

DISSERTATION

SONDERUNTERSUCHUNGEN ZU FLÜSSIGKEITSSCHWINGUNGSTILGERN IM BRÜCKENBAU

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der technischen Wissenschaften unter der Leitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Josef Fink
Institut für Tragkonstruktionen – Stahlbau (E212)

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Rudolf Heuer
Institut für Hochbau und Technologie
Zentrum für Allgemeine Mechanik und Baudynamik (E2063)

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Bauingenieurwesen

von

Dipl.-Ing. Stefan Kuss
9611 Nötsch 283
9915655

Wien, Oktober 2008

Inhalt

1. GESCHICHTLICHE ENTWICKLUNG VON DÄMPFUNGS- UND SCHWINGUNGSTILGUNGSSYSTEMEN	1
1.1. Passive Dämpfungs- und Schwingungstilgungssysteme	1
1.1.1. Metallische und viskoelastische Dämpferelemente	1
1.1.2. Reibschwingungsdämpfer	3
1.1.3. Schwingungsdämpfer mit viskoser Dämpfungscharakteristik	4
1.2. Geschichtliche Entwicklung des Flüssigkeitsschwingungstilgers	5
2. MATHEMATISCHE UND MECHANISCHE GRUNDLAGEN	10
2.1. Mathematische Grundlagen	10
2.1.1. Betrag komplexer Vektoren	10
2.1.2. Eulersche Differenziationsregel	10
2.1.3. Partielle Ableitung eines Vektorproduktes	11
2.1.4. Winkelidentitäten	11
2.2. Mechanische Grundlagen	12
2.2.1. Rotation eines Massenpunktes	12
2.2.2. Relativbewegung eines Massenpunktes	13
2.2.3. Bernoulli Gleichung	16
2.2.3.1. Cauchysche Bewegungsgleichungen	16
2.2.3.2. Eulersche Bewegungsgleichungen	17
2.2.3.3. Instationäre Bernoulli Gleichung für ein allgemein in der Ebene bewegtes Bezugssystem	17
2.2.4. Kontinuitätsgleichung	19
2.2.5. Lagrangesche Bewegungsgleichungen	21
2.2.6. Impulssatz	22
2.2.7. Drallsatz	23
2.2.8. Zweimassenschwinger	25
2.2.8.1. Ungedämpfter, harmonisch erregter Zweimasseschwinger	25

2.2.8.2.	Gedämpfter, harmonisch erregter Zweimassenschwinger	31
2.2.8.3.	Optimierungskriterien nach Den Hartog	36
2.2.8.4.	Mechanisch exaktes Optimierungsverfahren	41
2.2.9.	Schwingungen der Stabtragwerke	42
2.2.9.1.	Bewegungsgleichung des Bernoulli-Euler-Balkens	42
2.2.9.2.	Eigenformen und Eigenfrequenzen	44
2.2.9.3.	Orthogonalitätsbedingungen	46
2.2.9.4.	Modalanalyse	47
2.2.10.	Differenzialgleichungen mit periodischen Koeffizienten	48
2.2.10.1.	Stabilität der Mathieuschen Differenzialgleichung	49
2.2.10.2.	Lösung mittels Mathematikprogrammen	54
2.2.10.3.	Lösung mittels numerischer Verfahren	61
2.2.10.4.	Näherungslösungen	64
3.	VERSUCHSANLAGE ZUR ERZEUGUNG UND MESSUNG VON BRÜCKENSCHWINGUNGEN	73
3.1.	Versuchsbrücke	73
3.1.1.	Konstruktion	73
3.1.2.	Statische und dynamische Untersuchungen	80
3.1.3.	Messung der mechanischen Eigenschaften	92
3.1.3.1.	Versuchsbrücke ohne Gleisoberbau	92
3.1.3.2.	Versuchsbrücke mit Gleisoberbau	100
3.2.	Unwuchterreger	114
3.3.	Messtechnische Einrichtungen	118
4.	UNTERSUCHUNGEN ZU MÖGLICHEN FLUIDEN	124
4.1.	Viskosität	124
4.2.	Anforderungsprofil an die Flüssigkeiten	125
4.3.	Versuchsreihen	127
4.3.1.	Versuchsreihe A – Wasser + Ethylenglycol	127
4.3.2.	Versuchsreihe B – Wasser + Polyethylenglycol	129
4.3.3.	Versuchsreihe C – Siliconöl	130
4.3.4.	Versuchsreihe D – perfluorierte Kohlenwasserstoffe	130

4.3.5.	Versuchsreihe D – Ferrofluide	131
4.3.6.	Versuchsreihe F – Wasser + Wolframat	133
4.3.7.	Versuchsreihe G – Wasser + Kaliumhexacyanoferrat	133
4.4.	Übersicht der geeigneten Fluide	134
5.	FLÜSSIGKEITSSCHWINGUNGSTILGER GEGEN VERTIKALE BRÜCKENSCHWINGUNGEN	135
5.1.	Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsschwingungstilgers	135
5.1.1.	Ermittlung der Druckdifferenz p_2-p_1	141
5.1.1.1.	Einseitig offenes Rohrende – einseitige Luftfeder (Fall 1)	142
5.1.1.2.	Zweiseitig geschlossenes Rohr - beidseitige Luftfedern (Fall 2)	145
5.1.1.3.	Zweiseitig geschlossenes Rohr - beidseitige Luftfedern (Fall 3)	149
5.1.1.4.	Einseitig geschlossenes Rohr - einseitige Luftfeder (Fall 4)	154
5.1.1.5.	Einseitig geschlossenes Rohr - beidseitige Luftfeder (Fall 5)	159
5.1.2.	Eigenfrequenzen der Schwingungstilger	165
5.1.2.1.	Frei schwingender Flüssigkeitsfaden	167
5.1.2.2.	Einseitig offenes Rohrende – einseitige Luftfeder (Fall 1)	167
5.1.2.3.	Zweiseitig geschlossenes Rohr - beidseitige Luftfedern (Fall 2)	168
5.1.2.4.	Zweiseitig geschlossenes Rohr - beidseitige Luftfedern (Fall 3)	169
5.1.2.5.	Einseitig geschlossenes Rohr - einseitige Luftfeder (Fall 4)	172
5.1.2.6.	Beidseitig geschlossenes Rohr - beidseitige Luftfeder (Fall 5)	173
5.1.3.	Berücksichtigung von Reibungsverlusten	174
5.1.3.1.	Reibungsverluste des Flüssigkeitsschwingungstilgers	176
5.1.3.2.	Äquivalente viskose Dämpfung	177
5.1.4.	Stabilität der Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsschwingungstilgers	179
5.2.	Resultierende Kräfte und Momente des Flüssigkeitsschwingungstilgers	187

5.2.1.	Resultierende Kraft	187
5.2.2.	Resultierendes Moment	195
5.3.	Äquivalenzbeziehungen zwischen konventionellen Schwingungstilgern und Flüssigkeitsschwingungstilger	199
5.3.1.	Einmassenschwinger mit konventionellem Schwingungstilger	199
5.3.2.	Einmasseschwinger mit Flüssigkeitsschwingungstilger	200
5.3.3.	Vergleich zwischen konventionellen Schwingungstilgern und Flüssigkeitsschwingungstilgern	202
5.3.4.	Optimale Abstimmungskriterien des Flüssigkeitsschwingungstilgers	204
6.	VERSUCHSTECHNISCHE UNTERSUCHUNGEN ZU DEN FLÜSSIGKEITSSCHWINGUNGSTILGERN	207
6.1.	Versuchsreihe 1	207
6.1.1.	Experimentelle Untersuchungen	207
6.1.1.1.	Ausgangsparameter	207
6.1.1.2.	Untersuchungen zur Frequenzabstimmung	212
6.1.1.3.	Untersuchungen zur Abstimmung der Dämpfung	224
6.1.2.	Numerische Studien	231
6.1.2.1.	Ermittlung des optimalen Frequenzverhältnisses f_{opt}	232
6.1.2.2.	Ermittlung des optimalen viskosen Dämpfungsmaßes ζ_{opt}	235
6.1.2.3.	Bewegungen des Brückentragwerks und des Flüssigkeitsfadens	238
6.1.2.4.	Eigenfrequenz des schwingenden Flüssigkeitsfadens f_a	240
6.1.2.5.	Vertikalkomponente der Tilgerkraft	242
6.1.2.6.	Einfluss des nichtlinearen Druckterms	243
6.1.2.7.	Untersuchungen zur Parameterresonanz	249
6.2.	Versuchsreihe 2	253
6.2.1.	Experimentelle Untersuchungen	253
6.2.1.1.	Ausgangsparameter	253
6.2.1.2.	Untersuchungen zur Frequenzabstimmung	268
6.2.1.3.	Untersuchungen zur Flüssigkeitsspiegelbewegung und zu den Druckverhältnissen	282

6.2.2.	Numerische Studien	291
6.2.2.1.	Ermittlung des optimalen Frequenzverhältnisses f_{opt}	291
6.2.2.2.	Ermittlung des optimalen viskosen Dämpfungsmaßes ζ_{opt}	294
6.2.2.3.	Untersuchungen zur Flüssigkeitsbewegung und zu den Druckverhältnissen	298
6.2.2.4.	Einfluss des resultierenden Momentes	302
7.	ANWENDUNG DER FLÜSSIGKEITSSCHWINGUNGSTILGER AM BEISPIEL EINER REALEN VERBUNDBRÜCKE	308
7.1.	Objektbeschreibung	308
7.1.1.	Konstruktion	308
7.1.2.	Dynamische Eigenschaften des Tragwerks	310
7.2.	Tilgerbemessung	314
7.3.	Generelle Vorgehensweise zur Dimensionierung von Flüssigkeitsschwingungstilgern	326
7.3.1.	Einbau der Tilger in ein bestehendes Tragwerk	328
7.3.2.	Berücksichtigung der Tilger im Tragwerksentwurf	329
8.	AUSBLICKE UND ZUSAMMENFASSUNG	330
8.1.	Ausblicke	330
8.2.	Zusammenfassung	333
A.	ABBILDUNGSVERZEICHNIS	336
B.	TABELLENVERZEICHNIS	351
C.	BIBLIOGRAPHIE	352
D.	PRÜFZEUGNIS DER STAHLTRÄGER	355
E.	MATLAB INPUTFILE	356

Vorwort

„Ich habe weniger Schwierigkeiten in der Entdeckung der Bewegungen der Himmelskörper gefunden, ungeachtet ihrer erstaunlichen Entfernung, als in den Untersuchungen über die Bewegungen des fließenden Wassers, die doch unter unseren Augen vor sich geht“

Galileo Galilei

Dynamische Probleme im konstruktiven Ingenieurbau sind durch den Einsatz von hochfesten Materialien, wie auch komplexen Computersimulationen der Tragwerke aktueller denn je. Betrachtet man dabei Hochhäuser, Brückentragwerke, im speziellen Fußgängerbrücken oder Masten und Schornsteine, die Tendenz zu immer schlankeren Tragwerken ist unübersehbar. Diese Tendenz wird sehr oft auch durch die Entwürfe der Architekten und Wünsche der Bauherren forciert. Bei derartig schlanken Konstruktionen erreicht man meist, weit vor dem Erreichen des Grenzzustandes der Tragfähigkeit den Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit, wie zum Beispiel übermäßige Beschleunigungen und Verformungen von Hochbaudecken oder Fußgängerbrücken. Neben diesen Effekten, die die Benutzung derartiger Objekte einschränkt oder überhaupt unmöglich machen, können dynamische Beanspruchungen selbstverständlich auch zu Problemen der Tragfähigkeit führen. Als Beispiele werden an dieser Stelle die Beanspruchung von Tragwerken durch Resonanzerscheinungen, Parameterresonanz oder wirbelerregte Schwingungen angeführt. Werden diese in den statisch/dynamischen Berechnungen nicht ausreichend berücksichtigt und werden dagegen keine effizienten Maßnahmen ergriffen, muss im schlimmsten Fall mit dem Kollaps der Tragkonstruktion gerechnet werden.

Eine dieser effizienten Maßnahmen ist der Einbau von Flüssigkeitsschwingungstilgern in die Tragstruktur. Bei diesen handelt es sich um Rohrkonstruktionen mit V- oder U-Form, in der eine, mit einer Anfangsauslenkung versehene Flüssigkeit durch die Tragwerksbewegung zum Schwingen angeregt wird. Dabei können durch gezielten Abschluss an einem oder beiden Rohrenden durch das dort abgeschlossene Luftvolumen Luftfedern aktiviert werden, die auf das Schwingungsverhalten der Tilger einen entscheidenden Einfluss haben. Die Tilger müssen dafür mit in dieser Arbeit hergeleiteten modifizierten Abstimmungskriterien des Zweimasseschwingers nach Den Hartog genau auf das zu dämpfende Haupttragwerk eingestellt werden. Durch die im Rohrsystem bewegte Flüssigkeit wird dabei bei exakter Abstimmung ein Großteil der kinetischen Energie, die in das Tragwerk eingebracht wird, vom Tilger übernommen. Dadurch lässt sich eine Minimierung der dynamischen Amplituden und damit einhergehend eine Verringerung der durch die dynamische Erregung erzeugten Spannungen im zu dämpfenden Tragwerk erreichen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung von Flüssigkeitsschwingungstilgern für Brückentragwerke mit vertikaler dynamischer Erregung. Dabei wurden auf analytischem Wege die Bewegungsgleichungen des Stromfadens im bewegten Bezugssystem sowie die aus der Flüssigkeitsbewegung resultierenden Kräfte und Momente hergeleitet. Unterschiedliche Fälle des Befüllungsvorganges, die zu unterschiedlich steifen Luftfedern

führen, wurden ausgearbeitet und gegenübergestellt. Des Weiteren konnten die zugehörigen Eigenfrequenzen des schwingenden Flüssigkeitsfadens ermittelt werden. Um die Abstimmungskriterien für den Zweimasseschwinger nach Den Hartog auf das Brücke-Flüssigkeitsschwingungstilger-System anwenden zu können, mussten dafür eigene Äquivalenzbeziehungen zwischen Zweimasseschwinger und Einmasseschwinger mit Flüssigkeitsschwingungstilger erarbeitet werden. Mit diesen konnten schlussendlich einfache Formeln zur optimalen Abstimmung der Tilger angegeben werden. Des Weiteren wurde das Phänomen der Parameterresonanz für den schwingenden Flüssigkeitsfaden untersucht und eine einfache Bedingung zur Vermeidung dieser angegeben.

Neben den analytischen Berechnungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern wurden Großversuche mit unterschiedlichen Tilgerkonfigurationen durchgeführt. Zu diesem Zweck wurde eigens dafür eine Versuchsbrücke mit 10,0 m Spannweite und dem Regeloberbau der Österreichischen Bundesbahnen errichtet. Für die erforderliche dynamische Krafterregung dieser kamen dabei zwei speziell für die Versuchsbrücke entwickelte Unwuchterreger zum Einsatz. Bei diesen wurden durch zwei unterschiedliche Unwuchtscheiben (Voll- und Drittelsegmente), durch darin variabel demontierbare Unbalancen sowie unterschiedliche Übersetzungen zum Motor ein großes Spektrum an Einstellungsmöglichkeiten und damit verbundenen unterschiedlichen Krafterregungen bei variablen Frequenzen realisiert. Für die Untersuchungen der Flüssigkeitsschwingungstilger wurden zwei Versuchsreihen durchgeführt, Versuchsreihe 1 mit dem Brückentragwerk ohne Schotteroberbau und zwei darauf exakt abgestimmte Tilger sowie Versuchsreihe 2, inklusive Schotteroberbau und ebenfalls 2 exakt darauf abgestimmte Tilger. Bei der Versuchsreihe 1 kamen dabei PE-HD Wasserrohre mit fix verschlossenen Rohrenden zum Einsatz, bei der Versuchsreihe 2 wurde ein Tilger ebenfalls aus PE-HD Wasserrohren, der zweite zum Visualisieren des Strömungsverhaltens in den Tilgern aus Plexiglas hergestellt. Die Rohrabschlüsse wurden dabei bei beiden mittels einer eigens dafür konstruierten Kolbenkonstruktion in Rohrlängsrichtung variabel gehalten. Begleitend zu den Versuchen wurden numerische Studien ausgearbeitet, die unter Berücksichtigung aller im Modell auftretenden Nichtlinearitäten die in den Versuchen ermittelten Ergebnisse verifizierten.

In den Versuchen sowie auch numerisch konnte die hohe Effektivität der Flüssigkeitsschwingungstilger nachgewiesen werden. Dabei konnte bereits mit einem Verhältnis der Flüssigkeitsmasse zur Tragwerksmasse von ca. 1,0 % eine dynamische Amplitudenreduktion von ca. 73 % erreicht werden (Versuchsreihe 1). Neben dem Aufzeigen der Wirkungsweise der Tilger konnten ebenfalls die analytischen Herleitungen sowie die dafür erforderlichen Näherungen durch die Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit den numerischen Ergebnissen belegt werden. Der Einsatz von Flüssigkeitsschwingungstilgern gegen vertikale Brückenschwingungen stellt somit ein effizientes, leicht justierbares und wirtschaftliches Mittel zur Reduktion von Brückenschwingungen dar.

In der vorliegenden Arbeit wurden in Kapitel 2 alle notwendigen und aus unterschiedlichen Literaturquellen zusammengetragenen mathematischen und mechanischen Grundlagen aufbereitet. Diese stellen eine wichtige Grundlage vor allem

für das Hauptkapitel 5, in dem die analytischen Formeln und Gleichungen des Flüssigkeitsschwingungstilgers erarbeitet werden, dar. Damit sollte es ohne umfangreiche Sekundärliteratur möglich sein, den Ableitungen in dieser Arbeit folgen zu können. Um dabei diese Grundlagen kompakt in einem Kapitel darstellen zu können, wurde darauf verzichtet, hinlänglich bekannte Themen wie zum Beispiel die Rotation eines Massepunktes in einem Anhang separat darzustellen. Damit stellt Kapitel 2 ein für diese Arbeit vollständiges und wichtiges mechanisches Nachschlagewerk dar.

Die vorliegende Dissertation zum Thema „Einsatz von Flüssigkeitsschwingungstilgern im Brückenbau“ entstand während meiner Assistentenanstellung am Institut für Tragkonstruktionen – Stahlbau der Technischen Universität Wien im Zeitraum Jänner 2006 bis Oktober 2008. Für die Unterstützung vor allem bei der Versuchsdurchführung sowie die konstruktiven Anregungen möchte ich dem gesamten Institut danken. Besonderer Dank für die unkomplizierte und kompetente Betreuung sowie die Vorgabe des „roten Fadens“ für meine Arbeit gilt meinen beiden Dissertationsbetreuern, Herrn Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Josef Fink, Vorstand des Instituts für Stahlbau und Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Rudolf Heuer, Professor am Zentrum für Allgemeine Mechanik und Baudynamik der Technischen Universität Wien.

Stefan Kuss
Wien, Oktober 2008

Preface

Nowadays dynamical problems in structural engineering arise more often because of the use of high strength materials and complex computational simulations. For example high rise buildings, bridges and footbridges, pylons and chimneys, the tendency to more and more slender constructions can't be overlooked. This tendency is often forced by architects and the wishes of building owners. These slender structures common reach the serviceability limit states, like excessive accelerations or displacements of floors or footbridges, before reaching the ultimate limit states. Beside these effects, which delimitate the use of constructions or even make it impossible to use them there of course can arise problems with the loading capacity. For example, problems like the resonance effect, parametric resonance or wind induced vibrations should be mentioned at this point. If these problems are not considered in static and dynamic calculations and no measures are taken against them, the worst case, a collapse of the structure, is possible.

One of these effective measures against dynamical problems of constructions is the application of tuned liquid column dampers. These are tube constructions with U- or V-shape in which a liquid with an initial deflection is moving towards the vibration of the structure. With different closures at the ends of the tubes the vibration behavior of the liquid can be strongly affected because of the embedded air volume which operates as an air spring. The damper must be tuned exactly to the properties of the structure according to modified tuning criterions derived in this paper. They are similar to the criterions derived from Den Hartog for the two degrees of freedom system. Due to the moving liquid in the exactly tuned dampers a great part of the kinetic energy which effects the construction is dissipated by the tuned liquid column dampers. Thus a minimization of the dynamically amplitudes of the construction as well as the resulting stresses can be achieved.

Purpose of the present thesis is the investigation of tuned liquid column dampers for bridge constructions with vertical dynamic excitation. The equations of motion for the moving fluid in the shifted reference system are derived analytically as well as the corresponding forces and moments. Different cases for the filling of the dampers, which lead to different stiffnesses of the air springs and hence to different natural frequencies, are worked out and compared. Furthermore the formulas of the corresponding natural frequencies are presented. To applicate the tuning criterions of Den Hartog for the single mass-tuned liquid column damper-system modified tuning criterions are derived. With these easy to use formulas an appropriate tool for tuning the liquid column dampers can be given. Furthermore the phenomenon of parametric resonance is investigated and again an easy to use formula can be derived to avoid this negative effect.

Beside the analytically calculations for the tuned liquid column dampers large scale tests are performed. For this purpose a steel bridge with a span of 10,0 m with the standard ballast bed of the Austrian Railway Association was constructed. For the dynamical erection two vibration generators, which have been especially constructed for the

presented tests, are used. Two test series are considered as follows: series 1 with the test bridge without the ballast bed and two exactly tuned dampers and series 2 with the test bridge with ballast bed and again two exactly tuned dampers. As material for the dampers for the test series 1 PE-HD water tubes are used. For the second series one of the dampers again is made of PE-HD, the second one is made of Plexiglas to visualize the streaming and sloshing of the liquid in the tubes. For the endings of the tubes a special piston construction was developed to make the length of the air spring variable. Furthermore, comparative numerical studies are worked out under consideration of all nonlinearities of the dampers. These numerical calculations can verify the measured results of the tests.

Numerical results as well as the measured results can show the high effectiveness of the tuned liquid column dampers. Thereby a reduction of the dynamically amplitudes of 73% can be reached with a mass ratio (liquid mass to modal bridge mass) of merely 1%. Beside the demonstration of the effectiveness of the dampers the analytically derivations and their linearizations can be verified with the comparison of the measured results achieved by the large scale tests and the numerically investigations. The application of tuned liquid column dampers against vertical bridge vibrations is an effective, easy to tune and economic measure.

The presented thesis entitled „Special investigations of tuned liquid column dampers for bridge constructions“ was worked out during my employment as assistant at the Institute of Structural Engineering – Department of Steel Constructions in the time period January 2006 to October 2008. For the support especially during the large scale tests I want to thank the whole institute. Special thank for both their competent and uncomplicated support is given to my two advisors, Mr. Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Josef Fink, head of the Department for Steel Constructions and Mr. Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Rudolf Heuer, Professor at the Center of Mechanics and Structural Dynamics at the Technical University of Vienna.

1. GESCHICHTLICHE ENTWICKLUNG VON DÄMPFUNGS- UND SCHWINGUNGSTILGUNGSSYSTEMEN

Im ersten Teil dieses Kapitels werden die derzeit bekannten und in der Praxis hauptsächlich eingesetzten passiven Schwingungstilgungssysteme vorgestellt und in ihrer Wirkungsweise kurz erläutert. Daran anschließend soll ein kurzer Abriss der bis dato durchgeführten Untersuchungen zu Flüssigkeitsschwingungstilgern angeführt werden.

1.1. Passive Dämpfungs- und Schwingungstilgungssysteme

Vor der Auflistung der gebräuchlichsten Tilgungssysteme sowie deren Wirkungsweise soll der Unterschied zwischen Dämpfer und Tilger kurz erläutert werden. Von Dämpfungssystemen spricht man bei, durch inelastische Deformationsprozesse hervorgerufene, energiedissipierende Systeme, die die Eigendämpfung des Tragwerks anheben. Zu dieser Art zählen zum Beispiel metallische und viskoelastische Dämpfer. Schwingungstilger zeichnen sich durch die mit einer Feder und in den meisten Fällen auch durch ein parallel geschaltetes Dämpferelement mit dem Tragwerk verbundene und schwingende Masse aus. Tilgersysteme müssen auf eine Schwingungsform des Tragwerks nach Den Hartog (siehe Kapitel 2.2.8.3) optimal abgestimmt werden und reduzieren die in das Tragwerk eingebrachte Energie hauptsächlich durch die Bewegung der Tilgermasse.

1.1.1. Metallische und viskoelastische Dämpferelemente

Beide Dämpfersysteme beruhen auf dem inelastischen Verhalten von Materialien bei eingprägten Deformationen. Dieses Verhalten kann durch die Darstellung der zugehörigen Hysteresekurve, die die im Tilger vorhandene Kraft bzw. Spannung den auftretenden Verformungen bzw. Dehnungen gegenüberstellt. Ein Rückschluss auf den vorhandenen Dämpfungskoeffizient kann dabei über den Flächeninhalt der Hysterese, wie z. B. in (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001) dargestellt, gezogen werden. Nachfolgend ist ein Beispiel einer gemessenen Hysteresekurve angeführt.

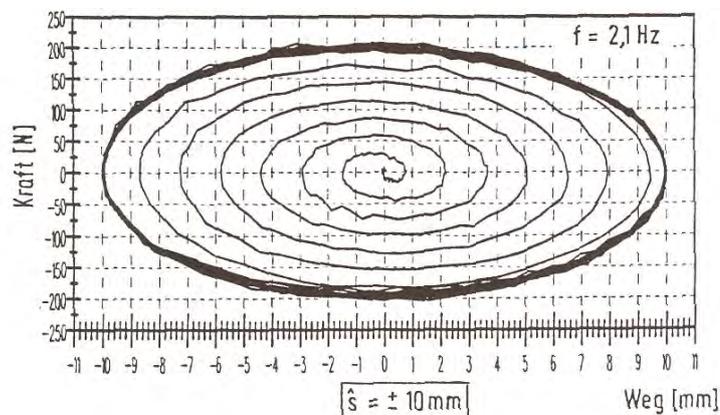


Abbildung 1.1: Hysteresekurve eines viskosen Dämpfungselementes (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)

1. Geschichtliche Entwicklung von Dämpfungs- und Schwingungstilgungssystemen

In der praktischen Anwendung der viskoelastischen Dämpferelemente spielen heute die elastomeren Werkstoffe die wichtigste Rolle. Diese kommen als Kompaktlager, Platten oder Matten in den unterschiedlichsten Formen, Strukturen und chemisch/physikalischen Eigenschaften zum Einsatz. Es gibt Produkte mit Stahlbewehrung in kompakten Körpern, Materialien mit Gewebereinlagen und gemischtzellige Polyurethane. Eine Einsatzmöglichkeit von Elastomer-Elementen ist zum Beispiel die Unterfütterung von Stahlschornsteinen mit geringer Höhe zur Erhöhung deren Dämpfung, wie in nachfolgender Abbildung dargestellt.

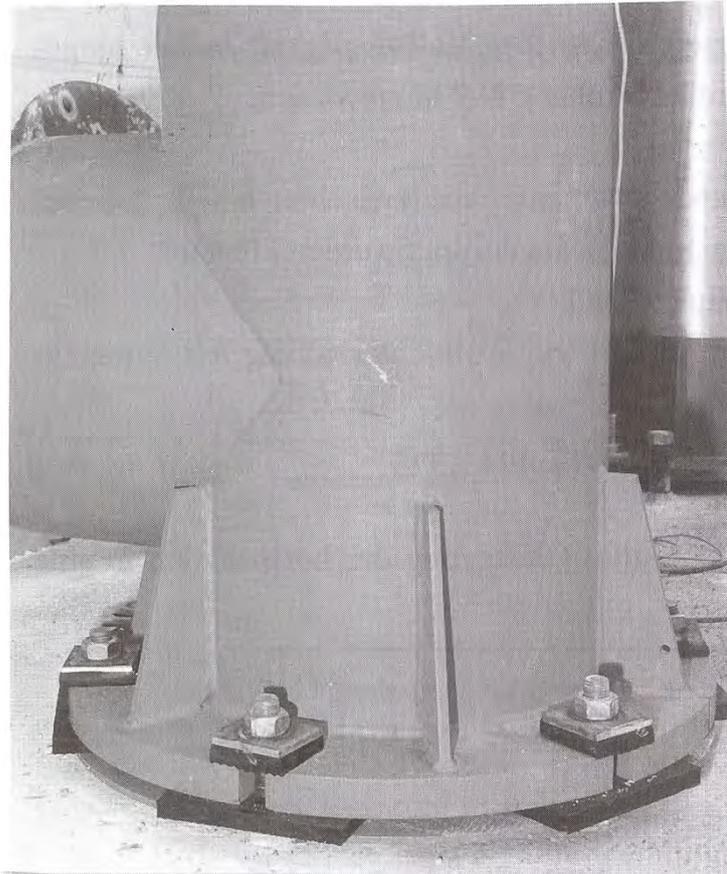


Abbildung 1.2: Fuß eines Stahlschornsteins unterfüttert mit Elastomer-Elementen (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)

Eine weitere Möglichkeit besteht in der Anordnung von, zwischen einem äußeren Festpunkt und einer schwingungsanfälligen Konstruktion angeordneten, energiedissipierenden Elementen. Bei diesen kann es sich zum Beispiel um Stoßdämpferelemente, Reib-Teleskop-Elemente, Reib-Zangen-Elemente, Elastomer-Schubelemente oder viskose Dämpfungselemente handeln. Nachfolgend ist ein, in einen Stützenfuß integriertes Elastomer-Schubelement dargestellt.

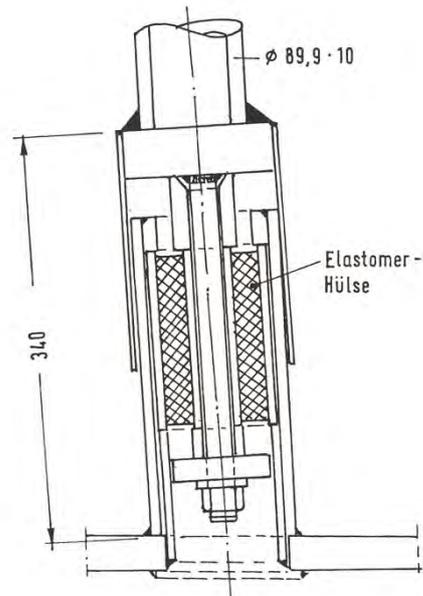


Abbildung 1.3: Elastomer-Schubelement integriert in einen Stützenfuß (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)

1.1.2. Reibschwingungsdämpfer

Diese bestehen im Prinzip aus einem schwingungsfähigen Pendel mit am Ende angebrachtem Reibelement, das auf einer ebenen oder kalottenförmigen Stahlplatte hin- und herbewegt wird. Durch die dabei auftretende Reibung wird Energie dissipiert. In der nachfolgenden Abbildung ist ein Beispiel zu Reibschwingungsdämpfern angeführt.

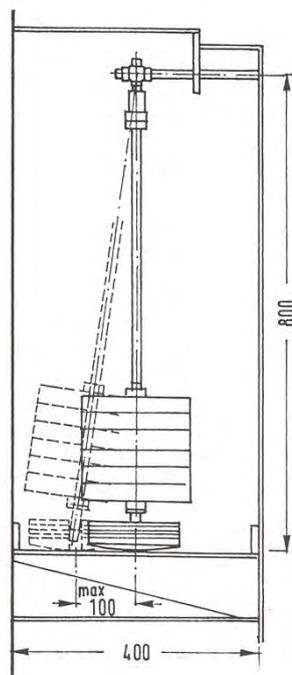


Abbildung 1.4: Reibungsschwingungsdämpfer mit gerader Reibplatte (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)

1. Geschichtliche Entwicklung von Dämpfungs- und Schwingungstilgungssystemen

Bei deren Einsatz muss darauf geachtet werden, dass ein Blockieren des Pendels und damit ein Unwirksamwerden des Dämpfers unbedingt ausgeschlossen werden kann. Aus diesem Grund können anstatt eines Reibelementes mehrere Platten mit unterschiedlichem Führungslochdurchmesser angeordnet werden, wie in Abbildung 1.5 dargestellt ist. Damit wirken die einzelnen Reibplatten amplitudenabhängig und ein Blockieren des Pendels kann ausgeschlossen werden.

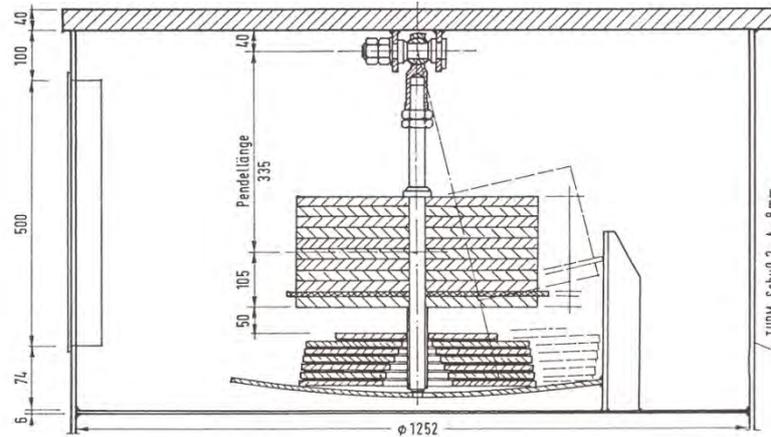


Abbildung 1.5: Reibungsschwingungsdämpfer mit mehreren Reibelementen und kalottenförmiger Reibplatte (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)

1.1.3. Schwingungsdämpfer mit viskoser Dämpfungscharakteristik

Bei diesem Typ handelt es sich um Feder-Massesysteme mit parallel geschaltetem viskosem Dämpfungselement, für das Reibelemente, Hydraulikelemente und Elastomerelemente zum Einsatz kommen können. Ein Beispiel für ein derartiges viskoses Dämpfungselement bildet ein von Petersen (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001) vorgeschlagener Kolben, der aus acht Flügelblechen mit darin befestigten Lochblechen besteht und in einer viskosen Flüssigkeit auf- und abbewegt wird. Dadurch entsteht eine weitgehend laminare Scherströmung, die Energie dissipiert. Nachfolgend sind die Kolbenkonstruktion sowie ein auf einem Brückentragwerk montierter viskoser Dämpfer abgebildet.



Abbildung 1.6: Kolbenkonstruktion des viskosen Dämpfungselementes, System Maurer-Söhne-Petersen, Typ S (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)



Abbildung 1.7: Installierte Schwingungsdämpfer System Mauerer-Söhne-Petersen, Typ S (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)

1.2. Geschichtliche Entwicklung des Flüssigkeitsschwingungstilgers

Die ersten Überlegungen, Flüssigkeiten zur Tilgung von Schwingungen heranzuziehen, stammen aus dem Schiffsbau. Dabei wurde von Frahm (Frahm, 1911) ein Schlingertank zur Dämpfung der Rollbewegung von Schiffen entwickelt und erprobt. Die Rollbewegung der Schiffe resultiert dabei aus der annähernd harmonischen Anregung durch auflaufende Wellen mit einer Frequenz nahe der Rolleigenfrequenz des Schiffs. Der Schlingertank besteht dabei aus einem im Querschnitt veränderlichen U-förmigen und in Schiffsquerrichtung ausgerichteten Behälter, in dem Wasser frei schwingen kann. Der U-förmige Behälter ist dabei über einen rohrförmigen Luftkanal mit einem Drosselventil geschlossen. Die Dämpfung der Flüssigkeitsschwingung wird dabei weniger von der schwingenden Flüssigkeit selbst, als vielmehr durch das Drosselventil hervorgerufen. Vor der Einführung und praktischen Erprobung mussten dabei die damaligen Bedenken der Seeoffiziere gegen das absichtliche Einlassen von Wasser in ein Schiff ausgeräumt werden. Dies gelang Frahm jedoch durch zahlreiche Versuche und erfolgreiche theoretische Untersuchungen. Der von Frahm entwickelte Schlingertank wurde z. B. in den

1. Geschichtliche Entwicklung von Dämpfungs- und Schwingungstilgungssystemen

Passagierdampfern „Bremen“ und „Europa“ erfolgreich eingesetzt, deren Schiffsrollbewegung damit um ca. $\frac{2}{3}$ reduziert werden konnte.

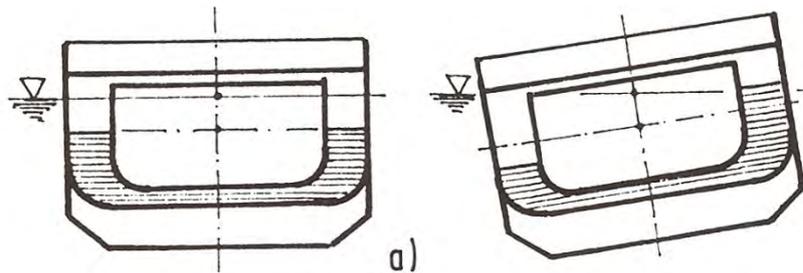


Abbildung 1.8: Von Frahm vorgeschlagener Schlingertank zur Reduzierung der Rollbewegung von Schiffen in unausgelenkter (links) und ausgelenkter (rechts) Lage (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)

Erst in den 60. Jahren des 20. Jahrhunderts wurde die Idee der Anwendung von Flüssigkeitsschwingungstilgern von Carrier und Miles (Carrier, 1960) zur Reduzierung der durch Zentripetalbeschleunigungen hervorgerufenen Rollbewegung von Satelliten wieder aufgegriffen und untersucht. Von Abramson (Abramson, 1966), einem NASA Techniker, wurden umfangreiche Arbeiten über das Verhalten von Flüssigkeiten in einem dynamisch erregten starren Behälter veröffentlicht. Grund dafür war die Problematik des Startvorgangs von Raumfahrzeugen, bei denen die mit flüssigem Treibstoff gefüllten Tanks großen dynamischen Kräften ausgesetzt sind. Ebenfalls in diesem Jahrzehnt wurden von Brunner (Brunner, 1964) erste Überlegungen zum Einsatz von Flüssigkeitsschwingungstilgern in Hochbaukonstruktionen gemacht. Dabei handelte es sich um mit viskosem Öl gefüllte, kreisrunde Behälter, die durch im Behälter liegende, horizontale und perforierte Platten eine Energiedissipation bewirkten.

Für die nachfolgenden Betrachtungen soll die Unterscheidung zwischen Tuned Liquid Damper (TLD) und Tuned Liquid Column Damper (TLCD) erläutert werden. Bei ersteren handelt es sich um starre Behälter, in denen eine Flüssigkeit mit freier Flüssigkeitsoberfläche schwingt (Abbildung 1.9 rechts) und durch Reibungs- sowie Schwappeffekte Energie dissipiert. Bei der zweiten Art schwingt eine geführte Flüssigkeit in einem definierten Rohrsystem (Abbildung 1.9 links), wie sie auch im Zuge der vorliegenden Arbeit untersucht wurden.

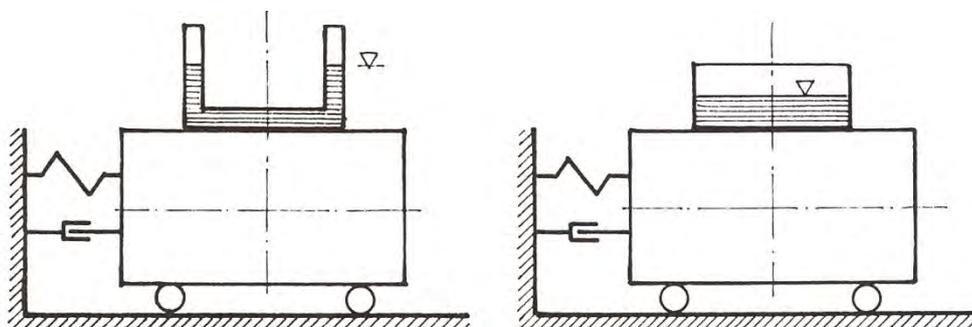


Abbildung 1.9: Tuned Liquid Column Damper (TLCD, links) und Tuned Liquid Damper (TLD, rechts) auf einem Einmasseschwinger (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)

1. Geschichtliche Entwicklung von Dämpfungs- und Schwingungstilgungssystemen

Eine Vielzahl von Untersuchungen zum Tuned Liquid Damper (TLD) wurden ab dem Jahr 1987 in Japan durchgeführt, eine anschauliche Übersicht dazu liefert (Ibrahim, 2001). Der Flüssigkeitsschwingungstilger in dieser Form wurde bereits in einer Vielzahl von schwingungsanfälligen Bauwerken erfolgreich eingebaut und erprobt.

Fast zeitgleich zur Entwicklung der Tuned Liquid Damper (TLD) wurde von Sakei (Sakei, 1989) im Jahre 1989 ein neuartiger Flüssigkeitsschwingungstilger, der sogenannte Tuned Liquid Column Damper (TLCD), zur Reduzierung von Bauwerksschwingungen vorgeschlagen. Diese besitzen gegenüber den Tuned Liquid Dämpfern (TLD) den Vorteil der einfacheren und besseren Abstimmungsmöglichkeiten, der Unempfindlichkeit gegenüber benachbarten Eigenfrequenzen des Tragwerks sowie des nahezu wartungsfreien Betriebs und der geringen Herstellungs- und Installationskosten. Eine große Anzahl von Untersuchungen bezüglich idealer Querschnittsformen, Geometrien, Masse- und Frequenzverhältnissen sowie Viskositäten wurden in weiterer Folge zu den Tuned Liquid Column Damper (TLCD) durchgeführt. Ebenfalls wurden Untersuchungen zu aktiven Tuned Liquid Column Dämpfern (TLCD) ausgearbeitet, die z. B. durch den Einbau einer aktiven Blende in das Rohrsystem realisiert werden können.

Am Institut für Allgemeine Mechanik der Technischen Universität Wien wurden neben zwei Diplomarbeiten zwei Dissertationen zum Thema Tuned Liquid Column Damper (TLCD) ausgearbeitet. Beide Dissertationen, die erste von Hochrainer mit dem Titel *Control of vibrations of civil engineering structures with special emphasis on tall buildings* (Hochrainer, 2001) und die zweite von Reiterer mit dem Titel *Schwingungsdämpfung von Baukonstruktionen, insbesondere von Brücken* (Reiterer, 2004) befassen sich dabei mit U-förmigen Flüssigkeitsschwingungstilgern unter vorwiegend horizontaler Anregung. Von Hochrainer wurde zusätzlich ein aktives Kontrollsystem für die Flüssigkeitsschwingungstilger vorgeschlagen, wie in nachfolgender Abbildung dargestellt ist.

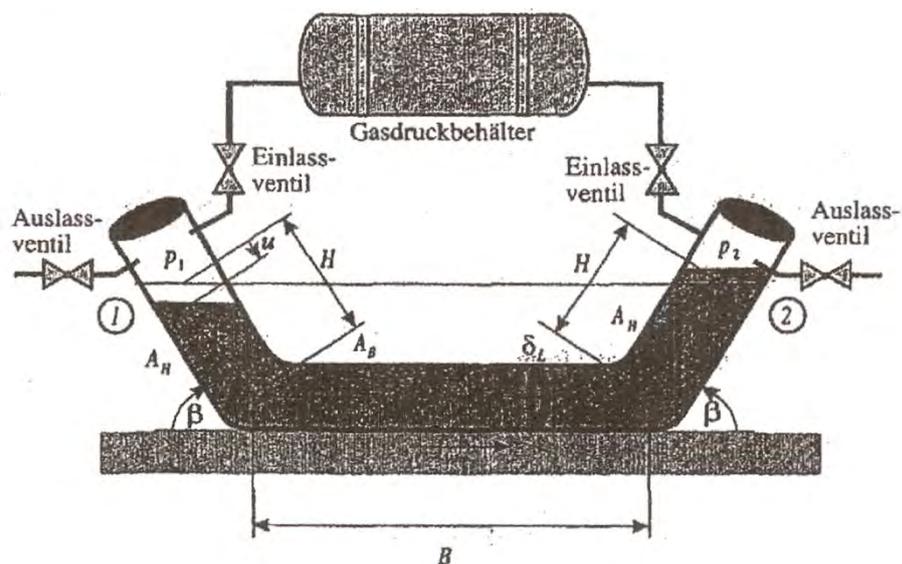


Abbildung 1.10: Flüssigkeitsschwingungstilger zur Dämpfung horizontaler Bauwerksschwingungen mit aktivem Kontrollsystem (Hochrainer, 2001)

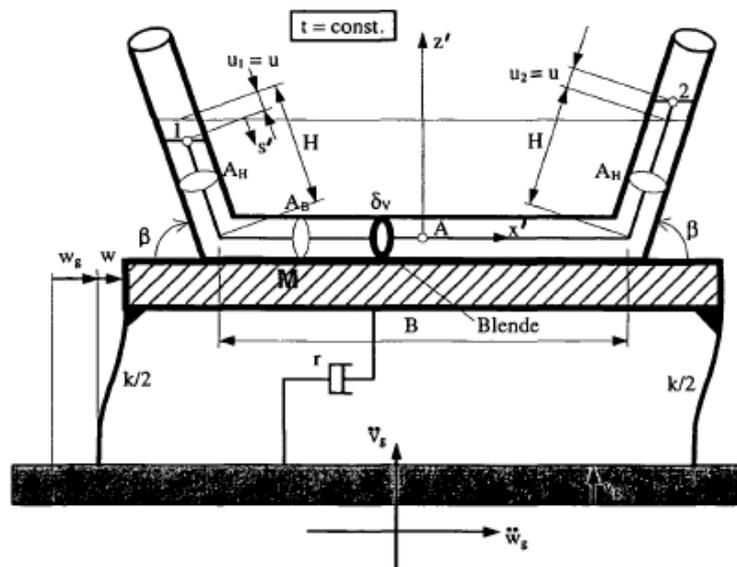


Abbildung 1.12: Flüssigkeitsschwingungstilger zur Reduzierung von Horizontalschwingungen befestigt auf einem einstöckigen Rahmen unter horizontaler und vertikaler Anregung (Reiterer, 2004)

Aufbauend auf diesen beiden Arbeiten wird in vorliegender Arbeit die Einsatzmöglichkeit von Flüssigkeitsschwingungstilgern zur Dämpfung von vertikalen Brückenschwingungen analytisch, numerisch und experimentell untersucht, wobei auf die Möglichkeit der Integration der Tilgerkonstruktion in Diagonalen von Fachwerkbrücken besonderes Augenmerk gelegt wird. Daraus ergibt sich die in vorliegender Arbeit untersuchte V-Form der Tilger mit einer Schenkelneigung von 60° . Da für die Tilger gegen Vertikalschwingungen eine Anfangsauslenkung der Flüssigkeitsspiegel erforderlich ist und für die Einstellung dieser Anfangsauslenkung unterschiedliche Befüllvorgänge denkbar sind, werden in Kapitel 5.1.1 diese unterschiedlichen Möglichkeiten ausgearbeitet und auf ihre mechanischen Auswirkungen hin untersucht. Zugehörig zu den alternativen Befüllvorgängen ergeben sich auch unterschiedliche Eigenfrequenzen für die Flüssigkeitsschwingung, wie in Kapitel 5.1.2 ermittelt wird. Wie bereits angeführt, wurden zur Bestimmung der optimalen Entwurfparameter der Tilger unter vertikaler Anregung, Äquivalenzbeziehungen zwischen Zweimassenschwinger und Einmassenschwinger mit Flüssigkeitsschwingungstilger hergeleitet und ausgewertet. Mit diesen können die erforderliche Frequenz- und Dämpfungsabstimmung mittels einfacher Formeln durchgeführt werden, wie in Kapitel 5.3 dargelegt wird. Aufgrund der sich für die Flüssigkeitsbewegung ergebenden parametererregten Bewegungsgleichung wurde das Phänomen der Parametererregung für den Tilger untersucht und eine einfache Bestimmung zu deren Vermeidung, nämlich ein minimal erforderliches äquivalentes viskoses Dämpfungsmaß, angegeben. In den numerischen sowie experimentellen Studien des Kapitels 6 konnte die Effektivität der Tilger auf eindruckvolle Weise dargestellt werden. Zum Abschluss wurde noch die Anwendung der hergeleiteten Formeln für die Flüssigkeitsschwingungstilger an einem realen Brückenobjekt vorgeführt.

2. MATHEMATISCHE UND MECHANISCHE GRUNDLAGEN

2.1. Mathematische Grundlagen

2.1.1. Betrag komplexer Vektoren

Oft gelingt die Herleitung der Bewegungsgleichungen mechanischer Systeme unter Anwendung komplexer Vektoren (Abbildung 2.1) am elegantesten. Um dann die Bewegungsgröße als absolute Größe zu erhalten, ist aus dem Real- und dem Imaginärteil des komplexen Vektors der Amplitude bzw. der Bewegung der Betrag wie folgt zu bilden (Craig, 2006).

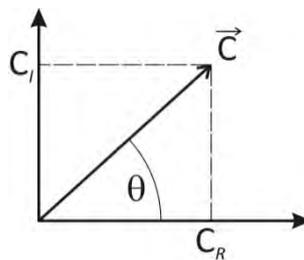


Abbildung 2.1: Darstellung eines komplexen Vektors

Der Betrag von \vec{C} lässt sich folgendermaßen ermitteln

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{C}_R + i\vec{C}_I \\ C &= \sqrt{C_R^2 + C_I^2}\end{aligned}\quad (2.1)$$

Findet man den Bewegungsvektor in der Form

$$\vec{a}_1 = x_{st} \frac{A_1 + iA_2}{A_3 + iA_4} \quad (2.2)$$

vor, lässt sich dessen Betrag folgendermaßen ermitteln

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= x_{st} \frac{(A_1 + iA_2) \cdot (A_3 - iA_4)}{(A_3 + iA_4) \cdot (A_3 - iA_4)} = x_{st} \left(\frac{(A_1A_3 + A_2A_4)}{A_3^2 + A_4^2} + i \frac{(A_2A_3 - A_1A_4)}{A_3^2 + A_4^2} \right) \\ \frac{a_1}{x_{st}} &= \sqrt{\left(\frac{(A_1A_3 + A_2A_4)}{A_3^2 + A_4^2} \right)^2 + \left(\frac{(A_2A_3 - A_1A_4)}{A_3^2 + A_4^2} \right)^2} = \sqrt{\frac{A_1^2 + A_2^2}{A_3^2 + A_4^2}}\end{aligned}\quad (2.3)$$

2.1.2. Eulersche Differenziationsregel

Hat man eine Funktion des Ortes x , y und z sowie der Zeit t , wie z. B. die Geschwindigkeit eines Teilchens in x -Richtung (Szabo, Einführung in die Technische Mechanik, 2003)

$$v_x = v_x(x, y, z, t) \quad (2.4)$$

so lautet unter Anwendung der Taylor Reihe der infinitesimal benachbarte Zustand des Teilchens

$$v_x(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) = v_x(x, y, z, t) + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz + \frac{\partial v_x}{\partial t} dt \quad (2.5)$$

und damit die Änderung

$$\begin{aligned} dv_x &= v_x(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - v_x(x, y, z, t) = \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz + \frac{\partial v_x}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nach Division durch dt folgt für die *materielle Änderung* des Teilchens

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad (2.7)$$

Dabei beschreiben die ersten drei Terme die *konvektive Änderung*, also jene Änderung, die man bei einer Verschiebung des Teilchens wahrnimmt. Der letzte Term beschreibt die *lokale Änderung*, also jene Änderung, die die Geschwindigkeit in einem festen Punkt mit fortschreitender Zeit erfährt.

2.1.3. Partielle Ableitung eines Vektorproduktes

Für die partielle Ableitung eines beliebigen Vektorproduktes folgt (Meyberg, Höhere Mathematik 2, 1999)

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{r} \times \vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x} \vec{r} \times \vec{a} + \vec{r} \times \frac{\partial}{\partial x} \vec{a} \quad (2.8)$$

2.1.4. Winkelidentitäten

Siehe z. B. (Meyberg, Höhere Mathematik 1, 1999)

$$\cos(2t) = 2 \cos^2(t) - 1 \quad (2.9)$$

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2} (\cos(2t) + 1)$$

$$\cos(3t) = 4 \cos^3(t) - 3 \cos(t) \quad (2.10)$$

$$\cos^3(t) = \frac{1}{4} (\cos(3t) + 3 \cos(t))$$

$$\sin(s) \cos(t) = \frac{1}{2} (\sin(s+t) + \sin(s-t))$$

$$\cos(s) \cos(t) = \frac{1}{2} (\cos(s+t) + \cos(s-t)) \quad (2.11)$$

$$\sin(s) \sin(t) = \frac{1}{2} (\cos(s-t) - \cos(s+t))$$

2.2. Mechanische Grundlagen

2.2.1. Rotation eines Massenpunktes

Nachfolgend wird die Rotation um eine veränderliche Achse mit raumfestem Punkt 0 untersucht (Hauger, 1999). Die momentane Lage der Drehachse ist durch den Einheitsvektor \vec{e}_ω gekennzeichnet. Führt der Massenpunkt in der Zeit dt eine Drehung mit dem Drehwinkel $d\varphi$ um die augenblickliche Drehachse aus, so bewegt er sich momentan auf einer Kreisbahn (Abbildung 2.2). Für die Verschiebung $d\vec{r}_P$ ergibt sich dann

$$d\vec{r}_P = (\vec{e}_\omega \times \vec{r}_{0P}) \cdot d\varphi \quad (2.12)$$

Darin ergibt das Vektorprodukt in (2.12) einen Vektor, der senkrecht auf \vec{e}_ω und \vec{r}_{0P} steht und dessen Betrag gleich dem senkrechten Abstand r des Punktes von der augenblicklichen Drehachse ist. Führt man den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ mit

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\omega = \dot{\varphi} \vec{e}_\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.13)$$

ein, resultiert für die Geschwindigkeit von P

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{(\vec{e}_\omega \times \vec{r}_{0P}) \cdot d\varphi}{dt} = (\vec{e}_\omega \times \vec{r}_{0P}) \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{0P} \quad (2.14)$$

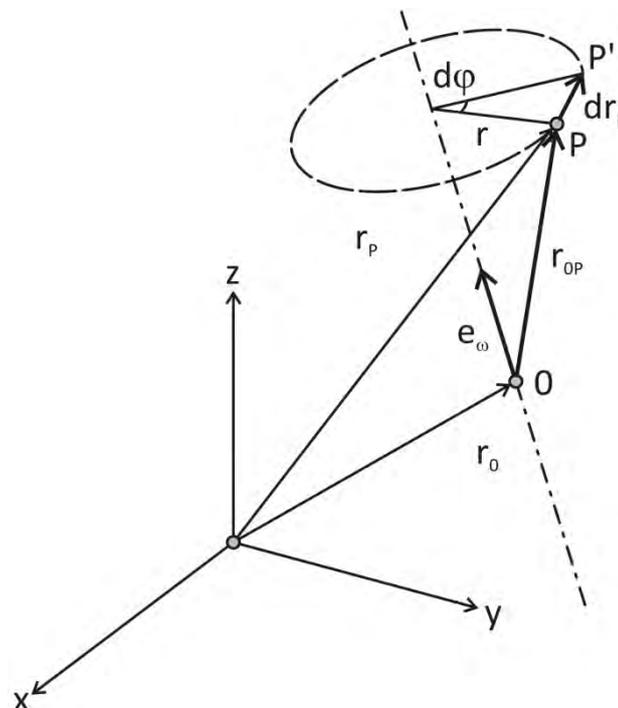


Abbildung 2.2: Rotation eines Massenpunktes um eine Drehachse mit raumfestem Bezugspunkt

2.2.2. Relativbewegung eines Massenpunktes

Zur Beschreibung von Flüssigkeitsbewegungen im bewegten Koordinatensystem des Brückentragwerks ist die Bernoulligleichung für allgemein bewegte Bezugssysteme anzuwenden (Hauger, 1999). Für diese werden die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bezogen auf einen raumfesten Punkt benötigt. Diese lassen sich mithilfe der Ableitungen der Relativbewegung herleiten, wie nachfolgend gezeigt werden soll.

Untersucht werden soll die Bewegung eines Punktes P (Abbildung 2.3) im Raum in Bezug auf zwei Koordinatensysteme. Das x, y, z -System ist ruhend, das ξ, η, ζ -System mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$ und \vec{e}_ζ bewegt sich in Bezug auf das ruhende System translatorisch und rotatorisch.

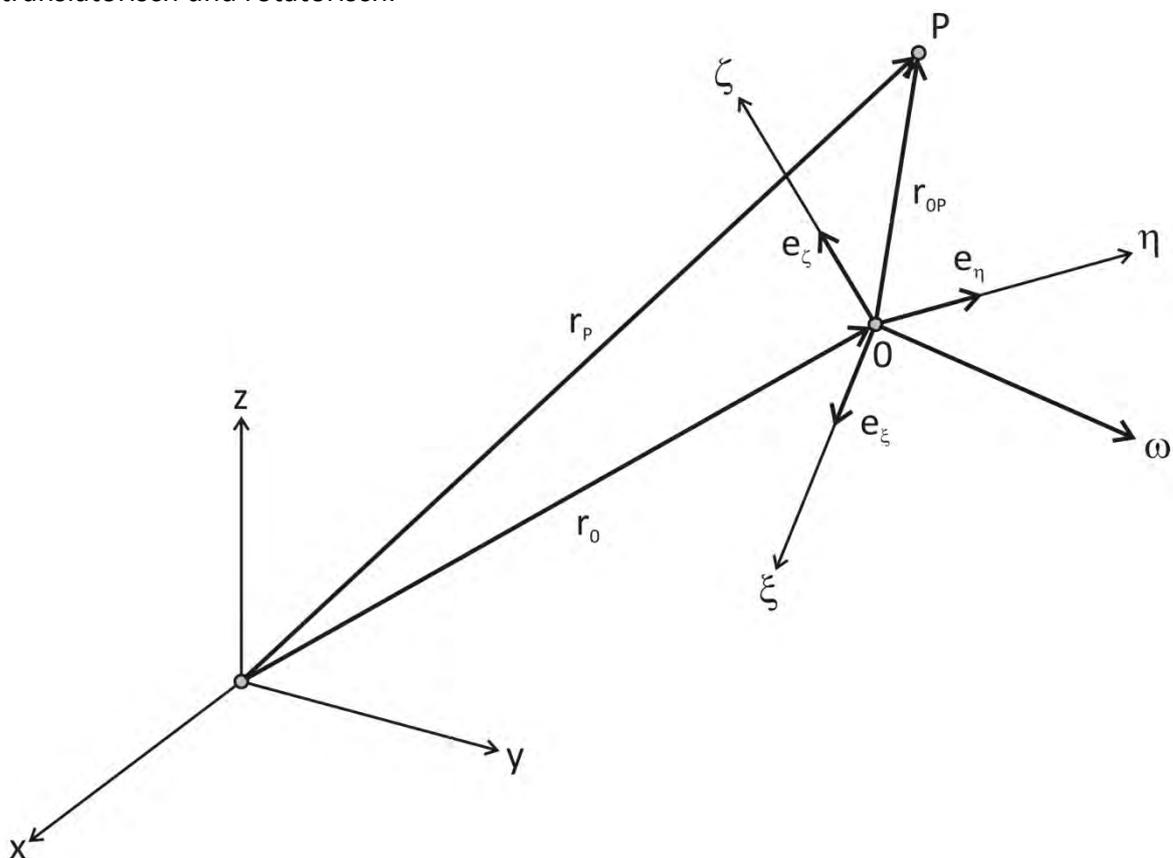


Abbildung 2.3: Darstellung der Relativbewegung eines Punkte P

Für den Ortsvektor \vec{r}_P zum Punkt P folgt

$$\vec{r}_P = \vec{r}_0 + \vec{r}_{0P} \quad (2.15)$$

mit $\vec{r}_{0P} = \xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta + \zeta \vec{e}_\zeta$. Die *Absolutgeschwindigkeit* des Punktes P erhält man durch die zeitliche Ableitung

$$\vec{v}_a = \frac{d(\vec{r}_P)}{dt} = \frac{d(\vec{r}_0)}{dt} + \frac{d(\vec{r}_{0P})}{dt} \quad (2.16)$$

Für die Ableitung des lokalen Ortsvektors \vec{r}_{0P} folgt aufgrund der Rotation des bewegten Koordinatensystems

$$\frac{d(\vec{r}_{0P})}{dt} = \left(\frac{d(\xi)}{dt} \vec{e}_\xi + \frac{d(\eta)}{dt} \vec{e}_\eta + \frac{d(\zeta)}{dt} \vec{e}_\zeta \right) + \left(\xi \frac{d(\vec{e}_\xi)}{dt} + \eta \frac{d(\vec{e}_\eta)}{dt} + \zeta \frac{d(\vec{e}_\zeta)}{dt} \right) \quad (2.17)$$

Das bewegte System dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Somit ergibt sich für die zeitliche Änderung der Einheitsvektoren (siehe Kapitel 2.2.1)

$$\frac{d(\vec{e}_\xi)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_\xi, \quad \frac{d(\vec{e}_\eta)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_\eta, \quad \frac{d(\vec{e}_\zeta)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_\zeta \quad (2.18)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \xi \frac{d(\vec{e}_\xi)}{dt} + \eta \frac{d(\vec{e}_\eta)}{dt} + \zeta \frac{d(\vec{e}_\zeta)}{dt} &= \xi \vec{\omega} \times \vec{e}_\xi + \eta \vec{\omega} \times \vec{e}_\eta + \zeta \vec{\omega} \times \vec{e}_\zeta = \\ &= \vec{\omega} \times (\xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta + \zeta \vec{e}_\zeta) = \vec{\omega} \times \vec{r}_{0P} \end{aligned}$$

Der erste Summand in (2.17) stellt die zeitliche Änderung des Vektors \vec{r}_{0P} in Bezug auf das bewegte System dar. Zeitableitungen im bewegten System werden ab sofort mit einem Apostroph ' gekennzeichnet.

$$\frac{d\vec{r}_{0P}}{dt} = \frac{d(\xi)}{dt} \vec{e}_\xi + \frac{d(\eta)}{dt} \vec{e}_\eta + \frac{d(\zeta)}{dt} \vec{e}_\zeta \quad (2.19)$$

Somit lautet die zeitliche Änderung des Vektors \vec{r}_{0P} bezogen auf das ruhende System

$$\frac{d\vec{r}_{0P}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{0P}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{0P} \quad (2.20)$$

Dieser Zusammenhang gilt überdies sinngemäß für beliebige Vektoren. Im Speziellen folgt für den Winkelgeschwindigkeitsvektor

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{d\vec{\omega}'}{dt} \quad (2.21)$$

Daraus folgt, dass der Winkelgeschwindigkeitsvektor ein freier, vom Bezugssystem unabhängiger Vektor ist. Einsetzen von (2.20) in (2.16) liefert mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = d\vec{r}_0 / dt$ des Koordinatenursprungs des bewegten Systems

$$\vec{v}_a = \vec{v}_f + \vec{v}_r = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{0P} + \frac{d\vec{r}_{0P}'}{dt} \quad (2.22)$$

mit

$$\vec{v}_f = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{0P}, \quad \vec{v}_r = \frac{d\vec{r}_{0P}'}{dt} \quad (2.23)$$

2. Mathematische und mechanische Grundlagen

Dabei beschreibt \vec{v}_f die *Führungsgeschwindigkeit*, jene Geschwindigkeit, die der Punkt P hätte, wenn er mit dem bewegten System fest verbunden wäre und \vec{v}_r die Relativgeschwindigkeit, die die Bewegung des Punktes P relativ zum bewegten System beschreibt. Diese Geschwindigkeit misst ein mit dem bewegten System mitbewegter Beobachter.

Die *Absolutbeschleunigung* von P erhält man durch die zeitliche Ableitung der Absolutgeschwindigkeit

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_f}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}_{0P})}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt} \quad (2.24)$$

Für den zweiten Summanden folgt

$$\begin{aligned} \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}_{0P})}{dt} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{0P} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{0P}}{dt} = \\ &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{0P} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}_{0P}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{0P} \right) = \\ &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{0P} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{0P}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

sowie für den dritten

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d\vec{v}_r'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r \quad (2.26)$$

Damit folgt für die absolute Beschleunigung des Massenpunktes

$$\vec{a}_a = \vec{a}_f + \vec{a}_r + \vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{0P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{0P}) + \frac{d\vec{v}_r'}{dt} + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_r \quad (2.27)$$

bzw. mit alleinigem Bezug auf die Ortsvektoren

$$\vec{a}_a = \vec{a}_f + \vec{a}_r + \vec{a}_c = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{0P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{0P}) + \frac{d^2\vec{r}_{0P}'}{dt^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{0P}}{dt} \quad (2.28)$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{a}_f &= \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{0P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{0P}) \\ \vec{a}_r &= \frac{d^2\vec{r}_{0P}'}{dt^2} \\ \vec{a}_c &= 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{0P}}{dt} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die *Führungsbeschleunigung* \vec{a}_f ist die Beschleunigung, die der Massenpunkt P hätte, wenn er mit dem bewegten System fest verbunden wäre. Die *Relativbeschleunigung* \vec{a}_r ist die Beschleunigung des Punkte P relativ zum bewegten System, sie wird von einem mitbewegten Beobachter gemessen. Der Wert \vec{a}_c ist die *Coriolisbeschleunigung* und steht senkrecht auf $\vec{\omega}$ und \vec{v}_r .

2.2.3. Bernoulli Gleichung

2.2.3.1. Cauchysche Bewegungsgleichungen

Zur Herleitung der Cauchyschen Bewegungsgleichungen wird das Grundgesetz der Dynamik auf ein infinitesimales Volumenelement angewendet (Mang, 2004).

$$d\vec{R} = dm \cdot \vec{a} \quad (2.30)$$

Die Resultierende $d\vec{R}$ ist aus den Volumen- und Oberflächenkräften, durch die das Volumenelement beansprucht wird, zu bilden (Abbildung 2.4).

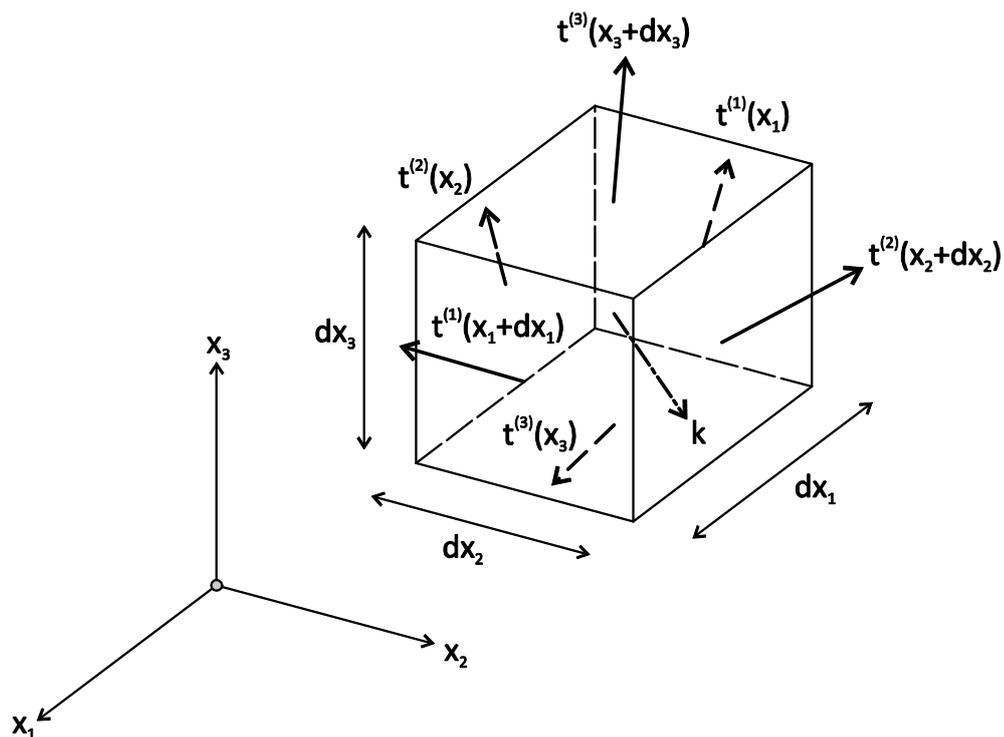


Abbildung 2.4: Spannungsvektoren auf den Seitenflächen eines infinitesimalen quaderförmigen Volumenelementes

Unter Anwendung der Taylorreihe für die Spannungen an der Stelle $x_i + dx_i$

$$\vec{t}^{(i)}(x_i + dx_i) = \vec{t}^{(i)}(x_i) + \frac{\partial \vec{t}^{(i)}(x_i)}{\partial x_i} dx_i + \dots \quad (2.31)$$

folgt, mit dem Volumenkraftvektor \vec{k} , für die Resultierende mit $dm = \rho \cdot dV$

$$d\vec{R} = (\vec{k} + \frac{\partial \vec{t}^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{t}^{(2)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{t}^{(3)}}{\partial x_3})dV \quad (2.32)$$

und für die Cauchyschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial \vec{t}^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{t}^{(2)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{t}^{(3)}}{\partial x_3} + \vec{k} = \rho \cdot \vec{a} \quad (2.33)$$

In Indexschreibweise folgen diese zu

$$\sigma_{ji,j} + k_i = \rho \cdot a_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.34)$$

mit dem symmetrischen Spannungstensor

$$\sigma_{ji} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

2.2.3.2. Eulersche Bewegungsgleichungen

Setzt man reibungsfreie Flüssigkeiten voraus, verschwinden alle Schubspannungen im Spannungstensor (Ziegler, 1998). Es bleiben lediglich die drei Normalspannungen übrig, die aufgrund der fehlenden Schubspannungen denselben Wert, den Druck p , annehmen müssen.

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p \quad (2.36)$$

Damit folgen die Eulerschen Bewegungsgleichungen zu

$$\underline{-\left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \vec{e}_{x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_2} \vec{e}_{x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_3} \vec{e}_{x_3}\right) + \vec{k} = -grad(p) + \vec{k} = \rho \cdot \vec{a}} \quad (2.37)$$

2.2.3.3. Instationäre Bernoulli Gleichung für ein allgemein in der Ebene bewegtes Bezugssystem

Die Bewegungsgleichungen des Flüssigkeitsschwingungstilgers werden durch die Formulierung einer verallgemeinerten Bernoulli Gleichung entlang einer momentanen, relativen und instationären Stromlinie in einem allgemein in der Ebene bewegten Bezugssystem ermittelt (Ziegler, 1998). Eine Stromlinie ist dadurch definiert, dass sie in jedem Punkt mit ihrer Tangente die Richtung der dortigen Geschwindigkeit angibt. Für die Flüssigkeit werden Inkompressibilität und Reibungsfreiheit vorausgesetzt. Für die nachfolgenden Herleitungen werden relative Größen, also Größen die sich auf das bewegte Bezugssystem beziehen, mit einem Apostroph gekennzeichnet.

Ausgangspunkt für die Herleitung der instationären Bernoulli Gleichung in einem allgemein bewegten Bezugssystem sind die Eulerschen Bewegungsgleichungen.

$$-grad(p) + \vec{k} = \rho \cdot \vec{a} \quad (2.38)$$

Gleichung (2.38) wird in die Relativgeschwindigkeitsrichtung mit dem Tangentenvektor \vec{e}_t' projiziert und anschließend bei fester Zeit t entlang der Relativstromlinie von 1' nach 2' integriert (Abbildung 2.5).

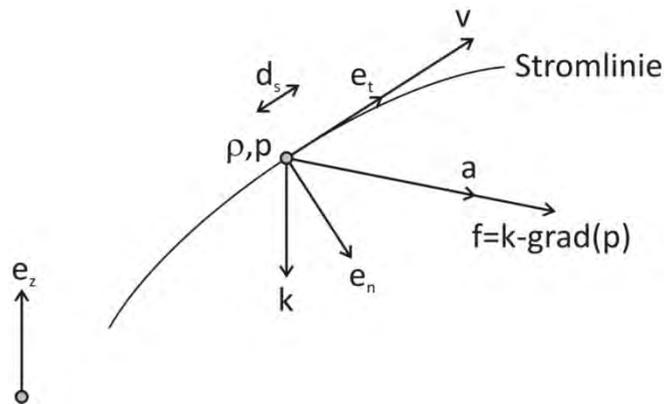


Abbildung 2.5: Stromlinie ($t = \text{konst.}$)

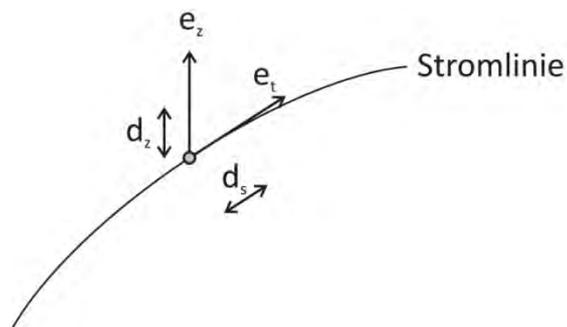


Abbildung 2.6: Projektion von dz in Richtung der Relativstromlinie

Für \vec{k} folgt im homogenen Schwerfeld

$$\vec{k} = -\rho g \vec{e}_z \quad (2.39)$$

Aus Abbildung 2.5 und Abbildung 2.6 können folgende Zusammenhänge abgelesen werden

$$\begin{aligned} \vec{k}_t &= \vec{k} \cdot \vec{e}_t = -\rho g \vec{e}_z \cdot \vec{e}_t \\ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_t ds &= dz \\ \text{grad}(p) \cdot \vec{e}_t &= \frac{\partial p}{\partial s} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Für die Absolutbeschleunigung folgt, wie in Kapitel 2.2.2 hergeleitet wurde,

$$\vec{a}_a = \vec{a}_f + \vec{a}' + \vec{a}_c \quad (2.41)$$

mit

$$\begin{aligned}\vec{a}_f &= \frac{d^2 \vec{r}_0}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{0P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{0P}) \\ \vec{a}' &= \frac{d^2 \vec{r}_{0P}'}{dt^2} \\ \vec{a}_c &= 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{0P}}{dt}\end{aligned}\tag{2.42}$$

Wie bereits erläutert, steht \vec{a}_c senkrecht auf \vec{v}' und liefert somit keinen Beitrag in Richtung der Relativstromlinie, also

$$\rho \vec{a}_a = \rho (\vec{a}_f + \vec{a}')\tag{2.43}$$

Die Relativbeschleunigung lautet unter Berücksichtigung der Eulerschen Differenzierungsregeln (Kapitel 2.1.2)

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}'}{\partial s} \cdot \vec{v}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v'^2}{2} \right)\tag{2.44}$$

Somit lauten die Eulerschen Bewegungsgleichungen nach Projektion in Tangentenrichtung der Relativstromlinie

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v'^2}{2} \right) \right) &= -\rho g \vec{e}_z \cdot \vec{e}_t - \frac{\partial p}{\partial s} - \rho \vec{a}_f \cdot \vec{e}_t \quad \Big| \int_1^{2'} ds \\ \int_1^{2'} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} ds + \int_1^{2'} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v'^2}{2} \right) ds &= -\int_1^{2'} (g \vec{e}_z \cdot \vec{e}_t) ds - \frac{1}{\rho} \int_1^{2'} \frac{\partial p}{\partial s} ds - \int_1^{2'} (\vec{a}_f \cdot \vec{e}_t) ds\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^{2'} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} ds + \frac{1}{2} (v_2'^2 - v_1'^2) = -g (z_2 - z_1) - \frac{1}{\rho} (p_2 - p_1) - \int_1^{2'} (\vec{a}_f \cdot \vec{e}_t) ds}\tag{2.45}$$

mit

$$\vec{a}_f = \frac{d^2 \vec{r}_0}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{0P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{0P})\tag{2.46}$$

Gl. (2.45) stellt die gesuchte Bernoulli Gleichung für einen Stromfaden im allgemein bewegten Bezugssystem dar.

2.2.4. Kontinuitätsgleichung

Für die Herleitung der Kontinuitätsgleichung müssen vorher die Begriffe Stromlinie und Stromfaden sowie Kontrollfläche definiert werden, siehe (Bollrich, 2000) und (Ziegler, 1998). Eine Stromlinie ist dadurch definiert, dass sie in jedem Punkt mit ihrer Tangente die Richtung der dortigen momentanen Geschwindigkeit angibt. Für die Definition des Stromfadens denke man sich durch alle Punkte eines zu den Stromlinien, also zur momentanen Geschwindigkeit, senkrecht stehenden Flächenelementes Stromlinien

gezogen. Damit erhält man ein röhrenförmiges Gebilde, den sogenannten Stromfaden (siehe Abbildung 2.7). Zur Beschreibung hydrodynamischer Probleme ist es meist von Vorteil, nicht ein zeitlich und/oder örtlich veränderliches Volumen $V(t)$ zu betrachten, sondern den interessierenden Bereich, das sogenannte Kontrollvolumen V mit der zugehörigen durchlässigen Hülle ∂V , einfach vorzugeben. Zu einem bestimmten Zeitpunkt befindet sich in diesem Kontrollvolumen die Masse $m(t)$

$$m(t) = \int_V \rho(x, y, z, t) dV \quad (2.47)$$

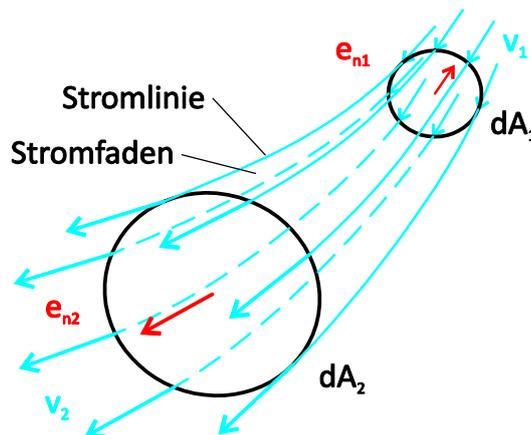


Abbildung 2.7: Darstellung von Stromlinien und Stromfaden

Eine Änderung dieser Masse kann einerseits durch eine instationäre Dichteänderung

$$\frac{dm(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t} dV \quad (2.48)$$

andererseits durch einen Zufluss von Masse durch die Oberfläche (Quellen im Kontrollvolumen werden ausgeschlossen) erfolgen. Mit \vec{e}_n als Normalenvektor der Oberfläche des Kontrollvolumens und \vec{v} als beliebig zu dieser gerichteten Geschwindigkeitskomponente folgt für die durch das Oberflächenelement dS pro Zeiteinheit abfließende Masse

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{e}_n dS \quad (2.49)$$

sowie für den gesamten pro Zeiteinheit zufließenden Massenstrom

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\oint_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot \vec{e}_n dS \quad (2.50)$$

Da diese beiden Terme gleich groß sein müssen, folgt

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot \vec{e}_n dS = 0 \quad (2.51)$$

Betrachtet man die Strömung durch einen Stromfaden, folgt für inkompressible Flüssigkeiten, die in vorliegender Arbeit immer vorausgesetzt werden,

$$\oint_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot \vec{e}_n dS = 0 \quad (2.52)$$

Weiters ist der Massefluss durch den Mantel des Stromfadens, der durch Stromlinien gebildet wird, definitionsgemäß Null. Es kann also nur ein Massefluss durch die Endkappen des Stromfadens stattfinden. Ebenso vorausgesetzt wurde, dass die Endkappen des Stromfadens normal auf die Stromlinien stehen, also

$$\vec{v} \parallel \vec{e}_n \quad (2.53)$$

gilt. Damit folgt für die Kontinuitätsgleichung des Stromfadens

$$\oint_{\delta v} \rho \vec{v} \cdot \vec{e}_n dS = -\rho v_1 dA_1 + \rho v_2 dA_2 = 0 \quad (2.54)$$

sowie für eine Stromröhre (mehrere Stromfäden)

$$\begin{aligned} -\rho v_1 A_1 + \rho v_2 A_2 &= 0 \\ \underline{v_1 A_1 = v_2 A_2} \end{aligned} \quad (2.55)$$

2.2.5. Lagrangesche Bewegungsgleichungen

Zur Herleitung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen geht man vom Hamiltonschen Prinzip (Szabo, Höhere Technische Mechanik, 2001)

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} L dt = \int_{t_a}^{t_b} \delta L dt = 0 \quad (2.56)$$

aus. Vorausgesetzt dabei werden holonome Systeme, also jene, bei denen eine mögliche Lage des Systems durch die Angabe von n sogenannten verallgemeinerten und voneinander unabhängigen Koordinaten q_1, \dots, q_n festgelegt ist. Eine Bewegung des Systems wird damit durch n Funktionen $q_k = q_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) beschrieben. Die potenzielle bzw. kinetische Energie lässt sich wie folgt ausdrücken

$$\begin{aligned} U &= U(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ E &= E(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Die Lagrangesche Funktion erscheint damit in der Form

$$L = E - U = L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \quad (2.58)$$

sodass

$$\delta L = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) \quad (2.59)$$

ist. Wegen

$$\delta \dot{q}_k = \delta \left(\frac{dq_k}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\delta q_k) \quad (2.60)$$

wird

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \quad (2.61)$$

und damit folgt aus Gl. (2.59)

$$\delta L = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \right) \quad (2.62)$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gl. (2.56) ein und integriert das zweite Glied erhält man

$$\int_{t_a}^{t_e} \delta L dt = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_a}^{t_e} + \int_{t_a}^{t_e} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k dt = 0 \quad (2.63)$$

Darin verschwindet der erste Term, da die Anfangs- und Endlage voraussetzungsgemäß nicht variiert werden, sodass

$$\delta q_k(t_a) = \delta q_k(t_e) = 0 \quad (2.64)$$

gilt. Wegen der Willkürlichkeit der Variationen $\delta q_k(t)$ folgt weiters, dass die einzelnen Summanden im übrigbleibenden Integral rechts verschwinden müssen, also

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.65)$$

Mit Gl. (2.58) folgt damit für die *Lagrangeschen Bewegungsgleichungen*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.66)$$

2.2.6. Impulssatz

Integration des dynamischen Grundgesetzes (siehe (2.33)) über das materielle Volumen $V(t)$ liefert wegen der im Volumen konstanten Masse m mit

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (2.67)$$

$$\int_{V(t)} \sum_i \frac{\partial \vec{\sigma}_i}{\partial x_i} dV + \int_{V(t)} \vec{k} dV = \int_{V(t)} \rho \vec{a} dV \quad (2.68)$$

$$\int_{V(t)} \sum_i \frac{\partial \vec{\sigma}_i}{\partial x_i} dV + \int_{V(t)} \vec{k} dV = \frac{d^2}{dt^2} \int_m \vec{r} dm$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung des statischen Momentes der Massenverteilung (Massenmittelpunkt, (Ziegler, 1998))

$$\vec{r}_M = \frac{1}{m} \int_m \vec{r} dm \quad (2.69)$$

sowie unter Berücksichtigung des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \vec{\sigma}_i}{\partial x_i} dV = \oint_{\partial V(t)} \vec{\sigma}_i \vec{n}_i dS \quad (2.70)$$

$$\int_{\partial V(t)} \sum_i \vec{\sigma}_i \vec{n}_i dS + \int_{V(t)} \vec{k} dV = m \frac{d^2 \vec{r}_M}{dt^2} \quad (2.71)$$

$$\int_{\partial V(t)} \sum_i \vec{\sigma}_i \vec{n}_i dS + \int_{V(t)} \vec{k} dV = m \vec{a}_M$$

Dabei bezeichnet das erste Integral in (2.71) die resultierende äußere Oberflächenkraft, mit $\partial V(t)$ als der zeitlich veränderlichen Oberfläche des Volumens $V(t)$, sowie das zweite Integral die resultierende äußere Volumenkraft. Fasst man diese beiden als Resultierende \vec{R} aller äußeren Kräfte zusammen

$$\int_{\partial V(t)} \sum_i \vec{\sigma}_i \vec{n}_i dS + \int_{V(t)} \vec{k} dV = \vec{R} \quad (2.72)$$

folgt damit der Schwerpunktsatz. Dieser gibt an, dass die Beschleunigungskraft proportional zur Resultierenden \vec{R} der äußeren Kräfte ist.

$$m \vec{a}_M = \vec{R} \quad (2.73)$$

Definiert man nun den Impuls eines Massenelementes dm durch den proportionalen Geschwindigkeitsvektor

$$d\vec{I} = \vec{v} dm \quad (2.74)$$

sowie den resultierenden Impuls der Masse m durch

$$\vec{I} = \int_m \vec{v} dm = m \vec{v}_M \quad (2.75)$$

so folgt aus dem Schwerpunktsatz

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{R} \quad (2.76)$$

Bei der Geschwindigkeit \vec{v} in (2.75) handelt es sich um die absolute Geschwindigkeit des Massenelementes dm .

2.2.7. Drallsatz

Multipliziert man das dynamische Grundgesetz (siehe (2.33)) vektoriell mit dem Ortsvektor \vec{r} , der definiert ist vom beliebig gegen das raumfeste Koordinatensystem bewegten Bezugspunkt A zum materiellen Volumen dV , folgt (Ziegler, 1998)

$$\int_{V(t)} \vec{r} \times \sum_i \frac{\partial \vec{\sigma}_i}{\partial x_i} dV + \int_{V(t)} \vec{r} \times \vec{k} dV = \int_m \vec{r} \times \vec{a} dm \quad (2.77)$$

Der erste Term von (2.77) lässt sich bei Betrachtung der Komponente i umformen zu (siehe (2.8))

$$\int_{V(t)} \vec{r} \times \frac{\partial \vec{\sigma}_i}{\partial x_i} dV = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{r} \times \vec{\sigma}_i) dV - \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} \times \vec{\sigma}_i \right) dV \quad (2.78)$$

$$\int_{V(t)} \vec{r} \times \frac{\partial \vec{\sigma}_i}{\partial x_i} dV = \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{r} \times \vec{\sigma}_i) dV - \int_{V(t)} (\vec{e}_i \times \vec{\sigma}_i) dV$$

Unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes folgt für den ersten Term der rechten Seite aus (2.78)

$$\int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{r} \times \vec{\sigma}_i) dV = \oint_{\partial V(t)} (\vec{r} \times \vec{\sigma}_i) \vec{n}_i dV = \oint_{\partial V(t)} \vec{r} \times \vec{\sigma}_n dV \quad (2.79)$$

mit

$$\vec{\sigma}_n = \sum_i \vec{\sigma}_i \vec{n}_i \quad (2.80)$$

dem Spannungsvektor an der Oberfläche des betrachteten Volumens $V(t)$. Der zweite Term der rechten Seite aus (2.78) folgt beispielsweise für die x-Richtung mit

$$\vec{e}_x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \vec{\sigma}_x = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.81)$$

$$\vec{e}_x \times \vec{\sigma}_x = -\sigma_{xz} \vec{e}_y + \sigma_{xy} \vec{e}_z$$

Somit folgt für alle Koordinatenrichtungen

$$\int_{V(t)} (\vec{e}_i \times \vec{\sigma}_i) dV = \int_{V(t)} \left[(\sigma_{yz} - \sigma_{zy}) \vec{e}_x + (\sigma_{zx} - \sigma_{xz}) \vec{e}_y + (\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) \vec{e}_z \right] dV \quad (2.82)$$

Unter Annahme der Gültigkeit des *Boltzmannschen Axiomes* (Szabo, Einführung in die Technische Mechanik, 2003) über die Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen verschwindet (2.82) und (2.78) lautet

$$\int_{V(t)} \vec{r} \times \frac{\partial \vec{\sigma}_i}{\partial x_i} dV = \oint_{\partial V(t)} \vec{r} \times \vec{\sigma}_n dV \quad (2.83)$$

Damit folgt für (2.77)

$$\oint_{\partial V(t)} \vec{r} \times \vec{\sigma}_n dV + \int_{V(t)} \vec{r} \times \vec{k} dV = \int_m \vec{r} \times \vec{a} dm \quad (2.84)$$

Führt man für den resultierenden Momentenvektor \vec{M}_A der äußeren Volumen- und Oberflächenkräfte um den Bezugspunkt A

$$\vec{M}_A = \oint_{\partial V(t)} \vec{r} \times \vec{\sigma}_n dV + \int_{V(t)} \vec{r} \times \vec{k} dV \quad (2.85)$$

ein, folgt für den Momentensatz

$$\vec{M}_A = \int_m \vec{r} \times \vec{a} dm \quad (2.86)$$

Spaltet man die absolute Beschleunigung \vec{a} in die Beschleunigung des Bezugspunktes \vec{a}_A und die Relativbeschleunigung \vec{a}' des Massenelementes dm auf, folgt mit

$$\vec{a} = \vec{a}_A + \vec{a}' \quad (2.87)$$

und der Definition des relativen Drehimpulses des Massenelementes gegen A

$$d\vec{D}_A = \vec{r} \times \vec{v}' dm \quad (2.88)$$

der Drallsatz zu

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= \int_m \vec{r} \times \vec{a} dm = \int_m \vec{r} \times (\vec{a}_A + \vec{a}') dm = \int_m \vec{r} dm \times \vec{a}_A + \int_m \vec{r} \times \vec{a}' dm = \\ &= m\vec{r}_M \times \vec{a}_A + \int_m \vec{r} \times \frac{d\vec{v}'}{dt} dm \end{aligned} \quad (2.89)$$

Unter Berücksichtigung von (2.8) und

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} \times \vec{v}' = 0 \quad (2.90)$$

folgt weiters

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= m\vec{r}_M \times \vec{a}_A + \int_m \vec{r} \times \frac{d\vec{v}'}{dt} dm = m\vec{r}_M \times \vec{a}_A + \frac{d}{dt} \int_m \vec{r} \times \vec{v}' dm - \int_m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}' dm = \\ &= m\vec{r}_M \times \vec{a}_A + \frac{d}{dt} \int_m \vec{r} \times \vec{v}' dm \end{aligned} \quad (2.91)$$

Der resultierende Drallsatz lautet damit

$$\frac{d\vec{D}_A}{dt} + m\vec{r}_M \times \vec{a}_A = \vec{M}_A \quad (2.92)$$

mit dem resultierenden Drall der Massenverteilung um den Punkt A

$$\vec{D}_A = \int_m \vec{r} \times \vec{v}' dm \quad (2.93)$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass bei der Herleitung von (2.93) die Geschwindigkeit des Bezugspunktes A bereits berücksichtigt wurde, eine Rotation des bewegten Koordinatensystems jedoch noch unberücksichtigt blieb. Diese ist gegebenenfalls bei der Relativgeschwindigkeit in (2.93) zusätzlich zu berücksichtigen (siehe (2.23) und (5.175)).

2.2.8. Zweimassenschwinger

2.2.8.1. Ungedämpfter, harmonisch erregter Zweimassenschwinger

In diesem Kapitel werden die Bewegungsgleichungen des Zweimassenschwingers aufgestellt, sowie deren Lösung angegeben und untersucht. Bereits mit diesem einfachen Modell können grundlegende Eigenschaften und Optimierungsmöglichkeiten von Zweimassenschwingern aufgezeigt werden. Diese Überlegungen werden beim gedämpften

2. Mathematische und mechanische Grundlagen

Zweimassenschwinger aufgegriffen, welche dann zu den Optimierungskriterien nach Den Hartog (Den Hartog, 1985) führen.

In der nachfolgenden Abbildung 2.8 ist ein schwingungsfähiger, ungedämpfter Zweimassenschwinger in seiner Gleichgewichtslage sowie seiner ausgelenkten Lage dargestellt. Darin bezeichnen m die Masse und k die Steifigkeit des Schwingungstilgers, M die Masse und K die Steifigkeit des zu dämpfenden Tragwerks. Die zeitlich veränderlichen Bewegungen der beiden Massen werden durch die beiden Verformungen x_1 , Bewegung der Hauptmasse, sowie x_2 , Bewegung des Tilgers, beschrieben. Bei den nachfolgenden Herleitungen wird nur die stationäre Antwort der beiden Massen berücksichtigt, der transiente Bereich bleibt außer Acht. Da bei den weiterführenden Betrachtungen ausschließlich der Resonanzbereich des Tragwerks von Interesse ist und für den dynamischen Vergrößerungsfaktor harmonischer Schwingungen im Resonanzbereich die transiente Antwort nahezu keinen Einfluss hat, kann diese Annahme getroffen werden.

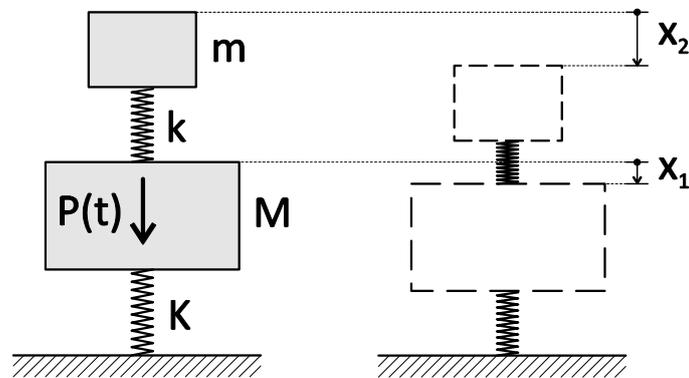


Abbildung 2.8: ungedämpfter Zweimassenschwinger in Ausgangslage und in ausgelenkter Lage

In Abbildung 2.9 sind die freigeschnittenen Tilger- sowie Tragwerksmassen mit den angreifenden Federkräften sowie den D'Alembertschen Scheinkräften dargestellt. Die zweite zeitliche Ableitung der Bewegungsgrößen wird generell mit

$$\ddot{x} = \frac{d^2(x)}{dt^2} \quad (2.94)$$

dargestellt.

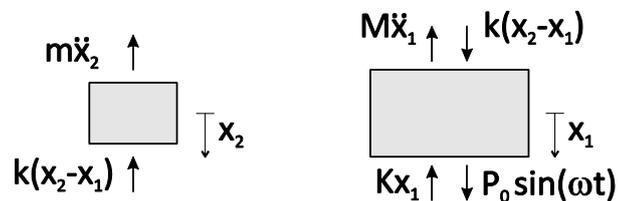


Abbildung 2.9: freigeschnittene Tilger- sowie Tragwerksmasse mit allen Kräften

Anschreiben der Bewegungsgleichungen liefert

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) &= 0 \\ M\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1) + Kx_1 &= P_0 \sin(\omega \cdot t) \end{aligned} \quad (2.95)$$

2. Mathematische und mechanische Grundlagen

Setzt man nun eine harmonische Bewegung der beiden Massen mit unterschiedlichen Amplituden a_1 und a_2 aber derselben Eigenkreisfrequenz ω voraus, folgt

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 \sin(\omega t) \\x_2 &= a_2 \sin(\omega t)\end{aligned}\quad (2.96)$$

Nach Substitution der Massenbewegungen in den Bewegungsgleichungen resultiert folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\left[-m\omega^2 a_2 + ka_2 - ka_1\right] \sin(\omega t) &= 0 \\ \left[-M\omega^2 a_1 + Ka_1 - ka_2 + ka_1\right] \sin(\omega t) &= P_0 \sin(\omega t)\end{aligned}\quad (2.97)$$

Da beide Gleichungen zu jedem Zeitpunkt t erfüllt sein müssen, müssen die Ausdrücke in den Klammern gleich Null bzw. P_0 sein. Somit ergeben sich die Lösungen für die Amplituden aus

$$\begin{aligned}\left[-m\omega^2 a_2 + ka_2 - Ka_1\right] &= 0 \\ \left[-M\omega^2 a_1 + Ka_1 - ka_2 + ka_1\right] &= P_0\end{aligned}\quad (2.98)$$

Um Untersuchungen unabhängig von absoluten Größen der Eigenschaften des schwingungsfähigen Systems durchführen zu können, werden folgende dimensionslose Größen eingeführt

$$\begin{aligned}x_{st} &= \frac{P_0}{K} && \text{statische Verformung der Hauptmasse } M \\ \omega_a^2 &= \frac{k}{m} && \text{Eigenkreisfrequenz des Tilgers} \\ \Omega_n^2 &= \frac{K}{M} && \text{Eigenkreisfrequenz des Tragwerkes} \\ \mu &= \frac{m}{M} && \text{Massenverhältnis Tilgermasse zu Tragwerksmasse}\end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Verhältnisgrößen, Lösen des Gleichungssystems und einigen Umformungen folgt für die bezogenen Bewegungsamplituden der beiden Massen

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{x_{st}} &= \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right) \left(1 + \frac{k}{K} - \frac{\omega^2}{\Omega_n^2}\right) - \frac{k}{K}} \\ \frac{a_2}{x_{st}} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right) \left(1 + \frac{k}{K} - \frac{\omega^2}{\Omega_n^2}\right) - \frac{k}{K}}\end{aligned}\quad (2.99)$$

sowie für die bezogenen Bewegungen der beiden Massen

$$\frac{x_1}{x_{st}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right) \left(1 + \frac{k}{K} - \frac{\omega^2}{\Omega_n^2}\right) - \frac{k}{K}} \sin(\omega t) \quad (2.100)$$

$$\frac{x_2}{x_{st}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right) \left(1 + \frac{k}{K} - \frac{\omega^2}{\Omega_n^2}\right) - \frac{k}{K}} \sin(\omega t)$$

Den Gleichungen (2.100) kann entnommen werden, dass im Resonanzfall $\omega = \omega_a$ unabhängig von der Eigenfrequenz des Tragwerkes, dessen Bewegung verschwindet

$$x_1 = 0$$

und sich die Bewegung des Tilgers zu

$$x_2 = -\frac{K}{k} x_{st} \sin(\omega t) = -\frac{P_0}{k} \sin(\omega t)$$

ergibt. Die daraus resultierende Tilgerfederkraft beläuft sich auf

$$F_a = -\frac{P_0}{k} \sin(\omega t) k = -P_0 \sin(\omega t)$$

Somit ist die Kraft in der Tilgerfeder gleich der einwirkenden harmonischen Kraft, jedoch genau phasenverschoben.

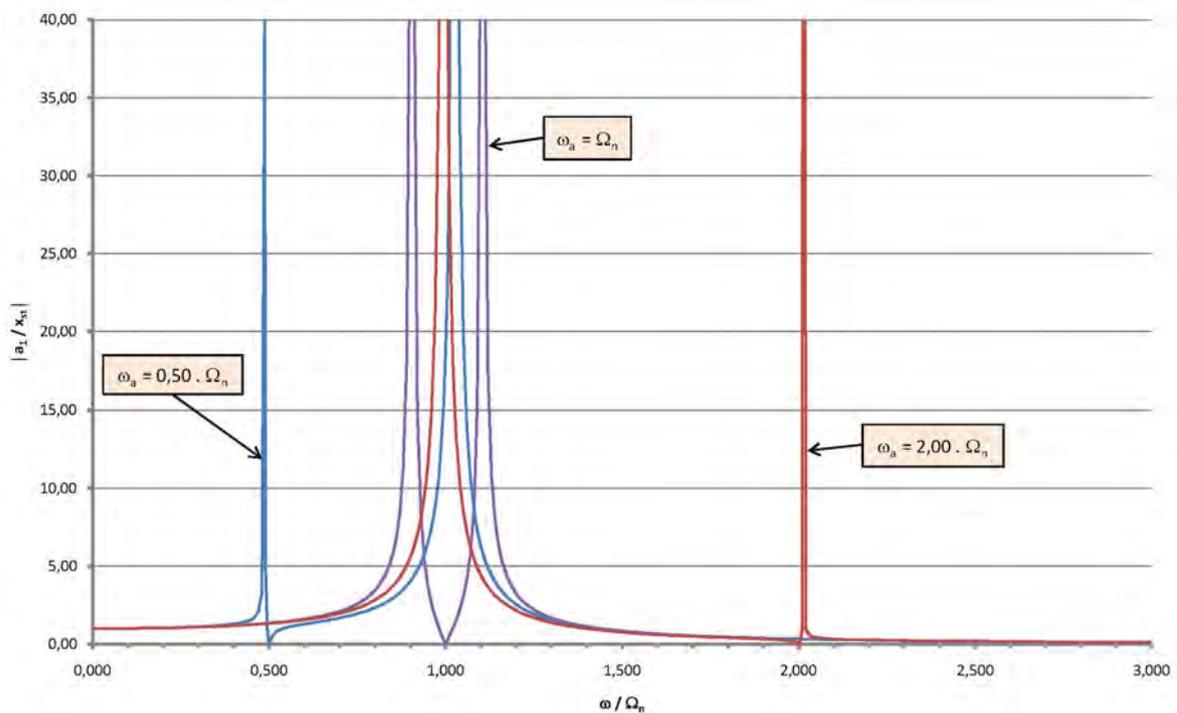


Abbildung 2.10: Vergrößerungsfunktion des Tragwerkes a_1/x_{st} in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses $f(\omega/\Omega_n)$

Die Vergrößerungsfunktion der Bewegung des Tragwerkes ist in Abbildung 2.10 dargestellt. In dieser ist ersichtlich, dass mit einer Abstimmung der Tilgereigenkreisfrequenz mit $\omega_a = \Omega_n$ die beste Reduktion der Amplitude des Tragwerkes in dessen Resonanzbereich erzielt werden kann. Daraus folgt mit

$$\omega_a = \Omega_n \rightarrow \frac{k}{m} = \frac{K}{M} \rightarrow \frac{k}{K} = \frac{m}{M} = \mu$$

$$\frac{a_1}{x_{st}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right) \left(1 + \mu - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right) - \mu} \quad (2.101)$$

$$\frac{a_2}{x_{st}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right) \left(1 + \mu - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right) - \mu}$$

Die beiden Eigenkreisfrequenzen des Systems ergeben sich, wenn die Amplituden unendliche Größen annehmen. Dies ist der Fall, wenn der Nenner in (2.101) zu Null wird. Daraus folgt

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 2\mu - 2\sqrt{4\mu + \mu^2}} \omega_a$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 2\mu + 2\sqrt{4\mu + \mu^2}} \omega_a \quad (2.102)$$

Die Abhängigkeit der Tragwerksbewegung von der Tilgereigenkreisfrequenz wurde zuvor untersucht, nachfolgend soll der Einfluss des Massenverhältnisses μ untersucht werden. Zu diesem Zweck wurden in Abbildung 2.11 Vergrößerungsfunktionen des Tragwerkes in Abhängigkeit des Massenverhältnisses μ dargestellt. Daraus kann entnommen werden, dass durch eine Vergrößerung von μ , das bedeutet eine Vergrößerung der Tilgermasse, einerseits die beiden Eigenfrequenzen weiter auseinandergerückt werden sowie andererseits der „Plateaubereich“ um die Eigenfrequenz des Tragwerkes vergrößert wird.

2. Mathematische und mechanische Grundlagen

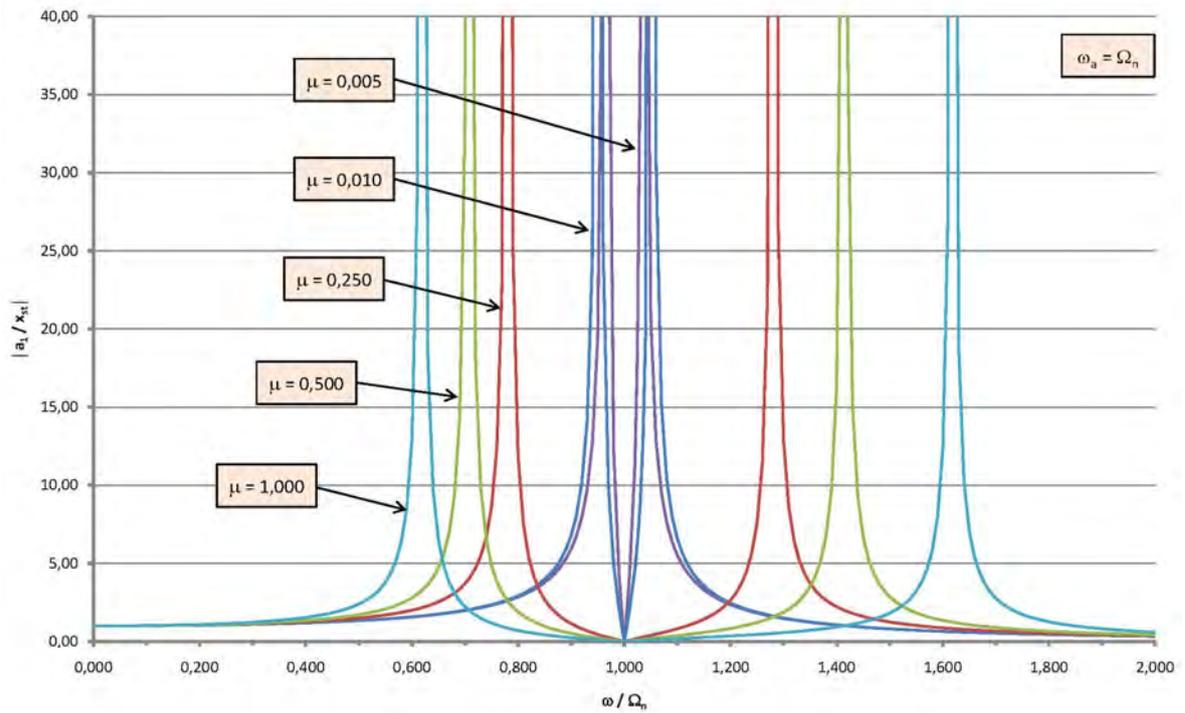


Abbildung 2.11: Vergrößerungsfunktion des Tragwerkes a_1/x_{st} in Abhängigkeit des Massenverhältnisses μ

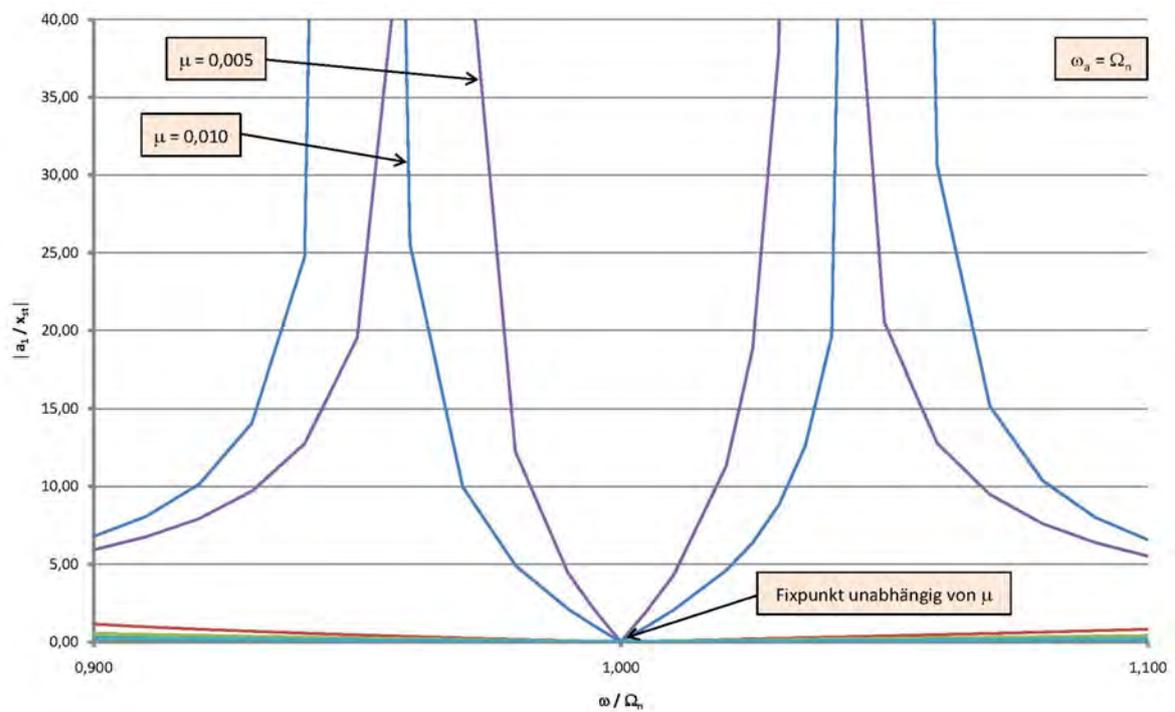


Abbildung 2.12: Vergrößerungsfunktion des Tragwerkes a_1/x_{st} in Abhängigkeit des Massenverhältnisses μ (Ausschnitt)

2. Mathematische und mechanische Grundlagen

In Abbildung 2.13 soll noch die Abhängigkeit der Eigenkreisfrequenzen vom Masseverhältnis μ dargestellt werden.

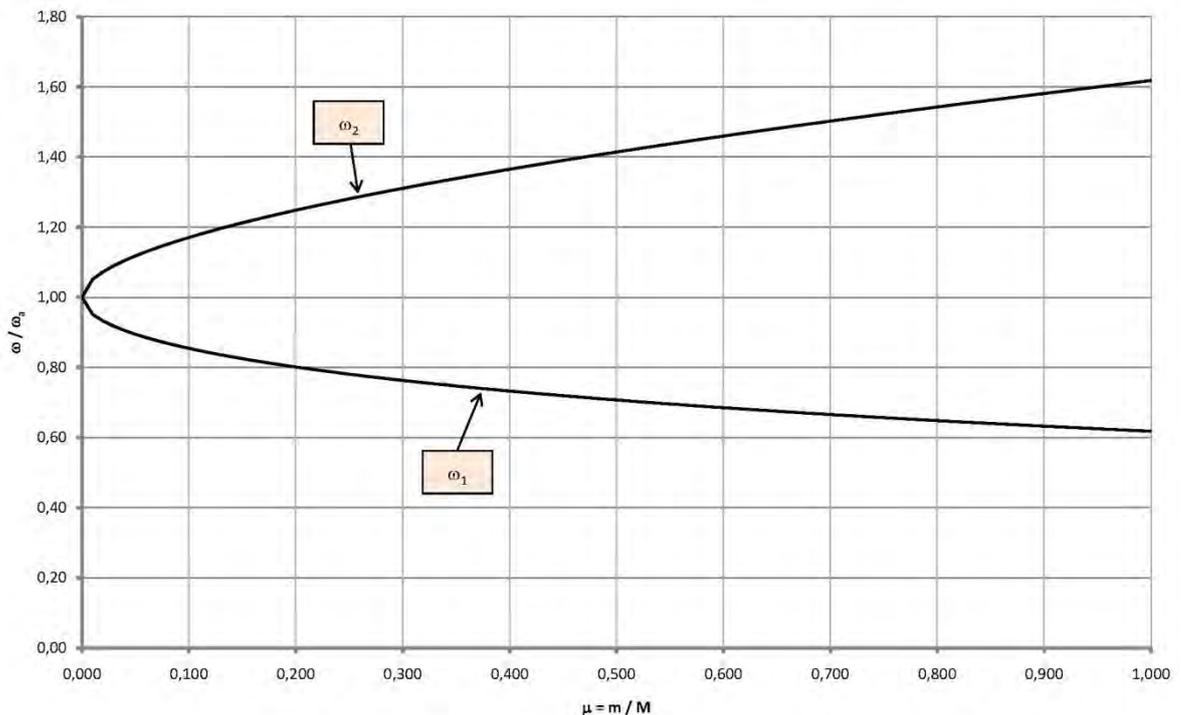


Abbildung 2.13: Eigenfrequenzen des Systems Tragwerk/Tilger in Abhängigkeit des Masseverhältnisses μ

Zusammenfassend können folgende Punkte festgehalten werden:

- 1.) Die optimale Tilgereigenkreisfrequenz für den ungedämpften Zweimassenschwinger liegt bei $\omega_b = \Omega_n$. Bei diesem Verhältnis bewegt sich das Tragwerk nicht.
- 2.) Je größer das Masseverhältnis μ , desto weiter kann die ursprüngliche Eigenfrequenz des Tragwerkes (Tragwerkseigenfrequenz ohne Tilger) verschoben werden und desto größer ist der „Plateaubereich“ in dem sich das Tragwerk gar nicht bzw. kaum bewegt.

2.2.8.2. Gedämpfter, harmonisch erregter Zweimassenschwinger

Das reale, zu untersuchende System besteht aus einer gedämpften Tilgermasse sowie einem gedämpften Tragwerk. Die Dämpfung des Tragwerks wird als vernachlässigbar angesehen. Dies erfolgt aufgrund der üblicherweise sehr geringen Dämpfung bei Brückentragwerken ($\zeta = 1 - 5 \%$) sowie aufgrund des geringen Einflusses der Dämpfung der Hauptmasse auf die nachfolgenden Ergebnisse, wie in (Den Hartog, 1985) gezeigt wird. Es wird viskose, das heißt geschwindigkeitsproportionale Dämpfung vorausgesetzt.

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen wird wiederum das System des Zweimassenschwingers in der Ausgangslage und ausgelenkter Lage (Abbildung 2.14) sowie mit den freigeschnittenen Massen (Abbildung 2.15) dargestellt.

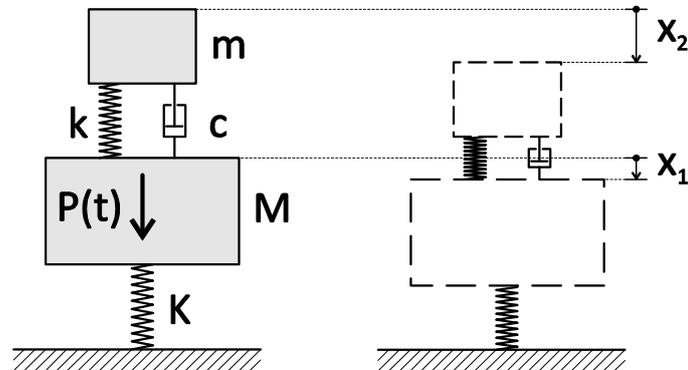


Abbildung 2.14: gedämpfter Zweimassenschwinger in Ausgangslage und in ausgelenkter Lage

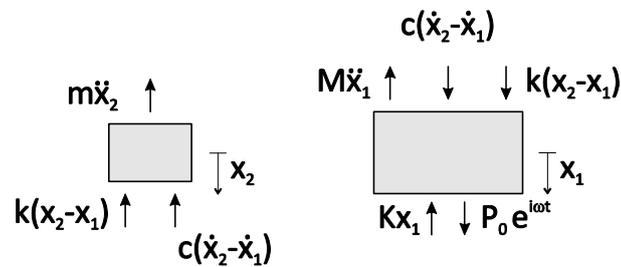


Abbildung 2.15: freigeschnittene Tilger- sowie Hauptmasse mit allen Kräften

Anschreiben der Bewegungsgleichungen liefert in erweiterter, komplexer Darstellung unter Anwendung der Eulerschen Formel (Meyberg, Höhere Mathematik 2, 1999)

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0 \\ M\ddot{x}_1 + Kx_1 - k(x_2 - x_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= P_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Setzt man aufgrund der Linearität wieder eine harmonische Bewegung der beiden Massen mit unterschiedlichen Amplituden a_1 und a_2 aber derselben Eigenkreisfrequenz ω voraus, folgt

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 e^{i\omega t} \\ \dot{x}_1 &= i\omega a_1 e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_1 &= -\omega^2 a_1 e^{i\omega t} \\ x_2 &= a_2 e^{i\omega t} \\ \dot{x}_2 &= i\omega a_2 e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_2 &= -\omega^2 a_2 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.104)$$

Dabei wurde für alle zeitlich harmonischen Größen bewusst die komplexe Darstellung gewählt, da mit dieser auch im gedämpften Fall eine kompakte Lösungsdarstellung der Bewegungsgleichungen möglich ist.

2. Mathematische und mechanische Grundlagen

Nach Substitution der Massenbewegungen in den Bewegungsgleichungen resultiert folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & \left[-(k + ic\omega)a_1 + (-m\omega^2 + k + ic\omega)a_2 \right] e^{i\omega t} = 0 \\ & \left[(-M\omega^2 + K + k + ic\omega)a_1 - (k + ic\omega)a_2 \right] e^{i\omega t} = P_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.105)$$

Da beide Gleichungen zu jedem Zeitpunkt t erfüllt sein müssen, müssen die Ausdrücke in den Klammern gleich 0 bzw. P_0 sein. Somit ergeben sich die Lösungen für die Amplituden aus

$$\begin{aligned} & -(k + ic\omega)a_1 + (-m\omega^2 + k + ic\omega)a_2 = 0 \\ & (-M\omega^2 + K + k + ic\omega)a_1 - (k + ic\omega)a_2 = P_0 \end{aligned} \quad (2.106)$$

Um Untersuchungen unabhängig von absoluten Größen der Eigenschaften des Zweimassenschwingers durchführen zu können, werden folgende dimensionslose Größen eingeführt

$x_{st} = \frac{P_0}{K}$	statische Verformung der Hauptmasse M
$\omega_a^2 = \frac{k}{m}$	Eigenkreisfrequenz des Tilgers
$\Omega_n^2 = \frac{K}{M}$	Eigenkreisfrequenz des Tragwerkes
$\mu = \frac{m}{M}$	Massenverhältnis Tilgermasse/Tragwerksmasse
$f = \frac{\omega_a}{\Omega_n}$	Frequenzverhältnis Tilger/Tragwerk
$g = \frac{\omega}{\Omega_n}$	Frequenzverhältnis Erregerkraft/Tragwerk
$c_{cr} = 2m\omega_a$	kritische Dämpfung der Tilgermasse
$\zeta = \frac{c}{c_{cr}}$	viskoses Dämpfungsmaß

Mit diesen Verhältnisgrößen und nach einigen Umformungen lauten die beiden Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 -(k + ic\omega)a_1 + (-m\omega^2 + k + ic\omega)a_2 &= 0 \quad \left| \frac{1}{K} \right. \\
 -\left(\frac{k}{K} + i\frac{c}{2m\omega_a} 2mf\Omega_n \frac{\omega}{K}\right)a_1 + \\
 +\left(-m\frac{\omega^2}{K} + \frac{k}{K} + i\frac{c}{2m\omega_a} 2mf\Omega_n \frac{\omega}{K}\right)a_2 &= 0 \\
 -\left(\frac{m\omega_a^2}{M\Omega_n^2} + i\frac{c}{2m\omega_a} 2mf\Omega_n \frac{g\Omega_n}{M\Omega_n^2}\right)a_1 + \\
 +\left(-m\frac{g^2\Omega_n^2}{M\Omega_n^2} + \frac{m\omega_a^2}{M\Omega_n^2} + i\frac{c}{2m\omega_a} 2mf\Omega_n \frac{g\Omega_n}{M\Omega_n^2}\right)a_2 &= 0 \\
 -(\mu f^2 + i2\zeta\mu fg)a_1 + (-\mu g^2 + \mu f^2 + i2\zeta\mu fg)a_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.107}$$

$$\begin{aligned}
 (-M\omega^2 + K + k + ic\omega)a_1 - (k + ic\omega)a_2 &= P_0 \quad \left| \frac{1}{K} \right. \\
 \left(-\frac{M}{K}\omega^2 + \frac{K}{K} + \frac{k}{K} + i\frac{c}{2m\omega_a} 2m\omega_a \frac{\omega}{K}\right)a_1 - \\
 -\left(\frac{k}{K} + i\frac{c}{2m\omega_a} 2m\omega_a \frac{\omega}{K}\right)a_2 &= \frac{P_0}{K} \\
 \left(-\frac{M}{M\Omega_n^2}g^2\Omega_n^2 + 1 + \frac{m\omega_a^2}{M\Omega_n^2} + i\frac{c}{2m\omega_a} 2mf\Omega_n \frac{g\Omega_n}{M\Omega_n^2}\right)a_1 - \\
 -\left(\frac{m\omega_a^2}{M\Omega_n^2} + i\frac{c}{2m\omega_a} 2mf\Omega_n \frac{g\Omega_n}{M\Omega_n^2}\right)a_2 &= x_{st} \\
 (-g^2 + 1 + \mu f^2 + i2\zeta\mu fg)a_1 - (\mu f^2 + i2\zeta\mu fg)a_2 &= x_{st}
 \end{aligned} \tag{2.108}$$

Auflösen dieser beiden Gleichungen liefert für die Amplituden in komplexer Schreibweise

$$\begin{aligned}
 \frac{a_1}{x_{st}} &= \frac{(g^2 - f^2) - i2\zeta fg}{(-g^4 + g^2 f^2 + g^2 - f^2 + \mu f^2 g^2) + i(2\zeta fg^3 - 2\zeta fg + 2\mu\zeta fg^3)} \\
 \frac{a_2}{x_{st}} &= \frac{-f^2 - i2\zeta fg}{(-g^4 + g^2 f^2 + g^2 - f^2 + \mu f^2 g^2) + i(2\zeta fg^3 - 2\zeta fg + 2\mu\zeta fg^3)}
 \end{aligned} \tag{2.109}$$

Um von den Amplituden in komplexer, vektorieller Darstellung auf die Magnituden zu kommen, kann Gleichung (2.3) herangezogen werden, woraus folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{a_1}{x_{st}} &= \sqrt{\frac{(g^2 - f^2)^2 + 4\zeta^2 f^2 g^2}{(-g^4 + g^2 f^2 + g^2 - f^2 + \mu f^2 g^2)^2 + (2\zeta fg^3 - 2\zeta fg + 2\mu\zeta fg^3)^2}} \\
 \frac{a_2}{x_{st}} &= \sqrt{\frac{f^4 + 4\zeta^2 f^2 g^2}{(-g^4 + g^2 f^2 + g^2 - f^2 + \mu f^2 g^2)^2 + (2\zeta fg^3 - 2\zeta fg + 2\mu\zeta fg^3)^2}}
 \end{aligned} \tag{2.110}$$

2. Mathematische und mechanische Grundlagen

In den nachfolgenden Diagrammen soll die Bewegung der Hauptmasse a_1 mit unterschiedlichen Parametereinstellungen untersucht werden. Dabei soll der Einfluss der einzelnen Parameter herausgearbeitet werden. In Abbildung 2.16 sind drei Vergrößerungsfunktionen mit gleichbleibender Dämpfung ζ aber unterschiedlichem Frequenzverhältnis f (Tilgerfrequenz/Tragwerksfrequenz) dargestellt. Dabei ist ersichtlich, dass durch Variation der Tilgerfrequenz offensichtlich ein optimales Frequenzverhältnis gefunden werden kann, bei dem die dynamische Vergrößerung ein Minimum annimmt.

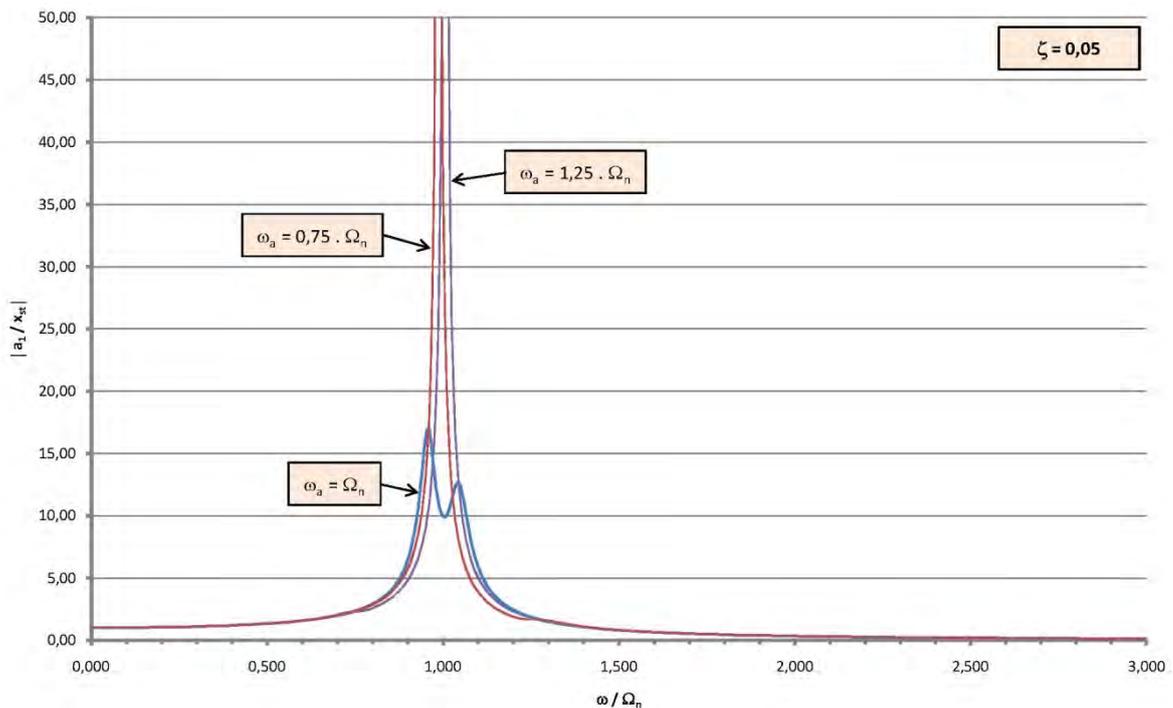


Abbildung 2.16: Vergrößerungsfunktion der Tragwerksbewegung bei konstanter Dämpfung und Variation des Frequenzverhältnisses f (Tilger-/Tragwerksfrequenz)

Des Weiteren soll der Einfluss der Dämpfung bei konstantem Frequenzverhältnis f und Masseverhältnis μ dargestellt werden. Auch hier kann dem Diagramm (Abbildung 2.17) entnommen werden, dass es eine optimale Dämpfung geben muss, bei der die dynamische Vergrößerungsfunktion ein Minimum einnimmt. Weiters ist auffällig, dass unabhängig von der Dämpfung alle Vergrößerungsfunktionen durch zwei Punkte, die Fixpunkte P und Q, verlaufen. Dieser Umstand wird bei den Optimierungsregeln nach Den Hartog ausgenutzt. In Abbildung 2.17 sind auch die beiden Extremwerte für die Dämpfung eingetragen. Bei diesen handelt es sich um $\zeta = 0$, also der ungedämpfte Zweimassenschwinger, bei dem sich die Tragwerksmasse bei optimaler Abstimmung in Ruhe befindet (2 Resonanzfrequenzen) und $\zeta = \infty$, also der Einmassenschwinger mit $\overline{M} = m + M$, da eine unendliche Dämpfung keine Bewegung zwischen Tilger- und Tragwerksmasse zulässt (1 Resonanzfrequenz).

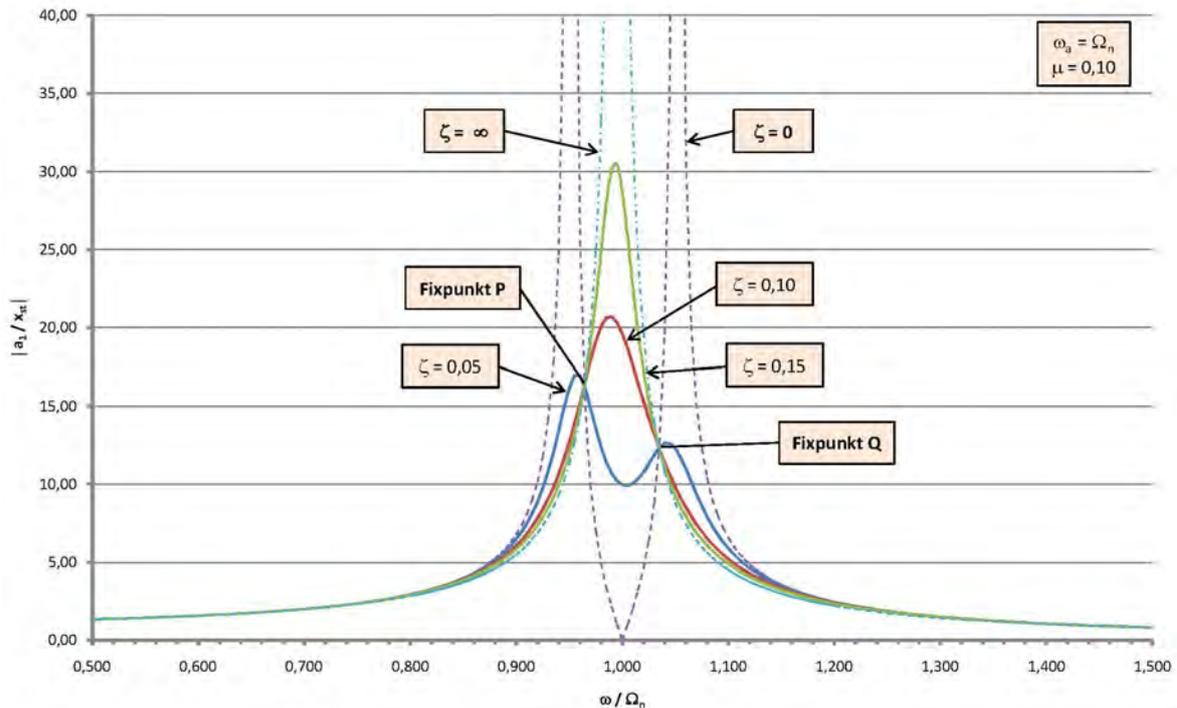


Abbildung 2.17: Vergrößerungsfunktion der Tragwerksbewegung bei konstantem Frequenzverhältnis f und Variation der Dämpfung

Zusammenfassend können folgende Punkte festgehalten werden:

- 1.) Durch Variation des Frequenzverhältnisses f (Tilger- / Tragwerksfrequenz) kann die Vergrößerungsfunktion dahin gehend beeinflusst werden, dass die beiden Fixpunkte P und Q in Bezug auf die Amplitude ein optimales Verhältnis einnehmen.
- 2.) Durch gezielte Festlegung der Dämpfung kann erreicht werden, dass die Vergrößerungsfunktion zwischen den Fixpunkten ein Minimum einnimmt.

2.2.8.3. Optimierungskriterien nach Den Hartog

Mit den Optimierungskriterien nach Den Hartog (Den Hartog, 1985) werden, wie in Kapitel 2.2.8.2 angeführt, Werte für das optimale Frequenzverhältnis f_{opt} sowie die optimale Dämpfung ζ_{opt} ermittelt.

Zur Ermittlung des optimalen Frequenzverhältnisses werden die beiden Fixpunkte P und Q herangezogen, weshalb man auch von der Fixpunkttheorie spricht. Dabei wird die, völlig willkürliche, Annahme getroffen, dass die Vergrößerungsfunktion ein Minimum annimmt, wenn die beiden Fixpunkte denselben Vergrößerungsfaktor liefern. Dazu müssen zuerst die beiden Frequenzverhältnisse g_1 und g_2 der Fixpunkte bestimmt werden. Dies kann unter Ausnutzung der Unabhängigkeit der Fixpunkte von der Dämpfung durchgeführt werden. Dafür können zwei beliebige Dämpfungsmaße, z. B. $\zeta_1 = 0$ und $\zeta_2 = 1\%$ in Gleichung (2.110) eingesetzt und gleichgesetzt werden. Dies liefert

2. Mathematische und mechanische Grundlagen

$$\begin{aligned}g_1 &= \frac{1}{2+\mu} \sqrt{(2+\mu)(1+\mu f^2 + f^2 - \sqrt{1-2f^2 + \mu^2 f^4 + 2\mu f^4 + f^4})} \\g_2 &= \frac{1}{2+\mu} \sqrt{(2+\mu)(1+\mu f^2 + f^2 + \sqrt{1-2f^2 + \mu^2 f^4 + 2\mu f^4 + f^4})}\end{aligned}\quad (2.111)$$

Setzt man jetzt die beiden Frequenzverhältnisse für die Fixpunkte in Gleichung (2.110) ein, setzt die beiden erhaltenen Vergrößerungsfaktoren gleich und löst dies nach f auf, erhält man das optimale Frequenzverhältnis

$$f_{opt, DenHartog} = \frac{1}{1+\mu} \quad (2.112)$$

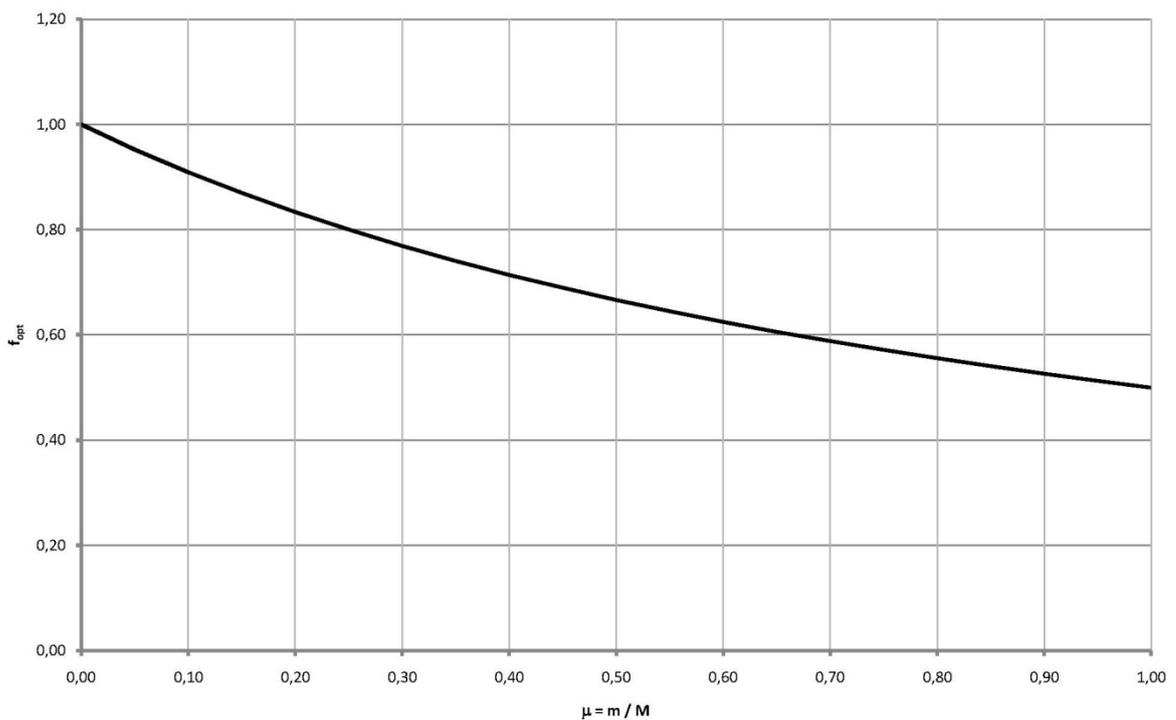


Abbildung 2.18: optimales Frequenzverhältnis f in Abhängigkeit des Masseverhältnisses

Mit diesem optimalen Frequenzverhältnis f und den beiden Frequenzverhältnissen g_1 und g_2 für die Fixpunkte erhält man als maximalen dynamischen Vergrößerungsfaktor

$$\left(\frac{a_1}{x_{st}} \right)_{\max} = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} \quad (2.113)$$

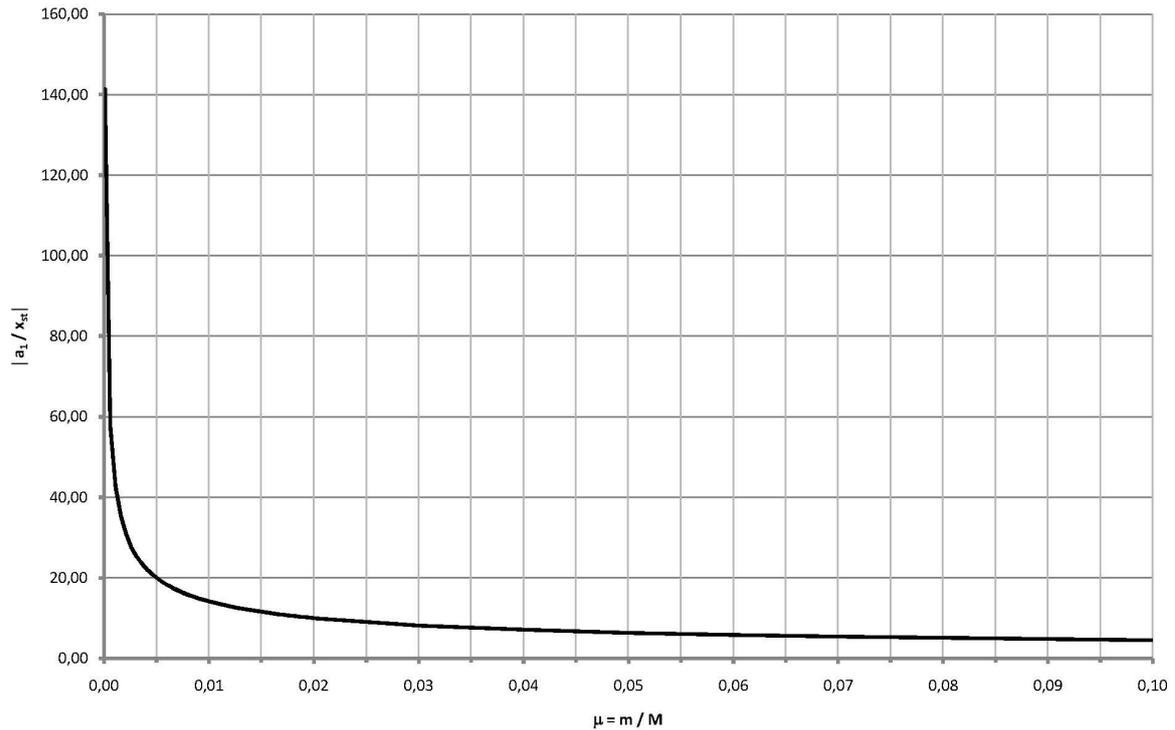


Abbildung 2.19: maximale dynamische Vergrößerung in Abhängigkeit des Masseverhältnisses

Abbildung 2.19 kann entnommen werden, dass sich ab einem Masseverhältnis von ca. 5% die maximale dynamische Vergrößerung kaum ändert, im Gegenteil, durch die größere Tilgermasse die statische Belastung für das Tragwerk zunimmt.

Für den optimal abgestimmten Zweimassenschwinger soll jetzt noch die optimale Dämpfung ζ_{opt} ermittelt werden. Dafür wird von Den Hartog ebenfalls die völlig willkürliche, aber naheliegende Annahme getroffen, dass dafür die Vergrößerungsfunktion in den Fixpunkten horizontale Tangenten aufweisen muss. Zu diesem Zweck wird die Ableitung der Vergrößerungsfunktion nach g gebildet und Null gesetzt

$$\frac{\partial\left(\frac{a_1}{x_{st}}\right)}{\partial g} = 0 \quad (2.114)$$

Diese wird bei den beiden Fixpunktsfrequenzen g_1 und g_2 ausgewertet und liefert zwei optimale Dämpfungsmaße, horizontale Tangenten in beiden Fixpunkten mit nur einem Dämpfungsmaß können nicht erreicht werden. Die optimale Dämpfung lässt sich als Mittelwert der beiden Dämpfungsmaße berechnen.

$$\begin{aligned}
 \zeta_{opt,P,DenHartog} &= \sqrt{\frac{\mu}{8(1+\mu)} \left(3 - \sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}} \right)} \\
 \zeta_{opt,Q,DenHartog} &= \sqrt{\frac{\mu}{8(1+\mu)} \left(3 + \sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}} \right)} \\
 \zeta_{opt,\sim,DenHartog} &= \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}}
 \end{aligned}
 \tag{2.115}$$

In den nachfolgenden Abbildungen (Abbildung 2.20, Abbildung 2.21 und Abbildung 2.22) sind Vergrößerungsfaktoren mit optimalem Frequenzverhältnis f_{opt} und optimaler Dämpfung ζ_{opt} dargestellt. Dabei sind die optimalen durchschnittlichen Dämpfungen nach Den Hartog, Brock (Den Hartog, 1985), der im Buch von Den Hartog zitiert wird, sowie der im nachfolgenden Kapitel erläuterten exakten optimalen Dämpfung dargestellt. Es soll noch erwähnt werden, dass das Dämpfungsmaß nach Brock die Forderungen nach Den Hartog nicht erfüllt, also zu keinen horizontalen Tangenten in den Fixpunkten führt.

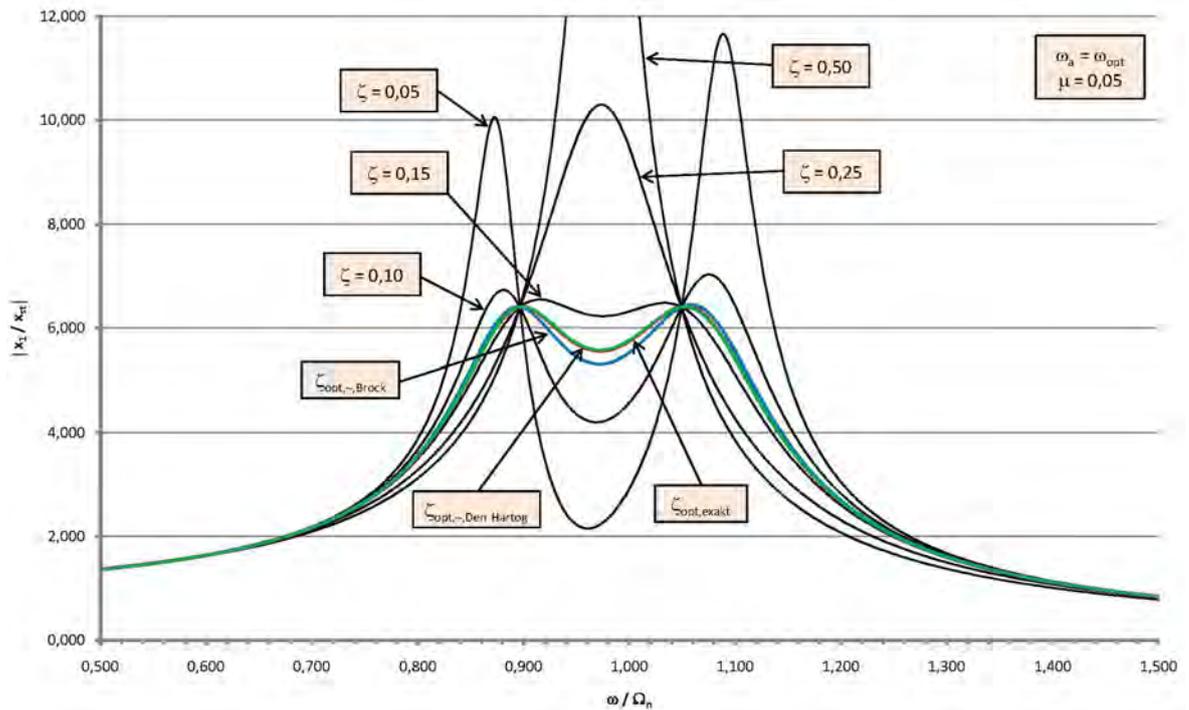


Abbildung 2.20: Vergrößerungsfunktionen mit optimalem Frequenzverhältnis ω und optimaler durchschnittlicher Dämpfung nach Den Hartog, Brock und der exakten Lösung

2. Mathematische und mechanische Grundlagen

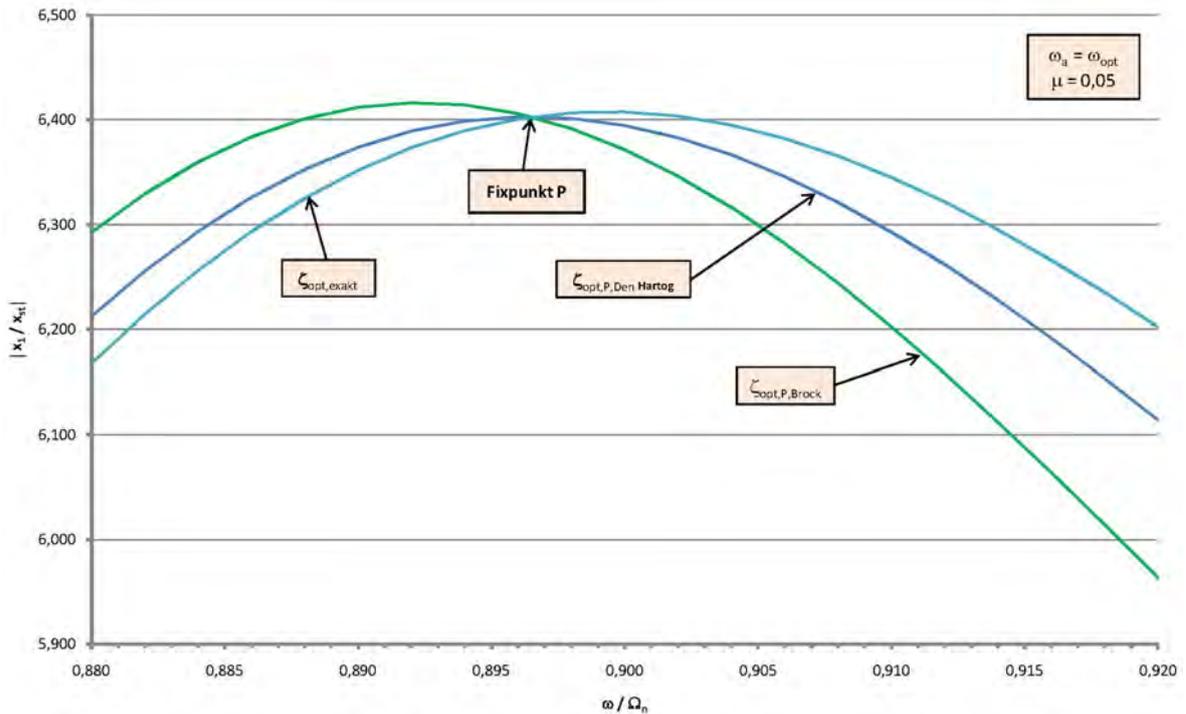


Abbildung 2.21: Vergrößerungsfunktionen mit optimalem Frequenzverhältnis f und optimaler Dämpfung für den Fixpunkt P nach Den Hartog, Brock und der exakten Lösung am Fixpunkt P

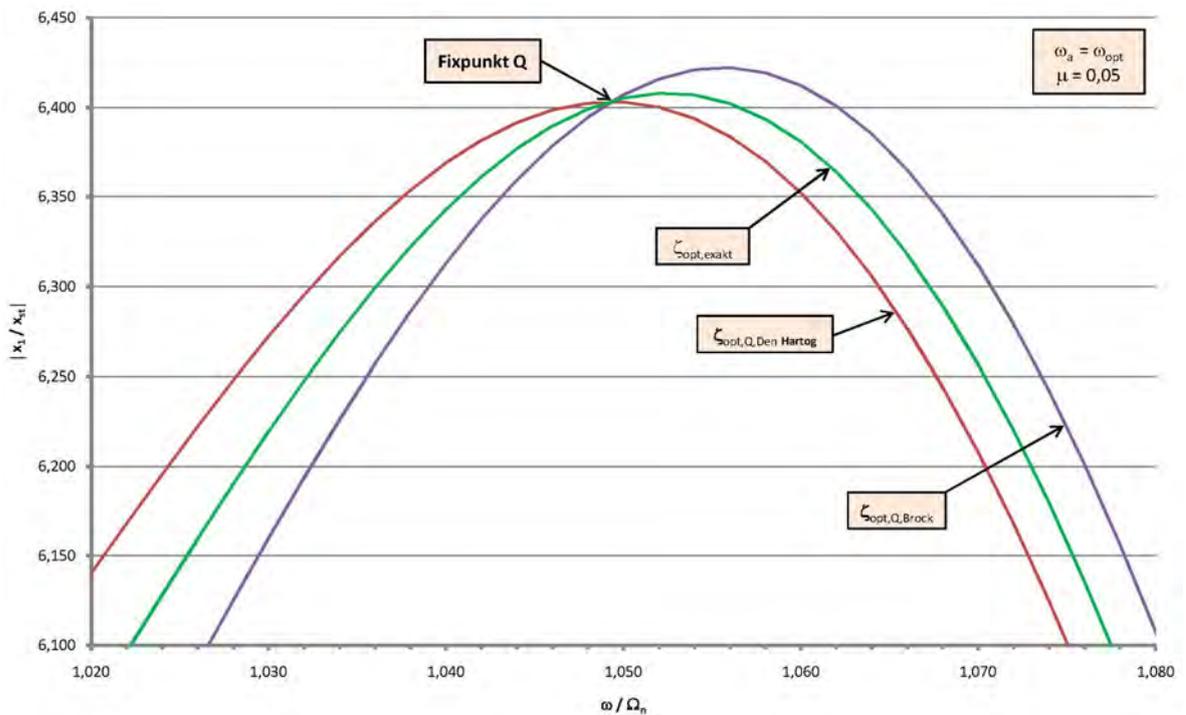


Abbildung 2.22: Vergrößerungsfunktionen mit optimalem Frequenzverhältnis f und optimaler Dämpfung für den Fixpunkt Q nach Den Hartog, Brock und der exakten Lösung am Fixpunkt Q

Mit den Optimierungskriterien nach Den Hartog kann näherungsweise ein Minimum der dynamischen Vergrößerungsfunktion erreicht werden. Zu diesen zählen die Abstimmung der Eigenfrequenzen des Tilgers und des Tragwerkes sowie die Einstellung der optimalen Dämpfung des Tilgers. Es konnte gezeigt werden, dass sich ab einem Masseverhältnis von ca. 5 % die dynamische Vergrößerung kaum ändert und sich somit Tilgermassen über diesem Verhältnis nicht rentieren.

2.2.8.4. Mechanisch exaktes Optimierungsverfahren

Wie bereits in Kapitel 2.2.8.3 erwähnt, handelt es sich bei den Annahmen der Fixpunkttheorie um willkürliche, die sich aus der Betrachtung der Vergrößerungsfunktionen sowie deren Abhängigkeit von den unterschiedlichen Parametern ergeben und somit empirischer Natur sind. In (Asami, 2003) wurden Optimierungsparameter mit dem Kriterium der Minimierung der Resonanzamplituden hergeleitet, also ein tatsächlich mechanisches, analytisches Verfahren. Dabei wurde berücksichtigt, dass die Resonanzpunkte nicht mit den Fixpunkten zusammenfallen. Die daraus resultierenden Optimierungsparameter sind etwas komplexer als jene der Fixpunkttheorie, dennoch bleiben sie übersichtlich. Auf eine detaillierte Herleitung wird an dieser Stelle verzichtet (siehe (Asami, 2003)), die Ergebnisse sind nachfolgend dargestellt

$$\begin{aligned} f_{opt,exakt} &= \frac{2}{1+\mu} \sqrt{\frac{2 \left[16 + 23\mu + 9\mu^2 + 2(2+\mu)\sqrt{4+3\mu} \right]}{3(64+80\mu+27\mu^2)}} \\ \zeta_{opt,exakt} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{8+9\mu-4\sqrt{4+3\mu}}{1+\mu}} \\ \left| \frac{a_1}{x_{st}} \right|_{\max} &= \frac{1}{3\mu} \sqrt{\frac{(8+9\mu)^2(16+9\mu) - 128(4+3\mu)^{\frac{3}{2}}}{3(32+27\mu)}} \end{aligned} \quad (2.116)$$

In Abbildung 2.23 sind die optimalen Dämpfungsmaße nach den unterschiedlichen Theorien gegenübergestellt. Es ist ersichtlich, dass die Theorie nach Brock nur bis ca. 5 % Massenverhältnis exakte Ergebnisse liefert, die Fixpunkttheorie liefert hingegen über einen großen Massenverhältnissbereich Ergebnisse, die in guter Näherung der exakten Lösung entsprechen. Dieser Umstand kann auch Abbildung 2.20 entnommen werden, in der die Vergrößerungsfunktion nach Den Hartog praktisch nicht von jener der exakten Lösung abweicht.

Aufgrund des geplanten Masseverhältnisses in dieser Arbeit von max. 5 % unterscheiden sich, wie gezeigt wurde, die Optimierungskriterien nach Den Hartog sowie der exakten Lösung praktisch nicht. Deshalb werden weiterhin die über Jahre bewährten Kriterien nach Den Hartog für die Optimierung des gedämpften Zweimasseschwingers herangezogen.

2. Mathematische und mechanische Grundlagen

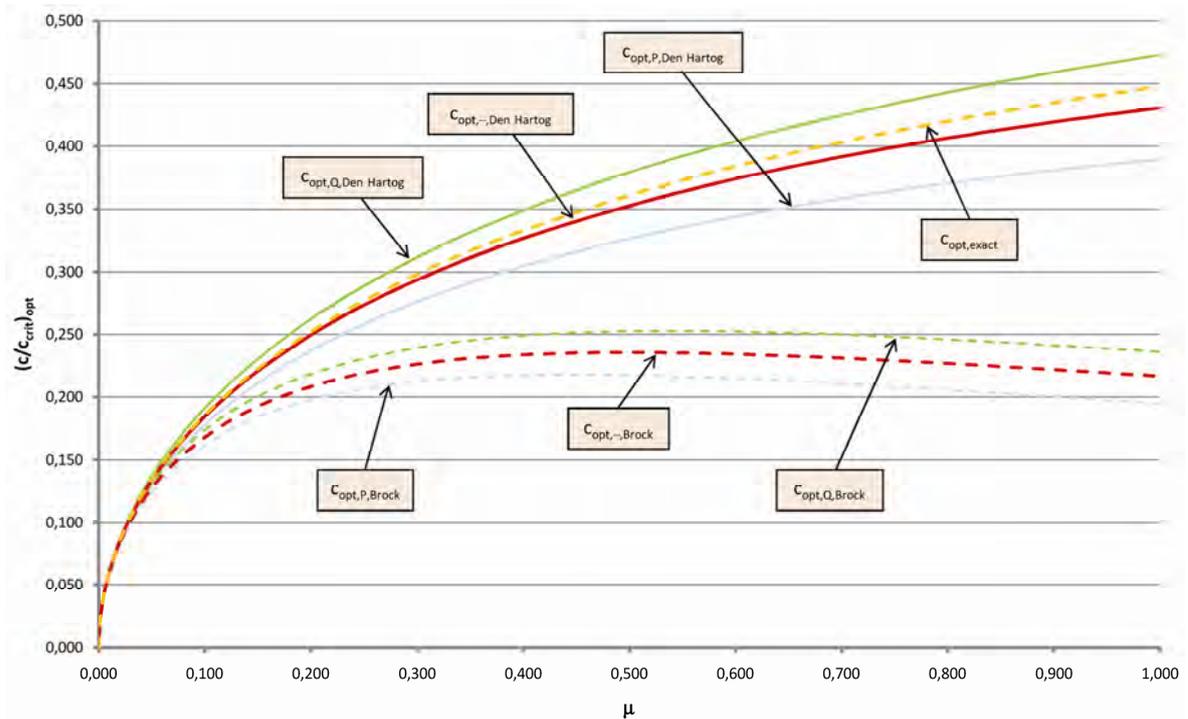


Abbildung 2.23: Optimale Dämpfungsmaße nach Den Hartog, Brock und der exakten Lösung in Abhängigkeit des Massenverhältnisses

2.2.9. Schwingungen der Stabtragwerke

2.2.9.1. Bewegungsgleichung des Bernoulli-Euler-Balkens

In diesem Kapitel soll die Bewegungsgleichung für die Transversalschwingung von geraden Balken ohne Berücksichtigung von Dämpfung hergeleitet werden (Chopra, 2000). Ein derartiges System ist in nachfolgender Abbildung dargestellt.

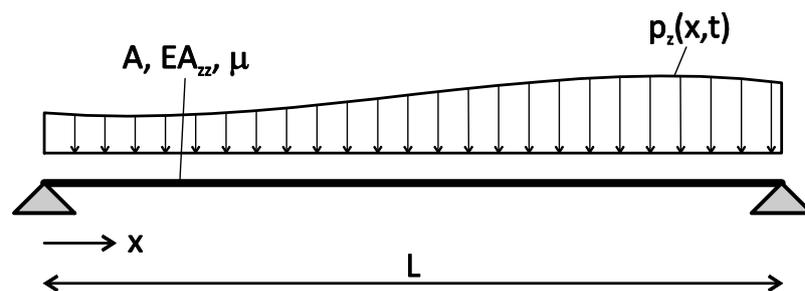


Abbildung 2.24: schwingungsfähiges System mit konstanter Steifigkeit und Masseverteilung sowie zeit- und ortsveränderlicher Belastung

Die Eigenschaften des Balkens werden durch die nachfolgenden Koeffizienten beschrieben

EA_{zz}	Biegesteifigkeit des Balkens [kNm ²]
μ	Massebelegung des Stabes $\mu = \rho A$ [kg/m]
ρ	Dichte des Balkens [kg/m ³] (konstant)

2. Mathematische und mechanische Grundlagen

A	Querschnittsfläche des Balkens [m^2]
$p_z(x,t)$	einwirkende dynamische Streckenlast in z-Richtung [kN/m]
$w(x,t)$	Verschiebung des Balkens in z-Richtung [m]

Für die weiteren Herleitungen werden folgende Annahmen getroffen

- 1) Die Querschnittseigenschaften des Balkens (E , A , A_{zz}) sind über die gesamte Stablänge konstant
- 2) Schubdeformationen werden vernachlässigt
- 3) Rotationsträgheit des Balkens wird vernachlässigt

Der Einfluss der Punkte 2 und 3 auf die Schwingungseigenschaften des Balkens kann in (Szabo, Höhere Technische Mechanik, 2001) nachgelesen werden. Für die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit liefert die Vernachlässigung der Schubdeformationen sowie der Rotationsträgheit ausreichend genaue Ergebnisse.

Schneidet man ein infinitesimales Element der Länge dx des Balkens an beliebiger Stelle frei (Abbildung 2.25), setzt nach dem Schnittprinzip alle angreifenden Kräfte an und bildet z. B. nach dem Prinzip von D'Alembert das Kräftegleichgewicht in z-Richtung folgt

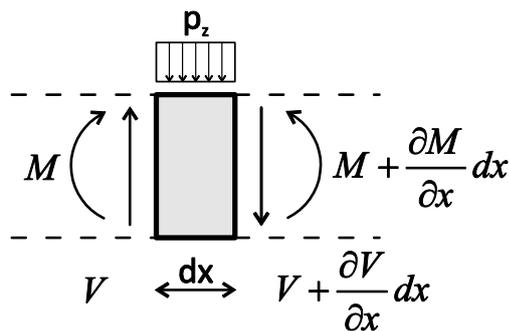


Abbildung 2.25: infinitesimales Balkenelement mit allen angreifenden Kräften

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial x} + p_z \quad (2.117)$$

Setzt man darin die aus der Statik bekannten Beziehungen (Mang, 2004)

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (2.118)$$

$$M = -EA_{zz} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

ein, folgt

$$EA_{zz} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p_z \quad (2.119)$$

Dies stellt die Bewegungsgleichung des Bernoulli-Euler-Balkens mit dynamischer Belastung in z-Richtung dar. Zur Lösung dieser müssen pro Auflager 2 Randbedingungen angegeben werden.

2.2.9.2. Eigenformen und Eigenfrequenzen

Für den Fall der freien Schwingung des Bernoulli-Euler-Balkens lautet die Bewegungsgleichung

$$EA_{zz} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.120)$$

und wird mithilfe des Bernoullischen Separationsansatzes (Chopra, 2000)

$$w(x, t) = \phi(x)q(t) \quad (2.121)$$

gelöst. Mit

$$\ddot{q}(t) = \frac{d^2 q}{dt^2} \quad (2.122)$$

$$\phi''(x) = \frac{d^2 \phi}{dx^2}$$

folgt

$$-\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \frac{EA_{zz}}{\mu} \frac{\phi''''(x)}{\phi(x)} \quad (2.123)$$

Die linke Seite beschreibt damit eine Funktion, die lediglich von der Zeit t , die rechte Seite eine, die von der Variablen x abhängig ist. Um für alle Zeitpunkte t und Lagekoordinaten x Gültigkeit zu haben, müssen beide Seiten konstant sein, z. B. ω^2 . Damit erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} &= -\omega^2 \\ \frac{EA_{zz}}{\mu} \frac{\phi''''(x)}{\phi(x)} &= \omega^2 \end{aligned} \quad (2.124)$$

Bei der ersten Gleichung handelt es sich um die Bewegungsgleichung der freien Schwingung eines Einmassenschwingers, deren Lösung

$$q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (2.125)$$

lautet. Die allgemeine Lösung der zweiten Gleichung ergibt sich zu (Chopra, 2000) oder (Petersen, Dynamik der Baukonstruktionen, 2000)

$$\phi(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 \sinh(\lambda x) + C_4 \cosh(\lambda x) \quad (2.126)$$

mit

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{EA_{zz}}} \quad (2.127)$$

Nachfolgend werden die Eigenfrequenzen sowie die Eigenformen des statisch bestimmt gelagerten Einfeldträgers ermittelt, der in vorliegender Arbeit ausschließlich Verwendung findet. Mit den Randbedingungen des verschwindenden Momentes sowie der verschwindenden Verformung an den beiden Auflagern folgt für $x = 0$

$$\begin{aligned} w(0,t) = 0 &\Rightarrow \phi(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \\ M(0,t) = 0 &\Rightarrow EA_{zz}\phi''(0) = 0 \Rightarrow \lambda^2(-C_2 + C_4) = 0 \end{aligned} \quad (2.128)$$

Daraus ergeben sich die Integrationskonstanten zu $C_2 = C_4 = 0$ und für die allgemeine Lösung folgt

$$\phi(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_3 \sinh(\lambda x) \quad (2.129)$$

Mit den Randbedingungen für $x = L$ ergeben sich

$$\begin{aligned} w(L,t) = 0 &\Rightarrow \phi(L) = 0 \Rightarrow C_1 \sin(\lambda L) + C_3 \sinh(\lambda L) = 0 \\ M(L,t) = 0 &\Rightarrow EA_{zz}\phi''(L) = 0 \Rightarrow \lambda^2(-C_1 \sin(\lambda L) + C_3 \sinh(\lambda L)) = 0 \end{aligned} \quad (2.130)$$

Addition beider Gleichungen liefert

$$C_3 \sinh(\lambda L) = 0 \quad (2.131)$$

Da $\sinh(\lambda L)$ ungleich Null ist, muss C_3 verschwinden. Das liefert für die Frequenzgleichung

$$C_1 \sin(\lambda L) = 0 \quad (2.132)$$

Wählt man $C_1 = 0$ folgt daraus die triviale Lösung für die Eigenform $\phi(x) = 0$. Für die nichttriviale Lösung muss $\sin(\lambda L) = 0$ werden, daraus ergibt sich

$$\lambda L = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.133)$$

Damit erhält man mit Gl. (2.127) für die Eigenfrequenzen

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EA_{zz}}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.134)$$

sowie mit Gl. (2.129) für die Eigenformen

$$\phi_n(x) = C_1 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.135)$$

Die Konstante C_1 kann dabei willkürlich gewählt werden, geläufig ist die Wahl von eins, was eine Normierung der Eigenform auf eins zur Folge hat. Die ersten drei Eigenformen des statisch bestimmt gelagerten Balkens sind in nachfolgender Abbildung dargestellt.

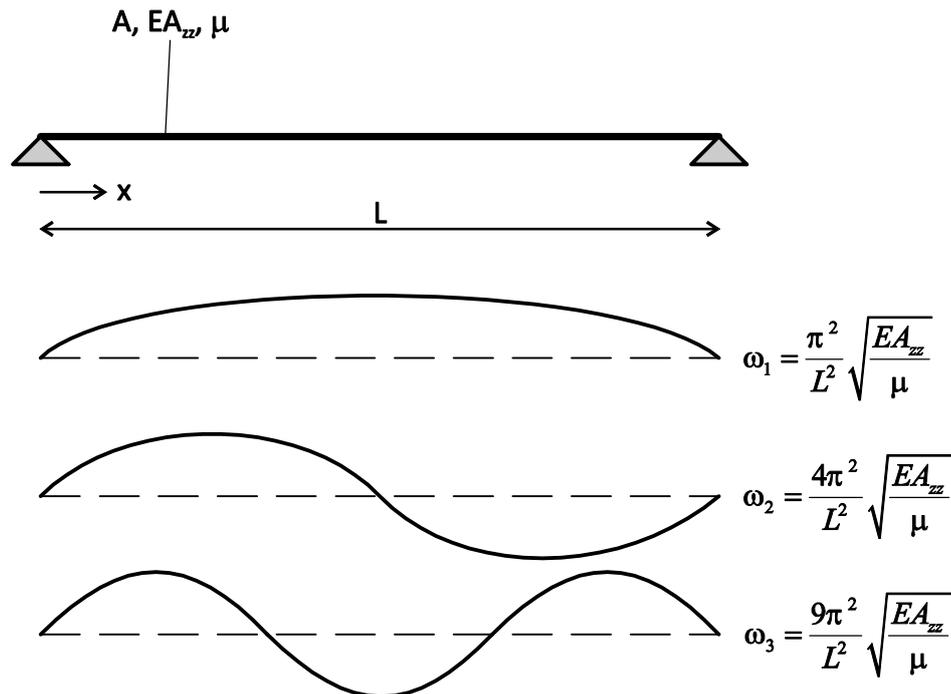


Abbildung 2.26: erste drei Eigenfrequenzen und Eigenformen des statisch bestimmt gelagerten Balkens

2.2.9.3. Orthogonalitätsbedingungen

Ausgangspunkt für die Orthogonalitätsbedingungen (Chopra, 2000) stellt die zweite Gleichung von Gl. (2.124), angegeben für die r-te Eigenform

$$EA_{zz} \phi_r''''(x) = \omega_r^2 \mu \phi_r(x) \quad (2.136)$$

Multipliziert man beide Seiten mit $\phi_n(x)$ und integriert von 0 bis L folgt

$$EA_{zz} \int_0^L \phi_n(x) \phi_r''''(x) dx = \omega_r^2 \mu \int_0^L \phi_n(x) \phi_r(x) dx \quad (2.137)$$

Die linke Seite kann dabei wie folgt zweimal partiell integriert werden

$$EA_{zz} \int_0^L \phi_n(x) \phi_r''''(x) dx = EA_{zz} \left[\phi_n(x) \phi_r'''(x) \right]_0^L - EA_{zz} \left[\phi_n'(x) \phi_r''(x) \right]_0^L + EA_{zz} \int_0^L \phi_n''(x) \phi_r''(x) dx \quad (2.138)$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Ausdrücke in den Klammern [...] verschwinden müssen, da an den Auflagern die Verformungen ($\phi = 0$) sowie das Biegemoment ($\phi'' = 0$) verschwinden. Damit folgt aus Gl. (2.137)

$$EA_{zz} \int_0^L \phi_n''(x) \phi_r''(x) dx = \omega_r^2 \mu \int_0^L \phi_n(x) \phi_r(x) dx \quad (2.139)$$

Führt man dieselben Operationen für die n-te Eigenform durch, folgt

$$EA_{zz} \int_0^L \phi_n''(x) \phi_r''(x) dx = \omega_n^2 \mu \int_0^L \phi_n(x) \phi_r(x) dx \quad (2.140)$$

Subtrahiert man Gl. (2.139) von Gl. (2.140) folgt

$$(\omega_n^2 - \omega_r^2) \mu \int_0^L \phi_n(x) \phi_r(x) dx \quad (2.141)$$

Damit folgen für $\omega_n \neq \omega_r$ die Orthogonalitätsbedingungen für die Eigenformen zu

$$\begin{aligned} \mu \int_0^L \phi_n(x) \phi_r(x) dx &= 0 \\ EA_{zz} \int_0^L \phi_n(x) \phi_r''''(x) dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.142)$$

2.2.9.4. Modalanalyse

Vorausgesetzt, dass die Eigenformen und Eigenfrequenzen der Struktur bekannt sind, lässt sich die Lösung von Gl. (2.119), die Verformung des Balkens, als Linearkombination der Eigenformen wie folgt darstellen (Chopra, 2000)

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) q_r(t) \quad (2.143)$$

Nachfolgend wird gezeigt, dass mit diesem Ansatz Gl. (2.119) in ein System entkoppelter, gewöhnlicher Differentialgleichungen umgeformt werden kann. Dabei besitzt jede Differentialgleichung die modale Koordinate $q_n(t)$ als Unbekannte. Setzt man Gl. (2.143) in Gl. (2.119) ein, folgt

$$\sum_{r=1}^{\infty} EA_{zz} \phi_r''''(x) q_r(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \mu \phi_r(x) \ddot{q}_r(t) = p_z(x, t) \quad (2.144)$$

Multipliziert man im Sinne der Orthogonalitätsbedingungen beide Seiten mit $\phi_n(x)$, integriert über die Länge L und vertauscht Summe und Integral folgt

$$\sum_{r=1}^{\infty} q_r(t) EA_{zz} \int_0^L \phi_n(x) \phi_r''''(x) dx + \sum_{r=1}^{\infty} \ddot{q}_r(t) \mu \int_0^L \phi_n(x) \phi_r(x) dx = \int_0^L \phi_n(x) p_z(x, t) dx \quad (2.145)$$

Anwendung der Orthogonalitätsbedingungen (Gl. (2.142)) liefert

$$\ddot{q}_n(t) \mu \int_0^L \phi_n^2(x) dx + q_n(t) EA_{zz} \int_0^L \phi_n(x) \phi_n''''(x) dx = \int_0^L \phi_n(x) p_z(x, t) dx \quad (2.146)$$

sowie in anderer Schreibweise

$$\underline{M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t)} \quad (2.147)$$

mit

$$\begin{aligned}
 M_n &= \mu \int_0^L \phi_n^2(x) dx \\
 K_n &= EA_{zz} \int_0^L \phi_n(x) \phi_n''''(x) dx = EA_{zz} \int_0^L \left(\phi_n''(x) \right)^2 dx \\
 P_n &= \int_0^L \phi_n(x) p_z(x, t) dx
 \end{aligned}
 \tag{2.148}$$

Darin bedeuten M_n , K_n und P_n die modale oder generalisierte Masse, Steifigkeit und Kraft. Nach Ermittlung der generalisierten Koordinaten $q_n(t)$ ergibt sich die Verformung der n-ten Eigenform zu

$$u_n(x, t) = \phi_n(x) q_n(t) \tag{2.149}$$

Die gesamte Verformung ergibt sich, wie bereits angeführt, als Linearkombination aller Eigenformen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \tag{2.150}$$

Für die erste Eigenform des statisch bestimmt gelagerten Einfeldträgers folgt für die modale Masse und Steifigkeit

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \mu \int_0^L \left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right)^2 dx = \frac{1}{2} \mu L \\
 K_1 &= EA_{zz} \int_0^L \left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \frac{\pi^2}{L^2} \right)^2 dx = \frac{\pi^4}{2L^3} EA_{zz}
 \end{aligned}
 \tag{2.151}$$

2.2.10. Differenzialgleichungen mit periodischen Koeffizienten

Ein Großteil der, in der klassischen Mechanik auftretenden Bewegungsgleichungen zur Beschreibung mechanischer Probleme, sind dadurch gekennzeichnet, dass die darin enthaltenen Koeffizienten konstant, das heißt zeitlich unabhängig sind. Nachfolgend soll jedoch am einfachen Beispiel des mathematischen Pendels mit vertikal bewegtem Aufhängepunkt (Abbildung 2.27) gezeigt werden, dass dies nicht immer der Fall ist.

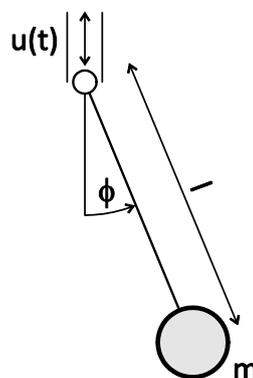


Abbildung 2.27: Mathematisches Pendel mit vertikal bewegtem Aufhängepunkt

Für das Pendel ergibt sich die Bewegungsgleichung unter Voraussetzung kleiner Winkel zu (Klotter, 1980)

$$ml^2\ddot{\phi} + ml(g + \ddot{u}(t))\phi = 0 \quad (2.152)$$

In Gl. (2.152) ist ersichtlich, dass in den Koeffizienten die unabhängige Veränderliche, nämlich die Zeit, explizit auftritt.

Handelt es sich bei den zeitabhängigen Koeffizienten um periodische Funktionen, spricht man von parametererregten Schwingungen. Diese werden auch als rheoliner (lineare Differenzialgleichungen) bzw. rheonichtlineare (nichtlineare Differenzialgleichungen) Schwingungen bezeichnet. Parametererregte Schwingungen unterscheiden sich in ihrem mechanischen Verhalten grundsätzlich in zwei Punkten von Schwingungen mit konstanten Koeffizienten.

- 1.) Resonanz tritt nicht nur beim Frequenzverhältnis Erregerfrequenz/Eigenfrequenz = 1 auf, sondern kann bei unterschiedlichsten Verhältnissen auftreten. Für das Beispiel des vertikal bewegten Pendels treten neben der klassischen Resonanzeigenfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

noch die nachfolgend angeführt parametrischen Resonanzeigenfrequenzen auf.

$$\omega_n = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{l}}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{g}{l}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}, \dots$$

- 2.) Trotz Vorhandensein von Dämpfungstermen nehmen die Schwingungsamplituden in den Resonanzbereichen unendliche Werte an

Ein Problem bei der Ermittlung von Lösungen für parametererregte Schwingungen und generell für nichtlineare Differenzialgleichungen liegt darin, dass keine allgemeinen analytischen Lösungen zur Verfügung stehen, das bedeutet, dass für jede Problemstellung eigene Lösungsansätze gefunden werden müssen. Nachfolgend soll die, für die vorliegende Arbeit interessierende *Mathieusche Differenzialgleichung* analytisch und numerisch untersucht werden.

2.2.10.1. Stabilität der Mathieuschen Differenzialgleichung

Die Differenzialgleichung

$$\ddot{x}(t) + (\delta + 2\varepsilon \cos(2t))x(t) = 0 \quad (2.153)$$

wurde erstmals von Mathieu (1868) bei der Untersuchung der Vibration elliptischer Membrane untersucht und ist deshalb nach ihm benannt (Nayfeh, 1979). Bei dieser handelt es sich um eine lineare, homogene Differenzialgleichung mit Parametererregung.

Bevor auf die Lösung der Mathieschen Differenzialgleichung eingegangen werden kann, muss die allgemeine Lösung von homogenen, linearen Differenzialgleichungen mit periodischen Koeffizienten untersucht werden. Eine dementsprechende Differenzialgleichung lautet

$$\ddot{u}(t) + p_1(t)\dot{u}(t) + p_2(t)u(t) = 0 \quad (2.154)$$

Da es sich hierbei um eine lineare, homogene Differenzialgleichung 2. Ordnung handelt, existieren zwei lineare, unabhängige und nicht verschwindende Lösungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ (Nayfeh, 1979). Da jede Lösung aus diesen beiden Lösungen gebildet werden kann, nennt man diese Fundamentallösungen,

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad (2.155)$$

mit den Konstanten c_1 und c_2 . Da $p_i(t) = p_i(t+T)$ als periodisch vorausgesetzt wurden, gilt

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t+T) &= -p_1(t+T)\dot{u}(t+T) - p_2(t+T)u(t+T) = \\ &= -p_1(t)\dot{u}(t+T) - p_2(t)u(t+T) \end{aligned} \quad (2.156)$$

Aus Gleichung (2.156) folgt, dass wenn $u_1(t)$ und $u_2(t)$ eine Fundamentallösung bilden, auch $u_1(t+T)$ und $u_2(t+T)$ eine Fundamentallösung bilden müssen. Daher gilt

$$\begin{aligned} u_1(t+T) &= a_{11}u_1(t) + a_{12}u_2(t) \\ u_2(t+T) &= a_{21}u_1(t) + a_{22}u_2(t) \end{aligned} \quad (2.157)$$

mit a_{mn} den Elementen einer konstanten, nichtsingulären und nicht eindeutigen Matrix A .

Wie in (Nayfeh, 1979) gezeigt wird, existieren Fundamentallösungen der Form

$$\begin{aligned} v_1(t+T) &= \lambda_1 v_1(t) \\ v_2(t+T) &= \lambda_2 v_2(t) \end{aligned} \quad (2.158)$$

mit dem konstanten und eventuell komplexen Vektor λ . Diese Lösungen werden als Normal- oder Floquetlösungen bezeichnet. Zwei Fundamentallösungen stehen durch

$$\vec{u}(t) = [P]\vec{v}(t) \quad (2.159)$$

miteinander in Beziehung. Im Speziellen gilt

$$\vec{v}(t+T) = [B]\vec{v}(t) \quad (2.160)$$

Mit den Eigenwerten der Matrix A

$$|[A] - \lambda[I]| = 0 \quad (2.161)$$

lassen sich folgende Fundamentalmatrizen bilden, wobei die Fallunterscheidung $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda_1 = \lambda_2$ durchgeführt werden muss. Bei ungleichen Eigenwerten folgt

$$[B] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.162)$$

und für Gl. (2.158)

$$v_i(t+T) = \lambda_i v_i(t) \quad (2.163)$$

sowie bei Betrachtung mehrerer Perioden

$$v_i(t + nT) = \lambda_i^n v_i(t) \quad (2.164)$$

Es ist ersichtlich, dass für $t \rightarrow \infty$ (z. B. $n \rightarrow \infty$) folgen muss

$$v_i(t) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{für } |\lambda_i| < 1 \\ \infty & \text{für } |\lambda_i| > 1 \end{cases} \quad (2.165)$$

Errechnet sich λ_i zu 1, folgt v_i als periodische Funktion mit Periode T , für $\lambda_i = -1$, folgt v_i als periodische Funktion mit Periode $2T$.

Multipliziert man Gl. (2.163) mit

$$e^{-\gamma_i(t+T)} \quad (2.166)$$

folgt

$$e^{-\gamma_i(t+T)} v_i(t+T) = \lambda_i e^{-\gamma_i T} e^{-\gamma_i t} v_i(t) \quad (2.167)$$

Wählt man

$$\lambda_i = e^{\gamma_i T} \quad (2.168)$$

folgt

$$\phi_i(t) = e^{-\gamma_i t} v_i(t) \quad (2.169)$$

als periodische Funktion mit der Periode T . Damit kann die Fundamentallösung in der sogenannten Normalform dargestellt werden

$$\begin{aligned} v_1(t) &= e^{\gamma_1 t} \phi_1(t) \\ v_2(t) &= e^{\gamma_2 t} \phi_2(t) \end{aligned} \quad (2.170)$$

Bei gleichen Eigenwerten folgt

$$[B] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (2.171)$$

oder

$$[B] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \quad (2.172)$$

Für den Fall aus Gl. (2.171) lauten die Fundamentallösungen wie in Gl. (2.170) angeführt.

Für den Fall aus Gl. (2.172) folgt

$$\begin{aligned} v_1(t+T) &= \lambda v_1(t) \\ v_2(t+T) &= \lambda v_2(t) + v_1(t) \end{aligned} \quad (2.173)$$

Damit folgt mit den Gl. (2.168) und (2.169)

$$v_1(t) = e^{\gamma t} \phi_1(t) \quad (2.174)$$

Multipliziert man

$$v_2(t+T) = \lambda v_2(t) + v_1(t) \quad (2.175)$$

mit

$$e^{-\gamma(t+T)} \quad (2.176)$$

folgt

$$\begin{aligned} e^{-\gamma(t+T)} v_2(t+T) &= e^{\gamma T} e^{-\gamma t} e^{-\gamma T} v_2(t) + e^{-\gamma t} e^{-\gamma T} e^{\gamma T} \phi_1(t) = \\ &= e^{-\gamma t} v_2(t) + \frac{1}{\lambda} \phi_1(t) \end{aligned} \quad (2.177)$$

und daraus aufgrund von

$$\phi_2(t+T) = \phi_2(t) \quad (2.178)$$

$$v_2(t) = e^{\gamma t} \left[\phi_2(t) + \frac{t}{\lambda T} \phi_1(t) \right] \quad (2.179)$$

Diese Ergebnisse zeigen, dass bei Vorliegen der Matrix [B] in der Form (2.162) oder (2.171) eine begrenzte Bewegung nur möglich ist, wenn die Realteile von γ_1 und γ_2 nicht positiv definit sind, sowie in der Form (2.172), wenn der Realteil von γ negativ ist. Der Parameter γ wird als charakteristischer Exponent bezeichnet und folgt aus dem Eigenwert λ zu

$$\gamma = \frac{1}{T} \ln(\lambda) \quad (2.180)$$

Zur Berechnung der charakteristischen Exponenten soll $u_1(t)$ und $u_2(t)$ als Fundamentallösung gewählt werden, die die beliebigen Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 1, & \dot{u}_1(0) &= 0 \\ u_2(0) &= 0, & \dot{u}_2(0) &= 1 \end{aligned} \quad (2.181)$$

erfüllen. Setzt man in Gl. (2.157) $t = 0$ folgt

$$\begin{aligned} u_1(T) &= a_{11} u_1(0) + a_{12} u_2(0) \rightarrow \\ a_{11} &= u_1(T) \\ u_2(T) &= a_{21} u_1(0) + a_{22} u_2(0) \rightarrow \\ a_{21} &= u_2(T) \end{aligned} \quad (2.182)$$

Differenziert man Gl. (2.157) nach t und setzt wiederum $t = 0$, folgt

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(T) &= a_{11} \dot{u}_1(0) + a_{12} \dot{u}_2(0) \rightarrow \\ a_{12} &= \dot{u}_1(T) \\ \dot{u}_2(T) &= a_{21} \dot{u}_1(0) + a_{22} \dot{u}_2(0) \rightarrow \\ a_{22} &= \dot{u}_2(T) \end{aligned} \quad (2.183)$$

Daraus folgt für die Determinante aus Gl. (2.161)

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \Delta = 0 \quad (2.184)$$

mit

$$\alpha = \frac{1}{2}[u_1(T) + \dot{u}_2(T)] \quad (2.185)$$

$$\Delta = u_1(T)\dot{u}_2(T) - \dot{u}_1(T)u_2(T)$$

Der Parameter Δ wird als Wronsky-Determinante von $u_1(T)$ und $u_2(T)$ bezeichnet. Lösen von Gl. (2.184) liefert die Eigenwerte λ woraus sich die charakteristischen Exponenten γ ermitteln lassen.

Für Differenzialgleichungen der Form

$$\ddot{u}_1(t) + p(t)u_1(t) = 0 \quad (2.186)$$

$$\ddot{u}_2(t) + p(t)u_2(t) = 0$$

die z. B. die allgemeine Form der Mathieschen Differenzialgleichung darstellt, folgt nach Multiplikation der ersten Gleichung mit $u_2(t)$ und der zweiten Gleichung mit $u_1(t)$ und anschließender Subtraktion

$$u_1(t)\ddot{u}_2(t) - \ddot{u}_1(t)u_2(t) = 0 \quad (2.187)$$

Integration von Gl. (2.187) liefert

$$u_1(t)\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)u_2(t) = \Delta(t) \quad (2.188)$$

Berechnung von $\Delta(t)$ zum Zeitpunkt $t=0$ liefert

$$\Delta(t) = 1 \quad (2.189)$$

und damit die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (2.184)

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (2.190)$$

Die beiden Werte sind durch

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1 \quad (2.191)$$

miteinander verknüpft.

Wenn

$$|\alpha| > 1$$

ist der Absolutbetrag einer Wurzel größer, der anderen Wurzel kleiner 1. Daher ergibt sich eine Lösung als begrenzt, die andere als unbegrenzt. Für den Fall

$$|\alpha| < 1$$

ergeben sich die Wurzeln als komplexe Konjugierte und aufgrund von Gl. (2.191) ergeben sich deren Beträge zu 1. Daraus folgt, dass beide Lösungen begrenzt sind. Das bedeutet, dass der Übergang von stabilen zu instabilen Bereichen durch

$$|\alpha| = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$$

gekennzeichnet ist. Der Fall $\lambda = +1$ ist gekennzeichnet durch T- periodische Lösungen, während $\lambda = -1$ sich durch 2T- periodische Lösungen auszeichnet.

Im Falle der *Mathieuschen Differenzialgleichung* (2.153) gilt

$$\alpha = \alpha(\delta, \varepsilon) \quad (2.192)$$

Für $|\alpha| > 1$ werden die Lösungen als instabile Lösungen bezeichnet, die zugehörigen Parameter ε und δ als instabile Parameter, jene für $|\alpha| = 1$ als Übergangparameter, die zugehörigen Übergangskurven in der $\delta\varepsilon$ -Ebene trennen die stabilen von den instabilen Bereichen. Diese Diagramme werden als Stabilitätskarten oder auch Ince-Struttsche Karten bezeichnet (Merkin, 1997).

Wenn also Lösungen $u(T)$ bekannt sind, können Stabilitätsuntersuchungen problemlos durchgeführt werden. Genau darin liegt jedoch die Schwierigkeit, da nur für sehr wenige Fälle analytische Lösungen bekannt sind. Folgende Möglichkeiten bieten sich zur Analyse von nichtlinearen Differenzialgleichungen, wie z. B. parametererregten Schwingungen, an

- 1.) Einsatz von Mathematikprogrammen, in denen z. B. die Lösungen der Mathieuschen Differenzialgleichung, die Mathieuschen Funktionen, sowie die charakteristischen Exponenten implementiert sind.
- 2.) Numerische Integration der Differenzialgleichungen über die Periode 2π und anschließende Ermittlung der charakteristischen Exponenten
- 3.) Näherungslösungen für $\varepsilon \ll 1$

2.2.10.2. Lösung mittels Mathematikprogrammen

Im Programmpaket Mathematica 6 (Mathematica, 2008) sind die Mathieuschen Funktionen sowie die charakteristischen Eigenwerte λ_1 und λ_2 implementiert. Die Mathieuschen Funktionen werden als *MathieuS* für die ungeraden und *MathieuC* für die geraden Funktionen bezeichnet. Für $\varepsilon = 0$ handelt es sich dabei um Sinus- bzw. Cosinusfunktionen, was bei Betrachtung der zugehörigen Differenzialgleichung einleuchtend ist. In den nachfolgenden Abbildungen sind die *MathieuS* sowie die *MathieuC* Funktion in Abhängigkeit der Parameter δ und ε dargestellt.

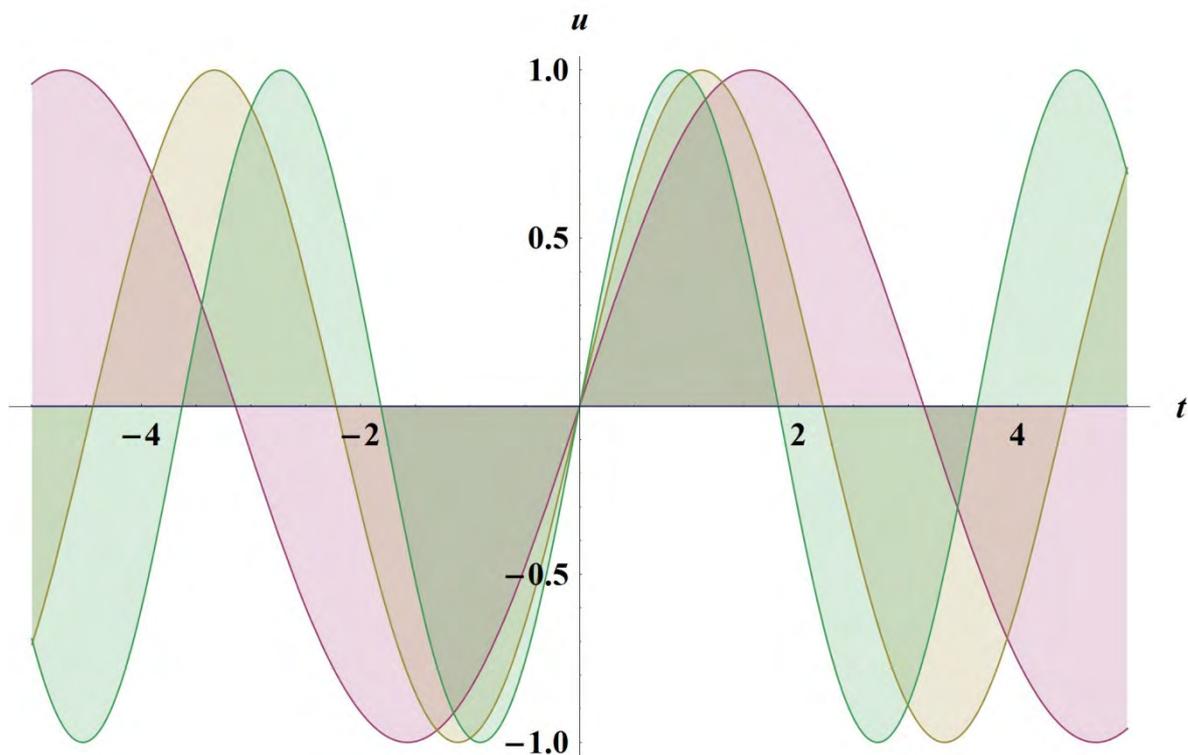


Abbildung 2.28: MathieuS (ungerade Mathieufunktion) für $\epsilon = 0$ in Abhängigkeit von $\delta = 0, 1, 2, 3$

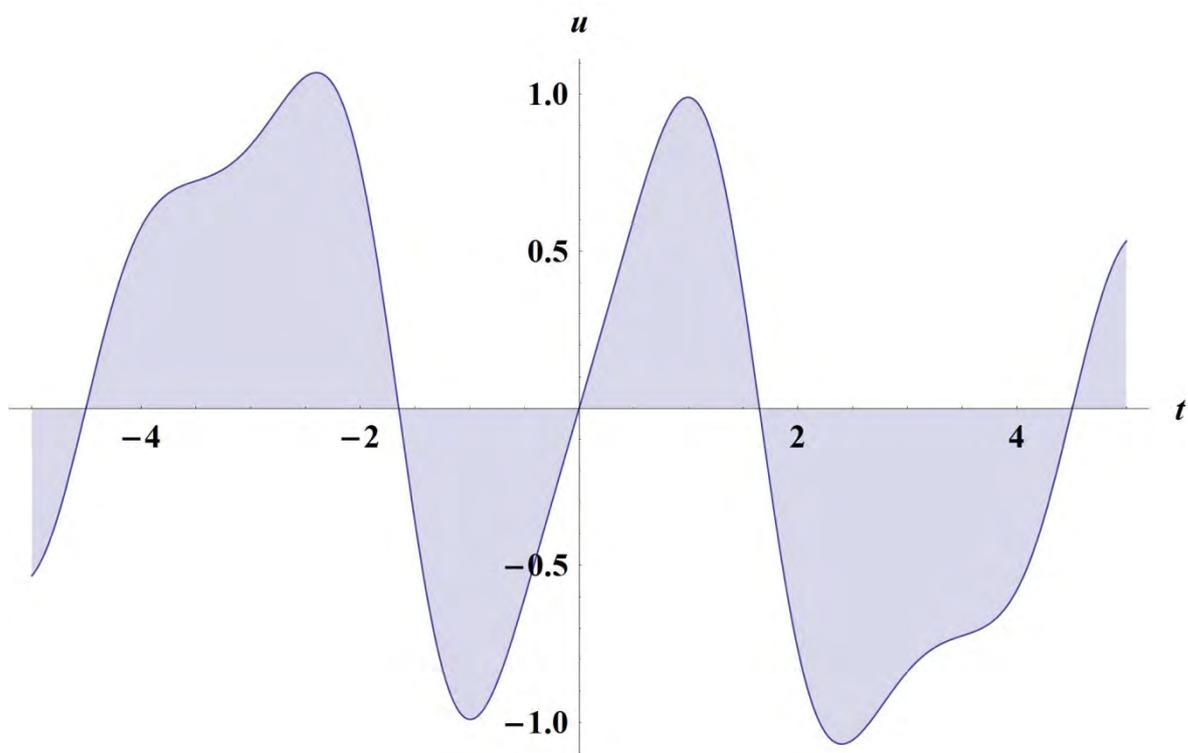


Abbildung 2.29: MathieuS (ungerade Mathieufunktion) für $\epsilon = 2$ und $\delta = 3$

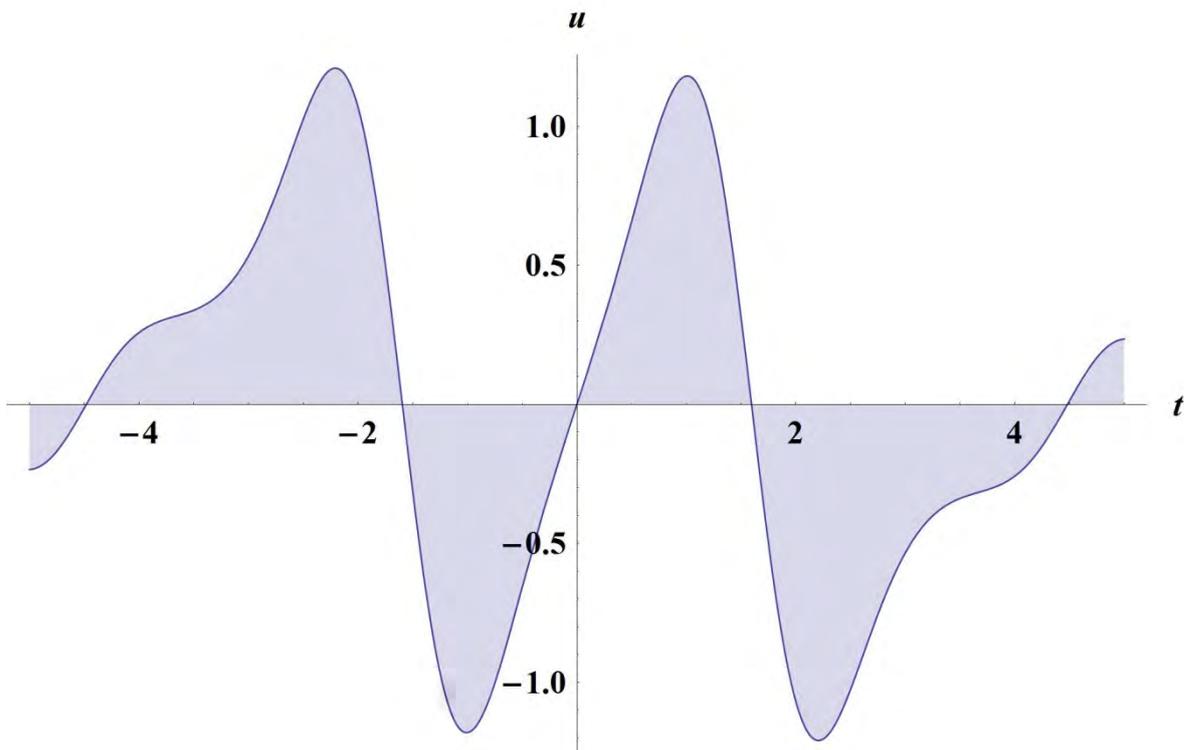


Abbildung 2.30: MathieuS (ungerade Mathieufunktion) für $\epsilon = 3$ und $\delta = 3$

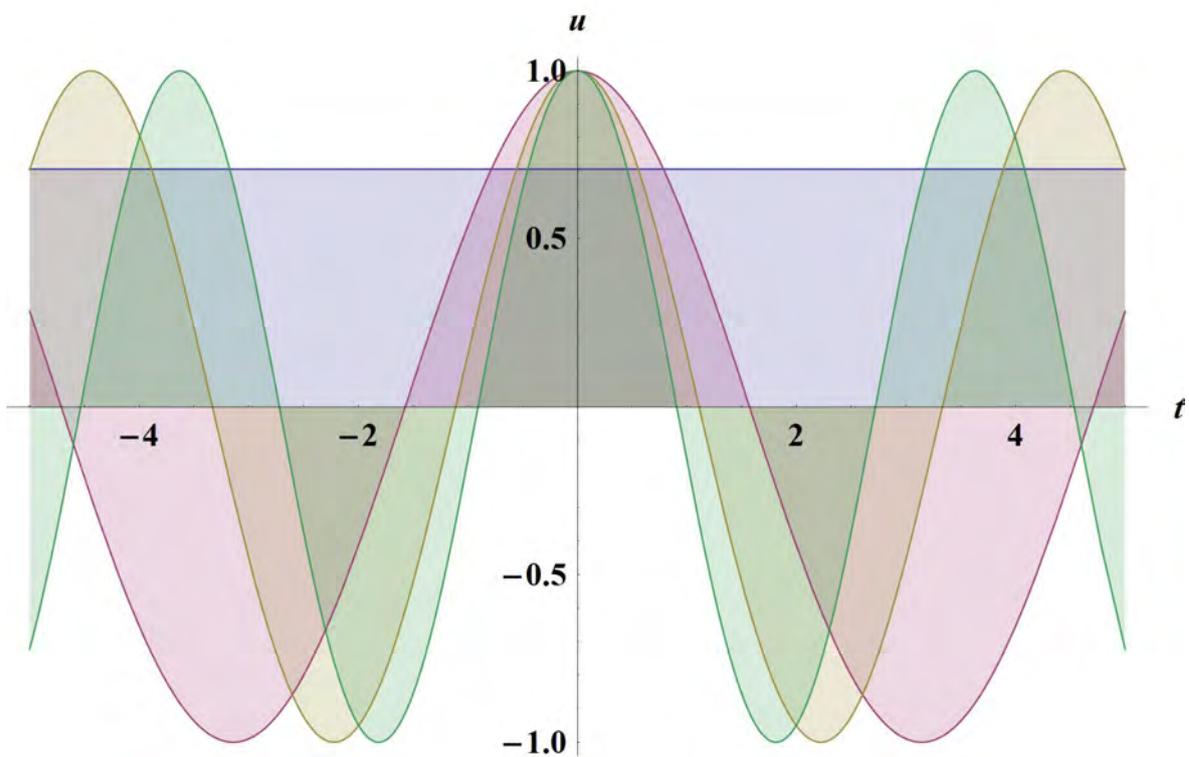


Abbildung 2.31: MathieuC (gerade Mathieufunktion) für $\epsilon = 0$ in Abhängigkeit von $\delta = 0,1,2,3$

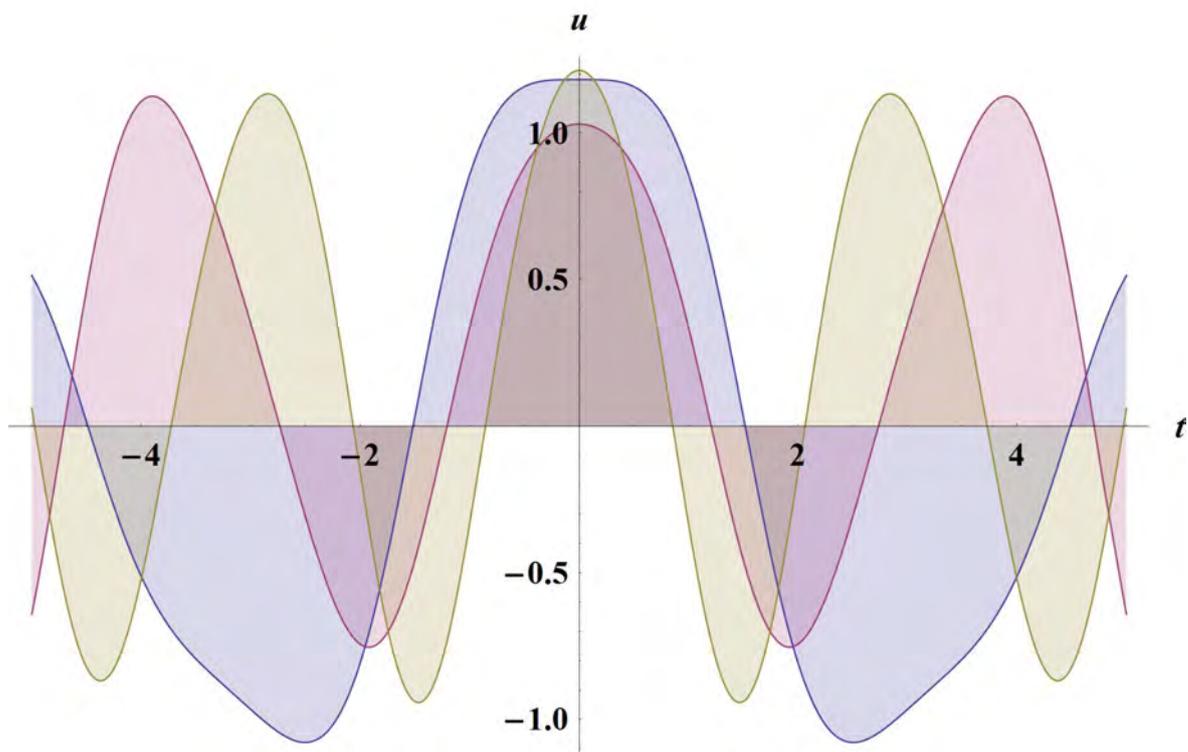


Abbildung 2.32: MathieuC (gerade Mathieufunktion) für $\epsilon = 1$ und $\delta = 2,3,5$

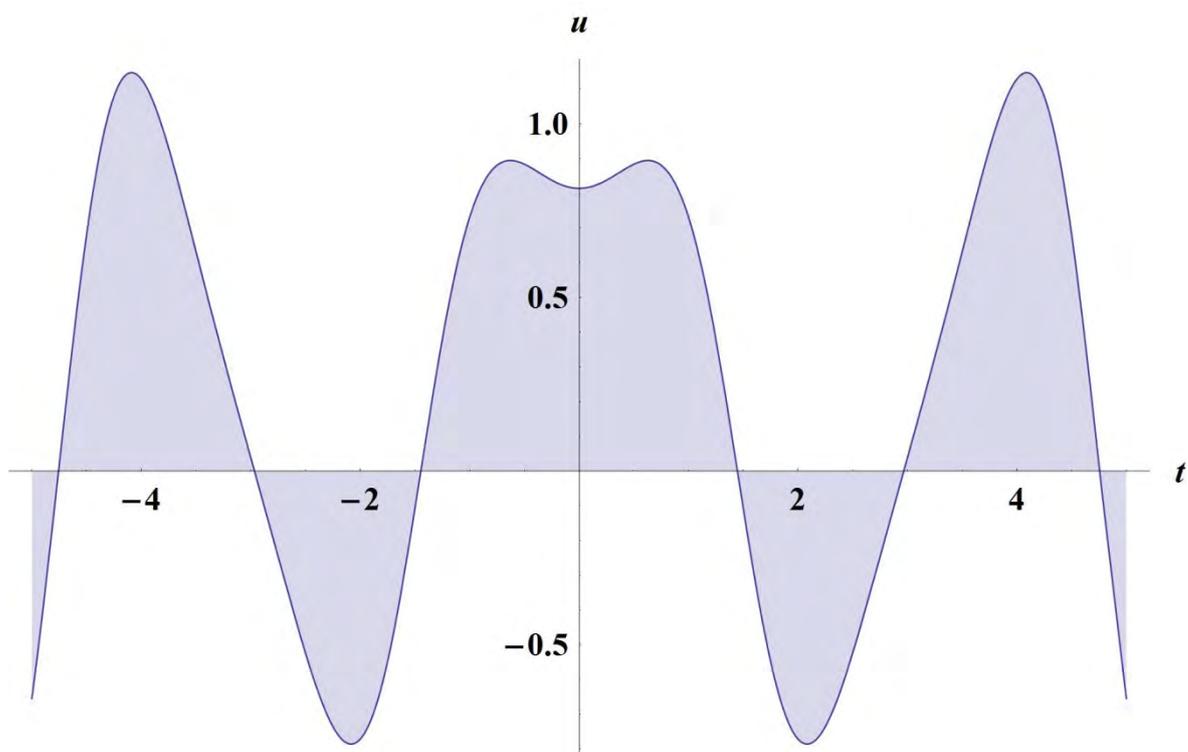


Abbildung 2.33: MathieuC (gerade Mathieufunktion) für $\epsilon = 2$ und $\delta = 3$

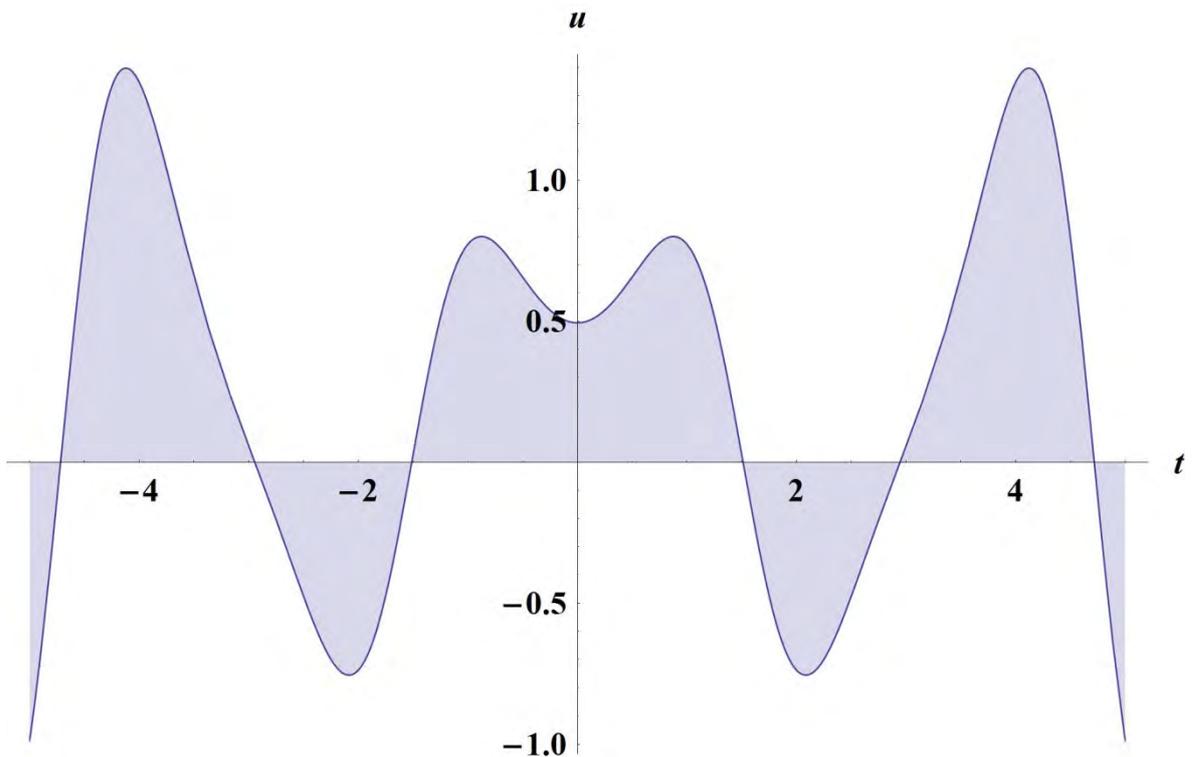


Abbildung 2.34: MathieuC (gerade Mathieufunktion) für $\epsilon = 3$ und $\delta = 3$

Die charakteristischen Eigenwerte werden als *MathieuCharacteristicA* für die geraden und *MathieuCharaceristicB* für die ungeraden Mathieufunktionen bezeichnet und werden in Abhängigkeit des charakteristischen Exponenten sowie des Parameters δ ermittelt. Nachfolgend sind die Funktionen 0-ter bis 4-ter Ordnung dargestellt.

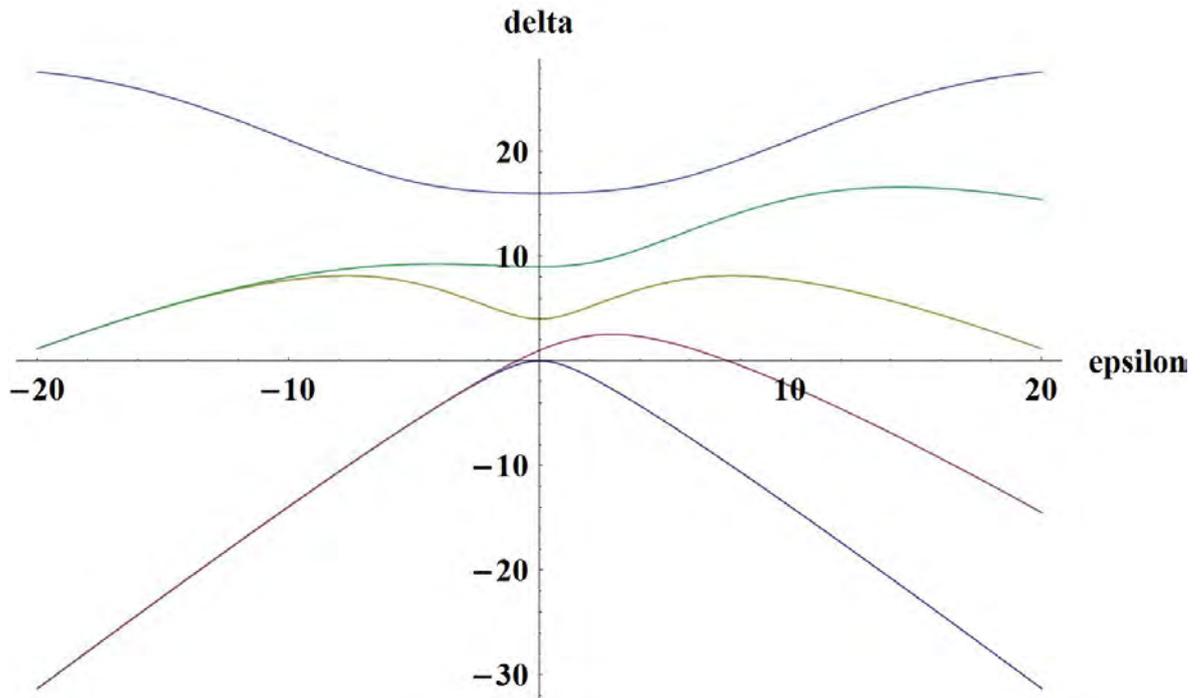


Abbildung 2.35: charakteristische Werte der Mathieugleichung für die ungeraden Lösungen

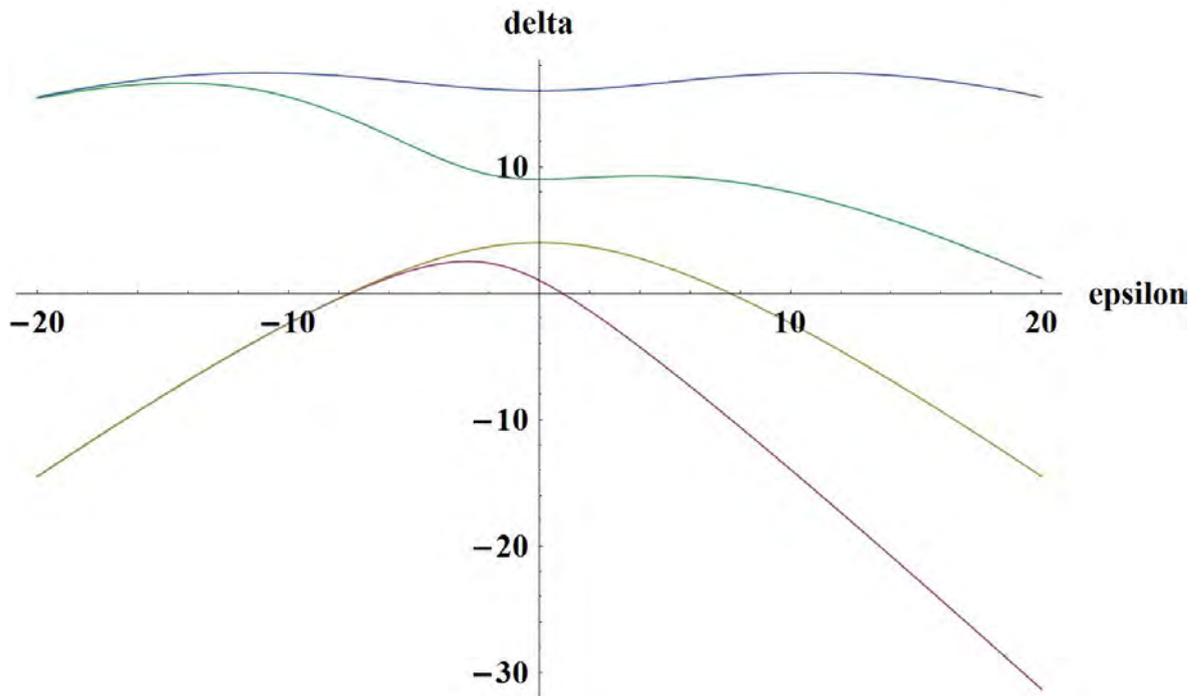


Abbildung 2.36: charakteristische Werte der Mathieugleichung für die geraden Lösungen

Stellt man beide charakteristischen Eigenwerte in einem Diagramm dar, erhält man die Stabilitätskarte (Abbildung 2.37) für die ungedämpfte Mathieusche Differenzialgleichung. Sie soll an dieser Stelle unkommentiert angeführt werden, da sie bei den numerischen Untersuchungen (Kapitel 2.2.10.3) genau analysiert wird.

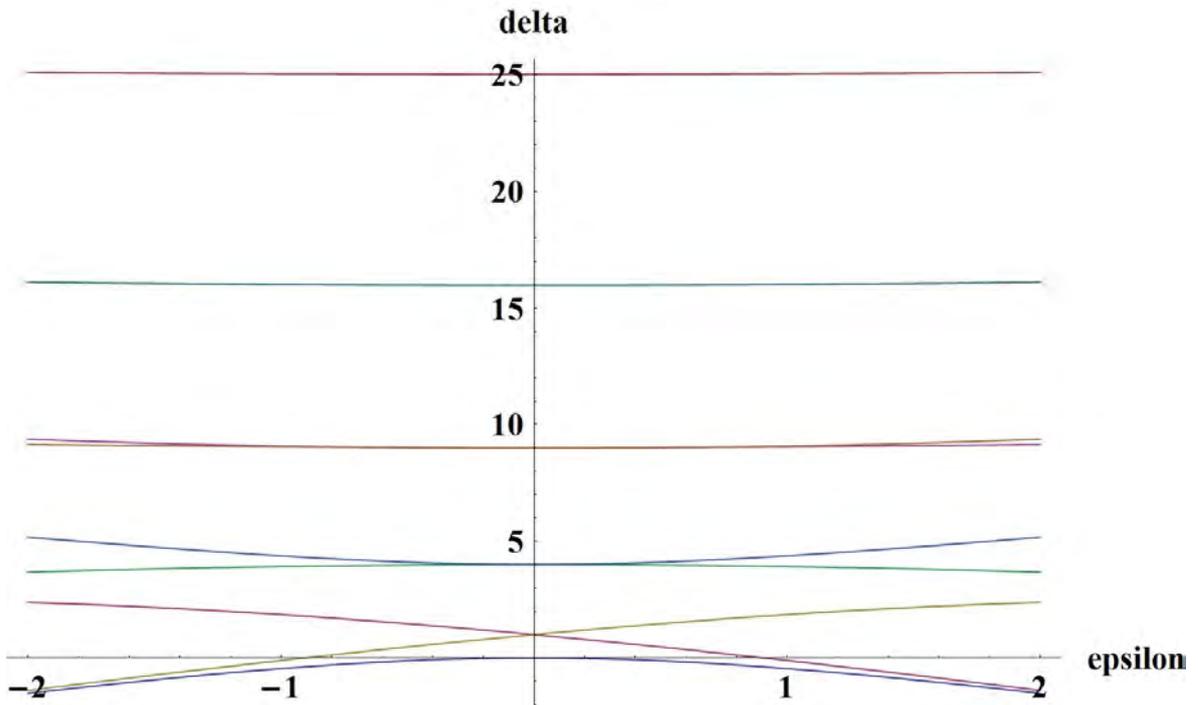


Abbildung 2.37: charakteristische Werte der Mathieugleichung für beide Lösungen – Stabilitätsgrenzen

Die implementierten Lösungen gelten jedoch nur für den ungedämpften Fall, ist Dämpfung im System vorhanden, müssen andere Lösungsverfahren angewendet werden.

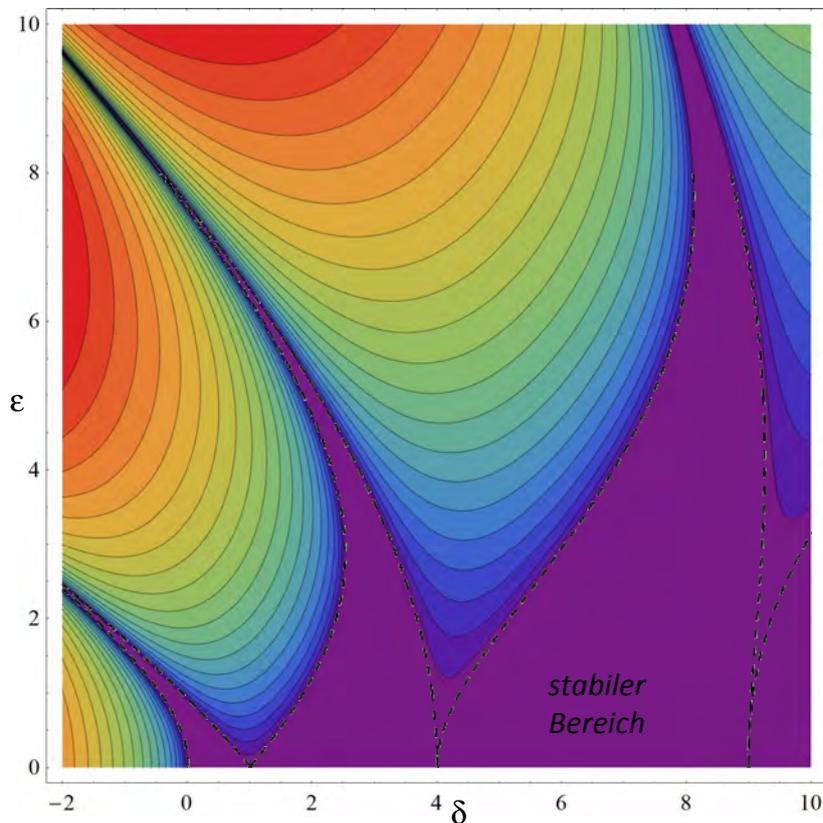


Abbildung 2.38: Konturplot der Stabilitätskarte der Mathieschen Differentialgleichung

2.2.10.3. Lösung mittels numerischer Verfahren

Um numerische Lösungsmethoden anwenden zu können, muss die Differenzialgleichung 2. Ordnung (2.153) zuerst in ein Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung übergeführt werden. Dies gelingt durch geeignete Wahl neuer Bewegungsgrößen wie folgt

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x(t) \\x_2(t) &= \dot{x}(t)\end{aligned}\tag{2.193}$$

Daraus folgt für die Mathieusche Differenzialgleichung das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -(\delta + 2\varepsilon \cos(2t))x_1(t) \end{bmatrix}\tag{2.194}$$

Ausgehend von Gl. (2.194) werden mit den Anfangsbedingungen der Gl. (2.181) mittels numerischer Integration die Lösungen für den Zeitpunkt $t = T$, also genau nach einer Periode ermittelt. Um das Integrationsintervall konstant und einfach zu halten, erfolgt zuvor noch die Transformation

$$\begin{aligned}\tau &= 2t \\ \frac{d}{dt} &= \frac{d}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = 2 \frac{d}{d\tau} \\ \frac{d^2}{dt^2} &= 4 \frac{d^2}{d\tau^2}\end{aligned}\tag{2.195}$$

die zum 2π - periodischen Differenzialgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(\tau) = x_2(\tau) \\ \dot{x}_2(\tau) = -\left(\frac{\delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \cos(\tau)\right)x_1(\tau) \end{bmatrix}\tag{2.196}$$

führt. Damit folgt für die Lösung nach einer Periode

$$\begin{bmatrix} x_1(2\pi) \\ x_2(2\pi) \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} x_2(\tau) \\ -\left(\frac{\delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \cos(\tau)\right)x_1(\tau) \end{bmatrix} d\tau\tag{2.197}$$

Diese numerische Integration wurde mithilfe des Programmpaketes Matlab 2008a (Matlab, 2008) durchgeführt. Sind die Lösungen nach einer Periode bekannt, kann die Fundamentalmatrix und daraus die zugehörigen Eigenwerte ermittelt werden. Ist der Betrag beider Eigenwerte ≤ 1 , liegt eine stabile Lösung vor, ansonsten ist die Lösung instabil (siehe vorhergehendes Kapitel).

Damit wäre eine punktweise Ermittlung der stabilen Bereiche möglich, aber nicht sehr sinnvoll. Erstens würde man dafür sehr viel Rechenzeit benötigen und zweitens könnten beim Verbinden der grenzstabilen Lösungen Fehler passieren. Abhilfe für dieses Problem bietet die Homotopie- oder Fortsetzungsmethode. Bei dieser muss zuerst eine Lösung auf dem gewünschten Ast der Stabilitätskarte gefunden werden. Ausgehend von dieser Lösung werden dann im vorgegebenen Raster, genauer Umkreis, Lösungen gefunden, die

ebenfalls die vorgegebenen Randbedingungen erfüllen. Die Fortsetzungsmethode sucht also ganz speziell nach Lösungen auf den Grenzkurven der Stabilitätskarten. Genauer zur Fortsetzungsmethode kann in (Steindl, 2008) und (Troger, 2008) nachgelesen werden. Auf eine detailliertere Beschreibung wird an dieser Stelle verzichtet. Die Eingabeskripts für die numerischen Berechnungen in Matlab können dem Anhang D entnommen werden.

Nachfolgend ist die numerisch ermittelte *Stabilitätskarte* für die ungedämpfte Mathiesche Differenzialgleichung ersichtlich gemacht. Dabei stellen die grauen Bereiche die stabilen, die weißen hingegen die instabilen Parameterpaare $\delta\epsilon$ der Mathieschen Differenzialgleichung dar. Die Beschriftung der Funktionen beschreibt die Art der Mathieufunktionen, die diesen Kurven zugrunde liegen, C für die geraden und S für die ungeraden.

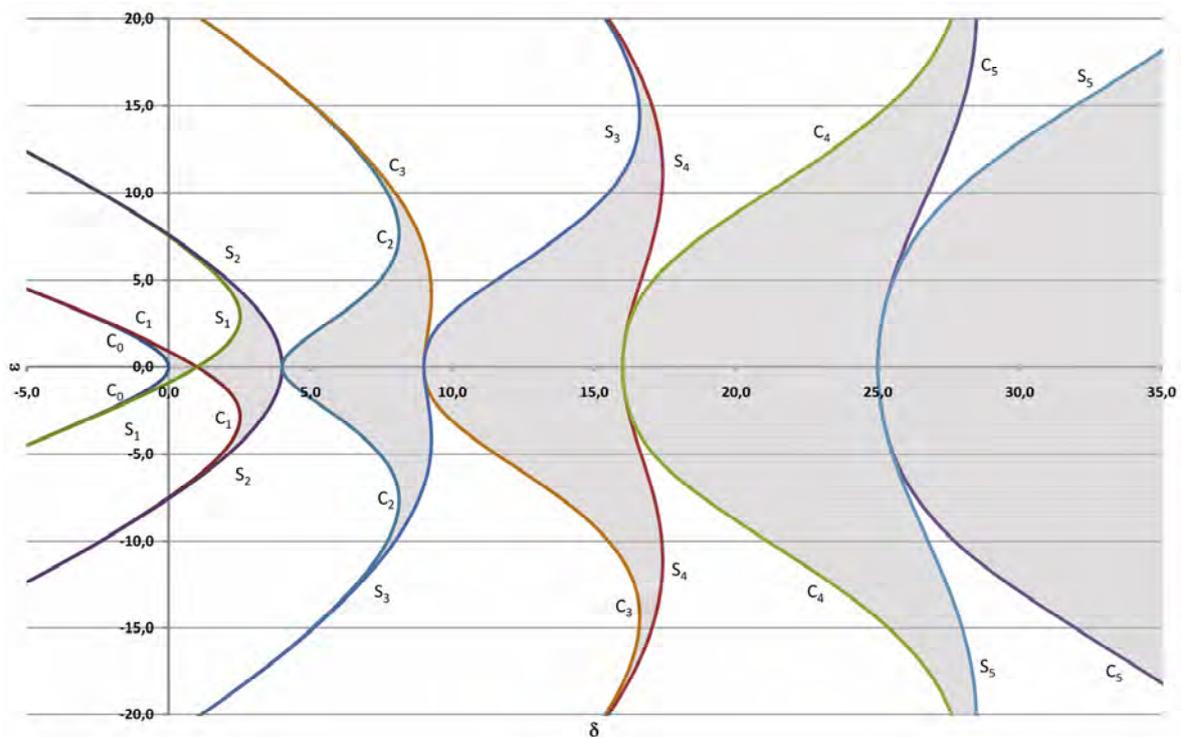


Abbildung 2.39: Stabilitätskarte für die Mathiesche Differenzialgleichung

Den Stabilitätskarten kann entnommen werden, dass Instabilität für viele Bereiche der $\delta\epsilon$ -Ebene auftreten kann. Dies bildet einen der Hauptunterschiede zu Bewegungsgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Abbildung 2.40 kann ebenfalls entnommen werden, dass es für negative δ ebenfalls Bereiche gibt, in denen eine stabile, periodische Bewegung möglich ist. Negative Werte für δ ergeben sich z. B. für das am Kopf stehende, gelenkig gelagerte Pendel, für das damit stabile Bewegungszustände möglich sind. Ebenfalls ist zu erkennen, dass die instabilen Bereiche mit größer werdendem δ immer kleiner werden und immer spitzer in Richtung der δ -Achse zusammenlaufen. Deshalb wird Instabilität für die instabilen Bereiche $> S_3$ nahezu ausgeschlossen (Klotter, 1980), die kritischen Bereiche liegen also im Bereich des Ursprungs.

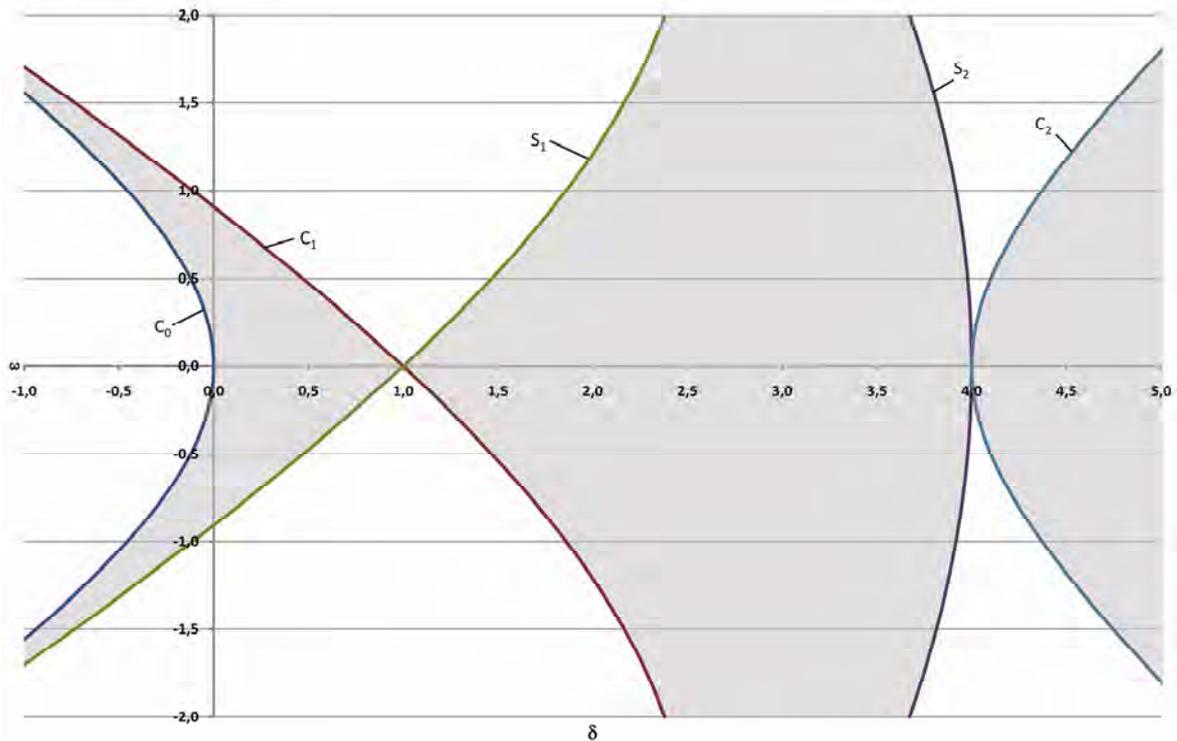


Abbildung 2.40: Stabilitätskarte für die Mathiesche Differentialgleichung (Detailbereich)

Die Berücksichtigung viskoser aber auch nichtlinearer Dämpfungsterme ist mit dem vorgestellten Verfahren ebenfalls problemlos möglich. Nachfolgend soll die Auswirkung viskoser Dämpfung auf die Stabilitätsbereiche der Mathieschen Differentialgleichung dargestellt werden. Dafür muss lediglich das Differentialgleichungssystem (2.194) um den Dämpfungsterm wie folgt erweitert werden

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -cx_2(t) - (\delta + 2\varepsilon \cos(2t))x_1(t) \end{bmatrix} \quad (2.198)$$

c beschreibt dabei den viskosen Dämpfungswert. Nachfolgend sind die Grenzkurven der Stabilitätskarte unter Berücksichtigung unterschiedlicher Dämpfungswerte dargestellt.

In Abbildung 2.41 ist ersichtlich gemacht, dass bei Vorhandensein viskoser Dämpfung die instabilen Bereiche für Werte $\delta > 0$ stark verkleinert werden, selbst bei sehr geringen Dämpfungswerten. Dieser Effekt steigt mit zunehmendem δ , was wiederum das Auftreten von Instabilitäten für höherwertige Instabilitätsbereiche nahezu ausschließt. Es ist auch erkennbar, dass die Kurve C_0 bei Vorhandensein von Dämpfung gestaucht wird. In der Literatur ist für diese Kurve oftmals eine Verschiebung nach links sowie eine Streckung angegeben (Klotter, 1980), wobei dies meist ohne (angeführte) Berechnungen angegeben wird. Dieses Ergebnis ist durch mehrmalige Überprüfung der hier vorliegenden numerischen Untersuchungen anzuzweifeln.

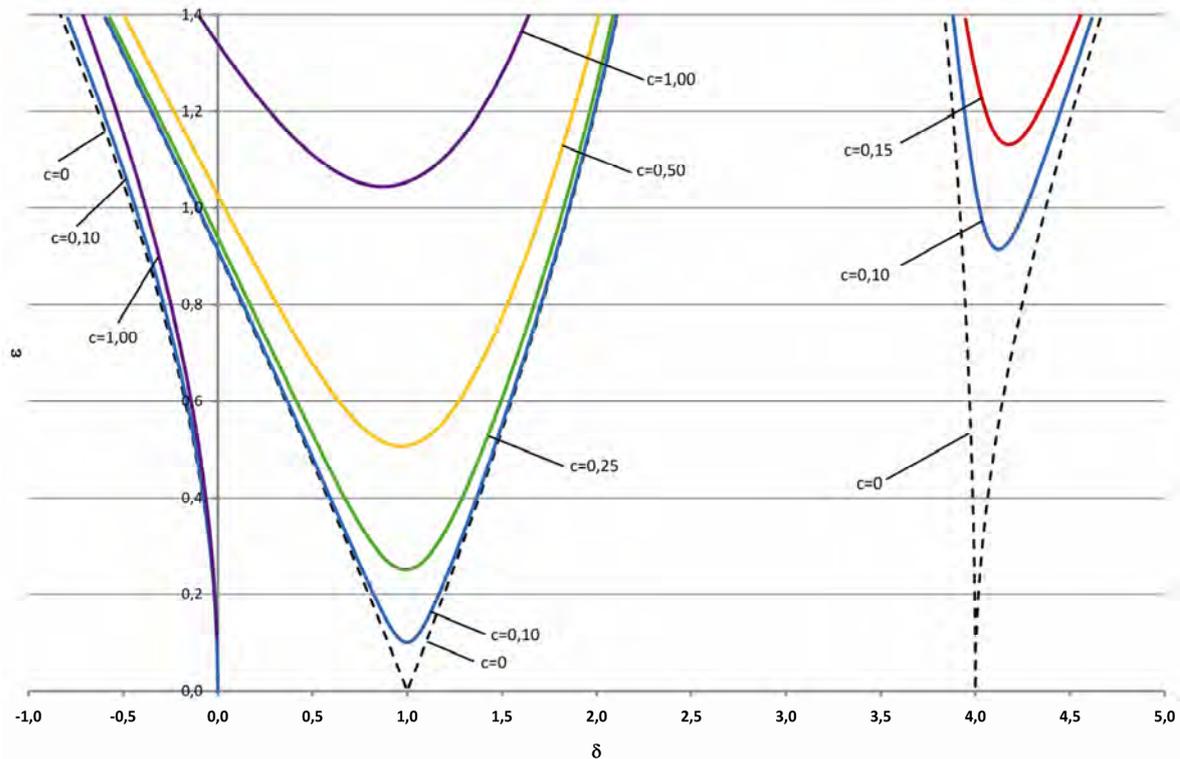


Abbildung 2.41: Stabilitätskarte für die viskos gedämpfte Mathieusche Differentialgleichung (Detailbereich)

2.2.10.4. Näherungslösungen

Die Möglichkeiten das Verhalten der stationären Schwingungen von schwingungsfähigen Systemen zu untersuchen kann prinzipiell in zwei Gruppen aufgeteilt werden

- 1.) „Methods of averaging“ und „methods of multiple scales“ (Sanders, 2007), (Verhulst, 2006)
- 2.) „Lindstedt-Poincare-technique“, „method of harmonic balance“, „Galerkin procedure“ und „method of strained parameters“ (Nayfeh, 1979), (Troger, 2008), (Klotter, 1980), (Merkin, 1997), (Tondl, 2000)

Da der Großteil der zugehörigen Literatur in englischer Sprache verfasst ist, wurden die englischen Bezeichnungen übernommen, ohne selbst kreierte Übersetzungen einzuführen. Zur näherungsweise Bestimmung der Grenzkurven der Stabilitätskarte wurde in dieser Arbeit die Methode der „strained parameters“ herangezogen.

Wir suchen π - bzw. 2π - periodische Lösungen von (siehe 2.2.10.1)

$$\ddot{x}(t) + (\delta + 2\varepsilon \cos(2t))x(t) = 0 \quad (2.199)$$

und setzen ε als klein voraus. Damit lassen sich die Bewegungsgröße $x(t)$ sowie der Parameter δ mit der, die Störung beschreibenden Erweiterungen als Funktionen von ε

folgendermaßen darstellen (Nayfeh, 1979), wobei entgegen den Angaben in der einschlägigen Fachliteratur die Lösungen bis zum kubischen Term gesucht werden, um eine höhere Genauigkeit zu erreichen

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon^3 x_3(t) + \dots \\ \delta(\varepsilon) &= \delta_0 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \varepsilon^3 \delta_3 + \dots \end{aligned} \quad (2.200)$$

Setzt man diese Ausdrücke in Gl. (2.199) ein, folgt

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_0(t) + \varepsilon \ddot{x}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{x}_2(t) + \varepsilon^3 \ddot{x}_3(t) + \dots + \\ &+ (\delta_0 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \varepsilon^3 \delta_3 + \dots + 2\varepsilon \cos(2t)) \cdot \\ &\cdot (x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon^3 x_3(t) + \dots) = 0 \end{aligned} \quad (2.201)$$

Ausmultiplizieren liefert (die Bezeichnung $x(t)$ wird in den folgenden Herleitungen der Übersicht wegen nur mehr als x angeführt)

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 + \varepsilon^2 \ddot{x}_2 + \varepsilon^3 \ddot{x}_3 + \dots + \\ &+ \delta_0 x_0 + \varepsilon \delta_0 x_1 + \varepsilon^2 \delta_0 x_2 + \varepsilon^3 \delta_0 x_3 + \dots + \\ &+ \varepsilon \delta_1 x_0 + \varepsilon^2 \delta_1 x_1 + \varepsilon^3 \delta_1 x_2 + \varepsilon^4 \delta_1 x_3 + \dots + \\ &+ \varepsilon^2 \delta_2 x_0 + \varepsilon^3 \delta_2 x_1 + \varepsilon^4 \delta_2 x_2 + \varepsilon^5 \delta_2 x_3 + \dots + \\ &+ \varepsilon^3 \delta_3 x_0 + \varepsilon^4 \delta_3 x_1 + \varepsilon^5 \delta_3 x_2 + \varepsilon^6 \delta_3 x_3 + \dots + \\ &+ 2\varepsilon x_0 \cos(2t) + 2\varepsilon^2 x_1 \cos(2t) + 2\varepsilon^3 x_2 \cos(2t) + 2\varepsilon^4 x_3 \cos(2t) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (2.202)$$

Führt man nun einen Koeffizientenvergleich für ε durch, folgt

$$\ddot{x}_0 + \delta_0 x_0 = 0 \quad (2.203)$$

$$\ddot{x}_1 + \delta_0 x_1 + \delta_1 x_0 + 2x_0 \cos(2t) = 0 \quad (2.204)$$

$$\ddot{x}_2 + \delta_0 x_2 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_0 + 2x_1 \cos(2t) = 0 \quad (2.205)$$

$$\ddot{x}_3 + \delta_0 x_3 + \delta_1 x_2 + \delta_2 x_1 + \delta_3 x_0 + 2x_2 \cos(2t) = 0 \quad (2.206)$$

Die periodischen Lösungen von Gl. (2.203) lauten mit Periode π

$$x_0 = a \cos(2nt) + b \sin(2nt) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.207)$$

und mit Periode 2π

$$x_0 = a \cos((2n-1)t) + b \sin((2n-1)t) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.208)$$

Untersucht werden sollen die Fälle $\delta_0 = 0, 1$ und 4 , da nur diese instabile Lösungen liefern. Dies findet man durch Probieren oder zuvor durchgeführte numerische Studien heraus. In den weiteren Herleitungen wird von den Winkelidentitäten aus Gl. (2.9) bis (2.11) Gebrauch gemacht.

$\delta_0 = 0, n = 0, \pi$ -periodisch

Welche Lösung für den jeweiligen Fall die richtige ist, π - oder 2π -periodisch und das zugehörige n , kann nur durch Einsetzen in Gl. (2.203) und probieren herausgefunden werden.

Die Lösung für diesen Fall lautet

$$x_0 = a \cos(0) + b \sin(0) = a \quad (2.209)$$

Damit folgt aus Gl. (2.204)

$$\dot{x}_1 = -\delta_1 a - 2a \cos(2t) \quad (2.210)$$

Für eine begrenzte, periodische Lösung muss

$$\delta_1 = 0 \quad (2.211)$$

sein. Es folgt

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2a \cos(2t) \\ x_1 &= \frac{1}{2} a \cos(2t) \end{aligned} \quad (2.212)$$

Einsetzen von Gl. (2.211) und (2.212) in (2.205) liefert

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= -\delta_2 a - 2 \frac{1}{2} a \cos(2t) \cos(2t) \\ &= -\delta_2 a - a \cos^2(2t) = \\ &= -\delta_2 a - \frac{1}{2} a (\cos(4t) + 1) = \\ &= -a \left(\delta_2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} a \cos(4t) \end{aligned} \quad (2.213)$$

Ein periodischer Ausdruck für x_2 ergibt sich nur, wenn

$$\delta_2 = -\frac{1}{2} \quad (2.214)$$

gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= -\frac{1}{2} a \cos(4t) \\ x_2 &= \frac{1}{32} a \cos(4t) \end{aligned} \quad (2.215)$$

Setzt man Gl. (2.214) und (2.215) in (2.206) ein, folgt

$$\begin{aligned} \ddot{x}_3 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} a \cos(2t) - \delta_3 a - 2 \frac{1}{32} a \cos(4t) \cos(2t) \\ &= \frac{1}{4} a \cos(2t) - \delta_3 a - \frac{1}{16} a \frac{1}{2} (\cos(6t) + \cos(2t)) = \\ &= -\frac{1}{32} a \cos(6t) + \frac{7}{32} a \cos(2t) - \delta_3 a \end{aligned} \quad (2.216)$$

Für eine periodische Lösung muss

$$\delta_3 = 0 \quad (2.217)$$

gelten. Damit folgt für die Näherung der ersten Grenzkurve der Stabilitätskarte

$$\delta(\varepsilon) = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \quad (2.218)$$

$\delta_0 = 1, n = 0, 2\pi$ -periodisch

Durch Probieren erhält man die Lösung für diesen Fall zu

$$x_0 = a \cos(t) - b \sin(t) \quad (2.219)$$

Damit folgt aus Gl. (2.204)

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 &= -\delta_1 (a \cos(t) - b \sin(t)) - 2(a \cos(t) - b \sin(t)) \cos(2t) = \\ &= -\delta_1 a \cos(t) + \delta_1 b \sin(t) - 2a \cos(t) \cos(2t) + 2b \sin(t) \cos(2t) = \\ &= -\delta_1 a \cos(t) + \delta_1 b \sin(t) - 2a \frac{1}{2} (\cos(3t) + \cos(t)) + \\ &\quad + 2b \frac{1}{2} (\sin(3t) - \sin(t)) = \\ &= -a(\delta_1 + 1) \cos(t) + b(\delta_1 - 1) \sin(t) - a \cos(3t) + b \sin(3t) \end{aligned} \quad (2.220)$$

Für eine begrenzte, periodische Lösung muss entweder

$$\delta_1 = -1, \quad b = 0 \quad (2.221)$$

oder

$$\delta_1 = 1, \quad a = 0 \quad (2.222)$$

sein. Für *Fall 1* folgt

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 &= -a \cos(3t) \\ x_1 &= \frac{1}{8} a \cos(3t) \end{aligned} \quad (2.223)$$

Einsetzen von Gl. (2.221) und (2.223) in (2.205) liefert

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + x_2 &= \frac{1}{8} a \cos(3t) - \delta_2 a \cos(t) - 2 \frac{1}{8} a \cos(3t) \cos(2t) = \\ &= \frac{1}{8} a \cos(3t) - \delta_2 a \cos(t) - \frac{1}{8} a \cos(5t) - \frac{1}{8} a \cos(t) = \\ &= -\frac{1}{8} a \cos(5t) + \frac{1}{8} a \cos(3t) - a \left(\delta_2 + \frac{1}{8} \right) \cos(t) \end{aligned} \quad (2.224)$$

Ein periodischer Ausdruck für x_2 ergibt sich nur, wenn

$$\delta_2 = -\frac{1}{8} \quad (2.225)$$

gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 + x_2 &= \frac{1}{8}a \cos(3t) - \frac{1}{8}a \cos(5t) \\ x_2 &= \frac{1}{96}a \cos(t) (8 \cos^4(t) - 16 \cos^2(t) + 7) = \\ &= \frac{1}{192}a \cos(5t) - \frac{1}{64}a \cos(3t)\end{aligned}\tag{2.226}$$

Setzt man Gl. (2.225) und (2.226) in (2.206) ein, folgt

$$\begin{aligned}\ddot{x}_3 + x_3 &= \frac{1}{192}a \cos(5t) - \frac{1}{64}a \cos(3t) + \frac{1}{8} \frac{1}{8}a \cos(3t) - \delta_3 a \cos(t) - \\ &- 2 \left(\frac{1}{192}a \cos(5t) - \frac{1}{64}a \cos(3t) \right) \cos(2t) = \\ &= \frac{1}{192}a \cos(5t) - \delta_3 a \cos(t) - \frac{2}{192}a \frac{1}{2} (\cos(7t) + \cos(3t)) + \\ &+ \frac{2}{64}a \frac{1}{2} (\cos(5t) + \cos(t)) = \\ &= -\frac{1}{192}a \cos(7t) + \frac{1}{48}a \cos(5t) - \frac{1}{192}a \cos(3t) + a \left(\frac{1}{64} - \delta_3 \right) \cos(t)\end{aligned}\tag{2.227}$$

Für eine periodische Lösung muss

$$\delta_3 = \frac{1}{64}\tag{2.228}$$

gelten. Damit folgt für die Näherung der zweiten Grenzkurve der Stabilitätskarte

$$\delta(\varepsilon) = 1 - \varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \frac{1}{64}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)\tag{2.229}$$

Für *Fall 2* folgt

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + x_1 &= b \sin(3t) \\ x_1 &= -\frac{1}{8}b \sin(3t)\end{aligned}\tag{2.230}$$

Einsetzen von Gl. (2.222) und (2.230) in (2.205) liefert

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 + x_2 &= \frac{1}{8}b \sin(3t) + \delta_2 b \sin(t) + 2 \frac{1}{8}b \sin(3t) \cos(2t) = \\ &= \frac{1}{8}b \sin(3t) + \delta_2 b \sin(t) + \frac{1}{8}b \sin(5t) + \frac{1}{8}b \sin(t) = \\ &= \frac{1}{8}b \sin(5t) + \frac{1}{8}b \sin(3t) + b \left(\delta_2 + \frac{1}{8} \right) \sin(t)\end{aligned}\tag{2.231}$$

Ein periodischer Ausdruck für x_2 ergibt sich nur, wenn

$$\delta_2 = -\frac{1}{8}\tag{2.232}$$

gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 + x_2 &= \frac{1}{8}b \sin(5t) + \frac{1}{8}b \sin(3t) \\ x_2 &= -\frac{1}{96}b \sin(t) (8 \cos^4(t) - 1) = \\ &= -\frac{1}{192}b \sin(5t) - \frac{1}{64}b \sin(3t)\end{aligned}\tag{2.233}$$

Setzt man Gl. (2.232) und (2.233) in (2.206) ein, folgt

$$\begin{aligned}\ddot{x}_3 + x_3 &= \frac{1}{192}b \sin(5t) + \frac{1}{64}b \sin(3t) - \frac{1}{8} \frac{1}{8}b \sin(3t) + \delta_3 b \sin(t) + \\ &+ 2 \left(\frac{1}{192}b \sin(5t) + \frac{1}{64}b \sin(3t) \right) \cos(2t) = \\ &= \frac{1}{192}b \sin(5t) + \delta_3 b \sin(t) + \frac{1}{96}b \frac{1}{2} (\sin(7t) + \sin(3t)) + \\ &+ \frac{1}{32}b \frac{1}{2} (\sin(5t) + \sin(t)) = \\ &= \frac{1}{192}b \sin(7t) + \frac{1}{48}b \sin(5t) + \frac{1}{192}b \sin(3t) + b \left(\frac{1}{64} + \delta_3 \right) \sin(t)\end{aligned}\tag{2.234}$$

Für eine periodische Lösung muss

$$\delta_3 = -\frac{1}{64}\tag{2.235}$$

gelten. Damit folgt für die Näherung der dritten Grenzkurve der Stabilitätskarte

$$\delta(\varepsilon) = 1 + \varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{64}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)\tag{2.236}$$

$\delta_0 = 4$, $n = 1$, 2π -periodisch

Durch Probieren erhält man die Lösung für diesen Fall zu

$$x_0 = a \cos(2t) + b \sin(2t)\tag{2.237}$$

Damit folgt aus Gl. (2.204)

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + 4x_1 &= -\delta_1 (a \cos(2t) + b \sin(2t)) - 2(a \cos(2t) + b \sin(2t)) \cos(2t) = \\ &= -\delta_1 a \cos(2t) - \delta_1 b \sin(2t) - 2a \frac{1}{2} (\cos(4t) + 1) - 2b \frac{1}{2} \sin(4t) = \\ &= -\delta_1 (a \cos(2t) + b \sin(2t)) - a(1 + \cos(4t)) - b \sin(4t)\end{aligned}\tag{2.238}$$

Für eine begrenzte, periodische Lösung muss

$$\delta_1 = 0\tag{2.239}$$

sein. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + 4x_1 &= -a(1 + \cos(4t)) - b \sin(4t) \\ x_1 &= -\frac{1}{4}a + \frac{1}{12}a \cos(4t) + \frac{1}{12}b \sin(4t)\end{aligned}\tag{2.240}$$

Einsetzen von Gl. (2.239) und (2.240) in (2.205) liefert

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 + 4x_2 &= -\delta_2(a \cos(2t) + b \sin(2t)) - 2\left(-\frac{1}{4}a + \frac{1}{12}a \cos(4t) + \frac{1}{12}b \sin(4t)\right) \cdot \\ &\quad \cdot \cos(2t) = \\ &= -\delta_2 a \cos(2t) - \delta_2 b \sin(2t) + \frac{1}{2}a \cos(2t) - \frac{1}{6}a \frac{1}{2}(\cos(6t) + \cos(2t)) - \\ &\quad - \frac{1}{6}b \frac{1}{2}(\sin(6t) + \sin(2t)) = \\ &= -\frac{1}{12}a \cos(6t) - \frac{1}{12}b \sin(6t) - a\left(\delta_2 - \frac{5}{12}\right)\cos(2t) - b\left(\delta_2 + \frac{1}{12}\right) \cdot \\ &\quad \cdot \sin(2t)\end{aligned}\tag{2.241}$$

Für eine begrenzte, periodische Lösung muss entweder

$$\delta_2 = \frac{5}{12}, \quad b = 0\tag{2.242}$$

oder

$$\delta_2 = -\frac{1}{12}, \quad a = 0\tag{2.243}$$

sein. Für *Fall 1* folgt

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 + 4x_2 &= -\frac{1}{12}a \cos(6t) \\ x_2 &= \frac{1}{420}a \cos(6t)\end{aligned}\tag{2.244}$$

Setzt man Gl. (2.242) und (2.244) in (2.206) ein, folgt

$$\begin{aligned}\ddot{x}_3 + 4x_3 &= -\frac{5}{12}\left(-\frac{1}{4}a + \frac{1}{12}a \cos(4t)\right) - \delta_3 a \cos(2t) - 2\frac{1}{420}a \cos(6t) \cos(2t) = \\ &= \frac{5}{48}a - \frac{5}{144}a \cos(4t) - \delta_3 a \cos(2t) - \frac{1}{210}a \frac{1}{2}(\cos(8t) + \cos(4t)) = \\ &= \frac{5}{48}a - \frac{187}{5040}a \cos(4t) - \frac{1}{420}a \cos(8t) - \delta_3 a \cos(2t)\end{aligned}\tag{2.245}$$

Für eine periodische Lösung muss

$$\delta_3 = 0\tag{2.246}$$

gelten. Damit folgt für die Näherung der vierten Grenzkurve der Stabilitätskarte

$$\delta(\varepsilon) = 4 + \frac{5}{12}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)\tag{2.247}$$

Für Fall 2 folgt

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 + 4x_2 &= -\frac{1}{12}b \sin(6t) \\ x_2 &= \frac{1}{384}b \sin(6t)\end{aligned}\tag{2.248}$$

Setzt man Gl. (2.243) und (2.248) in (2.206) ein, folgt

$$\begin{aligned}\ddot{x}_3 + 4x_3 &= \frac{1}{12} \frac{1}{12} b \sin(4t) - \delta_3 b \sin(2t) - 2 \frac{1}{384} b \sin(6t) \cos(2t) = \\ &= \frac{1}{144} b \sin(4t) - \delta_3 b \sin(2t) - \frac{2}{384} b \frac{1}{2} (\sin(8t) + \sin(4t)) = \\ &= -\frac{1}{384} b \sin(8t) + \frac{5}{1152} b \sin(4t) - \delta_3 b \sin(2t)\end{aligned}\tag{2.249}$$

Für eine periodische Lösung muss

$$\delta_3 = 0\tag{2.250}$$

gelten. Damit folgt für die Näherung der fünften Grenzkurve der Stabilitätskarte

$$\delta(\varepsilon) = 4 - \frac{1}{12} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)\tag{2.251}$$

Zusammenfassend lauten die approximierten Funktionen für die Grenzkurven der Stabilitätskarte

$$\begin{aligned}\delta_{C_0}(\varepsilon) &= -\frac{1}{2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \\ \delta_{C_1}(\varepsilon) &= 1 - \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 + \frac{1}{64} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \\ \delta_{S_1}(\varepsilon) &= 1 + \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 - \frac{1}{64} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \\ \delta_{C_2}(\varepsilon) &= 4 + \frac{5}{12} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \\ \delta_{S_2}(\varepsilon) &= 4 - \frac{1}{12} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)\end{aligned}\tag{2.252}$$

Nachfolgend sind die näherungsweise ermittelten Grenzkurven der Stabilitätskarte dargestellt. Da ε als klein vorausgesetzt wurde, soll an dieser Stelle durch Vergleich der approximierten mit den exakten Grenzkurven der Bereich für ε angegeben werden, für den die Näherungslösungen zulässig sind. Dabei wird eine Abweichung von 3 % als Kriterium herangezogen.

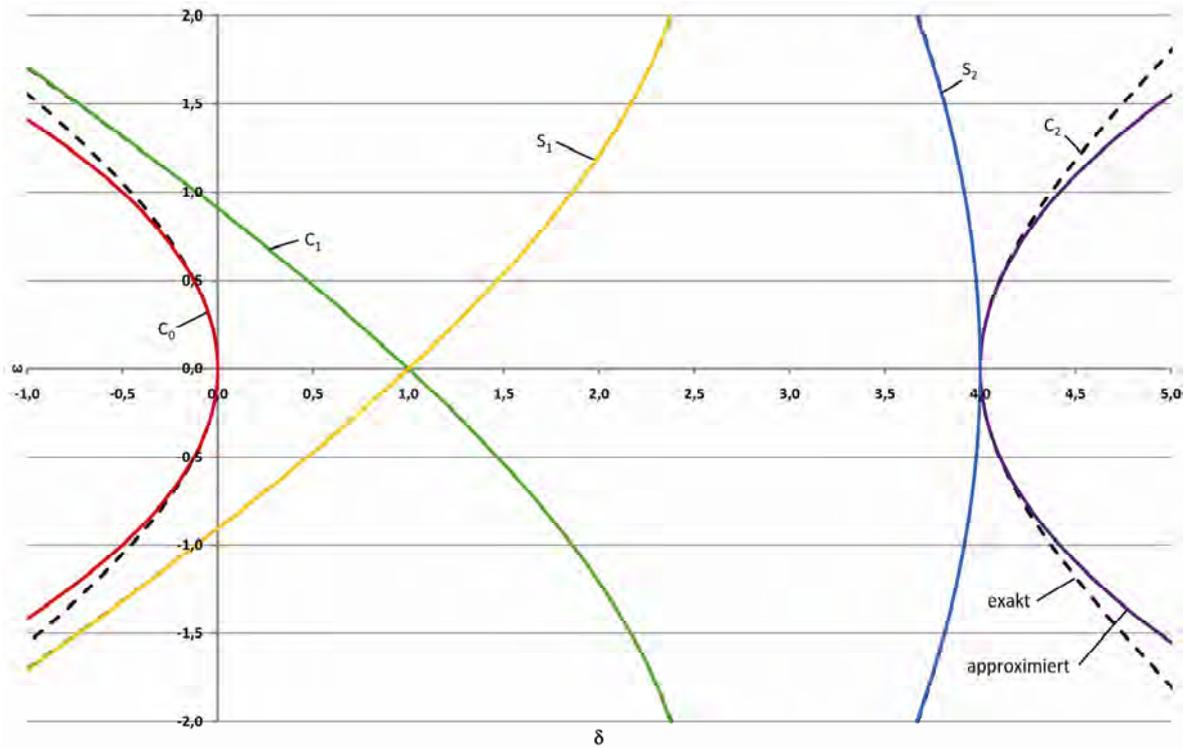


Abbildung 2.42: approximierte Grenzkurven der Stabilitätskarte sowie Gegenüberstellung mit den exakten Grenzkurven

Der Abbildung kann entnommen werden, dass die Approximation für die in dieser Arbeit interessanten Grenzkurven C_1 und S_1 bis zu ε -Werten von 2,0 und darüber hinaus sehr gut übereinstimmen und innerhalb der gewählten Genauigkeitsschranke von 3 % liegen. Damit besteht für diesen Bereich die Möglichkeit, die Näherungslösungen als analytische Funktionen für die Bestimmung des Stabilitätsverhaltens des Flüssigkeitsschwingungstilgers anzuwenden (siehe Kapitel 5.1.4)

3. VERSUCHSANLAGE ZUR ERZEUGUNG UND MESSUNG VON BRÜCKENSCHWINGUNGEN

3.1. Versuchsbrücke

3.1.1. Konstruktion

Um die Eigenschaften und Wirkungsweise des Flüssigkeitsschwingungstilgers ohne Maßstabsverzerrungen untersuchen zu können, wurde vom Verfasser eine Stahl-Holzbrücke mit einer Spannweite von 10 m entworfen, konstruiert und auf ihr statisches und dynamisches Verhalten hin numerisch untersucht. Die Versuchsbrücke, die Teil einer Versuchsanlage der Technischen Universität Wien, Institut für Tragkonstruktionen - Stahlbau ist, wurde mit für Eisenbahnbrücken typischen Abmessungen sowie mit dem Regeloberbau der Österreichischen Bundesbahnen, 550 mm Schotterbett, Stahlbetonschwellen und UIC60 Schienen, entworfen. Wie den nachfolgenden Abbildungen (Abbildung 3.1 bis Abbildung 3.12) entnommen werden kann, besteht die Haupttragstruktur aus einem Trägerrost mit zwei Hauptträgern und fünf Querträgern der Stahlgüte S355J2+N. Die Quertragstruktur wird gebildet durch Vollhölzer 180 x 200 mm der Holzgüte C30, die Decklage sowie die seitliche Schotterbettbegrenzung wurde mittels Doka Schaltafeln Eco 3-s realisiert. Zur Stabilisierung der seitlichen Schotterbettbegrenzung wurden L-Winkel, bestehend aus zwei zusammengeschweißten U-Profilen, auf die Kanthölzer aufgeschraubt. Zur Befestigung der Unwuchterreger wurden Rahmen in den Viertelpunkten sowie im Mittelpunkt der Versuchsbrücke angeordnet. Diese sind, wie die L-Winkel aus S235JR, und können bei Bedarf demontiert werden. Die gesamte Brückenkonstruktion ist auf Auflagerbänken aus Stahlbeton mit darauf montierten Elastomerkissen gelagert.

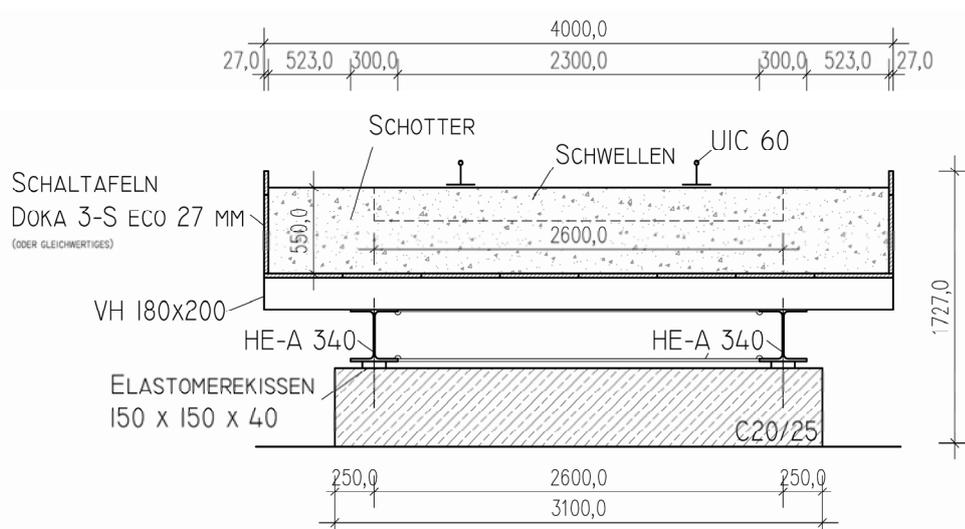


Abbildung 3.1: Regelquerschnitt der Versuchsbrücke

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

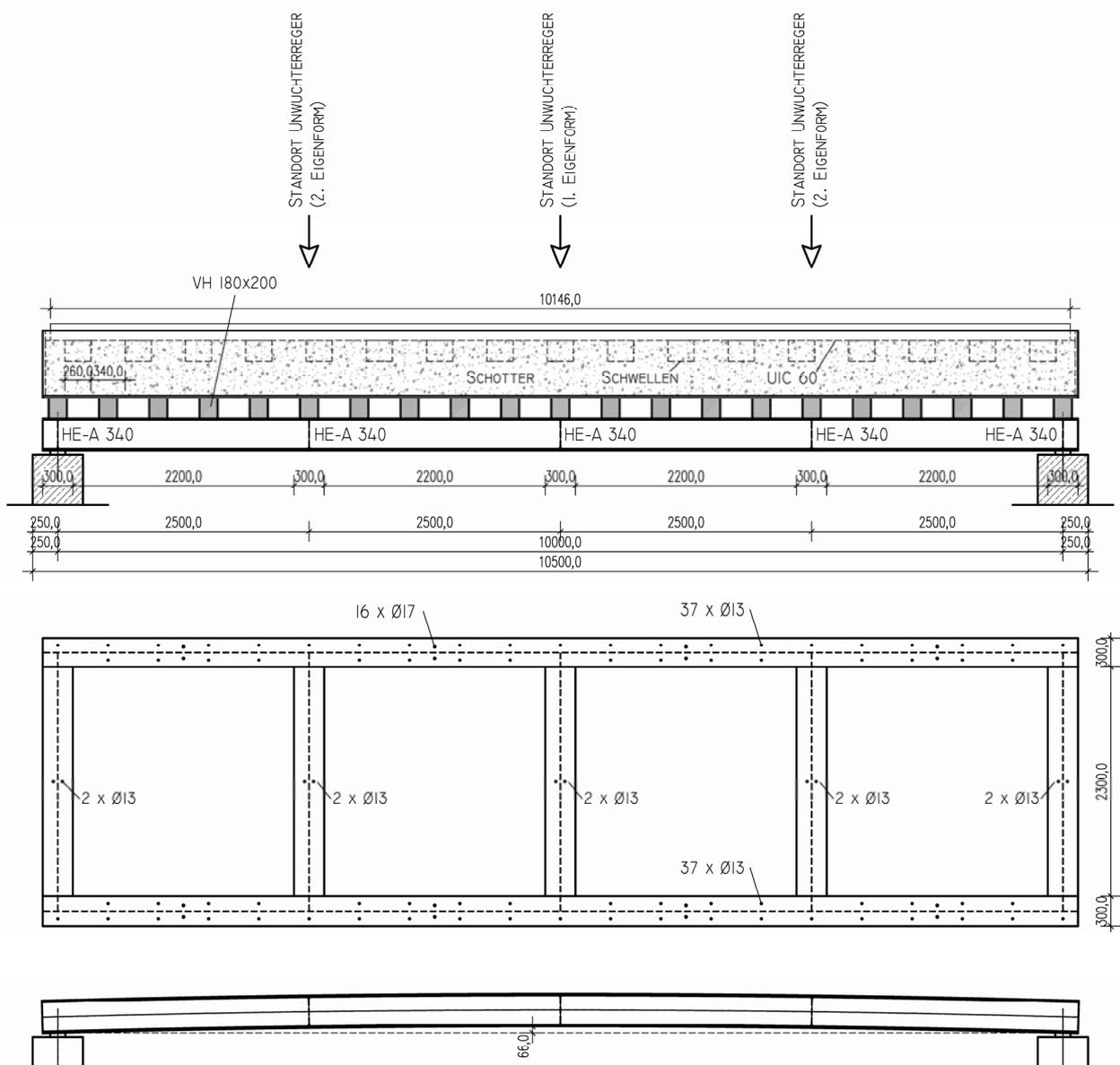


Abbildung 3.2: Längsschnitt, Grundriss und Werkstattform der Versuchsbrücke

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

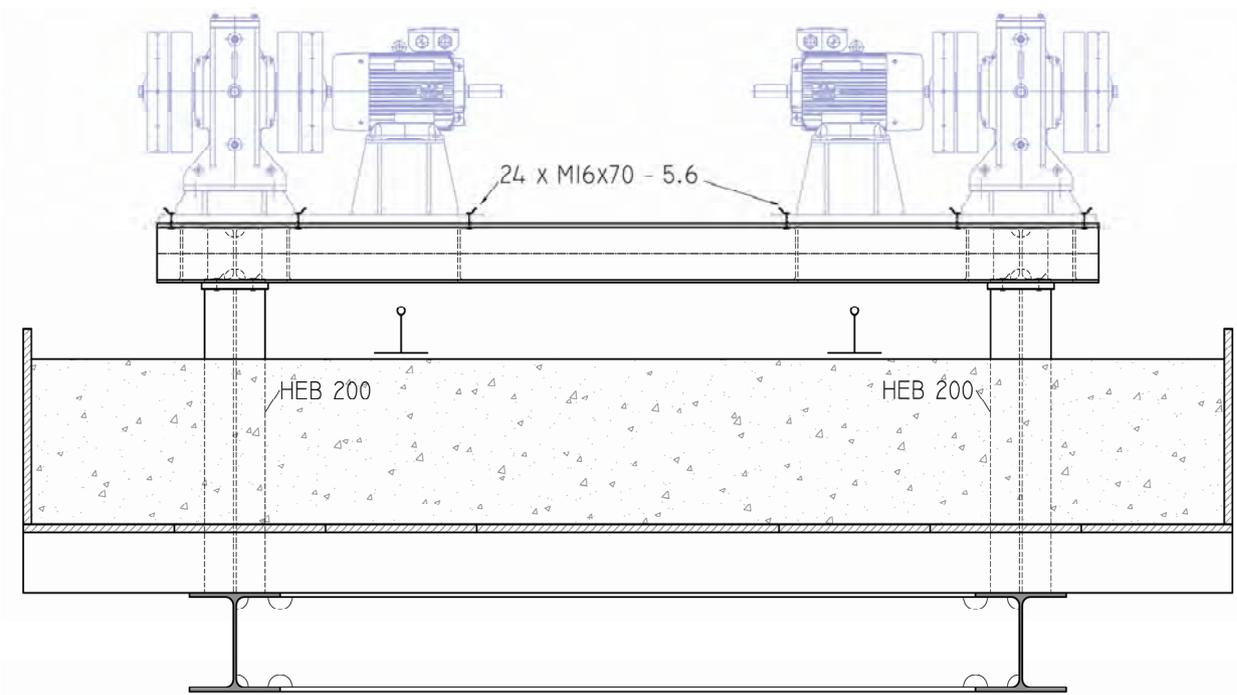


Abbildung 3.3: Befestigungsrahmen für die Unwuchterreger (Brückenmitte)

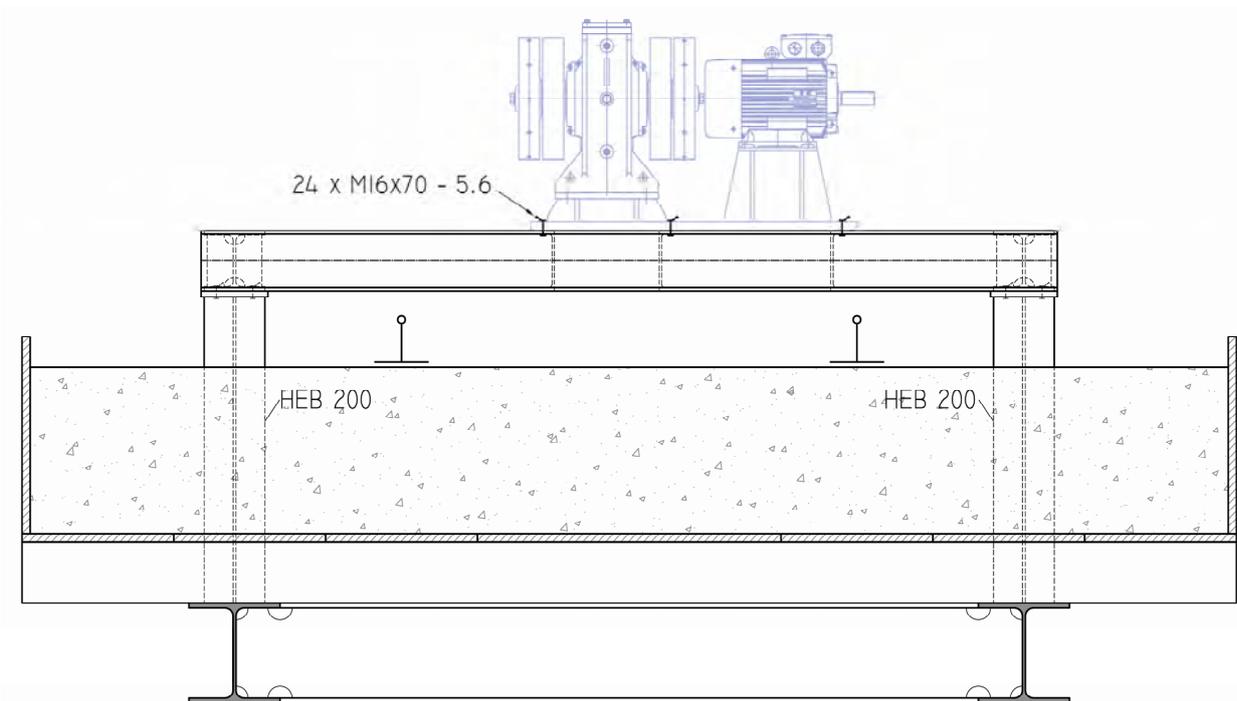


Abbildung 3.4: Befestigungsrahmen für die Unwuchterreger (Brückenviertelpunkte)

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

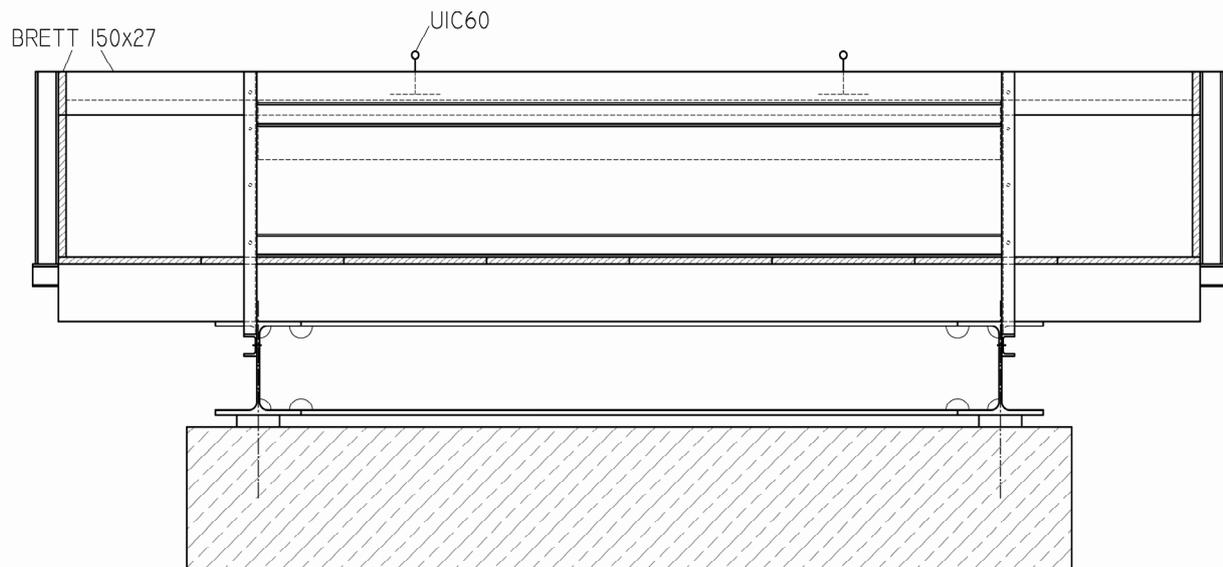


Abbildung 3.5: Befestigungswinkel für die seitlichen Schotterbettbegrenzungen (Ansicht)

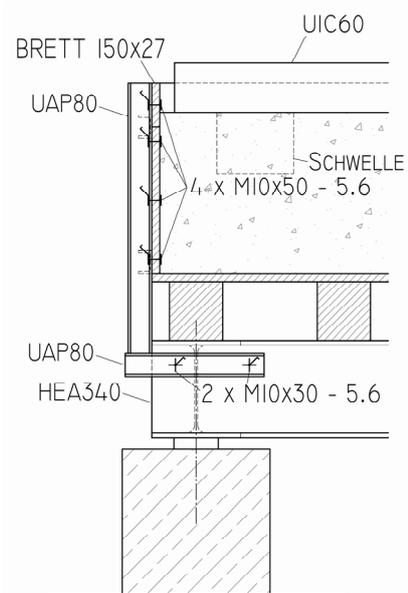


Abbildung 3.6: Befestigungswinkel für die seitlichen Schotterbettbegrenzungen (Schnitt)

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen



Abbildung 3.7: Trägerrost bestehend aus HEA340, S355J2+N sowie Auflagerbänke



Abbildung 3.8: Haupttragstruktur mit Querträgern Vollholz 180 x 200 mm, C30

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

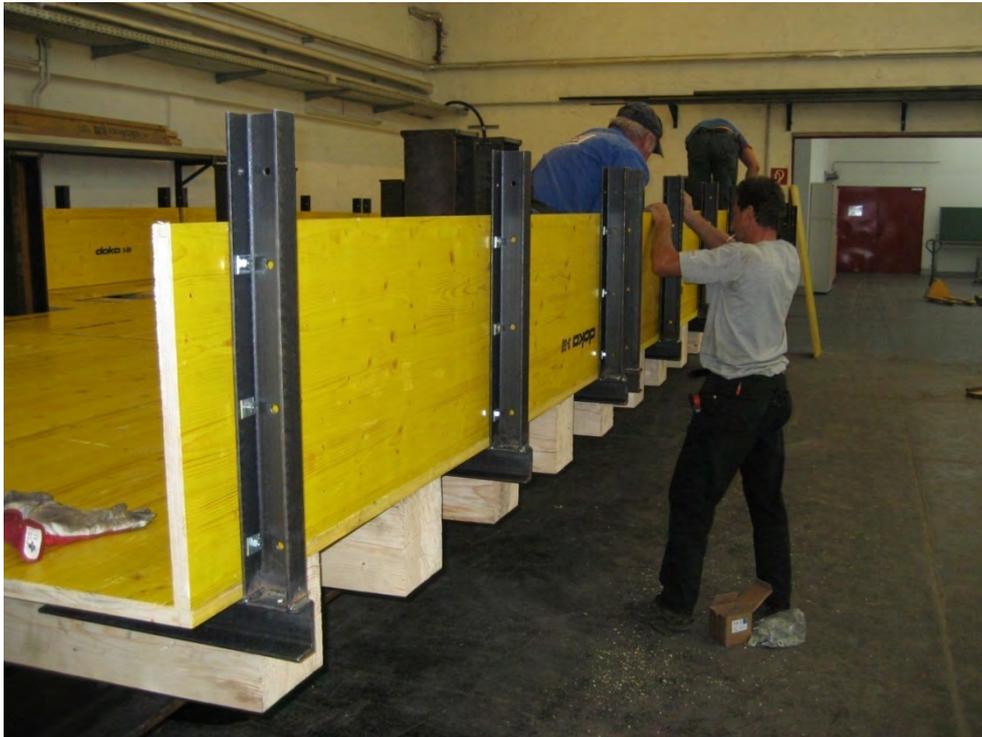


Abbildung 3.9: Montage der seitlichen Winkel für die Schotterbettbegrenzung



Abbildung 3.10: Versuchsbrücke nach der Fertigstellung

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen



Abbildung 3.11: Montagerahmen für die Unwuchterreger



Abbildung 3.12: Anschluss der Unwuchterregerahmen



Abbildung 3.13: Auflagerausbildung mit Fixierungsanker und Elastomereissen

Um Zwänge bei der Brückenbewegung so gut wie möglich zu vermeiden, wurde eine Seite der Brücke mit festen Auflagern, die gegenüberliegende Seite durch Anordnung von Langlöchern mit längs beweglichen Auflagern ausgebildet. Aus denselben Gründen wurden zwischen den vertikalen Rahmenstielen und horizontalen Rahmenriegeln der Befestigungsrahmen für die Unwuchterreger 10 mm dicke Gummimatten eingebaut (Abbildung 3.12).

3.1.2. Statische und dynamische Untersuchungen

Die statischen und dynamischen Untersuchungen wurden mithilfe des Programmpaketes Sofistik (Sofistik, 2008) durchgeführt. Dafür wurde das Tragwerk mittels Finiter Balkenelemente mit sieben Freiheitsgraden pro Knoten diskretisiert. Modelliert wurden die Haupt- und Querträger des Stahlträgerrostes, die Querhölzer, die Schaltafeln der Decklage sowie die Befestigungsrahmen der Unwuchterreger. Dabei wurden die Exzentrizitäten mittels entsprechenden Kopplungen berücksichtigt. Die L-Winkel sowie die seitlichen Schaltafeln wurden bei der Modellierung vernachlässigt, da diese mit einer Bewegungsfuge untereinander in Längsrichtung eingebaut wurden und somit nicht als Scheibe aktiviert werden können. Vergleichsrechnungen mit dem Schwellen-Schienensystem im vollständigen Verbund mit dem Haupttragwerk (Annahme eines unnachgiebigen Schotterbetts) wurden durchgeführt, werden in dieser Arbeit jedoch nicht näher erläutert. Es soll nur angemerkt werden, dass durch Zusammenwirken vom Haupttragwerk mit dem Schwellen-Schienensystem ein signifikanter Anstieg der ersten Eigenfrequenz zu beobachten war. Nachfolgend das FE-Modell der Versuchsbrücke (Abbildung 3.14 bis Abbildung 3.16).

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

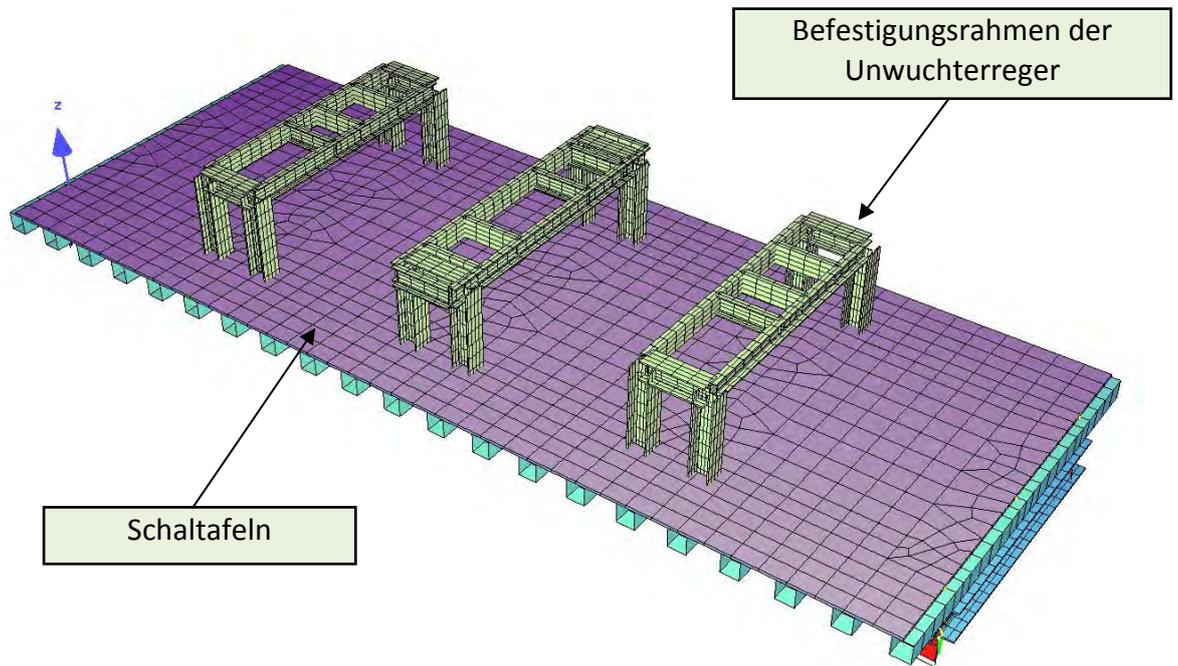


Abbildung 3.14: FE-Modell der Versuchsbrücke (3D Ansicht von oben)

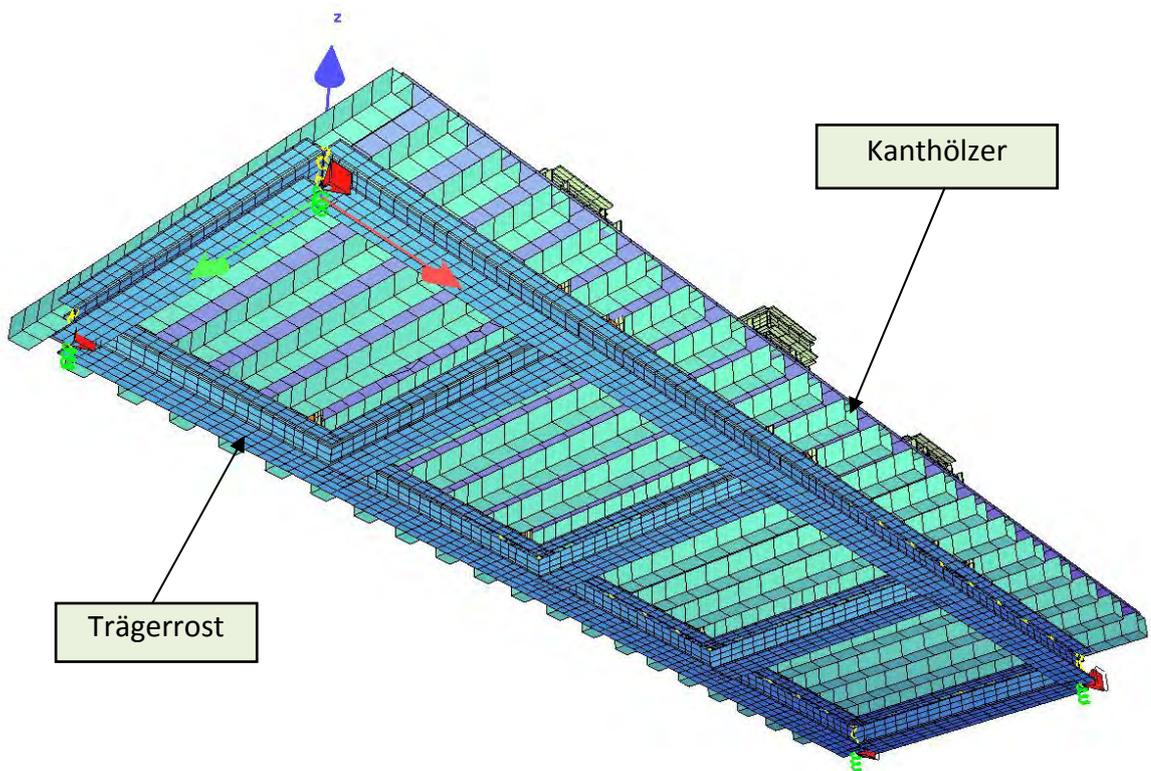


Abbildung 3.15: FE-Modell der Versuchsbrücke (3D Ansicht von unten)

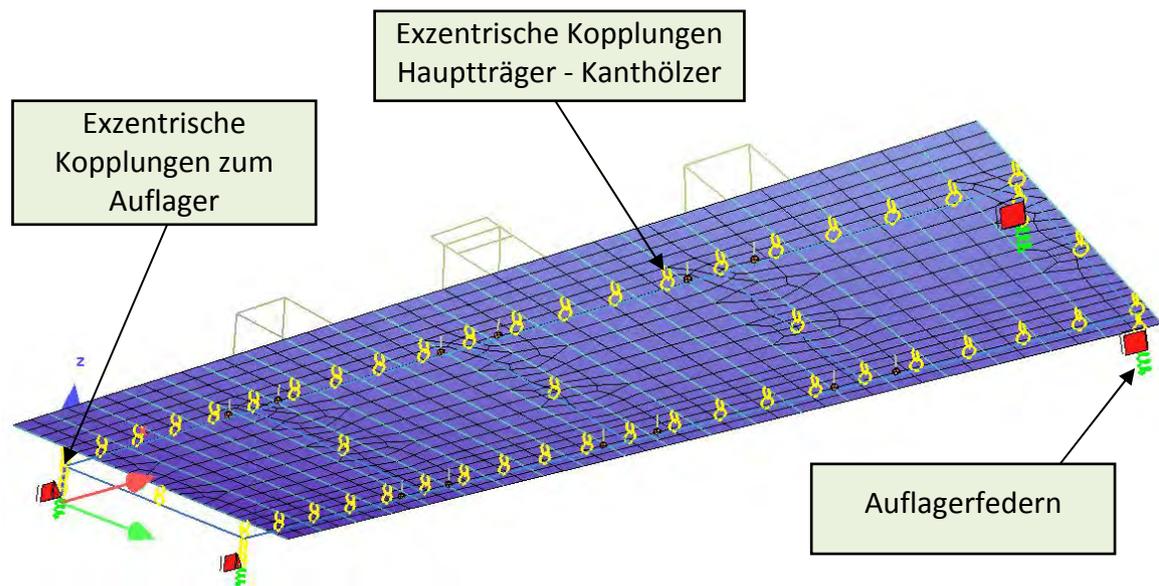


Abbildung 3.16: FE-Modell der Versuchsbücke (3D Ansicht von unten, Darstellung der Achsen)

Als Lastfälle kamen folgende zur Anwendung

- Eigengewicht der Struktur (vom Programm berücksichtigt)
- Aufbauasten (Schotterbett, Schwellen und Schienen)
- Unwuchterreger in der Mitte
- Unwuchterreger in den Viertelpunkten

Für das Schotterbett wurde eine Flächenlast von

$$g_2 = 20,0 \cdot 0,55 = 11,0 \text{ kN} / \text{m}^2$$

angesetzt. Das Eigengewicht der Schienen und der Schwellen wurde durch eine verschmierte Flächenlast von

$$g_2 = 1,0 \text{ kN} / \text{m}^2$$

berücksichtigt, wobei die Breite der Lastausbreitung mit dem Achsabstand der Hauptträger gleichgesetzt wurde (ergibt eine Lastausbreitung von ca. 4:1).

Das Eigengewicht der Unwuchterreger wurde laut Herstellerangaben mit maximal

$$g_3 = 10,0 \text{ kN}$$

angesetzt, wobei diese Last auf die Fläche der Montageplatte der Unwuchterreger verteilt wurde. Nachfolgend sind die Lastbilder der statischen Belastung angeführt (Abbildung 3.17 bis Abbildung 3.20).

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

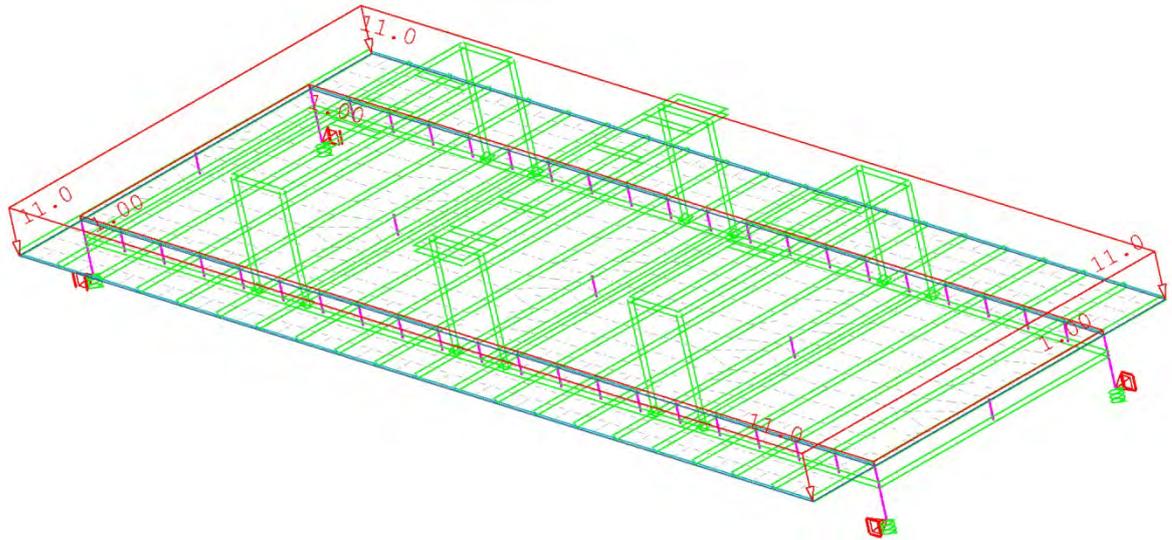


Abbildung 3.17: Aufbaulasten (Schotter, Schwellen und Schienen) [kN/m²]

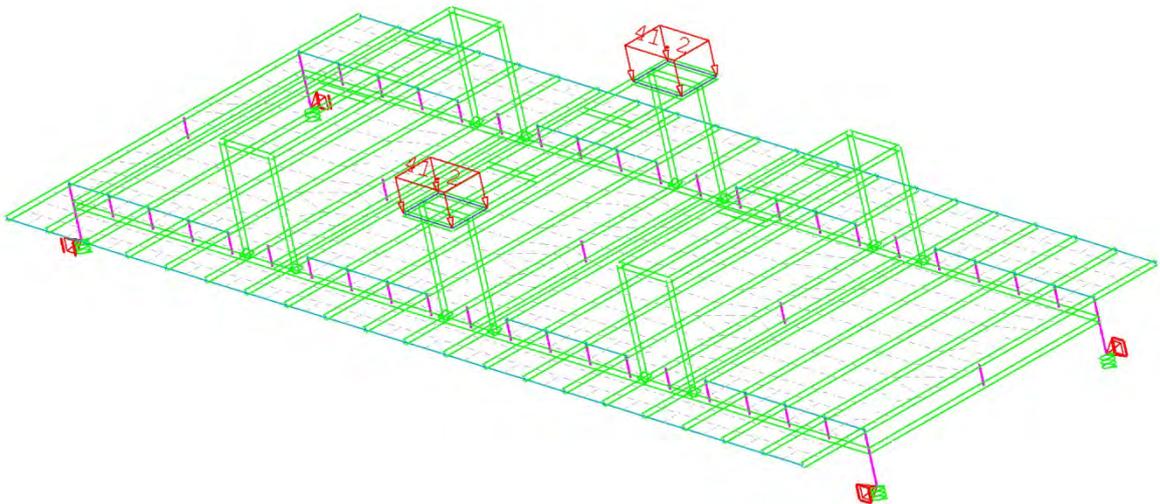


Abbildung 3.18: Unwuchterreger in der Brückenmitte [kN/m²]

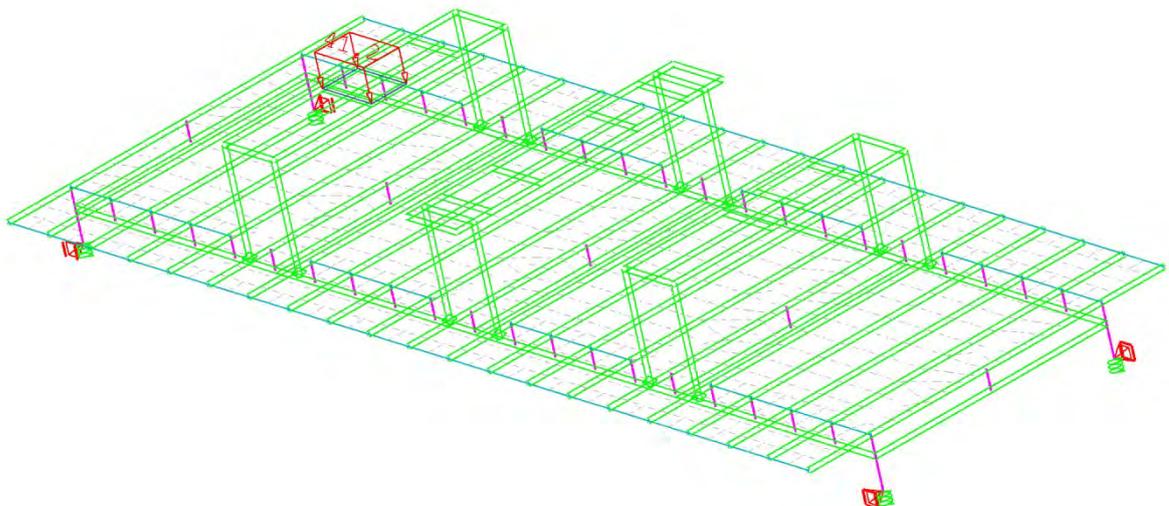


Abbildung 3.19: Unwuchterreger im linken Viertelpunkt [kN/m²]

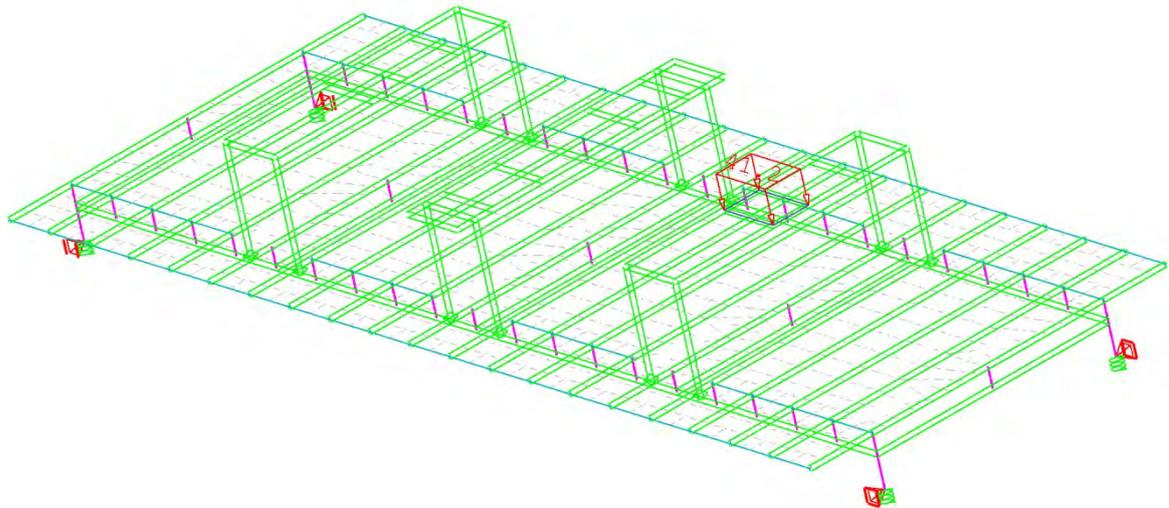


Abbildung 3.20: Unwuchterreger im rechten Viertelpunkt [kN/m²]

Mit diesen Lastfällen wurden zuerst die statischen Beanspruchungen auf Traglast- sowie Gebrauchstauglichkeitsniveau ermittelt. Es soll an dieser Stelle angemerkt werden, dass aufgrund der Forderung der Schwingungsfähigkeit der Versuchsbrücke die in EN 1990 (EN 1990, 2006) angeführten Teilsicherheitsbeiwerte für den Grenzzustand der Tragfähigkeit nicht angewendet wurden, da mit diesen eine schwingungsfähige Struktur schwer zu realisieren ist. Weiters sind die Eigengewichte der auftretenden Lasten ziemlich genau bekannt, somit scheinen die in der EN 1990 angegebenen Teilsicherheitsbeiwerte als zu konservativ für dieses Tragwerk. Folgende Lastfallkombinationen wurden angewendet.

$$\begin{aligned} E_{d,ULS} &= 1,00 \cdot g_1 + 1,10 \cdot g_2 + 1,00 \cdot g_3 \\ E_{d,SLS} &= 1,00 \cdot g_1 + 1,00 \cdot g_2 + 1,00 \cdot g_3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Mit dem SLS Lastfall wurde die erforderliche Überhöhung der Werkstattform bestimmt (Abbildung 3.21).

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

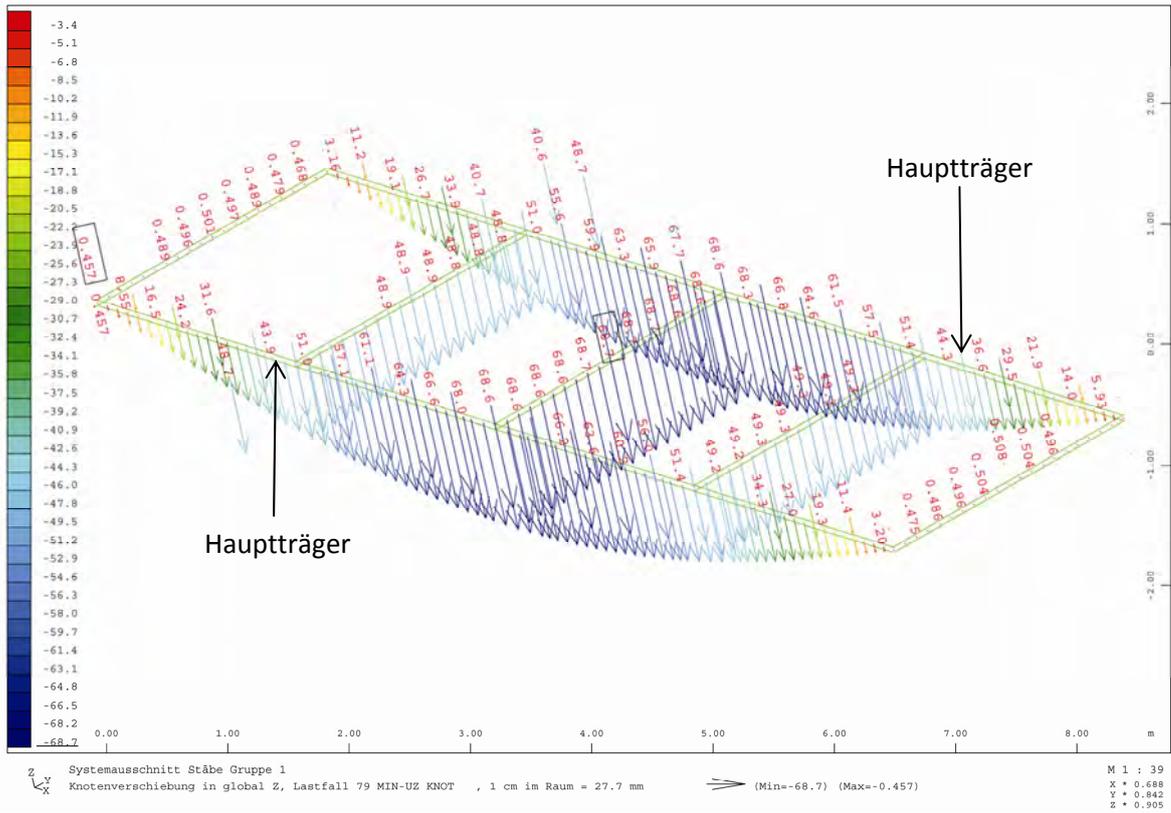


Abbildung 3.21: statische Durchbiegungen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit [mm]

Mit den Massen der Brückenstruktur, Aufbauten sowie der Unwuchterreger wurden die Eigenfrequenzen der Versuchsbrücke ermittelt. Dabei wurde zwischen der Unwuchterregerstellung für die Erregung der ersten und für die Erregung der zweiten Eigenform unterschieden. Die vertikalen Eigenformen sind nachfolgend dargestellt (Abbildung 3.22 und Abbildung 3.23).

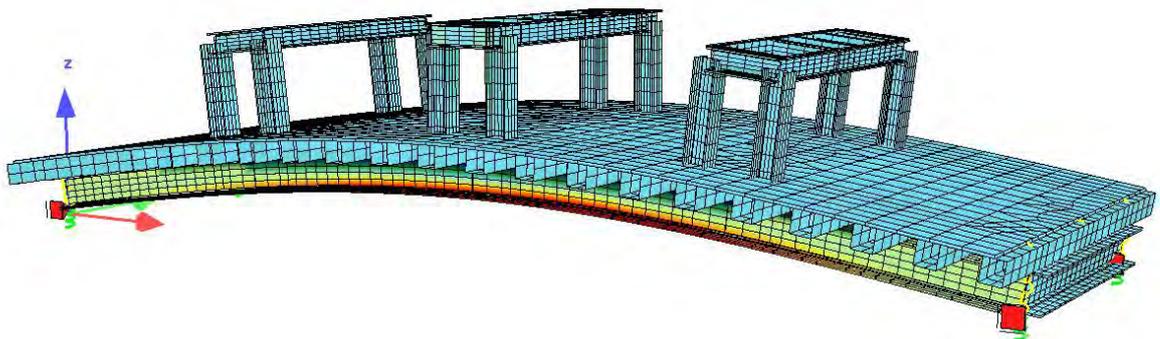


Abbildung 3.22: 1. vertikale Eigenform mit 2,181 Hz (Unwuchterreger in der Brückenmitte)

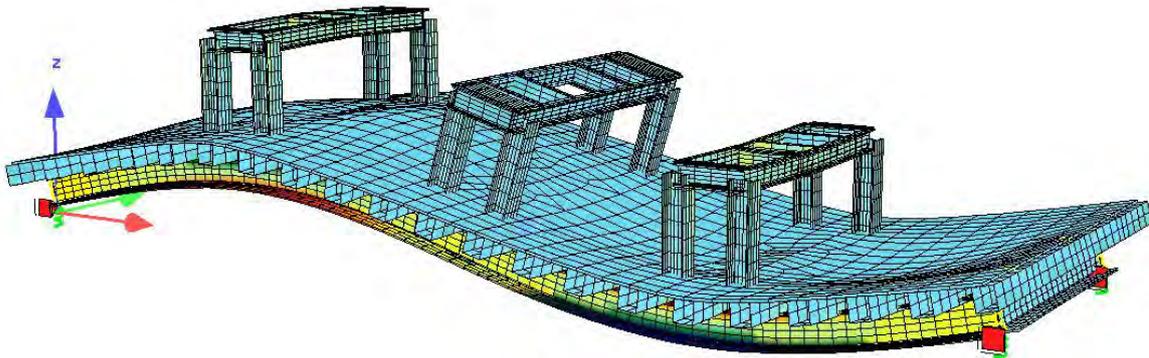


Abbildung 3.23: 2. vertikale Eigenform mit 7,936 Hz (Unwuchterreger in den Viertelpunkten)

Die Steifigkeit der Befestigungsrahmen der Unwuchterreger wurde so hoch gewählt, dass sich diese mit dem Brückentragwerk als Starrkörper mitverformen und keine zusätzlichen Schwingungsanteile liefern. Dies wurde einerseits durch die Ermittlung der Eigenfrequenzen untersucht, bei der die ersten Eigenfrequenzen mit Beteiligung der Befestigungsrahmen weit über den vertikalen Eigenfrequenzen liegen, andererseits mittels einer Vergleichsrechnung, bei der die Steifigkeit der Befestigungsrahmen mit dem Faktor 1000 multipliziert wurde. Es ergaben sich keine Änderungen in den Ergebnissen. Somit haben die Befestigungsrahmen der Unwuchterreger keinen Einfluss auf die Schwingung der Versuchsbrücke.

Für die Ermittlung der erforderlichen Erregerkraft bzw. der statischen Unwucht der Unwuchterreger sind neben den bereits ermittelten Eigenfrequenzen noch die modale Masse (siehe Gl. (2.151)) der Versuchsbrücke

$$m^* = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (17,80 + 116,50 + 5,00) \cdot \frac{1}{10} = 27,86 \text{ to}$$

das geschätzte Lehrsche Dämpfungsmaß

$$\zeta = 2,0 \%$$

und die gewünschten maximalen Amplituden

$$u_{z,\max,1.Eigenform} = 30,0 \text{ mm}$$

$$u_{z,\max,2.Eigenform} = 3,0 \text{ mm}$$

erforderlich.

Damit lassen sich mit dem dynamischen Vergrößerungsfaktor für Einmassenschwinger mit Unwuchterregung im Resonanzfall die erforderlichen statischen Unwuchten wie folgt ermitteln

$$\begin{aligned} (me)_{erf} &= 2\zeta m^* u_{z,\max} \\ (me)_{erf,1.Eigenform} &= 2 \cdot 0,02 \cdot 27,86 \cdot 0,03 \cdot 1000 = 33,43 \text{ kgm} \\ (me)_{erf,2.Eigenform} &= 2 \cdot 0,02 \cdot 27,86 \cdot 0,003 \cdot 1000 = 3,34 \text{ kgm} \end{aligned} \quad (3.2)$$

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

Da jeweils zwei Unwuchterreger eingesetzt werden lauten die erforderlichen statischen Unwuchten

$$(me)_{\text{erf},1.\text{Eigenform}} = \frac{33,43}{2} = 16,72 \text{ kgm} \quad (3.3)$$

$$(me)_{\text{erf},2.\text{Eigenform}} = \frac{3,34}{2} = 1,67 \text{ kgm}$$

Wie in Kapitel 3.2 erläutert wird, werden die Unwuchterreger mit Unbalancen versehen, die es ermöglichen, die statische Unwucht einzustellen. Mit dieser Steuerungsmöglichkeit kann auch eine Anpassung an die tatsächlich vorhandene Dämpfung vorgenommen werden. Mit den ermittelten $(me)_{\text{erf}}$ sowie den zuvor ermittelten Eigenfrequenzen lauten die Erregerkräfte

$$F_{\text{dyn},1.\text{Eigenform}} = 16,72 \cdot (2 \cdot \pi \cdot 2,181)^2 = 3139,84 \text{ N} \quad (3.4)$$

$$F_{\text{dyn},2.\text{Eigenform}} = 1,67 \cdot (2 \cdot \pi \cdot 7,936)^2 = 4156,19 \text{ N}$$

Mit den Erregerkräften als Amplitude und den Resonanzfrequenzen als Erregerfrequenz wurden die dynamischen Lasten generiert, mit denen die dynamischen Berechnungen mithilfe der Zeitschrittintegrationsmethode durchgeführt wurden. Nachfolgend sind die maximalen dynamischen Amplituden beider Eigenformen dargestellt (Abbildung 3.24 und Abbildung 3.25).

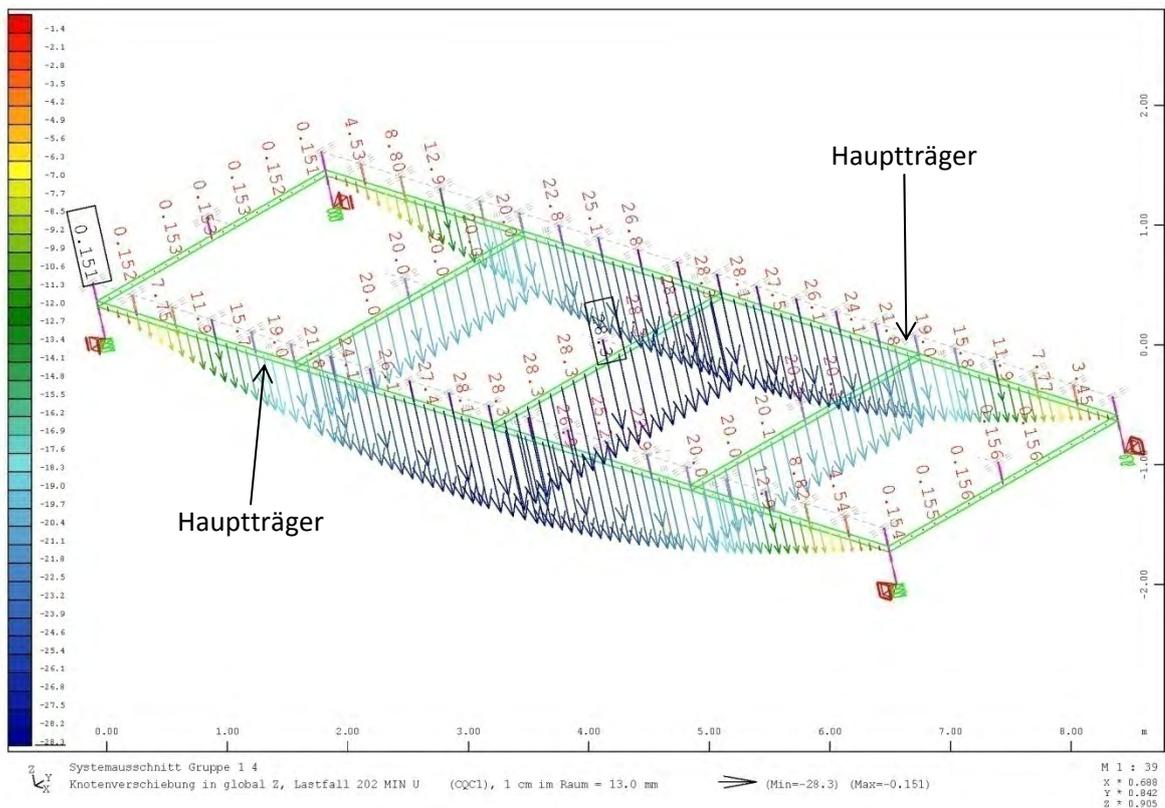


Abbildung 3.24: maximale dynamische Verformungen bei Anregung der ersten Eigenform [mm]

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

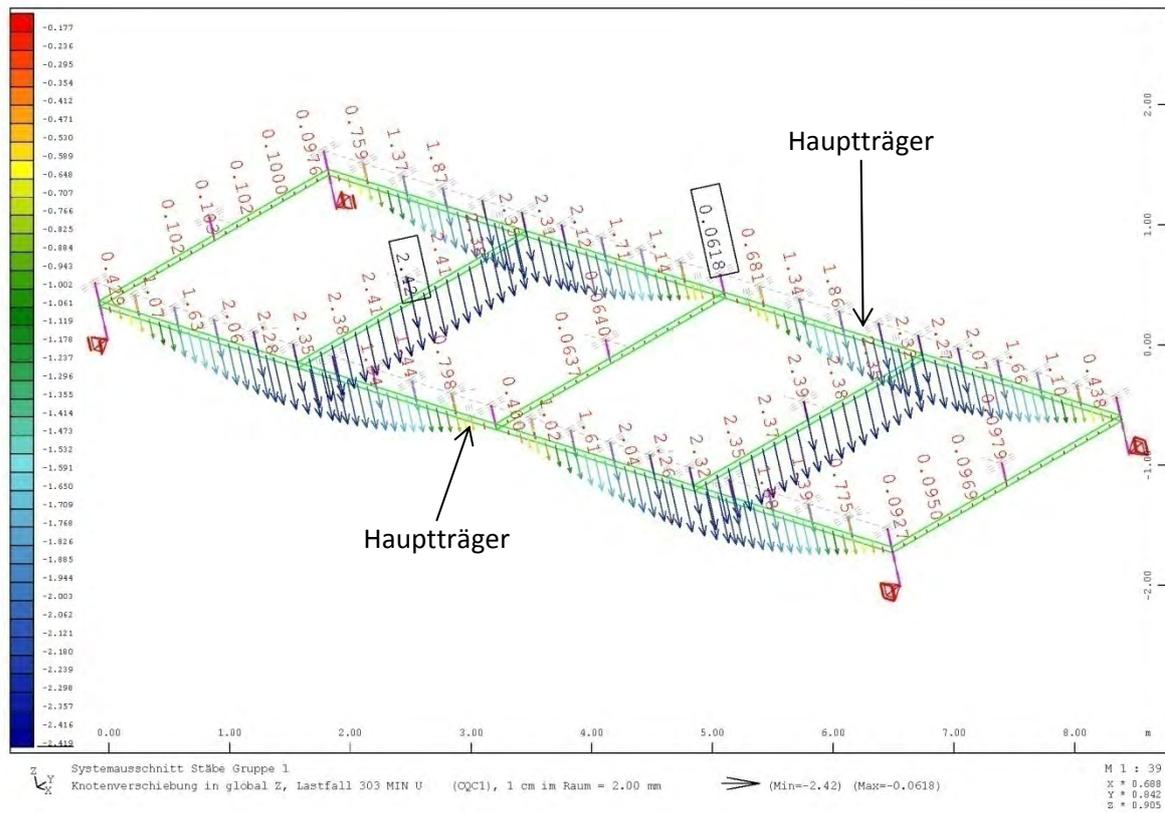


Abbildung 3.25: maximale dynamische Verformung bei Anregung der zweiten Eigenform [mm]

Berücksichtigt man die nicht konstante Steifigkeits- sowie Lastverteilung der realen Versuchsbrücke, stimmen die mit dem Einmassenschwinger abgeschätzten dynamischen Verformungen sehr gut mit jenen der FE-Berechnung überein.

Auch für die dynamische Beanspruchung wurden Tragfähigkeitskombinationen wie folgt gebildet

$$E_{d,ULS,dyn} = 1,00 \cdot g_1 + 1,10 \cdot g_2 + 1,00 \cdot g_3 + 1,00 \cdot p_{dyn} \quad (3.5)$$

Nachfolgend sind die mit der zuvor angegebenen Überlagerungsvorschrift ermittelten Vergleichsspannungen in den Haupt- und Querträgern sowie Normalspannungen in den Vollhölzern angegeben. Es werden auch die Tragfähigkeitsnachweise für die maßgebenden Stellen geführt.

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

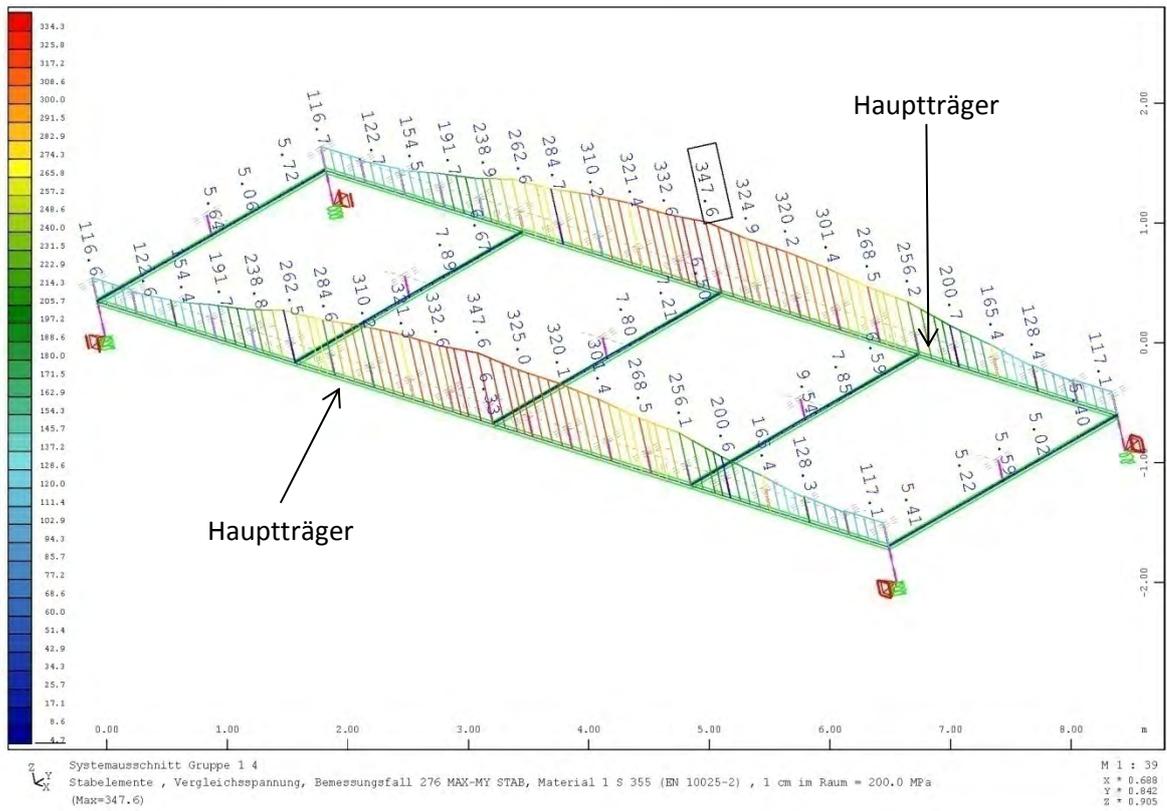


Abbildung 3.26: max. Vergleichsspannung in den Haupt- und Querträgern (1. Eigenform) [N/mm²]

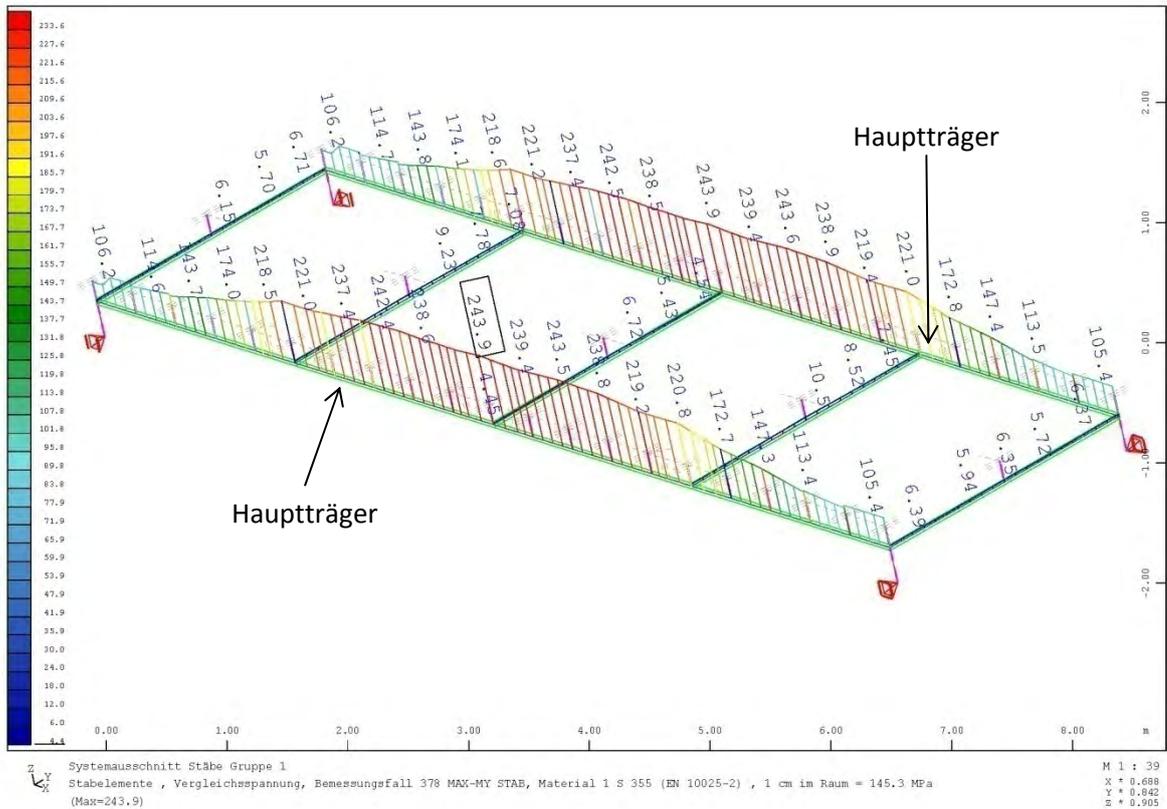


Abbildung 3.27: max. Vergleichsspannung in den Haupt- und Querträgern (2. Eigenform) [N/mm²]

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

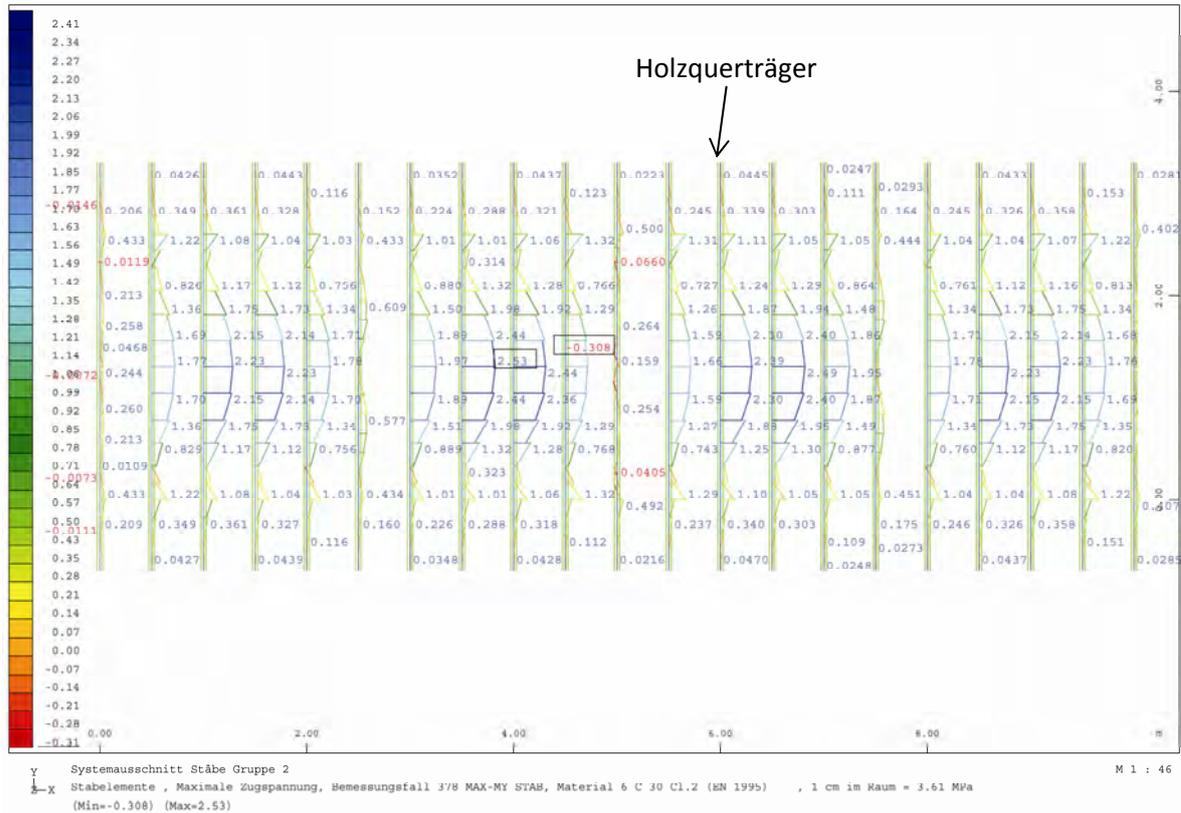


Abbildung 3.28: max. Normalspannungen im Vollholz, C30 [N/mm²]

Der Tragfähigkeitsnachweis für den Trägerrost lautet

$$\sigma_{v,Ed,max} = 347,60 \text{ N/mm}^2 < \frac{f_{yd}}{\gamma_{M0}} = \frac{355,0}{1,00} = 355,00 \text{ N/mm}^2 \quad (3.6)$$

Dem vorgelegten Prüfbericht (siehe Anhang D) der Stahlträger war zu entnehmen, dass die vorhandene Fließgrenze mit

$$f_{yd,vor} = 405,0 \text{ N/mm}^2 \quad (3.7)$$

bestimmt wurde und damit eine zusätzliche Reserve für die Haupttragstruktur vorhanden ist.

Mit den Beiwerten $k_{mod} = 0,90$ für Nutzungsklasse 1 und kurze Beanspruchungsdauer sowie $\gamma_M = 1,30$ folgt der Nachweis für die Vollhölzer (Querkräfte werden hier vernachlässigt)

$$\sigma_{Ed,max} = 2,53 \text{ N/mm}^2 < \frac{k_{mod} \cdot f_{m,k}}{\gamma_M} = \frac{0,90 \cdot 30,0}{1,30} = 20,77 \text{ N/mm}^2 \quad (3.8)$$

Von großem Interesse bei dynamischen Beanspruchungen sind auch die Beschleunigungen, die für die beiden Eigenformen in den nachfolgenden Abbildungen dargestellt sind. Diesen kann entnommen werden, dass die maximalen Beschleunigungen beider Eigenformen jeweils unterhalb der Erdbeschleunigung (siehe Abbildung 3.29 und Abbildung 3.30) bleiben und somit keine abhebenden Kräfte auftreten können.

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

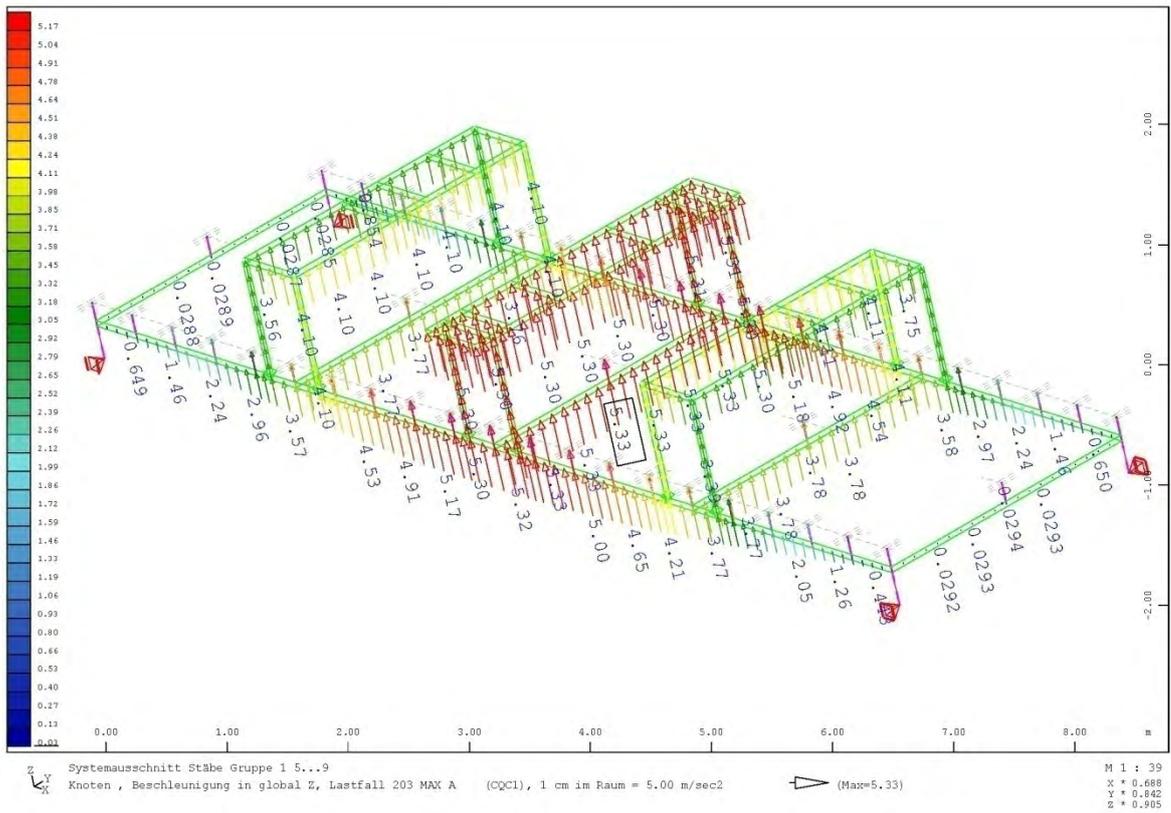


Abbildung 3.29: Beschleunigungen bei Anregung der ersten Eigenform [m/s²]

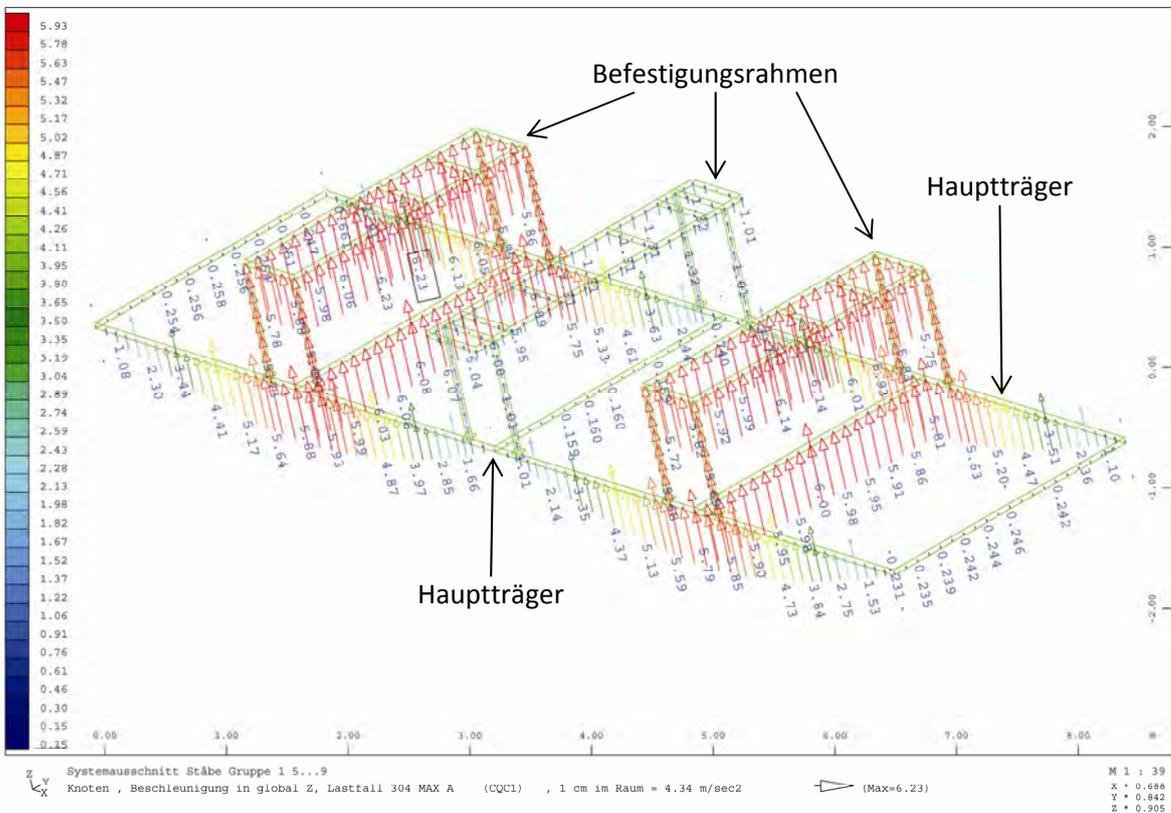


Abbildung 3.30: Beschleunigungen bei Anregung der zweiten Eigenform [m/s²]

Weitere Untersuchungen bzw. Nachweise wurden für die Haupttragstruktur, Vollhölzer, Schaltafeln, Befestigungsrahmen, L-Winkel, Auflagerbänke, Elastomerekissen und die gesamten Befestigungsmaßnahmen (Anker, Schrauben, Schweißnähte) geführt. Diese werden in vorliegender Arbeit jedoch nicht weiter angeführt.

3.1.3. Messung der mechanischen Eigenschaften

3.1.3.1. Versuchsbrücke ohne Gleisoberbau

Für die numerischen Untersuchungen, zur Verifizierung des FE-Modells sowie zur Abstimmung der Tilger wurde das Brückentragwerk hinsichtlich seiner mechanischen Eigenschaften untersucht. Dabei wurde vor allem auf die Messung der tatsächlich vorhandenen Masse und Dämpfung sowie der erste Biegeeigenfrequenz Wert gelegt. Die vorhandene Masse der Versuchsbrücke wurde mittels Kraftmessdosen ermittelt. Dafür wurde das Brückentragwerk an einem Brückenende (Auflager A und B) angehoben und die Elastomerekissen durch zwei Kraftmessdosen ersetzt (Abbildung 3.31).



Abbildung 3.31: Kraftmessdosen zur Messung des Brückeneigengewichts

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

Die Messungen ergaben

$$\begin{aligned} F_A &= 25,67 \text{ kN} \\ F_B &= 25,07 \text{ kN} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Somit ergibt sich eine durchschnittliche Auflagerkraft von

$$\tilde{F} = \frac{25,67 + 25,07}{2} = 25,37 \text{ kN} \quad (3.10)$$

sowie eine Brückenmasse von

$$m = \frac{25,37 \cdot 4}{9,81} = 10,35 \text{ to} \quad (3.11)$$

Zur Ermittlung der ersten Biegeeigenfrequenz sowie der zugehörigen Dämpfung wurden die zwei Unwuchterreger mit einem statischen Moment von 95,83 kgcm (Vollscheiben mit fünf vollen und einer halben Unbalance) pro Unwuchterreger eingesetzt. Die Frequenzen wurden dabei von 100 – 400 UpM (1,67 – 6,67 Hz) variiert. Nachfolgend sind die gemessenen Amplitudenfrequenzgänge der Beschleunigungen und Verformungen der beiden Hauptträger in Brückenmitte dargestellt. Die Bezeichnungen und Lage der Messpunkte kann Kapitel 3.3 entnommen werden.

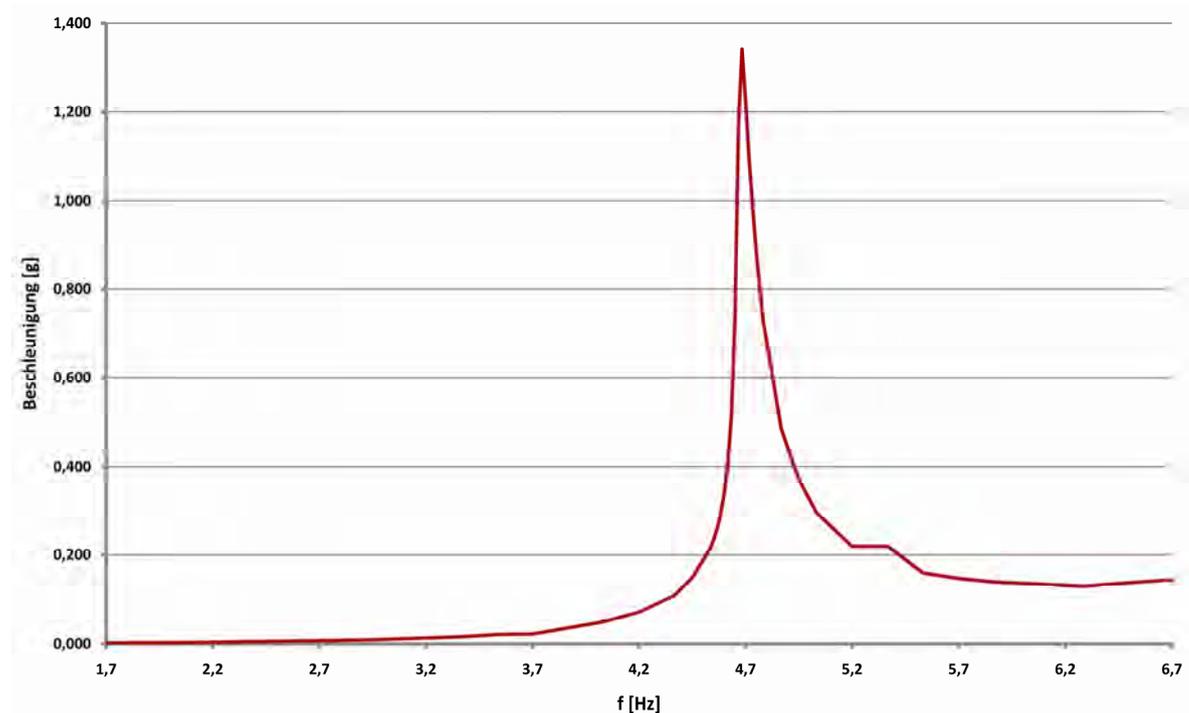


Abbildung 3.32: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen (B6) in der Mitte des rechten Hauptträgers [g]

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

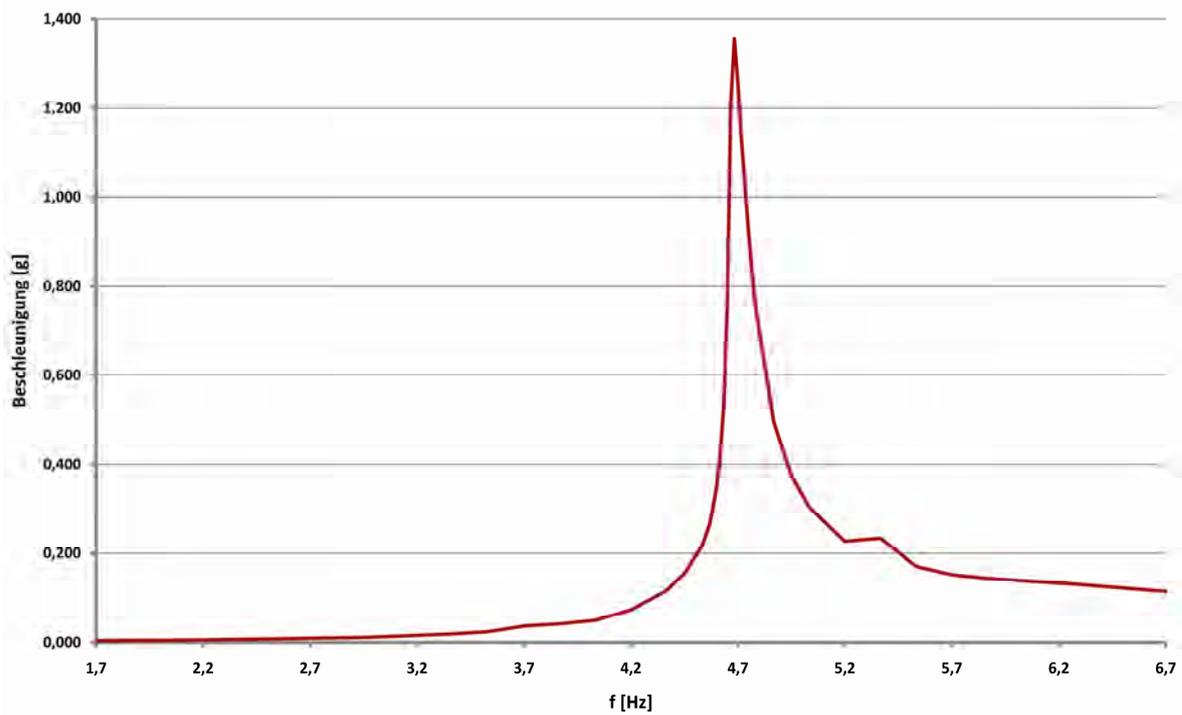


Abbildung 3.33: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen (B8) in der Mitte des linken Hauptträgers [g]

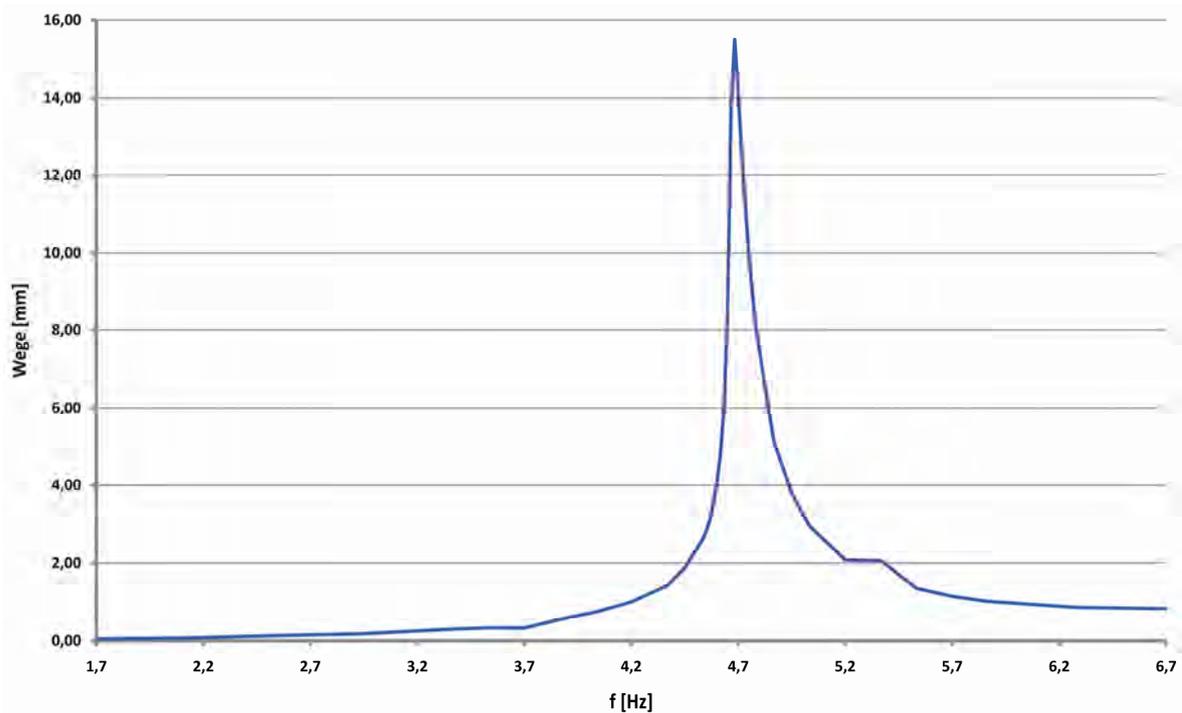


Abbildung 3.34: Amplitudenfrequenzgang der Wege (W5) in der Mitte des rechten Hauptträgers [mm]

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

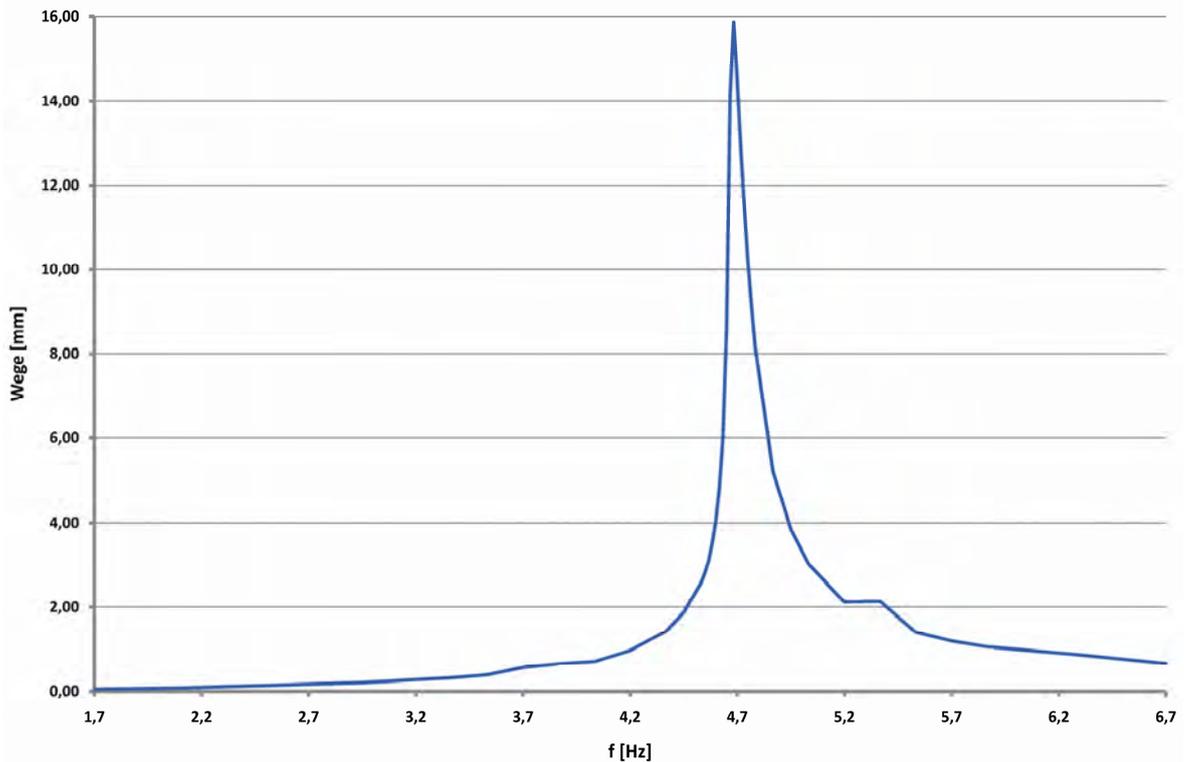


Abbildung 3.35: Amplitudenfrequenzgang der Wege (W6) in der Mitte des linken Hauptträgers [mm]

Zur Ermittlung der viskosen Dämpfung wurde die Bandbreiten- oder Wurzel-2-Methode herangezogen. Mit dieser ist es möglich, die Dämpfung aus den Resonanzkurven auf einfache Art und Weise zu ermitteln (Chopra, 2000).

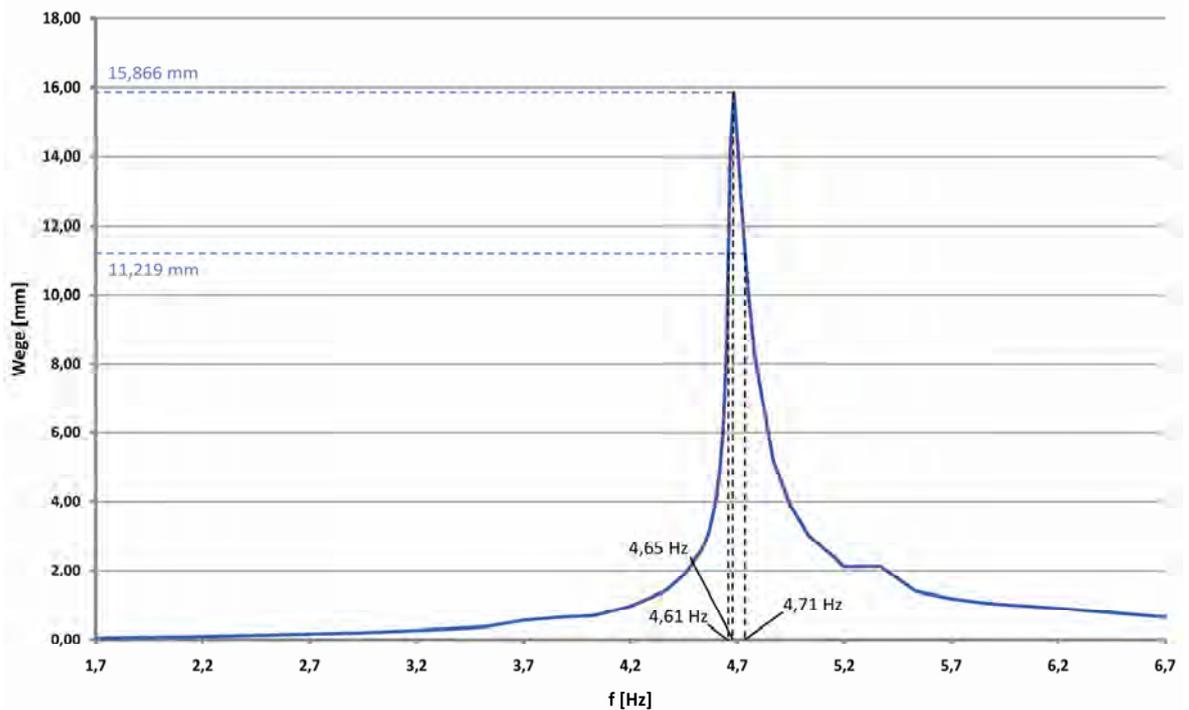


Abbildung 3.36: Resonanzkurve der Amplituden mit Anwendung der Bandbreitenmethode

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

Mit Abbildung 3.36 folgen

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 15,87 &= 11,22 \text{ mm} \\ f_a &= 4,61 \text{ Hz} \\ f_1 &= 4,65 \text{ Hz} \\ f_b &= 4,71 \text{ Hz}\end{aligned}\tag{3.12}$$

Damit folgt für das viskose Dämpfungsmaß

$$\zeta = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_b - f_a}{f_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4,71 - 4,61}{4,65} \cdot 100 = 1,08 \%\tag{3.13}$$

Wie bereits den Resonanzkurven entnommen werden konnte, handelt es sich bei der Versuchsbrücke um ein sehr schwach gedämpftes System. Dabei ist jedoch zu beachten, dass bei der, mithilfe der Bandbreitenmethode ermittelten Dämpfung eine Ungenauigkeit von ca. $\pm 20 \%$ berücksichtigt werden muss (Chopra, 2000).

Um die ermittelte Dämpfung zu verifizieren, wurden zusätzlich zu den Resonanzkurvenauswertungen Ausschwingversuche durchgeführt. Für diese wurde mithilfe einer hydraulischen manuellen Presse das Brückentragwerk in der Mitte des mittleren Querträgers angehoben und mittels eines Druckventils schlagartig losgelassen. Die dabei resultierenden Beschleunigungen und Wege sind nachfolgend angeführt.

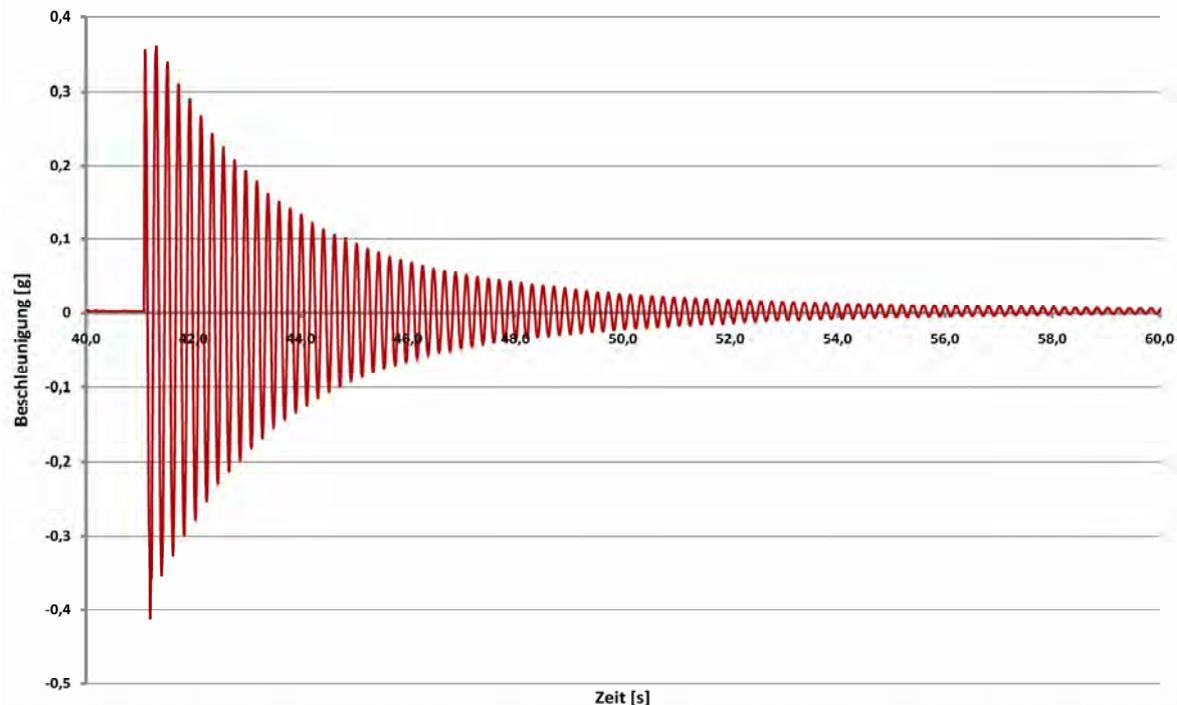


Abbildung 3.37: Beschleunigungen B6 im Ausschwingversuch [g]

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

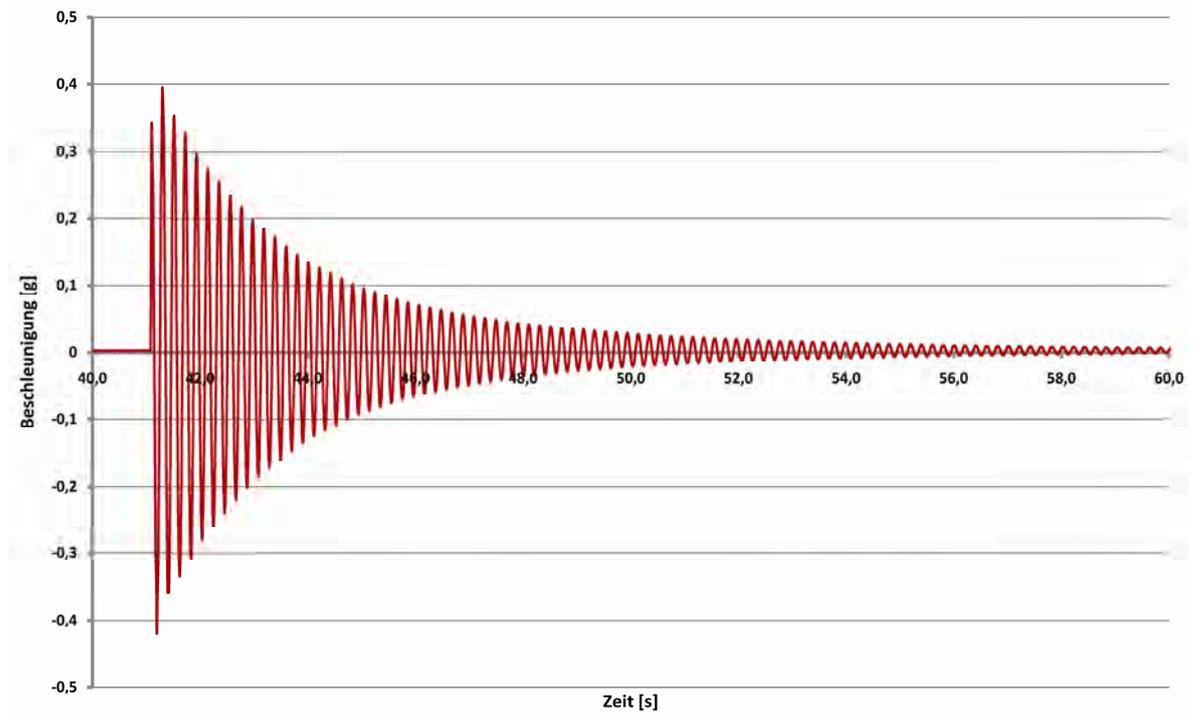


Abbildung 3.38: Beschleunigungen B8 im Ausschwingversuch [g]

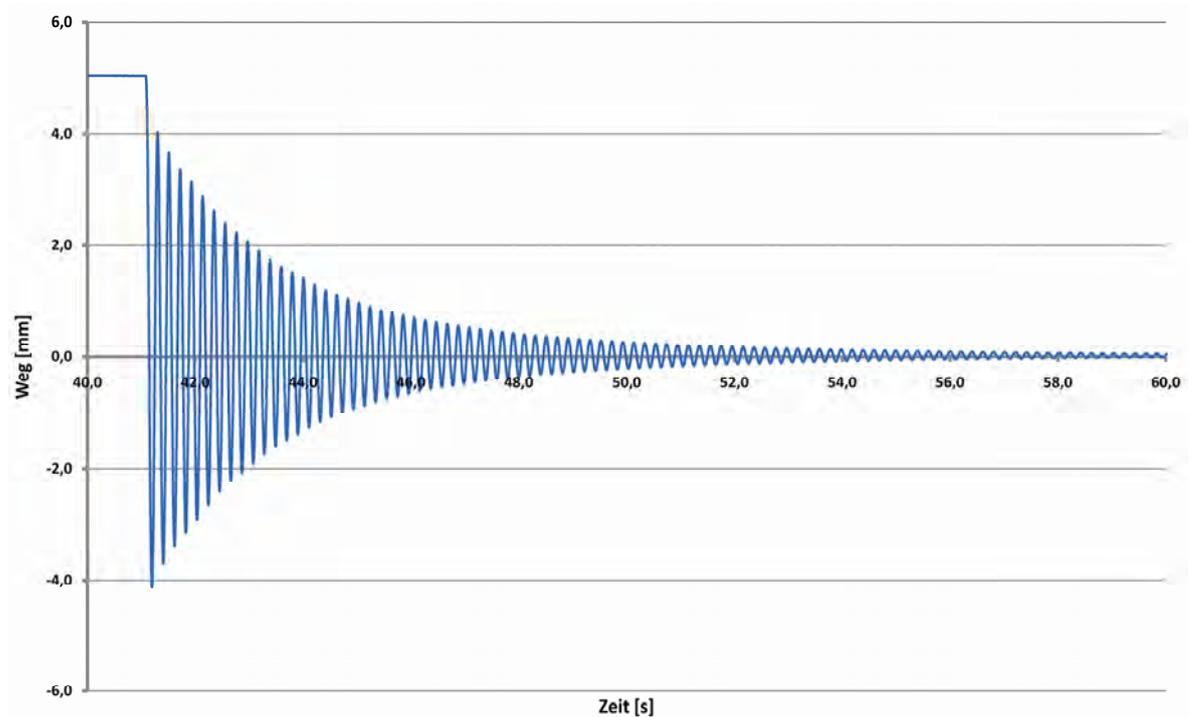


Abbildung 3.39: Wege W5 im Ausschwingversuch [mm]

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

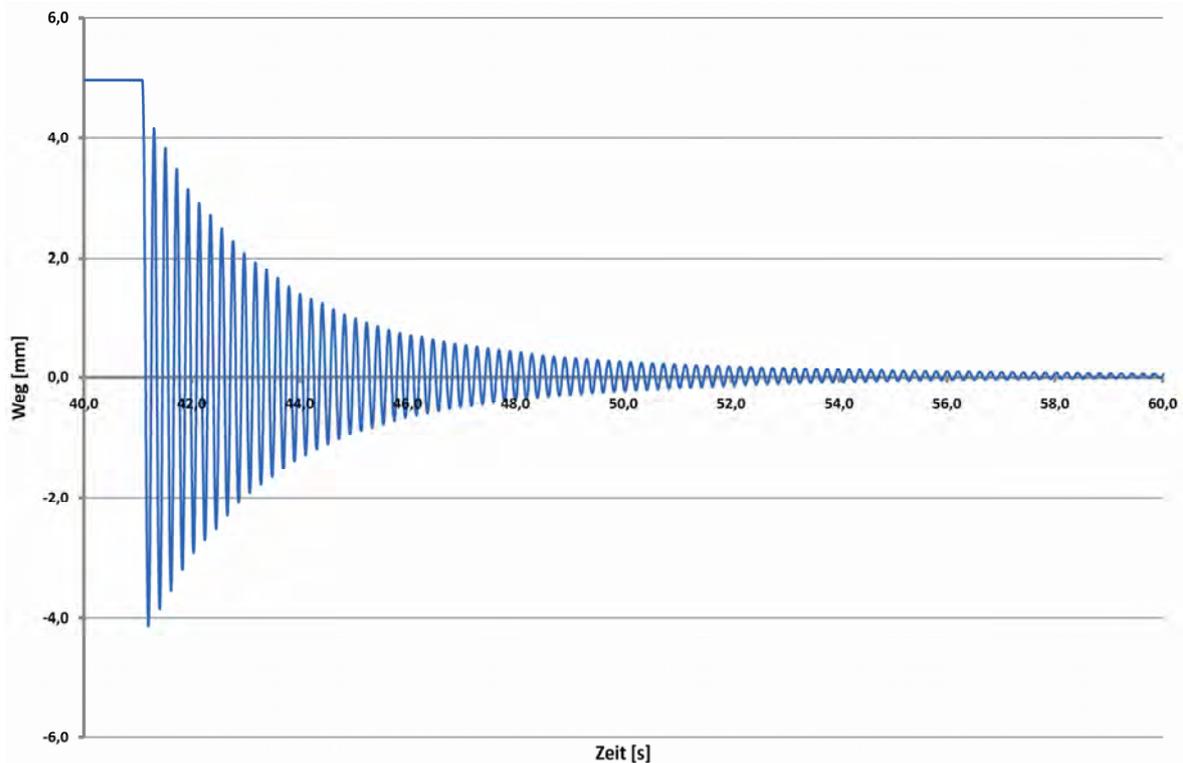


Abbildung 3.40: Wege W6 im Ausschwingversuch [mm]

Durch Ermittlung des logarithmischen Dekrements (Chopra, 2000)

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \left(\frac{u_i}{u_{i+j}} \right) \quad (3.14)$$

mit den Amplitudenmaxima der Schwingung i und $i+j$ erhält man, bei Annahme schwacher Dämpfung, das viskose Dämpfungsmaß zu

$$\zeta \cong \frac{\delta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi j} \ln \left(\frac{u_i}{u_{i+j}} \right) \quad (3.15)$$

Nach Auswertung von Gleichung (3.15) für einige Ausschwingkurven sowie deren Amplitudenmaxima, für zwei ist dies in den nachfolgenden Tabellen vorgeführt, ergab sich ein durchschnittliches viskoses Dämpfungsmaß von

$$\zeta = 1,52 \% \quad (3.16)$$

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

Tabelle 3.1: Ermittlung des viskosen Dämpfungsmaßes aus den Ausschwingkurven W5 mittels des logarithmischen Dekrements

u_{\max}	$\zeta = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{u_{\max,i}}{u_{\max,i+1}} \right) \cdot 100$
[mm]	[%]
5,034	3,55
4,028	1,53
3,658	1,31
3,370	1,10
3,144	1,38
2,882	1,55
2,614	1,39
2,396	1,11
2,234	1,17
2,076	1,39
1,906	-
ζ	1,55

Tabelle 3.2: Ermittlung des viskosen Dämpfungsmaßes aus den Ausschwingkurven W6 mittels des logarithmischen Dekrements

u_{\max}	$\zeta = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{u_{\max,i}}{u_{\max,i+1}} \right) \cdot 100$
[mm]	[%]
4,960	2,78
4,164	1,34
3,828	1,46
3,492	1,61
3,156	1,34
2,902	1,09
2,710	1,30
2,498	1,48
2,276	1,46
2,076	1,16
1,930	-
ζ	1,50

Unter Berücksichtigung der beiden Ergebnisse (3.13) und (3.16) kann von einem viskosen Dämpfungsmaß von

$$\zeta_{\text{Brücke, leer}} = 1,30 \% \quad (3.17)$$

mit einer Schwankungsbreite von $\pm 20 \%$ ausgegangen werden.

3.1.3.2. Versuchsbrücke mit Gleisoberbau

Für die Versuchsbrücke mit Gleisoberbau (Abbildung 3.41, Abbildung 3.42) wurden ebenfalls experimentelle Untersuchungen hinsichtlich ihrer mechanischen Eigenschaften durchgeführt.



Abbildung 3.41: Versuchsbrücke mit Gleisoberbau (Schotter, Schwellen und Schienen)



Abbildung 3.42: Versuchsbrücke mit Gleisoberbau (Schotter, Schwellen und Schienen)

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

Die vorhandene Masse der Versuchsbrücke wurde ebenfalls mittels Kraftmessdosen ermittelt. Dafür wurde das Brückentragwerk an einem Brückenende (Auflager A und B) angehoben und die Elastomerekissen durch zwei Kraftmessdosen ersetzt. Die Messungen ergaben

$$\begin{aligned} F_A &= 100,83 \text{ kN} \\ F_B &= 102,64 \text{ kN} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Somit ergab sich eine durchschnittliche Auflagerkraft von

$$\tilde{F} = \frac{100,83 + 102,64}{2} = 101,74 \text{ kN} \quad (3.19)$$

sowie eine Brückenmasse von

$$m = \frac{101,74 \cdot 4}{9,81} = 41,48 \text{ to} \quad (3.20)$$

Die Versuchsbrücke mit Schotteroberbau weist also ca. das vierfache Gewicht der Brückenkonstruktion ohne Schotterbett auf. Zur Ermittlung der ersten Biegeeigenfrequenz sowie der zugehörigen Dämpfung wurden die zwei Unwuchterreger mit einem statischen Moment von 762,12 kgcm (Vollscheiben, alle Unbalancen ausgebaut) pro Unwuchterreger eingesetzt. Die Frequenzen wurden dabei von 100 – 340 UpM (1,67 – 5,67 Hz) variiert. Nachfolgend sind die gemessenen Amplitudenfrequenzgänge der Beschleunigungen und Verformungen der beiden Hauptträger in Brückenmitte dargestellt. Die Zuordnung der Messinstrumente sowie deren Lage kann wiederum Kapitel 3.3 entnommen werden.

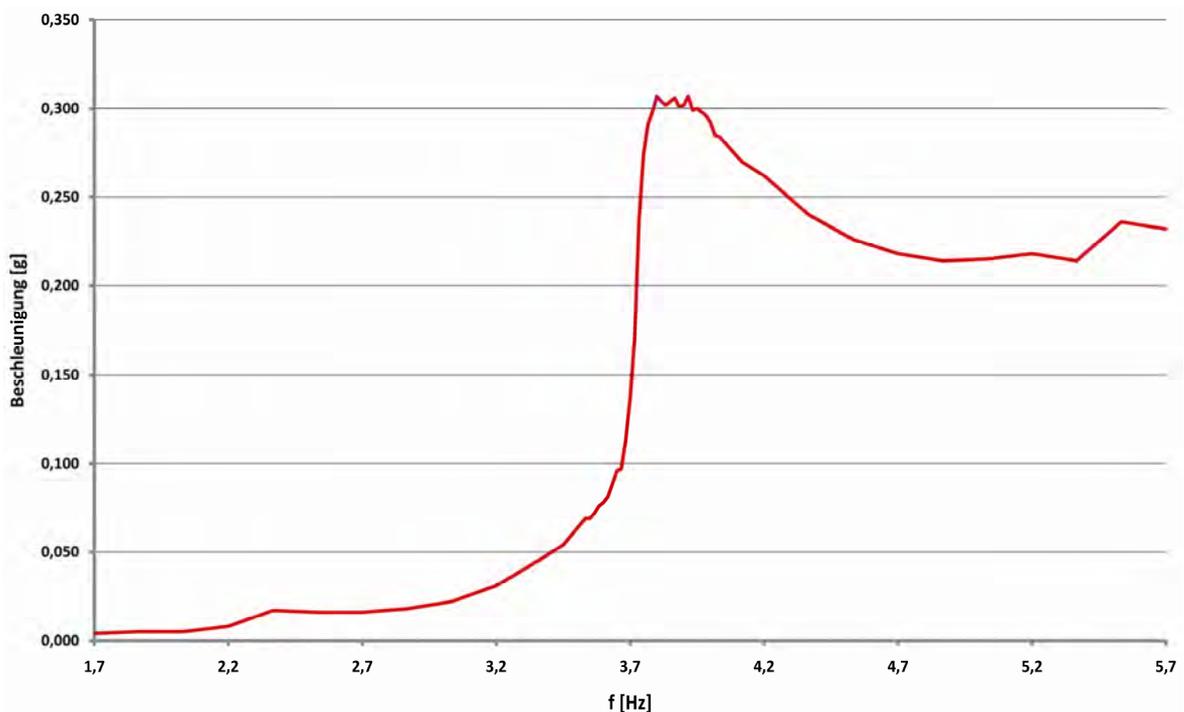


Abbildung 3.43: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen (B6) in der Mitte des rechten Hauptträgers [g]

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

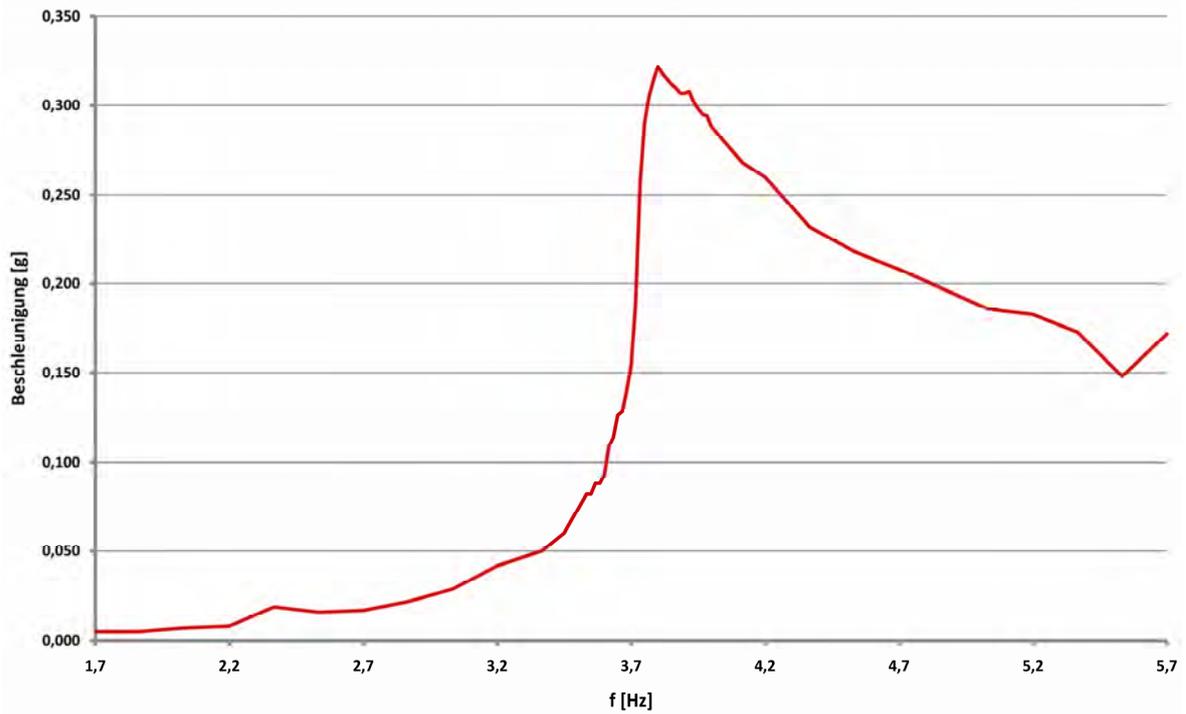


Abbildung 3.44: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen (B8) in der Mitte des linken Hauptträgers [g]

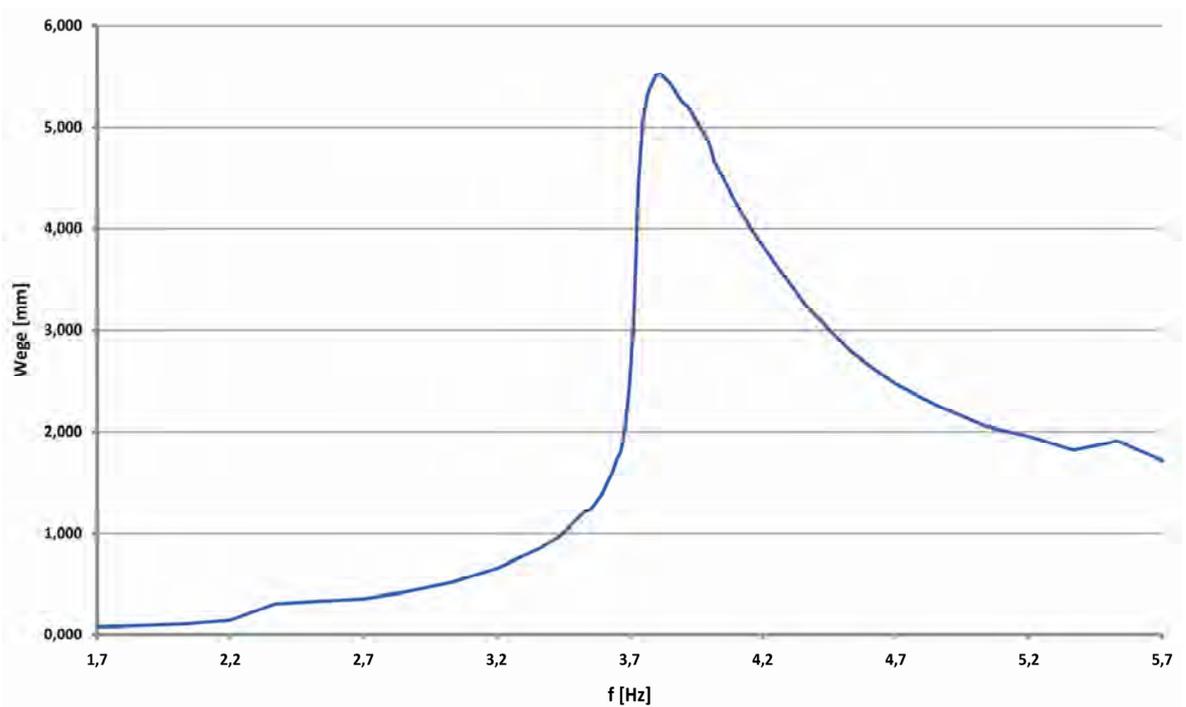


Abbildung 3.45: Amplitudenfrequenzgang der Wege (W5) in der Mitte des rechten Hauptträgers [mm]

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

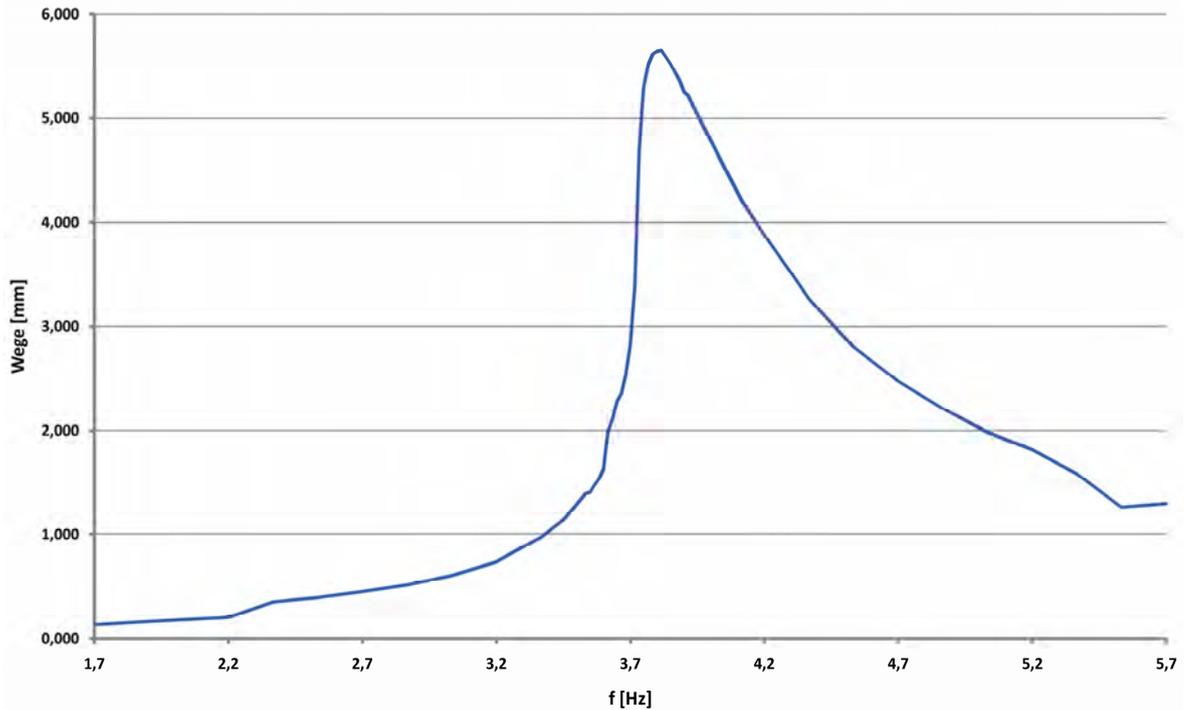


Abbildung 3.46: Amplitudenfrequenzgang der Wege (W6) in der Mitte des linken Hauptträgers [mm]

Zur Ermittlung der viskosen Dämpfung wurde die Bandbreiten- oder Wurzel-2-Methode herangezogen. Mit dieser ist es möglich, die Dämpfung aus den Resonanzkurven auf einfache Art zu ermitteln (Chopra, 2000).

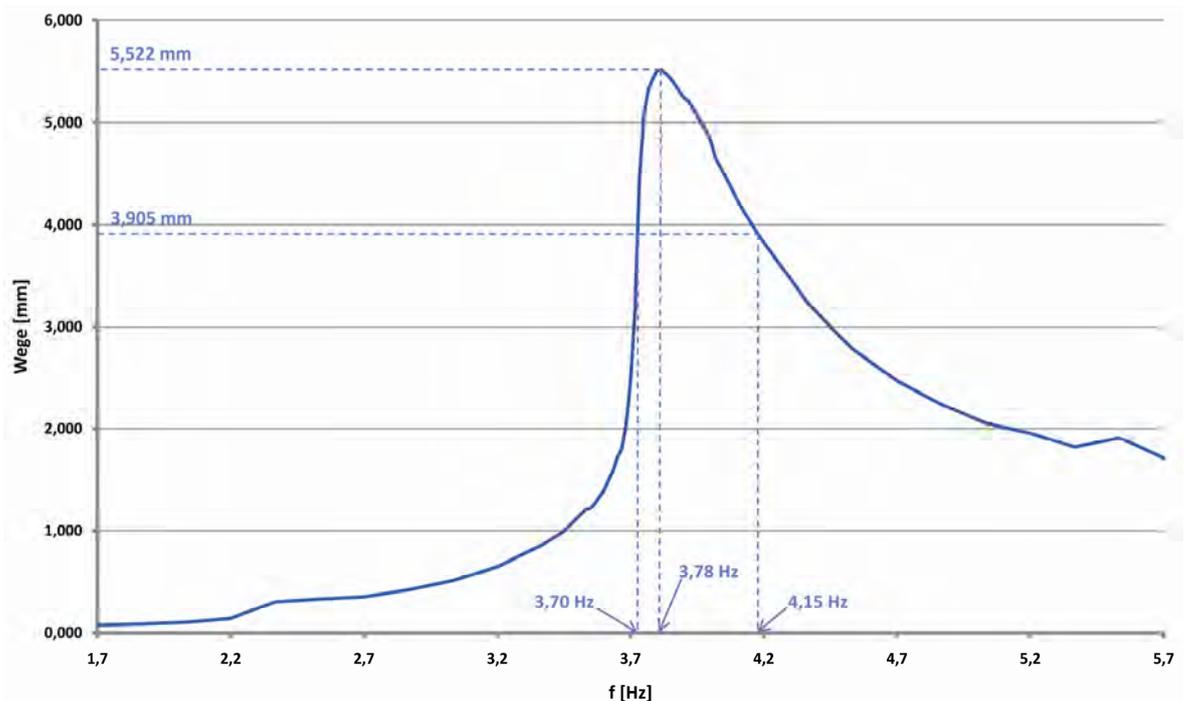


Abbildung 3.47: Resonanzkurve der Amplituden mit Anwendung der Bandbreitenmethode

Mit Abbildung 3.47 folgen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 5,522 &= 3,905 \text{ mm} \\ f_a &= 3,70 \text{ Hz} \\ f_1 &= 3,78 \text{ Hz} \\ f_b &= 4,15 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Damit folgt für das viskose Dämpfungsmaß

$$\zeta = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_b - f_a}{f_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4,15 - 3,70}{3,78} \cdot 100 = 5,95 \% \quad (3.22)$$

Wie bereits den Resonanzkurven entnommen werden konnte, wurde die Dämpfung des Brückentragwerks durch das eingebaute und verdichtete Schotterbett sehr stark erhöht. Dies wird vor allem auf Reibungseffekte zwischen den Schotterkörnern zurückgeführt. Zu beachten ist an dieser Stelle, dass bei der, mithilfe der Bandbreitenmethode ermittelten Dämpfung, eine Ungenauigkeit von ca. $\pm 20\%$ berücksichtigt werden muss (Chopra, 2000).

Um die ermittelte Dämpfung zu verifizieren, wurden zusätzlich zu den Resonanzkurvenauswertungen Ausschwingversuche durchgeführt. Für diese wurde die Brücke in der ersten Resonanzfrequenz angeregt und nach Einstellen des stationären Schwingungszustandes durch Abschalten der Unwuchterreger (annähernd) in eine freie, gedämpfte Schwingung übergeführt.

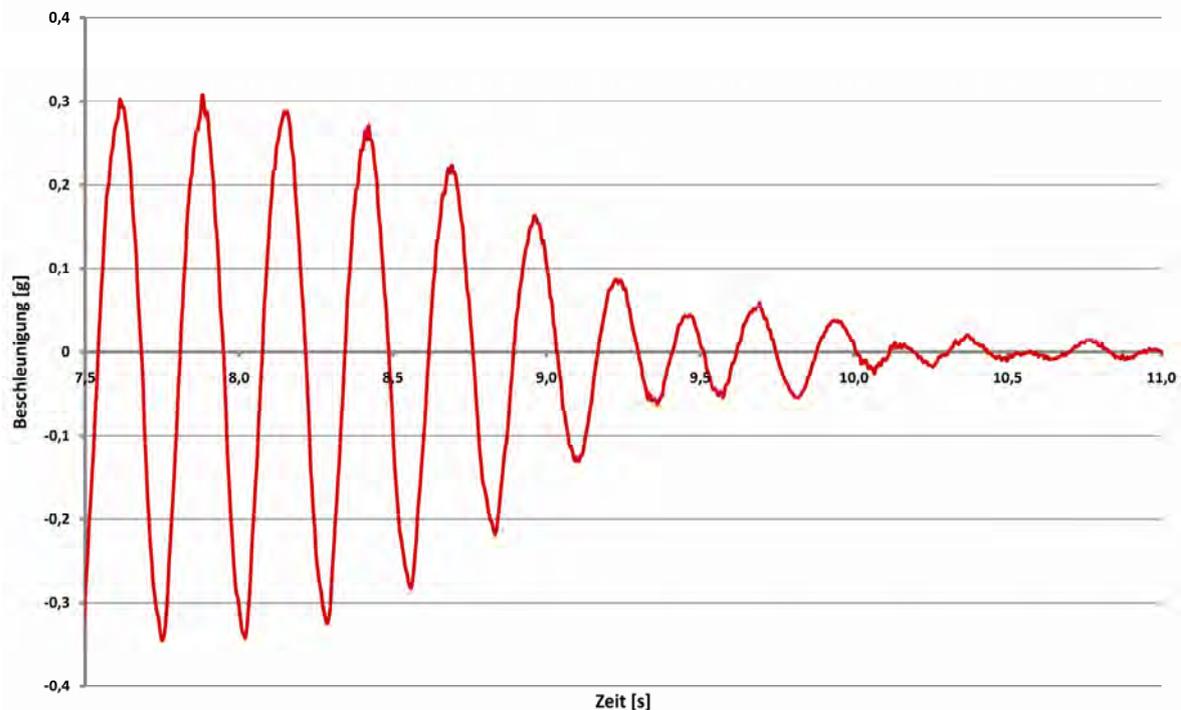


Abbildung 3.48: Beschleunigungen B6 im Ausschwingversuch [g]

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

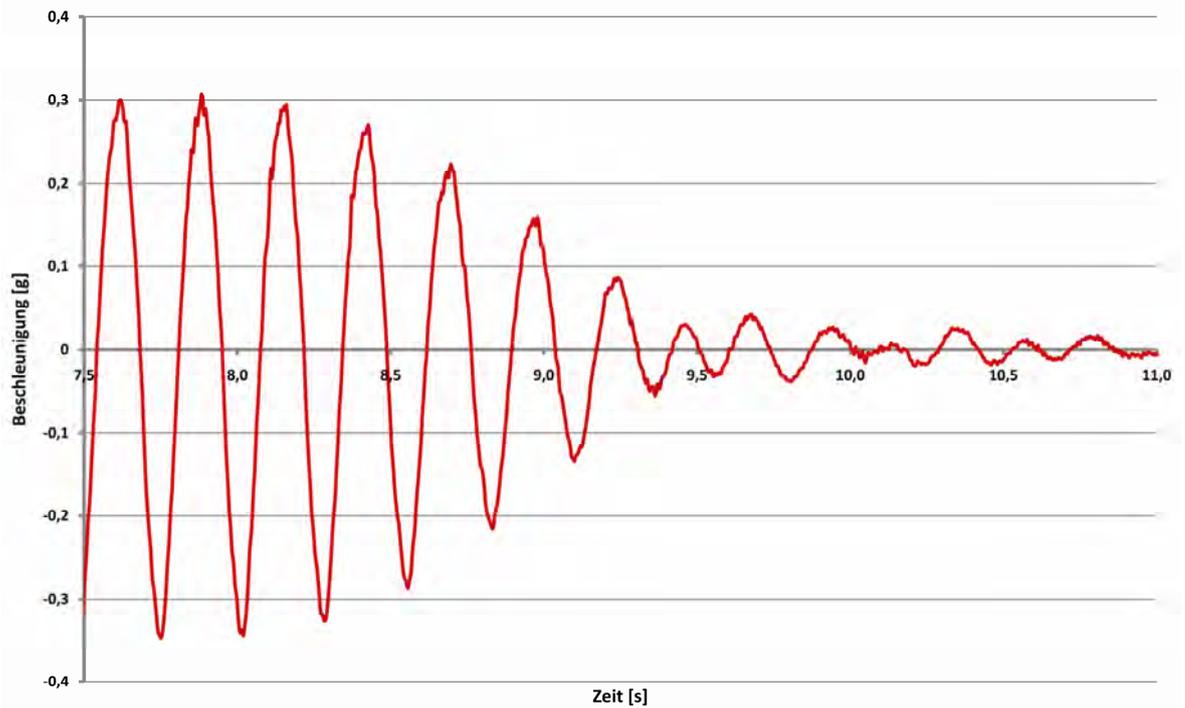


Abbildung 3.49: Beschleunigungen B8 im Ausschwingversuch [g]

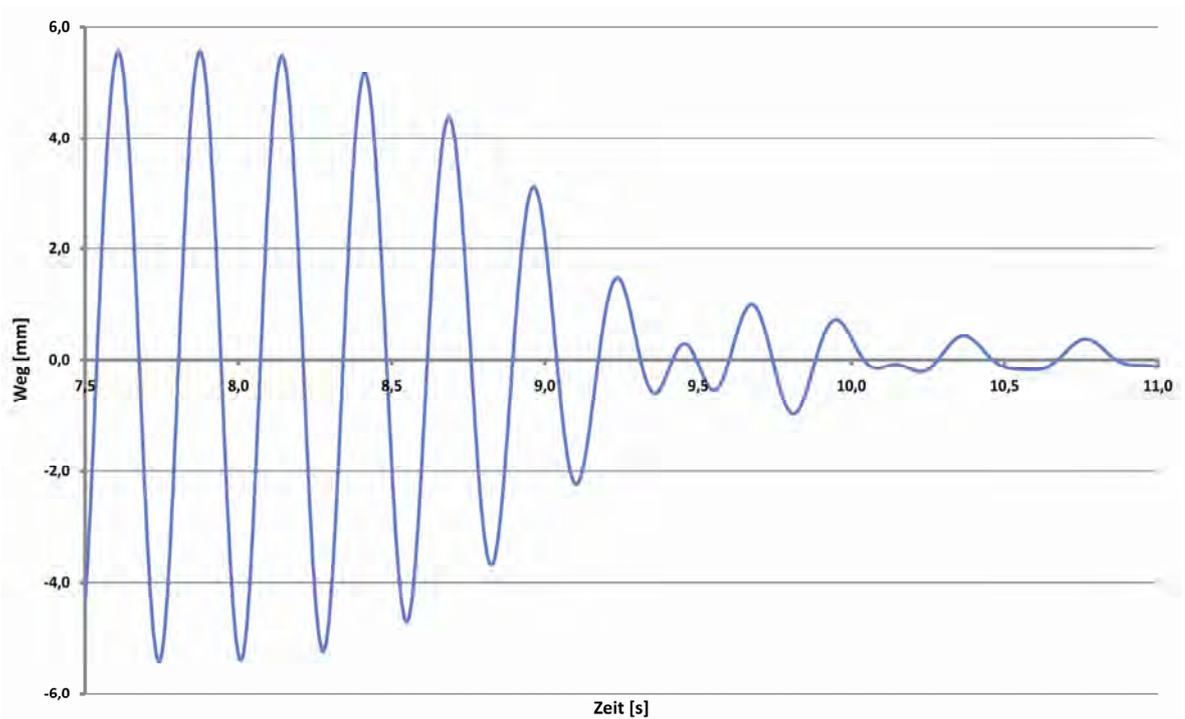


Abbildung 3.50: Wege W5 im Ausschwingversuch [mm]

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

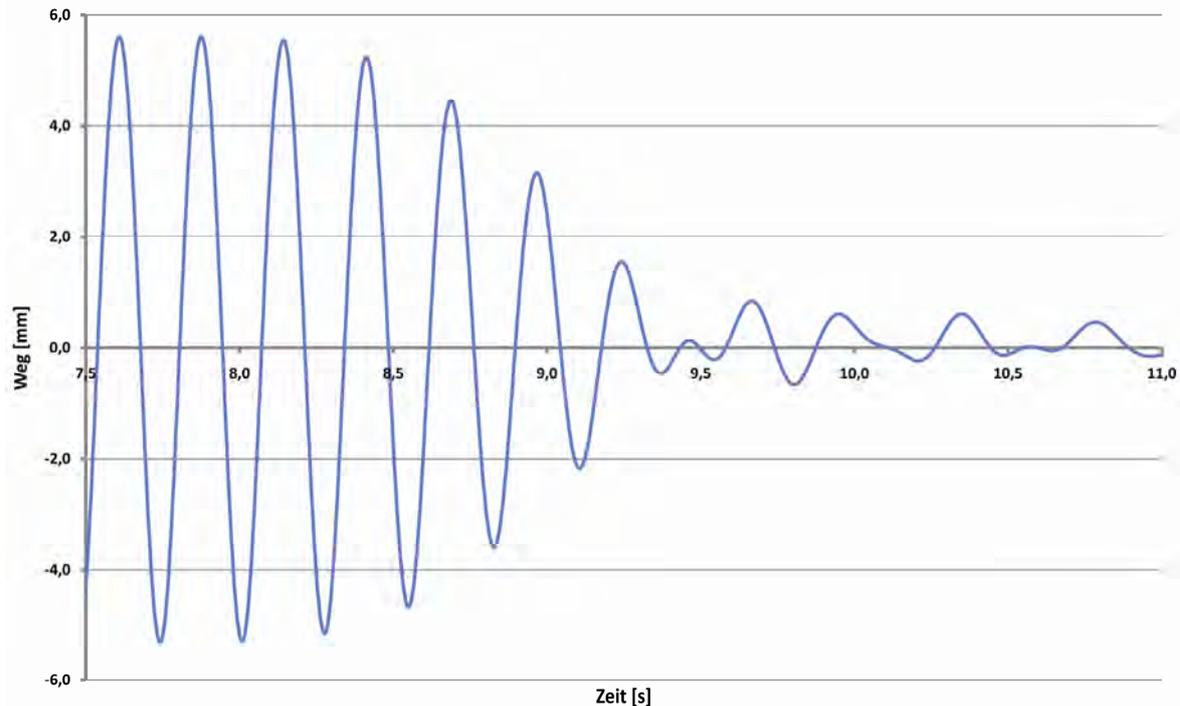


Abbildung 3.51: Wege W6 im Ausschwingversuch [mm]

Durch Berechnung des logarithmischen Dekrements (Chopra, 2000)

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \left(\frac{u_i}{u_{i+j}} \right) \quad (3.23)$$

mit den Amplitudenmaxima der Schwingung i und $i+j$ erhält man, bei Annahme schwacher Dämpfung, das viskose Dämpfungsmaß zu

$$\zeta \cong \frac{\delta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi j} \ln \left(\frac{u_i}{u_{i+j}} \right) \quad (3.24)$$

Nach Auswertung von Gleichung (3.15), die an dieser Stelle nicht vorgeführt werden soll (siehe Kapitel 3.1.3.1), für einige Ausschwingkurven sowie deren Amplitudenmaxima ergab sich ein durchschnittliches viskoses Dämpfungsmaß von

$$\zeta = 6,80 \% \quad (3.25)$$

Vergleicht man die Ergebnisse der beiden Methoden, erkennt man doch Unterschiede im Dämpfungsmaß. Dies wird vor allem auf die, durch das Schotterbett induzierte, nichtviskose Dämpfung der Versuchsbrücke zurückgeführt. Durch diese Abweichung von der viskosen Dämpfung, die sowohl in den Amplitudenfrequenzgängen als auch in den Ausschwingkurven erkennbar ist, können genau genommen beide Methoden zur Ermittlung des viskosen Dämpfungsmaßes nicht mehr angewendet werden, sie liefern dennoch einen brauchbaren Richtwert. Um für die weiteren Berechnungen einen Dämpfungswert festlegen zu können, wurden numerische Untersuchungen durchgeführt. Diese werden an dieser Stelle nicht erläutert, da sie in Kapitel 6 ausführlich behandelt werden. Es wurde versucht, mit den bekannten Parametern der modalen Masse der Versuchsbrücke (siehe Gl. (3.20)), der gemessenen Eigenfrequenz sowie der bekannten

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

Krafterregung numerisch dieselbe Amplitude wie die gemessene zu erhalten. Nachfolgend sind die gemessenen sowie die numerisch ermittelten Verformungen in Brückenmitte dargestellt. Das viskose Dämpfungsmaß musste dabei auf

$$\zeta = 6,90 \% \quad (3.26)$$

eingestellt werden. Dies stimmt sehr gut mit der Dämpfung überein, die aus den Ausschwingversuchen ermittelt wurde.

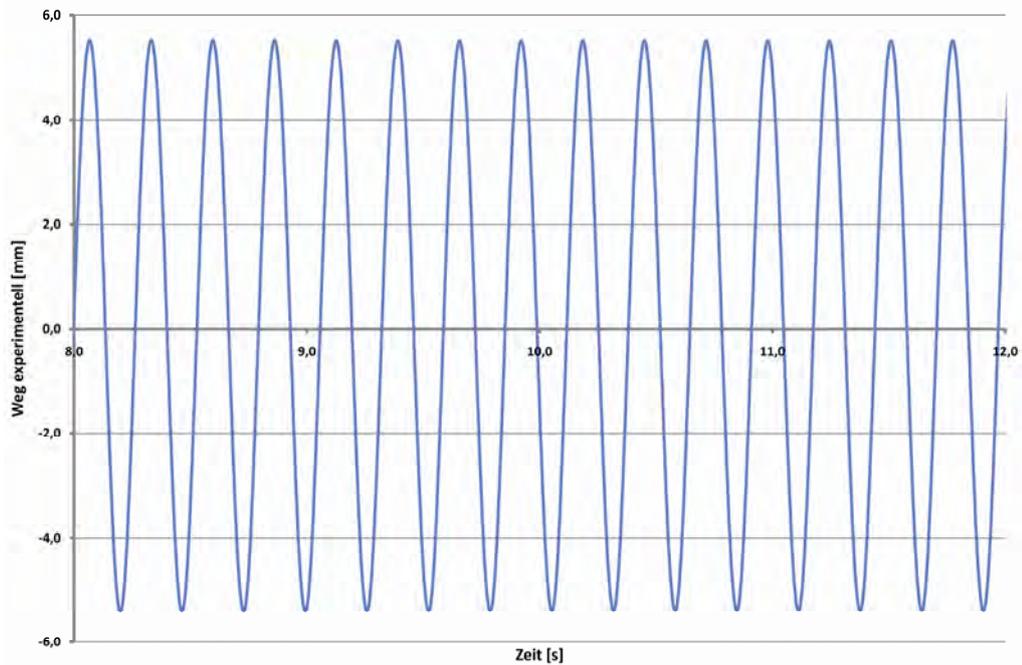


Abbildung 3.52: experimentell ermittelte Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall (stationärer Schwingungsbereich) [mm]

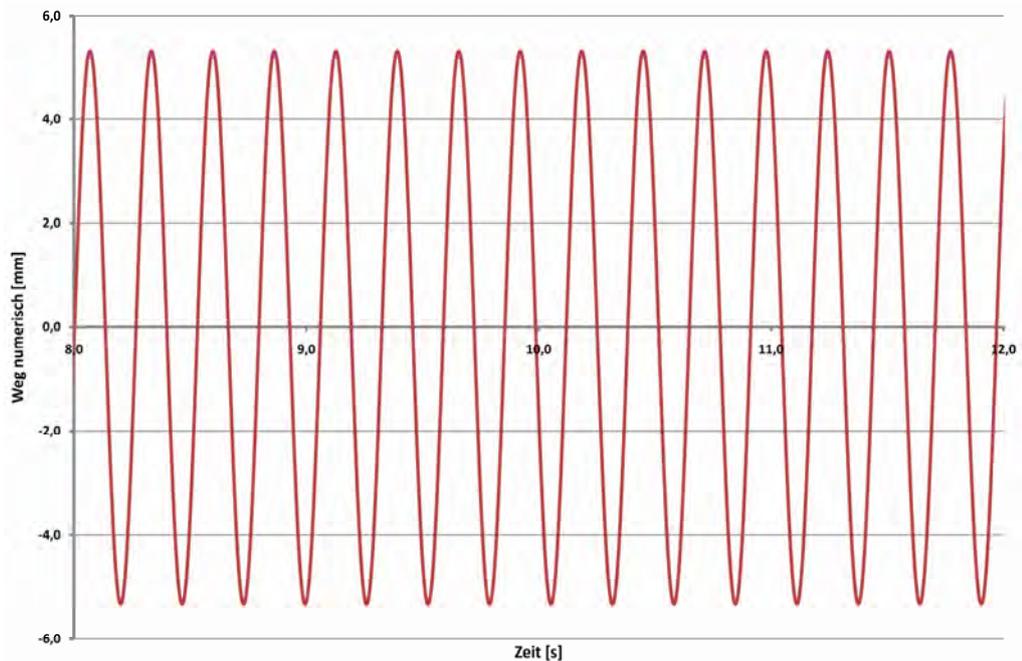


Abbildung 3.53: numerisch ermittelte Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall (stationärer Schwingungsbereich) [mm]

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

Wie bereits angemerkt wurde, konnte durch den Einbau des Schienen-Schwellen-Schotterbett-Systems ein sehr starker Anstieg der Eigenfrequenz sowie der Dämpfung der Versuchsbrücke beobachtet werden. Vor allem der starke Anstieg der Dämpfung von 1,20 % auf 6,90 % würde sich gravierend auf die Effektivität der Flüssigkeitsschwingungstilger auswirken, da bei einer derart hohen Eigendämpfung ein Großteil der durch die Unwuchterreger in das Tragwerk eingebrachten Energie bereits durch das Brückentragwerk dissipiert werden würde. In der Praxis müsste man für eine derartig stark eigengedämpfte Struktur mit sehr großer Wahrscheinlichkeit keine Tilger vorsehen. Um jedoch auch für die Versuchsreihe 2 (Kapitel 6.2), die auf der Brücke mit Schotteroberbau durchgeführt wurde, ebenfalls die Effektivität und Wirkungsweise der Tilger nachweisen zu können, wurde die Ursache für den starken Dämpfungsanstieg gesucht. Diese konnte sehr schnell in der Verbundwirkung zwischen Tragwerk und dem Schiene-Schwellen-System ausgemacht werden. Dabei überträgt der Schotter, weit mehr als erwartet, Reibungskräfte zwischen Schwellen und Tragwerk und bildet damit die Grundlage für die aktive Verbundwirkung. Somit sollten ein Entfernen der Schienenklammern und ein anschließendes Hochheben der Schienen die Verbundwirkung aufheben. Die praktische Realisierung dieser Maßnahme kann der nachfolgenden Abbildung entnommen werden. Weiters sind wiederum Amplitudenfrequenzgänge der Wege und Beschleunigungen in Brückenmitte sowie Ausschwingkurven der Wege mit losgelöster Schiene dargestellt. Zur Ermittlung der ersten Biegeeigenfrequenz sowie der zugehörigen Dämpfung wurden die zwei Unwuchterreger mit einem statischen Moment von 777,10 kgcm (Drittelsegment, alle Unbalancen ausgebaut) pro Unwuchterreger eingesetzt. Die Frequenzen wurden dabei von 120 – 220 UpM (2,00 – 3,67 Hz) variiert.



Abbildung 3.54: Schotteroberbau mit von den Schwellen losgelösten und Schienen

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

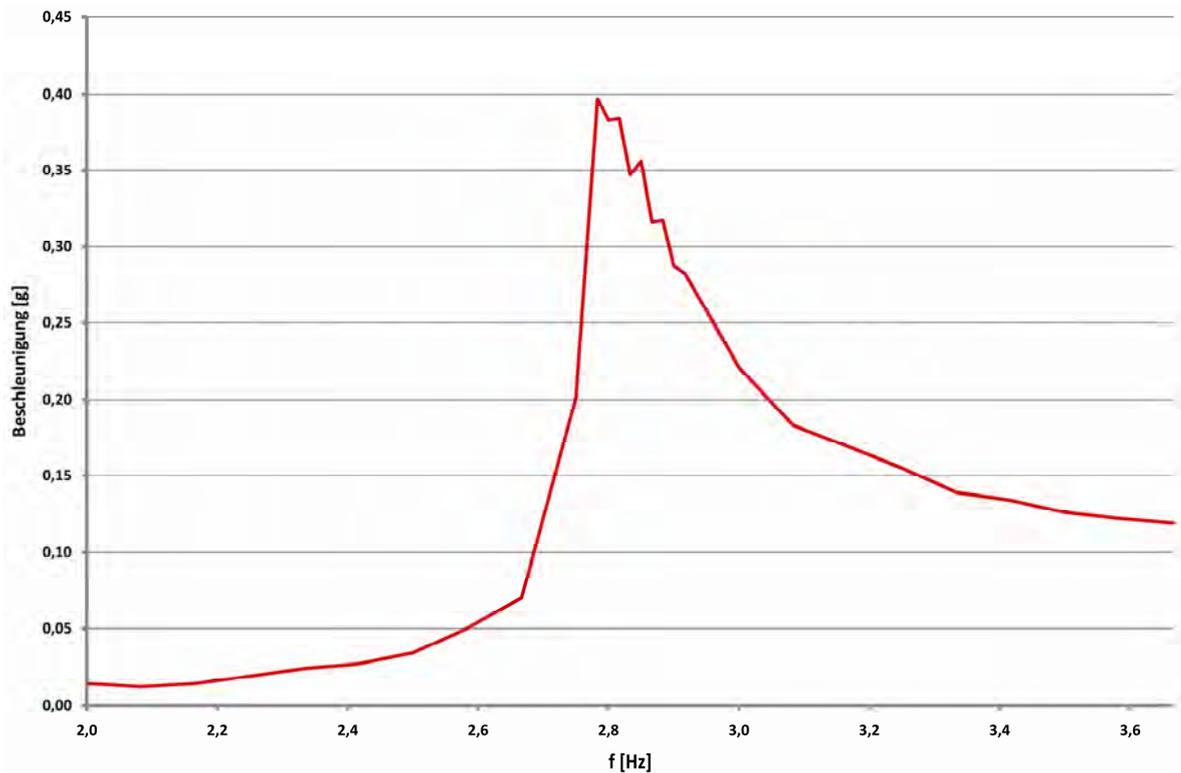


Abbildung 3.55: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen (B6) in der Mitte des rechten Hauptträgers bei losgelösten Schienen [g]

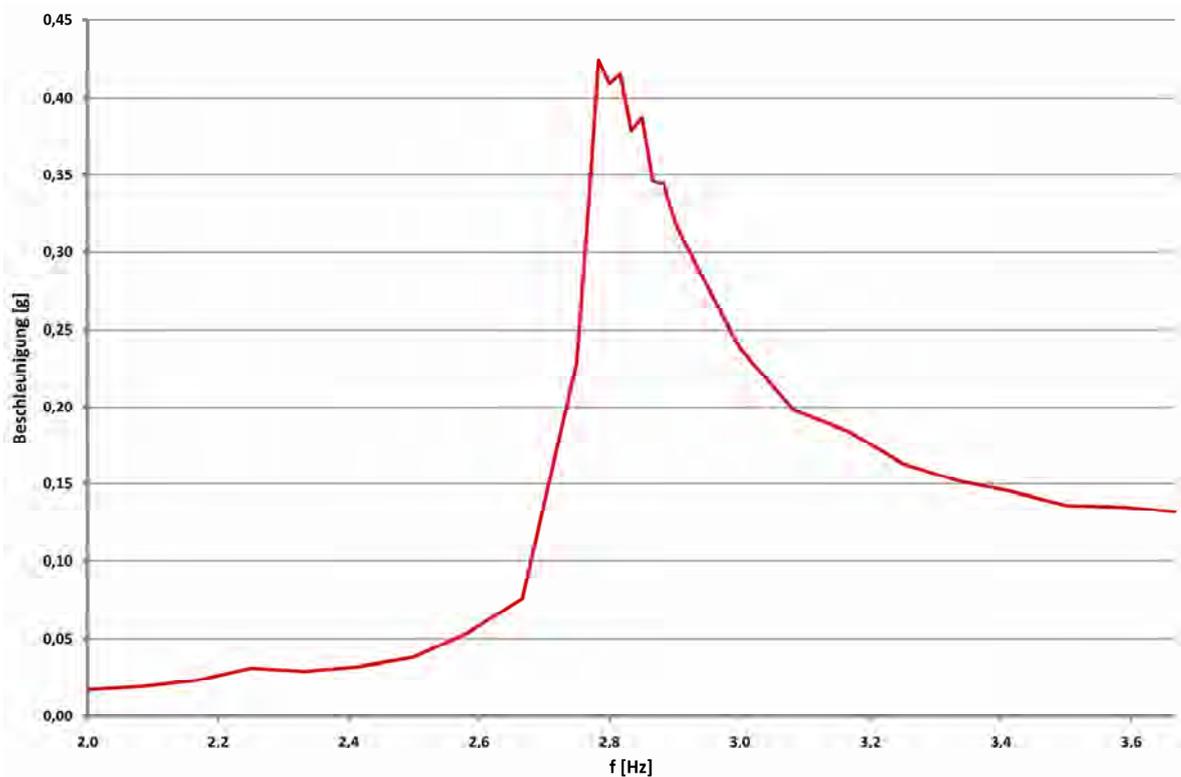


Abbildung 3.56: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen (B8) in der Mitte des linken Hauptträgers bei losgelösten Schienen [g]

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

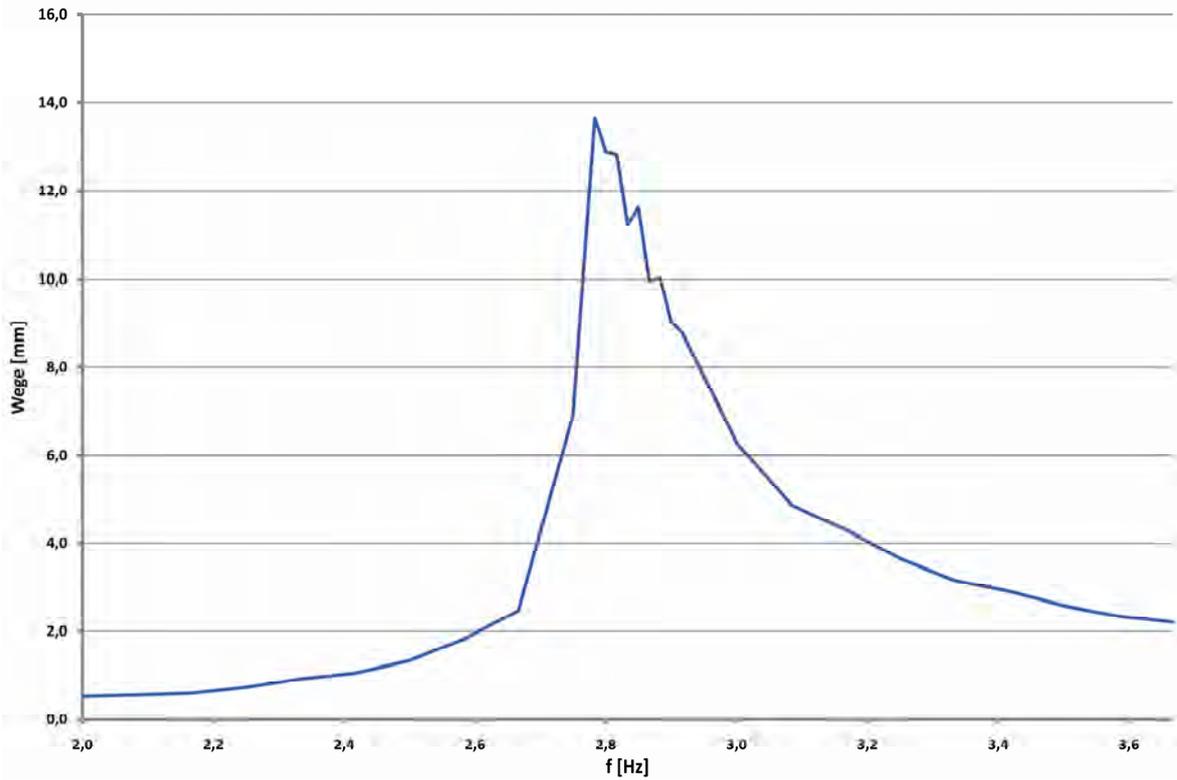


Abbildung 3.57: Amplitudenfrequenzgang der Wege (W5) in der Mitte des rechten Hauptträgers bei losgelösten Schienen [mm]

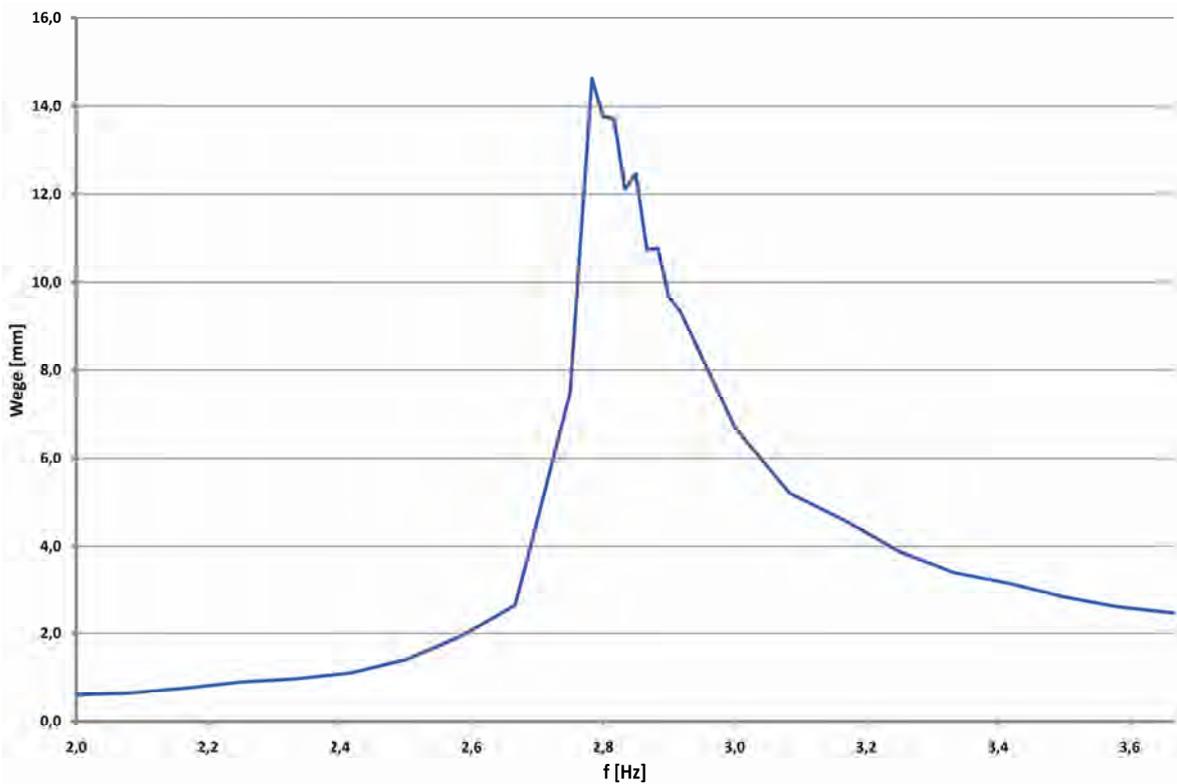


Abbildung 3.58: Amplitudenfrequenzgang der Wege (W6) in der Mitte des linken Hauptträgers bei losgelösten Schienen [mm]

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

Zur Ermittlung der viskosen Dämpfung wurde die Bandbreiten- oder Wurzel-2-Methode herangezogen. Mit dieser ist es möglich, die Dämpfung aus den Resonanzkurven auf einfache Art zu ermitteln (Chopra, 2000).

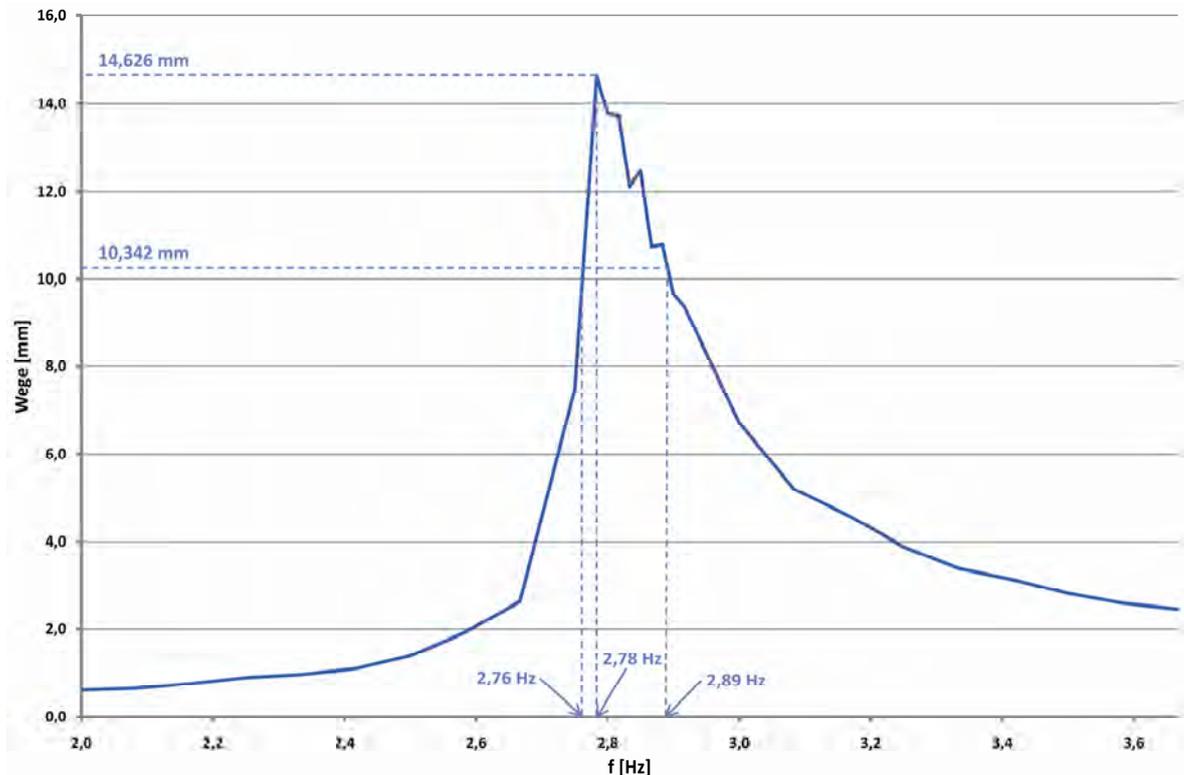


Abbildung 3.59: Resonanzkurve der Amplituden mit Anwendung der Bandbreitenmethode
Mit Abbildung 3.59 folgen

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 14,626 &= 10,342 \text{ mm} \\ f_a &= 2,76 \text{ Hz} \\ f_1 &= 2,78 \text{ Hz} \\ f_b &= 2,89 \text{ Hz}\end{aligned}\quad (3.27)$$

Damit folgt für das viskose Dämpfungsmaß

$$\zeta = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_b - f_a}{f_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2,89 - 2,76}{2,78} \cdot 100 = 2,34 \% \quad (3.28)$$

Wie bereits den Resonanzkurven entnommen werden konnte, konnte die Dämpfung durch das Entfernen der Schienen und der damit einhergehenden Aufhebung des Verbundes zwischen Tragwerk und Schienen sehr stark reduziert werden. Die Vermutung der Ursache in einer Verbundwirkung zwischen Tragwerk und Schotter-Schwellen-Schienen-System konnte damit bestätigt werden. Beim ermittelten viskosen Dämpfungsmaß soll wiederum angemerkt werden, dass dabei eine Ungenauigkeit von ca. $\pm 20 \%$ berücksichtigt werden muss (Chopra, 2000). Um die ermittelte Dämpfung zu verifizieren, wurden zusätzlich zu den Resonanzkurvenauswertungen

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

Ausschwingversuche durchgeführt. Für diese wurde die Brücke in der ersten Resonanzfrequenz angeregt und nach Einstellen des stationären Schwingungszustandes durch Abschalten der Unwuchterreger (annähernd) in eine freie, gedämpfte Schwingung übergeführt.

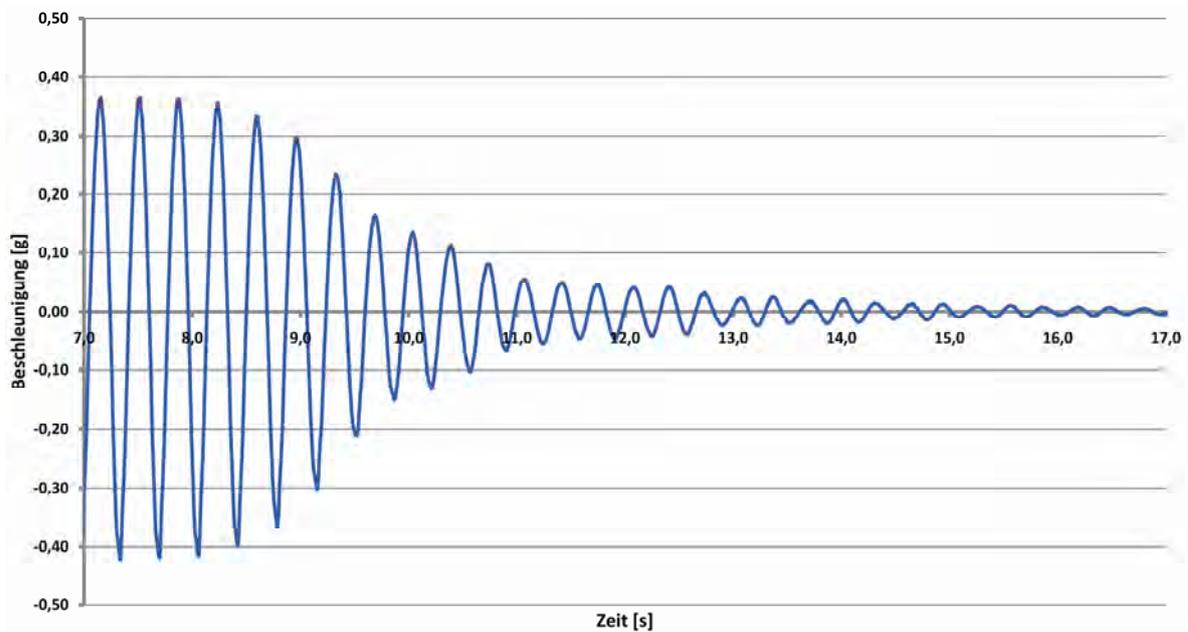


Abbildung 3.60: Beschleunigungen B6 im Ausschwingversuch bei gelösten Schienen [g]

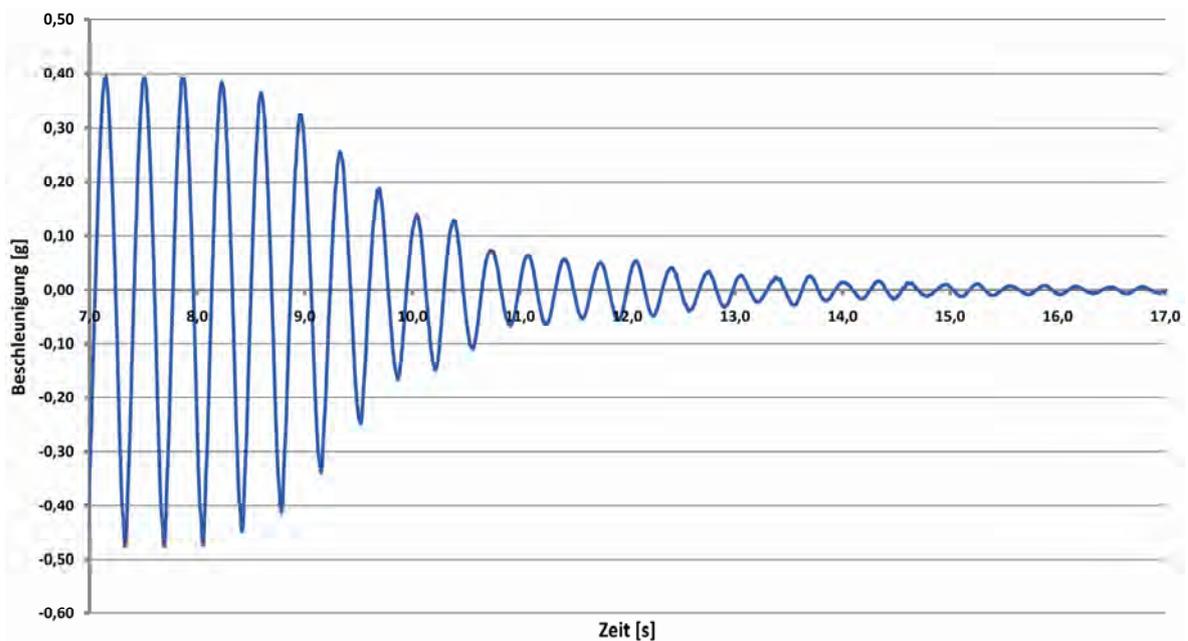


Abbildung 3.61: Beschleunigungen B8 im Ausschwingversuch bei gelösten Schienen [g]

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

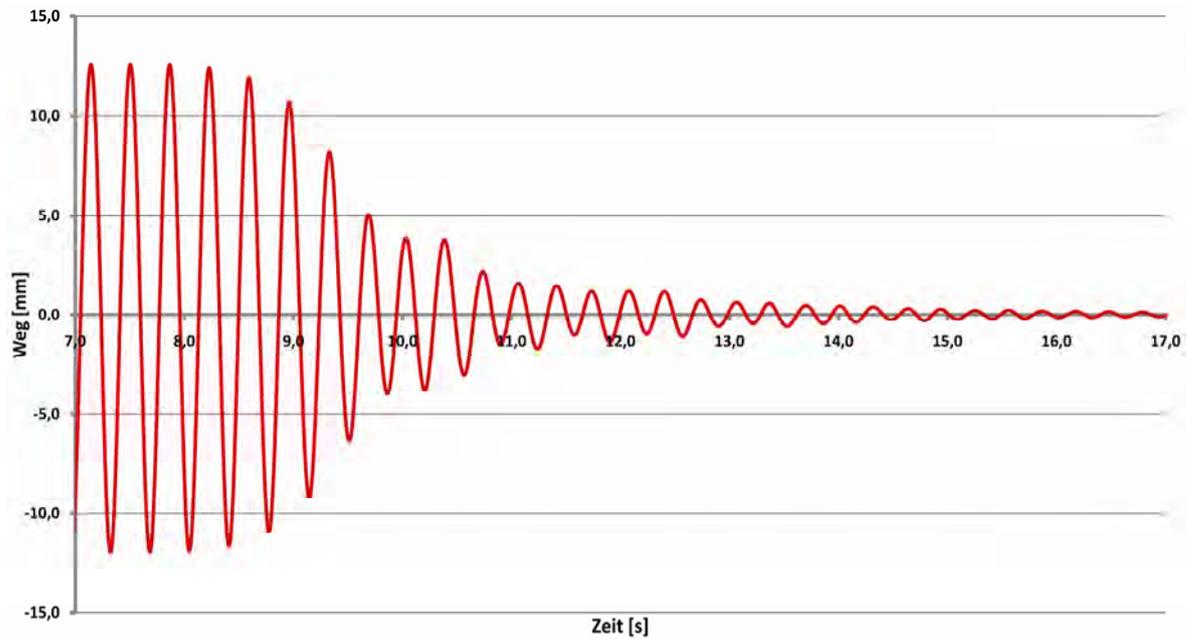


Abbildung 3.62: Wege W5 im Ausschwingversuch bei gelösten Schienen [mm]

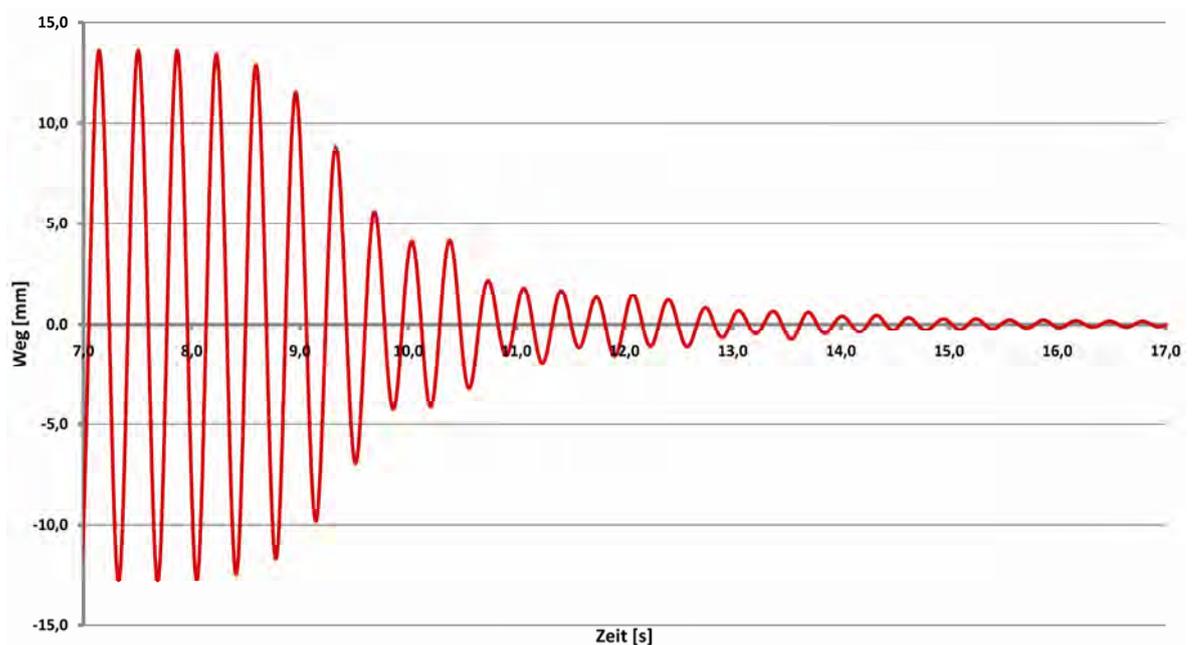


Abbildung 3.63: Wege W6 im Ausschwingversuch bei gelösten Schienen [mm]

Durch Berechnung des logarithmischen Dekrements (Chopra, 2000)

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \left(\frac{u_i}{u_{i+j}} \right) \quad (3.29)$$

mit den Amplitudenmaxima der Schwingung i und $i+j$ erhält man, bei Annahme schwacher Dämpfung, das viskose Dämpfungsmaß zu

$$\zeta \equiv \frac{\delta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi j} \ln \left(\frac{u_i}{u_{i+j}} \right) \quad (3.30)$$

Nach Auswertung von Gleichung (3.30), die an dieser Stelle nicht vorgeführt werden soll (siehe Kapitel 3.1.3.1), für einige Ausschwingkurven sowie deren Amplitudenmaxima ergab sich ein durchschnittliches viskoses Dämpfungsmaß von

$$\zeta = 3,10 \% \quad (3.31)$$

Dieses Dämpfungsmaß liegt über dem mit der Bandbreitenmethode ermittelten. Bei der zugehörigen rechnerischen Ermittlung konnte jedoch beobachtet werden, dass die bei großen Amplituden ermittelten Dämpfungsmaße beider Methoden sehr gut übereinstimmen, erst bei kleiner werdenden Amplituden erhöht sich das aus den Ausschwingkurven ermittelte Dämpfungsmaß. Dies wird auf die größer werdende Reibung zwischen den Schotterkörnern bei kleineren Amplituden zurückgeführt. Da die Vergleiche der experimentellen mit den numerischen Untersuchungen hauptsächlich im Resonanzbereich und damit mit großen Amplituden durchgeführt werden, werden die weiteren Studien mit dem mit der Bandbreitenmethode ermittelten viskosen Dämpfungsmaß durchgeführt.

3.2. Unwuchterreger



Abbildung 3.64: Abbildung der Unwuchterreger

Zur Erzeugung von Schwingungen wurden bei der Versuchsbrücke zwei Unwuchterreger, sogenannte Richterregener, eingesetzt. Diese bestehen jeweils aus einem Motor, einer Schwungscheibe, einem Getriebe und den Unwuchten selbst. Pro Unwuchterreger sind vier Unwuchtscheiben montiert. Durch diese Anordnung kann gewährleistet werden, dass lediglich in der gewünschten Krafrichtung, nämlich vertikal, eine resultierende

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

Kraftkomponente übrig bleibt, sich hingegen die anderen Kraftkomponenten aufheben. Eine variable Krafteinstellung ist einerseits durch zwei unterschiedliche Unwuchtscheiben sowie andererseits durch demontierbare Unbalancen möglich, wodurch eine Variation des statischen Momentes möglich wurde. In der nachfolgenden Tabelle sind ein paar der Variationsmöglichkeiten der Unwuchterreger dargestellt.

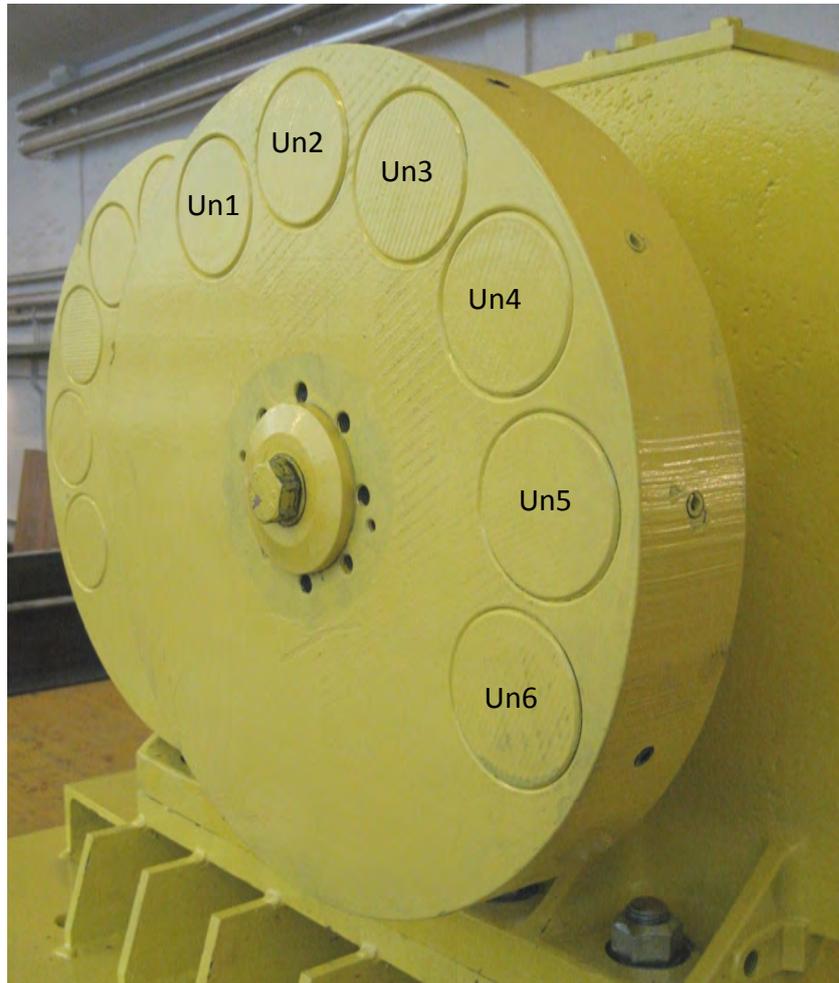


Abbildung 3.65: Vollscheibe

In den nachfolgenden Tabellen bedeuten



Unbalance (Un) eingebaut
Unbalance (Un) ausgebaut

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

Tabelle 3.3: statische Momente m_e der Vollscheiben bei unterschiedlicher Anordnung der Unbalancen

me [kgcm]	Anordnung der Unbalancen					
	Un1	Un2	Un3	Un4	Un5	Un6
0	●	●	●	●	●	●
113	○	●	●	●	●	○
278	●	○	●	●	○	●
372	●	●	○	○	●	●
390	○	○	●	●	○	○
484	○	●	○	○	●	○
649	●	○	○	○	○	●
762	○	○	○	○	○	○

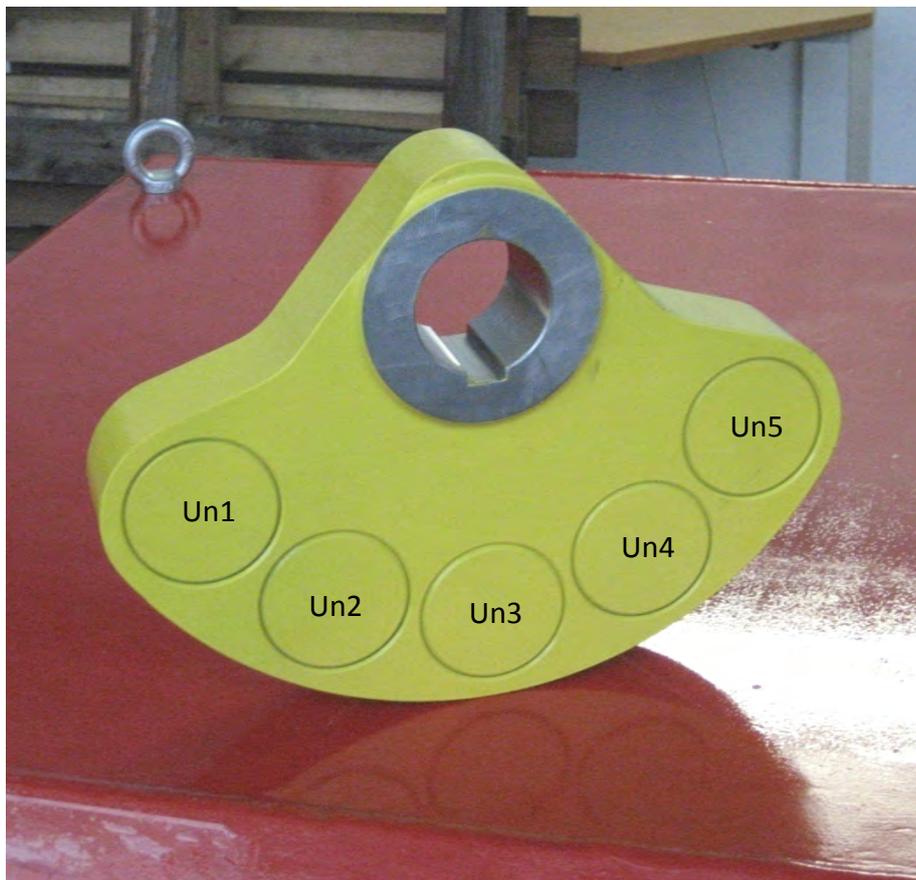


Abbildung 3.66: Drittelscheibe

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

Tabelle 3.4: statische Momente m_e der Drittelscheiben bei unterschiedlicher Anordnung der Unbalancen

me [kgcm]	Anordnung der Unbalancen				
	Un1	Un2	Un3	Un4	Un5
1505	●	●	●	●	●
1313	●	●	○	●	●
1304	○	●	●	●	○
1170	●	○	●	○	●
1112	○	●	○	●	○
978	●	○	○	○	●
969	○	○	●	○	○
777	○	○	○	○	○

Durch eine elektronische Steuerung der beiden Unwuchterreger sowie unterschiedliche Übersetzungen zwischen Motor und Getriebe sind Frequenzen von 30 – 1000 UpM (0,5 – 17,0 Hz) in Schritten von 1 UpM frei wählbar. Eine beliebige Phasenverschiebung zwischen den beiden Maschinen ist ebenso möglich.



Abbildung 3.67: Schaltschrank zur Steuerung der Unwuchterreger

3.3. Messtechnische Einrichtungen

Zur Erfassung der bei den Versuchen auftretenden Verformungen, Beschleunigungen, Dehnungen und Drücke wurden an den nachfolgend beschriebenen Stellen Messgeräte angeordnet. Bei diesen handelt es sich um

- piezoelektrische Beschleunigungsaufnehmer (Messbereich $\pm 2 \text{ g}$)
- induktive Wegaufnehmer (Messbereich $\pm 50 \text{ mm}$)
- Dehnmessstreifen
- piezoresistive Drucksensoren (Messbereich $0 - 6 \text{ bar}$)

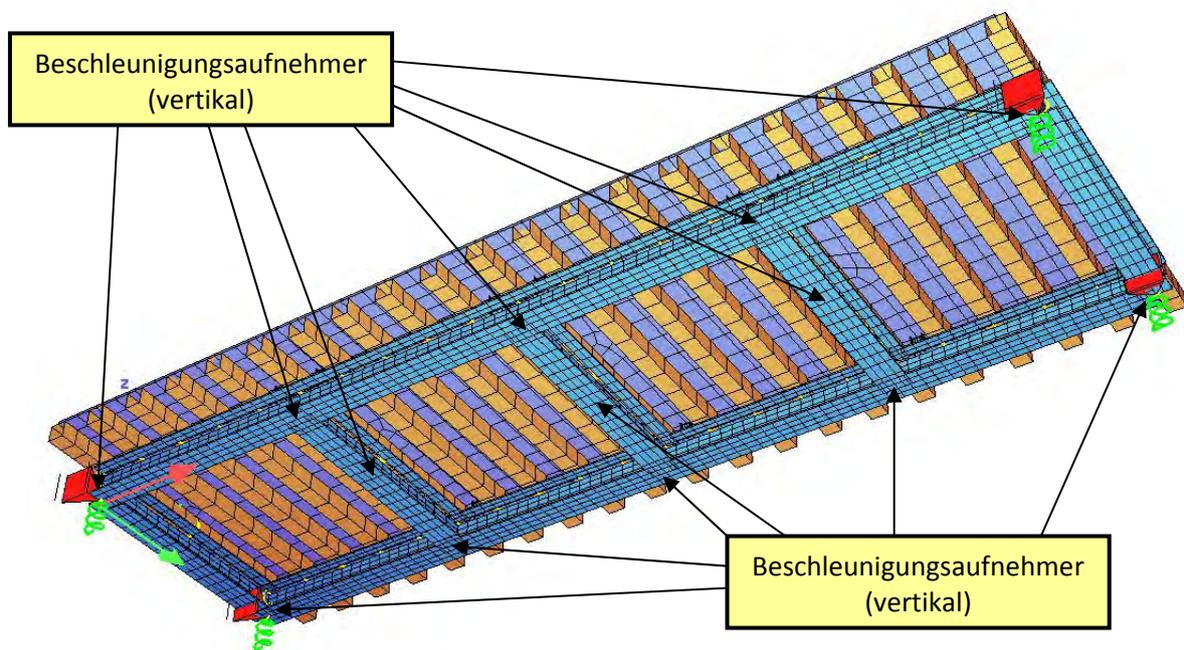


Abbildung 3.68: Montagepunkte der Beschleunigungsaufnehmer zur Messung vertikaler Beschleunigungen

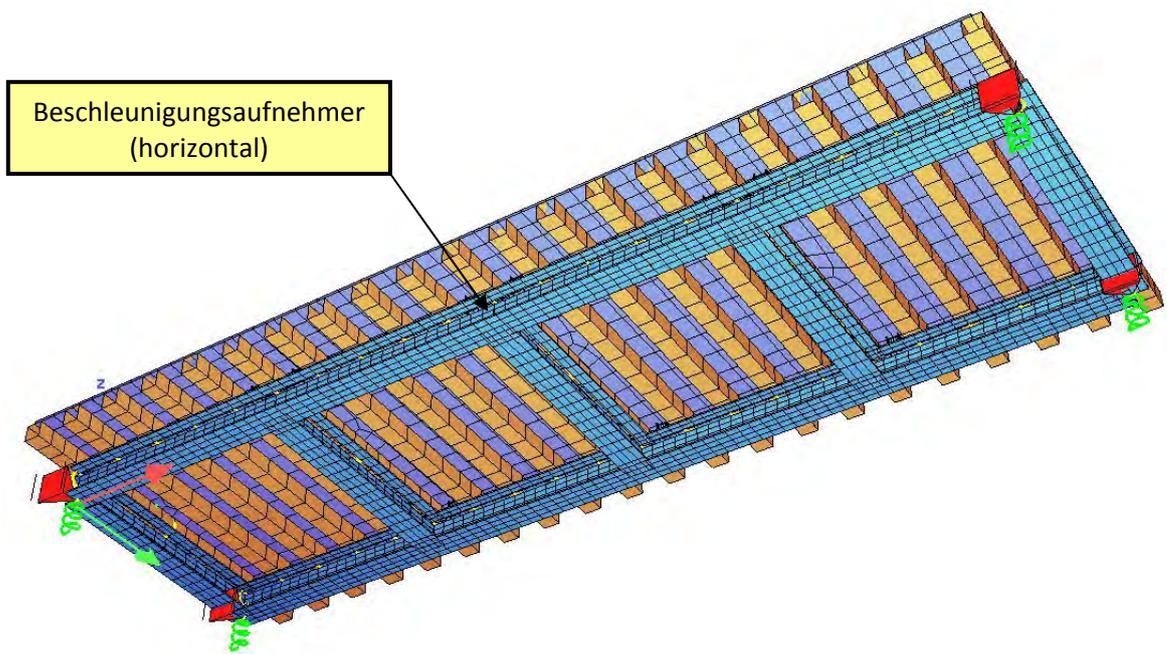


Abbildung 3.69: Montagepunkte der Beschleunigungsaufnehmer zur Messung horizontaler Beschleunigungen

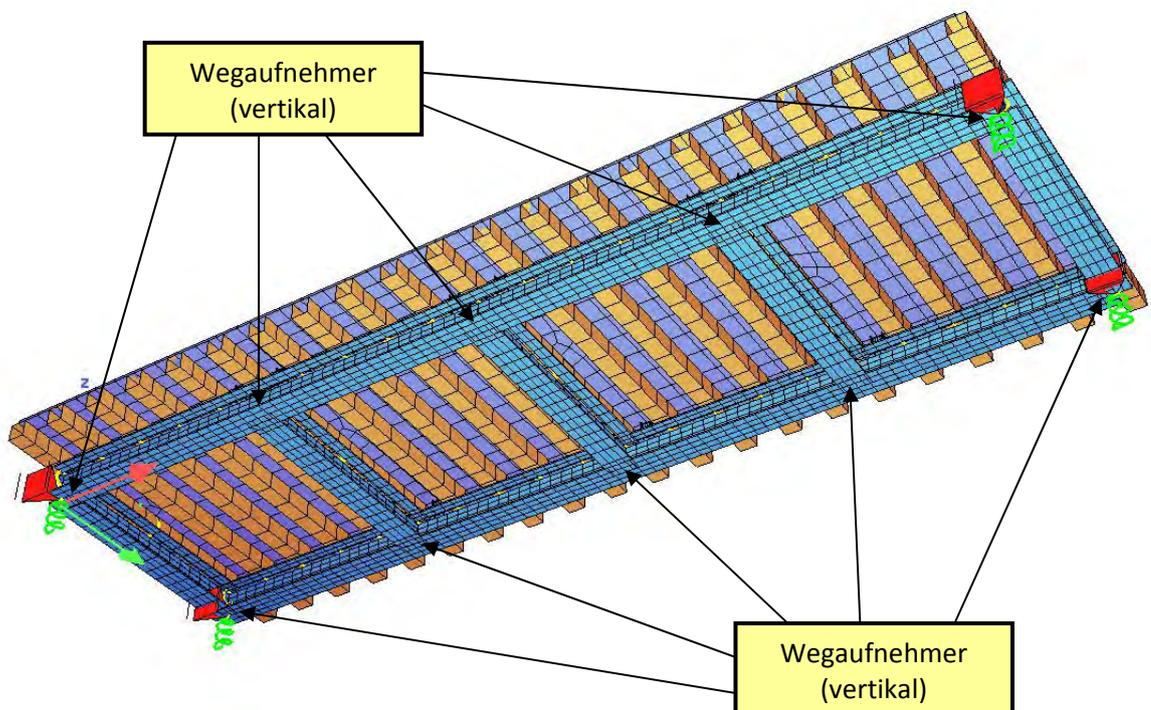


Abbildung 3.70: Montagepunkte der Wegaufnehmer zur Messung vertikaler Verformungen

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

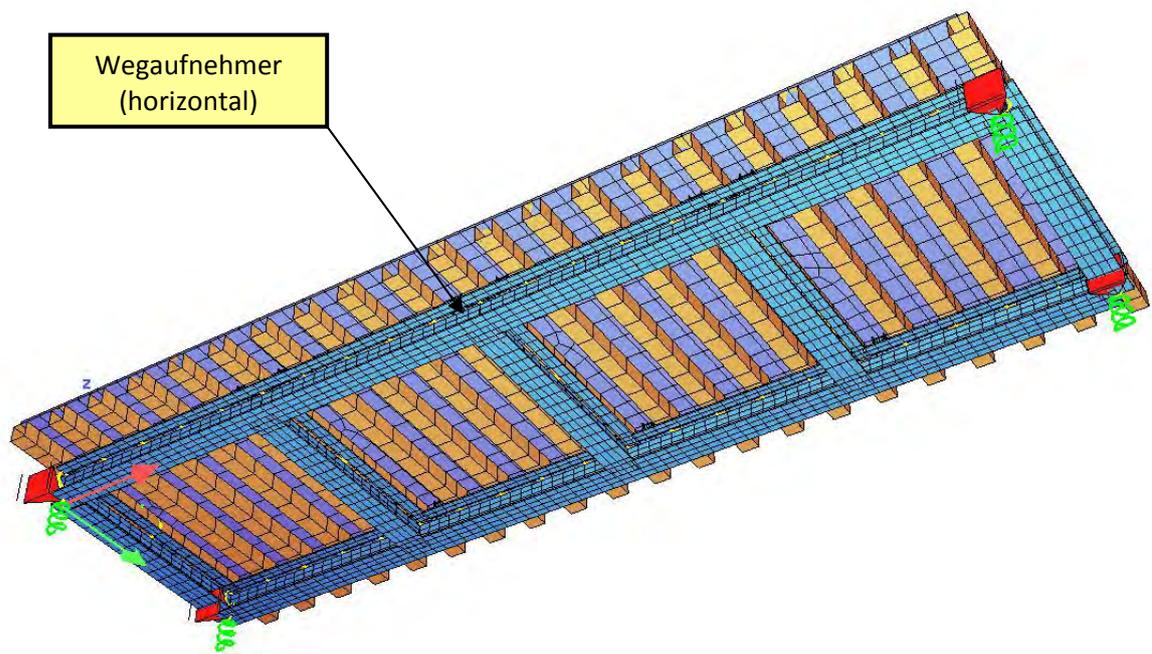


Abbildung 3.71: Montagepunkte der Wegaufnehmer zur Messung horizontaler Verformungen

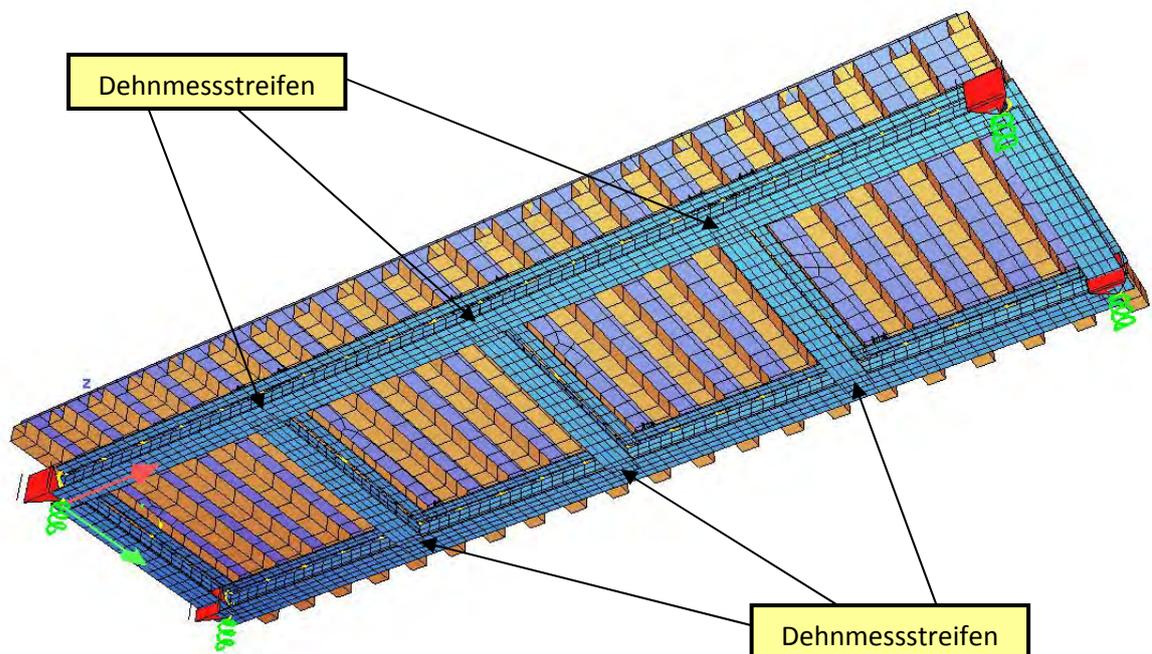


Abbildung 3.72: Montagepunkte der Dehnmessstreifen zur Messung lokaler Dehnungen

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

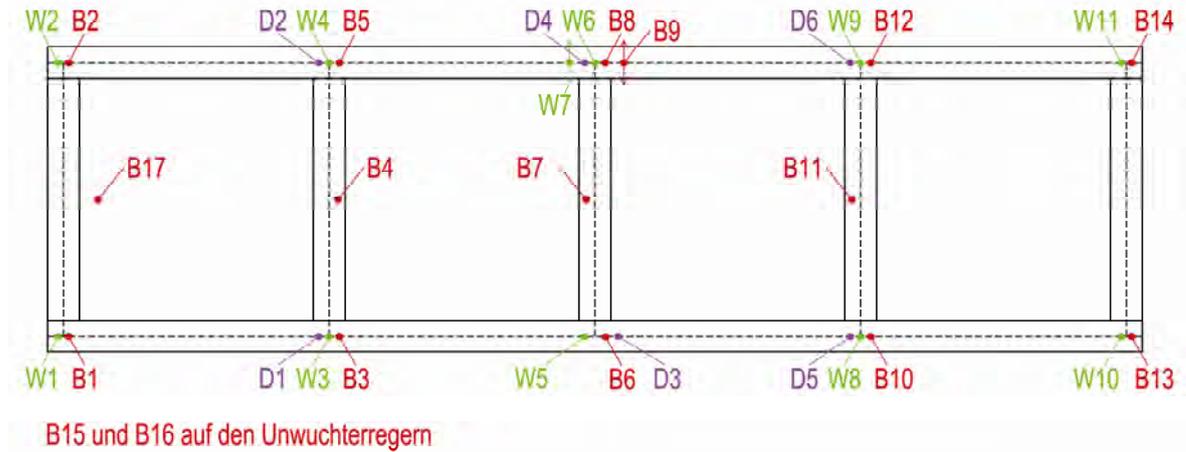


Abbildung 3.73: Anordnung und Bezeichnung der verwendeten Messinstrumente

Darin stehen die Abkürzungen für

W	Wegsensoren
B	Beschleunigungsaufnehmer
D	Dehnmessstreifen

Die vier Drucksensoren sind dabei nicht dargestellt, da diese an den Flüssigkeitsschwingungstilgern angebracht wurden.



Abbildung 3.74: Wegaufnehmer im Auflagerbereich

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen



Abbildung 3.75: Wegaufnehmer, Beschleunigungsaufnehmer und Dehnmessstreifen in Brückenmitte



Abbildung 3.76: Drucksensor am Flüssigkeitsschwingungstilger (Versuchsreihe 1) montiert

3. Versuchsanlage zur Erzeugung und Messung von Brückenschwingungen

Zur Erfassung der analogen Daten wurden Spannungsverstärker sowie Signalwandler eingesetzt. Von diesen konnten die Daten mittels spezieller Software an einem Laptop ausgelesen und weiterverarbeitet werden.



Abbildung 3.77: Signalwandler und Laptop zur Datenauswertung

4. UNTERSUCHUNGEN ZU MÖGLICHEN FLUIDEN

Entgegen den konventionellen Schwingungstilgern, die ihre Wirkung z. B. durch eine mit dem Tragwerk elastisch gekoppelte Masse erzeugen, benötigen die Flüssigkeitsschwingungstilger eine sich in einem Rohrsystem bewegende Flüssigkeit. Es ist daher offensichtlich, dass neben den optimalen Abstimmungen der Tilgerparameter nach Kapitel 5.3.4, die chemisch-physikalischen Eigenschaften der verwendeten Flüssigkeit einen wesentlichen Einfluss auf die Effektivität des Flüssigkeitsschwingungstilgers haben. Betrachtet man die mechanischen Gleichungen des Flüssigkeitsschwingungstilgers, im speziellen die Bewegungsgleichung der Flüssigkeit (5.18) sowie die Gleichung der vertikalen Kraftkomponente (5.162) des Tilgers, erkennt man zwei wichtige Einflussgrößen der Flüssigkeit auf die Effektivität, die Viskosität sowie die Dichte. Die Dichte als Eigenschaft ist hinlänglich bekannt, deshalb soll im Folgenden nur die Viskosität etwas näher erläutert werden.

4.1. Viskosität

Flüssigkeiten haben die Eigenschaft, der gegenseitigen Verschiebung der Flüssigkeitsteilchen, einen, wenn auch geringen, Widerstand entgegenzusetzen. Diese Eigenschaft wird als Viskosität oder Zähigkeit bezeichnet (Bollrich, 2000). Der Widerstand hängt davon ab, mit welcher Geschwindigkeit die Verschiebung der Teilchen gegeneinander erfolgt. Die Viskosität beruht auf dem Molekülaustausch benachbarter Schichten. Sie wird auch als innere Reibung bezeichnet, im Gegensatz zur Reibung der Flüssigkeitsteilchen an den äußeren festen Wandgrenzen, der äußeren oder Wandreibung. Nahezu alle tropfbaren Flüssigkeiten gehorchen dabei dem Newtonschen Ansatz für die Schubspannungen

$$\tau = \eta \frac{dv}{dn} \quad (4.1)$$

mit der Proportionalitätskonstante η , der dynamischen Viskosität mit der Einheit $Pa \cdot s$ und n der Normalenrichtung zur Geschwindigkeitsrichtung. Bezieht man die dynamische Viskosität η auf die Dichte ρ der Flüssigkeit, folgt daraus die kinematische Viskosität ν

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (4.2)$$

mit der Einheit m^2/s . Beide Viskositäten sind abhängig von der Temperatur, weiters können sie sich durch Beimengungen von Salzen oder Verunreinigungen sehr stark verändern. In dieser Arbeit werden lediglich Newtonsche Flüssigkeiten behandelt, es sollen jedoch an dieser Stelle auch die anderen möglichen Formen der Schubspannungsgesetze erwähnt werden, nämlich strukturviskose Fluide, mit verringertem Widerstand bei steigendem Geschwindigkeitsgefälle, sowie dilatante Fluide, mit sinkendem Widerstand bei steigendem Geschwindigkeitsgefälle.

Die Messung der Viskosität erfolgt mittels Rheometern, wobei man folgende Hauptarten unterscheidet:

4. Untersuchungen zu möglichen Fluiden

Rotationsrheometer
Kapillarrheometer
Kugelfallviskosimeter
Dehnrheometer

Näher behandelt werden an dieser Stelle nur die Rotationsrheometer, da diese in vorliegender Arbeit auch zum Einsatz kamen. Sie weisen sich durch ihr axial rotierendes Messsystem aus, wobei dabei die Winkelgeschwindigkeit Ω des rotierenden Teiles auf die Schergeschwindigkeit γ und das erzeugte Drehmoment M_d auf die Schubspannungen τ schließen lässt. Daraus lässt sich dann, in Abhängigkeit der im Versuch gewählten Temperatur, die dynamische Viskosität ermitteln. Eine Prinzipskizze eines derartigen Rotationsrheometers ist in nachfolgender Abbildung dargestellt.

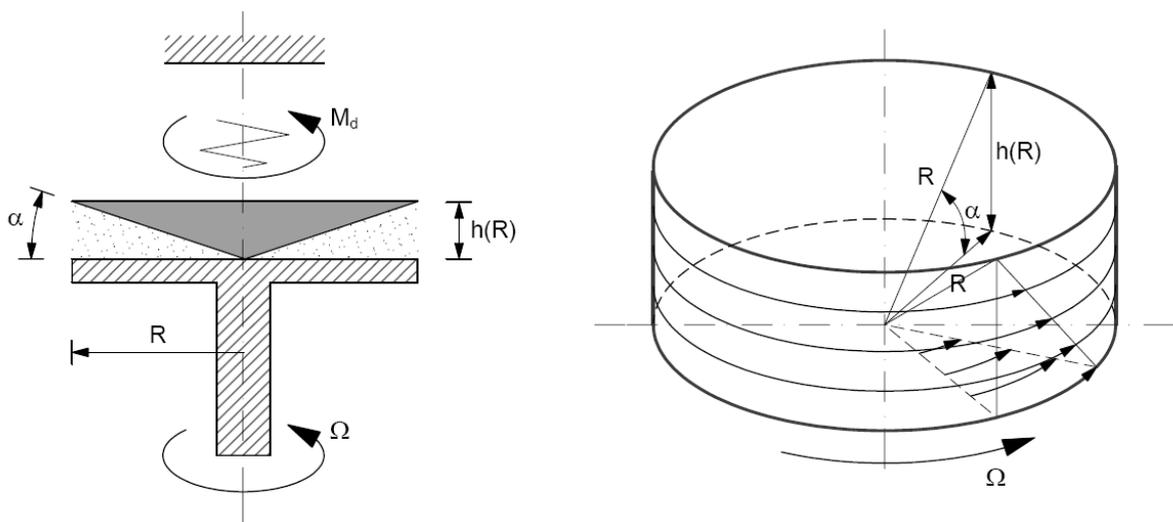


Abbildung 4.1: Prinzipskizze eines Rotationsrheometers (Kirchhofer, 2008)

4.2. Anforderungsprofil an die Flüssigkeiten

Wie bereits zuvor erwähnt, ergeben sich aus mechanischer Sicht als wichtigste Parameter der verwendeten Flüssigkeit die

- Dichte und
- Viskosität

Betrachtet man die Gleichung der Vertikalkomponente der Tilgerkraft (5.162), lässt sich erkennen, dass für eine ausreichende Wirkung des Tilgers nach Den Hartog, wie in Kapitel 2.2.8.3 gezeigt werden konnte, ein Masseverhältnis μ von 1 – 5 % vorgesehen werden muss. Eine möglichst hohe Dichte der Flüssigkeit bedeutet bei gleichbleibendem Masseverhältnis eine Reduktion des dabei benötigten Volumens, was einhergeht mit geringerem Platzbedarf oder sogar einer geringeren Anzahl von Tilgern. Den Versuchen sowie numerischen Studien aus Kapitel 6 kann entnommen werden, dass eine Viskosität im Bereich der Viskosität des Wassers, eine Dämpfung des Flüssigkeitsschwingungstilgers

4. Untersuchungen zu möglichen Fluiden

liefert, die bereits sehr nahe an der optimalen Dämpfung nach Gl. (5.223) zu liegen kommt. Das Bestreben ist also, schwere Flüssigkeiten mit ähnlich viskosem Verhalten von Wasser zu finden. Eine zu geringe Viskosität fördert nämlich nach Kapitel 6.1.2.7 das unerwünschte Auftreten von Parameterresonanz und eine zu große Viskosität verhindert die notwendige Bewegung der Flüssigkeit und erzeugt damit einen unwirksamen Tilger.

Betrachtet man den Einsatz der Flüssigkeitsschwingungstilger ganzheitlich, also nicht nur von der Seite der mechanischen Effektivität, ergeben sich natürlich noch folgende Anforderungen:

- temperaturbeständig
- nicht korrosiv
- dauerhaft
- umweltverträglich
- ungefährlich beim Ein- und Ausbau
- wirtschaftlich

Da Brücken für einen Temperaturbereich von ca. -30° bis 70°C bemessen werden, sollte die Flüssigkeit im Schwingungstilger auch über diesen Temperaturbereich einsatzbereit sein, das heißt den Aggregatzustand nicht wechseln, sowie annähernd konstante physikalische und chemische Eigenschaften aufweisen. Viele Gemische von Flüssigkeiten, sogenannte Dispersionen, unterliegen den Prozessen der Sedimentation, Agglomeration und Phasentrennung. Da diese Effekte die Eigenschaften der Flüssigkeit drastisch und nachhaltig verändern, müssen diese bei der Wahl der Flüssigkeit bzw. Flüssigkeitskomponenten berücksichtigt werden. Die Flüssigkeit bzw. das Gemisch muss also über einen bestimmten Zeitraum konstante Eigenschaften aufweisen, ohne sich z. B. zu entmischen. Über diesen Zeitraum würden sich dann auch die erforderlichen Inspektionsintervalle definieren. Auf Brückentragwerken ist immer das schlimmste Szenario, nämlich ein Unfall oder Entgleisen der Verkehrsmittel einzukalkulieren. Aus diesem Grund muss dies natürlich auch für den Flüssigkeitsschwingungstilger in Betracht gezogen werden. Da z. B. bei einer Kollision mit den Tilgern Flüssigkeit austreten könnte, muss diese in jedem Fall ökologisch verträglich sein. Um den Aufwand sowie eventuelle Gefahren bei der Befüllung und beim Entleeren der Flüssigkeit in vertretbaren Grenzen zu halten, sollte diese nicht toxisch und nicht brennbar oder explosionsgefährdet sein.

Damit ergibt sich nachfolgendes, nicht leicht zu befriedigendes Anforderungsprofil für geeignete Flüssigkeiten:

- möglichst hohe Dichte
- ähnliche Viskosität wie Wasser
- dauerhaft (kein Entmischen, Absetzen, keine Agglomeration und Phasentrennung)
- flüssig im Temperaturbereich -30° bis 70°C
- annähernd konstante Eigenschaften im Temperaturbereich -30° bis 70°C
- verträglich mit den gängigen Baumaterialien bzw. deren Beschichtungen
- umweltverträglich, nicht toxisch, brennbar oder explosionsgefährdet
- wirtschaftlich

4. Untersuchungen zu möglichen Fluiden

Mit diesem Anforderungsprofil wurde am Institut für Tragkonstruktionen – Stahlbau der Technischen Universität Wien eine Diplomarbeit mit dem Ziel der Findung einer idealen Flüssigkeit für den Einsatz in Flüssigkeitsschwingungstilgern ausgearbeitet (Kirchhofer, 2008). Dies erfolgte mit der äußerst freundlichen und kompetenten Unterstützung des Institutes für Angewandte Synthesechemie der Technischen Universität Wien. Eine Kurzfassung der Untersuchungen sowie deren Ergebnisse sind im nachfolgenden Kapitel angeführt. Dabei wurden die Dichte, das Absetzverhalten über 96 Stunden, die Temperaturbeständigkeit sowie die Viskosität visuell und mittels Rheometerversuchen bestimmt (√ steht in den nachfolgenden Tabellen für „Anforderungen erfüllt“). Genaueres kann der zuvor angeführten Diplomarbeit entnommen werden.

4.3. Versuchsreihen

Insgesamt wurden 5 Versuchsreihen, Reihe A bis G, untersucht, wobei sich diese durch das Trägermedium sowie die Zusatzstoffe unterschieden. Diese sind in nachfolgender Tabelle aufgelistet

Tabelle 4.1: Versuchsreihen der untersuchten Fluide

Versuchsreihe	Trägermedium 1	Trägermedium 2	Zusatzstoffe
A	Wasser	Ethylenglycol	organisch/anorganisch
B	Wasser	Polyethylenglycol	anorganisch
C	Siliconöl	-	anorganisch
D	perforierte Kohlenwasserstoffe	-	organisch/anorganisch
E	Wasser	-	Magnetit
F	Wasser	-	Wolframate
G	Wasser	-	Kaliumhexacyanoferrat

4.3.1. Versuchsreihe A – Wasser + Ethylenglycol

Bei diesem Gemisch wurde versucht, durch Beimengung des Frostschutzmittels Ethylenglycol den Gefrierpunkt des Wassers herabzusetzen. Dabei wurde ein Mischungsverhältnis von 50/50 verwendet, mit dem ein flüssiger Aggregatzustand bis -30°C erreicht werden konnte. Nachfolgend sind die Versuchsergebnisse angeführt.

Tabelle 4.2: Versuchsergebnisse Wasser + Ethylenglycol

	Ergebnisse
Mischungsverhältnis	6 ml Wasser + 6 ml Ethylenglycol
Dichte	1,0565 g/cm ³
Absetzversuch	√
Temperaturbeständigkeit	√
Viskosität	√

Somit erfüllt die Wasser-Ethylenglycolmischung alle Anforderungen der Tilgerflüssigkeiten insbesondere auch der der Wirtschaftlichkeit, bis auf die Anforderung der hohen Dichte.

4. Untersuchungen zu möglichen Fluiden

Diese wurde versucht durch Lösung von Salzen bzw. durch Herstellen von Suspensionen so weit zu erhöhen, dass sich der dadurch ergebende Mehraufwand rechnen würde.

Dabei kamen folgende Salzlösungen zur Anwendung

- Natriumsulfat
- Trinatriumcitrat, Calciumcitrat und Eisen-3-Citrat
- EDTA-Natrium und NTA-Natrium

Tabelle 4.3: Versuchsergebnisse Wasser + Ethylenglycol + 1,3 g Natriumsulfat

	Ergebnisse
Mischungsverhältnis	6 ml Wasser + 6 ml Ethylenglycol + 1,3 g Natriumsulfat
Dichte	1,1648 g/cm ³
Absetzversuch	√
Temperaturbeständigkeit	-
Viskosität	√

Tabelle 4.4: Versuchsergebnisse Wasser + Ethylenglycol + 2,7 g Natriumsulfat

	Ergebnisse
Mischungsverhältnis	6 ml Wasser + 6 ml Ethylenglycol + 2,7 g Natriumsulfat
Dichte	1,2815 g/cm ³
Absetzversuch	√
Temperaturbeständigkeit	-
Viskosität	√

Es konnte durch Lösung der Salze ein Anstieg der Dichte beobachtet werden, jedoch verklumpte das Salz nach Beimengung des Alkohols und lieferte dadurch ein unbrauchbares Gemisch.

Lösen der Komplexen Trinatriumcitrat, Calciumcitrat, Eisen-3-Citrat, EDTA-Natrium (Ethylendiamintetraessigsäure) und NTA-Natrium (Nitrilotrieessigsäure) lieferte durchwegs passende Ergebnisse in Bezug auf die Temperaturbeständigkeit und die Viskosität, durch die Limitierung der gelösten Menge der Komplexen konnte jedoch kein signifikanter Dichteanstieg erreicht werden. Nachfolgend sind exemplarisch die Ergebnisse der Lösungen von Trinatriumcitrat und EDTA-Natrium dargestellt.

Tabelle 4.5: Versuchsergebnisse Ethylenglycol + 0,75 g Trinatriumcitratwasserlösung

	Ergebnisse
Mischungsverhältnis	3 ml Wasser + 3 ml Ethylenglycol + 0,75 g Trinatriumcitrat
Dichte	1,1750 g/cm ³
Absetzversuch	√
Temperaturbeständigkeit	√
Viskosität	√

4. Untersuchungen zu möglichen Fluiden

Tabelle 4.6: Versuchsergebnisse Ethylenglycol + 2,80 ml 43%-ige EDTA-Na-Wasserlösung

	Ergebnisse
Mischungsverhältnis	0,2 ml Wasser + 3 ml Ethylenglycol + 2,80 ml 43%-ige EDTA-Na-Wasserlösung
Dichte	1,1750 g/cm ³
Absetzversuch	√
Temperaturbeständigkeit	√
Viskosität	√

Die Lösungen mit den Komplexen lieferten also durchwegs stabile Gemische, die Dichte konnte jedoch nicht nennenswert gesteigert werden.

Bei den Dispersionen wurden Suspensionen mit

- Eisenoxid
- Bentonit
- Titandioxid
- Bariumsulfat

hergestellt. Dabei wurden jeweils reine Mischungen des Wasser-Ethylenglycolgemisches mit den genannten Zusätzen sowie Mischungen mit Natrium-CMC (Natrium Carboxymethylcellulose) als Suspensionsstabilisator untersucht. Das Natrium-CMC wurde ebenfalls als Verdickungsmittel bei der Versuchsreihe 1 des Kapitels 6.1 herangezogen. Bei allen Dispersionen mussten nach unterschiedlich langen Zeiträumen Absetzungserscheinungen beobachtet werden, stabile Dispersionen konnten also nicht erzeugt werden. Lediglich die reine Wasser- Ethylenglycol- Natrium-CMC Suspension lieferte eine stabile Lösung, konnte jedoch auch keine signifikante Dichteerhöhung erzielen. Die Ergebnisse dieser Suspension sind nachfolgend angeführt

Tabelle 4.7: Versuchsergebnisse Wasser + Ethylenglycol + Na-CMC

	Ergebnisse
Mischungsverhältnis	3 ml Wasser + 3 ml Ethylenglycol + 64 mg Na-CMC
Dichte	1,0672 g/cm ³
Absetzversuch	√
Temperaturbeständigkeit	√
Viskosität	√

4.3.2. Versuchsreihe B – Wasser + Polyethylenglycol

Polyethylenglycol, in der Form 300 und 400, weist gegenüber Ethylenglycol eine höhere Viskosität auf, deren Einfluss hier untersucht wurde. Für die vorliegende Versuchsreihe wurden dieselben Salze und Suspensionen wie bei der Versuchsreihe A verwendet. Es stellte sich jedoch heraus, dass, wie bei der Versuchsreihe A, das Lösungsmittel nicht in der Lage war, stabile Suspensionen zu erzeugen. Lediglich die reine Wasser-

4. Untersuchungen zu möglichen Fluiden

Polyethylenglycol 300-Mischung, deren Ergebnisse im nachfolgenden angeführt sind, ergaben stabile Lösungen, jedoch wiederum mit dem Nachteil der geringen Dichte.

Tabelle 4.8: Versuchsergebnisse Wasser + Polyethylenglycol 300

	Ergebnisse
Mischungsverhältnis	6 ml Wasser + 6 ml Polyethylenglycol 300
Dichte	1,0635 g/cm ³
Absetzversuch	√
Temperaturbeständigkeit	√
Viskosität	√

4.3.3. Versuchsreihe C – Siliconöl

Siliconöle werden in der Praxis als Hydrauliköle aber auch bereits in Schwingungstilgern, z. B. dem Pendeltilger (Petersen, Schwingungstilger im Ingenieurbau, 2001), eingesetzt. Sie zeichnen sich durch Temperaturbeständigkeit und für Schwingungstilger geeignete Viskositäten aus, besitzen jedoch ähnliche Dichten wie Wasser. Nachfolgend sind die Ergebnisse des reinen Siliconöls angeführt.

Tabelle 4.9: Versuchsergebnisse Siliconöl

	Ergebnisse
Mischungsverhältnis	12 ml Siliconöl
Dichte	1,0800 g/cm ³
Absetzversuch	√
Temperaturbeständigkeit	√
Viskosität	√

Bis auf die geringe Dichte lässt sich somit auch Siliconöl in den Flüssigkeitsschwingungstilgern einsetzen. Um den Mangel der geringen Dichte zu verbessern, wurden wiederum Dispersionen mit Eisenoxid und Bariumsulfat hergestellt, dabei musste jedoch in Kauf genommen werden, dass für Siliconöle keine geeigneten Stabilisatoren bekannt sind. Ebenso wie beim Trägermedium Wasser gestaltete sich die Herstellung von stabilen Dispersionen auch beim Siliconöl aufgrund dessen geringer Dichte als sehr schwierig. Es konnte keine Dispersion hergestellt werden, die sich als stabil herausstellte und gleichzeitig eine Erhöhung der Dichte erzielte. Die Anwendung reinen Siliconöls erfüllt jedoch, bis auf eine hohe Dichte, alle Anforderungen für den Einsatz in Flüssigkeitsschwingungstilgern.

4.3.4. Versuchsreihe D – perfluorierte Kohlenwasserstoffe

Das größte Problem der zuvor untersuchten Dispersionen lag in der geringen Dichte der Trägerflüssigkeiten Wasser und Siliconöl, die nicht ausreichte, um die Partikel der Suspension in Schwebelage zu halten. Aus diesem Grund wurden Versuche mit der schweren organisch-chemischen Flüssigkeit der perfluorierten Kohlenwasserstoffe durchgeführt.

4. Untersuchungen zu möglichen Fluiden

Dabei kamen

- Octadecafluoroctan
- Perfluormethyldecanaphtalin

als Trägermedium zur Anwendung. Die Ergebnisse beider sind nachfolgend angeführt.

Tabelle 4.10: Versuchsergebnisse Octadecafluoroctan

	Ergebnisse
Mischungsverhältnis	3 ml Octadecafluoroctan
Dichte	1,8300 g/cm ³
Absetzversuch	√
Temperaturbeständigkeit	bis -20° C
Viskosität	√

Tabelle 4.11: Versuchsergebnisse Perfluormethyldecanaphtalin

	Ergebnisse
Mischungsverhältnis	3 ml Perfluormethyldecanaphtalin
Dichte	1,9500 g/cm ³
Absetzversuch	√
Temperaturbeständigkeit	√
Viskosität	√

Es zeigt sich, dass es sich bei den perfluorierten Kohlenwasserstoffen um geeignete Flüssigkeiten für Schwingungstilger handelt, die auch eine signifikante Erhöhung der Dichte gegenüber Wasser aufweisen. Der große Nachteil dieser Flüssigkeiten sind die hohen Anschaffungskosten, weswegen die Wirtschaftlichkeit infrage gestellt werden muss. Bei Abnahme einer ausreichenden Menge dieser Kohlenwasserstoffe könnten sich jedoch auch die Anschaffungskosten verringern, wodurch auch die Wirtschaftlichkeit gegeben wäre. Wie bei den anderen Versuchsreihen wurden auch bei diesen Suspensionen mit Eisenoxid, Titandioxid und Bariumsulfat erzeugt, die sich jedoch auch mit perfluorierten Kohlenwasserstoffen als instabil herausstellten.

4.3.5. Versuchsreihe D – Ferrofluide

Eine sehr interessante Gruppe der kolloiden Lösungen stellen die Ferrofluide dar. Bei diesen handelt es sich um Flüssigkeiten, wie Siliconöl, Wasser oder Perfluorpolyether, mit kleinsten Partikeln ferromagnetischer Stoffe im Nanometerbereich. Diese Flüssigkeiten werden beispielhaft als Kühlmittel in Lautsprechern oder als reibungslose Halterung für Getriebe eingesetzt. Der große Vorteil dieser Flüssigkeiten liegt in deren magnetischen Eigenschaft. Legt man an die Flüssigkeit ein Magnetfeld an, richtet sich diese entlang der Magnetfeldlinien aus. Des Weiteren kann man durch die Induktion eines Magnetfeldes die Viskosität verändern, was natürlich für den Flüssigkeitsschwingungstilger sehr interessante Einsatzmöglichkeiten eröffnet. Dadurch würde sich die Möglichkeit eines adaptiven Flüssigkeitsschwingungstilgers ergeben, der sich der gegebenen

4. Untersuchungen zu möglichen Fluiden

Brückenbewegung anpasst, das heißt, bei größer werdenden Amplituden die Viskosität erhöht und damit die Dämpfungswirkung verstärkt. Nachfolgend ist ein Ferrofluid unter dem Einfluss eines Magnetfeldes dargestellt.

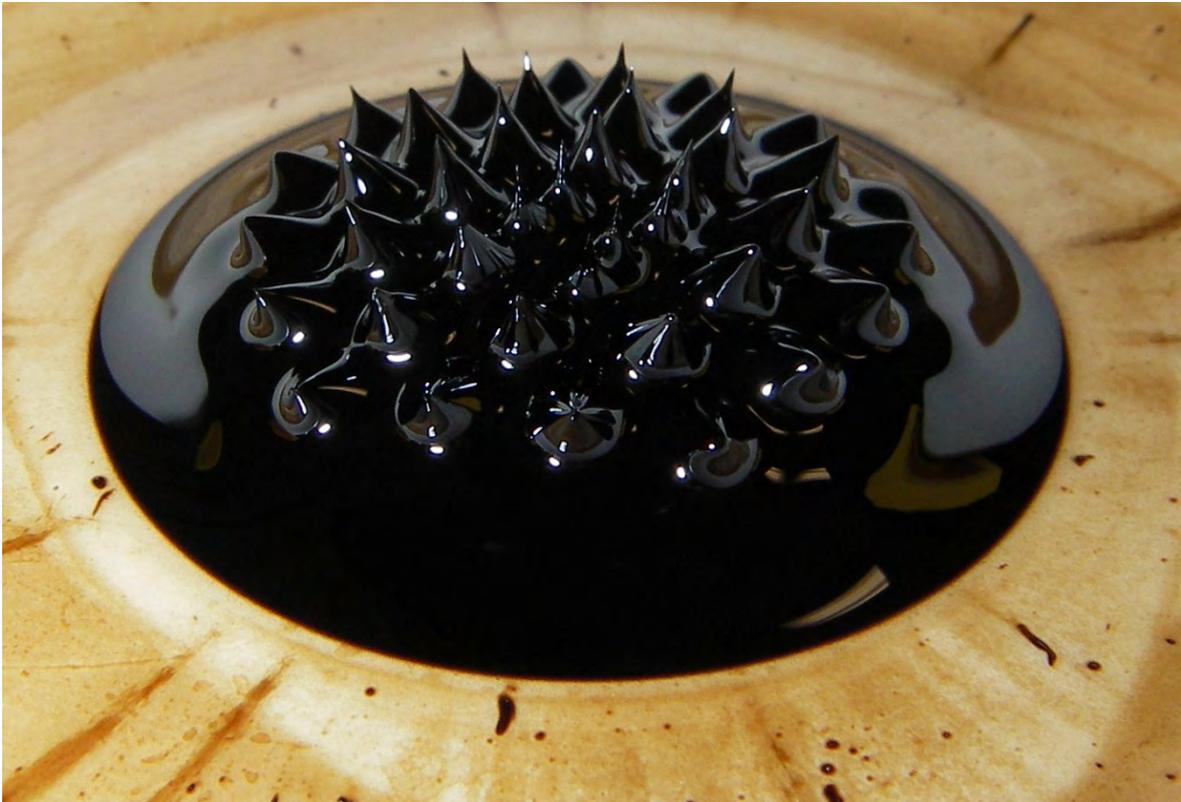


Abbildung 4.2: Ferrofluid unter dem Einfluss eines Neodym-Bor-Eisenmagneten (Jurvetson, 2006)
Im Zuge der Versuchsdurchführung wurde eine Ethylenglycol-Ferrofluidmischung mit nachfolgenden Ergebnissen getestet

Tabelle 4.12: Versuchsergebnisse Ethylenglycol + Ferrofluid

	Ergebnisse
Mischungsverhältnis	3 ml Ethylenglycol + 3 ml Ferrofluid
Dichte	1,0565 g/cm ³
Absetzversuch	√
Temperaturbeständigkeit	√
Viskosität	√

Damit erfüllt das Ferrofluid ebenfalls, bis auf eine hohe Dichte, alle Anforderungen der Flüssigkeiten für Flüssigkeitsschwingungstilger. Dieser Nachteil kann jedoch durch die magnetischen Eigenschaften, und damit die Möglichkeit der stufenlosen Einstellung der Viskosität, kompensiert werden. Wie bei den perfluorierten Kohlenwasserstoffen liegen jedoch demgegenüber auch bei den Ferrofluiden sehr hohe Anschaffungskosten vor, die bei entsprechender Mengenabnahme bezüglich des Einheitspreises wiederum reduziert werden könnten.

4.3.6. Versuchsreihe F – Wasser + Wolframat

Natriumwolframat weist aufgrund seiner hohen Dichte und sehr guten Wasserlöslichkeit gute Voraussetzungen für den Einsatz in Flüssigkeitsschwingungstilgern auf. Nachfolgend sind die Ergebnisse des reinen Wasser-Wolframatgemisches sowie des Wasser-Ethylenglycol-Wolframatgemisches dargestellt.

Tabelle 4.13: Versuchsergebnisse Wasser + Natriumwolframat

	Ergebnisse
Mischungsverhältnis	4 ml Wasser + 4 g Natriumwolframat
Dichte	2,0000 g/cm ³
Absetzversuch	√
Temperaturbeständigkeit	bis – 25° C
Viskosität	√

Tabelle 4.14: Versuchsergebnisse Natriummetawolframatlösung

	Ergebnisse
Mischungsverhältnis	2 ml Natriummetawolframatlösung
Dichte	2,8200 g/cm ³
Absetzversuch	√
Temperaturbeständigkeit	bis – 25° C
Viskosität	√

Tabelle 4.15: Versuchsergebnisse Natriumwolframatlösung + Ethylenglycol (50/50 %)

	Ergebnisse
Mischungsverhältnis	1 ml Natriummetawolframatlösung + 1 ml Ethylenglycol
Dichte	1,9665 g/cm ³
Absetzversuch	√
Temperaturbeständigkeit	√
Viskosität	√

Den Versuchsergebnissen kann die Eignung der Wolframatlösungen, die sich vor allem durch sehr hohe Dichten auszeichnen, entnommen werden.

4.3.7. Versuchsreihe G – Wasser + Kaliumhexacyanoferrat

Mit dieser Komplexverbindung, mit den nachfolgenden Versuchsergebnissen, wurde wiederum versucht, eine stabile Lösung mit hoher Dichte herzustellen.

Tabelle 4.16: Versuchsergebnisse Wasser + Kaliumhexacyanoferrat

	Ergebnisse
Mischungsverhältnis	6 ml Wasser + 2,6 g Kaliumhexacyanoferrat
Dichte	1,2000 g/cm ³
Absetzversuch	√
Temperaturbeständigkeit	bis – 15° C
Viskosität	√

Unter Beimischung von Ethylenglycol konnten auch Temperaturbereiche von bis zu -30°C ohne Eisbildung erreicht werden. Da sich jedoch dabei nur ein geringer Dichteunterschied zur reinen Wasser-Ethylenglycolmischung ergab, wurde die Verwendung von Kaliumhexacyanoferrat nicht weiter verfolgt.

4.4. Übersicht der geeigneten Fluide

In Kapitel 4 wurden die, in der Diplomarbeit von (Kirchhofer, 2008) untersuchten Flüssigkeiten für den Einsatz in Flüssigkeitsschwingungstilgern angeführt. Diese hatten ein sehr umfangreiches Anforderungspotenzial, ausgehend von hoher Dichte bis zur Wirtschaftlichkeit, zu erfüllen. Wie den Untersuchungen entnommen werden kann, gestaltete sich die Suche nach derartigen Flüssigkeiten als äußerst schwierig. Vor allem die Kombination der hohen Dichte mit Dauerhaftigkeit, Temperaturbeständigkeit und Umweltverträglichkeit entpuppte sich als fast unlösbare Aufgabenstellung. Für den Einsatz in Flüssigkeitsschwingungstilgern in jedem Fall geeignet sind

- Wasser-Ethylenglycolgemische,
- Wasser-Polyethylenglycolgemische und
- Siliconöle

Diese zeichnen sich durch Temperaturbeständigkeit, Dauerhaftigkeit und vor allem auch Wirtschaftlichkeit aus, weisen jedoch nur annähernd die Dichte des reinen Wassers auf. Somit muss eine genügend große Anzahl von Tilgern sowie ein genügend großes Tilgervolumen zur Verfügung gestellt werden.

Vielversprechende Fluide konnten in

- perfluorierten Kohlenwasserstoffen und
- Wasser-Wolframatgemischen

gefunden werden. Diese erfüllen alle chemisch-physikalischen Anforderungen der Tilgerfluide vor allem auch einer Dichte bis $2,0\text{ g/cm}^3$ und darüber, lediglich bei den Anschaffungskosten und somit bei der Wirtschaftlichkeit konnten diese nicht punkten. Wie jedoch bereits erwähnt wurde, kann bei genügend großer Abnahmemenge vermutlich auch der Punkt der Wirtschaftlichkeit besser erfüllt werden. Eine sehr interessante Flüssigkeit konnte in den Ferrofluiden entdeckt werden. Bei diesen ergibt sich die Möglichkeit, durch deren Interaktion mit Magnetfeldern, die Viskosität und damit die Dämpfung der Flüssigkeitsschwingungstilger je nach Brückenbewegung zu steuern. Leider ist die Anschaffung dieses Fluides derzeit ebenfalls mit sehr hohen Kosten verbunden. Wie in diesem Kapitel gezeigt werden konnte, gestaltet sich die Suche nach geeigneten und optimalen Fluiden für den Einsatz in Flüssigkeitsschwingungstilgern als äußerst schwierig, hier ist noch einiges an Forschungspotenzial gegeben. Jedenfalls zur Anwendung herangezogen werden können Wasser-Alkoholgemische, deren Mischungsverhältnis vom geforderten Temperaturbereich abhängt, sowie Siliconöle.

5. FLÜSSIGKEITSSCHWINGUNGSTILGER GEGEN VERTIKALE BRÜCKENSCHWINGUNGEN

5.1. Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsschwingungstilgers

Die in Kapitel 2.2.3 hergeleitete instationäre Bernoulli Gleichung für ein allgemein in der Ebene bewegtes Bezugssystem wird diesem Kapitel auf einen Flüssigkeitsschwingungstilger mit V-Form, der gedanklich auf einem Brückentragwerk angeordnet ist, angewendet. Dieser besteht aus zwei Schenkeln mit demselben Querschnitt und ist in Richtung der Symmetrieachse des Tragwerkes angeordnet. Zur Herleitung der Bewegungsgleichung für den Flüssigkeitsschwingungstilger werden die einzelnen Terme der Bernoulli Gleichung in Richtung der lokalen Einheitsvektoren des Stromfadens projiziert und anschließend von Punkt 1' bis 2' integriert. In Abbildung 5.1 ist ein derartiges System dargestellt.

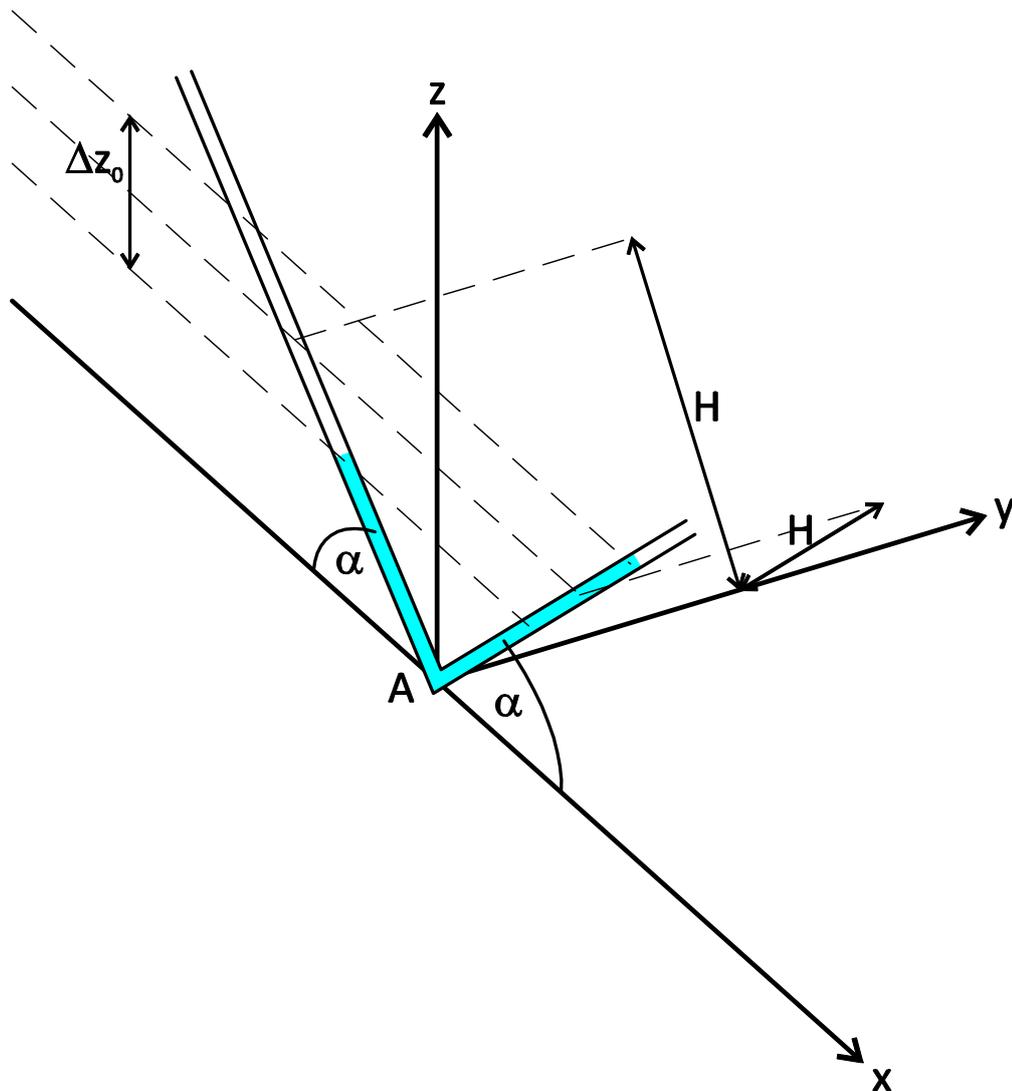


Abbildung 5.1: Geometrie des V-förmigen Flüssigkeitsschwingungstilgers

Weiters bezeichnen $\vec{e}_{t,a}'$ und $\vec{e}_{t,b}'$ die Einheitsvektoren, \vec{r}_a' und \vec{r}_b' die Ortsvektoren, s_1' und s_2' die Bogenlänge der jeweiligen Abschnitte sowie 1' und 2' den Start- und Endpunkt des Stromfadens. Nachfolgend wird die instationäre Bernoulli Gleichung im allgemein in der Ebene bewegten Bezugssystem nochmals angeführt (siehe Kapitel 2.2.3.3).

$$\int_{1'}^{2'} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} ds' + \frac{1}{2}(v_2'^2 - v_1'^2) = -g(z_2 - z_1) - \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) - \int_{1'}^{2'} (\vec{a}_f \cdot \vec{e}_t') ds' \quad (5.1)$$

Die einzelnen Terme werden nun jeder für sich ausgewertet. Dabei wird von der abschnittswisen Stetigkeit der Funktionen wie folgt Gebrauch gemacht

$$\int_{1'}^{2'} ds' = \int_a ds'_a + \int_b ds'_b \quad (5.2)$$

Zur Berechnung der einzelnen Terme werden weiters die Einheitsvektoren sowie die Ortsvektoren der einzelnen Abschnitte benötigt. Diese lauten

$$\vec{e}_{t,a}' = \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ -\sin(\alpha) \end{Bmatrix}, \quad \vec{e}_{t,b}' = \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

und

$$\vec{r}_a' = \begin{Bmatrix} -\left(H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u - s_1'\right) \cos(\alpha) \\ 0 \\ \left(H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u - s_1'\right) \sin(\alpha) \end{Bmatrix}, \quad \vec{r}_b' = \begin{Bmatrix} s_2' \cos(\alpha) \\ 0 \\ s_2' \sin(\alpha) \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\int_{1'}^{2'} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} ds'$$

Da die Querschnitte der beiden Schenkel als gleich vorausgesetzt werden, folgt unter Anwendung der Kontinuitätsgleichung (Kapitel 2.2.4) für die Geschwindigkeiten $v_1' = v_2' = \dot{u}$ und somit für den instationären Term von Gleichung (5.1)

$$\int_{1'}^{2'} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} ds' = \int_0^{H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u} \ddot{u} ds_1' + \int_0^{H + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} + u} \ddot{u} ds_2' = 2H\ddot{u} \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{2}(v_2'^2 - v_1'^2)$$

Aufgrund der Gleichheit der Flüssigkeitsspiegelgeschwindigkeiten fällt dieser Term weg.

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

$$\underline{z_2 - z_1}$$

Die Differenz der Flüssigkeitsspiegeloberflächen ergibt sich aus geometrischen Überlegungen wie folgt

$$\begin{aligned} z_1 &= w + \left(H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u \right) \sin(\alpha + \varphi) \\ z_2 &= w + \left(H + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} + u \right) \sin(\alpha - \varphi) \\ z_2 - z_1 &= (2u \sin(\alpha) + \Delta z_0) \cos(\varphi) - 2H \cos(\alpha) \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\underline{p_2 - p_1}$$

Der Term zur Berücksichtigung der Druckunterschiede zwischen Punkt 1' und 2' wird im nachfolgenden Kapitel 5.1.1 hergeleitet.

$$\underline{\int_{1'}^{2'} (\vec{a}_f \cdot \vec{e}'_t) ds'}$$

Die drei Anteile der Führungsbeschleunigung nach Kapitel 2.2.2

$$\vec{a}_f = \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (5.7)$$

lauten für die vorliegende Struktur

$$\vec{a}_A = \ddot{w} \vec{e}_z = -\ddot{w} \sin(\varphi) \vec{e}'_x + \ddot{w} \cos(\varphi) \vec{e}'_z \quad (5.8)$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' = \frac{d\omega}{dt} \vec{e}'_y \times \vec{r}' = \frac{d\omega}{dt} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x' \\ 0 \\ z' \end{Bmatrix} = \frac{d\omega}{dt} \begin{Bmatrix} z' \\ 0 \\ -x' \end{Bmatrix} = \frac{d\omega}{dt} \vec{r}'', \quad \vec{r}'' \perp \vec{r}' \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') &= \omega \vec{e}'_y \times (\omega \vec{e}'_y \times \vec{r}') = \omega^2 \vec{e}'_y \times (\vec{e}'_y \times \vec{r}') = \\ &= \omega^2 \vec{e}'_y \times \vec{r}'' = -\omega^2 \vec{r}' \end{aligned} \quad (5.10)$$

Jetzt müssen die Projektionen in Richtung der Einheitsvektoren sowie die Integration von 1' bis 2' durchgeführt werden.

$$\begin{aligned}\vec{a}_A \cdot \vec{e}_{t,a}' &= -\ddot{w} \sin(\varphi) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ -\sin(\alpha) \end{Bmatrix} + \ddot{w} \cos(\varphi) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ -\sin(\alpha) \end{Bmatrix} = \\ &= -\ddot{w} \cos(\alpha) \sin(\varphi) - \ddot{w} \sin(\alpha) \cos(\varphi)\end{aligned}\quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_A \cdot \vec{e}_{t,b}' &= -\ddot{w} \sin(\varphi) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} + \ddot{w} \cos(\varphi) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} = \\ &= -\ddot{w} \cos(\alpha) \sin(\varphi) + \ddot{w} \sin(\alpha) \cos(\varphi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{1'}^{2'} \vec{a}_A \cdot \vec{e}_t' ds' &= \int_0^{H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u} \vec{a}_A \cdot \vec{e}_{t,a}' ds_1' + \int_0^{H + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} + u} \vec{a}_A \cdot \vec{e}_{t,b}' ds_2' = \\ &= \ddot{w} \left(-2H \cos(\alpha) \sin(\varphi) + \Delta z_0 \cos(\varphi) + 2 \sin(\alpha) \cos(\varphi) u \right)\end{aligned}\quad (5.12)$$

$\frac{d\omega}{dt} \vec{r}' \cdot \vec{e}_t' = 0$, da die um 90° gedrehten Ortsvektoren normal auf die Einheitsvektoren stehen und damit das Skalarprodukt zu Null wird.

$$\begin{aligned}-\omega^2 \vec{r}_a' \cdot \vec{e}_{t,a}' &= -\omega^2 \begin{Bmatrix} -\left(H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u - s_1' \right) \cos(\alpha) \\ 0 \\ \left(H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u - s_1' \right) \sin(\alpha) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ -\sin(\alpha) \end{Bmatrix} = \\ &= -\omega^2 \left[-\left(H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u - s_1' \right) \cos^2(\alpha) - \left(H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u - s_1' \right) \sin^2(\alpha) \right] = \omega^2 \left(H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u - s_1' \right)\end{aligned}\quad (5.13)$$

$$\begin{aligned}-\omega^2 \vec{r}_b' \cdot \vec{e}_{t,b}' &= -\omega^2 \begin{Bmatrix} s_2' \cos(\alpha) \\ 0 \\ s_2' \sin(\alpha) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} = \\ &= -\omega^2 \left[s_2' \cos^2(\alpha) + s_2' \sin^2(\alpha) \right] = -\omega^2 s_2'\end{aligned}\quad (5.14)$$

$$\int_{1'}^{2'} -\omega^2 \vec{r}' \cdot \vec{e}_i' \cdot ds' = \int_0^{H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u} -\omega^2 \vec{r}_a' \cdot \vec{e}_{t,a}' ds_1' + \int_0^{H + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} + u} -\omega^2 \vec{r}_b' \cdot \vec{e}_{t,b}' ds_2' =$$

$$= -\omega^2 H \left(\frac{\Delta z_0}{\sin(\alpha)} + 2u \right) \quad (5.15)$$

Die resultierende Bewegungsgleichung für den Flüssigkeitsschwingungstilger lautet unter Berücksichtigung des Druckterms nach Kapitel 5.1.1 sowie des Verlustterms nach Kapitel 5.1.3 nach einigem Umformen

$$\ddot{u}(t) + \frac{1}{H} \left[\sin(\alpha) \cos(\varphi) (\ddot{w} + g) - \dot{\varphi}^2 H \right] u(t) + \frac{\Delta p}{2H\rho} + \frac{\Delta p_v}{2H\rho} =$$

$$= \left(\cos(\alpha) \sin(\varphi) - \frac{\Delta z_0}{2H} \cos(\varphi) \right) (\ddot{w} + g) + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} \dot{\varphi}^2 \quad (5.16)$$

In Gleichung (5.16) wurde bereits

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (5.17)$$

berücksichtigt.

In den nachfolgenden Kapiteln werden die Beziehungen für die Druckdifferenz $p_2 - p_1$ sowie den Erweiterungsterm Δp_v zur Berücksichtigung von Reibungsverlusten hergeleitet.

Geht man von einer rein translatorischen Bewegung des Brückentragwerkes aus, setzt also $\varphi = 0$, folgt für die Differentialgleichung der Flüssigkeitsbewegung

$$\ddot{u}(t) + \frac{1}{H} \left[\sin(\alpha) (\ddot{w} + g) \right] u(t) + \frac{\Delta p}{2H\rho} + \frac{\Delta p_v}{2H\rho} = -\frac{\Delta z_0}{2H} (\ddot{w} + g) \quad (5.18)$$

Zu diesem Ergebnis gelangt man auch über die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen (siehe Kapitel 2.2.5) mit der Flüssigkeitsspiegelbewegung u als generalisierte Koordinate. Für die kinetische Energie der schwingenden Flüssigkeitssäulen erhält man bei erneuter Vernachlässigung der Verdrehung φ

$$E_{kin} = \rho A (H\dot{u}^2 + H\dot{w}^2 + \Delta z_0 \dot{u}\dot{w} + 2 \sin(\alpha) u \dot{u}\dot{w}) \quad (5.19)$$

und für die potenzielle Energie

$$E_{pot} = \rho g A \left(\sin(\alpha) H^2 + \frac{1}{4 \sin(\alpha)} \Delta z_0^2 + \Delta z_0 u + \sin(\alpha) u^2 \right) + \Delta p A u \quad (5.20)$$

Setzt man diese in die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial u} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial u} = 0, \quad (5.21)$$

ein, erhält man mit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{u}}\right) &= \rho A(2H\ddot{u} + \Delta z_0 \dot{w} + 2 \sin(\alpha)\dot{u}\dot{w} + 2 \sin(\alpha)u\ddot{w}) \\ \frac{\partial E_{kin}}{\partial u} &= \rho A(2 \sin(\alpha)\dot{u}\dot{w}) \\ \frac{\partial E_{pot}}{\partial u} &= \rho g A(\Delta z_0 + 2 \sin(\alpha)u) + \Delta p A\end{aligned}\quad (5.22)$$

die Differenzialgleichung der Flüssigkeitsbewegung, wie sie in Gleichung (5.18) hergeleitet wurde.

5.1.1. Ermittlung der Druckdifferenz p_2-p_1

In der Bernoulli Gleichung (5.16) wird der Druckunterschied zwischen Punkt 1' und 2' durch die Druckdifferenz p_2-p_1 berücksichtigt. Wie nachfolgend gezeigt werden soll, hängt dieser sehr stark von der Art des Befüllungsvorganges sowie der Art der Ausbildung der Rohrenden, offen oder geschlossen, ab. Durch geschlossene Rohrenden wird ein eingeschlossenes Luftvolumen erzeugt, dass durch dessen Kompressibilität eine rückstellende Wirkung gegen die Flüssigkeitsbewegung erzeugt. Dieser Effekt kann als Luftfeder angesehen werden, der zusätzlich zur Schwerkraft eine Rückstellkraft bewirkt. Die gesuchte Druckdifferenz wird aus den Poisson- oder Adiabatengleichungen gewonnen. Bei diesen wird vorausgesetzt, dass kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet. Dies kann einerseits durch die sehr geringe Wärmeleitfähigkeit der Luft angenommen werden, andererseits sind die Flüssigkeitsbewegungen mit großen Amplituden in ihrer zeitlichen Ausdehnung sehr kurz, womit ein Wärmeaustausch mit der Umgebung nicht stattfinden kann. Die Poissongleichung, die aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik hergeleitet ist (Meschede, 2006), lautet

$$p = V^{-\gamma} \quad (5.23)$$

V beschreibt dabei das betrachtete Volumen. Für Luft lautet der Adiabatenexponent

$$\gamma_{Luft} = 1,405 \quad (5.24)$$

Der Luftdruck zum Zeitpunkt $t = t_1$ kann folgendermaßen aus dem Luftdruck zum Zeitpunkt $t = 0$ ermittelt werden

$$\begin{aligned}p_0 &= \frac{1}{V_0^\gamma} \\ p_1 &= \frac{1}{V_1^\gamma} \\ \frac{p_1}{p_0} &= \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma \\ p_1 &= p_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma\end{aligned}\quad (5.25)$$

5.1.1.1. Einseitig geschlossenes Rohrende – einseitige Luftfeder (Fall 1)

Bei diesem Befüllungsvorgang ist ein Rohrende immer offen (Punkt 2'). Es wird Flüssigkeit eingefüllt und befindet sich durch die offenen Rohrenden in statischer Ruhelage. Danach wird ein Rohrende geschlossen (Rohrschenkel auf Seite mit Punkt 1') und Luft eingepresst, bis sich die gewünschte Anfangsauslenkung der Flüssigkeitsspiegel Δz_0 einstellt. Somit herrscht im Punkt 1' ein durch die Anfangsauslenkung sowie die Flüssigkeitsspiegelbewegung u induzierter Überdruck, in Punkt 2' herrscht immer Atmosphärendruck.

Zur Herleitung der Druckdifferenzen zwischen den Punkten 1' und 2' müssen somit drei Zeitpunkte untersucht werden, Zeitpunkt $t = t_s$, bei dem sich nach der Befüllung die beiden Flüssigkeitsspiegellagen im Gleichgewicht befinden, $t = 0$, bei dem durch einen einseitigen Überdruck eine Flüssigkeitsspiegelauslenkung Δz_0 erreicht wird und $t = t_1$, bei dem sich die ausgelenkten Flüssigkeitsspiegellagen in Bewegung befinden (Abbildung 5.3, Abbildung 5.4 und Abbildung 5.5).

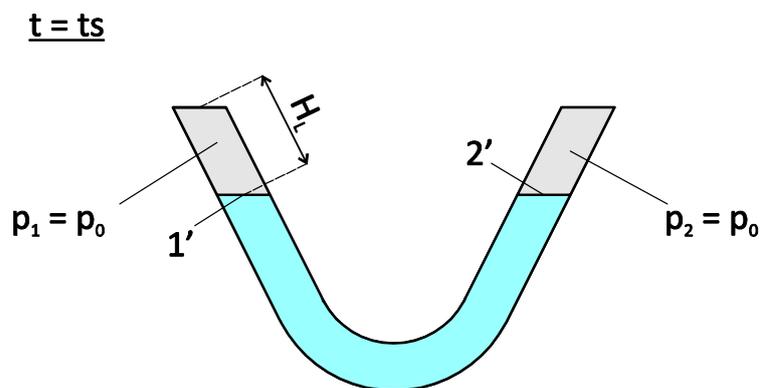


Abbildung 5.3: Flüssigkeitsspiegellagen im unausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_s$ (Fall 1)

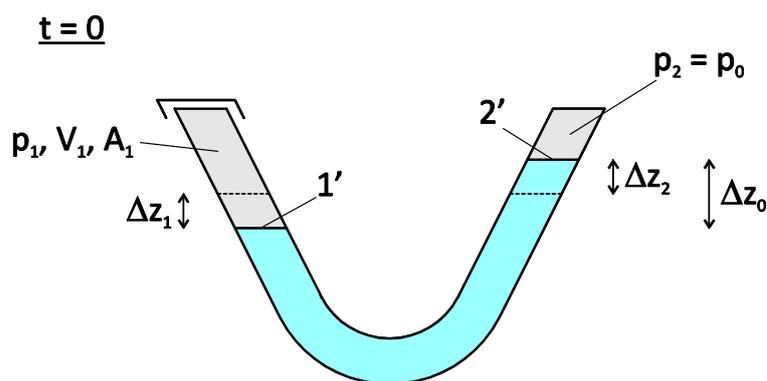


Abbildung 5.4: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt $t=0$ (Fall 1)

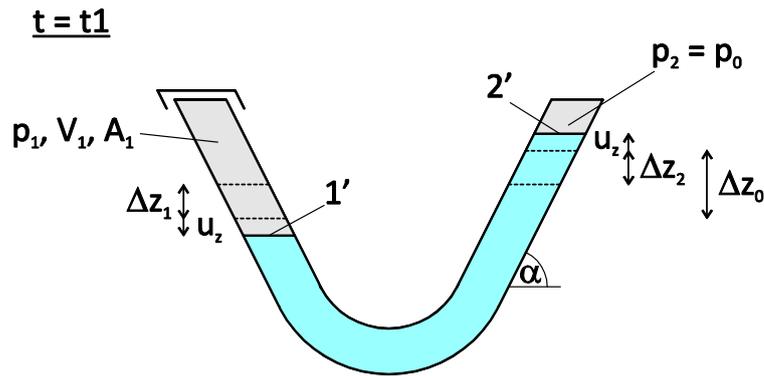


Abbildung 5.5: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_1$ mit der Flüssigkeitsspiegelauslenkung u (Fall 1)

Es gelten folgende Beziehungen

$$\Delta z_1 = \Delta z_2 = \frac{\Delta z_0}{2} \quad (5.26)$$

$$u_z = u \cdot \sin(\alpha)$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der Druck in den Punkten $1'$ und $2'$

$$p_{1,0} = p_0 + \rho g \Delta z_0 \quad (5.27)$$

$$p_{2,0} = p_0$$

Mit Formel (5.25) ergibt sich dann der Druck für den Punkt $1'$ zum Zeitpunkt $t = t_1$ zu

$$p_{1,1} = p_{1,0} \left(\frac{V_{1,0}}{V_{1,1}} \right)^\gamma = (p_0 + \rho g \Delta z_0) \left(\frac{(H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}) A}{(H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} + u \sin(\alpha)) A} \right)^\gamma \quad (5.28)$$

Der Druck im Punkt $2'$ bleibt für jeden Zeitpunkt konstant mit $p_{2,i} = p_0$.

Damit ergibt sich eine Druckdifferenz bei ausgelenkten Flüssigkeitsspiegeln zu

$$\Delta p = p_{2,1} - p_{1,1} = p_0 - (p_0 + \rho g \Delta z_0) \left(\frac{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} + u \sin(\alpha)} \right)^\gamma \quad (5.29)$$

Mittels linearer Approximation der Druckdifferenz durch eine Taylorreihe mit der Variablen $u(t)$, bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung, folgt die approximierte Druckdifferenz zu

$$\Delta p_{approx} = \frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0) \gamma \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} u - \rho g \Delta z_0 + O(u^2) \quad (5.30)$$

Dieser Schritt ist für die weiteren analytischen Betrachtungen, z. B. die Eigenfrequenzermittlung in Kapitel 5.1.2, unumgänglich. Der zulässige Anwendungsbereich dieser Approximation sowie der Verlauf der Druckdifferenz soll

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

nachfolgend untersucht werden. Dabei wird der exakte dem approximierten Druckunterschied grafisch gegenübergestellt.

In den nachfolgenden Betrachtungen wird eine Anfangsauslenkung $\Delta z_0 = 1,00$ m sowie eine Rohrneigung von 60° gewählt. Als Abszisse wird dabei die auf die Anfangsauslenkung der Flüssigkeitsspiegel Δz_0 bezogene Flüssigkeitsspiegelauslenkung u , als Ordinate der auf den Atmosphärendruck p_0 bezogene Druckunterschied der Punkte 1' und 2' verwendet. Da in die Ermittlung des Druckunterschiedes auch die Luftfederhöhe H_L eingeht, wird diese ebenfalls im Verhältnis zur Anfangsauslenkung der Flüssigkeitsspiegel Δz_0 angegeben und über den Bereich von 10 – 200 % variiert.

Folgende Aussagen können den nachfolgenden Diagrammen entnommen werden

- 1.) Je kleiner das Verhältnis $H_L/\Delta z_0$, das heißt, je kleiner das Luftvolumen im Punkt 1' im Verhältnis zum ausgelenkten Flüssigkeitsvolumen ist, desto steifer ist die Luftfeder und desto nichtlinearer ist der Verlauf der Druckdifferenz Δp in Abhängigkeit der Flüssigkeitsspiegelbewegung u .
- 2.) Eine Linearisierung des Verlaufes des Druckunterschiedes ist nur für $H_L/\Delta z_0$ -Verhältnisse größer 0,50 und $u/\Delta z_0$ -Verhältnisse kleiner 0,20 anwendbar. Die Auswirkungen der Linearisierung können erst nach Berechnung der Bewegung der Flüssigkeitsspiegellagen quantifiziert werden (siehe Kapitel 6). Trotzdem liefern die hier gemachten Aussagen eine gute Abgrenzung der zulässigen Drucklinearisierung.

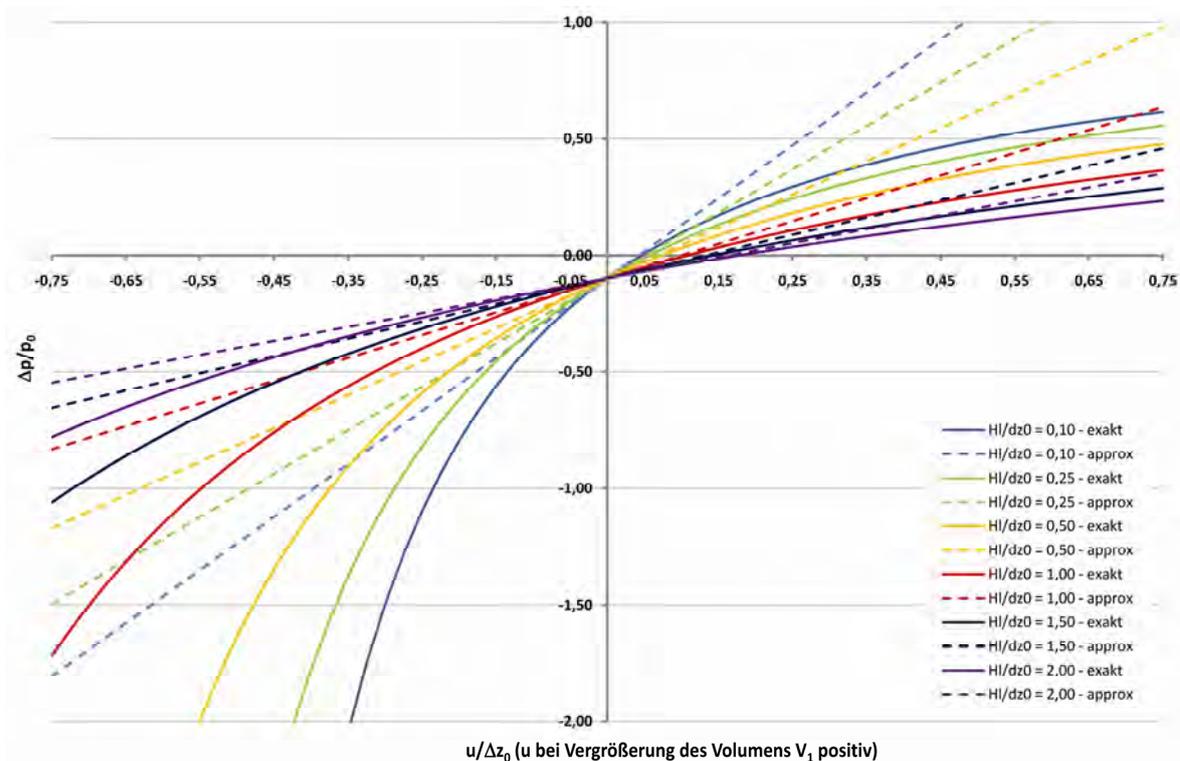


Abbildung 5.6: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 1)

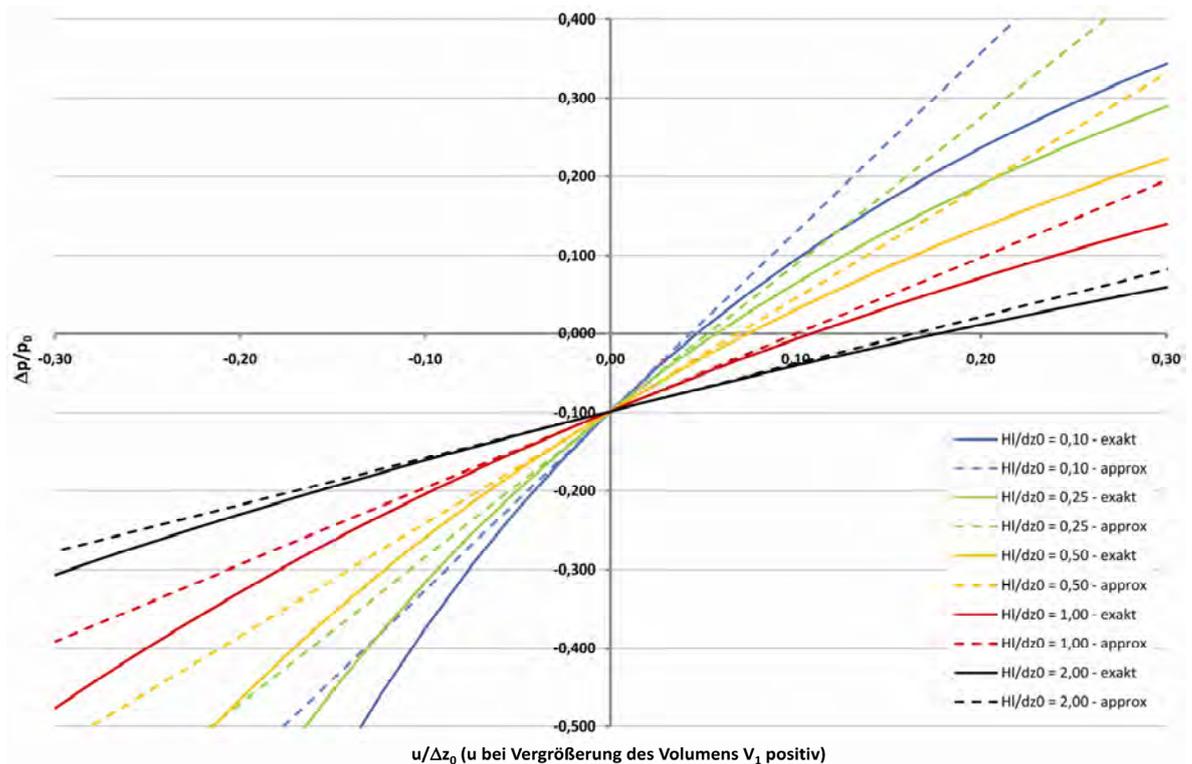


Abbildung 5.7: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 1, Ausschnitt)

5.1.1.2. Zweiseitig geschlossenes Rohr - beidseitige Luftfedern (Fall 2)

Bei diesem Befüllungsvorgang wird Flüssigkeit eingefüllt und befindet sich durch die offenen Rohrende in statischer Ruhelage. Danach wird ein Rohrende geschlossen (Rohrschenkel bei Punkt 1') und Luft eingepresst, bis sich die gewünschte Anfangsauslenkung der Flüssigkeitsspiegel Δz_0 einstellt. Zu diesem Zeitpunkt wird auch das zweite Rohrende geschlossen. Somit herrschen im Punkt 1' durch die Anfangsauslenkung und die Flüssigkeitsspiegelbewegung u , im Punkt 2' nur durch die Flüssigkeitsspiegelbewegung u ein induzierter Überdruck.

Zur Herleitung der Druckdifferenzen zwischen den Punkten 1' und 2' müssen auch hier drei Zeitpunkte untersucht werden, Zeitpunkt $t = t_s$, bei dem sich nach der Befüllung die beiden Flüssigkeitsspiegellagen im Gleichgewicht befinden, $t = 0$, bei dem durch einen einseitigen Überdruck eine Flüssigkeitsspiegelauslenkung Δz_0 erreicht wird und $t = t_1$, bei dem sich die ausgelenkten Flüssigkeitsspiegellagen in Bewegung befinden (Abbildung 5.8, Abbildung 5.9 und Abbildung 5.10).

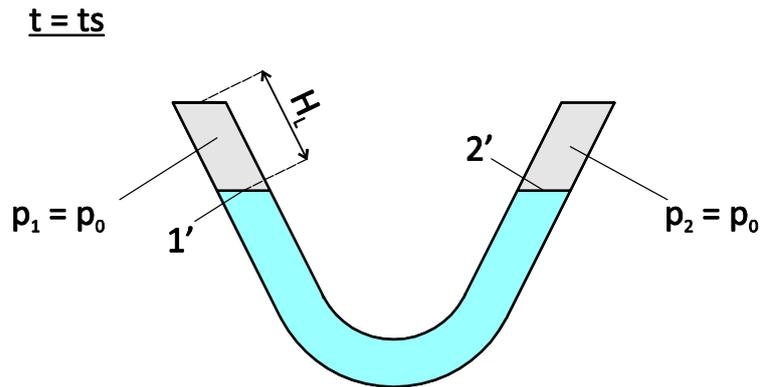


Abbildung 5.8: Flüssigkeitsspiegellagen im unausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_s$ (Fall 2)

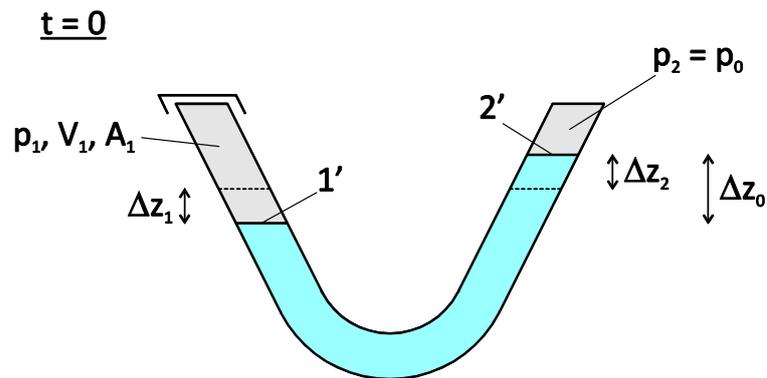


Abbildung 5.9: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt $t=0$ (Fall 2)

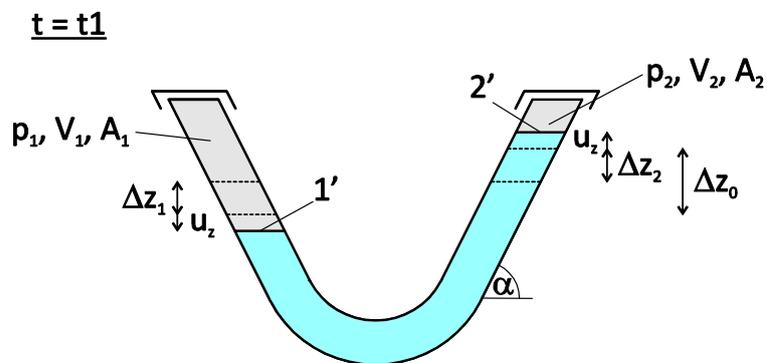


Abbildung 5.10: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_1$ mit der Flüssigkeitsspiegelauslenkung u (Fall 2)

Es gelten folgende Beziehungen

$$\Delta z_1 = \Delta z_2 = \frac{\Delta z_0}{2} \quad (5.31)$$

$$u_z = u \cdot \sin(\alpha)$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beläuft sich der Druck in den Punkten 1' und 2' zu

$$p_{1,0} = p_0 + \rho g \Delta z_0 \quad (5.32)$$

$$p_{2,0} = p_0$$

Mit Formel (5.25) ergibt sich dann der Druck für den Punkt 1' zum Zeitpunkt $t = t_1$ zu

$$p_{1,1} = p_{1,0} \left(\frac{V_{1,0}}{V_{1,1}} \right)^\gamma = (p_0 + \rho g \Delta z_0) \left(\frac{(H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2})A}{(H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} + u \sin(\alpha))A} \right)^\gamma \quad (5.33)$$

sowie im Punkt 2' zu

$$p_{2,1} = p_{2,0} \left(\frac{V_{2,0}}{V_{2,1}} \right)^\gamma = p_0 \left(\frac{(H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2})A}{(H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2} - u \sin(\alpha))A} \right)^\gamma \quad (5.34)$$

Damit ergibt sich eine Druckdifferenz bei ausgelenkten Flüssigkeitsspiegeln zu

$$\Delta p = p_{2,1} - p_{1,1} = p_0 \left(\frac{H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2}}{H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2} - u \sin(\alpha)} \right)^\gamma - (p_0 + \rho g \Delta z_0) \left(\frac{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} + u \sin(\alpha)} \right)^\gamma \quad (5.35)$$

Mittels linearer Approximation der Druckdifferenz durch eine Taylorreihe bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung folgt die approximierte Druckdifferenz zu

$$\Delta p_{approx} = \left(\frac{p_0 \gamma \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2}} + \frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0) \gamma \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} \right) u - \rho g \Delta z_0 + O(u^2) \quad (5.36)$$

Dieser Schritt ist für die weiteren analytischen Betrachtungen, z. B. die Eigenfrequenzermittlung in Kapitel 5.1.2, unumgänglich. Der zulässige Anwendungsbereich dieser Approximation sowie der Verlauf der Druckdifferenz soll nachfolgend untersucht werden. Dabei wird der exakte dem approximierten Druckunterschied grafisch gegenübergestellt.

In den nachfolgenden Betrachtungen wird eine Anfangsauslenkung $\Delta z_0 = 1,00$ m sowie eine Rohrneigung von 60° gewählt. Als Abszisse wird dabei die auf die Anfangsauslenkung der Flüssigkeitsspiegel Δz_0 bezogene Flüssigkeitsspiegelauslenkung u , als Ordinate der auf den Atmosphärendruck p_0 bezogene Druckunterschied der Punkte 1' und 2' verwendet. Da in die Ermittlung des Druckunterschiedes auch die Luftfederhöhe H_L eingeht, wird diese ebenfalls im Verhältnis zur Anfangsauslenkung der Flüssigkeitsspiegel Δz_0 angegeben und über den Bereich von $1/(2 \cdot \sin(\alpha)) \cdot 100 - 300$ % variiert. $1/(2 \cdot \sin(\alpha))$ ergibt sich aus der geometrischen Forderung, dass $H_L \cdot \sin(\alpha)$ mindestens gleich $\Delta z_0/2$ sein muss.

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

$$\left(\frac{H_L}{\Delta z_0} \right)_{\min} = \frac{1}{2 \sin(\alpha)} \quad (5.37)$$

Folgende Aussagen können den nachfolgenden Diagrammen entnommen werden

- 1.) Bei Verhältnissen von $H_L/\Delta z_0$ in der Nähe von $(H_L/\Delta z_0)_{\min}$, weist der Verlauf der Druckdifferenz Δp in Abhängigkeit der Flüssigkeitsspiegelbewegung u einen sehr stark nichtlinearen Bereich auf. Dies liegt daran, dass mit derartigen Verhältnissen das Luftvolumen annähernd gleich groß dem halben Volumen der ausgelenkten Flüssigkeit ist und somit für eine zusätzliche Auslenkung der Flüssigkeit durch eine Bewegung u sehr wenig Volumen zur Verfügung steht.
- 2.) Eine Linearisierung des Verlaufes des Druckunterschiedes ist nur für $H_L/\Delta z_0$ -Verhältnisse größer 1,50 und $u/\Delta z_0$ -Verhältnisse kleiner 0,30 anwendbar. Die Auswirkungen der Linearisierung können erst nach Berechnung der Bewegung der Flüssigkeitsspiegellagen quantifiziert werden. Trotzdem liefern die hier gemachten Aussagen eine gute Abgrenzung der zulässigen Drucklinearisierung.

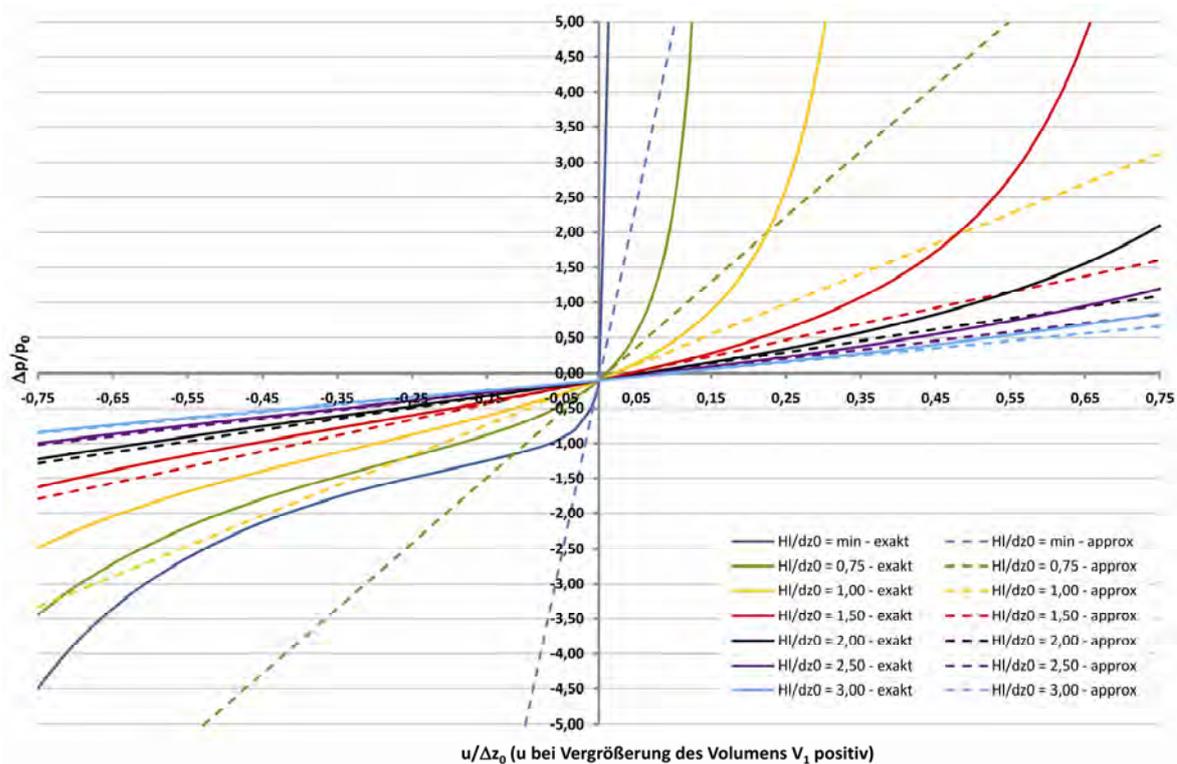


Abbildung 5.11: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 2)

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

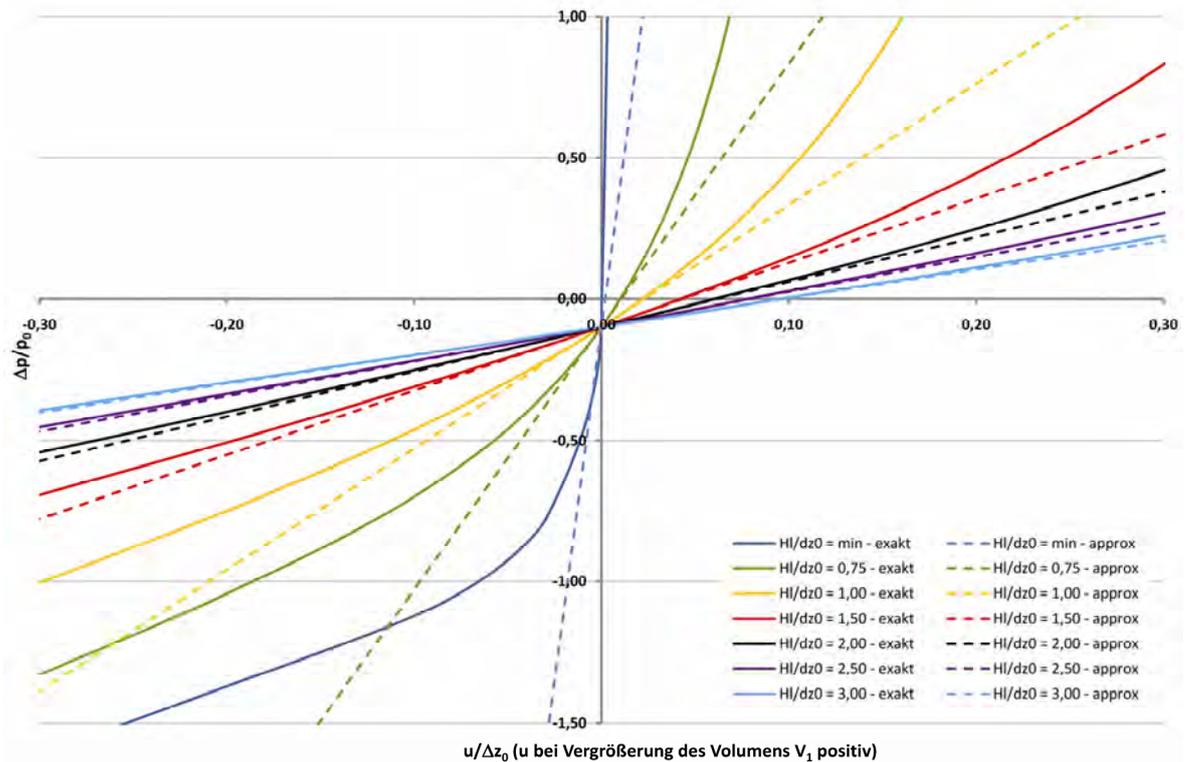


Abbildung 5.12: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 2, Ausschnitt)

5.1.1.3. Zweiseitig geschlossenes Rohr - beidseitige Luftfedern (Fall 3)

Bei diesem Befüllungsvorgang wird Flüssigkeit eingefüllt und befindet sich durch die offenen Rohrenden in statischer Ruhelage. Danach werden beide Rohrenden geschlossen (Punkt 1' und 2') und auf einer Seite Luft eingepresst, bis sich die gewünschte Anfangsauslenkung der Flüssigkeitsspiegel Δz_0 einstellt. Somit herrschen in den Punkten 1' und 2' durch die Anfangsauslenkung und die Flüssigkeitsspiegelbewegung u ein induzierter Überdruck.

Zur Herleitung der Druckdifferenzen zwischen den Punkten 1' und 2' müssen somit drei Zeitpunkte untersucht werden, Zeitpunkt $t = t_s$, bei dem sich nach der Befüllung die beiden Flüssigkeitsspiegellagen im Gleichgewicht befinden, $t = 0$, bei dem durch einen einseitigen Überdruck eine Flüssigkeitsspiegelauslenkung Δz_0 erreicht wird und $t = t_1$, bei dem sich die ausgelenkten Flüssigkeitsspiegellagen in Bewegung befinden (Abbildung 5.13, Abbildung 5.14 und Abbildung 5.15).

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

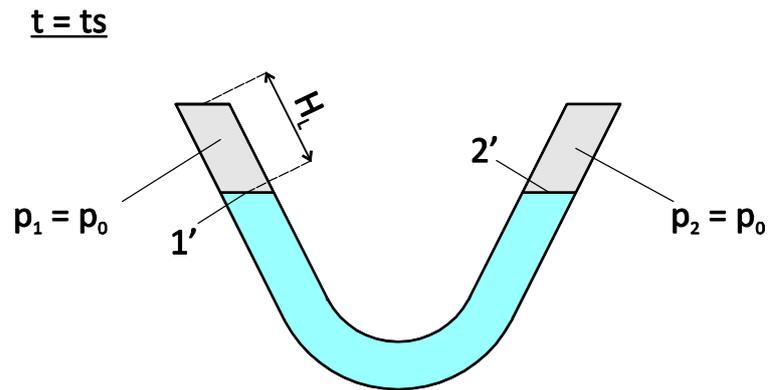


Abbildung 5.13: Flüssigkeitsspiegellagen im unausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_s$ (Fall 3)

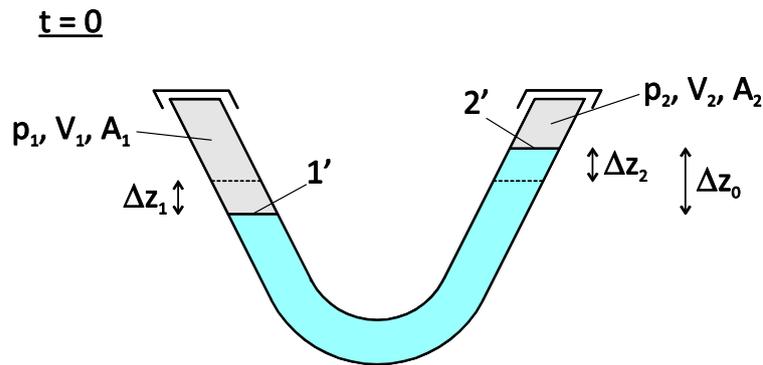


Abbildung 5.14: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt $t=0$ (Fall 3)

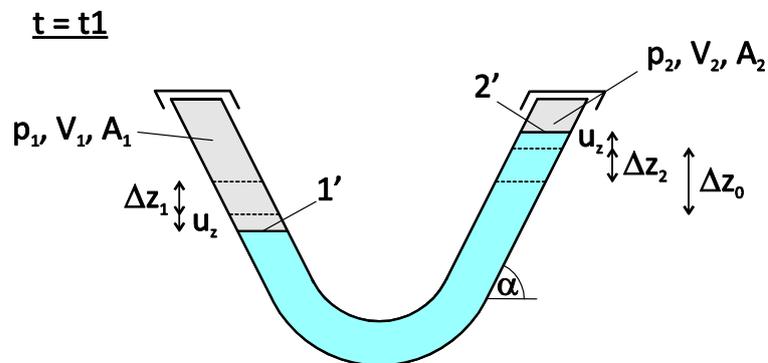


Abbildung 5.15: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_1$ mit der Flüssigkeitsspiegelauslenkung u (Fall 3)

Es gelten folgende Beziehungen

$$\Delta z_1 = \Delta z_2 = \frac{\Delta z_0}{2} \quad (5.38)$$

$$u_z = u \cdot \sin(\alpha)$$

Mit Formel (5.25) ergibt sich der Druck für den Punkt 2' zum Zeitpunkt $t = 0$ zu

$$p_{2,0} = p_{2,-1} \left(\frac{V_{2,-1}}{V_{2,0}} \right)^\gamma = p_0 \left(\frac{H_L \sin(\alpha) A}{\left(H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2} \right) A} \right)^\gamma \quad (5.39)$$

und damit im Punkt 1' zu

$$p_{1,0} = p_{2,0} + \rho g \Delta z_0 = p_0 \left(\frac{H_L \sin(\alpha) A}{\left(H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2} \right) A} \right)^\gamma + \rho g \Delta z_0 \quad (5.40)$$

Für den Zeitpunkt $t=1$ folgen dann die zugehörigen Drücke zu

$$p_{1,1} = \left[p_0 \left(\frac{H_L \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2}} \right)^\gamma + \rho g \Delta z_0 \right] \cdot \left(\frac{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} + u \sin(\alpha)} \right)^\gamma \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} p_{2,1} &= p_0 \left(\frac{H_L \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2}} \right)^\gamma \left(\frac{H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2}}{H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2} - u \sin(\alpha)} \right)^\gamma = \\ &= p_0 \left(\frac{H_L \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2} - u \sin(\alpha)} \right)^\gamma \end{aligned} \quad (5.42)$$

Damit ergibt sich eine Druckdifferenz bei ausgelenkten Flüssigkeitsspiegeln zu

$$\begin{aligned} \Delta p = p_{2,1} - p_{1,1} &= p_0 \left(\frac{H_L \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2} - u \sin(\alpha)} \right)^\gamma - \left[p_0 \left(\frac{H_L \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2}} \right)^\gamma + \right. \\ &\quad \left. + \rho g \Delta z_0 \right] \left(\frac{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} + u \sin(\alpha)} \right)^\gamma \end{aligned} \quad (5.43)$$

Mittels linearer Approximation der Druckdifferenz durch eine Taylorreihe bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung folgt die approximierte Druckdifferenz zu

$$\Delta p_{\text{approx}} = \left[p_0 \gamma \frac{\left(\frac{H_L}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)}} \right)^\gamma}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)}} + \gamma \frac{p_0 \left(\frac{H_L}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)}} \right)^\gamma + \rho g \Delta z_0}{H_L + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)}} \right] u - \rho g \Delta z_0 + O(u^2) \quad (5.44)$$

Dieser Schritt ist für die weiteren analytischen Betrachtungen, z. B. die Eigenfrequenzermittlung in Kapitel 5.1.2, unumgänglich. Der zulässige Anwendungsbereich dieser Approximation sowie der Verlauf der Druckdifferenz soll nachfolgend untersucht werden. Dabei wird der exakte dem approximierten Druckunterschied grafisch gegenübergestellt.

In den nachfolgenden Betrachtungen wird eine Anfangsauslenkung $\Delta z_0 = 1,00$ m sowie eine Rohrneigung von 60° gewählt. Als Abszisse wird dabei die auf die Anfangsauslenkung der Flüssigkeitsspiegel Δz_0 bezogene Flüssigkeitsspiegelauslenkung u , als Ordinate der auf den Atmosphärendruck p_0 bezogene Druckunterschied der Punkte 1' und 2' verwendet. Da in die Ermittlung des Druckunterschiedes auch die Luftfederhöhe H_L eingeht, wird diese ebenfalls im Verhältnis zur Anfangsauslenkung der Flüssigkeitsspiegel Δz_0 angegeben und über den Bereich von $1/(2 \cdot \sin(\alpha)) \cdot 100 - 300$ % variiert. $1/(2 \cdot \sin(\alpha))$ ergibt sich aus der geometrischen Forderung, dass $H_L \cdot \sin(\alpha)$ mindestens gleich $\Delta z_0/2$ sein muss.

$$\left(\frac{H_L}{\Delta z_0} \right)_{\min} = \frac{1}{2 \sin(\alpha)} \quad (5.45)$$

Folgende Aussagen können den nachfolgenden Diagrammen entnommen werden

- 1.) Bei Verhältnissen von $H_L/\Delta z_0$ in der Nähe von $(H_L/\Delta z_0)_{\min}$, weist der Verlauf der Druckdifferenz Δp in Abhängigkeit der Flüssigkeitsspiegelbewegung u einen sehr stark nichtlinearen Bereich auf. Dies liegt daran, dass mit derartigen Verhältnissen das Luftvolumen annähernd gleich dem halben Volumen der ausgelenkten Flüssigkeit entspricht und somit für eine zusätzliche Auslenkung der Flüssigkeit durch eine Bewegung u sehr wenig Volumen zur Verfügung steht.
- 2.) Eine Linearisierung des Verlaufes des Druckunterschiedes ist nur für $H_L/\Delta z_0$ -Verhältnisse größer 1,50 und $u/\Delta z_0$ -Verhältnisse kleiner 0,30 anwendbar. Bei noch größeren Verhältnissen von $H_L/\Delta z_0$ ist eine Linearisierung sogar noch über einen größeren Bereich zulässig. Die Auswirkungen der Linearisierung können erst nach Berechnung der Bewegung der Flüssigkeitsspiegellagen quantifiziert werden. Trotzdem liefern die hier gemachten Aussagen eine gute Abgrenzung der möglichen Drucklinearisierung.

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

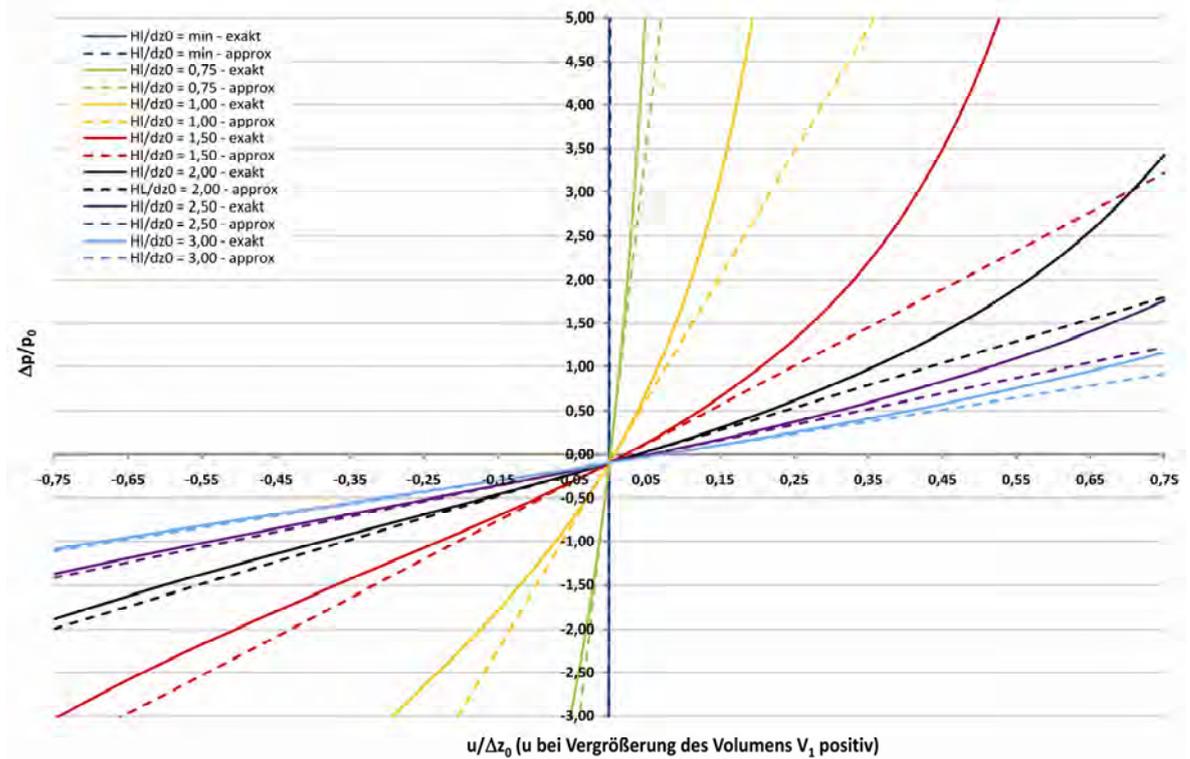


Abbildung 5.16: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 3)

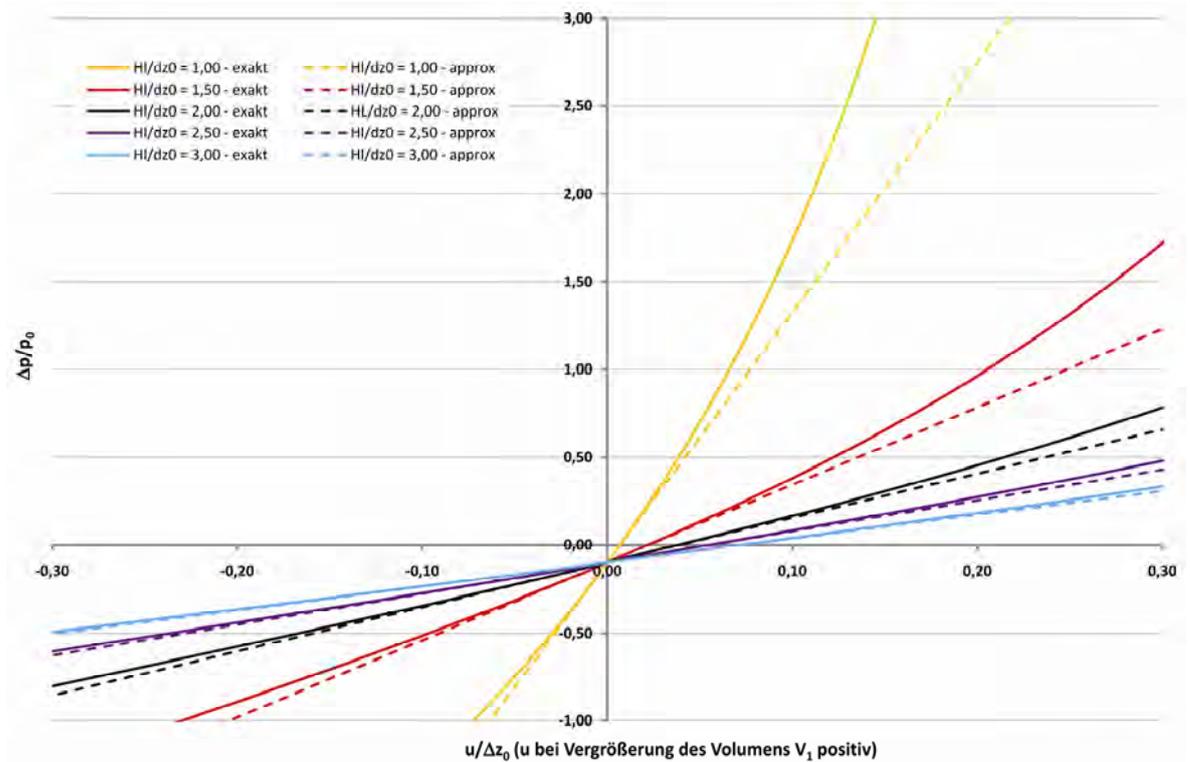


Abbildung 5.17: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 3, Ausschnitt)

5.1.1.4. Einseitig geschlossenes Rohr - einseitige Luftfeder (Fall 4)

Bei diesem Befüllungsvorgang ist von Beginn an das Rohrende bei Punkt 2' geschlossen, das heißt, dass bereits durch das Befüllen im zweiten Rohrschenkel ein Überdruck induziert wird. Dann wird solange Flüssigkeit eingefüllt, bis sich die gewünschte Flüssigkeitsspiegellage Δz_0 einstellt. Das Rohrende beim Punkt 1' bleibt offen. Durch eine Flüssigkeitsspiegelbewegung u wird der Überdruck im Schenkel 2 noch erhöht.

Bei diesem Fall muss berücksichtigt werden, dass die Ausgangshöhe des Luftvolumens, die für diesen Fall eine fiktive Größe und reinen Vergleichscharakter mit den anderen Fällen besitzt, nicht frei wählbar ist, sondern von der Gesamtlänge des Rohrschenkels L_{ges} sowie der Anfangsauslenkung Δz_0 abhängig ist. An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass der ausgerundete Bereich des Tilgers außer Acht gelassen und eine idealisierte V-Form angenommen wird, da bei Berücksichtigung der Ausrundung eine weitere unbekannt Variable, nämlich die Bogenlänge vom linken zum rechten Flüssigkeitsspiegel zum Zeitpunkt $t = t_s$, auftreten würde. Da das dabei vernachlässigte Volumen gegenüber dem Luftvolumen bei üblichen Tilgerkonstruktionen als klein vorausgesetzt werden kann, ist diese Näherung zulässig.

Zur Herleitung der Druckdifferenzen zwischen den Punkten 1' und 2' müssen drei Zeitpunkte untersucht werden, Zeitpunkt $t = t_s$, bei dem sich nach der Befüllung der Rohrkrümmung die beiden Flüssigkeitsspiegellagen im Gleichgewicht befinden, $t = 0$, bei dem durch (vorsichtiges) einseitiges Einfüllen der Flüssigkeit eine Flüssigkeitsspiegelauslenkung Δz_0 erreicht wird und $t = t_1$, bei dem sich die ausgelenkten Flüssigkeitsspiegellagen in Bewegung befinden (Abbildung 5.18, Abbildung 5.19 und Abbildung 5.20).

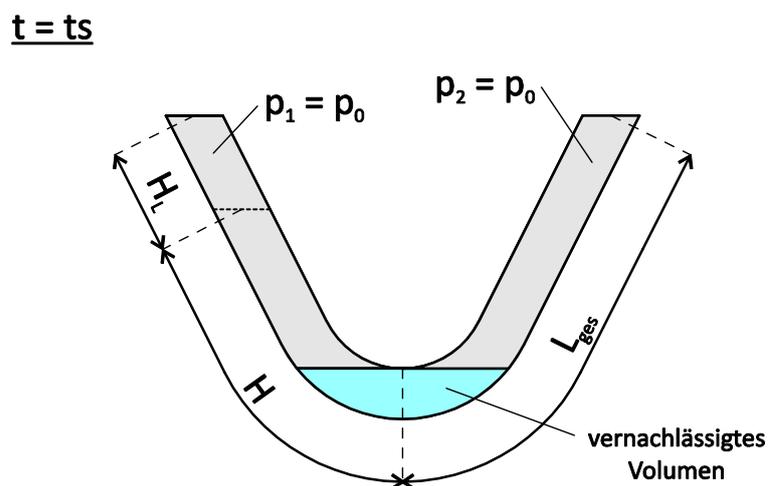


Abbildung 5.18: Flüssigkeitsspiegellagen im un ausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_s$ (Fall 4)

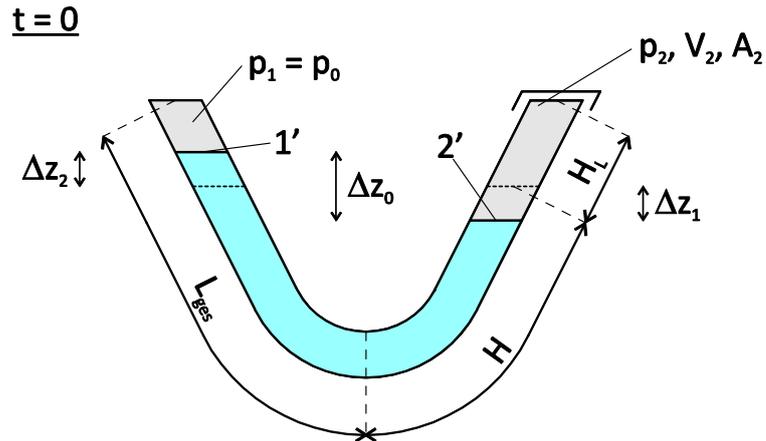


Abbildung 5.19: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgeglichenen Zustand nach Einstellung von Δz_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ (Fall 4)

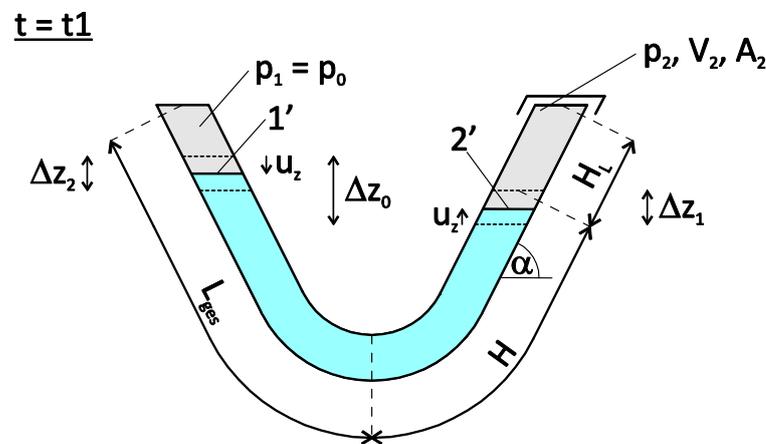


Abbildung 5.20: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_1$ mit der Flüssigkeitsspiegelauslenkung u (Fall 4)

Es gelten folgende Beziehungen

$$\Delta z_1 = \Delta z_2 = \frac{\Delta z_0}{2} \quad (5.46)$$

$$u_z = u \cdot \sin(\alpha)$$

Mit Formel (5.25) ergibt sich der Druck für den Punkt 2' zum Zeitpunkt $t = 0$ zu

$$p_{2,0} = p_{2,-1} \left(\frac{V_{2,-1}}{V_{2,0}} \right)^\gamma = p_0 \left(\frac{L_{ges} \sin(\alpha) A}{(H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}) A} \right)^\gamma \quad (5.47)$$

sowie für den Zeitpunkt $t = t_1$ zu

$$p_{2,1} = p_{2,-1} \left(\frac{V_{2,-1}}{V_{2,1}} \right)^\gamma = p_0 \left(\frac{L_{ges} \sin(\alpha) A}{(H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} - u \sin(\alpha)) A} \right)^\gamma \quad (5.48)$$

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

Aus dem hydrostatischen Gleichgewicht zum Zeitpunkt $t = t_1$

$$p_0 + \rho g \Delta z_0 = p_0 \left(\frac{L_{ges} \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} \right)^\gamma \quad (5.49)$$

lässt sich die (fiktive) Ausgangshöhe der Luftfeder ermitteln

$$H_L = \frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{(p_0 + \rho g \Delta z_0)^{\frac{1}{\gamma}}} L_{ges} - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} \quad (5.50)$$

Wie Gleichung (5.50) zeigt, ist diese, wie zu erwarten ist, hauptsächlich abhängig von L_{ges} und Δz_0 . Die tatsächlich vorhandene Luftfederhöhe lässt sich aus

$$H_{L,ges} = H_L + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} \quad (5.51)$$

errechnen. Nachfolgend ist der Verlauf von H_L sowie $H_{L,ges}$ grafisch dargestellt.

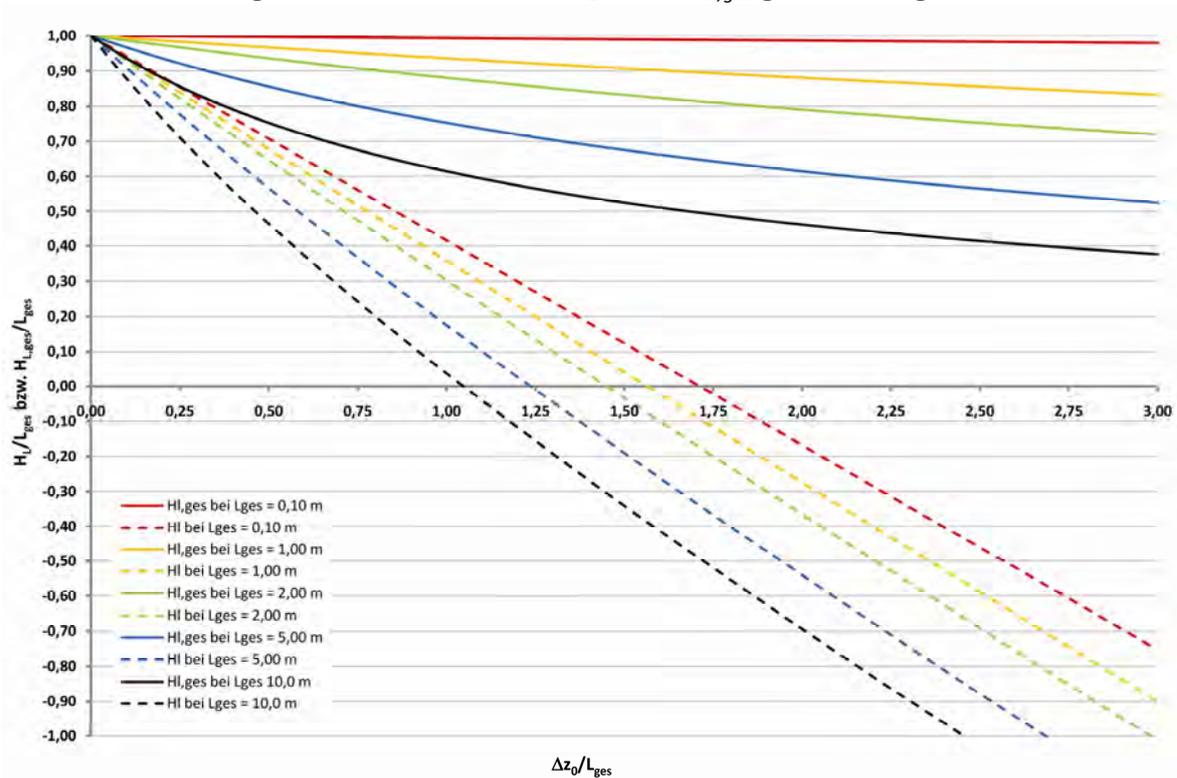


Abbildung 5.21: Verlauf von H_L und $H_{L,ges}$ in Abhängigkeit von L_{ges} und Δz_0 (Fall 4)

Mit Gleichung (5.48) ergibt sich eine Druckdifferenz bei ausgelenkten Flüssigkeitsspiegeln zu

$$\Delta p = p_{2,1} - p_{1,1} = p_0 \left(\frac{L_{ges} \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} - u \sin(\alpha)} \right)^\gamma - p_0 \quad (5.52)$$

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

Mittels linearer Approximation der Druckdifferenz durch eine Taylorreihe bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung folgt die approximierte Druckdifferenz zu

$$\Delta p_{approx} = \frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \gamma p_0^{-\frac{1}{\gamma}}}{L_{ges}} u + \rho g \Delta z_0 + O(u^2) \quad (5.53)$$

Diese linear approximierte Druckdifferenz entspricht nach einigem Umformen, wie nachfolgend gezeigt wird, jener des Falls 1, wie auch zu erwarten war. Dabei ist zu berücksichtigen, dass für den Fall 1 durch den Befüllvorgang der Überdruck beim Rohrende 1, für den Fall 4 beim Rohrende 2 auftritt. Spiegelt man deshalb gedanklich den Tilgertyp 4 um die z-Achse, folgt

$$p_{1,0} = p_0 \left(\frac{(H_L + H) \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} \right)^\gamma = p_0 + \rho g \Delta z_0 \quad (5.54)$$

Daraus lässt sich die halbe Stromfadenlänge H zu

$$H \sin(\alpha) = \left(\frac{p_0 + \rho g \Delta z_0}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} \right) - H_L \sin(\alpha) \quad (5.55)$$

ermitteln. Der Druck im Rohrschenkel 1 zufolge einer Flüssigkeitsspiegelbewegung lautet (siehe Gl. (5.48))

$$p_{1,1} = p_0 \left(\frac{(H_L + H) \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} + u \sin(\alpha)} \right)^\gamma \quad (5.56)$$

Setzt man darin den zuvor ermittelten Ausdruck für H ein, folgt exakt der Druckterm für den Fall 1.

Der zulässige Anwendungsbereich dieser Approximation sowie der Verlauf der Druckdifferenz soll nachfolgend untersucht werden. Dabei wird der exakte dem approximierten Druckunterschied grafisch gegenübergestellt.

In den nachfolgenden Betrachtungen wird eine Anfangsauslenkung $\Delta z_0 = 1,00$ m sowie eine Rohrneigung von 60° gewählt. Als Abszisse wird dabei die auf die Anfangsauslenkung der Flüssigkeitsspiegel Δz_0 bezogene Flüssigkeitsspiegelauslenkung u , als Ordinate der auf den Atmosphärendruck p_0 bezogene Druckunterschied der Punkte 1' und 2' verwendet. Da in die Ermittlung des Druckunterschiedes auch die Gesamtlänge eines Rohrschenkels L_{ges} eingeht, wird diese ebenfalls im Verhältnis zur Anfangsauslenkung der Flüssigkeitsspiegel Δz_0 angegeben und über den Bereich von 10 – 500 % variiert.

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

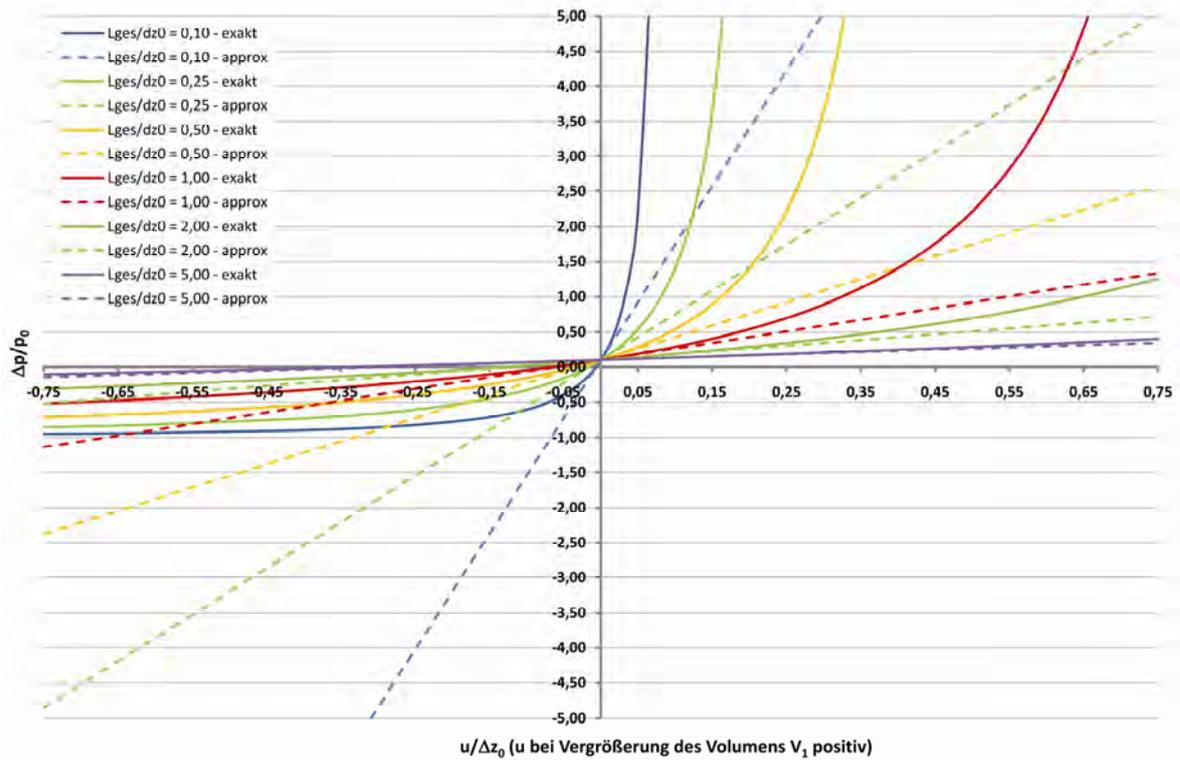


Abbildung 5.22: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 4)

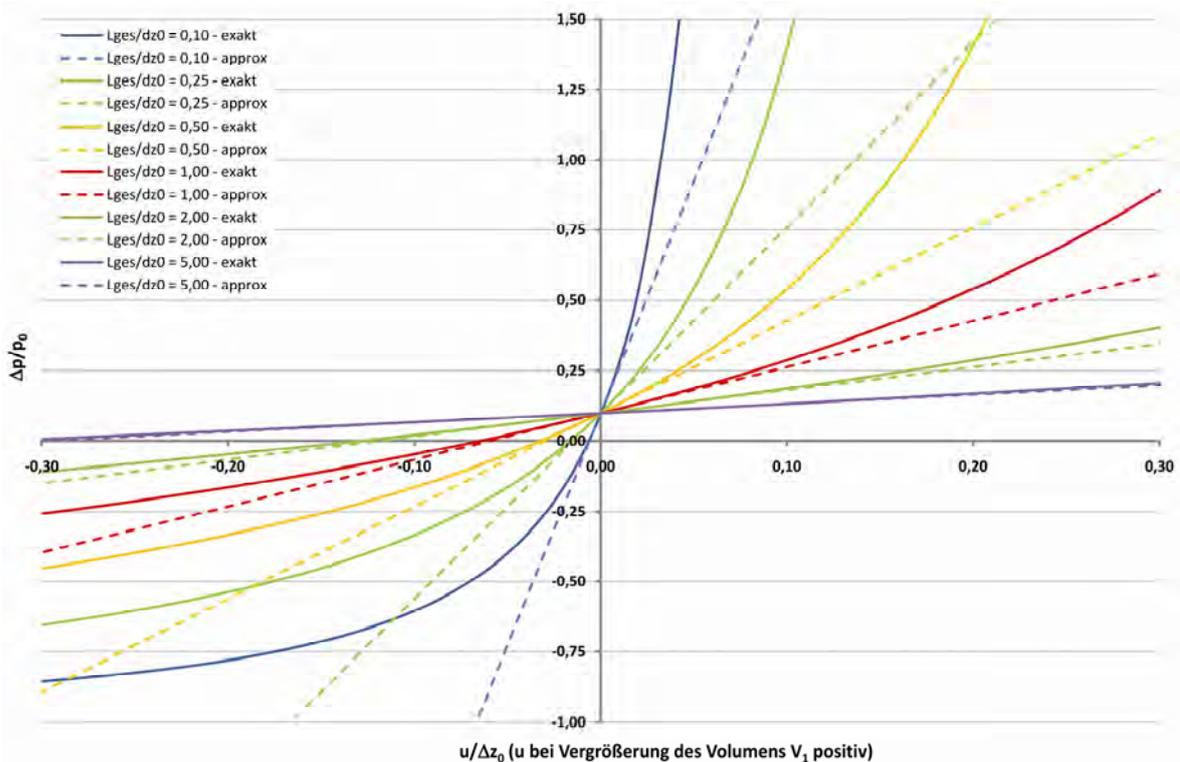


Abbildung 5.23: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 4, Ausschnitt)

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

Folgende Aussagen können den zuvor angeführten Diagrammen entnommen werden

- 1.) Je weniger Luftvolumen im Punkt 2' zur Verfügung gestellt wird, desto steifer ist die Luftfeder und desto weniger lässt sie sich, auch bei größer werdendem Δz_0 komprimieren (Abbildung 5.21).
- 2.) Bei sehr kleinen Verhältnissen von $L_{ges}/\Delta z_0$ weist der Verlauf der Druckdifferenz Δp in Abhängigkeit der Flüssigkeitsspiegelbewegung u einen sehr stark nichtlinearen Bereich auf, wenn das Volumen durch u im Punkt 2' verkleinert wird (u positiv).
- 3.) Eine Linearisierung des Verlaufes des Druckunterschiedes ist nur für $L_{ges}/\Delta z_0$ -Verhältnisse größer 1,00 und $u/\Delta z_0$ -Verhältnisse kleiner 0,30 anwendbar. Bei noch größeren Verhältnissen von $L_{ges}/\Delta z_0$ ist eine Linearisierung sogar noch über einen größeren Bereich zulässig. Die Auswirkungen der Linearisierung können erst nach Berechnung der Bewegung der Flüssigkeitsspiegellagen quantifiziert werden. Trotzdem liefern die hier gemachten Aussagen eine gute Abgrenzung der möglichen Drucklinearisierung.

5.1.1.5. Zweiseitig geschlossenes Rohr - beidseitige Luftfeder (Fall 5)

Der Befüllungsvorgang ist ähnlich wie bei Fall 4, es wird lediglich nach Einstellung der Anfangsauslenkung Δz_0 auch im Punkt 1' das Rohrende geschlossen. Somit wird durch die auftretende Flüssigkeitsspiegelschwankung auch im Punkt 1' ein Überdruck erzeugt und damit eine Luftfeder aktiviert.

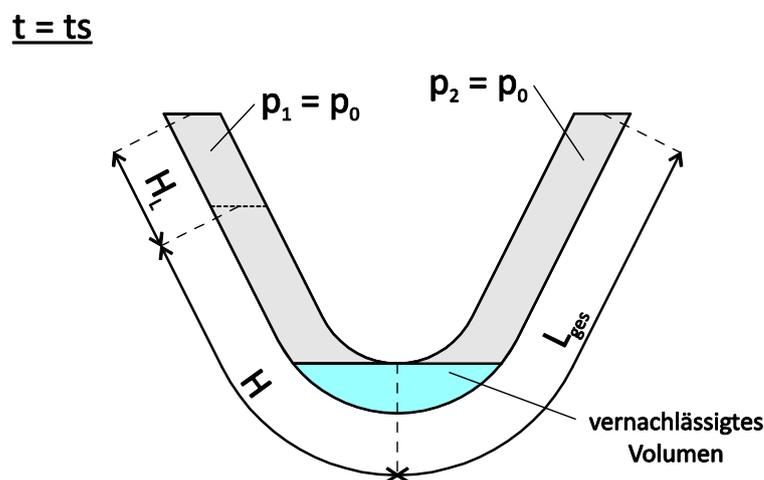


Abbildung 5.24: Flüssigkeitsspiegellagen im un ausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_s$ (Fall 5)

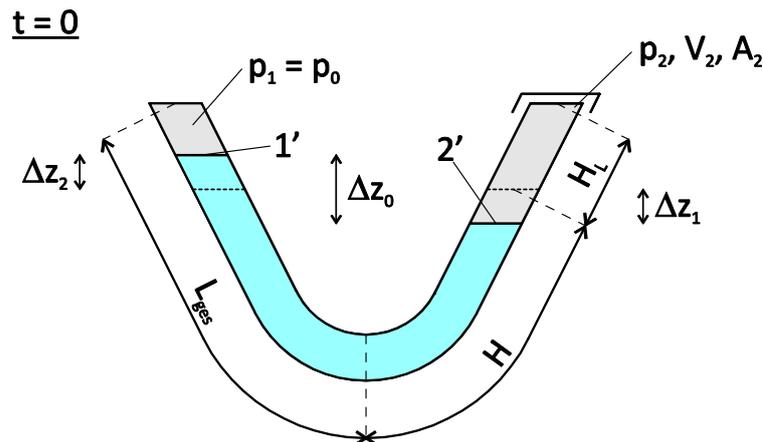


Abbildung 5.25: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Gleichgewichtszustand nach Einstellung von Δz_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ (Fall 5)

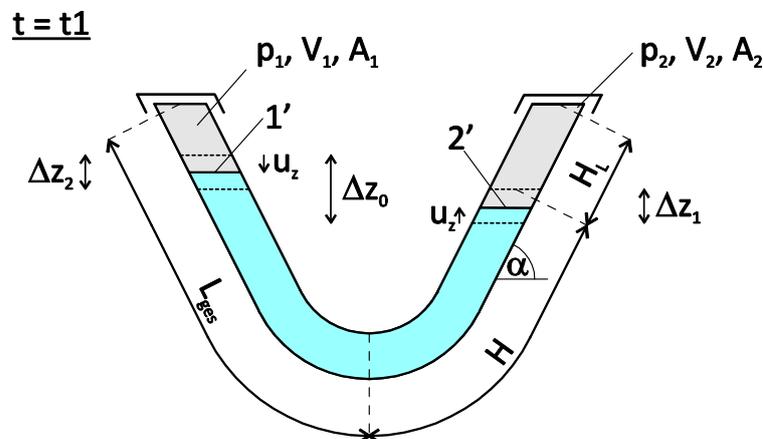


Abbildung 5.26: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_1$ mit der Flüssigkeitsspiegelauslenkung u (Fall 5)

Es gelten folgende Beziehungen

$$\Delta z_1 = \Delta z_2 = \frac{\Delta z_0}{2} \quad (5.57)$$

$$u_z = u \cdot \sin(\alpha)$$

Die (fiktive) Ausgangshöhe der Luftfeder ergibt sich wie für Fall 4 zu

$$H_L = \frac{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{(p_0 + \rho g \Delta z_0)^{\frac{1}{\gamma}}} L_{ges} - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} \quad (5.58)$$

und damit die Gesamthöhen der Luftvolumina in den Punkten 1' und 2' zu

$$H_{L,ges,1'} = H_L - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} \quad (5.59)$$

$$H_{L,ges,2'} = H_L + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)}$$

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

Da das Luftvolumen im Punkt 1' nicht negativ werden kann, folgt für die minimale Länge der Rohrschenkel in Abhängigkeit der Anfangsauslenkung

$$L_{ges,min} = \frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0)^{\frac{1}{\gamma}}}{p_0^{\frac{1}{\gamma}} \sin(\alpha)} \Delta z_0 \quad (5.60)$$

Diese Sachverhalte sind in den nachfolgenden Diagrammen grafisch dargestellt.

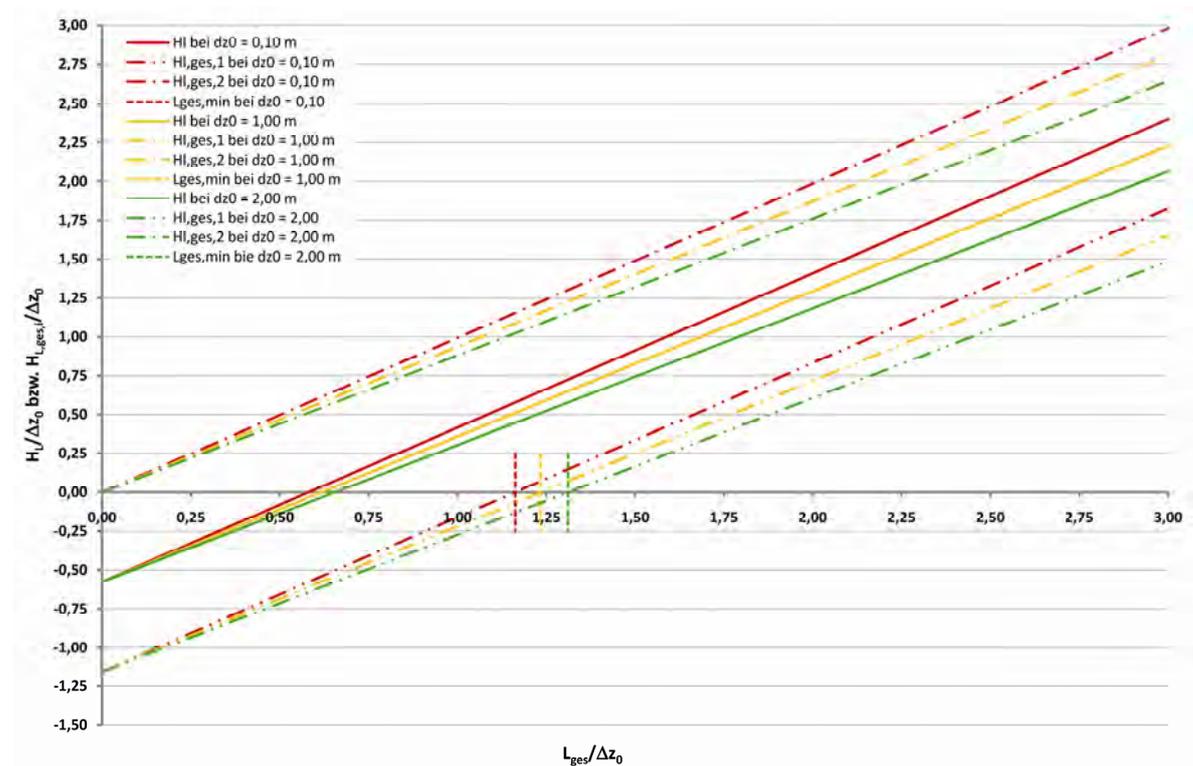


Abbildung 5.27: Verlauf der (fiktiven) Ausgangshöhe der Luftvolumina H_L sowie der tatsächlichen Luftfederhöhen $H_{L,ges,1}$ und $H_{L,ges,2}$ in Abhängigkeit von L_{ges} und Δz_0 (Fall 5)

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

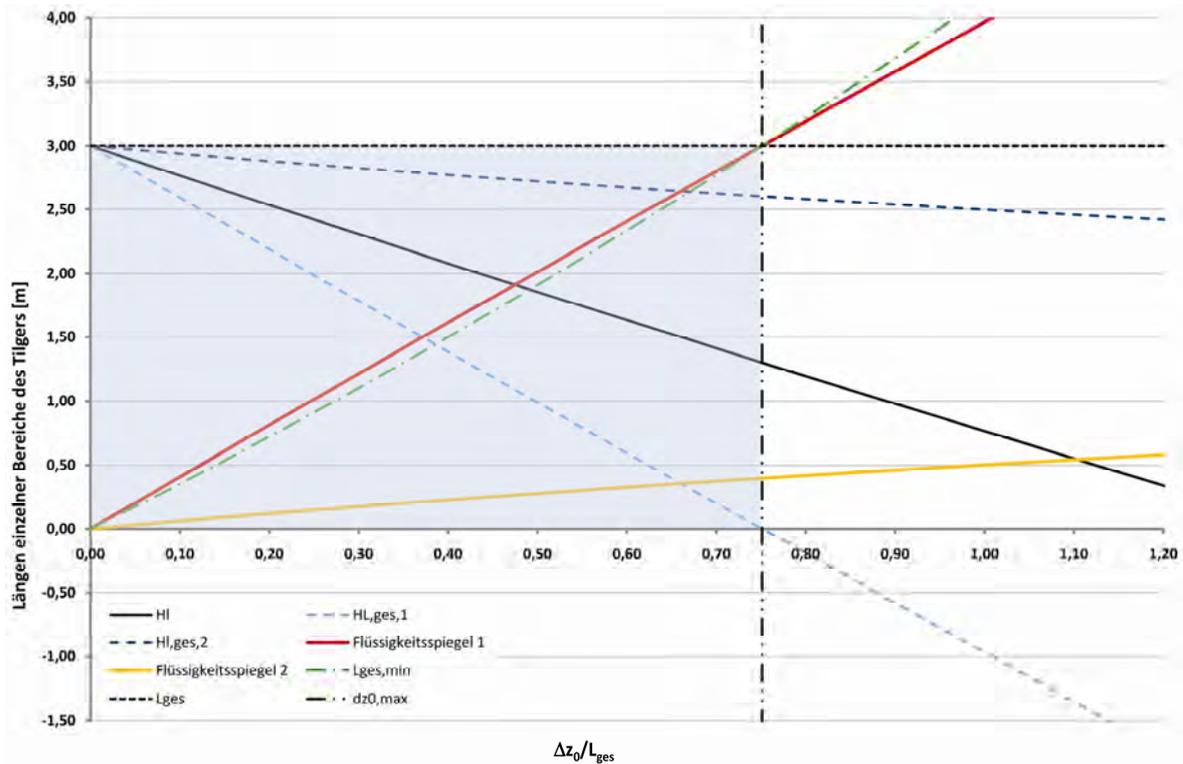


Abbildung 5.28: Verlauf der (fiktiven) Ausgangshöhe der Luftvolumina H_L sowie der tatsächlichen Luftfederhöhen $H_{L,ges,1}$ und $H_{L,ges,2}$ und der Flüssigkeitsspiegellagen in Abhängigkeit von Δz_0 , $L_{ges} = 3,0 \text{ m}$ (Fall 5)

Mit Formel (5.25) ergibt sich der Druck für den Punkt 1' zum Zeitpunkt $t = t_1$ zu

$$p_{1,1} = p_{1,0} \left(\frac{V_{1,0}}{V_{1,1}} \right)^\gamma = p_0 \left(\frac{(H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2}) A}{(H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2} + u \sin(\alpha)) A} \right)^\gamma \quad (5.61)$$

sowie für den Punkt 2' zu

$$p_{2,1} = p_{2,-1} \left(\frac{V_{2,-1}}{V_{2,1}} \right)^\gamma = p_0 \left(\frac{L_{ges} \sin(\alpha) A}{(H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} - u \sin(\alpha)) A} \right)^\gamma \quad (5.62)$$

Damit ergibt sich eine Druckdifferenz bei ausgelenkten Flüssigkeitsspiegeln zu

$$\Delta p = p_{2,1} - p_{1,1} = p_0 \left(\frac{L_{ges}}{H_L + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u} \right)^\gamma - p_0 \left(\frac{H_L - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)}}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} + u} \right)^\gamma \quad (5.63)$$

Mittels linearer Approximation der Druckdifferenz durch eine Taylorreihe bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung folgt die approximierte Druckdifferenz zu

$$\Delta p_{approx} = p_0 \left[\left(\frac{L_{ges}}{H_L + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)}} \right)^\gamma - 1 \right] + p_0 \left[\frac{\left(\frac{L_{ges}}{H_L + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)}} \right)^\gamma}{H_L + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)}} + \frac{\gamma}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)}} \right] u + O(u^2) \quad (5.64)$$

Diese linear approximierte Druckdifferenz entspricht jener des Falls 2, wie auch zu erwarten war. Die zugehörige Berechnung kann Kapitel 5.1.1.4 entnommen werden und wird an dieser Stelle nicht noch einmal angeführt. Der zulässige Anwendungsbereich dieser Approximation sowie der Verlauf der Druckdifferenz soll nachfolgend untersucht werden. Dabei wird der exakte dem approximierten Druckunterschied grafisch gegenübergestellt.

In den nachfolgenden Betrachtungen wird eine Anfangsauslenkung $\Delta z_0 = 1,00$ m sowie eine Rohrneigung von 60° gewählt. Als Abszisse wird dabei die auf die Anfangsauslenkung der Flüssigkeitsspiegel Δz_0 bezogene Flüssigkeitsspiegelauslenkung u , als Ordinate der auf den Atmosphärendruck p_0 bezogene Druckunterschied der Punkte 1' und 2' verwendet. Da in die Ermittlung des Druckunterschiedes auch die Gesamtlänge eines Rohrschenkels L_{ges} eingeht, wird diese ebenfalls im Verhältnis zur Anfangsauslenkung der Flüssigkeitsspiegel Δz_0 angegeben und über den Bereich von $(L_{ges}/\Delta z_0)_{min} \cdot 100 - 500$ % variiert.

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

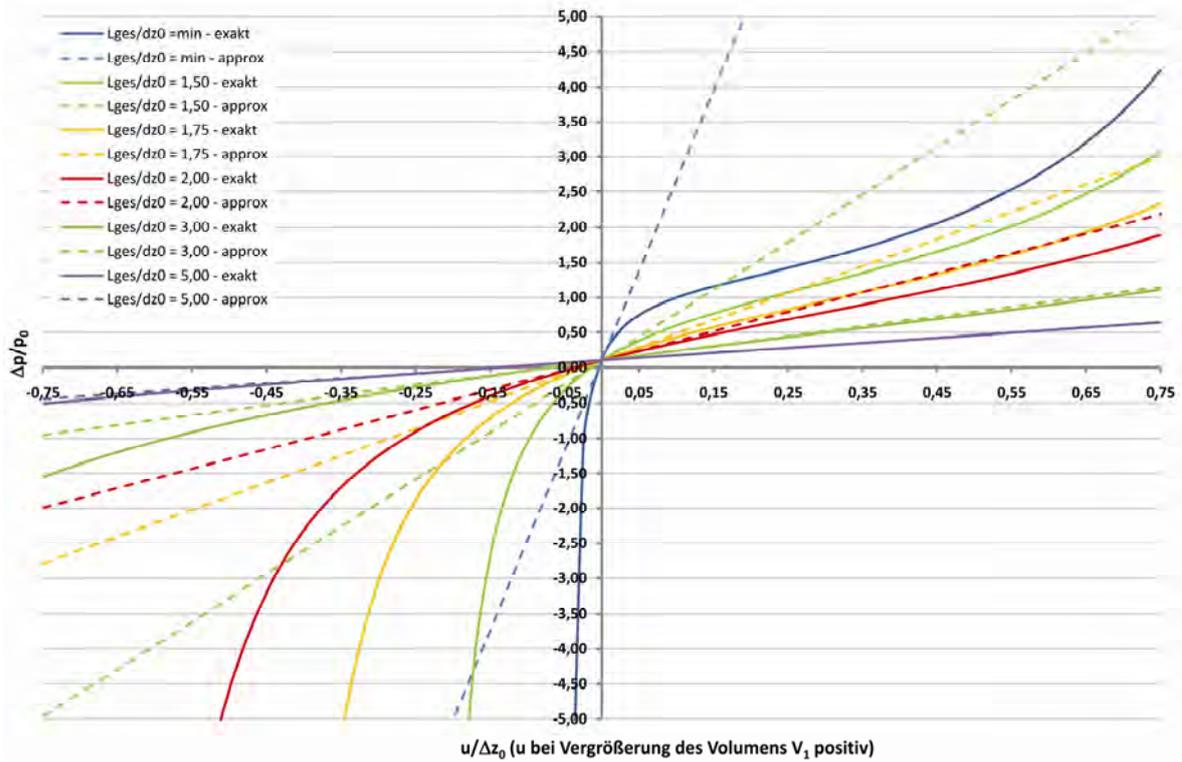


Abbildung 5.29: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 5)

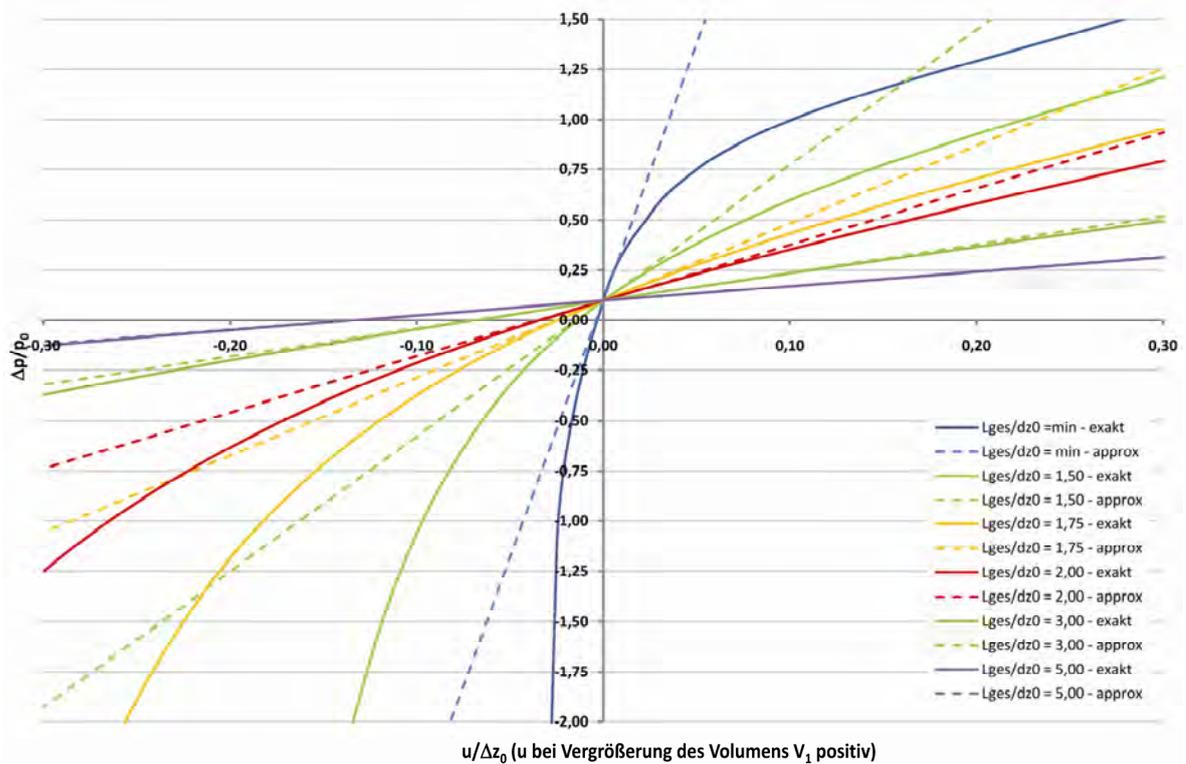


Abbildung 5.30: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 5, Ausschnitt)

Folgende Aussagen können den zuvor angeführten Diagrammen entnommen werden

- 1.) Bei sehr kleinen Verhältnissen von $L_{ges}/\Delta z_0$ nahe an $(L_{ges}/\Delta z_0)_{min}$ weist der Verlauf der Druckdifferenz Δp in Abhängigkeit der Flüssigkeitsspiegelbewegung u einen sehr stark nichtlinearen Bereich auf, wenn das Volumen durch u im Punkt 1' noch verkleinert wird (u negativ).
- 2.) Eine Linearisierung des Verlaufes des Druckunterschiedes ist nur für $L_{ges}/\Delta z_0$ -Verhältnisse größer 1,75 und $u/\Delta z_0$ -Verhältnisse kleiner 0,30 anwendbar. Bei noch größeren Verhältnissen von $L_{ges}/\Delta z_0$ ist eine Linearisierung sogar noch über einen größeren Bereich zulässig. Die Auswirkungen der Linearisierung können erst nach Berechnung der Bewegung der Flüssigkeitsspiegellagen quantifiziert werden. Trotzdem liefern die hier gemachten Aussagen eine gute Abgrenzung der möglichen Drucklinearisierung.

Bei allen zuvor angeführten Tilgerarten wurden immer gleiche Rohrschenkellängen vorausgesetzt, jedoch kann es vor allem beim Fall 5 hilfreich sein, durch Variation der Schenkellängen eine optimale Tilgergeometrie zu erhalten. Die dafür notwendigen Gleichungen sind den Gleichungen für Tilger mit gleichen Rohrschenkeln sehr ähnlich und werden hier nicht angeführt.

5.1.2. Eigenfrequenzen der Schwingungstilger

Die Eigenfrequenz der Schwingungstilger, die für die Abstimmungskriterien nach Den Hartog erforderlich ist, lässt sich mithilfe der instationären Bernoulli Gleichung (2.45) bei Vernachlässigung der Parametererregung (vertikale Verformung w und Tangentenverdrehung φ) und der Reibung sowie bei Linearisierung der Druckdifferenz ermitteln. Dies soll nachfolgend für den frei schwingenden Flüssigkeitsfaden sowie die fünf zuvor vorgestellten Fälle durchgeführt werden. Nachfolgend wird die Bernoulli Gleichung zum besseren Verständnis erneut angeführt und jene Terme, die für alle sechs nachfolgend angeführten Fälle Gültigkeit haben, hergeleitet.

$$\int_1^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} ds + \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = -g (z_2 - z_1) - \frac{1}{\rho} (p_2 - p_1) \quad (5.65)$$

Es gelten folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} \Delta z_1 = \Delta z_2 &= \frac{\Delta z_0}{2} \\ u_z &= u \cdot \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (5.66)$$

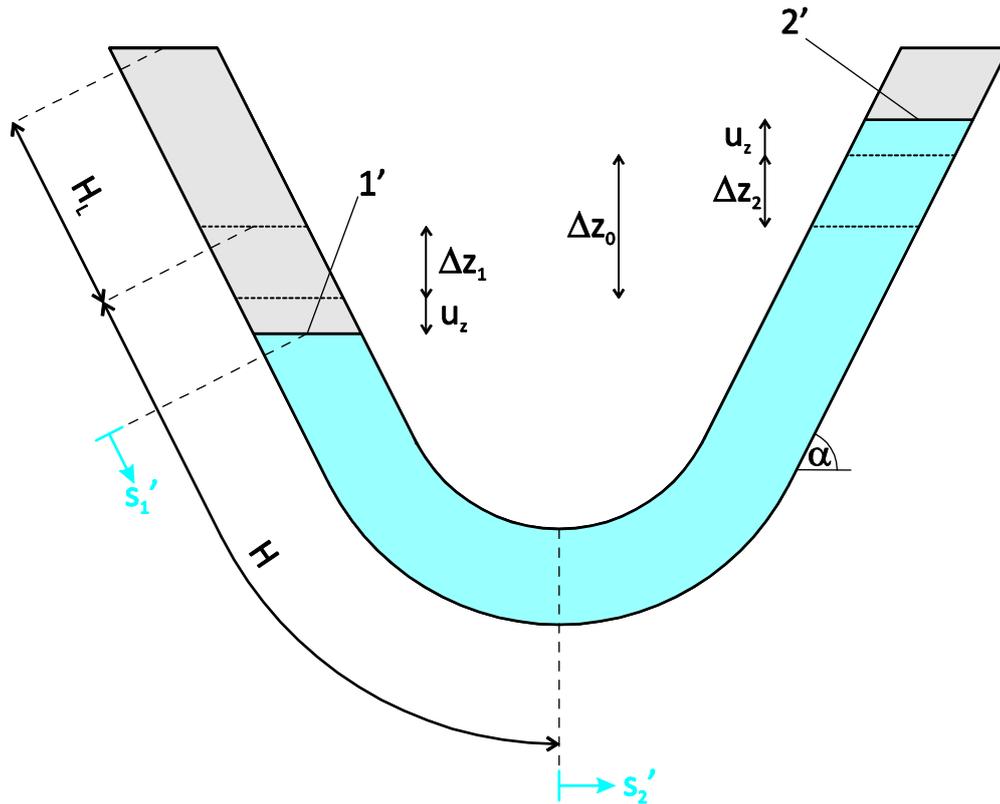


Abbildung 5.31: Geometrie des Flüssigkeitsschwingungstilgers zur Ermittlung der Eigenfrequenz

$$\int_{1'}^{2'} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} ds'$$

$$\int_{1'}^{2'} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} ds' = \int_0^{H - \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)} - u} \ddot{u} ds'_1 + \int_0^{H + \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)} + u} \ddot{u} ds'_2 = 2H\ddot{u} \quad (5.67)$$

$$\frac{1}{2}(v_2'^2 - v_1'^2)$$

Aufgrund der Gleichheit der Flüssigkeitsspiegelgeschwindigkeiten fällt dieser Term weg.

$$z_2 - z_1$$

$$\begin{aligned} z_1 &= H \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2} - u \sin(\alpha) \\ z_2 &= H \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} + u \sin(\alpha) \\ z_2 - z_1 &= 2u \sin(\alpha) + \Delta z_0 \end{aligned} \quad (5.68)$$

5.1.2.1. Frei schwingender Flüssigkeitsfaden

Bei dem frei schwingenden Flüssigkeitsfaden kann $\Delta z_0 = 0$ gesetzt werden, der Term mit der Druckdifferenz fällt weg. Es bleibt nachfolgende Differenzialgleichung für die Flüssigkeitsbewegung übrig

$$2H\ddot{u} + 2g \sin(\alpha)u = 0$$

$$\ddot{u} + \underbrace{\frac{2g \sin(\alpha)}{2H}}_{\omega_a^2} u = 0 \quad (5.69)$$

und damit die Eigenfrequenz des frei schwingenden Flüssigkeitsfadens

$$f_{frei} = \frac{\omega_a}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g \sin(\alpha)}{2H}} \quad (5.70)$$

5.1.2.2. Einseitig geschlossenes Rohrende – einseitige Luftfeder (Fall 1)

Setzt man den linearisierten Term für den Druckunterschied (5.30) in (5.65) ein, folgt für die Differenzialgleichung der Flüssigkeitsspiegelbewegung

$$2H\ddot{u} + (2 \sin(\alpha)u + \cancel{\Delta z_0})g + \frac{1}{\rho} \left(\frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0) \gamma \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} u - \cancel{\rho g \Delta z_0} \right) = 0$$

$$\ddot{u} + \underbrace{\frac{1}{2H} \left(2g \sin(\alpha) + \frac{1}{\rho} \frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0) \gamma \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} \right)}_{\omega_{a, Fall 1}^2} u = 0 \quad (5.71)$$

sowie für die Eigenfrequenz des schwingenden Flüssigkeitsfadens

$$f_{Fall 1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g \sin(\alpha)}{2H} \left[1 + \frac{\gamma}{2\rho g \left(H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} \right)} (p_0 + \rho g \Delta z_0) \right]} \quad (5.72)$$

Nachfolgend sind Eigenfrequenzkurven in Abhängigkeit von $H/\Delta z_0$ sowie $H_L/\Delta z_0$ dargestellt. Es ist ersichtlich, dass durch die Anordnung der einseitigen Luftfeder die Eigenfrequenz gegenüber dem frei schwingenden Flüssigkeitsfaden (Parameter $\Delta p = 0$) selbst mit ungünstigster Wahl der Parameter in etwa verdoppelt werden kann.

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

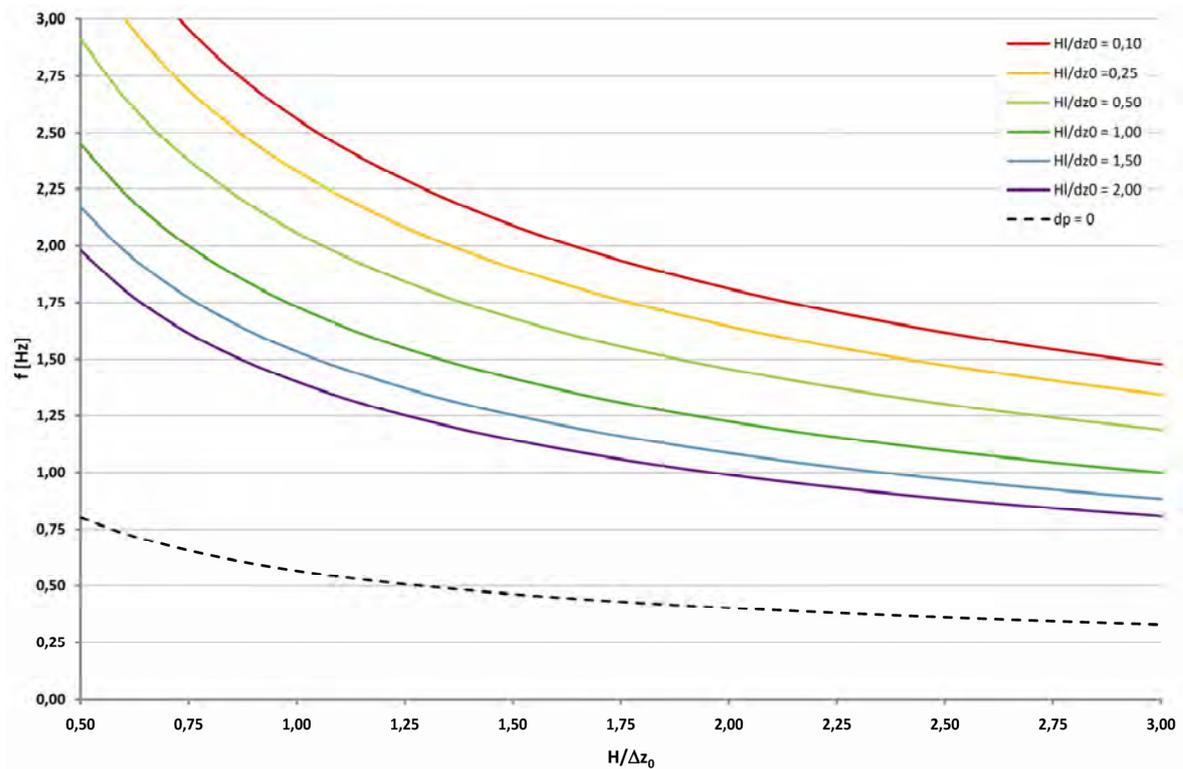


Abbildung 5.32: Verlauf der Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Parameter H und H_L (Fall 1)

5.1.2.3. Zweiseitig geschlossenes Rohr - beidseitige Luftfedern (Fall 2)

Setzt man den linearisierten Term für den Druckunterschied (5.36) in (5.65) ein, folgt für die Differenzialgleichung der Flüssigkeitsspiegelbewegung

$$2H\ddot{u} + (2\sin(\alpha)u + \cancel{\Delta z_0})g + \frac{1}{\rho} \left(\left(\frac{p_0 \gamma \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2}} + \frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0) \gamma \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} \right) u - \rho g \cancel{\Delta z_0} \right) = 0 \quad (5.73)$$

$$\ddot{u} + \frac{1}{2H} \underbrace{\left(2g \sin(\alpha) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{p_0 \gamma \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2}} + \frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0) \gamma \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} \right) \right)}_{\omega_{a, Fall 2}^2} u = 0$$

sowie für die Eigenfrequenz des schwingenden Flüssigkeitsfadens nach einigem Umformen

$$f_{Fall 2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g \sin(\alpha)}{2H} \left[1 + \frac{\gamma}{2\rho g} \left(\frac{p_0}{H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2}} + \frac{p_0 + \rho g \Delta z_0}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} \right) \right]} \quad (5.74)$$

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

Nachfolgend sind Eigenfrequenzkurven in Abhängigkeit von $H/\Delta z_0$ sowie $H_L/\Delta z_0$ dargestellt. Es ist ersichtlich, dass durch die Anordnung beidseitiger Luftfedern die Eigenfrequenzen gegenüber Fall 1 nochmals gesteigert werden können.

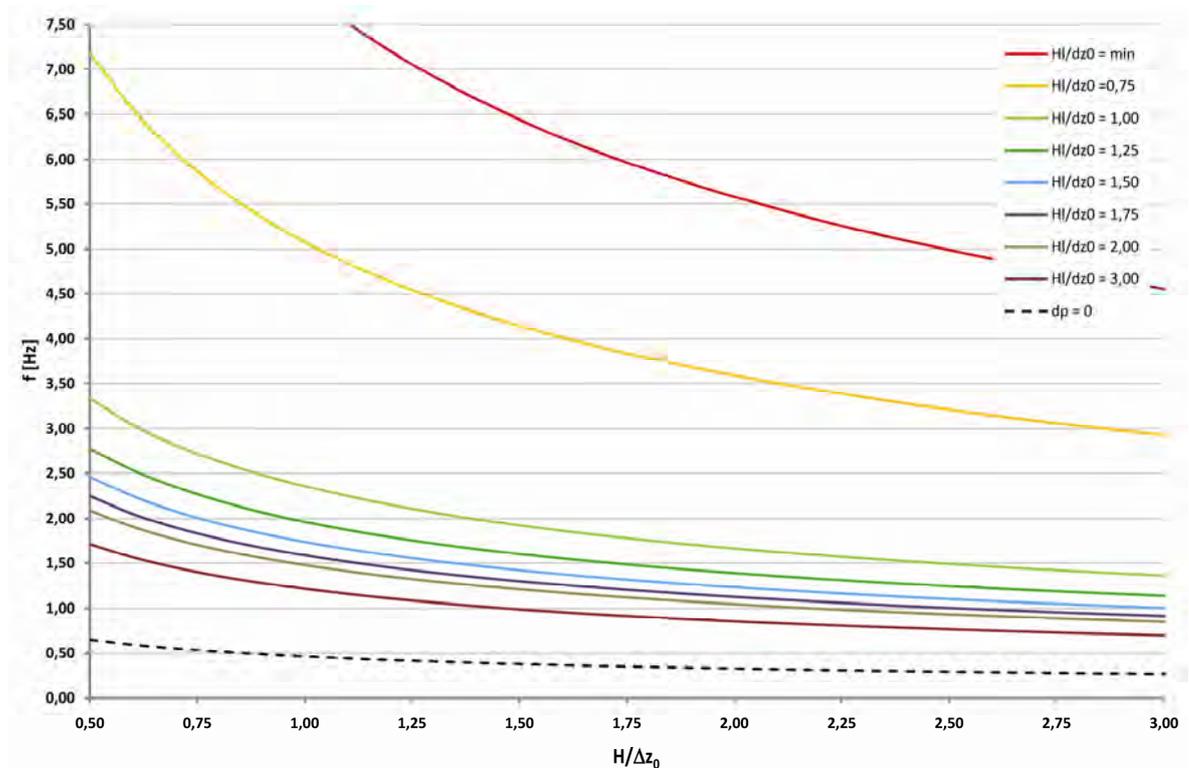


Abbildung 5.33: Verlauf der Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Parameter H und H_L (Fall 2)

5.1.2.4. Zweiseitig geschlossenes Rohr - beidseitige Luftfedern (Fall 3)

Setzt man den linearisierten Term für den Druckunterschied (5.44) in (5.65) ein, folgt für die Differenzialgleichung der Flüssigkeitsspiegelbewegung

$$\begin{aligned}
 & \left. 2H\ddot{u} + (2\sin(\alpha)u + \cancel{\Delta z_0})g + \frac{1}{\rho} \right\} \left[p_0 \gamma \frac{\left(\frac{H_L}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)}} \right)^\gamma}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)}} + \right. \\
 & \left. + \gamma \frac{\left(\frac{H_L}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)}} \right)^\gamma}{H_L + \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)}} + \rho g \Delta z_0 \right] u - \cancel{\rho g \Delta z_0} \left. \right\} u = 0 \\
 & \left. \ddot{u} + \frac{1}{2H} \left(2g \sin(\alpha) + \frac{1}{2\rho g \sin(\alpha)} \right) \right\} \left[p_0 \gamma \frac{\left(\frac{H_L}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)}} \right)^\gamma}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)}} + \right. \\
 & \left. + \gamma \frac{\left(\frac{H_L}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)}} \right)^\gamma}{H_L + \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)}} + \rho g \Delta z_0 \right] \left. \right\} u = 0 \tag{5.75}
 \end{aligned}$$

$\omega_{i, Fall 3}^2$

sowie für die Eigenfrequenz des schwingenden Flüssigkeitsfadens nach einigem Umformen

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

$$f_{Fall3} = \frac{1}{2\pi} \frac{2g \sin(\alpha)}{2H} \left[1 + \frac{1}{2\rho g \sin(\alpha)} \left(\frac{p_0 \gamma \left(\frac{H_L}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)}} \right)^\gamma}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)}} + \frac{p_0 \left(\frac{H_L}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)}} \right)^\gamma + \rho g \Delta z_0}{H_L + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)}} + \gamma \right) \right] \quad (5.76)$$

Nachfolgend sind Eigenfrequenzkurven in Abhängigkeit von $H/\Delta z_0$ sowie $H_L/\Delta z_0$ dargestellt. Es ist ersichtlich, dass durch die Anordnung beidseitiger Luftfedern die Eigenfrequenzen gegenüber Fall 2 nochmals gesteigert werden können.

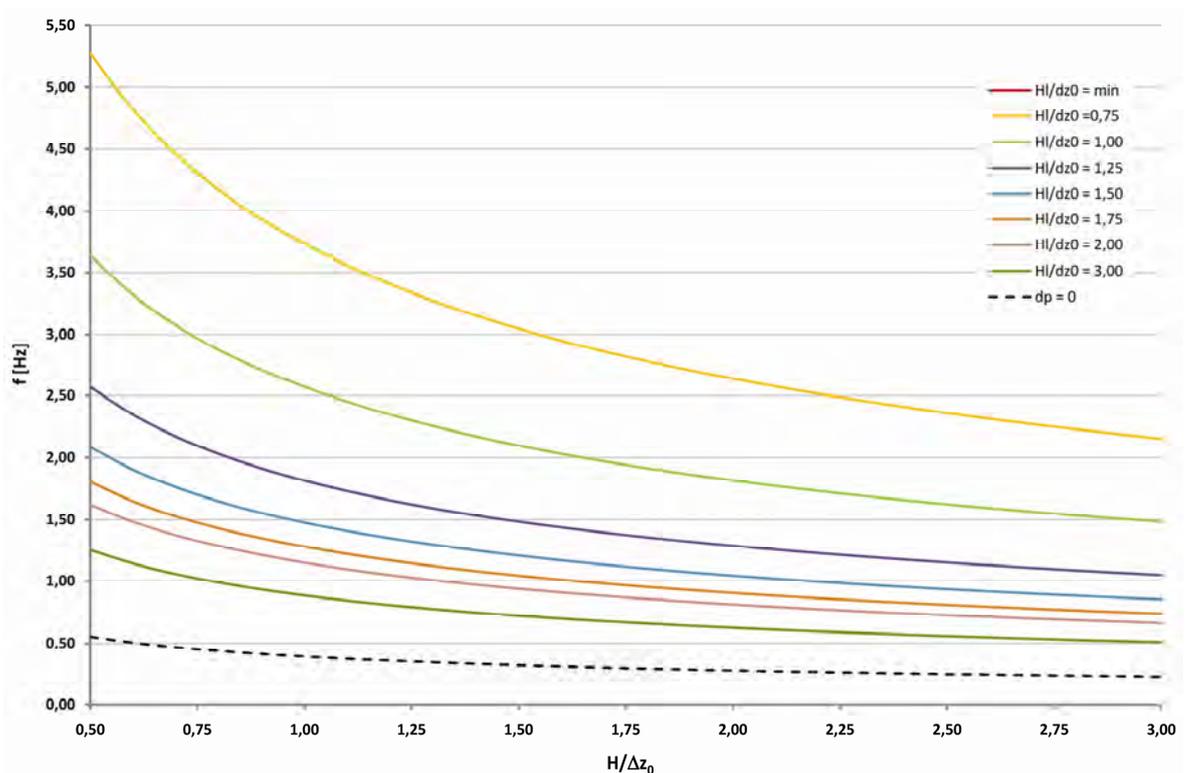


Abbildung 5.34: Verlauf der Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Parameter H und H_L (Fall 3)

Bei den gezeigten Frequenzkurven muss berücksichtigt werden, dass es sich bei der Parametereinstellung $(H_L/\Delta z_0)_{min}$ um einen Grenzwert handelt, der so praktisch nicht realisierbar ist.

5.1.2.5. Einseitig geschlossenes Rohr - einseitige Luftfeder (Fall 4)

Setzt man den linearisierten Term für den Druckunterschied (5.53) in (5.65) ein, folgt für die Differenzialgleichung der Flüssigkeitsspiegelbewegung

$$2H\ddot{u} + (2 \sin(\alpha)u + \cancel{\Delta z_0})g + \frac{1}{\rho} \left[\frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \gamma p_0^{-\frac{1}{\gamma}}}{L_{ges}} u + \cancel{\rho g \Delta z_0} \right] = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{1}{2H} \underbrace{\left(2g \sin(\alpha) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \gamma p_0^{-\frac{1}{\gamma}}}{L_{ges}} \right] \right)}_{\omega_a^2} u = 0 \tag{5.77}$$

sowie für die Eigenfrequenz des schwingenden Flüssigkeitsfadens nach einigem Umformen

$$f_{Fall\ 4} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g \sin(\alpha)}{2H} \left[1 + \frac{1}{2\rho g \sin(\alpha)} \left(\frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \gamma p_0^{-\frac{1}{\gamma}}}{L_{ges}} \right) \right]} \tag{5.78}$$

Nachfolgend sind Eigenfrequenzkurven in Abhängigkeit von $L_{ges}/\Delta z_0$ dargestellt. Es ist ersichtlich, dass je steifer die Luftfeder ist, das bedeutet je kleiner das Anfangsvolumen ist, desto höher wird die Frequenz.

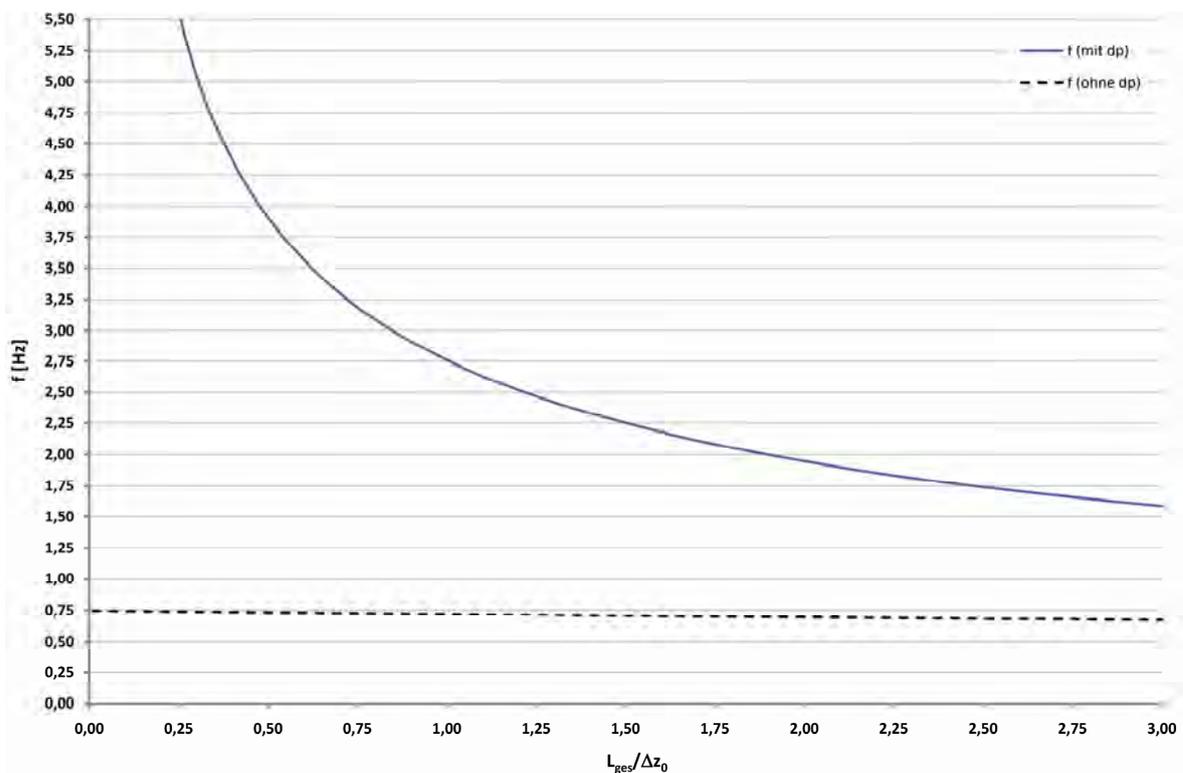


Abbildung 5.35: Verlauf der Eigenfrequenz in Abhängigkeit von L_{ges} (Fall 4)

5.1.2.6. Zweiseitig geschlossenes Rohr - beidseitige Luftfeder (Fall 5)

Setzt man den linearisierten Term für den Druckunterschied (5.53) in (5.65) ein, folgt für die Differenzialgleichung der Flüssigkeitsspiegelbewegung

$$\begin{aligned}
 & 2H\ddot{u} + (2\sin(\alpha)u + \cancel{\Delta z_0})g + \frac{1}{\rho} \left\{ p_0 \left[\left(\frac{L_{ges}}{H_L + \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)}} \right)^\gamma - 1 \right] + \right. \\
 & \left. p_0 \left[\frac{\left(\frac{L_{ges}}{H_L + \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)}} \right)^\gamma \gamma}{H_L + \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)}} + \frac{\gamma}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)}} \right] u \right\} = 0 \\
 & \underbrace{\ddot{u} + \frac{1}{2H} \left[2g\sin(\alpha) + \frac{1}{\rho} p_0 \gamma \left(\frac{L_{ges}^\gamma}{\left(H_L + \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)} \right)^{\gamma+1}} + \frac{1}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)}} \right) \right]}_{\omega_{a, Fall 5}^2} u = 0
 \end{aligned} \tag{5.79}$$

sowie für die Eigenfrequenz des schwingenden Flüssigkeitsfadens nach einigem Umformen

$$f_{Fall 5} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g\sin(\alpha)}{2H} \left[1 + \frac{1}{2\rho g\sin(\alpha)} p_0 \gamma \left(\frac{L_{ges}^\gamma}{\left(H_L + \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)} \right)^{\gamma+1}} + \frac{1}{H_L - \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)}} \right) \right]} \tag{5.80}$$

Nachfolgend sind Eigenfrequenzkurven in Abhängigkeit von $L_{ges}/\Delta z_0$ dargestellt. Es ist ersichtlich, dass die Frequenzen gegenüber Fall 4 zunehmen, was durch die zusätzliche Luftfeder auch zu erwarten war. Zu Abbildung 5.36 soll noch angemerkt werden, dass der Bereich unter Verhältnissen von $L_{ges}/\Delta z_0 = 1,00$ unendliche Zahlenwerte liefert. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass dieser Bereich außerhalb des zulässigen Verhältnisses von $L_{ges}/\Delta z_0 < (L_{ges}/\Delta z_0)_{min}$ liegt und somit praktisch keine Relevanz besitzt.

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

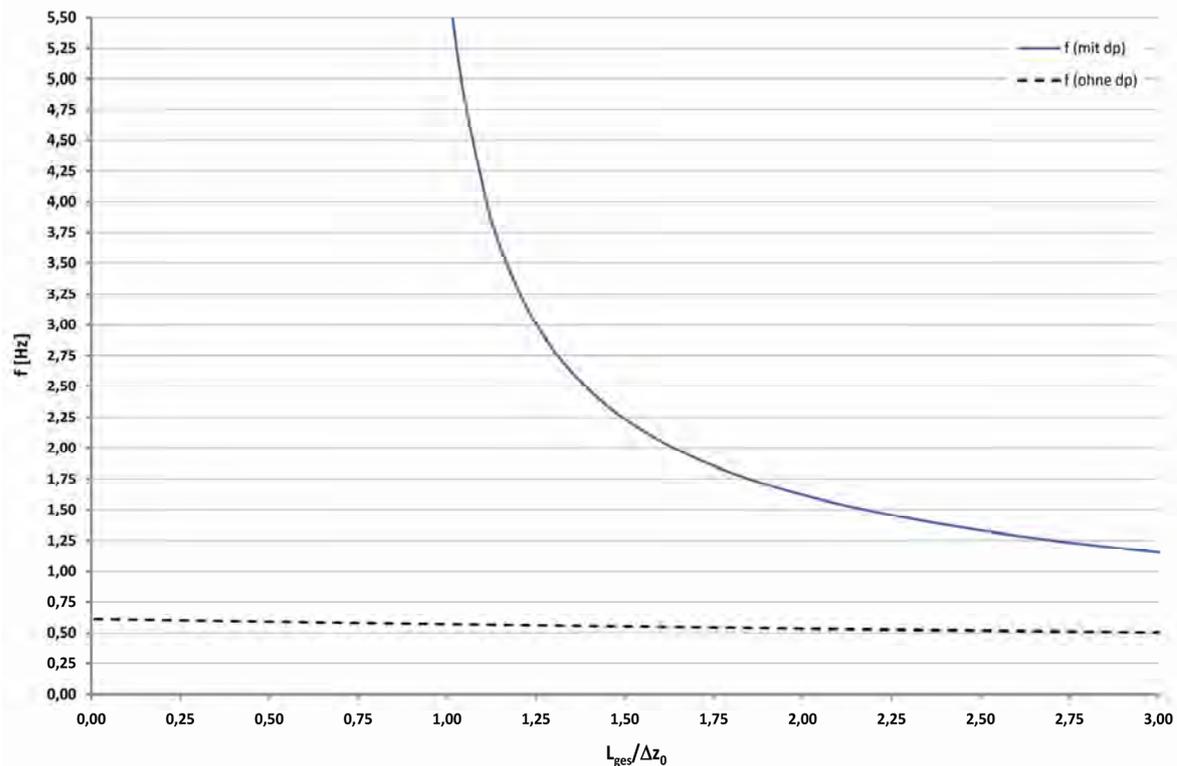


Abbildung 5.36: Verlauf der Eigenfrequenz in Abhängigkeit von L_{ges} (Fall 5)

5.1.3. Berücksichtigung von Reibungsverlusten

Durch die in Flüssigkeiten vorhandene Viskosität, das heißt durch den Widerstand, den Flüssigkeiten gegen eine Verschiebung der Flüssigkeitsteilchen gegeneinander bei Bewegung entgegensetzen, treten innere Reibungskräfte auf, die Energie dissipieren. Diese wird als hydraulische Verlustenergie bezeichnet. Dabei ist zwischen laminaren und turbulenten Strömungen zu unterscheiden. Erstere sind durch eine Bewegung der Flüssigkeitsteilchen auf voneinander getrennten Bahnen, die sich nicht durchdringen, zweitere durch regellose Bahnen, die sich gegenseitig durchdringen, gekennzeichnet.

Bei den vorliegenden Flüssigkeitsschwingungstilgern wechselt die Strömungsrichtung mit ca. 0,5 – 7,0 Hz (siehe Kapitel 5.1.1). Durch diese rasche Änderung des Strömungszustandes kann für die Tilger eine vorwiegend turbulente Strömung vorausgesetzt werden. Diese ist durch eine quadratische Abhängigkeit der Reibungsverluste von der Fließgeschwindigkeit bzw. dem Durchfluss gekennzeichnet – quadratisches Widerstandsgesetz (Bollrich, 2000). Dabei setzt sich der Gesamtverlust aus den Reibungsverlusten $\Delta p_{v,R}$ und den örtlichen Verlusten $\Delta p_{v,\delta}$ zusammen. Ausgedrückt als Druckverlust lautet der Gesamtverlust

$$\Delta p_v = \Delta p_{v,R} + \Delta p_{v,\delta} = \lambda \left(\frac{k}{d}, \text{Re} \right) \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2} + \sum \zeta \frac{\rho v^2}{2} = \left(\lambda \left(\frac{k}{d}, \text{Re} \right) \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{\rho v^2}{2} \quad (5.81)$$

Darin bezeichnet λ den Widerstandsbeiwert der Rohrreibung, l die Stromfadenlänge, d den Rohrdurchmesser und ζ den örtlichen Verlustbeiwert. Dabei ist λ abhängig von der absoluten hydraulischen Rauheit k und der Reynoldszahl Re , die wie folgt definiert ist

$$Re = \frac{d v}{\nu} \quad (5.82)$$

ν beschreibt die kinematische Viskosität, die sich aus der dynamischen Viskosität η mit $\nu = \eta / \rho$ ermitteln lässt (siehe auch Kapitel 4.1). Die Reynolds Zahl gibt das Verhältnis der bei der Strömung wirkenden Trägheitskräfte zu den Zähigkeitskräften an und liefert einen Richtwert, ob laminare oder turbulente Strömung vorliegt. Dieser liegt für Rohrströmungen bei

$$Re_{crit(Rohr)} = 2320 \quad (5.83)$$

Die örtlichen Verlustbeiwerte entziehen sich zu einem Großteil einer theoretischen Erfassung und werden deshalb durch systematische hydraulische Versuche, also empirisch, ermittelt.

Bei turbulenter Strömung sind drei Bereiche zu unterscheiden (siehe Abbildung 5.37)

- hydraulisch glattes Verhalten
- Übergangsbereich zwischen hydraulisch glattem und hydraulisch rauem Verhalten
- hydraulisch rauem Verhalten

Maßgebenden Einfluss auf das sich einstellende hydraulische Verhalten hat das Verhältnis der Dicke der laminaren Grenzschicht zur absoluten Rauheit (Bollrich, 2000).

Beschreibt man das hydraulische Verhalten mit den Formeln nach Colebrook und White für den Übergangsbereich, werden die beiden anderen Bereiche durch diese ebenfalls berücksichtigt. Diese implizite Formel für den Rohrreibungskoeffizienten lautet (Bollrich, 2000)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2,0 \log \left(\frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{k/d}{3,71} \right) \quad (5.84)$$

Eine Ermittlung des Rohrreibungskoeffizienten kann deshalb nur auf numerischem Wege erfolgen. Der Verlauf von λ in Abhängigkeit der relativen Rauigkeit sowie der Reynoldszahl kann nachfolgender Abbildung entnommen werden.

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

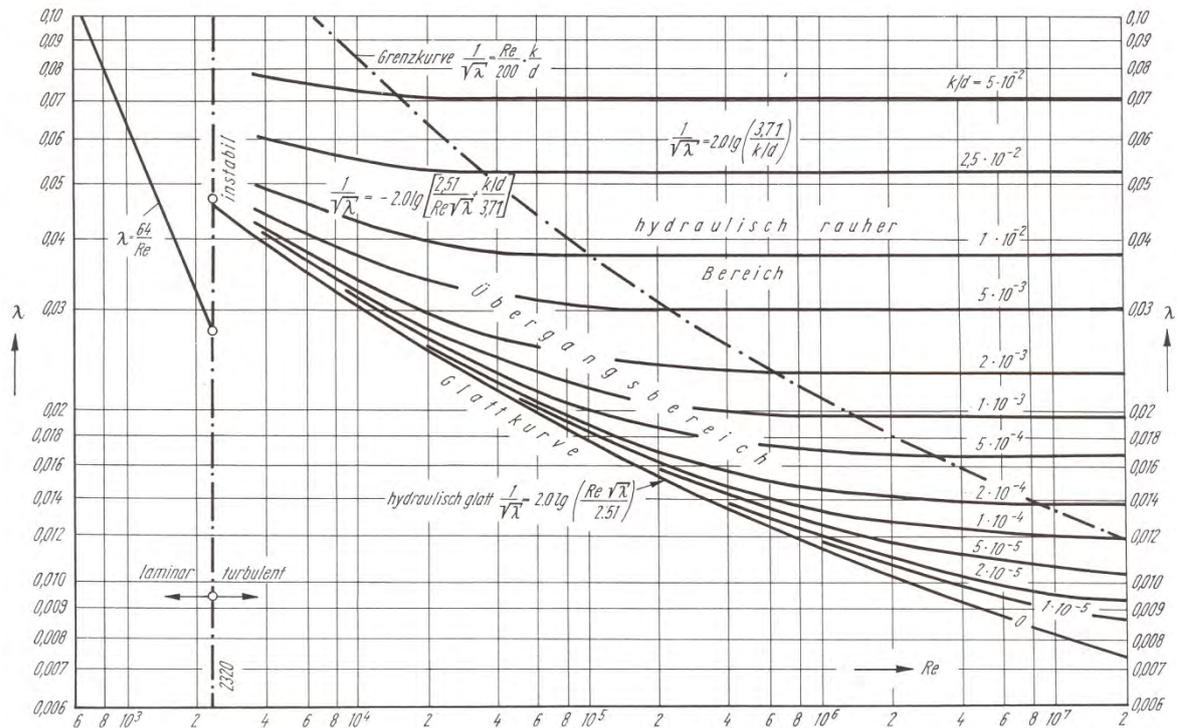


Abbildung 5.37: Rohrreibungskoeffizient λ in Abhängigkeit von Re und k/d (Bollrich, 2000)

5.1.3.1. Reibungsverluste des Flüssigkeitsschwingungstilgers

Gleichung (5.81) wurde für Rohrströmungen, bei denen sich die Strömungsrichtung nicht ändert, hergeleitet, soll jedoch auch für den vorliegenden Fall herangezogen werden. Für sich stetig ändernde Strömungsrichtungen würde dieser Reibungsterm für die eine Schwingungsrichtung eine positive, für die andere Schwingungsrichtung jedoch eine negative Dämpfung, also eine Anfachung bedeuten. Da dies nicht dem realen Verhalten der Flüssigkeitsreibung entspricht, ist Gleichung (5.81) in folgender Weise zu modifizieren

$$\Delta p_v = \left(\lambda \left(\frac{k}{d}, Re \right) \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{\rho v^2 \text{sign}(v)}{2} = \left(\lambda \left(\frac{k}{d}, Re \right) \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{\rho v |v|}{2} \quad (5.85)$$

Damit wird das Vorzeichen der Geschwindigkeit und somit auch die Strömungsrichtung berücksichtigt und liefert für beide Schwingungsrichtungen einen energiedissipierenden Term. Des Weiteren soll für die Summe der Verluste der Verlustkoeffizient δ_v eingeführt werden

$$\delta_v = \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta = \lambda \frac{2H}{d} + \sum \zeta \quad (5.86)$$

Damit folgt für den nichtlinearen Term der durch Reibung verursachten Druckverluste

$$\Delta p_v = \delta_v \frac{\rho v |v|}{2} \quad (5.87)$$

Bei diesen Überlegungen darf jedoch nicht vergessen werden, dass δ_v durch die darin enthaltene Reynolds Zahl von v abhängig ist.

5.1.3.2. Äquivalente viskose Dämpfung

Zur Anwendung der Optimierungskriterien nach Den Hartog muss neben der Abstimmung der Eigenfrequenz des Tilgers auch die als viskos vorausgesetzte Dämpfung optimal eingestellt werden. Um dies zu ermöglichen, wird der nichtlineare Dämpfungsterm (hydraulischer Druckverlust) in einen äquivalenten viskosen Dämpfungsterm umgerechnet. Dies erfolgt über den Vergleich der dissipierten Energie, also über den Vergleich der durch die Dämpfungskräfte innerhalb einer Schwingungsperiode geleisteten Arbeit. Dabei wird eine harmonische freie Schwingung der Form

$$\begin{aligned} u &= u_0 \sin(\omega t) \\ \dot{u} &= \omega u_0 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (5.88)$$

vorausgesetzt. Als Erstes soll die Arbeit der viskosen Dämpfungskraft hergeleitet werden. Diese lautet mit

$$f_{D,visk} = c\dot{u} \quad (5.89)$$

$$W_{D,visk} = \int_{u_i}^{u_e} c\dot{u} du = \int_{t_i}^{t_e} c\dot{u} \frac{du}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_e} c\dot{u}^2 dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} c(\omega u_0 \cos(\omega t))^2 dt = u_0^2 \pi \omega c \quad (5.90)$$

Geht man von der nichtlinearen Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsfadens bei Vernachlässigung des nichtlinearen Steifigkeitsterms $\sin(\alpha)\ddot{w}$ sowie bei Vernachlässigung der Tangentenneigung φ (siehe Gl. (5.18)) aus

$$\ddot{u}(t) + \frac{1}{H} \sin(\alpha) g u(t) + \frac{\Delta p}{2H\rho} + \frac{\Delta p_v}{2H\rho} = -\frac{\Delta z_0}{2H} (\ddot{w} + g) \quad (5.91)$$

und setzt die linearisierte Druckdifferenz z. B. für den Tilgertyp Fall 1 (Gl. (5.30)) sowie den nichtlinearen Turbulenzterm aus Gl. (5.87) ein, so folgt

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) + \frac{1}{2H\rho} \left[2\rho \sin(\alpha) g + \frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0) \gamma \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} \right] u(t) + \frac{1}{2H\rho} \delta_v \frac{\rho \dot{u}(t) |\dot{u}(t)|}{2} &= \\ = -\frac{\Delta z_0}{2H} \ddot{w} & \end{aligned} \quad (5.92)$$

Multipliziert man alle Glieder mit $m_F = 2H\rho A$ folgt

$$\begin{aligned} \underbrace{2H\rho A}_{m_F} \ddot{u}(t) + \underbrace{\left[2A\rho g \sin(\alpha) + \frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0) \gamma A \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} \right]}_{k_a} u(t) + \delta_v \frac{\rho \dot{u}(t) |\dot{u}(t)|}{2} A &= \\ = -\rho A \Delta z_0 \ddot{w} & \end{aligned} \quad (5.93)$$

Die Arbeit der turbulenten Dämpfungskraft

$$f_{D,turb} = \delta_v \frac{\rho \dot{u} |\dot{u}|}{2} A \quad (5.94)$$

lautet

$$\begin{aligned} W_{D,turb} &= \int_{u_i}^{u_e} \delta_v \frac{\rho}{2} A \dot{u} |\dot{u}| du = \int_{t_i}^{t_e} \delta_v \frac{\rho}{2} A \dot{u} |\dot{u}| \frac{du}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_e} \delta_v \frac{\rho}{2} A \dot{u}^2 |\dot{u}| dt = \\ &= 4 \delta_v \frac{\rho}{2} A \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} (\omega u_0 \cos(\omega t))^2 |\omega u_0 \cos(\omega t)| dt = \frac{8}{3} \delta_v \frac{\rho}{2} A \omega^2 u_0^3 \end{aligned} \quad (5.95)$$

Setzt man beide Arbeitsterme aus Gl. (5.90) und Gl. (5.95) gleich, erhält man für den äquivalenten viskosen Dämpfungskoeffizienten

$$\begin{aligned} u_0^2 \pi \omega c &= \frac{8}{3} \delta_v \frac{\rho}{2} A \omega^2 u_0^3 \\ c_{eq} &= \frac{4}{3\pi} \delta_v \rho A \omega u_0 \end{aligned} \quad (5.96)$$

Einsetzen des äquivalenten Dämpfungsterms sowie nach Division durch m_F liefert

$$\ddot{u}(t) + \frac{c_{eq}}{2H\rho A} \dot{u}(t) + \omega_a^2 u(t) = -\frac{\Delta z_0}{2H} \ddot{w} \quad (5.97)$$

mit

$$\omega_a^2 = \omega_{a, Fall 1}^2 = \frac{k_a}{m_F} = \frac{1}{2H} \left[2g \sin(\alpha) + \frac{1}{\rho} \frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0) \gamma}{H_L + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)}} \right] \quad (5.98)$$

Umgerechnet auf ein äquivalentes viskoses Dämpfungsmaß folgt

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{2m_F \omega_a} \quad (5.99)$$

$$\zeta_{eq} = \zeta_A = \frac{1}{4H\rho A \omega_a} \frac{4}{3\pi} \delta_v \rho A \omega u_0 = \frac{1}{3H\pi} \frac{\omega}{\omega_a} \delta_v u_0 \quad (5.100)$$

mit u_0 als Amplitude von $u(t)$.

Es ist ersichtlich, dass der Dämpfungsterm amplitudenabhängig ist und dadurch die Flüssigkeitsspiegelbewegung durch eine nichtlineare Differenzialgleichung beschrieben wird.

Bei Verwendung des linearisierten Terms kann, um aufwendige Iterationen für diesen zu vermeiden, ein abschnittsweise konstanter Dämpfungswert angenommen werden. Dieser gilt jedoch dann nur für einen bestimmten und begrenzten Bereich der Schwingungsamplituden und Frequenzverhältnisse.

5.1.4. Stabilität der Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsschwingungstilgers

Die Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsfadens lautet nach Gl. (5.18) bei Vernachlässigung der Tangentenneigung

$$\ddot{u}(t) + \frac{1}{H} [\sin(\alpha)(\ddot{w} + g)]u(t) + \frac{\Delta p}{2H\rho} + \frac{\Delta p_v}{2H\rho} = -\frac{\Delta z_0}{2H}(\ddot{w} + g) \quad (5.101)$$

Setzt man darin beispielhaft die Druckdifferenz für den Fall 1 ein (Gl. (5.30))

$$\Delta p = \frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0)\gamma \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} u - \rho g \Delta z_0 \quad (5.102)$$

und vernachlässigt weiters die Reibungsverluste, was für die Stabilitätsuntersuchungen die ungünstigsten Stabilitätsgrenzen liefert (siehe Kapitel 2.2.10.3), folgt

$$\ddot{u}(t) + \left\{ \frac{1}{H} \sin(\alpha) g + \frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0)\gamma \sin(\alpha)}{2H\rho \left(H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} \right)} + \frac{1}{H} \sin(\alpha) \ddot{w} \right\} u(t) = -\frac{\Delta z_0}{2H} \ddot{w} \quad (5.103)$$

Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} w &= w_0 \cos(\omega t) \\ \dot{w} &= -w_0 \omega \sin(\omega t) \\ \ddot{w} &= -w_0 \omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (5.104)$$

für die Tragwerksbewegung sowie unter Einführung von

$$\begin{aligned} \tau &= \omega t \\ \frac{d}{dt} &= \frac{d}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau} \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \end{aligned} \quad (5.105)$$

folgt

$$\begin{aligned} \ddot{u}(\tau) + \left\{ \frac{1}{\omega^2 H} \sin(\alpha) g + \frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0)\gamma \sin(\alpha)}{2H\rho \omega^2 \left(H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} \right)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{H} \sin(\alpha) w_0 \cos(\tau) \right\} u(\tau) = \frac{\Delta z_0}{2H} w_0 \cos(\tau) \end{aligned} \quad (5.106)$$

Führt man die in Kapitel 2.2.10.1 eingeführten Parameter in Gl. (5.106) ein, folgt

$$\ddot{u}(\tau) + \{ \bar{\delta} + \bar{\varepsilon} \cos(\tau) \} u(\tau) = 0 \quad (5.107)$$

mit den konstanten Parametern

$$\bar{\delta} = \frac{\sin(\alpha)g}{H\omega^2} + \frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0)\gamma \sin(\alpha)}{2H\rho\omega^2 \left(H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} \right)} \quad (5.108)$$

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{\sin(\alpha)}{H} w_0$$

Da eine Krafterregung, wie z. B. die rechte Seite von Gl. (5.106) eine darstellt, keinen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten parametererregter Schwingungen hat (Klotter, 1980), kann dieser Term bei der Stabilitätsuntersuchung der Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsschwingungstilgers unberücksichtigt bleiben. Dieser Sachverhalt konnte durch numerische Studien bestätigt werden.

Bei Gl. (5.107) handelt es sich um eine modifizierte Mathieusche Differenzialgleichung, die ursprüngliche Mathieusche Differenzialgleichung wurde bereits in Kapitel 2.2.10.1 auf ihre Stabilität hin untersucht. Zur Bestimmung der Stabilitätsgrenzen von Gl. (5.107) werden wiederum die numerische Methode aus Kapitel 2.2.10.3 sowie die Näherungsmethode aus Kapitel 2.2.10.4 herangezogen, zuerst werden aber die möglichen Wertebereiche der Parameter aus Gl. (5.108) mittels Minima-Maximaüberlegungen abgeschätzt. Folgende Zahlenwerte können die Variablen in Gl. (5.108) annehmen (siehe auch Kapitel 6)

$45^\circ < \alpha < 90^\circ$	Neigung der Rohrschenkel des Tilgers
$g = 9,81 \text{ m/s}^2$	Erdbeschleunigung
$1,0 \text{ m} < H < 5,0 \text{ m}$	Halbe Stromfadenlänge
$2\pi \cdot 0,5 < \omega < 2\pi \cdot 7,0$	Eigenkreisfrequenz der schwingenden Flüssigkeit
$p_0 = 100.000 \text{ N/m}^2$	Atmosphärendruck
$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$	Dichte des Wassers
$\gamma = 1,405$	Adiabatexponent
$0 < \Delta z_0 < 2H \sin(\alpha)$	Flüssigkeitsspiegelauslenkung
$H_L \sim \Delta z_0$	Ausgangshöhe des Luftvolumens
w_0	Amplitude der Brückenbewegung

Dabei wurden für α , H , ω und H_L die baupraktisch interessanten und möglichen Grenzwerte angesetzt. Die Neigung α der Schenkel des Tilgers ergibt sich durch Anpassung an die Neigung der Fachwerkdiagonalen des Brückentragwerks, für die bestmögliche dynamische Wirkung des Tilgers sind 90° vorzusehen. Die halbe Ausgangslänge des Stromfadens H sollte möglichst groß gewählt werden ($> 1,0 \text{ m}$), da sich daraus auch ein möglichst großes Δz_0 einstellen lässt. Durch die übliche Höhe von Fachwerkbrücken wird bei dieser Abschätzung H mit $5,0 \text{ m}$ begrenzt. Der mögliche Frequenzbereich des Tilgers beträgt nach Kapitel 5.1.2 $> 0,5$ und $< 7,0 \text{ Hz}$. Die Ausgangshöhe der Flüssigkeitsspiegeldifferenz Δz_0 kann geometrisch maximal $2H \cdot \sin(\alpha)$ betragen. H_L wird für die vorliegende Abschätzung in der Größenordnung von Δz_0

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

angenommen. Mit diesen Annahmen lauten die abgeschätzten Grenzwerte der Parameter

$$\bar{\delta}_{\max} = \frac{\sin(90) \cdot 9,81}{1,0 \cdot 3,14^2} + \frac{(100000 + 1000 \cdot 9,81 \cdot 2,0) \cdot 1,405 \cdot \sin(90)}{2 \cdot 1,0 \cdot 1000 \cdot 3,14^2 \left(2,0 \cdot \sin(90) + \frac{2,0}{2} \right)} = 3,83 \quad (5.109)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\max} = -\frac{\sin(90)}{1,0} 0,10 = -0,10$$

und

$$\bar{\delta}_{\min} = \frac{\sin(45) \cdot 9,81}{5,0 \cdot 43,98^2} + \frac{(100000 + 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,1) \cdot 1,405 \cdot \sin(45)}{2 \cdot 5,0 \cdot 1000 \cdot 43,98^2 \left(0,1 \cdot \sin(45) + \frac{0,1}{2} \right)} = 0,044 \quad (5.110)$$

$$\bar{\varepsilon}_{\min} = -\frac{\sin(45)}{5,0} 0,01 = -0,001$$

Dabei wurde für die Tragwerksbewegung eine maximale Auslenkung w_0 von 0,10 m angenommen, was mit der Durchbiegungsbegrenzung für Eisenbahnbrücken von $l/600$ eine Stützweite von 60,0 m ergibt. Für die Stabilitätsuntersuchung sollte dies auf der sicheren Seite liegen. Die numerischen Stabilitätsuntersuchungen von Gl. (5.107) ergaben nachfolgende Stabilitätskarte (das Vorzeichen von $\bar{\varepsilon}$ hat dabei keinen Einfluss, da die Stabilitätskarte symmetrisch zur Abszisse ist).

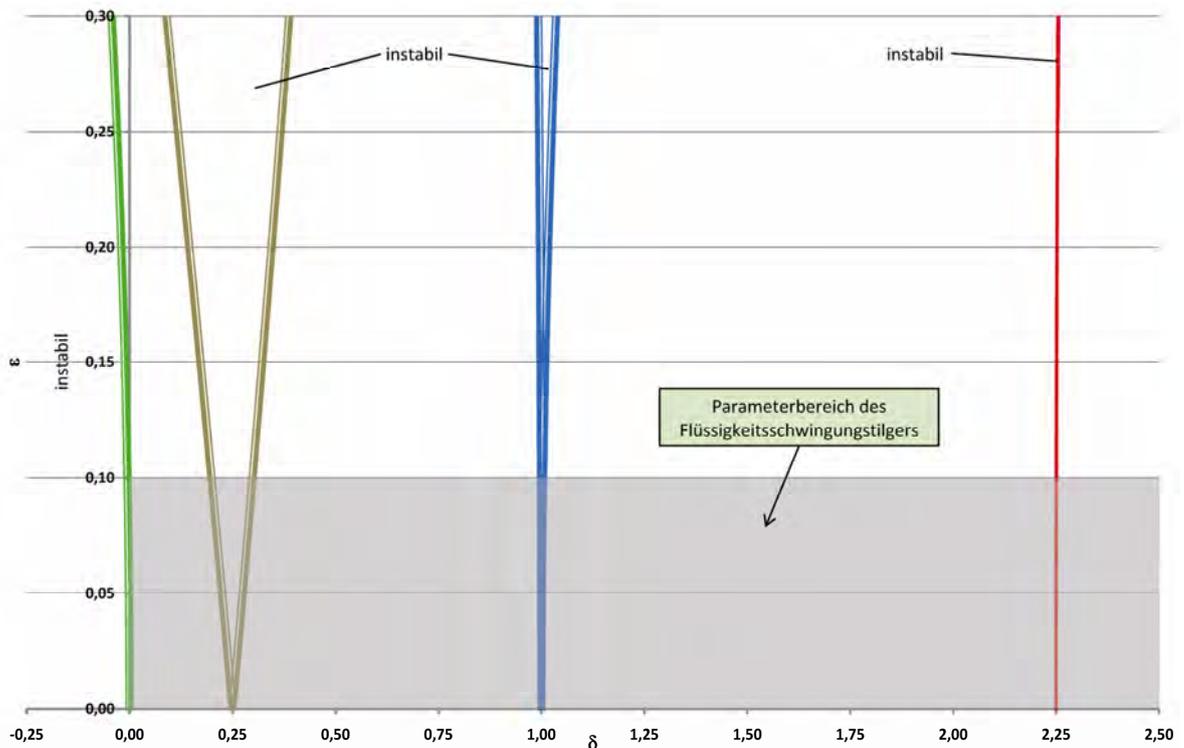


Abbildung 5.38: Stabilitätskarte für die Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsschwingungstilgers ohne Dämpfung

Der Stabilitätskarte kann entnommen werden, dass der ungedämpfte Flüssigkeitsschwingungstilger durchaus Parameterpaare aufweisen kann, die in instabilen Bereichen der Stabilitätskarte zu liegen kommen, Parameterresonanz kann somit auftreten. Nachfolgend soll jedoch unter Berücksichtigung von viskoser Dämpfung eine Bedingung abgeleitet werden, bei deren Einhaltung Parameterresonanz ausgeschlossen werden kann. Wie in Kapitel 2.2.10.3 hergeleitet wurde, hat viskose Dämpfung auf die höherwertigen Stabilitätsgrenzen, also jene mit größerem δ , einen viel größeren Einfluss als auf jene mit kleinerem δ . Aus diesem Grund ist es ausreichend, die Stabilitätsgrenze beginnend bei $\delta = 1/4$ unter Berücksichtigung von viskoser Dämpfung zu untersuchen. Dies erfolgt wiederum mit der Methode der „strained parameters“ (siehe Kapitel 2.2.10.4), um einen analytischen Ausdruck für die Stabilitätsgrenze zu erhalten.

Wir suchen 2π - bzw. 4π - periodische Lösungen von

$$\ddot{u}(\tau) + c\dot{u}(\tau) + (\bar{\delta} + \bar{\varepsilon} \cos(\tau))u(\tau) = 0 \quad (5.111)$$

und setzen ε als klein voraus. Die viskose Dämpfung wird ebenfalls als klein vorausgesetzt und kann deshalb durch

$$c = \bar{\varepsilon} \hat{c} \quad (5.112)$$

ausgedrückt werden. Für die weiteren Parameter folgt (siehe Kapitel 2.2.10.4)

$$\begin{aligned} u(\tau, \bar{\varepsilon}) &= u_0(\tau) + \bar{\varepsilon} u_1(\tau) + \bar{\varepsilon}^2 u_2(\tau) + \dots \\ \delta(\bar{\varepsilon}) &= \delta_0 + \bar{\varepsilon} \delta_1 + \bar{\varepsilon}^2 \delta_2 + \dots \end{aligned} \quad (5.113)$$

Setzt man diese Ausdrücke in Gl. (5.111) ein, folgt

$$\begin{aligned} &\ddot{u}_0(\tau) + \bar{\varepsilon} \ddot{u}_1(\tau) + \bar{\varepsilon}^2 \ddot{u}_2(\tau) + \dots + \\ &+ \bar{\varepsilon} \hat{c} (\dot{u}_0(\tau) + \bar{\varepsilon} \dot{u}_1(\tau) + \bar{\varepsilon}^2 \dot{u}_2(\tau) + \dots) + \\ &+ (\delta_0 + \bar{\varepsilon} \delta_1 + \bar{\varepsilon}^2 \delta_2 + \dots + \bar{\varepsilon} \cos(\tau)) \cdot \\ &\cdot (u_0(\tau) + \bar{\varepsilon} u_1(\tau) + \bar{\varepsilon}^2 u_2(\tau) + \dots) = 0 \end{aligned} \quad (5.114)$$

Ausmultiplizieren liefert (die Bezeichnung $u(\tau)$ wird in den folgenden Herleitungen der Übersicht wegen nur mehr als u angeführt)

$$\begin{aligned} &\ddot{u}_0 + \bar{\varepsilon} \ddot{u}_1 + \bar{\varepsilon}^2 \ddot{u}_2 + \dots + \\ &+ \bar{\varepsilon} \hat{c} \dot{u}_0 + \bar{\varepsilon}^2 \hat{c} \dot{u}_1 + \bar{\varepsilon}^3 \hat{c} \dot{u}_2 + \dots + \\ &+ \delta_0 u_0 + \bar{\varepsilon} \delta_0 u_1 + \bar{\varepsilon}^2 \delta_0 u_2 + \dots + \\ &+ \bar{\varepsilon} \delta_1 u_0 + \bar{\varepsilon}^2 \delta_1 u_1 + \bar{\varepsilon}^3 \delta_1 u_2 + \dots + \\ &+ \bar{\varepsilon}^2 \delta_2 u_0 + \bar{\varepsilon}^3 \delta_2 u_1 + \bar{\varepsilon}^4 \delta_2 u_2 + \dots + \\ &+ \bar{\varepsilon} u_0 \cos(\tau) + \bar{\varepsilon}^2 u_1 \cos(\tau) + \bar{\varepsilon}^3 u_2 \cos(\tau) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (5.115)$$

Führt man nun einen Koeffizientenvergleich für $\bar{\varepsilon}$ durch, folgt

$$\ddot{u}_0 + \delta_0 u_0 = 0 \quad (5.116)$$

$$\ddot{u}_1 + \hat{c} \dot{u}_0 + \delta_0 u_1 + \delta_1 u_0 + u_0 \cos(\tau) = 0 \quad (5.117)$$

$$\ddot{u}_2 + \hat{c}\dot{u}_1 + \delta_0 u_2 + \delta_1 u_1 + \delta_2 u_0 + u_1 \cos(\tau) = 0 \quad (5.118)$$

Die periodischen Lösungen von Gl. (2.203) lauten mit Periode 2π

$$u_0 = a \cos((2n-1)\tau) + b \sin((2n-1)\tau) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.119)$$

und mit Periode 4π

$$u_0 = a \cos\left(\frac{1}{2}(2n-1)\tau\right) + b \sin\left(\frac{1}{2}(2n-1)\tau\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.120)$$

Untersucht wird, wie bereits erläutert nur der Fall $\delta_0 = 1/4$. In den weiteren Herleitungen wird von den Winkelidentitäten aus Gl. (2.9) bis (2.11) Gebrauch gemacht.

$\delta_0 = 1/4, n = 1, 4\pi$ -periodisch

Durch Probieren erhält man die Lösung für diesen Fall zu

$$\begin{aligned} u_0 &= a \cos\left(\frac{1}{2}\tau\right) + b \sin\left(\frac{1}{2}\tau\right) \\ \dot{u}_0 &= -\frac{1}{2}a \sin\left(\frac{1}{2}\tau\right) + \frac{1}{2}b \cos\left(\frac{1}{2}\tau\right) \end{aligned} \quad (5.121)$$

Damit folgt aus Gl. (5.117)

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + \frac{1}{4}u_1 &= -\hat{c}\left(-\frac{1}{2}a \sin\left(\frac{1}{2}\tau\right) + \frac{1}{2}b \cos\left(\frac{1}{2}\tau\right)\right) - \\ &\quad -\delta_1\left(a \cos\left(\frac{1}{2}\tau\right) + b \sin\left(\frac{1}{2}\tau\right)\right) - \left(a \cos\left(\frac{1}{2}\tau\right) + b \sin\left(\frac{1}{2}\tau\right)\right)\cos(\tau) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\hat{c}a - \delta_1 b + \frac{1}{2}b\right)\sin\left(\frac{1}{2}\tau\right) + \left(-\frac{1}{2}\hat{c}b - \delta_1 a - \frac{1}{2}a\right)\cos\left(\frac{1}{2}\tau\right) - \\ &\quad -\frac{1}{2}a \cos\left(\frac{3}{2}\tau\right) - \frac{1}{2}b \sin\left(\frac{3}{2}\tau\right) \end{aligned} \quad (5.122)$$

Für eine begrenzte, periodische Lösung muss die Determinante der Koeffizientenmatrix

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\hat{c} & -\left(\delta_1 - \frac{1}{2}\right) \\ -\left(\delta_1 + \frac{1}{2}\right) & -\frac{1}{2}\hat{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.123)$$

verschwinden. Dies liefert

$$-\frac{1}{4}\hat{c}^2 - \delta_1^2 + \frac{1}{4} = 0 \quad (5.124)$$

bzw.

$$\delta_1 = \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \hat{c}^2} \quad (5.125)$$

sein. Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_1 + u_1 &= -\frac{1}{2}a \cos\left(\frac{3}{2}\tau\right) - \frac{1}{2}b \sin\left(\frac{3}{2}\tau\right) \\
 u_1 &= \frac{1}{4}a \cos\left(\frac{3}{2}\tau\right) + \frac{1}{4}b \sin\left(\frac{3}{2}\tau\right) \\
 \dot{u}_1 &= -\frac{3}{8}a \sin\left(\frac{3}{2}\tau\right) + \frac{3}{8}b \cos\left(\frac{3}{2}\tau\right)
 \end{aligned} \tag{5.126}$$

Einsetzen von Gl. (5.125) und (5.126) in (5.118) liefert

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_2 + \frac{1}{4}u_2 &= -\hat{c} \left(-\frac{3}{8}a \sin\left(\frac{3}{2}\tau\right) + \frac{3}{8}b \cos\left(\frac{3}{2}\tau\right) \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{2}\sqrt{1-\hat{c}^2} \left(\frac{1}{4}a \cos\left(\frac{3}{2}\tau\right) + \frac{1}{4}b \sin\left(\frac{3}{2}\tau\right) \right) - \\
 &\quad - \delta_2 \left(a \cos\left(\frac{1}{2}\tau\right) + b \sin\left(\frac{1}{2}\tau\right) \right) - \\
 &\quad - \left(\frac{1}{4}a \cos\left(\frac{3}{2}\tau\right) + \frac{1}{4}b \sin\left(\frac{3}{2}\tau\right) \right) \cos(\tau) = \\
 &= -\frac{1}{8}a \cos\left(\frac{5}{2}\tau\right) - \frac{1}{8}b \sin\left(\frac{5}{2}\tau\right) - \left(\frac{3}{8}\hat{c}b + \frac{1}{8}\sqrt{1-\hat{c}^2}a \right) \cos\left(\frac{3}{2}\tau\right) - \\
 &\quad - \left(\frac{3}{8}\hat{c}a + \frac{1}{8}\sqrt{1-\hat{c}^2}b \right) \sin\left(\frac{3}{2}\tau\right) - a \left(\delta_2 + \frac{1}{8} \right) \cos\left(\frac{1}{2}\tau\right) - \\
 &\quad - b \left(\delta_2 + \frac{1}{8} \right) \sin\left(\frac{1}{2}\tau\right)
 \end{aligned} \tag{5.127}$$

Ein periodischer Ausdruck für u_2 ergibt sich nur, wenn

$$\delta_2 = -\frac{1}{8} \tag{5.128}$$

gilt. Damit folgt für die Näherung der zweiten Grenzkurve der Stabilitätskarte, unter Berücksichtigung der Rücktransformation von Gl. (5.112) auf die ursprünglichen Parameter,

$$\delta(\bar{\varepsilon}) = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\bar{\varepsilon}^2 - c^2} - \frac{1}{8} \bar{\varepsilon}^2 \tag{5.129}$$

Dies soll, zur Überprüfung, mit den Ergebnissen aus Kapitel 2.2.10.4 verglichen werden. Darin wurde die Mathiesche Differenzialgleichung

$$\ddot{u}(t) + (\delta + 2\varepsilon \cos(2t))u(t) = 0 \tag{5.130}$$

auf ihr Stabilitätsverhalten hin untersucht. Transformiert man diese Differenzialgleichung mittels

$$\begin{aligned}
 \tau &= 2t \\
 \frac{d}{dt} &= \frac{d}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = 2 \frac{d}{d\tau}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = 4 \frac{d^2}{d\tau^2}
 \end{aligned} \tag{5.131}$$

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

auf eine Periode von 2π , folgt

$$\ddot{u}(\tau) + \left(\frac{\delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \cos(\tau) \right) u(\tau) = 0 \quad (5.132)$$

Die Näherungslösung von Gl. (5.130) für die zweite Stabilitätsgrenze lautet (siehe Gl. (2.229))

$$\delta(\varepsilon) = 1 \pm \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (5.133)$$

Führt man darin die neuen Parameter

$$\begin{aligned} \bar{\delta} &= \frac{\delta}{4} \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (5.134)$$

ein, folgt für die Stabilitätsgrenze

$$\bar{\delta}(\bar{\varepsilon}) = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} - \frac{1}{8} \bar{\varepsilon}^2 + O(\bar{\varepsilon}^3) \quad (5.135)$$

was bei Vernachlässigung der viskosen Dämpfung exakt Gl. (5.129) entspricht.

Nachfolgend sind die Stabilitätsgrenzen unter Berücksichtigung viskoser Dämpfung dargestellt.

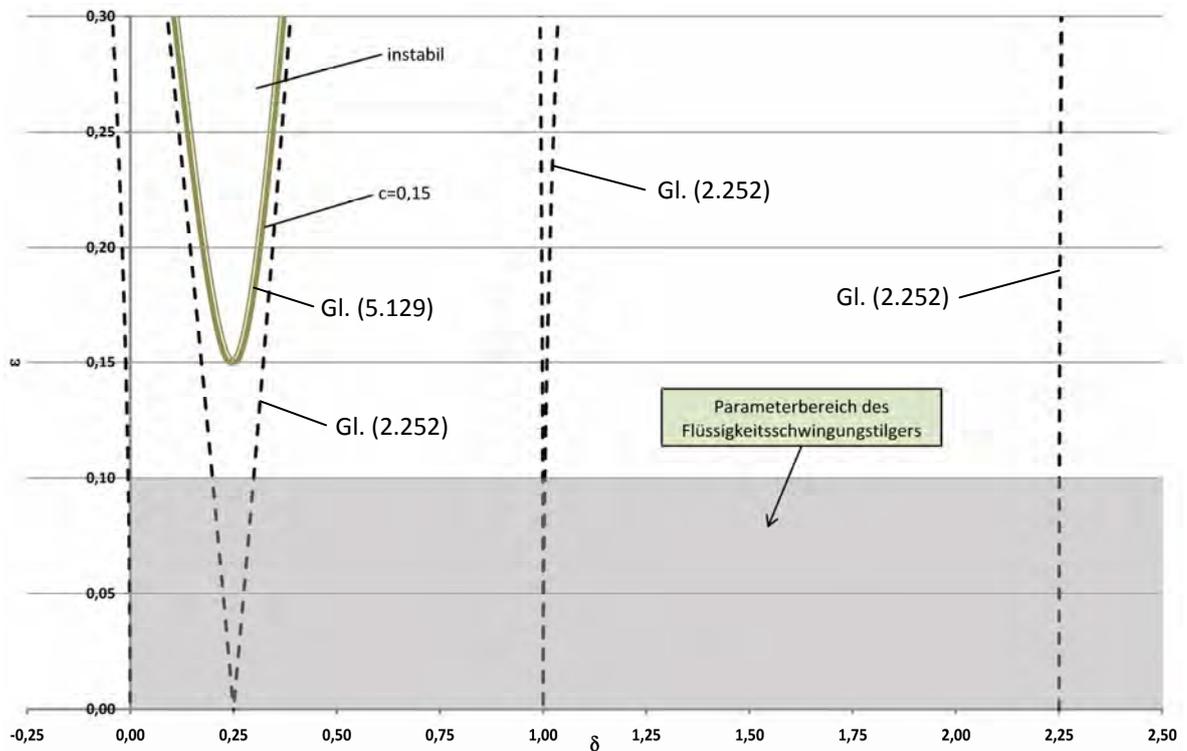


Abbildung 5.39: Stabilitätskarte der Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsschwingungstilgers unter Berücksichtigung viskoser Dämpfung

Der Stabilitätskarte aus Abbildung 5.39 kann entnommen werden, dass bei Einhaltung einer noch zu definierenden, minimalen viskosen Dämpfung der Effekt der Parameterresonanz für den Flüssigkeitsschwingungstilger gänzlich ausgeschlossen werden kann. Diese soll nachfolgend hergeleitet werden. Aus Gl. (5.129) folgt für $\delta = 1/4$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\bar{\epsilon}^2 - c^2} - \frac{1}{8} \bar{\epsilon}^2 \quad (5.136)$$

$$\bar{\epsilon} = 2\sqrt{2 - \sqrt{4 - c^2}}$$

Um einen einfachen Ausdruck für die Abgrenzung zur Parameterresonanz zu erhalten, wird der Ausdruck für $\bar{\epsilon}$ durch eine Taylorreihe in c approximiert, dies liefert

$$\bar{\epsilon} = c + O(\bar{\epsilon}^4) \quad (5.137)$$

Setzt man an dieser Stelle die zweite Gleichung von Gl. (5.108) und Gl. (5.99) ein, folgt als minimal erforderliches viskoses Dämpfungsmaß zur Vermeidung von Parameterresonanz

$$\zeta_{\min} \geq \frac{\sin(\alpha)}{2m_F \omega_A H} w_0 \quad (5.138)$$

Setzt man die in diesem Kapitel angeführten Abschätzungen der Parameter $\bar{\epsilon}$ und $\bar{\delta}$ für den Flüssigkeitsschwingungstilger ein, ergibt sich eine Abschätzung für das erforderliche äquivalente viskose Dämpfungsmaß zu

$$\begin{aligned} \zeta_{\min} &= \frac{\sin(\alpha)}{2m_F \omega_A H} w_0 = \frac{\sin(\alpha)}{4H \rho A \omega_A H} w_0 = \\ &= \frac{1}{4 \cdot 1,0^2 \cdot 1000 \cdot 0,07 \cdot 2\pi \cdot 0,50} 0,10 = 0,001 \end{aligned} \quad (5.139)$$

Dabei wurde ein Rohrdurchmesser des Tilgers von 0,30 m angesetzt. Vergleicht man den damit errechneten Wert für das minimal erforderliche viskose Dämpfungsmaß mit dem optimalen äquivalenten viskosen Dämpfungsmaß nach Den Hartog (Gl. (5.223)) und setzt darin nachfolgende Durchschnittswerte für

$$\begin{aligned} \mu &= 0,025 \\ \kappa &= 0,50 \end{aligned} \quad (5.140)$$

ein, folgt

$$\begin{aligned} \zeta_{opt} &= \sqrt{\frac{3}{8} \frac{\kappa \mu (1 + \mu)}{1 + \mu (2 + \kappa \mu - \kappa^2)}} = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{0,50 \cdot 0,025 (1 + 0,025)}{1 + 0,025 (2 + 0,50 \cdot 0,025 - 0,50^2)}} = \\ &= 0,068 \end{aligned} \quad (5.141)$$

Ein Vergleich von Gl. (5.139) und Gl. (5.141) lässt erahnen, dass nach Abstimmung des Flüssigkeitsschwingungstilgers mit den Kriterien nach Den Hartog ein ausreichend großes Dämpfungsmaß vorhanden ist. Das Auftreten von Parameterresonanz für den Flüssigkeitsschwingungstilger ist unter diesen Gesichtspunkten unwahrscheinlich, sollte jedoch jedenfalls mittels der einfachen Formel Gl. (5.138) bei jeder Tilgerauslegung überprüft werden.

5.2. Resultierende Kräfte und Momente des Flüssigkeitsschwingungstilgers

Neben der Bewegung des Flüssigkeitsfadens, die in Kapitel 5.1 hergeleitet wurde, interessieren vor allem auch die durch die Flüssigkeitsbewegung hervorgerufenen Kräfte und Momente, die als „äußere Belastung“ auf das Brückentragwerk einwirken. Diese werden in den nachfolgenden Kapiteln hergeleitet. Hierbei wurde die für die Dämpfung dynamisch inaktive Masse (Rohre, Ausrüstung, ...) ebenfalls berücksichtigt. Diese kann alternativ auch bei der Brückenmasse berücksichtigt werden.

5.2.1. Resultierende Kraft

Die resultierende Kraft, angreifend im Koordinatenursprung des bewegten Bezugssystems (x', y', z') , lässt sich aus der zeitlichen Änderung des absoluten Impulses ermitteln. Der Impulssatz für Körper mit konstanter Masse lautet (siehe Kapitel 2.2.6)

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{F} \quad (5.142)$$

Bei der totalen Ableitung des Impulses ist aufgrund des bewegten Bezugssystems Gleichung (2.20) anzuwenden, die für den Impuls folgendermaßen lautet

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d\vec{I}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{I} = \frac{d\vec{I}'}{dt} + \vec{\omega} \vec{I} \quad (5.143)$$

$$\vec{\omega} \perp \vec{I}$$

Der absolute Impulsvektor für die betrachtete Flüssigkeitsmasse m_F ist definiert durch (siehe Kap. 2.2.6)

$$\vec{I} = \int_{m_F} \vec{v} dm_F = \int_{m_F} (\vec{v}_f + \vec{v}') dm_F = \int_{m_F} (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}') dm_F \quad (5.144)$$

Dabei wurde gemäß Gleichung (2.22) die Absolutgeschwindigkeit in die Relativgeschwindigkeit und die Führungsgeschwindigkeit aufgeteilt.

Die Geschwindigkeit des Bezugssystems, wie nachfolgend angeführt, wird im unbewegten Koordinatensystem (x, y, z) ausgedrückt. Dies bringt Vorteile bei den nachfolgenden Ableitungen. Die Richtigkeit dieser Annahme wird zu einem späteren Zeitpunkt überprüft (siehe Gl. (5.164)).

$$\vec{v}_A = \dot{w} \vec{e}_z \quad (5.145)$$

Für die Relativgeschwindigkeit sowie das differenzielle Massenelement kann

$$\vec{v}' = \dot{u} \vec{e}'_t \quad (5.146)$$

$$dm_F = \rho A ds'$$

geschrieben werden.

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

Das Vektorprodukt $\vec{\omega} \times \vec{r}'$ kann, wie bereits in Gl. (5.9) gezeigt wurde, durch das Skalarprodukt

$$\omega \tilde{r}' \quad , \quad \tilde{r}' \perp \vec{r}' \quad (5.147)$$

ersetzt werden.

Die gesamte, im Tilger vorhandene Flüssigkeitsmasse beträgt

$$m_F = 2H \rho A \quad (5.148)$$

Damit lautet der Ausdruck für den absoluten Impulsvektor

$$\vec{I} = \rho A \left[\int_{l'}^{2'} \dot{w} ds' + \int_{l'}^{2'} \omega \tilde{r}' ds' + \int_{l'}^{2'} \dot{u} \vec{e}'_i ds' \right] \quad (5.149)$$

Die einzelnen Terme des absoluten Impulses lauten

$$\underline{\rho A \int_{l'}^{2'} \dot{w} ds'}$$

$$\rho A \int_{l'}^{2'} \dot{w} ds' = \rho A \int_0^{H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u} \dot{w} ds' + \rho A \int_0^{H + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} + u} \dot{w} ds' = 2H \rho A \dot{w} = \dot{w} m_F \quad (5.150)$$

Dabei darf nicht vergessen werden, dass die Geschwindigkeit des Bezugspunktes nach wie vor im raumfesten Bezugssystem definiert ist.

$$\vec{\dot{w}} = \dot{w} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} \quad (5.151)$$

$$\underline{\rho A \int_{l'}^{2'} \omega \tilde{r}' ds'}$$

Die Ausdrücke für die Ortsvektoren wurden bereits in Gl. (5.4) hergeleitet und werden hier nicht erneut angeführt. Die dazu orthogonalen Vektoren lauten

$$\tilde{r}'_a = \begin{Bmatrix} \left(H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u - s'_1 \right) \sin(\alpha) \\ 0 \\ \left(H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u - s'_1 \right) \cos(\alpha) \end{Bmatrix} , \quad \tilde{r}'_b = \begin{Bmatrix} s'_2 \sin(\alpha) \\ 0 \\ -s'_2 \cos(\alpha) \end{Bmatrix} \quad (5.152)$$

Damit lautet der zweite Term des absoluten Impulses

$$\begin{aligned} \rho A \int_{I'}^{\prime} \omega \vec{r}' ds' &= \rho A \left[\int_0^{H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u} \omega \vec{r}'_a ds' + \int_0^{H + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} + u} \omega \vec{r}'_b ds' \right] = \\ &= \rho A \omega \left\{ \begin{array}{c} H^2 \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0^2}{4 \sin(\alpha)} + \Delta z_0 u + u^2 \sin(\alpha) \\ 0 \\ -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \Delta z_0 H - 2Hu \cos(\alpha) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (5.153)$$

$$\underline{\rho A \int_{I'}^{\prime} \dot{u} \vec{e}'_t ds'}$$

Die Einheitsvektoren der einzelnen Abschnitte können Gl. (5.3) entnommen werden.

$$\begin{aligned} \rho A \int_{I'}^{\prime} \dot{u} \vec{e}'_t ds' &= \rho A \left[\int_0^{H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u} \dot{u} \vec{e}'_{t,a} ds' + \int_0^{H + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} + u} \dot{u} \vec{e}'_{t,b} ds' \right] = \\ &= \rho A \dot{u} \left\{ \begin{array}{c} 2H \cos(\alpha) \\ 0 \\ 2u \sin(\alpha) + \Delta z_0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (5.154)$$

Damit lautet der absolute Impulsvektor

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \vec{w}_F m_F + \rho A \omega \left\{ \begin{array}{c} H^2 \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0^2}{4 \sin(\alpha)} + \Delta z_0 u + u^2 \sin(\alpha) \\ 0 \\ -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \Delta z_0 H - 2Hu \cos(\alpha) \end{array} \right\} + \\ &+ \rho A \dot{u} \left\{ \begin{array}{c} 2H \cos(\alpha) \\ 0 \\ 2u \sin(\alpha) + \Delta z_0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (5.155)$$

Um die resultierende Kraft zu erhalten, muss jetzt die zeitliche Ableitung des Impulses, unter Berücksichtigung von Gl. (5.143), gebildet werden. Zuerst soll die zeitliche Ableitung im bewegten Bezugssystem, das heißt, der erste Term von Gl. (5.143), hergeleitet werden.

$$\left(\frac{d\vec{I}'}{dt} \right)_1 = \vec{w}_F m_F \quad (5.156)$$

$$\left(\frac{d\vec{I}'}{dt}\right)_2 = \rho A \dot{\omega} \left\{ \begin{array}{c} H^2 \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0^2}{4 \sin(\alpha)} + \Delta z_0 u + u^2 \sin(\alpha) \\ 0 \\ -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \Delta z_0 H - 2Hu \cos(\alpha) \end{array} \right\} + \quad (5.157)$$

$$+ \rho A \omega \left\{ \begin{array}{c} \Delta z_0 \dot{u} + 2ui \sin(\alpha) \\ 0 \\ -2H\dot{u} \cos(\alpha) \end{array} \right\}$$

$$\left(\frac{d\vec{I}'}{dt}\right)_3 = \rho A \ddot{u} \left\{ \begin{array}{c} 2H \cos(\alpha) \\ 0 \\ 2u \sin(\alpha) + \Delta z_0 \end{array} \right\} + \rho A \dot{u} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2\dot{u} \sin(\alpha) \end{array} \right\} \quad (5.158)$$

$$\frac{d\vec{I}'}{dt} = \vec{\ddot{w}}m_F + \rho A \dot{\omega} \left\{ \begin{array}{c} H^2 \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0^2}{4 \sin(\alpha)} + \Delta z_0 u + u^2 \sin(\alpha) \\ 0 \\ -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \Delta z_0 H - 2Hu \cos(\alpha) \end{array} \right\} + \quad (5.159)$$

$$+ \rho A \omega \left\{ \begin{array}{c} \Delta z_0 \dot{u} + 2ui \sin(\alpha) \\ 0 \\ -2H\dot{u} \cos(\alpha) \end{array} \right\} + \rho A \ddot{u} \left\{ \begin{array}{c} 2H \cos(\alpha) \\ 0 \\ 2u \sin(\alpha) + \Delta z_0 \end{array} \right\} +$$

$$+ \rho A \dot{u} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2\dot{u} \sin(\alpha) \end{array} \right\}$$

Für den zweiten Term von Gl. (5.143) benötigt man den Normalenvektor zur Richtung des absoluten Impulses. Dieser lautet unter Berücksichtigung der in raumfesten Koordinaten (x, y, z) definierten Geschwindigkeit des bewegten Bezugssystems \dot{w}

$$\vec{\hat{I}} = \rho A \omega \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \Delta z_0 H - 2Hu \cos(\alpha) \\ 0 \\ -H^2 \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0^2}{4 \sin(\alpha)} - \Delta z_0 u - u^2 \sin(\alpha) \end{array} \right\} + \quad (5.160)$$

$$+ \rho A \dot{u} \left\{ \begin{array}{c} 2u \sin(\alpha) + \Delta z_0 \\ 0 \\ -2H \cos(\alpha) \end{array} \right\}$$

Somit lautet der sich aus der Flüssigkeitsbewegung ergebende resultierende Kraftvektor

$$\begin{aligned}
 \vec{F}' = \begin{Bmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{Bmatrix} &= (m_F + m_T)(\ddot{w} - g) \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{Bmatrix} + \\
 &+ \rho A \begin{Bmatrix} 2H\ddot{u} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \Delta z_0 \ddot{u} + 2\dot{u}^2 \sin(\alpha) + 2u\ddot{u} \sin(\alpha) \end{Bmatrix} \\
 &+ \rho A \dot{\varphi} \begin{Bmatrix} 2\Delta z_0 \dot{u} + 4u\dot{u} \sin(\alpha) \\ 0 \\ -4H\dot{u} \cos(\alpha) \end{Bmatrix} + \\
 &+ \rho A \ddot{\varphi} \begin{Bmatrix} H^2 \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0^2}{4 \sin(\alpha)} + \Delta z_0 u + u^2 \sin(\alpha) \\ 0 \\ -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \Delta z_0 H - 2Hu \cos(\alpha) \end{Bmatrix} + \\
 &+ \rho A \dot{\varphi}^2 \begin{Bmatrix} -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \Delta z_0 H - 2Hu \cos(\alpha) \\ 0 \\ -H^2 \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0^2}{4 \sin(\alpha)} - \Delta z_0 u - u^2 \sin(\alpha) \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.161}$$

Bei diesem Kraftvektor handelt es sich um resultierende Kräfte im bewegten Bezugssystem (x', y', z') , unter Berücksichtigung der statischen Gewichtskraft $(m_F + m_T)g$ der Flüssigkeit inklusive Tilgereigengewicht. Gl. (5.17) wurde dabei ebenfalls berücksichtigt.

Geht man auch hier von einer rein translatorischen Bewegung des Brückentragwerkes aus ($\varphi = 0$), folgt für den resultierenden Kraftvektor

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_x &= m_F \ddot{u} \cos(\alpha) \\
 \vec{F}_z &= (m_F + m_T)(\ddot{w} - g) + m_F \left\{ \frac{1}{2H} (\Delta z_0 + 2u \sin(\alpha)) \ddot{u} + \frac{\sin(\alpha)}{H} \dot{u}^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{5.162}$$

Dabei sind diese beiden Kraftvektoren aufgrund der fehlenden Rotation des Koordinatensystems bereits im raumfesten Koordinatensystem definiert.

Als nächster Schritt soll überprüft werden, ob eine Definition der Geschwindigkeit des bewegten Bezugssystems im raumfesten Koordinatensystem zum selben Ergebnis führt, wie eine Definition im bewegten Bezugssystem. Dabei wird nur der Term mit \dot{w} in Gl. (5.155) berücksichtigt.

Dieser lautet

$$\dot{w}e_z = \dot{w} \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e'_x \\ e'_y \\ e'_z \end{Bmatrix} \quad (5.163)$$

Die totale Ableitung von Gl. (5.163) lautet unter Berücksichtigung des bewegten Bezugssystems

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\dot{w}_t \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e'_x \\ e'_y \\ e'_z \end{Bmatrix} \right) &= \ddot{w} \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{Bmatrix} + \dot{w} \begin{Bmatrix} -\cos(\varphi)\dot{\varphi} \\ 0 \\ -\sin(\varphi)\dot{\varphi} \end{Bmatrix} + \omega\dot{w} \begin{Bmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ \sin(\varphi) \end{Bmatrix} = \\ &= \ddot{w} \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.164)$$

Damit konnte gezeigt werden, dass unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, die resultierenden Kräfte dieselben sind, was zu beweisen war.

Dasselbe Ergebnis des resultierenden Kraftvektors erhält man durch Ermittlung der Absolutbeschleunigung des Massenmittelpunktes der Flüssigkeit und anschließender Multiplikation mit der Flüssigkeitsmasse, wie nachfolgend gezeigt wird.

Der momentane Ortsvektor zum Massenmittelpunkt der Flüssigkeit lautet

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}'_M \quad (5.165)$$

Dabei wird \vec{r}_A , wie zuvor, im raumfesten Koordinatensystem definiert.

$$\vec{r}_A = \vec{w} \quad (5.166)$$

Die lokalen Ortsvektoren zum Massenmittelpunkt lauten

$$\begin{aligned} \vec{r}'_{Mx} &= \frac{1}{2H\rho A} \left\{ -\rho A \left(H - \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)} - u \right)^2 \frac{1}{2} \cos(\alpha) + \rho A \left(H + \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)} + u \right)^2 \frac{1}{2} \cos(\alpha) \right\} = \frac{\cos(\alpha)}{2\sin(\alpha)} \Delta z_0 + u \cos(\alpha) \\ \vec{r}'_{Mz} &= \frac{1}{2H\rho A} \left\{ \rho A \left(H - \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)} - u \right)^2 \frac{1}{2} \sin(\alpha) + \rho A \left(H + \frac{\Delta z_0}{2\sin(\alpha)} + u \right)^2 \frac{1}{2} \sin(\alpha) \right\} = \frac{H}{2} \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0^2}{8H \sin(\alpha)} + \frac{\Delta z_0}{2H} u + \frac{\sin(\alpha)}{2H} u^2 \end{aligned} \quad (5.167)$$

t = t1 (Momentanlage)

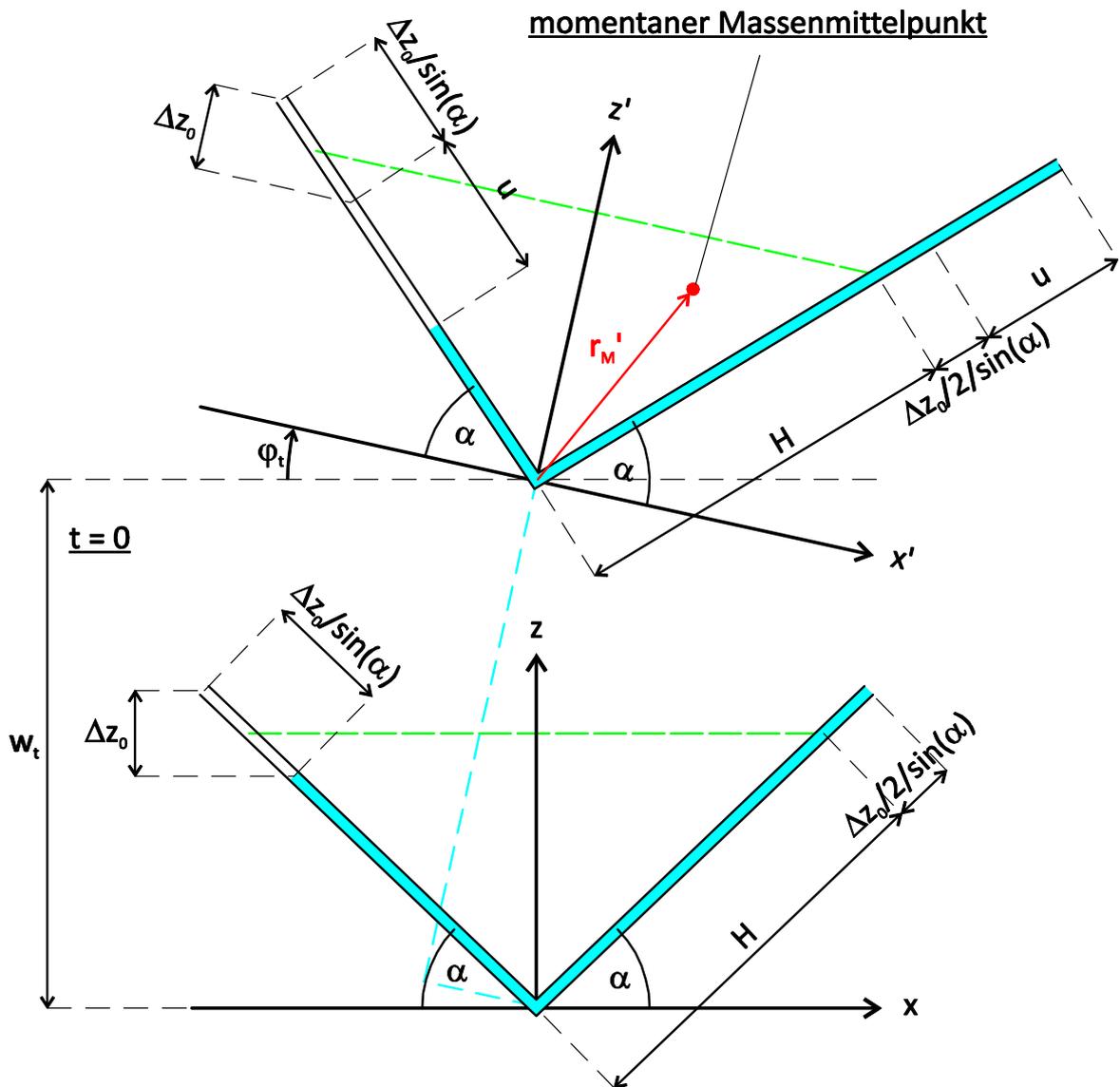


Abbildung 5.40: momentaner Massenmittelpunkt der Flüssigkeit

Somit lautet der resultierende Ortsvektor

$$\vec{r}_M = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{Bmatrix} + \left\{ \begin{array}{c} \frac{\cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)} \Delta z_0 + u \cos(\alpha) \\ 0 \\ \frac{H}{2} \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0^2}{8H \sin(\alpha)} + \frac{\Delta z_0}{2H} u + \frac{\sin(\alpha)}{2H} u^2 \end{array} \right\} \quad (5.168)$$

Dessen Ableitung, also die Absolutgeschwindigkeit des momentanen Massenmittelpunktes lautet

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{u} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \frac{\Delta z_0}{2H} \dot{u} + \frac{\sin(\alpha)}{H} u \dot{u} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{H}{2} \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0^2}{8H \sin(\alpha)} + \frac{\Delta z_0}{2H} u + \frac{\sin(\alpha)}{2H} u^2 \\ 0 \\ -\frac{\cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)} \Delta z_0 - u \cos(\alpha) \end{Bmatrix} \quad (5.169)$$

Multipliziert man Gl. (5.169) mit $m_F = 2H \rho A$ erhält man den Ausdruck für den absoluten Impulsvektor aus Gl. (5.155).

Differenziert man ein zweites Mal, erhält man den Vektor der Absolutbeschleunigung des momentanen Massenmittelpunktes. Dieser lautet

$$\frac{d^2\vec{r}_M}{dt^2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{u} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \frac{\Delta z_0}{2H} \ddot{u} + \frac{\sin(\alpha)}{H} \dot{u}^2 + \frac{\sin(\alpha)}{H} u \ddot{u} \end{Bmatrix} + \dot{\omega} \begin{Bmatrix} \frac{\Delta z_0}{2H} \dot{u} + \frac{\sin(\alpha)}{H} u \dot{u} \\ 0 \\ -\dot{u} \cos(\alpha) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{H}{2} \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0^2}{8H \sin(\alpha)} + \frac{\Delta z_0}{2H} u + \frac{\sin(\alpha)}{2H} u^2 \\ 0 \\ -\frac{\cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)} \Delta z_0 - u \cos(\alpha) \end{Bmatrix} + \omega \begin{Bmatrix} \frac{\Delta z_0}{2H} \dot{u} + \frac{\sin(\alpha)}{H} u \dot{u} \\ 0 \\ -u \cos(\alpha) \end{Bmatrix} + \omega^2 \begin{Bmatrix} -\frac{\cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)} \Delta z_0 \\ 0 \\ -\frac{H}{2} \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0^2}{8H \sin(\alpha)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -u \cos(\alpha) \\ 0 \\ -\frac{\Delta z_0}{2H} u - \frac{\sin(\alpha)}{2H} u^2 \end{Bmatrix} \quad (5.170)$$

Mit der damit ermittelten Absolutbeschleunigung des Massenmittelpunktes erhält man durch Anwendung des dynamischen Grundgesetzes den resultierenden Kraftvektor

$$\vec{F}' = m_F \frac{d^2 \vec{r}_M}{dt^2} \quad (5.171)$$

Durch Vergleich der Ergebnisse aus Gl. (5.170) mit jenem aus Gl. (5.161) ist ersichtlich, dass beide ident sind. Die Ermittlung des resultierenden Kraftvektors unter Anwendung des Impulssatzes liefert somit dasselbe Ergebnis wie die Anwendung des dynamischen Grundgesetzes.

5.2.2. Resultierendes Moment

In diesem Kapitel wird der Drehimpuls um den, gegen das raumfeste Koordinatensystem allgemein bewegten Bezugspunkt A hergeleitet. Dieser lautet (siehe Kap. 2.2.7)

$$\frac{d\vec{D}_A}{dt} + m_F \vec{r}'_M \times \vec{a}'_A = \vec{M}_A \quad (5.172)$$

Unter Berücksichtigung des bewegten Bezugssystems gilt (siehe Gl. (2.20))

$$\frac{d\vec{D}_A}{dt} = \frac{d\vec{D}'_A}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{D}'_A \quad (5.173)$$

Der resultierende relative Drallvektor lautet

$$\vec{D}'_A = \int_{m_F} \vec{r}' \times \vec{v}' dm_F = \int_{m_F} \vec{r}' \times (\vec{v} - \vec{v}_A) dm_F \quad (5.174)$$

Unter Berücksichtigung der nachfolgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \vec{v} - \vec{v}_A &= \vec{v}_f + \vec{v}' - \vec{v}_A = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}' - \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}' \\ dm_F &= \rho A ds' \\ \vec{v}' &= \dot{u} \vec{e}'_t \end{aligned} \quad (5.175)$$

lautet Gl. (5.174)

$$\vec{D}'_A = \rho A \left[\int_{s'} \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') ds' + \dot{u} \int_{s'} \vec{r}' \times \vec{e}'_t ds' \right] \quad (5.176)$$

Das erste Vektorprodukt lässt sich zu

$$\vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \omega r'^2 \vec{e}_y \quad (5.177)$$

vereinfachen. Mit den Ortsvektoren aus Gl. (5.4) sowie der Winkelidentität $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ folgt

$$\begin{aligned} r_a'^2 &= \left(H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - u - s_1 \right)^2 \\ r_b'^2 &= s_2^2 \end{aligned} \quad (5.178)$$

und damit der erste Term von Gl. (5.176) zu

$$\int_{s'} \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') ds' = \omega \left[\int_{s'_1} r_a'^2 ds'_1 + \int_{s'_2} r_b'^2 ds'_2 \right] =$$

$$= 2H \left[\frac{H^2}{3} + \frac{\Delta z_0^2}{4 \sin^2(\alpha)} + \frac{\Delta z_0}{\sin(\alpha)} u + u^2 \right] \quad (5.179)$$

Der zweite Term des resultierenden Drallvektors verschwindet, da

$$\vec{r}'_a \parallel \vec{e}_{t,a}' \rightarrow \vec{r}'_a \times \vec{e}_{t,a}' = 0$$

$$\vec{r}'_b \parallel \vec{e}_{t,b}' \rightarrow \vec{r}'_b \times \vec{e}_{t,b}' = 0 \quad (5.180)$$

gilt. Somit lautet der resultierende relative Drallvektor

$$\vec{D}'_A = 2H \rho A \omega \left[\frac{H^2}{3} + \frac{\Delta z_0^2}{4 \sin^2(\alpha)} + \frac{\Delta z_0}{\sin(\alpha)} u + u^2 \right] =$$

$$= m_F \omega \left[\frac{H^2}{3} + \frac{\Delta z_0^2}{4 \sin^2(\alpha)} + \frac{\Delta z_0}{\sin(\alpha)} u + u^2 \right] \quad (5.181)$$

sowie dessen zeitliche Ableitung

$$\frac{d\vec{D}'_A}{dt} = \frac{d\vec{D}'_A}{dt} = m_F \dot{\omega} \left[\frac{H^2}{3} + \frac{\Delta z_0^2}{4 \sin^2(\alpha)} + \frac{\Delta z_0}{\sin(\alpha)} u + u^2 \right] + m_F \omega \left[\frac{\Delta z_0}{\sin(\alpha)} \dot{u} + 2u\dot{u} \right] \quad (5.182)$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass $\vec{\omega} \parallel \vec{D}'_A \rightarrow \vec{\omega} \times \vec{D}'_A = 0$ gilt und somit der zweite Term aus Gl. (5.173) verschwindet.

Für den zweiten Term des einwirkenden Momentes werden der momentane relative Abstand des Massenmittelpunktes der Flüssigkeit zum Bezugspunkt sowie die absolute Beschleunigung des Bezugspunktes benötigt. Diese lauten (siehe Gl. (5.168))

$$\vec{r}'_M = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)} \Delta z_0 + u \cos(\alpha) \\ 0 \\ \frac{H}{2} \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0^2}{8H \sin(\alpha)} + \frac{\Delta z_0}{2H} u + \frac{\sin(\alpha)}{2H} u^2 \end{array} \right\} \quad (5.183)$$

$$\vec{a}_A = \ddot{w} \left\{ \begin{array}{c} -\sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{array} \right\}$$

Der zweite Term aus Gl. (5.172) lautet damit

$$m_F \vec{r}'_M \times \vec{a}'_A = m_F \ddot{w} \left\{ - \left(\frac{H}{2} \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0^2}{8H \sin(\alpha)} + \frac{\Delta z_0}{2H} u + \frac{\sin(\alpha)}{2H} u^2 \right) \sin(\varphi) - \left(\frac{\cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)} \Delta z_0 + u \cos(\alpha) \right) \cos(\varphi) \right\} \quad (5.184)$$

Damit lautet das resultierende Moment um A unter Berücksichtigung von Gl. (5.17)

$$\begin{aligned} \vec{M}_A = & m_F \dot{\varphi} \left[\frac{\Delta z_0}{\sin(\alpha)} \dot{u} + 2u \dot{u} \right] + m_F \ddot{\varphi} \left[\frac{H^2}{3} + \frac{\Delta z_0^2}{4 \sin^2(\alpha)} + \frac{\Delta z_0}{\sin(\alpha)} u + u^2 \right] + \\ & + m_F \ddot{w} \left[- \left(\frac{H}{2} \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0^2}{8H \sin(\alpha)} + \frac{\Delta z_0}{2H} u + \frac{\sin(\alpha)}{2H} u^2 \right) \sin(\varphi) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)} \Delta z_0 + u \cos(\alpha) \right) \cos(\varphi) \right] \end{aligned} \quad (5.185)$$

In diesem Ausdruck für das resultierende Moment sind die Gewichtskraft der Flüssigkeit sowie der Widerstand des annähernd starren V-Rohres gegenüber einer Verdrehung noch nicht berücksichtigt. Die nachfolgenden Herleitungen sollen diese beiden Terme berücksichtigen.

Durch die Verschiebung des Massenmittelpunktes der Flüssigkeit um \vec{r}'_M resultiert ein zusätzliches Moment (siehe Abbildung 5.41).

t = t1 (Momentanlage)

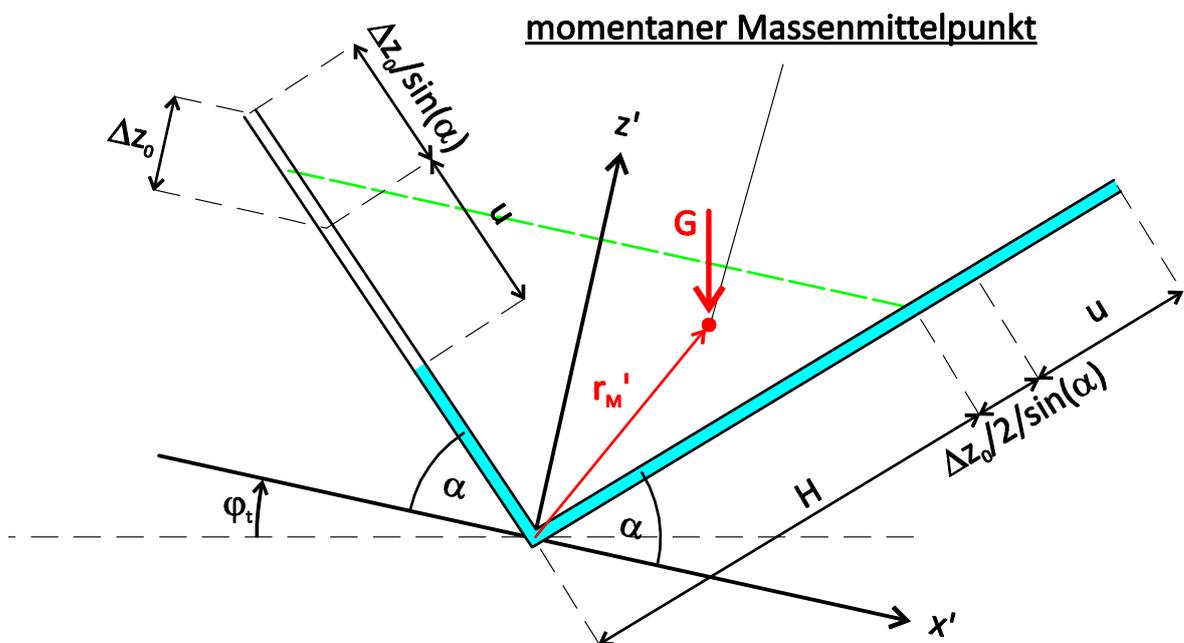


Abbildung 5.41: Gewichtskraft im momentanen Massenmittelpunkt angreifend

Dieses lautet

$$\vec{M}_{A,G} = \vec{r}'_M \times \vec{G} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)} \Delta z_0 + u \cos(\alpha) \\ 0 \\ \frac{H}{2} \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0^2}{8H \sin(\alpha)} + \frac{\Delta z_0}{2H} u + \frac{\sin(\alpha)}{2H} u^2 \end{array} \right\} \times$$

$$\times m_F g \left\{ \begin{array}{c} \sin(\varphi) \\ 0 \\ -\cos(\varphi) \end{array} \right\} = m_F g \left(\frac{H}{2} \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0^2}{8H \sin(\alpha)} + \frac{\Delta z_0}{2H} u + \frac{\sin(\alpha)}{2H} u^2 \right) \quad (5.186)$$

$$\sin(\varphi) + m_F g \left(\frac{\cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)} \Delta z_0 + u \cos(\alpha) \right) \cos(\varphi)$$

Da es sich bei den V-Rohren annähernd um einen Starrkörper handelt, kann dieser bei der Drallermittlung durch sein Massenträgheitsmoment um die y' -Achse multipliziert mit dem Winkelgeschwindigkeitsvektor berücksichtigt werden.

$$\vec{D}'_{A,V-Rohr} = I_{y,V-Rohr} \vec{\omega} \quad (5.187)$$

Dieser Term sollte sich jedoch nur bei sehr massigen Tilgerkonstruktionen auswirken und wird deshalb in den weiteren Ableitungen vernachlässigt.

Das resultierende äußere Moment, resultierend aus der Flüssigkeitsbewegung, der Rotation des Tilgers sowie der statischen Gewichtskraft lautet

$$M_{Ay} = m_F \dot{\varphi} \left[\frac{\Delta z_0}{\sin(\alpha)} \dot{u} + 2u\dot{u} \right] + m_F \ddot{\varphi} \left[\frac{H^2}{3} + \frac{\Delta z_0^2}{4 \sin^2(\alpha)} + \frac{\Delta z_0}{\sin(\alpha)} u + u^2 \right] +$$

$$+ m_F (g - \ddot{w}) \left[\left(\frac{H}{2} \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0^2}{8H \sin(\alpha)} + \frac{\Delta z_0}{2H} u + \frac{\sin(\alpha)}{2H} u^2 \right) \sin(\varphi) + \right. \quad (5.188)$$

$$\left. + \left(\frac{\cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)} \Delta z_0 + u \cos(\alpha) \right) \cos(\varphi) \right]$$

Geht man auch hier von einer rein translatorischen Bewegung des Brückentragwerkes aus ($\varphi = 0$), folgt für das resultierende Moment

$$M_{Ay} = m_F (g - \ddot{w}) \left(\frac{\cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)} \Delta z_0 + u \cos(\alpha) \right) \quad (5.189)$$

5.3. Äquivalenzbeziehungen zwischen konventionellen Schwingungstilgern und Flüssigkeitsschwingungstilger

5.3.1. Einmassenschwinger mit konventionellem Schwingungstilger

In diesem Kapitel werden die Überlegungen aus dem Kapitel 2.2.8.2 übernommen. Da in den Herleitungen der Differenzialgleichung für die Flüssigkeitsbewegung von Relativbewegungen ausgegangen wurde, müssen für den Vergleich der beiden Tilgertypen auch die Differenzialgleichungen des Zweimassenschwingers mit Relativbewegungen hergeleitet werden.

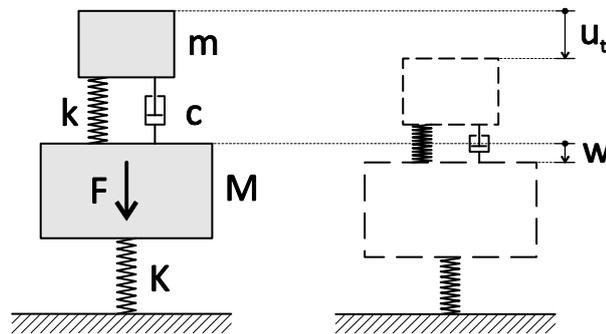


Abbildung 5.42: Zweimassenschwinger in Ausgangs- und ausgelenkter Lage mit absoluter Tilgerbewegung

Für die absolute Tilgerbewegung folgt

$$u_t = u + w \quad (5.190)$$

Damit lauten die Bewegungsgleichungen (Näheres siehe Kapitel 2.2.8.2)

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku &= -m\ddot{w} \\ (M + m)\ddot{w} + Kw &= F - m\ddot{u} \end{aligned} \quad (5.191)$$

In dieser Schreibweise kann die Wirkung des Tilgers sehr anschaulich gezeigt werden

- 1.) Die Masse des Tragwerkes wird um die Tilgermasse vergrößert
- 2.) Durch die vergrößerte Masse bei gleich bleibender Steifigkeit verringert sich die Eigenfrequenz des Tragwerkes
- 3.) Die einwirkende Kraft wird durch die Komponente $-m\ddot{u}$ verringert

Unter Verwendung der in Gl. (2.107) eingeführten bezogenen Größen lauten die Bewegungsgleichungen des Zweimassenschwingers

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \ddot{w} + 2\omega_a \zeta_a \dot{u} + \omega_a^2 u &= 0 \\ (1 + \mu)\ddot{w} + \mu\ddot{u} + \Omega_n^2 w &= \frac{1}{M} F \end{aligned} \quad (5.192)$$

sowie in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu & \mu+1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\omega_a \zeta_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_a^2 & 0 \\ 0 & \Omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} F \end{Bmatrix} \quad (5.193)$$

5.3.2. Einmasseschwinger mit Flüssigkeitsschwingungstilger

Ausgehend von der Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsfadens (Gl. (5.18)) unter Vernachlässigung der Tangentenneigung φ

$$\ddot{u}(t) + \frac{1}{H} [\sin(\alpha)(\ddot{w} + g)] u(t) + \frac{\Delta p}{2H\rho} + \frac{\Delta p_v}{2H\rho} = -\frac{\Delta z_0}{2H} (\ddot{w} + g) \quad (5.194)$$

sowie unter Ansatz der äquivalenten viskosen Dämpfung (Gl.(5.100)) für den Verlustterm Δp_v und des Druckdifferenzterms Δp z. B. für den Fall 1, einseitige Luftfeder (Gl.(5.30)), folgt

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta_A \omega_A \dot{u}(t) + \left\{ \frac{1}{H} [\sin(\alpha)(\ddot{w} + g)] + \frac{1}{2H\rho} \frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0) \gamma \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} \right\} u(t) = -\frac{\Delta z_0}{2H} \ddot{w} \quad (5.195)$$

Wie in Kapitel 5.1.4 angeführt, kann bei Einhaltung von Gl. (5.138) der Einfluss der Parametererregung vernachlässigt werden, damit kann der zeitveränderliche Term bei der Flüssigkeitsspiegelbewegung $u(t)$

$$\frac{1}{H} \sin(\alpha) \ddot{w} \quad (5.196)$$

unberücksichtigt bleiben und es folgt

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta_A \omega_A \dot{u}(t) + \underbrace{\left\{ \frac{\sin(\alpha)g}{H} + \frac{1}{2H\rho} \frac{(p_0 + \rho g \Delta z_0) \gamma \sin(\alpha)}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} \right\}}_{\omega_A^2} u(t) = -\frac{\Delta z_0}{2H} \ddot{w} \quad (5.197)$$

Unter Einsatz der Eigenkreisfrequenz der schwingenden Flüssigkeit (Gl. (5.71)) folgt schließlich

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta_A \omega_A \dot{u}(t) + \omega_A^2 u(t) = -\frac{\Delta z_0}{2H} \ddot{w} \quad (5.198)$$

Für die Bewegungsgleichung des Tragwerks kann die zweite Gleichung von Gl. (5.192) unter zusätzlicher Berücksichtigung der von der schwingenden Flüssigkeit auf das Tragwerk ausgeübten Kraft übernommen werden. Deren Vertikalkomponente lautet nach Gl. (5.162) unter Berücksichtigung des Reaktionsprinzips (Änderung des Vorzeichens)

$$\vec{F}_z = -m_F \left\{ \ddot{w} + \frac{1}{2H} (\Delta z_0 + 2u \sin(\alpha)) \ddot{u} + \frac{\sin(\alpha)}{H} \dot{u}^2 \right\} \quad (5.199)$$

Dabei wird die Tilgermasse (inkl. Konstruktionsmasse) als „Totmasse“ der Tragwerksmasse angerechnet. Um einen Vergleich mit dem konventionellen Zweimassenschwinger herleiten zu können, müssen noch die nichtlinearen Terme in Gl. (5.199) betrachtet werden. Die Nichtlinearität des ersten Terms

$$\frac{1}{2H} (\Delta z_0 + 2u \sin(\alpha)) \ddot{u} \quad (5.200)$$

kann aufgrund von

$$\Delta z_0 \gg u \quad (5.201)$$

in sehr guter Näherung zu

$$\frac{1}{2H} \Delta z_0 \ddot{u} \quad (5.202)$$

vereinfacht werden. Der zweite nichtlineare Term

$$\frac{\sin(\alpha)}{H} \dot{u}^2 \quad (5.203)$$

findet seine Ursache in der Parametererregung und kann aufgrund der Herleitungen von Kapitel 5.1.4 ebenfalls vernachlässigt werden. Damit lautet die durch die Flüssigkeitsbewegung auf das Tragwerk einwirkende Kraft in guter Näherung

$$\vec{F}_z = -m_F \left\{ \ddot{w} + \frac{1}{2H} \Delta z_0 \ddot{u} \right\} \quad (5.204)$$

und damit die beiden Bewegungsgleichungen der Flüssigkeit und der Tragwerksmasse

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 2\zeta_A \omega_A \dot{u} + \omega_A^2 u &= -\frac{\Delta z_0}{2H} \ddot{w} \\ (1 + \mu) \ddot{w} + \mu \ddot{u} + \Omega_n^2 w &= \frac{1}{M} F - \frac{m_F}{M} \left\{ \ddot{w} + \frac{1}{2H} \Delta z_0 \ddot{u} \right\} \end{aligned} \quad (5.205)$$

Etwas umgeformt lautet Gl. (5.205)

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \frac{\Delta z_0}{2H} \ddot{w} + 2\zeta_A \omega_A \dot{u} + \omega_A^2 u &= 0 \\ (1 + 2\mu) \ddot{w} + \mu \left(1 + \frac{\Delta z_0}{2H} \right) \ddot{u} + \Omega_n^2 w &= \frac{1}{M} F \end{aligned} \quad (5.206)$$

sowie in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\Delta z_0}{2H} \\ \mu \left(1 + \frac{\Delta z_0}{2H} \right) & 1 + 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\zeta_A \omega_A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_A^2 & 0 \\ 0 & \Omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} F \end{Bmatrix} \quad (5.207)$$

Ein Vergleich von Gl. (5.207) und Gl. (5.193) lässt den Schluss nahe, dass durch Wahl geeigneter Parameter eine Äquivalenz zwischen konventionellem Zweimassenschwinger und dem Einmassenschwinger mit Flüssigkeitsschwingungstilger möglich ist und damit die Abstimmungskriterien nach Den Hartog auch auf den Flüssigkeitsschwingungstilger angewendet werden können. Diese Äquivalenzparameter werden im nachfolgenden Kapitel hergeleitet.

5.3.3. Vergleich zwischen konventionellen Schwingungstilgern und Flüssigkeitsschwingungstilgern

Stellt man die Bewegungsgleichungen des Zweimassenschwingers

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu & \mu+1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\omega_a \zeta_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_a^2 & 0 \\ 0 & \Omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} F \end{Bmatrix} \quad (5.208)$$

jenen des Einmassenschwingers mit Flüssigkeitsschwingungstilger

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\Delta z_0}{2H} \\ \mu(1 + \frac{\Delta z_0}{2H}) & 1 + 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\zeta_A \omega_A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_A^2 & 0 \\ 0 & \Omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} F \end{Bmatrix} \quad (5.209)$$

gegenüber, erkennt man, wie bereits in Kapitel 5.3.2 angeführt, dass durch geeignete Transformationen eine Äquivalenzbeziehung zwischen beiden Systemen möglich ist. Bei der ersten Transformation wird dafür für die Übersichtlichkeit der nachfolgenden Herleitungen folgender Ausdruck eingeführt.

$$\kappa = \frac{\Delta z_0}{2H} \quad (5.210)$$

Des Weiteren wird, ohne Veränderung der Bewegungsgleichungen, die Flüssigkeitsbewegung $u(t)$ auf κ wie folgt bezogen

$$\frac{u}{\kappa} = \hat{u} \quad (5.211)$$

Damit folgt für Gl. (5.209)

$$\begin{bmatrix} \kappa & \kappa \\ \kappa\mu(1 + \kappa) & 1 + 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\ddot{u}} \\ \hat{\ddot{w}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\kappa\zeta_A \omega_A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\dot{u}} \\ \hat{\dot{w}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa\omega_A^2 & 0 \\ 0 & \Omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{F}{M} \end{Bmatrix} \quad (5.212)$$

Für die zweite Transformation wird versucht eine Matrix [A] zu finden, für die

$$[A] \begin{bmatrix} \kappa & \kappa \\ \kappa\mu(1 + \kappa) & 1 + 2\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \hat{\mu} & 1 + \hat{\mu} \end{bmatrix} \quad (5.213)$$

gilt. Diese Transformationsmatrix lässt sich mit

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + \mu(2 - \kappa - \kappa^2)} \end{bmatrix} \quad (5.214)$$

finden. Multipliziert man Gl. (5.212) von links mit Gl. (5.214) folgt

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \hat{\mu} & \hat{\mu} + 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\hat{\zeta}_A \hat{\omega}_A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\omega}_A^2 & 0 \\ 0 & \hat{\Omega}_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\hat{M}} \end{Bmatrix} F \quad (5.215)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \mu \frac{\kappa(1 + \mu)}{1 + \mu(2 - \kappa - \kappa^2)} \\ \hat{\Omega}_n &= \Omega_n \frac{1}{\sqrt{1 + \mu(2 - \kappa - \kappa^2)}} \\ \hat{M} &= M(1 + \mu(2 - \kappa - \kappa^2)) \end{aligned} \quad (5.216)$$

Das Symbol $\hat{}$ deutet darauf hin, dass es sich hierbei um Parameter des äquivalenten Zweimassenschwingers handelt. Damit können folgende Äquivalenzbeziehungen aufgestellt werden

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_A &= \omega_A, \quad \hat{\zeta}_A = \zeta_A, \quad \hat{m} = m_F \kappa(1 + \mu) \\ \hat{\Omega}_n &= \Omega_n \frac{1}{\sqrt{1 + \mu(2 - \kappa - \kappa^2)}}, \quad \hat{M} = M(1 + \mu(2 - \kappa - \kappa^2)) \\ \hat{\mu} &= \mu \frac{\kappa(1 + \mu)}{1 + \mu(2 - \kappa - \kappa^2)} \end{aligned} \quad (5.217)$$

Begrenzt man das Masseverhältnis Flüssigkeitsmasse zu (modaler) Tragwerksmasse für den praktischen Einsatzbereich mit 5 % (siehe Kapitel 2.2.8.3), lassen sich die Gl. (5.217) in nachfolgender Weise näherungsweise vereinfachen.

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_A &= \omega_A \\ \hat{\zeta}_A &= \zeta_A \\ \hat{m} &= m_F \kappa = m_F \frac{\Delta z_0}{2H} \\ \hat{\Omega}_n &= \Omega_n \\ \hat{M} &= M \\ \hat{\mu} &= \mu \kappa = \mu \frac{\Delta z_0}{2H} \end{aligned} \quad (5.218)$$

Aus den vereinfachten Abstimmungsparametern lassen sich folgende Punkte ablesen

- 1.) Bei der tatsächlich aktiven Flüssigkeitsmasse handelt es sich um jene, die zwischen den ausgelenkten Flüssigkeitsspiegeln liegt. Dies kann man leicht an einem Massevergleich wie folgt zeigen (siehe Abbildung 5.2)

$$\begin{aligned}
 m_F &= 2H\rho A \\
 m_A &= \Delta z_0 \rho A \\
 \frac{m_A}{m_F} &= \frac{\Delta z_0 \rho A}{2H\rho A} = \frac{\Delta z_0}{2H} = \kappa
 \end{aligned} \tag{5.219}$$

Jene Flüssigkeitsmasse im Ausrundungsbereich ist dynamisch inaktive Masse. Es muss also das Bestreben bei jeder Tilgerabstimmung sein, eine möglichst große dynamisch aktive Masse zu erzielen. Dies erreicht man durch einen möglichst großen Parameter κ ; wobei dieser aus geometrischen Überlegungen durch 1 (bei einem Winkel $\alpha = 90^\circ$) nach oben hin begrenzt ist.

- 2.) Durch die geringe zusätzliche Masse der Flüssigkeitsschwingungstilger bleibt die (modale) Brückenmasse sowie die zugehörige Eigenkreisfrequenz nahezu unverändert.
- 3.) Das Masseverhältnis der Flüssigkeit zur (modalen) Brückenmasse kann ebenfalls durch einfache Multiplikation des Beiwertes μ in das äquivalente Masseverhältnis des transformierten Zweimasseschwingers umgerechnet werden

$$\hat{\mu} = \mu\kappa = \mu \frac{\Delta z_0}{2H} \tag{5.220}$$

Das bedeutet, dass die dynamisch aktive Masse in den nachfolgenden Grenzen zu liegen kommt

$$0 \leq \frac{m_A}{m_F} \leq 1 \tag{5.221}$$

5.3.4. Optimale Abstimmungskriterien des Flüssigkeitsschwingungstilgers

Die optimalen Abstimmungsparameter des äquivalenten Zweimasseschwingers mit Kräfteerregung nach Den Hartog lauten nach Kapitel 2.2.8.3

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{opt} &= \frac{1}{1 + \hat{\mu}} \\
 \hat{\zeta}_{opt, \sim} &= \sqrt{\frac{3\hat{\mu}}{8(1 + \hat{\mu})}}
 \end{aligned} \tag{5.222}$$

Setzt man darin das zuvor ermittelte äquivalente Masseverhältnis $\hat{\mu} = \mu\kappa(1 + \mu) / (1 + \mu(2 - \kappa - \kappa^2))$ ein, folgt für die optimalen Parameter des Flüssigkeitsschwingungstilgers

$$f_{opt} = \frac{1 + \mu(2 - \kappa - \kappa^2)}{1 + 2\mu}$$

$$\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{\kappa\mu(1 + \mu)}{1 + \mu(2 + \kappa\mu - \kappa^2)}}$$
(5.223)

Der Abbildung 5.43 können die Vergrößerungsfunktionen der Tragwerksbewegung in Abhängigkeit der Dämpfung entnommen werden. Betrachtet man jene mit optimaler Dämpfung, kann aufgrund deren Verlauf die Richtigkeit der zuvor hergeleiteten Abstimmungsparameter angenommen werden (P und Q in gleicher Höhe, in P und Q horizontale Tangente). Dabei wurden folgende Annahmen getroffen

$$\mu = 0,05 \quad , \quad \Delta z_0 = H \rightarrow \kappa = 0,50$$

$$f = f_{opt} = \frac{1 + \mu(2 - \kappa - \kappa^2)}{1 + 2\mu} = 0,966$$
(5.224)

$$\zeta = \zeta_{opt} = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{\kappa\mu(1 + \mu)}{1 + \mu(2 + \kappa\mu - \kappa^2)}} = 0,0951$$

Zum Vergleich zu Gl. (5.224) würden die optimalen Abstimmungskriterien für den gewöhnlichen Zweimassenschwinger wie folgt lauten

$$f_{opt} = \frac{1}{1 + \mu} = 0,952 \quad , \quad \zeta_{opt,\sim} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)}} = 0,0951$$
(5.225)

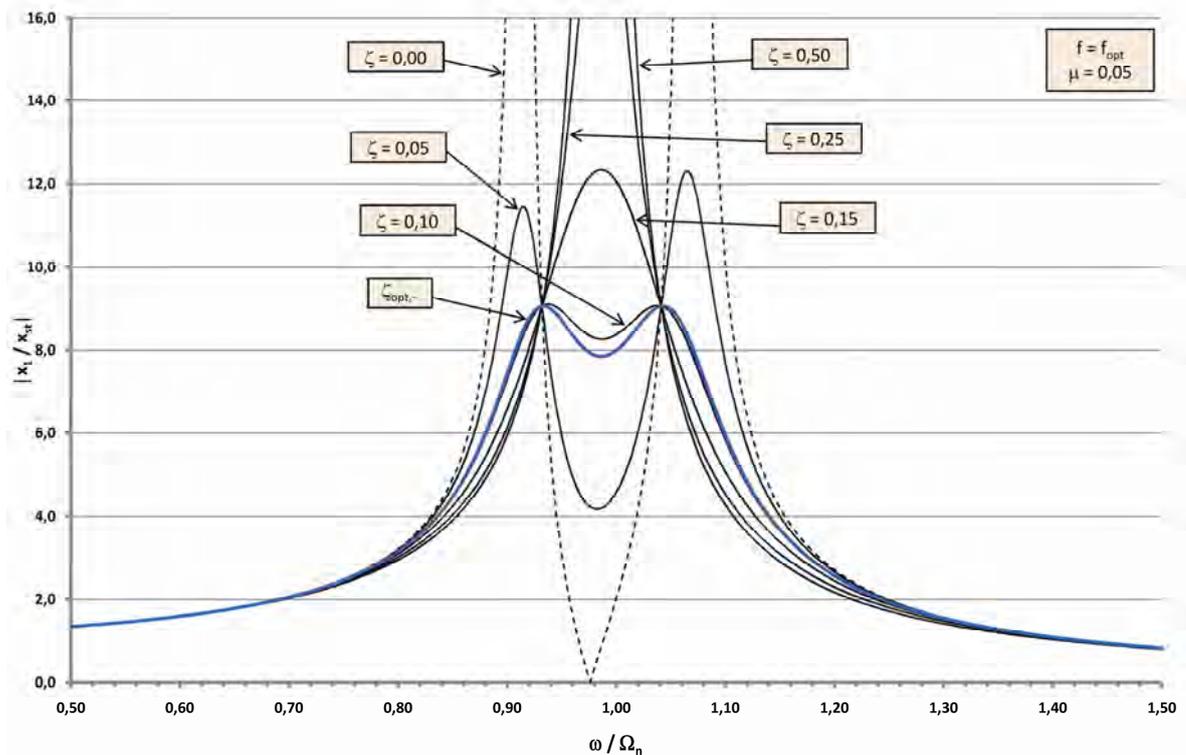


Abbildung 5.43: dynamische Vergrößerungsfunktionen der Tragwerksbewegung unter Anwendung der optimalen Tilgerabstimmungen

5. Flüssigkeitsschwingungstilger gegen vertikale Brückenschwingungen

Nachfolgend ist ein Schema zur Vorgehensweise bei der Bestimmung der optimalen Entwurfparameter des Flüssigkeitsschwingungstilgers dargestellt.

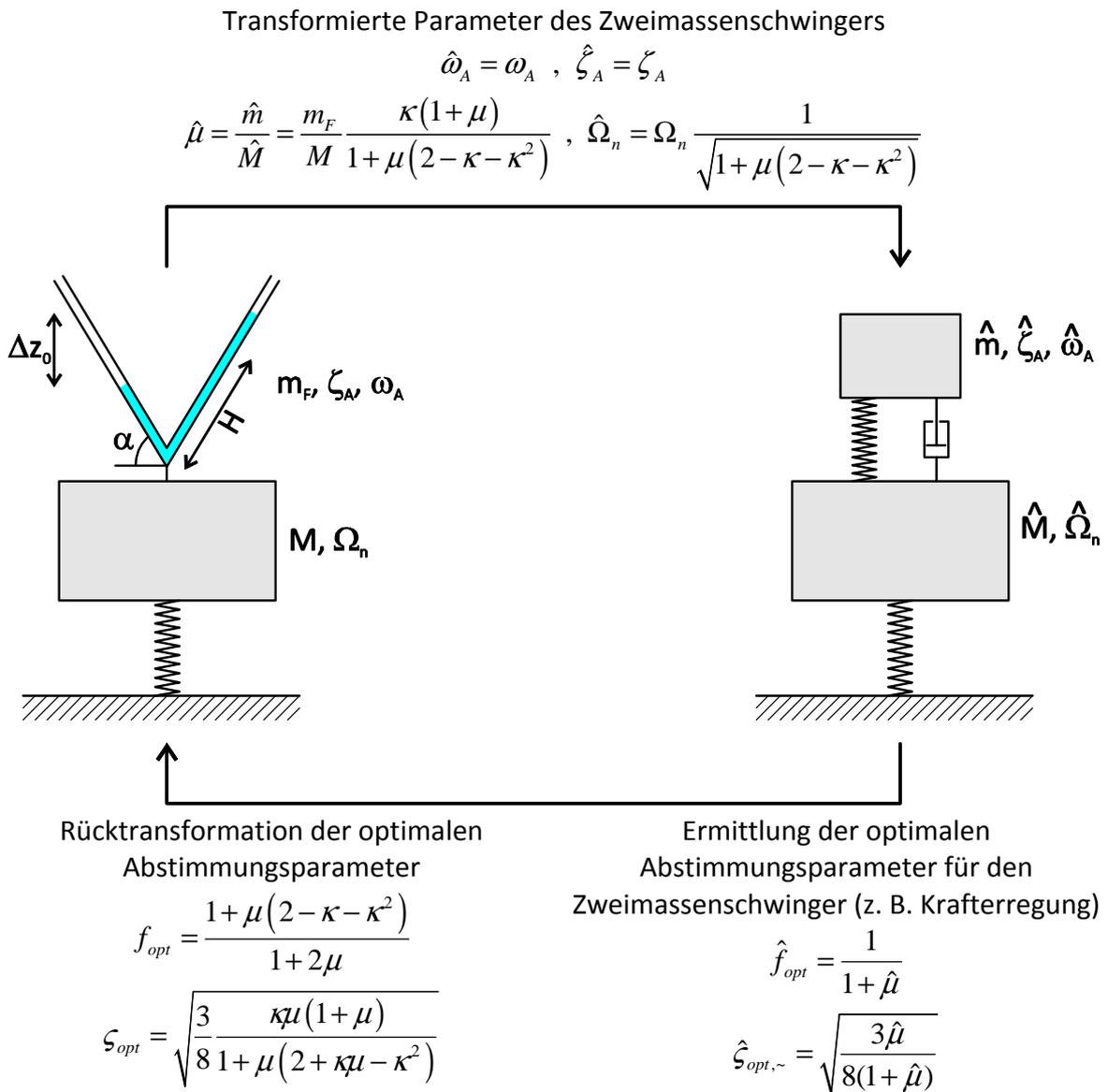


Abbildung 5.44: Ablaufschema zur Bestimmung der optimalen Entwurfparameter für den Flüssigkeitsschwingungstilger mit Kräfteerregung

Die genaue Vorgehensweise zur Ermittlung und Einstellung der optimalen Parameter sowie die Auswirkungen ungenauer bzw. fehlender Abstimmung können den Kapiteln 6 und 7 entnommen werden.

6. VERSUCHSTECHNISCHE UNTERSUCHUNGEN ZU DEN FLÜSSIGKEITSSCHWINGUNGSTILGERN

Zur Überprüfung des ermittelten mechanischen Verhaltens der Flüssigkeitsschwingstilger aus Kapitel 5 einerseits, sowie zur anschaulichen Darstellung der Wirkungsweise der Flüssigkeitsschwingstilger wurden Versuche mit Tilgerkonstruktionen auf der Versuchsbrücke, die in Kapitel 3.1 vorgestellt wurde, durchgeführt. Bei den Tilgern wurde dabei, um Maßstabsverzerrungen der Ergebnisse ausschließen zu können, auf die Ausführung realer Geometrieabmessungen, also Abmessungen, die für reale Brückenkonstruktionen zum Einsatz kommen könnten, Wert gelegt. Dabei wurden zwei Versuchsreihen ausgearbeitet.

- 1) *Versuchsreihe 1:* Brückentragwerk ohne Gleisoberbau (Gleis, Schienen, Schwellen) mit zwei darauf abgestimmten Tilgern (Typ 1)
- 2) *Versuchsreihe 2:* Brückentragwerk mit Gleisoberbau (Gleis, Schienen, Schwellen) ebenfalls mit zwei darauf abgestimmten Tilgern (Typ 2)

Diese beiden Versuchsreihen werden im Nachfolgenden dargestellt und näher beleuchtet. Zur Überprüfung der mechanischen Gleichungen des Flüssigkeitsschwingstilgers sowie zur Verifizierung der Messergebnisse wurden begleitend zu den experimentellen Untersuchungen, numerische Untersuchungen mithilfe des Programmpaketes Matlab 2008a (Matlab, 2008) und Simulink 7.1 (Simulink, 2008) durchgeführt. Wie bereits in Kapitel 3.3 angeführt, wurden bei den Versuchen Verformungen, Beschleunigungen und Dehnungen gemessen und aufgezeichnet. Zur Ermittlung der Flüssigkeitsspiegelbewegungen in den Tilgern wurde begleitend der Druck an den Rohrenden gemessen und daraus die Flüssigkeitsspiegelbewegung rückgerechnet (siehe Kapitel 5.1.1). Diese Kontrolle der Flüssigkeitsbewegung kam erst bei der Versuchsreihe 2 zur Anwendung, da die Drucksensoren bei der Versuchsreihe 1 noch nicht zur Verfügung standen.

6.1. Versuchsreihe 1

6.1.1. Experimentelle Untersuchungen

6.1.1.1. Ausgangsparameter

Wie in Kapitel 3.1.3.1 bereits angeführt, konnten die mechanischen Parameter der Brücke ohne Gleisoberbau zu

$$\begin{aligned}m &= 10,35 \text{ t} \\f_1 &= 4,65 \text{ Hz} \\ \zeta &\approx 1,00 \text{ \%}\end{aligned}\tag{6.1}$$

ermittelt werden. Damit lautet die für die Abstimmung der Tilger notwendige modale Masse der Brücke nach Gl. (2.151)

$$\bar{m} = \frac{10,35}{2} = 5,18 \text{ t} \quad (6.2)$$

Nachfolgend ist die Versuchsbrücke mit den darauf befestigten Flüssigkeitsschwingungstilgern dargestellt. Bei diesen handelt es sich um eine Rohrkonstruktion mit V-Form aus PE-HD Wasserrohren. Der Innendurchmesser der Rohre wurde mit 221,0 mm, die Neigung der Rohrschenkel mit 60° und die Länge eines Schenkels mit 1050,0 mm festgelegt. Die Rohrenden wurden mittels Losflanschen und darauf verschraubten Stahldeckeln mit Dichtungsringen druckdicht abgeschlossen. In den Stahldeckeln wurden zwei Öffnungen mit Gewinde vorgesehen, eine für die Versorgung mit Druckluft und eine weitere zur Anbringung der Drucksensoren.



Abbildung 6.1: auf der Versuchsbrücke montierte Flüssigkeitsschwingungstilger

Die Montage der Tilger erfolgte jeweils in Brückenmitte, links und rechts der Befestigungsrahmen der Unwuchterreger. Die Befestigung wurde mittels Rohrschellen zug- und druckfest am mittleren Holzquerträger realisiert (Abbildung 6.2). Weiters wurden die beiden Schenkel der Tilger mittels Zugbändern und zugehörigen Spannvorrichtungen direkt an den Unwuchterregern befestigt (Abbildung 6.1). Während der Versuchsdurchführung konnten optisch keine Differenzbewegungen zwischen Brückentragwerk und Tilger festgestellt werden, die Befestigung stellte sich also als ausreichend steif heraus.



Abbildung 6.2: Kraftschlüssiger Verbund der Tilger mit der Versuchsbrücke realisiert mit Rohrschellen



Abbildung 6.3: druckdichter Abschluss der Rohrenden mit Ventil zur Druckaufbringung

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

Der Überdruck wurde mithilfe eines handelsüblichen Druckluftkompressors erzeugt. Da sich die erste Eigenfrequenz des Brückentragwerks mit 4,65 Hz als recht hoch herausstellte, wurde folgender Befüllungsvorgang für die Tilger gewählt

- 1) Befüllen mit Wasser bei geöffneten Rohrenden bis sich die gewünschte Stromfadenlänge $2H$ eingestellt hat
- 2) Schließen eines Rohrendes und einpressen von Luft bis sich die erforderliche Flüssigkeitsspiegelauslenkung Δz_0 eingestellt hat
- 3) Schließen des zweiten Rohrendes
- 4) Versuchsdurchführung

Dies entspricht also dem Fall 2, zweiseitig geschlossenes Rohr, der Kapitel 5.1.1.2 und 5.1.2.3. Um die Abstimmung der Tilger mit der tatsächlich ausgeführten Tilgergeometrie durchführen zu können, wurde diese vor Ort vermessen und lieferte nachfolgend angeführte Abmessungen.

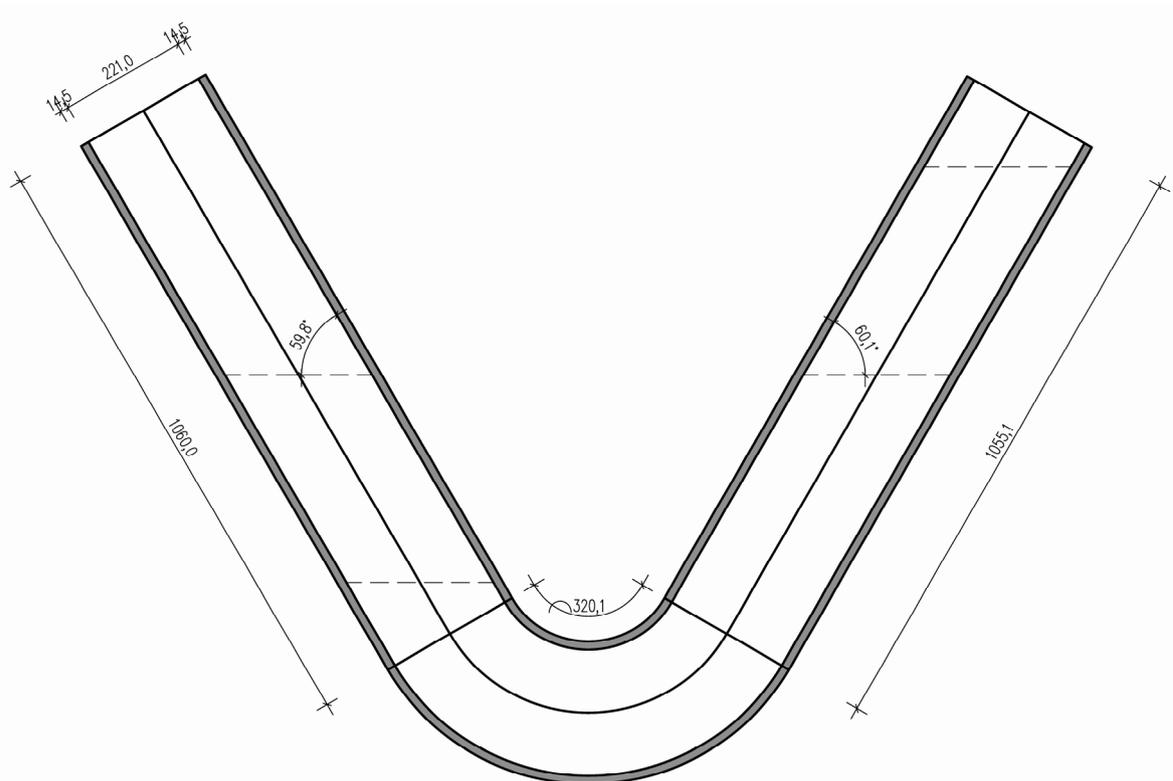


Abbildung 6.4: realisierte Tilgergeometrie des Tilgertyps 1

In Abbildung 6.5 sind die Parameter dargestellt, die zur Tilgerabstimmung herangezogen und variiert wurden. Die darin verwendeten Parameter sollen an dieser Stelle nochmals angeführt werden (siehe Kapitel 5.1)

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

H	halbe Ausgangslänge des Stromfadens
H_L	Ausgangslänge des Luftvolumens
Δz_0	vertikale Flüssigkeitsspiegeldifferenz im ausgelenkten Zustand
d	Rohrdurchmesser
S_1	Abstand zwischen Rohrende und ausgelenktem Flüssigkeitsspiegel (gemessen an der Rohrinneenseite)
S_2	Abstand zwischen Rohrende und unausgelenktem Flüssigkeitsspiegel (gemessen an der Rohrinneenseite)
p_0	Atmosphärendruck mit 100.000 N/m^2
γ	Adiabatenkoeffizient (für Luft 1,405)
ρ	Dichte des Wassers
α	Neigung der Rohrschenkel
g	Erdbeschleunigung

Da die Parameter H und H_L als Konsequenz der Annahmen der Bernoulli Gleichung in der Rohrachse definiert sind und dort eine genaue Einstellung der geforderten Parameterwerte unmöglich ist, wurden die Parameter S_1 und S_2 eingeführt, die an der Rohrinneenseite messbare Bezugsgrößen liefern. Diese stellen lediglich Hilfsgrößen dar und lassen sich aus den ursprünglichen Parametern wie folgt ermitteln

$$S_1 = H_L - \frac{d}{2 \tan(\alpha)}, \quad S_2 = H_L - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - \frac{d}{2 \tan(\alpha)} \quad (6.3)$$

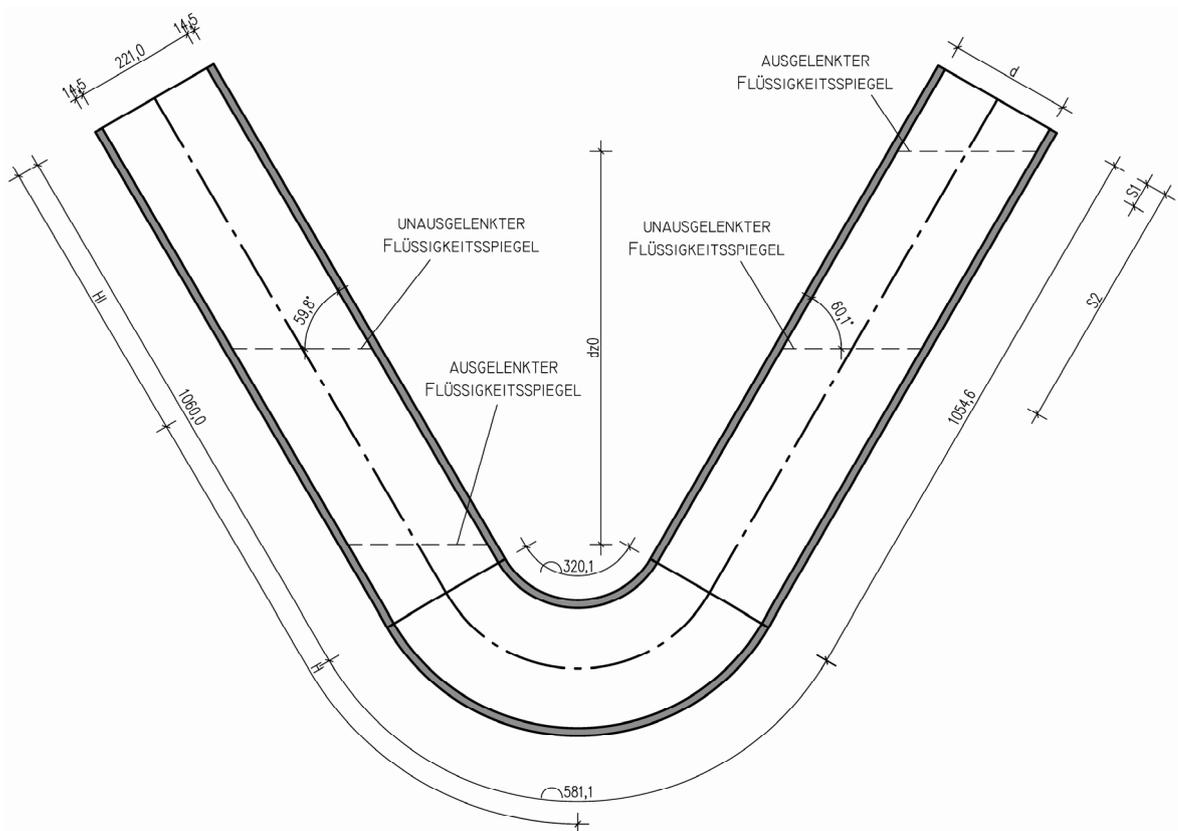


Abbildung 6.5: Tilgerdarstellung mit den zu variierenden Parametern

6.1.1.2. Untersuchungen zur Frequenzabstimmung

Um den Einfluss der Frequenzabstimmung f (Tilgereigenfrequenz zur Tragwerkseigenfrequenz) auf die Effektivität des Tilgers zu untersuchen, wurden nachfolgende Konfigurationen ausgeführt und getestet, wobei dabei zur Versuchsbeschleunigung nur jeweils 1 Tilger aktiviert wurde.

Tabelle 6.1: Variation der Tilgerparameter

f_{gepl}	H	H_L	H_{ges}	μ	m_F	Δz_0	S_1	S_2	f_{ger}
[Hz]	[mm]	[mm]	[mm]	[%]	[kg]	[mm]	[mm]	[mm]	[Hz]
4,00	827,0	524,0	1351,0	1,25	24,20	630,9	459,5	94,4	4,05
4,25	835,0	507,0	1342,0	1,26	24,46	637,6	450,8	81,2	4,28
4,50	797,0	548,0	1345,0	1,20	28,02	730,5	490,0	67,0	4,54
4,60	804,0	541,0	1345,0	1,21	28,02	730,5	482,4	59,7	4,63
4,70	862,0	487,0	1349,0	1,30	25,22	657,5	424,7	44,3	4,71
5,00	826,0	519,0	1345,0	1,24	28,02	730,5	460,2	37,2	5,01
5,25	840,0	504,0	1344,0	1,26	28,02	730,5	445,9	23,2	5,36
(1)				(2)		(3)			(4)

Darin beschreiben f_{gepl} die angestrebte und f_{ger} die mit den realisierten Abmessungen des Tilgers rechnerisch ermittelte Eigenfrequenz, μ beschreibt das Masseverhältnis Flüssigkeitsmasse beider Tilger zu modaler Brückenmasse. Die rechnerische Eigenfrequenz des Flüssigkeitsfadens ergibt sich nach Kapitel 5.1.2.3 für den Befüllungsfall 2 zu

$$f_{Fall\ 2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g \sin(\alpha)}{2H} \left[1 + \frac{\gamma}{2\rho g} \left(\frac{p_0}{H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2}} + \frac{p_0 + \rho g \Delta z_0}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} \right) \right]} \quad (6.4)$$

und die Flüssigkeitsmasse nach Kapitel 5.2.1 zu

$$m_F = 2H \rho A \quad (6.5)$$

Zur Einstellung der geplanten Eigenfrequenz der Tilger, die im Bereich der Eigenfrequenz des Tragwerks angesetzt wurde, wurde zuerst das Masseverhältnis μ im Bereich von ca. 1,25% gewählt. Daraus ergibt sich mit der Tilgeranzahl von zwei und dem gewählten Rohrquerschnitt A der Tilger die erforderliche Stromfadenlänge $2H$. Mit dieser wurde versucht, durch Einstellung einer möglichst großen vertikalen Flüssigkeitsspiegeldifferenz Δz_0 die aktive dynamische Masse so groß wie möglich vorzugeben. Durch die Wahl der Stromfadenlänge $2H$ sowie durch die vorgegebenen Rohrschenkellänge H_{ges} ergibt sich die Ausgangslänge der Luftfedern H_L und damit auch die sich rechnerisch ergebende Eigenfrequenz des schwingenden Stromfadens. Diese Schritte sind in Tabelle 6.1 numerisch als Schritt (1) bis (4) gekennzeichnet. Da durch Festlegung der Stromfadenlänge sowie der Luftfederhöhe die Eigenfrequenz bestimmt ist, müssen die Schritte (1) bis (4) iterativ durchlaufen werden, bis die geplante mit der rechnerisch ermittelten Eigenfrequenz so gut wie möglich übereinstimmt.

Mit Tabelle 6.1 lassen sich, nach Kapitel 5.3.4, die optimalen Parameter des Tilgers wie folgt ermitteln

Tabelle 6.2: optimale Parameter des Tilgers

f_{gepl} [Hz]	κ [-]	$\bar{\mu}$ [%]	f_{opt} [-]	$f_{1,\text{opt}}$ [Hz]	ζ_{opt} [%]
4,00	0,38	0,46	0,994	4,62	4,20
4,25	0,38	0,47	0,994	4,62	4,23
4,50	0,54	0,54	0,992	4,61	4,53
4,60	0,54	0,54	0,992	4,61	4,53
4,70	0,48	0,48	0,993	4,62	4,29
5,00	0,54	0,54	0,992	4,61	4,53
5,25	0,54	0,54	0,992	4,61	4,52

Die dabei angewendeten Abstimmungskriterien (siehe Kapitel 5.3.3 und 5.3.4) werden an dieser Stelle nochmals angeführt und lauten wie folgt

$$\begin{aligned}
 \kappa &= \frac{\Delta z_0}{2H} \\
 \hat{\mu} &= \mu \frac{\kappa(1+\mu)}{1+\mu(2-\kappa-\kappa^2)} \\
 f_{\text{opt}} &= \frac{1+\mu(2-\kappa-\kappa^2)}{1+2\mu} \\
 f_{1,\text{opt}} &= f_{\text{opt}} f_{1,\text{Tragwerk}} \\
 \zeta_{\text{opt}} &= \sqrt{\frac{3}{8} \frac{\kappa\mu(1+\mu)}{1+\mu(2+\kappa\mu-\kappa^2)}}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Die optimale Eigenfrequenz $f_{1,\text{opt}}$ beschreibt dabei jene Frequenz, auf die der Tilger für eine optimale Wirkung eingestellt werden muss. Die größte Wirkung kann also vom Tilger mit der geplanten Eigenfrequenz von 4,60 Hz erwartet werden. Den nachfolgenden Abbildungen (Messergebnisse) können die Verformungen in Brückenmitte für den Resonanzfall mit den unterschiedlichen Konfigurationen nach Tabelle 6.1, sowie für die Brücke ohne aktiven Flüssigkeitsschwingungstilger entnommen werden. Als statische Unwucht wurden dabei die Vollscheiben mit fünf vollen Unbalancen sowie pro Scheibe jeweils einer halben Unbalance eingesetzt. Dies liefert ein statisches Moment pro Unwuchterreger von

$$me = 95,83 \text{ kgcm} \tag{6.7}$$

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

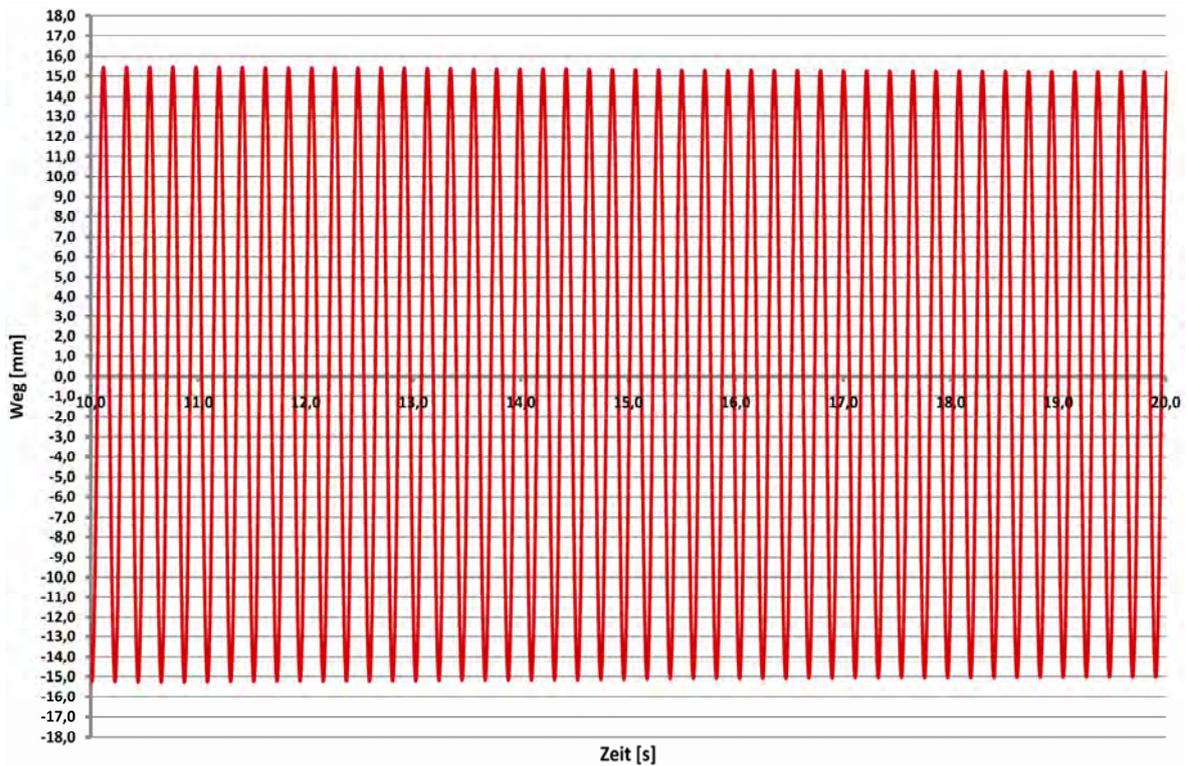


Abbildung 6.6: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit inaktivem Tilger



Abbildung 6.7: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit einem aktiven Tilger
($f_{\text{gepl}} = 4,00 \text{ Hz}$, $\mu = 1,25 \%$)

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

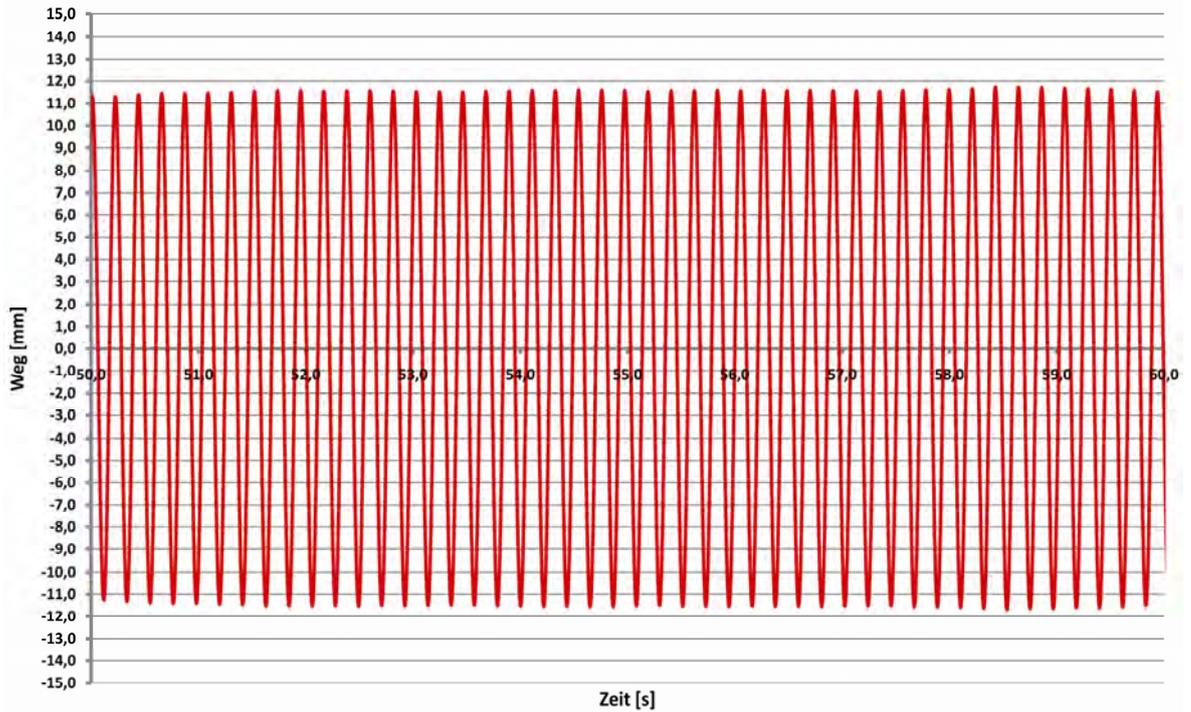


Abbildung 6.8: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit einem aktiven Tilger
($f_{\text{gepl}} = 4,25 \text{ Hz}$, $\mu = 1,26 \%$)

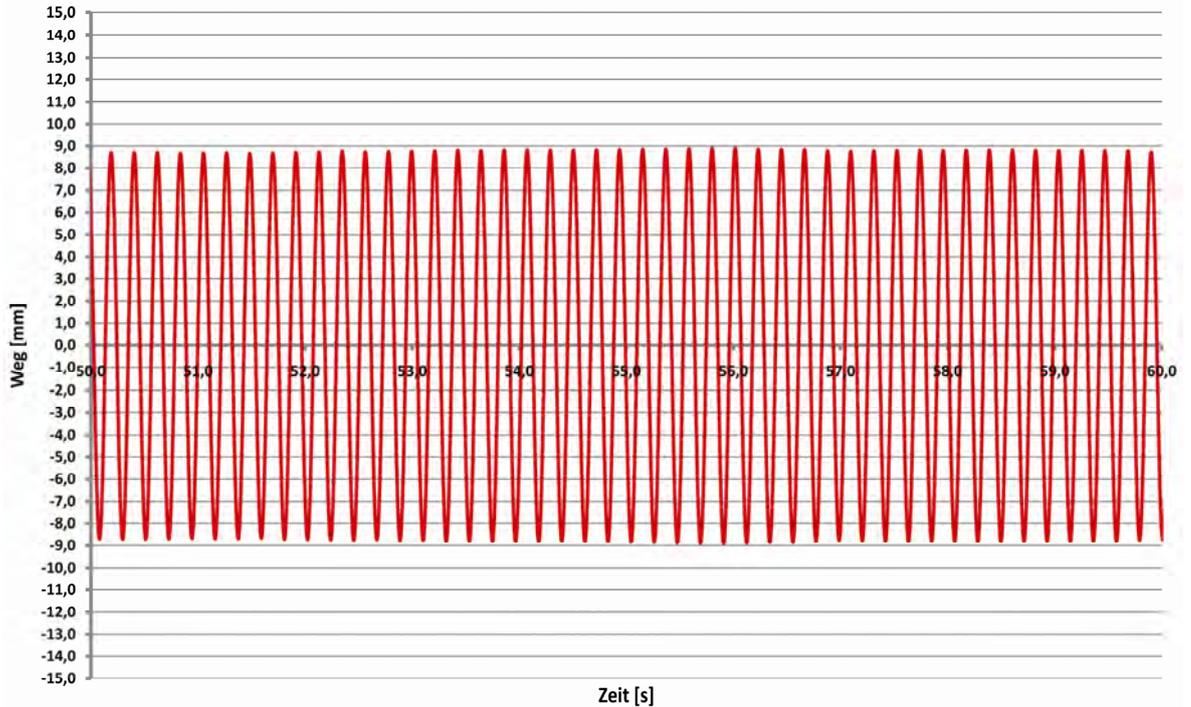


Abbildung 6.9: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit einem aktiven Tilger
($f_{\text{gepl}} = 4,50 \text{ Hz}$, $\mu = 1,20 \%$)

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

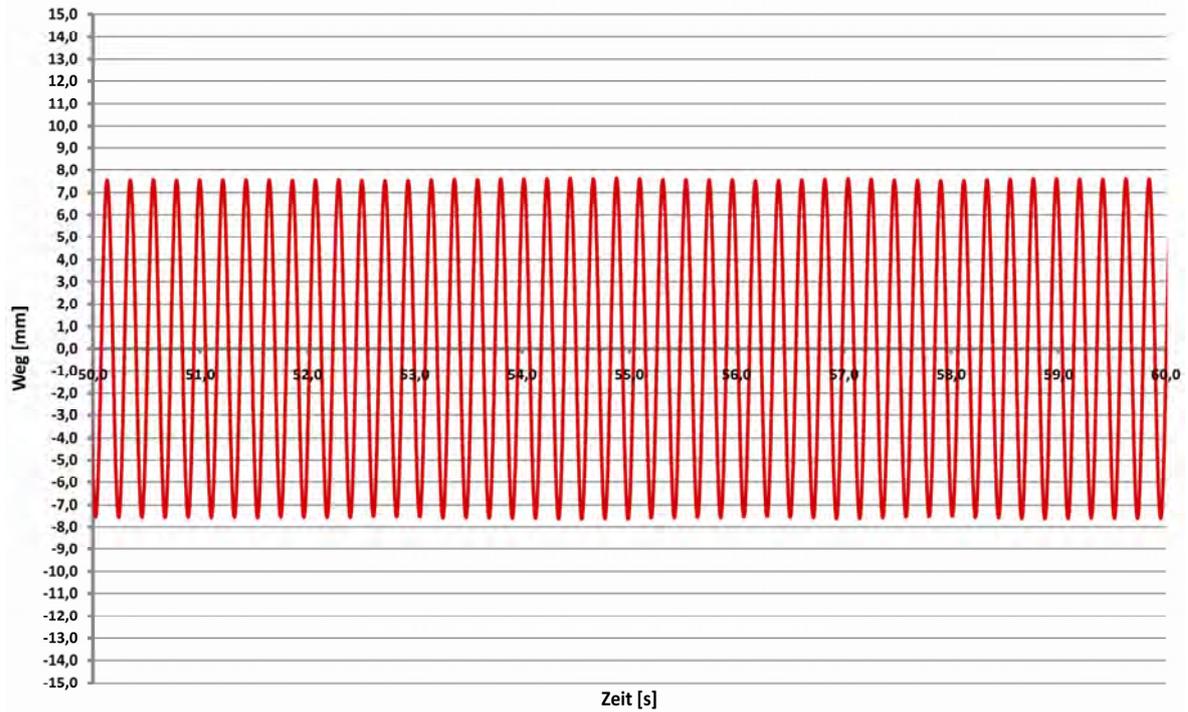


Abbildung 6.10: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit einem aktiven Tilger
($f_{\text{gepl}} = 4,60 \text{ Hz}$, $\mu = 1,21 \%$)

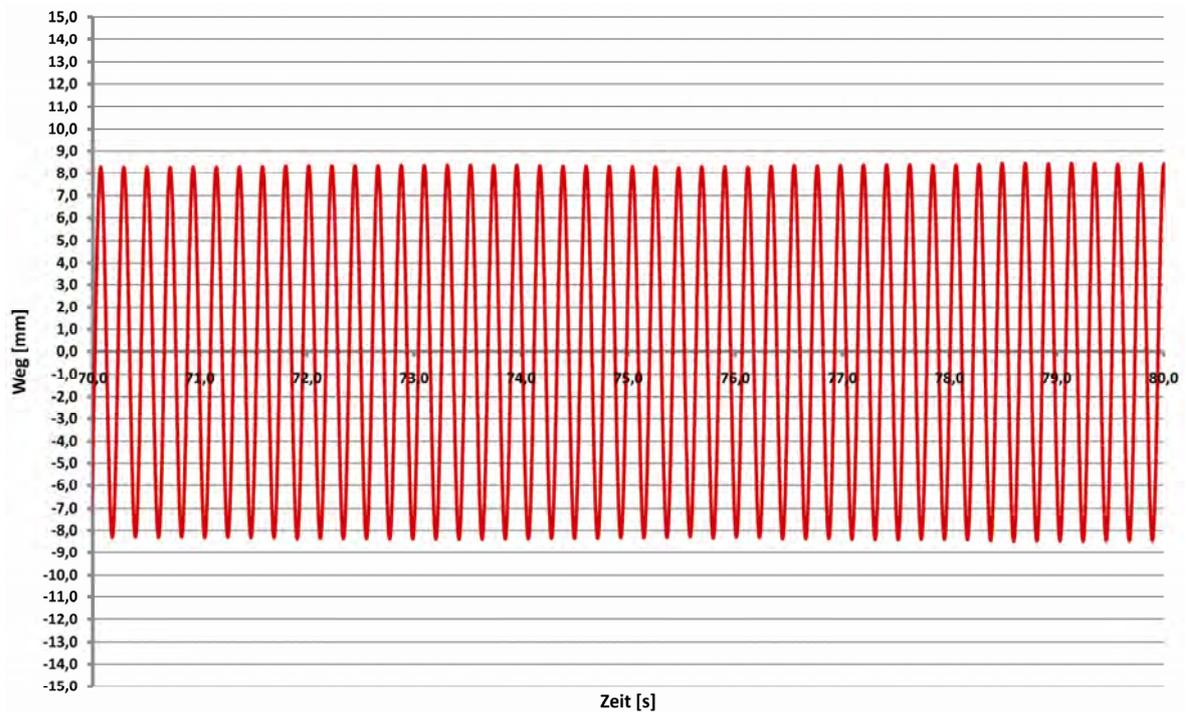


Abbildung 6.11: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit einem aktiven Tilger
($f_{\text{gepl}} = 4,70 \text{ Hz}$, $\mu = 1,30 \%$)

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

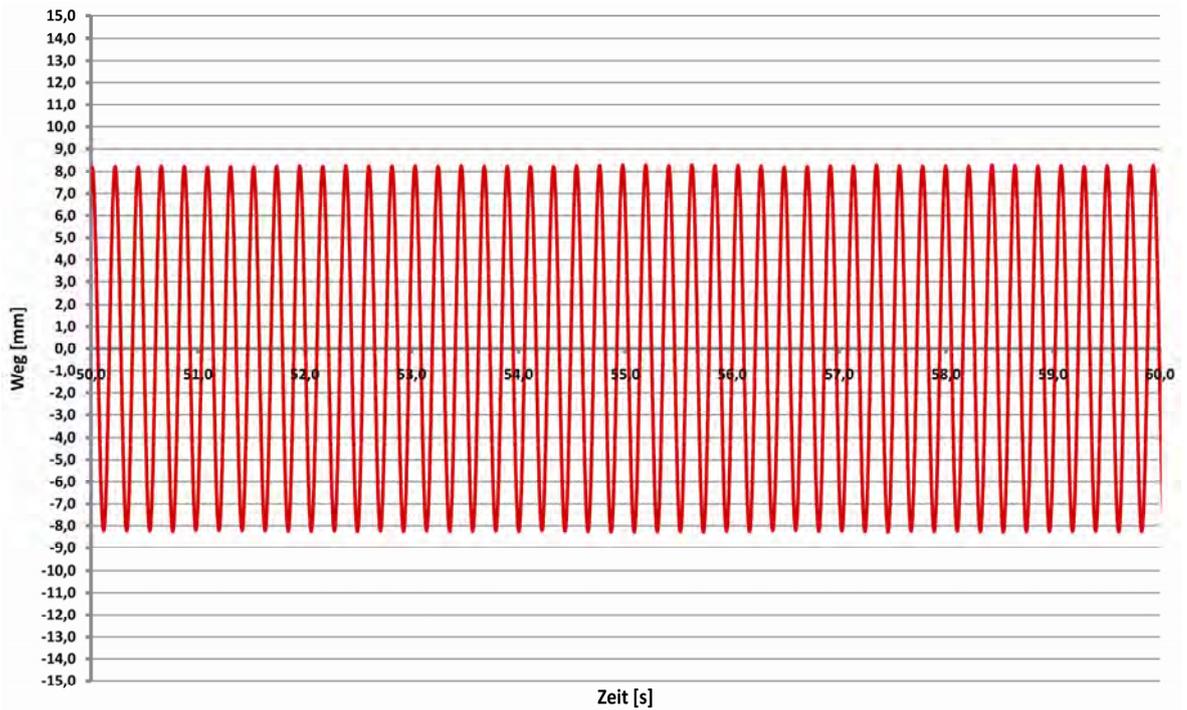


Abbildung 6.12: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit einem aktiven Tilger
($f_{\text{gepl.}} = 5,00 \text{ Hz}$, $\mu = 1,24 \%$)

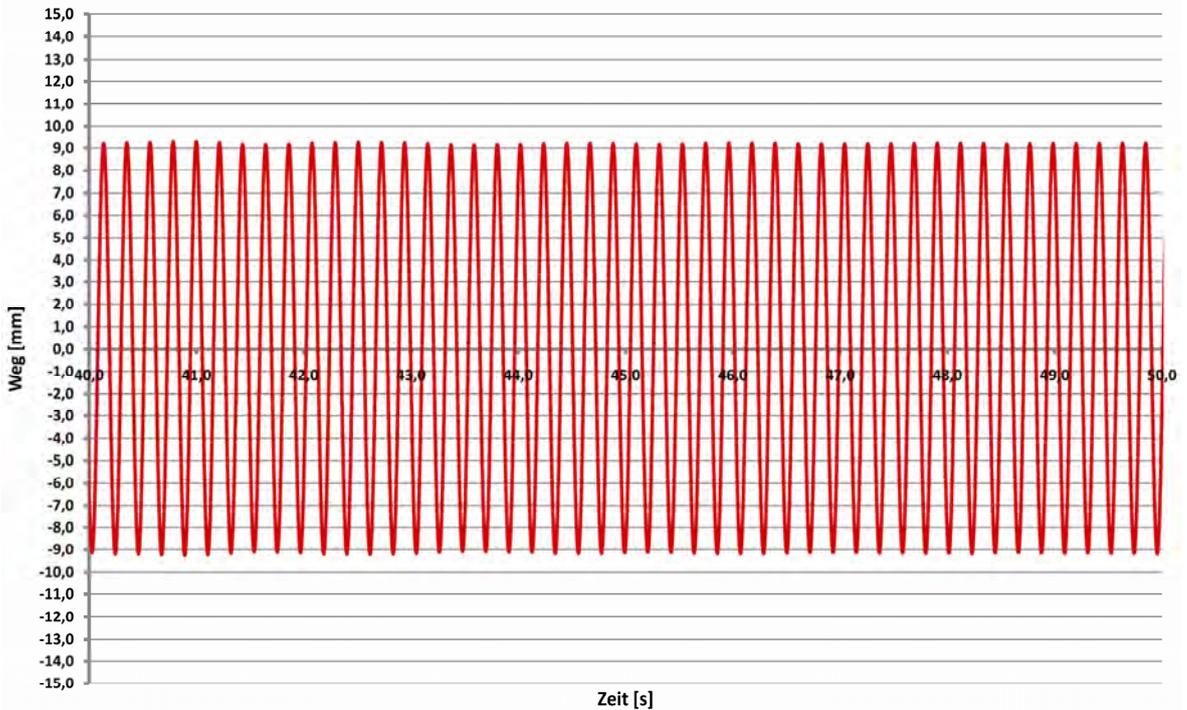


Abbildung 6.13: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit einem aktiven Tilger
($f_{\text{gepl.}} = 5,25 \text{ Hz}$, $\mu = 1,26 \%$)

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

Den zuvor angeführten Abbildungen sowie dem nachfolgenden Vergleichsdiagramm der Brückenbewegungen kann entnommen werden, dass der Tilger, der einer optimalen Frequenzabstimmung am nächsten kam, auch die größte Effektivität aufwies. Somit konnte gezeigt werden, dass, wie bereits in Kapitel 2.2.8 beim Zweimasseschwinger gezeigt werden konnte, eine optimale Abstimmung der Tilger Voraussetzung für deren hohe Effektivität ist. In den Abbildungen der Verformungen ist jedoch ebenfalls ersichtlich, dass bei geringen Abweichungen von den optimalen Parametern, die Tilger trotzdem einen recht hohen Wirkungsgrad aufweisen. Beim Flüssigkeitsschwingungstilger handelt es sich also um ein recht unempfindliches System, das bei geringen Abweichungen von den optimalen Parametern im Bereich von wenigen Zentimetern durchaus noch wirksam bleibt.

Wie aufgrund der Ermittlung der optimalen Abstimmungskriterien erwartet werden konnte, liefert der Tilger mit der geplanten Eigenfrequenz von 4,60 Hz die besten Ergebnisse, also die geringsten Amplituden der Brückenbewegung. Mit dessen Konfiguration wurde der zweite Tilger ebenfalls eingestellt und ein Amplitudenfrequenzgang mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern ausgewertet.

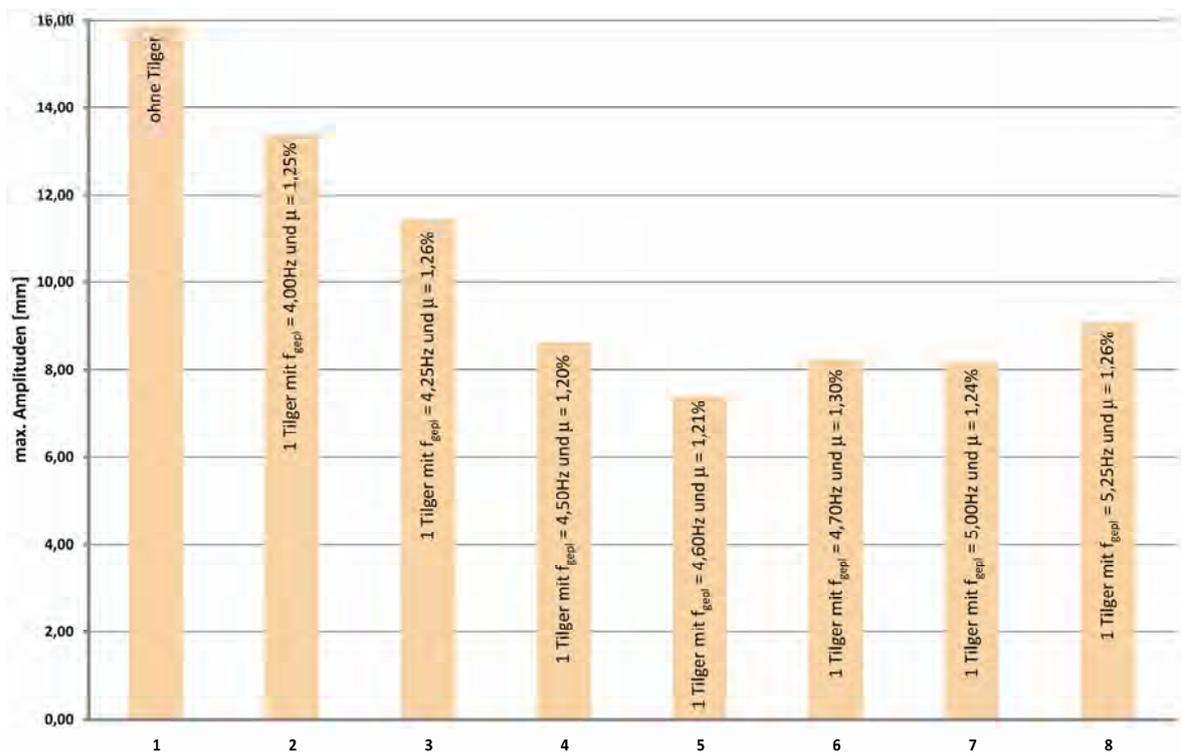


Abbildung 6.14: Vergleich der maximalen Amplituden bei unterschiedlicher Tilgerabstimmung [mm]

Nachfolgend sind erneut Verformungen sowie Beschleunigungen in Brückenmitte des Brückentragwerks mit inaktiven Tilgern sowie mit zwei nach Den Hartog optimal eingestellten Flüssigkeitsschwingungstilgern dargestellt.

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

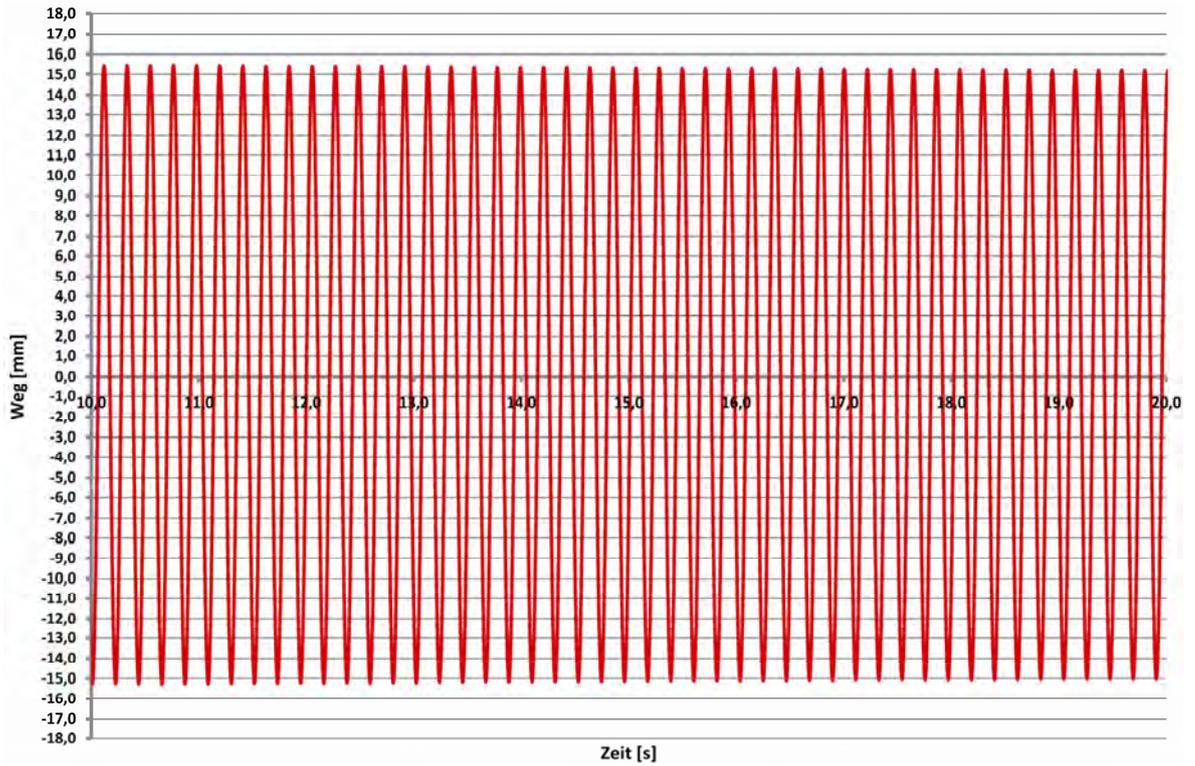


Abbildung 6.15: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit inaktiven Tilgern

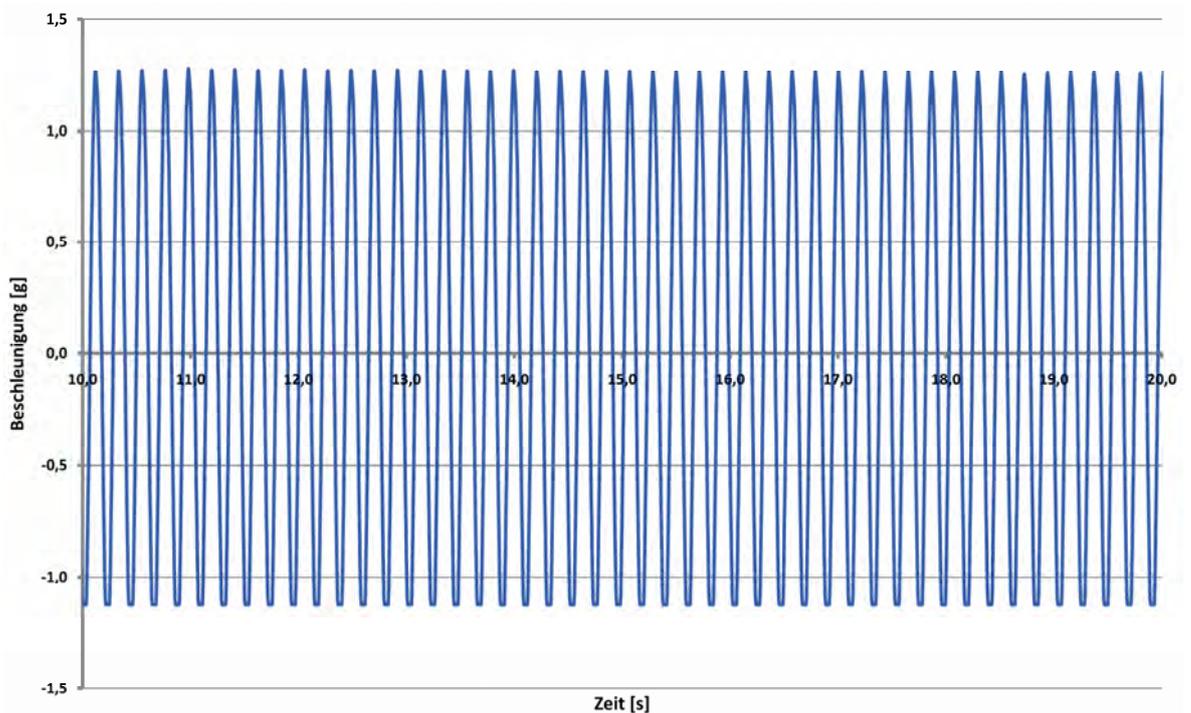


Abbildung 6.16: Beschleunigungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit inaktiven Tilgern

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

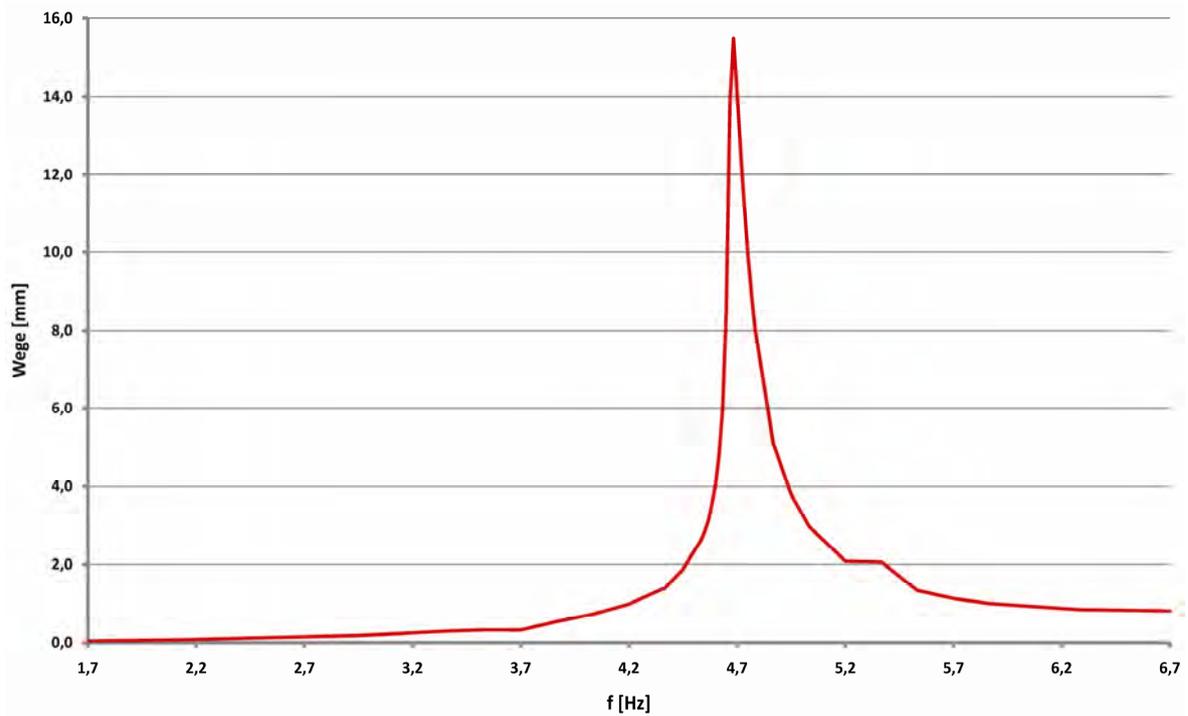


Abbildung 6.17: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit inaktiven Tilgern

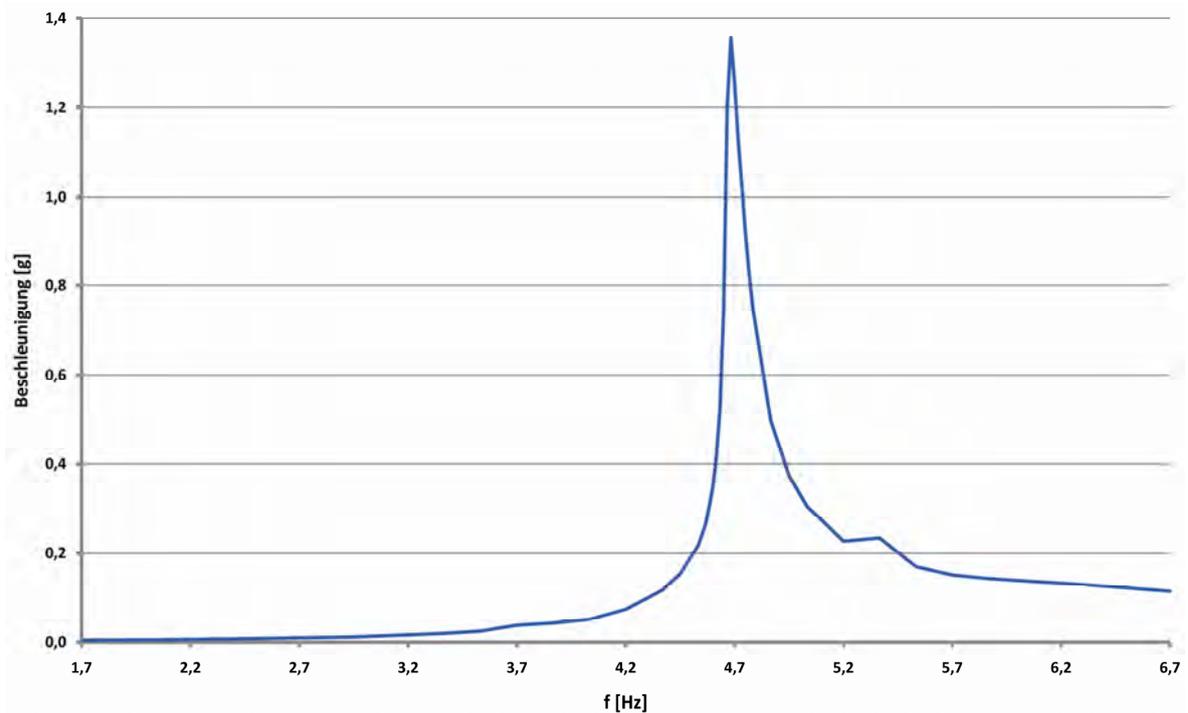


Abbildung 6.18: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen in Brückenmitte mit inaktiven Tilgern

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

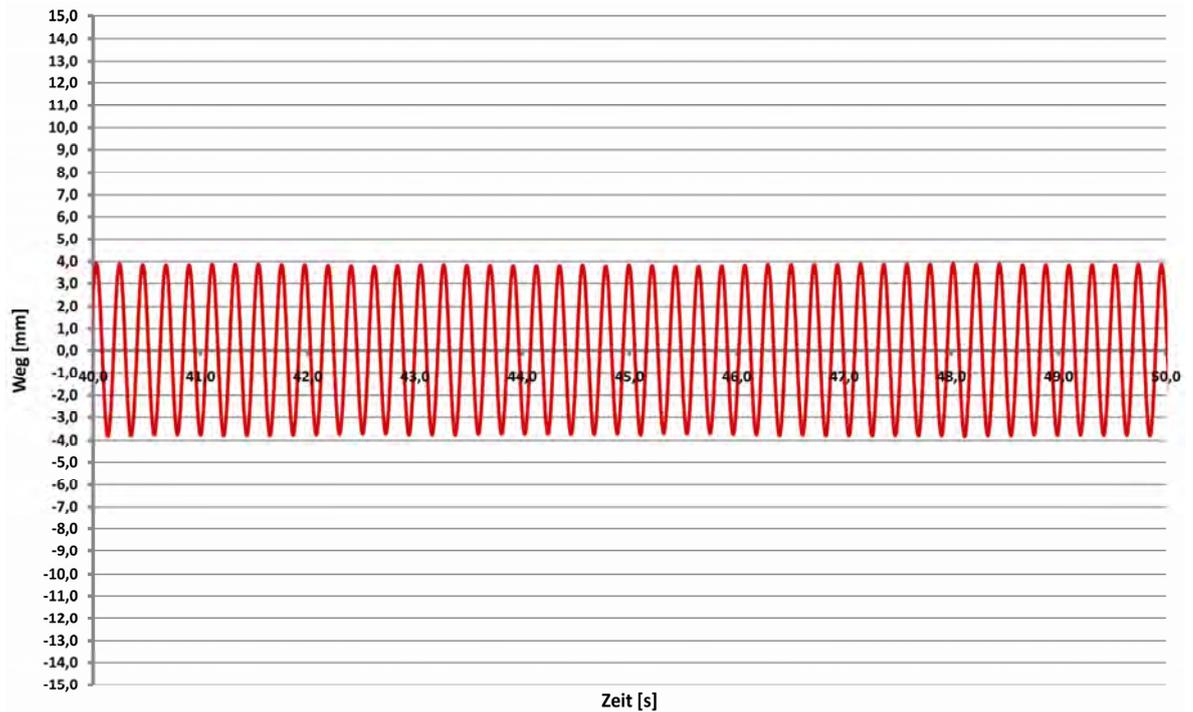


Abbildung 6.19: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern ($f_{\text{gepl}} = 4,60 \text{ Hz}$, $\mu = 2 \cdot 1,21 = 2,42 \%$)

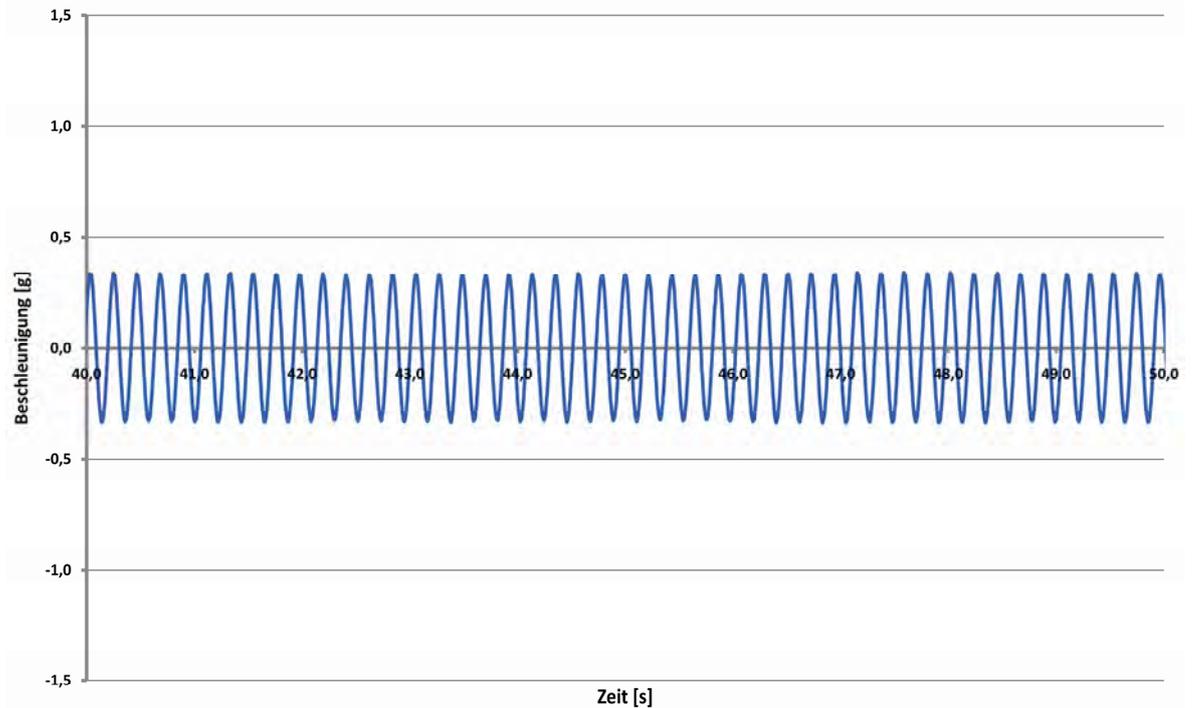


Abbildung 6.20: Beschleunigungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern ($f_{\text{gepl}} = 4,60 \text{ Hz}$, $\mu = 2 \cdot 1,21 = 2,42 \%$)

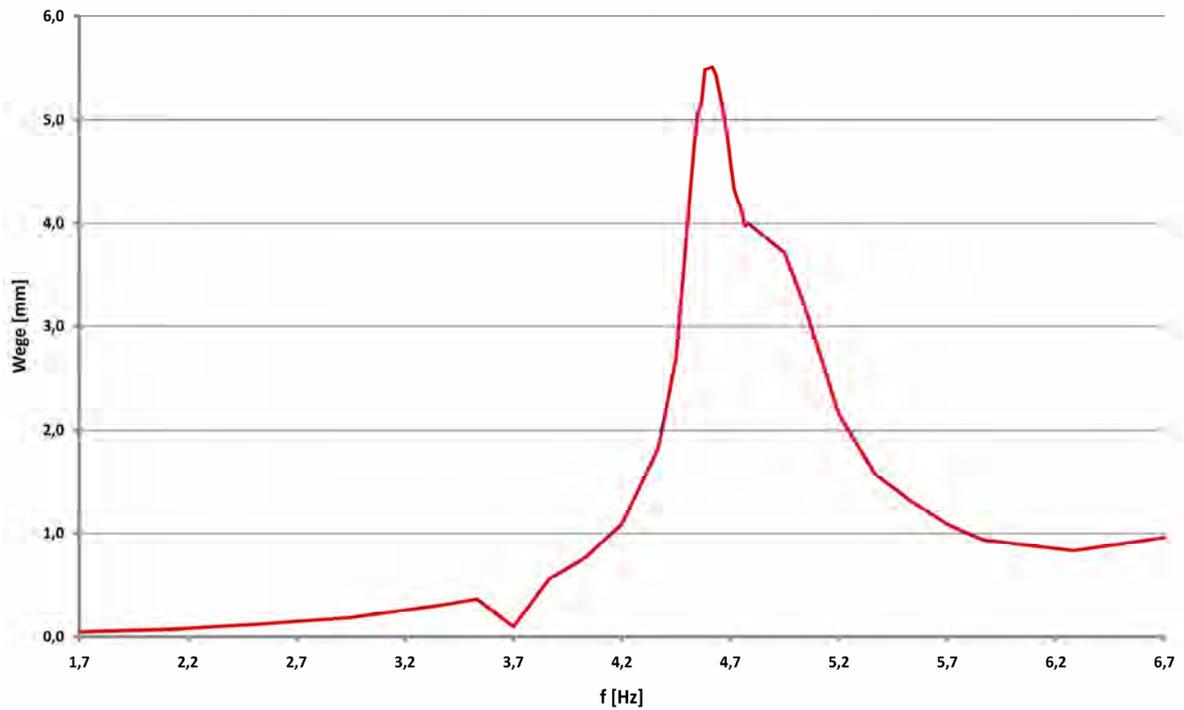


Abbildung 6.21: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern

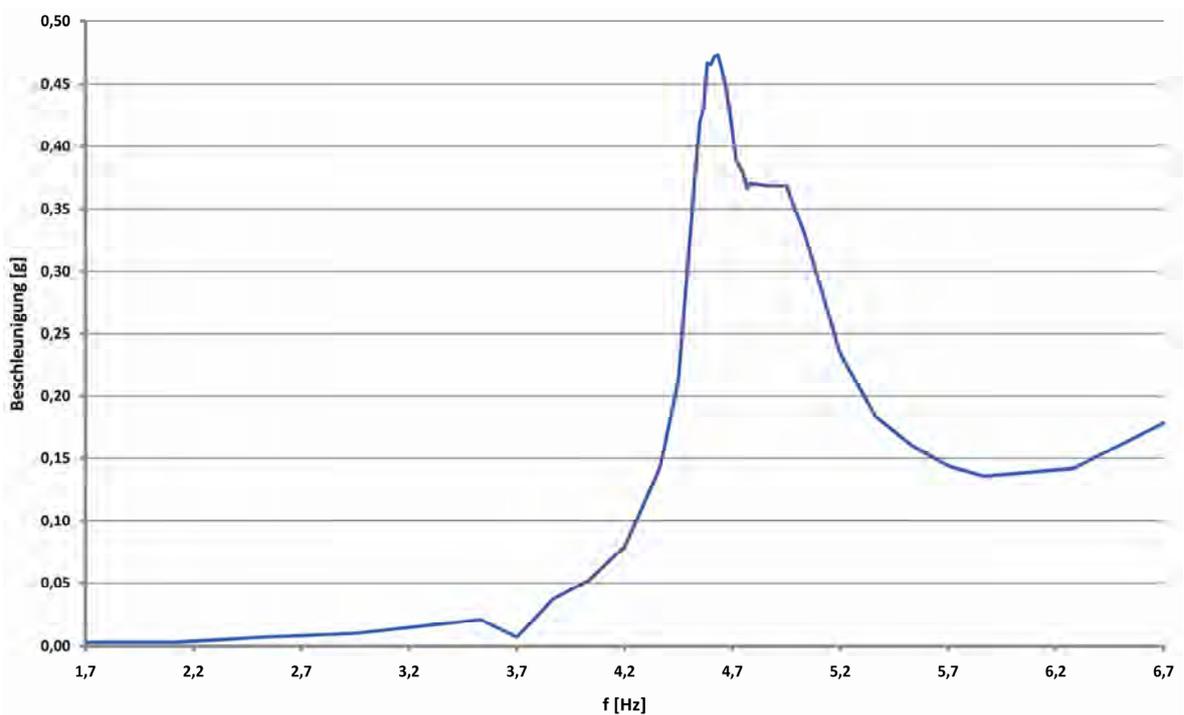


Abbildung 6.22: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

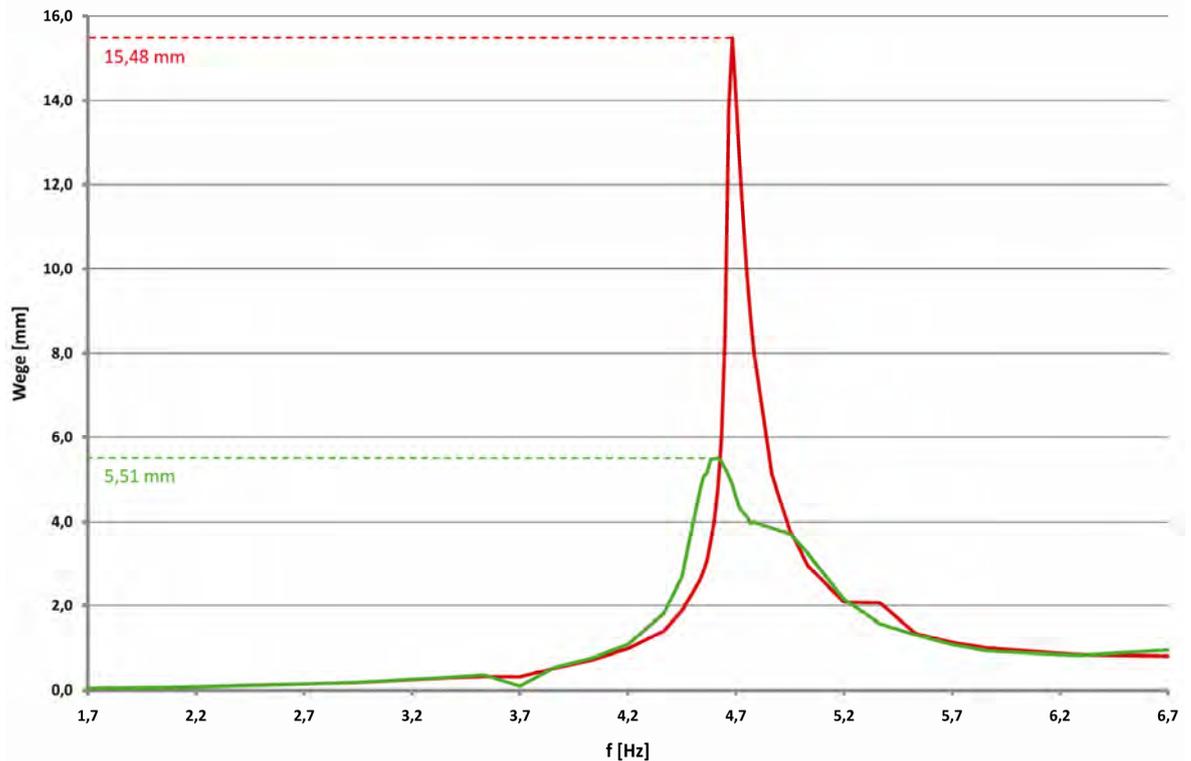


Abbildung 6.23: Gegenüberstellung der Amplitudenfrequenzgänge der Verformungen des Brückentragwerks mit inaktiven und zwei optimal frequenzabgestimmten Tilgern

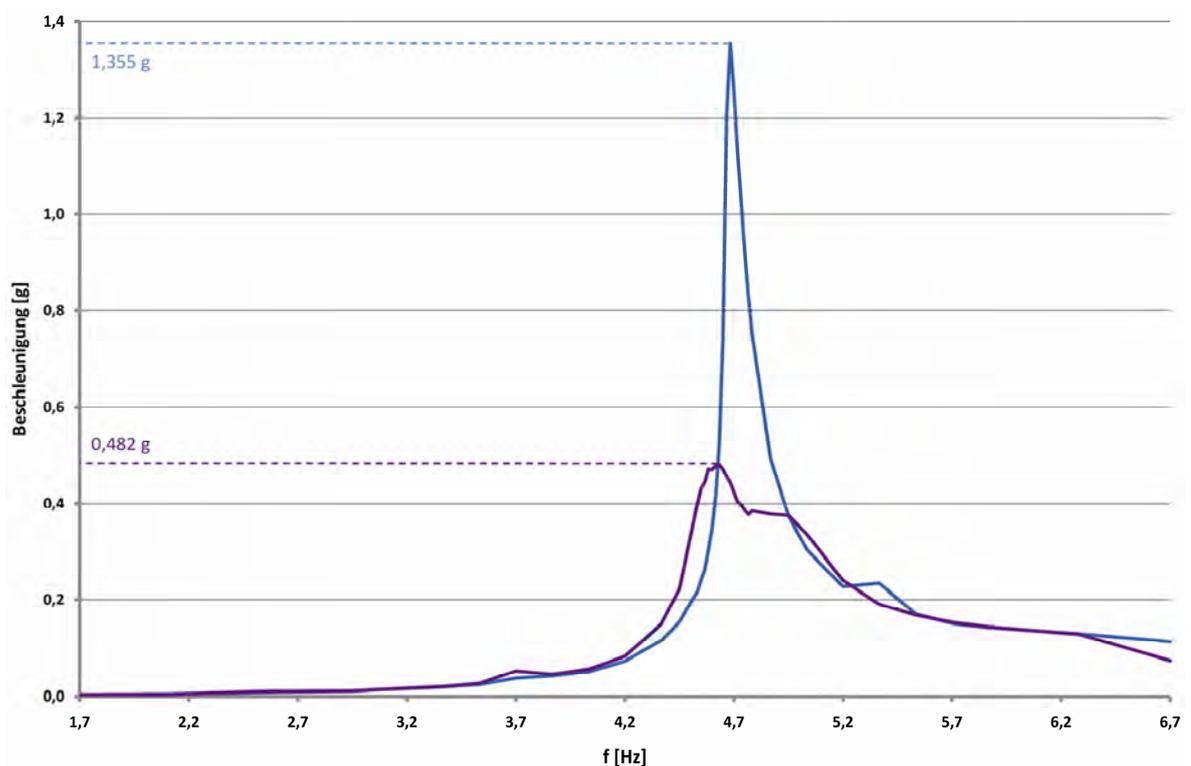


Abbildung 6.24: Gegenüberstellung der Amplitudenfrequenzgänge der Beschleunigungen des Brückentragwerks mit inaktiven und zwei optimal frequenzabgestimmten Tilgern

Abbildung 6.23 und Abbildung 6.24 können nachfolgend ausgewertete Effektivität der Tilger entnommen werden

$$\begin{aligned}w_{mT} &= \frac{5,51}{15,48} w_{oT} = 0,36 w_{oT} \\ \ddot{w}_{mT} &= \frac{0,482}{1,355} \ddot{w}_{oT} = 0,36 \ddot{w}_{oT}\end{aligned}\tag{6.8}$$

Das bedeutet, dass die Amplituden der Verformungen sowie der Beschleunigungen um 64 % reduziert wurden, dies mit lediglich $2 \cdot 28,02 = 56,04$ kg Flüssigkeitsmasse bei 10350,0 kg Tragwerksmasse.

6.1.1.3. Untersuchungen zur Abstimmung der Dämpfung

Im nachfolgenden soll der Verlauf des Amplitudenfrequenzganges aus Abbildung 6.21 näher beleuchtet werden. Mit den Abstimmungskriterien nach Den Hartog sowie den für den Flüssigkeitsschwingungstilger durchzuführenden Adaptionen (siehe Kapitel 5.3) wird ein Amplitudenfrequenzgang mit gleich großen Fixpunktsordinaten, sowie einen relativ geradlinigen Verlauf zwischen diesen, erwartet (siehe Abbildung 2.20). Die Resonanzkurve des Flüssigkeitsschwingungstilgers aus Abbildung 6.23 weist hingegen trotz versuchter optimaler Abstimmung zwei unterschiedliche Ordinatenwerte der Fixpunkte P und Q sowie einen nichtlinearen Verlauf dazwischen auf. Dies kann einerseits an der Schwierigkeit liegen, die rechnerisch auf Millimeter ermittelten Parameter versuchstechnisch exakt zu realisieren, andererseits wurde der zweite wichtige und ebenfalls zu optimierende Parameter bis zu diesem Zeitpunkt noch gar nicht betrachtet, nämlich die Dämpfung. Bei dieser stellt sich natürlich die Schwierigkeit, dass eine einfache Einstellung über die Geometrie des Tilgers, wie dies bei der Eigenfrequenz praktiziert wird, nicht möglich ist. Diese kann nur durch Veränderung der physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeit selbst, oder durch Einbau eines örtlichen Widerstandes, z. B. eines Schiebers, verändert werden. Die Auswirkungen der Maßnahmen zur Veränderung der Dämpfung können nur versuchstechnisch im Vorfeld ermittelt werden.

Für den Tilgertyp 1 wurde der Einfluss einer Variation der Viskosität der verwendeten Flüssigkeit, nämlich Wasser, untersucht. Dabei wurde die Konfiguration des optimal frequenzabgestimmten Tilgers herangezogen und die Viskosität des Wassers mithilfe des Lebensmittelverdickungsmittels Natriumcarboxymethylcellulose, kurz Natrium-CMC, variiert. Die dabei verwendeten Mischungsverhältnisse können nachfolgender Tabelle entnommen werden. Aus den vor Ort gewonnenen Proben des Wasser-Natrium-CMC-Gemisches wurde mittels Rheometerversuchen (siehe Kapitel 4) die dynamische Viskosität η bei ca. 20° Lufttemperatur ermittelt, welche ebenfalls in nachfolgender Tabelle angeführt sind.

Tabelle 6.3: untersuchte Wasser-Natrium-CMC-Gemische sowie deren Viskosität

%-iges Wasser-Natrium-CMC-Gemisch	η
[%]	[Ns/m ²]
0,00	0,001
0,25	0,042
0,50	0,086
1,50	nicht bestimmt

Den nachfolgenden Abbildungen der Resonanzkurven mit unterschiedlicher Viskosität der Flüssigkeiten kann entnommen werden, dass, wie in Kapitel 2.2.8.3 gezeigt wurde, die Dämpfung und damit die Viskosität hauptsächlich auf den Verlauf der Resonanzkurve zwischen den Fixpunkten einen Einfluss hat. Die in den Abbildungen ersichtliche geringe Verschiebung der Amplituden bei den Fixpunkten wird wiederum auf die Schwierigkeit der exakten Einstellung der Parameter H und H_L zurückgeführt. Aus diesem Gesichtspunkt kann der Tilger mit der 0,25 %-igen Wasser-Natrium-CMC-Mischung als ideal abgestimmt bezeichnet werden, da bei diesem die Amplitude der Fixpunkte annähernd gleich groß und weiters der Verlauf dazwischen annähernd linear ist. Um eine Abschätzung für das Dämpfungsmaß zu erhalten, wurde, wie für das ungedämpfte Brückentragwerk, die Bandbreitenmethode (siehe Kapitel 3.1.3) herangezogen. Da diese exakt nur für den linear viskos gedämpften Einmasseschwinger Gültigkeit besitzt, handelt es sich dabei um eine Abschätzung.

Die Amplitudenfrequenzgänge sowie das Ausschwingverhalten der Tilger mit unterschiedlich viskoser Flüssigkeit sind in nachfolgenden Abbildungen dargestellt.

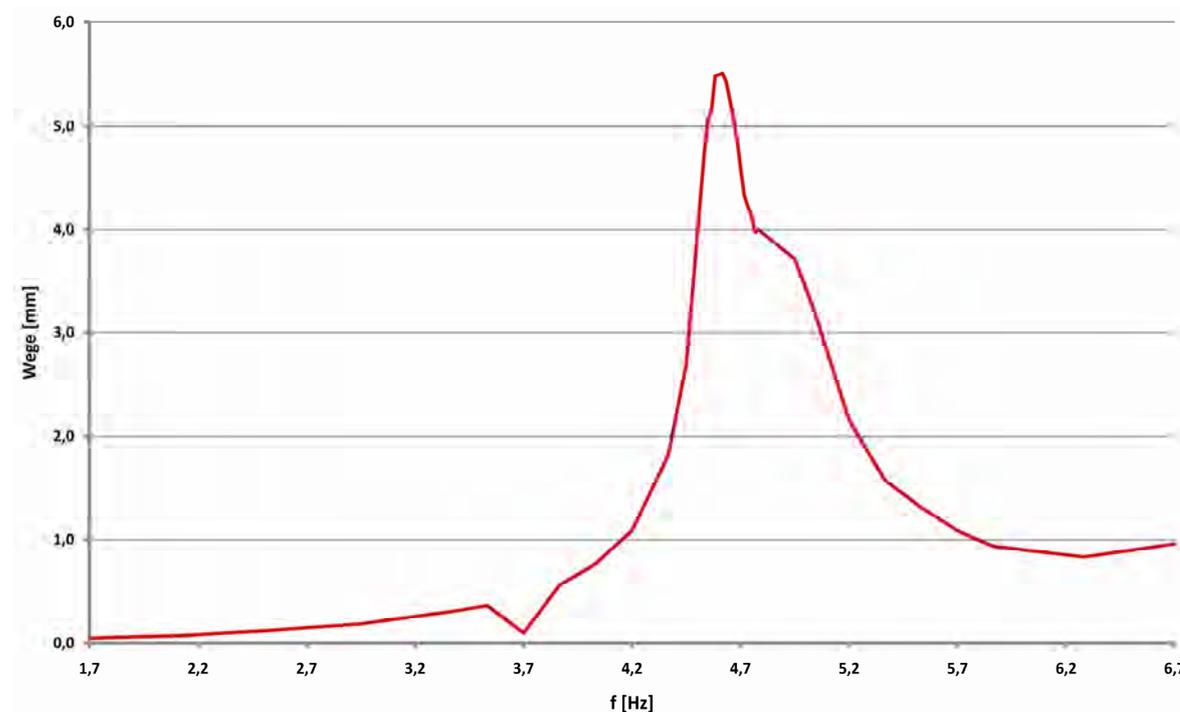


Abbildung 6.25: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern (reines Wasser)

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

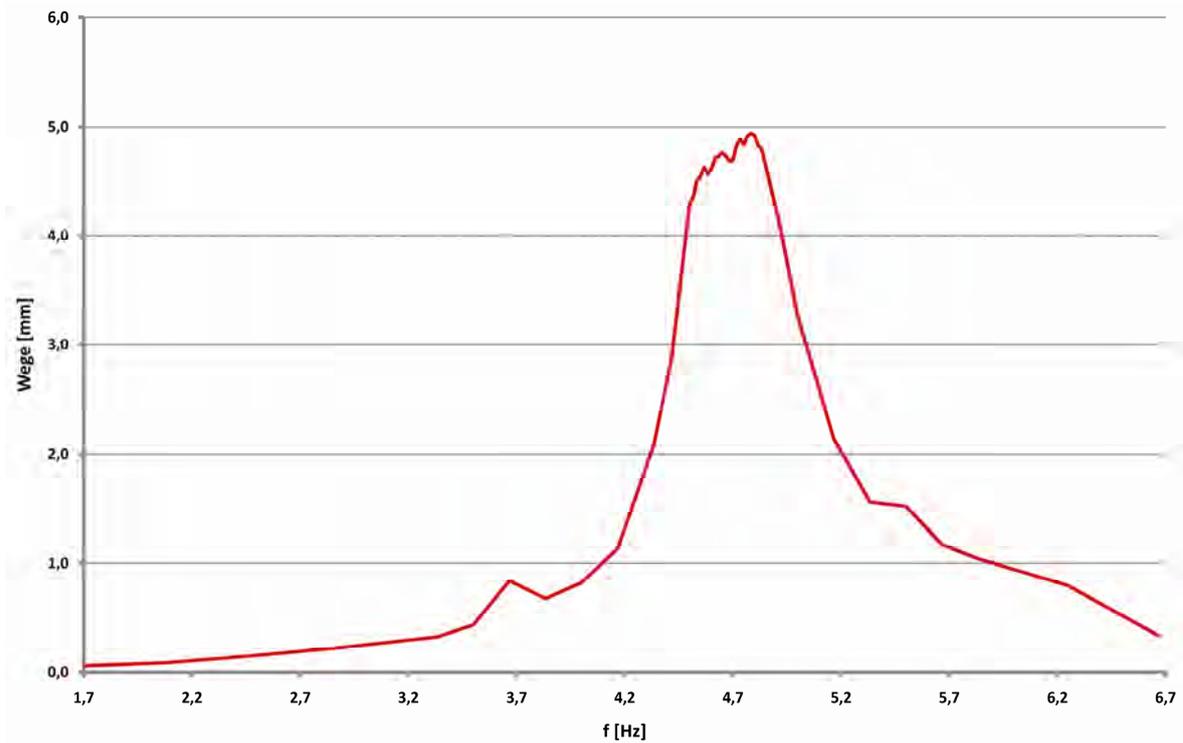


Abbildung 6.26: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern (0,25 %-iges Wasser-Natrium-CMC-Gemisch)

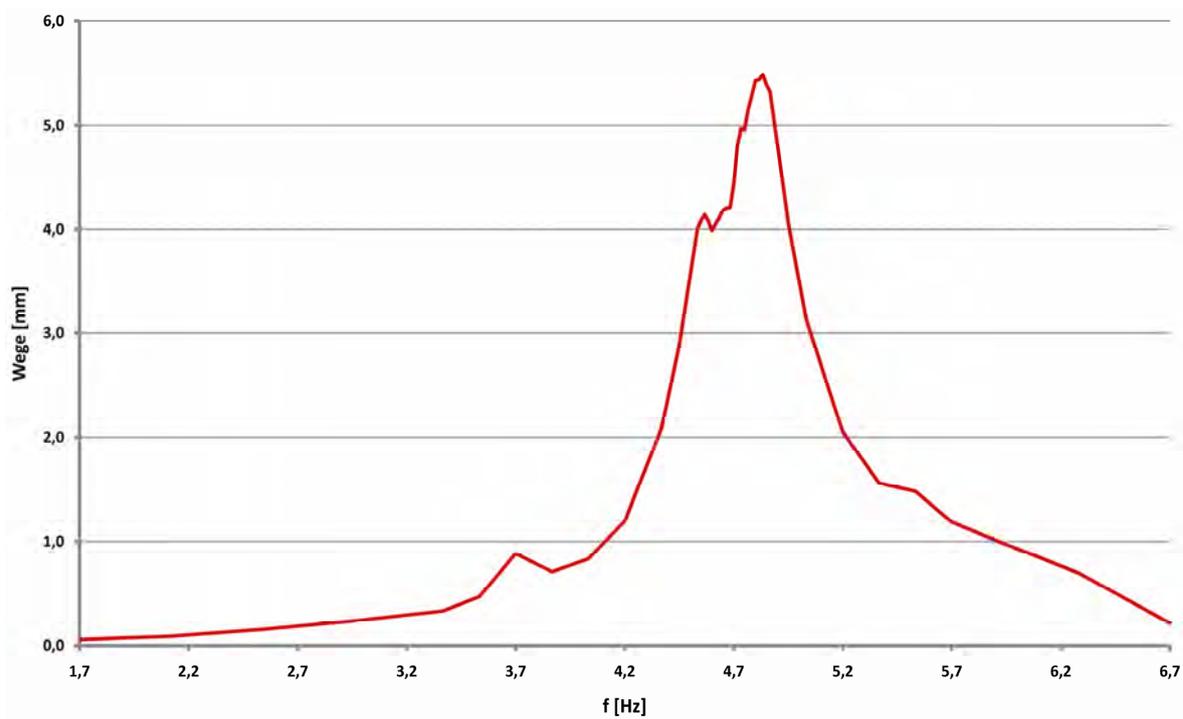


Abbildung 6.27: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern (0,50 %-iges Wasser-Natrium-CMC-Gemisch)

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

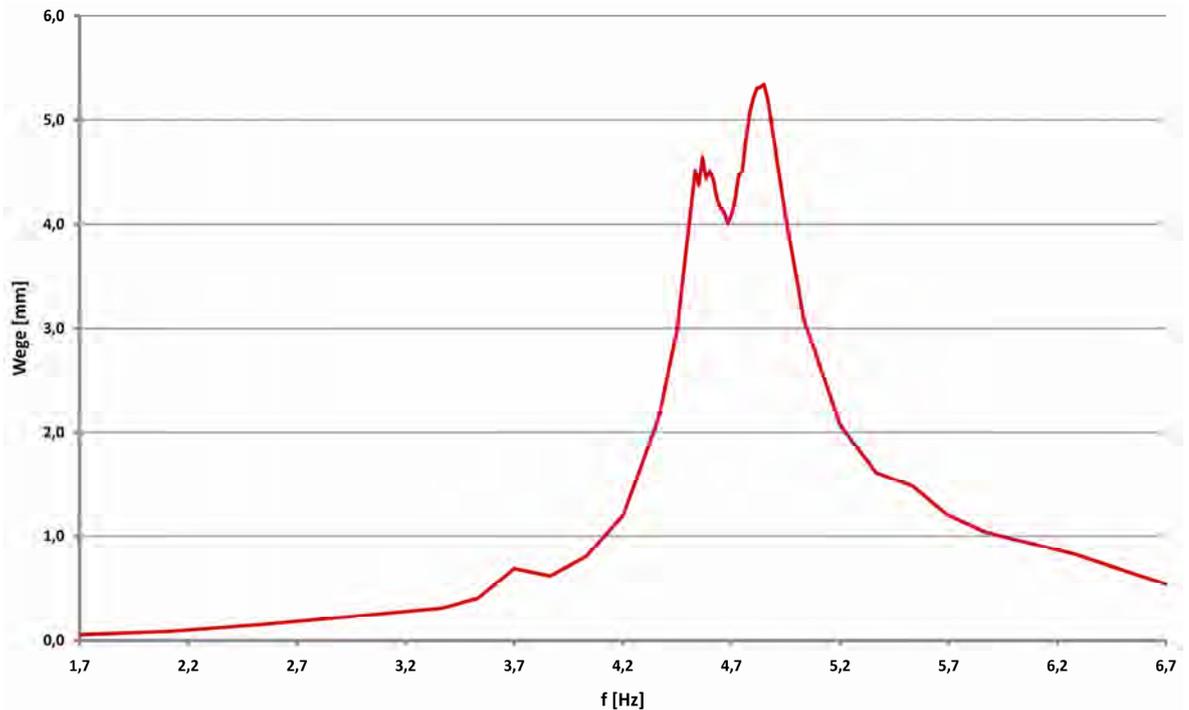


Abbildung 6.28: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern (1,50 %-iges Wasser-Natrium-CMC-Gemisch)

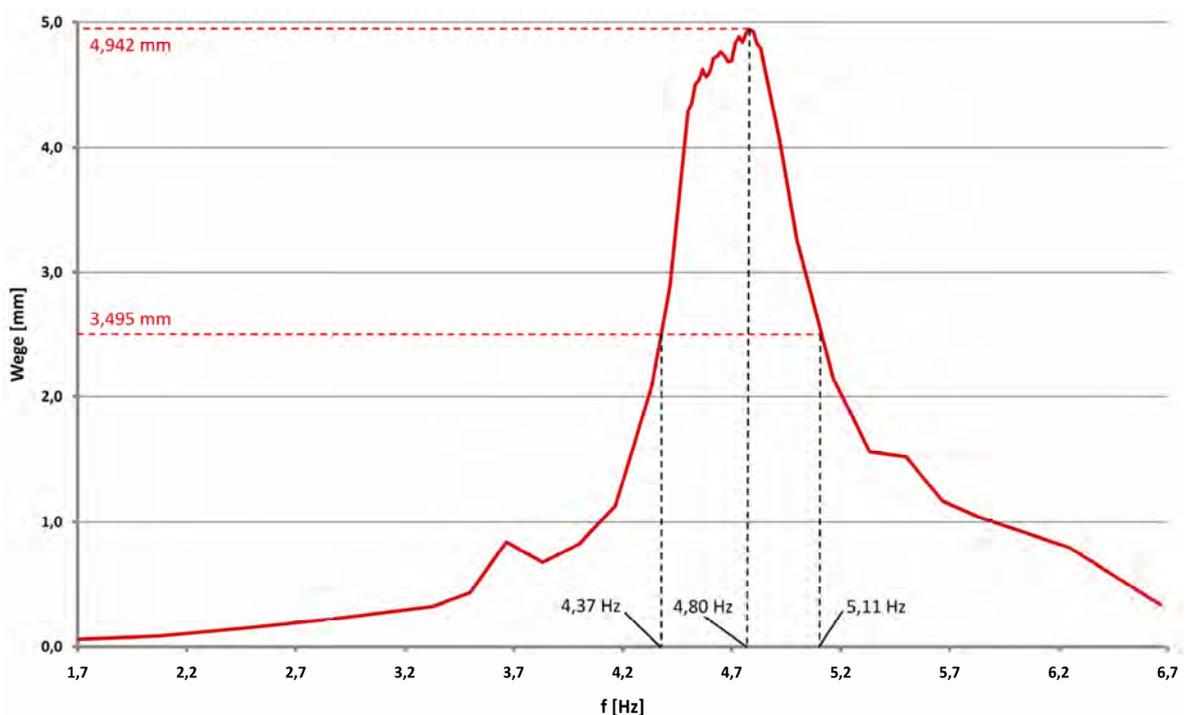


Abbildung 6.29: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern (0,25 %-iges Wasser-Natrium-CMC-Gemisch) mit Anwendung der Bandbreitenmethode

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

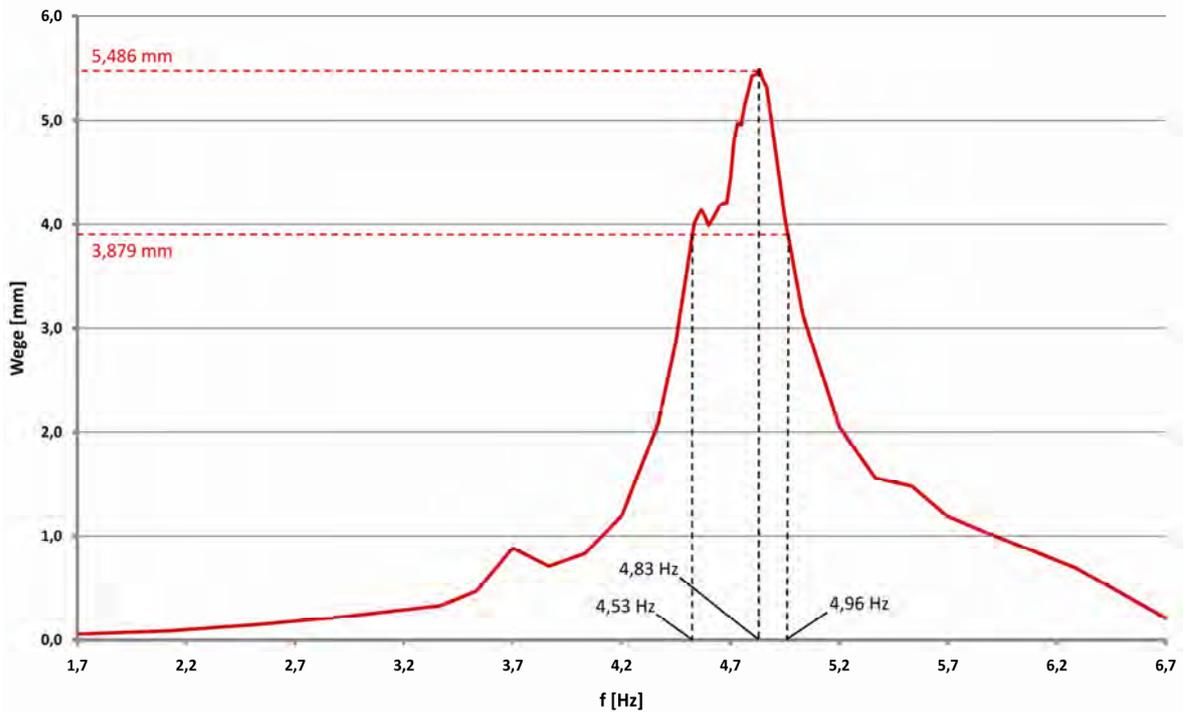


Abbildung 6.30: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern (0,50 %-iges Wasser-Natrium-CMC-Gemisch) mit Anwendung der Bandbreitenmethode

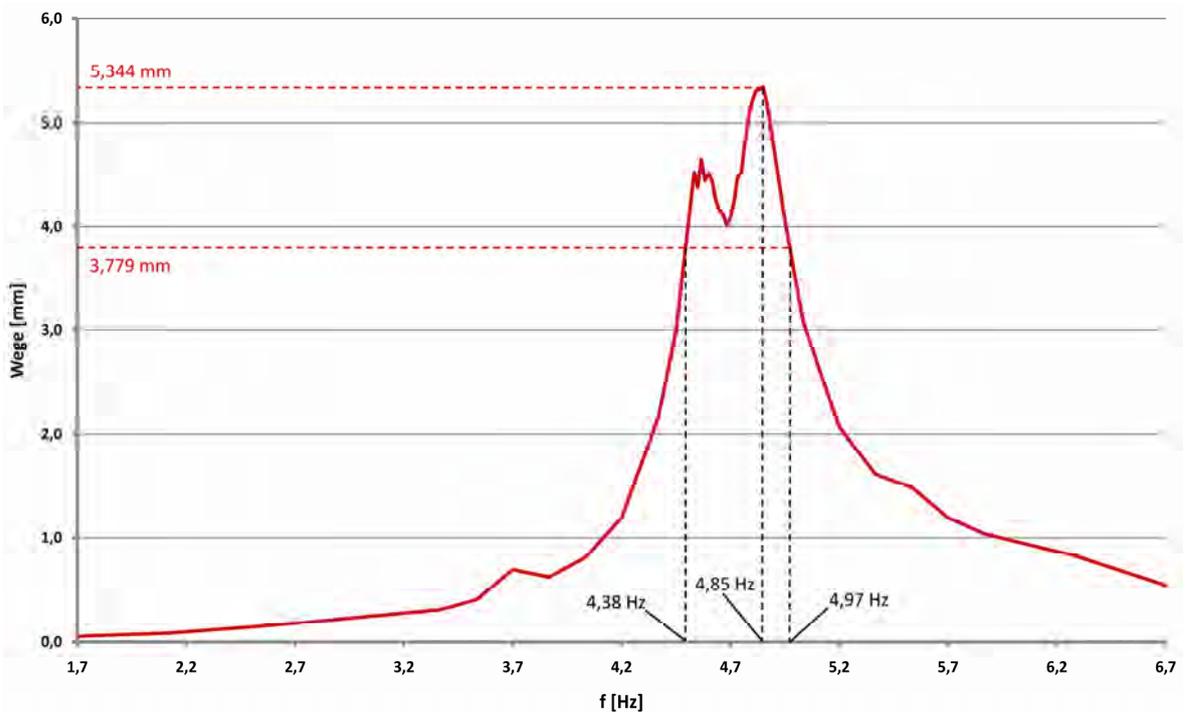


Abbildung 6.31: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern (1,50 %-iges Wasser-Natrium-CMC-Gemisch) mit Anwendung der Bandbreitenmethode

Die viskose Dämpfung ergibt sich dabei nach Gl. (3.13) zu

$$\begin{aligned}\zeta_{0,25\%} &\approx \frac{1}{2} \frac{5,11 - 4,37}{4,80} 100 = 7,71\% \\ \zeta_{0,50\%} &\approx \frac{1}{2} \frac{4,96 - 4,53}{4,83} 100 = 4,45\% \\ \zeta_{1,50\%} &\approx \frac{1}{2} \frac{4,97 - 4,38}{4,85} 100 = 6,08\%\end{aligned}\quad (6.9)$$

Aufgrund der Näherung bei der Ermittlung der viskosen Dämpfung mittels der Bandbreitenmethode kann den Dämpfungswerten keine eindeutige Tendenz entnommen werden. Jedenfalls ersichtlich ist jedoch, dass durch den Einsatz der Flüssigkeitsschwingungstilger die Dämpfung des Systems fast vervierfacht wurde, nämlich von 1,30 % (siehe Gl. (3.17) auf min. 4,45 %.

In allen zuvor angeführten Untersuchungen konnten keine Effekte der Parameterresonanz in den Schwingungsverläufen sowie in den Resonanzkurven entdeckt werden. Dies soll mit der in Kapitel 5.1.4 hergeleiteten, minimalen erforderlichen viskosen Dämpfung bestätigt werden

$$\zeta_{\min} \geq \frac{\sin(\alpha)}{2m_F \omega_A H} w_0 = \frac{\sin(60)}{2 \cdot 56,04 \cdot 2\pi \cdot 4,63 \cdot 0,541} 0,00551 \cdot 100 = 0,00027\% \quad (6.10)$$

Dieses minimale viskose Dämpfungsmaß ist für die gegenständliche Tilgerkonfiguration in jedem Fall eingehalten, Parameterresonanz konnte damit auch rechnerisch ausgeschlossen werden. Nachfolgend sind die Ausschwingkurven mit zwei aktiven sowie ohne Flüssigkeitsschwingungstilger dargestellt.

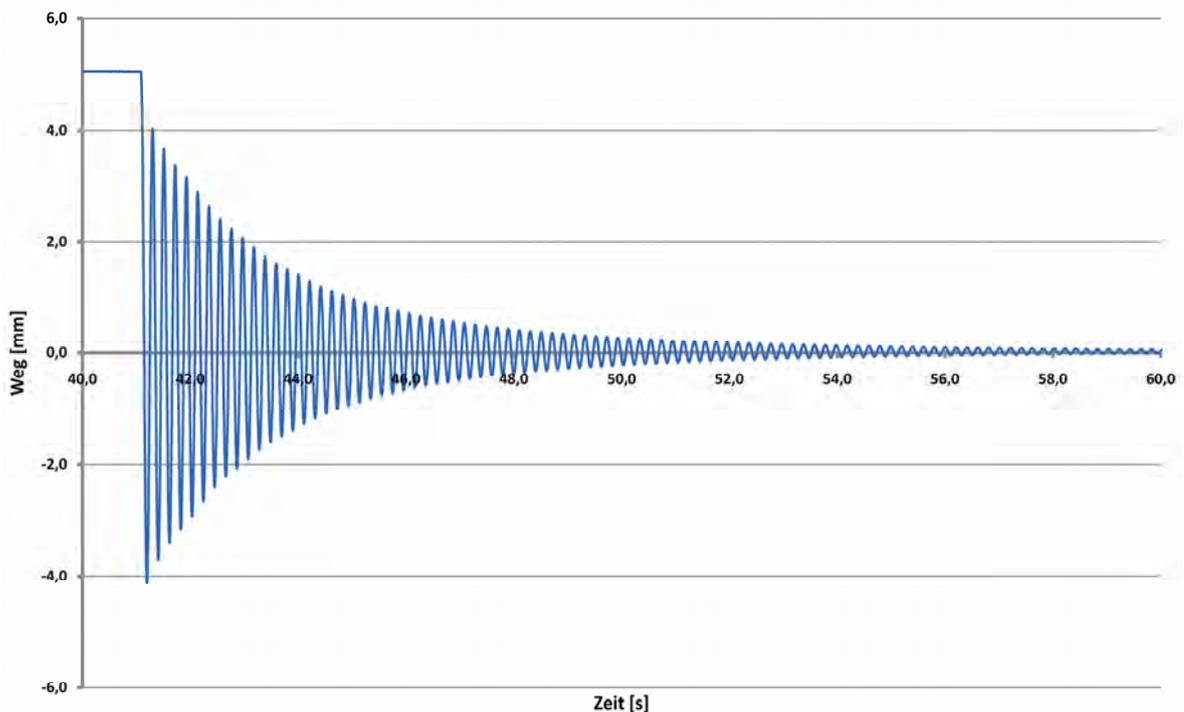


Abbildung 6.32: Ausschwingverhalten in Brückenmitte im Resonanzfall mit inaktiven Tilgern

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

Den Verformungskurven kann das, durch die Tilger verursachte, nichtlineare Ausschwingverhalten entnommen werden, ebenfalls ersichtlich ist eine rapide Verkürzung der Ausschwingzeit.

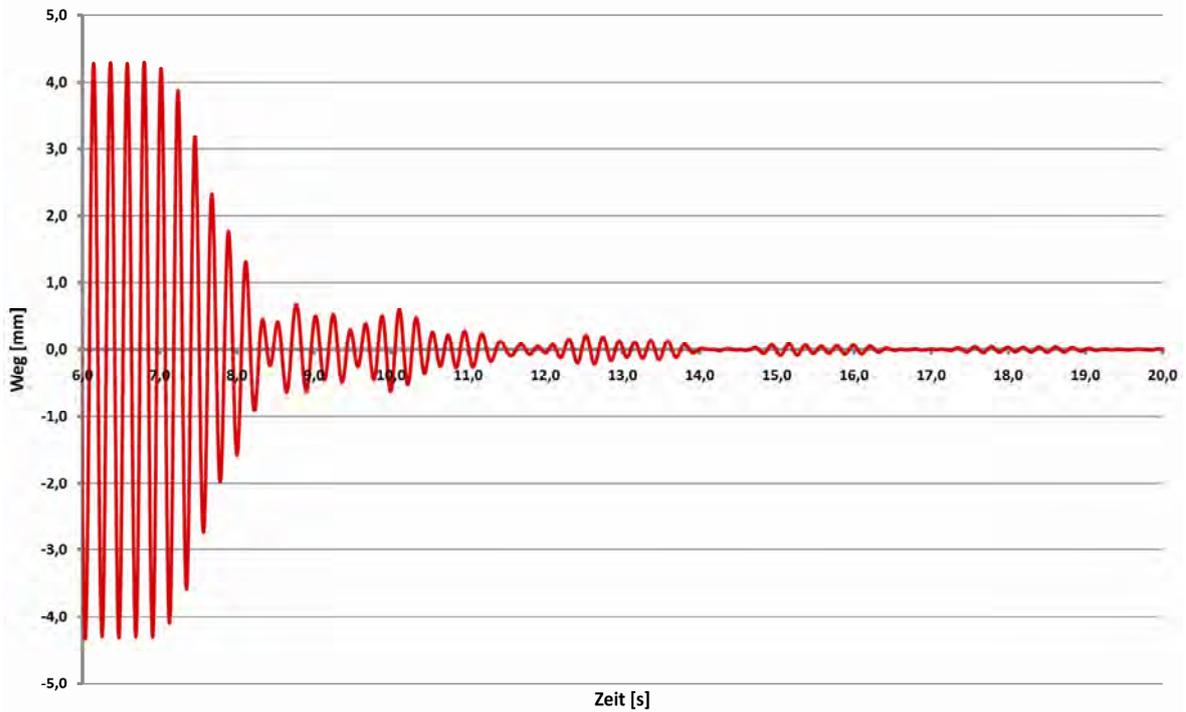


Abbildung 6.33: Ausschwingverhalten in Brückenmitte im Resonanzfall mit zwei aktiven und optimal abgestimmten Tilgern (reines Wasser)



Abbildung 6.34: Ausschwingverhalten in Brückenmitte im Resonanzfall mit zwei aktiven und optimal abgestimmten Tilgern (0,25 %-iges Wasser-Natrium-CMC-Gemisch)

Durch die in diesem Kapitel vorgestellten experimentellen Untersuchungen konnten einerseits die mechanischen Herleitungen, vor allem die Äquivalenzbeziehungen aus Kapitel 5.3, bestätigt werden, weiters konnte hier auch auf experimentellem Wege die hohe Effektivität der Flüssigkeitsschwingstilger eindrucksvoll gezeigt werden. Eine Abstimmung der Tilger mit der Äquivalenzbeziehung für das Frequenzverhältnis Tragwerks- zu Tilgereigenfrequenz liefert, bedingt durch versuchstechnische Ungenauigkeiten, annähernd gleich große Fixpunktsamplituden, dies stellt eines der Abstimmungskriterien nach Den Hartog (siehe Kapitel 2.2.8.3) dar. Eine Einstellung der erforderlichen Dämpfung lässt sich weit weniger einfach realisieren als jene für die Frequenzabstimmung. Diese müsste über Veränderung der physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeit oder über den Einbau von lokalen Widerständen, wie z. B. Schiebern, erfolgen. Die Versuche haben jedenfalls gezeigt, dass reines Wasser mit seiner Viskosität anscheinend recht gut für den Einsatz in Flüssigkeitsschwingstilgern geeignet ist, eine gezielte Einstellung der Dämpfung ist jedoch empfehlenswert, da damit eine weitere Steigerung der Effektivität der Tilger erzielt werden kann.

6.1.2. Numerische Studien

In diesem Kapitel sind die numerischen Untersuchungen zum Flüssigkeitsschwingstilger angeführt. Die Notwendigkeit numerischer Untersuchungen ergibt sich aus zwei Gründen. Einerseits werden die mechanischen Beziehungen aus Kapitel 5 numerisch mit den im Versuch ermittelten Messdaten aus Kapitel 6.1.1 verifiziert und deren Ergebnisse gegenübergestellt und andererseits können mittels numerischer Studien Einflüsse von Parametern untersucht werden, die im Versuch nur schwer oder gar nicht zugänglich sind. Dabei handelt es sich zum Beispiel um den Einfluss der Linearisierung des Druckterms aus Kapitel 5.1.1 oder den Einsatz des äquivalenten viskosen Dämpfungsmaßes bei der Abstimmung des Flüssigkeitsschwingstilgers nach Kapitel 5.1.3. Numerische Untersuchungen von miteinander in Beziehungen stehenden gekoppelten Differenzialgleichungen können komfortabel mit dem Zusatztool zu Matlab 2008a (Matlab, 2008), Simulik 7.1 (Simulink, 2008), durchgeführt werden. Dabei handelt es sich um eine Blockset-Erweiterung von Matlab zur Modellierung, Simulation und Analyse dynamischer Systeme. Die grafische Bedienoberfläche erlaubt die Erstellung des betrachteten Systems in der übersichtlichen und intuitiv zugänglichen Form eines Signalflussplans bestehend aus verknüpften Funktionsblöcken. Eine textorientierte und damit sehr häufig auch unübersichtliche Programmierung der Differenzialgleichungen bleibt dem Benutzer dadurch erspart. In einer umfangreichen Bibliothek stellt Simulink eine große Anzahl vorgefertigter Funktionsblöcke für lineare, nichtlineare, diskrete und hybride Systeme zur Verfügung. Eigene Blöcke können dabei ebenfalls erstellt werden. Ein weiterer großer Vorteil in der Benutzung von Simulik liegt in den bereits implementierten numerischen Differenzialgleichungslösern, bei denen es sich zu einem Großteil um erweiterte Rungge-Kutta Methoden handelt. Für diese können eine Vielzahl von Parametern, wie zum Beispiel die maximale Schrittweite der numerischen Integration und andere, beliebig eingestellt werden (Angermann, 2005).

Nachfolgend ist der Signalflussplan des Flüssigkeitsschwingungstilgers mit dem nichtlinearen Druckterm des Falls 2 (Kapitel 5.1.1.2) sowie nichtlinearer Dämpfung (Kapitel 5.1.3) skizziert, die betroffenen Differenzialgleichungen sowie die resultierende vertikale Tilgerkraft sind zum besseren Verständnis nochmals und in der Form, wie sie von Simulink verarbeitet werden können, angeführt.

$$\ddot{w}(t) = -2\zeta\Omega_n\dot{w}(t) - \Omega_n^2 w(t) + \frac{F(t)}{M+m} - \frac{F_{z,Tilger}(t)}{M+m}$$

$$\ddot{u}(t) = -\frac{1}{H} [\sin(\alpha)(\ddot{w} + g)] u(t) - \frac{\Delta p}{2H\rho} - \frac{\Delta p_V}{2H\rho} - \frac{\Delta z_0}{2H} (\ddot{w} + g) \quad (6.11)$$

$$F_z = m_F \ddot{w}(t) + m_F \left\{ \frac{1}{2H} (\Delta z_0 + 2u(t) \sin(\alpha)) \ddot{u}(t) + \frac{\sin(\alpha)}{H} \dot{u}(t)^2 \right\}$$

Die einzelnen Terme können Kapitel 5.1 sowie 5.3.1 entnommen werden. Die Differenzialgleichungen aus Gl. (6.11) sind einerseits durch die auf das Brückentragwerk einwirkende Tilgerkraft sowie durch die in der Bewegungsgleichung des Tilgers auftretende Tragwerksbeschleunigung miteinander gekoppelt. Um eventuelle Effekte der Parametererregung und Parameterresonanz zu berücksichtigen, wurde der Term der Parametererregung bei der Flüssigkeitsspiegelbewegung $u(t)$ ($\sin(\alpha)\ddot{w}(t)$) sowie bei der Tilgerkraft $F_z(t)$ ($\sin(\alpha)/H \dot{u}(t)^2$) ebenfalls berücksichtigt.

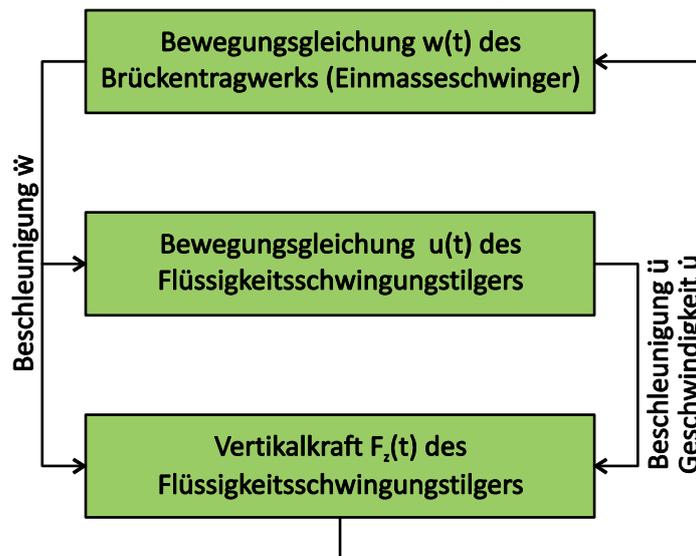


Abbildung 6.35: Skizze des Signalflussplans des gekoppelten Tragwerk-Flüssigkeitsschwingungstilger-Systems

Zur Beschreibung des Brückentragwerks dient in den folgenden Untersuchungen dessen erste Eigenform als Einmassenschwinger, der Einfluss höherer Eigenformen wird an dieser Stelle vernachlässigt.

6.1.2.1. Ermittlung des optimalen Frequenzverhältnisses f_{opt}

Zur experimentellen Versuchsdurchführung wurden nach Ermittlung der Masse sowie der ersten Eigenfrequenz des Tragwerks die Parameter H , H_L und Δz_0 so gewählt, dass diese

unter Berücksichtigung der Äquivalenzbeziehungen nach Kapitel 5.3.4 eine Eigenfrequenz des Schwingungstilgers liefern, die der Eigenfrequenz des Tragwerks angepasst ist. Daraus ergaben sich die Parameter (siehe Kapitel 6.1.1)

$$\begin{aligned}\Delta z_0 &= 731,0 \text{ mm} \\ H &= 804,0 \text{ mm} \\ H_L &= 541,0 \text{ mm}\end{aligned}\tag{6.12}$$

Um zu überprüfen, ob die Parameterwahl auch numerisch eine optimal angepasste Eigenfrequenz des Tilgers ergibt, wurde die Luftfederhöhe H_L in den numerischen Berechnungen variiert. Dies hat zum Vorteil, dass dann die Flüssigkeitsmasse m_F sowie die Stromfadenlänge $2H$ und damit vor allem das Masseverhältnis μ für alle nachfolgenden Studien konstant bleiben. Folgende Variation der Luftfederhöhe wurde vorgenommen

$$500,0 \text{ mm} \leq H_L \leq 600,0 \text{ mm}\tag{6.13}$$

Die ideale Luftfederhöhe lässt sich, wie die Untersuchungen zum Zweimasseschwinger zeigten (Kapitel 2.2.8), durch Fixpunkte P und Q mit gleichem Ordinatenwert herausfiltern. Nachfolgend sind die Amplitudenfrequenzgänge der Brückenbewegung unter Berücksichtigung von zwei aktiven Schwingungstilgern mit unterschiedlichen Frequenzabstimmungen dargestellt. Die sich rechnerisch ergebenden Frequenzen lauten dabei

Tabelle 6.4: rechnerische Eigenfrequenzen des Flüssigkeitsschwingungstilgers in Abhängigkeit der Luftfederhöhe H_L

H_L [mm]	f_1 [Hz]	H_L [mm]	f_1 [Hz]	H_L [mm]	f_1 [Hz]
400,0	5,588	435,0	4,727	470,0	4,197
405,0	5,432	440,0	4,636	475,0	4,137
410,0	5,289	445,0	4,552	480,0	4,080
415,0	5,158	450,0	4,473	485,0	4,026
420,0	5,038	455,0	4,398	490,0	3,974
425,0	4,926	460,0	4,327	495,0	3,924
430,0	4,823	465,0	4,261	500,0	3,876

Die Amplitudenfrequenzgänge der unterschiedlich abgestimmten Tilger zeigen eindeutig, dass die Tilger mit einer Luftfederhöhe von 540,0 bzw. 545,0 mm Luftfederhöhe annähernd gleich große Fixpunktsordinaten P und Q aufweisen und damit auch die geringsten maximalen Verformungen liefern. Die ideale Abstimmung muss also zwischen diesen beiden Einstellungen liegen. Man kann auch deutlich erkennen, dass keine bzw. eine sehr ungenaue Abstimmung relativ unwirksame Tilger liefert. In der nachfolgenden Abbildung sind die Amplitudenfrequenzgänge der Verformungen des Einmassenschwingers mit einer Variation der Luftfederhöhe H_L von

$$540,0 \text{ mm} \leq H_L \leq 545,0 \text{ mm}\tag{6.14}$$

dargestellt.

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

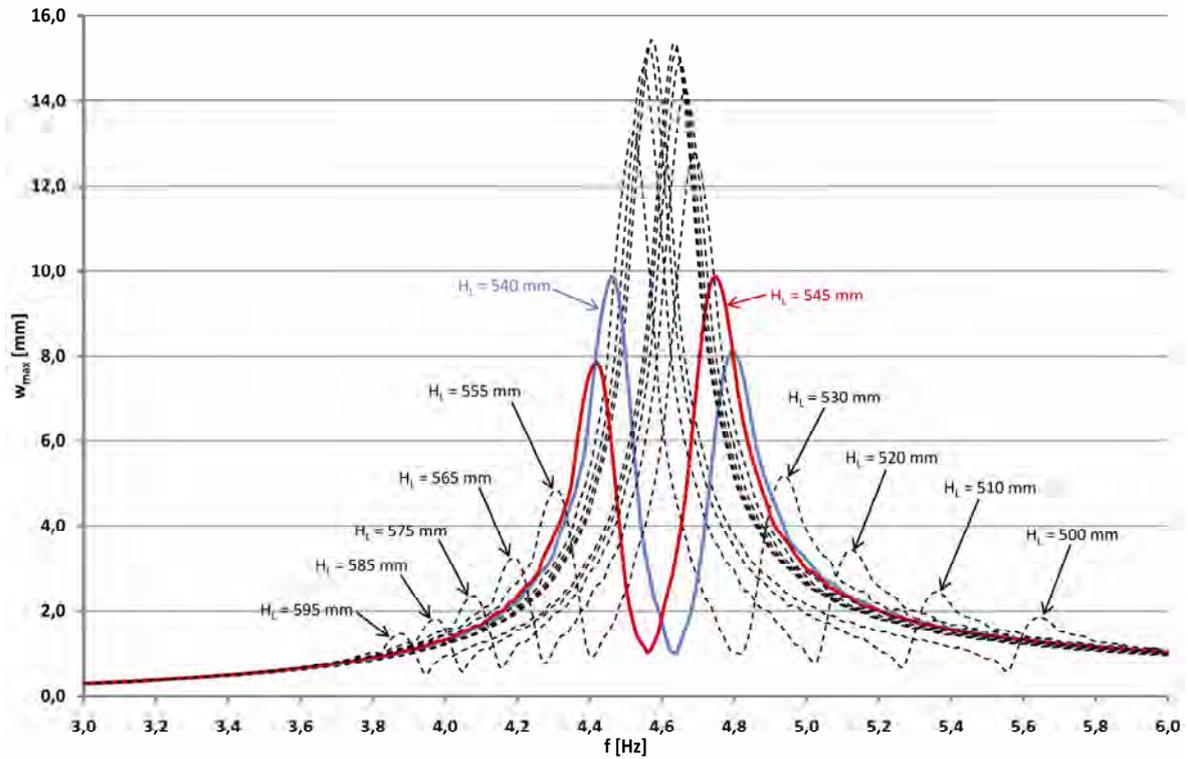


Abbildung 6.36: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen des Einmassenschwingers mit zwei aktiven Flüssigkeitsschwingungstilgern mit unterschiedlicher Luftfederhöhe H_L

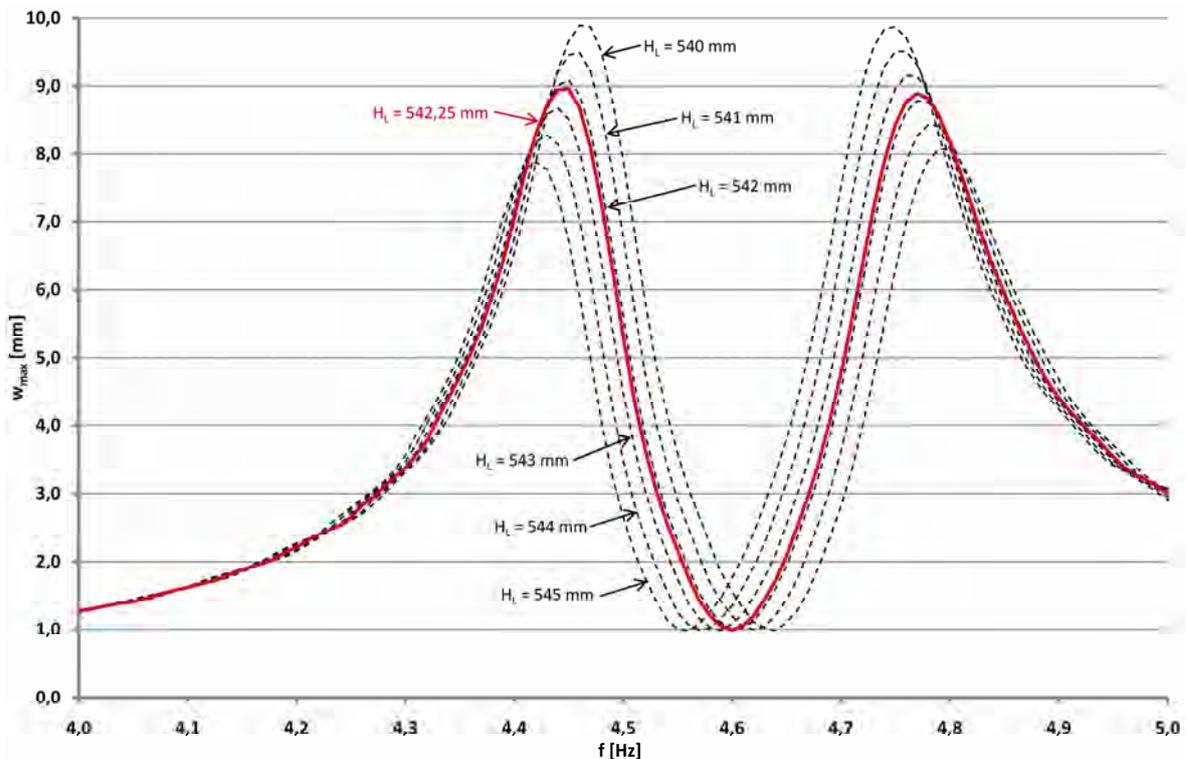


Abbildung 6.37: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen des Einmassenschwingers mit 2 Flüssigkeitsschwingungstilgern (Feinabstimmung)

Die optimale Luftfederhöhe ergibt sich damit zu

$$H_{L,opt} = 542,25 \text{ mm} \quad (6.15)$$

mit einer daraus resultierenden Eigenfrequenz des Flüssigkeitsschwingungstilgers nach Gl. (5.74) von

$$f_1 = 4,598 \text{ Hz} \quad (6.16)$$

Führt man die Frequenzabstimmung nach Kapitel 5.3, Äquivalenzbeziehungen zwischen konventionellen Schwingungstilgern und Flüssigkeitsschwingungstilgern, durch, folgt mit

$$\begin{aligned} m &= 5180,0 \text{ kg} \\ m_F &= 2H\rho A = 2 \cdot 0,541 \cdot 1000,0 \cdot 0,038 = 41,51 \text{ kg} \\ \mu &= \frac{2 \cdot 41,51}{5180,0} = 0,0160 \\ \kappa &= \frac{731,0}{2 \cdot 541,0} = 0,676 \end{aligned} \quad (6.17)$$

das optimale Frequenzverhältnis zu

$$\begin{aligned} f_{opt} &= \frac{1 + 0,0160(2 - 0,6756 - 0,6756^2)}{1 + 2 \cdot 0,0160} = 0,9824 \\ f_{1,opt} &= 0,9824 \cdot 4,65 = 4,57 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Damit liegt die realisierte Luftfederhöhe von

$$H_{L,real} = 541,0 \text{ mm} \quad (6.19)$$

sowie die sich daraus ergebende erste Eigenfrequenz des Flüssigkeitsschwingungstilgers genau im optimalen Bereich der Frequenzabstimmung nach Den Hartog, eine exaktere Einstellung des Tilgers ist baupraktisch sehr schwer realisierbar aber auch nicht unbedingt notwendig, wie in Kapitel 6.1.1 gezeigt werden konnte. Mit den Untersuchungen in diesem Kapitel konnte das Abstimmungsverfahren mit den Äquivalenzbeziehungen numerisch bestätigt werden. Gleichzeitig konnte gezeigt werden, dass aufwendigere numerische Berechnungen durch die einfach handhabbaren Formeln der Tilgerabstimmung ersetzt werden können.

6.1.2.2. Ermittlung des optimalen viskosen Dämpfungsmaßes ζ_{opt}

Mit dem im vorhergehenden Kapitel numerisch ermittelten optimalen Frequenzverhältnis f_{opt} wurden Untersuchungen zum zweiten wichtigen Parameter, der optimalen Dämpfung des Flüssigkeitsschwingungstilgers durchgeführt. Wie in Kapitel 2.2.8.3 gezeigt werden konnte, hat die Dämpfung des Tilgers ebenfalls einen Einfluss auf die Resonanzkurven, sie bestimmt im Besonderen den Verlauf der Resonanzkurven zwischen den Fixpunkten. Um numerisch das beste Dämpfungsmaß zu erhalten, wurde der turbulente Verlustkoeffizient δ_v , siehe Kapitel 5.1.3, in folgender Weise variiert

$$0,0 \leq \delta_v \leq 20,0 \quad (6.20)$$

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

Nachfolgend sind die daraus resultierenden Amplitudenfrequenzgänge der Verformungen des Einmassenschwingers mit zwei optimal frequenzabgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgern dargestellt. Dabei ergibt sich der optimale turbulente Verlustkoeffizient mit dem Kriterium der kleinsten maximalen Verformungen zu

$$\delta_{v,opt} \approx 15,0 \quad (6.21)$$

Den Resonanzkurven von Abbildung 6.38 kann entnommen werden, dass sich diese bei zu geringer Dämpfung dem ungedämpften Zweimassenschwinger annähern, und bei zu großer Dämpfung dem Einmassenschwinger, dazwischen liegt das Optimum. Dies entspricht genau den Betrachtungen zum Zweimassenschwinger im Kapitel 2.2.8. Der ermittelte Wert für den turbulenten Verlustterm soll nachfolgend in ein äquivalentes viskoses Dämpfungsmaß, wie in Kapitel 5.1.3.2 gezeigt wurde, umgerechnet werden. Dafür ist die maximale Amplitude der Flüssigkeitsspiegelbewegung erforderlich. Diese können, in Abhängigkeit des turbulenten Verlustterms, der Abbildung 6.39 entnommen werden. Darin ist ersichtlich gemacht, dass zur Tilgung der Tragwerksbewegung bei zu geringer Dämpfung eine größere Flüssigkeitsspiegelbewegung erforderlich ist als bei größerer Dämpfung. Dies ist einleuchtend, wenn man berücksichtigt, dass sich die in die Tilger eingeprägte Energie auf die Massenbeschleunigung der Flüssigkeit und auf die Reibungsverluste aufteilt.

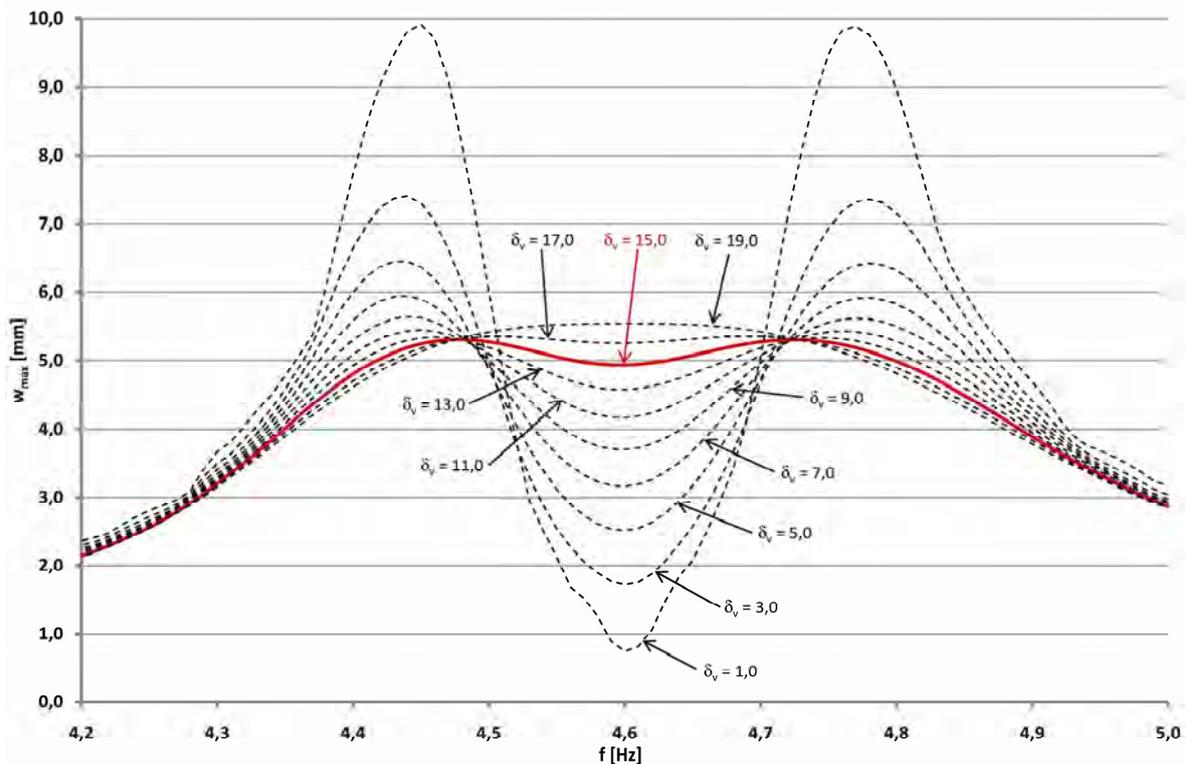


Abbildung 6.38: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen des Einmassenschwingers mit zwei Flüssigkeitsschwingungstilgern und Variation des turbulenten Verlustkoeffizienten δ_v

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

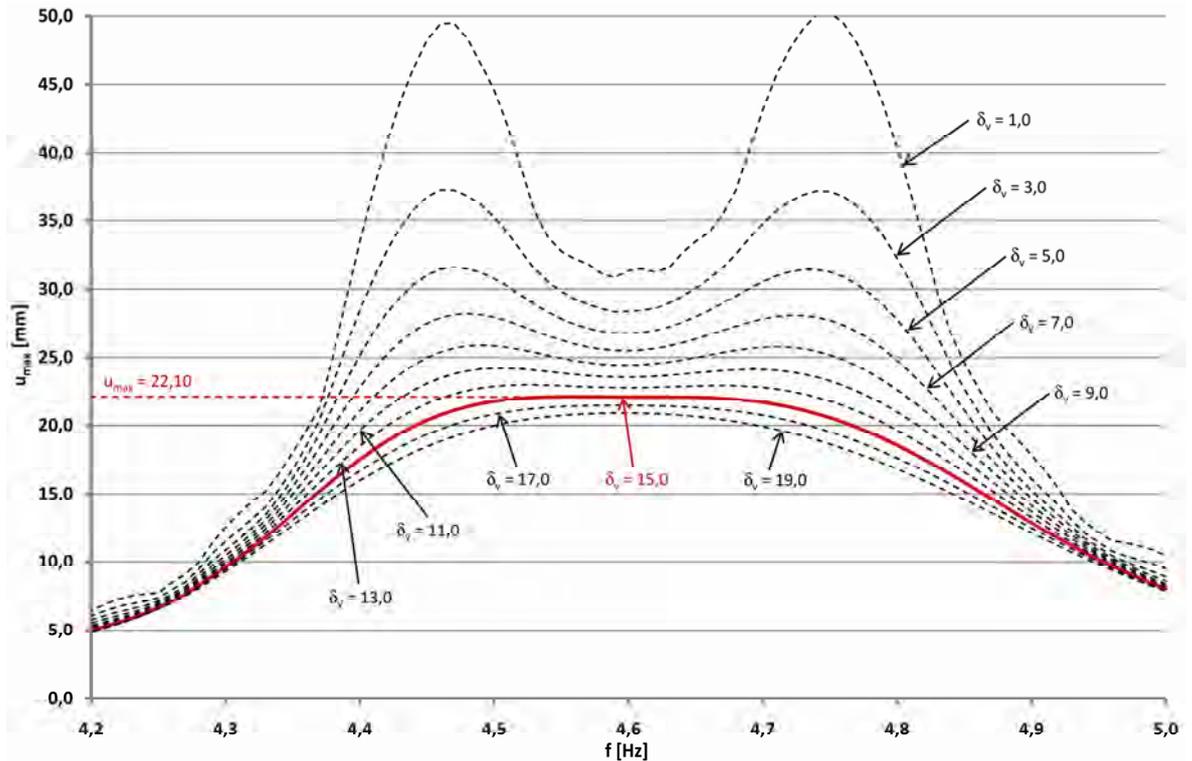


Abbildung 6.39: Amplitudenfrequenzgang der Flüssigkeitsspiegelbewegung bei Variation des turbulenten Verlustkoeffizienten δ_v

Des Weiteren erkennt man einen Plateaubereich der maximalen Verformungen bei Vorhandensein eines turbulenten Verlustkoeffizienten im Bereich des optimalen Verlustkoeffizienten, was eine nahezu konstante maximale Flüssigkeitsspiegelbewegung im Bereich der Eigenfrequenz des Tragwerks ergibt.

Damit kann unter Voraussetzung von Resonanz, also

$$\frac{\omega}{\omega_a} = 1,0 \quad (6.22)$$

das äquivalente viskose Dämpfungsmaß für den Resonanzbereich nach Gl. (5.100) folgendermaßen ermittelt werden

$$\zeta_{equ} = \frac{1}{3H\pi} \delta_v u_0 = \frac{1}{3 \cdot 0,54225 \cdot \pi} \cdot 15,0 \cdot 0,0221 \cdot 100 = 6,49 \% \quad (6.23)$$

Das optimale viskose Dämpfungsmaß lautet unter Berücksichtigung der Äquivalenzbeziehungen nach Gl. (5.223)

$$\begin{aligned} \zeta_{opt} &= \sqrt{\frac{3}{8} \frac{\kappa\mu(1+\mu)}{1+\mu(2+\kappa\mu-\kappa^2)}} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{8} \frac{0,676 \cdot 0,016(1+0,016)}{1+0,016(2+0,676 \cdot 0,016-0,676^2)}} \cdot 100 = 6,34 \% \end{aligned} \quad (6.24)$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit den Versuchsergebnissen aus Gl. (6.9) ist ersichtlich, dass ohne jedwede Maßnahme zur Veränderung der Dämpfung des Tilgers das versuchstechnisch ermittelte viskose Dämpfungsmaß mit dem optimalen viskosen Dämpfungsmaß des Flüssigkeitsschwingungstilgers gut übereinstimmt, vor allem unter dem Gesichtspunkt, dass die Dämpfung einen weitaus geringeren Einfluss auf die Resonanzkurven ausübt, als die Frequenzabstimmung (siehe Kapitel 2.2.8.3). Dieses Ergebnis kann natürlich nicht für alle Tilgergeometrien extrapoliert werden, die zuvor geführten Nachweise sind generell bei jeder Tilgerabstimmung durchzuführen. Es lässt jedoch den Schluss nahe, dass Wasser bzw. Flüssigkeiten mit ähnlich viskosem Verhalten unter dem Gesichtspunkt der Dämpfung ideal für den Einsatz in Flüssigkeitsschwingungstilgern sind. Dies konnte bereits bei den experimentellen Untersuchungen festgestellt werden.

6.1.2.3. Bewegungen des Brückentragwerks und des Flüssigkeitsfadens

Nachfolgend ist zu Vergleichszwecken mit den gedämpften Brückenschwingungen die numerisch ermittelte Brückenbewegung im Resonanzfall ohne aktive Flüssigkeitsschwingungstilger dargestellt.

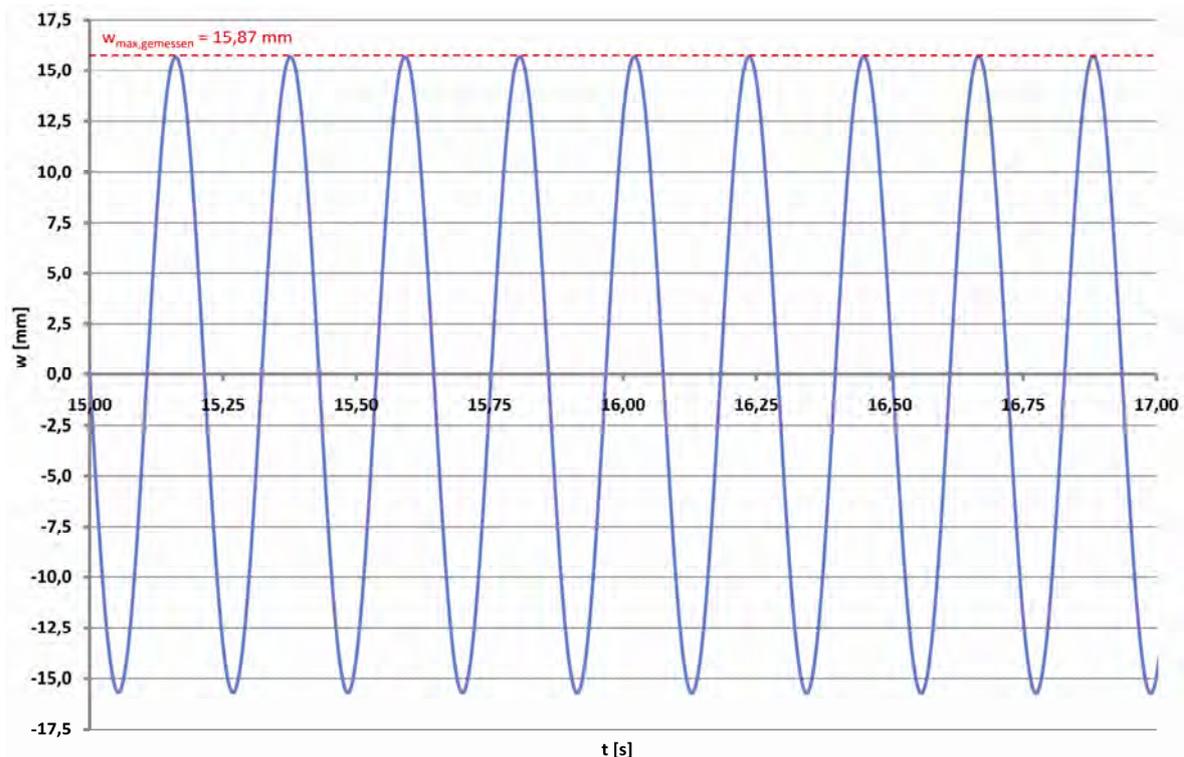


Abbildung 6.40: numerische Brückenbewegung im Resonanzfall ohne Flüssigkeitsschwingungstilger

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

Für den zuvor optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilger mit den Abstimmungsparametern

$$\begin{aligned} f_{opt} &= 0,9888 \\ \delta_{v,opt} &= 15,0 \end{aligned} \quad (6.25)$$

ergaben sich die nachfolgend angeführten Bewegungen des Brückentragwerks sowie des Flüssigkeitsfadens bei Einsatz von zwei optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgern.

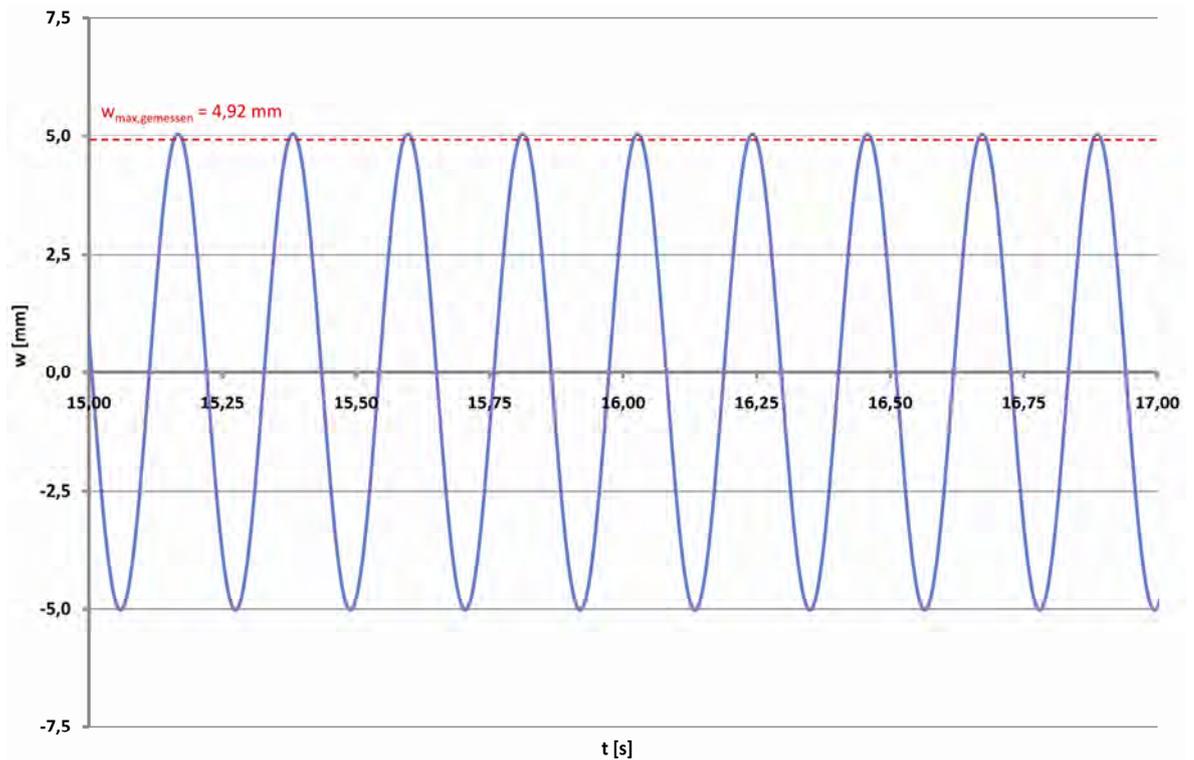


Abbildung 6.41: numerische Brückenbewegung im Resonanzfall mit zwei optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgern

Den Bewegungen des Brückentragwerks kann, wie sich bereits bei den experimentellen Versuchen in Kapitel 6.1.1 herausstellte, eine signifikante Amplitudenminimierung durch Anordnung der Flüssigkeitsschwingungstilger entnommen werden. Die ungleichen Amplituden für die beiden Bewegungsrichtungen des Flüssigkeitsfadens können auf das nichtlineare Verhalten der Druckfedern zurückgeführt werden. Diese ergeben bei gleichem Betrag der Amplituden, aber unterschiedlichem Vorzeichen unterschiedliche Druckverhältnisse (siehe Kapitel 5.1.1) und damit unterschiedlich steife Luftfedern.

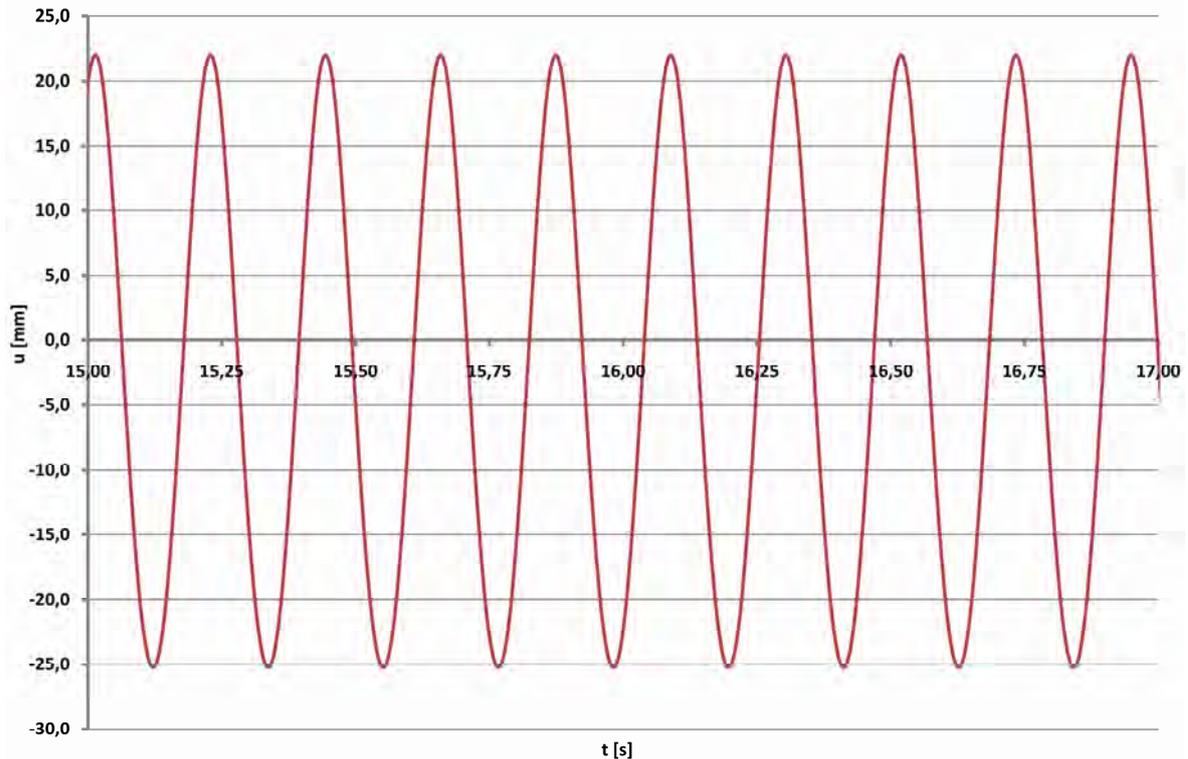


Abbildung 6.42: numerische Bewegung des Flüssigkeitsfadens im Resonanzfall

6.1.2.4. Eigenfrequenz des schwingenden Flüssigkeitsfadens f_a

Zur optimalen Abstimmung der Tilger wurden in Kapitel 5.1.2 Formeln zur Ermittlung der Eigenfrequenz des schwingenden Flüssigkeitsfadens hergeleitet. Dabei wurde von einem linearisierten Druckterm sowie der Vernachlässigung der Dämpfung, wie im Bauwesen bei der Eigenfrequenzermittlung üblich, Gebrauch gemacht.

Die Schwingungen des Flüssigkeitsfadens, wie im vorhergehenden Kapitel dargestellt, wurden numerisch unter Berücksichtigung der nichtlinearen Dämpfung sowie des nichtlinearen Druckterms ermittelt. Um daraus die Eigenfrequenz der Flüssigkeitsschwingung zu ermitteln, wurde eine Fouriertransformation (FFT - Fast Fourier Transformation, siehe z. B. (Meyberg, Höhere Mathematik 2, 1999)) durchgeführt.

Diese lieferte nachfolgend angeführtes Amplituden-Frequenz-Spektrum.

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

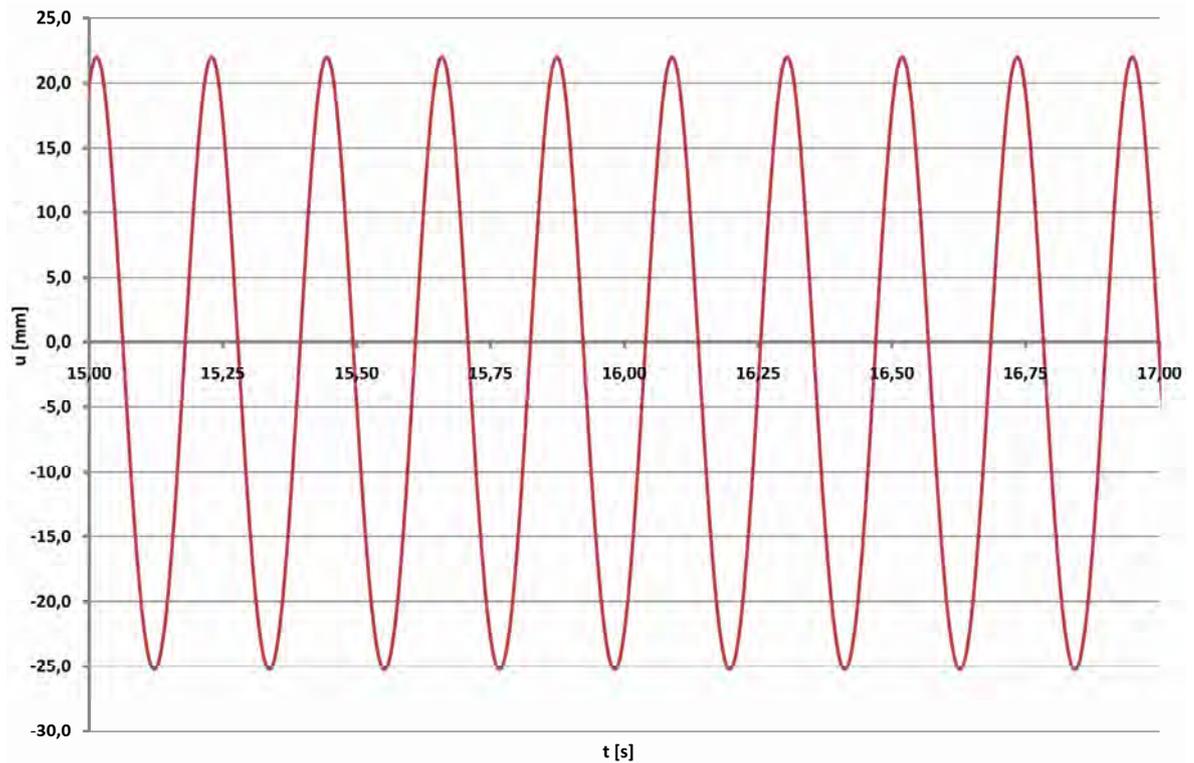


Abbildung 6.43: stationäre Bewegung des Flüssigkeitsfadens im Resonanzfall

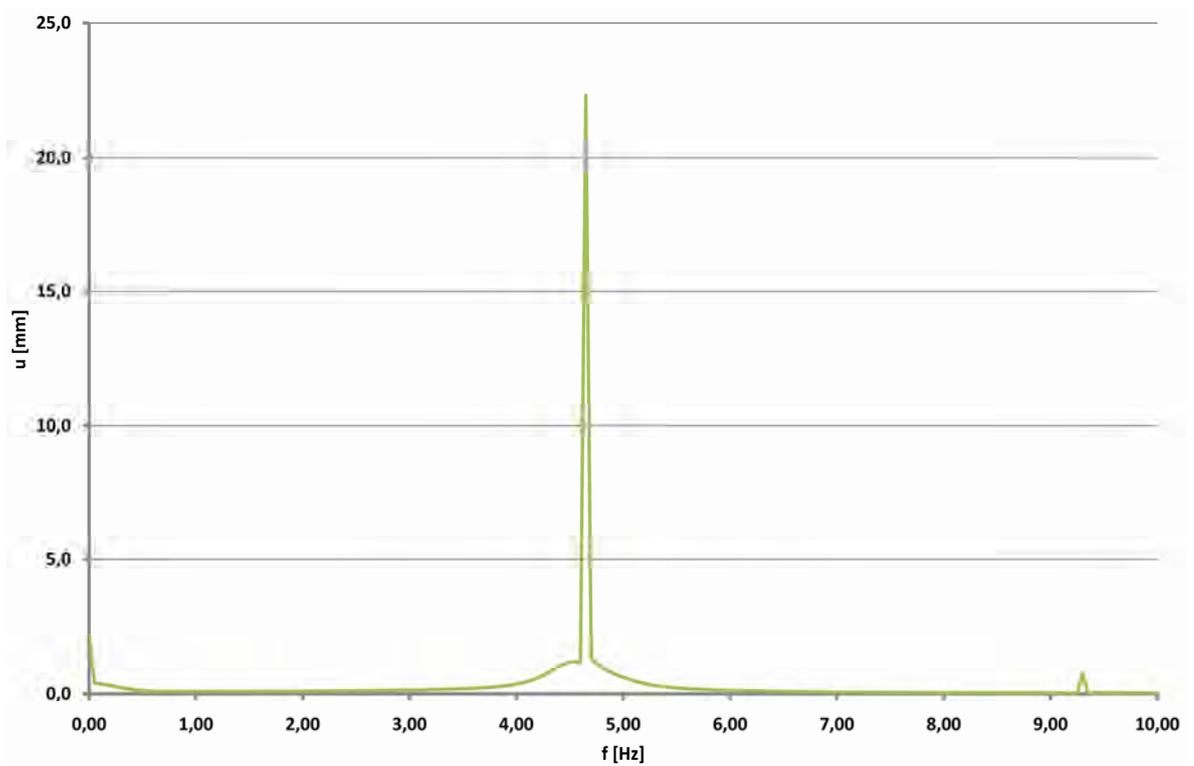


Abbildung 6.44: Amplituden-Frequenz-Spektrum der Flüssigkeitsschwingung

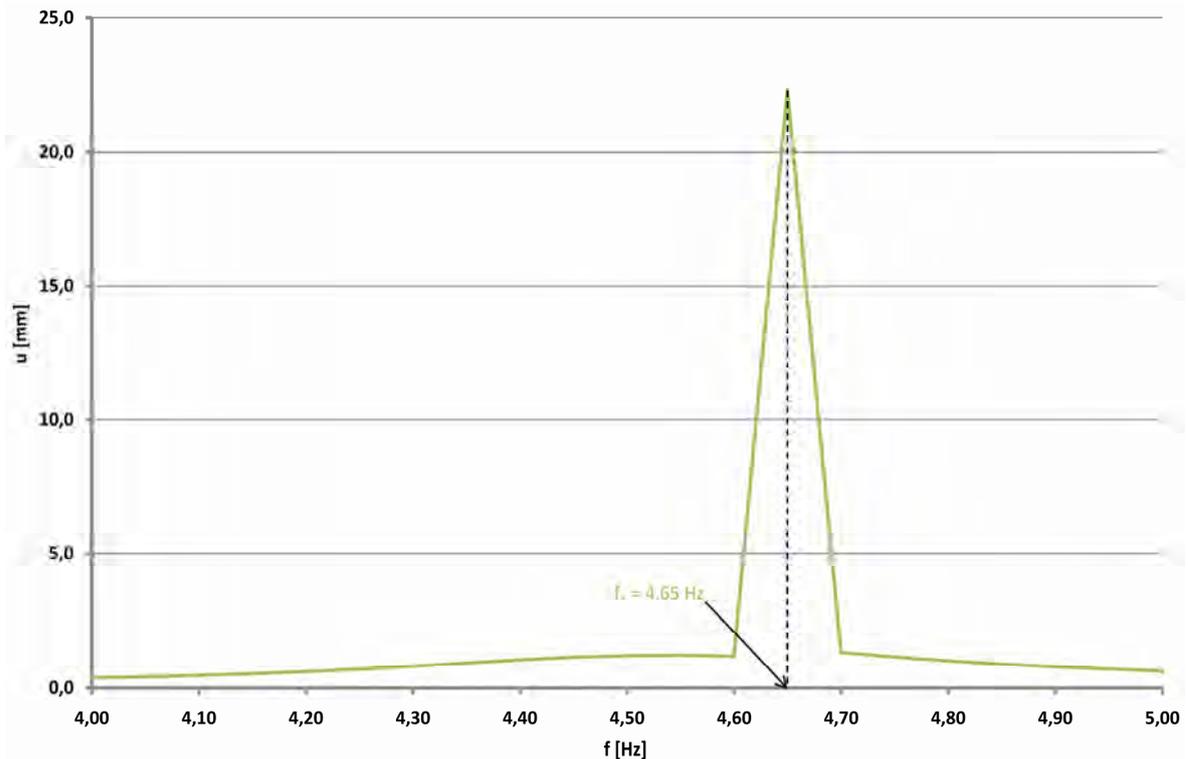


Abbildung 6.45: Amplituden-Frequenz-Spektrum der Flüssigkeitsschwingung (Ausschnitt)

Dem Amplituden-Frequenz-Spektrum kann eine eindeutige Eigenfrequenz der Flüssigkeitsschwingung entnommen werden, diese beträgt

$$f_1 = 4,650 \text{ Hz} \quad (6.26)$$

Vergleicht man diese, unter Berücksichtigung aller Nichtlinearitäten sowie der Parametererregung ermittelte Eigenfrequenz, mit der näherungsweise ermittelten Eigenfrequenz des Flüssigkeitsfadens mit 4,598 Hz, kann, trotz der dabei getroffenen Näherungen, eine sehr gute Übereinstimmung beider festgestellt werden. Es muss jedoch angenommen werden, dass bei größeren Amplituden die Abweichungen zwischen den numerisch und den mit den Näherungsformeln ermittelten Eigenfrequenzen zunimmt, da der Einfluss der Nichtlinearitäten, vor allem des nichtlinearen Druckterms, rapide ansteigt (siehe Kapitel 5.1.1).

6.1.2.5. Vertikalkomponente der Tilgerkraft

Zum Vergleich der eingprägten Kräfte der Unwuchterreger mit der Vertikalkomponente der Tilgerkraft sind die nachfolgenden Abbildungen angeführt. Aus diesen lässt sich ablesen, wie viel Energie der einwirkenden Kräfte bei der gegebenen Tilger-Tragwerkskonfiguration durch die Flüssigkeitsschwingungstilger übernommen wird. Vergleicht man die zeitlichen Kraftverläufe der Erregung mit der vertikalen Tilgerkraft, erkennt man die (fast) exakte Phasenverschiebung von $\pi/2$. Des Weiteren sind ebenfalls die, bereits bei der Flüssigkeitsbewegung aufgefallene, Abhängigkeit der Amplitude von der Bewegungsrichtung der Flüssigkeit (unterschiedliche Druckfedern) sowie das rasche Erreichen des Wirkungsmaximums des Tilgers bereits nach ca. 2 s ersichtlich gemacht.

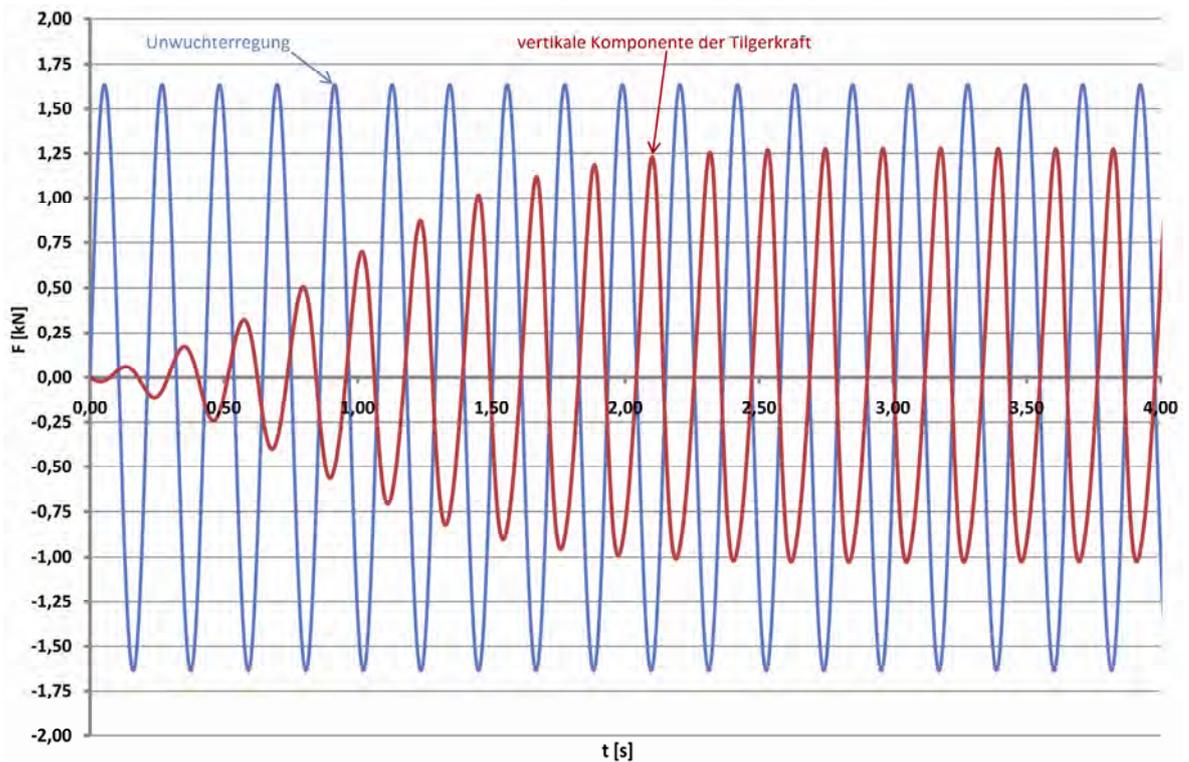


Abbildung 6.46: Kräfteerregung durch Unwuchterreger sowie resultierende Vertikalkomponente der Tilgerkraft

Die auf das Tragwerk einwirkende Kraft wird dabei um ca. 75 % vom Flüssigkeitsschwingungstilger aufgenommen. Ein ähnliches Verhältnis konnte, wie zu erwarten war, beim Vergleich der Bewegungen des ungedämpften Tragwerks mit dem Tragwerk mit zwei optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgern beobachtet werden.

6.1.2.6. Einfluss des nichtlinearen Druckterms

In vielen theoretischen Herleitungen des Kapitels 5 mussten die nichtlinearen Druckterme (siehe z. B. Gl. (5.35)) aus Kapitel 5.1.1 linearisiert werden (siehe z. B. Gl. (5.36)). Der Einfluss dieser Linearisierung wird in diesem Kapitel untersucht. Dazu werden mit den gegebenen Parametern des optimal abgestimmten Tilgers nach den Kapiteln 6.1.2.1 und 6.1.2.2 die Flüssigkeitsbewegungen sowie die Brückenbewegung bei unterschiedlich großer Kräfteerregung numerisch ermittelt, einmal mit nichtlinearem und einmal mit linearisiertem Druckterm. Dabei wurde die statische Unwucht me pro Unwuchterreger von 0,50 bis 10,0 kgm in 0,50 kgm Schritten variiert. Die Ergebnisse sind in den nachfolgenden Abbildungen ersichtlich gemacht.

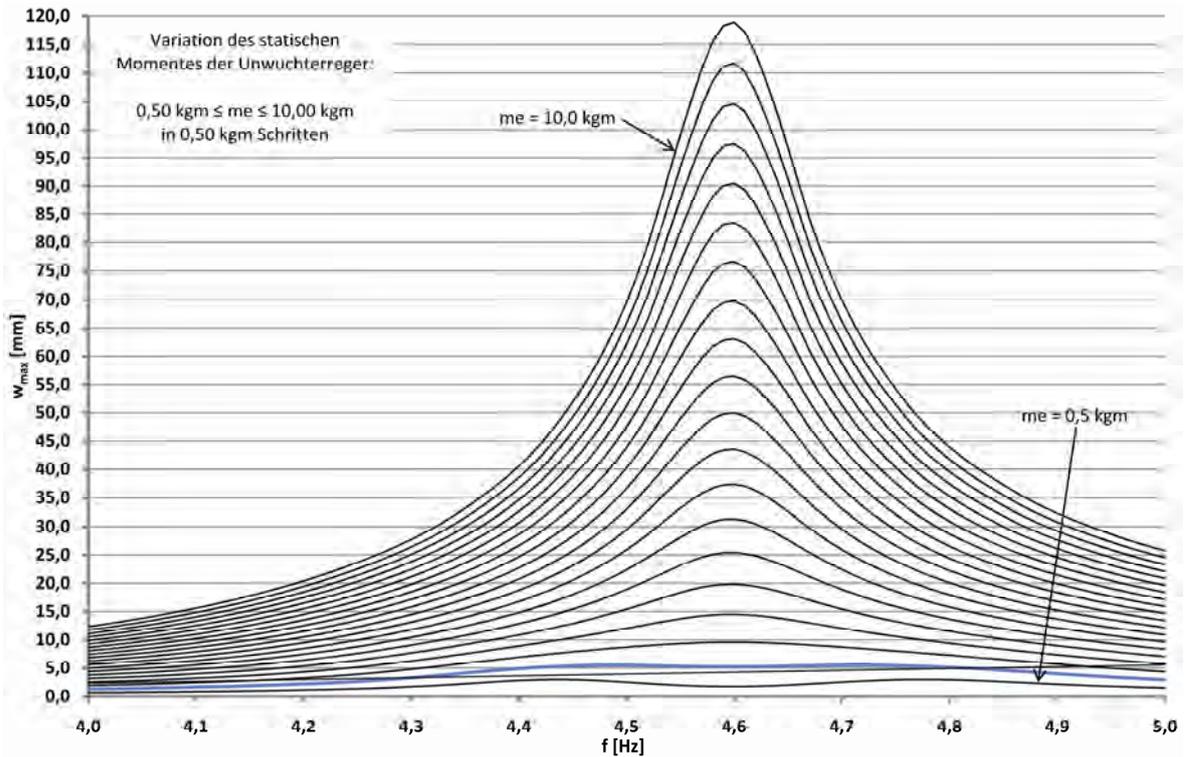


Abbildung 6.47: Amplitudenfrequenzgänge der Tragwerksbewegung bei unterschiedlichem statischem Moment der Unwuchterreger und nichtlinearem Druckterm

Dabei kann beobachtet werden, dass sich die Resonanzkurven bei steigender statischer Unwucht, also bei größer werdender Krafterregung, immer mehr der Form der Resonanzkurven des Einmassenschwingers annähern. Da bei größerer Krafterregung die Amplituden der Tragwerksbewegung und damit auch die Amplituden der Flüssigkeitsbewegung größer werden, sinkt die optimale äquivalente Dämpfung (siehe Gl. (5.100)). Dieser Sachverhalt wurde bereits in Kapitel 6.1.2.2 erläutert. Somit ist der als konstant vorausgesetzte nichtlineare Dämpfungswert für die größeren Krafterregungen viel zu groß, was sich auch in den Amplitudenfrequenzgängen zeigt. Lediglich für die Krafterregung von 0,96 kgm, die in den vorhergehenden Kapiteln berücksichtigt wurde, ergeben sich optimale Resonanzkurven. Diese ist durch die blaue Resonanzkurve dargestellt. Da bei der linearisierten Dämpfung derselbe Effekt der zu starken Dämpfung auftritt, hat dieser für die gegenständliche Vergleichsbetrachtung keinen Einfluss. Alternativ müsste man für jede Krafterregung die Amplitude der Flüssigkeitsbewegung und damit den optimalen nichtlinearen Dämpfungsterm ermitteln. Darauf wurde aufgrund der zuvor genannten Vergleichsbetrachtung verzichtet.

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

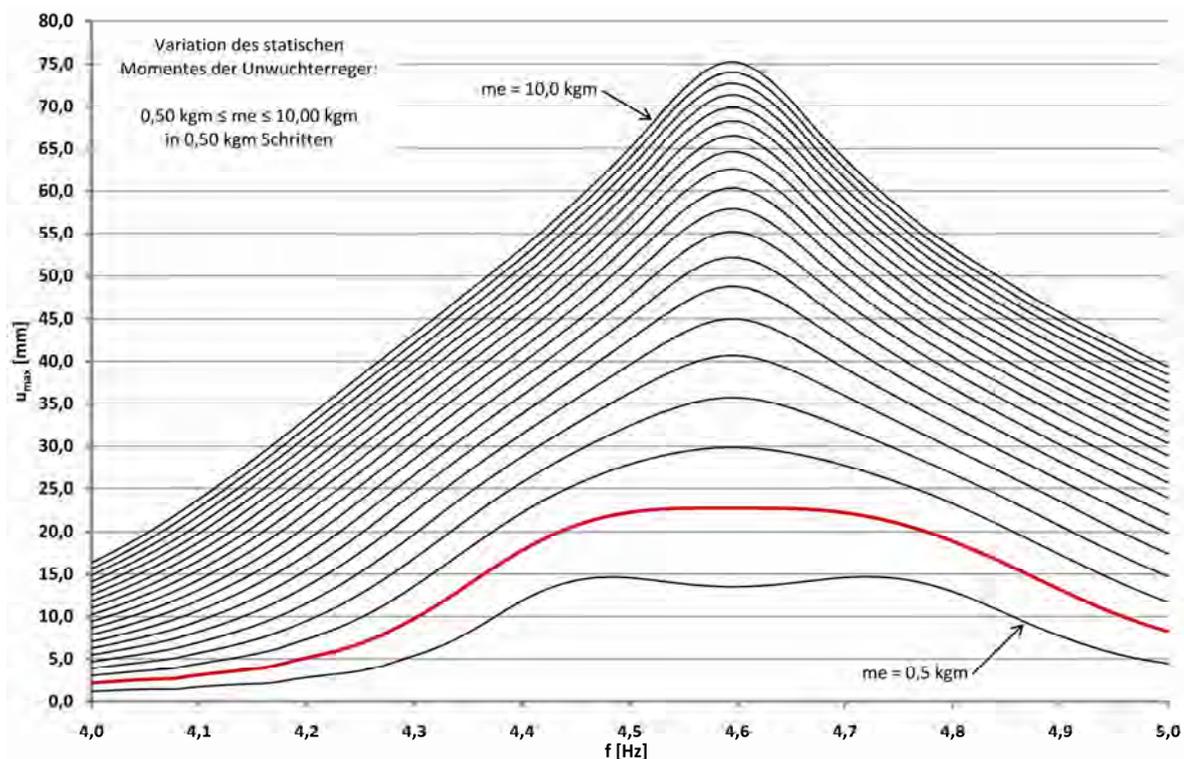


Abbildung 6.48: Amplitudenfrequenzgänge der Flüssigkeitsfadenbewegung bei unterschiedlichem statischem Moment der Unwuchterreger und nichtlinearem Druckterm

Die Abbildung der Amplitudenfrequenzgänge der Flüssigkeitsbewegung belegt die zuvor gemachten Überlegungen. Da die Amplitude der Flüssigkeitsbewegung mit steigender Krafterregung größer wird, müsste der nichtlineare Dämpfungswert für jede Krafterregung angepasst werden, jene Krafterregung mit der optimalen Dämpfung ist rot hervorgehoben.

Betrachtet man jene Resonanzkurven mit Krafterregungen im Bereich von 10,0 kgm, kann man erkennen, dass in diesem Bereich trotz kontinuierlich gesteigertem statischem Moment der Zuwachs der Amplituden von einer Stufe der Krafterregung zur nächsten immer kleiner wird. Dies ist ein Effekt des nichtlinearen Druckterms, da sich das Luftvolumen bei steigender Flüssigkeitsspiegelamplitude immer weniger komprimieren lässt, siehe auch z. B. Abbildung 5.11. Um die Auswirkungen der Linearisierung des Druckterms ausarbeiten zu können, sind in den nachfolgenden Abbildungen die Tragwerksbewegung sowie die Fluidbewegung mit linearisiertem Druckterm dargestellt.

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

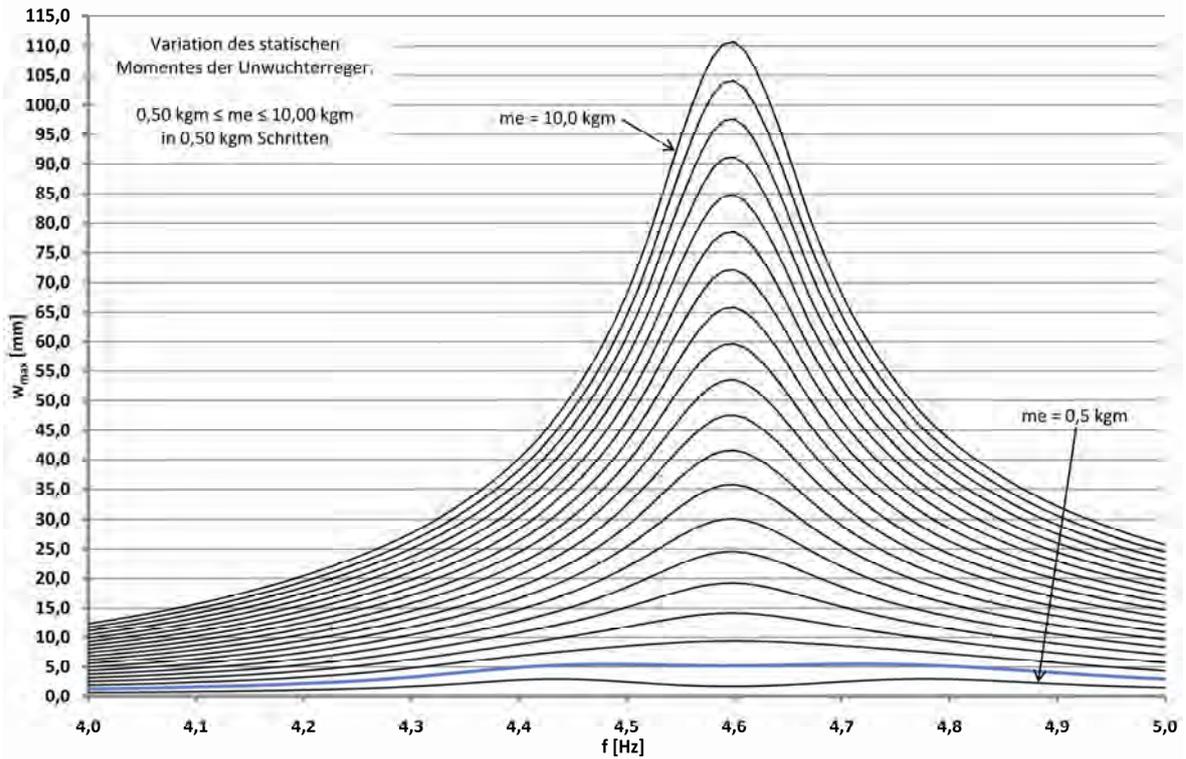


Abbildung 6.49: Amplitudenfrequenzgänge der Tragwerksbewegung bei unterschiedlichem statischem Moment der Unwuchterreger und linearisiertem Druckterm

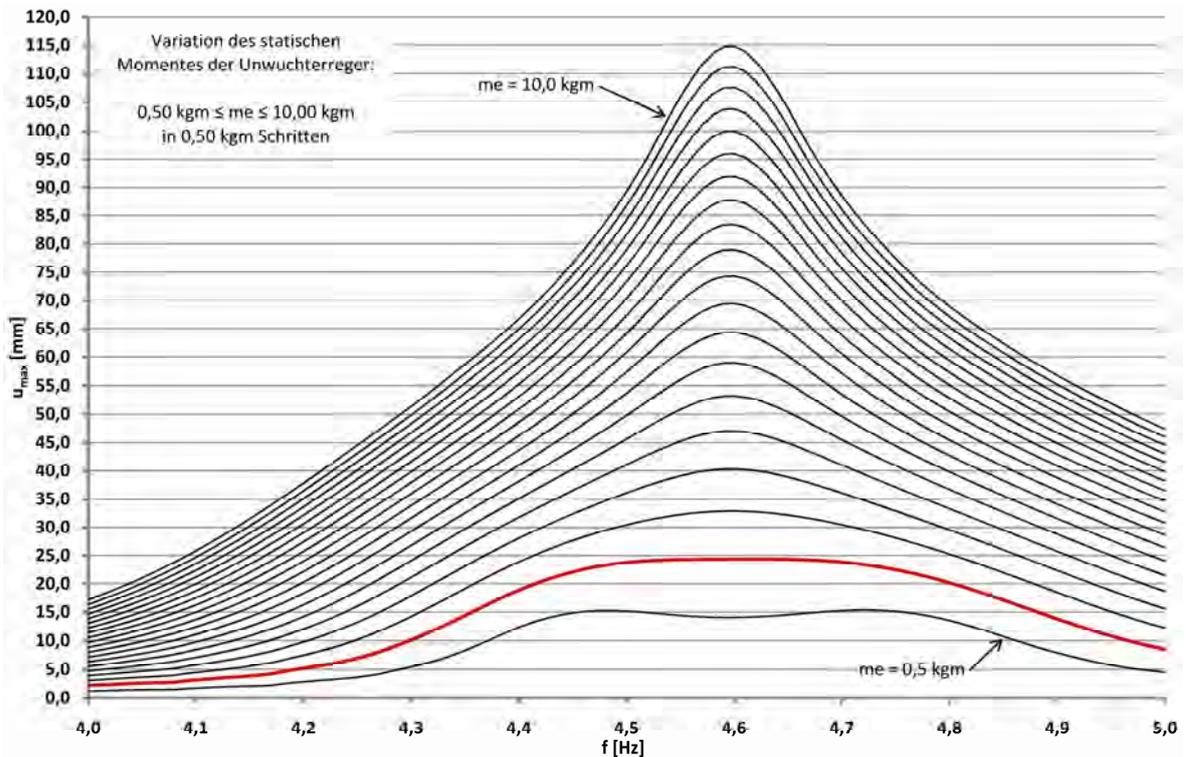


Abbildung 6.50: Amplitudenfrequenzgänge der Flüssigkeitsfadenbewegung bei unterschiedlichem statischem Moment der Unwuchterreger und linearisiertem Druckterm

Der erste interessante und auf den ersten Blick nicht erwartete Effekt ist, dass die Tragwerksbewegungen bei Berücksichtigung des nichtlinearen Druckterms größer sind als mit linearisiertem Druckterm. Geht man jedoch einen Schritt zurück und wirft erneut einen Blick auf den Vorgang der Tilgerabstimmung, lässt sich erkennen, dass für die wichtige Abstimmung der Eigenfrequenz des Tilgers ebenfalls die Linearisierung des Druckterms vorgenommen wurde. Das bedeutet, dass bei größer werdenden Amplituden der Fluidbewegung und bei Berücksichtigung des nichtlinearen Druckterms die vorhandene Frequenzabstimmung immer mehr abweicht von der optimalen Frequenzabstimmung des Tilgers. An dieser Stelle muss jedoch auch betont werden, dass dieser Kraftbereich der Erregung bereits in einem sehr unrealistischen Verhältnis zur Versuchsbrücke steht, was auch an den Amplituden der Brückenbewegung abgelesen werden kann. Im praktischen Einsatzbereich der Flüssigkeitsschwingstilger ist also nicht mit großen Auswirkungen des nichtlinearen Druckterms zu rechnen. Ein Vergleich der Amplituden der Brückenbewegung mit linearem und nichtlinearem Druckterm kann nachfolgender Abbildung entnommen werden.

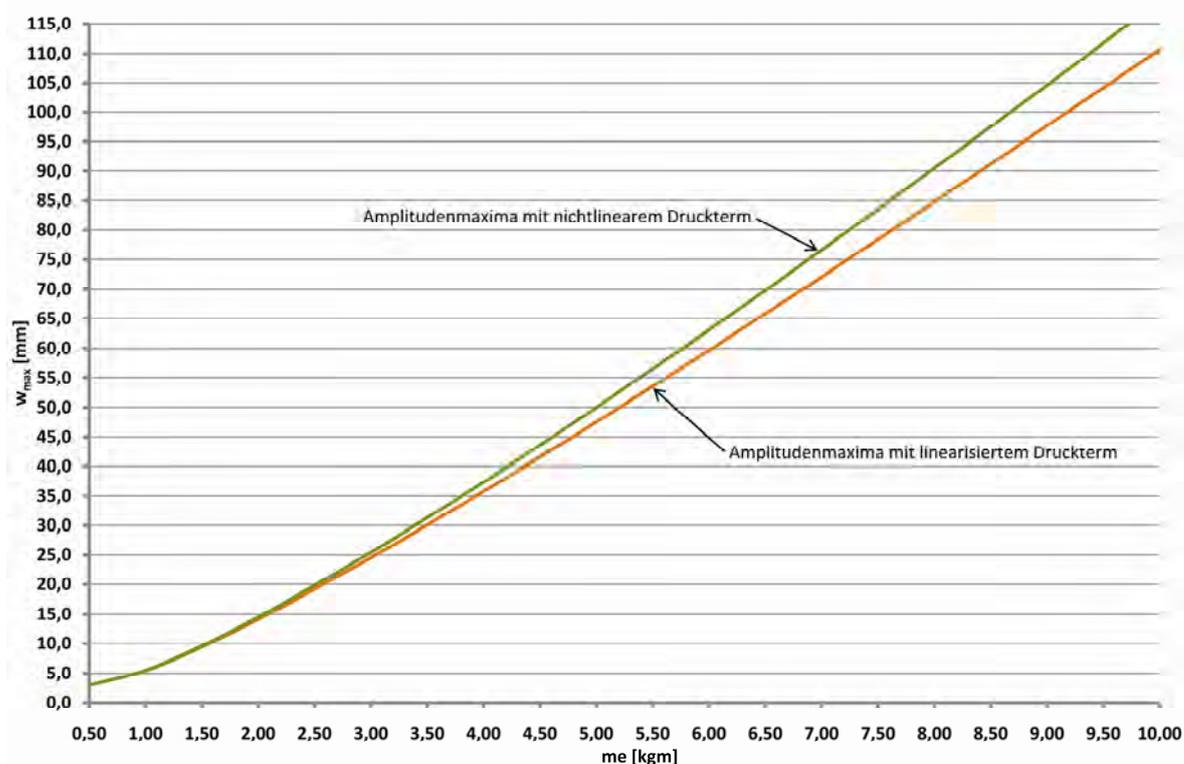


Abbildung 6.51: Maximale Amplituden der Tragwerksbewegung ermittelt mit nichtlinearem und mit linearisiertem Druckterm

Der zweite und durchaus erwartete Effekt der Nichtlinearität betrifft die Fluidbewegung. Diese ist bei nichtlinearem Druckterm deutlich geringer als bei linearisiertem und das bereits bei geringen Kraftamplituden. Das ist jedoch einleuchtend, wenn man bedenkt, dass die linearisierte Luftfeder eine konstante Widerstandsänderung gegen eine Veränderung des Luftvolumens liefert, die nichtlineare Luftfeder hingegen eine exponentielle Veränderung des Widerstandes aufweist. Dies ist auch sehr anschaulich in Abbildung 5.11 dargestellt. Nachfolgend sind die Amplituden der Flüssigkeitsbewegung unter Berücksichtigung beider Druckterme dargestellt.

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

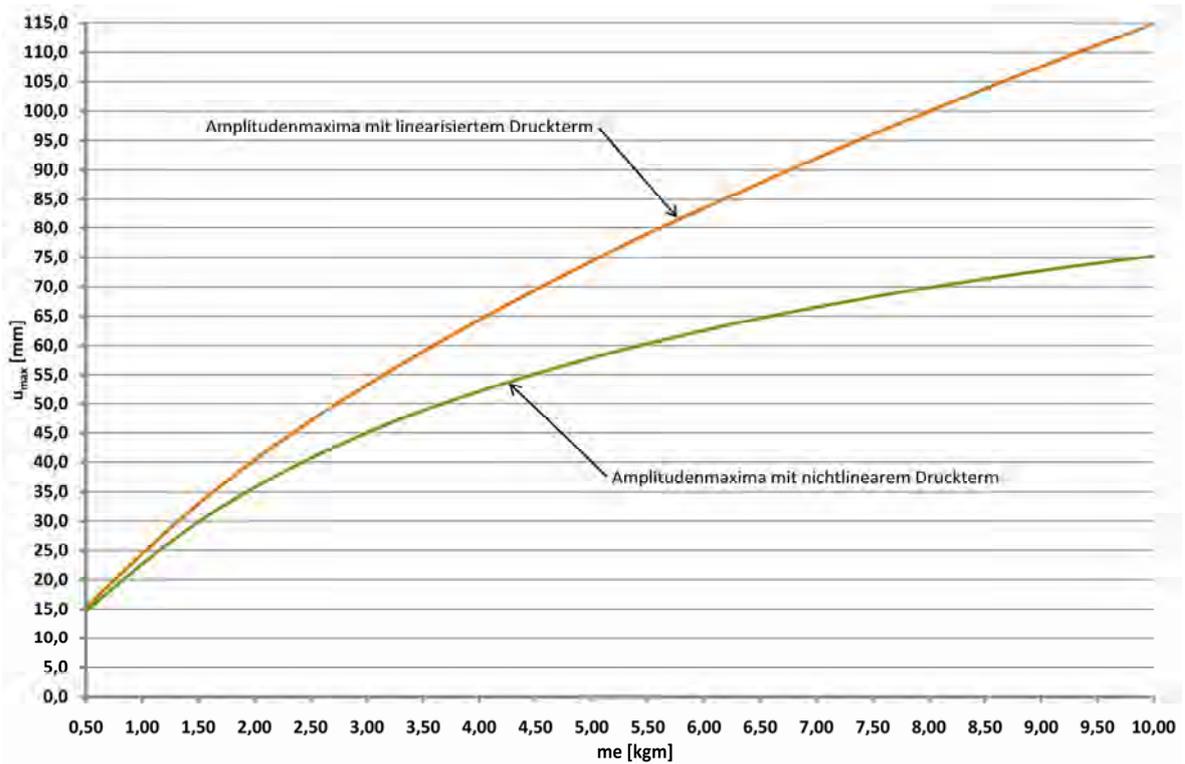


Abbildung 6.52: Maximale Amplituden der Flüssigkeitsbewegung ermittelt mit nichtlinearem und mit linearisiertem Druckterm

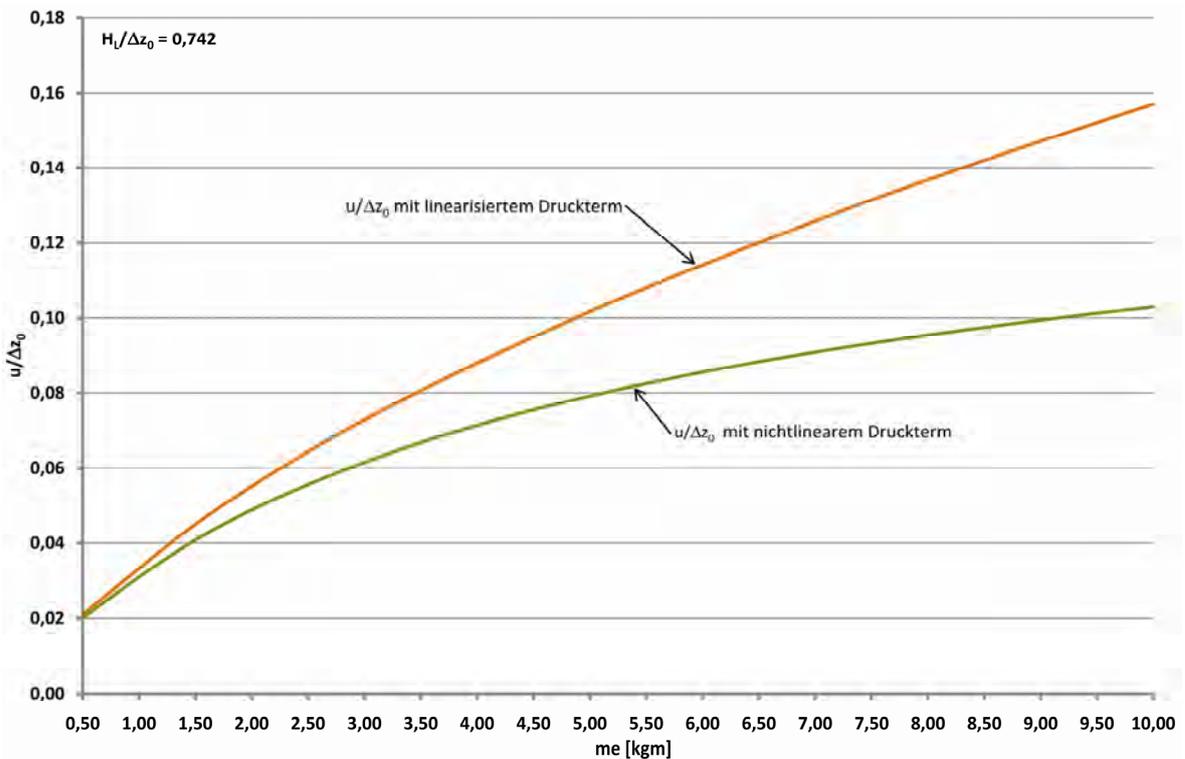


Abbildung 6.53: Maximale Amplituden der Flüssigkeitsbewegung bezogen auf die vertikale Flüssigkeitsspiegeldifferenz ermittelt mit nichtlinearem und mit linearisiertem Druckterm

Um einen Vergleich mit den Druckverläufen aus Kapitel 5.1.1 wurden in Abbildung 6.53 die bezogenen Größen $u/\Delta z_0$ sowie $H_L/\Delta z_0$ verwendet. Betrachtet man die Druckverläufe mit $H_L/\Delta z_0 = 0,742$ in Abbildung 5.11, erkennt man den stark nichtlinearen Verlauf des exakten adiabatischen Druckterms. Eine Linearisierung in diesem Bereich ist also äußerst fragwürdig.

Trotz des hier gezeigten relativ großen Einflusses des nichtlinearen Druckterms bei großen Amplituden konnte vor allem durch die Effektivität der, mittels der Äquivalenzbeziehungen abgestimmten, Flüssigkeitsschwingungstilger auf experimentellem Wege gezeigt werden, dass eine Linearisierung für die Frequenzabstimmung durchaus zulässig ist. Bei der Ermittlung der zu erwartenden Verformungen des Tragwerks aber vor allem der Fluidbewegung selbst ist diese Vereinfachung der physikalischen Realität in Bezug auf das Verhältnis Fluidbewegung zur vertikalen Flüssigkeitsspiegelauslenkung $u/\Delta z_0$ nur sehr begrenzt einsetzbar.

6.1.2.7. Untersuchungen zur Parameterresonanz

Wie in Kapitel 6.1.1 ersichtlich gemacht wurde, konnten bei den experimentellen Untersuchungen keine Effekte von Parameterresonanz, die sich durch unregelmäßige Tragwerksschwingungen sowie durch unbegrenzte Zunahme deren Amplituden bemerkbar macht, beobachtet werden. In diesem Kapitel soll numerisch gezeigt werden, dass beim Einsatz von Flüssigkeitsschwingungstilgern durchaus mit dem Effekt der Parameterresonanz gerechnet werden muss. Dafür werden zuerst die Stabilitätsparameter $\bar{\delta}$ und $\bar{\varepsilon}$ der optimal abgestimmten Tilger aus Kapitel 6.1.2 mit der Gl. (5.108) ausgewertet. Diese lauten

$$\bar{\delta} = \frac{\sin(60) \cdot 9,81}{0,804 \cdot 29,09^2} + \frac{(100000 + 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,731) \cdot 1,405 \cdot \sin(60)}{2 \cdot 0,804 \cdot 1000 \cdot 29,09^2 \left(0,541 \cdot \sin(60) + \frac{0,731}{2} \right)} = 0,127$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sin(60)}{0,804} \cdot 0,00551 = 0,006$$
(6.27)

Trägt man dieses Parameterpaar in die Stabilitätskarte von Abbildung 5.38 ein, erkennt man, dass dieses in deren stabilen Bereich zu liegen kommt, Parameterresonanz kann somit für diese Tilgerkonfiguration ausgeschlossen werden. Um das Auftreten von Parameterresonanz trotzdem aufzeigen zu können, wurden einerseits die Geometrieabmessungen des Tilgers variiert, andererseits wurde durch ein vergrößertes statisches Moment der Unwuchterreger eine größere Amplitude der Brückenbewegung erzeugt. Die sich dabei ergebenden und nach wie vor realistischen und ausführbaren Abmessungen des Tilgers lauten

$$\begin{aligned} H &= 0,400 \text{ m} & H_L &= 0,693 \text{ m} \\ \Delta z_0 &= 0,731 \text{ m} & f_1 &= 4,61 \text{ Hz} \\ m_F &= 30,90 \text{ kg} \end{aligned}$$
(6.28)

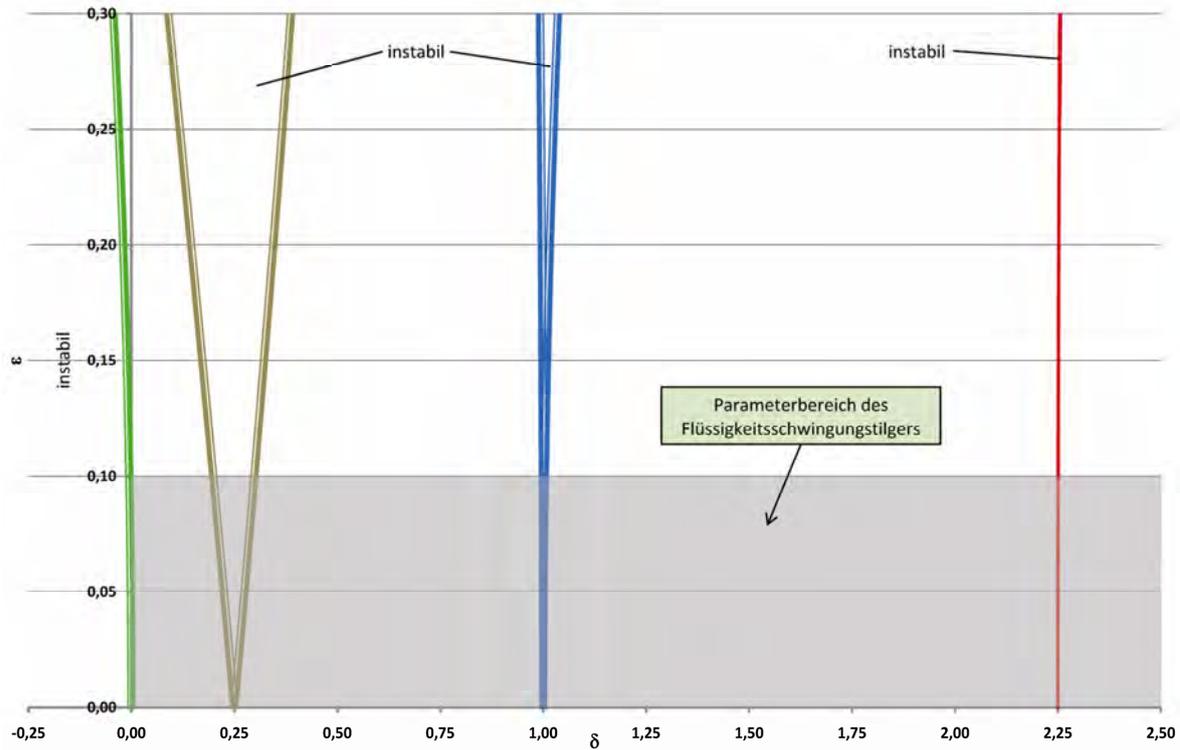


Abbildung 6.54: Stabilitätskarte für die Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsschwingungstilgers ohne Dämpfung

Die weiterführenden numerischen Untersuchungen wurden unter der Annahme eines ungedämpften Haupttragwerks sowie eines linearen Dämpfungs- und Druckterms für den Flüssigkeitsschwingungstilger durchgeführt, da sich beide Nichtlinearitäten positiv auf Parameterresonanz auswirken würden, wie später noch erläutert werden soll. Ebenso wurde für die folgende Untersuchung ein aktiver Tilger in Rechnung gestellt. Das Parameterpaar für die Parameterresonanz lautet mit den Geometrieabmessungen von Gl. (6.28) und einem statischen Moment $m_e = 10,0 \text{ kgm}$

$$\bar{\delta} = \frac{\sin(60) \cdot 9,81}{0,400 \cdot 28,97^2} + \frac{(100000 + 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,731) \cdot 1,405 \cdot \sin(60)}{2 \cdot 0,400 \cdot 1000 \cdot 28,97^2 \left(0,693 \cdot \sin(60) + \frac{0,731}{2} \right)} = 0,227 \quad (6.29)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sin(60)}{0,400} \cdot 0,162 = 0,351$$

sowie zum Vergleich ohne Parameterresonanz mit einem statischen Moment $m_e = 1,0 \text{ kg}$

$$\bar{\delta} = \frac{\sin(60) \cdot 9,81}{0,400 \cdot 28,97^2} + \frac{(100000 + 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,731) \cdot 1,405 \cdot \sin(60)}{2 \cdot 0,400 \cdot 1000 \cdot 28,97^2 \left(0,693 \cdot \sin(60) + \frac{0,731}{2} \right)} = 0,227 \quad (6.30)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sin(60)}{0,400} \cdot 0,007 = 0,015$$

Die Lage der Parameterpaare in der Stabilitätskarte resultierend aus der unterschiedlich großen Unwuchterregung ist in nachfolgender Abbildung dargestellt.

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

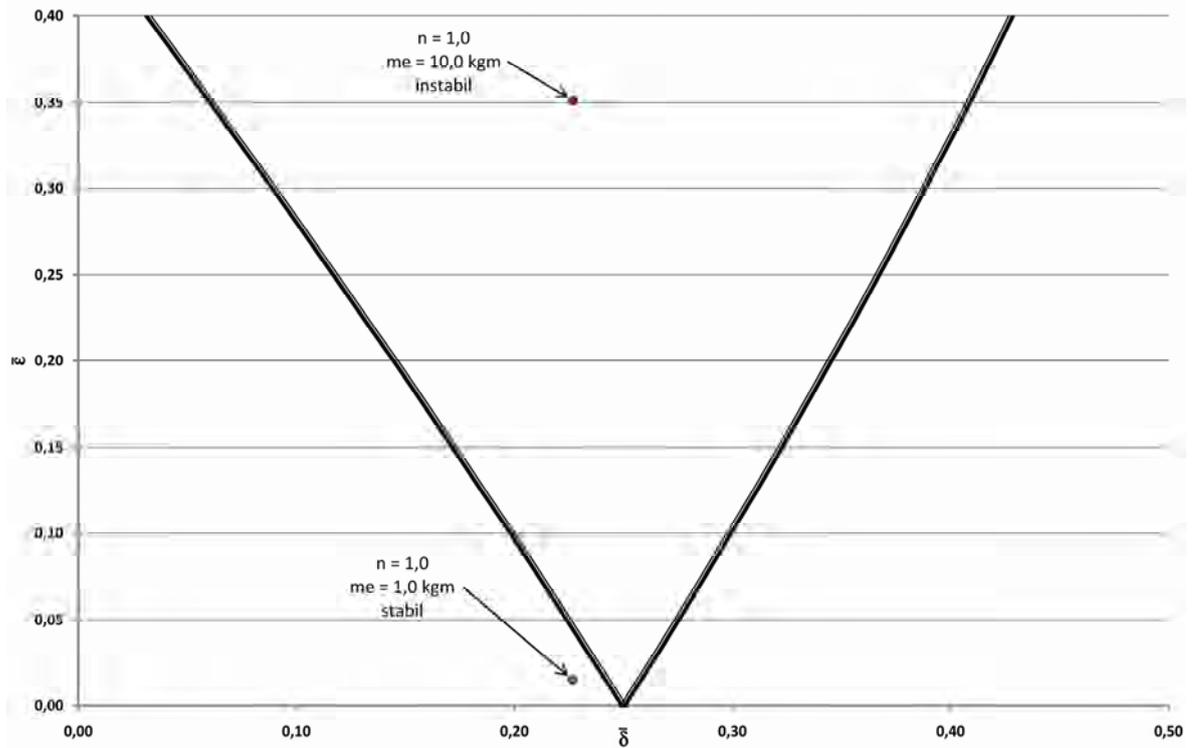


Abbildung 6.55: Lage der Parameterpaare bei statischen Unwuchten m_e von 1,0 und 10,0 kgm
Mit dieser stabilen und instabilen Konfiguration des Flüssigkeitsschwingungstilgers ergeben sich nachfolgende Tragwerksbewegungen.

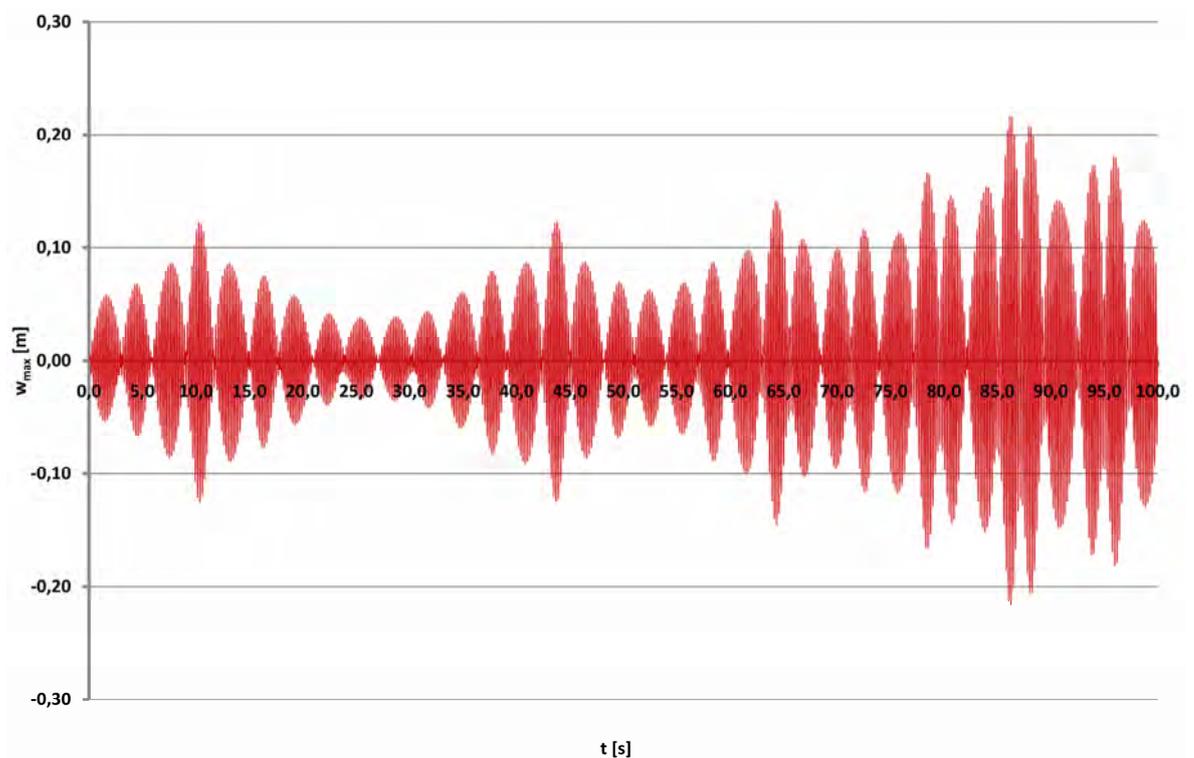


Abbildung 6.56: Bewegungen des Tragwerks bei Anordnung eines Tilgers mit instabilem Parameterpaar δ und ϵ bei einem statischen Moment von 10,0 kgm

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

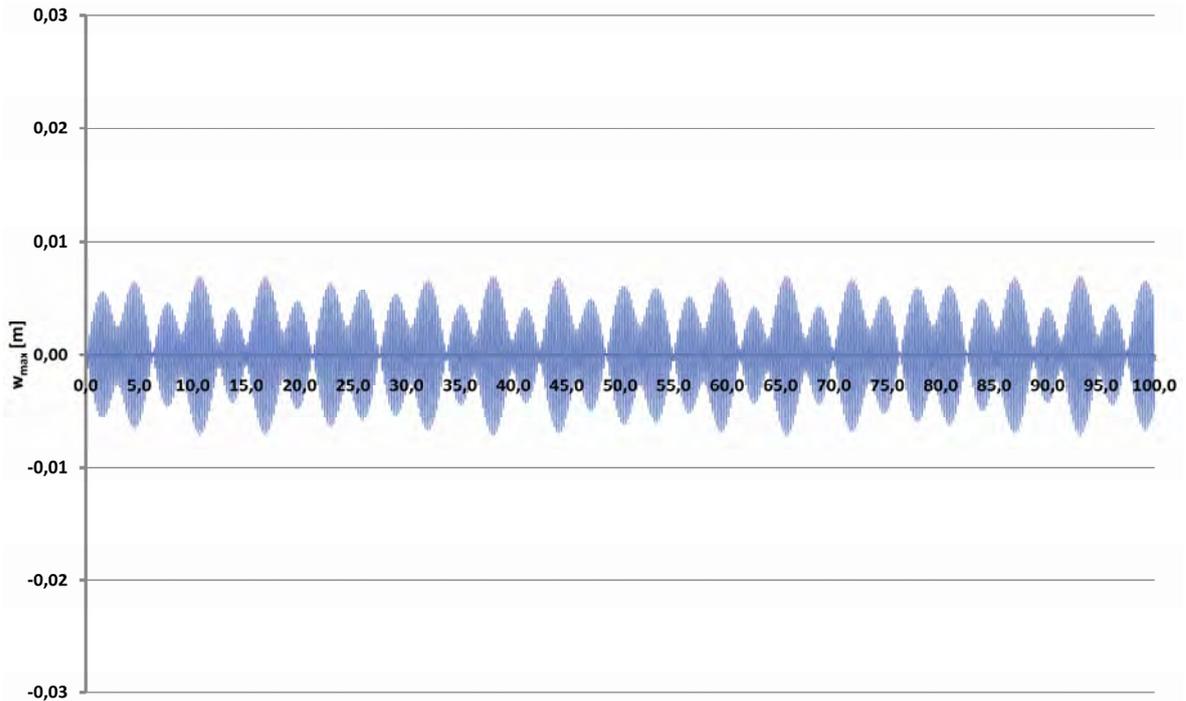


Abbildung 6.57: Bewegungen des Tragwerks bei Anordnung eines Tilgers mit stabilem Parameterpaar δ und ϵ bei einem statischen Moment von 1,0 kgm

Verwendet man als Abszisseneinheit die auf die statische Unwucht bezogene Tragwerksbewegung, lassen sich, wie in nachfolgender Abbildung dargestellt ist, beide Schwingungsverläufe miteinander vergleichen.

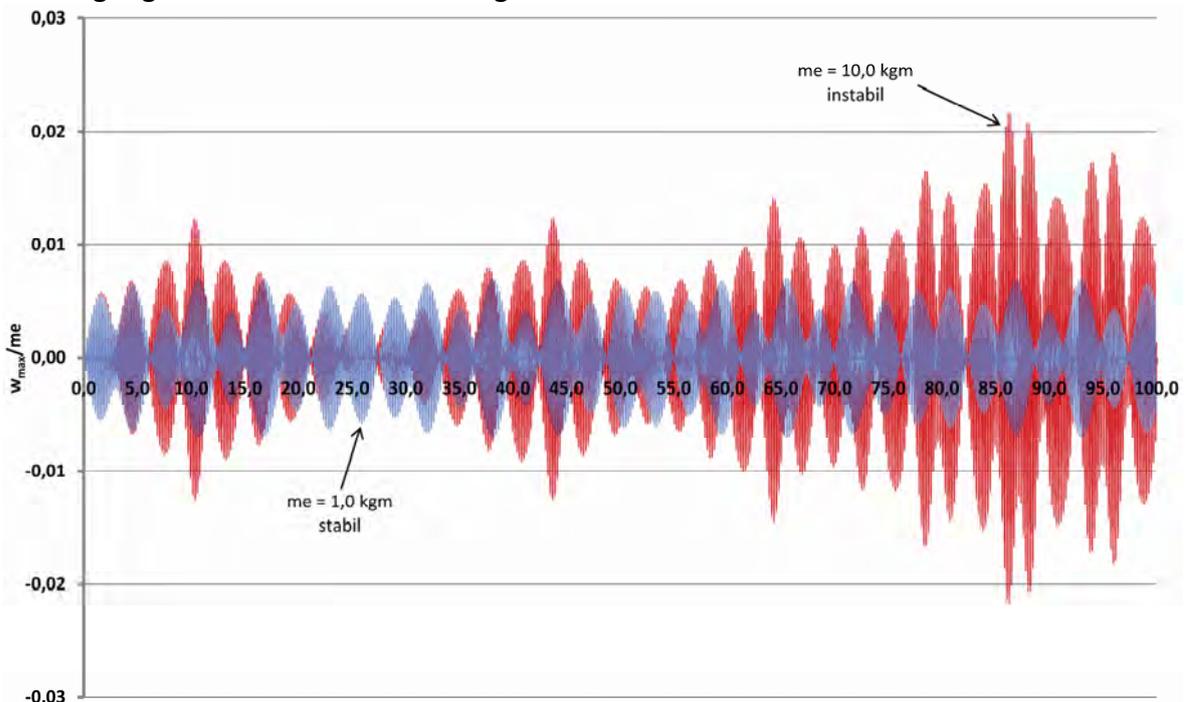


Abbildung 6.58: Vergleich der auf die statische Unwucht bezogene Tragwerksbewegung mit stabilen und instabilen Parameterpaar δ und ϵ bei einem statischen Moment von 1,0 und 10,0 kgm

Dem Vergleich der beiden Schwingungsverläufe kann entnommen werden, dass sich Parameterresonanz tatsächlich durch eine viel unregelmäßigere Tragwerksbewegung sowie einem unbegrenzten Anwachsen der Amplituden bemerkbar macht. Diese Effekte können der Schwingungskurve mit instabilem Parameterpaar entnommen werden.

Eine wichtige Voraussetzung für Parameterresonanz ist eine nur geringe Dämpfung des Flüssigkeitsschwingungstilgers, denn wie in Gl. (5.138) gezeigt werden konnte, kann bei Überschreitung der minimal erforderlichen Dämpfung ζ_{min} , die sich als sehr gering herausstellte, Parameterresonanz gänzlich ausgeschlossen werden. Ermittelt man nun das minimal erforderliche viskose Dämpfungsmaß für die zuvor untersuchte Konfiguration mit Parameterresonanz, folgt dieses zu

$$\zeta_{min} = \frac{\sin(60)}{2 \cdot 30,67 \cdot 28,95 \cdot 0,400} \cdot 0,216 \cdot 100 = 0,026 \% \quad (6.31)$$

Dieses viskose Dämpfungsmaß ist, unabhängig von der verwendeten Flüssigkeit, immer eingehalten. Deshalb musste, um den Effekt der Parameterresonanz numerisch beobachten zu können, ein viskoses Dämpfungsmaß von $\zeta = 0,00001 \%$ angesetzt werden, was natürlich eine unrealistische Größenordnung aufweist.

Die Untersuchungen zur Parameterresonanz dieses Kapitels konnten, wie bereits im Kapitel 5.1.4 ausgearbeitet, aufzeigen, dass dieser ungünstige Effekt beim Flüssigkeitsschwingungstilger nahezu nicht auftreten kann. Einerseits liegt dies an der sehr geringen erforderlichen minimalen viskosen Dämpfung, die praktisch in jedem Tilger vorhanden ist und deutlich den Grenzwert ζ_{min} überschreitet. Andererseits ist, um in der Stabilitätskarte des Tilgers in einen instabilen Bereich zu kommen, der Parameter $\bar{\epsilon}$ ausreichend groß zu wählen, was eine ausreichend große Amplitude des Tragwerks, sowie eine dementsprechend große Krafterregung voraussetzt. Auf den Effekt der Parameterresonanz wirken sich die Nichtlinearitäten des Druck- und des Dämpfungsterms positiv aus, da diese bei großen Amplituden jeweils exponential ansteigende Rückstellkräfte erzeugen und damit eine durch Parameterresonanz angefachte Schwingung in den auftretenden Amplituden limitiert.

6.2. Versuchsreihe 2

6.2.1. Experimentelle Untersuchungen

6.2.1.1. Ausgangsparameter

Wie in Kapitel 3.1.3.2 bereits angeführt wurde, konnten die mechanischen Parameter der Brücke mit Gleisoberbau (Schotterbett, Schwellen und Schienen) unter Berücksichtigung der von den Schwellen gelösten Schienen zu

$$\begin{aligned} m &= 41,48 \text{ t} \\ f_1 &= 2,78 \text{ Hz} \\ \zeta &\approx 2,34 \% \end{aligned} \quad (6.32)$$

bestimmt werden. Damit lautet die für die Abstimmung der Tilger notwendige modale Masse der Versuchsbrücke nach Gl. (2.151)

$$\bar{m} = \frac{41,48}{2} = 20,74 \text{ t} \quad (6.33)$$

Nachfolgend sind die verwendeten Flüssigkeitsschwingungstilger dargestellt. Dabei wurde ein Tilger, wie bei der Versuchsreihe 1, aus PE-HD Wasserrohren mit V-Form hergestellt. Der Innendurchmesser wurde dabei auf 277,6 mm vergrößert, die Schenkelneigung wurde wiederum mit 60° vorgegeben. Die für ein ausreichendes Masseverhältnis notwendige Schenkellänge ergab sich zu 2910,0 mm, an den Rohrenden wurden Losflansche zur Befestigung einer Rohrabschlusskonstruktion vorgesehen.

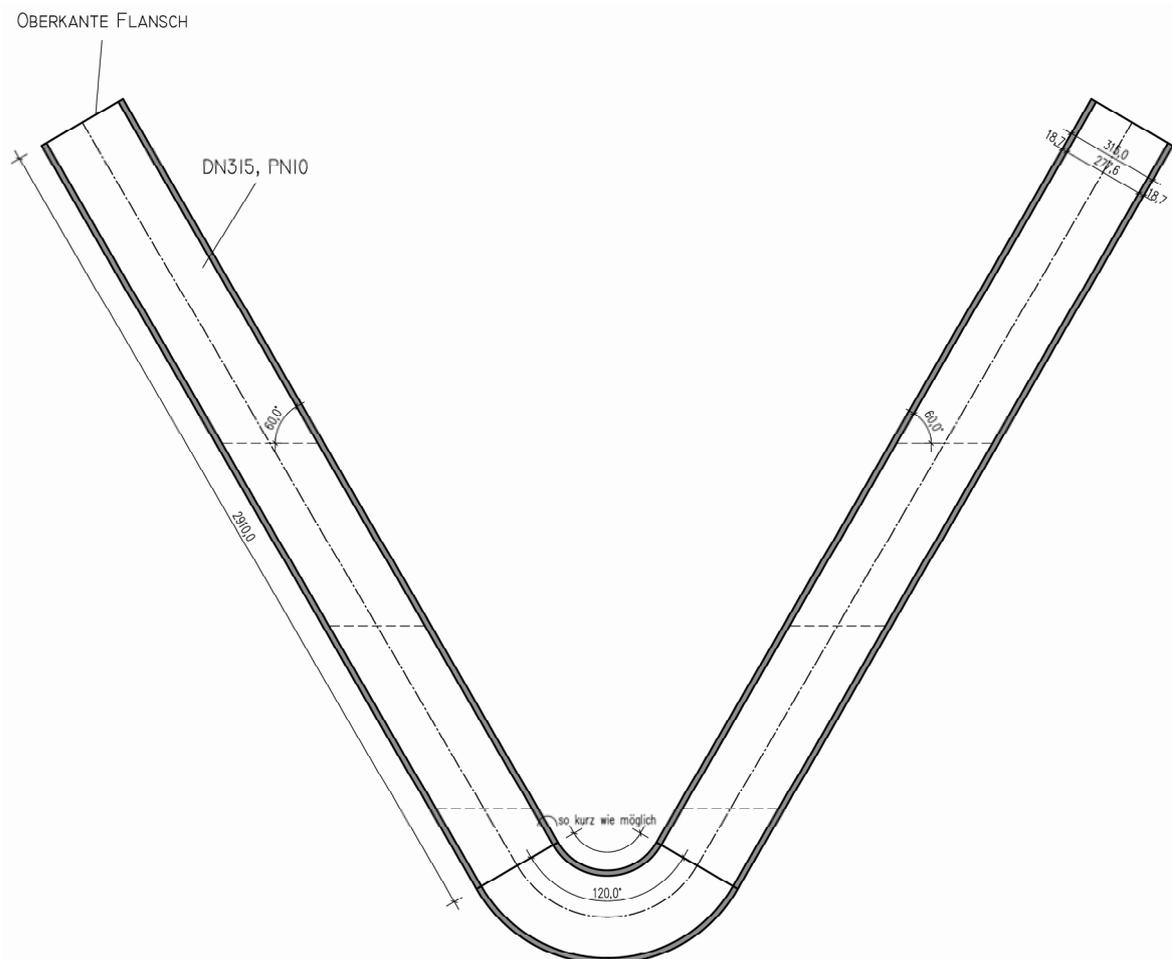


Abbildung 6.59: geplante Geometrie des PE-HD Tilgers

Um neben den gemessenen Auswirkungen der Tilger sowie den begleitenden numerischen Berechnungen der Flüssigkeitsbewegung auch visuelle Beobachtungen zum Strömungsverhalten der Flüssigkeitsschwingungstilger machen zu können, wurde der zweite Tilger der Versuchsreihe 2 aus durchsichtigem Acrylglas, besser bekannt als Plexiglas, hergestellt. Zu diesem Zweck wurden, extra für die Versuchsreihen der Flüssigkeitsschwingungstilger, Rohre mit einem Außendurchmesser von 300,0 mm und einer Wandstärke von 15,0 mm gegossen. Diese wurden dann von einem Spezialisten für

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingstilgern

Kunststoffbearbeitung (Firma Zeiler K-Tec) zur gewünschten Tilgergeometrie weiter verarbeitet. Da sich die Verarbeitung von Plexiglas als äußerst schwierig herausstellte und die Herstellung einer gekrümmten Rohrform mit den gegebenen Dimensionen nahezu unmöglich ist, wurde der Ausrundungsbereich des Plexiglastilgers als Segmentbogen ausgeführt. Die Schenkellänge des Tilgers wurde mit 3190,0 mm, die Neigung der Schenkel wiederum mit 60° vorgegeben.

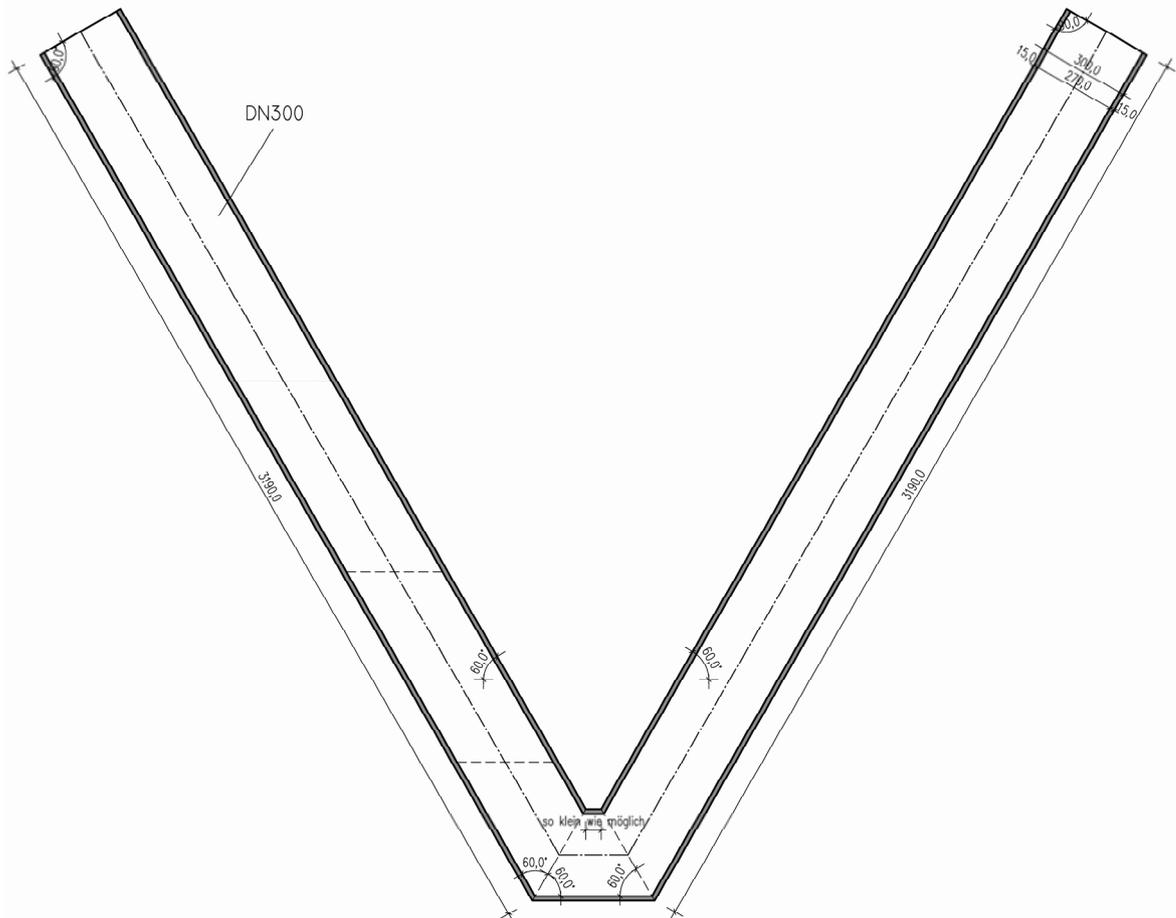


Abbildung 6.60: geplante Geometrie des Plexiglastilgers mit Segmentbogen

Um einen kraftschlüssigen Verbund der Flüssigkeitsschwingstilger mit den Hauptträgern der Versuchsbrücke zu erhalten, wurde auf den ausreichend biegesteif dimensionierten Befestigungsrahmen der Unwuchterreger (siehe Kapitel 3.1) eine Holzkonstruktion (Abbildung 6.61 und Abbildung 6.62) entworfen, die ebenfalls genügend Steifigkeit aufweist, um eine starre Verbindung zwischen Flüssigkeitsschwingstilger und Versuchsbrücke herzustellen. Für die Befestigung der Tilger wurden dabei an den beiden, zum Brückentragwerk quer verlaufenden Seiten der Holzkonstruktion, jeweils zwei Brettschichthölzer im 60°-Winkel vorgesehen (Abbildung 6.63 und Abbildung 6.64). Auf diesen war eine direkte Montage der Tilgerschenkel möglich, wobei für den Plexiglastilger noch spezielle bogenförmige Auflagersockel aus Hartholz (Abbildung 6.65) zur besseren Lasteinleitung gefertigt wurden. Die Befestigung der Tilger erfolgte mit vier Spanngurten pro Tilgerschenkel. Die Holzkonstruktion zur Befestigung der Tilger kann den nachfolgenden Abbildungen entnommen werden.



Abbildung 6.61: Holzkonstruktion zur Montage der Flüssigkeitsschwingungstilger der Versuchsreihe 2, Schrägansicht



Abbildung 6.62: Holzkonstruktion zur Montage der Flüssigkeitsschwingungstilger der Versuchsreihe 2, Frontalansicht

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

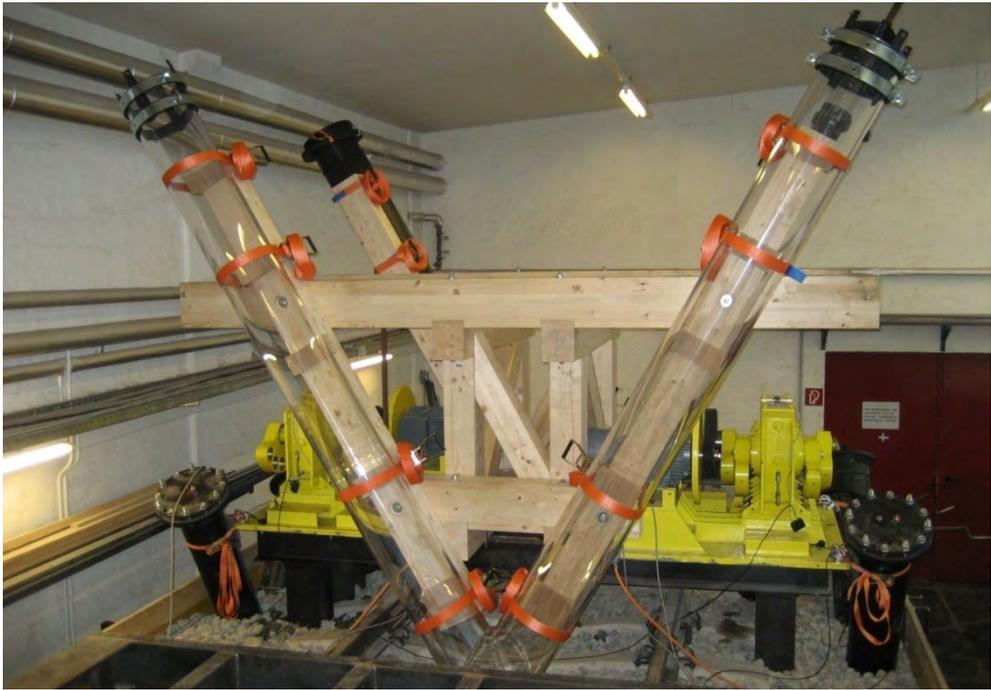


Abbildung 6.63: auf dem Brückentragwerk mittels Holzkonstruktion befestigter Plexiglastilger



Abbildung 6.64: auf dem Brückentragwerk mittels Holzkonstruktion befestigter PE-HD Tilger



Abbildung 6.65: Befestigung des Plexiglastilgers mit Hartholzsockeln als Auflager und Spanngurten zum kraftschlüssigen Verbund

Entgegen der Versuchsreihe 1 wurde für die Abschlüsse der Rohrenden eine eigene höhenverstellbare Konstruktion entworfen. Ziel dabei war es, zur freien Wahl der Luftfederhöhe H_L sowie der Stromfadenlänge $2H$ eine justierbare Abschlusskonstruktion der Rohre zu erhalten. Dies konnte mit der nachfolgend dargestellten Kolbenkonstruktion realisiert werden. Dafür wurde ein mittels Gewindestangen verstellbarer und durch aufblasbare Dichtungen variabel abdichtbarer Kolben entworfen. Bei den Dichtungen handelt es sich um Spezialdichtungen, die sich bei Einpressen eines Überdrucks nur in radialer Richtung aufblasen und damit zur Rohrwand hin abdichten. Die kraftschlüssige Verbindung der Kolben mit dem Rohr konnte beim PE-HD Tilger, wie bei der Versuchsreihe 1, mittels der Losflansche gelöst werden. Beim Plexiglastilger mussten dafür pro Rohrende jeweils vier Stahlaschen mit einem Spezialkleber aufgeklebt werden, weiters wurden zur Verstärkung in radialer Richtung jeweils zwei Rohrschellen angebracht (Abbildung 6.66). In den Kolbenkonstruktionen wurden ein Druckluftzugang für die Dichtungen, einer für die Einbringung des Überdrucks in den Rohren, sowie ein Anschluss für die Drucksensoren vorgesehen. Der Abschluss der Zuluftleitungen wurde mittels Kugelhähnen realisiert. Die Kolbenkonstruktionen können den nachfolgenden Abbildungen entnommen werden.



Abbildung 6.66: Abschlusskolben der Plexiglastilger mit Darstellung der aufblasbaren Dichtung, aufgeklebten Stahllaschen mit Rohrschellenverstärkung und Gewindestange



Abbildung 6.67: Untersicht der Kolbenkonstruktion mit dem Anschluss für die Druckdichtungen (blaue Druckluftleitung), dem Einlassventil für den Rohrüberdruck (goldenes Ventil) und dem Drucksensor (silbernes Ventil)



Abbildung 6.68: Draufsicht der Kolbenkonstruktion mit der Zuluftleitung für die Dichtung (blau) sowie für den Rohrüberdruck (grau) und Drucksensor



Abbildung 6.69: Befestigungsdeckel sowie Verstellmöglichkeit der Kolbenkonstruktion mit Darstellung der Gewindestange zum Höhenverstellen des Kolbens, den aufgeklebten Stahllaschen samt Rohrschellenverstärkung sowie den Versorgungsleitungen für den Luftdruck der Druckdichtungen (blau) sowie der Rohre (grau) und Datenkabel des Drucksensors (schwarz)

Der erforderliche Überdruck für die Druckdichtungen sowie die Rohre wurde mithilfe eines handelsüblichen Druckluftkompressors erzeugt, wobei der eingepresste Luftdruck mittels eines Regelhahns sowie eines zugehörigen Manometers kontrolliert wurde. Der Befüllungsvorgang, der in Abbildung 6.70 bis Abbildung 6.73 bildlich dargestellt ist, gestaltete sich in nachfolgender Weise

- 1) Befüllen mit Wasser bei geöffneten Rohrenden bis sich die gewünschte Stromfadenlänge $2H$ eingestellt hat
- 2) Einstellen der erforderlichen Kolbenpositionen und einpressen der Druckluft in die Kolbendichtungen
- 2) Einpressen von Luft im rechten Rohrende, bis sich die erforderliche Flüssigkeitsspiegelauslenkung Δz_0 eingestellt hat, anschließend schließen der Druckluftleitungen zu den Rohrschenkeln
- 3) Versuchsdurchführung

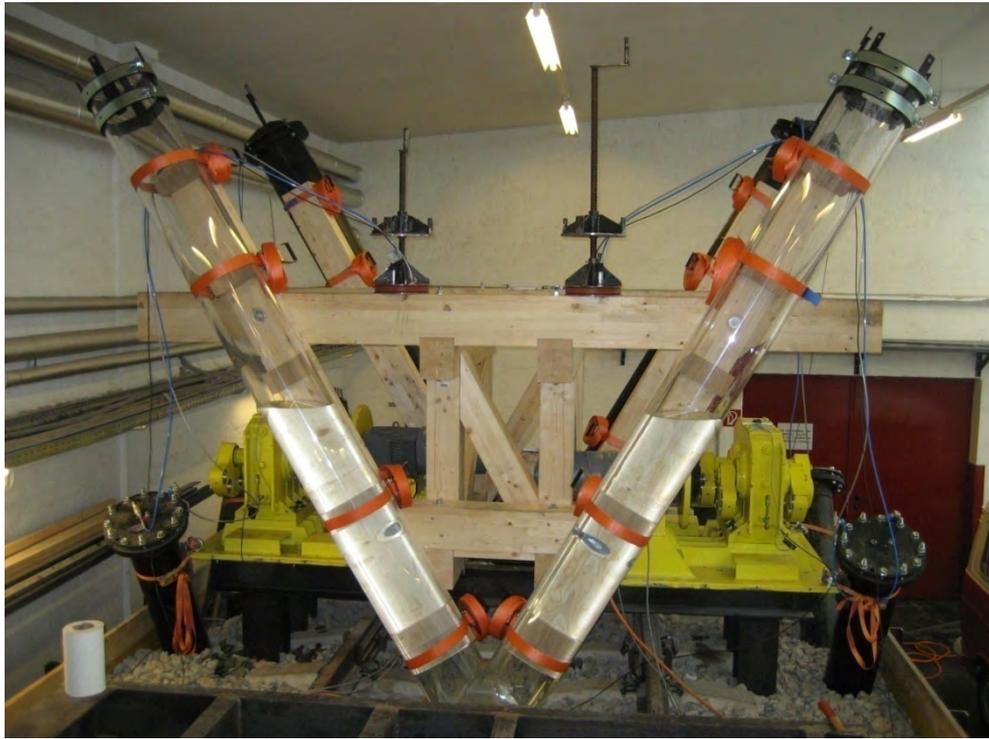


Abbildung 6.70: Plexiglastilger mit eingestellter Stromfadenlänge $2H$



Abbildung 6.71: Plexiglastilger mit eingestellter Stromfadenlänge $2H$ (Detailansicht)



Abbildung 6.72: Plexiglastilger mit eingestellter Stromfadenlänge $2H$ und montierten und luftdicht abgeschlossenen Rohrabschlüssen

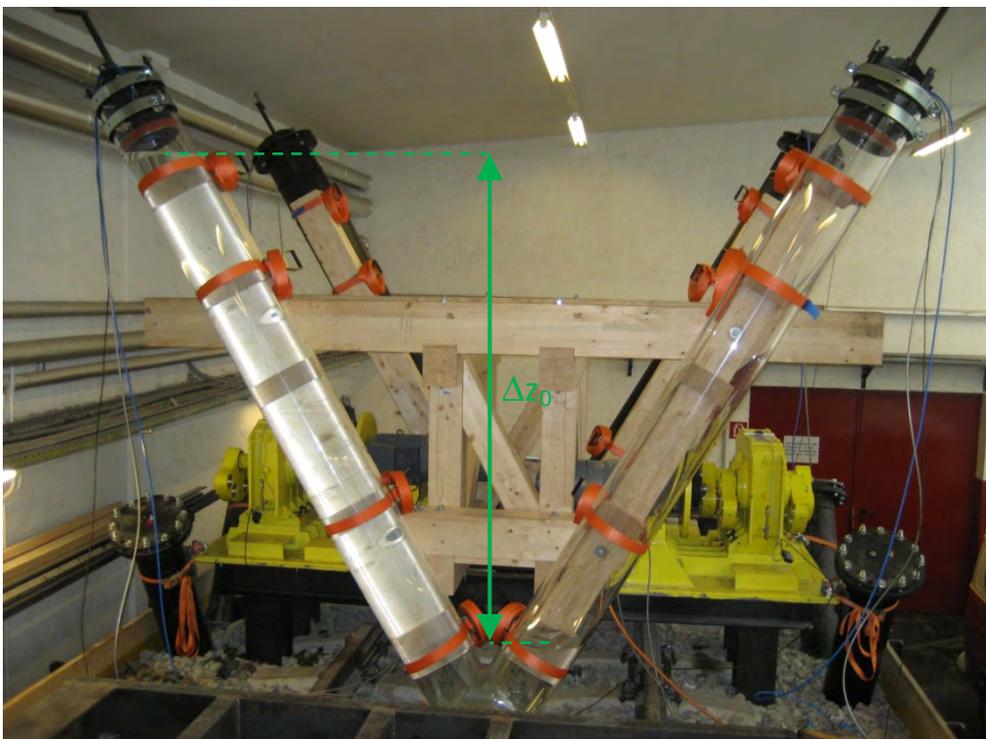


Abbildung 6.73: Plexiglastilger mit eingestellter Flüssigkeitsspiegeldifferenz Δz_0

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

Dieser Befüllungsvorgang entspricht also, wie bei der Versuchsreihe 1, dem Fall 2, zweiseitig geschlossene Rohrenden, der Kapitel 5.1.1.2 und 5.1.2.3. Um die Abstimmung der Tilger mit der tatsächlich ausgeführten Tilgergeometrie durchführen zu können, wurden diese vor Ort vermessen und lieferten nachfolgend angeführte Abmessungen.

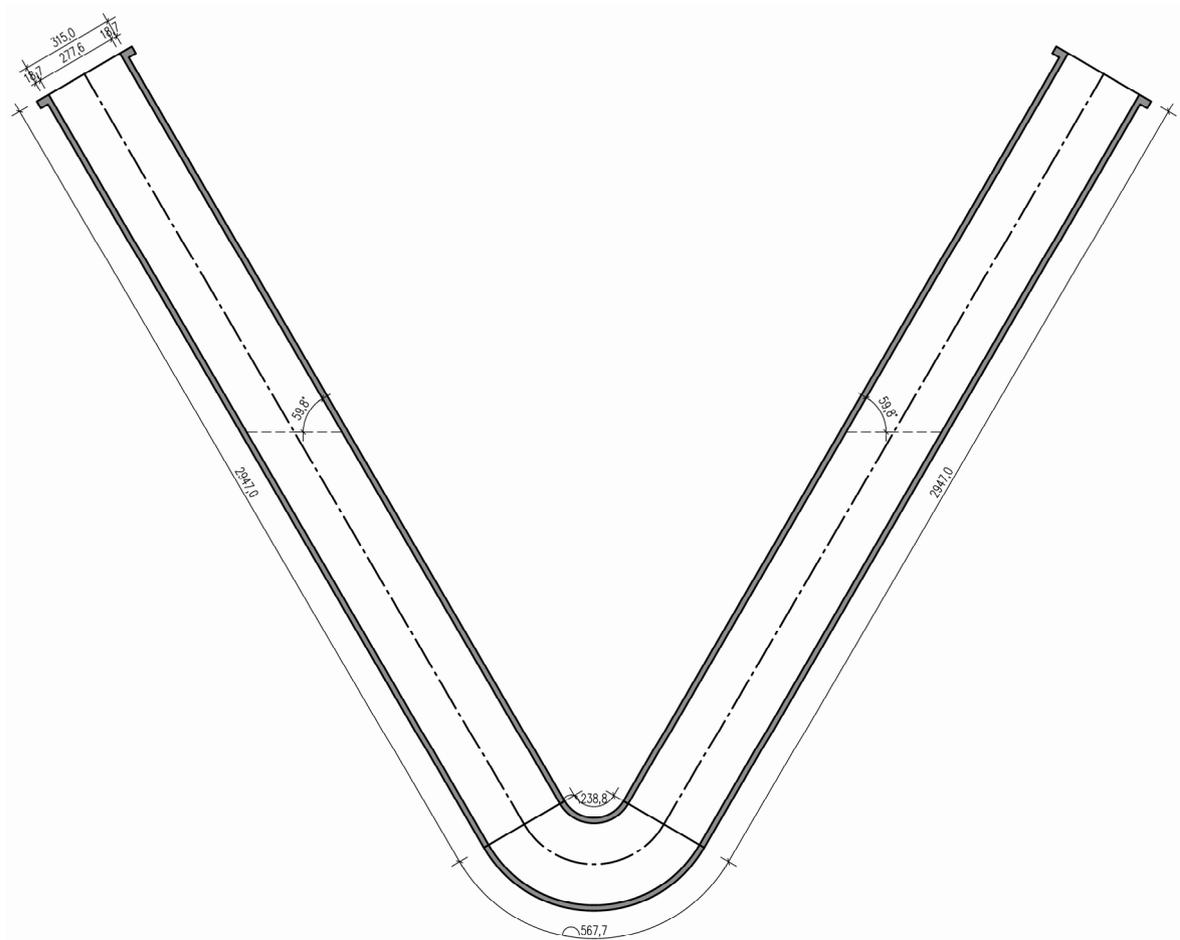


Abbildung 6.74: realisierte Tilgergeometrie des PE-HD Tilgers

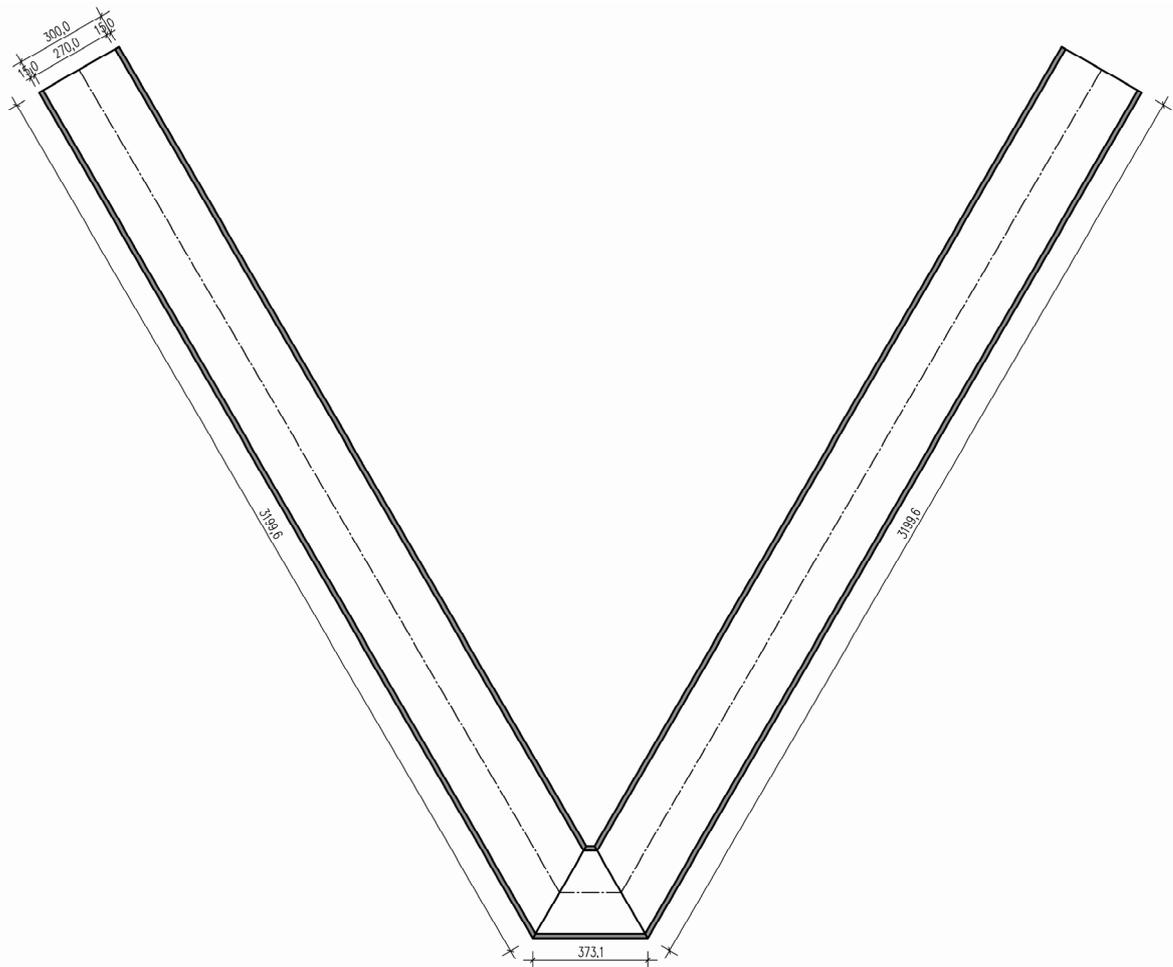


Abbildung 6.75: realisierte Tilgergeometrie des Plexiglastilgers

In Abbildung 6.76 und Abbildung 6.77 sind die Parameter dargestellt, die zur Tilgerabstimmung herangezogen und variiert wurden. Die darin verwendeten Bezeichnungen sollen an dieser Stelle nochmals angeführt werden (siehe Kapitel 5.1)

H	halbe Ausgangslänge des Stromfadens
H_L	Ausgangslänge des Luftvolumens
Δz_0	vertikale Flüssigkeitsspiegeldifferenz im ausgelenkten Zustand
d	Rohrdurchmesser
S_2	Abstand zwischen Rohrende und unausgelenktem Flüssigkeitsspiegel (gemessen an der Rohrinne)
p_0	Atmosphärendruck $\sim 100.000 \text{ N/m}^2$
γ	Adiabatenkoeffizient (für Luft 1,405)
ρ	Dichte des Wassers $\sim 1000 \text{ kg/m}^3$
α	Neigung der Rohrschenkel
g	Erdbeschleunigung
L_{ges}	Gesamtlänge eines Rohrschenkels, definiert in dessen Rohrachse

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

Da die Parameter H und H_L als Konsequenz der Annahmen der Bernoulli Gleichung in der Rohrachse definiert sind und dort eine genaue Einstellung der geforderten Parameterwerte zumindest für den PE-HD Tilger unmöglich ist, wurden die Parameter S_1 und S_2 eingeführt, die an der Rohrinneenseite messbare Bezugsgrößen liefern. Diese stellen lediglich Hilfsgrößen dar und lassen sich aus den ursprünglichen Parametern wie folgt ermitteln

$$S_1 = L_{ges} - H - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} - \frac{d}{2 \tan(\alpha)}$$

$$S_2 = L_{ges} - H - \frac{d}{2 \tan(\alpha)}$$
(6.34)

Diese Vorgehensweise war nur für den PE-HD Tilger notwendig, da aufgrund der Transparenz des Plexiglastilgers die ermittelten Tilgerparameter bei diesem direkt eingestellt werden konnten.

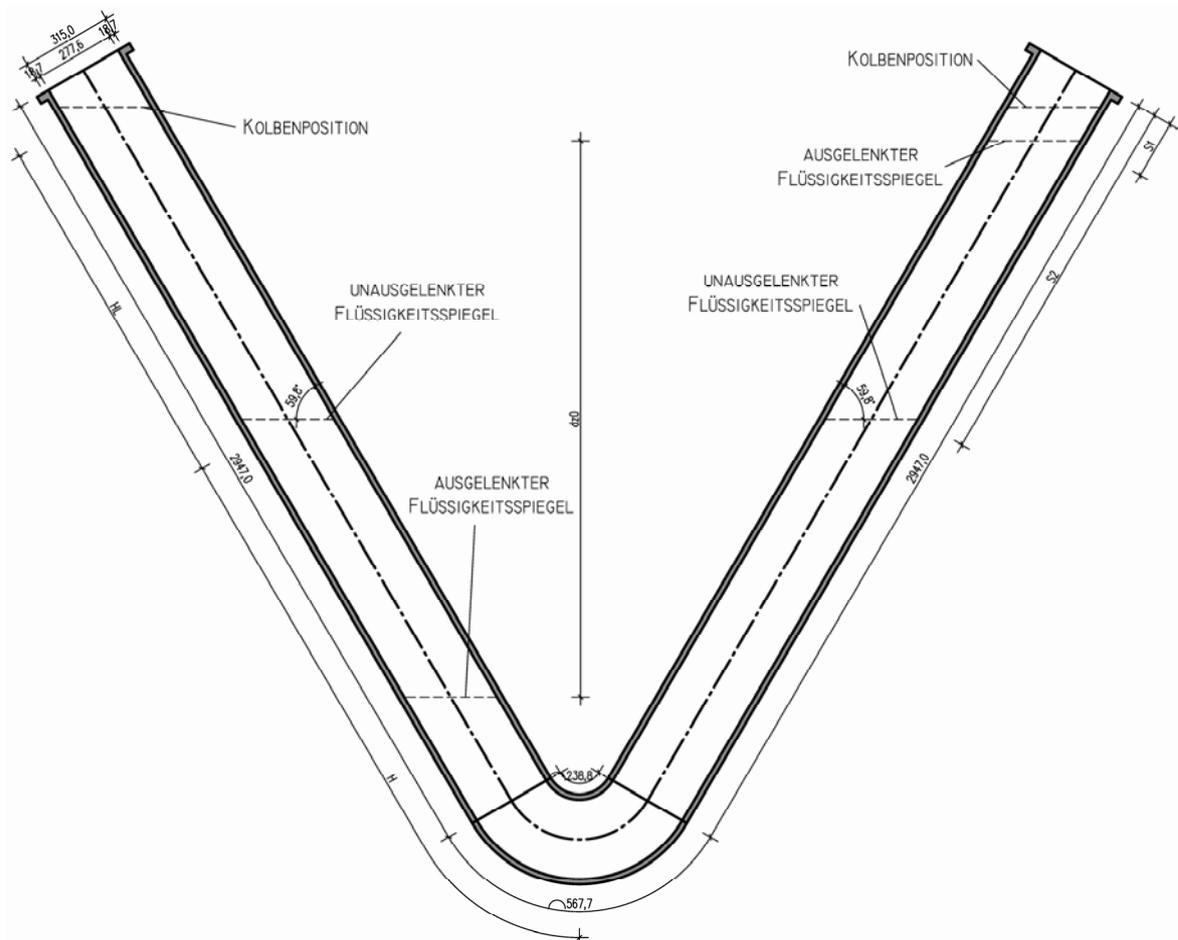


Abbildung 6.76: PE-HD Tilgerdarstellung mit den zu variierenden Parametern

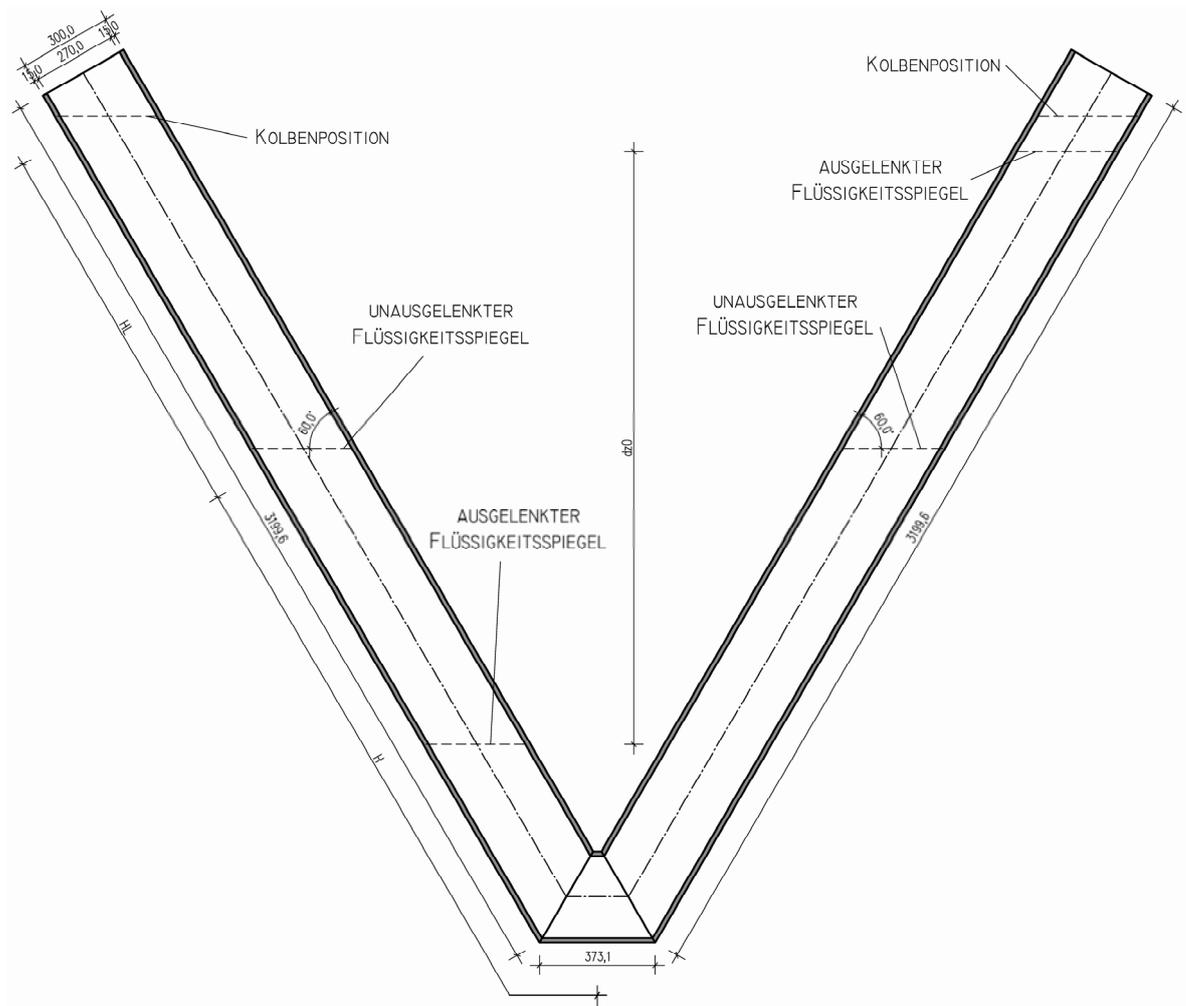


Abbildung 6.77: Plexiglastilgerdarstellung mit den zu variierenden Parametern

Als statische Unwucht der Unwuchterreger wurden dabei die Drittelscheiben ohne Bestückung mit Unbalancen eingesetzt. Dies liefert ein statisches Moment pro Unwuchterreger von

$$m_e = 777,10 \text{ kgcm} \quad (6.35)$$



Abbildung 6.78: Unwuchterreger mit montierten Drittelsegmenten, alle Unbalancen ausgebaut

6.2.1.2. Untersuchungen zur Frequenzabstimmung

Um den Einfluss der Frequenzabstimmung f (Tilgereigenfrequenz zur Tragwerkseigenfrequenz) auf die Effektivität des Tilgers auch für die Versuchsreihe 2 zu untersuchen, wurden nachfolgende Konfigurationen ausgeführt und getestet, wobei dabei entgegen der Versuchsreihe 1 sofort beide Tilger eingestellt und aktiviert wurden. Aufgrund der variablen Rohrabschlüsse konnte bei den vorliegenden Untersuchungen die Flüssigkeitsmasse m_F sowie die Anfangsauslenkung der Flüssigkeitsspiegel Δz_0 für alle Versuche konstant gehalten werden, es musste zur Frequenzabstimmung lediglich die Luftfederhöhe H_L angepasst werden. Da mittels der Versuchsreihe 1 die in Kapitel 5.3.4 hergeleiteten Abstimmungskriterien für den Flüssigkeitsschwingungstilger erfolgreich bestätigt wurden, werden diese auf die angeführten Ausgangsparameter des Brückentragwerks aus Kapitel 6.2.1.1 unter Berücksichtigung der Tilgergeometrien aus Kapitel 6.2.1.1 angewendet, um auch für die Versuchsreihe 2 optimal abgestimmte Tilger zu erhalten. Ausgehend von dieser Konfiguration wurden dann geringe Variationen der Luftfederhöhe durchgeführt, um in Bezug auf die Verläufe der Amplitudenfrequenzgänge ein optimales Ergebnis nach Den Hartog (siehe Kapitel 2.2.8.3) zu erhalten. In den nachfolgenden Tabellen sind die unterschiedlichen Konfigurationen der untersuchten Flüssigkeitsschwingungstilger dargestellt, die sich rechnerisch als optimal ergebenden Tilgerkonfigurationen sind dabei hervorgehoben.

Tabelle 6.5: Variation der Tilgerparameter für den Plexiglastilger

μ	d_i	H	H_L	m_F	Δz_0	f_{ger}
[%]	[mm]	[mm]	[mm]	[kg]	[mm]	[Hz]
1,80	270,0	1539,5	1218,2	176,3	1811,2	2,73
			1213,2			2,76
			1208,2			2,80
			1198,2			2,89
(1)			(3)		(2)	(4)

Tabelle 6.6: Variation der Tilgerparameter für den PE-HD Tilger

μ	d_i	H	H_L	m_F	Δz_0	S_1	S_2	f_{ger}
[%]	[mm]	[mm]	[mm]	[kg]	[mm]	[mm]	[mm]	[Hz]
1,80	277,6	1539,5	1218,2	186,4	1811,2	454,4	1590,7	2,73
			1213,2			459,4		2,76
			1208,2			464,4		2,80
			1198,2			474,4		2,89
(1)			(3)		(2)			(4)

Darin beschreiben f_{ger} die mit den realisierten Abmessungen des Tilgers rechnerisch ermittelte Eigenfrequenz und μ das Masseverhältnis von Flüssigkeitsmasse der beiden Tilger zur modalen Brückenmasse.

Die rechnerische Eigenfrequenz des Flüssigkeitsfadens ergibt sich nach Kapitel 5.1.2.3 für den Befüllungsfall 2 zu

$$f_{Fall\ 2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g \sin(\alpha)}{2H} \left[1 + \frac{\gamma}{2\rho g} \left(\frac{p_0}{H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2}} + \frac{p_0 + \rho g \Delta z_0}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} \right) \right]} \quad (6.36)$$

und die Flüssigkeitsmasse für einen Tilger nach Kapitel 5.2.1 zu

$$m_F = 2H\rho A \quad (6.37)$$

Im ersten Schritt wurde das Masseverhältnis μ , welches mit den gegebenen Tilgergeometrien realisierbar war, mit 1,80 % festgelegt. Daraus ergibt sich mit der Tilgeranzahl von zwei und den gewählten Rohrquerschnitten A_i der Tilger die erforderliche Stromfadlänge $2H$. Mit dieser wurde versucht, durch Einstellung einer möglichst großen vertikalen Flüssigkeitsspiegeldifferenz Δz_0 die aktive dynamische Masse so groß wie möglich vorzugeben. Die Ausgangslänge der Luftfedern H_L wurde im nächsten Schritt so eingestellt, dass sich rechnerische Tilgereigenfrequenzen im Bereich der optimalen Eigenfrequenz ergeben. Diese Schritte sind in Tabelle 6.5 und Tabelle 6.6 numerisch als Schritt (1) bis (4) gekennzeichnet. Da durch Festlegung der Stromfadlänge sowie der Luftfederhöhe die Eigenfrequenz aber auch das optimale Frequenzverhältnis bestimmt ist, müssen die Schritte (1) bis (4) iterativ durchlaufen werden, bis die geplante mit der rechnerisch ermittelten Eigenfrequenz so gut wie möglich übereinstimmt. Für gewöhnlich reichen ein paar Iterationsschritte aus, hilfreich dabei ist die Tatsache, dass das optimale Frequenzverhältnis f_{opt} immer sehr nahe bei eins liegt.

Mit Tabelle 6.5 und Tabelle 6.6 lassen sich, nach Kapitel 5.3.4, die optimalen Parameter der Tilger wie folgt ermitteln

Tabelle 6.7: optimale Parameter des Plexiglas- und PE-HD Tilgers

f_{ger}	κ	$\hat{\mu}$	f_{opt}	$f_{1,opt}$	ζ_{opt}
[Hz]	[-]	[%]	[-]	[Hz]	[%]
2,73	0,588	1,647	0,9838	2,735	6,259
2,76					
2,80					
2,89					

Die dabei angewendeten Abstimmungskriterien (siehe Kapitel 5.3.3 und 5.3.4) werden an dieser Stelle nochmals angeführt und lauten wie folgt

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\Delta z_0}{2H} \\ \hat{\mu} &= \mu \frac{\kappa(1+\mu)}{1+\mu(2-\kappa-\kappa^2)} \\ f_{opt} &= \frac{1+\mu(2-\kappa-\kappa^2)}{1+2\mu} \\ f_{1,opt} &= f_{opt} f_{1,Tragwerk} \\ \zeta_{opt} &= \sqrt{\frac{3}{8} \frac{\kappa\mu(1+\mu)}{1+\mu(2+\kappa\mu-\kappa^2)}} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Die optimale Eigenfrequenz $f_{1,opt}$ beschreibt dabei jene Frequenz, auf die der Tilger für eine optimale Wirkung eingestellt werden muss. Den nachfolgenden Abbildungen (Abbildung 6.79 bis Abbildung 6.88) der Messergebnisse können die Verformungen sowie die Beschleunigungen in Brückenmitte für den Resonanzfall mit den unterschiedlichen Konfigurationen nach Tabelle 6.7, sowie für die Brücke ohne aktiven Flüssigkeitsschwingungstilger entnommen werden. Als statische Unwucht wurden dabei die Drittelscheiben ohne Unbalancen eingesetzt, die ein statisches Moment pro Unwuchterreger von

$$m_e = 777,10 \text{ kgcm} \quad (6.39)$$

liefern.

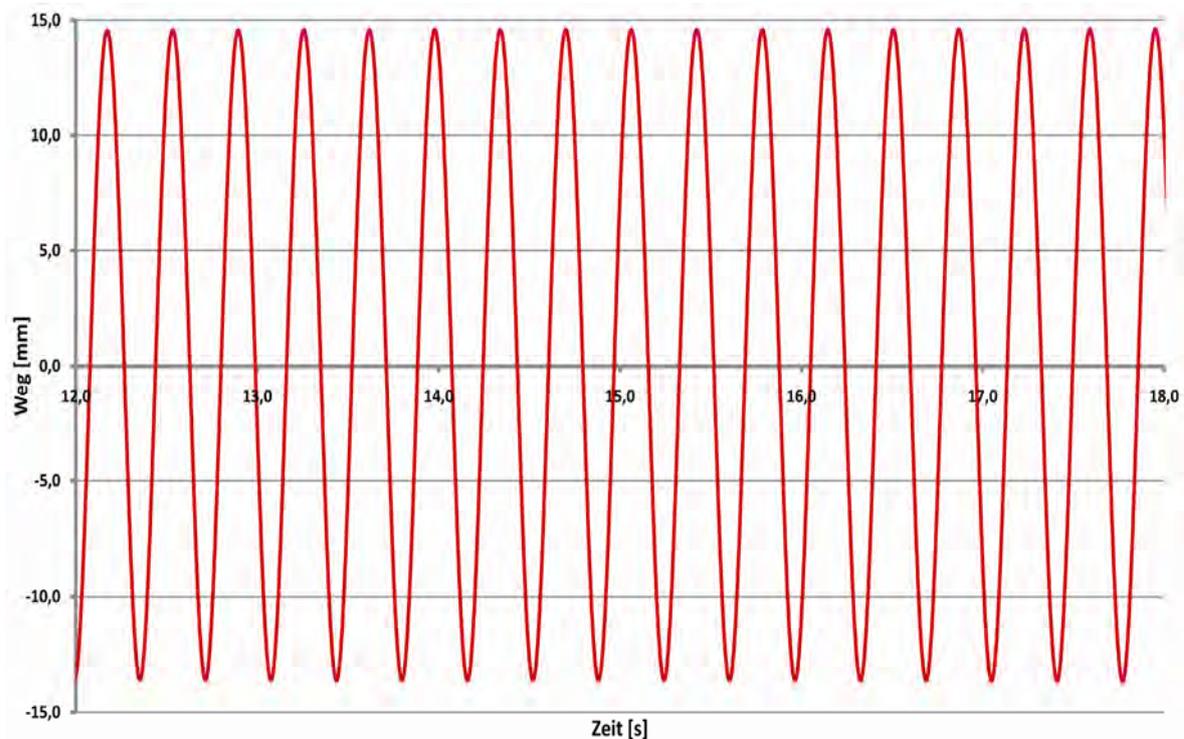


Abbildung 6.79: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit inaktiven Tilgern

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

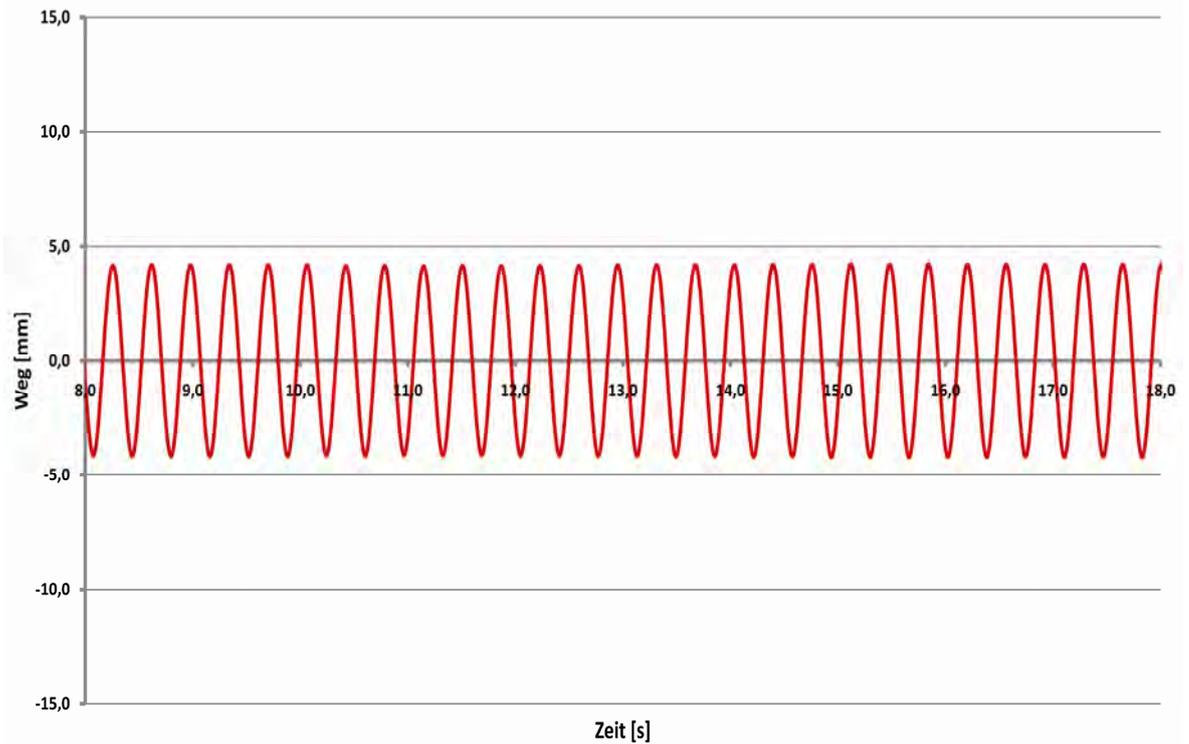


Abbildung 6.80: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit aktiven Tilgern
($f_{\text{ger}} = 2,73 \text{ Hz}$, $\mu = 1,80 \%$)

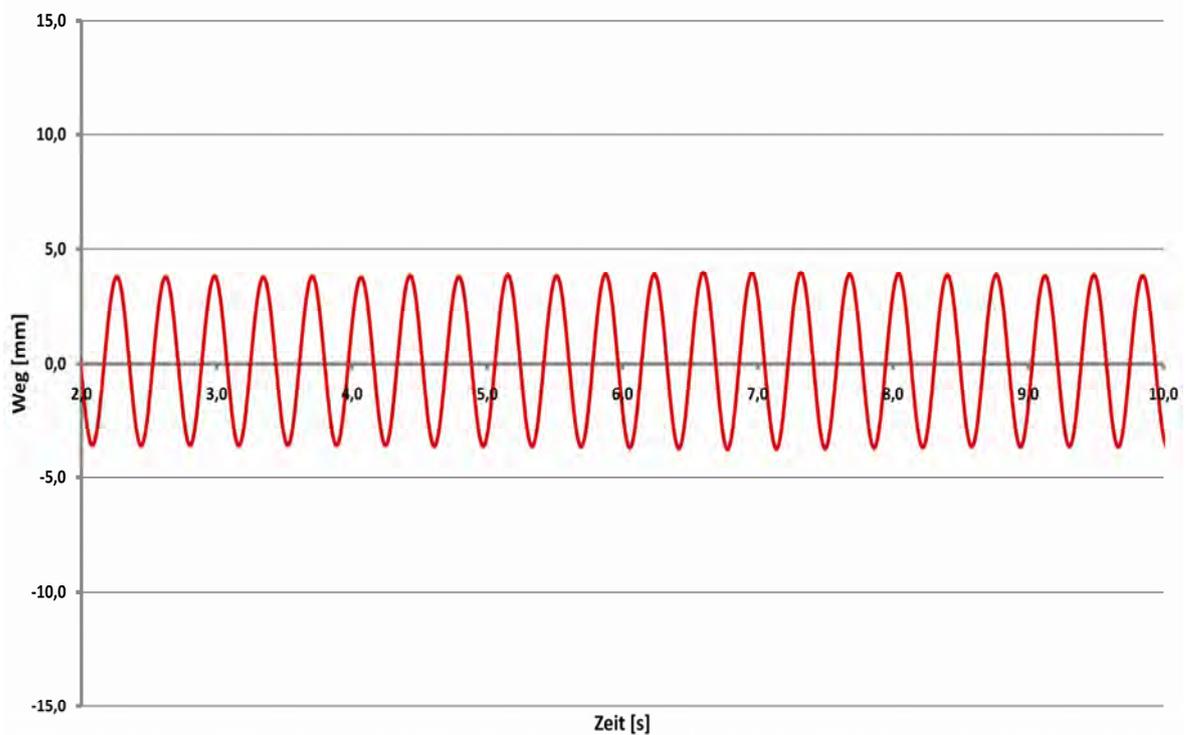


Abbildung 6.81: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit aktiven Tilgern
($f_{\text{ger}} = 2,76 \text{ Hz}$, $\mu = 1,80 \%$)

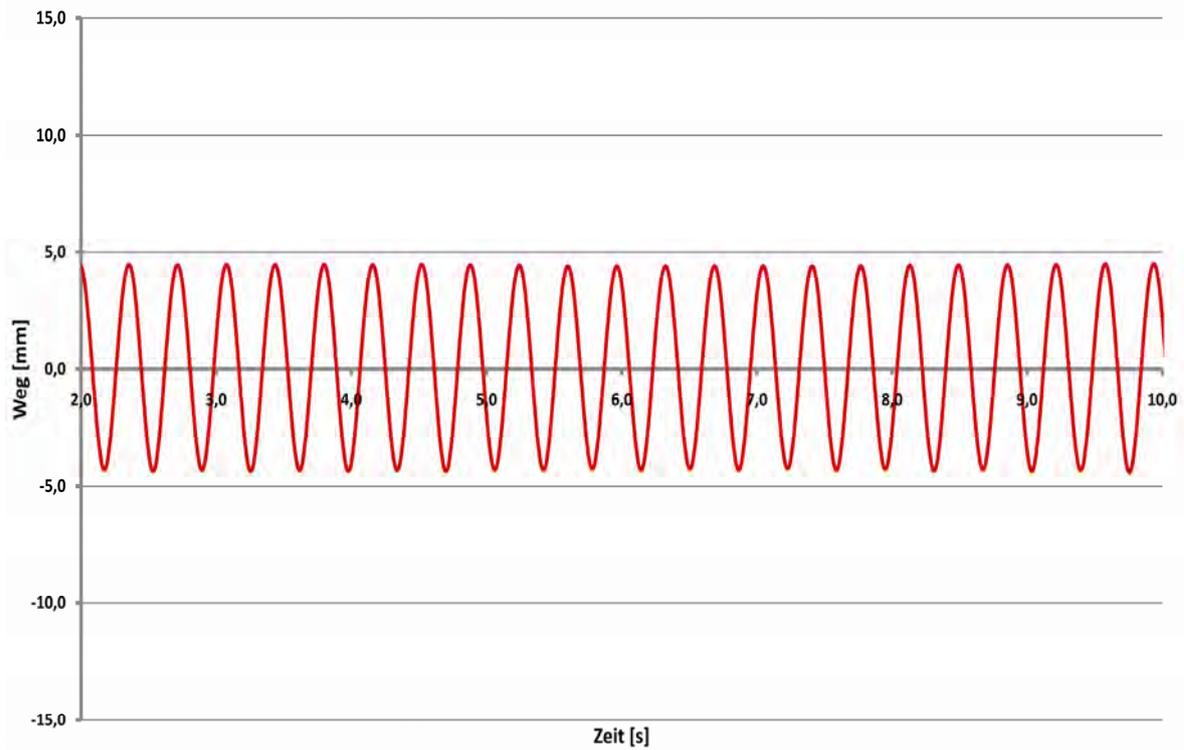


Abbildung 6.82: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit aktiven Tilgern
($f_{ger} = 2,80 \text{ Hz}$, $\mu = 1,80 \%$)

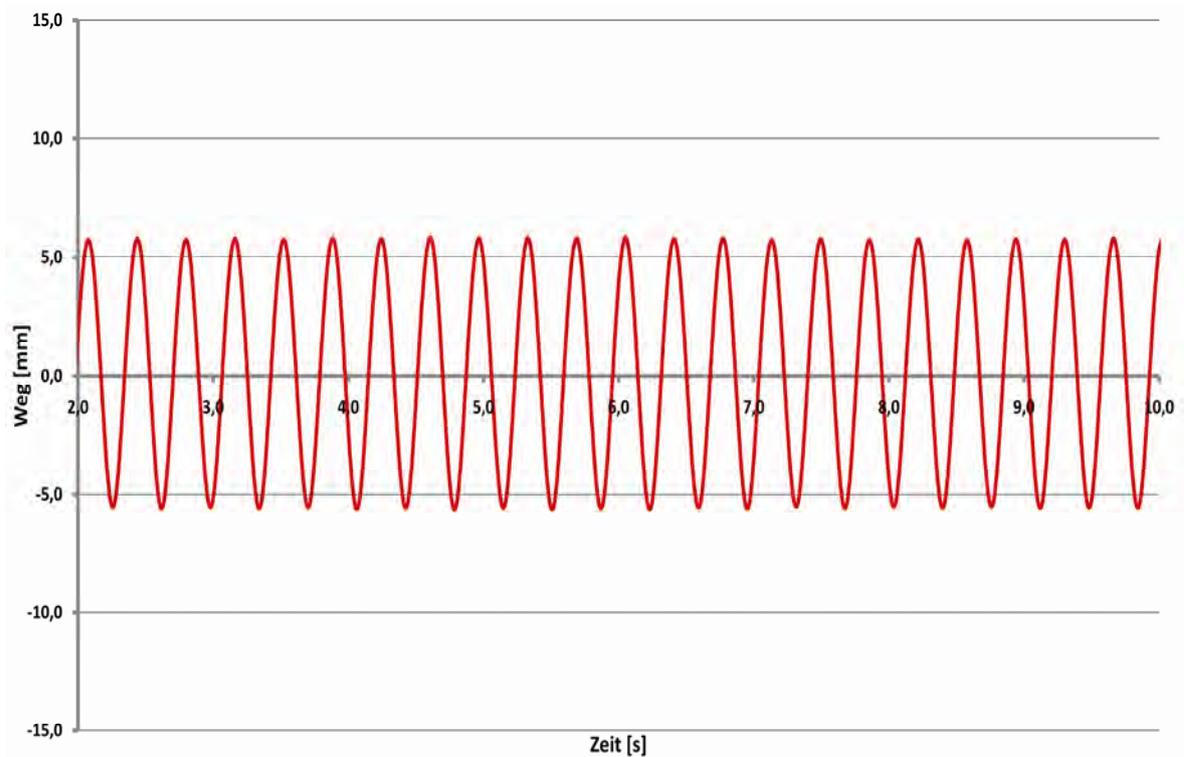


Abbildung 6.83: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit aktiven Tilgern
($f_{ger} = 2,89 \text{ Hz}$, $\mu = 1,80 \%$)

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

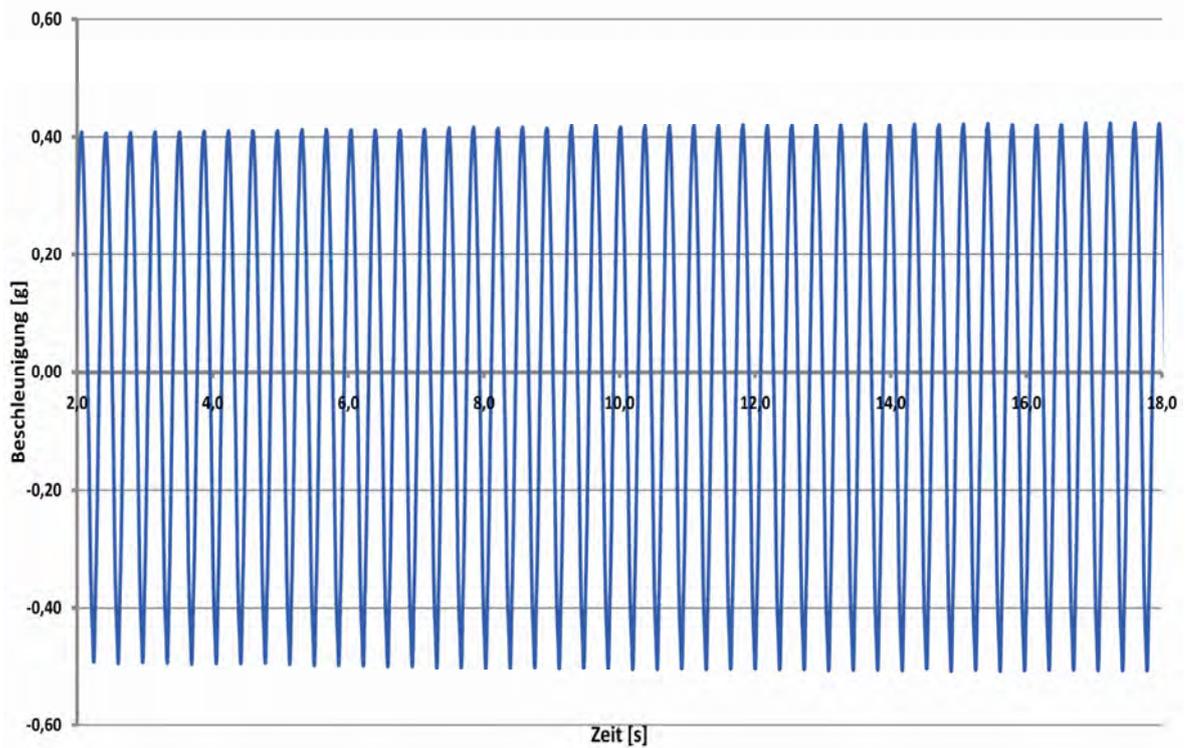


Abbildung 6.84: Beschleunigungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit inaktiven Tilgern

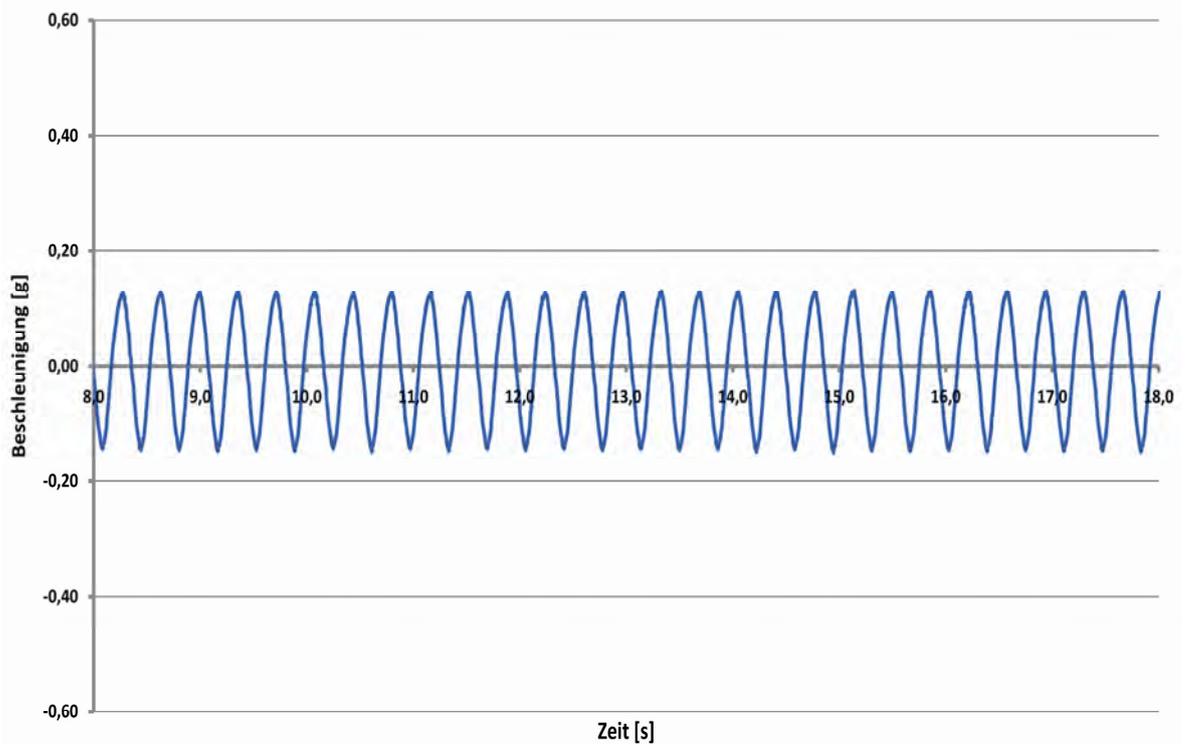


Abbildung 6.85: Beschleunigungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit aktiven Tilgern
($f_{\text{ger}} = 2,73 \text{ Hz}$, $\mu = 1,80 \%$)

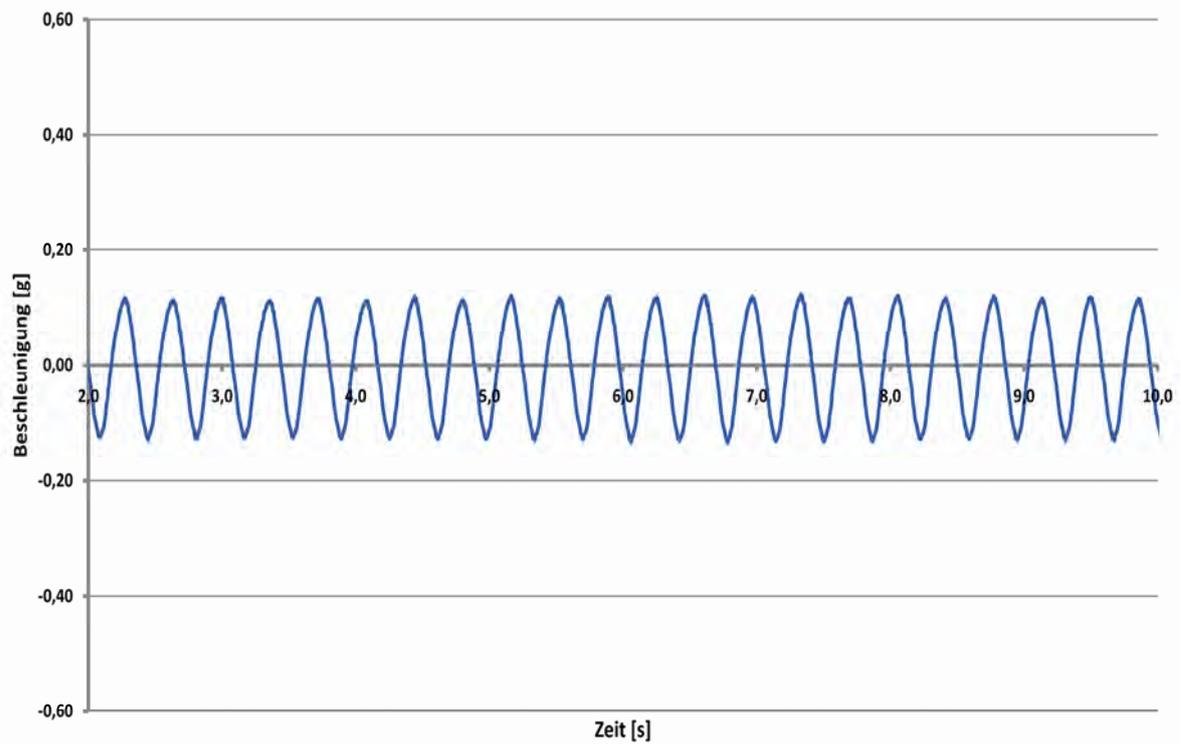


Abbildung 6.86: Beschleunigungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit aktiven Tilgern ($f_{ger} = 2,76 \text{ Hz}$, $\mu = 1,80 \%$)

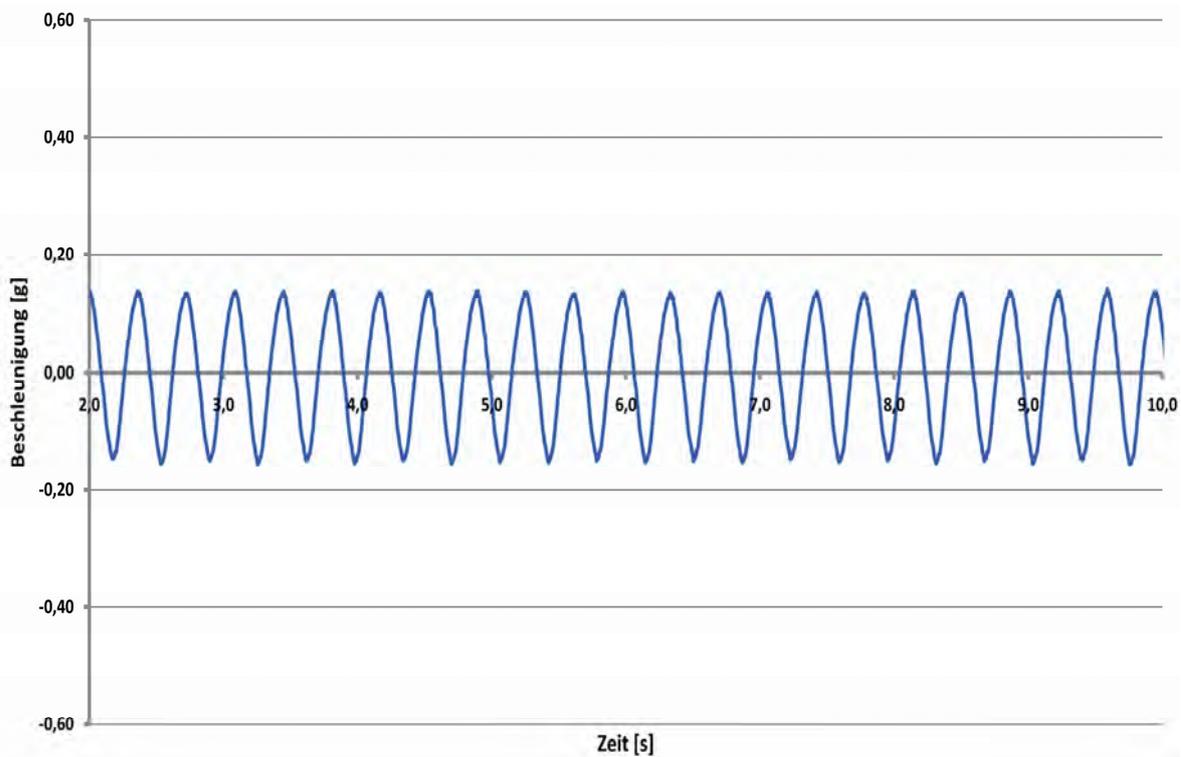


Abbildung 6.87: Beschleunigungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit aktiven Tilgern ($f_{ger} = 2,80 \text{ Hz}$, $\mu = 1,80 \%$)

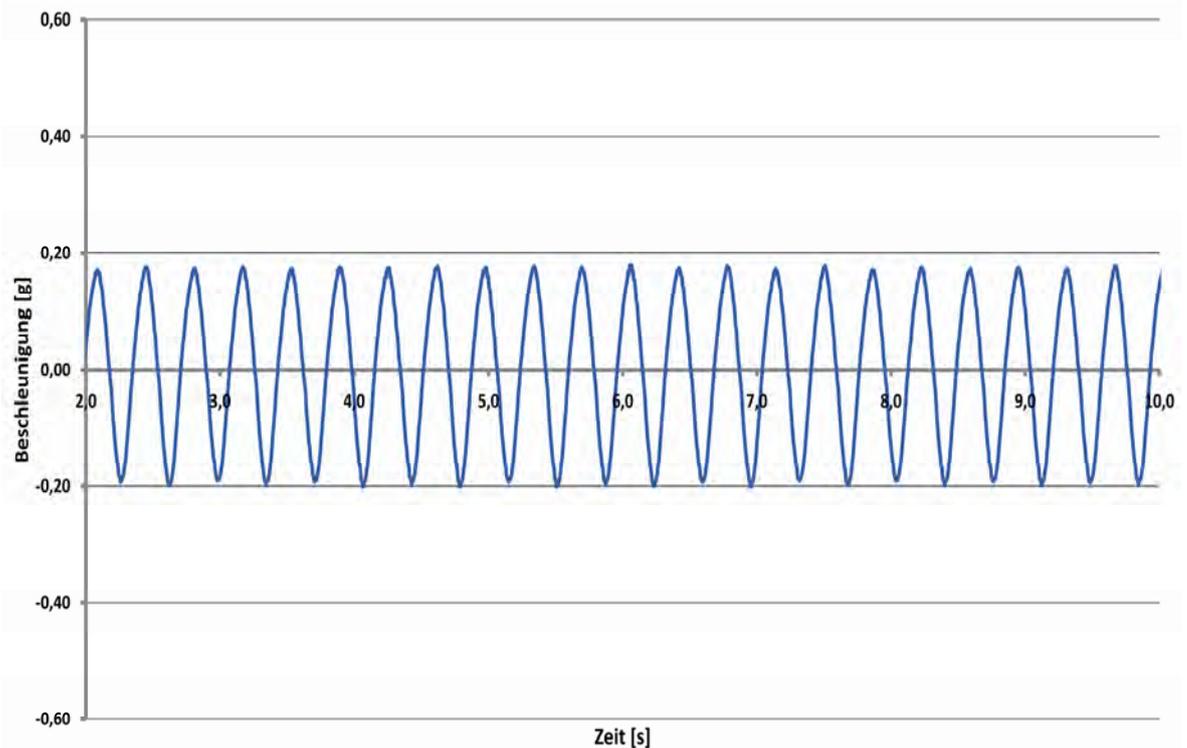


Abbildung 6.88: Beschleunigungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit aktiven Tilgern
($f_{\text{ger}} = 2,89 \text{ Hz}$, $\mu = 1,80 \%$)

Den zuvor angeführten Abbildungen kann entnommen werden, dass alle Tilgerkonfigurationen im Resonanzfall eine sehr gute Effektivität aufweisen. Dies bestätigt wiederum die Unempfindlichkeit der Flüssigkeitsschwingungstilger gegenüber geringfügigen Abweichungen von der rechnerisch ermittelten Optimalkonfiguration. Der Vergleich der Tragwerksbewegungen in der Resonanzfrequenz der Brücke alleine reicht für eine umfassende Beurteilung sowie einen aussagekräftigen Vergleich der für die Versuchsreihe 2 untersuchten Tilgerkonfigurationen nicht aus. Zu diesem Zweck wurden Amplitudenfrequenzgänge der einzelnen Konfigurationen experimentell ermittelt, deren Vergleich aufgrund der Gleichheit der vorhandenen Flüssigkeitsmasse in den einzelnen Versuchsserien sehr gut möglich ist. Nachfolgend sind die experimentell ermittelten Amplitudenfrequenzgänge und Beschleunigungsfrequenzgänge der unterschiedlichen Konfigurationen sowie deren jeweilige Gegenüberstellung angeführt (Abbildung 6.89 bis Abbildung 6.100).

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

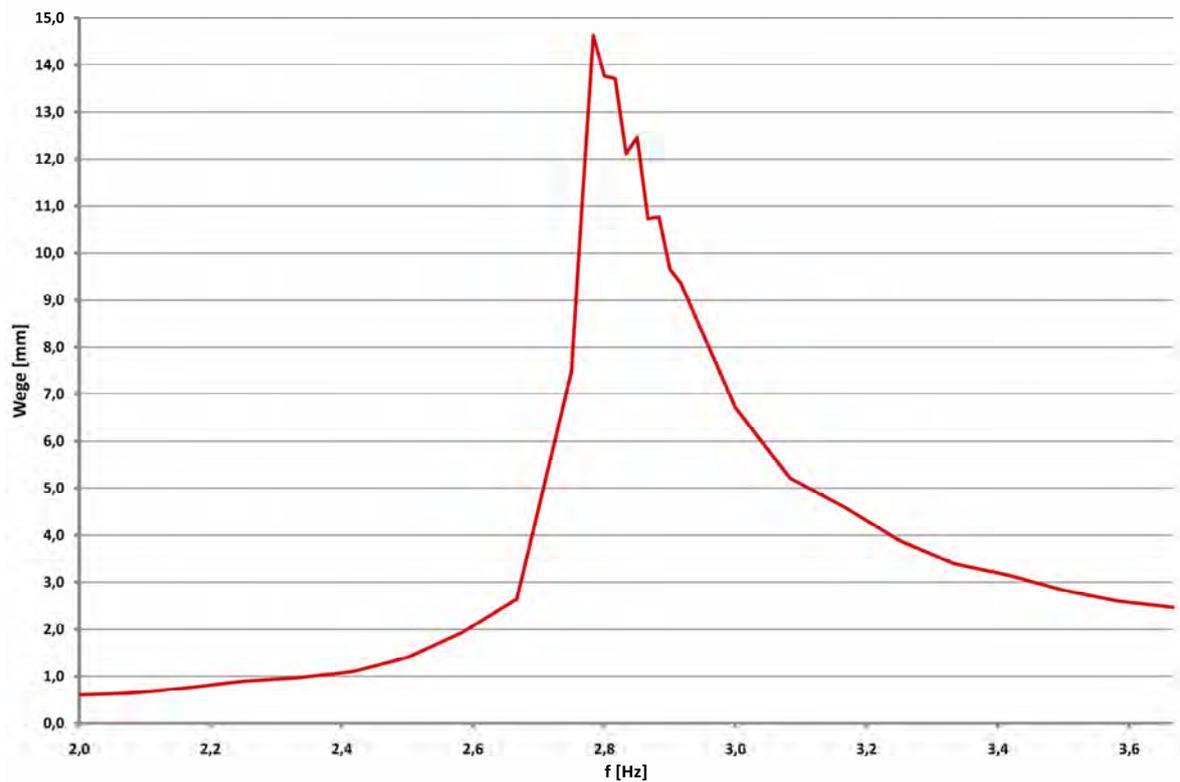


Abbildung 6.89: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit inaktiven Tilgern

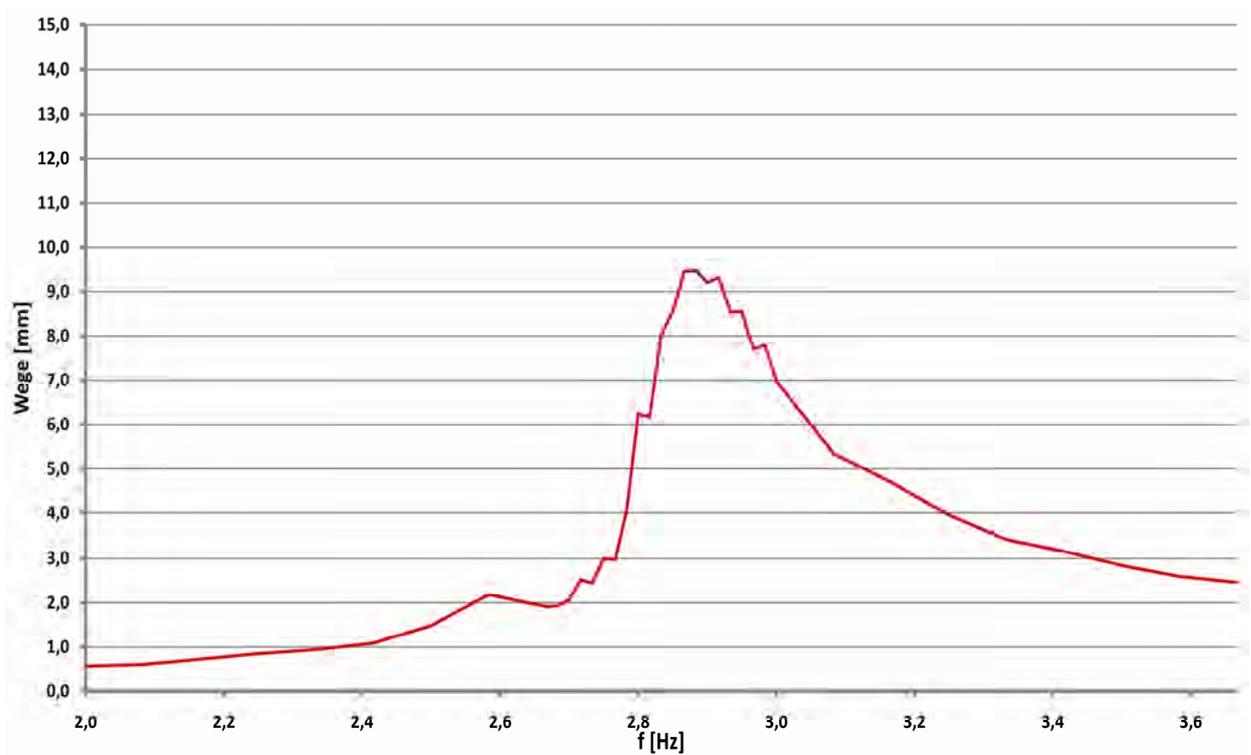


Abbildung 6.90: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit aktiven Tilgern ($f_{\text{ger}} = 2,73 \text{ Hz}$)

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

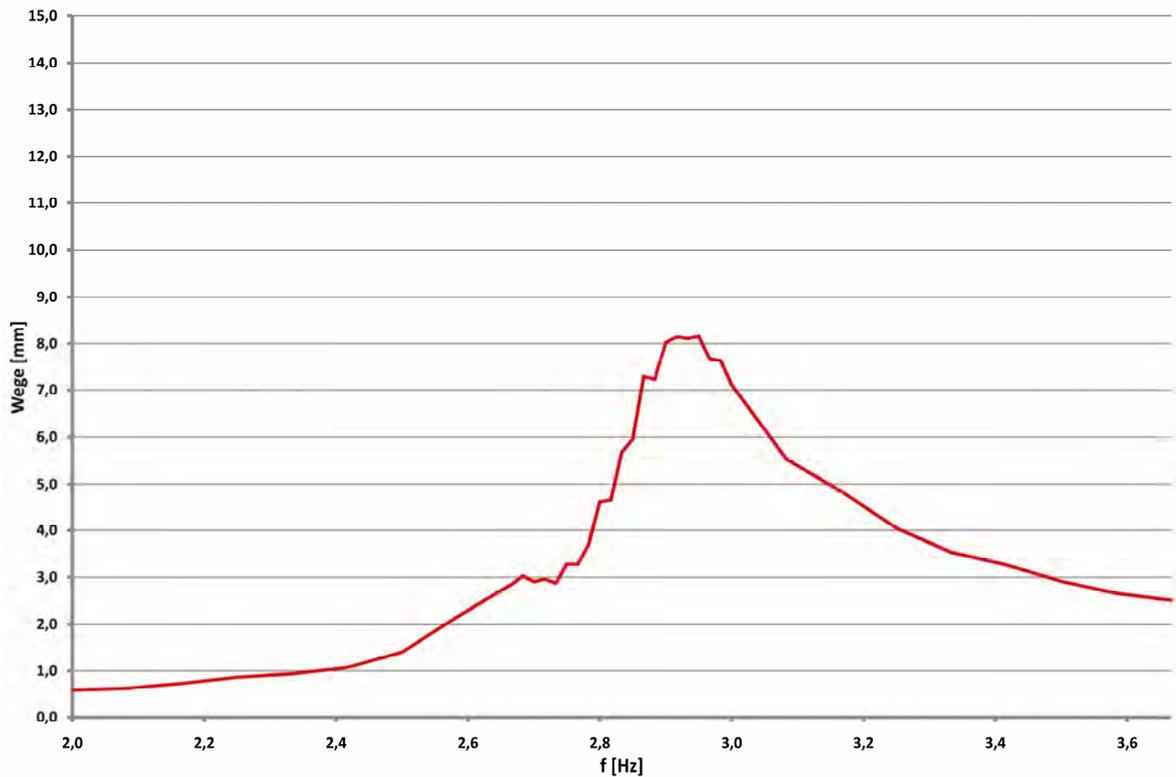


Abbildung 6.91: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit aktiven Tilgern ($f_{\text{ger}} = 2,76 \text{ Hz}$)

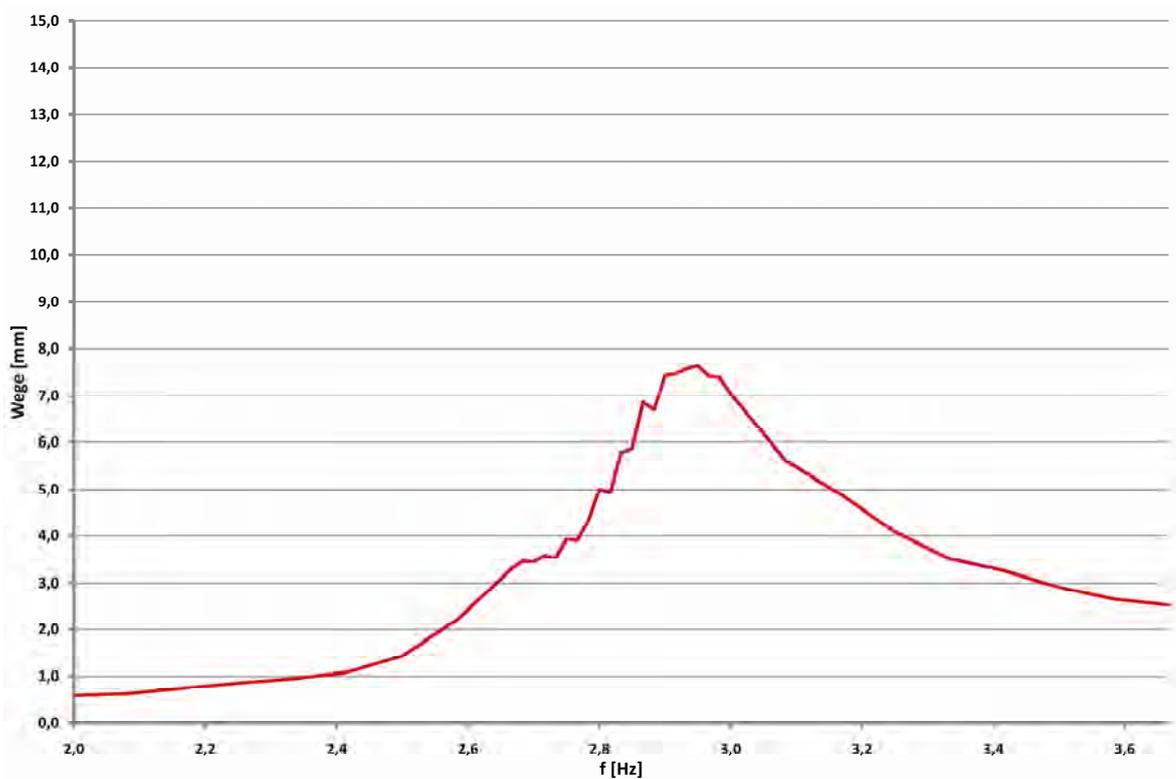


Abbildung 6.92: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit aktiven Tilgern ($f_{\text{ger}} = 2,80 \text{ Hz}$)

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

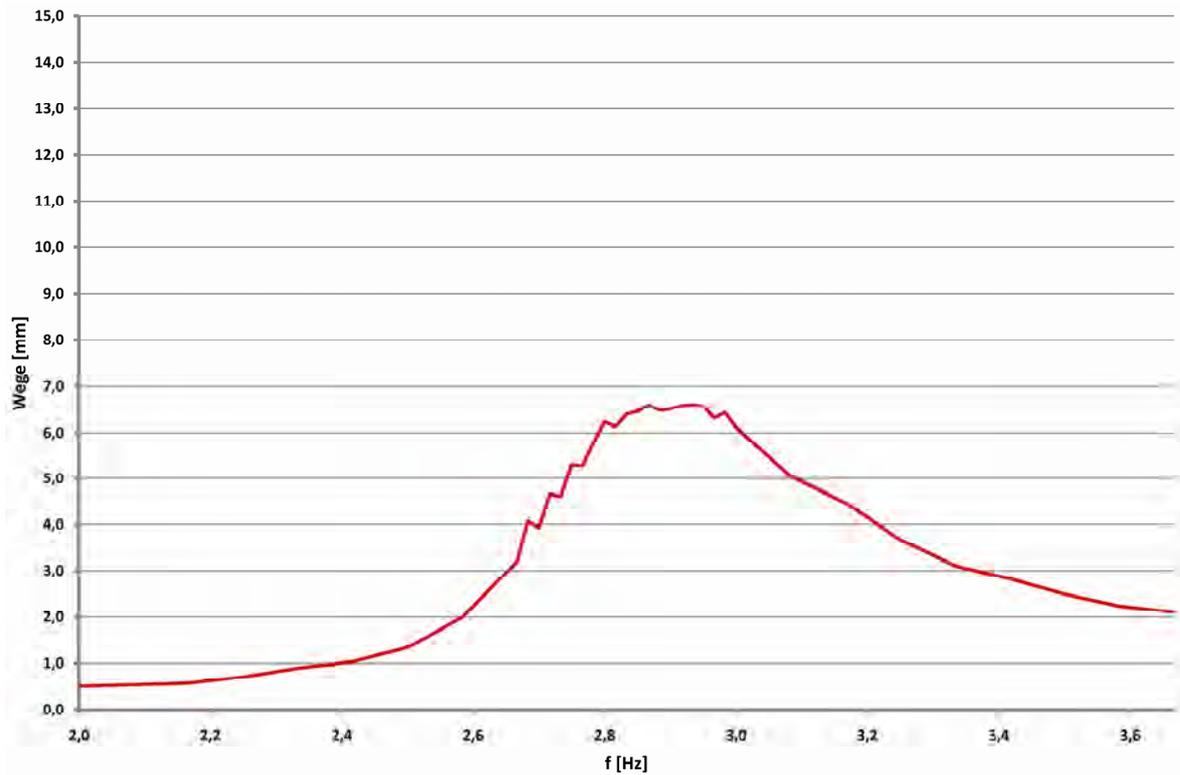


Abbildung 6.93: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit aktiven Tilgern ($f_{ger} = 2,89$ Hz)

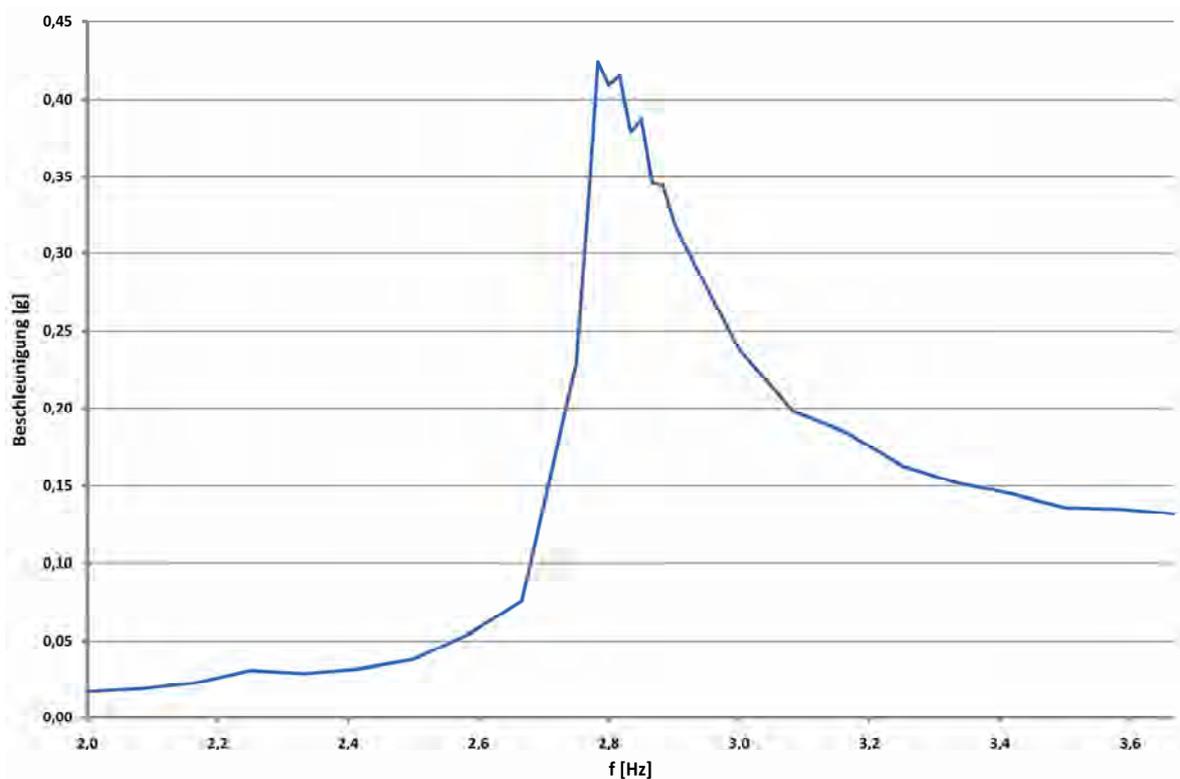


Abbildung 6.94: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen in Brückenmitte mit inaktiven Tilgern

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

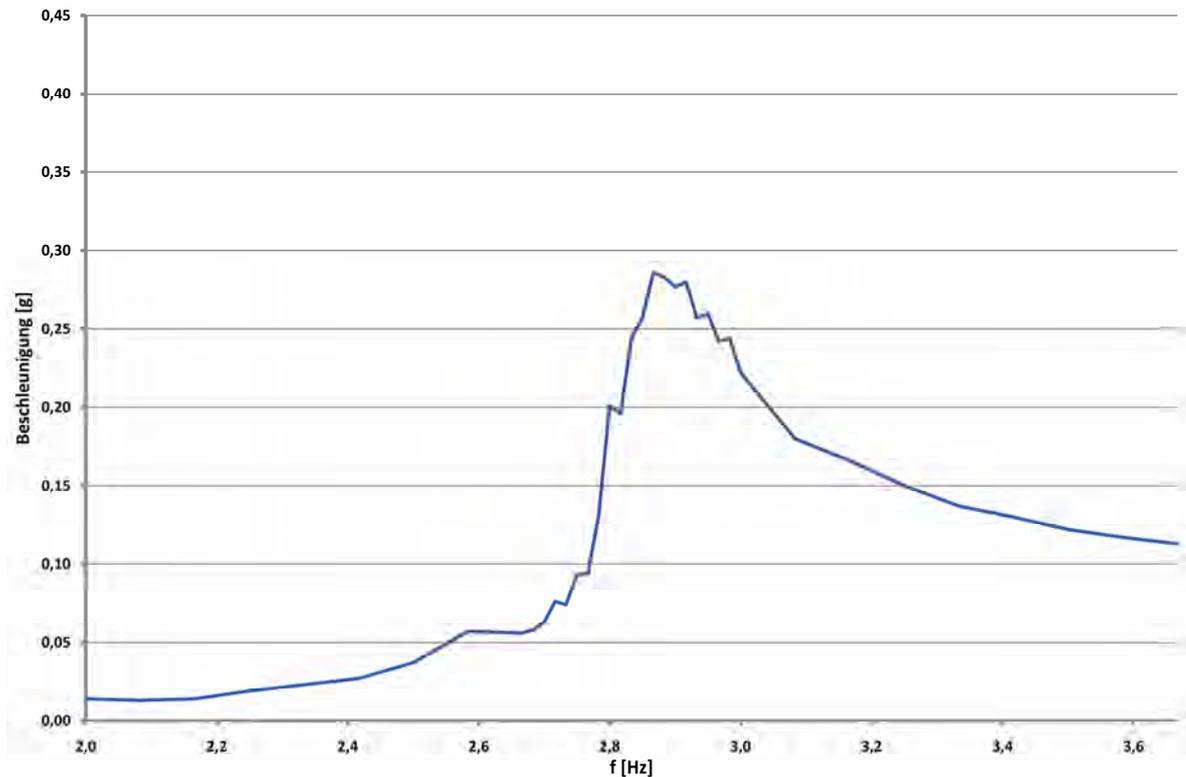


Abbildung 6.95: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen in Brückenmitte mit aktiven Tilgern ($f_{\text{ger}} = 2,73 \text{ Hz}$)

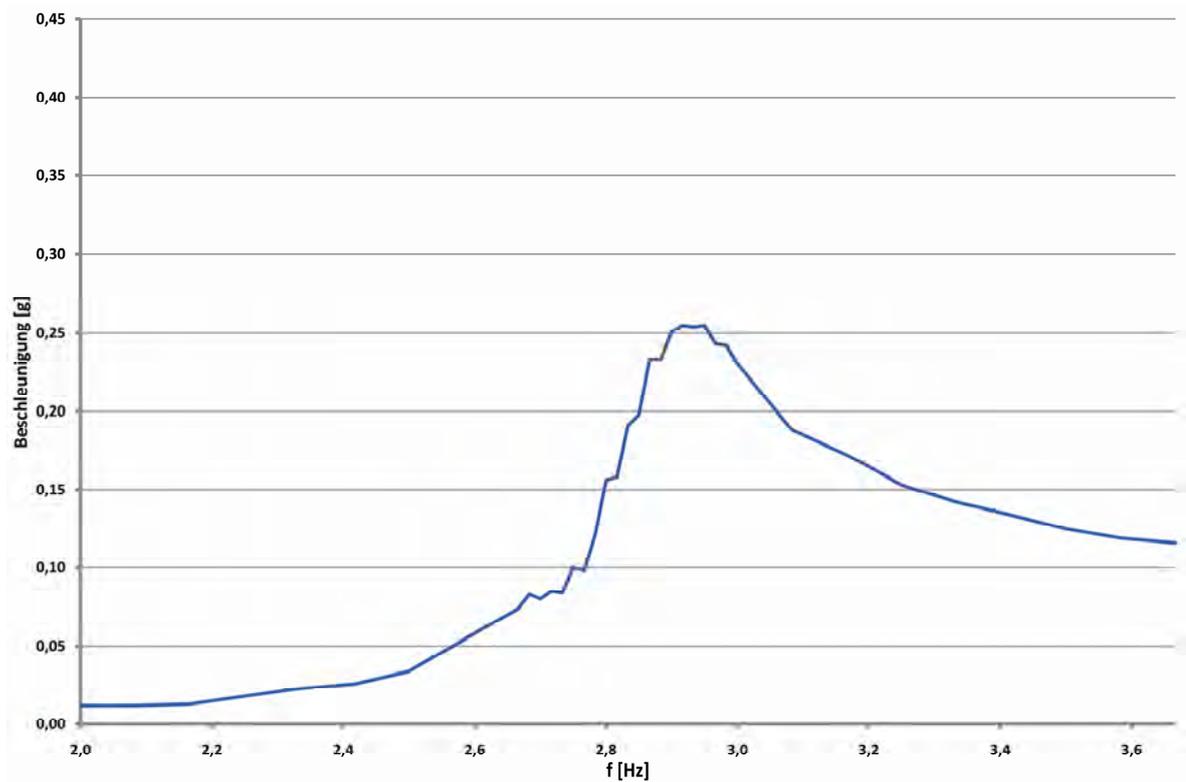


Abbildung 6.96: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen in Brückenmitte mit aktiven Tilgern ($f_{\text{ger}} = 2,76 \text{ Hz}$)

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

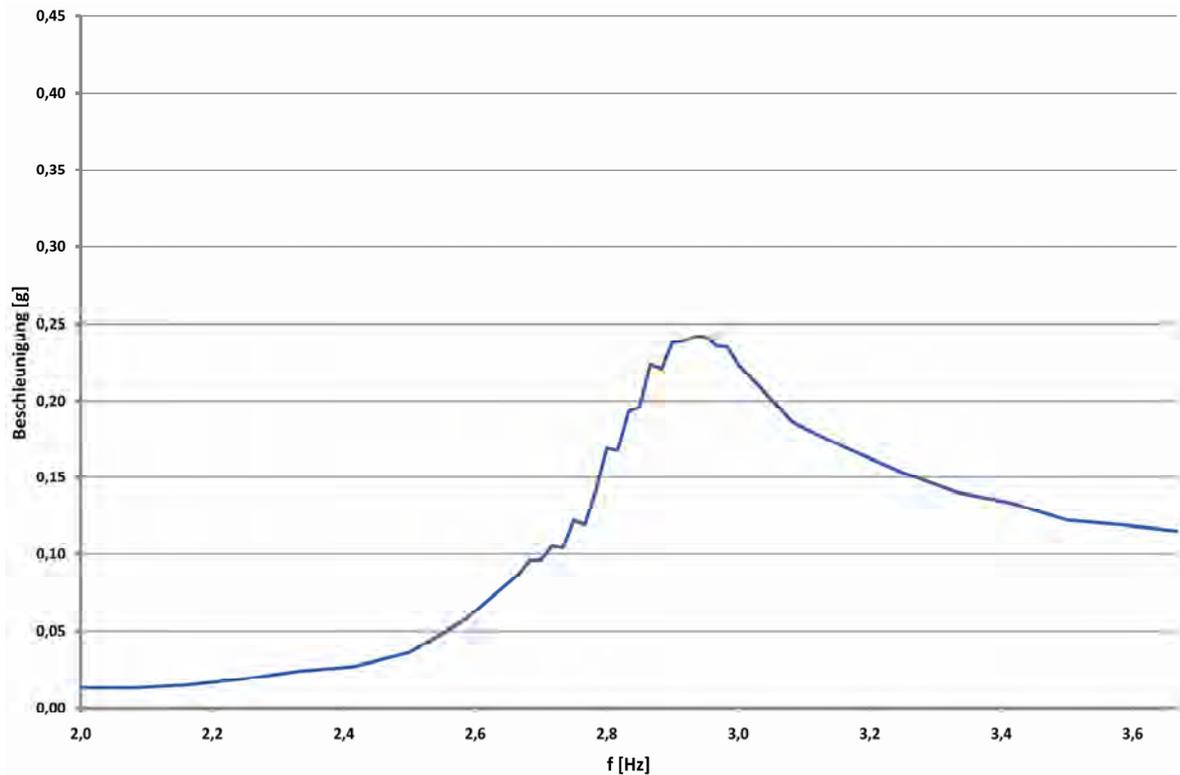


Abbildung 6.97: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen in Brückenmitte mit aktiven Tilgern ($f_{\text{ger}} = 2,80 \text{ Hz}$)

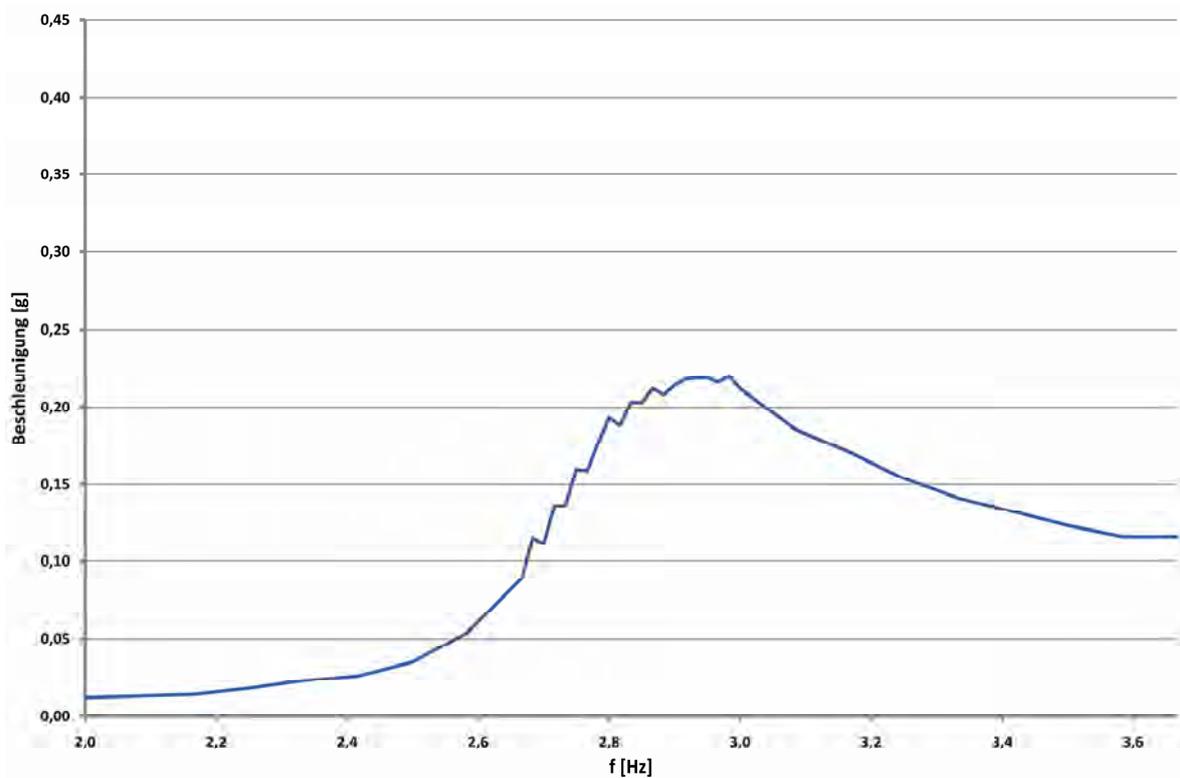


Abbildung 6.98: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen in Brückenmitte mit aktiven Tilgern ($f_{\text{ger}} = 2,89 \text{ Hz}$)

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingstilgern

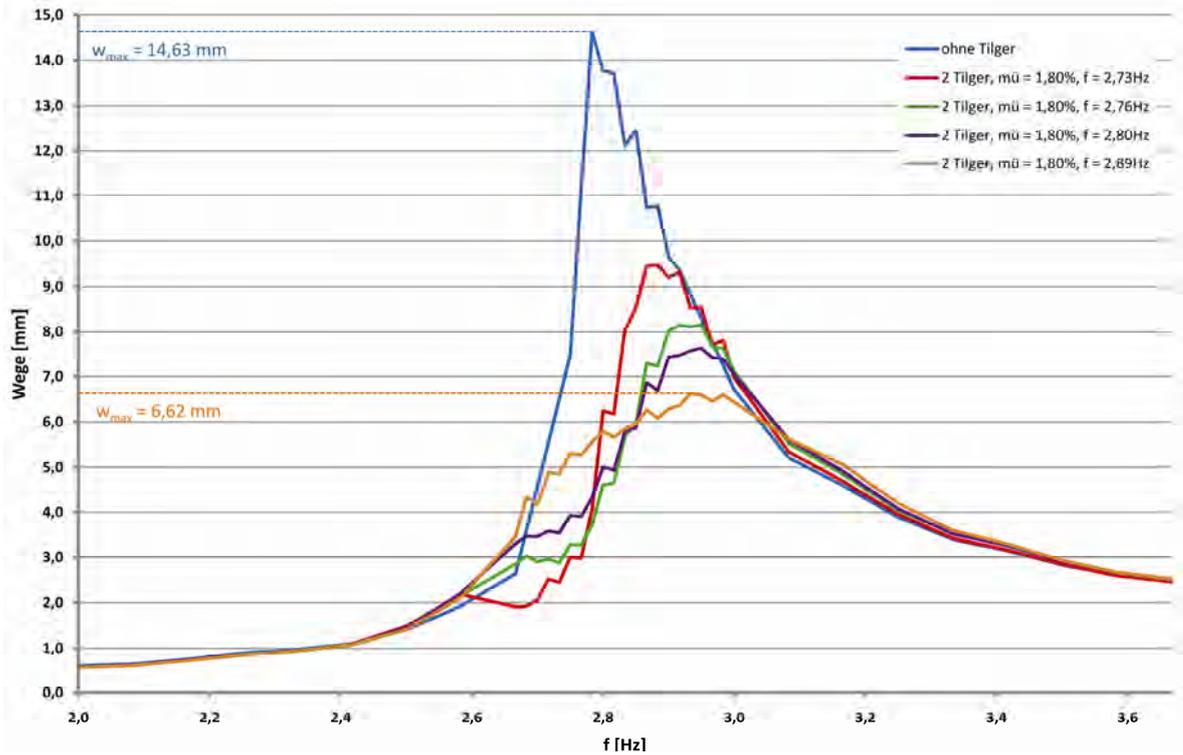


Abbildung 6.99: Gegenüberstellung der Amplitudenfrequenzgänge der Verformungen des Brückentragwerks mit inaktivem und jeweils unterschiedlich frequenzabgestimmtem aktiven Tilgerpaar

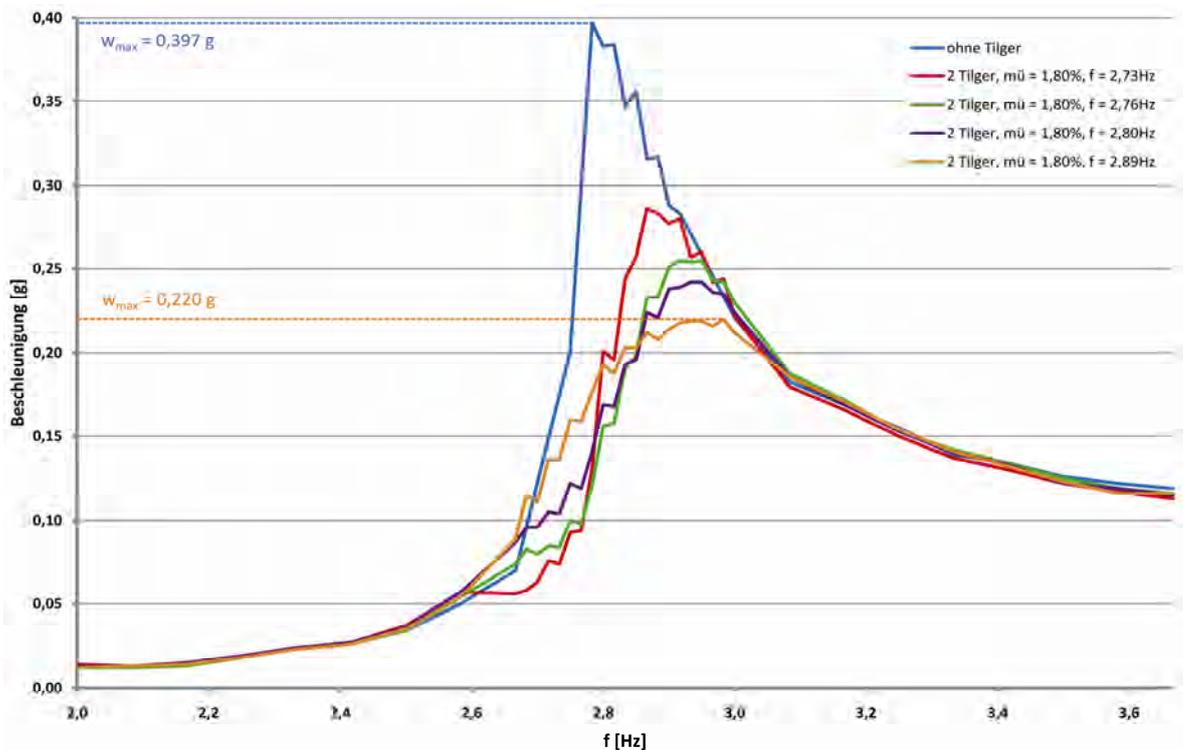


Abbildung 6.100: Gegenüberstellung der Amplitudenfrequenzgänge der Beschleunigungen des Brückentragwerks mit inaktivem und jeweils unterschiedlich frequenzabgestimmtem aktiven Tilgerpaar

Abbildung 6.99 und Abbildung 6.100 können nachfolgend ausgewertete Effektivitäten der Tilger entnommen werden

$$\begin{aligned}w_{mT} &= \frac{6,62}{14,63} w_{oT} = 0,45 w_{oT} \\ \ddot{w}_{mT} &= \frac{0,220}{0,397} \ddot{w}_{oT} = 0,55 \ddot{w}_{oT}\end{aligned}\tag{6.40}$$

Das bedeutet, dass die Amplituden der Verformungen um 55% sowie der Beschleunigungen um 45% reduziert wurden, dies mit lediglich 362,7 kg Flüssigkeitsmasse bei 41480,0 kg Tragwerksmasse.

Die in Kapitel 5.3.4 hergeleiteten optimalen Abstimmungskriterien für den Flüssigkeitsschwingungstilger konnten somit auch mit der Versuchsreihe 2 bestätigt werden. Des Weiteren konnte nachgewiesen werden, dass geringe Abweichungen von den optimalen Parametern zwar geringfügig unterschiedliche Resonanzkurven des Brücken-Tilger-Systems liefern, eine recht hohe Wirksamkeit der Tilger aber nach wie vor gegeben ist. In der Versuchsreihe 2 stellten sich die Konfigurationen, die vor allem in Bezug auf die Luftfederhöhe H_L etwas von den rechnerisch ermittelten, optimalen Einstellungen abweichen, als am effektivsten heraus. Dies wird jedoch auf die Schwierigkeit der „exakten“ Parametereinstellung vor allem beim PE-HD Tilger sowie die, trotz aller Bemühungen, nicht ganz druckdicht abdichtenden Kolbenkonstruktionen zurückgeführt.

6.2.1.3. Untersuchungen zur Flüssigkeitsspiegelbewegung und zu den Druckverhältnissen

Um die in den Flüssigkeitsschwingungstilgern auftretenden Flüssigkeitsspiegelbewegungen ermitteln zu können, kamen bei der Versuchsreihe 2 Drucksensoren zum Einsatz. Des Weiteren konnten aufgrund des transparenten Plexiglastilgers zusätzlich zu den Messungen der Druckschwankungen visuelle Beurteilungen der Flüssigkeitsbewegung vorgenommen werden. Eine punktuelle Messung der Flüssigkeitsspiegelbewegung selbst, mit z. B. Ultraschallmessungen oder Schwimmern konnte einerseits aufgrund der ausgeführten Tilgergeometrie aber hauptsächlich aufgrund der stark ungleichmäßig bewegten Flüssigkeitsoberfläche nicht durchgeführt werden. Deshalb kam die indirekte Messung der Flüssigkeitsbewegung über den vorhandenen Luftdruck zum Einsatz, deren Vorteil in der „Integration“ der Flüssigkeitsoberfläche liegt. Dadurch erhält man einen Durchschnittswert der Flüssigkeitsbewegung, der eine Vergleichsmöglichkeit mit den numerischen Berechnungen ermöglicht, da bei diesen eine gleichmäßige Flüssigkeitsbewegung vorausgesetzt wird. Zur Messung der auftretenden Drücke in den vier Rohrschenkeln kam jeweils ein Drucksensor zum Einsatz. Dabei wurden die Sensoren 2 und 4 bei jenen Rohrenden angeordnet, in denen der Luftüberdruck zur Auslenkung der Flüssigkeitsspiegel eingebracht wurde. Die Drucksensoren 1 und 3 kamen beim sich durch die Auslenkung ergebenden kleineren Luftvolumen zum Einsatz. Die Anordnung der Drucksensoren ist in der nachfolgenden Abbildung skizziert.

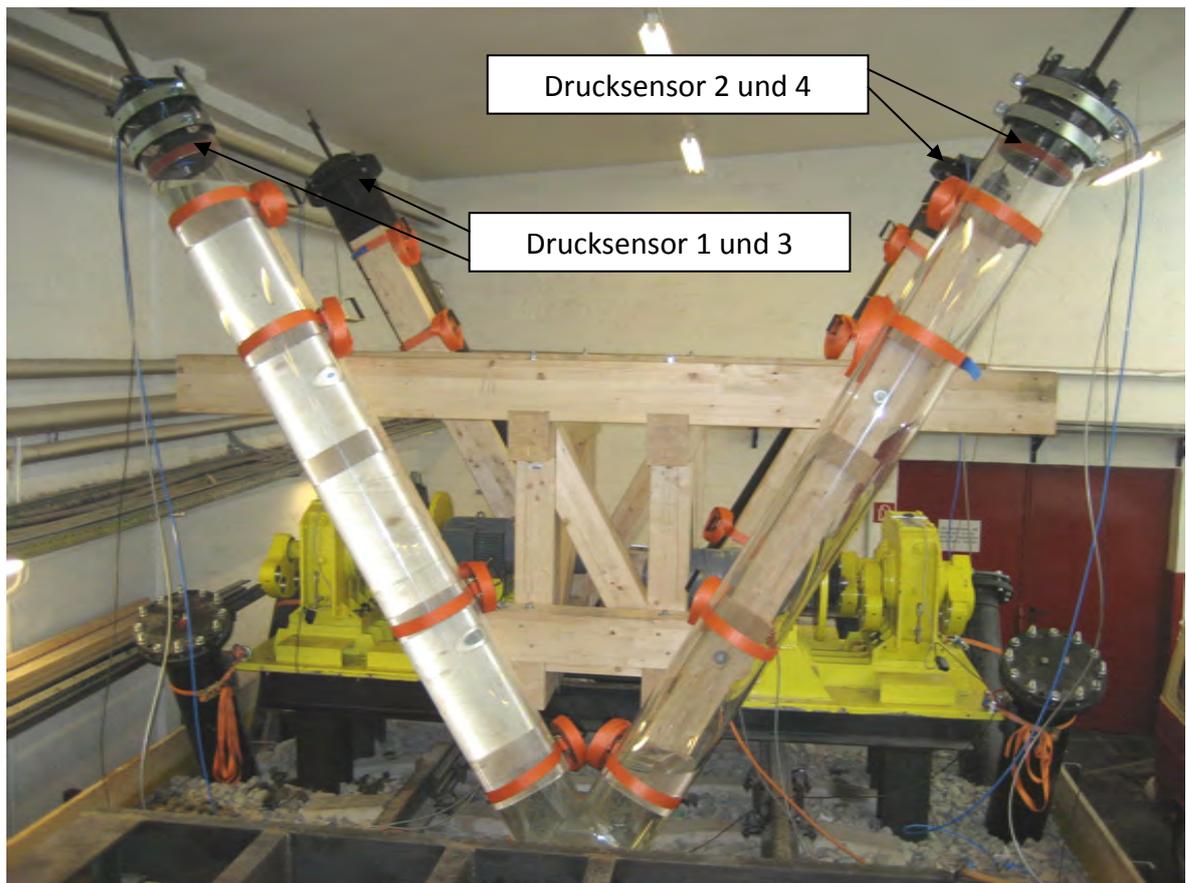


Abbildung 6.101: Anordnung der vier Drucksensoren

Zum Messvorgang muss angemerkt werden, dass nach Einstellung der Flüssigkeitsspiegelauslenkung und damit des statischen Überdrucks ein elektronischer Nullabgleich in der Messkette der Versuchsanlage durchgeführt wurde, das bedeutet ein Nullstellen aller Eingangssignale. Aus diesem Grund wurde bei den Drucksensoren nur der sich aus der Flüssigkeitsspiegelbewegung ergebende Überdruck gemessen, ohne den initialen statischen Flüssigkeitsdruck sowie aufgrund der Differenzmessung der Drucksensoren auch ohne den Atmosphärendruck.

Damit lauten die zur Ermittlung der Flüssigkeitsbewegung aus den gemessenen Drücken erforderlichen Gleichungen für den Druckfall 2, wie in Kapitel 5.1.1 hergeleitet wurde, wie folgt

$$p_0 + \rho g \Delta z_0 + p_{Dr1} = (p_0 + \rho g \Delta z_0) \left(\frac{(H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}) A}{(H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2} + u_1 \sin(\alpha)) A} \right)^\gamma \quad (6.41)$$

$$p_0 + p_{Dr2} = p_0 \left(\frac{(H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2}) A}{(H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2} - u_2 \sin(\alpha)) A} \right)^\gamma$$

mit den Variablen

H_L	Ausgangslänge des Luftvolumens
Δz_0	vertikale Flüssigkeitsspiegeldifferenz im ausgelenkten Zustand
p_0	Atmosphärendruck mit $\sim 100.000 \text{ N/m}^2$
γ	Adiabatenkoeffizient (für Luft 1,405)
ρ	Dichte des Wassers mit $\sim 1000 \text{ kg/m}^3$
α	Neigung der Rohrschenkel
g	Erdbeschleunigung
u	Flüssigkeitsspiegelbewegung

Aus den Gleichungen (6.41) lassen sich die Flüssigkeitsspiegelbewegungen wie folgt freistellen

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \left(H_L + \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} \right) \left(\frac{p_0 + \rho g \Delta z_0}{p_0 + \rho g \Delta z_0 + p_{Dr1}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - H_L - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} \\
 u_2 &= - \left(H_L - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)} \right) \left(\frac{p_0}{p_0 + p_{Dr1}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} + H_L - \frac{\Delta z_0}{2 \sin(\alpha)}
 \end{aligned}
 \tag{6.42}$$

Diese beiden Flüssigkeitsspiegelbewegungen sollten natürlich bei inkompressiblen Flüssigkeiten gleich groß sein, aufgrund von Messungenauigkeiten werden aber unterschiedliche Ergebnisse erwartet. In den nachfolgenden Abbildungen (Abbildung 6.102 bis Abbildung 6.105) sind die gemessenen Überdrücke beim optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilger aus Kapitel 6.2.1.2 mit einer rechnerischen Eigenfrequenz von $f_{ger} = 2,89 \text{ Hz}$ angeführt. Die Anregung erfolgte dabei in der ersten Eigenfrequenz des Brückentragwerks.

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

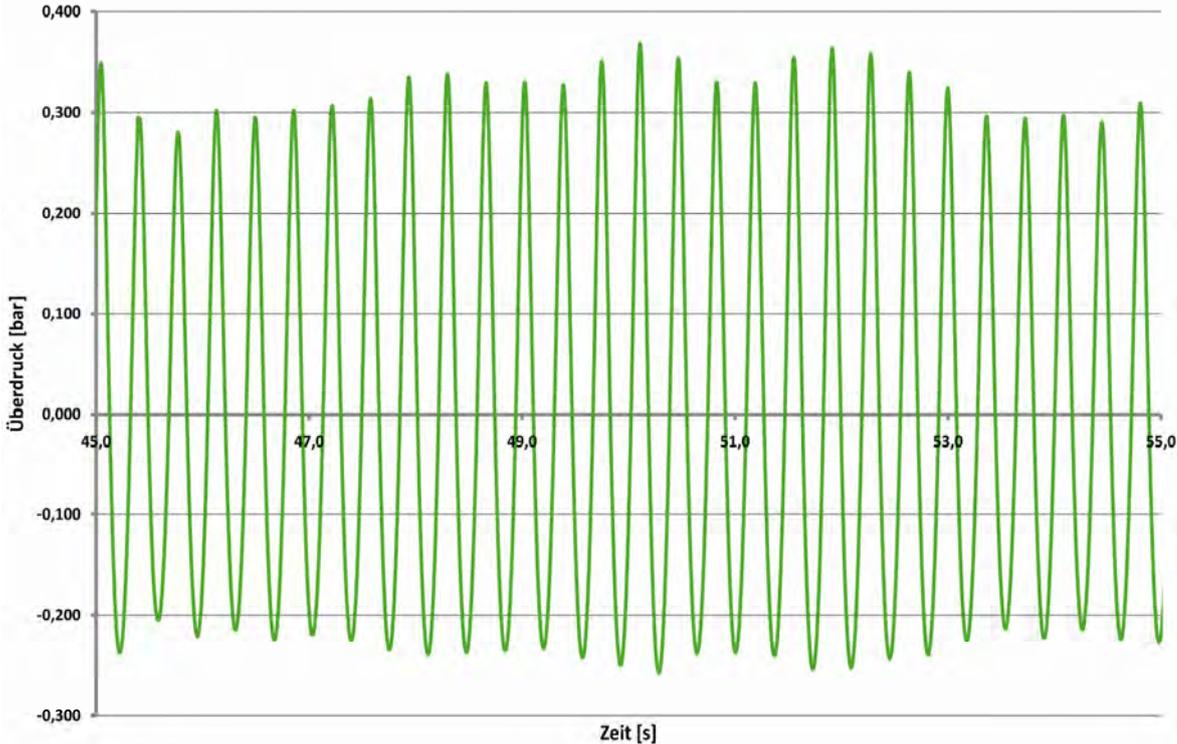


Abbildung 6.102: gemessene Druckschwankungen beim Drucksensor 1 [bar]

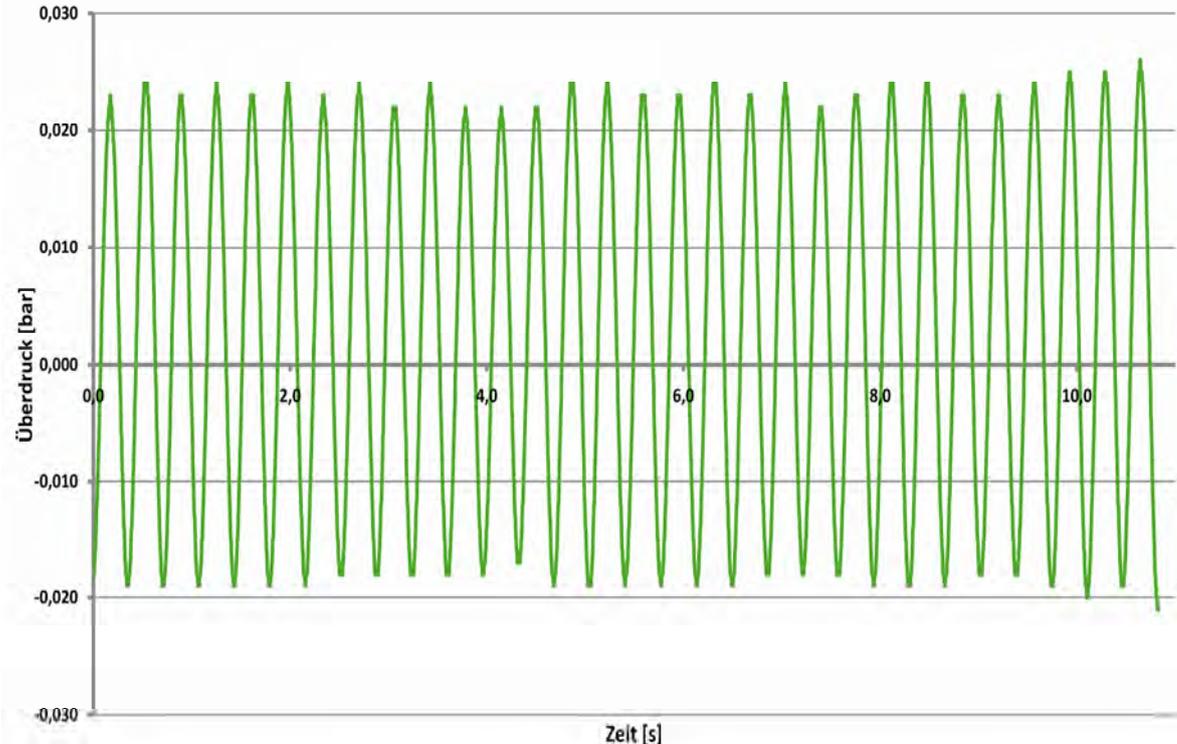


Abbildung 6.103: gemessene Druckschwankungen beim Drucksensor 2 [bar]

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

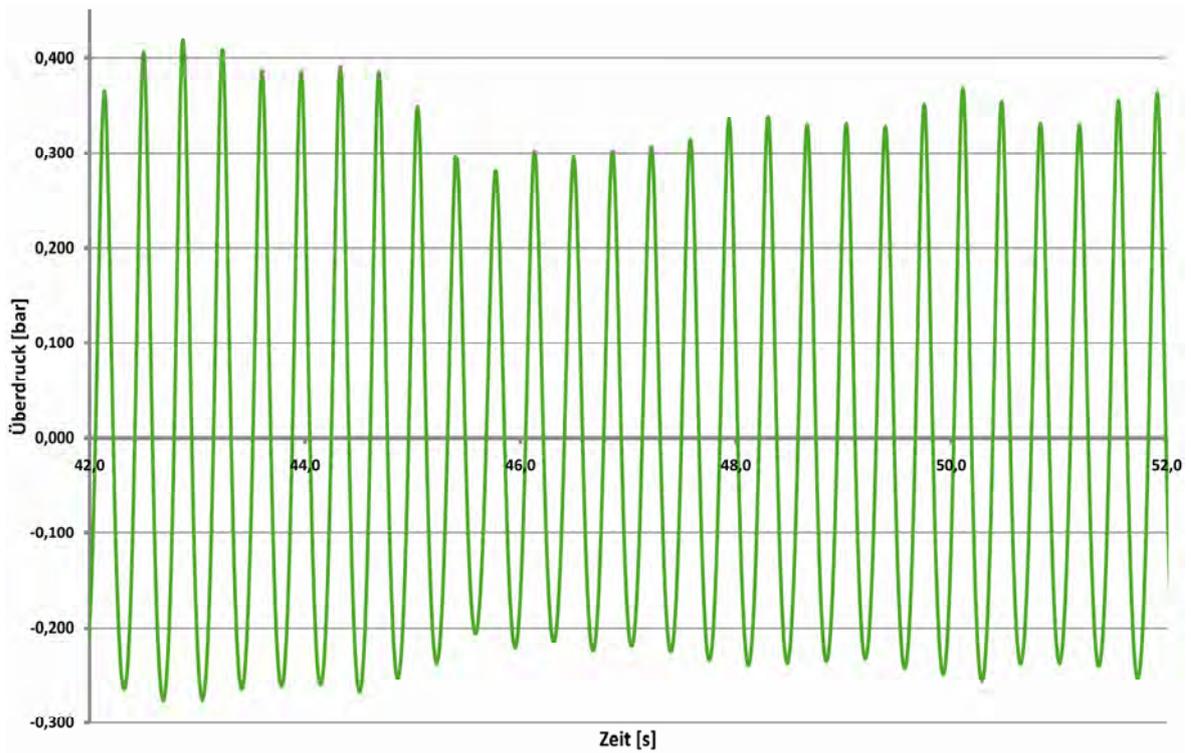


Abbildung 6.104: gemessene Druckschwankungen beim Drucksensor 3 [bar]

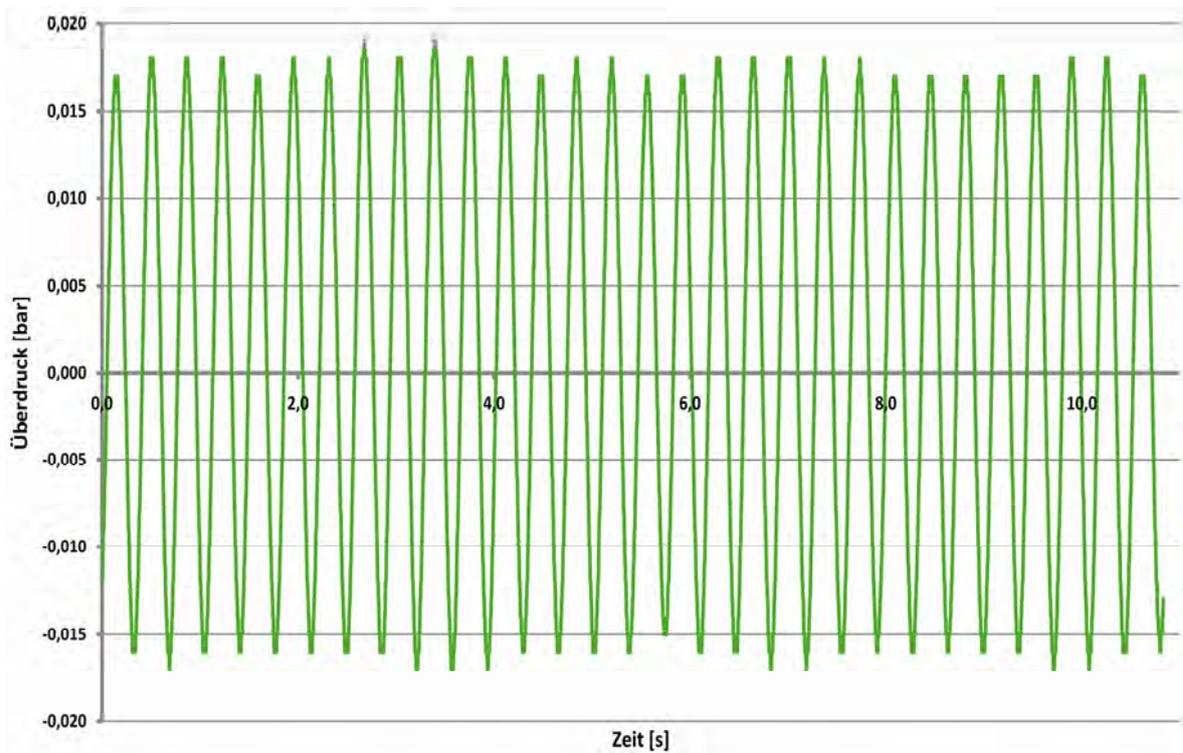


Abbildung 6.105: gemessene Druckschwankungen beim Drucksensor 4 [bar]

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

Die sich aus den gemessenen Druckschwankungen nach Gl. (6.42) rechnerisch ergebenden Flüssigkeitsspiegelbewegungen sind in den nachfolgenden Abbildungen (Abbildung 6.106 bis Abbildung 6.109) dargestellt.

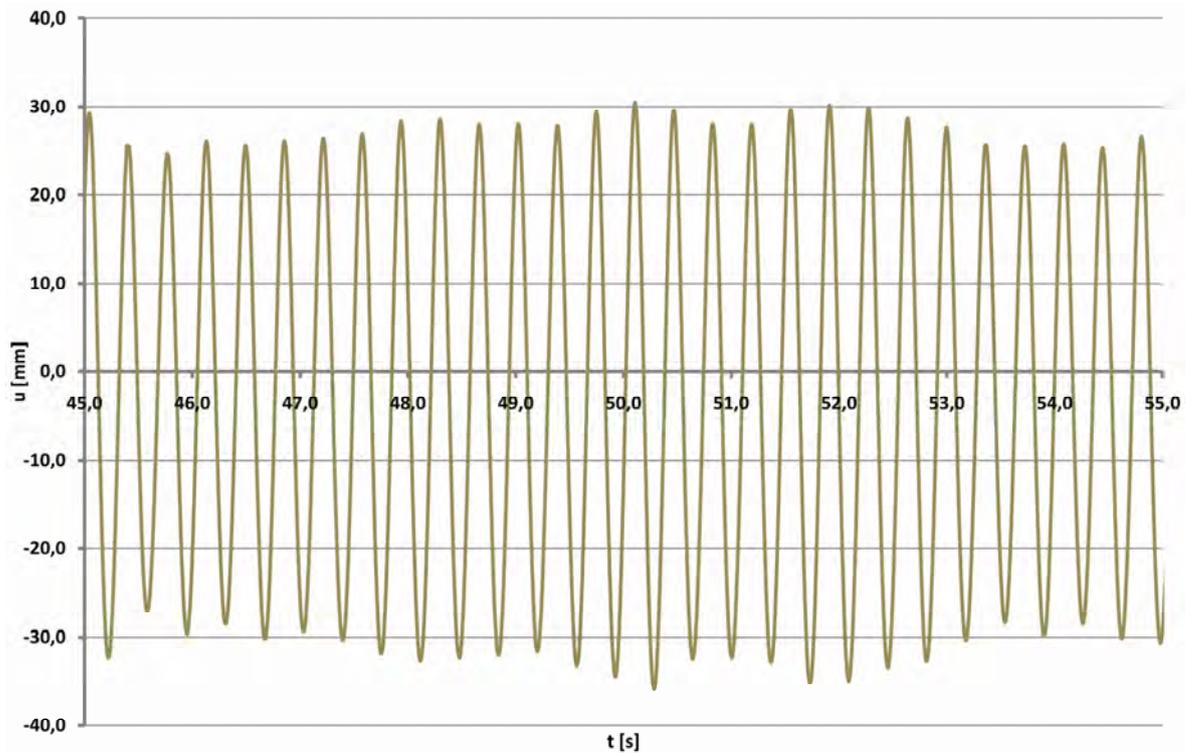


Abbildung 6.106: aus den Druckmessungen ermittelte Flüssigkeitsspiegelbewegung u_1 [mm]

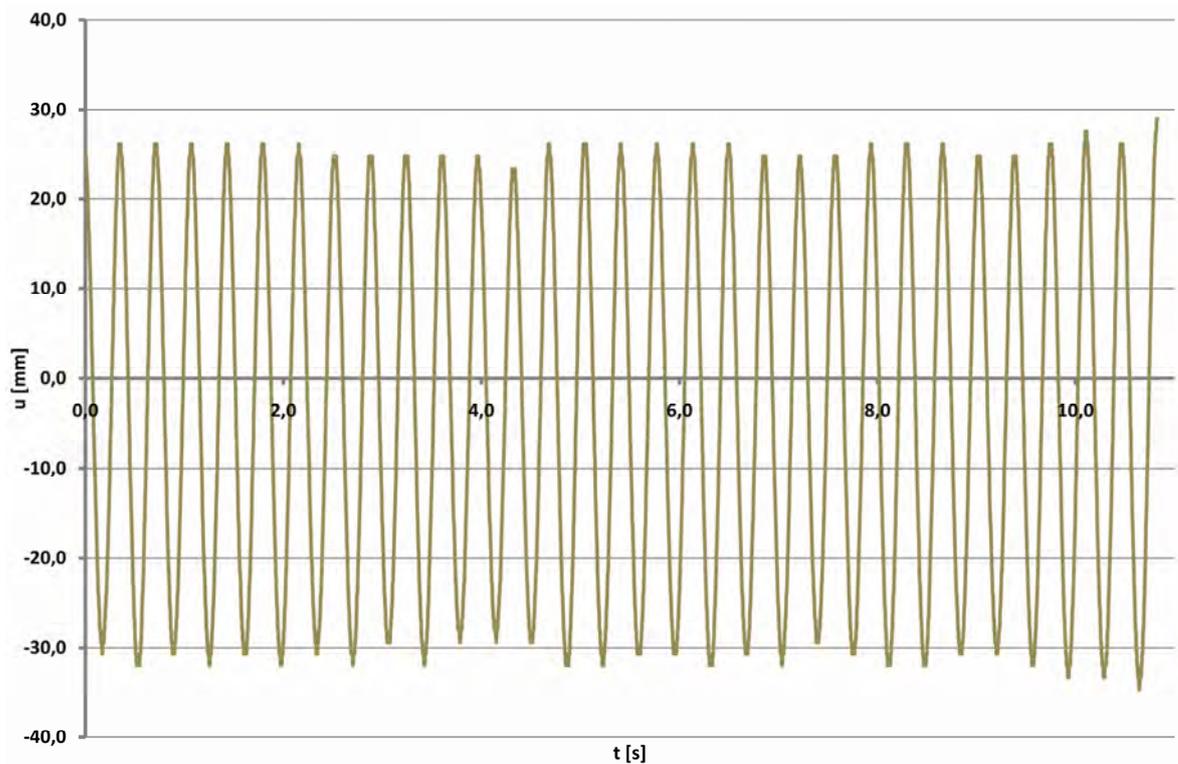


Abbildung 6.107: aus den Druckmessungen ermittelte Flüssigkeitsspiegelbewegung u_2 [mm]

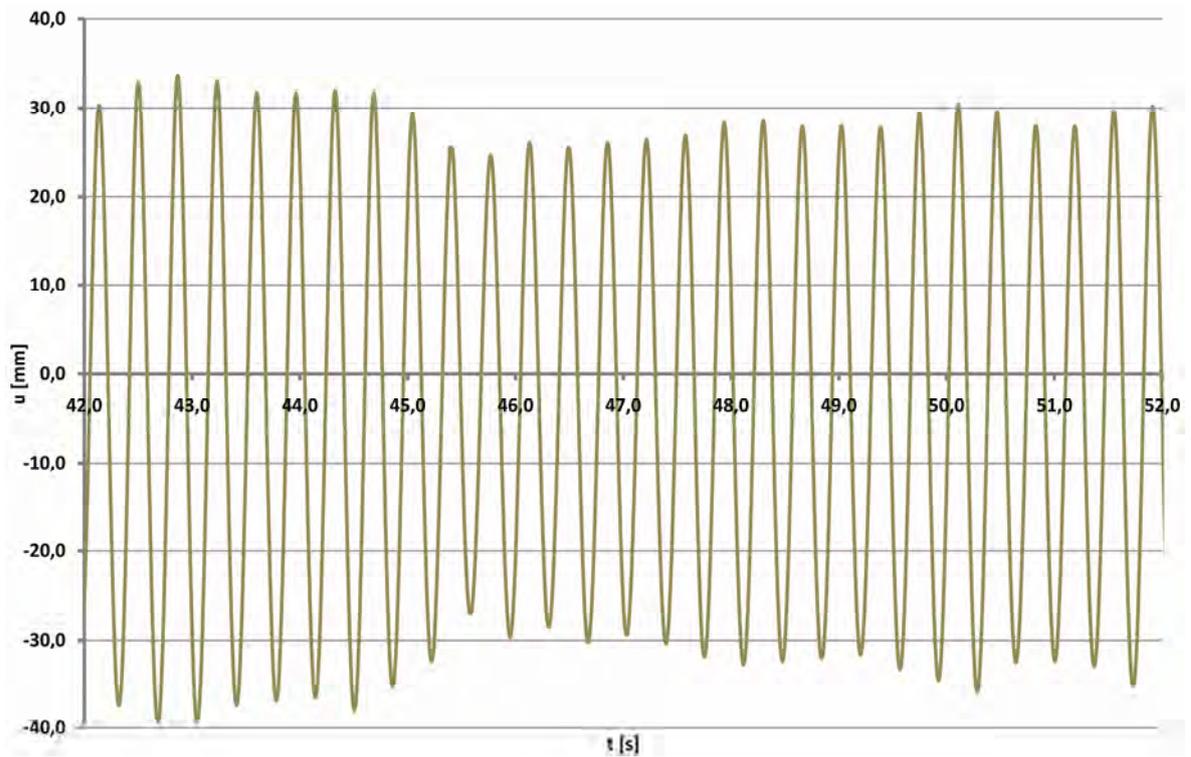


Abbildung 6.108: aus den Druckmessungen ermittelte Flüssigkeitsspiegelbewegung u_3 [mm]

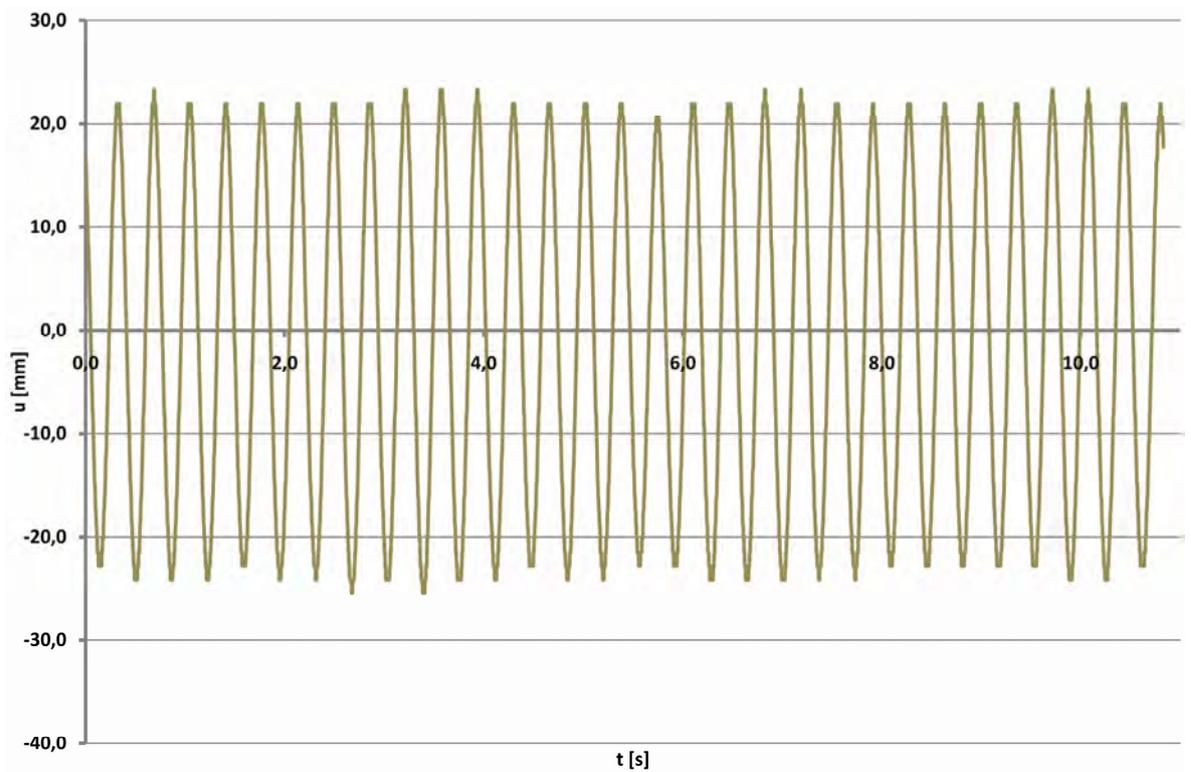


Abbildung 6.109: aus den Druckmessungen ermittelte Flüssigkeitsspiegelbewegung u_4 [mm]

Den Abbildungen der aus den gemessenen Druckschwankungen rechnerisch ermittelten Flüssigkeitsspiegelbewegungen kann entnommen werden, dass die Größenordnung dieser bei allen im Bereich von 25,0 – 35,0 mm Amplitude liegt. Dabei müssen die errechneten Bewegungen aus den Drucksensoren 2 und 4 kritisch betrachtet werden, da bei diesen die auftretenden Druckschwankungen zufolge des dort vorhandenen großen Luftvolumens im Bereich der Messgenauigkeit der Drucksensoren zu liegen kommt. Des weiteren muss bei den Flüssigkeitsspiegelbewegungen berücksichtigt werden, dass während der Versuchsdurchführung ein sehr starkes Schwappen der Flüssigkeit in den Rohren beobachtet wurde und die aus den Druckschwankungen ermittelten Bewegungen nur Mittelwerte darstellen können. Um einen Vergleichswert mit den numerischen Untersuchungen zu erhalten, wird der nachfolgende gemessene Bereich der Flüssigkeitsbewegung festgelegt

$$\hat{u} \approx 25,0 - 30,0 \text{ mm} \quad (6.43)$$

Zur Illustration sind nachfolgend ein paar Momentaufnahmen der Flüssigkeitsbewegung während der Versuchsdurchführung dargestellt. Diesen kann entnommen werden, dass es sich bei der Bewegung der Flüssigkeitsoberfläche, wie bereits die ausgewerteten Druckverläufe ergeben haben, um eine sehr unregelmäßige Bewegung handelt. Während der Versuchsdurchführung musste ein sehr starkes Schwappen des Wassers beobachtet werden, wobei sich auf der Seite mit dem größeren Luftvolumen (Seite in die der Luftüberdruck eingepresst wurde), also mit der weicheren Luftfeder, die unregelmäßige Bewegung weitaus stärker ausbildete als im anderen Rohrschenkel.



Abbildung 6.110: Momentaufnahme 1 der Flüssigkeitsbewegung beim kleineren Luftvolumen



Abbildung 6.111: Momentaufnahme 2 der Flüssigkeitsbewegung beim kleineren Luftvolumen



Abbildung 6.112: Momentaufnahme der Flüssigkeitsbewegung beim größeren Luftvolumen

6.2.2. Numerische Studien

Nachfolgend sind die numerischen Studien zur Versuchsreihe 2 dargestellt. Die dabei gewählte Vorgehensweise der numerischen Berechnungen wurde in Kapitel 6.1.2 ausführlich erläutert und wird an dieser Stelle nicht erneut angeführt. Die nachfolgenden Kapitel der Frequenzabstimmung sowie des optimalen Dämpfungsmaßes sind in Anlehnung an die Kapitel der Versuchsreihe 1 entstanden und dienen der Verifikation der analytischen Untersuchungen auch für die vorliegende Versuchsreihe 2.

6.2.2.1. Ermittlung des optimalen Frequenzverhältnisses f_{opt}

Zur experimentellen Versuchsdurchführung wurden nach Ermittlung der Masse sowie der ersten Eigenfrequenz des Tragwerks die Parameter H , H_L und Δz_0 so gewählt, dass diese unter Berücksichtigung der Äquivalenzbeziehungen nach Kapitel 5.3.4 eine Eigenfrequenz des Schwingungstilgers liefern, die der Eigenfrequenz des Tragwerks angepasst ist. Daraus ergaben sich die Parameter (siehe Kapitel 6.2.1)

$$\begin{aligned}\Delta z_0 &= 1811,2 \text{ mm} \\ H &= 1539,5 \text{ mm} \\ H_L &= 1218,2 \text{ mm}\end{aligned}\tag{6.44}$$

Um zu überprüfen, ob die Parameterwahl auch numerisch eine optimal angepasste Eigenfrequenz des Tilgers ergibt, wurde die Luftfederhöhe H_L in den numerischen Berechnungen variiert. Dies hat zum Vorteil, dass dabei die Flüssigkeitsmasse m_F sowie die Stromfadenlänge $2H$ und damit vor allem das Masseverhältnis μ für alle nachfolgenden Studien konstant bleiben, außerdem stimmt dies mit der experimentellen Versuchsdurchführung überein. Folgende Variation der Luftfederhöhe wurde vorgenommen

$$1175,0 \text{ mm} \leq H_L \leq 1225,0 \text{ mm}\tag{6.45}$$

Die ideale Luftfederhöhe lässt sich, wie die Untersuchungen zum Zweimasseschwinger zeigten (Kapitel 2.2.8), durch Fixpunkte P und Q mit gleichem Ordinatenwert herausfiltern. Nachfolgend sind die Amplitudenfrequenzgänge der Brückenbewegung unter Berücksichtigung von zwei aktiven Schwingungstilgern mit unterschiedlichen Frequenzabstimmungen dargestellt. Die sich rechnerisch ergebenden Frequenzen lauten dabei

Tabelle 6.8: rechnerische Eigenfrequenzen des Flüssigkeitsschwingungstilgers in Abhängigkeit der Luftfederhöhe H_L

H_L	f_1	H_L	f_1	H_L	f_1	H_L	f_1
[mm]	[Hz]	[mm]	[Hz]	[mm]	[Hz]	[mm]	[Hz]
1177,5	3,086	1190,0	2,959	1202,5	2,849	1215,0	2,751
1180,0	3,059	1192,5	2,936	1205,0	2,828	1217,5	2,733
1182,5	3,033	1195,0	2,914	1207,5	2,808	1220,0	2,715
1185,0	3,008	1197,5	2,892	1210,0	2,789	1222,5	2,698
1187,5	2,983	1200,0	2,870	1212,5	2,770	1225,0	2,681

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

Die Amplitudenfrequenzgänge der unterschiedlich abgestimmten Tilger zeigen eindeutig, dass die Tilger mit einer Luftfederhöhe von 1210,0 bzw. 1212,5 mm Luftfederhöhe annähernd gleich große Fixpunktsordinaten P und Q aufweisen und damit auch die geringsten maximalen Verformungen liefern. Die ideale Abstimmung muss also zwischen diesen beiden Einstellungen liegen. In der nachfolgenden Abbildungen sind die Amplitudenfrequenzgänge der Verformungen des Einmassenschwingers mit einer Variation der Luftfederhöhe H_L von

$$1175,0 \text{ mm} \leq H_L \leq 1222,5 \text{ mm} \quad (6.46)$$

dargestellt.

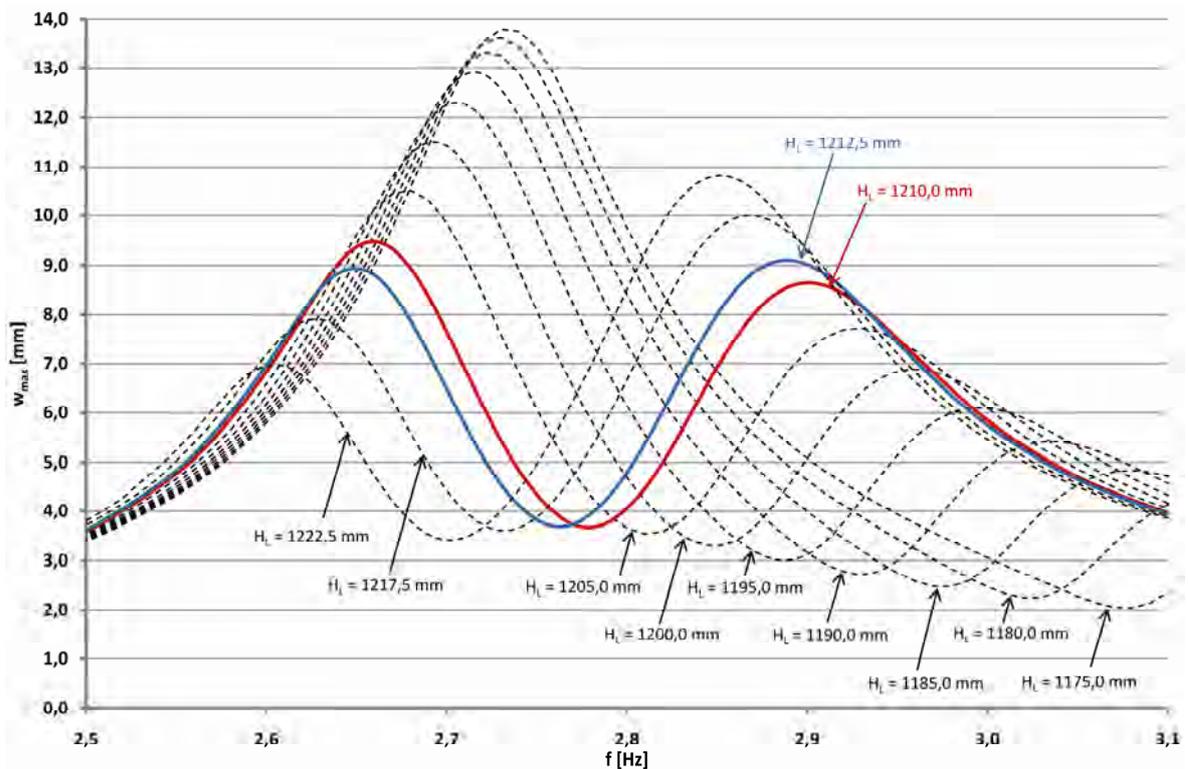


Abbildung 6.113: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen des Einmassenschwingers mit zwei aktiven Flüssigkeitsschwingungstilgern mit unterschiedlicher Luftfederhöhe H_L

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

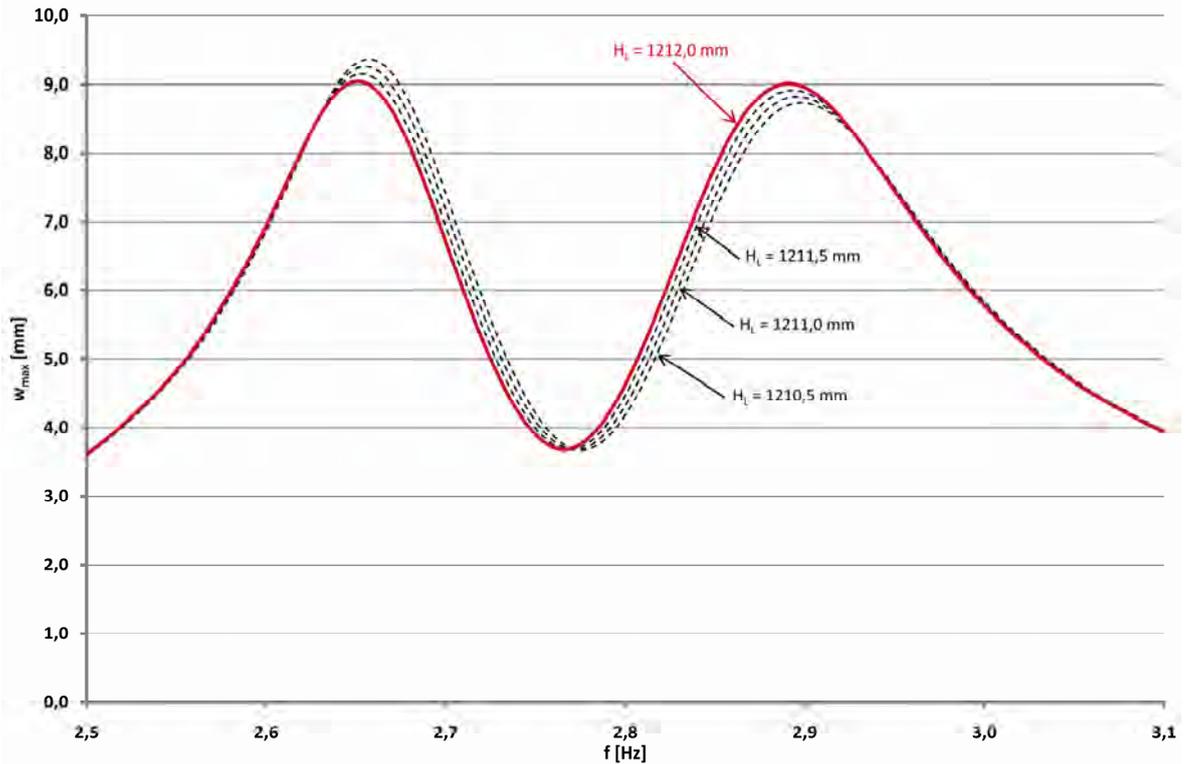


Abbildung 6.114: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen des Einmassenschwingers mit 2 Flüssigkeitsschwingungstilgern (Feinabstimmung)

Durch eine geringere Schrittweite zwischen den sich zuvor als nahezu optimal ergebenden Luftfederhöhen konnte die optimale Luftfederhöhe mit

$$H_{L,opt} = 1212,0 \text{ mm} \quad (6.47)$$

bestimmt werden, mit einer daraus resultierenden Eigenfrequenz des Flüssigkeitsschwingungstilgers nach Gl. (5.74) von

$$f_1 = 2,774 \text{ Hz} \quad (6.48)$$

Führt man die Frequenzabstimmung nach Kapitel 5.3, Äquivalenzbeziehungen zwischen konventionellen Schwingungstilgern und Flüssigkeitsschwingungstilgern, durch, folgt mit dem mittleren Durchmesser der beiden Tilger von

$$\bar{d} = \frac{d_{Plexi} + d_{PE-HD}}{2} = \frac{270,0 + 277,6}{2} = 273,8 \text{ mm} \quad (6.49)$$

und

$$\begin{aligned} m &= 20740,0 \text{ kg} \\ m_F &= 2H\rho A = 2 \cdot 1,540 \cdot 1000,0 \cdot 0,059 = 181,29 \text{ kg} \\ \mu &= \frac{2 \cdot 181,29}{20740,0} = 0,0175 \\ \kappa &= \frac{1539,5}{2 \cdot 1811,2} = 0,588 \end{aligned} \quad (6.50)$$

das optimale Frequenzverhältnis zu

$$f_{opt} = \frac{1 + 0,0175(2 - 0,5882 - 0,5882^2)}{1 + 2 \cdot 0,0175} = 0,9842 \quad (6.51)$$
$$f_{1,opt} = 0,9842 \cdot 2,783 = 2,739 \text{ Hz}$$

Damit konnte auch für die Versuchsreihe 2 gezeigt werden, dass die sehr einfach anzuwendenden Gleichungen der Äquivalenzbeziehungen aus Kapitel 5.3.4 nahezu dieselbe optimale Eigenfrequenz der Tilger liefert, wie die aufwendigen numerischen Berechnungen.

6.2.2.2. Ermittlung des optimalen viskosen Dämpfungsmaßes ζ_{opt}

Mit dem im vorhergehenden Kapitel numerisch ermittelten optimalen Frequenzverhältnis f_{opt} wurden Untersuchungen zum zweiten wichtigen Parameter, der optimalen Dämpfung des Flüssigkeitsschwingungstilgers durchgeführt. Wie in Kapitel 2.2.8.3 gezeigt werden konnte, hat die Dämpfung des Tilgers ebenfalls einen Einfluss auf die Resonanzkurven, sie bestimmt im Besonderen den Verlauf der Resonanzkurven zwischen den Fixpunkten. Um numerisch das beste Dämpfungsmaß zu erhalten, wurde der turbulente Verlustkoeffizient δ_v , siehe Kapitel 5.1.3, in folgender Weise variiert

$$1,0 \leq \delta_v \leq 25,0 \quad (6.52)$$

Nachfolgend sind die daraus resultierenden Amplitudenfrequenzgänge der Verformungen des Einmasseschwingers mit zwei optimal frequenzabgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgern dargestellt. Dabei ergibt sich der optimale turbulente Verlustkoeffizient mit dem Kriterium der kleinsten maximalen Verformungen zu

$$\delta_{v,opt} \approx 21,0 \quad (6.53)$$

Den Resonanzkurven von Abbildung 6.115 kann entnommen werden, dass sich diese bei zu geringer Dämpfung dem ungedämpften Zweimassenschwinger annähern, und bei zu großer Dämpfung dem Einmasseschwinger, dazwischen liegt das Optimum. Dies entspricht genau den Betrachtungen zum Zweimassenschwinger im Kapitel 2.2.8. Der ermittelte Wert für den turbulenten Verlustterm soll nachfolgend in ein äquivalentes viskoses Dämpfungsmaß, wie in Kapitel 5.1.3.2 gezeigt wurde, umgerechnet werden. Dafür ist die maximale Amplitude der Flüssigkeitsspiegelbewegung erforderlich. Diese können, in Abhängigkeit des turbulenten Verlustterms, der Abbildung 6.116 entnommen werden. Darin ist ersichtlich gemacht, dass zur Tilgung der Tragwerksbewegung bei zu geringer Dämpfung eine größere Flüssigkeitsspiegelbewegung erforderlich ist als bei größerer Dämpfung. Dies ist einleuchtend, wenn man berücksichtigt, dass sich die in die Tilger eingeprägte Energie auf die Massenbeschleunigung der Flüssigkeit und auf die Reibungsverluste aufteilt.

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

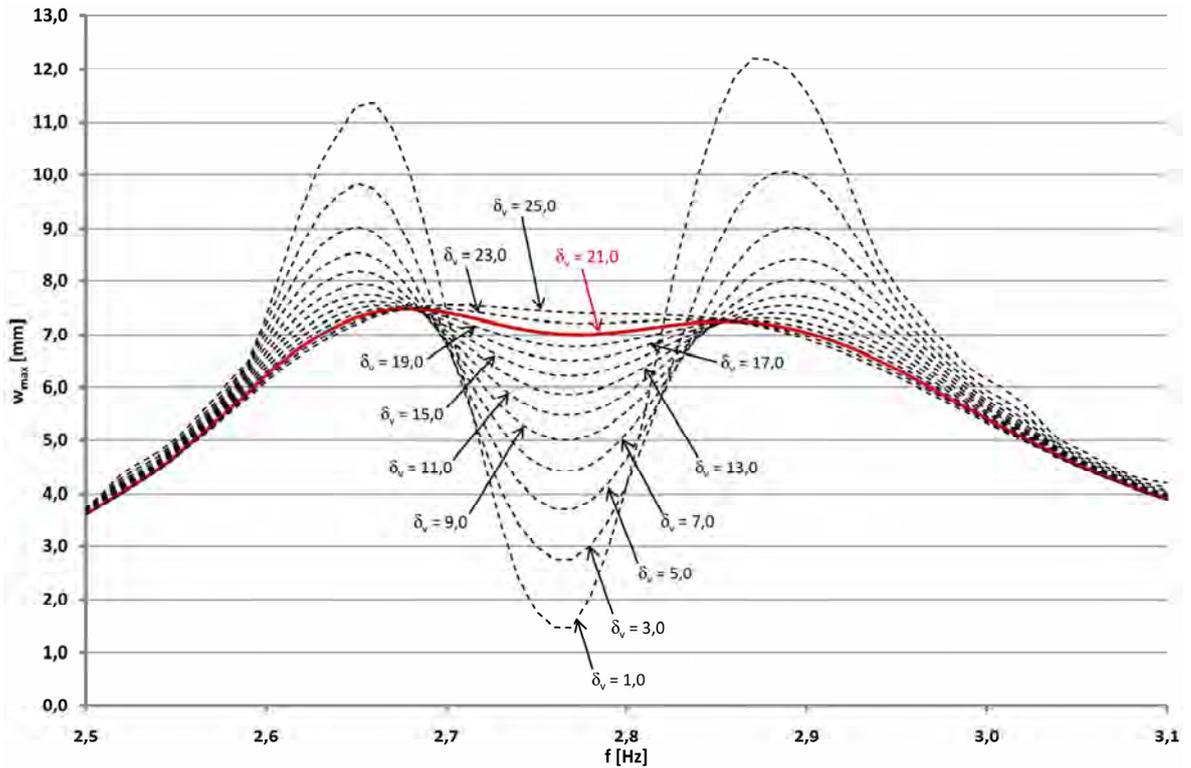


Abbildung 6.115: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen des Einmassenschwingers mit zwei Flüssigkeitsschwingungstilgern und Variation des turbulenten Verlustkoeffizienten δ_v

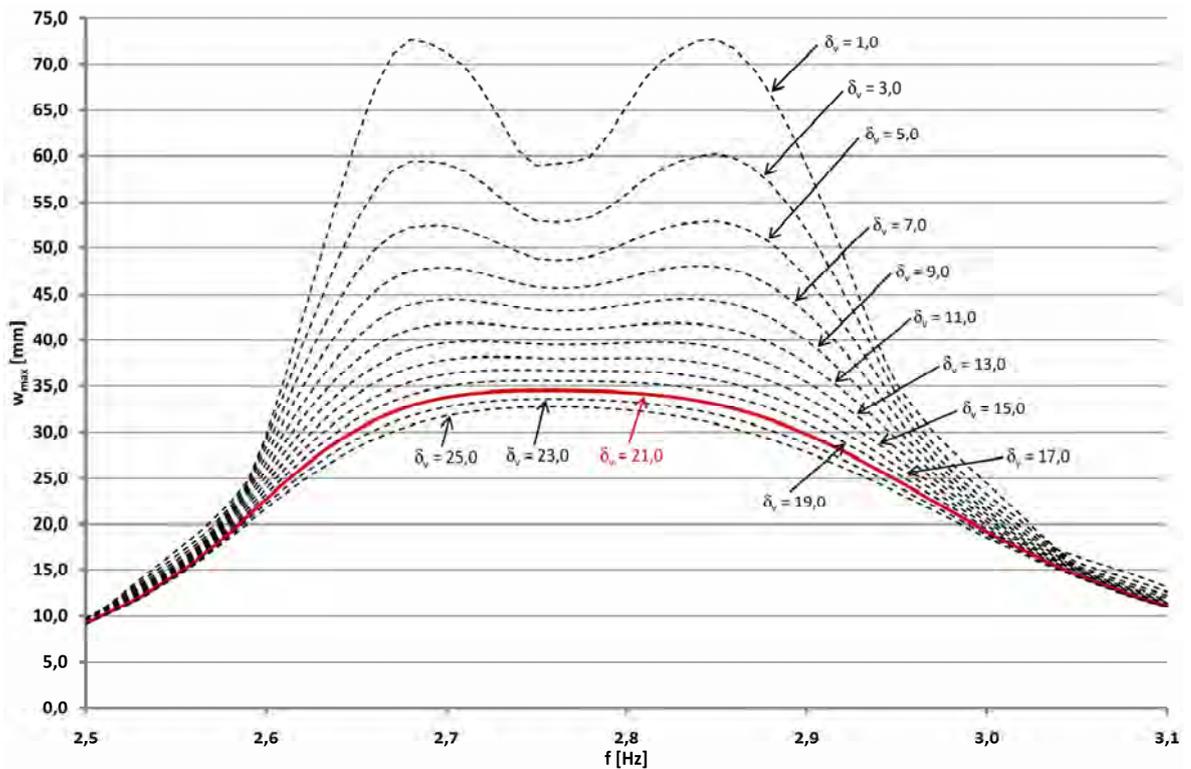


Abbildung 6.116: Amplitudenfrequenzgang der Flüssigkeitsspiegelbewegung bei Variation des turbulenten Verlustkoeffizienten δ_v

Des Weiteren erkennt man einen Plateaubereich der maximalen Flüssigkeitsspiegelbewegungen bei Vorhandensein eines turbulenten Verlustkoeffizienten im Bereich des optimalen Verlustkoeffizienten, was eine nahezu konstante maximale Flüssigkeitsspiegelbewegung im Bereich der Eigenfrequenz des Tragwerks ergibt.

Damit kann unter Voraussetzung von Resonanz, also

$$\frac{\omega}{\omega_a} = 1,0 \quad (6.54)$$

das äquivalente viskose Dämpfungsmaß für den Resonanzbereich nach Gl. (5.100) folgendermaßen ermittelt werden

$$\zeta_{equ} = \frac{1}{3H\pi} \delta_v u_0 = \frac{1}{3 \cdot 1,540 \cdot \pi} \cdot 21,0 \cdot 0,0345 \cdot 100 = 4,99 \% \quad (6.55)$$

Das optimale viskose Dämpfungsmaß lautet unter Berücksichtigung der Äquivalenzbeziehungen nach Gl. (5.223)

$$\begin{aligned} \zeta_{opt} &= \sqrt{\frac{3}{8} \frac{\kappa\mu(1+\mu)}{1+\mu(2+\kappa\mu-\kappa^2)}} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{8} \frac{0,5882 \cdot 0,0175(1+0,0175)}{1+0,0175(2+0,5882 \cdot 0,0175-0,5882^2)}} \cdot 100 = 6,17 \% \end{aligned} \quad (6.56)$$

Um einen Vergleich mit dem bei den Versuchen vorhandenen viskosen Dämpfungsmaß anstellen zu können, wird dieses unter Anwendung der Bandbreitenmethode (Kapitel 3.1.3.1) aus dem Amplitudenfrequenzgang des versuchstechnisch optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgers (Abbildung 6.93) ermittelt, wie nachfolgend gezeigt wird.

Mit Abbildung 6.117 folgen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 6,61 &= 4,67 \text{ mm} \\ f_a &= 2,73 \text{ Hz} \\ f_1 &= 2,93 \text{ Hz} \\ f_b &= 3,14 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (6.57)$$

Damit folgt für das viskose Dämpfungsmaß

$$\zeta = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_b - f_a}{f_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3,14 - 2,73}{2,93} \cdot 100 = 6,99 \% \quad (6.58)$$

Dabei ist zu beachten, dass bei der, mithilfe der Bandbreitenmethode ermittelten Dämpfung eine Ungenauigkeit von ca. $\pm 20\%$ berücksichtigt werden muss (Chopra, 2000).

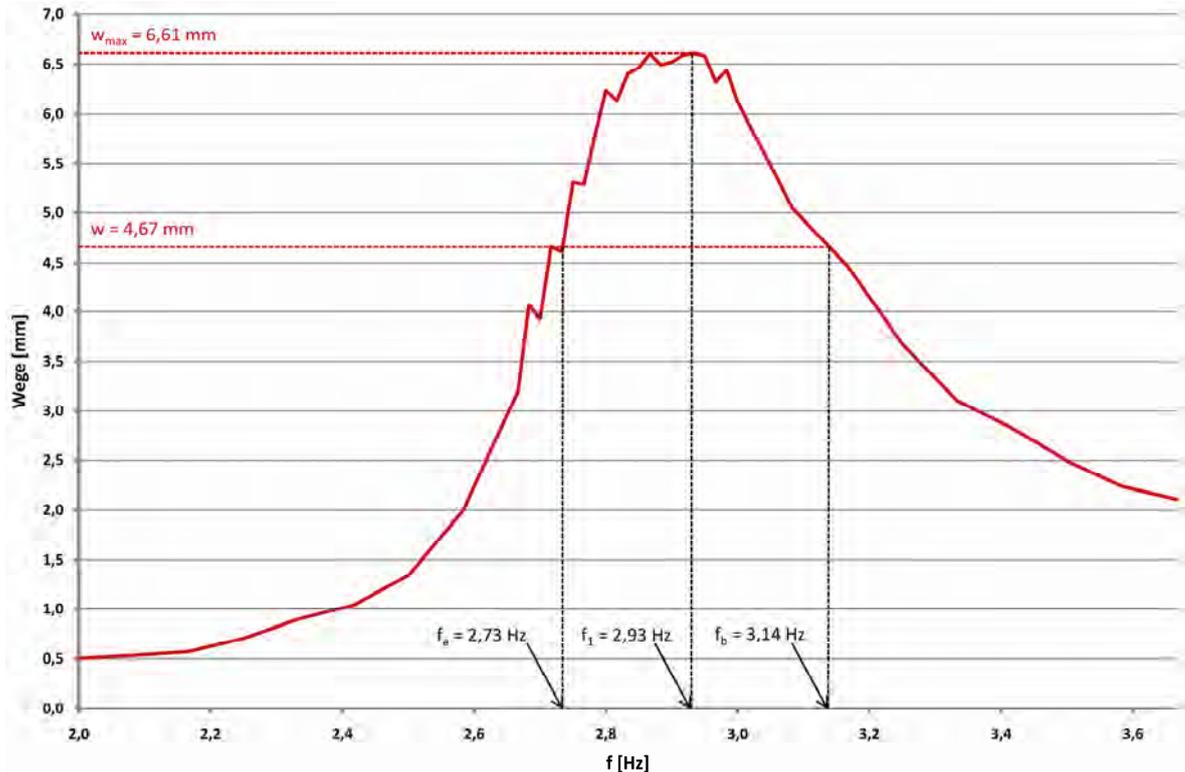


Abbildung 6.117: Amplitudenfrequenzgang mit versuchstechnisch optimal abgestimmter Tilgerkonfiguration unter Anwendung der Bandbreitenmethode

Vergleicht man die Ergebnisse der numerischen Berechnungen mit den Versuchsergebnissen ist ersichtlich, dass bei der Versuchsreihe 2 die Tilger mit Wasser als Tilgerflüssigkeit eine etwas zu große Dämpfung aufweisen, wobei an dieser Stelle auf die Messgenauigkeit der Versuchsergebnisse sowie auf die nur näherungsweise zulässige Anwendung der Bandbreitenmethode auf den Flüssigkeitsschwingstilger mit nichtlinearer Dämpfung hingewiesen werden soll. Ermittelt man sich aus dem gemessenen viskosen Dämpfungsmaß den turbulenten Verlustkoeffizienten δ_v , erhält man

$$\delta_v = \frac{3H\pi}{u_0} \zeta_{equ} = \frac{3 \cdot 1,540 \cdot \pi}{0,0345} \cdot 0,0699 = 29,41 \quad (6.59)$$

Betrachtet man mit diesem Ergebnis die Resonanzkurven aus Abbildung 6.115 und extrapoliert die Resonanzkurve mit dem turbulenten Verlustkoeffizienten $\delta_v = 25,0$, erkennt man, dass die gemessene viskose Dämpfung der im Versuch eingesetzten Flüssigkeitsschwingstilger durchaus noch im Bereich der optimalen turbulenten Dämpfungswerte zu liegen kommt. Dieses Ergebnis bestätigt die Ergebnisse der Versuchsreihe 1 und lässt wiederum den Schluss nahe, dass Flüssigkeiten mit ähnlich viskosem Verhalten wie jenes von Wasser optimal für den Einsatz in Flüssigkeitsschwingstilgern geeignet und aufwendige viskositätsverändernde Maßnahmen nicht erforderlich sind.

6.2.2.3. Untersuchungen zur Flüssigkeitsbewegung und zu den Druckverhältnissen

Neben dem gemessenen Überdruck in den Rohren der Flüssigkeitsschwingungstilger und den daraus rückgerechneten mittleren Flüssigkeitsspiegelbewegungen, werden zum Vergleich die Drücke sowie die Flüssigkeitsspiegelbewegungen in beiden Rohrenden numerisch ermittelt. Dabei kommt die in den vorhergehenden Kapiteln numerisch optimal abgestimmte Flüssigkeitsschwingungstilgerkonfiguration zum Einsatz. Die Bezeichnungen der numerisch ermittelten Größen sind in Anlehnung an die Bezeichnungen des Befüllungsvorganges aus Kapitel 5.1.1.2, wie nachfolgender Abbildung entnommen werden kann, gewählt worden.

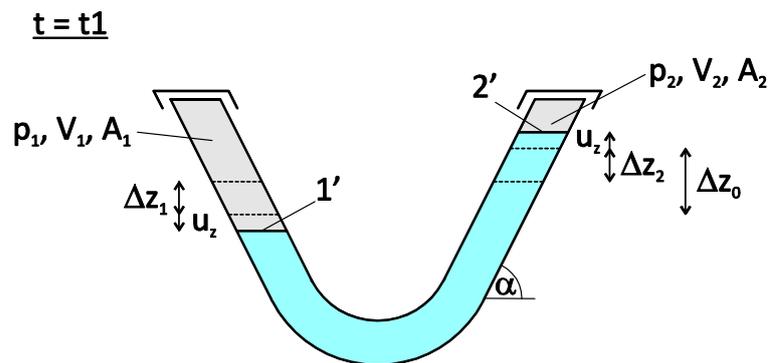


Abbildung 6.118: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_1$ mit der Flüssigkeitsspiegelauslenkung u (Fall 2)

Somit werden am Punkt 1' die Flüssigkeitsspiegelbewegung u_1 und der Druck p_1 sowie am Punkt 2' u_2 und p_2 ermittelt. Dabei gilt aufgrund der Annahme der Inkompressibilität der Flüssigkeit $u_1 = u_2$. Die Ergebnisse können den nachfolgenden Abbildungen entnommen werden. Darin sind neben der Flüssigkeitsspiegelbewegung die absoluten sowie die relativen Drücke der Luftvolumina abgebildet. Bei den relativen Drücken handelt es sich um jene, die den von den Drucksensoren direkt aufgezeichneten Drücken entsprechen, siehe Kapitel 6.2.1.3. Diese lassen sich aus den absoluten Drücken wie folgt ermitteln

$$\begin{aligned} \Delta p_1 &= p_1 - p_0 - \rho g \Delta z_0 \\ \Delta p_2 &= p_2 - p_0 \end{aligned} \tag{6.60}$$

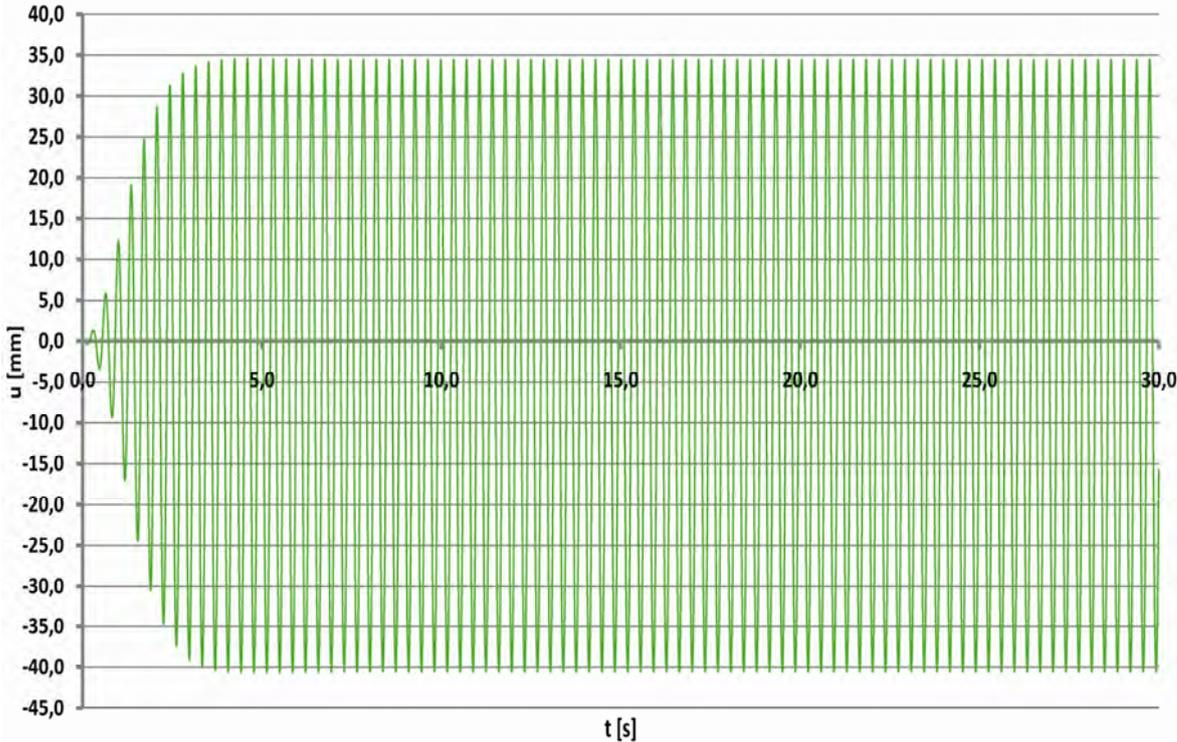


Abbildung 6.119: Flüssigkeitsspiegelbewegung $u_1 = u_2$ des numerisch optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgers [mm]

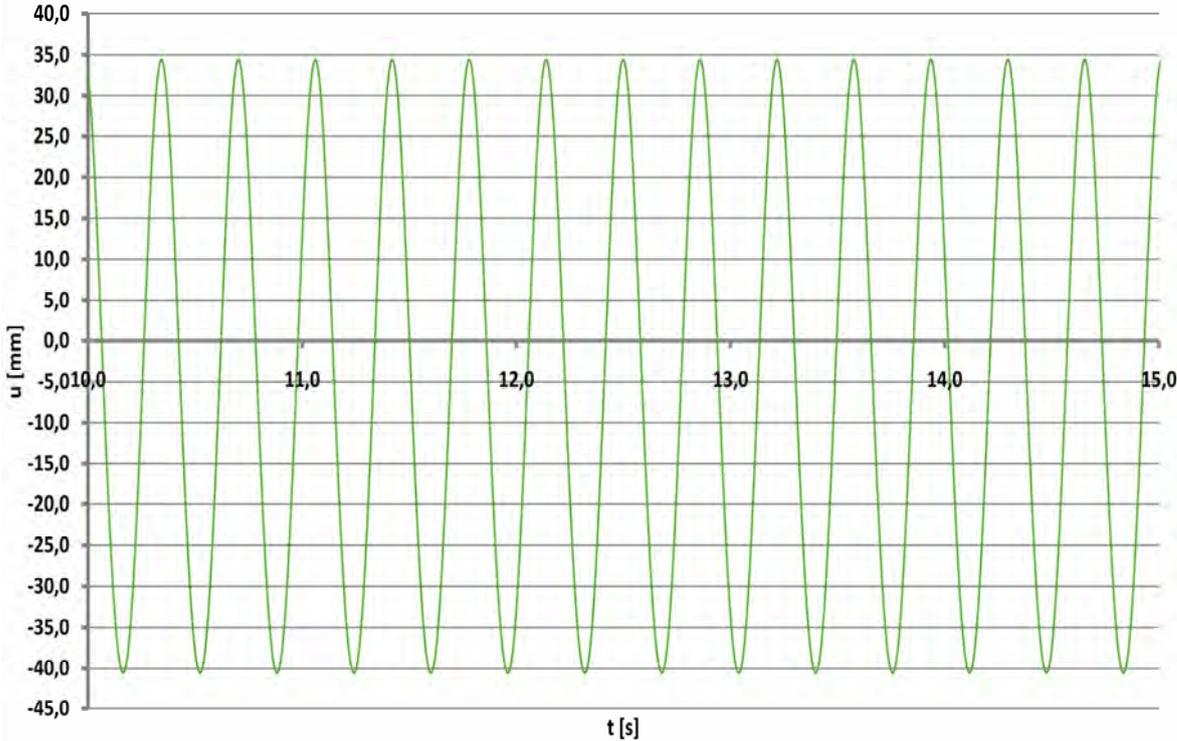


Abbildung 6.120: Flüssigkeitsspiegelbewegung $u_1 = u_2$ des numerisch optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgers (Ausschnitt) [mm]

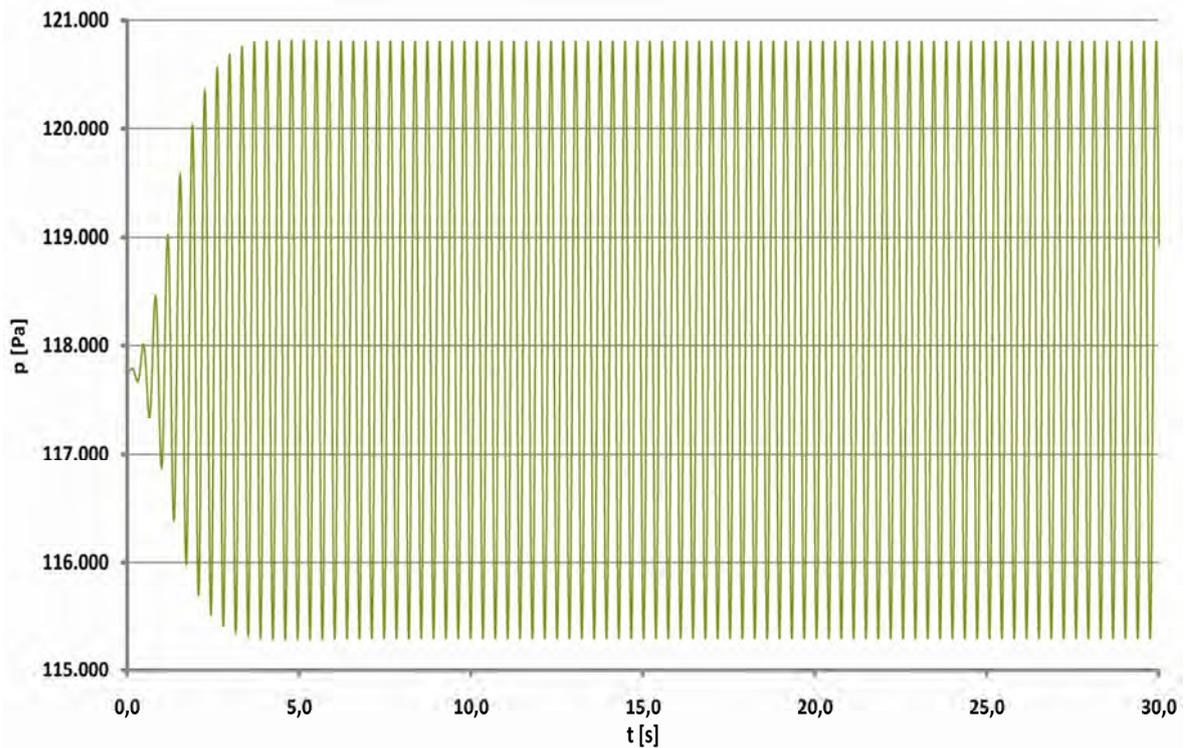


Abbildung 6.121: absoluter Druckverlauf p_1 im Rohrende bei Punkt 1' [Pa] = 10^{-5} [bar]

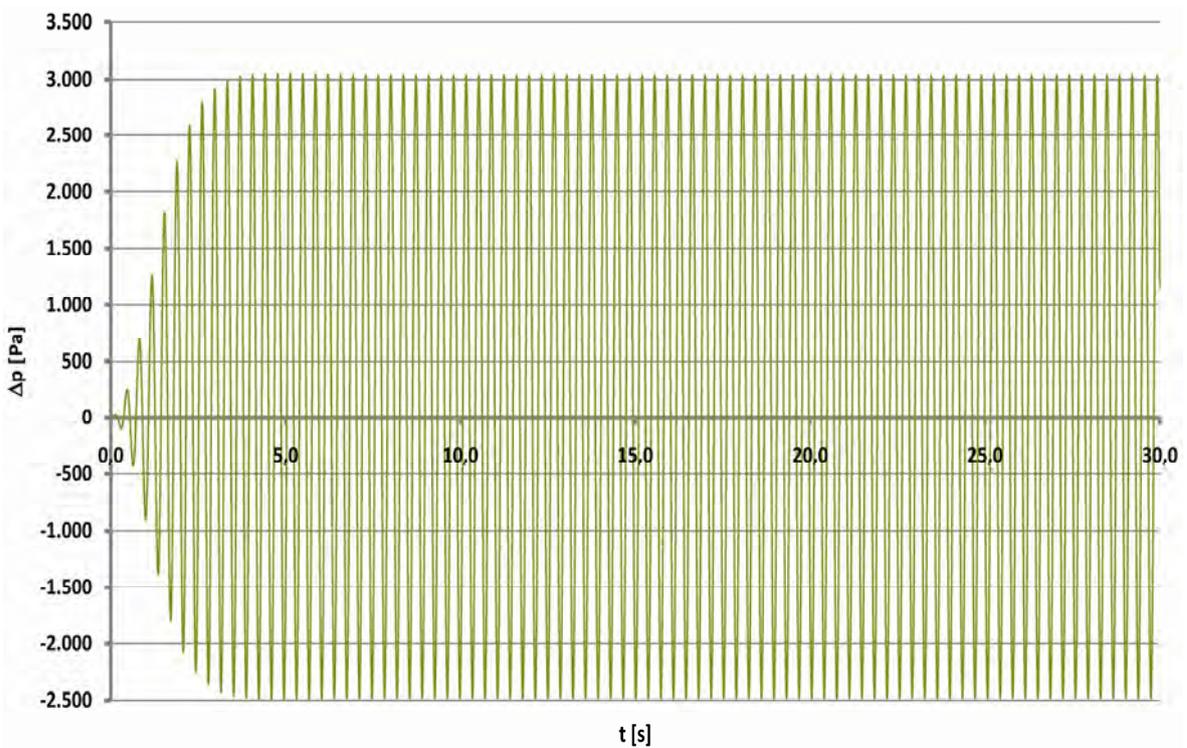


Abbildung 6.122: relativer Druckverlauf Δp_1 im Rohrende bei Punkt 1' [Pa] = 10^{-5} [bar]

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

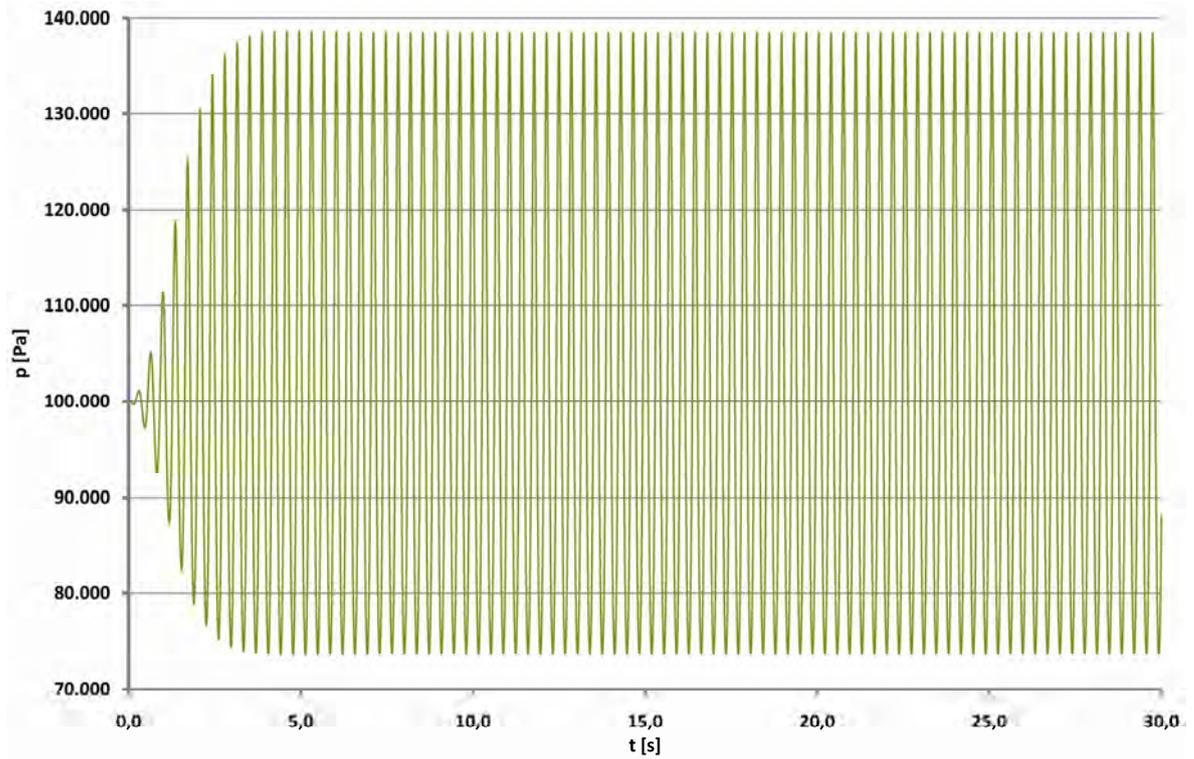


Abbildung 6.123: absoluter Druckverlauf p_2 im Rohrende bei Punkt 2' [Pa] = 10^5 [bar]

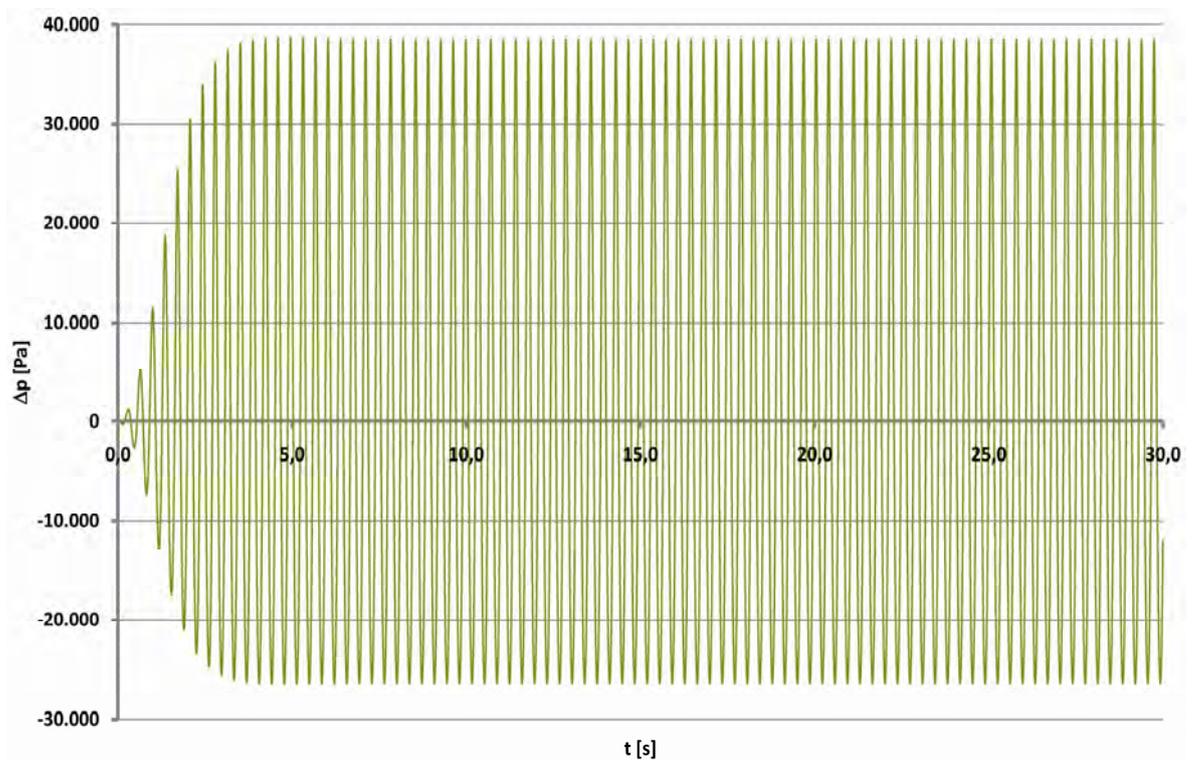


Abbildung 6.124: relativer Druckverlauf Δp_2 im Rohrende bei Punkt 2' [Pa] = 10^5 [bar]

In den Abbildungen der vorherrschenden Drücke ist dargestellt, dass der sich aus der Flüssigkeitsbewegung ergebende Überdruck im kleineren Ausgangsvolumen bei Punkt 2' viel größer als jener im größeren Luftvolumen bei Punkt 1' ist. Dabei ergeben sich die nachfolgend angeführten maximalen Drücke zu

$$\begin{aligned}\Delta p_{1,\max} &= 0,03 \text{ bar} \\ \Delta p_{2,\max} &= 0,39 \text{ bar}\end{aligned}\tag{6.61}$$

Die Ursache dieses doch recht großen Überdruckunterschiedes ist schnell gefunden. Beim Punkt 2' bewirkt eine Volumenveränderung durch eine Flüssigkeitsspiegelbewegung eine viel größere prozentuale Volumenzu- oder abnahme als beim Punkt 1'. Berücksichtigt man weiters die Nichtlinearität des Druckterms, ist die Ursache für den erheblich größeren Überdruck im kleineren Ausgangsluftvolumen gefunden. Auf diesen Zusammenhang wurde auch bereits in Kapitel 5.1.1 hingewiesen.

Vergleicht man die numerisch ermittelte Flüssigkeitsspiegelbewegung sowie die Druckverläufe mit den experimentell ermittelten aus Kapitel 6.2.1.3, lässt sich unter Berücksichtigung der in den Versuchen beobachteten, sehr stark unregelmäßigen Flüssigkeitsbewegung sowie der Messgenauigkeit der Drucksensoren eine gute Übereinstimmung in deren Amplituden erkennen.

$$\begin{aligned}u_{\max,\text{numerisch}} &= 34,54 \text{ mm} \\ u_{\max,\text{gemessen}} &= 25,0 - 30,0 \text{ mm}\end{aligned}\tag{6.62}$$

Aufgrund des starken Schwappens der Flüssigkeitsoberfläche ergeben sich die zeitlichen Verläufe der gemessenen Druckschwankungen sowie die daraus rechnerisch ermittelten Flüssigkeitsbewegungen weitaus unregelmäßiger als die numerisch ermittelten, die nach dem Einschwingvorgang eine annähernd harmonische Schwingung ausführen.

6.2.2.4. Einfluss des resultierenden Momentes

In Kapitel 5.2.2 konnte das durch die Flüssigkeitsbewegung in das Brückentragwerk einwirkende resultierende Moment hergeleitet werden. Diese lautet unter Beachtung des Reaktionsprinzips

$$M_A = -m_F (g - \ddot{w}) \left(\frac{\cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)} \Delta z_0 + u \cos(\alpha) \right)\tag{6.63}$$

Darin wurde die Rotationsträgheit der Rohrkonstruktion vernachlässigt, was in diesem Fall aufgrund der fehlenden planmäßigen Torsionsverdrehung zulässig ist. Bei der Versuchsreihe 2 wurden die Tilger im Gegensatz zur Versuchsreihe 1 sowie zum geplanten praktischen Einsatz der Tilger aus Platzgründen in Brückenquerrichtung orientiert. Das resultierende Moment wirkt bei normaler Tilgerorientierung, also in Brückenlängsrichtung, als zusätzliches Biegemoment für die Tragkonstruktion und es ist von Fall zu Fall zu überprüfen, ob dieses bei der Brückenbemessung berücksichtigt werden muss, im Regelfall sollte dies vernachlässigbar sein. Bei den Versuchen der Versuchsreihe 2 liefert das durch die Flüssigkeitsbewegung erzeugte Biegemoment jedoch ein Torsionsmoment, dass durch Umrechnung auf die zwei Hauptträger als Kräftepaar

eine zusätzliche Belastung dieser liefert. Dieser Effekt wird in diesem Kapitel numerisch untersucht, wobei die Geometrie aus Abbildung 6.125 zugrunde gelegt wurde.

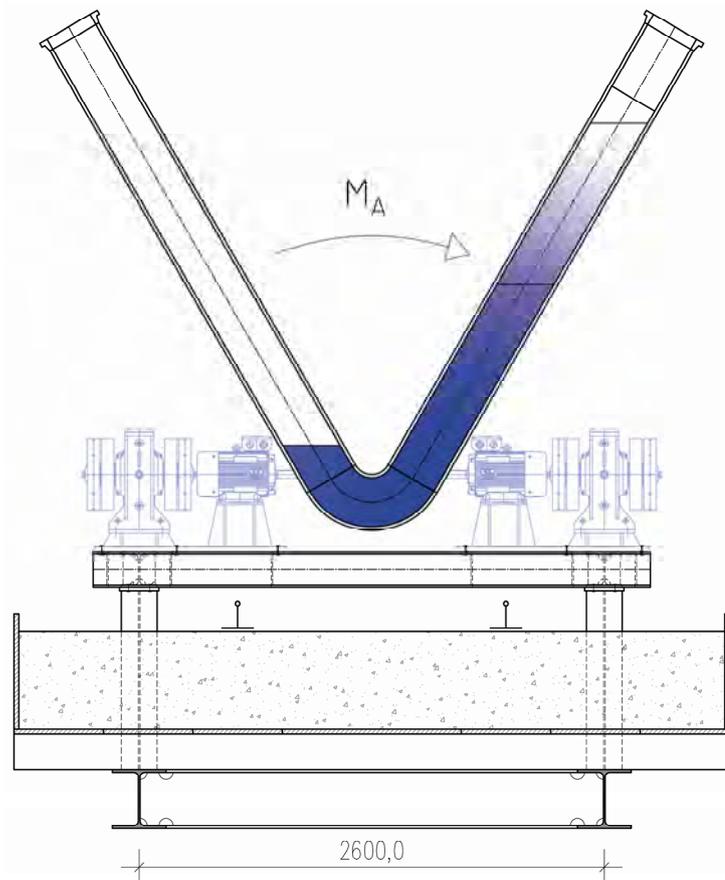


Abbildung 6.125: Skizze der Anordnung der Flüssigkeitsschwingungstilger bei der Versuchsreihe 2 mit Darstellung des durch die Flüssigkeitsbewegung erzeugten Momentes

Nachfolgend ist das auf das Brückentragwerk einwirkende resultierende Torsionsmoment des numerisch optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgers dargestellt. Dabei kann Gl. (6.63) entnommen werden, dass dieses aus zwei Anteilen besteht. Der erste Anteil resultiert aus der Erdbeschleunigung g , ist jedoch aufgrund des sich durch die Flüssigkeitsbewegung ständig ändernden Masseschwerpunktes zeitlich veränderlich, der zweite Term ergibt sich durch die zusätzliche Brückenbewegung. Die einzelnen Anteile des Momentes sind ebenfalls in den nachfolgenden Abbildungen angeführt. Darin ist ersichtlich, dass der Großteil des Momentes durch die Brückenbewegung erzeugt wird. Die Amplituden der einzelnen Anteile lauten

$$\begin{aligned}\hat{M}_{Ag} &= 33,45 \text{ Nm} \\ \hat{M}_{Aw} &= 202,78 \text{ Nm}\end{aligned}\tag{6.64}$$

Das betragsmäßig größte Moment beträgt

$$M_{A,\max} = 1132,0 \text{ Nm}\tag{6.65}$$

und besitzt damit gegenüber den Momenten bei üblichen Brückenkonstruktionen eine vernachlässigbare Größenordnung.

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

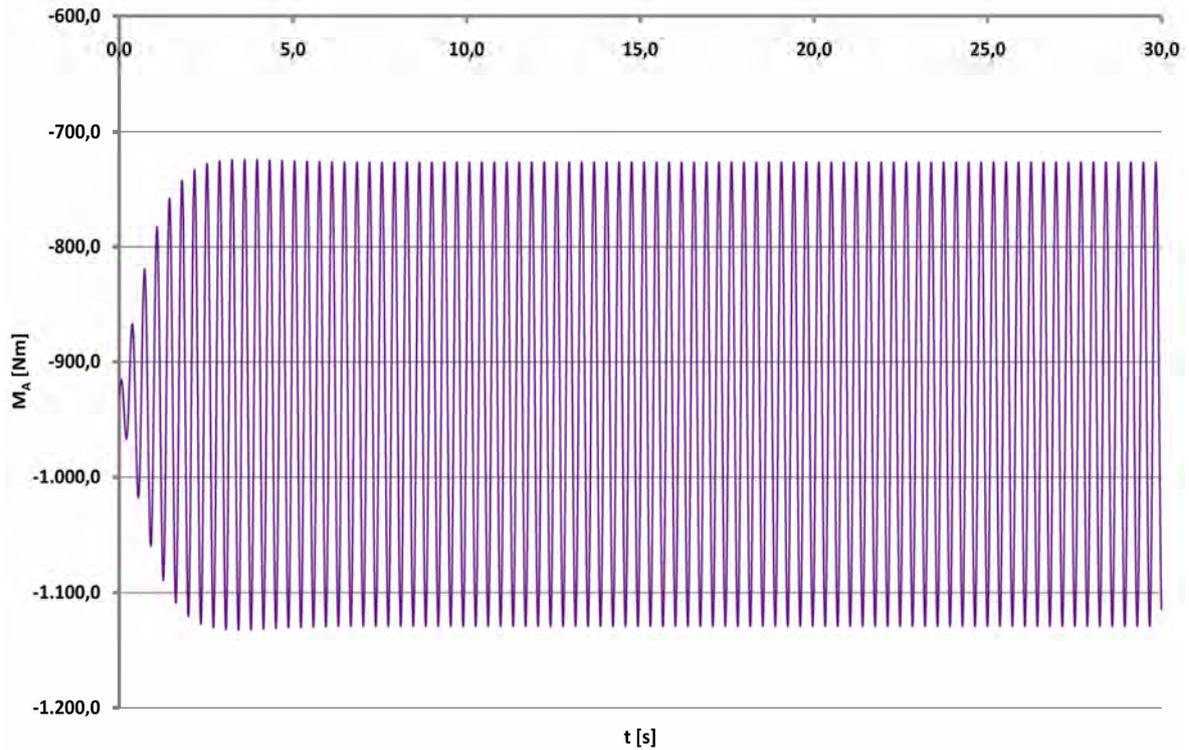


Abbildung 6.126: auf das Brückentragwerk durch die Flüssigkeitsbewegung eines Tilgers einwirkendes Moment M_A [Nm]

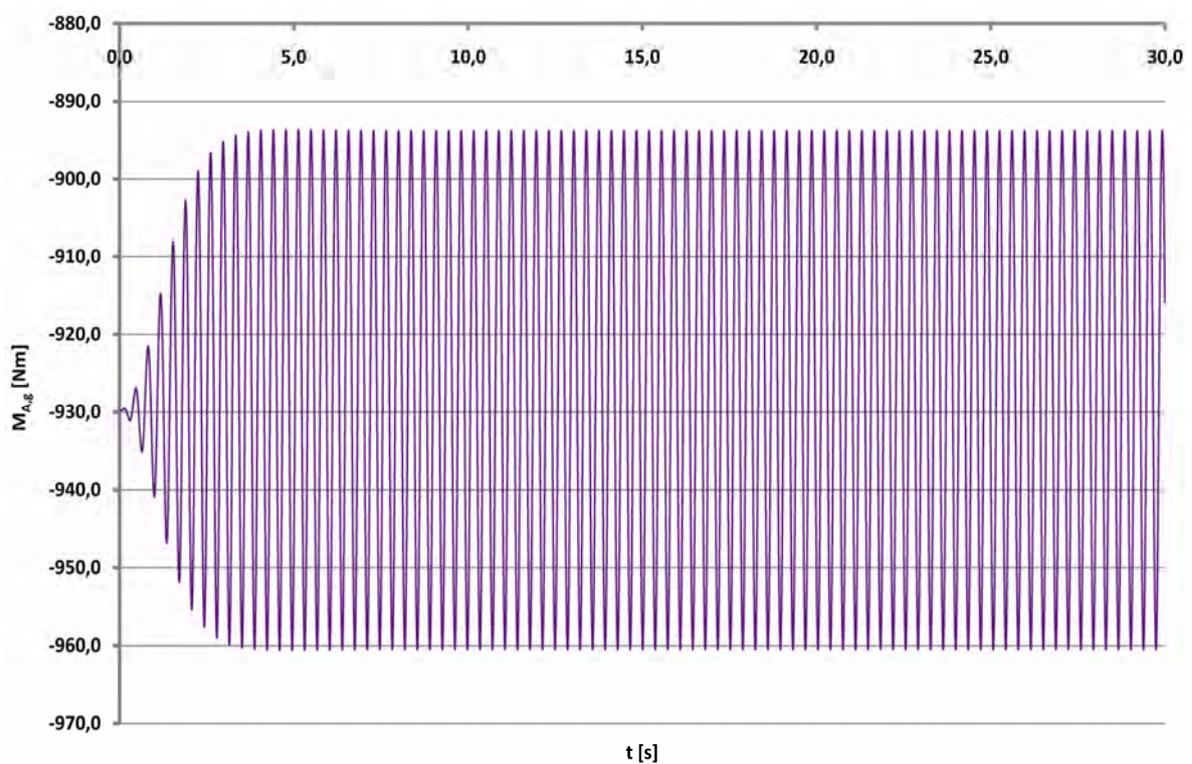


Abbildung 6.127: auf das Brückentragwerk durch die Flüssigkeitsbewegung eines Tilgers einwirkendes Moment M_{Ag} resultierend aus der Erdbeschleunigung [Nm]

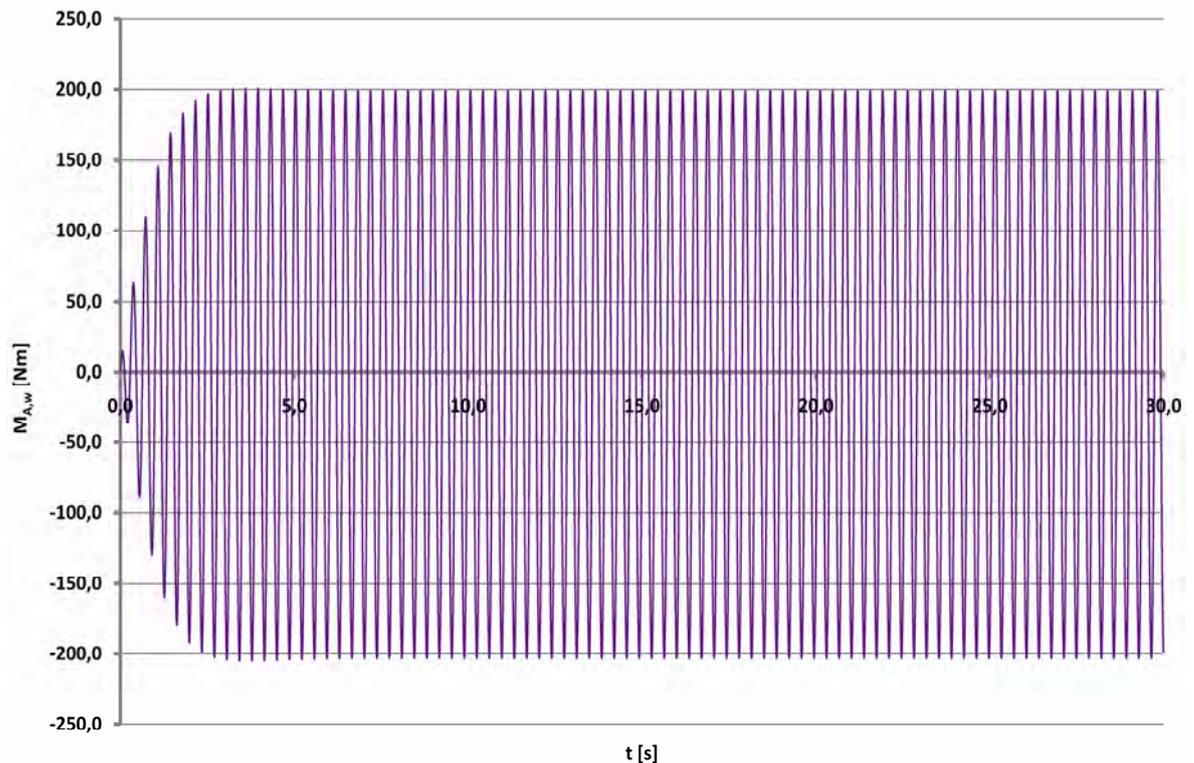


Abbildung 6.128: auf das Brückentragwerk durch die Flüssigkeitsbewegung eines Tilgers einwirkendes Moment M_{Aw} resultierend aus der Brückenbewegung [Nm]

Nach numerischer Ermittlung des Moments lässt sich das daraus resultierende und auf die Hauptträger einwirkende Kräftepaar wie folgt ermitteln

$$F_{z,A} = \frac{M_A}{2,60} \tag{6.66}$$

$$F_{z,B} = -\frac{M_A}{2,60}$$

Interessant ist der nachfolgend angeführte Vergleich des sich aus dem Moment ergebenden Kräftepaars mit der einwirkenden Kraft der Unwuchterreger auf das Tragwerk. Dabei wird die aus dem Moment resultierende vertikale Kraft nach Gl. (6.66) unter Berücksichtigung von 2 Flüssigkeitsschwingungstilgern der einwirkenden Kraft eines Unwuchterregers mit den Drittelscheiben (alle Unbalancen ausgebaut) gegenübergestellt. Das sich aus dem Gewicht ergebende Kräftepaar blieb dabei unberücksichtigt, da nur die dynamischen Kräfte gegenübergestellt werden sollen.

6. Versuchstechnische Untersuchungen zu den Flüssigkeitsschwingungstilgern

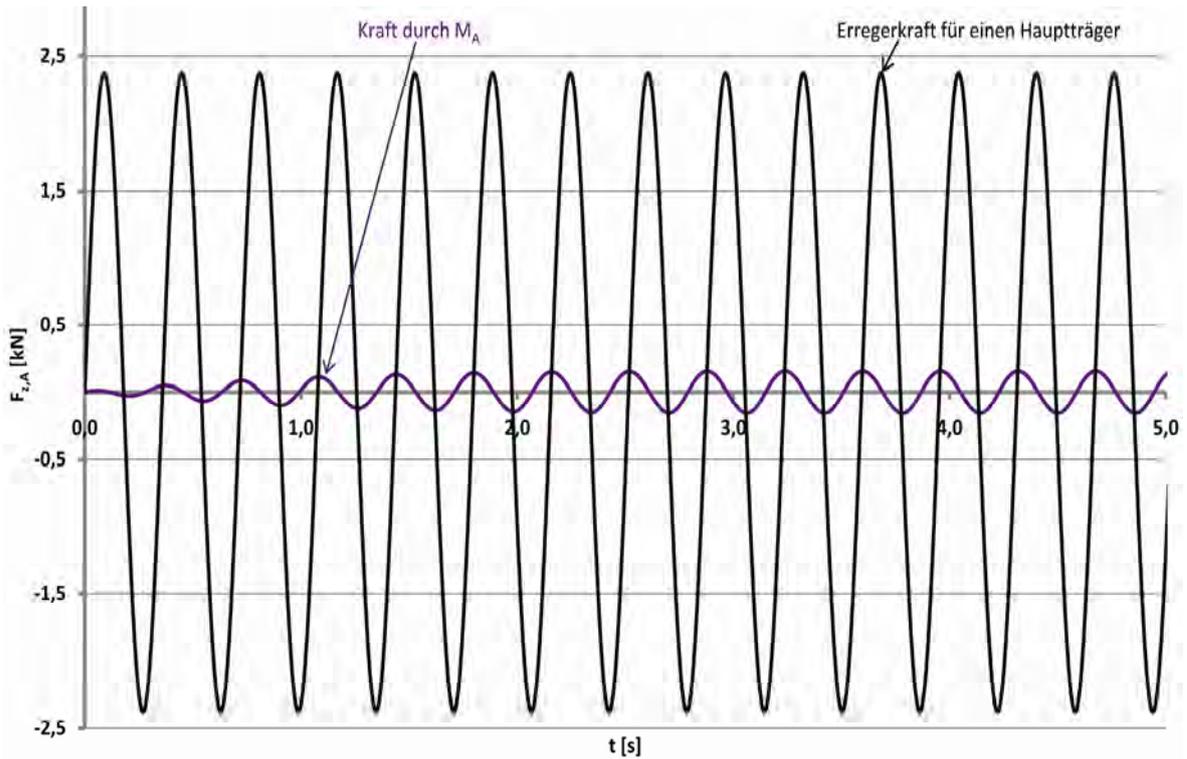


Abbildung 6.129: Gegenüberstellung der durch das Tilgermoment induzierten Kraft mit der Unwucherterregung des Hauptträgers A

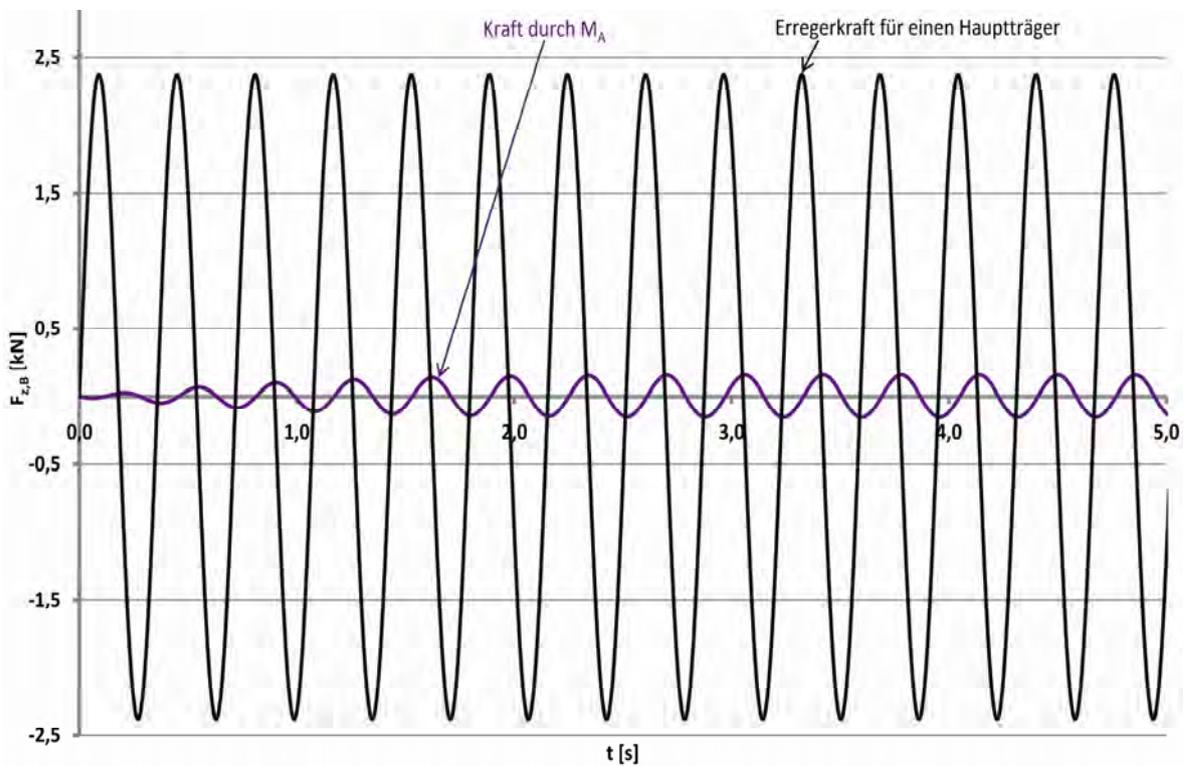


Abbildung 6.130: Gegenüberstellung der durch das Tilgermoment induzierten Kraft mit der Unwucherterregung des Hauptträgers B

Der Gegenüberstellung der Kräfte, die sich einerseits durch die Unwuchterregung andererseits durch das durch die Flüssigkeitsbewegung erzeugte Moment ergeben, liefern folgende Maximalwerte

$$\begin{aligned} F_{z,M_A,\max} &= 0,158 \text{ kN} \\ F_{z,Erregung,\max} &= 2,376 \text{ kN} \end{aligned} \tag{6.67}$$

Damit beträgt die durch das Moment erzeugte Kraft lediglich 6,65 % der einwirkenden Kraft. Berücksichtigt man weiters, dass die beiden Kräfte fast exakt um 90° phasenverschoben sind, dass heißt bei Erreichen des Maximums der Erregerkraft ist die durch das Moment erzeugte Kraft nahezu null, kann die Auswirkung des auftretenden Moments vernachlässigt werden. Dies wird durch die Versuche aus Kapitel 6.2.1 bestätigt, da in diesen im Bereich der Messgenauigkeit der Wegaufnehmer keine unterschiedliche Bewegung der beiden Hauptträger beobachtet werden konnte. In diesem Kapitel konnte somit der Effekt des auftretenden Moments sowie seine Auswirkungen aufgezeigt werden. Für die geplante Anordnung der Tilger in Richtung der Hauptträger kann dieses, wie vorgeführt wurde, vernachlässigt werden. Selbst bei Anordnung in Querrichtung ist der Effekt vernachlässigbar wie ebenfalls gezeigt werden konnte.

7. Anwendung der Flüssigkeitsschwingungtilger am Beispiel einer realen Verbundbrücke

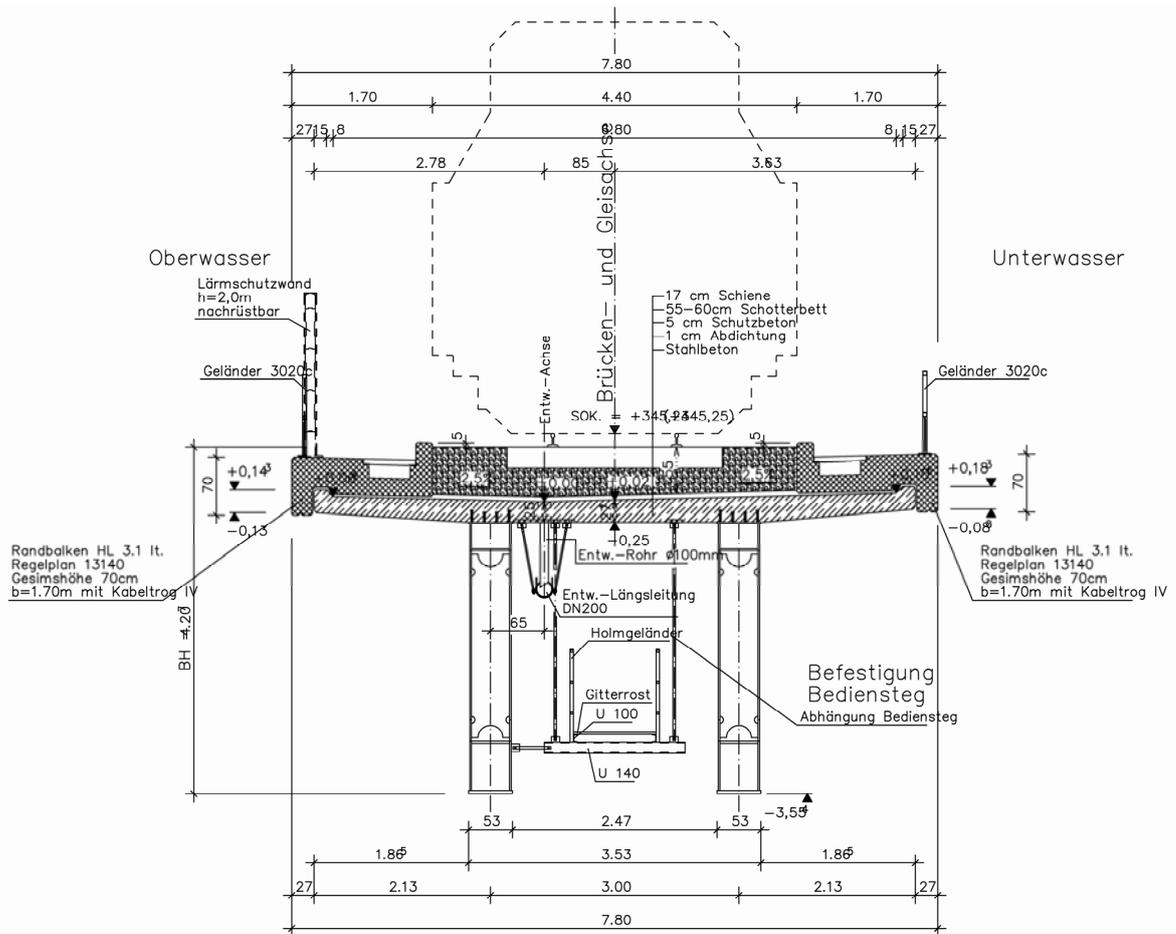


Abbildung 7.2: Regelquerschnitt der Mühlheimer Achsbrücke (Aigner, 2008)

Die Regelquerschnitte der Obergurte, Untergurte und Diagonalen der Stahlfachwerkhauptträger können den nachfolgenden Abbildungen entnommen werden. Die realen Blechdicken werden dabei über die Tragwerkslänge geringfügig variiert, was jedoch bei den nachfolgenden Berechnungen unberücksichtigt blieb. Wie der zugehörigen Statik entnommen werden kann, wirkt die Stahlbetonplatte für globale Tragwerksberechnungen, also Durchbiegungsberechnungen und globale Schnittgrößenermittlung, voll mit, Schubdeformationen aus der Scheibenbeanspruchung können somit vernachlässigt werden.

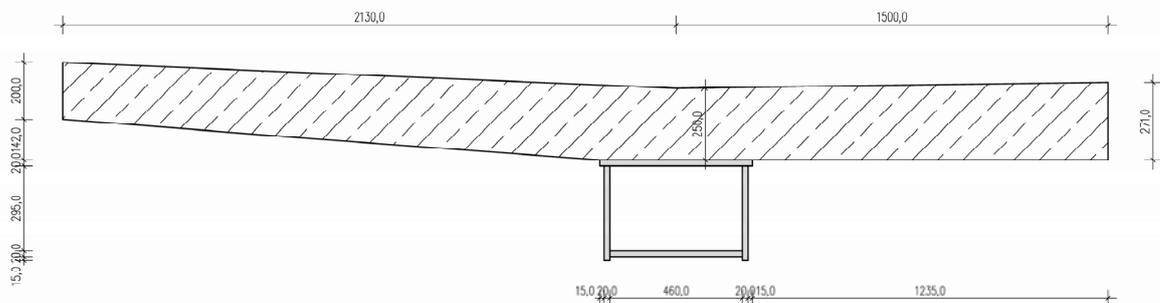


Abbildung 7.3: Obergurt eines Fachwerkhauptträgers samt (idealisierter) mitwirkender Stahlbetonplatte

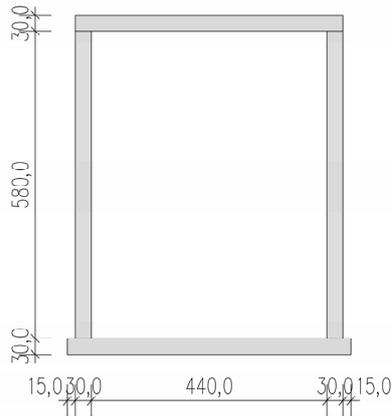


Abbildung 7.4: Untergurt eines Fachwerkhauptträgers

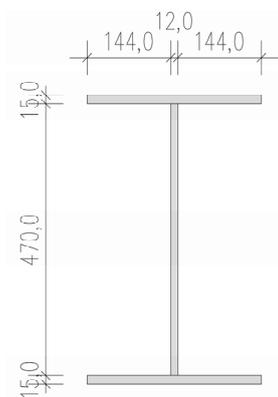


Abbildung 7.5: Fachwerkdiagonale

7.1.2. Dynamische Eigenschaften des Tragwerks

Die wichtigsten dynamischen Eigenschaften der Verbundbrücke zur Auslegung der Flüssigkeitsschwingungstilger sind deren erste Eigenfrequenz sowie die zugehörige modale Masse. Ein weiterer wichtiger Parameter ist die Dämpfung, die jedoch nur auf dem Versuchswege bestimmt werden kann. Da sich das Tragwerk noch in der Planungsphase befindet, konnte nur auf dementsprechende Erfahrungswerte zurückgegriffen werden, wobei ein unterer Grenzwert für die Dämpfung des Tragwerks angesetzt wurde. Richtwerte für das viskose Dämpfungsmaß für Stahl- und Stahlbetonbrücken gibt zum Beispiel der Eurocode (B 1990-1, 2004). Nachfolgend ist die Ermittlung der dynamischen Eigenschaften der Mühlheimer Achbrücke angeführt.

Die Ermittlung der ersten Eigenfrequenz des Tragwerks wurde auf zwei Arten durchgeführt. Zuerst wurde ein Hauptträger des Tragwerks mittels der Finiten Elemente Programms Sofistik (Sofistik, 2008) modelliert und EDV- gestützt die zugehörige erste Eigenfrequenz ermittelt. Dabei wurde das Eigengewicht der Struktur automatisch vom Programm berücksichtigt, die Summe der Aufbaulasten, bestehend aus Schotterbett, Abdichtung, Schutzbeton, Ausgleichsbeton, Randbalken, Schienen, Schienenbefestigungen, Schwellen, Geländer und Lärmschutzwänden beträgt laut Regelstatik (Aigner, 2008)

7. Anwendung der Flüssigkeitsschwingtilger am Beispiel einer realen Verbundbrücke

$$g_2 = 60,57 \text{ kN / m} \quad (7.1)$$

pro Hauptträger. Nachfolgend sind das statische System, die Aufbaulasten sowie die erste dynamische Eigenform dargestellt. Dabei konnte die zugehörige erste Eigenfrequenz zu

$$f_{1,FEM} = 2,27 \text{ Hz} \quad (7.2)$$

bestimmt werden.

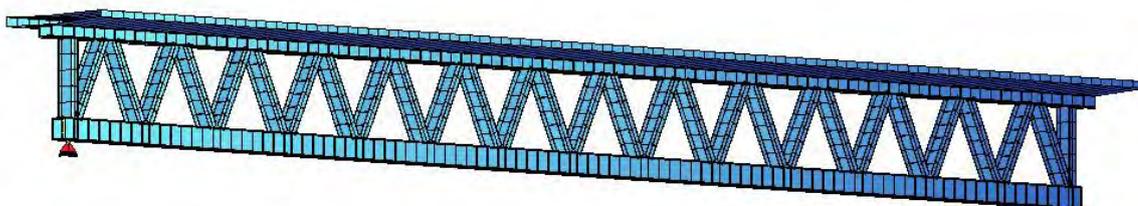


Abbildung 7.6: statisches System eines Hauptträgers der Stahlverbundbrücke

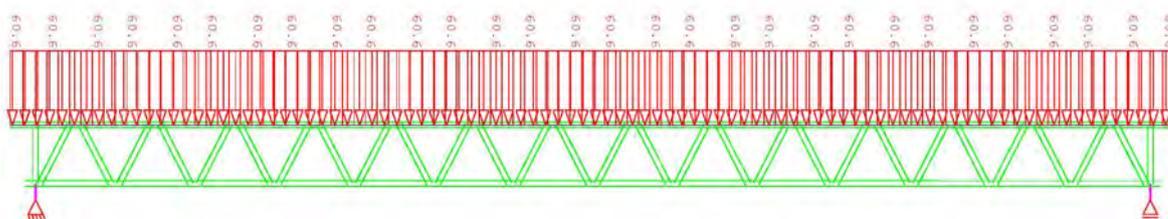


Abbildung 7.7: Aufbaulasten [kN/m]

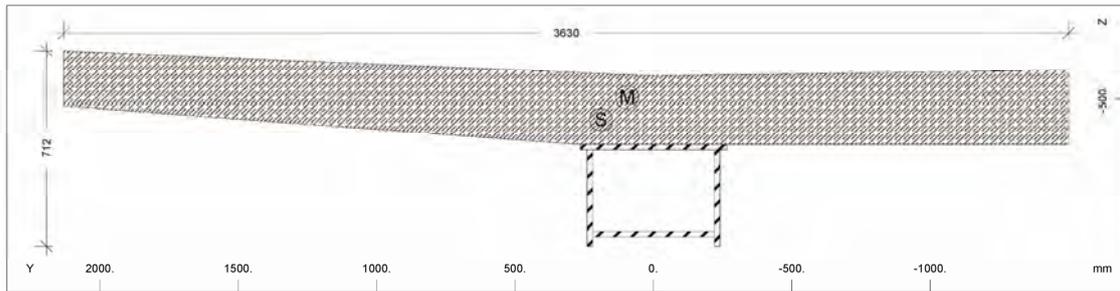


Abbildung 7.8: 1. Eigenform (Biegeeigenform mit 2,27 Hz)

Zur Überprüfung der zuvor ermittelten Eigenfrequenz wurde eine Berechnung mittels idealisiertem und statisch bestimmt gelagertem Biegeträger, unter Vernachlässigung der Schubweichheit des Fachwerks, durchgeführt. Die dafür erforderliche Biegesteifigkeit wird unter Berücksichtigung der EDV- technisch ermittelten Teilquerschnittswerte der Ober- und Untergurte, wie nachfolgend dargestellt, ermittelt.

7. Anwendung der Flüssigkeitsschwingungstilger am Beispiel einer realen Verbundbrücke

Querschnitt Nr. 1 - OBERGURT

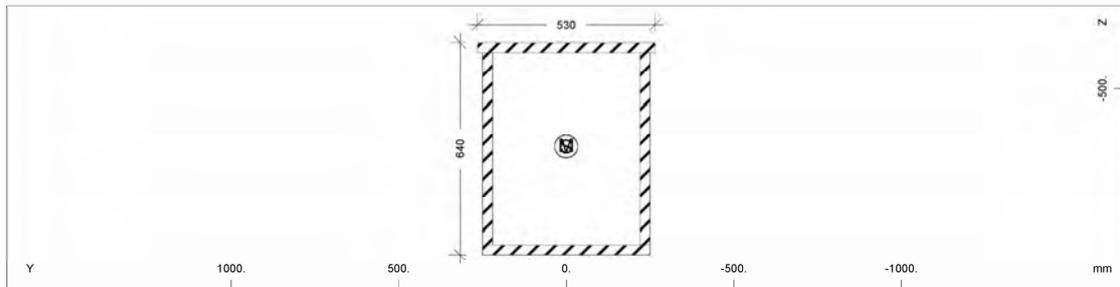


Querschnittswerte

Mat	A[cm ²]	Ay/Az/Ayz	Iy/Iz/Iyz	ys/zs	y/z-smp	E/G-Modul	gam
MBw	It[cm ⁴]	[cm ²]	[cm ⁴]	[mm]	[mm]	[N/mm ²]	[kN/m]
1	1685.79		434630.0	189.0	95.0	210000	24.84
	1208662.2		14715017.	-426.4	-506.7	80769	

Abbildung 7.9: Fläche, Trägheitsmoment und Schwerpunktabstände zum Bezugspunkt des Obergurtes des Fachwerkträgers

Querschnitt Nr. 2 - UNTERGURT

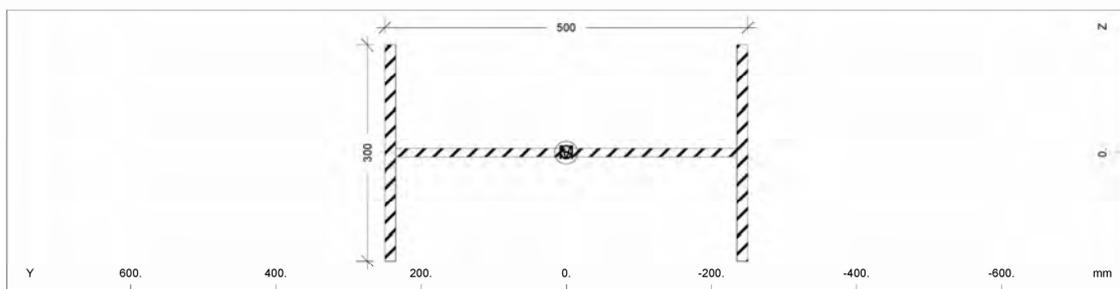


Querschnittswerte

Mat	A[cm ²]	Ay/Az/Ayz	Iy/Iz/Iyz	ys/zs	y/z-smp	E/G-Modul	gam
MBw	It[cm ⁴]	[cm ²]	[cm ⁴]	[mm]	[mm]	[N/mm ²]	[kN/m]
1	657.00		385120.2	0.0	0.0	210000	5.16
	2020.0		260913.2	-324.2	-327.0	80769	

Abbildung 7.10: Fläche, Trägheitsmoment und Schwerpunktabstände zum Bezugspunkt des Untergurtes des Fachwerkträgers

Querschnitt Nr. 3 - DIAGONALE



Querschnittswerte

Mat	A[cm ²]	Ay/Az/Ayz	Iy/Iz/Iyz	ys/zs	y/z-smp	E/G-Modul	gam
MBw	It[cm ⁴]	[cm ²]	[cm ⁴]	[mm]	[mm]	[N/mm ²]	[kN/m]
1	146.40		6756.8	0.0	0.0	210000	1.15
	94.3		63324.8	0.0	0.0	80769	

Abbildung 7.11: Fläche, Trägheitsmoment und Schwerpunktabstände zum Bezugspunkt der Diagonalen des Fachwerkträgers

Mit dem Hebelsarm der beiden Gurte, wie in Abbildung 7.12 dargestellt,

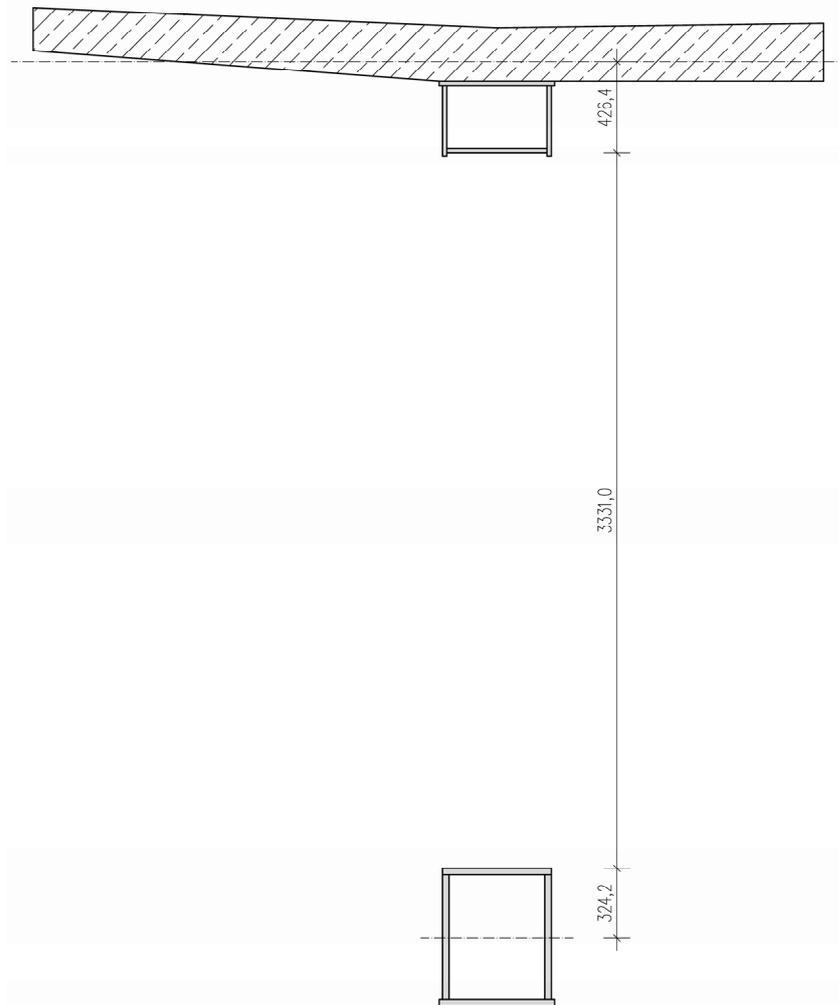


Abbildung 7.12: Querschnitt für die Ermittlung der Biegesteifigkeit

ergibt sich der Schwerpunkt des idealisierten Biegeträgers bezogen auf den Schwerpunkt des Obergurtes zu

$$z_s = \frac{657,00 \cdot 308,16}{657,00 + 1685,79} = 86,42 \text{ cm} \quad (7.3)$$

sowie das zugehörige Trägheitsmoment um die Y-Achse zu

$$\begin{aligned} A_{zz} &= 434630,00 + 385120,20 + 1685,79 \cdot 86,42^2 + 657,00 \cdot 221,74^2 = \\ &= 45.713.720,00 \text{ cm}^4 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Das Eigengewicht der Konstruktion wird aus den Auflagerkräften der Finiten Elemente Berechnung ermittelt, siehe Abbildung 7.13.

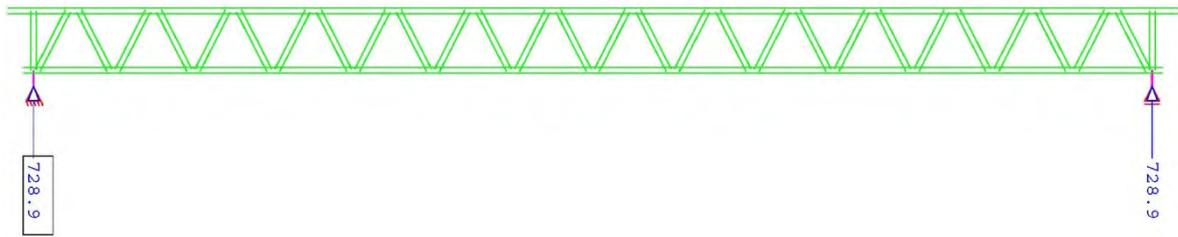


Abbildung 7.13: Auflagerkräfte des Lastfalls Struktureigengewicht

Mit der Stützweite des Tragwerks von

$$l_{St} = 43,82 \text{ m}, \quad (7.5)$$

der Gesamtbelastung durch Struktureigengewicht und Aufbaulasten von

$$g_{ges} = \frac{2 \cdot 728,90}{43,82 \cdot 9,81} \cdot 1000 + \frac{60,57}{9,81} \cdot 1000 = 9565,54 \text{ kg / m} \quad (7.6)$$

sowie der Biegesteifigkeit um die Y-Achse von

$$EA_{zz} = \frac{45.713.720,00}{10000 \cdot 10000} \cdot 210.000 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 = 95.998.812.000 \text{ Nm}^2 \quad (7.7)$$

ergibt sich die Abschätzung der ersten Eigenfrequenz (siehe Kapitel 2.2.9) zu

$$f_{1,Biegetr.} = \frac{\pi}{2} \cdot 43,28^2 \sqrt{\frac{95.998.812.000}{9565,54}} = 2,59 \text{ Hz} \quad (7.8)$$

Berücksichtigt man dabei, dass die Masse des Fachwerks dafür gleichmäßig über die Tragwerkslänge verteilt, sowie die Schubnachgiebigkeit des Fachwerkträgers vernachlässigt wurde, stimmen die Ergebnisse für die erste Biegeeigenfrequenz aus Gl (7.2) und (7.8) sehr gut überein. Für die weiteren Berechnungen werden die nachfolgenden dynamischen Parameter des Brückentragwerks

$$\begin{aligned} f_1 &= 2,27 \text{ Hz} \\ m^* &= \frac{9565,54 \cdot 43,82}{2} = 209.559,07 \text{ kg} \\ \zeta &= 0,01 \end{aligned} \quad (7.9)$$

angesetzt, wobei die modale Masse nach Kapitel 2.2.9.4 ermittelt wurde.

7.2. Tilgerbemessung

Müssen Flüssigkeitsschwingungstilger in eine vorhandene Tragwerksstruktur eingegliedert werden und ist dadurch die Geometrie der Tilger größtenteils durch die Abmessungen des Tragwerks vorgegeben, wie es im vorliegenden Beispiel der Fall ist, muss im ersten Schritt der Tilgerbemessung das dadurch vorgegebene maximal mögliche Volumen pro Tilger ermittelt werden. Die Tilger werden dabei als in den Diagonalen der Fachwerkhauptträger angeordnet angenommen. Aufgrund der geplanten offenen Profile dieser, müssen jedoch jene Diagonalen, die als Tilger ausgebildet werden sollen, als

7. Anwendung der Flüssigkeitsschwingungstilger am Beispiel einer realen Verbundbrücke

Hohlprofile ausgeführt werden, wie den nachfolgenden Abbildungen entnommen werden kann. Als Querschnitt wird dabei ein quadratischer Hohlquerschnitt mit 470,0 mm Seitenlänge gewählt. Dies ergibt eine Querschnittsfläche für die Flüssigkeitsschwingungstilger von

$$A_F = 0,47 \cdot 0,47 = 0,22 \text{ m}^2 \quad (7.10)$$

Wie in Kapitel 2.2.8.3 gezeigt wurde, ist ein Masseverhältnis μ von 1 – 5 % für eine optimale Wirkung der Flüssigkeitsschwingungstilger anzustreben, für den vorliegenden Fall werden 1,55 % als Masseverhältnis angenommen. Die Wahl des Masseverhältnisses ist nicht völlig willkürlich, da diese einerseits vom Platzangebot sowie von den vorhandenen Geometrieverhältnissen abhängt, andererseits mit den Tilgerparametern H , H_L , Δz_0 und $H_{ges,vor}$ zur Einstellung einer optimalen ersten Eigenfrequenz abgestimmt werden muss. Es handelt sich damit um einen iterativen Vorgang. Unter der Annahme von fünf Tilgern pro Hauptträger ergibt sich eine erforderliche Flüssigkeitsmasse pro Tilger von

$$m_F = \frac{0,0155 \cdot 209.559,07}{5} = 649,63 \text{ kg} \quad (7.11)$$

Kommt als Flüssigkeit Wasser zur Anwendung, folgt das erforderliche Volumen pro Tilger mit

$$V_{F,erf} = \frac{649,63}{1000,0} = 0,650 \text{ m}^3 \quad (7.12)$$

sowie die erforderliche Stromfadenlänge $2H$ mit

$$(2H)_{erf} = \frac{0,650}{0,22} = 2,945 \text{ m} \quad (7.13)$$

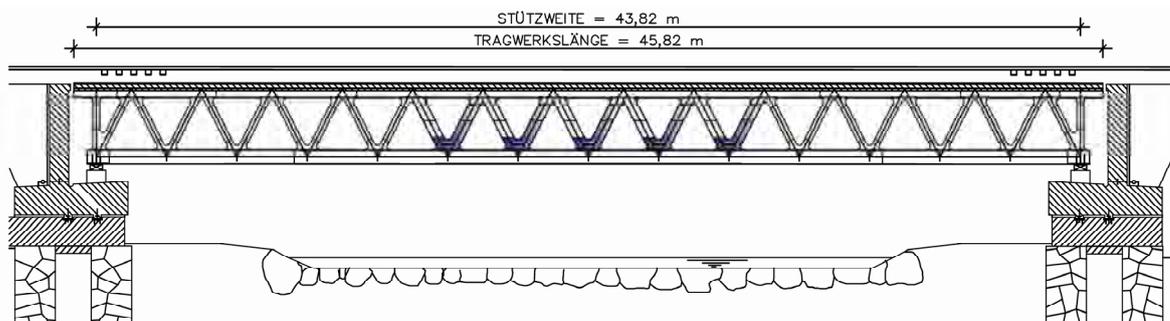


Abbildung 7.14: Verbundbrückentragwerk mit fünf in die Diagonalen integrierten Flüssigkeitsschwingungstilgern pro Hauptträger

Nach Festlegung des Masseverhältnisses sowie der Geometrie der Tilger muss mit den (in bestimmten Grenzen) noch frei wählbaren Tilgerparametern H_L und Δz_0 , also der Luftfederhöhe bei unausgelenkten Flüssigkeitsspiegeln sowie der vertikalen Flüssigkeitsspiegeldifferenz, die Eigenfrequenz der schwingenden Flüssigkeit mit den Äquivalenzbeziehungen zwischen Zweimasseschwinger und Flüssigkeitsschwingungstilger optimal eingestellt werden. Dabei ist eine Maximierung der tatsächlich aktiven dynamischen Masse, wie in Kapitel 5.3.3 hergeleitet werden konnte, durch eine möglichst große Wahl von Δz_0 anzustreben. Die dafür erforderlichen Gleichungen werden

7. Anwendung der Flüssigkeitsschwingungstilger am Beispiel einer realen Verbundbrücke

nachfolgend zum besseren Verständnis nochmals angeführt. Ebenso soll mit den nachfolgenden Abbildungen der Befüllvorgang, der in Kapitel 5.1.1 ausführlich erläutert wird, skizziert werden.

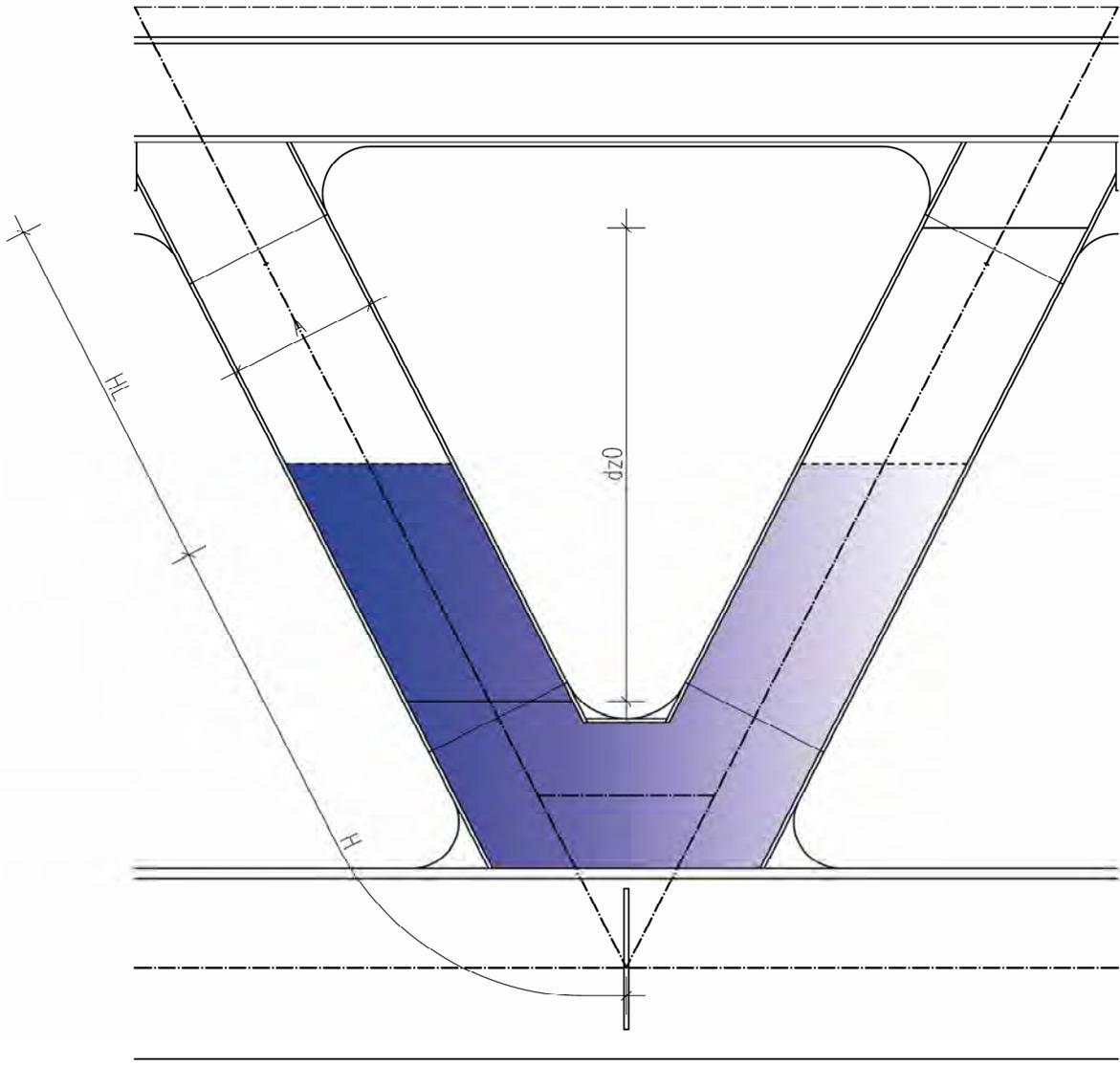


Abbildung 7.15: Prinzipdarstellung der Flüssigkeitsschwingungstilger in den Fachwerkdiagonalen integriert mit unausgelenkten Flüssigkeitsspiegeln nach dem Befüllen (Rohrenden sind offen)

Nach dem Befüllen der Tilger mit der Flüssigkeitsmasse

$$m_F = 2H \rho A \quad (7.14)$$

wird das linke Rohrende druckdicht abgeschlossen und in diesem so lange Luft eingepresst, bis sich die erforderliche vertikale Flüssigkeitsspiegeldifferenz Δz_0 eingestellt hat. Anschließend wird auch das zweite Rohrende geschlossen und der Tilger ist einsatzbereit.

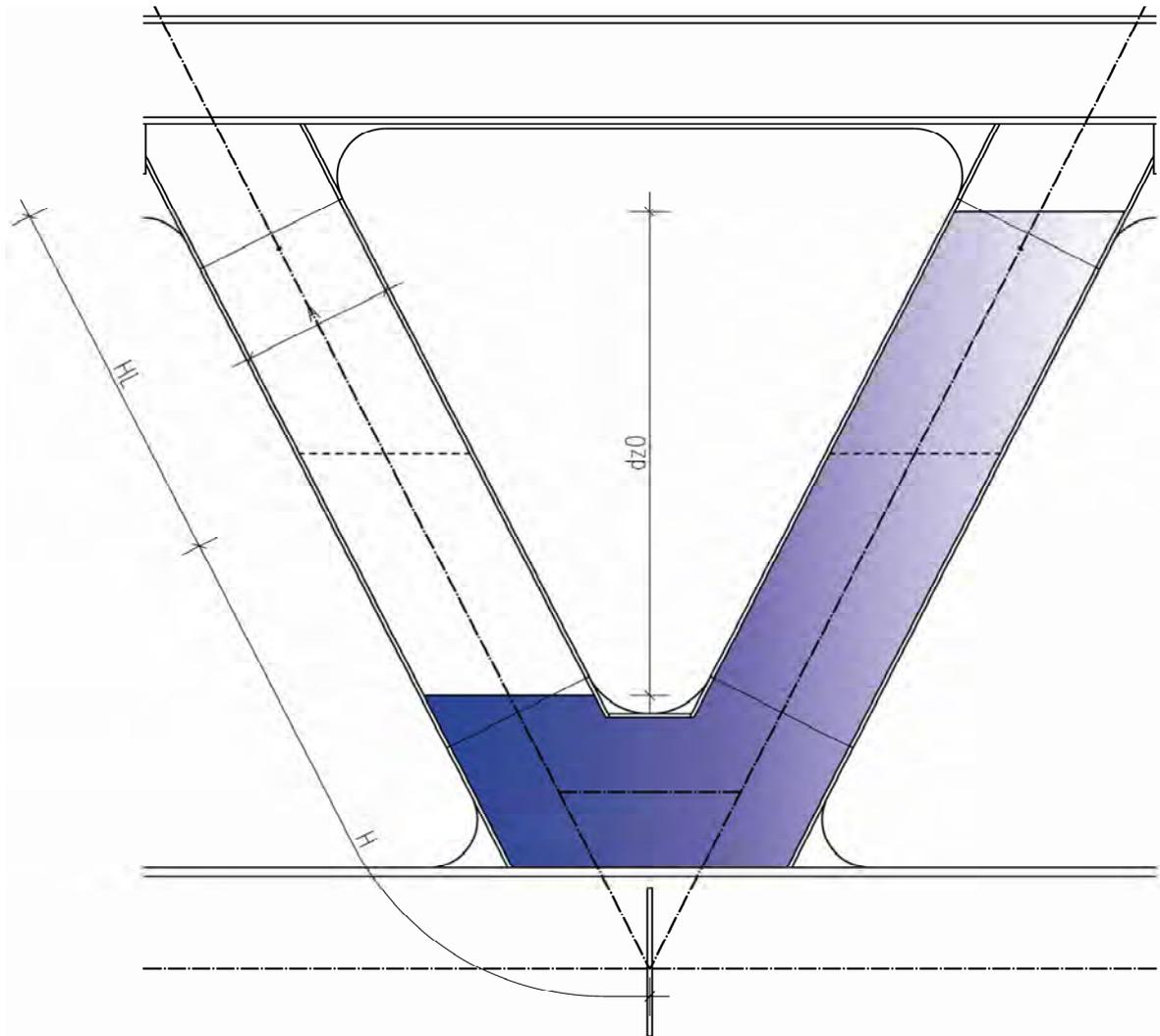


Abbildung 7.16: Prinzipdarstellung der Flüssigkeitsschwingungstilger in den Fachwerkdiagonalen integriert mit den zu variierenden Tilgerparametern H_L und Δz_0

Die erste Eigenfrequenz des schwingenden Flüssigkeitsfadens lautet mit dem vorgestellten Befüllungsvorgang und damit für den Druckfall 2 nach Gl. (5.74)

$$f_{\text{Fall 2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g \sin(\alpha)}{2H} \left[1 + \frac{\gamma}{2\rho g} \left(\frac{p_0}{H_L \sin(\alpha) - \frac{\Delta z_0}{2}} + \frac{p_0 + \rho g \Delta z_0}{H_L \sin(\alpha) + \frac{\Delta z_0}{2}} \right) \right]} \quad (7.15)$$

Das optimale Frequenzverhältnis zwischen Tragwerks- und Tilgereigenfrequenz lautet nach Gl. (5.223)

$$f_{\text{opt}} = \frac{1 + \mu(2 - \kappa - \kappa^2)}{1 + 2\mu} \quad (7.16)$$

mit dem Geometriefaktor

$$\kappa = \frac{\Delta z_0}{2H} \quad (7.17)$$

7. Anwendung der Flüssigkeitsschwingungstilger am Beispiel einer realen Verbundbrücke

Wie den zuvor angeführten Gleichungen entnommen werden kann, finden sich die Geometrieparameter Δz_0 und H_L sowohl in der Eigenfrequenzformel als auch in der Gleichung für das optimale Frequenzverhältnis des Tilgers. Des Weiteren muss die Bedingung eingehalten werden, dass die Summe aus halber Stromfadenlänge H und Luftfederhöhe H_L gleiche der Schenkellänge der Tilger sein muss. Da einerseits die rechnerisch ermittelte Eigenfrequenz der Tilger f_{Fall2} mit der optimalen Eigenfrequenz f_{1opt} übereinstimmen muss und andererseits auch die geometrischen Randbedingungen befriedigt werden müssen, handelt sich bei der Bestimmung der Geometrieparameter ebenfalls um eine iterative Berechnung. Das Ergebnis dieser Iteration, das auch Abbildung 7.17 entnommen werden kann, lautet

$$\begin{aligned}\Delta z_0 &= 1518,0 \text{ mm} \\ H_L &= 1161,0 \text{ mm}\end{aligned}\tag{7.18}$$

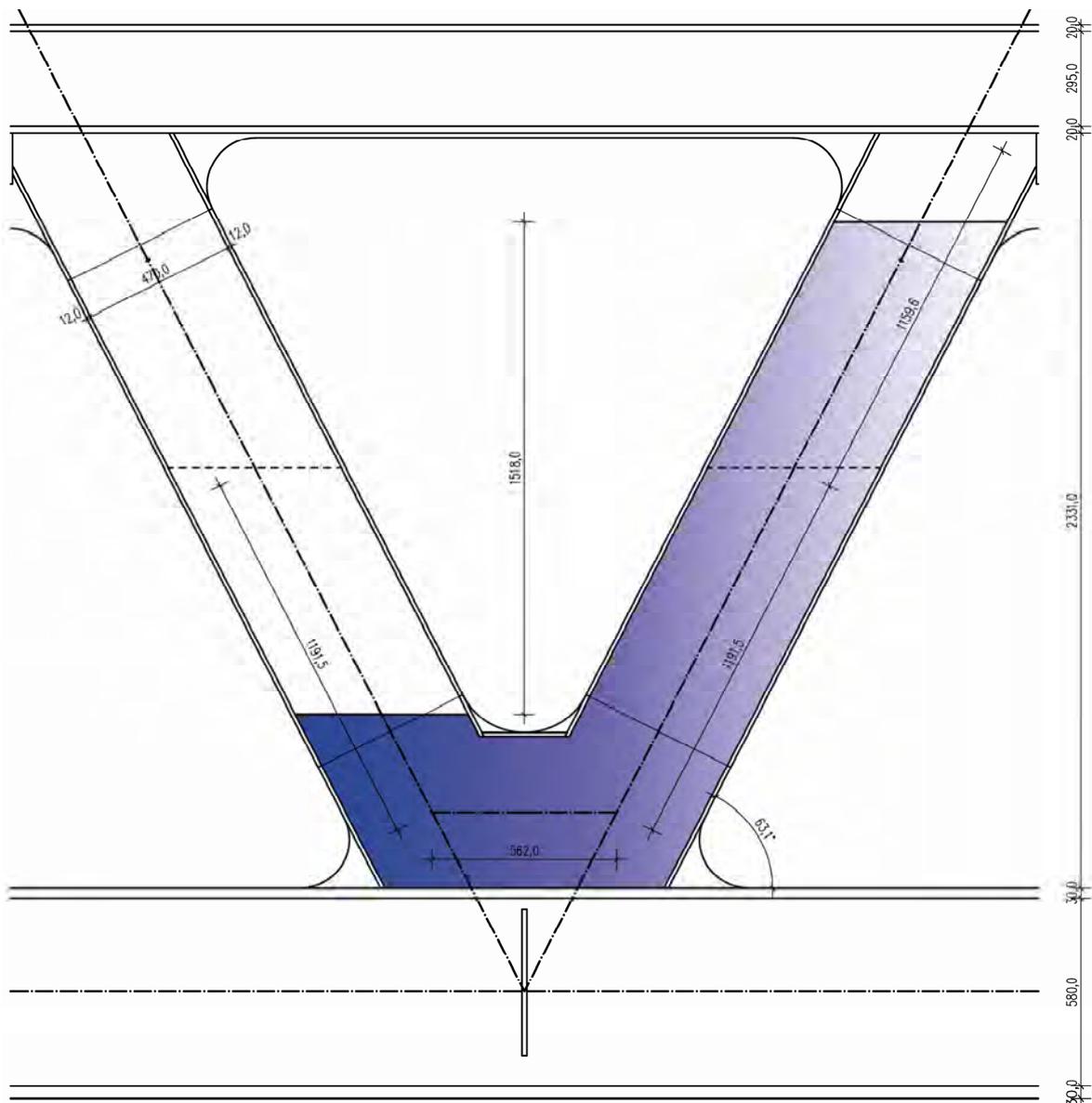


Abbildung 7.17: Flüssigkeitsschwingungstilger integriert in den Fachwerkdiagonalen mit optimaler Tilgergeometrie

Der Geometriefaktor κ folgt damit zu

$$\kappa = \frac{1518,0}{2945,0} = 0,5154 \quad (7.19)$$

An dieser Stelle soll angemerkt werden, dass, wie bereits in Kapitel 5.3.4 angeführt wurde, angestrebt werden sollte, den Geometriefaktor so groß wie möglich einzustellen. Das Maximum beträgt bei einem Tilgerschenkelwinkel von 90° und Vernachlässigung des Ausrundungsbereichs eins. Dadurch erreicht man ein optimales Verhältnis zwischen der Gesamtflüssigkeitsmasse und der tatsächlich aktiven dynamischen Masse, es wird also die Totmasse reduziert.

Mit diesem Geometriefaktor sowie dem Masseverhältnis von $\mu = 0,0155$ folgt das optimale Frequenzverhältnis zu

$$f_{opt} = \frac{1 + 0,0155(2 - 0,5154 - 0,5154^2)}{1 + 2 \cdot 0,0155} = 0,9882 \quad (7.20)$$

sowie die optimale Eigenfrequenz der Tilger zu

$$f_{1,opt} = 0,9882 \cdot 2,27 = 2,24 \text{ Hz} \quad (7.21)$$

Setzt man zur Ergebnisüberprüfung die ermittelten Geometrieparameter H_L und Δz_0 , sowie die bereits aus Kapitel 6.1.1.1 bekannten Parameter

$$\begin{aligned} g &= 9,81 \text{ m/s}^2 \\ \gamma &= 1,405 \\ \rho &= 1000,0 \text{ kg/m}^3 \\ p_0 &= 100.000,0 \text{ N/m}^2 \end{aligned} \quad (7.22)$$

in Gl. (7.15) ein, folgt die rechnerische erste Eigenfrequenz der Tilger zu

$$f_{1,Tilger} = 2,25 \text{ Hz}, \quad (7.23)$$

die sehr gut mit der optimalen Tilgereigenfrequenz übereinstimmt. Damit konnte eine optimale Frequenzabstimmung der Flüssigkeitsschwingungstilger für die Mühlheimer Achbrücke erreicht werden.

Im nächsten Schritt müsste die Dämpfung der Tilger optimal eingestellt werden, was jedoch, wie in Kapitel 6.1.2.2 erläutert wurde, mit einigen Schwierigkeiten verbunden ist. Zu diesem Zweck wird im ersten Schritt das optimale viskose Dämpfungsmaß mittels der Äquivalenzbeziehungen nach Gl. (5.223) wie folgt ermittelt

$$\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{3 \cdot 0,5154 \cdot 0,0155 \cdot (1 + 0,0155)}{8 \cdot 1 + 0,0155 \cdot (2 + 0,5154 \cdot 0,0155 - 0,5154^2)}} \cdot 100 = 5,45 \% \quad (7.24)$$

Die Schwierigkeit liegt in der Einstellung dieses rechnerisch ermittelten, optimalen Dämpfungsmaßes, das einerseits über die Viskosität der verwendeten Flüssigkeit, andererseits über eingebaute lokale Widerstände, wie z. B. Schieberegler, eingestellt werden könnte. Die Auswirkungen beider Maßnahmen können jedoch nur auf dem

Versuchswege ermittelt und eingestellt werden und sind dann nur für die untersuchte Tilgergeometrie und Konfiguration aussagekräftig. Wie den, für diese Arbeit durchgeführten Versuchen entnommen werden kann (siehe Kapitel 6), besitzt Wasser eine Viskosität, die, ohne zusätzliche Maßnahmen vornehmen zu müssen, Dämpfungswerte im Bereich des optimalen Dämpfungsmaßes liefert. Trotzdem sollten für den praktischen Einsatz der Flüssigkeitsschwingungstilger Versuche mit unterschiedlichen Flüssigkeiten, Geometrien und Flüssigkeitsspiegelbewegungen durchgeführt werden, um neben der gut beherrschbaren Frequenzabstimmung auch über die zugehörige Tilgerdämpfung passende Kennwerte zu erhalten.

Nachfolgend wird mittels numerischer Studien, wie in Kapitel 6.1.2 vorgeführt, die Effektivität der Flüssigkeitsschwingungstilger auf das dynamische Verhalten der Mühlheimer Achbrücke ermittelt und dargestellt. Dabei werden die Parameter des Brückentragwerks sowie der optimal abgestimmten Tilger dieses Kapitels angesetzt.

Die dynamische Überhöhung der Verformungen des Brückentragwerks ohne Tilger in Brückenmitte lautet (Chopra, 2000)

$$\left(\frac{w_{dyn}}{w_{stat}} \right)_{oT} = \frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{2 \cdot 0,01} = 50,0 \quad (7.25)$$

sowie mit dem äquivalenten Masseverhältnis des Flüssigkeitsschwingungstilgers nach Gl. (5.217)

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \mu \frac{\kappa(1+\mu)}{1+\mu(2-\kappa-\kappa^2)} = \\ &= 0,0155 \cdot \frac{0,5154 \cdot (1+0,0155)}{1+0,0155 \cdot (2-0,5154-0,5154^2)} = 0,0119 \end{aligned} \quad (7.26)$$

für das Tragwerk mit Flüssigkeitsschwingungstilger nach Gl. (2.113)

$$\left(\frac{w_{dyn}}{w_{stat}} \right)_{mT} = \sqrt{1 + \frac{2}{\hat{\mu}}} = \sqrt{1 + \frac{2}{0,0119}} = 13,0 \quad (7.27)$$

Damit folgt bei Vergleich der beiden dynamischen Amplituden ein Verhältnis von

$$\frac{w_{dyn,mT}}{w_{dyn,oT}} = \frac{13,0}{50,0} = 0,26 \quad (7.28)$$

und somit eine Verringerung der dynamischen Amplituden um ca. 74 %. Aufgrund der vernachlässigten Nichtlinearitäten, wie jener des Druckterms und des Dämpfungsterms, sowie der Nichtberücksichtigung der Anordnung der Tilger in Brückenlängsrichtung, handelt es sich dabei nur um eine grobe Abschätzung. Genauere Ergebnisse liefert die nachfolgende numerische Berechnung. Bei dieser wird die Längsanordnung der Tilger in Anlehnung an die Modalanalyse (Kapitel 2.2.9.4) wie folgt berücksichtigt.

7. Anwendung der Flüssigkeitsschwingungstilger am Beispiel einer realen Verbundbrücke

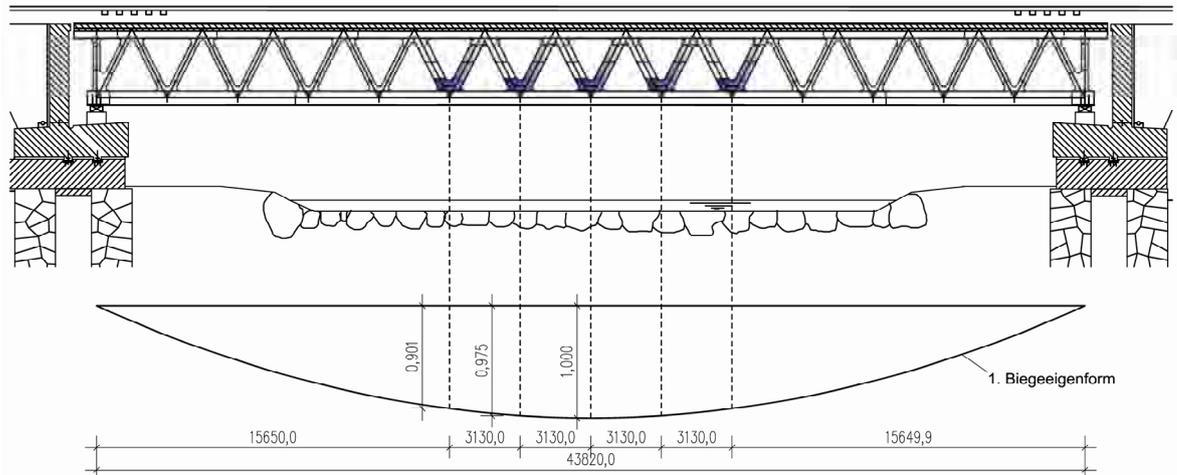


Abbildung 7.18: modaler Anteil der Flüssigkeitsschwingungstilger in Abhängigkeit ihrer Lage zur Brückenmitte

Damit ergibt sich eine effektive Tilgeranzahl von

$$n = 2 \cdot 0,901 + 2 \cdot 0,975 + 1,000 = 4,752 \quad (7.29)$$

Nachfolgend sind die numerisch ermittelten Verformungen und Beschleunigungen des Tragwerks ohne und mit Flüssigkeitsschwingungstilger in Brückenmitte sowie der zugehörige Amplitudenfrequenzgang zufolge einer Unwuchterregung in Brückenmitte mit einem statischen Moment von

$$m_e = 150.000 \text{ kgm} \quad (7.30)$$

dargestellt.

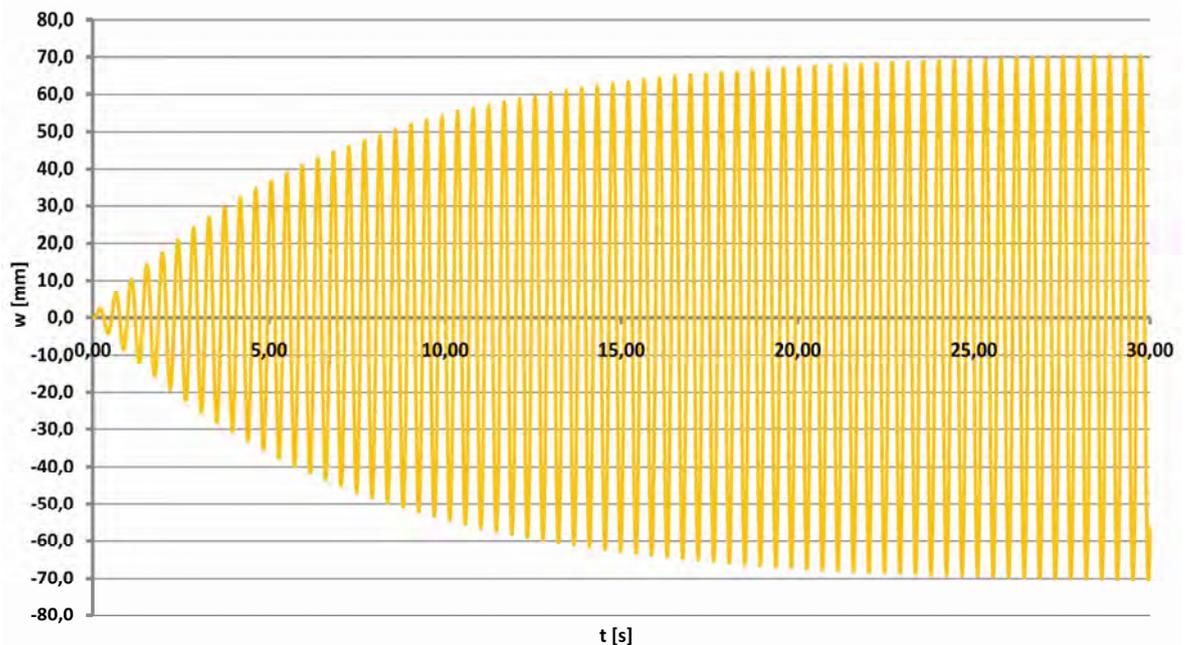


Abbildung 7.19: Schwingungen in Brückenmitte ohne Flüssigkeitsschwingungstilger zufolge einer Unwuchterregung mit 2,27 Hz und einem statischen Moment von 150.000 kgm, $\zeta = 1,0 \%$

7. Anwendung der Flüssigkeitsschwingungstilger am Beispiel einer realen Verbundbrücke

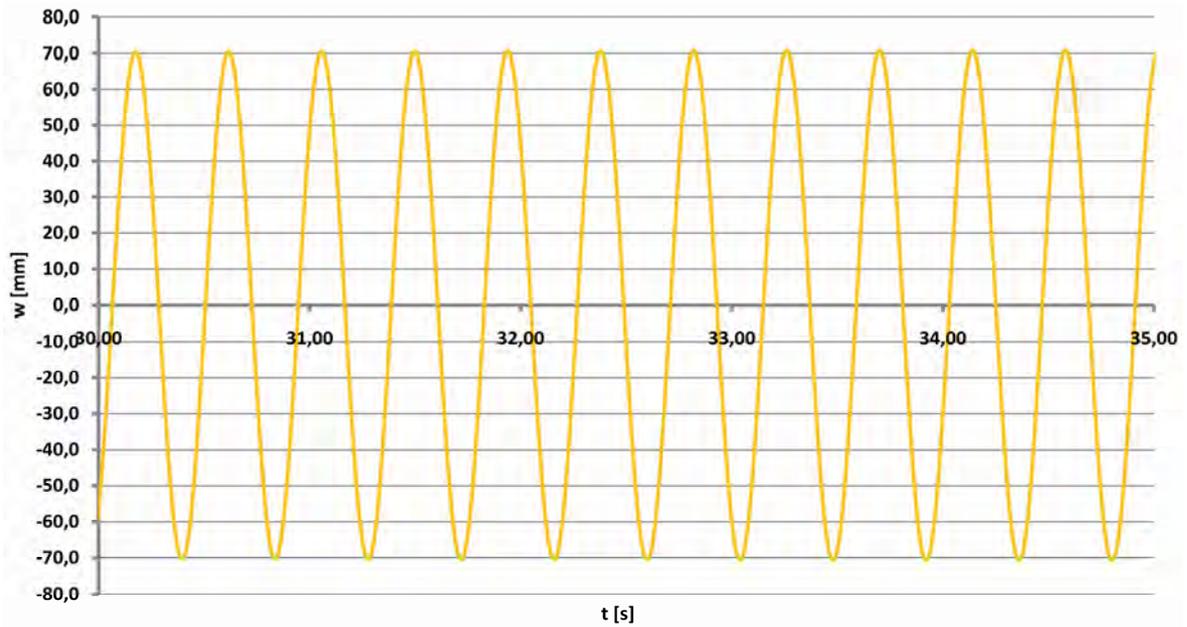


Abbildung 7.20: Schwingungen in Brückenmitte ohne Flüssigkeitsschwingungstilger zufolge einer Unwuchterregung mit 2,27 Hz und einem statischen Moment von 150.000 kgm, $\zeta = 1,0 \%$, stationärer Bereich

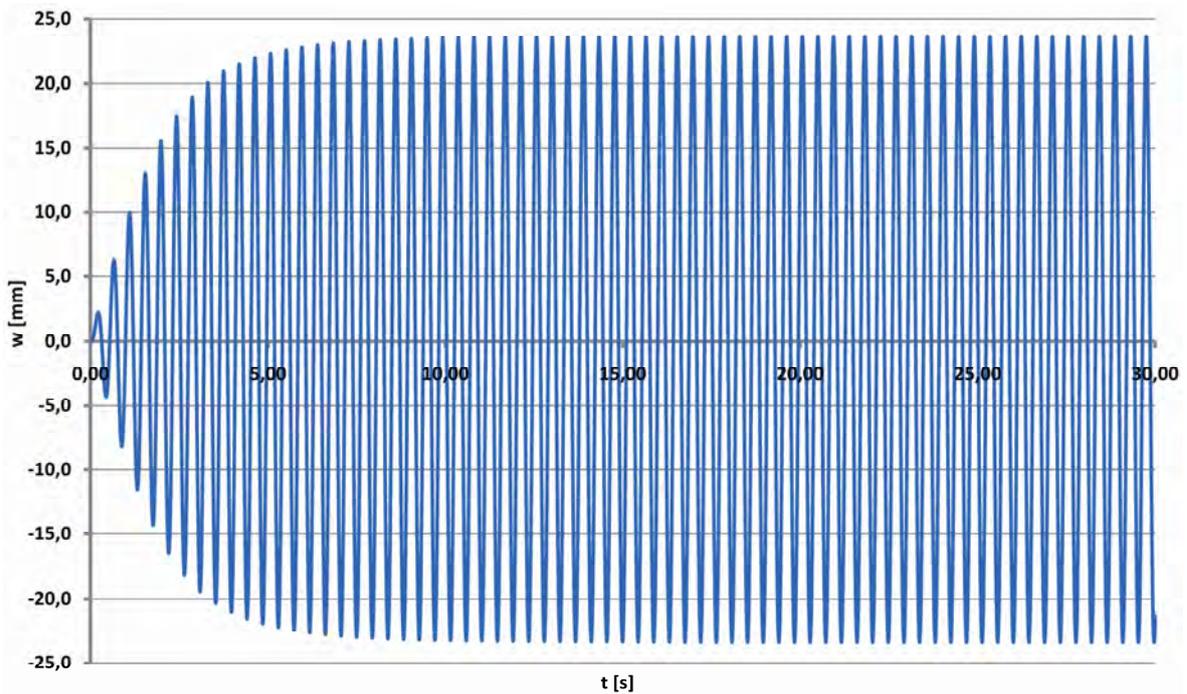


Abbildung 7.21: Schwingungen in Brückenmitte mit fünf optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgern pro Hauptträger zufolge einer Unwuchterregung mit 2,27 Hz und einem statischen Moment von 150.000 kgm

7. Anwendung der Flüssigkeitsschwingungstilger am Beispiel einer realen Verbundbrücke

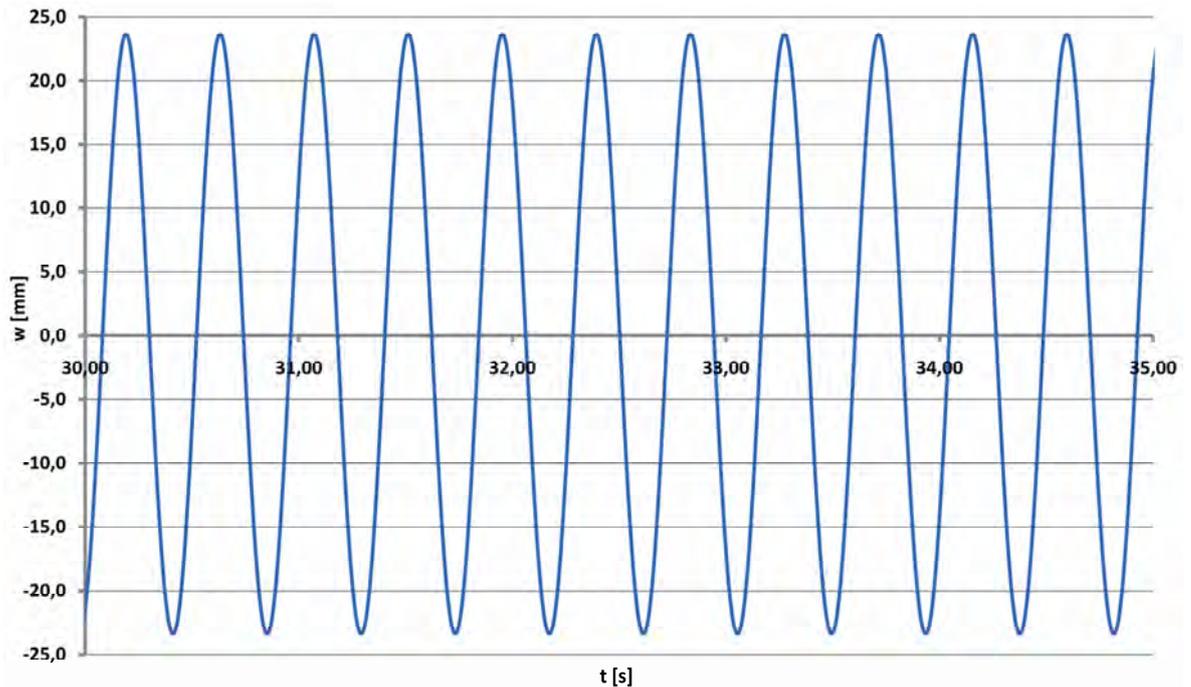


Abbildung 7.22: Schwingungen in Brückenmitte mit fünf optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgern pro Hauptträger zufolge einer Unwucherregung mit 2,27 Hz und einem statischen Moment von 150.000 kgm, stationärer Bereich

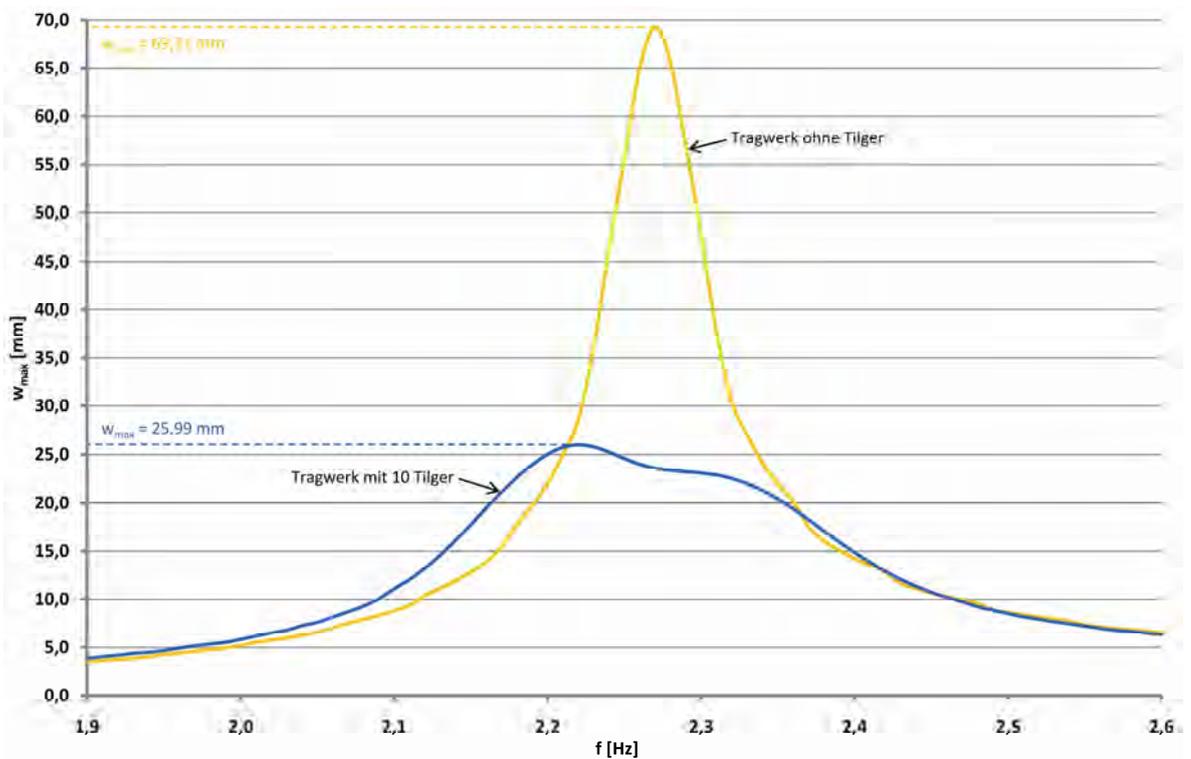


Abbildung 7.23: Amplitudenfrequenzgang der Tragwerksmitte mit und ohne Flüssigkeitsschwingungstilger bei Unwucherregung mit einem statischen Moment von 150.000 kgm

7. Anwendung der Flüssigkeitsschwingungstilger am Beispiel einer realen Verbundbrücke

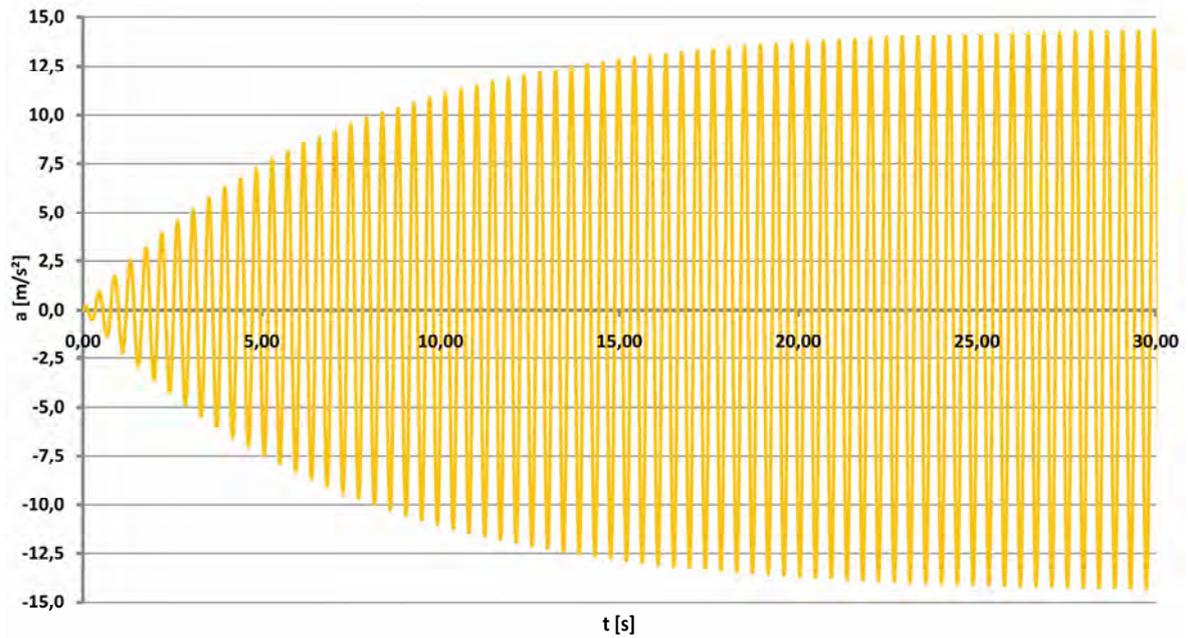


Abbildung 7.24: Beschleunigungen in Brückenmitte ohne Flüssigkeitsschwingungstilger zufolge einer Unwucherregung mit 2,27 Hz und einem statischen Moment von 150.000 kgm, $\zeta = 1,0\%$

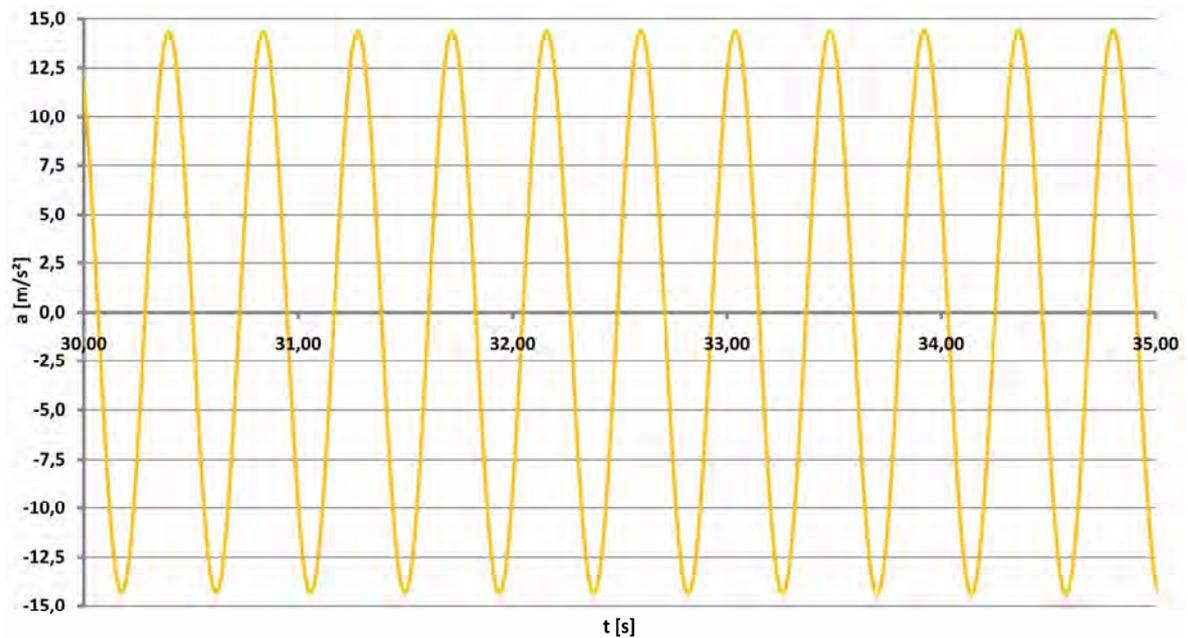


Abbildung 7.25: Beschleunigungen in Brückenmitte ohne Flüssigkeitsschwingungstilger zufolge einer Unwucherregung mit 2,27 Hz und einem statischen Moment von 150.000 kgm, $\zeta = 1,0\%$, stationärer Bereich

7. Anwendung der Flüssigkeitsschwingungstilger am Beispiel einer realen Verbundbrücke

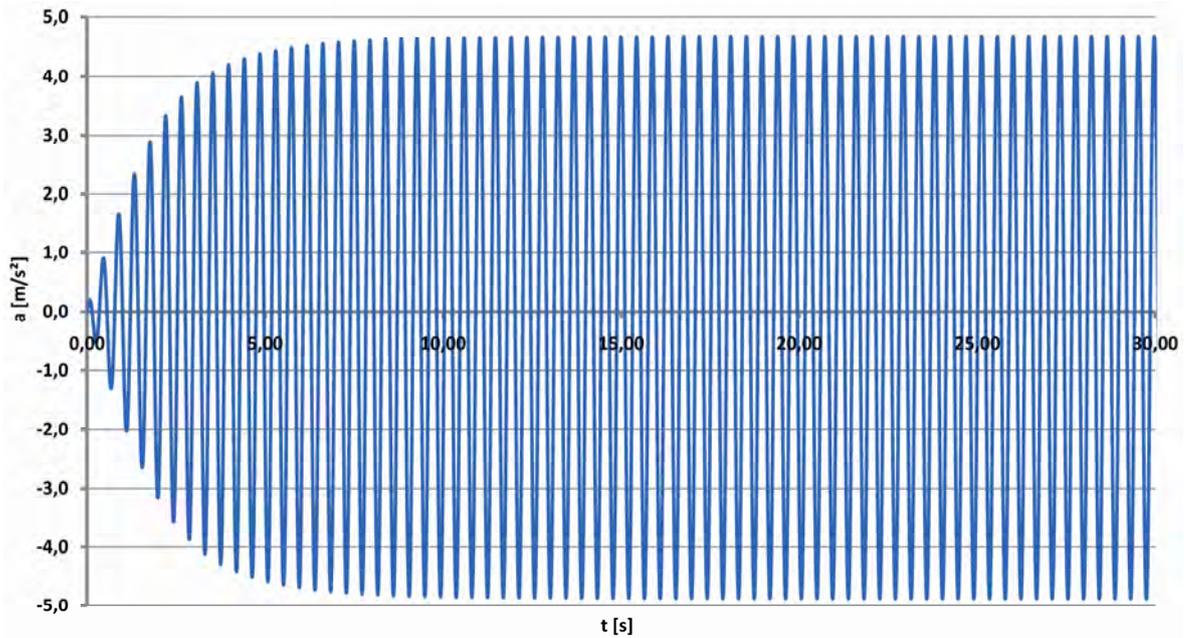


Abbildung 7.26: Beschleunigungen in Brückenmitte mit fünf optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgern pro Hauptträger zufolge einer Unwucherregung mit 2,27 Hz und einem statischen Moment von 150.000 kgm

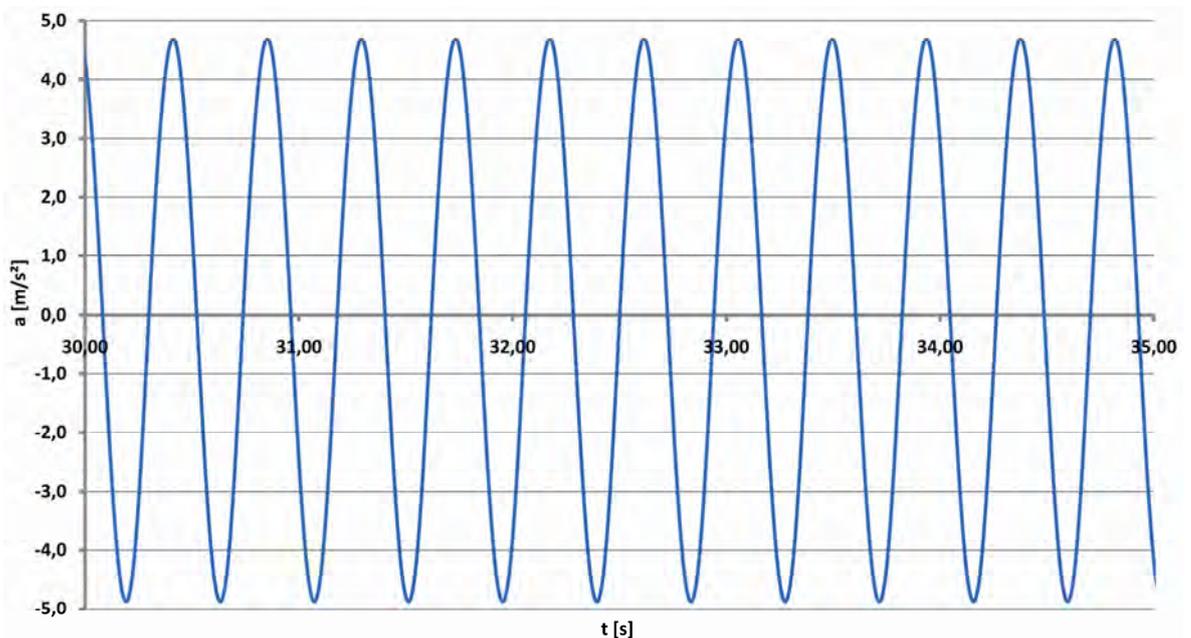


Abbildung 7.27: Beschleunigungen in Brückenmitte mit fünf optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgern pro Hauptträger zufolge einer Unwucherregung mit 2,27 Hz und einem statischen Moment von 150.000 kgm, stationärer Bereich

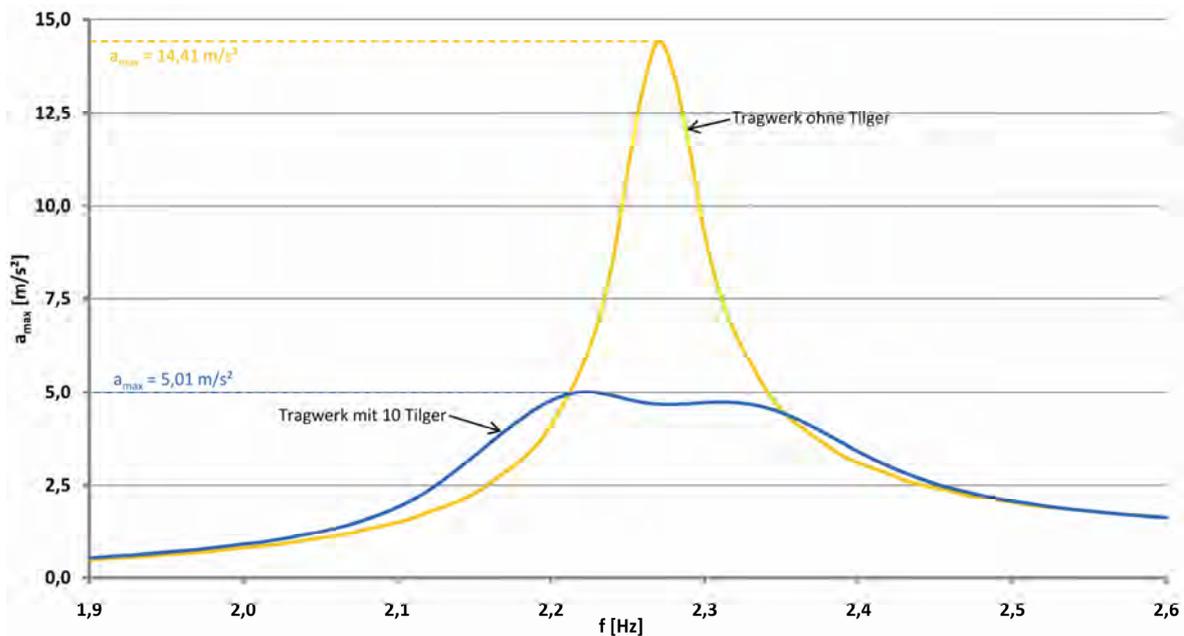


Abbildung 7.28: Beschleunigungsfrequenzgang der Tragwerksmitte mit und ohne Flüssigkeitsschwingungstilger bei Unwucherregung mit einem statischen Moment von 150.000 kgm

Somit ergibt sich numerisch ein Verhältnis der Amplituden mit und ohne Tilger von

$$\frac{w_{dyn,mT}}{w_{dyn,oT}} = \frac{25,99}{69,31} = 0,37 \quad (7.31)$$

Der Unterschied zur Abschätzung nach Gl. (7.28) liegt hauptsächlich in der Berücksichtigung der Längsanordnung der Tilger (modale Anteile) bei der numerischen Berechnung.

In diesem Kapitel konnte gezeigt werden, dass die Anordnung der Flüssigkeitsschwingungstilger bei Fachwerkbrücken einen zur Wirkung der Tilger vernachlässigbaren Aufwand bedeutet, da diese in die Struktur integriert werden können. Des Weiteren konnte die sehr hohe Effektivität der Tilger dargestellt werden. Diese erreichen mit nur 6500 kg Wassermasse, bei einer Tragwerksmasse von 840.000 kg, eine Reduktion der dynamischen Verformungen in Brückenmitte um 63 %. Das zusätzliche Eigengewicht der 10 Tilger (fünf pro Hauptträger) kann dabei bei den statischen Nachweisen sowie bei der Ermittlung der Eigenfrequenz des Tragwerks unberücksichtigt bleiben.

7.3. Generelle Vorgehensweise zur Dimensionierung von Flüssigkeitsschwingungstilgern

In diesem Kapitel soll zusammenfassend nochmals die Vorgehensweise zur Dimensionierung von Flüssigkeitsschwingungstilgern erläutert werden. Dabei müssen grundsätzlich zwei Fälle unterschieden werden

7. Anwendung der Flüssigkeitsschwingungstilger am Beispiel einer realen Verbundbrücke

- Nachträgliches Einbauen der Flüssigkeitsschwingungstilger in ein bestehendes Tragwerk
- Berücksichtigung der Flüssigkeitsschwingungstilger bereits in der Tragwerksentwurfsphase

Nachfolgende Regeln zur Dimensionierung von Flüssigkeitsschwingungstilger gelten generell

- 1) Ein Masseverhältnis μ zwischen Flüssigkeitsmasse des Tilgers und (modaler) Tragwerksmasse von 1 – 5 % ist anzustreben.
- 2) Die vertikale Auslenkung der Flüssigkeitsspiegel Δz_0 sollte im Verhältnis zur Gesamtstromfadenlänge $2H$ möglichst groß gewählt werden, da dadurch die aktive dynamische Masse maximiert und die Totmasse minimiert wird. Dies entspricht einer möglichst großen Einstellung des Geometriefaktors κ .
- 3) Die halbe Stromfadenlänge H sollte ein Vielfaches der Querschnittsabmessungen der Tilgerschenkel betragen, um zweidimensionale Strömungen sowie übermäßige Schwappeneffekte zu vermeiden. Als Richtwert wird der Faktor ≥ 4 vorgeschlagen.
- 4) Für eine erste Abschätzung der erforderlichen Tilgergeometrie können die Näherungen der Äquivalenzbeziehungen nach Gl. (5.218) herangezogen werden. Mit diesen folgt die dynamisch aktive Masse der Tilger zu

$$m_A = \kappa m_F \quad (7.32)$$

sowie das äquivalente Masseverhältnis zu

$$\hat{\mu} = \kappa \mu \quad (7.33)$$

Mit diesen beiden Näherungen erhält man ohne aufwendige Iterationen Richtwerte für die optimale erste Eigenfrequenz der Tilger sowie deren Effektivität.

- 5) Das optimale Frequenzverhältnis f_{opt} liegt bei den verwendeten Masseverhältnissen immer sehr nahe eins und kann für eine Vorbemessung und erste Abschätzung auch als solches angesetzt werden.

Die in den beiden nachfolgenden Flussdiagrammen (Abbildung 7.29 und Abbildung 7.30) verwendeten Parameter sind aus den vorhergehenden Kapiteln bekannt, sollen aber an dieser Stelle nochmals kurz erläutert werden

L_{ges}	Gesamtschenkellänge des Tilgers
A_F	Querschnittsfläche des Tilgers
α	Schenkelneigung des Tilgers
H	halbe Stromfadenlänge des Flüssigkeitsfadens
$m_{F,Tilger}$	Flüssigkeitsmasse eines Tilgers
$m_{F,ges}$	Gesamtflüssigkeitsmasse aller Tilger

μ	Masseverhältnis von Tilgermasse zur Tragwerksmasse
H_L	Luftfederhöhe bei unausgelenkten Flüssigkeitsspiegeln
Δz_0	vertikaler Abstand der ausgelenkten Flüssigkeitsspiegel
κ	Geometriefaktor nach Gl. (5.210)
f_{opt}	optimales Verhältnis von Tilger- zur Tragwerkseigenfrequenz Gl. (5.223)
$f_{1,opt}$	optimale erste Eigenfrequenz des Tilgers
$f_{1,Tilger}$	Eigenfrequenz des Tilgers nach Kapitel 5.1.2

7.3.1. Einbau der Tilger in ein bestehendes Tragwerk

Durch die vorhandene Geometrie des Tragwerks sind vor allem die maximale Tilgerhöhe sowie die Neigung der Tilgerschenkel vorgegeben. Ob die Tilger in den Diagonalen integriert werden können, oder ob diese neben den Diagonalen montiert werden müssen, hängt vom vorhandenen Querschnitt der Fachwerkdiagonalen ab. Sind diese als Hohlprofile mit ausreichender Querschnittsfläche ausgebildet, können sie ohne weitreichende Adaptierungsarbeiten als Rohre für die Flüssigkeitsschwingungstilger herangezogen werden, andernfalls müssen die Tilger neben dem Fachwerk positioniert werden. Mit diesen grundlegenden Überlegungen folgt das nachfolgende Flussdiagramm zur Dimensionierung der Flüssigkeitsschwingungstilger.

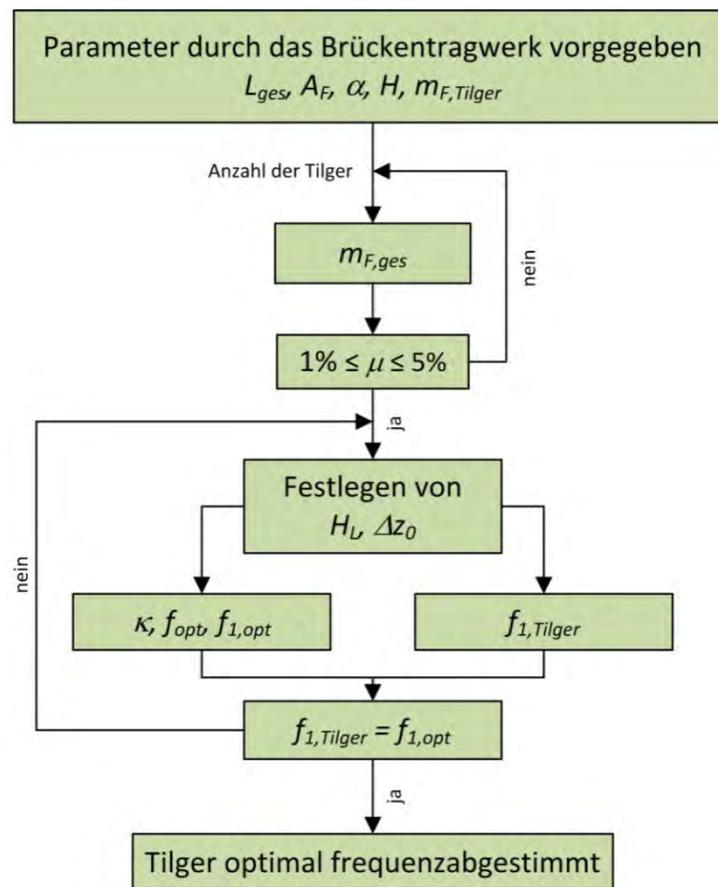


Abbildung 7.29: Flowchart zur Dimensionierung der Flüssigkeitsschwingungstilger bei vorgegebenen Platzverhältnissen

7.3.2. Berücksichtigung der Tilger im Tragwerksentwurf

Werden Tragwerke entworfen, bei denen aufgrund ihrer großen Schlankheiten bzw. geringen Steifigkeiten, wie zum Beispiel Fußgängerbrücken, Seilkonstruktionen und Ähnliches, Schwingungsprobleme während des Gebrauchs zu erwarten sind, sollte bereits im Entwurfsstadium der Einsatz von Schwingungstilgern in Betracht gezogen und eingeplant werden. Dabei bietet sich der Einsatz der Flüssigkeitsschwingungstilger an, da diese durch einfache Abänderung der Geometriefaktoren an die tatsächlich auftretenden Tragwerkeigenschaften vor Ort angepasst werden können. Aufgrund der Berücksichtigung der Tilger bereits in der Entwurfsphase ist die Wahl der Tilgerparameter freier, als im Kapitel zuvor. Nachfolgend ist das zugehörige Flussdiagramm zur Dimensionierung von Flüssigkeitsschwingungstilger angeführt.

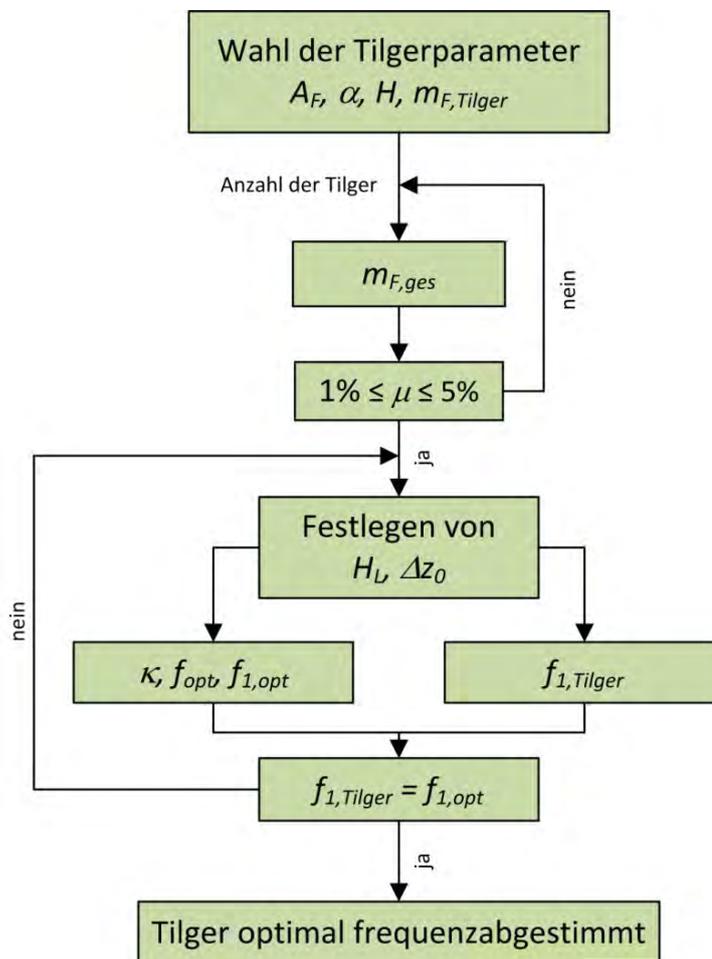


Abbildung 7.30: Flowchart zur Dimensionierung der Flüssigkeitsschwingungstilger bei frei wählbaren Platzverhältnissen

8. AUSBLICKE UND ZUSAMMENFASSUNG

8.1. Ausblicke

Im vorliegenden Kapitel werden ein paar Ausblicke auf mögliche Erweiterungen der Anwendung der Flüssigkeitsschwingungstilger sowie möglicherweise verbesserte Tilgerkonstruktionen aufgezeigt.

Ein wichtiges Forschungsfeld für den praktischen Einsatz von Flüssigkeitsschwingungstilger ist, wie bereits in Kapitel 4 angemerkt wurde, die Suche nach optimalen Flüssigkeiten. Ein interessanter Aspekt dabei wären sogenannte intelligente Flüssigkeiten, die sich adaptiv der jeweiligen Brückenbewegung anpassen könnten. Dabei können magnetorheologische oder elektrorheologische Flüssigkeiten, also Flüssigkeiten die durch ein induziertes Magnetfeld bzw. eine angelegte Spannung ihren inneren Widerstand und damit ihre Viskosität verändern. Ein Beispiel einer denkbaren Anordnung der Tilger unter Anwendung magnetorheologischer Flüssigkeiten ist in der nachfolgenden Abbildung skizziert.

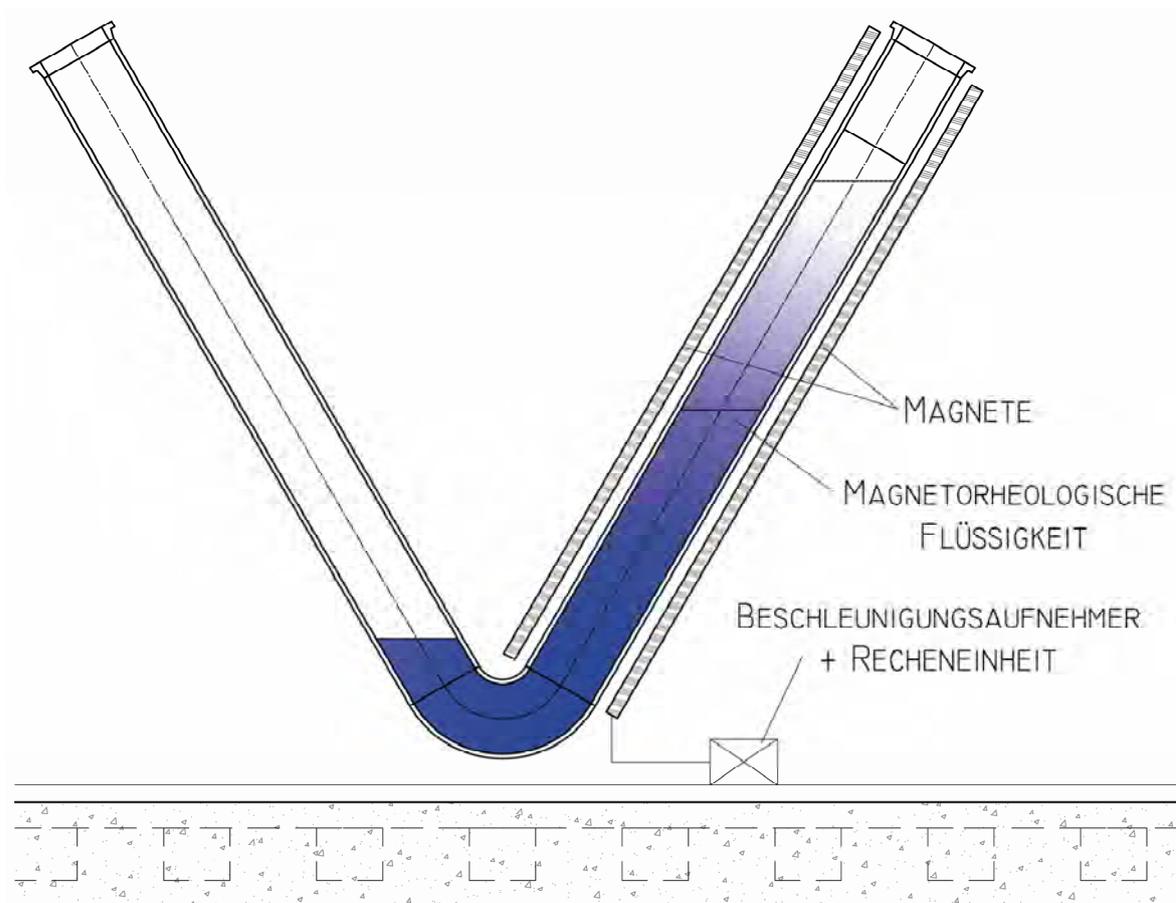


Abbildung 8.1: Anordnung der Flüssigkeitsschwingungstilger mit Anwendung einer magnetorheologischen Flüssigkeit

Mit der damit vorgestellten Anordnung besteht die Möglichkeit, die Viskosität des Tilgers an die vorhandenen Brückenbeschleunigungen anzupassen. Bei geringen Beschleunigungen kann damit eine kleine Viskosität eingestellt werden, damit die Flüssigkeit ohne Verzögerung auf die Brückenbewegung reagieren kann. Bei großen Beschleunigungen könnte man durch Einstellen einer hohen Viskosität die durch Reibung dissipierte Energie erhöhen und damit die Effektivität der Tilger steigern. Dabei darf natürlich das optimale äquivalente viskose Dämpfungsmaß aus Kapitel 5.3.4 nicht außer Acht gelassen werden.

Eine Möglichkeit, wie der Tilger passiv auf unterschiedliche Amplituden der Brückenbewegung reagieren könnte, wäre die Anordnung konusförmiger Rohrenden, wie in nachfolgender Abbildung dargestellt.

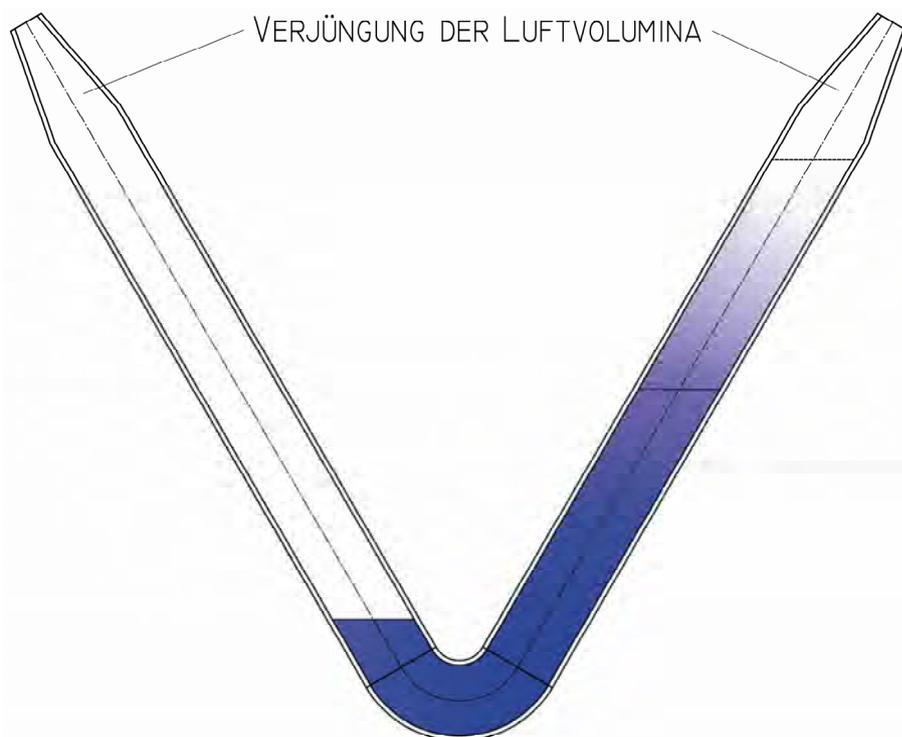


Abbildung 8.2: Flüssigkeitsschwingungstilger mit verjüngten Luftvolumina

Dadurch ergibt sich bei größer werdenden Amplituden der Flüssigkeitsbewegung eine immer steifere Luftfeder, die damit auch einen größeren Widerstand gegen die Flüssigkeitsbewegung aufbauen kann. Inwieweit sich dies positiv auf die Effektivität der Tilger auswirkt und wie dadurch die Frequenzabstimmung beeinflusst wird, wäre in diesem Zusammenhang zu untersuchen.

In den theoretischen Kapiteln des Flüssigkeitsschwingungstilgers wurde die Unterscheidung zwischen Flüssigkeitsmasse m_F und aktiver Flüssigkeitsmasse $m_{F,av}$, also jene Masse zwischen den Flüssigkeitsspiegeln, getroffen. Die verbleibende Masse im Bogenbereich der Tilger, die als passive oder dynamisch inaktive Masse bezeichnet werden kann, liefert keinen Beitrag zur Effektivität der Tilger. Es kann somit als Entwurfsziel angesehen werden, diese inaktive Masse, die jedoch als statisches Gewicht durchaus zu berücksichtigen ist, zu minimieren. Eine Möglichkeit wäre dabei die Verjüngung des Rohrdurchmessers im Bogenbereich, wie nachfolgend skizziert wird.

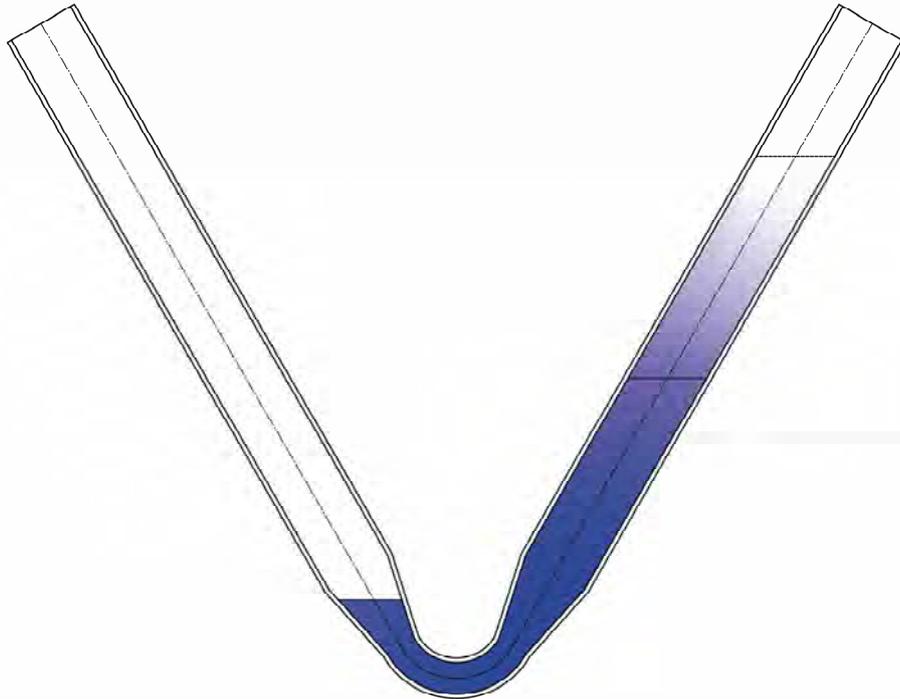


Abbildung 8.3: Flüssigkeitsschwingungstilger mit verjüngtem Rohrdurchmesser im Bogenbereich

Dabei muss die damit verbundene Gewichtsreduktion den womöglich negativen Effekten der Geschwindigkeitserhöhung im Bogenbereich sowie der zusätzlichen örtlichen Strömungswiderstände durch die Rohrverjüngungen gegenübergestellt werden.

Alle drei Maßnahmen liefern eine zusätzliche Nichtlinearität für die Flüssigkeitsbewegung der Flüssigkeitsschwingungstilger. Es müssen somit unbedingt die Effekte dieser Nichtlinearitäten untersucht werden. Im ungünstigsten Fall werden die positiven Effekte der geplanten Maßnahmen durch die, durch die Nichtlinearitäten erzeugten, gekrümmten Resonanzkurven mit auftretenden Sprungeffekten mehr als aufgehoben. Dies müsste man in eigenen numerischen Studien unter Berücksichtigung der Geometrieänderungen und aller zugehörigen Nichtlinearitäten untersuchen.

8.2. Zusammenfassung

Die vorliegende Dissertation mit dem Titel „Sonderuntersuchungen zu Flüssigkeitsschwingungstilgern im Brückenbau“ entstand während meiner Assistententätigkeit am Institut für Tragkonstruktionen – Stahlbau von Jänner 2006 bis Oktober 2008. Sie behandelt den Einsatz von Flüssigkeitsschwingungstilgern zur Minimierung der auftretenden Beschleunigungen und Verformungen von Brückenkonstruktionen.

Bei den Flüssigkeitsschwingungstilgern handelt es sich um Rohrkonstruktionen mit U- oder V-Form, die in Längsrichtung des Brückentragwerks orientiert und z. B. in Fachwerkdiagonalen von Fachwerkbrücken integriert werden können. Die sich in den Flüssigkeitsschwingungstilgern befindende und mit einer vertikalen Anfangsauslenkung versehene Flüssigkeit bewegt sich dabei durch die vertikale Brückenbewegung. Der Abschluss der Rohrenden, der offen oder geschlossen ausgebildet werden kann, hat dabei einen wesentlichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten, im speziellen auf die erste Eigenfrequenz der schwingenden Flüssigkeit. Durch diese unterschiedlichen Rohrabschlüsse und die sich daraus ergebenden Befüllungsvorgänge kann mit den Flüssigkeitsschwingungstilgern ein Frequenzbereich von 0,5 – 7,0 Hz abgedeckt werden.

Zur Bestimmung der Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsfadens wurde die instationäre Bernoulli Gleichung im in der Ebenen bewegten Bezugssystem angewendet, des Weiteren kamen der Impuls- und Drallsatz zur Bestimmung der aus der Flüssigkeitsbewegung resultierenden Kräfte und Momente zur Anwendung. Für alle Gleichungen ergeben sich auf Grund des Dämpfungsterms sowie der Parametererregung nichtlineare Beziehungen, die nur mittels numerischer Verfahren lösbar sind.

Um eine möglichst hohe Effektivität der Tilger gewährleisten zu können, müssen diese auf die mechanischen Eigenschaften des Brückentragwerks, nämlich die modale Masse und die erste Biegeeigenform, abgestimmt werden. Zu diesem Zweck wurden in Anlehnung an die Abstimmungskriterien für den Zweimasseschwinger nach Den Hartog modifizierte Abstimmungskriterien für das Einmasseschwinger-Flüssigkeitsschwingungstilger-System hergeleitet. Mit diesen einfach anwendbaren Formeln werden einerseits die aktive Masse des Flüssigkeitsschwingungstilgers und andererseits das optimale Frequenzverhältnis zwischen der Eigenfrequenz des Tilgers und der Tragwerkseigenfrequenz festgelegt. Für kleine Masseverhältnisse μ , die das Verhältnis zwischen modaler Brückenmasse und gesamter Flüssigkeitsmasse angeben, lassen sich diese Abstimmungskriterien noch einmal vereinfachen. Mit den damit erhaltenen Formeln lässt sich zeigen, dass lediglich die Masse zwischen den ausgelenkten Flüssigkeitsspiegeln als dynamisch aktive Tilgermasse wirksam ist. Die restliche Flüssigkeitsmasse, die im Bereich des Bogens der Tilger zu finden ist, ist inaktiv. Es muss also das Ziel jeder Abstimmung sein, neben der Einhaltung der dafür erforderlichen Abstimmungskriterien auch die dynamisch inaktive Masse so gering wie möglich zu halten. Das Verhältnis zwischen aktiver Flüssigkeitsmasse und modaler Brückenmasse sollte im Bereich von 1 – 5 % liegen. Wählt man ein geringeres

Verhältnis, wird der Tilger exponentiell inaktiver, bei größeren Verhältnissen steigt lediglich das statische Gewicht des Tilgers, die Effektivität jedoch kaum.

Um die analytisch abgeleiteten Formel und Bewegungsgleichungen für den Flüssigkeitsschwingungstilger zu bestätigen, wurden einerseits Großversuche mit im Brückenbau verwendbaren Tilgergeometrien sowie begleitend numerische Studien durchgeführt. Für die Großversuche wurde eine eigens dafür konzipierte Stahlbrücke mit 10,0 m Spannweite und dem Regeloberbau der Österreichischen Bundesbahnen entworfen und errichtet. Des Weiteren wurde zur dynamischen Krafterregung speziell für die Versuchsbrücke entwickelte Unwuchterreger gebaut. Bei diesen kann einerseits die Frequenz der Krafterregung von 0,5 – 17,0 Hz in Schritten von 1 UpM variabel eingestellt werden, andererseits besteht die Möglichkeit durch zwei unterschiedliche Unwuchtscheiben sowie darin vorgesehenen und demontierbare Unbalancen das statische Moment pro Unwuchtscheibe von 0 bis 1505 kgcm variieren zu können. Mit diesen Unwuchterregern wurden zuerst die mechanischen Eigenschaften der Versuchsbrücke über die Auswertung von Amplitudenfrequenzgängen sowie Ausschwingkurven ermittelt. Mit den damit bekannten Eigenschaften der Brücke wurden zwei Versuchsreihen mit jeweils 2 Flüssigkeitsschwingungstilgern durchgeführt. Versuchsreihe 1 mit dem Brückentragwerk ohne Schotterbett und zwei darauf abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgern aus PE-HD Wasserrohren und Versuchsreihe 2 mit dem Brückentragwerk inklusive Schotterbett und wiederum zwei darauf abgestimmten Tilgern. Bei der Versuchsreihe 2 kam neben einem PE-HD Tilger ein speziell konstruierter Plexiglastilger zum Einsatz. Mit diesem war es möglich, neben der gemessenen Effektivität der Tilger auch eine Idee vom Strömungszustand sowie der Oberflächenbewegung der Flüssigkeit in den Rohren zu bekommen. Für beide Versuche kamen Masseverhältnisse μ von 1,0 – 1,5 % zur Anwendung. In den Versuchen konnte eine Amplitudenreduktion von 73 % erreicht werden und dies lediglich mit einem Masseverhältnis von 1,0 %. Wie bereits erwähnt, wurden neben den Großversuchen auch numerische Studien mittels Matlab 2008 und Simulink 7.1 durchgeführt. Diese konnten nicht nur die Messergebnisse der Versuche bestätigen, es konnten zusätzlich auch Aussagen über die, bei den analytischen Herleitungen durchgeführten Linearisierungen z. B. des Druckterms gemacht werden.

Ein nicht vernachlässigbares Abstimmungskriterium, das bis zu diesem Zeitpunkt unerwähnt blieb, betrifft die Dämpfung des Flüssigkeitsschwingungstilgers. Diese ist ebenfalls auf die Eigenschaften des Brückentragwerks optimal einzustellen, da ein zu stark gedämpftes System wie ein Einmasseschwinger und ein zu gering gedämpftes System wie ein Zweimassenschwinger wirkt. Die Einstellung der Eigenfrequenz des Tilgers ist problemlos über die Variation der Tilgergeometrie durchführbar, dies ist bei der Einstellung der Dämpfung leider nicht möglich. Diese kann nur über die physikalischen Eigenschaften der Flüssigkeit, vornehmlich deren Viskosität, sowie über den Einbau von zusätzlichen Strömungswiderständen wie z. B. einen Schieber verändert werden. Zu diesem Zweck wurde in einer am Institut für Tragkonstruktionen – Stahlbau durchgeführten Diplomarbeit unterschiedlichste Flüssigkeiten auf ihre Einsatzmöglichkeit in Flüssigkeitsschwingungstilger getestet. Dabei ergab sich ein recht umfangreiches

Anforderungspotential für die Flüssigkeiten wie z. B. eine möglichst hohe Dichte zur Minimierung des Tilgervolumens oder eine Temperaturbeständigkeit von -30 bis 70°C . Die Findung einer passenden Flüssigkeit gestaltete sich als äußerst schwierig, zum Einsatz kommen können jedoch in jedem Fall Wasser-Alkoholgemische und Siliconöle. Diese besitzen den Nachteil der geringen Dichte. Als vielversprechende Flüssigkeiten stellten sich perfluorierte Kohlenwasserstoffe sowie Wasser-Wolframatgemische heraus, die Dichten im Bereich von $2,0 \text{ g/cm}^3$ und darüber aufweisen. Des Weiteren eröffnet die interessante Gruppe der magnetorheologischen und elektrorheologischen Flüssigkeiten die Möglichkeit, die Viskosität und damit die Dämpfung des Tilgers variabel an die Brückenbewegung anpassen zu können. In den Großversuchen wurde mit reinem Wasser gearbeitet. Die zugehörigen Ergebnisse sowie die numerischen Studien konnten zeigen, dass Wasser ohne viskositätsverändernde Maßnahmen durchaus eine Dämpfung aufweist die recht nahe an der optimalen Dämpfung zu liegen kommt. Berücksichtigt man weiters, dass die Dämpfung einen weit geringeren Einfluss auf die Effektivität der Tilger hat als die Frequenzabstimmung, kann davon ausgegangen werden, dass Wasser bzw. Flüssigkeiten mit ähnlich viskosem Verhalten ideal für den Einsatz in Flüssigkeitsschwingungstilgern geeignet ist.

Die, wie bereits zuvor erwähnt wurde, nichtlineare Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsfadens weist einen zeitveränderlichen Term bei der Flüssigkeitsbewegung $u(t)$ auf. Solche Bewegungsgleichungen werden als parametererregte Schwingungen mit der Gefahr der Parameterresonanz bezeichnet. Diese zeichnet sich durch ein stetiges Anwachsen der Amplituden auch bei Vorhandensein von Dämpfung aus, des Weiteren treten mehrere Resonanzfrequenzen auf. In der vorliegenden Arbeit konnte zur Vermeidung von Parameterresonanz eine einfache Formel, nämlich eine minimal erforderliche Dämpfung des Tilgers, hergeleitet werden. In den Versuchen sowie den begleitenden numerischen Studien konnte gezeigt werden, dass diese minimal erforderliche viskose Dämpfung in jedem Fall vorhanden ist und damit das Auftreten von Parameterresonanz für den Flüssigkeitsschwingungstilger nahezu ausgeschlossen werden kann.

Zur anschaulichen Darstellung der Anwendung der Flüssigkeitsschwingungstilger für Brückentragwerke wurde diese für ein, sich derzeit in Planung befindliches Verbundbrückentragwerk der Österreichischen Bundesbahnen mit Fachwerkhauptträgern, vorgeführt. Dabei konnte wiederum gezeigt werden, dass mit einem Masseverhältnis von lediglich $1,55\%$ die dynamischen Amplituden um 63% reduziert werden könnten.

Beim System der Flüssigkeitsschwingungstilger handelt es sich damit um ein sehr effektives, leicht abstimmbares und nachjustierbares sowie wirtschaftliches Dämpfungssystem zur Minimierung von vertikalen Brückenschwingungen.

A. ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Abbildung 1.1: Hysteresekurve eines viskosen Dämpfungselementes (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)	1
Abbildung 1.2: Fuß eines Stahlschornsteins unterfüttert mit Elastomer-Elementen (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)	2
Abbildung 1.3: Elastomer-Schubelement integriert in einen Stützenfuß (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)	3
Abbildung 1.4: Reibungsschwingungsdämpfer mit gerader Reibplatte (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)	3
Abbildung 1.5: Reibungsschwingungsdämpfer mit mehreren Reibelementen und kalottenförmiger Reibplatte (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)	4
Abbildung 1.6: Kolbenkonstruktion des viskosen Dämpfungselementes, System Maurer-Söhne-Petersen, Typ S (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)	4
Abbildung 1.7: Installierte Schwingungsdämpfer System Maurer-Söhne-Petersen, Typ S (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)	5
Abbildung 1.8: Von Frahm vorgeschlagener Schlingertank zur Reduzierung der Rollbewegung von Schiffen in unausgelenkter (links) und ausgelenkter (rechts) Lage (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)	6
Abbildung 1.9: Tuned Liquid Column Damper (TLCD, links) und Tuned Liquid Damper (TLD, rechts) auf einem Einmassenschwinger (Petersen, Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, 2001)	6
Abbildung 1.10: Flüssigkeitsschwingungstilger zur Dämpfung horizontaler Bauwerksschwingungen mit aktivem Kontrollsystem (Hochrainer, 2001)	7
Abbildung 1.11: Brückentragwerk mit Darstellung der Belastung sowie dem montierten Flüssigkeitsschwingungstilger in unausgelenkter und ausgelenkter Lage (Reiterer, 2004)	8
Abbildung 1.12: Flüssigkeitsschwingungstilger zur Reduzierung von Horizontalschwingungen befestigt auf einem einstöckigen Rahmen unter horizontaler und vertikaler Anregung (Reiterer, 2004)	9
Abbildung 2.1: Darstellung eines komplexen Vektors	10
Abbildung 2.2: Rotation eines Massenpunktes um eine Drehachse mit raumfestem Bezugspunkt	12
Abbildung 2.3: Darstellung der Relativbewegung eines Punkte P	13
Abbildung 2.4: Spannungsvektoren auf den Seitenflächen eines infinitesimalen quaderförmigen Volumenelementes	16
Abbildung 2.5: Stromlinie ($t = \text{konst.}$)	18
Abbildung 2.6: Projektion von dz in Richtung der Relativstromlinie	18
Abbildung 2.7: Darstellung von Stromlinien und Stromfäden	20
Abbildung 2.8: ungedämpfter Zweimassenschwinger in Ausgangslage und in ausgelenkter Lage	26
Abbildung 2.9: freigeschnittene Tilger- sowie Tragwerksmasse mit allen Kräften	26

Abbildung 2.10: Vergrößerungsfunktion des Tragwerkes a_1/x_{st} in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses f (ω/Ω_n)	28
Abbildung 2.11: Vergrößerungsfunktion des Tragwerkes a_1/x_{st} in Abhängigkeit des Massenverhältnisses μ	30
Abbildung 2.12: Vergrößerungsfunktion des Tragwerkes a_1/x_{st} in Abhängigkeit des Massenverhältnisses μ (Ausschnitt)	30
Abbildung 2.13: Eigenfrequenzen des Systems Tragwerk/Tilger in Abhängigkeit des Massenverhältnisses μ	31
Abbildung 2.14: gedämpfter Zweimassenschwinger in Ausgangslage und in ausgelenkter Lage	32
Abbildung 2.15: freigeschnittene Tilger- sowie Hauptmasse mit allen Kräften	32
Abbildung 2.16: Vergrößerungsfunktion der Tragwerksbewegung bei konstanter Dämpfung und Variation des Frequenzverhältnisses f (Tilger-/Tragwerksfrequenz)	35
Abbildung 2.17: Vergrößerungsfunktion der Tragwerksbewegung bei konstantem Frequenzverhältnis f und Variation der Dämpfung	36
Abbildung 2.18: optimales Frequenzverhältnis f in Abhängigkeit des Masseverhältnisses	37
Abbildung 2.19: maximale dynamische Vergrößerung in Abhängigkeit des Masseverhältnisses	38
Abbildung 2.20: Vergrößerungsfunktionen mit optimalem Frequenzverhältnis ω und optimaler durchschnittlicher Dämpfung nach Den Hartog, Brock und der exakten Lösung	39
Abbildung 2.21: Vergrößerungsfunktionen mit optimalem Frequenzverhältnis f und optimaler Dämpfung für den Fixpunkt P nach Den Hartog, Brock und der exakten Lösung am Fixpunkt P	40
Abbildung 2.22: Vergrößerungsfunktionen mit optimalem Frequenzverhältnis f und optimaler Dämpfung für den Fixpunkt Q nach Den Hartog, Brock und der exakten Lösung am Fixpunkt Q	40
Abbildung 2.23: Optimale Dämpfungsmaße nach Den Hartog, Brock und der exakten Lösung in Abhängigkeit des Massenverhältnisses	42
Abbildung 2.24: schwingungsfähiges System mit konstanter Steifigkeit und Masseverteilung sowie zeit- und ortsveränderlicher Belastung	42
Abbildung 2.25: infinitesimales Balkenelement mit allen angreifenden Kräften	43
Abbildung 2.26: erste drei Eigenfrequenzen und Eigenformen des statisch bestimmt gelagerten Balkens	46
Abbildung 2.27: Mathematisches Pendel mit vertikal bewegtem Aufhängepunkt	48
Abbildung 2.28: MathieuS (ungerade Mathieufunktion) für $\varepsilon = 0$ in Abhängigkeit von $\delta = 0,1,2,3$	55
Abbildung 2.29: MathieuS (ungerade Mathieufunktion) für $\varepsilon = 2$ und $\delta = 3$	55
Abbildung 2.30: MathieuS (ungerade Mathieufunktion) für $\varepsilon = 3$ und $\delta = 3$	56
Abbildung 2.31: MathieuC (gerade Mathieufunktion) für $\varepsilon = 0$ in Abhängigkeit von $\delta = 0,1,2,3$	56
Abbildung 2.32: MathieuC (gerade Mathieufunktion) für $\varepsilon = 1$ und $\delta = 2,3,5$	57

A. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.33: MathieuC (gerade Mathieufunktion) für $\varepsilon = 2$ und $\delta = 3$	57
Abbildung 2.34: MathieuC (gerade Mathieufunktion) für $\varepsilon = 3$ und $\delta = 3$	58
Abbildung 2.35: charakteristische Werte der Mathieugleichung für die ungeraden Lösungen	59
Abbildung 2.36: charakteristische Werte der Mathieugleichung für die geraden Lösungen	59
Abbildung 2.37: charakteristische Werte der Mathieugleichung für beide Lösungen – Stabilitätsgrenzen	60
Abbildung 2.38: Konturplot der Stabilitätskarte der Mathieuschen Differentialgleichung	60
Abbildung 2.39: Stabilitätskarte für die Mathieusche Differentialgleichung	62
Abbildung 2.40: Stabilitätskarte für die Mathieusche Differentialgleichung (Detailbereich)	63
Abbildung 2.41: Stabilitätskarte für die viskos gedämpfte Mathieusche Differentialgleichung (Detailbereich)	64
Abbildung 2.42: approximierte Grenzkurven der Stabilitätskarte sowie Gegenüberstellung mit den exakten Grenzkurven	72
Abbildung 3.1: Regelquerschnitt der Versuchsbrücke	73
Abbildung 3.2: Längsschnitt, Grundriss und Werkstattform der Versuchsbrücke	74
Abbildung 3.3: Befestigungsrahmen für die Unwuchterreger (Brückenmitte)	75
Abbildung 3.4: Befestigungsrahmen für die Unwuchterreger (Brückenviertelpunkte)	75
Abbildung 3.5: Befestigungswinkel für die seitlichen Schotterbettbegrenzungen (Ansicht)	76
Abbildung 3.6: Befestigungswinkel für die seitlichen Schotterbettbegrenzungen (Schnitt)	76
Abbildung 3.7: Trägerrost bestehend aus HEA340, S355J2+N sowie Auflagerbänke	77
Abbildung 3.8: Haupttragstruktur mit Querträgern Vollholz 180 x 200 mm, C30	77
Abbildung 3.9: Montage der seitlichen Winkel für die Schotterbettbegrenzung	78
Abbildung 3.10: Versuchsbrücke nach der Fertigstellung	78
Abbildung 3.11: Montagerahmen für die Unwuchterreger	79
Abbildung 3.12: Anschluss der Unwuchterregerrahmen	79
Abbildung 3.13: Auflagerausbildung mit Fixierungsanker und Elastomerekkissen	80
Abbildung 3.14: FE-Modell der Versuchsbrücke (3D Ansicht von oben)	81
Abbildung 3.15: FE-Modell der Versuchsbrücke (3D Ansicht von unten)	81
Abbildung 3.16: FE-Modell der Versuchsbrücke (3D Ansicht von unten, Darstellung der Achsen)	82
Abbildung 3.17: Aufbaulasten (Schotter, Schwellen und Schienen) [kN/m ²]	83
Abbildung 3.18: Unwuchterreger in der Brückenmitte [kN/m ²]	83
Abbildung 3.19: Unwuchterreger im linken Viertelpunkt [kN/m ²]	83
Abbildung 3.20: Unwuchterreger im rechten Viertelpunkt [kN/m ²]	84
Abbildung 3.21: statische Durchbiegungen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit [mm]	85

Abbildung 3.22: 1. vertikale Eigenform mit 2,181 Hz (Unwuchterreger in der Brückenmitte)	85
Abbildung 3.23: 2. vertikale Eigenform mit 7,936 Hz (Unwuchterreger in den Viertelpunkten)	86
Abbildung 3.24: maximale dynamische Verformungen bei Anregung der ersten Eigenform [mm]	87
Abbildung 3.25: maximale dynamische Verformung bei Anregung der zweiten Eigenform [mm]	88
Abbildung 3.26: max. Vergleichsspannung in den Haupt- und Querträgern (1. Eigenform) [N/mm ²]	89
Abbildung 3.27: max. Vergleichsspannung in den Haupt- und Querträgern (2. Eigenform) [N/mm ²]	89
Abbildung 3.28: max. Normalspannungen im Vollholz, C30 [N/mm ²]	90
Abbildung 3.29: Beschleunigungen bei Anregung der ersten Eigenform [m/s ²]	91
Abbildung 3.30: Beschleunigungen bei Anregung der zweiten Eigenform [m/s ²]	91
Abbildung 3.31: Kraftmessdosen zur Messung des Brückeneigengewichts	92
Abbildung 3.32: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen (B6) in der Mitte des rechten Hauptträgers [g]	93
Abbildung 3.33: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen (B8) in der Mitte des linken Hauptträgers [g]	94
Abbildung 3.34: Amplitudenfrequenzgang der Wege (W5) in der Mitte des rechten Hauptträgers [mm]	94
Abbildung 3.35: Amplitudenfrequenzgang der Wege (W6) in der Mitte des linken Hauptträgers [mm]	95
Abbildung 3.36: Resonanzkurve der Amplituden mit Anwendung der Bandbreitenmethode	95
Abbildung 3.37: Beschleunigungen B6 im Ausschwingversuch [g]	96
Abbildung 3.38: Beschleunigungen B8 im Ausschwingversuch [g]	97
Abbildung 3.39: Wege W5 im Ausschwingversuch [mm]	97
Abbildung 3.40: Wege W6 im Ausschwingversuch [mm]	98
Abbildung 3.41: Versuchsbrücke mit Gleisoberbau (Schotter, Schwellen und Schienen)	100
Abbildung 3.42: Versuchsbrücke mit Gleisoberbau (Schotter, Schwellen und Schienen)	100
Abbildung 3.43: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen (B6) in der Mitte des rechten Hauptträgers [g]	101
Abbildung 3.44: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen (B8) in der Mitte des linken Hauptträgers [g]	102
Abbildung 3.45: Amplitudenfrequenzgang der Wege (W5) in der Mitte des rechten Hauptträgers [mm]	102
Abbildung 3.46: Amplitudenfrequenzgang der Wege (W6) in der Mitte des linken Hauptträgers [mm]	103

Abbildung 3.47: Resonanzkurve der Amplituden mit Anwendung der Bandbreitenmethode	103
Abbildung 3.48: Beschleunigungen B6 im Ausschwingversuch [g]	104
Abbildung 3.49: Beschleunigungen B8 im Ausschwingversuch [g]	105
Abbildung 3.50: Wege W5 im Ausschwingversuch [mm]	105
Abbildung 3.51: Wege W6 im Ausschwingversuch [mm]	106
Abbildung 3.52: experimentell ermittelte Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall (stationärer Schwingungsbereich) [mm]	107
Abbildung 3.53: numerisch ermittelte Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall (stationärer Schwingungsbereich) [mm]	107
Abbildung 3.54: Schotteroberbau mit von den Schwellen losgelösten und Schienen	108
Abbildung 3.55: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen (B6) in der Mitte des rechten Hauptträgers bei losgelösten Schienen [g]	109
Abbildung 3.56: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen (B8) in der Mitte des linken Hauptträgers bei losgelösten Schienen [g]	109
Abbildung 3.57: Amplitudenfrequenzgang der Wege (W5) in der Mitte des rechten Hauptträgers bei losgelösten Schienen [mm]	110
Abbildung 3.58: Amplitudenfrequenzgang der Wege (W6) in der Mitte des linken Hauptträgers bei losgelösten Schienen [mm]	110
Abbildung 3.59: Resonanzkurve der Amplituden mit Anwendung der Bandbreitenmethode	111
Abbildung 3.60: Beschleunigungen B6 im Ausschwingversuch bei gelösten Schienen [g]	112
Abbildung 3.61: Beschleunigungen B8 im Ausschwingversuch bei gelösten Schienen [g]	112
Abbildung 3.62: Wege W5 im Ausschwingversuch bei gelösten Schienen [mm]	113
Abbildung 3.63: Wege W6 im Ausschwingversuch bei gelösten Schienen [mm]	113
Abbildung 3.64: Abbildung der Unwuchterreger	114
Abbildung 3.65: Vollscheibe	115
Abbildung 3.66: Drittelscheibe	116
Abbildung 3.67: Schaltschrank zur Steuerung der Unwuchterreger	117
Abbildung 3.68: Montagepunkte der Beschleunigungsaufnehmer zur Messung vertikaler Beschleunigungen	118
Abbildung 3.69: Montagepunkte der Beschleunigungsaufnehmer zur Messung horizontaler Beschleunigungen	119
Abbildung 3.70: Montagepunkte der Wegaufnehmer zur Messung vertikaler Verformungen	119
Abbildung 3.71: Montagepunkte der Wegaufnehmer zur Messung horizontaler Verformungen	120
Abbildung 3.72: Montagepunkte der Dehnmessstreifen zur Messung lokaler Dehnungen	120
Abbildung 3.73: Anordnung und Bezeichnung der verwendeten Messinstrumente	121

Abbildung 3.74: Wegaufnehmer im Auflagerbereich	121
Abbildung 3.75: Wegaufnehmer, Beschleunigungsaufnehmer und Dehnmessstreifen in Brückenmitte	122
Abbildung 3.76: Drucksensor am Flüssigkeitsschwingungstilger (Versuchsreihe 1) montiert	122
Abbildung 3.77: Signalwandler und Laptop zur Datenauswertung	123
Abbildung 4.1: Prinzipskizze eines Rotationsrheometers (Kirchhofer, 2008)	125
Abbildung 4.2: Ferrofluid unter dem Einfluss eines Neodym-Bor-Eisenmagneten (Jurvetson, 2006)	132
Abbildung 5.1: Geometrie des V-förmigen Flüssigkeitsschwingungstilgers	135
Abbildung 5.2: Flüssigkeitsschwingungstilger unter vertikaler translatorischer Anregung mit Berücksichtigung der Tangentenneigung des Brückentragwerks zum Zeitpunkt $t = 0$ und $t = t_1$	136
Abbildung 5.3: Flüssigkeitsspiegellagen im unausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_s$ (Fall 1)	142
Abbildung 5.4: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt $t=0$ (Fall 1)	142
Abbildung 5.5: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_1$ mit der Flüssigkeitsspiegelauslenkung u (Fall 1)	143
Abbildung 5.6: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 1)	144
Abbildung 5.7: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 1, Ausschnitt)	145
Abbildung 5.8: Flüssigkeitsspiegellagen im unausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_s$ (Fall 2)	146
Abbildung 5.9: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt $t=0$ (Fall 2)	146
Abbildung 5.10: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_1$ mit der Flüssigkeitsspiegelauslenkung u (Fall 2)	146
Abbildung 5.11: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 2)	148
Abbildung 5.12: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 2, Ausschnitt)	149
Abbildung 5.13: Flüssigkeitsspiegellagen im unausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_s$ (Fall 3)	150
Abbildung 5.14: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt $t=0$ (Fall 3)	150
Abbildung 5.15: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_1$ mit der Flüssigkeitsspiegelauslenkung u (Fall 3)	150
Abbildung 5.16: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 3)	153

Abbildung 5.17: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 3, Ausschnitt)	153
Abbildung 5.18: Flüssigkeitsspiegellagen im unausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_s$ (Fall 4)	154
Abbildung 5.19: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Gleichgewichtszustand nach Einstellung von Δz_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ (Fall 4)	155
Abbildung 5.20: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_1$ mit der Flüssigkeitsspiegelauslenkung u (Fall 4)	155
Abbildung 5.21: Verlauf von H_L und $H_{L,ges}$ in Abhängigkeit von L_{ges} und Δz_0 (Fall 4)	156
Abbildung 5.22: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 4)	158
Abbildung 5.23: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 4, Ausschnitt)	158
Abbildung 5.24: Flüssigkeitsspiegellagen im unausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_s$ (Fall 5)	159
Abbildung 5.25: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Gleichgewichtszustand nach Einstellung von Δz_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ (Fall 5)	160
Abbildung 5.26: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_1$ mit der Flüssigkeitsspiegelauslenkung u (Fall 5)	160
Abbildung 5.27: Verlauf der (fiktiven) Ausgangshöhe der Luftvolumina H_L sowie der tatsächlichen Luftfederhöhen $H_{L,ges,1}$ und $H_{L,ges,2}$ in Abhängigkeit von L_{ges} und Δz_0 (Fall 5)	161
Abbildung 5.28: Verlauf der (fiktiven) Ausgangshöhe der Luftvolumina H_L sowie der tatsächlichen Luftfederhöhen $H_{L,ges,1}$ und $H_{L,ges,2}$ und der Flüssigkeitsspiegellagen in Abhängigkeit von Δz_0 , $L_{ges} = 3,0$ m (Fall 5)	162
Abbildung 5.29: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 5)	164
Abbildung 5.30: Exakte und linear angenäherte Druckdifferenz zwischen Punkt 1' und 2' (Fall 5, Ausschnitt)	164
Abbildung 5.31: Geometrie des Flüssigkeitsschwingungstilgers zur Ermittlung der Eigenfrequenz	166
Abbildung 5.32: Verlauf der Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Parameter H und H_L (Fall 1)	168
Abbildung 5.33: Verlauf der Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Parameter H und H_L (Fall 2)	169
Abbildung 5.34: Verlauf der Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Parameter H und H_L (Fall 3)	171
Abbildung 5.35: Verlauf der Eigenfrequenz in Abhängigkeit von L_{ges} (Fall 4)	172
Abbildung 5.36: Verlauf der Eigenfrequenz in Abhängigkeit von L_{ges} (Fall 5)	174
Abbildung 5.37: Rohreibungskoeffizient λ in Abhängigkeit von Re und k/d (Bollrich, 2000)	176

Abbildung 5.38: Stabilitätskarte für die Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsschwingungstilgers ohne Dämpfung	181
Abbildung 5.39: Stabilitätskarte der Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsschwingungstilgers unter Berücksichtigung viskoser Dämpfung	185
Abbildung 5.40: momentaner Massenmittelpunkt der Flüssigkeit	193
Abbildung 5.41: Gewichtskraft im momentanen Massenmittelpunkt angreifend	197
Abbildung 5.42: Zweimassenschwinger in Ausgangs- und ausgelenkter Lage mit absoluter Tilgerbewegung	199
Abbildung 5.43: dynamische Vergrößerungsfunktionen der Tragwerksbewegung unter Anwendung der optimalen Tilgerabstimmungen	205
Abbildung 5.44: Ablaufschema zur Bestimmung der optimalen Entwurfparameter für den Flüssigkeitsschwingungstilger	206
Abbildung 6.1: auf der Versuchsbrücke montierte Flüssigkeitsschwingungstilger	208
Abbildung 6.2: Kraftschlüssiger Verbund der Tilger mit der Versuchsbrücke realisiert mit Rohrschellen	209
Abbildung 6.3: druckdichter Abschluss der Rohrenden mit Ventil zur Druckaufbringung	209
Abbildung 6.4: realisierte Tilgergeometrie des Tilgertyps 1	210
Abbildung 6.5: Tilgerdarstellung mit den zu variierenden Parametern	211
Abbildung 6.6: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit inaktivem Tilger	214
Abbildung 6.7: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit einem aktiven Tilger	214
Abbildung 6.8: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit einem aktiven Tilger	215
Abbildung 6.9: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit einem aktiven Tilger	215
Abbildung 6.10: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit einem aktiven Tilger	216
Abbildung 6.11: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit einem aktiven Tilger	216
Abbildung 6.12: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit einem aktiven Tilger	217
Abbildung 6.13: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit einem aktiven Tilger	217
Abbildung 6.14: Vergleich der maximalen Amplituden bei unterschiedlicher Tilgerabstimmung [mm]	218
Abbildung 6.15: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit inaktiven Tilgern	219
Abbildung 6.16: Beschleunigungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit inaktiven Tilgern	219
Abbildung 6.17: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit inaktiven Tilgern	220
Abbildung 6.18: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen in Brückenmitte mit inaktiven Tilgern	220
Abbildung 6.19: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern ($f_{gepl} = 4,60 \text{ Hz}$, $\mu = 2 \cdot 1,21 = 2,42 \%$)	221
Abbildung 6.20: Beschleunigungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern ($f_{gepl} = 4,60 \text{ Hz}$, $\mu = 2 \cdot 1,21 = 2,42 \%$)	221

Abbildung 6.21: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern	222
Abbildung 6.22: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern	222
Abbildung 6.23: Gegenüberstellung der Amplitudenfrequenzgänge der Verformungen des Brückentragwerks mit inaktiven und zwei optimal frequenzabgestimmten Tilgern	223
Abbildung 6.24: Gegenüberstellung der Amplitudenfrequenzgänge der Beschleunigungen des Brückentragwerks mit inaktiven und zwei optimal frequenzabgestimmten Tilgern	223
Abbildung 6.25: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern (reines Wasser)	225
Abbildung 6.26: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern (0,25 %-iges Wasser-Natrium-CMC-Gemisch)	226
Abbildung 6.27: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern (0,50 %-iges Wasser-Natrium-CMC-Gemisch)	226
Abbildung 6.28: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern (1,50 %-iges Wasser-Natrium-CMC-Gemisch)	227
Abbildung 6.29: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern (0,25 %-iges Wasser-Natrium-CMC-Gemisch) mit Anwendung der Bandbreitenmethode	227
Abbildung 6.30: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern (0,50 %-iges Wasser-Natrium-CMC-Gemisch) mit Anwendung der Bandbreitenmethode	228
Abbildung 6.31: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit zwei aktiven und optimal frequenzabgestimmten Tilgern (1,50 %-iges Wasser-Natrium-CMC-Gemisch) mit Anwendung der Bandbreitenmethode	228
Abbildung 6.32: Ausschwingverhalten in Brückenmitte im Resonanzfall mit inaktiven Tilgern	229
Abbildung 6.33: Ausschwingverhalten in Brückenmitte im Resonanzfall mit zwei aktiven und optimal abgestimmten Tilgern (reines Wasser)	230
Abbildung 6.34: Ausschwingverhalten in Brückenmitte im Resonanzfall mit zwei aktiven und optimal abgestimmten Tilgern (0,25 %-iges Wasser-Natrium-CMC-Gemisch)	230
Abbildung 6.35: Skizze des Signalflussplans des gekoppelten Tragwerk-Flüssigkeitsschwingungstilger-Systems	232
Abbildung 6.36: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen des Einmassenschwingers mit zwei aktiven Flüssigkeitsschwingungstilgern mit unterschiedlicher Luftfederhöhe H_L	234
Abbildung 6.37: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen des Einmassenschwingers mit 2 Flüssigkeitsschwingungstilgern (Feinabstimmung)	234

Abbildung 6.38: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen des Einmassenschwingers mit zwei Flüssigkeitsschwingungstilgern und Variation des turbulenten Verlustkoeffizienten δ_v	236
Abbildung 6.39: Amplitudenfrequenzgang der Flüssigkeitsspiegelbewegung bei Variation des turbulenten Verlustkoeffizienten δ_v	237
Abbildung 6.40: numerische Brückenbewegung im Resonanzfall ohne Flüssigkeitsschwingungstilger	238
Abbildung 6.41: numerische Brückenbewegung im Resonanzfall mit zwei optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgern	239
Abbildung 6.42: numerische Bewegung des Flüssigkeitsfadens im Resonanzfall	240
Abbildung 6.43: stationäre Bewegung des Flüssigkeitsfadens im Resonanzfall	241
Abbildung 6.44: Amplituden-Frequenz-Spektrum der Flüssigkeitsschwingung	241
Abbildung 6.45: Amplituden-Frequenz-Spektrum der Flüssigkeitsschwingung (Ausschnitt)	242
Abbildung 6.46: Krafterregung durch Unwuchterreger sowie resultierende Vertikalkomponente der Tilgerkraft	243
Abbildung 6.47: Amplitudenfrequenzgänge der Tragwerksbewegung bei unterschiedlichem statischem Moment der Unwuchterreger und nichtlinearem Druckterm	244
Abbildung 6.48: Amplitudenfrequenzgänge der Flüssigkeitsfadenbewegung bei unterschiedlichem statischem Moment der Unwuchterreger und nichtlinearem Druckterm	245
Abbildung 6.49: Amplitudenfrequenzgänge der Tragwerksbewegung bei unterschiedlichem statischem Moment der Unwuchterreger und linearisiertem Druckterm	246
Abbildung 6.50: Amplitudenfrequenzgänge der Flüssigkeitsfadenbewegung bei unterschiedlichem statischem Moment der Unwuchterreger und linearisiertem Druckterm	246
Abbildung 6.51: Maximale Amplituden der Tragwerksbewegung ermittelt mit nichtlinearem und mit linearisiertem Druckterm	247
Abbildung 6.52: Maximale Amplituden der Flüssigkeitsbewegung ermittelt mit nichtlinearem und mit linearisiertem Druckterm	248
Abbildung 6.53: Maximale Amplituden der Flüssigkeitsbewegung bezogen auf die vertikale Flüssigkeitsspiegeldifferenz ermittelt mit nichtlinearem und mit linearisiertem Druckterm	248
Abbildung 6.54: Stabilitätskarte für die Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsschwingungstilgers ohne Dämpfung	250
Abbildung 6.55: Lage der Parameterpaare bei statischen Unwuchten m_e von 1,0 und 10,0 kgm	251
Abbildung 6.56: Bewegungen des Tragwerks bei Anordnung eines Tilgers mit instabilem Parameterpaar δ und ϵ bei einem statischen Moment von 10,0 kgm	251
Abbildung 6.57: Bewegungen des Tragwerks bei Anordnung eines Tilgers mit stabilem Parameterpaar δ und ϵ bei einem statischen Moment von 1,0 kgm	252

A. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 6.58: Vergleich der auf die statische Unwucht bezogene Tragwerksbewegung mit stabilen und instabilen Parameterpaar δ und ε bei einem statischen Moment von 1,0 und 10,0 kgm	252
Abbildung 6.59: geplante Geometrie des PE-HD Tilgers	254
Abbildung 6.60: geplante Geometrie des Plexiglastilgers mit Segmentbogen	255
Abbildung 6.61: Holzkonstruktion zur Montage der Flüssigkeitsschwingungstilger der Versuchsreihe 2, Schrägansicht	256
Abbildung 6.62: Holzkonstruktion zur Montage der Flüssigkeitsschwingungstilger der Versuchsreihe 2, Frontalansicht	256
Abbildung 6.63: auf dem Brückentragwerk mittels Holzkonstruktion befestigter Plexiglastilger	257
Abbildung 6.64: auf dem Brückentragwerk mittels Holzkonstruktion befestigter PE-HD Tilger	257
Abbildung 6.65: Befestigung des Plexiglastilgers mit Hartholzsockeln als Auflager und Spanngurten zum kraftschlüssigen Verbund	258
Abbildung 6.66: Abschlusskolben der Plexiglastilger mit Darstellung der aufblasbaren Dichtung, aufgeklebten Stahllaschen mit Rohrschellenverstärkung und Gewindestange	259
Abbildung 6.67: Untersicht der Kolbenkonstruktion mit dem Anschluss für die Druckdichtungen (blaue Druckluftleitung), dem Einlassventil für den Rohrüberdruck (goldenes Ventil) und dem Drucksensor (silbernes Ventil)	260
Abbildung 6.68: Draufsicht der Kolbenkonstruktion mit der Zuluftleitung für die Dichtung (blau) sowie für den Rohrüberdruck (grau) und Drucksensor	260
Abbildung 6.69: Befestigungsdeckel sowie Verstellmöglichkeit der Kolbenkonstruktion mit Darstellung der Gewindestange zum Höhenverstellen des Kolbens, den aufgeklebten Stahllaschen samt Rohrschellenverstärkung sowie den Versorgungsleitungen für den Luftdruck der Druckdichtungen (blau) sowie der Rohre (grau) und Datenkabel des Drucksensors (schwarz)	261
Abbildung 6.70: Plexiglastilger mit eingestellter Stromfadenlänge 2H	262
Abbildung 6.71: Plexiglastilger mit eingestellter Stromfadenlänge 2H (Detailansicht)	262
Abbildung 6.72: Plexiglastilger mit eingestellter Stromfadenlänge 2H und montierten und luftdicht abgeschlossenen Rohrabschlüssen	263
Abbildung 6.73: Plexiglastilger mit eingestellter Flüssigkeitsspiegeldifferenz Δz_0	263
Abbildung 6.74: realisierte Tilgergeometrie des PE-HD Tilgers	264
Abbildung 6.75: realisierte Tilgergeometrie des Plexiglastilgers	265
Abbildung 6.76: PE-HD Tilgerdarstellung mit den zu variierenden Parametern	266
Abbildung 6.77: Plexiglastilgerdarstellung mit den zu variierenden Parametern	267
Abbildung 6.78: Unwuchterreger mit montierten Drittelsegmenten, alle Unbalancen ausgebaut	267
Abbildung 6.79: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit inaktiven Tilgern	270
Abbildung 6.80: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit aktiven Tilgern	271
Abbildung 6.81: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit aktiven Tilgern	271

Abbildung 6.82: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit aktiven Tilgern	272
Abbildung 6.83: Verformungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit aktiven Tilgern	272
Abbildung 6.84: Beschleunigungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit inaktiven Tilgern	273
Abbildung 6.85: Beschleunigungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit aktiven Tilgern	273
Abbildung 6.86: Beschleunigungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit aktiven Tilgern	274
Abbildung 6.87: Beschleunigungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit aktiven Tilgern	274
Abbildung 6.88: Beschleunigungen in Brückenmitte im Resonanzfall mit aktiven Tilgern	275
Abbildung 6.89: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit inaktiven Tilgern	276
Abbildung 6.90: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit inaktiven Tilgern ($f_{ger} = 2,73$ Hz)	276
Abbildung 6.91: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit inaktiven Tilgern ($f_{ger} = 2,76$ Hz)	277
Abbildung 6.92: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit inaktiven Tilgern ($f_{ger} = 2,80$ Hz)	277
Abbildung 6.93: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen in Brückenmitte mit inaktiven Tilgern ($f_{ger} = 2,89$ Hz)	278
Abbildung 6.94: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen in Brückenmitte mit inaktiven Tilgern	278
Abbildung 6.95: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen in Brückenmitte mit inaktiven Tilgern ($f_{ger} = 2,73$ Hz)	279
Abbildung 6.96: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen in Brückenmitte mit inaktiven Tilgern ($f_{ger} = 2,76$ Hz)	279
Abbildung 6.97: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen in Brückenmitte mit inaktiven Tilgern ($f_{ger} = 2,80$ Hz)	280
Abbildung 6.98: Amplitudenfrequenzgang der Beschleunigungen in Brückenmitte mit inaktiven Tilgern ($f_{ger} = 2,89$ Hz)	280
Abbildung 6.99: Gegenüberstellung der Amplitudenfrequenzgänge der Verformungen des Brückentragwerks mit inaktivem und jeweils unterschiedlich frequenzabgestimmtem aktiven Tilgerpaar	281
Abbildung 6.100: Gegenüberstellung der Amplitudenfrequenzgänge der Beschleunigungen des Brückentragwerks mit inaktivem und jeweils unterschiedlich frequenzabgestimmtem aktiven Tilgerpaar	281
Abbildung 6.101: Anordnung der vier Drucksensoren	283
Abbildung 6.102: gemessene Druckschwankungen beim Drucksensor 1 [bar]	285
Abbildung 6.103: gemessene Druckschwankungen beim Drucksensor 2 [bar]	285
Abbildung 6.104: gemessene Druckschwankungen beim Drucksensor 3 [bar]	286
Abbildung 6.105: gemessene Druckschwankungen beim Drucksensor 4 [bar]	286
Abbildung 6.106: aus den Druckmessungen ermittelte Flüssigkeitsspiegelbewegung u_1 [mm]	287

A. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 6.107: aus den Druckmessungen ermittelte Flüssigkeitsspiegelbewegung u_2 [mm]	287
Abbildung 6.108: aus den Druckmessungen ermittelte Flüssigkeitsspiegelbewegung u_3 [mm]	288
Abbildung 6.109: aus den Druckmessungen ermittelte Flüssigkeitsspiegelbewegung u_4 [mm]	288
Abbildung 6.110: Momentaufnahme 1 der Flüssigkeitsbewegung beim kleineren Luftvolumen	289
Abbildung 6.111: Momentaufnahme 2 der Flüssigkeitsbewegung beim kleineren Luftvolumen	290
Abbildung 6.112: Momentaufnahme der Flüssigkeitsbewegung beim größeren Luftvolumen	290
Abbildung 6.113: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen des Einmassenschwingers mit zwei aktiven Flüssigkeitsschwingungstilgern mit unterschiedlicher Luftfederhöhe H_L	292
Abbildung 6.114: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen des Einmassenschwingers mit 2 Flüssigkeitsschwingungstilgern (Feinabstimmung)	293
Abbildung 6.115: Amplitudenfrequenzgang der Verformungen des Einmassenschwingers mit zwei Flüssigkeitsschwingungstilgern und Variation des turbulenten Verlustkoeffizienten δ_v	295
Abbildung 6.116: Amplitudenfrequenzgang der Flüssigkeitsspiegelbewegung bei Variation des turbulenten Verlustkoeffizienten δ_v	295
Abbildung 6.117: Amplitudenfrequenzgang mit versuchstechnisch optimal abgestimmter Tilgerkonfiguration unter Anwendung der Bandbreitenmethode	297
Abbildung 6.118: Flüssigkeitsspiegellagen im ausgelenkten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_1$ mit der Flüssigkeitsspiegelauslenkung u (Fall 2)	298
Abbildung 6.119: Flüssigkeitsspiegelbewegung $u_1 = u_2$ des numerisch optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgers [mm]	299
Abbildung 6.120: Flüssigkeitsspiegelbewegung $u_1 = u_2$ des numerisch optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgers (Ausschnitt) [mm]	299
Abbildung 6.121: absoluter Druckverlauf p_1 im Rohrende bei Punkt 1' [Pa] = 10^{-5} [bar]	300
Abbildung 6.122: relativer Druckverlauf Δp_1 im Rohrende bei Punkt 1' [Pa] = 10^{-5} [bar]	300
Abbildung 6.123: absoluter Druckverlauf p_2 im Rohrende bei Punkt 2' [Pa] = 10^{-5} [bar]	301
Abbildung 6.124: relativer Druckverlauf Δp_2 im Rohrende bei Punkt 2' [Pa] = 10^{-5} [bar]	301
Abbildung 6.125: Skizze der Anordnung der Flüssigkeitsschwingungstilger bei der Versuchsreihe 2 mit Darstellung des durch die Flüssigkeitsbewegung erzeugten Momentes	303
Abbildung 6.126: auf das Brückentragwerk durch die Flüssigkeitsbewegung eines Tilgers einwirkendes Moment M_A [Nm]	304
Abbildung 6.127: auf das Brückentragwerk durch die Flüssigkeitsbewegung eines Tilgers einwirkendes Moment M_{Ag} resultierend aus der Erdbeschleunigung [Nm]	304
Abbildung 6.128: auf das Brückentragwerk durch die Flüssigkeitsbewegung eines Tilgers einwirkendes Moment M_{Aw} resultierend aus der Brückenbewegung [Nm]	305

Abbildung 6.129: Gegenüberstellung der durch das Tilgermoment induzierten Kraft mit der Unwucherregung des Hauptträgers A	306
Abbildung 6.130: Gegenüberstellung der durch das Tilgermoment induzierten Kraft mit der Unwucherregung des Hauptträgers B	306
Abbildung 7.1: Längsschnitt der Mühlheimer Achbrücke (Aigner, 2008)	308
Abbildung 7.2: Regelquerschnitt der Mühlheimer Achbrücke (Aigner, 2008)	309
Abbildung 7.3: Obergurt eines Fachwerkhauptträgers samt (idealisierter) mitwirkender Stahlbetonplatte	309
Abbildung 7.4: Untergurt eines Fachwerkhauptträgers	310
Abbildung 7.5: Fachwerkdiagonale	310
Abbildung 7.6: statisches System eines Hauptträgers der Stahlverbundbrücke	311
Abbildung 7.7: Aufbaulasten [kN/m]	311
Abbildung 7.8: 1. Eigenform (Biegeeigenform mit 2,27 Hz)	311
Abbildung 7.9: Fläche, Trägheitsmoment und Schwerpunktabstände zum Bezugspunkt des Obergurtes des Fachwerkträgers	312
Abbildung 7.10: Fläche, Trägheitsmoment und Schwerpunktabstände zum Bezugspunkt des Untergurtes des Fachwerkträgers	312
Abbildung 7.11: Fläche, Trägheitsmoment und Schwerpunktabstände zum Bezugspunkt der Diagonalen des Fachwerkträgers	312
Abbildung 7.12: Querschnitt für die Ermittlung der Biegesteifigkeit	313
Abbildung 7.13: Auflagerkräfte des Lastfalls Struktureigengewicht	314
Abbildung 7.14: Verbundbrückentragwerk mit fünf in die Diagonalen integrierten Flüssigkeitsschwingungstilgern pro Hauptträger	315
Abbildung 7.15: Prinzipdarstellung der Flüssigkeitsschwingungstilger in den Fachwerkdiagonalen integriert mit unausgelenkten Flüssigkeitsspiegeln nach dem Befüllen (Rohrenden sind offen)	316
Abbildung 7.16: Prinzipdarstellung der Flüssigkeitsschwingungstilger in den Fachwerkdiagonalen integriert mit den zu variierenden Tilgerparametern H_L und Δz_0	317
Abbildung 7.17: Flüssigkeitsschwingungstilger integriert in den Fachwerkdiagonalen mit optimaler Tilgergeometrie	318
Abbildung 7.18: modaler Anteil der Flüssigkeitsschwingungstilger in Abhängigkeit ihrer Lage zur Brückenmitte	321
Abbildung 7.19: Schwingungen in Brückenmitte ohne Flüssigkeitsschwingungstilger zufolge einer Unwucherregung mit 2,27 Hz und einem statischen Moment von 150.000 kgm, $\zeta = 1,0 \%$	321
Abbildung 7.20: Schwingungen in Brückenmitte ohne Flüssigkeitsschwingungstilger zufolge einer Unwucherregung mit 2,27 Hz und einem statischen Moment von 150.000 kgm, $\zeta = 1,0 \%$, stationärer Bereich	322
Abbildung 7.21: Schwingungen in Brückenmitte mit fünf optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgern pro Hauptträger zufolge einer Unwucherregung mit 2,27 Hz und einem statischen Moment von 150.000 kgm	322

Abbildung 7.22: Schwingungen in Brückenmitte mit fünf optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgern pro Hauptträger zufolge einer Unwuchterregung mit 2,27 Hz und einem statischen Moment von 150.000 kgm, stationärer Bereich	323
Abbildung 7.23: Amplitudenfrequenzgang der Tragwerksmitte mit und ohne Flüssigkeitsschwingungstilger bei Unwuchterregung mit einem statischen Moment von 150.000 kgm	323
Abbildung 7.24: Beschleunigungen in Brückenmitte ohne Flüssigkeitsschwingungstilger zufolge einer Unwuchterregung mit 2,27 Hz und einem statischen Moment von 150.000 kgm, $\zeta = 1,0 \%$	324
Abbildung 7.25: Beschleunigungen in Brückenmitte ohne Flüssigkeitsschwingungstilger zufolge einer Unwuchterregung mit 2,27 Hz und einem statischen Moment von 150.000 kgm, $\zeta = 1,0 \%$, stationärer Bereich	324
Abbildung 7.26: Beschleunigungen in Brückenmitte mit fünf optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgern pro Hauptträger zufolge einer Unwuchterregung mit 2,27 Hz und einem statischen Moment von 150.000 kgm	325
Abbildung 7.27: Beschleunigungen in Brückenmitte mit fünf optimal abgestimmten Flüssigkeitsschwingungstilgern pro Hauptträger zufolge einer Unwuchterregung mit 2,27 Hz und einem statischen Moment von 150.000 kgm, stationärer Bereich	325
Abbildung 7.28: Beschleunigungsfrequenzgang der Tragwerksmitte mit und ohne Flüssigkeitsschwingungstilger bei Unwuchterregung mit einem statischen Moment von 150.000 kgm	326
Abbildung 7.29: Flowchart zur Dimensionierung der Flüssigkeitsschwingungstilger bei vorgegebenen Platzverhältnissen	328
Abbildung 7.30: Flowchart zur Dimensionierung der Flüssigkeitsschwingungstilger bei frei wählbaren Platzverhältnissen	329
Abbildung 8.1: Anordnung der Flüssigkeitsschwingungstilger mit Anwendung einer magnetorheologischen Flüssigkeit	330
Abbildung 8.2: Flüssigkeitsschwingungstilger mit verjüngten Luftvolumina	331
Abbildung 8.3: Flüssigkeitsschwingungstilger mit verjüngtem Rohrdurchmesser im Bogenbereich	332

B. TABELLENVERZEICHNIS

Tabelle 3.1: Ermittlung des viskosen Dämpfungsmaßes aus den Ausschwingkurven W5 mittels des logarithmischen Dekrements	99
Tabelle 3.2: Ermittlung des viskosen Dämpfungsmaßes aus den Ausschwingkurven W6 mittels des logarithmischen Dekrements	99
Tabelle 3.3: statische Momente m_e der Vollscheiben bei unterschiedlicher Anordnung der Unbalancen	116
Tabelle 3.4: statische Momente m_e der Drittelscheiben bei unterschiedlicher Anordnung der Unbalancen	117
Tabelle 4.1: Versuchsreihen der untersuchten Fluide	127
Tabelle 4.2: Versuchsergebnisse Wasser + Ethylenglycol	127
Tabelle 4.3: Versuchsergebnisse Wasser + Ethylenglycol + 1,3 g Natriumsulfat	128
Tabelle 4.4: Versuchsergebnisse Wasser + Ethylenglycol + 2,7 g Natriumsulfat	128
Tabelle 4.5: Versuchsergebnisse Ethylenglycol + 0,75 g Trinatriumcitratwasserlösung	128
Tabelle 4.6: Versuchsergebnisse Ethylenglycol + 2,80 ml 43%-ige EDTA-Na-Wasserlösung	129
Tabelle 4.7: Versuchsergebnisse Wasser + Ethylenglycol + Na-CMC	129
Tabelle 4.8: Versuchsergebnisse Wasser + Polyethylenglycol 300	130
Tabelle 4.9: Versuchsergebnisse Siliconöl	130
Tabelle 4.10: Versuchsergebnisse Octadecafluoroctan	131
Tabelle 4.11: Versuchsergebnisse Perfluormethyldecanaphtalin	131
Tabelle 4.12: Versuchsergebnisse Ethylenglycol + Ferrofluid	132
Tabelle 4.13: Versuchsergebnisse Wasser + Natriumwolframat	133
Tabelle 4.14: Versuchsergebnisse Natriummetawolframatlösung	133
Tabelle 4.15: Versuchsergebnisse Natriumwolframatlösung + Ethylenglycol (50/50 %)	133
Tabelle 4.16: Versuchsergebnisse Wasser + Kaliumhexacyanoferrat	133
Tabelle 6.1: Variation der Tilgerparameter	212
Tabelle 6.2: optimale Parameter des Tilgers	213
Tabelle 6.3: untersuchte Wasser-Natrium-CMC-Gemische sowie deren Viskosität	225
Tabelle 6.4: rechnerische Eigenfrequenzen des Flüssigkeitsschwingungstilgers in Abhängigkeit der Luftfederhöhe H_L	233
Tabelle 6.5: Variation der Tilgerparameter für den Plexiglastilger	268
Tabelle 6.6: Variation der Tilgerparameter für den PE-HD Tilger	268
Tabelle 6.7: optimale Parameter des Plexiglas- und PE-HD Tilgers	269
Tabelle 6.8: rechnerische Eigenfrequenzen des Flüssigkeitsschwingungstilgers in Abhängigkeit der Luftfederhöhe H_L	291

C. BIBLIOGRAPHIE

Abramson H.: *The dynamic behavior of liquids in moving containers*. NASA SP-106, 1966

Aigner F., Fink J.: *Statik zur Mühlheimer Achbrücke* (nicht veröffentlicht), Wien, Technische Universität Wien, Institut für Tragkonstruktionen – Stahlbau, 2008

Angermann A., Beuschel M., Rau M., Wohlfarth U.: *Matlab – Simulink – Stateflow*. München, Oldenbourg Wissenschaftsverlag GesmbH, 2005

Asami T.: *Closed-form exact solution to H-Optimization of dynamic vibration absorbers*. Journal of Vibration and Acoustics, 398-411, 2003

Bollrich G.: *Technische Hydromechanik – Band 1 – Grundlagen*. Berlin, Verlag Bauwesen, 2000

Brunner A.: *Amortisseur d'oscillation hydraulique pour cheminees*. Societe' Hydrotechnique de France, Journees de l'Hydraulique VIII, 1964

Carrier G.F.: *On the Annular Damper for a Freely Precessing Gyroscope*. Journal of Applied Mechanics, Vol. 27, 1960

Chopra A.: *Dynamics of structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering*. United States, Prentice Hall, 2000

Craig R. Jr., Kurdilla A.: *Fundamentals of Structural Dynamics*. United States, John Wiley & Sons Inc., 2006

Den Hartog J. P.: *Mechanical Vibrations*. New York, Dover Public, 1985

Frahm H.: *Neuartige Schlingertanks zur Abdämpfung von Schiffsrollbewegungen, Theoretischer Teil*. Jahrbuch schiffsbautechnische Gesellschaft 12, 1911

Hauger W., Schnell W., Gross D.: *Technische Mechanik, Band 3, Kinetik*. Berlin, Springer Verlag Berlin, 1999

Hochrainer M.: *Control of vibrations of civil engineering structures with special emphasis on tall buildings*. Technische Universität Wien, Institut für Allgemeine Mechanik, Dissertation, 2001

Ibrahim R. A.: *Recent Advances in Liquid Sloshing*. Applied Mechanics Reviews 54(2), 2001

Jurvetson S.: *Ferrofluid in magnetic field*, Wikipedia: http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Ferrofluid_in_magnetic_field.jpg, 2006

- Kirchhofer J., Hauer T.: *Untersuchungen zur Tilgung von Brückenschwingungen an einem realen Brückenobjekt*. Technische Universität Wien, Institut für Tragkonstruktionen – Stahlbau, Diplomarbeit, 2008
- Klotter K.: *Einfache Schwinger – Teil B: Nichtlineare Schwingungen*. Berlin, Springer Verlag, 1980
- Mang H., Hofstetter G.: *Festigkeitslehre, 2. Auflage*. Wien, Springer Verlag Wien, 2004
- Mathematica: *Wolfram Mathematica 6.0*. Wolfram Research, 2008
- Matlab: *Matlab 2008a*. The Mathworks Inc., 2008
- Merkin D.: *Introduction to the Theory of Stability*. St. Petersburg, Springer Verlag New York Berlin Heidelberg, 1997
- Meschede G. (Hrsgb.): *Gerthsen Physik*, Berlin, Springer Verlag Berlin, 2006
- Meyberg K., Vachenauer P.: *Höhere Mathematik 1*. Berlin, Springer Verlag Berlin, 1999
- Meyberg K., Vachenauer P.: *Höhere Mathematik 2*. Berlin, Springer Verlag Berlin, 1999
- Nayfeh A., Mook D.: *Nonlinear Oscillations*. New York, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KgaA, 1979
- Önorm EN 1990/A1: *Eurocode – Grundlagen der Tragwerksplanung (Änderung)*. Wien, Österreichisches Normungsinstitut, 2006
- Önorm B 1990-1: *Eurocode – Grundlagen der Tragwerksplanung – Teil 1: Hochbau Nationale Festlegungen zu EN 1990 Anhang A1:2003*. Wien, Österreichisches Normungsinstitut, 2004
- Petersen Ch.: *Dynamik der Baukonstruktionen*. Braunschweig, Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, 2000
- Petersen Ch.: *Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau*, München, Maurer & Söhne GmbH & CoKG, 2001
- Reiterer M.: *Schwingungsdämpfung von Baukonstruktionen, insbesondere von Brücken*. Technische Universität Wien, Institut für Allgemeine Mechanik, Dissertation, 2004
- Sanders J., Verhulst F.: *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. New York, Springer Science + Business Media, 2007

Sakei F.: *Tuned liquid column damper – new type device for suppressing of building vibrations*. Proc. Int. Conf. on High-rise Buildings, Nanjing, China, 1989

Simulink: *Simulink Version 7.1 (R2008a)*. The Mathworks Inc., 2008
Sofistik: *Sofistik*. Oberschleissheim, Sofistik AG, 2008

Steindl A.: *Numerische Methoden (Skriptum)*. Technische Universität Wien, Institut für Mechanik und Mechatronik, 2008

Szabo I.: *Einführung in die Technische Mechanik*. Berlin, Springer Verlag Berlin, 2003

Szabo I.: *Höhere Technische Mechanik*. Berlin, Springer Verlag Berlin, 2001

Troger A.: *Autoparametric resonance in mechanical systems*. Cambridge, Cambridge University Press, 2000

Troger H., Steindl A.: *Angewandte Dynamik und nichtlineare Schwingungen (Skriptum)*. Technische Universität Wien, Institut für Mechanik und Mechatronik, 2008

Verhulst F.: *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Utrecht, Springer Verlag Berlin Heidelberg Ne York, 2006

Ziegler F.: *Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper*. Wien, Springer Verlag Wien, 1998

E. MATLAB INPUTFILE

```

% Inputfile für die Simulation eines Einmasseschwingers mit
% Flüssigkeitsschwingungstilgern. Zugehöriges Simulink File lautet
% Tilger_Typ2_Fall2_nlinear

% Eingabe der Parameter (Einheiten: m, m/s^2, kg/m^3, N/m^2, Hz)
-----

% Tilgerparameter

clear all

g = 9.81;
rho = 1000.0;
p0 = 100000.0;
gamma = 1.405;

H = 1.53951;
Hl = 1.2120;
dz0 = 1.8112;
d = 0.2738;
A = d^2*pi/4;
alpha = 60/180*pi;
f1 = 1/2/pi*sqrt(2*g*sin(alpha)/2/H*(1+gamma/2/rho/g*(p0/(Hl*sin(alpha)-
dz0/2)+(p0+rho*g*dz0)/(Hl*sin(alpha)+dz0/2))));
omegal = 2*pi*f1;
mF = 2*H*rho*A;
deltav = 21.000;
n = 2; % Anzahl der Tilger

% Brückenparameter

m = 20740.0;
zet = 0.0255;
fn = 2.783;

me = 7.771;
fu = 2.783;

% Abstimmung

mu = n*(2*H*rho*A)/m;
kappa = dz0/2/H;
fopt = (1+mu*(2-kappa-kappa^2))/(1+2*mu);
flopt = fopt*fn;
zetaopt = sqrt(3*kappa*mu*(1+mu)/8/(1+mu*(2+kappa*mu-kappa^2)));

% Aufruf der Simulink - Simulation
-----

j = 1;

```

E. Matlab Inputfile

```
for Hl = 1.1750:0.0025:1.2250
    Hl
    i = 1;
    f1(1,j) =
    1/2/pi*sqrt(2*g*sin(alpha)/2/H*(1+gamma/2/rho/g*(p0/(Hl*sin(alpha)-
dz0/2)+(p0+rho*g*dz0)/(Hl*sin(alpha)+dz0/2))));

    for fu = 2.50:0.01:3.10
        sim('Tilger_Typ2_Fall2_nlinear',[0,25]);
        nges = length(w);
        wstat = w(round(nges*2/3):nges,1);
        wmax(i,1) = fu;
        wmax(i,j+1) = max(wstat).*1000;
        i = i + 1;
    end
    j = j + 1;
end

for deltav = 1.000:2.000:15.000
    deltav
    i = 1;
    f1(1,j) =
    1/2/pi*sqrt(2*g*sin(alpha)/2/H*(1+gamma/2/rho/g*(p0/(Hl*sin(alpha)-
dz0/2)+(p0+rho*g*dz0)/(Hl*sin(alpha)+dz0/2))));

    for fu = 2.50:0.01:3.10
        sim('Tilger_Typ2_Fall2_nlinear',[0,15]);
        nges = length(w);
        wstat = w(round(nges*2/3):nges,1);
        wmax(i,1) = fu;
        wmax(i,j+1) = max(wstat).*1000;
        zetamin(i,j) = sin(alpha)/4/H/rho/A/2/pi/f1(1,j)/H*wmax(i,j+1);
        nges = length(v);
        vstat = v(round(nges*2/3):nges,1);
        vmax(i,1) = fu;
        vmax(i,j+1) = max(vstat).*1000;
        deltavopt(i,j) =
        zetaopt*3*H*pi/(vmax(i,j+1)/1000)*omega1/(2*pi*fu);
        i = i + 1;
    end
    j = j + 1;
end

for me = 0.50:0.50:10.00
    me
    i = 1;
    for fu = 4.00:0.01:5.00
        sim('Tilger_Fall2_nlinear',[0,15]);
        nges = length(w);
        wstat = w(round(nges*2/3):nges,1);
        wmax(i,1) = fu;
        wmax(i,j+1) = max(wstat).*1000;
        nges = length(v);
        vstat = v(round(nges*2/3):nges,1);
```

E. Matlab Inputfile

```
        vmax(i,1) = fu;
        vmax(i,j+1) = max(vstat).*1000;
        i = i + 1;
    end
    j = j + 1;
end

i = 1;

for fu = 2.00:0.01:3.70
    fu
    sim('Tilger_Typ2_Fall2_nlinear',[0,30]);
    nges = length(w);
    wstat = w(round(nges*2/3):nges,1);
    wmax(i,1) = fu;
    wmax(i,2) = max(wstat).*1000;
    i = i + 1;
end

sim('Tilger_Typ2_Fall2_nlinear',[0,30]);

for i = 1:length(v)
    p1(i,1) =
        (p0+rho*g*dz0)*((Hl*sin(alpha)+dz0/2)/(Hl*sin(alpha)+dz0/2+v(i,1)*sin(alpha)))^gamma;
    dp1(i,1) =
        (p0+rho*g*dz0)*((Hl*sin(alpha)+dz0/2)/(Hl*sin(alpha)+dz0/2+v(i,1)*sin(alpha)))^gamma-rho*g*dz0-p0;
    p2(i,1) = p0*((Hl*sin(alpha)-dz0/2)/(Hl*sin(alpha)-dz0/2-v(i,1)*sin(alpha)))^gamma;
    dp2(i,1) = p0*((Hl*sin(alpha)-dz0/2)/(Hl*sin(alpha)-dz0/2-v(i,1)*sin(alpha)))^gamma-p0;
end

for i = 1:length(v)
    May(i,1) = -mF*(cos(alpha)/2/sin(alpha)*dz0+v(i,1)*cos(alpha))*(g-w2(i,1));
    Mayg(i,1) = -mF*(cos(alpha)/2/sin(alpha)*dz0+v(i,1)*cos(alpha))*(g);
    Mayw(i,1) = -mF*(cos(alpha)/2/sin(alpha)*dz0+v(i,1)*cos(alpha))*(-w2(i,1));
    Fzmay1(i,1) = Mayw(i,1)/2.60;
    Fzmay2(i,1) = -Mayw(i,1)/2.60;
end

Fzerr = F*(m+n*mF)/2;
```