z})$.

Mit diesem Wissen ausgestattet ist es sehr viel einfacher, eine Minimalfläche zu finden als durch das Lösen einer partiellen Differentialgleichung, da jede holomorphe Funktion eine Minimalfläche definiert. Es ist also nicht mehr nötig, nach speziellen Lösungen der Minimalflächengleichung zu suchen. Allerdings können wir nicht von jeder holomorphen Funktion erwarten, dass ihr komplexes Integral zu einer schönen Formel führt. Außerdem muss erwähnt werden, dass eine Minimalfläche im Allgemeinen keine globale Darstellung in der oben genannten Form haben wird, da das Definitionsgebiet der Veränderlichen τ einfach zusammenhängend und die Funktion $F(\tau)$ als nicht verschwindend, also singularitätenfrei vorausgesetzt wurde. Dennoch ist diese Darstellung besonders für spezielle Minimalflächen außerordentlich nützlich, insbesondere deswegen, weil viele globale Eigenschaften analytischer Flächen ohnedies nur im Kleinen nachgewiesen werden müssen.

Beispiel: Minimalflächen in Weierstraß–Enneper Darstellung

- Ennepersche Minimalfläche: $F(\tau) = 1$
- Katenoid: $F(\tau) = \frac{\sigma}{2\tau^2}$, mit reellem σ
- Wendelfläche: $F(\tau) = \frac{i\sigma}{2\tau^2}$, mit reellem σ
- Scherksche Minimalfläche: $F(\tau) = \frac{2}{1-\tau^4}$

3.7 Björlingsches Problem

Es ist uns nun möglich, aus einer holomorphen Funktion eine Minimalfläche zu gewinnen. Für die Betrachtung von Seifenhäuten wäre es aber besonders praktisch, eine Fläche allein durch die Kenntnis ihrer Randkurve zu bestimmen. Dieses Anliegen erinnert an die Fragestellung des *Plateauschen Problems*. Die eigentlich bereits im 18. Jhd. von Lagrange¹⁸ formulierte Vermutung lautet: jede Randkonfiguration, egal welcher geometrischen Form, die aus einer geschlossenen Drahtschlinge besteht, begrenzt zumindest eine Seifenhaut. Da die mathematische Entsprechung eines dünnen Drahtes eine Jordankurve ist, lässt sich das Problem auch wie folgt formulieren:

Plateausches Problem: *Zu einer vorgeschriebenen Jordankurve γ soll eine Minimalfläche M vom Typ der Kreisscheibe gefunden werden, für die $\partial M = \gamma$ gilt.*

Eine zufriedenstellende Lösung dieser Aufgabe wurde erst 1930 von J. Douglas¹⁹ und T. Radó²⁰ gefunden. Es scheint naheliegend anzunehmen, dass das Problem durch Minimieren des Oberflächenintegrals mit gewissen Nebenbedingungen zu bewältigen ist, allerdings kann dieser Ansatz zu haarsträubenden Fehlern führen (siehe dazu [4]). Daher hat Douglas in seinem variationstheoretischen Ansatz ein anderes Funktional, nämlich das Dirichletintegral minimiert. Das ist deswegen möglich, da für isotherme Parameter der Wert des Dirichletintegrals jenem des Oberflächenintegrals entspricht. Für eine ausführliche Behandlung dieser Lösung des Plateauschen Problems siehe [16] oder [9].

Bemerkung: Das Dirichletintegral lässt sich durch eine Summe annähern, durch die sogenannte Dirichletenergie, mit Hilfe derer es leicht möglich ist, das Variationsproblem von einem Computerprogramm lösen zu lassen.

Wir werden uns hier mit einem etwas leichter zu bewältigenden, aber nicht weniger interessanten Problem befassen - dem Björlingschen²¹. Hier ist eine Minimalfläche gesucht, die einen vorgegebenen analytischen Streifen enthält. Im Zuge der Behandlung dieses Problems werden wir auch den noch ausstehenden Beweis der Plateauschen 90° Regel aus Kapitel 2.3 erbringen.

¹⁸Joseph-Louis Lagrange, *1736 in Turin, †1813 in Paris

¹⁹Jesse Douglas, *1897 in New York City, †1965 ebd.

²⁰Tibor Radó, *1895 in Budapest, †1965 in New Smyrna Beach/Florida

²¹E. G. Björling, *1808, †1872

Björlingsches Problem: Ein analytischer Streifen sei gegeben durch eine reell analytische Kurve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ und ein reell analytisches Vektorfeld N entlang von α , für das $N \cdot \alpha' = 0$ gilt. Gesucht ist nun eine Minimalfläche M mit $\alpha(u) = x(u, 0)$ als u -Parameterlinie und N als Einheitsnormale $N(u) = n(u, 0)$ für $u \in I$.

Seien $\alpha(z)$ und $N(z)$ die holomorphen Fortsetzungen der oben definierten Objekte auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ mit $I \subset D$. Dann können wir die folgende Vermutung formulieren:

Satz 3.7.1 *Es gibt genau eine Lösung für das Björlingsche Problem. Sie lautet mit fixem $u_0 \in I$ und $z = u + iv$:*

$$x(u, v) = \Re \left[\alpha(z) - i \int_{u_0}^z N(w) \times \alpha'(w) dw \right].$$

Beweis: (entnommen aus [17])

Gehen wir davon aus, wir wüssten bereits, dass die Lösung existiert und beweisen zuerst ihre Eindeutigkeit. Dann ist $x(u, v)$ also eine Minimalfläche in isothermen Parametern, für die $x(u, 0) = \alpha(u)$ und $n(u, 0) = N(u)$ gilt. Aus Satz 3.5.1 wissen wir, jede Koordinatenfunktion $x^i(u, v)$ von x ist harmonisch. Es seien nun $y^i(u, v)$ ihre harmonischen Konjugierten, für die $y^i(u_0, 0) = 0$ gelten soll, und $x^i(z) + iy^i(z)$ ist holomorph. Wir definieren nun eine holomorphe Funktion $\beta : D \rightarrow \mathbb{C}^3$ für $z \in D$:

$$\beta(z) = x(u, v) + iy(u, v).$$

Die Ableitung $\beta'(z) = x_u + iy_u$ ist wegen der Cauchy–Riemannschen–Differentialgleichungen auch gleich $x_u - ix_v$. Da $x(u, v)$ isotherm parametrisiert ist, sind x_u, x_v und n orthogonal mit $|x_u| = |x_v|$ und es gilt $x_v = n \times x_u$. Es ist also

$$\beta'(z) = x_u - i(n \times x_u).$$

Beschränken wir uns nun auf $(u, 0) \in I$, so gilt wegen der Voraussetzungen $x_u(u, 0) = \alpha'(u)$ und $n(u, 0) = N(u)$, $\beta'(u) = \alpha'(u) - i(N(u) \times \alpha'(u))$. Da diese Gleichung nun nur von einer reellen Variablen abhängt, können wir ganz normal integrieren und erhalten $\forall u \in I$

$$\beta(u) = \alpha(u) - i \int_{u_0}^u N(t) \times \alpha'(t) dt.$$

Es stimmt also β auf dem gesamten Intervall I mit der holomorphen Kurve $\gamma(z) = \alpha(z) - i \int_{u_0}^z N(w) \times \alpha'(w) dw$ überein und nach dem Identitätssatz²²

²²siehe Anhang A

auch auf dem Intervall $D \supset I$. Da $x(u, v)$ als der reelle Teil von β definiert ist, erhalten wir die gewünschte Lösung

$$x(u, v) = \Re \left[\alpha(z) - i \int_{u_0}^z N(w) \times \alpha'(w) dw \right].$$

Um die Existenz der Lösung zu beweisen, definieren wir eine holomorphe Kurve $\beta(z) = \alpha(z) - i \int_{u_0}^z N(w) \times \alpha'(w) dw$ im Gebiet D . Nach Voraussetzung sind $N(z)$ und $\alpha'(z)$ für $z \in I$ reell, und es gilt, $\Re \beta'(z) = \alpha'(z)$ und $\Im \beta'(z) = -N(z) \times \alpha'(z)$. Für $z \in I$ erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} (\beta'(z))^2 &= \alpha'(z) \cdot \alpha'(z) - 2i\alpha'(z) \cdot (N(z) \times \alpha'(z)) \\ &\quad - (N(z) \times \alpha'(z)) \cdot (N(z) \times \alpha'(z)) \end{aligned}$$

Wegen $\alpha' \cdot (N \times \alpha') = 0$ und $|N \times \alpha'| = |N| \cdot |\alpha'| = |\alpha'|$ (da N und α' laut Definition orthogonal sind) lässt sich die vorherige Gleichung zu

$$(\beta')^2 = |\alpha'|^2 - 0 - |N \times \alpha'|^2 = 0$$

umformen. Der Identitätssatz besagt, dass $(\beta')^2$ nicht nur für $z \in I$, sondern auf ganz $D \supset I$ gleich Null ist. Erinnern wir uns nun an die Herleitung der Weierstraßschen Darstellungsformeln in Kapitel 3.5 und ersetzen Φ mit β' , so wissen wir aus Satz 3.5.3, dass der Realteil von β eine Minimalfläche in isothermen Parametern darstellt.

Wir wissen nun

$$x(u, v) = \Re \left[\alpha(z) - i \int_{u_0}^z N(w) \times \alpha'(w) dw \right]$$

ist eine isotherme Parametrisierung einer Minimalfläche M , und es bleiben nur noch die verlangten Nebenbedingungen des Björlingschen Problems zu überprüfen: Für $u \in I$ sind $N(u)$ und $\alpha'(u)$ reell und $x(u, 0) = \Re \beta(u) = \alpha(u)$ - also ist $\alpha(u)$ eine u -Parameterlinie der Fläche M . Berechnen wir $\beta'(u)$ einmal wie im Eindeutigkeitsbeweis und einmal wie im Existenzbeweis, so ergibt das:

$$\alpha'(u) - i(N(u) \times \alpha'(u)) = \beta'(u) = x_u(u, 0) - ix_v(u, 0).$$

Gleichsetzen der reellen und der imaginären Teile führt zu

$$x_u(u, 0) = \alpha'(u) \quad \text{und} \quad x_v(u, 0) = N(u) \times \alpha'(u).$$

Wie bereits erwähnt gilt für isotherme Koordinaten $x_v = n \times x_u$, also ist $x_v = n \times \alpha'$, und daraus folgt $N(u) = n(u, 0)$ - das Vektorfeld N ist also, entlang von α die Einheitsnormale von M . \square

Betrachten wir als Angabekurve für das Björlingsche Problem eine ebene Kurve, so können wir beweisen, dass eine Minimalfläche (bzw. eine Seifenhaut) eine Fläche, auf der sie sich frei bewegen kann, immer unter einem Winkel von 90° trifft.

Beweis der Plateauschen 90° Regel: N sei die Einheitsnormale einer ebenen Kurve α . Die Minimalfläche M , die das Björlingsche Problem mit diesen Angabestücken löst, habe die Flächennormale n , die entlang von α mit N zusammenfällt. Nehmen wir an, α sei bogenlängenparametrisiert, so gilt für die Tangente der Kurve $t = \alpha'$ und für die Normale $\kappa N = t' = \alpha''$ nach den Frenetschen Ableitungsgleichungen. Da α in einer Ebene E mit Normalvektor u liegt, gilt $(\alpha(s) - \alpha(0)) \cdot u = 0$ für jeden beliebigen Parameter s . Durch zweimaliges Differenzieren erhalten wir

$$t \cdot u = 0 \quad \text{und} \quad N \cdot u = 0$$

und erkennen, dass sowohl die Tangente, als auch die Normale der Kurve α ebenfalls in der Ebene liegen. Wir wissen aber, als Nebenbedingung des Björlingschen Problems gilt $N = n$, weshalb wegen $n \cdot u = 0$ auch die Flächennormale der Minimalfläche in E liegen muss. Die Fläche M ist also zu E orthogonal, und weil die Lösung des Björlingschen Problems eindeutig ist, ist die 90° Regel bewiesen.

□

Kapitel 4

Minimalflächen in der Architektur

Bisher haben wir uns mit der Entstehung von Seifenhäuten und ihren mathematischen Darstellungen befasst. Um diese Arbeit abzurunden, soll hier nun auch noch auf ihre Anwendbarkeit eingegangen werden.

Dieses Kapitel soll einen kurzen Einblick in die Architektur weitgespannter Leichtbau-Flächentragwerke bieten und die speziellen Vorteile der Minimalflächen in diesem Zusammenhang beleuchten.

4.1 Seifenhautformen

Da die Minimalflächen, die in den bisherigen Kapiteln vorgekommen sind, nicht unmittelbar geeignet erscheinen, weite Flächen zu überdachen, wollen wir hier noch kurz auf die Formenvielfalt der Seifenhäute eingehen.

1. Seifenhäute mit biegesteifem Rand

Die Formen, die in einem beliebig geformten, biegesteifen und geschlossenen Rahmen entstehen können, haben wir bereits betrachtet. Es sind genau jene, mit denen sich das Plateausche Problem befasst.

Zu erwähnen bleibt vielleicht nur, dass bei komplexen Rahmenformen manchmal die Eintauchrichtung mitentscheidend für die Gestalt der sich bildenden Seifenhaut sein kann.

2. Seifenhäute mit biegeweichem Rand

Seifenhäute lassen sich auch zwischen Fäden einspannen. Da Fäden biegeunsteif sind, lassen sie sich nicht auf Druck, sondern ausschließlich auf Zug beanspruchen. Das bedeutet, die Seifenhaut wird den Fäden nach Innen ziehen. Mit einem einfachen Experiment lässt sich verdeutlichen, dass die vom Faden angenommene Form kreisförmig sein wird.

Ein geschlossener Faden wird auf eine ebene Seifenmembran aufgelegt und das Häutchen im Inneren der Schlaufe wird vorsichtig zerstört. Das verbleibende äußere Häutchen versucht aufgrund seiner Oberflächenspannung, seinen Flächeninhalt soweit wie möglich zu reduzieren, und zieht in alle Richtungen gleich stark am Faden. Daher nimmt die Schlaufe eine kreisförmige Gestalt an (siehe Abbildung 4.1).

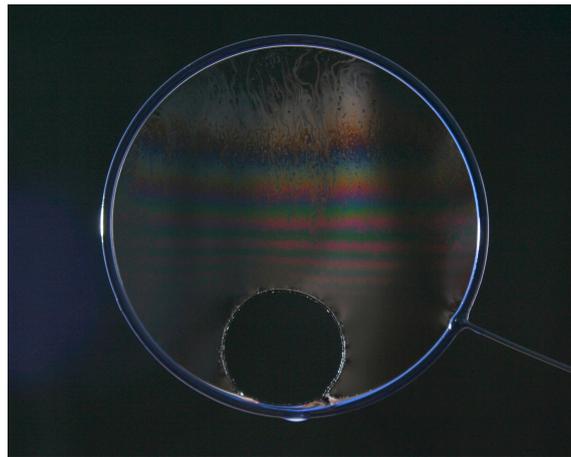


Abbildung 4.1: Seifenhaut mit kreisförmigem Loch

Wird also eine Form aus Festpunkten und dazwischen hängenden Fäden in Seifenlösung getaucht, so bildet sich eine Haut, die zwischen den festen Punkten jeweils von konkaven Kurven mit konstanter Krümmung begrenzt wird. Dies gilt in der Ebene genauso wie für räumliche Konfigurationen.

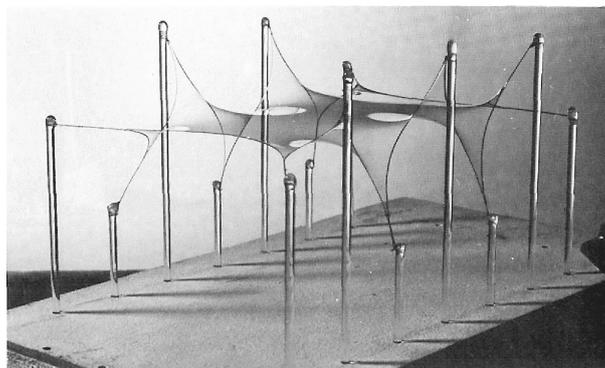


Abbildung 4.2: Seifenhaut von Fäden berandet

3. Seifenhäute mit freiem Rand

Bildet ein beliebig geformter Rahmen gemeinsam mit einer Fläche, der Stützfläche, die eben oder gekrümmt sein kann, eine geschlossene Berandung, so lässt sich auch hier eine Seifenhaut einspannen. Auf der Stützfläche bildet sich dabei der freie Rand. Wie wir aus der pateauschen 90° Regel wissen trifft die Seifenhaut die Stützfläche unter rechtem Winkel, ausgenommen, der flüssige Rand trifft auf Hindernisse (wie zum Beispiel Löcher) auf der Fläche. Dann nämlich schmiegt sich der flüssige Rand des Häutchens tangential an die Randkurve des Hindernisses an. Ein Beispiel einer Minimalfläche mit freiem Rand ist

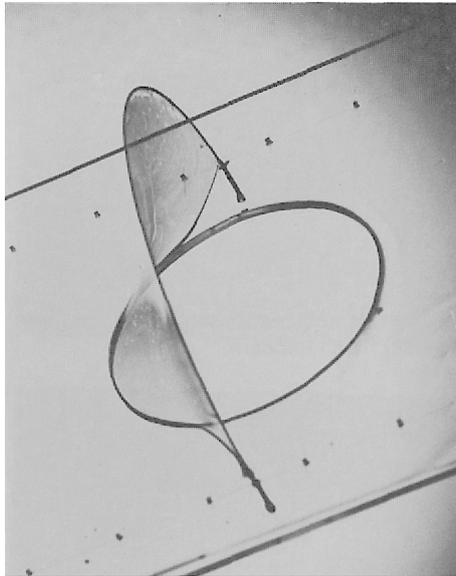


Abbildung 4.3: Freier Rand auf einer Fläche mit Hindernis

die Gergonnesche¹ Minimalfläche. Es handelt sich hierbei um eine Fläche, deren Rand frei auf zwei gegenüberliegenden Seitenflächen eines Würfels und fest auf zwei diese Seiten verbindenden, entgegengesetzt verlaufenden Diagonalen liegt. Genaugenommen hat Gergonne nur das Problem, diese Fläche zu finden, formuliert, gefunden wurde sie von Schwarz.

4. Unterstützung von Seifenhäuten

Seifenfilme sind nicht in der Lage, punktförmige Kräfte aufzunehmen. Daher ist es nicht möglich, eine Seifenhaut mit einer Nadel anzuheben

¹Joseph Diaz Gergonne, *1771 in Nancy, †1859 in Montpellier

- die Spitze dringt einfach durch. Flächige Elemente hingegen wie zum Beispiel Ringe, Scheiben oder Kugeln, vermögen eine ebene Seifenlamelle anzuheben oder auch abzusenken.

Grundsätzlich gilt für das Maximalmaß der möglichen Auslenkung die gleiche Beziehung von Radius zu Höhe wie beim Katenoid.

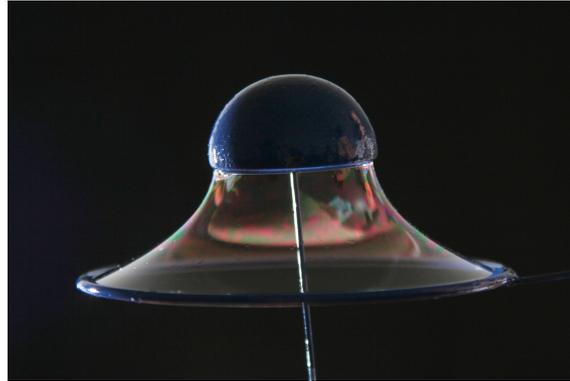


Abbildung 4.4: Mit einem Stempel unterstützte Seifenhaut

Es ist auch möglich, eine Flüssigkeitsmembran mittels einer Schlaufe zu unterstützen. Modifizieren wir nun das Experiment aus Punkt 2 dahingehend, dass wir an der Fadenschlaufe eine Nadel befestigen und vorsichtig an dieser anziehen. Die Seifenhaut lässt sich anheben, der Faden verlässt seine Kreisform und bildet eine Raumkurve stetiger Krümmung. Schlaufen dieser Art nennt man auch *Augen*. Sind in einem Punkt mehrere Seilschlaufen aufgehängt bilden sie eine sogenannte *Girlande*.

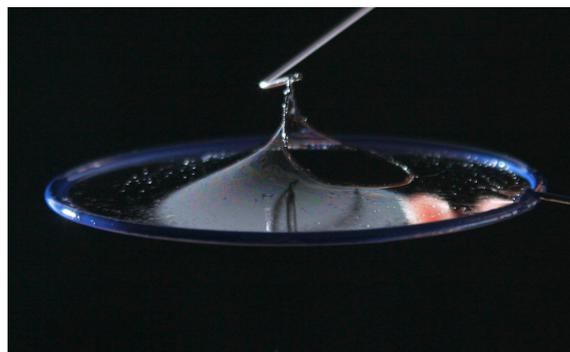


Abbildung 4.5: Mit einer Schlaufe hochgezogene Seifenhaut

Die Form von Seifenhäuten lässt sich nicht nur durch Hoch- oder Tiefpunkte verändern sondern auch durch Unterteilen in mehrere Flächen. Membranen lassen sich nämlich auch durch Grate unterstützen, die zwischen Rand und Spitze verlaufen. Diese Grate wirken wie biegewei- che Ränder, die die Fläche in einzelne Minimalflächen unterteilen. So ist es möglich, Formen zu schaffen, die das Verhältnis von Höhe und Durchmesser, bei dem eine Seifenhaut normalerweise zerreißen wür- de, überschreiten. Denn durch steigende Gratanzahl sind spitzere und höhere Formen möglich. Allerdings hat auch diese Methode Grenzen, da sich bei zu großer Höhe bei kleiner Grundfläche Zwischenlamellen bilden können.

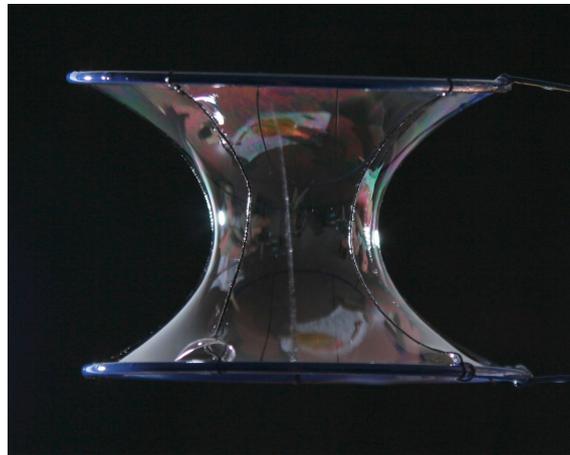


Abbildung 4.6: Katenoid durch Grate unterstützt

Indem man zwischen abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten Grat- bzw. Kehlseile spannt, lassen sich Wellenformen erzeugen und auch eine Unter- stützung durch ganze Netze ist möglich.

Wenn man diese Formgebungsmöglichkeiten betrachtet, kann man sich gut vorstellen, dass Seifenhäute als Vorbild für die Architektur geeignet sind, und tatsächlich wurden sie in diesem Zusammenhang auch eingehend untersucht. Seit den 1950er Jahren hat sich der Architekt Frei Otto gemeinsam mit Bio- logen, Mathematikern, Physikern und Geodäten mit Hilfe von Seifenhautex- perimenten mit dem Fragenkreis rund um Zelt- und Leichtbau beschäftigt. In der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts gab es dafür in Deutschland so-

gar zwei Sonderforschungsbereiche, die viele interessante Ergebnisse geliefert haben.

4.2 Minimalflächen im Zeltbau

Zelte sind leichte Flächentragwerke und daher genau dann optimal, wenn sie dem „Leichtbauprinzip“ entsprechen. Dieses Prinzip sagt, eine Konstruktion ist dann besonders gut, wenn sie bei minimalem Materialaufwand aufgrund ihrer Form maximale Stabilität und Kraftabtragung gewährleistet. Da die Natur immer versucht, Formen ideal zu gestalten, ist klar, dass eine Seifenhaut und demnach auch eine Minimalfläche diesem Prinzip genügt.

Wir wissen, eine Seifenhaut ist eine selbstbildende Form, die auf Grund ihrer Oberflächenspannung gewisse Eigenschaften besitzt. So ist sie erstens antiklastisch gekrümmt, also sattelförmig, wegen ihrer negativen Gaußschen Krümmung. Und zweitens ist die Flächenspannung in jedem ihrer Punkte gleich, wodurch nur Zugspannungen auftreten. Wie ist es nun möglich, diese Eigenschaften auf eine Membran zu übertragen, die im Gegensatz zu einer Seifenhaut ein nicht zu vernachlässigendes Eigengewicht besitzt und diversen verschiedenen Lastfällen ausgesetzt wird? Das Geheimnis ist die so genannte Vorspannung.

Vorspannung

Eine Membran kann, genauso wie ein Seil, nur auf Zug belastet werden und ist nicht in der Lage, Druckkräfte aufzunehmen. Betrachten wir also ein Gummiband, das an der Decke aufgehängt ist und lose den Boden berührt (siehe Abbildung 4.7). Hängen wir nun auf halber Höhe eine Last P in Form einer Kugel auf, dehnt sich die obere Hälfte des Gummibandes, während die untere Hälfte schlaff gegen den Boden hängt und nicht trägt. Denken wir uns das Band nun vorgespannt, also unter einer gewissen Grundspannung V , sowohl an der Decke als auch am Boden befestigt. Wird dieselbe Last P nun auf das gespannte Band gebracht, so ist die entstehende Verformung f nur noch halb so groß wie zuvor. Denn die eine Hälfte der Last wird vom oberen Teil des Gummibandes als Zug aufgenommen, während die andere Hälfte vom unteren Teil als Druck getragen wird. Das Gummiband kann nun also Druck aufnehmen, da in ihm der vorgespannte Zug abgebaut werden kann. Natürlich ist das Seil nur so lange fähig, Druck aufzunehmen, wie die Belastung kleiner ist als die aufgebrachte Vorspannung.

Will man ein Seilnetz oder auch eine Membran vorspannen, so muss sie entweder eben sein, oder sie muss sattelförmig gekrümmt werden. Die eine

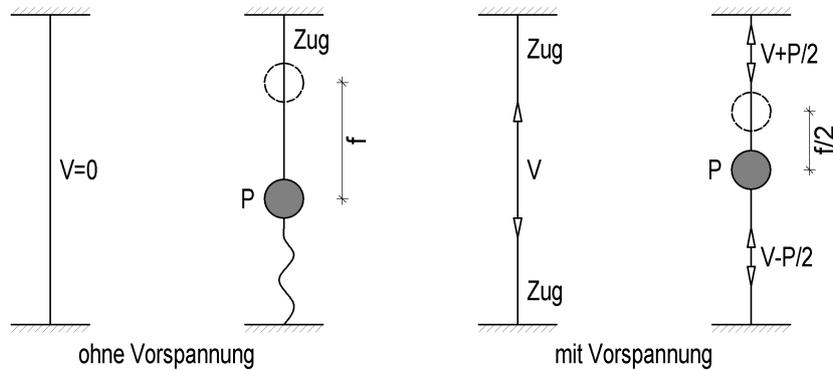


Abbildung 4.7: Vorspannung

Seilschar, die Tragseile, haben ihren Krümmungsmittelpunkt dann über der entstehenden Fläche, die andere Schar, die Spannseile, unter ihr. Die Seile drücken somit gegeneinander und halten die Form daher im Gleichgewicht. Die nötige Vorspannung wird von einem räumlich gekrümmten Rahmen gehalten, der natürlich entsprechen stabil sein muss.

Wirkt nun eine Last von außen auf eine solche Membran wie zum Beispiel Schnee oder Winddruck, so nehmen die Zugkräfte in den Tragseile zu, während die Kräfte in den Spannseilen abnehmen. Wäre die Konstruktion nicht vorgespannt, so würden sich die Spannseile der Lastabtragung entziehen und die Membran würde Falten schlagen und beginnen zu flattern.

Eine interessante Eigenschaft biegeweicher Membranen ist, dass das Verhältnis der Krümmungsradien in den Hauptvorspannungsrichtungen ident mit dem Verhältnis der Vorspannungen ist. Die Hauptrichtungen der Vorspannung sind gleichzeitig die Richtungen der extremsten Krümmungen, also die Hauptkrümmungsrichtungen. Es gilt also für Flächen mit entgegengesetzt gleichen Hauptkrümmungsradien, wie die Minimalflächen welche sind, dass ihre Vorspannungen in alle Richtungen gleich sein müssen.

Es ist durchaus Vorteilhaft, wenn ein verbautes Material überall gleiche Spannungen aufweist, da es nicht zu Spannungsspitzen kommen kann, die etwa eine punktuelle Verstärkung des Gewebes erfordern würden. Zelthäute mit ungleichen Spannungen haben die Tendenz, Falten zu bilden und sich gleichzeitig an höher belasteten Stellen stark zu dehnen, bis sie eventuell sogar reißen. Außerdem weichen Membranen mit ungleichen Spannungen von der

Idealform der Minimalfläche ab, was dazu führt, dass sie unter Belastung Formen annehmen können, die ihre Oberfläche reduzieren. Dies bedeutet, es können Verformungen ohne Dehnung auftreten, und diese fallen in der Regel besonders stark aus. Bei Minimalflächen ist jede Formänderung mit einer Oberflächenvergrößerung und daher mit einer Drehung verbunden. Daraus folgt, die Minimalflächen sind bei unterschiedlichen Angriffen sehr häufig, wenn auch nicht immer, die verformungssteifsten.

Im Idealfall werden minimalflächenförmige Zelte aus isotropen Materialien gefertigt, das heißt aus Geweben, die in Kette- und Schussrichtung dieselben Dehnungseigenschaften haben. Unter diesen Umständen bereiten sie auch im Zuschnitt, für ein exaktes Spannen und bei Einwirkung von Wärme und Feuchtigkeit die wenigsten Probleme.

Meist sind allerdings die Schussfäden eines Gewebes schwächer als die Kettfäden. Spannt man beide Richtungen im selben Maß vor, so wird die eine Richtung schneller altern und nachgeben als die andere. Diesem Problem kann man begegnen, indem man von der Minimalflächenform abweicht, wodurch sich allerdings neue Schwierigkeiten ergeben. Oder indem man das Material auf beiden Seiten mit Plastik beschichtet, um die Reaktionen der Fäden in den beiden Richtungen einander anzugleichen.

Eine Besonderheit der leichten Flächentragwerke ist die Art ihres Designs. Anders als bei anderen Bauformen hat der Architekt bei der Formwahl nicht freie Hand, denn die Gestalt des Tragwerks ist ausschließlich durch die Randkonfiguration und die Vorspannung bestimmt. Es handelt sich demnach beim Design eines minimalflächenartigen Zeltes nicht um einen Formgebungs-, sondern vielmehr um einen Formfindungsprozess.

Formfindung

In einem konventionellen Designprozess haben Modelle nur die Aufgabe, die Anschauung zu unterstützen und das zu bauende Objekt darzustellen. In einem Formfindungsprozess ist das Modell beinahe der wichtigste Teil. Von der Bestimmung der Geometrie an bis hin zur Vermessung und der Bestimmung des Zuschnittes sind Modelle in unterschiedlichen Genauigkeitsgraden erforderlich. Für die ersten Entwurfsideen werden Vormodelle aus Strumpfgewebe oder Ähnlichem hergestellt, und für den eigentlichen Formfindungsvorgang benutzt man Messmodelle aus Seifenhäuten. Von diesen Modellen werden geometrische wie auch statische Werte abgenommen für die genaue Berechnung und Bemessung der einzelnen Bauteile.

Formfindung wird natürlich auch mittels Computern betrieben, und zwar mit der Methode der finiten Elemente. Dabei wird von einer dem gewünschten Endergebnis ähnlichen Grundform ausgegangen und diese nach

diversen Kriterien in kleinen Schritten optimiert. Es wäre grundsätzlich möglich, Formfindung allein rechnerisch zu betreiben, indem man zum Beispiel eine grobe Grundrisskizze, die Koordinaten der Festpunkte und eine Topologievorschrift für die Membran als Grundform benutzt. Allerdings hat sich gezeigt, dass hierbei die formale, architektonische Qualität eher unbefriedigend bleibt. Daher ist es üblich, eine Kombination aus Modell- und Computerverfahren zu benutzen.

Ist eine architektonisch befriedigende Form gefunden, die allen eventuellen Lastfällen standhält, kommt der wahrscheinlich schwierigste Teil des Formfindungsprozesses - die Übertragung der gewonnenen Erkenntnisse auf verbaubares Material. Die Flüssigkeitshaut mit der bisher real oder virtuell gearbeitet wurde, muss nun durch ein dehnbares, vorgestecktes Gewebe ersetzt werden. Und zwar genau so, dass es ohne Formabweichung genau unter den Spannungen steht wie das Seifenhautmodell zuvor.

Nun muss der Zuschnitt der Haut ermittelt werden. Dafür sucht man eine Anzahl von ebenen Gewebestücken, die zusammengefügt und vorgespannt, eventuell mit formgebenden Belastungen beaufschlagt, die Modellform der Fläche möglichst gut annähern.

Zuschnittbahnen entlang geodätischer Linien auf der Fläche lassen sich am ehesten geradlinig in eine Ebene abrollen. Geodätische Linien sind bekanntlich auch die kürzesten Verbindungen zweier Punkte auf einer Fläche und lassen sich numerisch berechnen. Das so gefundene Zuschnitttraster wird weiteren Optimierungsprozessen unterworfen, um möglichst wenig Verschnitt zu erhalten.

Um die Zuschnittformen zu bestimmen, ersetzt man - zuerst nur gedanklich - die Seifenhaut im Modell durch dehnbares Material, das mit Vorspannung und Lasten in die richtige Form gedrängt wird. Danach werden die Zuschnittbahnen entlang dem optimierten Raster aus der Fläche herausgetrennt und alle noch wirkenden Vorspannungen und Lasten entfernt. Der nun entspannte Streifen ist normaler Weise nicht ohne Zwang in die Ebene abwickelbar. Doch mittels des folgenden Gedankenexperiment können wir erkennen, wie aus diesem Streifen die endgültige Zuschnittbahn ermittelt wird. Wir denken uns den räumlich gekrümmten Streifen zwischen zwei Platten reibungsfrei verebnet, ohne dass sich dabei Falten bilden. Die dabei auftretenden Zug- und Druckspannungen sind die geringstmöglichen und sie heben sich auf Grund der Reibungsfreiheit nach Außen hin auf. Denkt man sich nun einen spannungsfreien Streifen nach dem Vorbild der plattgedrückten Zuschnittbahn aus demselben Material ausgeschnitten, so erhält man den endgültigen Zuschnittstreifen ohne Eigenspannung.

Werden die so erhaltenen endgültigen Zuschnittbahnen unter Vorspannung zusammengefügt, können sie nur unter Zwang die gewünschte Form annehmen. Die Spannungen, die sie dabei aufnehmen müssen, entsprechen aber fast genau jenen, die die ursprünglichen Streifen bei ihrer Verebnung erfahren haben, und haben daher am ehesten die Tendenz, sich im Mittel aufzuheben.

In diesem Schritt des Formfindungsprozesses ist höchste Genauigkeit geboten, da der Zuschnittfehler der vorgespannten Konstruktion maximal $0,03\%^2$ betragen darf. Denn im spannungslosen Zustand müssen die Bahnen exakt um das Maß ihrer Dehnung in Folge der Vorspannung kleiner hergestellt werden, da sich ansonsten unkontrollierbare Spannungsfehler in der Konstruktion ergeben.

4.3 Beispiele aus der Baukunst

J. S. Dorton Arena

Die von den Architekten Matthew Nowicki und William Henley Deitrich 1950 entworfene Sportstätte wurde 1952 in Raleigh North Carolina erbaut. Es handelt sich um ein Seilnetzdach zwischen zwei Bögen. Letztlich ein Zelt, das der entsprechenden Minimalfläche ähnelt. Es ist das erste Bauwerk, welches das Prinzip minimaler Strukturen in der Architektur nutzte.

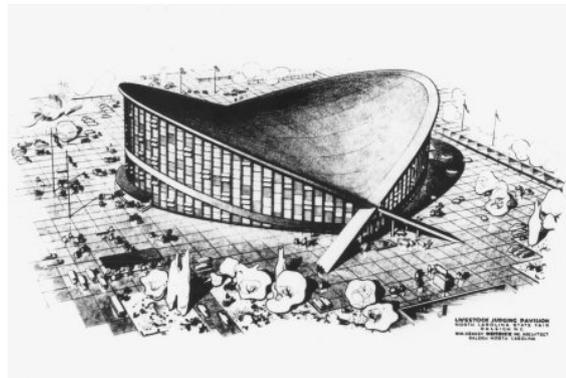


Abbildung 4.8: J. S. Dorton Arena

²Wert aus [13] entnommen

Bundesgartenschau in Kassel

Die temporären Überdachungen für die Bundesgartenschau in Kassel 1955 waren die ersten realisierten minimalflächenartigen Projekte Frei Ottos. Den Musikpavillon, auch „das Segel“ genannt, kann man als erstes Versuchsobjekt einer langen Reihe gebauter sattelförmiger Minimalflächen betrachten. Er überspannte eine Länge von $18m$ bei nur $1mm$ Gewebsdicke, weit mehr als bis zu diesem Zeitpunkt im Zeltbau üblich. Während seinem Bestehen im Sommer 1955 erwies es sich trotz heftiger Sturmböen als äußerst haltbar und zeichnete sich auch durch seine hervorragende Akustik aus.

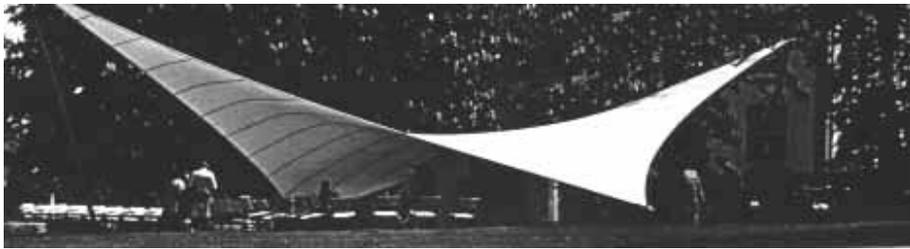


Abbildung 4.9: Musikpavillon

Bundesgartenschau in Köln

Da Ottos Bauten 1955 solchen Anklang fanden, wurde er auch für die Bundesgartenschau in Köln 1957 beauftragt. Hierfür entstand eines seiner berühmtesten Bauwerke, das Tanzbrunnenzelt. Es überspannt eine runde Tanzfläche mit $24m$ Durchmesser und ist trotzdem materialsparend. An sich handelt es sich hierbei wieder um eine temporäre Konstruktion, aber noch viele Jahre lang wurden Ottos Bauten für die Gartenschau im Sommer regelmäßig wieder aufgebaut, was auch zeigt, wie hochfunktionell diese Zeltbauten sind.

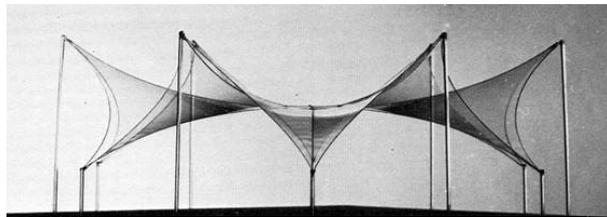


Abbildung 4.10: Tanzbrunnenzeltmodell aus Seifenhaut



Abbildung 4.11: Tanzbrunnenzelt

Weltausstellung in Montreal

Der deutsche Pavillon auf der EXPO 1967 in Montreal war das erste Zeltprojekt seiner Größe - es überspannte eine Fläche von $8000m^2$. Entworfen wurde es von Frei Otto und Rolf Gutbrod, und es bestand fast ausschließlich aus Minimalflächen. Um die Hochpunkte zu realisieren, wurden augenförmige Öffnungen eingeplant, die mit klarem Plexiglas verkleidet gleichzeitig für Licht im Inneren des Zeltes sorgten. Der Pavillon galt als einer der schönsten und wirtschaftlichsten der Weltausstellung und erhielt den internationalen Architekturpreis „Prix Perret“. Um Erfahrung für ein so gewaltiges Bauwerk



Abbildung 4.12: Deutscher Pavillon EXPO 1967

zu sammeln, wurde ein 1 : 1 Modell einer Zeltmembran mit Augenschlaufe erzeugt, das heute das Institut für leichte Flächentragwerke der TU–Stuttgart beherbergt.

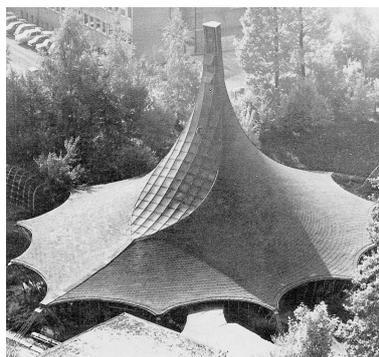


Abbildung 4.13: Institut für leichte Flächentragwerke TU–Stuttgart

Olympiadächer München

Der Entwurf für die Überdachung der Spielstätten stammte ursprünglich vom Architekturbüro Benisch und Partner und war stark vom Deutschen Pavillon in Montreal inspiriert. Frei Otto wurde erst später hinzugezogen, als es zu konstruktiven Schwierigkeiten kam. Erbaut wurden die Gebäude 1972.

Insgesamt überspannen die Dächer der Bauwerke eine Fläche von etwa $75000m^2$, weswegen der Formfindungsprozess erstmals stärker mit Computermethoden als mit Modellen erfolgt ist. Die Olympiahalle, wie auch die Schwimmhalle und das Stadion zeichnen sich besonders durch die Abwesenheit von Stützen im Inneren der Bauwerke aus.



Abbildung 4.14: Detail der Olympiadächer

Grazer Kunsthaus

Das Kunsthaus Graz wurde von den Londoner Architekten Peter Cook und Colin Fournier geplant und 2003 im Rahmen des Kulturhauptstadtjahres errichtet. Es fällt sowohl durch seine Bauart, als auch durch seine eigentliche Form aus der bisherigen Aufzählung von Bauwerken heraus. Als Ganzes ist es auch einer Minimalfläche nicht im geringsten ähnlich, aber die Lichtschächte auf dem Dach, die sogenannten Nozzels, lassen sich durch Seifenhäute nachbilden und sind daher minimalflächenähnlich.



Abbildung 4.15: Grazer Kunsthaus



Abbildung 4.16: Nozzel aus Seifenhaut

Literaturverzeichnis

- [1] K. Bach, B. Burkhardt, F. Otto, *Seifenblasen: Eine Forschungsarbeit des Institutes für leichte Flächentragwerke über Minimalflächen unter der Leitung von Frei Otto*, Stuttgart, 1988
- [2] Hrsg. G. Brinkmann *Leicht und Weit: zur Konstruktion weitgespannter Flächentragwerke; Ergebnisse aus dem Sonderforschungsbereich 64 "Weitgespannte Flächentragwerke" der Universität Stuttgart*, Weinheim, 1990
- [3] M. Deserno, *Notes on Differential Geometry with special emphasis of surfaces in R^3* , Los Angeles, 2004 (Internet)³
- [4] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, O. Wohlrab, *Minimal Surfaces 1*, Berlin, 1992
- [5] R. Finn, *Equilibrium Capillary Surfaces*, New York, 1986
- [6] L. Glaeser, *The works of Frei Otto and his teams 1955–1976*, Stuttgart, 1978
- [7] S. Hildebrand, A. Tomba, *Panoptimum*, Heidelberg, 1987
- [8] C. Isenberg, *The Science of Soap Films and Soap Bubbles*, Clevedon, 1978
- [9] J. Jost, *Differentialgeometrie und Minimalflächen*, Berlin, 1994
- [10] W. Kühnel, *Differentialgeometrie: Kurven–Flächen–Mannigfaltigkeiten*, Wiesbaden, 2005
- [11] W. J. Lewis, *Tension structures: form and behaviour*, London, 2003
- [12] D. Lovett, *Demonstrating Science with Soap Films*, London, 1994

³[http://www.mpip-mainz.mpg.de/~deserno/scripts/diff_ geom/diff_ geom.pdf](http://www.mpip-mainz.mpg.de/~deserno/scripts/diff_geom/diff_geom.pdf)

- [13] L. C. Martins, *Morphologie der gekrümmten Flächentragwerke*, Diss. ETH–Zürich, 1996, (Internet)⁴
- [14] H. Minkowski, *Kapillarität*, in *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, Band V, Teil 1 S.558-613, Göttingen, 1906
- [15] Magyer, Liebhart, Jelinek, *Moleküle Organische Chemie*, Wien, 1999
- [16] J. C. C. Nitsche, *Vorlesungen über Minimalflächen*, Berlin, 1978
- [17] J. Oprea, *The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple*, Providence, 2000
- [18] J. Pichler, *Minimalflächen*, Diplomarbeit TU–Wien, 1995
- [19] M. Schuster, *Frei Otto*, Seminararbeit Designgeschichte, 1997 (Internet)⁵
- [20] Hrsg. H. Stöcker, *Taschenbuch der Physik*, Frankfurt am Main, 2004
- [21] *Introduction to the Variational Calculus*, (Internet)⁶

⁴http://e-collection.ethbib.ethz.ch/ecol-pool/incoll/incoll_822.pdf

⁵http://www.aspekt1.net/ms/fo_ref/fo_inhlt.html

⁶<http://www.math.odu.edu/~jhh/ch54.pdf>

Abbildungsverzeichnis

2.1	Darstellung der Struktur einer Seifenlösung; Zeichnung: Teresa Matiasek	8
2.2	Tetraeder und Würfel; Foto: Dipl.–Ing. Ilka Peyrer–Heimstätt	11
2.3	Seifenfilm in einem Kreisring und in drei Kreisbögen; Foto: Dipl.–Ing. Ilka Peyrer–Heimstätt	13
2.4	sphärischer Tetraeder; Foto: Dipl.–Ing. Ilka Peyrer–Heimstätt	13
3.1	Erste Scherksche Minimalfläche; Foto: Dipl.–Ing. Ilka Peyrer–Heimstätt Erste Scherksche Minimalfläche als periodische Fläche; Quelle: http://www.math.uni-bonn.de/people/weber/ research/minimal	20
3.2	Katenoid; Foto: Dipl.–Ing. Ilka Peyrer–Heimstätt	21
3.3	drei Minimalflächen im Katenoid; Foto: Dipl.–Ing. Ilka Peyrer–Heimstätt	23
3.4	Kettenlinien durch zwei Punkte und zugehörige Katenoide; Graphiken erstellt mit Maple 8; entnommen aus [12]	24
3.5	Oberflächen verschiedener Lösungsmöglichkeiten; Graphik erstellt mit Maple 8; entnommen aus [12]	26
3.6	Helikoid; Foto: Dipl.–Ing. Ilka Peyrer–Heimstätt	27
4.1	Seifenhaut mit Loch; Foto: Dipl.–Ing. Ilka Peyrer–Heimstätt	43
4.2	Seifenhaut von Fäden berandet; Foto: Frei Otto, IL, Stuttgart; entnommen aus [7]	43
4.3	Freier Rand mit Hindernis; Foto: Berthold Burckhardt, IL, Stuttgart; entnommen aus [7]	44

4.4	unterstützte Seifenhaut; Foto: Dipl.–Ing. Ilka Peyrer–Heimstätt	45
4.5	hochgezogene Seifenhaut; Foto: Dipl.–Ing. Ilka Peyrer–Heimstätt	45
4.6	Katenoid mit Graten; Foto: Dipl.–Ing. Ilka Peyrer–Heimstätt	46
4.7	Vorspannung; Graphik erstellt mit Nemetschek Allplan 06; entnommen aus [2]	48
4.8	J. S. Dorton Arena; Quelle: Jim Knight, Album of Space Structures; http://www.arcaro.org/tension/album/dorton.htm	51
4.9	Musikpavillion; Quelle: http://www.aspekt1.net/ms/fo_ref/projekte.html	52
4.10	Tanzbrunnenzeltmodell; Quelle: http://www.textile-roofs.de/TR07_report-02.htm	53
4.11	Tanzbrunnenzelt; Quelle: http://www.aspekt1.net/ms/fo_ref/projekte.html	53
4.12	Expo Pavillion; Foto: Yousuf Karsh; Quelle: http://en.wikipedia.org/wiki	54
4.13	IL Stuttgart; Foto: Frei Otto, IL, Stuttgart; entnommen aus [6]	54
4.14	Münchner Olympiastadion; Foto: Clemens Horak	55
4.15	Grazer Kunsthaus; Foto: Clemens Horak	56
4.16	Nozzel aus Seifenhaut; Quelle: http://physik.seebacher.ac.at/Bionik/Bionik.htm	56

Anhang A

Begriffe aus der Mathematik

- **Funktionen:**

- **harmonisch:** Eine reellwertige, zweimal stetig differenzierbare Funktion $\phi(x, y)$ heißt harmonisch in einem Gebiet, wenn dort der Laplace-Operator $\Delta\phi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ verschwindet.

Jede auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet zweimal stetig differenzierbare harmonische Funktion u ist Realteil einer komplex differenzierbaren Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Die reelle Funktion v erfüllt $\Delta v = 0$, ist daher harmonisch und wird als konjugiert harmonisch zu u bezeichnet.

- **holomorph:** Eine komplexwertige Funktion $f(z)$ heißt in einem Gebiet G holomorph, wenn sie in jedem Punkt $z \in G$ komplex differenzierbar ist.

Oder anders formuliert: Eine komplexe Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ist genau dann holomorph, wenn die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen gelten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

- **meromorph:** Eine meromorphe Funktion ist bis auf Polstellen holomorph.

Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in D meromorph, wenn jeder Punkt $z_0 \in D$ eine Umgebung U besitzt, in der

1. $f|_{U \setminus z_0}$ holomorph ist und
2. $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) \in \mathbb{C}$ existiert. ($z \in U \setminus z_0$)

Ist das kleinste n , das die Forderung erfüllt, verschieden von Null, so heißt z_0 Polstelle von f und n ist die Ordnung dieser Polstelle.

(Jede holomorphe Funktion ist auch meromorph, mit einer leeren Polstellenmenge.)

- **Cauchyscher Integralsatz:** D sei ein offenes, einfach zusammenhängendes Gebiet in \mathbb{C} und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann hängt $\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz$ nicht vom gewählten Verbindungsweg zwischen z_0 und z_1 in D ab.
- **Identitätssatz:** Seien f und g harmonische Funktionen auf einem einfach zusammenhängenden, offenen Gebiet $D \in \mathbb{C}$ und $f(z_i) = g(z_i)$ für irgendeine konvergente Folge z_1, \dots, z_n, \dots aus D , dann gilt $f = g \forall z \in D$.
- **holomorphe Fortsetzung:** Für zwei Gebiete D_1 und D_2 , für die $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ gilt, gibt es zu jeder in D_1 holomorphen Funktion $f_1(z)$ höchstens eine, in D_2 holomorphe Funktion $f_2(z)$, die in $D_1 \cap D_2$ mit $f_1(z)$ übereinstimmt. $f_2(z)$ heißt holomorphe Fortsetzung von $f_1(z)$ nach D_2 .

Anhang B

Begriffe aus der Geometrie

- **Frenetsche Ableitungsgleichungen:** Eine C^r -Kurve des \mathbb{R}^3 ist eine Abbildung $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, deren Koordinatenfunktionen c^j r -mal stetig differenzierbar sind. Für $r = \infty$ spricht man von einer glatten Kurve. $B = (c_1, c_2, c_3)$ ist eine orthonormale Begleitbasis wobei die Vektoren c_1, c_2 und c_3 Tangenten-, Normalen- und Binormaleneinheitsvektor heißen. Es gilt, wobei \dot{c} die Ableitung nach der Bogenlänge bedeutet,

$$c_1 = \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|}, \quad c_3 = \frac{\dot{c} \times \ddot{c}}{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|}, \quad c_2 = c_3 \times c_1.$$

Und für die Ableitungen gelten die Ableitungsgleichungen von Frenet:

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 \|\dot{c}\|^{-1} &= \kappa c_2 \\ \dot{c}_2 \|\dot{c}\|^{-1} &= -\kappa c_1 + \tau c_3 \\ \dot{c}_3 \|\dot{c}\|^{-1} &= -\tau c_2 \end{aligned}$$

- **erste Fundamentalform:** Eine C^r -Fläche des \mathbb{R}^3 ist eine Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $(u, v) \in U \mapsto f(u, v) = (f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v))$, deren Koordinatenfunktionen f^j r -mal stetig differenzierbar sind. Für $r = \infty$ spricht man von einer glatten Fläche.

Hält man in den Koordinatenfunktionen von f entweder u oder v konstant, so erhält man spezielle Kurven - die Parameterlinien. Die partiellen Ableitungen $f_{,1} = \frac{\partial f}{\partial u}$ bzw. $f_{,2} = \frac{\partial f}{\partial v}$ ergeben die Tangentenvektoren an die Parameterlinien. Wir definieren nun für $(u, v) \in U$, $g_{ij} = \langle f_{,i}, f_{,j} \rangle$ ($i, j = 1, 2$) als metrische Fundamentalgrößen von f und $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißen die Koordinatenfunktionen der erste Fundamentalform.

- **zweite Fundamentalform:** Der Normaleneinheitsvektor ist definiert als

$$n = \frac{f_{,u} \times f_{,v}}{\|f_{,u} \times f_{,v}\|}.$$

Die Skalarprodukte $h_{ij} = \langle f_{,ij}, n \rangle$ ($i, j = 1, 2$) heißen Koordinatenfunktionen der zweiten Fundamentalform. Dabei ist

$$f_{,11} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \quad f_{,12} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \quad f_{,22} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

- **Krümmungen:** Die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 auf der Fläche sind das Maximum und das Minimum der Normalkrümmung $\kappa_n = \frac{h_{ij}}{g_{ij}}$. Sie sind gleichzeitig die Eigenwerte der Weingartenabbildung

$$\omega_p : T_p f \rightarrow T_p f \quad \text{mit} \quad \omega(V) := h_i^k V^i = h_{ik} g^{ij} V^j,$$

wobei $V \in T_p f$ einen Vektor aus der Tangentialebene bezeichnet.

Die Gausskrümmung K und die mittlere Krümmung H berechnen sich durch

$$K := \det h_i^k \quad \text{und} \quad H := \frac{1}{2} \text{tr}(h_i^k),$$

oder aus den Hauptkrümmungen als

$$K := \kappa_1 \kappa_2 \quad \text{und} \quad H := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$