

Vierdimensionale Polytope

Diplomarbeit
im Unterrichtsfach
Darstellende Geometrie

von

Mario Holzbauer

ausgeführt am
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
O. Univ.-Prof. Mag. Dr. Hellmuth Stachel

Wien 2007

Inhaltsverzeichnis

1. Vorwort	2
2. Die vierte Dimension	3
2.1 Eine geometrisch anschauliche Herleitung	3
2.2 Das physikalisch verbreitete Verständnis für die vierte Dimension	4
2.3 Die kosmologische Bedeutung der vierten Dimension	5
2.4 Eine umgangssprachliche Bedeutung der vierten Dimension	5
2.5 geometrische Geschichte der vierten Dimension	6
3. Platonische Polytope	7
3.1 Historisches	7
3.2 Begriffserklärungen und Definitionen	9
3.3 Ludwig Schläfli und das Schläfli-Symbol	11
3.4 Das Schlegel-Diagramm	14
3.5 Die sechs Platonischen Polychora	16
3.6 Das 5-Zell	17
3.7 Das 8-Zell	20
3.8 Das 16-Zell	22
3.9 Das 24-Zell	25
3.10 Das 120-Zell	27
3.11 Das 600-Zell	30
3.12 Zusammenfassung der Platonischen Polychora	32
4. Andere reguläre Polychora	33
5. Uniforme Polychora	35
6. Bewegliche Kreuzpolytope	40
6.1 Bewegliche Kreuzpolytope von A.Walz	40
6.2 Analytische Darstellung der Beweglichkeit	41
7. Darstellende Geometrie im 4-dim. Anschauungsraum A^4	44
7.1 Abbildung einer Geraden	45
7.2 Abbildung einer Ebene	45
7.3 Abbildung einer Hyperebene	46
7.4 Praktische Umsetzung in die Zeichenebene	47
8. Hilfen zur Visualisierung	51

1. Vorwort

Die Berechtigung des Unterrichtsfaches Darstellende Geometrie wurde in den letzten Jahren oft in Frage gestellt, obwohl sie durch zahlreiche Anforderungen in diversen technischen Bereichen wohl eindeutig gegeben ist. Viele Berufe verlangen die Fähigkeit, Pläne lesen zu können und ein räumliches Vorstellungsvermögen zu besitzen, und die Entwicklung und Förderung dieser Fähigkeiten gehört zur Hauptaufgabe der Darstellenden Geometrie in der Schule. Der verstärkte Einsatz von Computern in den letzten Jahren wird wohl dazu beitragen, dass dieses Unterrichtsfach sowohl bei den Schülern selbst, als auch bei den Eltern wieder ein Image als modernes und innovatives Unterrichtsfach erhält. Im Gegensatz zu dem lange Zeit praktizierten und für Schüler sehr aufwendigen und zeitraubenden händischen Anfertigen aufwendigster Zeichnungen stellt die Verwendung von CAD-Software die Möglichkeit zur Verfügung, konstruierte Objekte in alle erdenklichen Richtungen zu drehen und aus verschiedensten Perspektiven zu betrachten. Diese Möglichkeit trägt sicher dazu bei, sich in dem am Bildschirm dargestellten „virtuellen“ Raum besser zurechtzufinden.

Trotzdem oder gerade deshalb scheint es jedoch wichtig und notwendig, dass nicht darauf vergessen wird, auch den notwendigen theoretischen Hintergrund ausreichend zu vermitteln, nämlich wie dreidimensionale Objekte auf einem Zeichenblatt oder dem Bildschirm, also zweidimensional, dargestellt werden können, was der Name Darstellende Geometrie ja schon beinhaltet.

In der Schule beschränkt man sich hauptsächlich auf die Konstruktion und Darstellung dreidimensionaler Objekte und Körper, den Zugang zu höheren Dimensionen stellt im Physikunterricht die Behandlung von Albert Einsteins Relativitätstheorie dar, in der die vierte Dimension als Zeit einfließt. Es gibt allerdings mehrere unterschiedliche Zugänge zur vierten Dimension, die in Kapitel 2 angesprochen werden. Ein sehr intuitiver Zugang zur vierten Dimension im geometrischen Sinn ist die Polyeder-Geometrie, im Vierdimensionalen die der Polychora. Obgleich man mit Verallgemeinerungen von Aussagen vom Dreidimensionalen in das Vierdimensionale vorsichtig sein muss, bietet sich die Gelegenheit, mit Schülern über den Weg der Platonischen Polyeder zunächst zu den vierdimensionalen Platonischen Polytopen vorzudringen, was in Kapitel 3 geschieht. Es werden Möglichkeiten der Visualisierung vierdimensionaler Polytope besprochen und durch zahlreiche Abbildungen gestützt. Nach den Platonischen werden weitere Klassen von Polytopen, nämlich die 10 zu den regulären Polytopen zählenden Schläfli-Hess-Polychora in Kapitel 4 und die große Klasse der uniformen Polychora in Kapitel 5 vorgestellt. Nach der Betrachtung von Kreuzpolytopen, das sind die mehrdimensionalen Verallgemeinerungen von Oktaedern, und deren Beweglichkeit in Kapitel 6 widmet sich Kapitel 7 der Darstellenden Geometrie des vierdimensionalen Anschauungsraumes und stellt eine Möglichkeit vor, vierdimensionale Objekte auf ein Zeichenblatt zu bringen.

In dieser Arbeit wird versucht für den Schulunterricht eine Anregung zu geben, auch in Darstellender Geometrie einen Ausflug ins Vierdimensionale zu wagen.

2. Die vierte Dimension

Im Folgenden werden einige durchaus unterschiedliche Bedeutungen der „vierten Dimension“ kurz vorgestellt.

2.1 Eine geometrisch anschauliche Herleitung

Eine Dimension bezeichnet eine Ausdehnung in eine Richtung, die nicht durch die Richtungen anderer, untergeordneter Dimensionen dargestellt werden kann. Das bedeutet, dass ein vierdimensionaler rechteckiger Körper je vier Zahlenangaben für seine Position und seine Ausdehnung benötigt (üblicherweise werden hier die kartesischen Koordinaten x, y, z und t verwendet).

Dimension 0: Ein Punkt ohne Ausdehnung.

Dimension 1: Wir bewegen uns in einer beliebigen Richtung vom Punkt weg und erhalten eine Strecke. (x -Achse eines Koordinatensystems, Ausdehnung nach „links“ und „rechts“).

Dimension 2: Wir suchen eine Richtung, die nicht die der Strecke ist, im einfachsten Fall senkrecht auf die Strecke. Dadurch erhalten wir ein Koordinatensystem, mit welchem wir jeden Punkt einer Ebene erreichen können. (y -Achse eines Koordinatensystems, Ausdehnung nach „vor“ und „zurück“)

Dimension 3: Wir suchen eine Richtung, die nicht in der Ebene liegt, im einfachsten Fall senkrecht auf die Ebene „nach oben“. Dadurch erhalten wir ein Koordinatensystem, mit welchem wir jeden Punkt im Raum erreichen können. (z -Achse eines Koordinatensystems, Ausdehnung nach „oben“ und „unten“)

Dimension 4: Wir suchen wiederum eine Richtung, die nicht im Raum liegt. Das sind Richtungen, die wir uns mit unserem 3-dimensionalen Verstand nicht vorstellen können, im einfachsten Fall jedoch wieder senkrecht auf alle Richtungen, die wir uns vorstellen können. Erweitern wir den Raum in diese Richtung, haben wir einen 4-dimensionalen Hyperraum beschrieben. (t -Achse eines Koordinatensystems)

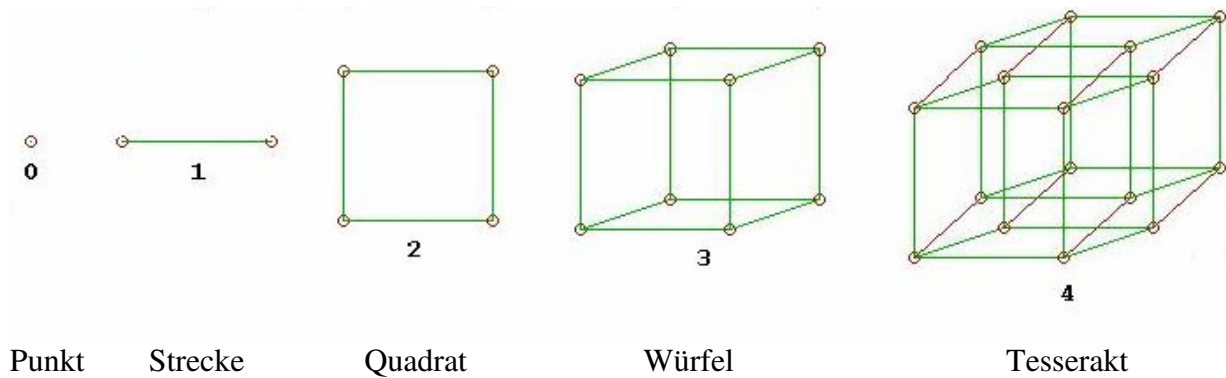


Abb. 2.1

Entsprechend dieser logische Überlegungen kann man sehr leicht nachvollziehen, wie man von einem (0-dimensionalen) Punkt zur (1-dimensionalen) Strecke und von dieser zum (2-dimensionalen) Quadrat und weiter zum (3-dimensionalen) Würfel und schließlich zum 4-dimensionalen (Hyper-)Würfel (Tesseract) gelangt.

Jede Dimension kann man sich als Zusammensetzung einer unendlichen Anzahl der vorherigen Dimension vorstellen. So kann die Gerade (Dimension 1) als Zusammenfügung einer unendlichen Anzahl Punkte (Dimension 0) gedacht werden. Überträgt man diese Gedanken auf die vierte Dimension, so kann diese auch als Zusammensetzung unendlich vieler Räume (Dimension 3) gedacht werden. Der Tesseract besitzt dementsprechend nicht nur 16 Ecken, 32 Kanten und 24 Quadrate, sondern auch 8 Würfel und ist selbst als Unterraum im 5-dimensionalen Würfel enthalten.

2.2 Das physikalisch verbreitete Verständnis für die vierte Dimension

Gemäß der obigen geometrisch anschaulichen Herleitung ist ein vierdimensionales Koordinatensystem ein Koordinatensystem mit 4 linear unabhängigen Richtungen. Es eignet sich somit, um unsere bekannten 3 Raumdimensionen und die Zeit abzubilden.

In Albert Einsteins Relativitätstheorie sind Raum und Zeit tatsächlich zu einer vierdimensionalen Raumzeit vereinigt. Im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem wird der räumliche Abstand eines Punktes vom Ursprung durch

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ berechnet.}$$

In der Raumzeit hat ein „Punkt“ drei Raumkoordinaten und eine Zeitkoordinate, also einen Ort und eine Zeit. Ein Punkt entspricht deshalb einem Ereignis. Für Ereignisse wird ein raum-zeitlicher Abstand definiert, das Quadrat der vierten (Zeit-)Koordinate wird allerdings nicht addiert, sondern subtrahiert. Das ist der Grund, warum die Raumzeit nicht euklidisch ist, hat aber wichtige Folgen, z.B., dass man nicht einfach in der Zeit umkehren kann.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2}$$

Dieser vierdimensionale Abstand ist, nicht wie seine räumliche und seine zeitliche Komponente separat betrachtet, von Bezugssystemen unabhängig. Für Licht, das sich vom Ursprung mit der Geschwindigkeit c fortbewegt, gilt für alle Zeiten und Bezugssysteme $r=0$.

Daraus ergibt sich die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, das Ausgangsprinzip der speziellen Relativitätstheorie.

Zwei Ereignisse, für die das Argument der Wurzel positiv ist, sind raum-zeitlich soweit entfernt, dass ein Lichtstrahl nicht von einem zum anderen Ereignis gelangen kann. Hierzu wäre Überlichtgeschwindigkeit nötig. Da Information entweder über Licht oder Materie übertragen werden kann und Materie in der Relativitätstheorie niemals die Lichtgeschwindigkeit erreichen kann (und somit auch nicht schneller als diese sein kann), können solche Ereignisse niemals in einer Ursache-Wirkung-Beziehung stehen. Die Raumzeit ist also zweigeteilt: Ereignisse mit imaginärem Raumzeit-Abstand kann ein Beobachter sehen. Ereignisse, die zu weit entfernt sind und nur mit Überlichtgeschwindigkeit wahrgenommen werden können, sind prinzipiell unsichtbar.

2.3 Die kosmologische Bedeutung der vierten Dimension

Die Kosmologie (griechisch *κοσμολογία* - die Lehre der Welt) beschäftigt sich mit dem Ursprung und der Entwicklung des Universums (Kosmos) als Ganzem, also auch inwieweit über unsere Vorstellung hinaus der uns umgebende Raum tatsächlich Ausdehnung in weitere Richtungen hat. Die Kosmologie ist damit ein Teilgebiet der Physik und auch der Philosophie.

Die physikalische Kosmologie versucht, das Universum mittels physikalischer Gesetzmäßigkeiten zu beschreiben. Man spricht von einem „klumpigen“ Universum, weil die Galaxien im Universum sehr ungleichmäßig verteilt sind und „Haufen“ mit großen Leerräumen bilden. Die größte bisher entdeckte Struktur, die „große Mauer“, ist ca. 500 Mio. Lichtjahre lang.

2.4 Eine umgangssprachliche Bedeutung der vierten Dimension

Oft ist im täglichen Sprachgebrauch die Rede von etwas Vierdimensionalem, wenn es um Unerklärliches oder Geheimnisvolles geht.

Auch der Begriff 4D-Film wurde bereits kreiert als Bezeichnung für einen 3D-Film (also ein Film mit 3D-Effekt), der mittels Spezialeffekten wie Windgebläse, Vibrationen in den Sitzen oder Wasserspritzern noch realistischer bzw. eindrucksvoller auf die Zuseher (überwiegend in Freizeitparks) wirken soll. Aktuellstes Beispiel hierfür ist das Spezialkino in den Universal Studios Hollywood, das den bekannten Universal-Charakter Shrek in der vermeintlich vierten Dimension zeigt.



Abb. 2.2 Der neueste „4D“-Film

2.5 Die geometrische Geschichte der vierten Dimension

Zurück zur vierten geometrischen Dimension, deren Entwicklung ihre Ursprünge erst in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts hat. Davor gab es mehr oder weniger vage Vorstellungen von „höheren Welten“. Der altgriechische Philosoph Aristoteles (384-322 v.Chr.) schrieb zum Beispiel sinngemäß: „Die Gerade hat Größe in eine Richtung, die Ebene in zwei und der Raum in drei Richtungen, und darüber hinaus gibt es keine Größe, denn das sind alle.“ Der englische Philosoph Henry More (1614-1687) schrieb in einem 1671 veröffentlichten Buch, dass Geister vier Dimensionen hätten. Er wehrte sich wie viele wissenschaftliche Spiritisten gegen den Gedanken, dass Geister substanzlose Abstraktionen seien und umschrieb deren vierdimensionales Dasein mit dem etwas okkulten Begriff *Spissitude*, mit dem er so etwas wie „Substanzdichte“ meinte.

Soweit bekannt ist war der Mathematiker August Ferdinand Möbius der erste, der zum synthetischen Aufbau der vierdimensionalen Geometrie Beiträge leistete. Er stellte 1872 fest, dass es möglich wäre, einen dreidimensionalen Gegenstand durch eine „Hyperraumtransformation“ in sein Spiegelbild zu verwandeln.



Abb. 2.3a

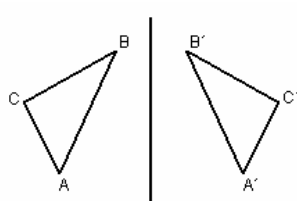


Abb. 2.3b

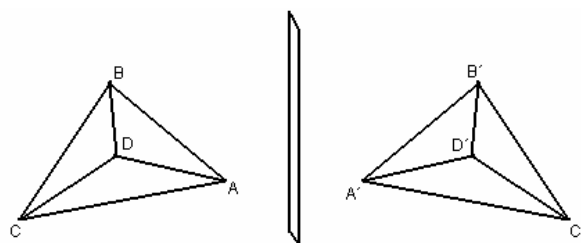


Abb. 2.3c

Diese These leuchtet unmittelbar ein, wenn man vorher folgende analoge Überlegungen trifft: In Abb. 2.3a sind die beiden Strecken AB und B'A' auf der 1-dimensionalen Geraden symmetrisch um O angeordnet. Will man die entsprechenden Punkte A und A' sowie B und B' zur Deckung bringen, bleibt keine andere Möglichkeit, als eine der Strecken um O in der 2-dimensionalen Ebene zu drehen. Genau so verhält es sich mit den symmetrisch bezüglich der Geraden angeordneten Dreiecken in Abb. 2.3b. Um hier entsprechende Punkte zur Deckung zu bringen, muss man, grob gesprochen, ein Dreieck in den 3-dimensionalen Raum nehmen, dort „umdrehen“ und es dann in der 2-dimensionalen Ebene auf das andere legen. Schließlich müsste man einen der in Abb. 2.3c dargestellten Tetraeder genau so über den vierdimensionalen Raum drehen, um ihn mit dem dazu bezüglich der Ebene symmetrischen Tetraeder zur Deckung zu bringen.

Die Vorstellung, dass diese Operation so funktionieren kann, fällt uns als dreidimensionalen Lebewesen so schwer, wie sich ein zweidimensionales Lebewesen (hier also das Dreieck) nicht vorstellen kann, wie es mittels Drehung zu seinem Symmetrie-Bild gelangen soll.

Andererseits könnten wir unser Leben um einige angenehme Tatsachen bereichern, wären wir in der Lage, real im vierdimensionalen Raum zu operieren: Es müssten zum Beispiel nur noch linke Schuhe hergestellt werden, denn die rechten wären mittels Drehung über den vierdimensionalen Raum zu gewinnen. Ebenso könnte man, wie ein ebener Gummiring im 3-dim. Raum umstülpbar ist, einen Gummiball im 4-dim. Raum von innen

nach außen stülpen, ohne ihn aufzuschneiden. Man könnte Herzoperationen ohne Brustkorböffnung durchführen oder feinen schottischen Whisky (oder andere Flüssigkeiten) aus einer Flasche trinken, ohne den Korke zu entfernen.

So betrachtet korreliert sogar Henry Mores Theorie von den vierdimensionalen Geistern mit deren Darstellung in diversen Horrorfilmen: Schwere Gegenstände bewegen sich wie von Geisterhand oder Flaschen leeren sich, ohne dass sie jemand in Händen hält. Das könnte wohl nur deshalb so sein, weil wir dreidimensionale Lebewesen die vierdimensionalen Geister ja gar nicht sehen können, so wie uns ein zwei- oder gar eindimensionales Lebewesen nicht wahrnehmen kann, wenn wir uns im dreidimensionalen Raum bewegen und dort operieren.

3. Platonische Polytope

3.1 Historisches

Als Grundlage für die Beschreibung der regulären Polytope dienen die regulären Polyeder, deren Erforschung eines der ältesten Gebiete der Geometrie ist. Die Wurzeln dieses Teilgebietes reichen zurück bis auf die Zeit um 500 vor Christus. Umfangreichere Arbeiten wurden erstmals um 400 vor Christus von Platon durchgeführt. Obgleich es sichere Indizien gibt, dass er einige Ideen von anderen Autoren übernommen hatte, werden die fünf regelmäßigen (regulären) Polyeder ihm zugesprochen und zu seinem Andenken die Platonischen Polyeder oder Platonischen Körper genannt.



Abb. 3.1 Platon, gezeichnet von Raphael

Platon (latinisiert *Plato*) war ein antiker griechischer Philosoph und lebte in Athen von 428 bis 347 vor Christus. Die Platonischen Körper (regelmäßige konvexe Polyeder) zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Seitenflächen zueinander kongruente regelmäßige Vielecke sind, von denen in jeder Ecke jeweils gleich viele zusammentreffen. Ihre Namen stammen aus dem Griechischen und beziehen sich auf die Anzahl ihrer Flächen:
Tetraeder (vier Dreiecke), Hexaeder (Kubus, Würfel) (sechs Quadrate), Oktaeder (acht Dreiecke), Dodekaeder (zwölf Fünfecke) und Ikosaeder (zwanzig Dreiecke).

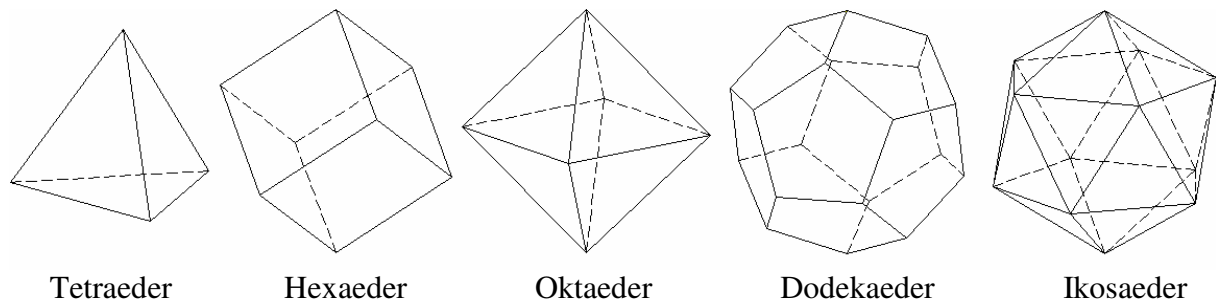


Abb. 3.2 die fünf Platonischen Polyeder, erstellt mit CAD3D

Def: Eine endliche Menge von Strecken mit folgenden Eigenschaften heißt *Polygon*:
 In jedem Endpunkt stoßen genau zwei Strecken zusammen; keine Teilmenge hat diese Eigenschaft. Ein Polygon heißt *regelmäßig (regulär)*, wenn alle seine Seiten gleich lang und alle seine Winkel gleich groß sind. Ein Polygon kann nicht überschlagend (*konvex*) oder überschlagend (*sternförmig*) sein.

Def: Ein *Polyeder* ist eine endliche Menge von Polygonen, deren eine Seite genau zwei Polygonen gemeinsam ist. Das Polygon, dessen Seiten die Eckenfigur der in einer Ecke zusammentreffenden Polyederflächen ist, nennt man *Eckenfigur* eines Polyeders in einer Ecke. Ein Polyeder mit regulären Flächen und regulären Eckenfiguren bezeichnet man als reguläres Polyeder. Konvexe, reguläre Polyeder heißen, wie schon erwähnt, *Platonische Körper*.

Satz: Es gibt genau fünf Platonische Körper (regelmäßige konvexe Polyeder).

Beweis: (nach Euklid):

Eine Eckenfigur muss durch mindestens drei Polygone gebildet werden. Diese werden zu einem Netz verebnet, je zwei haben eine Seitenkante gemeinsam und alle n Polygone haben einen gemeinsamen Eckpunkt S . Man erhält also einen ebenen Winkel α mit Scheitel S . Ist dieser $\geq 360^\circ$, so kann keine Raumecke gebildet werden. Der Beweis erfolgt durch Diskussion aller möglichen Fälle eines solchen Winkels. Das einfachste regelmäßige Polygon ist ein gleichseitiges Dreieck. Es kommen nur drei, vier oder fünf gleichseitige Dreiecke in Frage, weil man mindestens drei zur Bildung einer Raumecke benötigt und sechs ergeben einen Winkel von $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$, die Bildung eines Raumwinkels ist also nicht mehr möglich (Abb. 3.3a).

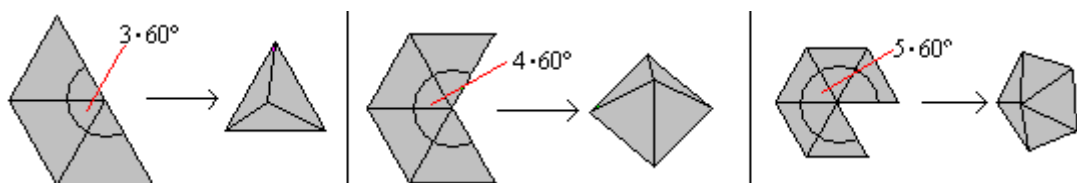


Abb. 3.3a „Falten“ einer Raumecke aus drei, vier und fünf gleichseitigen Dreiecken.

Ebenso kann man nur aus drei Quadraten ($\alpha = 3 \cdot 90^\circ = 270^\circ < 360^\circ$) und drei Fünfecken ($\alpha = 3 \cdot 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$) eine Raumecke „falten“ (Abb 3.3b).

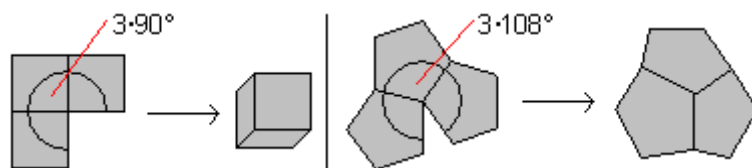


Abb. 3.3b „Falten“ einer Raumecke aus drei Quadraten bzw. drei Fünfecken.

Für reguläre Polygone mit einer Eckenanzahl ≥ 6 lässt sich keine Raumecke mehr bilden.

→ Es gibt nur fünf Platonische Körper. □

Diese Aussage ist äquivalent zum Eulerschen Polyedersatz ($e - k + f = 2$), der später bewiesen wird und der von Ludwig Schläfli für n -dimensionale Polytope verallgemeinert wurde.

Wie bereits erwähnt, beschäftigte man sich erst im 19. Jahrhundert im Zuge der Weiterentwicklung von der klassischen hin zur projektiven und nichteuklidischen Geometrie eingehender mit Überlegungen zu höherdimensionalen geometrischen Objekten. Vor allem Ludwig Schläfli und Victor Schlegel spielen in Zusammenhang mit Polytopen eine große Rolle, beide befassten sich hauptsächlich mit regelmäßigen Polytopen. Schläfli war der erste, der zeigen konnte, dass es im Vierdimensionalen sechs, in höheren Dimensionen allerdings nur noch je drei regelmäßige Polytope gibt. Schlegel wurde bekannt durch die nach ihm benannten Diagramme von Polyedern in der Ebene und von vierdimensionalen Polytopen im Anschauungsraum bzw. in der Ebene. Mehr zum Schläfli-Symbol und Schlegel-Diagramm nach einigen grundlegenden Erklärungen zur im Folgenden verwendeten Terminologie.

3.2 Begriffserklärungen und Definitionen

Def: Als *Polytope* bezeichnet man Polyeder in beliebig hohen Dimensionen, welche von Polytopen einer Dimension niedriger begrenzt sind. Speziell im Vierdimensionalen heißen sie *Polychora* (singular *das Polychor*). Polyeder tragen als Teile von Polychora den Namen *Zelle*.

Def: Ein *Polytop* in n Dimensionen heißt *regelmäßig (regulär)*, wenn es aus regulären und gleichen Polytopen der Dimension $n-1$ aufgebaut ist und über *Eckentransitivität* verfügt, d.h. es existiert für jedes Paar von Ecken eine Bewegung, welche die eine in die andere Ecke überführt und dabei das Polytop auf sich abbildet.

In drei Dimensionen sind dies die Platonischen Polyeder, deshalb werden regelmäßige Polytope in höheren Dimensionen oft als *Platonische Polytope* bezeichnet.

Eine zu dieser Definition äquivalente Eigenschaft ist, dass regelmäßige Polytope eine Sphäre haben, auf der alle Ecken liegen (Umsphäre), eine Sphäre, auf der alle Kantenmittelpunkte liegen, eine auf der alle Flächenmittelpunkte liegen, eine, auf der alle Zellmittelpunkte liegen, u.s.w. Dabei haben alle Sphären den gleichen Mittelpunkt, den Mittelpunkt des Polytops.

Zwei weitere Begriffe, die zur Beschreibung von Polychora verwendet werden, sind *Eckenumgebung* und *Kantenkombination*:

Der Begriff Eckenumgebung beschreibt bei den Polyedern, welche Flächen in welcher Reihenfolge um diese Ecke herum liegen und wird meist nur als Flächentypenzyklus aufgeschrieben. Bei den Polychora beschreibt die Eckenumgebung dementsprechend die Anordnung von Zellen in der Umgebung dieser Ecke. Bei Vorliegen von Eckentransitivität ist die Beschreibung einer Ecke durch deren Umgebung eindeutig und wird deshalb als Synonym für den entsprechenden Polyeder benutzt, die Schreibweise (4,4,4) beschreibt also zum Beispiel einen Hexaeder (Würfel), um jede Ecke liegen drei Quadrate. Da diese Umgebung im vierdimensionalen Fall jedoch räumlich ist, gibt es dazu keine einfache Darstellung.

Die Kantenkombination eines Polychors, also der Zyklus von Zellen um eine bestimmte Kante herum, hingegen ist wieder einfacher darstellbar und wird deshalb auch analog zur Eckenumgebung eines Polyeders geschrieben. (4,4,4)(4,4,4)(4,4,4) wäre also die Kantenkombination des Tesserakts (vierdimensionalen Würfels), um diese Kante liegen also drei Hexaeder.

Man kann auch mehrere Kantenkombinationen lokal zu Eckenumgebungen zusammenfügen, wodurch eine Vorstellung, zumindest lokal, vollständig im dreidimensionalen Anschauungsraum erfolgt, ohne dass die vierte Dimension vorgestellt werden muss. Das Zusammenfügen von einzelnen Zellen eines Polychors an Flächen, Kanten und Ecken ist so betrachtet eine Art „Zellen-Puzzle“.

Schließlich seien noch die Begriffe für die verschiedensten relevanten Winkel erklärt:

Der Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten auf einer Fläche heiße *Flächenwinkel*.

Des weiteren ist der Winkel zwischen zwei Flächen, die eine gemeinsame Kante haben, am Kantenmittelpunkt und zwischen den Halbgeraden vom Kantenmittelpunkt zu den Flächenmittelpunkten der *Keilwinkel*.

Und schließlich sei der Winkel zwischen zwei Zellen, die sich an einer Fläche berühren, am Flächenmittelpunkt und zwischen den Halbgeraden vom Flächenmittelpunkt zu den Zellmittelpunkten der *Faltwinkel*.

3.3 Ludwig Schläfli und das Schläfli-Symbol

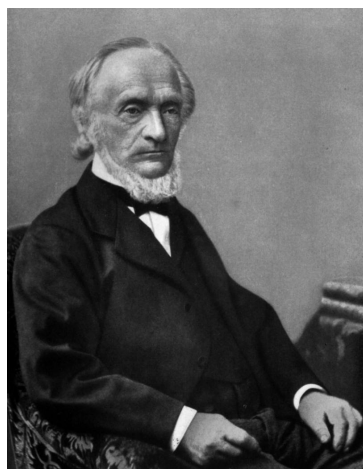


Abb. 3.4 Ludwig Schläfli

Ludwig Schläfli (1814-1895) war ein Schweizer Mathematiker und Geometer, der wesentlich zur Entwicklung und Notation der höherdimensionalen Geometrie beigetragen hat. Er verbrachte die meiste Zeit seines Lebens in der Schweiz, geboren wurde er in Graßwyl, der Heimatstadt seiner Mutter, übersiedelte ins nahe Burgdorf, wo sein Vater als Händler arbeitete und sich wünschte, dass Schläfli in seine Fußspuren tritt. Wegen seiner großen mathematischen Begabung wurde ihm jedoch erlaubt 1829 das Gymnasium in Bern zu besuchen. Zu diesem Zeitpunkt lernte er bereits aus Abraham Gotthelf Kästners „Mathematische Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen“ (1761). 1831 begab er sich für vertiefende Studientätigkeit nach Bern an die Akademie, welche 1834 zur Universität Bern wurde. Nach seiner Graduierung 1836 arbeitete er als Lehrer

an einer höheren Schule in Thun, verbrachte jedoch seine Freizeit weiterhin mit Studientätigkeit und Aufenthalt an der Universität in Bern einmal wöchentlich. 1843 besuchte ihn der bekannte Schweizer Mathematiker Jakob Steiner aus Berlin, der von Schläflis mathematischen Fähigkeiten, sowie von seinen Sprachfertigkeiten in Italienisch und Französisch so begeistert war, dass er ihn als Übersetzer auf eine Reise mit seinen Kollegen Carl Gustav Jacob Jacobi, Dirichlet und Carl Wilhelm Borchardt nach Italien mitnahm, wo sie länger als sechs Monate blieben und Schläfli mehrere mathematische Werke der anderen Kollegen ins Italienische übersetzte. Diese Studienreise fruchtete schließlich in einer Anstellung an der Universität in Bern 1848, wo Schläfli bis zu seinem Ruhestand 1891 blieb. 1850 bis 1852 arbeitete er dort an seiner „Theorie der vielfachen Kontinuität“, in der er die Lineare Geometrie des n -dimensionalen Raumes entwickelte und die er auch veröffentlicht haben wollte, was ihm jedoch wegen bürokratischer Hürden bzw. dem in Wien und auch in Berlin ungewollten großen Umfang seines Werkes nicht gelang. Teile seines Werkes wurden 1860 von Cayley in englisch veröffentlicht. Erst 1901, nach Schläflis Tod wurde das gesamte Manuskript veröffentlicht.

Im Folgenden ein Auszug aus der Einleitung zur historisch bedeutungsvollen „Theorie der vielfachen Kontinuität“:

„Anzeige einer Abhandlung über die Theorie der vielfachen Kontinuität

Die Abhandlung, die ich hier der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften vorzulegen die Ehre habe, enthält einen Versuch, einen neuen Zweig der Analysis zu begründen und zu bearbeiten, welcher, gleichsam eine analytische Geometrie von n Dimensionen, diejenigen der Ebene und des Raumes als spezielle Fälle fuer $n=2,3$ in sich enthielte. Ich nenne denselben Theorie der vielfachen Kontinuität überhaupt in demselben Sinne, wie man zum Beispiel die Geometrie des Raumes eine Theorie der dreifachen Kontinuität nennen kann. Wie in dieser eine Gruppe von Werten der drei Koordinaten einen Punkt bestimmt, so soll in jener eine Gruppe gegebener Werte der n Variablen x,y,\dots eine Lösung bestimmen. Ich gebrauche diesen Ausdruck, weil man bei einer oder mehreren Gleichungen mit vielen Variablen jede genügende Gruppe von Werten auch so nennt; das Ungewöhnliche der Benennung liegt nur darin, daß ich sie auch noch beibehalte, wenn gar keine Gleichung zwischen den Variablen gegeben ist. In diesem Falle nenne ich die Gesamtheit aller

Lösungen die n -fache Totalität; sind hingegen $1, 2, 3, \dots$ Gleichungen gegeben, so heißt bzw. die Gesamtheit ihrer Lösungen $n-1$ -faches, $n-2$ -faches, $n-3$ -faches, ... Kontinuum. Aus der Vorstellung der allseitigen Kontinuität der in einer Totalität enthaltenen Lösungen entwickelt sich diejenige der Unabhängigkeit ihrer gegenseitigen Lage von dem System der gebrauchten Variablen, insofern durch Transformation neue Variablen an ihre Stelle treten können. Diese Unabhängigkeit spricht sich aus in der Unveränderlichkeit dessen, was ich den Abstand zweier gegebener Lösungen $(x, y, \dots), (x', y', \dots)$ nenne und im einfachsten Fall durch $\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + \dots}$ definiere, indem ich gleichzeitig das System der Variablen ein orthogonales heiße, [...]“

In diesem Werk definiert Schläfli auch erstmals das höherdimensionale Analogon zu Polygonen und Polyedern, die Polytope (dort mit Polyscheme bezeichnet), untersucht reguläre Polytope und entwickelt die höherdimensionale Form der Eulerschen Polyederformel, weswegen er zu den größten Erforschern der Geometrie im vierdimensionalen Raum gezählt werden muss.

Satz: (Euler'sche Polyederformel):

Für ein konvexes Polyeder mit e Ecken, k Kanten und f Flächen gilt die Euler'sche Polyederformel $e - k + f = 2$.

Beweis: Es gibt einige Varianten für diesen Beweis, hier eine anschauliche Variante mittels Schlegel-Diagramm (für Schlegel-Diagramm siehe 3.4):

Punkte, Kanten und Gebiete des Diagramms entsprechen den Ecken, Kanten und Seiten des Polyeders.

Für einen Punkt gilt: $e=1, f=1$ (das Gebiet außerhalb des Punktes), $k=0$, also $e+f-k=2$.

Eine neue Kante verbindet eine alte Ecke entweder mit einer bereits vorhandenen Ecke (a) oder mit einer neuen Ecke (b) (Abb. 3.5).

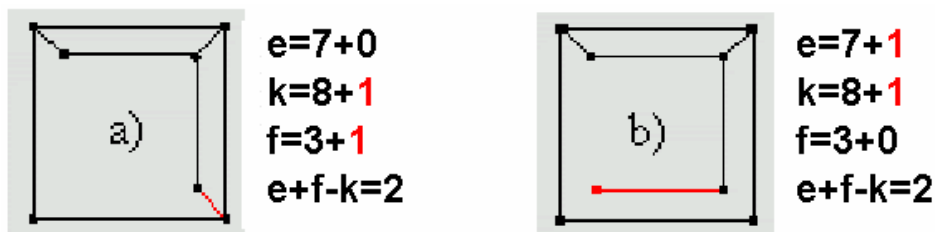


Abb. 3.5 Schlegel-Diagramm zum Beweis der Euler'schen Polyederformel

Der Term $e+f-k$ bleibt unverändert. Wegen der Korrespondenz des Schlegel-Diagramms mit dem Polyeder ist damit die Euler'sche Polyederformel bewiesen. □

Schläfli verallgemeinerte diese Formel mittels Überlegungen über die Anzahl von Ecken, Kanten, Flächen und Räumen in n Dimensionen. Die Formel für vierdimensionale Polytope ($e - k + f - r = 0$, wobei r für Seitenräume oder kurz Räume steht) ist ein Spezialfall von $N_0 - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^{n-1} N_{n-1} = 1 - (-1)^n$, wobei $N_0 = e$ (Ecken), $N_1 = k$ (Kanten), $N_2 = f$ (Flächen), $N_3 = r$ (Räume) und $N_n = n$ -dimensionale Räume sind.

Dimension des Raumes	Formel	Überlegung
1	$N_0=2$	Das 1-Polytop ist eine Strecke (Anzahl der Punkte ist 2)
2	$N_0-N_1=0$	In der Ebene liegt ein Polygon vor, Anzahl Ecken = Anzahl Kanten
3	$N_0-N_1+N_2=2$	= die bereits bewiesene Euler'sche Polyederformel für den 3-Raum
4	$N_0-N_1+N_2-N_3=0$	Spezialfall des n-dimensionalen Raums
→ n	$N_0-N_1+N_2-\dots+(-1)^{n-1}N_{n-1}=1-(-1)^n$	=die von Schläfli entwickelte Formel für n-dimensionale Polytope

Ein einfaches und effektives Werkzeug zur Beschreibung von regulären Polygonen, Polyedern und (allgemein) Polytopen ist das Schläfli-Symbol.

Def: Sei p_i die Anzahl der i -dimensionalen „Seiten“ des Polytops P , die die „Seite“ F_{i-2} enthalten und in der „Seite“ F_{i+1} enthalten sind (bei $F_{-1}=\emptyset$ und $F_n=P$):
 $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ heißt *Schläfli-Symbol* des Polytops P .

$i-2$	F_{i-2}	i	F_i	$i+1$	F_{i+1}	$p_i =$ Anzahl der...
-1	\emptyset	1	Kante	2	Fläche	Kanten pro Fläche
0	Punkt	2	Fläche	3	3-Raum	Flächen durch einen Punkt im 3-Raum
1	Kante	3	3-Raum	4	4-Raum	3-Räume durch eine Kante im 4-Raum
:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:

Beispiel: Ein dreidimensionaler Würfel hat vier Kanten pro Seitenfläche und drei Seitenflächen durch einen Punkt im 3-Raum, also $p_1=4$, $p_2=3$.
 → Schläfli-Symbol = $\{4,3\}$.

Ein vierdimensionaler Würfel (Tesseract) hat, wie bereits erwähnt, 16 Ecken, 32 Kanten, 24 Quadrate und 8 Würfel. Er hat also vier Kanten pro Seitenfläche, drei Seitenflächen durch einen Punkt im Raum und drei Würfel durch eine Kante im 4-Raum, also $p_1=4$, $p_2=3$, $p_3=3$. → Schläfli-Symbol = $\{4,3,3\}$.

Dimension	Name	Schläfli-Symbol
2	reguläres m-Eck	$\{m\}$
3	Tetraeder	$\{3,3\}$
3	Hexaeder	$\{4,3\}$
3	Oktaeder	$\{3,4\}$
3	Dodekaeder	$\{5,3\}$
3	Ikosaeder	$\{3,5\}$
4	Tesseract	$\{4,3,3\}$

3.4 Das Schlegel-Diagramm

Nach dem Deutschen Mathematiker Victor Schlegel (1843-1905) sind die so genannten Schlegel-Diagramme benannte, eine Darstellungsform von Polytopen aller Dimensionen: Man projiziert das Polytop der Dimension d aus einem Zentrum Z in die Trägerhyperebene eines seiner $(d-1)$ -dimensionalen Seitenräume. Polyeder werden also auf eine Ebene abgebildet und Polychora (vierdimensionale Polytope) auf 3-Räume. Diese Darstellungsform erleichtert das Sehen der topologischen Zusammenhänge zwischen den jeweiligen beteiligten $(d-1)$ -dimensionalen Seitenräumen.

Beispiel: Schlegel-Diagramm eines Hexaeders.

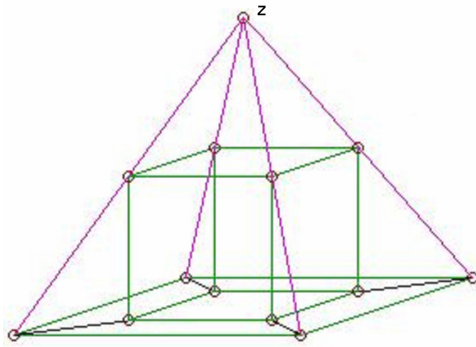


Abb. 3.6a Projektion des Hexaeders auf die Trägerebene einer seiner Seitenflächen

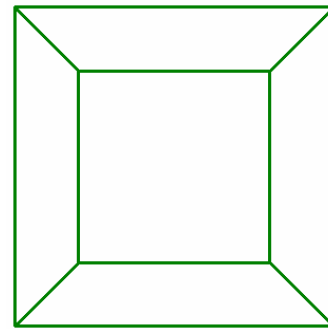


Abb. 3.6b Schlegel-Diagramm

Aus dem Schlegel-Diagramm des Hexaeders kann man gut die Existenz seiner acht Eckpunkte, zwölf Kanten und sechs Seitenflächen lesen. Man sieht auch, dass sich in jedem Eckpunkt drei Kanten sowie drei Seitenflächen treffen. Abbildung 3.7 zeigt die Schlegel-Diagramme aller fünf Platonischen Körper.

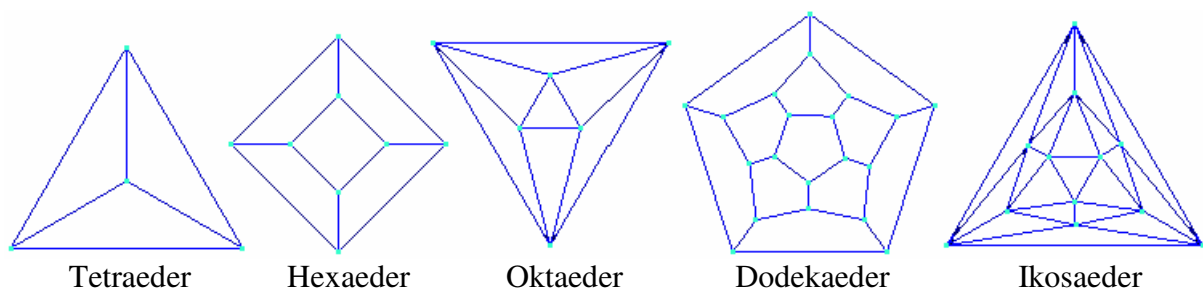


Abb. 3.7 Schlegel-Diagramme der Platonischen Polyeder

Dementsprechend ergibt sich als Schlegel-Diagramm eines Polychors, also eines vierdimensionalen Polytops, das zweidimensionale Bild eines dreidimensionalen Objektes, nämlich das bei der Parallelprojektion der Zentralprojektion aus einem Zentrum auf einen der Seitenräume des Polychors entstehende Bild.

Beispiel: Schlegel-Diagramm eines Tesserakts.

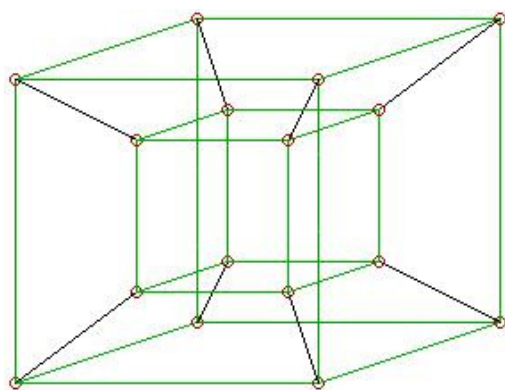


Abb. 3.8 Schlegel-Diagramm des Tesserakts

Ähnlich wie beim Schlegel-Diagramm des Würfels, bei dem die Ecken eines „inneren“ Quadrates mit den Ecken eines „äußeren“ Quadrates verbunden sind, erscheint im Schlegel-Diagramm des Tesserakts das Bild eines kleinen Würfels innerhalb eines größeren und deren jeweilige Ecken sind durch Kanten verbunden.

Auch in dieser Abbildung kann man relativ leicht die acht Würfel (Seitenräume des Tesserakts) und sechzehn Ecken erkennen und 24 Vierecke, sowie 32 Kanten zählen. Man erkennt auch, dass um eine Kante jeweils drei Würfel angeordnet sind.

3.5 Die sechs Platonischen Polychora

Die Platonischen Polychora sind, wie bereits erwähnt, reguläre konvexe vierdimensionale Polytope und entsprechen den Platonischen Körpern im vierdimensionalen Raum. Sie bestehen jeweils aus regelmäßigen und gleichen Zellen (also Polyedern), die regelmäßig um Ecken und Kanten angeordnet sind.

Warum gibt es sechs Platonische Polychora? Analog zur Überlegung aus wie vielen und welchen regulären Polygonen man Platonische Polyeder „falten“ kann, überlegt man, aus wie vielen und welchen Platonischen Polyedern die jeweiligen Netze Platonischer Polychora bestehen können.

Beispiel: Tetraeder bzw. Pentachor

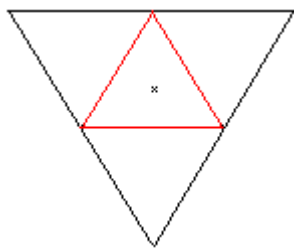


Abb. 3.9a Das Netz des Tetraeders besteht aus vier Dreiecken, die zusammen 12 Seiten haben. Zwei Dreiecke haben eine Seite gemeinsam, $2 \cdot 3 = 6$ Seiten sind gebunden (in Abb.3.9a rot). Beim Bau des Tetraeders müssen die restlichen 6 Seiten paarweise zusammengeklebt werden. Das Tetraeder hat 2 verschiedene Netze (vergleiche mit Abb.3.3a).

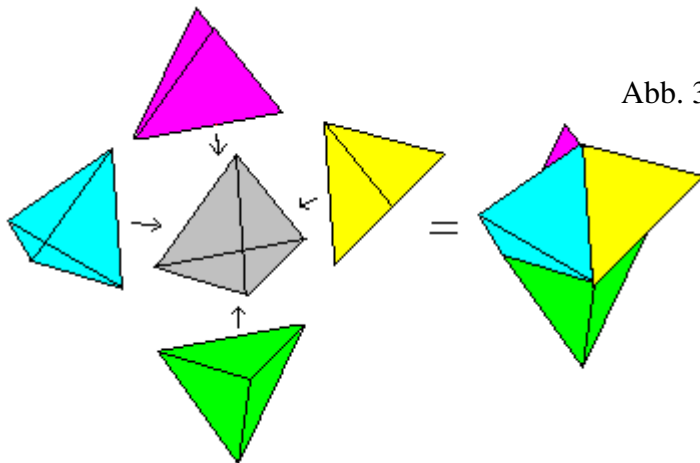


Abb. 3.9b Das Netz des Hypertetraeders (Pentachors) besteht aus fünf Tetraedern, die zusammen 20 Dreiecke haben. Zwei Tetraeder haben ein Dreieck gemeinsam, $2 \cdot 4 = 8$ Dreiecke sind gebunden (links in Abb.3.9b grau). Beim Bau des Hypertetraeders müssen die restlichen 12 Dreiecke paarweise zusammengeklebt werden.

Folgende Überlegung ist für die mögliche Anzahl Platonischer Polychora nun zielführend: Man klebt Tetraeder jeweils entlang einer Seitenfläche zusammen und betrachtet alle Tetraeder um eine gemeinsame Kante:

Mögliche Anzahl m von Tetraedern: $m=1$: Uninteressant.

$m=2$: Beim „Verbiegen“ um die gemeinsame Fläche fallen die beiden Tetraeder zusammen. Es entsteht keine „Raumecke“.

$m=3$: 3 Tetraeder um eine Kante \rightarrow reguläres 5-Zell.

Wie viele Tetraeder kann man maximal um eine Kante (0° - 360°) entlang ihrer Seitenflächen zusammenkleben, um ein dreidimensionales Netz zu erhalten? Dazu betrachtet man den

Diederwinkel, den Winkel, den je zwei Seitenflächen des Tetraeders einschließen. Er beträgt $\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.53^\circ$. Es sind also nur Fälle mit $m \leq 5$ möglich.

m=4: 4 Tetraeder um eine Kante \rightarrow reguläres 16-Zell.

m=5: 5 Tetraeder um eine Kante \rightarrow reguläres 600-Zell.

Analoge Überlegungen folgen für die mögliche Anzahl von Würfeln, Oktaedern, Dodekaedern und Ikosaedern:

Platonischer Polyeder	Diederwinkel	mögliche Fälle
Würfel	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	m=3 \rightarrow reguläres 8-Zell
Oktaeder	$\pi - \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 109.47^\circ$	m=3 \rightarrow reguläres 24-Zell
Dodekaeder	$\pi - \arctan(2) \approx 116.56^\circ$	m=3 \rightarrow reguläres 120-Zell
Ikosaeder	$\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx 138.19^\circ$	nur m ≤ 2 möglich \rightarrow unmöglich

Es gibt also sechs verschiedene Platonische Polychora, die jeweils aus regulären Zellen zusammengesetzt sind, das 5-, 16- und 600-Zell aus Tetraedern, das 8-Zell aus Würfeln, das 24-Zell aus Oktaedern und das 120-Zell aus Dodekaedern.

3.6 Das 5-Zell

Das einfachste konvexe reguläre Polychor ist das 5-Zell. Es entsteht, wenn man zu den vier Punkten eines Tetraeders, die, wie die Punkte eines gleichseitigen Dreiecks in der Ebene, voneinander jeweils den gleichen Abstand haben, einen fünften hinzunimmt, der von allen vier anderen des Tetraeders den gleichen Abstand hat. Es ist also das vierdimensionale Analogon zum zweidimensionalen gleichseitigen Dreieck und zum dreidimensionalen Tetraeder.

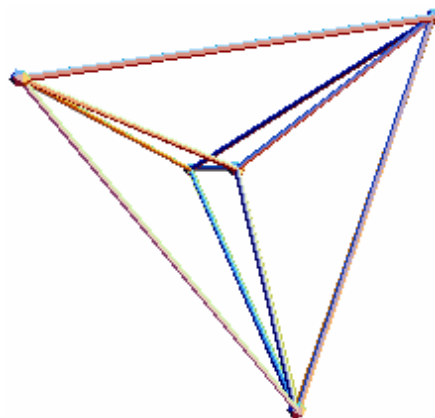


Abb. 3.10 5-Zell (Pentachor, 4-Simplex, {3,3,3}), Schlegel-Diagramm

Das 5-Zell (auch Pentachor) trägt auch den Namen *4-Simplex*. Allgemein ist ein n -Simplex die konvexe Hülle von $n+1$ Punkten $(1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)$ im $(n+1)$ -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^{n+1} . Das 1-Simplex im \mathbb{R}^2 ist also eine Strecke, das 2-Simplex im \mathbb{R}^3 mit Schläfli-Symbol $\{3\}$ ein gleichseitiges Dreieck (Abb. 3.11), das 3-Simplex im \mathbb{R}^4 mit Schläfli-Symbol $\{3,3\}$ ein Tetraeder und das 4-Simplex mit Schläfli-Symbol $\{3,3,3\}$ schließlich das eben vorgestellte 5-Zell, die konvexe Hülle von 5 Punkten.

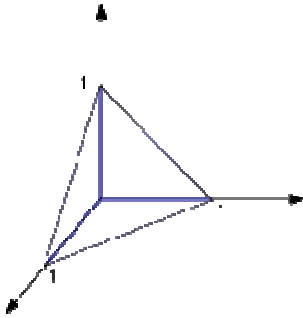


Abb. 3.11. Standard-2-Simplex im \mathbb{R}^3

Allgemein erzeugt man ein n -Simplex aus einem $(n-1)$ -Simplex, indem man einen Punkt in einer weiteren Dimension hinzunimmt. Das Simplex heißt so, weil es im jeweiligen Raum das simpelste Polytop darstellt. Nach dem Simplex ist auch das Simplex-Verfahren aus der linearen Optimierung benannt, die hier nicht näher behandelt wird.

Die konvexe Hülle von je $m+1$ Punkten eines Simplex (welches aus $n+1$ Punkten besteht) ist ein m -Simplex, genannt m -Facette des n -Simplex. Die 0-Facetten sind die Punkte bzw. Ecken des Simplex, die 1-Facetten die Kanten, die $(n-1)$ -Facetten die Seitenflächen (bzw. in höheren Dimensionen Seitenräume) und die n -Facette schließlich ist das n -Simplex selbst.

Allgemein errechnet sich die Anzahl der m -Facetten eines n -Simplex aus dem

Binomialkoeffizienten $\binom{n+1}{m+1}$.

Man kann also für das 4-Simplex leicht die Anzahl der Eckpunkte, Kanten, Flächen und Tetraeder nachrechnen:

$$\text{allg.: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, [n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n]$$

$$\text{Punkte (0-Facetten): } \binom{n+1}{m+1} = \binom{5}{1} = \frac{5!}{4!1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1} = 5.$$

$$\text{Kanten (1-Facetten): } \binom{n+1}{m+1} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 10.$$

$$\text{Dreiecke (2-Facetten): } \binom{n+1}{m+1} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

$$\text{Tetraeder ((n-1)-Facetten): } \binom{n+1}{m+1} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{1!4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5.$$

Die von Schläfli verallgemeinerte Euler'sche Polyederformel für vierdimensionale Polytope ($e-k+f-r=0$) liefert $5-10+10-5=0$ und bestätigt obige Rechnung.

m-Facetten von n-Simplizes

n-Simplex	Graph	Name	Schläfli-Symbol	m=0 Punkte	1 Kanten	2 Dreiecke	3 Zellen	4	5	6	7
0-Simplex	•	Punkt	-	1							
1-Simplex	• •	Strecke	{ } od. {2}	2	1						
2-Simplex	• • •	Dreieck	{3}	3	3	1					
3-Simplex	• • • •	Tetraeder	{3,3}	4	6	4	1				
4-Simplex	• • • • •	Pentachor	{3,3,3}	5	10	10	5	1			
5-Simplex	• • • • • •	Hexa-5-top	{3,3,3,3}	6	15	20	15	6	1		
6-Simplex	• • • • • • •	Hepta-6-top	{3,3,3,3,3}	7	21	35	35	21	7	1	
7-Simplex	• • • • • • • •	Okta-7-top	{3,3,3,3,3,3}	8	28	56	70	56	28	8	1

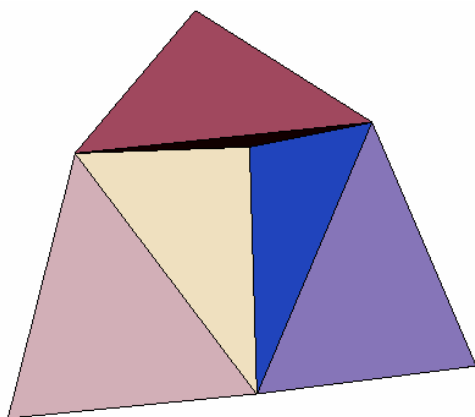


Abb. 3.12 Netz des 5-Zells

Da der 5-Zeller das einfachste Polychor ist, ist auch die Darstellung seines Netzes sehr übersichtlich. Es besteht aus 5 Tetraedern, einem in der Mitte und jeweils einem über jeder Seitenfläche des in der Mitte befindlichen.

3.7 Das 8-Zell

Das 8-Zell trägt auch die Namen Oktachor, Hyperwürfel, Maßpolytop, hexaedrisches Prismachor oder Tesseract. Letzterer Name wurde erstmals 1888 von Charles Howard Hinton in seinem Buch „A New Era Of Thought“ verwendet und leitet sich aus dem Griechischen „*τεσσεραεξ ακτινες*“ („vier Strahlen“) ab, bezogen auf die vier Kanten, die von jeder Ecke ausgehen.

Der Standard-Hyperwürfel im Euklidischen Vierraum ist die konvexe Hülle der Punkte $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, d.h. er besteht aus den Punkten $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4: -1 \leq x_i \leq 1\}$. Seine Seitenräume sind acht Würfel. Er hat, entsprechend der Euler'schen Polyederformel für den \mathbb{R}^4 ($e-k+f-r=0$) ($16-32+24-8=0$) 16 Ecken, 32 Kanten, 24 Quadrate und 8 Würfel. Sein Schläfli-Symbol ist $\{4,3,3\}$, vier Kanten pro Seitenfläche, drei Seitenflächen durch einen Punkt im 3-Raum und drei Würfel durch eine Kante im 4-Raum.

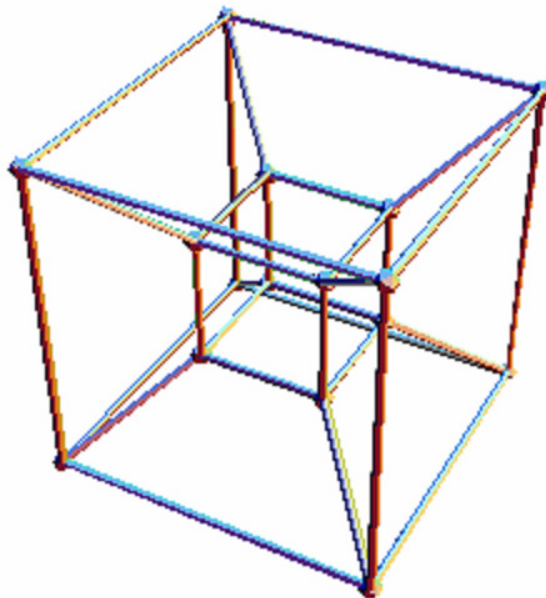


Abb. 3.13 8-Zell (Oktachor, Tesseract, $\{4,3,3\}$), Schlegel-Diagramm

Im Schlegel-Diagramm des Tesseracts entsteht das Bild eines Würfels, der konzentrisch innerhalb eines größeren Würfels hängt, wobei die einander entsprechenden Ecken radial durch acht Kanten verbunden sind. Neben diesen beiden Würfeln erkennt man sechs Pyramidenstümpfe, welche die verzerrten Abbilder der weiteren sechs Begrenzungswürfeln sind. Das Schlegel-Diagramm ist, wie bereits erwähnt, die Parallelprojektion eines dreidimensionalen Modells, das die Zentralprojektion des Tesseracts auf einen seiner dreidimensionalen Seitenräume ist.

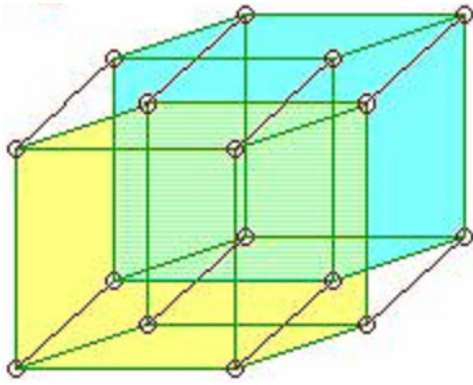


Abb. 3.14 Tesseract, Parallelprojektion

Wie in Kapitel 1 erwähnt entsteht der vierdimensionale Hyperwürfel, wenn man einen Würfel (in Abb. 3.14 gelb) entlang einer, zu den drei bereits vorhandenen orthogonalen Koordinatenrichtungen vierten orthogonalen, Richtung um seine Kantenlänge verschiebt (türkiser Würfel). Die Schiebevektoren bleiben bei dieser Operation als Kanten des entstandenen Hyperwürfels erhalten.

Das ebene axonometrische Bild in Abb. 3.14 verdeutlicht diese Verschiebung und stellt daher die Parallelprojektion eines Tesseracts dar.

Eine Überlegung zur Anzahl der Grenzelemente bei dieser Entstehung des Hyperwürfels bzw., allgemein, eines n -dimensionalen Würfels:

Wenn ein $(n+1)$ -dimensionaler Würfel aus einem n -dimensionalen Würfel erzeugt wird, werden durch dessen Verschiebung alle k -dimensionalen Elemente ($k \leq n$) verdoppelt. Gleichzeitig wird jedes $(k-1)$ -dimensionale Grenzelement zu einem k -dimensionalen erweitert.

Anders überlegt: Wenn man einen n -dimensionalen Hyperwürfel in ein kartesisches Koordinatensystem um den Ursprung zentriert und nach den Koordinatenachsen ausgerichtet legt, gibt es zu einem k -dimensionalen Grenzelement k Koordinatenachsen, die parallel zu diesem Grenzelement sind. Andererseits gibt es aber zu jeder Auswahl von k Koordinatenachsen nicht nur ein k -dimensionales Grenzelement, sondern 2^{n-k} , weil man durch jede der $n-k$ zu den Grenzelementen senkrechten Achsen die Anzahl der Grenzelemente verdoppelt, es gibt die selben Grenzelemente noch einmal parallel verschoben auf der anderen Seite der Achse.

Die Anzahl der Grenzelemente ergibt sich also aus dem Produkt der Anzahl der Möglichkeiten, k Achsen aus den n Achsen auszuwählen (Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$), mit der Anzahl von Grenzelementen für jede Auswahl.

Die Anzahl der k -dimensionalen Grenzelemente eines n -dimensionalen Würfels errechnet sich daher aus $\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$, was man für die Anzahl von Würfeln, Flächen, Kanten und Punkten eines Tesseracts leicht nachrechnen kann.

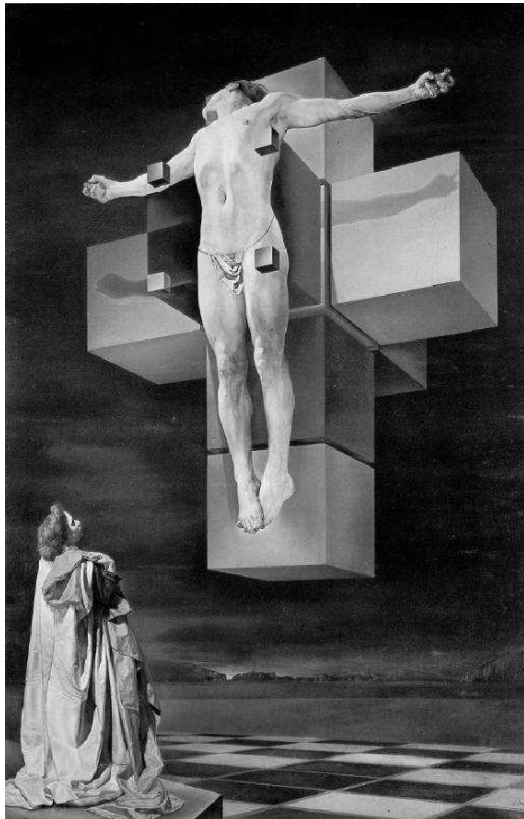


Abb. 3.15 Christus Hypercubus, Savador Dalí, 1955

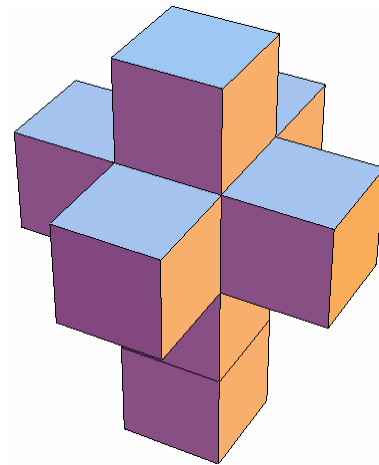


Abb. 3.16 Netz des Tesserakts

Beim dreidimensionalen Netz des Tesserakts (Abb. 3.16) sind alle acht Begrenzungswürfel in den dreidimensionalen Raum „aufgefaltet“.

Salvador Dalís bekanntes Gemälde (Abb. 3.15) zeigt den am Netz eines Tesserakts gekreuzigten Jesus. Es kann im Metropolitan Museum of Art in New York bestaunt werden.

3.8 Das 16-Zell

Das 16-Zell, auch Kreuzpolychor genannt, besitzt 16 Tetraeder, 32 Dreiecke, 24 Kanten und 8 Ecken ($e-k+f-r=0$) ($8-24+32-16=0$). Das entsprechende Schläfli-Symbol ist $\{3,3,4\}$, also 3 Kanten pro Seitenfläche, 3 Flächen durch einen Punkt im 3-Raum und 4 Tetraeder durch eine Kante im 4-Raum.

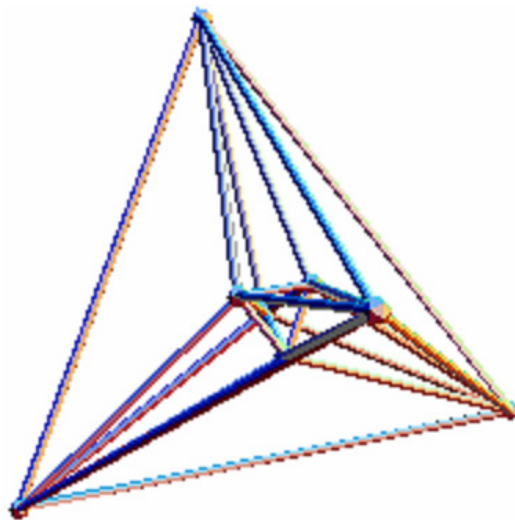


Abb. 3.17 16-Zell (Kreuzpolychor, $\{3,3,4\}$), Schlegel-Diagramm

So wie es bei den fünf Platonischen Polyedern duale Polyeder gibt, gibt es diese auch bei den Polychora. Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen eines platonischen Polyeders, so erhält man, mit den Verbindungslinien als Kanten, wieder einen platonischen Körper, und zwar mit demselben Mittelpunkt. Dieser Körper wird als Dualkörper zum Ausgangskörper bezeichnet.

Auf Grund der Konstruktion ist klar, dass jeder Fläche des Ursprungskörpers jeweils eine Ecke des dualen Körpers entspricht. Außerdem entspricht jeder Kante, die zwei Flächen trennt, eine Kante, die zwei Ecken verbindet. Daraus ergibt sich, dass auch jeder Ecke des Ursprungskörpers jeweils eine Fläche des dualen Körpers entspricht. Man kann sich das so verbildlichen, dass jede Fläche eine Ecke des Ursprungskörpers „abschneidet“.

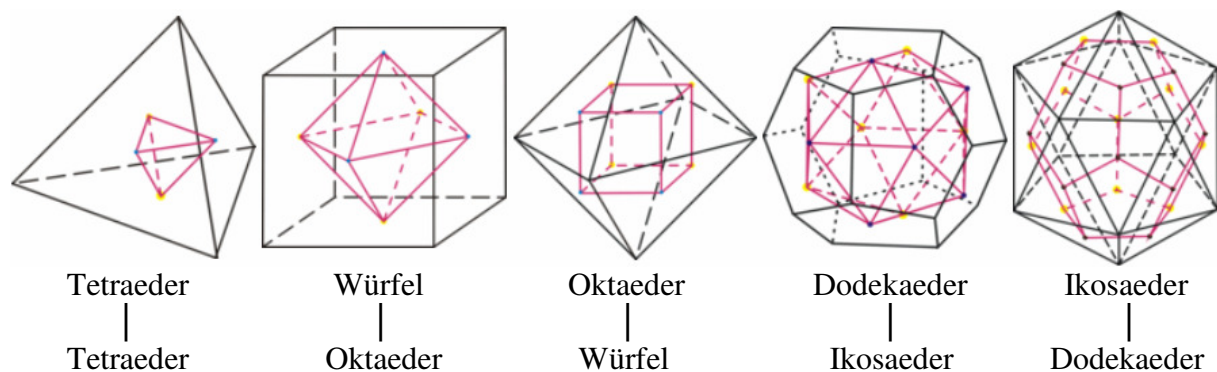


Abb. 3.18 Die Platonischen Polyeder und ihre Dualkörper

Das 16-Zell ist dual zum 8-Zell (Tesseract) und entsteht aus jenem, wenn man als Ecken die acht Zellenmittelpunkte des Tesserakts nimmt. Die Zentren der vier Zellen in einer Ecke des Tesserakts sind die Ecken eines zum 16-Zell gehörigen Tetraeders. Die Zentren der drei Zellen um eine Kante bilden ein Dreieck, und die Zentren zweier Zellen mit gemeinsamer Seitenfläche bilden die Enden einer Kante.

Also entspricht jeder Ecke des Tesserakts eine Zelle des 16-Zells, jeder Kante eine Fläche, jeder Fläche eine Kante und jeder Zelle ein Eckpunkt. Die Figur, die dabei entsteht, ist also ein 16-Zell (16,32,24,8).

Das 16-Zell wird auch Kreuzpolychor genannt und gehört damit zu einer speziellen Gruppe von Polytopen, nämlich den Kreuzpolytopen. Ein Vorteil an n-dimensionalen Räumen ist, dass man, obgleich die Vorstellung etwas schwer fällt, durch einen beliebigen Punkt O n paarweise orthogonale Koordinatenachsen legen kann. Die n von O äquidistanten Punkte auf diesen Achsen sind die Ecken von Simplex. Punkte mit gleichem Abstand von O auf beiden Seiten dieser Achsen bilden die 2n Ecken der so genannten Kreuzpolytope.

Die Analoga zu den Oktaedern im n-dimensionalen Raum heißen Kreuzpolytope. Sie haben 2n zu Paaren (p_1^i, p_2^i) ($i=1 \dots n$) zusammengefasste Ecken und werden von 2^n (n-1)-dimensionalen Simplexes (als Facetten) begrenzt. Die $4 \binom{n}{2} = 2n(n-1)$ Kanten sind $p_{j_1}^i p_{j_2}^k$ für $i \neq k$ und $j_1, j_2 \in \{1, 2\}$.

Das eindimensionale Kreuzpolytop ist eine Strecke, das zweidimensionale ein Quadrat und das dreidimensionale ein Oktaeder. Entsprechend seiner Definition ist das Kreuzpolytop symmetrisch bezüglich Spiegelungen an den Koordinatenebenen. Es gilt als Prototyp eines Polytops, das in Relation zur Dimension sehr wenige Ecken, aber viele Facetten besitzt. Diese Eigenschaft ist für die lineare Optimierung wichtig, da der Simplex-Algorithmus, das Standardverfahren zur Lösung linearer Optimierungsprobleme, gezielt Ecken auf ihre Optimalität prüft. Das Gegenstück dazu ist der Würfel, dessen Eckenzahl exponentiell, die Facettenzahl aber nur linear in n wächst.

Verbindet man die acht auf den vier Geraden eines Achsenkreuzes gelegenen Punkte miteinander, so entsteht ein Polytop, das von 16 regelmäßigen Tetraedern begrenzt wird. Man kann ja auf jeder der vier Achsen einen positiven und einen negativen Teil unterscheiden und nun damit beginnen, die Endpunkte der vier positiven Achsen zu verbinden, wodurch ein dreidimensionaler Körper entsteht, der bei genauerer Überlegung ein regelmäßiges Tetraeder ist. Wenn man nun auf einer Achse den positiven Eckpunkt durch einen negativen ersetzt, so entstehen vier neue Tetraeder, weil es vier Achsen gibt. Nimmt man dann auf zwei Achsen die negativen Punkte, so gibt es sechs Möglichkeiten und dementsprechend sechs neue Tetraeder, bei drei Achsen mit negativen Koordinaten ergeben sich, wie bei den drei positiven, wieder vier neue Tetraeder und schließlich das eine Tetraeder mit den vier negativen Koordinatenpunkten, zusammen sind das also $1+4+6+4+1=16$ Tetraeder, die hier zum 16-Zell, oder Kreuzpolychor, aufgebaut wurden. Das 16-Zell hat als Eckenfigur das entsprechende dreidimensionale Kreuzpolytop, den Oktaeder.

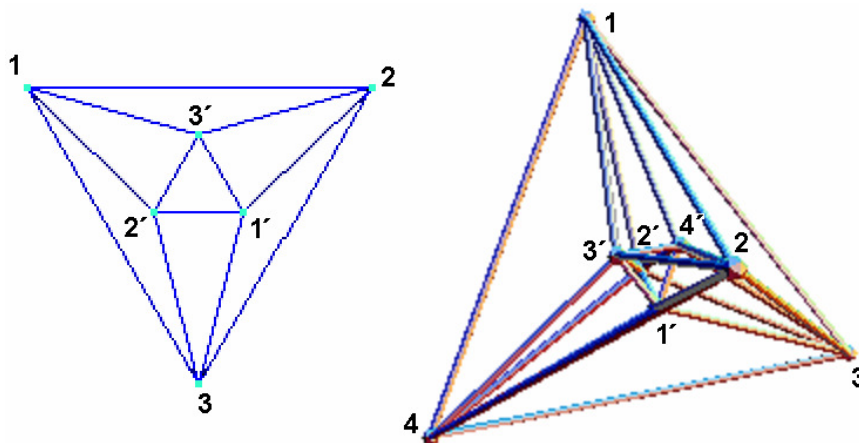


Abb. 3.19 Schlegel-Diagramme von Oktaeder und 16-Zell im Vergleich

Man erkennt sogar Ähnlichkeiten zwischen Oktaeder und 16-Zell bei der Betrachtung ihrer Schlegel-Diagramme. Beim Oktaeder erscheint ein kleines Dreieck $(1', 2', 3')$ „verkehrt“ innerhalb eines großen Dreiecks $(1, 2, 3)$ liegend, so dass man von jedem Eckpunkt des großen auf eine Seite des kleinen blickt. Die entsprechenden Punkte $(1, 1')$, $(2, 2')$ und $(3, 3')$ kann man sich als die um den Koordinatenursprung auf den Achsen in positiver und negativer Richtung gelegenen Eckpunkte des Oktaeder vorstellen, weshalb jeweils diese Punkte keine Kante als Verbindung haben, alle übrigen sind paarweise miteinander verbunden.

Beim 16-Zell erscheint im dreidimensionalen Bild ein in einem großen Tetraeder „verkehrt“ gelegener kleiner Tetraeder, dessen Eckpunkte paarweise mit jenen des großen Tetraeders verbunden sind, ausgenommen diejenigen Punkte, die auf ein und derselben Koordinatenachse zu liegen kommen, also $(1, 1')$, $(2, 2')$, $(3, 3')$ und $(4, 4')$. Sie haben die Koordinaten $(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 1, 0)$ und $(0, 0, 0, \pm 1)$.

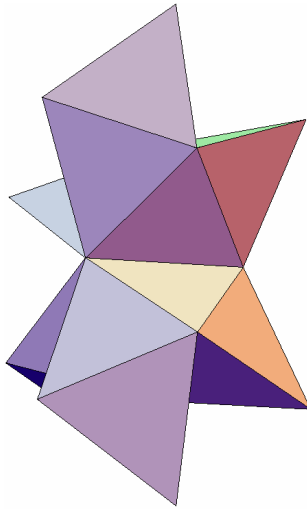


Abb. 3.20 Netz des 16-Zells

3.9 Das 24-Zell

Das 24-Zell ist jenes reguläre konvexe Polychor, bei dem um jede Kante drei Oktaeder liegen, sechs an jeder Ecke. Der systematische Aufbau des 24-Zells ist schon wesentlich komplizierter als bei den bisherigen Platonischen Polychora, dennoch sei er hier vorgenommen. Die Zellen des 24-Zells bestehen aus Oktaedern.

Beginnt man mit den sechs in jeder Ecke liegenden Oktaedern, so kann man sich dieses Gebilde wie einen Würfel vorstellen, auf dessen Seitenflächen jeweils eine Pyramide steht, an jeder Würfelkante liegen zwei Oktaeder, an jeder Ecke drei. Jeder Oktaeder in dieser Aufstellung hat 4 freie Flächen und 4 mit einem anderen Oktaeder gemeinsam. Also gibt es so weit 6 Oktaeder, 36 Flächen, 44 Kanten und 15 Ecken.

Nun wird um jede Würfelkante ein Oktaeder hinzugefügt. Dann gibt es bereits 6 Oktaeder in jeder Würfecke und 3 an jeder Oktaederkante. Es gibt jetzt anstatt der „alten“ Würfecken neue Ecken, in denen jeweils 3 Oktaeder zusammenstoßen. Die entstandene äußere Form entspricht derjenigen zuvor, nur dass es jetzt in jeder „neuen“ Würfelkante nur einen Oktaeder gibt, an den neuen Oktaederkanten 2 und in jeder Oktaederecke 5. Jeder der neu hinzugefügten 12 Oktaeder hat nun 2 „alte“ Flächen, 2 noch freie und 4 mit bestehenden Oktaedern gemeinsam. Insgesamt gibt es jetzt somit 18 Tetraeder, 84 Flächen, 88 Kanten und 23 Ecken.

Die Figur wird komplett, wenn man nun in den entsprechenden Ecken jeweils noch einen Oktaeder hinzufügt. Jeder dieser Oktaeder hat nun 4 „alte“ und 4 mit je einem anderen Oktaedern gemeinsame Flächen, 8 „alte“ und 4 mit je zwei anderen Oktaedern gemeinsame Kanten sowie 5 „alte“ und 1 mit je 5 anderen Oktaedern gemeinsame Ecken. Es wurden also 6 Oktaeder, 12 Flächen, 8 Kanten und 1 Ecke neu hinzugefügt.

Das komplette 24-Zell besteht nun aus 24 Tetraedern als Zellen, 96 Flächen, 96 Kanten und 24 Ecken. Sein Schläfli-Symbol ist $\{3,4,3\}$. Es ist zu sich selbst dual, denn in den Mittelpunkten der 24 Zellen liegen die 24 Eckpunkte des dualen 24-Zells.

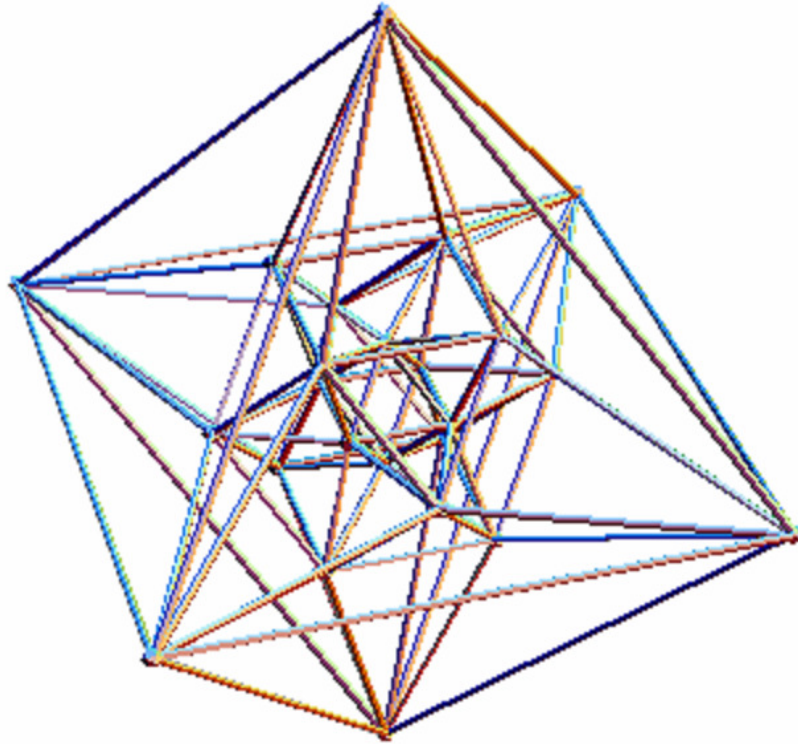


Abb. 3.21 24-Zell (Icosatetrachor, $\{3,4,3\}$), Schlegel-Diagramm

Die Ecken eines in einem vierdimensionalen kartesischen Koordinatensystems zentrierten 24-Zells mit Kantenlänge 1 können folgendermaßen gegeben werden: Acht Ecken mit den Koordinaten $(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 1, 0)$ und $(0, 0, 0, \pm 1)$ und 16 Ecken der Form $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$. Erstere acht Koordinaten sind die eines regulären 16-Zells und die weiteren 16 die des dualen Tesserakts. Die zweiten 16 Ecken kann man jedoch noch in zwei Gruppen unterteilen, nämlich jene mit einer geraden Anzahl von (-) und jene mit ungerader. Diese Gruppen von 8 Ecken definieren dann jeweils wieder ein 16-Zell.

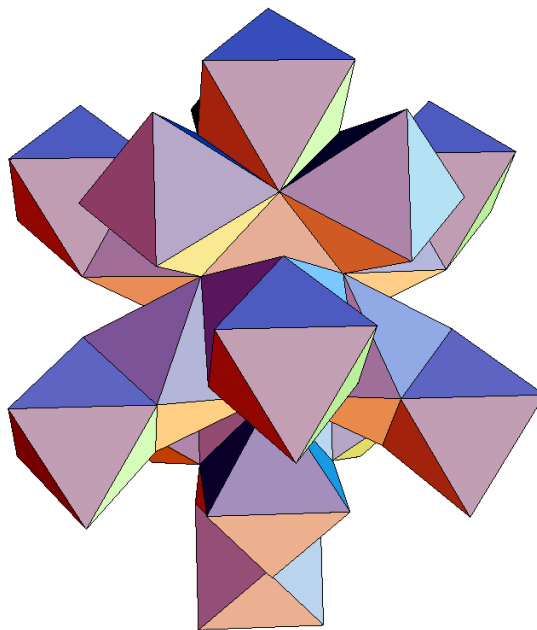


Abb. 3.22 Netz des 24-Zells

3.10 Das 120-Zell

Das 120-Zell besteht aus 120 Dodekaedern. Es hat 600 Ecken, 720 Pentagone und 1200 Kanten ($e-k+f-r=0$) ($600-1200+720-120=0$). Dabei liegen um jede Kante drei Zellen und um jede Ecke vier. Sein Schläfli-Symbol ist $\{5,3,3\}$.

Die Koordinaten der Ecken sind

$$\left(\pm 1, \pm 1, 0, 0\right), \left(\pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right), \left(\pm \frac{\tau}{2}, \pm \frac{\tau}{2}, \pm \frac{\tau}{2}, \pm \frac{1}{2\tau^2}\right), \left(\pm \frac{\tau^2}{2}, \pm \frac{1}{2\tau}, \pm \frac{1}{2\tau}, \pm \frac{1}{2\tau}\right)$$

jeweils in allen Permutationen und

$$\left(\pm \frac{\tau^2}{2}, \pm \frac{1}{2\tau}, \pm \frac{1}{2}, 0\right), \left(\pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \pm \frac{1}{2\tau}, \pm \frac{\tau}{2}, 0\right), \left(\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\tau}{2}, \pm \frac{1}{2\tau}\right)$$

jeweils mit den geraden Permutationen. Dabei ist τ die goldene Schnittzahl $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Das 120-Zell kann natürlich, so wie das 24-Zell, genau so systematisch aus Dodekaedern aufgebaut werden, eine ausführliche Erläuterung dieser Art wäre aber wohl bereits ziemlich unübersichtlich und nicht nachvollziehbar.

D.M.Y. Sommerville beschreibt diesen Aufbau in seinem Buch „The Geometry of n Dimensions“ [9] Bezug nehmend auf die Dualität zum 600-Zell folgendermaßen:
 „Im Schlegel-Modell mit einem Dodekaeder in der Mitte haben wir sukzessive Zonen von Dodekaedern 1, 12, 20, 12, 30, 12, 20, 12, 1. Die 600 Ecken sind dann in Zonen 20, 20, 30, 60, 60, 60, 20, 60, 20, 60, 60, 60, 30, 20, 20 angeordnet. Gruppen von 20 bilden die Ecken von regulären Dodekaedern, Gruppen von 30 bilden die Ecken der semi-regulären Ikosidodekaeder und Gruppen von 60 bilden die Ecken von anderen semi-regulären Polyedern, umgeben von 20 Hexagonen und 12 Pentagonalen, den Ikosaederstümpfen.“

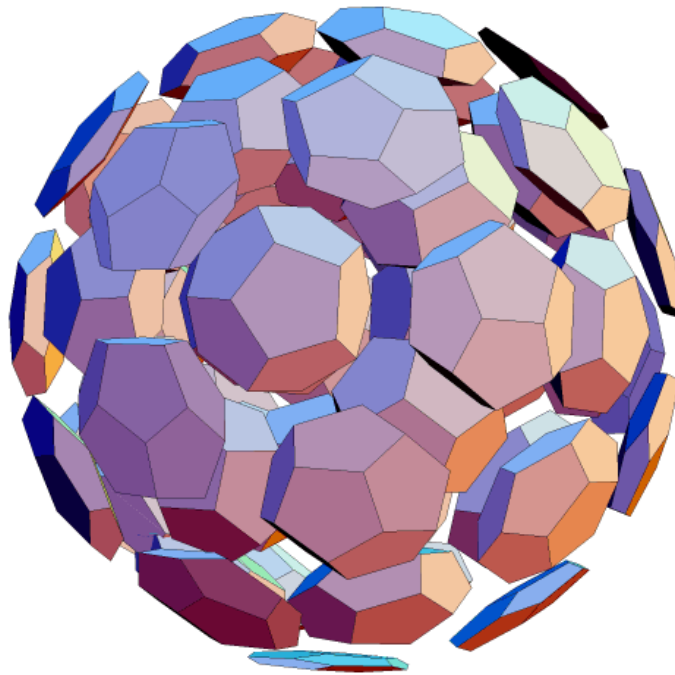


Abb 3.23 120-Zell in spezieller Darstellung

Abb 3.23 zeigt eine dreidimensionale Projektion des 120-Zells, in der die einzelnen dodekaedrischen Zellen, so wie sie unter der Zentralprojektion verzerrt dargestellt werden, wie bei einer Explosionszeichnung „auseinander gerissen“ sind. Hierzu zu bemerken ist allerdings, dass dies nur einer verständlichen Anschauung dienen soll, denn im Vierdimensionalen müssten natürlich alle Zellen, sowie deren Kanten, sichtbar sein und sich auch in einer Explosionsdarstellung nicht gegenseitig verdecken.

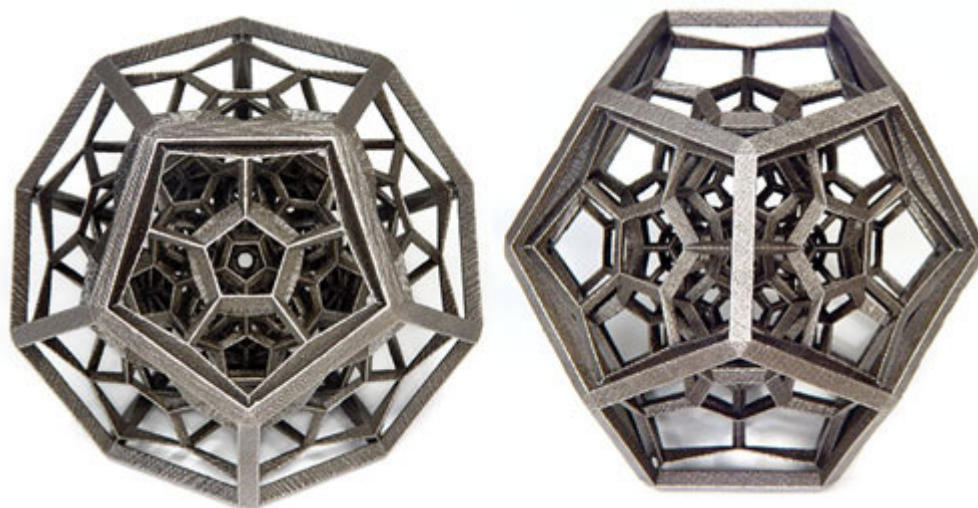


Abb. 3.24 Projektion des 120-Zells als Metall-Skulptur von Bathsheba Grossman

Wesentlich leichter durchschaut man die vierdimensionale Struktur dieses Objektes vermutlich beim Betrachten oder sogar Hantieren mit einem dreidimensionalen Modell, wie zum Beispiel mit den oben abgebildeten dreidimensionalen Projektionen aus Metall, links aus einer Richtung mit Blick auf eine der fünfeckigen Seitenflächen fotografiert, rechts mit Blick auf eine Kante.

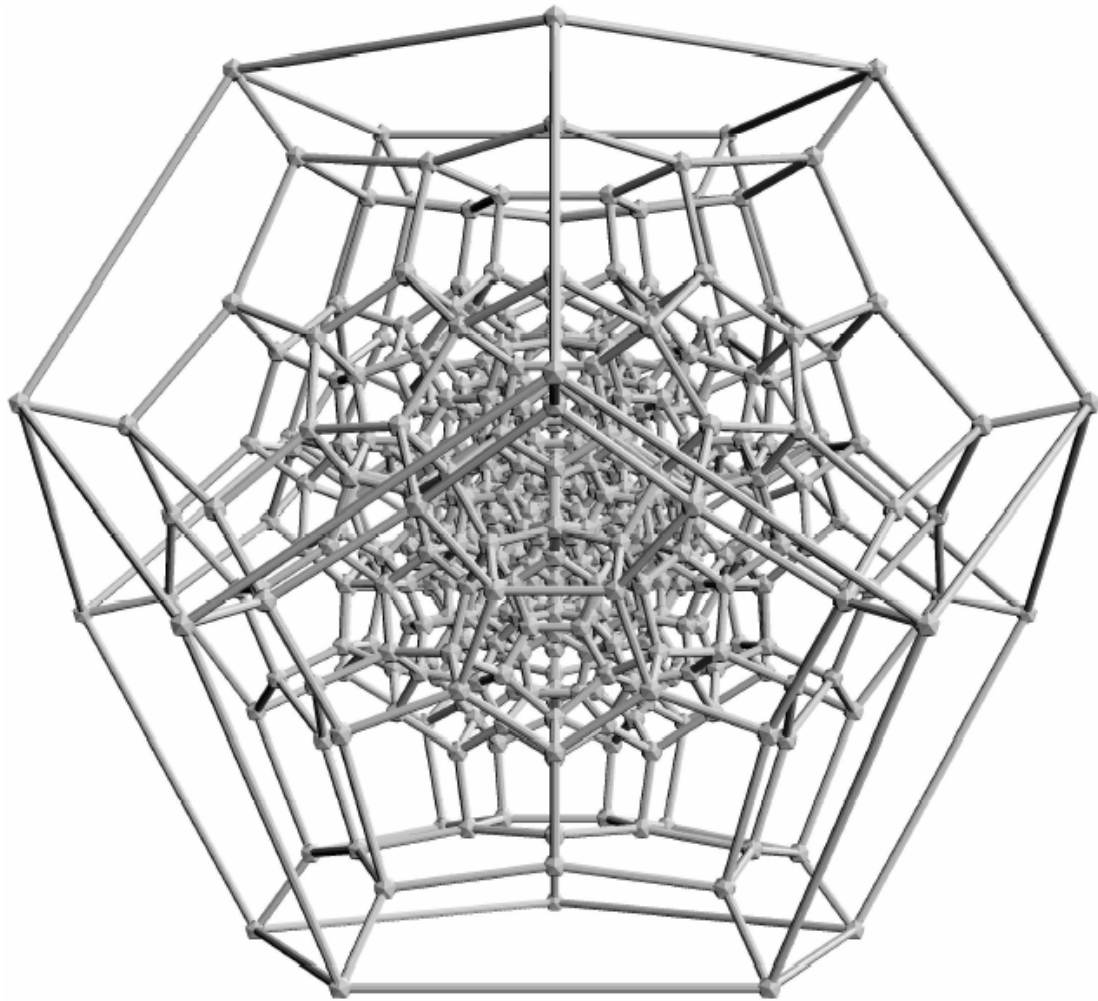


Abb. 3.25 120-Zell (Hektonicosachor, $\{5,3,3\}$), Schlegel-Diagramm

Konnte man im Schlegel-Diagramm des Pentachors oder Tesserakts noch die einzelnen Zellen erkennen, so gelingt dies beim 120-Zell kaum noch, das Basteln eines dreidimensionalen Netzes des 120-Zellers (siehe Abb. 3.26) aus 120 Papier-Dodekaedern wäre wohl eine einwöchige Projektarbeit für eine ganze Schulklasse.

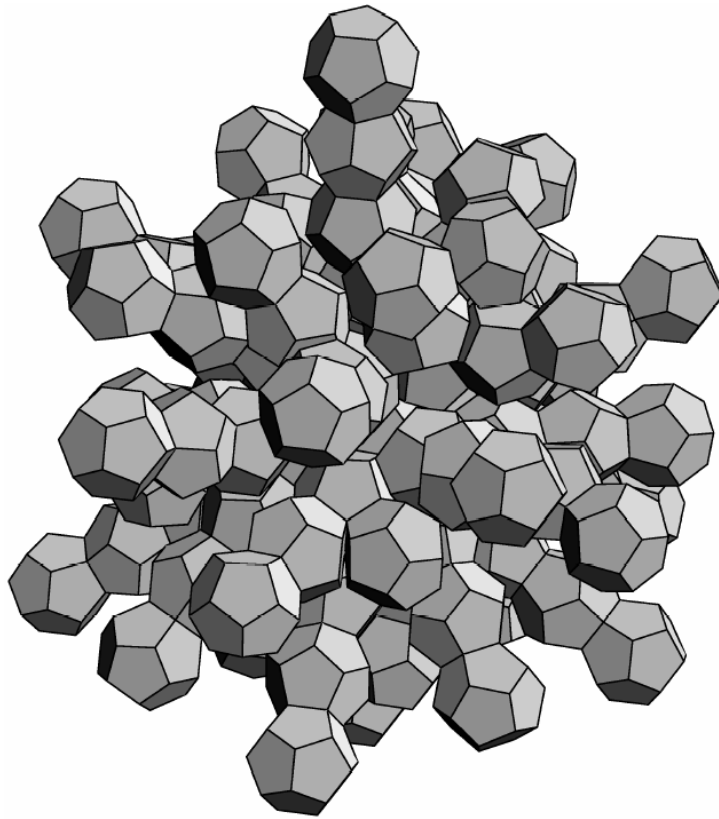


Abb. 3.26 Netz des 120-Zells

3.11 Das 600-Zell

Beim 600-Zell liegt die maximal mögliche Anzahl an Tetraedern um eine Kante, also fünf. Es besteht, wie der Name schon sagt, aus 600 tetraedrischen Zellen, 1200 Dreiecken, 720 Kanten und 120 Ecken ($e-k+f-r=0$) ($120-720+1200-600=0$), um die jeweils 20 Zellen liegen.

Dabei sind $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$, $(\pm 1, 0, 0, 0)$ mit allen Permutationen und

$(\pm\frac{\tau}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2\tau^2}, 0)$ mit allen geraden Permutationen die kartesischen Koordinaten der Ecken.

τ ist dabei wieder die goldene Schnittzahl $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

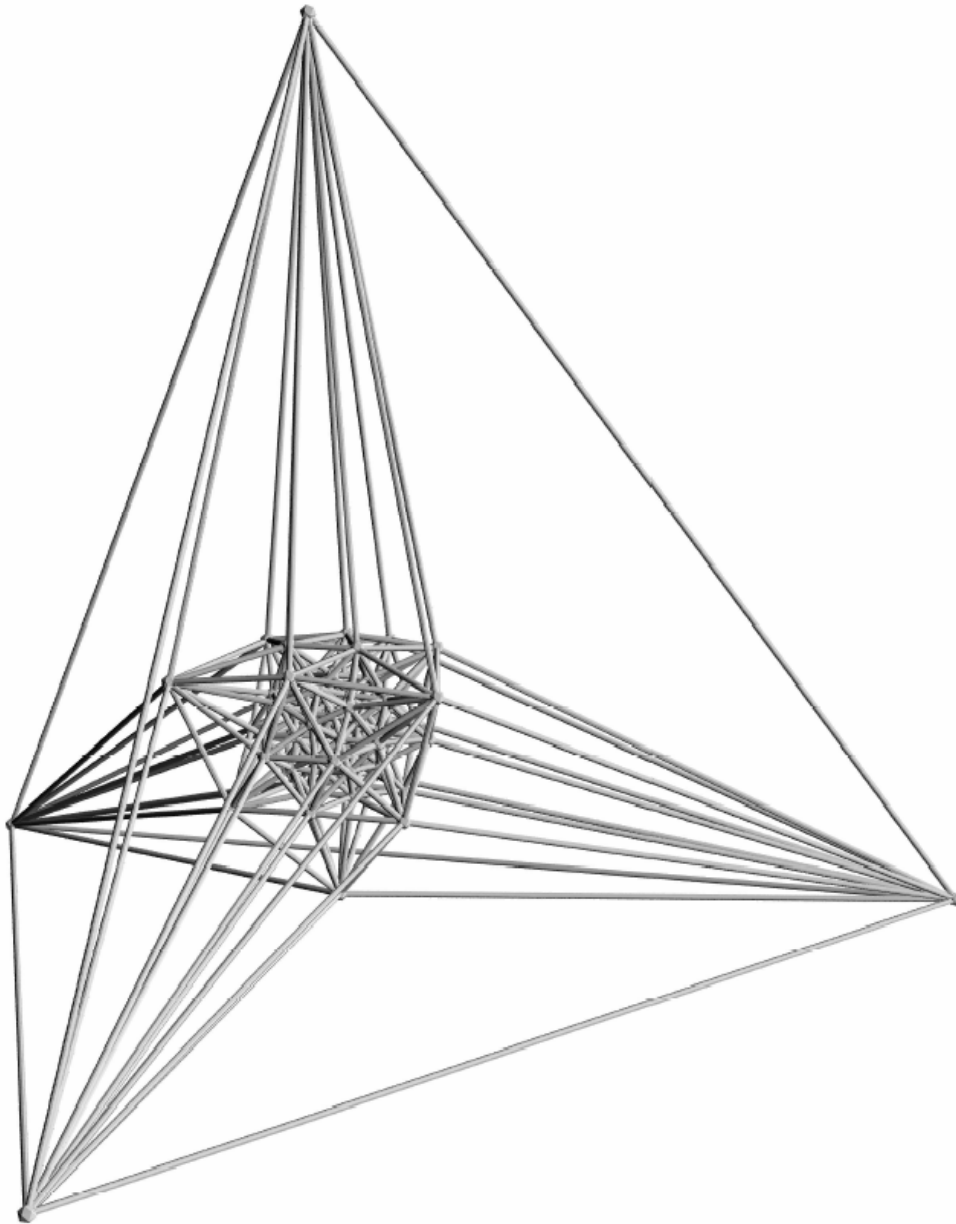


Abb. 3.27 600-Zell (Hexacosichor, $\{3,3,5\}$), Schlegel-Diagramm

600-Zell und 120-Zell sind duale Polychora. Dies kann man sehr leicht sehen, wenn man die Anzahl der Ecken, Kanten, Flächen und Räume der beiden in der Schreibweise $(600, 1200, 720, 120)$ (120-Zell) bzw. $(120, 720, 1200, 600)$ (600-Zell) anschreibt. Wie schon bei den Überlegungen zur Dualität zwischen 8- und 16-Zell entspricht hier jeder Zelle des 600-Zells eine Ecke des 120-Zells, jeder Fläche eine Kante, jeder Kante eine Fläche und jeder Ecke eine Zelle, was sich aus obiger Klammerschreibweise leicht ablesen lässt.

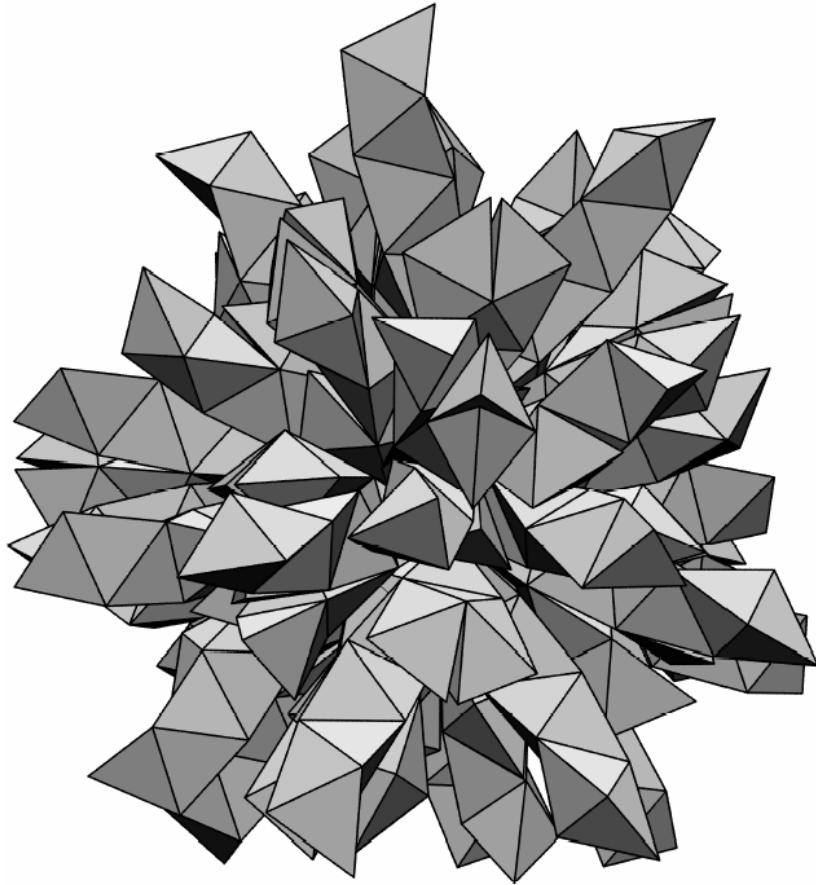


Abb. 3.28 Netz des 600-Zells

3.12 Zusammenfassung der Platonischen Polychora

Bezeichnung	Anzahl der...	Bezeichnung	Anzahl der...
e	Ecken	f_K	Flächen durch eine feste Kante
k	Kanten	r_K	Räume durch eine feste Kante
f	Flächen	dual zu $r_K = e_F$	Ecken in einer festen Seitenfläche
r	Räume	dual zu $f_K = k_F$	Kanten in einer festen Seitenfläche
		e_R	Ecken in einem festen Seitenraum
		k_R	Kanten in einem festen Seitenraum
		f_R	Flächen in einem festen Seitenraum

Name	e	k	f	r	$f_k=r_K$	$e_F=k_F$	e_R	k_R	f_R
5-Zell	5	10	10 Dreiecke	5 Tetraeder	3	3	4	6	4
8-Zell	16	32	24 Quadrate	8 Würfel	3	4	8	12	6
16-Zell	8	24	32 Dreiecke	16 Tetraeder	4	3	4	6	4
24-Zell	24	96	96 Dreiecke	24 Oktaeder	3	3	6	12	8
120-Zell	600	1200	720 Fünfecke	120 Dodekaeder	3	5	20	30	12
600-Zell	120	720	1200 Dreiecke	600 Tetraeder	5	3	4	6	4





4. Andere reguläre Polychora

Die bisher besprochenen sechs Polychora sind natürlich - wenn auch die interessantesten – nicht die einzigen im vierdimensionalen Raum existierenden. Im Folgenden werden deshalb auf systematischem Weg auch andere vierdimensionale Polychora vorgestellt, obgleich es aufgrund des enormen Umfangs nicht möglich ist, hier alle Typen explizit zu behandeln. H.S.M. Coxeter, einer der bekanntesten Geometer des 20. Jahrhunderts, der sich umfangreich mit Polytopen beschäftigte, sei hier zitiert: „I’m a Platonist, a follower of Plato, who believes that one didn’t invent these sorts of things, that one discovers them. In a sense, all these mathematical facts are right there waiting to be discovered.”





Die Platonischen Polychora gehören zur Familie der regulären, konvexen Polychora mit gleichartigen Zellen, es gibt jedoch weitere 10 Polychora, wenn man keine Konvexität verlangt, d.h. Kanten, Flächen oder auch Zellen dürfen sich überschneiden. Man gelangt so zu den 10 so genannten Schläfli-Hess-Polychora.

Ludwig Schläfli entdeckte 1852 vier der insgesamt 10 zu dieser regulären Gruppe zählenden Polychora, vernachlässigte jedoch jene sechs, deren Zellen oder Eckenfiguren die Schläfli-Symbole $\{5/2,5\}$ and $\{5,5/2\}$ tragen. Erst 1883 vervollständigte Edmund Hess Schläflis Entdeckung um diese sechs weiteren in seinem Buch „Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung auf die Theorie der Gleichflächigen und der gleicheckigen Polyeder“.







Die unten angeführte Tabelle erläutert zunächst die vier regulären sternförmigen Polyeder, die es im dreidimensionalen Raum neben den schon vorgestellten fünf konvexen regulären Polyedern gibt. Man nennt sie auch Kepler-Poinsot-Körper.

Name	Bild	Schläfli-Symbol	Flächentyp	Eckfigur	dualer Polyeder
Kleiner Stern		{5/2,5}	Pentagramm {5/2}	Fünfeck {5}	Großer Dodekaeder
Großer Dodekaeder		{5,5/2}	Fünfeck {5}	Pentagramm {5/2}	Kleiner Stern
Großer Stern		{5/2,3}	Pentagramm {5/2}	Dreieck {3}	Großer Ikosaeder
Großer Ikosaeder		{3,5/2}	Dreieck {3}	Pentagramm {5/2}	Großer Stern

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die entsprechenden Schläfli-Hess-Polychora, die sich aus den oben angeführten Kepler-Poinsot-Körpern ergeben. Die Bilder sind jeweils als Parallelprojektionen vierdimensionaler Objekte in den dreidimensionalen Raum zu sehen, die als volle Körper dargestellt werden. Da hierbei nur Ecken, Kanten und Flächen, aber keine dreidimensionalen Zellen dargestellt werden können, sehen manchmal zwei verschiedene Polytope gleich aus. Das passiert genau dann, wenn die Flächen vom gleichen Typ sind und die Eckfiguren die gleichen Kanten haben. Letzteres ist der Fall für {3,5} und {5,5/2} sowie für {3,5/2} und {5/2,5}. Gemeinsam mit den bereits vorgestellten sechs Platonischen Polychora bilden sie die Gruppe der sechzehn regulären Polychora.

Bild (jeweils als voller Körper dargestellt)	Schläfli-Symbol	Zelltyp	Eckfigur	Anzahl				duales Polychor
				e	k	f	z	
	{3,5,5/2}	Ikosaeder {3,5}	Großer Dodekaeder {5,5/2}	120	720	1200	120	{5/2,5,3}
	{5/2,5,3}	Kleiner Stern {5/2,5}	Dodekaeder {5,3}	120	1200	720	120	{3,5,5/2}
	{5,5/2,5}	Großer Dodekaeder {5,5/2}	Kleiner Stern {5/2,5}	120	720	720	120	selbstdual
	{5,3,5/2}	Dodekaeder {5,3}	Großer Ikosaeder {3,5/2}	120	720	720	120	{5/2,3,5}

Fortsetzung der Tabelle auf der nächsten Seite

	$\{5/2,3,5\}$	Großer Stern $\{5/2,3\}$	Ikosaeder $\{3,5\}$	120	720	720	120	$\{5,3,5/2\}$
	$\{5/2,5,5/2\}$	Kleiner Stern $\{5/2,5\}$	Großer Dodekaeder $\{5,5/2\}$	120	720	720	120	selbstdual
	$\{5,5/2,3\}$	Großer Dodekaeder $\{5,5/2\}$	Großer Stern $\{5/2,3\}$	120	1200	720	120	$\{3,5/2,5\}$
	$\{3,5/2,5\}$	Großer Ikosaeder $\{3,5/2\}$	Kleiner Stern $\{5/2,5\}$	120	720	1200	120	$\{5,5/2,3\}$
	$\{3,3,5/2\}$	Tetraeder $\{3,3\}$	Großer Ikosaeder $\{3,5/2\}$	120	720	1200	600	$\{5/2,3,3\}$
	$\{5/2,3,3\}$	Großer Stern $\{5/2,3\}$	Tetraeder $\{3,3\}$	600	1200	720	120	$\{3,3,5/2\}$

5. Uniforme Polychora

Neben den regulären Polyedern gibt es im dreidimensionalen Raum auch die halbregulären, bei welchen in jeder Ecke dieselben Arten von Polygonen jeweils in der selben Anzahl zusammentreffen, also etwa in jeder Ecke e_a a-Ecke, e_b b-Ecke, u.s.w. Alle diese Polyeder, die lauter reguläre Vielecke mit gleichen Kantenlängen enthalten, heißen halbregulär oder Archimedisch. Bei der Definition von Halbbregelmäßigkeit allgemein gab es jedoch lange Zeit Uneinigkeit. So könnte im Dreidimensionalen die Transitivität der Ecken, die Regelmäßigkeit der Flächen oder die Gleichheit der Flächen aufgegeben werden. Aus diesem Grund hat sich ein neuer Begriff etabliert, nämlich die Uniformität.

Def: Ein Polygon ist *uniform*, wenn es regelmäßig ist. Ein Polytop in n Dimensionen, $n \geq 3$, ist uniform, wenn es nur aus (nicht notwendig gleichen) uniformen Polytopen der Dimension $(n-1)$ aufgebaut ist und über Eckentransitivität verfügt.

In diesem Sinne sind die Archimedischen Polyeder uniform. Allerdings gibt es daneben noch mehr uniforme Polyeder, nämlich die Platonischen Polyeder, die Prismen (bestehend aus 2 parallelen n -Ecken, verbunden mit 4-Ecken) und die Antiprismen (zwei parallelen n -Ecken, die verdreht zueinander und somit durch 3-Ecke verbunden sind).

Im vierdimensionalen Raum gibt es (neben den beiden unendlichen Klassen von Prismachora und Biprismachora) genau 64 uniforme Polychora, darunter 41 Archimedische. Auf einen ausführlichen Beweis über die Art und Anzahl dieser wird hier auf die Dissertation „Vierdimensionale Archimedische Polytope“ von Marco Möller (2004, Universität Hamburg) verwiesen.

Der Beweis beruht darauf, dass aus der Kantenumgebung, also der Anordnung von uniformen Polyedern um eine Kante, ein Radius bestimmt wird, der zu einer Sphäre führt, auf der alle Ecken der beteiligten Polyeder liegen (Ecktransitivität). Es werden dabei 1000 verschiedene Kantenumgebungen gefunden, und nach einem Ausschlussverfahren bleiben 72 Radien mit zugehöriger Kantenumgebung übrig. Diese werden einzeln betrachtet und aussortiert (wenn eine Eckenumgebung nicht widerspruchsfrei erzeugt bzw. an Nachbarecken nicht die gleiche Eckenumgebung hergestellt werden kann. Es werden so 64 verschiedene Eckenumgebungen gefunden, die mit 64 vierdimensionalen Polytopen identifiziert werden.

Im Einzelnen kann man sie folgendermaßen einteilen:

- Sechs Platonische Polytope
- Vier Prismatope basierend auf vier der fünf Platonischen Polyeder (der Hexaeder als Basis liefert ein schon gezähltes Platonisches Polytop)
- 13 Prismatope basierend auf den 13 Archimedischen Polyedern
- 41 weitere Polytope, welche, da sie weder Platonisch noch Prisma-ähnlich sind, Archimedische Polytope genannt werden

Eine mögliche Erzeugungsmethode von Prismachora ist das „Hochziehen“ uniformer Polyeder in die vierte Dimension. Dabei bleibt ein Polyeder als Basis in der dreidimensionalen Hyperebene, ein zweiter (gleicher) wird senkrecht zu dieser Hyperebene entlang der vierten Dimension – ohne verdreht zu werden – so weit verschoben, bis die Entfernung zwischen korrespondierenden Ecken gleich der Kantenlänge der beteiligten Polyeder ist. Das Prismachor besteht also aus der konvexen Hülle der beiden parallelen Polyeder.

Da bei der Verschiebung natürlich auch die Flächen mit verschoben werden und zu jeder Fläche des Basispolyeders eine parallele im anderen Polyeder zu finden ist, bilden diese Flächenpaare mit den Verbindungskanten korrespondierender Ecken Prismen, und zwar genau so viele, wie Flächen im Polyeder zu finden sind.

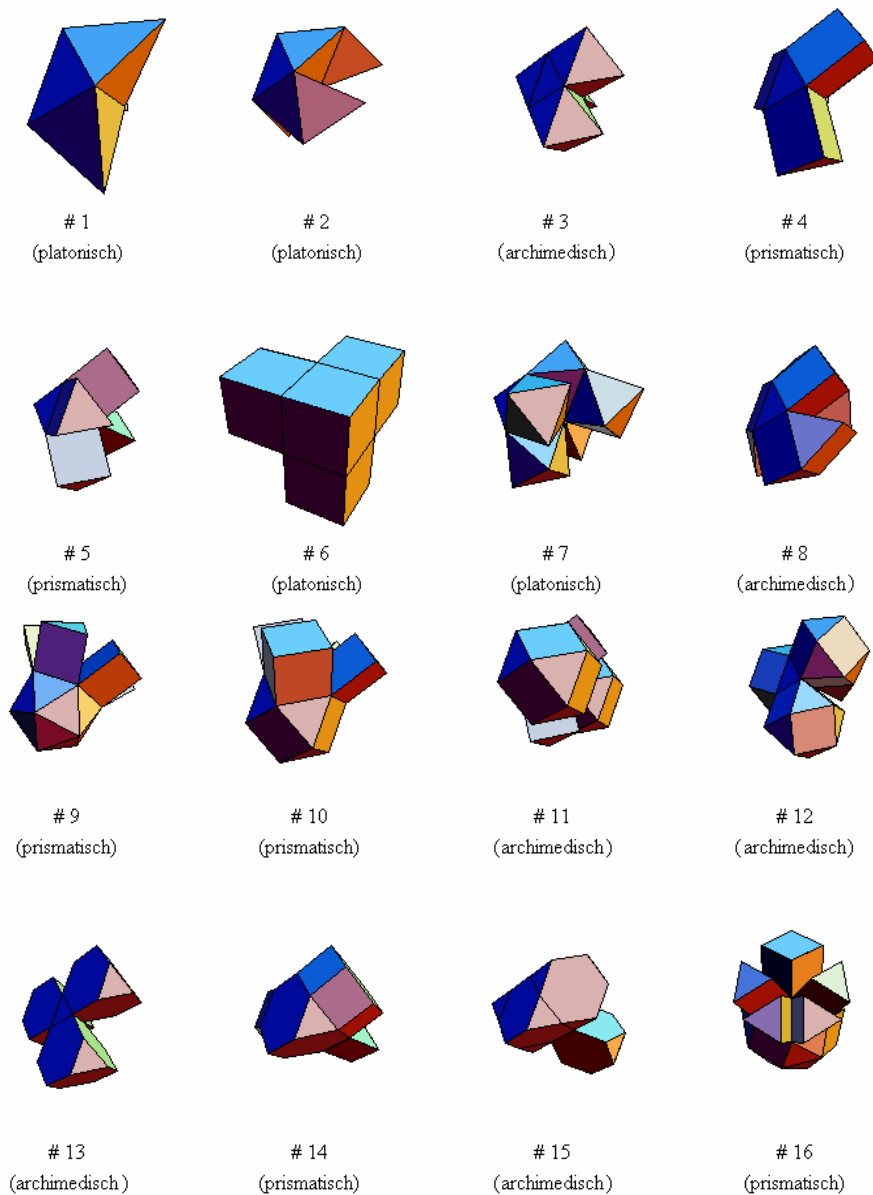
Man kann also die Eckkoordinaten der Platonischen oder Archimedischen Polyeder nehmen und jeder Ecke die vierte Koordinate Null anhängen. Dann haben beim „Hochziehen“ die anderen Eckkoordinaten die gleichen Werte, bis auf die vierte Koordinate, die jetzt den Wert k annimmt. Damit besteht das Prismachor aus zwei Basiszellen und für jede Fläche einer Basiszelle ein entsprechendes Prisma.

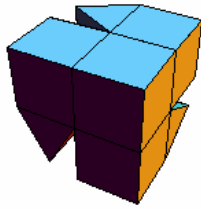
Das Prismachor mit einem stumpfen Hexaeder $(3,8,8)$ (um jede Ecke liegt ein Dreieck und 2 Achtecke) als Basis besteht demnach aus zwei $(3,8,8)$, sechs $(4,8,8)$ und acht $(3,4,4)$.

Dann ist aber auch die Eckenumgebung dieser uniformen Polychora bestimmt: Für ein Prismachor mit der Basis (x,y,z) liegen um jede Ecke ein (x,y,z) , ein $(4,4,x)$, ein $(4,4,y)$ und ein $(4,4,z)$.

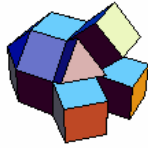
Die folgenden Abbildungen zeigen die Eckenumgebungen der uniformen Polychora. Die Platonischen Polychora sind regelmäßig, die prismatischen Polychora besitzen an den Ecken neben einem beliebigen uniformen Polyeder nur noch Prismen und die restlichen werden, wie oben erwähnt als Archimedische Polychora bezeichnet.

Abb. 5.1: Die Eckenumgebungen der uniformen Polychora:





17
(archimedisch)



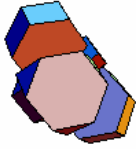
18
(prismatisch)



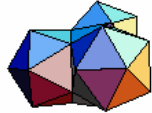
19
(prismatisch)



20
(archimedisch)



21
(archimedisch)



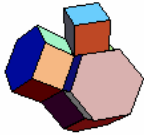
22
(archimedisch)



23
(archimedisch)



24
(platonisch)



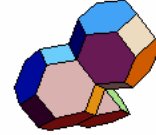
25
(prismatisch)



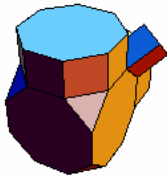
26
(prismatisch)



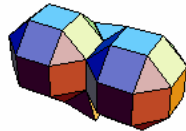
27
(archimedisch)



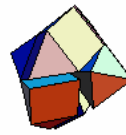
28
(archimedisch)



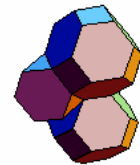
29
(prismatisch)



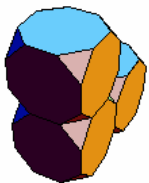
30
(archimedisch)



31
(archimedisch)



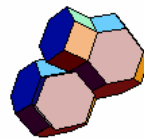
32
(archimedisch)



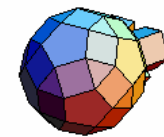
33
(archimedisch)



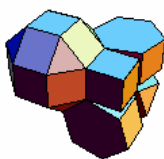
34
(prismatisch)



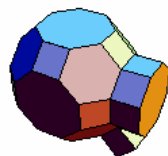
35
(archimedisch)



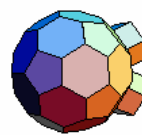
36
(prismatisch)



37
(archimedisch)



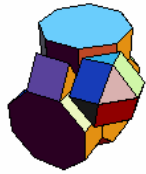
38
(prismatisch)



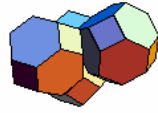
39
(prismatisch)



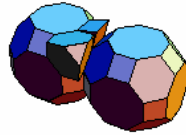
40
(archimedisch)



41
(archimedisch)



42
(archimedisch)



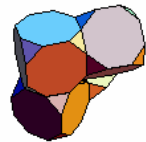
43
(archimedisch)



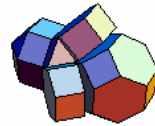
44
(prismatisch)



45
(archimedisch)



46
(archimedisch)



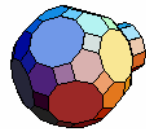
47
(archimedisch)



48
(archimedisch)



49
(platonisch)



50
(prismatisch)



51
(archimedisch)



52
(archimedisch)



53
(archimedisch)



54
(archimedisch)



55
(archimedisch)



56
(archimedisch)



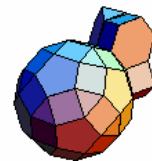
57
(archimedisch)



58
(archimedisch)



59
(archimedisch)



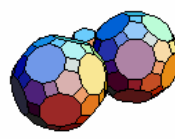
60
(archimedisch)



61
(archimedisch)



62
(archimedisch)



63
(archimedisch)



64
(archimedisch)

6. Bewegliche Kreuzpolytope

Eine wichtige Frage die Geometrie von Strukturen betreffend ist jene nach der Starrheit oder Flexibilität dieser Strukturen. Im Bauwesen oder im Maschinenbau und vielen anderen technischen Richtungen ist diese Frage wesentlich, weil Brücken, Gebäude oder diverse mechanische Bauteile starr gebaut sein müssen.

In der Geschichte der Erforschung von beweglichen Polyedern spielt die sogenannte „Bellows Conjecture“ eine wichtige Rolle. Diese Vermutung von R. Connelly besagt, dass eine kontinuierliche Bewegung, welche die Kantenlängen eines Polyeders erhält, auch dessen Volumen erhält. Einen ersten Beweis im dreidimensionalen euklidischen Raum E^3 lieferte 1995 I. Sabitov. R. Connelly lieferte zwei Jahre später einen zweiten Beweis (siehe [16]).

Im Zuge der Konferenz „Canadian Mathematical Society Winter 1998 Meeting“ an der Queen’s University und dem Royal Military College in Kanada präsentierte Anke Walz eine Klasse von kontinuierlich beweglichen Kreuzpolytopen des vierdimensionalen Euklidischen Raumes E^4 .

6.1 Bewegliche Kreuzpolytope von A. Walz

Seien $a_1, a_2, \dots, d_1, d_2$ die acht Ecken eines vierdimensionalen Kreuzpolytops C_4 und sei die Menge der 24 Kanten aufgeteilt in Kanten der Vierecke ($=C_2$)

$$Q := a_1 b_1 a_2 b_2, \quad \bar{Q} := c_1 d_1 c_2 d_2,$$

und das zweiteilige Gefüge

$$F := \{ p \bar{p} \mid p \in Q, \bar{p} \in \bar{Q} \}.$$

Zur Visualisierung werden zwei komplementäre Parallelprojektionen des E^4 auf Ebenen verwendet, bei denen jeder Punkt $x = (x, y, z, t) \in E^4$ auf seinen „Grundriss“ $x' = (x, y)$ und seinen „Aufriss“ $x'' = (z, t)$ abgebildet wird, folglich also E^4 als $E^2 \times E^2$ darstellt (siehe [16]). Der Abstand zweier Punkte $x, y \in E^4$ voneinander ist also gegeben durch

$$\|x - y\|^2 = \|x' - y'\|^2 + \|x'' - y''\|^2. \quad (1)$$

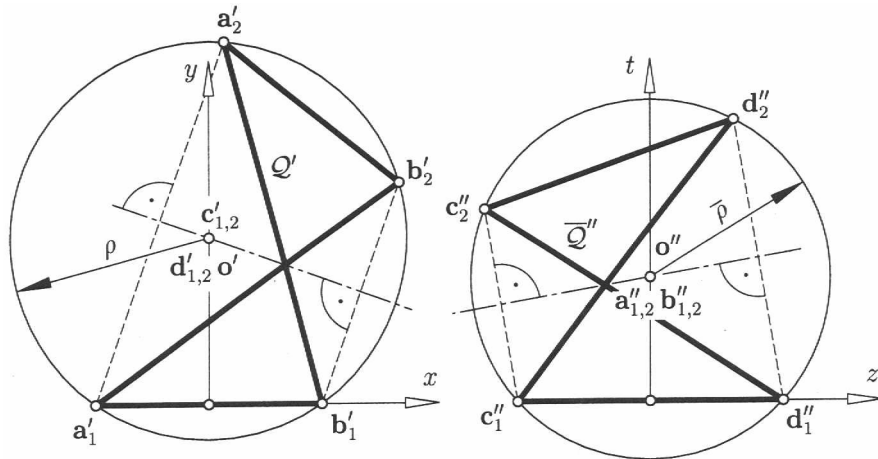


Abb. 6.1 Vierdimensionales bewegliches Kreuzpolytop in Grund- und Aufriss

In Walzs Beispiel liegen die zwei Vierecke Q und \bar{Q} in zwei total-orthogonalen Ebenen, also zum Beispiel jeweils parallel zur xy -Ebene bzw. zur zt -Ebene. Deshalb erhält man im Grundriss Q , im Aufriss \bar{Q} in wahrer Größe (siehe Abb. 6.1). Die Vierecke Q und \bar{Q} sind Antiparallelogramme, also nicht-konvexe Vierecke mit gleich langen gegenüberliegenden Seiten, welche immer eine Symmetrieachse und einen Umkreis besitzen, dessen Mittelpunkt hier o heißt. Seien $\rho, \bar{\rho}$ die Radien der Umkreise. Dann haben wegen (1) alle Kanten von F die selbe Länge $r := \sqrt{\rho^2 + \bar{\rho}^2}$.

Angenommen die beiden Antiparallelogramme Q, \bar{Q} bewegten sich gleichzeitig wie Vier-Stab Verbindungen in deren Ebenen, so dass das gemeinsame Zentrum o fix bleibt und die Radien $\rho, \bar{\rho}$ der Bedingung

$$r^2 = \rho^2 + \bar{\rho}^2 = \text{konst.} \quad (2)$$

gehörchen. Dann bleiben die Längen der Kanten des Kreuzpolytops C_4 erhalten. Da alle Flächen von C_4 aus Dreiecken bestehen, beschreiben die ebenen Bewegungen eine kontinuierliche Selbstbewegung des Kreuzpolytops.

6.2 Analytische Darstellung der Beweglichkeit

Um eine analytische Darstellung zu erhalten, seien folgende Koordinaten gewählt:

$$a_1 = (-\alpha, 0, 0, \tau), \quad b_1 = (\alpha, 0, 0, \tau), \quad c_1 = (0, \eta, -\gamma, 0), \quad d_1 = (0, \eta, \gamma, 0) \quad \text{mit } \alpha, \gamma > 0. \quad (3)$$

Die Grundrisse von a_1 und b_1 sowie die Aufrisse von c_1 und d_1 seien fixiert, wobei die Hyperebene $S_1 := a_1 b_1 c_1 d_1$ von C_4 im E^4 durch eine elliptische Bewegung parallel zur yt -Ebene noch immer beweglich bleibt. α und γ sind also konstant, während η und τ variieren. Das induziert Überlegungen bezüglich der von Q und \bar{Q} aufgespannten Ebenen.

Sei

$$2\beta := \|b_2 - a_1\| = \|b_1 - a_2\| > 2\alpha = \|b_1 - a_1\| = \|b_2 - a_2\|,$$

$$2\delta := \|d_2 - c_1\| = \|d_1 - c_2\| > 2\gamma = \|d_1 - c_1\| = \|d_2 - c_2\|.$$

Aus der ebenen Kinematik ist bekannt, dass in jeder Position der Vier-Stab Verbindung Q' in der xy -Ebene die Koppel $a'_2b'_2$ das Bild des Rahmen-Gerüsts $a'_1b'_1$ unter der Spiegelung an einer beliebigen Tangente l der Ellipse mit Fokalfunkten a'_1, b'_1 und Halbachsen β und $\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ ist (siehe Abb. 6.2).

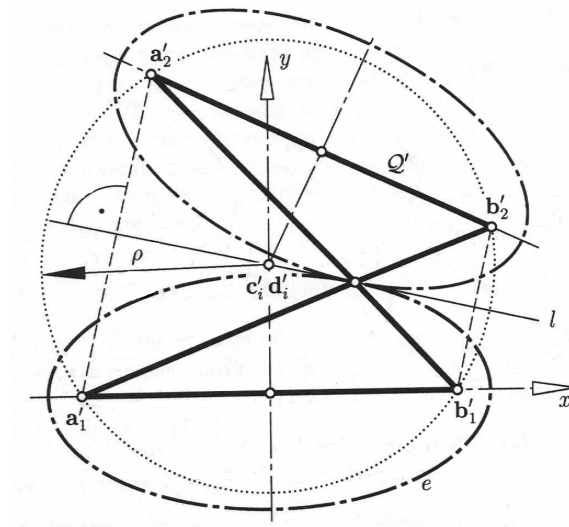


Abb. 6.2 Die Antiparallelogramm-Bewegung, ein symmetrisches Rollen von Ellipsen

Die Tangente l berühre die Ellipse e im Momentanpol

$$(\beta \sin \varphi, \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \cos \varphi). \quad (4)$$

Dann schneidet l die Nebenachse ($x=0$) im Punkt $(0, \eta)$ mit

$$\eta = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\cos \varphi}. \quad (5)$$

Dieser Punkt ist der Mittelpunkt o' des Umkreises von Q' . Der Radius ist daher

$$\rho^2 = \alpha^2 + \eta^2 = \beta^2 + (\beta^2 - \alpha^2) \tan^2 \varphi \geq \beta^2.$$

Auf die gleiche Art und Weise erhält man die Beweglichkeit von $\overline{Q''}$ im Aufriss durch eine symmetrische Rollbewegung von Ellipsen mit Halbachsen δ und $\sqrt{\delta^2 - \gamma^2}$. Der Momentanpol dieser Bewegung in der zt -Ebene sei

$$(\delta \sin \psi, \sqrt{\delta^2 - \gamma^2} \cos \psi). \quad (6)$$

Der Umkreis von \overline{Q}'' hat daher das Zentrum $o'' = (0, \tau)$ mit

$$\tau = \frac{\sqrt{\delta^2 - \gamma^2}}{\cos \psi}, \quad (7)$$

und sein Radius ist

$$\overline{\rho}^2 = \gamma^2 + \tau^2 = \delta^2 + (\delta^2 - \gamma^2) \tan^2 \psi \geq \delta^2.$$

Die notwendige Bedingung (2) impliziert

$$r^2 - \beta^2 - \delta^2 = (\beta^2 - \alpha^2) \tan^2 \varphi + (\delta^2 - \gamma^2) \tan^2 \psi \geq 0,$$

d.h.
$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{r^2 - \beta^2 - \delta^2} \tan^2 \varphi + \frac{\delta^2 - \gamma^2}{r^2 - \beta^2 - \delta^2} \tan^2 \psi = 1. \quad (8)$$

Diese Gleichung verbindet die Parameter φ und ψ und ruft eine geschlossene einparametrische Bewegung von C_4 hervor. Sei für $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\varphi = \arctan\left(\sqrt{\frac{r^2 - \beta^2 - \delta^2}{\beta^2 - \alpha^2}} \cos t\right), \quad \psi = \arctan\left(\sqrt{\frac{r^2 - \beta^2 - \delta^2}{\delta^2 - \gamma^2}} \sin t\right). \quad (9)$$

Dann erhält man durch Spiegelung von a_1, b_1 an der Tangente l der Ellipse e im Pol (4)

$$a_2 = \left(-\alpha + \frac{2(\beta^2 - \alpha^2) \sin \varphi}{\beta - \alpha \sin \varphi}, \frac{2\beta \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \cos \varphi}{\beta - \alpha \sin \varphi}, 0, \tau\right), \quad (10)$$

$$b_2 = \left(\alpha + \frac{2(\beta^2 - \alpha^2) \sin \varphi}{\beta + \alpha \sin \varphi}, \frac{2\beta \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \cos \varphi}{\beta + \alpha \sin \varphi}, 0, \tau\right).$$

Auf dieselbe Weise führt (6) zu

$$c_2 = \left(0, \eta, -\gamma + \frac{2(\delta - \gamma^2) \sin \psi}{\delta - \gamma \sin \psi}, \frac{2\delta \sqrt{\delta^2 - \gamma^2} \cos \psi}{\delta - \gamma \sin \psi}\right), \quad (11)$$

$$d_2 = \left(0, \eta, \gamma + \frac{2(\delta^2 - \gamma^2) \sin \psi}{\delta + \gamma \sin \psi}, \frac{2\delta \sqrt{\delta^2 - \gamma^2} \cos \psi}{\delta + \gamma \sin \psi}\right).$$

Die Spiegelung des Grundrisses an der Tangente l kann zu einer Spiegelung des 4-Raumes an einer, zu der xy -Ebene orthogonalen und durch l gehenden, Hyperebene L erweitert werden.

So l die Grundrisse $c'_i = d'_i$ für $i=1,2$ enthält, ergibt die 4D-Spiegelung

$$a_1 \mapsto a_2, b_1 \mapsto b_2, c_i \mapsto c_i, d_i \mapsto d_i.$$

Auf dieselbe Weise führt die Spiegelung des Aufrisses auf eine Spiegelung von E^4 an einer Hyperebene \bar{L} mit

$$a_i \mapsto a_i, b_i \mapsto b_i, c_1 \mapsto c_2, d_1 \mapsto d_2.$$

Da \bar{L} zu L orthogonal ist, sind die beiden komplementären Hyperebenen $S_1 = a_1 b_1 c_1 d_1$ und $S_2 = a_2 b_2 c_2 d_2$ in jeder Position des beweglichen Kreuzpolytops Spiegelbilder in Bezug auf eine Ebene $L \cap \bar{L}$.

7. Darstellende Geometrie im 4-dim. Anschauungsraum A^4

Die in Kapitel 6 bereits verwendete Grund- und Aufrissabbildung stellt ein lineares Zweibildersystem der Darstellenden Geometrie des A^4 dar, welches in diesem Kapitel eingehender behandelt wird und das auch für die Schule zur Darstellung vierdimensionaler Objekte geeignet ist.

Für eine lineare Abbildung $f: U \rightarrow U'$ ist der Bildraum $f(U)$ ein Unterraum des Zielraumes U' von f . Diejenigen Vektoren aus U , die durch f auf den Nullvektor von U' abgebildet werden, bilden einen Unterraum, den Kern von f ($\ker f$). Die Dimension von $\ker f$ gibt den Dimensionsverlust von U unter f an.

Ist f die durch die Affinität α (globale Abbildung zwischen affinen Räumen) induzierte lineare Abbildung, so heißt die Dimension des Kerns von f Defekt von α . Bei $\text{def } \alpha = 0$ heißt α regulär, sonst singulär. Bei singulären Affinitäten tritt also Dimensionsverlust ein. Die Mengen der Punkte mit demselben Bildpunkt heißen Fasern (Faserräume von α).

In der Zeichenebene π verwendet man ein kartesisches Koordinatensystem, in dem man den Nullpunkt O und die Einheitspunkte E_x, \dots, E_t des affinen Koordinatensystems (x, y, z, t) im A^4 angeben kann. Als Grund- und Aufrissabbildung werden die beiden Affinitäten vom Defekt 2 verwendet:

$$\begin{aligned} \alpha_1: A^4 \rightarrow \pi, P=(x, y, z, t) \mapsto P'=(x, y) = 1. \text{ Riss oder Grundriss,} \\ \alpha_2: A^4 \rightarrow \pi, P=(x, y, z, t) \mapsto P''=(-z, -t) = 2. \text{ Riss oder Aufriss.} \end{aligned}$$

Die Affinität α_1 lässt sich aus der Parallelprojektion $\iota_1: A^4 \rightarrow \pi_1: =[OE_x E_y]$ und einer regulären Affinität $\pi_1 \rightarrow \pi$ zusammensetzen, analog für α_2 .

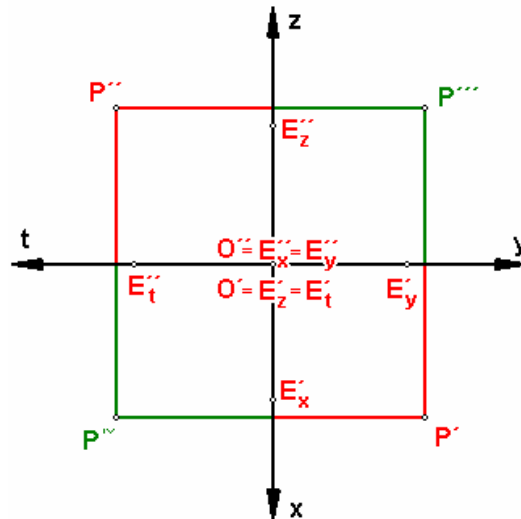


Abb. 7.1 Koordinatensystem in der Zeichenebene

Die Abbildung $A^4 \rightarrow \pi \times \pi, P \mapsto (P', P'')$ ist bijektiv. Die Punkte P des A^4 mit $P' = P''$ erfüllen die Gleichung $x + z = y + t = 0$, sind also Punkte einer Ebene, der Koinzidenzebene. Aus (P', P'') sind auch die Nebenbilder P' und P'' herzuleiten, die gleichfalls Bilder von P in singulären Affinitäten vom Defekt 2 darstellen.

7.1 Abbildung einer Geraden

Für eine Gerade g ist die Zusammensetzung $\alpha_g := (\alpha_{1|g})^{-1}(\alpha_{2|g}) : g' \rightarrow g'', X' \mapsto X''$ eine reguläre Affinität zwischen den Punktreihen g' und g'' , also eine Ähnlichkeit. Die Vervollständigung erfolgt über Teilverhältnisübertragung, etwa über ein Nebenbild („Angittern“).

Für ein $g = [AB]$ mit $A' \neq B', A'' = B''$ ist g zweitprojizierend und daher parallel zu π_1 , also eine erste Hauptgerade. Im umgekehrten Fall ist g erstprojizierend und daher eine zweite Hauptgerade. $A' = B'$ und $A'' = B''$ ist äquivalent zu $A = B$ und stellt keine eigentliche Gerade dar.

7.2 Abbildung einer Ebene

Bei der Darstellung einer Ebene $\varepsilon = [ABC]$ müssen mehrere Fälle unterschieden werden. Sind $[A'B'C']$ und $[A''B''C'']$ Dreiecke, dann sind die Einschränkungen $\alpha_{1|\varepsilon}$ und $\alpha_{2|\varepsilon}$ reguläre Affinitäten, d.h. ε ist nichtprojizierend. Ist $[A'B'C']$ ein Dreieck und $[A''B''C'']$ eine Gerade, dann hat die Einschränkung $\alpha_{2|\varepsilon}$ den Defekt 1 und die Ebene ε heißt halbweitprojizierend, im umgekehrten Fall heißt sie halberstprojizierend.

Es können aber auch $[A'B'C']$ und $[A''B''C'']$ als Geraden erscheinen, ε ist dann (halb)doppeltprojizierend und enthält erst- und zweitprojizierende Geraden, nämlich die Fasern der singulären Affinitäten $\alpha_{1|\varepsilon}$ bzw. $\alpha_{2|\varepsilon}$. Doppeltprojizierende Ebenen sind zueinander parallel, da genau im Fall der Parallelität zwischen Ebenen die eine durch Translation in die andere Ebene übergeführt werden kann und Punktepaare einer Translation durch eine Affinität wieder auf Punktepaare einer Translation abgebildet werden.

Schließlich gibt es auch noch den Fall, dass $A''=B''=C''$ ist und $[A'B'C']$ ein Dreieck, dann ist ε (ganz)zweitprojizierend, also eine Faser der Projektion α_2 . Dann ist ε eine erste Hauptebene, umgekehrt ist ε (ganz)erstprojizierend und damit eine zweite Hauptebene.

7.3 Abbildung einer Hyperebene

Im allgemeinen Fall sind weder die Punkte $\{A', \dots, D'\}$ noch die Punkte $\{A'', \dots, D''\}$ der Hyperebene $\Gamma=[ABCD]$ kollinear. Dann sind $\alpha_1|_\Gamma$ und $\alpha_2|_\Gamma$ vom Defekt 1, Γ ist halberst- und halbweitprojizierend. Die Fasern f_1 von $\alpha_1|_\Gamma$ sind untereinander parallele Geraden, haben daher auch parallele Aufrisse, analog sind die Fasern f_2 von $\alpha_2|_\Gamma$ im Grundriss parallel. Durch jeden Punkt $X \in \Gamma$ geht eine erste und eine zweite Faser und somit eine Ebene $\delta_x := [f_1 f_2]$. δ_x enthält sowohl erstprojizierende Geraden, als auch zweitprojizierende, ist also doppeltprojizierend mit $\delta'_x = f'_2, \delta''_x = f''_1$. Die ähnlichen Punktreihen $g'(X')$ und $g''(X'')$ bestimmen eine Ähnlichkeit zwischen Parallelgeradenbüscheln

$$\alpha_\Gamma : U^1(\delta'_x) \rightarrow U^2(\delta''_x).$$

Die Risse δ'_x bzw. δ''_x aller doppeltprojizierender Ebenen δ_x bilden das erste bzw. zweite Ordnerbüschel der Hyperebene (Abb. 7.2). Man muss zwei Fälle unterscheiden:

- $U^1 \neq U^2$: α_Γ ist eine Perspektivität, deren Achse das Bild der Schnittgeraden p von Γ mit der Koinzidenzebene κ ist.
- $U^1 = U^2$: α_Γ lässt die Ferngerade fix, es gibt drei Fälle:
 - α_Γ ist hyperbolisch: Es existiert eine eigentliche Fixgerade.
 - α_Γ ist parabolisch, $\Gamma \cap \kappa = \{\}$, d.h. Γ ist parallel zu κ .
 - α_Γ ist die Identität, Γ enthält die Koinzidenzebene.

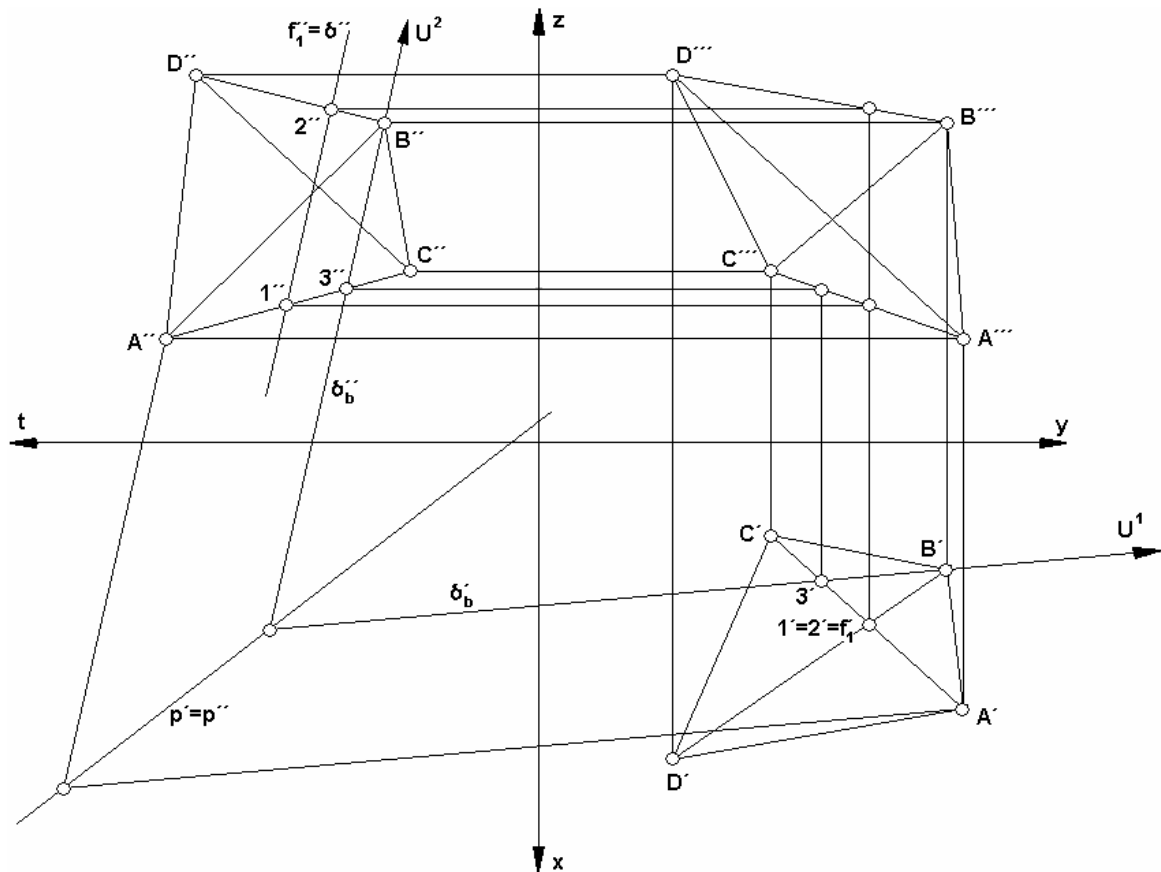


Abb. 7.2 Konstruktion eines Ordnungsbüschels, erstellt mit Euklid DynaGeo

Sind die Punkte $\{A'', \dots, D''\}$ kollinear, so ist Γ parallel zu π_1 und heißt erste Haupthyperebene oder zweitprojizierend, $\{A', \dots, D'\}$ können nicht gleichzeitig kollinear sein. Umgekehrt heißt Γ zweite Haupthyperebene bzw. erstprojizierend.

7.4 Praktische Umsetzung in die Zeichenebene

Beispiel: In einem derartigen linearen Zweibildersystem soll nun der Schnittkörper eines Hyperwürfels mit der Symmetriehyperebene einer seiner Raumdiagonalen ermittelt werden.

Die Ecken des Hyperwürfels seien wie folgt gegeben durch deren Koordinaten:
 $A_1=(0,0,0,0)$, $A_2=(1,0,0,0)$, $A_3=(0,1,0,0)$, $A_4=(0,0,1,0)$, $A_5=(0,0,0,1)$, $A_6=(1,1,0,0)$,
 $A_7=(0,1,1,0)$, $A_8=(0,0,1,1)$, $A_9=(1,0,0,1)$, $A_{10}=(1,0,1,0)$, $A_{11}=(0,1,0,1)$,
 $A_{12}=(0,1,1,1)$, $A_{13}=(1,0,1,1)$, $A_{14}=(1,1,0,1)$, $A_{15}=(1,1,1,0)$, $A_{16}=(1,1,1,1)$.
 Die Raumdiagonale verbinde die Punkte A_1 und A_{16} .

Konstruktionsbeschreibung:

- 1) Angabe des Hyperwürfels im Koordinatensystem x', y', z'', t'' (siehe Abb. 7.3). Aufgrund der Koordinatenangaben fallen jeweils vier Eckpunkte des Hyperwürfels in einem Bildpunkt zusammen, so dass der Hyperwürfel in Grund- und Aufriss jeweils als Quadrat erscheint, deshalb...

- 2) Wahl eines neuen Koordinatensystems $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ in allgemeiner Lage (in der Zeichnung blau). Übertragung des Hyperwürfels ins neue Seitenrisspaar mittels Übertragung der jeweiligen Abstände bezüglich der neuen Koordinatenachsen (siehe Abb. 7.3, 7.4).

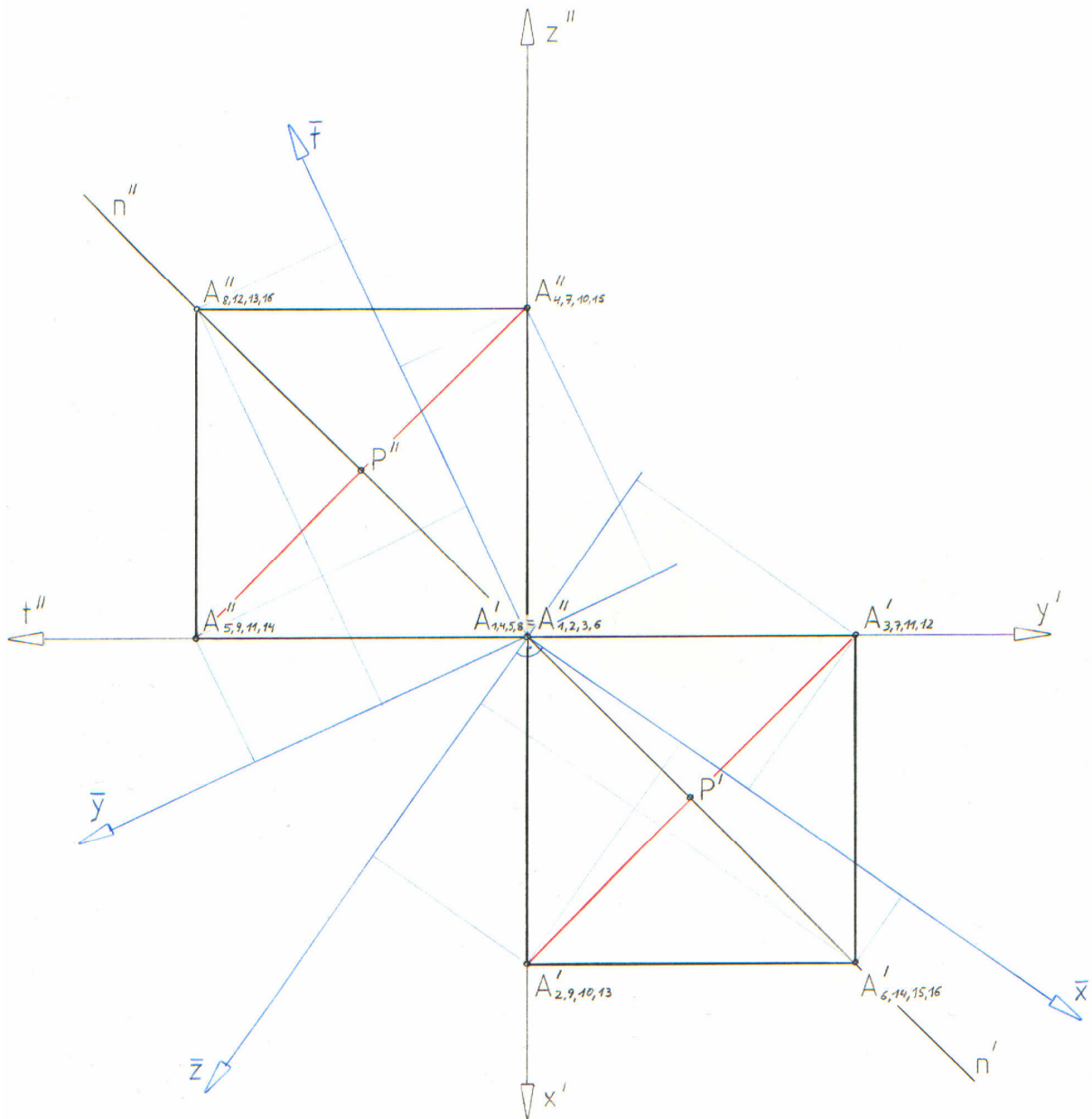


Abb. 7.3 Angabe des Hyperwürfels und Wahl eines neuen Koordinatensystems (gescannte Handzeichnung)

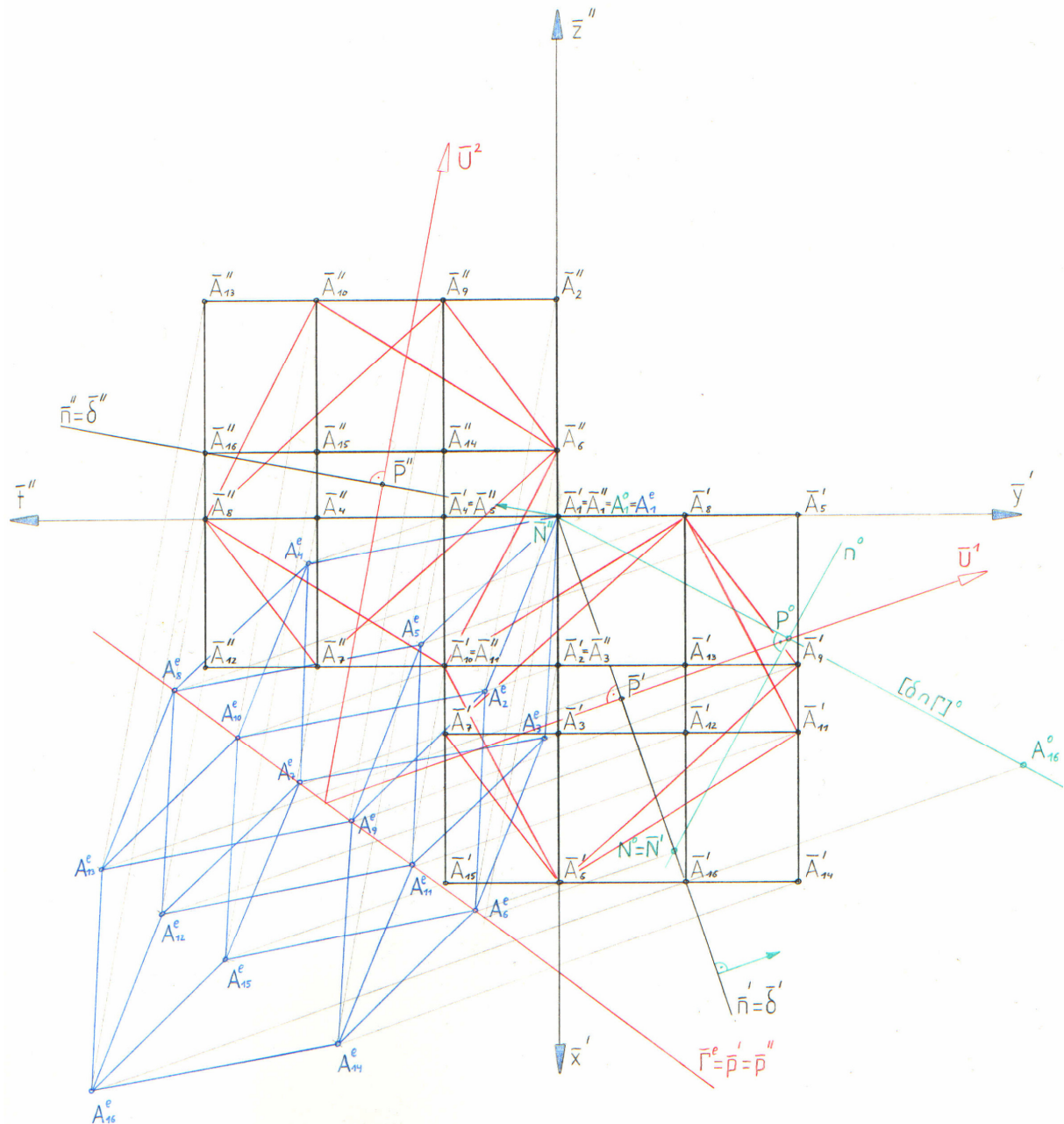


Abb. 7.4 Hyperwürfel im neuen Koordinatensystem, Einschneideriss (gescannte Handzeichnung)

- 3) Erhalte Raumdiagonale n und Halbierungspunkt P von $[A_1 \vee A_{16}]$.
- 4) Konstruktion der Orthogonalen Hyperebene zu n :
Die jeweiligen Ordnerbüschel von Γ stehen normal auf die entsprechenden Risse von n . n' und n'' bestimmen eine doppelprojizierende Ebene δ , in der Umklappung von δ muss also $[\delta \cap \Gamma]$ normal auf n erscheinen (in der Zeichnung grün und mit $^\circ$ bezeichnet). Erhalte die Perspektivitätsachse durch den Schnittpunkt der beiden Ordner durch P und der durch N .
- 5) Konstruiere den Einschneideriß e des Hyperwürfels und erhalte als Schnittpunkte des Hyperwürfels mit der Hyperebene die Punkte $A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}$ und A_{11} .

- 6) Als Schnittkörper entsteht ein Oktaeder mit den Raumdiagonalen $[A_6A_8]$, $[A_7A_9]$ und $[A_{10}A_{11}]$ bzw. den jeweils in Seitenflächen des Hyperwürfels gelegenen Kanten $[A_8A_7]$, $[A_8A_9]$, $[A_8A_{10}]$, $[A_8A_{11}]$, $[A_6A_7]$, $[A_6A_9]$, $[A_6A_{10}]$, $[A_6A_{11}]$, $[A_7A_{10}]$, $[A_{10}A_9]$, $[A_9A_{11}]$ und $[A_{11}A_7]$ (siehe Illustrationsfigur in axonometrischer Ansicht, Hyperwürfel blau, Oktaeder rot, Abb. 7.5).
- 7) Die Raumdiagonale verbindet die Punkte $A_1=(0,0,0,0)$ und $A_{16}=(1,1,1,1)$, ihr Richtungsvektor lautet daher $(1,1,1,1)$ und ihr Halbierungspunkt P hat die Koordinaten $P=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Die auf n totalorthogonale Hyperebene lässt sich daher anschreiben als $\Gamma: x + y + z + t = 2$.

Die Punkte $A_6=(1,1,0,0)$, $A_7=(0,1,1,0)$, $A_8=(0,0,1,1)$, $A_9=(1,0,0,1)$, $A_{10}=(1,0,1,0)$ und $A_{11}=(0,1,0,1)$ erfüllen diese Gleichung und sind die Eckpunkte des Schnittoktaeders.

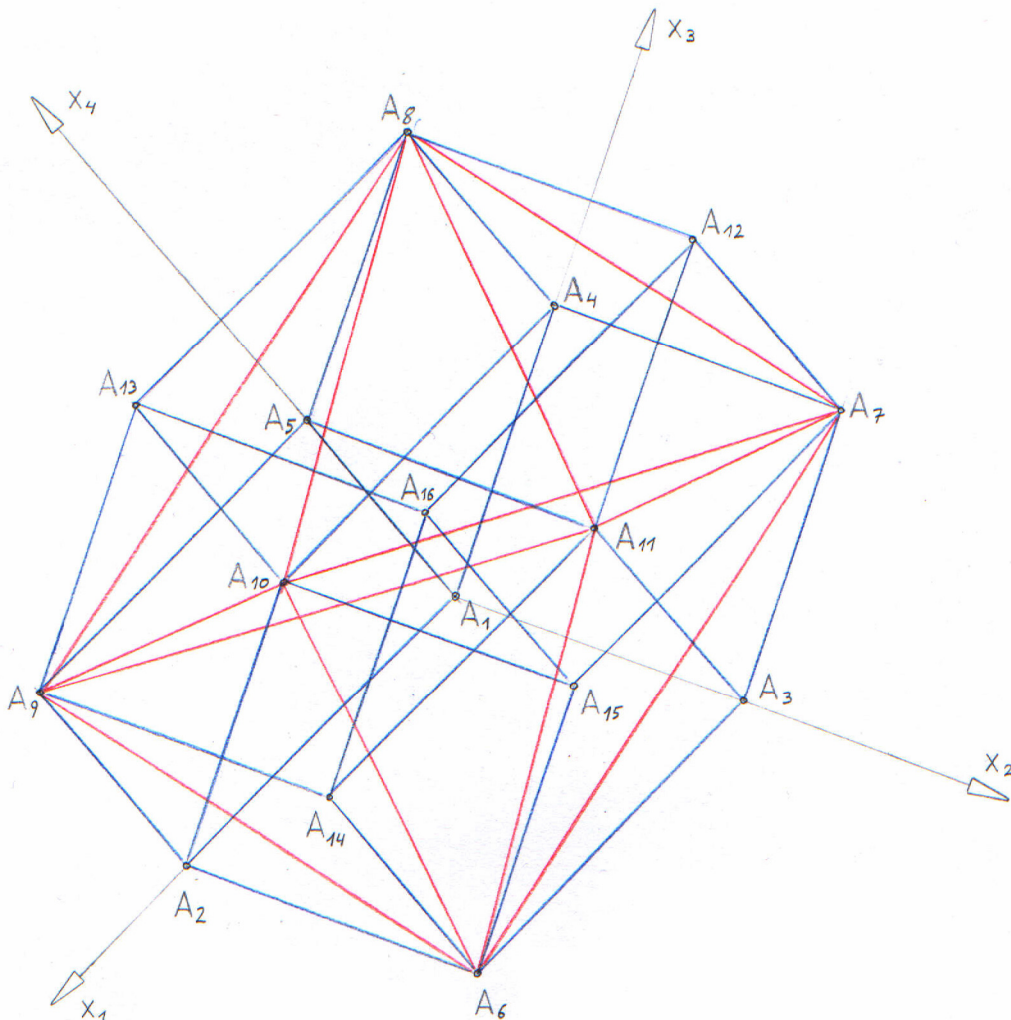


Abb. 7.5 Illustrationsfigur in axonometrischer Ansicht (gescannte Handzeichnung)

8. Hilfen zur Visualisierung

Prinzipiell gibt es zwei Arten von Projektionen, die bei der Abbildung von dreidimensionalen Objekten auf die Ebene Anwendung finden, nämlich die Zentral- und die Parallelprojektion. Bei der Parallelprojektion werden einfach alle drei Raumrichtungen in die Ebene abgebildet. Ein Hexaeder zum Beispiel wird meist als Quadrat, über das ein zweites Quadrat leicht nach oben rechts versetzt ist, und bei dem korrespondierende Ecken miteinander verbunden sind, gezeichnet. In dieser Darstellung lernen Schulkinder auch oft das erste perspektivische Zeichnen von z.B. Häusern.

Auf die gleiche Art und Weise kann man auch vierdimensionale Objekte, wie zum Beispiel den Hyperwürfel aus Kapitel 3 darstellen, wobei sogar die Zusammenhänge innerhalb des Objekts erhalten bleiben. Bei nicht ausschließlich rechtwinkligen Polychora wird die Sache schon etwas schwieriger. Man bedient sich dort also lieber der Zentralprojektion, also der Darstellung durch ein Schlegel-Diagramm, wie es in Kapitel 3 vorgestellt wurde. Auch sie ist aber genau genommen nicht nur eine Zentralprojektion, sondern die Hintereinanderausführung einer Zentral- und einer Parallelprojektion. Bei dieser Darstellung von vierdimensionalen Objekten tut sich unser an das Dreidimensionale gewöhnte Auge jedenfalls leichter, denn die drei „normalen“ Richtungen bleiben erhalten und die vierte hinzukommende wird zu „außen“ - „innen“.

Aber auch hier taucht bei komplexeren Gebilden schnell das Problem auf, dass durch die zusätzliche Projektion in die Bildebene Informationen verloren gehen und man sich nicht mehr gut orientieren kann. Es empfiehlt sich, hier die Hilfe von Computer-Programmen in Anspruch zu nehmen, mit denen solche Objekte bewegt dargestellt werden, um sie dreidimensional begreiflicher zu machen.

Hier einige Links zu solchen Seiten:

- <http://www.ginko.de/user/kremer/karsten/d/proj-3d.htm>
- <http://www.uni-math.gwdg.de/bgr/animations/wuerfel/rotierenderWuerfel.html>
- <http://members.aol.com/jmtsgibbs/draw4d.htm>
- <http://eusebeia.dyndns.org/4d/vis/vis.html>

Im Zuge von Gesprächen mit Arbeitskollegen und Freunden zum Thema vierdimensionale Körper hat sich herausgestellt, dass viele Personen, die wenig Kontakt zu geometrischen Inhalten haben oder durch eine bestimmte Berufswahl eine Schullaufbahn ohne Darstellender Geometrie gewählt haben, sich trotz dreidimensionaler Bilder vierdimensionaler Objekte diese nur schwer bis gar nicht vorstellen können. Deshalb wird hier noch einmal anschaulich versucht, mittels Bildern einen Hyperwürfel rotieren zu lassen. Damit wird besser visualisiert, weshalb seine Seitenräume im Schlegel-Diagramm so aussehen und warum sie so angeordnet sind.

Vorweg eine kurze Bemerkung zu Drehungen im vierdimensionalen Raum: In einer Ebene sucht man sich einen Punkt aus und kann dann um diesen Punkt nach links oder nach rechts drehen. Im Dreidimensionalen legt man zuerst eine Rotationsachse fest und kann dann wieder in zwei verschiedene Richtungen drehen. Im vierdimensionalen Raum muss man eine Ebene auswählen, um die man dann in zwei Richtungen drehen kann.

Die unten dargestellte Sequenz von Bildern zeigt einen dreidimensionalen Würfel, dessen eine Seitenfläche rot ist. Diese rote Fläche ist die kleinste, weil sie vom Betrachter am weitesten entfernt ist. Während der Drehung wird diese rote Seitenfläche zum Trapezoid und liegt zum Schluss auf der linken Seite.

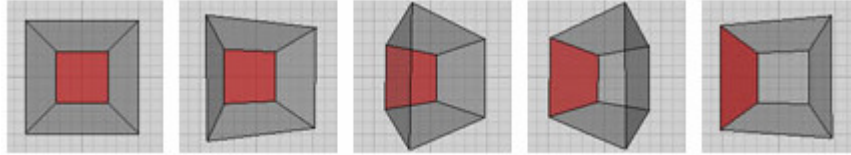


Abb. 8.1 Rotation eines Würfels

Wenn man nun den Hyperwürfel betrachtet und, statt der hintersten Seitenfläche beim Würfel, den roten Seitenraum (der am kleinsten ist, weil er im vierdimensionalen Raum am weitesten vom Betrachter entfernt ist), so wird dieser Seitenraum bei der 4D-Drehung genau so verzerrt und hat am Ende die gestalt eines Pyramidenstumpfes.

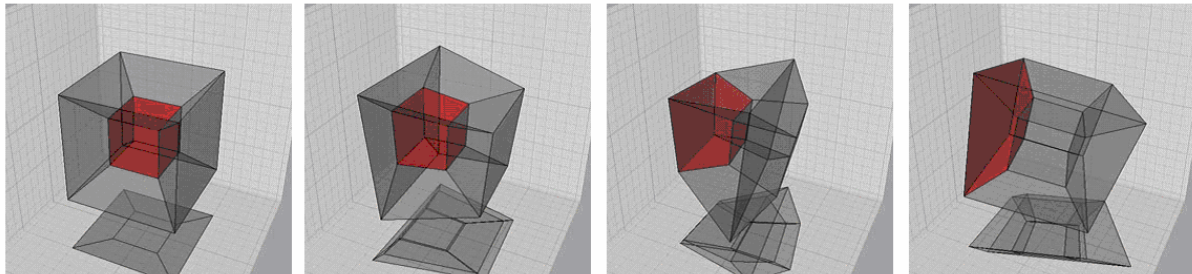


Abb. 8.2 Rotation eines Hyperwürfels

Abschließend möchte ich bemerken, dass ich die Behandlung vierdimensionaler Polytope im Schulunterricht durchaus für möglich halte und hoffe, mit dieser Arbeit eine Anregung dafür gegeben zu haben.

Bildnachweis:

Abb.	Quelle
2.1, 3.6a,b, 3.8, 3.14	http://de.wikipedia.org/wiki/Tesseract
2.2	www.screamscape.com/.../SHREK4D_minilogo.jpg
2.3a,b,c	<i>nach</i> "The fourth dimension simply explained" – Collection of essays, Dover Publications Inc., New York
3.1	http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Plato-raphael.jpg
3.3a,b	http://www.mathematische-basteleien.de/platonisch.htm
3.4	http://en.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Schl%C3%A4fli
3.5	Richard Klein: "Spiele als Zugang zur Polyedergeometrie", Diplomarbeit, TU Wien, 2004 bzw. dessen Referenz
3.7	http://www.ac-noumea.nc/math/amc/polyhedr/Schlegel_.htm
3.9a,b	http://www.mathematische-basteleien.de/hypertetraeder.htm
3.11	http://en.wikipedia.org/wiki/Simplex
Tabelle, Seite 19	http://en.wikipedia.org/wiki/Simplex
3.10, 3.13, 3.17, 3.21	http://www.math.uni-hamburg.de/home/moeller/test7.html
3.18	http://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_K%C3%B6rper#Anzahl_der_platonischen_K.C3.B6rper
3.19	<i>nach</i> http://www.ac-noumea.nc/math/amc/polyhedr/Schlegel_.htm bzw. http://www.math.uni-hamburg.de/home/moeller/test7.html
3.12, 3.15-16, 3.20, 3.22, 3.25-28	Marco Möller: „Vierdimensionale Archimedische Polytope“, Dissertation, Universität Hamburg, 2004
3.23	http://home.inreach.com/rtowle/Polytopes/polytope.html
3.24	http://mathworld.wolfram.com/120-Cell.html
Tabellen, Seiten 34,35	http://www.mathematik.uni-regensburg.de/Goette/sterne/
5.1	http://www.math.uni-hamburg.de/home/moeller/test6.html
6.1, 6.2	Hellmuth Stachel: „Felixible Cross-Polytopes in the Euclidean 4-Space“, Journal for Geometry and Graphics Volume 4 (2000), No. 2, 159-167, ISSN 1433-8157, Heldermann Verlag
8.1, 8.2	http://traipse.com/hypercube/

Quellen:

- [1] http://de.wikipedia.org/wiki/Vierte_Dimension
- [2] <http://de.wikipedia.org/wiki/Raumzeit>
- [3] <http://www.polytope.de>
- [4] <http://de.wikipedia.org/wiki/Tesseract>
- [5] "The fourth dimension simply explained" – Collection of essays, Dover Publications Inc., New York
- [6] http://en.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Schl%C3%A4fli
- [7] <http://www.mathematische-basteleien.de/hypertetraeder.htm>
- [8] Hk. de Vries: „Die vierte Dimension“, 1926, B.G.Teubner Verlag Leipzig und Berlin
- [9] D.M.Y. Sommerville: „The Geometry of N Dimensions“, Dover Publications Inc., New York
- [10] <http://en.wikipedia.org/wiki/Simplex>
- [11] <http://de.wikipedia.org/wiki/Kreuzpolytop>
- [12] H.S.M. Coxeter: „Regular Polytopes“, 1973, Dover Publications Inc., New York, ISBN 0-486-61480-8
- [13] <http://www.science.ca/scientists/scientistprofile.php?pid=5>
- [14] P.H. Schoute: „Mehrdimensionale Geometrie II“, 1905, G.J. Göschen'sche Verlagshandlung Leipzig
- [15] <http://en.wikipedia.org/wiki/24-cell>
- [16] Hellmuth Stachel: „Felixible Cross-Polytopes in the Euclidean 4-Space“, Journal for Geometry and Graphics Volume 4 (2000), No. 2, 159-167, ISSN 1433-8157, Heldermann Verlag
- [17] Marco Möller: „Vierdimensionale Archimedische Polytope“, Dissertation, Universität Hamburg, 2004
- [18] Hellmuth Stachel: „Konstruktive Geometrie mehrdimensionaler Räume“, Vorlesungsskriptum, Wien 2002